

20/82

U. S. T. H. B.

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE ET D'ÉLECTROTECHNIQUE

22A

FILIÈRE D'INGÉNIEUR EN ÉLECTRONIQUE



Sujet :

Techniques de Traitement des Signaux Bruités

PROPOSÉ PAR:

P. SINTES chargé de cours

J.P. GAUTHIER Docteur d'État es Sciences

ETUDIE PAR

Ahmed BOURIDANE

Boualem AOUICI

PROMOTION JUIN 1982

U. S. T. H. B.

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE ET D'ÉLECTROTECHNIQUE

FILIÈRE D'INGÉNIEUR EN ÉLECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

Sujet :

Techniques de Traitement des Signaux Bruités

PROPOSÉ PAR :

P. SINTES chargé de cours

J.P. GAUTHIER Docteur d'État es Sciences

ETUDIE PAR

Ahmed BOURIDANE

Boualem AOUICI

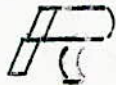
PROMOTION JUIN 1982

F mon père, à ma mère,
Pour tous leurs sacrifices,
A mes frères, à ma soeur,
A tous mes amis.

F hmed.

F la mémoire de mon père,
A ma mère, mon frère et ma soeur,
A ma famille,
A mes amis.

B OUALEM.

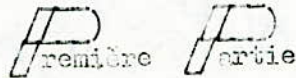


EMERCIEMENTS

/// Nous remercions MM. P. SINTES, chargé de cours à l'ENPA et J.P GAUTHIER, Docteur d'état es-science physiques pour nous avoir, proposé ce sujet, constamment guidé dans notre travail et aidé de leurs conseils.

Nous saisissons aussi cette occasion pour exprimer notre gratitude à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation ainsi qu'à tous ceux qui nous ont aidés dans l'élaboration de ce travail.

INTRODUCTION.....



// Correlation Detection synchrone

Introduction.....1

A : Correlation

- I- Detection d'un signal periodique noyé dans du bruit.....2
 - 1- Principe.....2
 - 2- Augmentation du rapport signal sur bruit.....5
- // Extraction d'un signal periodique noyé dans du bruit.....10
 - 1- Principe.....10
 - 2- Augmentation du rapport signal sur bruit.....15-16
 - 3- Schema et principe de fonctionnement d'un echantillonneur-Intégrateur.....18

B: DETECTION SYNCHRONE

- I. Modulation et demodulation de signaux
 - Faibles : Insuffisances des methodes classiques
 - De detection.....21
- // La detection synchrone.....23
 - 1- La demodulation synchrone.....23
 - 2- La detection synchrone.....24
 - 3- Applications de la detection synchrone.....28

INTRODUCTION.....	33
I- LA METHODE DES VARIABLES D'ETAT.....	35
-1 Notion d'état.....	35
-2 Modèles d'état des systèmes linéaires.....	35
-3 Solution de l'équation d'état.....	37
II- ELEMENTS DE LA THEORIE DE L'ESTIMATION.....	39
1- Définition de l'estimation.....	39
2- Modèle mathématique adopté.....	
2- Estimation de bayes-variance minimale.	
- Maximum a posteriori.....	39
III- LE FILTRE DE KALMAN.....	42
1- Conditions d'applications.....	42
2- Modèle mathématique adopté.....	42
3- Discrétisation du modèle.....	44
4- Le filtre de Kalman discret.....	46
IV- APPLICATION DU FILTRE A DES DONNEES CALCULEES PAR SIMULATION.....	50
1- Mise en oeuvre du filtre de kalman.....	50
2- Méthode utilisée pour la discretisation.....	52
3- Nombre d'opérations requis par le filtre.....	54
V- RESULTATS PRATIQUES OBTENUS :.....	58
1- Essai du sous-programme de discretisation.....	58
2- Estimation de variables d'état 1er exemple.....	58
3- " " " " 2eme exemple.....	60
CONCLUSION.....	69

INTRODUCTION

Dans la théorie de la communication et du contrôle, on s'intéresse en premier lieu à la quantité et à la qualité de l'information. Cette information est en général véhiculée par un signal physique (électrique-électromagnétique...) qui se trouve le plus souvent corrompu par du bruit.




Il convient donc de traiter convenablement ce signal pour en extraire l'information utile. L'application de la théorie des statistiques et des probabilités aux mesures physiques, alliée à la technologie moderne a abouti à des techniques de traitement de signaux bruités qui ne cessent de s'améliorer pour faire face aux exigences modernes.

Le travail qui suit se subdivise en deux parties :

La première partie traite des méthodes de corrélation et de la détection synchrone. On s'intéressera au cas particulier des signaux périodiques faibles et noyés dans du bruit. Il s'agira soit de les détecter (détection de présence) soit de les extraire du bruit (restitution de forme).

La deuxième partie traite du filtrage de Kalman. Cette technique récente (1961) utilisant la représentation d'état des systèmes fait partie de la théorie du filtrage optimal. Le travail effectué ici, consiste en une simulation d'un filtre de Kalman discret sur ordinateur numérique et son application à des données calculées par simulation. Le langage de programmation utilisé est le langage FORTRAN.

 PREMIERE  PARTIE :

 CORRELATION -  DETECTION  SYNCHRONISME

INTRODUCTION

Le bruit est l'environnement naturel de tout signal et il est nécessaire de traiter convenablement ce signal pour l'extraire de ce bruit. En pratique les signaux périodiques sont très utilisés comme véhicules d'informations. C'est ce caractère répétitif de l'information qui est essentiel pour les méthodes de détection et d'extraction des signaux noyés dans le bruit. Parmi ces méthodes, celles utilisant les techniques de corrélation sont très utilisées. Les corrélateurs qui réalisent l'opération de corrélation assurent le traitement des signaux en fonction de la loi de corrélation c'est à dire qu'ils déterminent les propriétés correspondantes des signaux et qu'ils en déduisent leur analogie qui est fonction de leur décalage dans le temps. Ces appareils permettent ainsi de détecter la présence éventuelle de signaux périodiques noyés dans le bruit et parfois même de restituer leur forme.

Le cas particulier de la corrélation d'un signal sinusoïdal et d'un signal de référence à la même fréquence que le signal est utilisé dans de nombreux cas notamment lorsque le signal est très faible et occupe une bande spectrale très faible autour de la fréquence nulle. Ce type de corrélateur appelé détecteur synchrone s'accroche sur le signal répétitif et rejette le bruit ou les signaux interférents.

A: CORRELATION

Dans la totalité des problèmes de traitement d'informations recueillies par des capteurs de mesures, on est obligé de considérer les moyennes temporelles, l'accès aux moyennes d'ensembles étant impossible. De plus, l'invariance des propriétés statistiques par rapport au temps des phénomènes physiques étudiés est intéressante à considérer car elle permet une certaine prédiction portant sur le comportement en "moyenne" de ces phénomènes.

Pour cela on considèrera les processus étudiés stationnaires et ergodiques.

I: Détection d'un signal périodique noyé dans du bruit :

Par détection nous entendons détection de présence. Nous allons voir dans ce qui suit que l'autocorrélation d'un signal périodique bruité de période T_1 permet de détecter son éventuelle présence.

1: Principe:

Soit $p(t)$ un signal périodique de période fondamentale T_1 et de valeur moyenne nulle, et soit $b(t)$ le bruit de valeur moyenne également nulle.

On a donc accès au signal composite:

$$x(t) = p(t) + b(t) \quad (1)$$

La fonction d'autocorrelation de $x(t)$ est :

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [p(t) + b(t)][p(t-\tau) + b(t-\tau)] dt \\ &= C_{pp}(\tau) + C_{bb}(\tau) + C_{pb}(\tau) + C_{bp}(\tau) \end{aligned} \quad (2)$$

Considérons d'abord les fonctions d'intercorrelation :

$$C_{pb}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) b(t-\tau) dt = \overline{p(t) \cdot b(t-\tau)}$$

$$\text{et } C_{bp}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) p(t-\tau) dt = \overline{b(t) \cdot p(t-\tau)}$$

Les moyennes temporelles sont des estimations des moyennes d'ensemble, on a donc :

$$\overline{p(t) \cdot b(t-\tau)} = \bar{\tau} \cdot \bar{\eta} \quad \text{ou}$$

$\bar{\tau}$: désigne l'amplitude de l'ensemble stationnaire $\{p(t)\}$

$\bar{\eta}$: désigne l'amplitude de l'ensemble stationnaire $\{b(t)\}$.

Si on considère que τ et η sont indépendants alors :

$$\bar{\tau} \bar{\eta} = \bar{\tau} \cdot \bar{\eta}$$

Revenons aux moyennes temporelles de τ et η , on trouve :

$$\bar{\tau} = \overline{p(t)} \quad \text{et} \quad \bar{\eta} = \overline{b(t)}$$

Comme $p(t)$ et $b(t)$ ont des moyennes nulles alors :

$$\bar{\tau} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\eta} = 0.$$

On peut donc écrire :

$$C_{pb}(\tau) = \overline{p(t) \cdot b(t-\tau)} = \overline{p(t)} \cdot \overline{b(t-\tau)} = 0$$

$$C_{bp}(\tau) = \overline{b(t) \cdot p(t-\tau)} = \overline{b(t)} \cdot \overline{p(t-\tau)} = 0$$

Ceci étant valable aux erreurs d'estimation près.

L'équation (2) se réduit donc à 2 termes à savoir :

$$C_{xx}(\tau) = C_{pp}(\tau) + C_{bb}(\tau)$$

Or $C_{bb}(\tau)$ tend vers zéro quand τ tend vers l'infini.

En fait $C_{bb}(\tau)$ s'annule pratiquement pour une valeur assez grande de τ notée τ_1 . Il reste donc :

$$\text{pour } |\tau| > \tau_1, \quad C_{xx}(\tau) = C_{pp}(\tau)$$

Mais à cause de la durée d'intégration nécessairement finie, les expressions des fonctions d'autocorrelation et d'inter-correlation mesurées ne sont pas rigoureuses, on aura alors :

$$C_{xx}(\tau) = C_{pp}(\tau) + E(\tau)$$

où :

$E(\tau)$ est une erreur d'autant plus faible que T est grande.

On sait qu'un signal périodique de période T_1 est représenté au moyen de sa série de Fourier tel que :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t) \quad , \text{ avec } f_1 = \frac{1}{T_1}$$

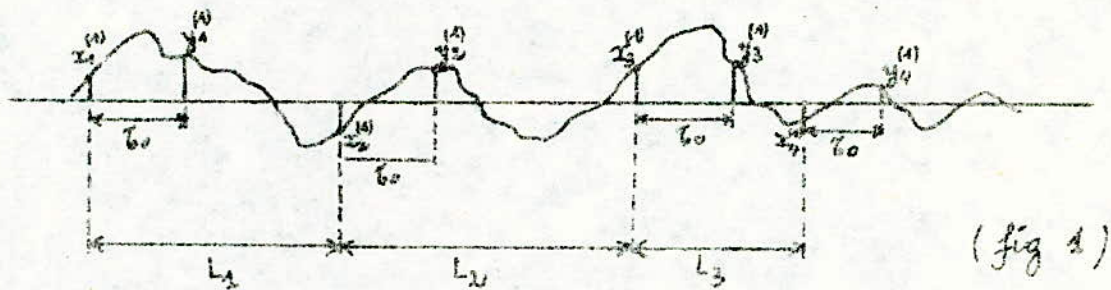
La fonction d'autocorrelation est donc :

$$C_{pp}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos 2\pi n f_1 \tau$$

C'est une fonction de même période que le signal $p(t)$. La méthode d'autocorrelation en décelant la présence de périodicité permet donc de détecter la présence d'un signal utilisé noyé dans un bruit puisqu'il est le seul à pouvoir être périodique. La période détectée est justement celle du signal utile.

2: Augmentation du rapport Signal sur bruit:

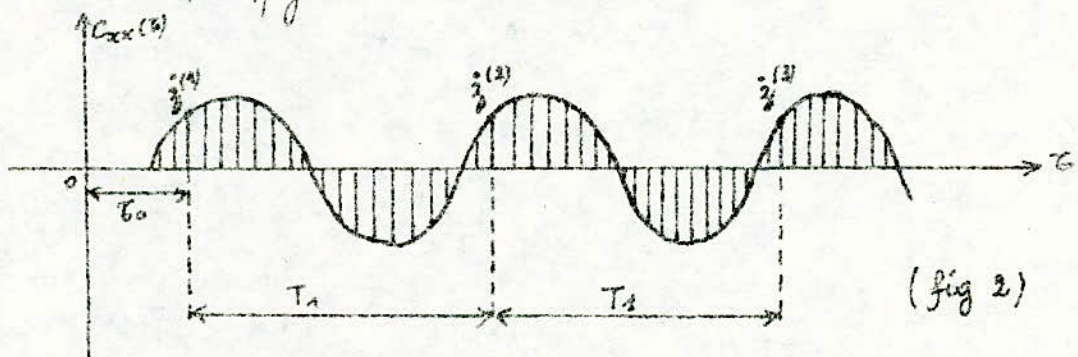
Lors de la mesure de $C_{xx}(\tau) = C_{pp}(\tau) + \epsilon(\tau)$, le signal qui se présente à l'entrée du corrélateur est: $x(t) = p(t) + b(t)$



Le corrélateur prélève des échantillons $x_1^{(1)}, y_1^{(1)}$; $x_2^{(1)}, y_2^{(1)}$; ...; $x_n^{(1)}, y_n^{(1)}$ de $x(t)$ à des intervalles L_1, L_2, \dots, L_n que l'on supposera distribués aléatoirement (fig 1) et détermine ainsi un point $\hat{z}_\tau^{(1)}$ de la fonction d'autocorrélation:

$$\hat{z}_\tau^{(1)} = \frac{1}{n} \left(x_1^{(1)} y_1^{(1)} + x_2^{(1)} y_2^{(1)} + \dots + x_n^{(1)} y_n^{(1)} \right) \text{ pour } \tau = \tau_0$$

La procédure répétée pour différentes valeurs de τ donne la courbe de la figure 2.



Comme $x(t) = p(t) + b(t)$; $\hat{z}_\tau^{(1)}$ nous donne donc la grandeur échantillonnée:

$$s(t, \tau_0) = [p(t) + b(t)][p(t - \tau_0) + b(t - \tau_0)] \quad (3)$$

En répétant l'expérience avec des portions différentes de la fonction échantillonnée sur un grand nombre de portions, on obtient d'autres valeurs de $s(t, \tau_0)$ dont la moyenne n'est autre que la fonction d'autocorrelation de $x(t)$ à $\tau = \tau_0$ qui est égale, d'après ce qui précède, à la fonction d'autocorrelation du signal $p(t)$.

$$\overline{s(t, \tau_0)} = C_{xx}(\tau_0) = C_{pp}(\tau_0) \quad \text{aux erreurs d'estimation près.}$$

En fait, au lieu de considérer des portions différentes et le même temps τ_0 il est plus pratique de porter l'expérience sur différentes valeurs de τ telle que :

$\tau = \tau_0 + kT_1$; $k = 1, 2, \dots$, où T_1 est la période de $p(t)$, ce qui donne donc :

$$s(t, \tau)_{\text{moy}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s(t, \tau_0 + kT_1)$$

Pour mieux comprendre cette procédure, considérons sur la figure (2) le point $\hat{z}^{(2)}$ donné par :

$$\hat{z}^{(2)} = \frac{1}{n} (x_1^{(2)} y_1^{(2)} + x_2^{(2)} y_2^{(2)} + \dots + x_n^{(2)} y_n^{(2)})$$

Ce point correspond à la grandeur échantillonnée :

$$s(t, \tau_0 + T_1) = [p(t) + b(t)][p(t - \tau_0 - T_1) + b(t - \tau_0 - T_1)] \quad (4)$$

$$\text{Or } p(t - \tau_0) = p(t - \tau_0 - T_1)$$

En outre le retard additionnel T_1 sur $b(t)$ n'affecte pas la valeur moyenne et la valeur moyenne quadratique de l'expression (3).

On rappelle aussi que t_0 est suffisamment grand pour assurer l'indépendance de $b(t)$ et $b(t-t_0)$, donc a fortiori un délai supplémentaire T_1 n'affecte pas cette indépendance. En d'autres termes les variances des expressions (3) et (4) sont les mêmes.

Par un raisonnement similaire les points $\xi_0^{(3)}, \xi_0^{(4)}, \dots$ décalés l'un de l'autre d'une période donnent des grandeurs

$s(t, t_0+2T_1), s(t, t_0+3T_1), \dots$ ayant la même variance.

On peut donc calculer la variance de ces grandeurs en calculant celle de l'expression (3).

Comme illustration, considérons le cas où $p(t)$ est un signal sinusoïdal :

$$p(t) = E_m \sin(\omega_1 t + \theta) \text{ de valeur efficace : } E_2 = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

Soit σ_b^2 la variance du bruit :

$$\sigma_b^2 = \overline{b^2(t)} - \overline{b(t)}^2 = \overline{b^2(t)} \quad \text{car } \overline{b(t)} = 0$$

Désignons par ξ la variable aléatoire résultat de la mesure de la fonction d'autocorrélation $C_{xz}(\tau)$ pour $t = t_0 + kT_1$ avec $k=1, 2, \dots$

Puisque l'on prend la moyenne, la variance résultante de

ξ est : $\sigma_\xi^2 = \frac{1}{n} \sigma_s^2$ où σ_s^2 est la variance de $s(t, t_0)$ d'où :

$$\sigma_s^2 = \overline{s^2(t, t_0)} - \overline{s(t, t_0)}^2$$

$$\text{or : } \overline{s(t, t_0)} = C_{pp}(T_0) = E^2 \cos \omega_1 T_0$$

Calculons $\overline{s^2(t, t_0)}$:

$$\overline{s^2(t, t_0)} = \overline{[p(t) + b(t)][p(t-t_0) + b(t-t_0)]}$$

Le membre de droite se décompose en une somme de 9 termes :

$$A = \overline{p^2(t) p^2(t-t_0)}$$

$$B = \overline{p^2(t) b^2(t-t_0)}$$

$$C = \overline{b^2(t) p^2(t-t_0)}$$

$$D = \overline{b^2(t) b^2(t-t_0)}$$

$$E = \overline{2 p(t-t_0) p^2(t) b(t-t_0)}$$

$$F = \overline{2 p(t-t_0) b(t-t_0) b^2(t)}$$

$$G = \overline{2 p(t) b(t) p^2(t-t_0)}$$

$$H = \overline{2 p(t) b^2(t-t_0) b(t)}$$

$$I = \overline{4 p(t) p(t-t_0) b(t) b(t-t_0)}$$

Calculons ces termes:

$$A = \overline{p^2(t) p^2(t-t_0)} = \frac{1}{T} \int_0^T 2E_e^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta) \cdot 2E_e^2 \cos^2[\omega_1(t-t_0) + \theta] dt$$

$$A = E_e^4 \cos^2 \omega_1 T + \frac{E_e^4}{2}$$

$B = \overline{p^2(t) b^2(t-t_0)} = \overline{p^2(t)} \cdot \overline{b^2(t-t_0)} = E_e^2 \sigma_b^2$ (car $p(t)$ et $b(t)$ sont indépendants).

$C = E_e^2 \sigma_b^2$ (même cause que pour B).

$D = \overline{b^2(t) b^2(t-t_0)}$, t_0 étant supérieure à T , $b(t)$ et $b(t-t_0)$ ne sont pas corrélés de sorte que:

$$D = \overline{b^2(t) b^2(t-t_0)} = \overline{b^2(t)} \cdot \overline{b^2(t-t_0)} = \sigma_b^2 \cdot \sigma_b^2 = \sigma_b^4$$

Les termes E, F, G, H et I sont nuls. Prenons par exemple E :

$$E = \overline{2 p(t-t_0) p^2(t) b(t-t_0)} = \overline{2 p(t-t_0) p^2(t)} \cdot \overline{b(t-t_0)}$$

$$\text{or } \overline{b(t-t_0)} = 0 \quad \text{donc on a bien } E = 0$$

Un raisonnement analogue conduit au résultat pour F, G, H, I .

$$\text{Donc } \overline{s^2(t, t_0)} = E_e^4 \cos^2 \omega_1 T + \frac{E_e^4}{2} + 2E_e^2 \sigma_b^2 + \sigma_b^4$$

$$\text{d'où } \sigma_s^2 = \overline{s^2(t, t_0)} - \overline{s(t, t_0)}^2 = \frac{E_e^4}{2} + 2E_e^2 \sigma_b^2 + \sigma_b^4$$

$$\text{et } \sigma_s^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{E_e^4}{2} + 2E_e^2 \sigma_b^2 + \sigma_b^4 \right)$$

Cette quantité nous renseigne sur l'erreur faite par le corrélateur lors de la mesure de $C_{xx}(\tau)$ en considérant un nombre forcément fini d'échantillons. On voit, en effet, que si :

$$n \rightarrow \infty \quad \text{alors} \quad \sigma_f^2 = 0$$

On peut donc considérer ~~que~~ cette imperfection à la sortie du corrélateur lors de la mesure de $C_{xx}(\tau)$ comme étant du bruit. La puissance du bruit en sortie est donc :

$$B_s = \sigma_f^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{E_e^4}{2} + 2E_e^2\sigma_b^2 + \sigma_b^4 \right)$$

La puissance idéale en sortie est :

$$S_s = \frac{E_e^4}{2}$$

D'où le rapport signal sur bruit en sortie :

$$R_{sa} = \frac{\frac{E_e^4}{2} n}{\frac{E_e^4}{2} + 2E_e^2\sigma_b^2 + \sigma_b^4} = \frac{n}{1 + 4 \frac{\sigma_b^2}{E_e^2} + 2 \frac{\sigma_b^4}{E_e^4}}$$

Désignons par : $R_e = \frac{E_e^2}{\sigma_b^2}$ le rapport signal sur bruit à l'entrée,

d'où :

$$R_{sa} = \frac{n}{1 + 4 \frac{1}{R_e} + 2 \frac{1}{R_e^2}} \quad \text{ou}$$

$$R_{sa}(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{n}{1 + 4 \frac{1}{R_e} + 2 \frac{1}{R_e^2}}$$

La figure (3) donne la valeur de $R_{sa}(\text{dB})$ en fonction de n pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit à l'entrée du corrélateur.

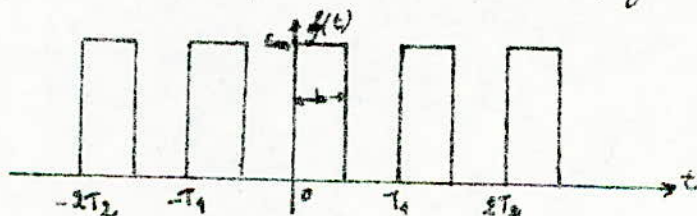
II: Extraction d'un signal périodique noyé dans du bruit:

Dans le cas précédent il s'agissait de détecter la présence éventuelle d'un signal périodique noyé dans du bruit.

Nous allons voir dans ce qui suit que si l'on connaît la période de ce signal (déterminée par autocorrélation par exemple), il est possible de l'extraire c'est à dire de restituer sa forme en l'intercorrélant avec un signal périodique de même période. On examinera le cas où le signal auxiliaire est une fonction "peigne"

1- Principe:

Considérons le signal périodique de la figure (4):



Le spectre complexe d'une telle fonction est:

$$F(n\omega) = \frac{1}{T_1} \int_0^b E_m e^{-jn\omega t} dt = \frac{E_m b}{T_1} \left(\frac{\sin n\pi b/T_1}{n\pi b/T_1} \right) e^{-jn\omega b/2} \quad (5)$$

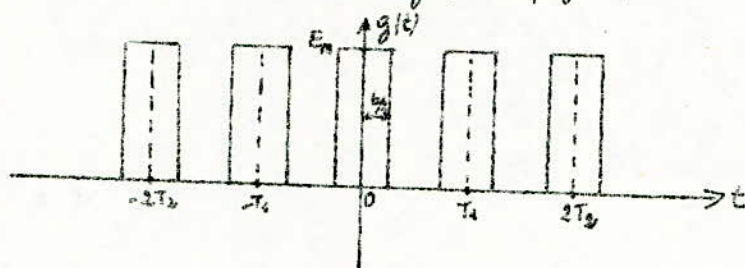
$f(t)$ étant périodique, s'écrit dans le cas général sous la forme:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega t} \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{+T_1/2} f(\tau) e^{-jn\omega \tau} d\tau$$

ou en changeant l'ordre d'intégration-sommation:

$$f(t) = \int_{-T_1/2}^{+T_1/2} f(\tau) d\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1} e^{jn\omega(t-\tau)} \quad (6)$$

Supposons que l'on fasse subir à $f(t)$ un décalage vers la gauche d'une quantité $b/2$, le résultat est une autre fonction que l'on notera $g(t)$ (fig 5)



fig(5)

Le spectre de $g(t)$ s'écrit alors:

$$G(n\omega) = \frac{E_m \cdot b}{T_1} \left(\frac{\sin n\pi \frac{b}{T_1}}{n\pi \frac{b}{T_1}} \right)$$

Car: si $f(t) \Rightarrow F(n\omega)$

alors $f(t+\tau) \Rightarrow F(n\omega) e^{+jn\omega\tau}$

Si l'on suppose que chaque impulsion rectangulaire garde une aire constante et unitaire quand la largeur, b , devient infiniment petite, la fonction $g(t)$ ne sera autre que la fonction peigne $\mathcal{U}_{T_1}(t)$ (i.e. fonction périodique d'impulsions unités).

Donc si $E_m b = 1$ pour tout b

$$\lim_{b \rightarrow 0} g(t) = \mathcal{U}_{T_1}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{b \rightarrow 0} G(n\omega) = \frac{E_m \cdot b}{T_1} = \frac{1}{T_1}$$

or: $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\omega) e^{jn\omega t}$; à la limite :

$$\mathcal{U}_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1} e^{jn\omega t} \quad (7)$$

En comparant les expressions (6) et (7) on identifie la sommation dans l'expression (6) comme étant la fonction $\mathcal{U}_{T_1}(t-\tau)$.

Par substitution dans l'expression (6) on obtient:

$$f(t) = \int_{-T_1/2}^{+T_1/2} f(\tau) \omega_{T_1}(t-\tau) d\tau$$

Au facteur $\frac{1}{T_1}$ près, ceci est une intégrale de convolution, et qui exprime le fait que la convolution d'une fonction périodique donnée, avec une fonction peigne de même période laisse la fonction inchangée.

$$\text{On a donc: } \frac{1}{T_1} f(t) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{+T_1/2} f(\tau) \omega_{T_1}(t-\tau) d\tau \quad (8)$$

Comme la fonction $\omega_{T_1}(t)$ est paire, la fonction d'intercorrélation $C_{fw}(t)$ est la même que la fonction de convolution

$$\text{d'où } \frac{1}{T_1} f(t) = C_{fw}(-t) = C_{wf}(t)$$

Comme $f_{T_1}(t)$ et $\omega_{T_1}(t)$ sont des fonctions périodiques de même période T_1 , on peut écrire l'équation (8) sous forme d'une moyenne sur un intervalle infini:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} f(t) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{+T_1/2} f(\tau) \omega_{T_1}(\tau-t) d\tau \quad \text{car } \omega_{T_1}(t) \text{ est paire} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) \omega_{T_1}(\tau-t) d\tau \end{aligned}$$

En interchangeant les variables t et τ on obtient:

$$\frac{1}{T_1} f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \omega_{T_1}(t-\tau) dt$$

qui est une forme plus familière.

Soit maintenant un signal bruité : $x(t) = p(t) + b(t)$

avec: $p(t)$: signal périodique de période T_1 .

$b(t)$: bruit aléatoire

on a alors:

$$\begin{aligned} C_{xw}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [p(t) + b(t)] \psi_{T_1}(t - \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \psi_{T_1}(t - \tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) \psi_{T_1}(t - \tau) dt \end{aligned}$$

Suit d'après les résultats précédents:

$$C_{xw}(\tau) = \frac{1}{T_1} p(\tau) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) \psi_{T_1}(t - \tau) dt \quad (9)$$

Montrons sommairement que le second terme du second membre est nul.

Pour cela considérons une impulsion particulière à $t=0$, les autres impulsions étant nulles; $\psi_{T_1}(t - \tau)$ se réduit alors à $\psi(t - \tau) = \delta(t - \tau)$.

soit l'intégrale:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T b(t) \delta(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T b(t) \delta(\tau - t) dt \quad \text{car } \delta(t) \text{ est pair}$$

On reconnaît la convolution de $b(t)$ et $\delta(t)$ qui laisse $b(t)$ inchangé d'où:

$$b(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T b(t) \delta(t - \tau) dt$$

On voit que l'expression: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) \psi_{T_1}(t - \tau) dt$ est la moyenne d'une série infinie de valeurs de $b(t)$ prises à des intervalles de temps T_1 ; en d'autres termes c'est le nombre de valeurs de $b(t)$ par période T_1 .

On peut donc l'écrire sous la forme suivante:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) \omega_{T_1}(t-\tau) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^N b(\tau + kT_1)}{(N+1)T_1} \quad (10)$$

Etant donné que la moyenne de $b(t)$ est considérée nulle et que $b(t)$ est supposé ne comportant aucune composante périodique, l'expression (10) est nécessairement nulle pour toute valeur de τ .

donc:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) \omega_{T_1}(t-\tau) dt = 0$$

On aboutit donc au résultat :

$$C_{xw}(\tau) = \frac{1}{T_1} p(\tau) \quad (11)$$

En fait lors de la mesure de fonctions de corrélation par les systèmes physiques réels, le calcul porte toujours sur une durée d'intégration finie. De ce fait les relations (9) et (10) ne sont que des estimations des valeurs théoriques. Par conséquent le résultat final (11) n'est vrai qu'aux erreurs d'estimation près.

De plus l'expression (11) n'est rigoureusement valable que si on intègre sur un nombre entier de périodes T_1 .

Dans le cas contraire on pose:

M: partie entière de T/T_1 et (11) devient:

$$C_{xw}(\tau) = \frac{M}{T} p(\tau) \quad (11 \text{ bis})$$

T: durée d'intégration

En termes pratiques, ce résultat signifie que l'on peut restituer la forme d'un signal noyé dans du bruit en l'intercorrelant avec des impulsions périodiques très étroites générées localement. Physiquement cette opération équivaut à prendre des échantillons du signal à des intervalles réguliers et en faire la moyenne (échantillonneur-moyenneur)

2. Augmentation du rapport signal sur bruit:

De la même manière que pour l'autocorrélation, désignons par \bar{z} la variable aléatoire résultat de la mesure de la fonction d'intercorrélation échantillonnée

$C_{xw}(\tau)$ pour $\tau = \tau_0 + kT_1$, $k=1, 2, 3, \dots$

Lorsque l'on considère la variance des grandeurs échantillonnées $C_{xw}(\tau_0 + kT_1)$; un point important à noter est que les échantillons de $x(t)$ sont pris à des intervalles périodiques de période T_1 et que la fonction d'intercorrélation échantillonnée donne le signal $p(t)$ lui-même.

Il s'en suit que la variance de la composante périodique ne contribue nullement dans la variance de la grandeur échantillonnée. Par conséquent on considèrera uniquement la variance du bruit.

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{1}{n} \sigma_s^2 = \frac{1}{n} \sigma_b^2$$

Dans le cas où $p(t)$ est de la forme: $p(t) = E_m \sin(\omega_s t + \theta)$

La puissance idéale en sortie du corrélateur est la puissance

du signal lui-même soit : $S_3 = E^2$ avec $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$

La puissance du bruit en sortie est :

$$B_s = \sigma_s^2 = \frac{1}{n} \sigma_b^2$$

d'où le rapport signal sur bruit :

$$R_{si} = \frac{n E^2}{\sigma_b^2}$$

Désignons par R_e le rapport signal sur bruit avant intercorrélation soit :

$$R_e = \frac{E^2}{\sigma_b^2}$$

On en déduit :

$$R_{si} = n R_e \quad \text{ou} \quad R_{si}(\text{dB}) = 10 \log_{10} n R_e$$

d'où le gain G :

$$G = \frac{R_{si}}{R_e} = n \quad \text{ou} \quad G(\text{dB}) = 10 \log_{10} n$$

La figure (6) donne la valeur de $R_{si}(\text{dB})$ en fonction de n pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit à l'entrée :

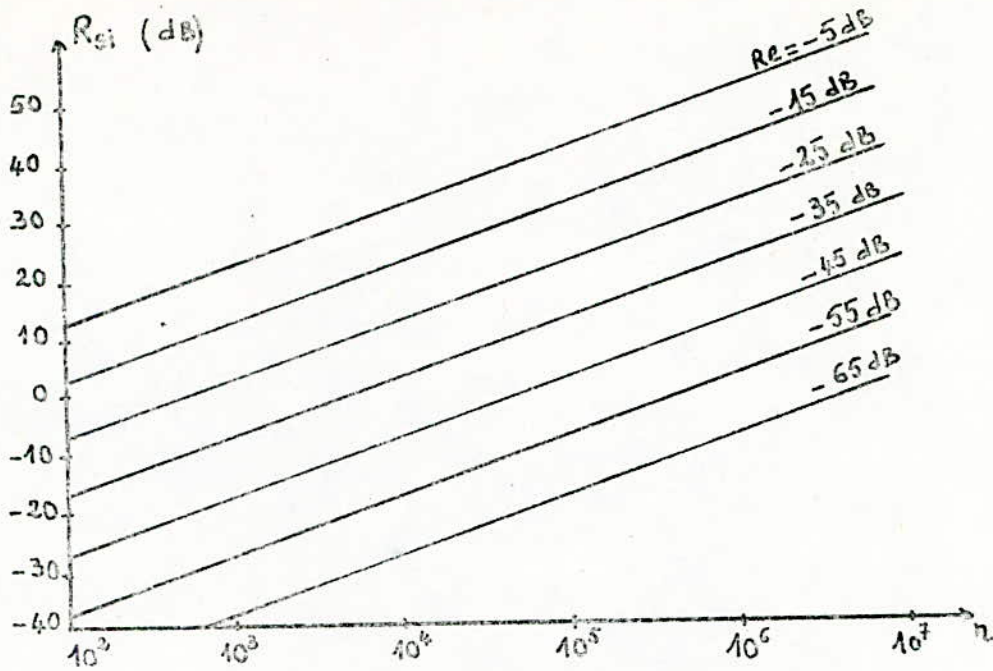


Figure (6).

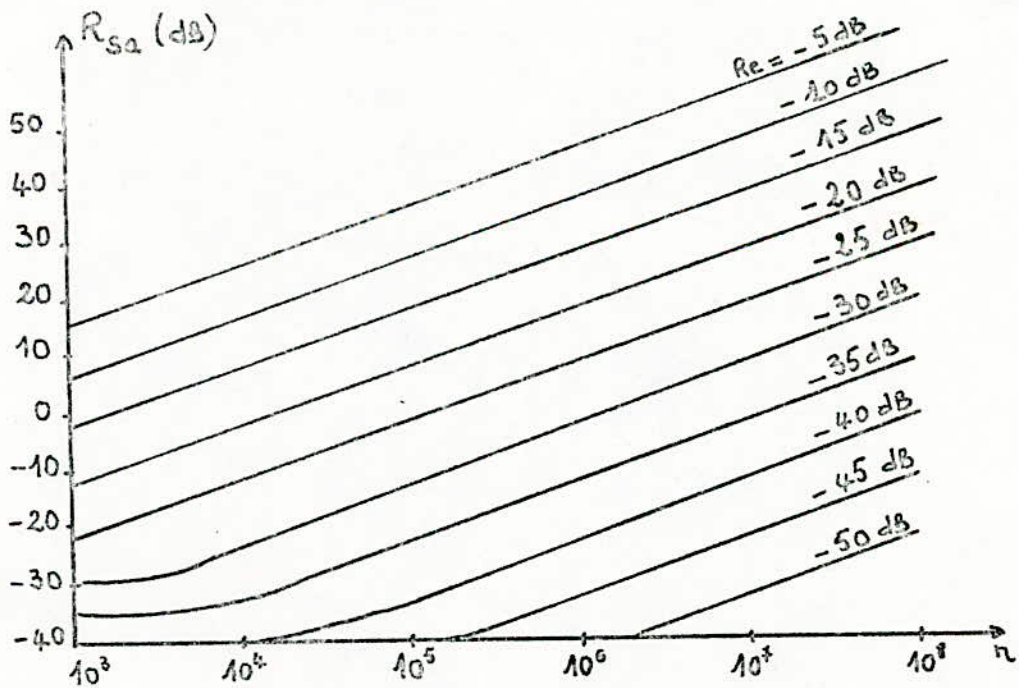


Figure (3).

3: schéma et principe de fonctionnement d'un échantillonneur-intégrateur:

Le type d'appareil destiné à l'extraction des signaux répétitifs noyés dans le bruit pour lesquels on dispose d'impulsions rigoureusement synchrones est couramment appelé Échantillonneur-intégrateur. La figure (7.1) reproduit le schéma de principe d'un échantillonneur-intégrateur mono-canal fonctionnant selon la méthode dite du BOX-CAR. L'appareil décrit ici se subdivise en deux parties:

a) le module échantillonneur-intégrateur:

Il comprend essentiellement:

- une porte unique d'échantillonnage commandée par des tops de synchronisation et qui est progressivement déplacée pour explorer la totalité d'une période du signal répétitif.
- Un intégrateur (cellule RC réglable) réalisant l'opération de moyennage.
- un ampli d'entrée à très large bande et un filtre pass-bas pour éviter une éventuelle saturation par les composants aux fréquences très élevées du bruit.

b) le module générateur:

C'est un générateur synchronisable d'impulsions de durée constante retardées linéairement par rapport à un signal de déclenchement et ce grâce à un générateur de balayage.

Deux modes de déclenchement sont possibles:

interne: le générateur délivre des impulsions de stimulation au phénomène étudié.

externe: le générateur reçoit des impulsions de commande produites par l'expérience.

Le mécanisme de l'extraction est explicité par la fig (7-2): chacune des périodes du signal répétitif est échantillonnée synchroniquement durant un temps très court par rapport à la durée de la période, et la valeur de l'échantillonnage est intégrée. On obtient ainsi en sortie une réplique en temps équivalent (τ) du signal extrait du bruit:

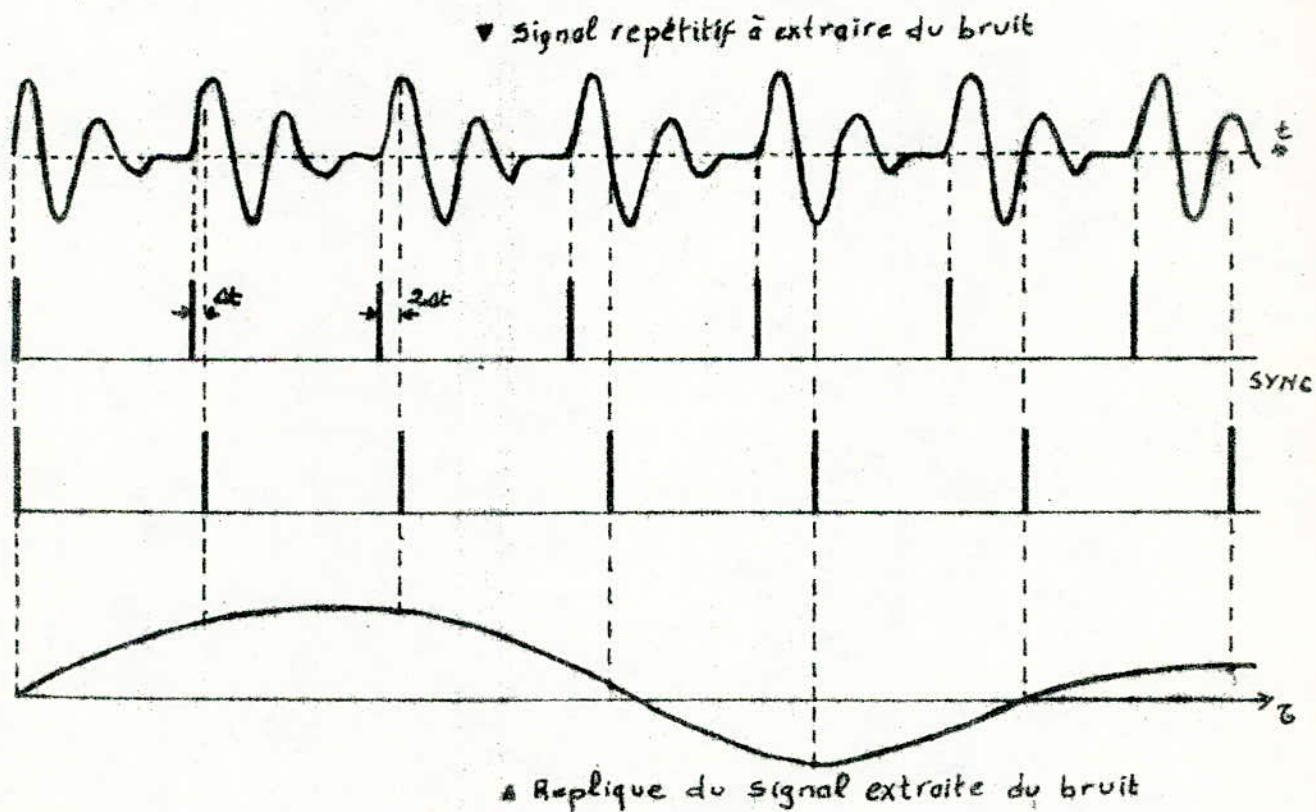
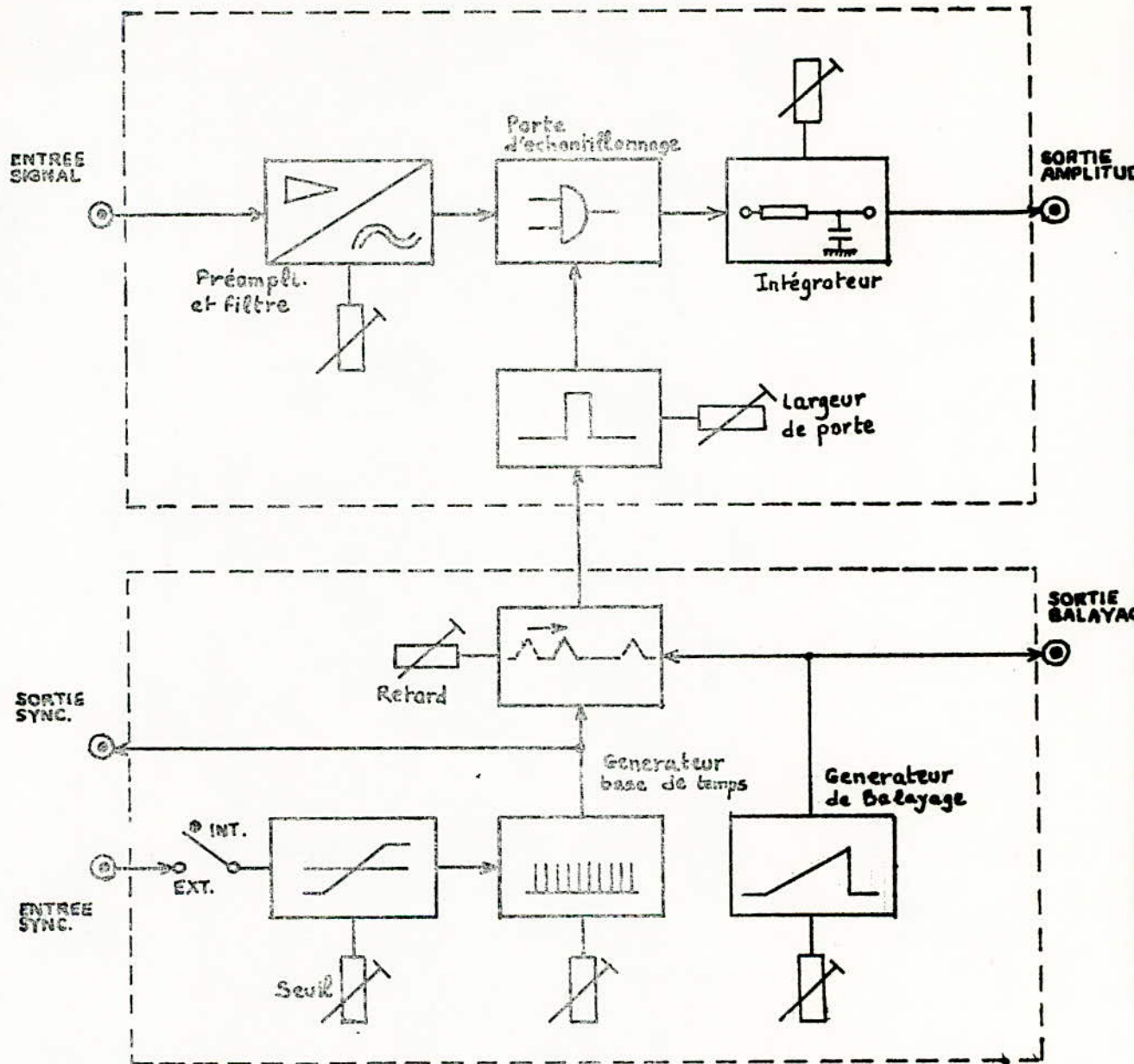


Figure: 7.2



FIG(7-1): SCHEMA DE PRINCIPE D'UN
 ECHANTILLONNEUR-INTEGRATEUR
 (Méthode du BOX-CAR)

B: LA DETECTION SYNCHRONE

I: Modulation et démodulation de signaux faibles: Insuffisances des méthodes classiques de détection:

Avant d'aborder l'étude de la détection synchrone, nous allons situer son domaine d'utilisation notamment les classes de signaux traités par cette méthode. Parmi tous les signaux utilisés comme véhicules d'information continue, ceux à spectre limité et ceux à caractère périodique sont d'un emploi très fréquent. Il est, en effet, fort courant d'observer un phénomène en le faisant varier périodiquement ou en modulant un des paramètres dont il dépend, et en traduisant ensuite par des capteurs linéaires appropriés sous forme de tension électrique les variations de ce phénomène. Une classe importante est celle des signaux à variation lente où la vitesse nominale des variations en fonction du temps est fixée.

En général ces signaux sont faibles et par conséquent peuvent être noyés dans le bruit qui prend inévitablement naissance dans tout système réalisable (bruits thermiques, bruits créatiques, environnement). Dans de nombreux cas expérimentaux ce signal est modulé en amplitude afin justement de transposer la bande d'information dans une bande spectrale à faible bruit. Ce signal modulé est traité tel quel tant qu'il est susceptible d'être détecté par les bruits de la chaîne de transmission. Ensuite, une fois amplifié jusqu'à un niveau suffisant,

il faut le restituer par l'opération inverse de la modulation : la détection.

Le procédé classique de détection connu, utilisant un élément non linéaire (diode) restitue correctement le signal si la caractéristique (I, V) de la diode est approximativement rectiligne. Mais pour des signaux faibles cette approximation est fautive. Il s'en suit que la détection est quadratique et par conséquent le signal de sortie sera déformé et de plus la puissance de bruit en sortie sera proportionnelle à la puissance de bruit transmise avant le filtrage.

En effet supposons qu'à l'entrée du détecteur se présente le signal bruité : $x(t) = s(t) + b(t)$; $s(t)$ et $b(t)$ ayant respectivement pour spectres $s(f)$ et $b(f)$ et occupant une bande spectrale assez étroite autour de la fréquence de modulation f_0 .

En sortie du détecteur on aura :

$$[s(t) + b(t)]^2 = s^2(t) + b^2(t) + 2s(t) \cdot b(t)$$

Le spectre correspondant est le produit de convolution :

$$[s(f) + b(f)] * [s(f) + b(f)] = s(f) * s(f) + b(f) * b(f) + 2b(f) * s(f)$$

Ces différents termes sont répartis autour de $2f_0$, 0 et $-2f_0$. Le filtre pass-bas qui suit le détecteur élimine les deux bandes HF mais au voisinage de la fréquence nulle, on aura pour termes de bruit :

$$[b(f) * b(f) + 2b(f) * s(f)]_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} b^2(f) df + \int_{-\infty}^{+\infty} 2b(f) s(f) df$$

Avec un filtrage pass-bas aussi sélectif que l'on voudra, on trouvera toujours irrémédiablement superposée au signal BF toute

la puissance de bruit qui accompagnait le signal avant détection. Pour éviter une perte en rapport $(S/B)_s$, il faut donc effectuer un filtrage très sélectif autour de la fréquence f_0 , mais du point de vue technologique cette opération est très difficile à réaliser car elle nécessite notamment une bonne stabilité de la fréquence de modulation.

Afin de détecter convenablement un signal faible noyé dans le bruit il faut donc d'une part réaliser une détection linéaire, et d'autre part assurer une sélectivité pratiquement illimitée même si la fréquence de modulation est sujette à des fluctuations.

La détection synchrone est une technique qui satisfait justement à ces deux contraintes comme on va le voir.

II: La détection synchrone:

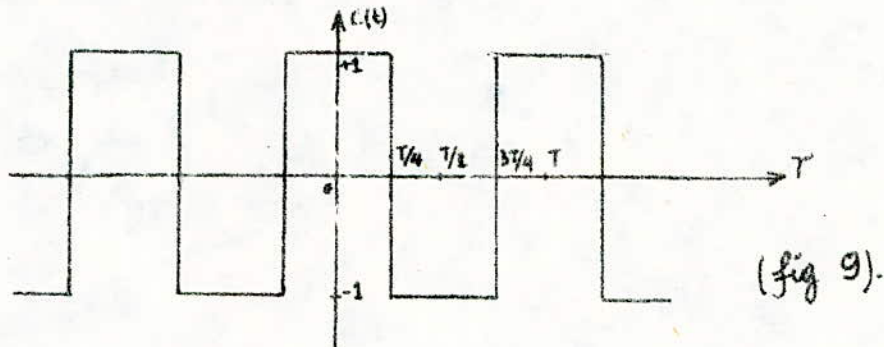
1: La démodulation synchrone:

Soit le signal $p(t)$ occupant la bande de fréquence $\pm \Delta B$ très étroite autour de la fréquence nulle (cela revient à dire que $p(t)$ est un signal très basse fréquence). Ce signal est de plus noyé dans du bruit $b(t)$ à plus large bande. Le mélange ainsi formé: $x(t) = p(t) + b(t)$ est modulé par la fréquence porteuse f_0 , il devient donc $x(t) \cos \omega_0 t$ ($\omega_0 = 2\pi f_0$). Après modulation le signal $p(t)$ occupe la bande $[f_0 - \Delta B, f_0 + \Delta B]$ et si la fréquence f_0 est très grande devant ΔB (à peu près 100 fois au moins) alors le signal $p(t) \cos \omega_0 t$ peut être

2: La détection synchrone:

2.1: Principe:

Supposons maintenant qu'au lieu de multiplier le signal $x(t) \cos \omega t$ par un signal sinusoïdal de même fréquence, on multiplie par un signal rectangulaire de même fréquence de référence représenté par $c(t)$ (fig 9).



On voit aisément qu'au lieu de multiplier par $\cos(\omega t - \varphi)$ on multiplie par une fonction ne prenant que les valeurs $+1$ ou -1 , ce qui revient donc à additionner ou à soustraire. La détection synchrone se ramène ainsi à une double inversion commandée par le générateur à fréquence f_0 . Par conséquent la détection synchrone n'est qu'une simplification technologique de la démodulation synchrone.

2.2: Analyse:

Le signal rectangulaire $c(t)$ de référence peut être décomposé en série de Fourier sous la forme:

$$c(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)\omega_0 t + \dots \right]$$

considéré comme une sinusoïde pure en considérant $p(t)$ comme constant, en première approximation.
 On est donc amené à extraire $p(t)$ du signal $x(t) \cos \omega_c t$.
 Pour cela il suffit de démoduler $x(t) \cos \omega_c t$ c'est à dire de multiplier $x(t) \cos \omega_c t$ par un signal sinusoïdal de même fréquence et de calculer la valeur moyenne M_m de ce produit. Soit φ le déphasage entre le signal de modulation et le signal de démodulation = (fig 8)

$$M_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_c t \cdot \cos(\omega_c t - \varphi) dt \quad \text{or } x(t) = p(t) + b(t)$$

$$M_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cos \omega_c t \cdot \cos(\omega_c t - \varphi) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) \cos \omega_c t \cdot \cos(\omega_c t - \varphi) dt$$

$$M_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_0^T p(t) \cos \varphi dt + \frac{1}{2T} \int_0^T p(t) \cos(2\omega_c t - \varphi) dt + \frac{1}{2T} \int_0^T b(t) \cos \varphi dt + \frac{1}{2T} \int_0^T b(t) \cos(2\omega_c t - \varphi) dt \right]$$

La première intégrale est égale à :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T p(t) \cos \varphi dt = \frac{1}{2} \overline{p(t)} \cos \varphi$$

Les 3 autres intégrales seront toutes nulles quand $T \rightarrow \infty$, donc

$$M_m = \frac{1}{2} \overline{p(t)} \cos \varphi$$

On voit donc que la démodulation synchrone nous permet d'obtenir $\overline{p(t)}$ (si toutefois $T \rightarrow \infty$) à condition de régler le dispositif de telle manière que $\varphi = 0$

On voit ainsi que la multiplication de $x(t) \cos \omega_0 t$ par ce signal de référence se comporte comme une somme de multiplications de $x(t) \cos \omega_0 t$ par les n signaux sinusoïdaux de pulsation $(2n+1)\omega_0$, autrement dit, le détecteur synchrone se comporte comme une somme de n démodulateurs synchrones de gain $\frac{4(-1)^n}{\pi 2n+1}$ et de pulsation $(2n+1)\omega_0$.

Supposons que le signal $p(t)$ varie lentement avec le temps, il a donc une bande de fréquence $\pm \Delta f$ autour de l'origine des fréquences. Après sa modulation par la porteuse f_0 il occupera la bande spectrale $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ (on raisonnera sur les fréquences positives).

Le démodulateur correspondant à la fréquence fondamentale f_0 du signal rectangulaire $c(t)$ va donc extraire du signal de bande spectrale $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ la composante relative à f_0 .

Mais comme, en pratique, la durée d'intégration T n'est jamais infinie, ce démodulateur va extraire, en plus de la composante relative à f_0 , toutes les composantes relatives aux fréquences contenues dans la bande $[f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}]$ où Δf est, en première approximation, égale à $\frac{1}{T}$. Si on place un amplificateur sélectif centré sur f_0 avant le détecteur, celui-ci va agir justement sur ces fréquences qui sont relatives au bruit. En effet, il éliminera toutes celles qui ne sont pas voisines de f_0 . Par conséquent seuls les bruits dont les fréquences sont voisines de f_0 contribuent aux perturbations du signal utile.

Le démodulateur correspondant à l'harmonique 3 ($3f_0$)

va extraire les composantes contenues dans la bande $[3f_0 - \frac{\Delta f}{2}, 3f_0 + \frac{\Delta f}{2}]$ mais comme f_0 est très supérieure à ΔB , le signal $p(t)$ ne contient donc pas de fréquences $3f_0 \pm \frac{\Delta f}{2}$; tout se passe comme si on avait démodulé et ce démodulateur va agir seulement sur le bruit.

En effet, si le bruit $b(t)$ est à bande B , celle-ci deviendra $f_0 \pm B$ après modulation par f_0 . On voit que si B est suffisamment grande pour que $f_0 + B$ soit supérieure à $3f_0$, alors le démodulateur correspondant à l'harmonique 3 va bien agir sur le bruit.

Remarques:

- L'amplificateur sélectif centré sur f_0 que l'on place devant le détecteur synchrone doit être choisi de telle manière que l'énergie du bruit filtré soit négligeable pour toutes les fréquences supérieures ou égales à $3f_0$ (Ceci est réalisé par le choix de sa bande équivalente de bruit: $B_n = \frac{7}{8} B_{no}$).

- Comme la durée d'intégration T n'est jamais infinie alors les résultats précédents sont en fait des estimations et il est donc nécessaire d'évaluer le rapport signal sur bruit (S/B).

2.3: Gain en rapport signal sur bruit:

Soit a l'amplitude du signal à étudier et soit σ_b^2 la puissance du bruit supposé de densité spectrale constante dans la bande de fréquence $(-B, +B)$.

Le rapport S/B avant le traitement est donc: $R_e = \frac{a^2}{\sigma_b^2}$

Si ΔF est la largeur de bande équivalente de l'amplificateur sélectif (c'est la largeur de bande du filtre rectangulaire qui laisse passer la même énergie que le filtre sélectif), le rapport $\frac{S}{B}$ en sortie de ce dernier c'est à dire à l'entrée du détecteur est:

$$R_e' = \frac{a^2}{\sigma_b^2 \cdot \frac{\Delta F}{B}}$$

Soit T la durée d'intégration, le rapport $\frac{S}{B}$ en sortie du détecteur synchrone est:

$$R_s = 2\Delta F \cdot T R_e' = 2BT R_e$$

Si G est le gain en rapport $\frac{S}{B}$ alors:

$$G = \frac{R_s}{R_e} = 2BT = f(b, T)$$

Ce gain n'est donc pas fonction de la largeur de bande de l'amplificateur sélectif.

3: Applications de la détection synchrone:

On distingue 2 types de mesures utilisant une détection synchrone. Les figures 10 montre le schéma général d'utilisation de la détection synchrone pour ces types de mesures.

3.1: Mesure de grandeur fixe:

Dans ce cas le générateur pilote à la fréquence f_0 donne naissance par l'intermédiaire du phénomène à étudier à une mesure

à la même fréquence f_0 qui se présente à l'entrée d'un amplificateur sélectif. Ce dernier amplifie f_0 , ensuite le signal est appliqué à un détecteur synchrone et filtré par un intégrateur de constantes de temps RC. Le signal continu issu de ce moyennage et représentant la valeur moyenne de la mesure effectuée peut être éventuellement amplifié par un amplificateur continu en sortie.

3.2. Mesure des variations d'une grandeur: Détection synchrone utilisée en "Lock-in":

a) Principe:

La grandeur électrique issue du phénomène à étudier (capteur) est liée à la polarisation par une certaine loi que l'on désire relever. On utilise donc une source de balayage qui fait évoluer cette polarisation et on enregistre la grandeur présentée au capteur en fonction de ce balayage (enregistreur XY). Afin de pouvoir utiliser une détection synchrone la source de polarisation doit être modulée. Ceci peut se faire soit par le générateur pilote généralement incorporé au détecteur synchrone soit par une source extérieure de modulation. Cette dernière méthode offre la possibilité de détecter le signal par la méthode dite du $2^{\text{ème}}$ harmonique grâce à un doubleur de fréquence.

b) Analyse:

Sont à examiner un phénomène physique qui, en

fonction de la polarisation p , délivrerait au capteur un signal $y(p)$ (fig 11).

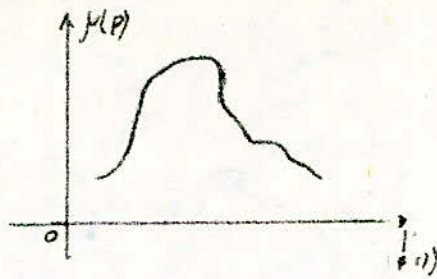


fig 11

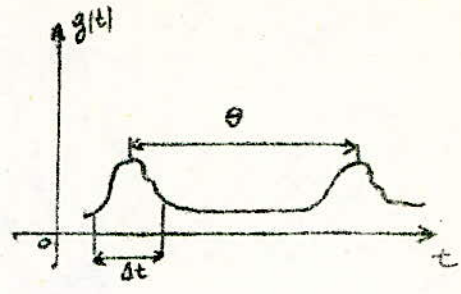


fig 12

Pour simplifier l'analyse, on supposera que le balayage peut être récurrent avec une période de répétition supérieure à la durée du phénomène (fig 12).

Il sera alors possible de faire intervenir la vitesse de balayage en décomposant la fonction $y(t)$ ainsi obtenue en série de Fourier.

Si le balayage fait varier x linéairement on peut espérer obtenir la loi $y = p(p)$. Supposons f_0 assez grande pour que, sur une durée raisonnable correspondant à un grand nombre de périodes de modulation, y ne varie que très peu.

On peut développer $y(p)$ au voisinage de p_0 en série de Taylor:

$$y(p_0 + \Delta p) = y(p_0) + \Delta p \cdot \left. \frac{dy}{dp} \right|_{p=p_0}$$

Si $p_0 = v t_0$ et $\Delta p = \beta \cos 2\pi f_0 t$ alors:

$$y(v t_0 + \beta \cos 2\pi f_0 t) = y(v t_0) + \beta \left(\left. \frac{dy}{dp} \right|_{p=p_0} \right) \cos 2\pi f_0 t$$

Cela suppose que β soit assez petit pour que $\frac{\beta^2}{2} \left. \frac{d^2 y}{dp^2} \right|_{p=p_0}$ soit négligeable devant $\beta \left. \frac{dy}{dp} \right|_{p=p_0}$.

Par detection on aura:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(vt_0 + \beta \cos 2\pi f_0 t) \cos 2\pi f_0 t \, dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(vt_0) \cos 2\pi f_0 t \, dt \\ + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \beta \cdot \cos 2\pi f_0 t \left(\frac{dy}{dp} \Big|_{p=p_0} \right) dt$$

Puisque $y(vt_0)$ est constant, la première intégrale est nulle, il reste alors:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \beta \left(\frac{dy}{dp} \Big|_{p=p_0} \right) (1 + \cos 4\pi f_0 t) \, dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \beta \left(\frac{dy}{dp} \Big|_{p=p_0} \right) dt \\ + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \beta \left(\frac{dy}{dp} \Big|_{p=p_0} \right) \cos 4\pi f_0 t \, dt = \frac{1}{2} \beta \frac{dy}{dp} \Big|_{p=p_0}$$

On obtient donc non pas la loi $y = f(p)$ mais sa dérivée dy/dp .

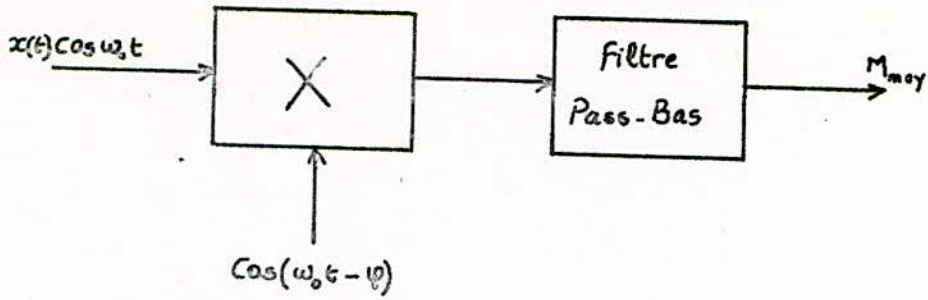
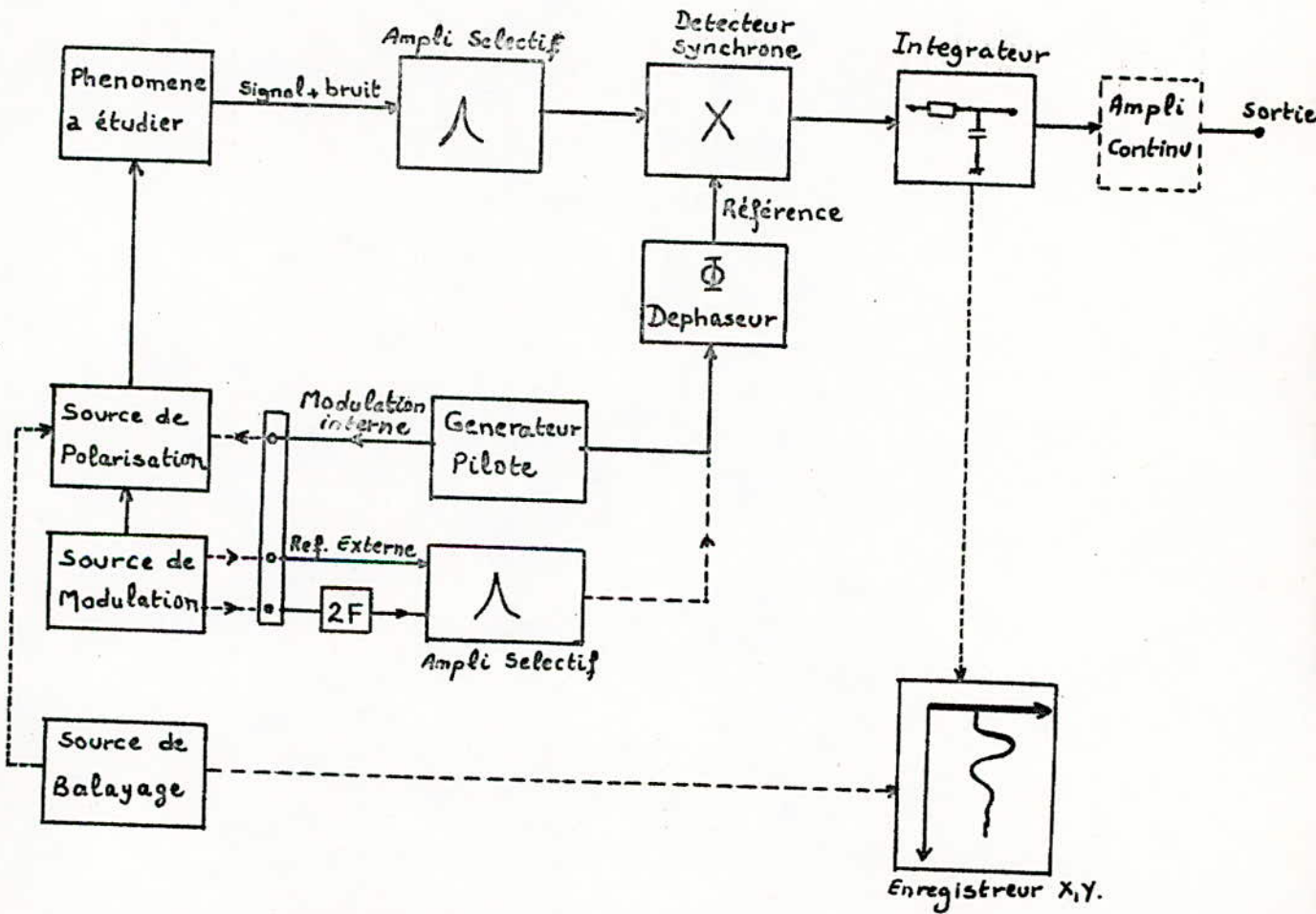



fig (9): Démodulateur synchrone



fig(10): SCHEMA GENERAL D'UTILISATION DE LA DETECTION SYNCHRONE.

 ENKIPPE

 APTE :

 ILTRAGE

 E

KALIAN

INTRODUCTION

Dans un langage classique d'électronicien, un filtre est un quadripôle dont les fréquences de coupure sont choisies de façon à laisser passer les fréquences représentatives d'un signal tout en arrêtant les fréquences parasites dues aux bruits et perturbations comme l'illustre la figure (1) :

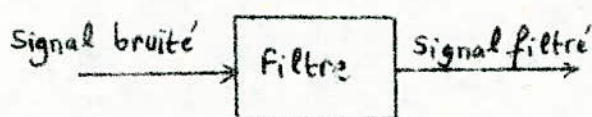


figure (1).

La notion de filtre est en fait beaucoup plus générale et on parle ainsi de filtre dérivateur, de filtre prédictif, si des fonctions de dérivation, prédiction ou autres s'ajoutent à la fonction d'élimination des bruits.

On peut retenir la formulation donnée par Wiener dans un contexte statistique et illustrée par la figure (2).

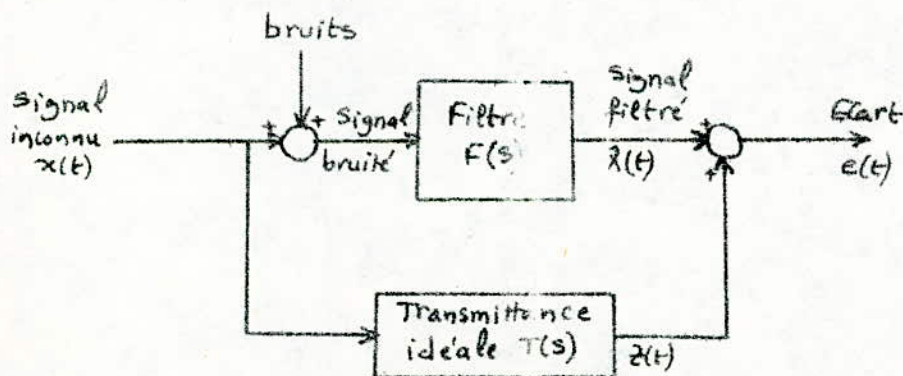


figure (2).

Il s'agit étant donné les fonctions de corrélation ou les spectres du signal inconnu $x(t)$ et du bruit $b(t)$, de déterminer le filtre optimal stationnaire $F(s)$ (dit filtre de Wiener) minimisant la variance, en régime stationnaire de l'écart $e(t)$ entre la sortie du filtre et la sortie idéale $z(t)$.

Si $T(s)$ vaut: $T(s) = 1$, on dit que $F(s)$ est un filtre estimateur

$T(s) = s$, " " " " " " " " dérivateur

$T(s) = e^{s^2}$, " " " " " " " " prédicteur.

Par la suite KALMAN et BUCY ([3-2]) ont proposé une autre méthode beaucoup plus générale et qui sera l'objet de notre étude.

La méthode utilise la représentation d'état des signaux aléatoires considérés comme étant les solutions d'un certain nombre d'équations différentielles décrivant le comportement des systèmes excités par un bruit blanc.

Le lien entre les représentations analytiques, spectrales et d'état des signaux peut être établi grâce à la notion de processus générateur (voir [5-2]).

I LA METHODE DES VARIABLES D'ETAT:

1. Notion d'état:

L'état d'un système à un instant t est défini par un certain nombre de variables indépendantes choisies de manière qu'elles nous renseignent convenablement sur le fonctionnement du système quand on le sollicite par des signaux $u_1(t), \dots, u_n(t)$.

Ces variables indépendantes sont appelées variables d'état du système; on les note $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Leur nombre n définit l'ordre du système. La matrice colonne formée par ces variables d'état est appelée vecteur d'état.

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

L'évolution de ce système est décrite alors par un système d'équations différentielles se présentant sous la forme suivante:

$$\dot{X}(t) = f\{X(t), u(t), t\} \quad \text{avec } X_0(t) \text{ connue.}$$

La forme de ces équations d'état dépend de la nature du fonctionnement du système étudié (linéaire ou non, à paramètres variables ou constants --)

On se limitera au cas des systèmes linéaires.

2. Modèles d'état des systèmes linéaires:

2.1 Systèmes déterministes:

Les modèles d'état des systèmes dynamiques

lineaires deterministes se presentent sous la forme generale

suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \\ Z(t) = H(t)X(t) \end{cases} \quad (1)$$

Avec : $X(t)$: vecteur d'etat de dimension (n)

$U(t)$: vecteur de commande de dimension (p)

$Z(t)$: vecteur de mesure ou d'observation de dim. (r)

$A(t)$: matrice d'etat de dimension $n \times n$.

$B(t)$: matrice d'entree de dimension $n \times p$

$H(t)$: matrice de sortie (observation) de dimension $(r \times n)$

t : le temps.

Si les elements des matrices $A(t)$, $B(t)$ et $H(t)$ sont invariants, le systeme est dit invariant; il est alors decrit par les

equations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B.U(t) \\ Z(t) = H.X(t) \end{cases} \quad (2)$$

2.3 Systemes stochastiques :

Un systeme est dit stochastique quand le hasard y intervient d'une maniere ou d'une autre.

Les modeles d'etat de tels systemes ont la forme suivante :

$$(3) \begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) + D(t)W(t) \\ Z(t) = H(t)X(t) + V(t) \end{cases}$$

Avec : $W(t)$: vecteur de bruit d'etat de dimension (m) .

$V(t)$: vecteur de bruit de mesure de dimension (r) .

$D(t)$: matrice d'entree de perturbation de dim. $(n \times m)$.

Les autres grandeurs gardent la meme signification que precedemment. Si les elements des matrices $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$ et $H(t)$

sont invariants le système est dit invariant et on aura les

$$\text{equations : } \begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) + D \cdot W(t) \\ Z(t) = H \cdot X(t) + V(t). \end{cases} \quad (4)$$

3. Solution de l'équation d'état :

3.1 Solution de l'équation homogène :

$$\text{Soit l'équation homogène : } \dot{X}(t) = A \cdot X(t) \quad (5)$$

$$\text{avec les conditions initiales : } X_0 = [X(t)]_{t=t_0} \quad (6).$$

Définition : On appelle matrice de transition, $\Phi(t, t_0)$ de dimension $(n \times n)$ la solution unique et non singulière de l'équation homogène :

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = A \cdot \Phi(t, t_0) \text{ avec les conditions initiales : } \Phi(t_0, t_0) = I \quad \forall t_0 \quad (8)$$

Dans ces conditions, on montre que le vecteur :

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X(t_0) \quad (9)$$

est solution de (5) avec les conditions initiales (6).

A partir de (9) on montre que :

$$\Phi(t_3, t_2) \Phi(t_2, t_1) = \Phi(t_3, t_1), \quad \forall t_1, t_2, t_3$$

$$\Phi(t_2, t_1) = \Phi^{-1}(t_1, t_2)$$

3.2 Solution de l'équation d'état :

On peut appliquer la méthode de la variation des constantes pour trouver la solution de l'équation (3) à partir de celle de l'équation homogène (5) avec les conditions initiales (6) ; on obtient ainsi :

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, z) B \cdot u(z) dz + \int_{t_0}^t \Phi(t, z) D \cdot w(z) dz. \quad (10)$$

3.3 Cas des systèmes linéaires invariants:

Considérons la série matricielle infinie ($n \times n$):

$$e^{A(t-t_0)} \triangleq I + A(t-t_0) + A^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + A^k \frac{(t-t_0)^k}{k!} + \dots$$

ou

$$e^{A(t-t_0)} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^k \quad (11)$$

on démontre que cette série converge $\forall t$ et t_0 .

vérifie facilement que (11) satisfait les équations (7)

(8), par suite:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

Par conséquent l'expression (10) devient:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-z)} B u(z) dz + \int_{t_0}^t e^{A(t-z)} D w(z) dz \quad (12)$$

II. ELEMENTS DE LA THEORIE DE L'ESTIMATION :

1. Définition de l'estimation :

Dans la théorie de l'estimation on s'intéresse à deux catégories de variables (vectorielles):

X : variables inconnues à estimer

Z : variables mesurées dont la valeur dépend de celle de X .

X pourra être, par exemple, l'ensemble des états successifs d'un système discret:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

Z sera l'ensemble des mesures effectuées :

$$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$$

D'une manière générale, les mesures Z dépendent de la valeur de X . Cette dépendance est déterministe si Z est entièrement déterminé par X , stochastique si Z dépend non seulement de X mais aussi du hasard par l'intermédiaire de bruits ou de perturbations inconnues.

Estimer X en fonction de Z consiste à traiter ces mesures pour obtenir une grandeur \hat{X} appelée estimation de X .

Une estimation est une fonction de Z : $\hat{X} = g[Z]$.

Dans la théorie de l'estimation dite générale les variables X et Z sont considérées comme étant des réalisations de variables aléatoires que nous désignerons par X et Z respectivement.

2. Estimation de Bayes. Variance minimale - Maximum à posteriori :

supposons que la probabilité conjointe $f_{XZ}(x, z)$ est une donnée du problème. Par ailleurs on suppose donnée une fonction qui exprime le coût d'un écart entre x et \hat{x} .

on dit alors qu'une fonction d'estimation $g_B(z)$ est optimale et que $\hat{x}_B = g_B[z]$ est une estimation de Bayes si l'espérance du coût :

$$E\{C(x, g_B(z))\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C(x_i, g_B(z_i)) \quad \text{est inférieure}$$

à $E\{C(x, g(z))\}$ pour toute autre fonction $\hat{x} = g[z]$.

Estimation de variance minimale:

si le coût est une fonction quadratique :

$$C(x, \hat{x}) = (x - \hat{x})^T Q (x - \hat{x}) \quad \text{avec } Q \text{ définie positive,}$$

il est démontré que :

$$\hat{x}_B = E(x|Z=z) \quad (\text{espérance conditionnelle})$$

Cette estimation que l'on note \hat{x}_{VM} veut donc :

$$\hat{x}_{VM} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{XZ}(x, z) dx \quad (x: \text{vecteur})$$

on démontre que cette estimation est :

* sans biais : $E\{x - \hat{x}\} = 0$

* de variance minimale, c'est à dire que la somme des variances des erreurs d'estimation soit :

$$E\{(x - \hat{x})^T (x - \hat{x})\} \text{ est minimale.}$$

Estimation du maximum à posteriori :

Considérons la fonction de coût suivante (fig 3)

$$C(x, \hat{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - \hat{x}| > \varepsilon \\ 0 & \text{si } |x - \hat{x}| \leq \varepsilon \end{cases}$$

on démontre alors que si $\varepsilon \rightarrow 0$, l'estimation de Bayes est la suivante:

$$\hat{x}_{HP} = \underline{\alpha} \quad ; \quad \underline{\alpha} \text{ tel que } f_{x|z}(\underline{\alpha}, z) = f_{x|z}(\underline{\alpha}, z)_{\max}$$

Cette estimation est dite du Maximum à "posteriori"

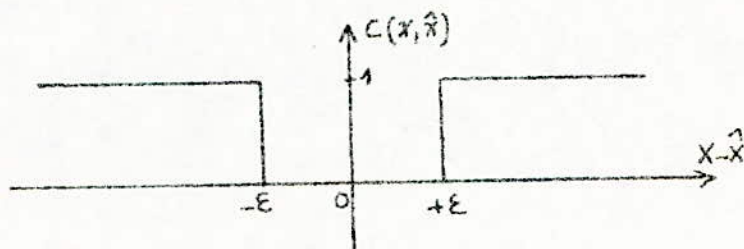


figure (3).

III : LE FILTRE DE KALMAN :

1 : Conditions d'applications :

L'application du filtre de Kalman à un système physique suppose que l'on ait réussi à représenter ce dernier par un modèle mathématique linéaire, c'est à dire par un système d'équations linéaires. Le filtre lui-même, est constitué d'un ensemble d'équations linéaires. Le système et le filtre peuvent se présenter sous deux formes :

- Continue : il s'agit d'équations différentielles.
- discrète : il s'agit d'équations aux différences.

Comme l'exploitation du filtre de Kalman implique en général l'utilisation d'un calculateur numérique, on considèrera la forme discrète. Ceci suppose que le système étudié a un modèle discret. S'il ne l'est pas la méthode habituelle consiste à le discrétiser. Ainsi l'objet des paragraphes suivants va être tout d'abord de définir le modèle adopté, puis de donner le moyen de le discrétiser.

2. Modèle mathématique adapté :

Soit un système linéaire stochastique stable, complètement gouvernable par B (quand $w(t)$ est mis à zéro) et observable par H (quand $v(t)$ est mis à zéro), décrit par l'équation d'état :

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot u(t) + B \cdot W(t)$$

et observé par l'équation de mesure :

$$Z(t) = H \cdot X(t) + V(t).$$

Avec : $X(t)$: vecteur d'état de dimension (n) .

$U(t)$: vecteur d'entrée (commande déterministe) de dimension (p) .

$W(t)$: vecteur de bruit sur l'état de dimension (m) .

$Z(t)$: vecteur de mesure de dimension (r) .

$V(t)$: vecteur de bruit sur la mesure de dimension (r) .

A : matrice représentant la dynamique du système de dim. $(n \times n)$.

B : matrice d'entrée de dimension $(n \times p)$.

B_p : matrice d'entrée de perturbation de dimension $(n \times m)$.

H : matrice d'observation (ou de sortie) de dimension $(r \times n)$.

Les bruits affectant l'état et la mesure seront caractérisés par leurs propriétés statistiques données par les moments jusqu'au 2^{ème} ordre :

on suppose que les bruits sont centrés soit :

$$E\{V(t)\} = 0 \quad ; \quad E\{W(t)\} = 0$$

La matrice de covariance du vecteur $W(t)$ est par définition :

$$\mu_w(t, z) \triangleq E\{W(t)W^T(z)\} \text{ qui est une matrice } (m \times m)$$

Si on suppose que les éléments (composantes) du vecteur $W(t)$ sont des bruits blancs et indépendants deux par deux, la matrice

$\mu_w(t, z)$ prend la forme suivante :

$$\mu_w(t, z) = Q \delta(t - z) \quad \text{avec} \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & & & 0 \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q_m \end{bmatrix}$$

Q : matrice définie non négative de dimension $(m \times m)$.

De la même façon pour le vecteur de bruit $V(t)$ et moyennant les mêmes suppositions on aboutit à :

$$\mu_V(t, z) = R \delta(t-z) \quad \text{avec :} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & & & 0 \\ & r_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & r_r \end{bmatrix}$$

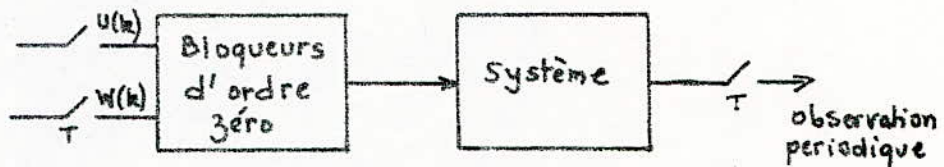
R : matrice ($r \times r$) définie positive.

on supposera enfin que les bruits d'état et de mesure sont indépendants entre eux :

$$E \{ V(t) W^T(z) \} = 0$$

3. Discretisation du modèle :

Supposons que les p -entrées $u(t)$ et les m -entrées $w(t)$ soient commandées par respectivement : $\underline{u}(k) \triangleq u(kT)$ et $\underline{w}(k) \triangleq w(kT)$ à travers p et m bloqueurs d'ordre zéro et que les sorties soient échantillonnées avec la même période T (fig 4). on cherche les équations d'état et de sortie discrètes correspondantes.



Fig(4).

La forme de l'équation d'état du modèle discrétisé sera :

$$X(k+1) = A_D X(k) + B_D U(k) + B_{D_0} W(k).$$

D'après la définition du bloqueur d'ordre zéro, pour $t \in [kT, (k+1)T]$

on a : $\underline{u}(t) = \underline{u}(kT) = \text{Constante}$.

Et en considérant que la fréquence d'échantillonnage est supérieure à celle du bruit alors :

$$\underline{w}(t) = \underline{w}(kT) = \text{Constante}.$$

Par suite d'après (I.3.2):

$$X(t) = e^{A(t-kT)} X(kT) + \int_{kT}^t e^{A(t-z)} B \cdot U(kT) dz + \int_{kT}^t e^{A(t-z)} B P \cdot W(kT) dz.$$

D'où l'état du système continu à l'instant $(k+1)T$:

$$X[(k+1)T] = e^{AT} X(kT) + \left[\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-z]} dz \right] B \cdot U(kT) + \left[\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-z]} dz \right] B P \cdot W(kT).$$

On constate donc que l'on peut choisir pour la représentation discrète, un vecteur d'état $X(k)$ qui sera identique au vecteur d'état continu $X(t)$ aux instants d'échantillonnage $t = kT$.

Par suite, à l'équation d'état continue, on peut associer l'équation d'état discrète:

$$X(k+1) = A_D X(k) + B_D U(k) + B_D P \cdot W(k).$$

Avec:

$$A_D = e^{AT} \\ B_D = \left[\int_0^T e^{A(T-z)} dz \right] \cdot B \quad \text{et} \quad B_D P = \left[\int_0^T e^{A(T-z)} dz \right] \cdot B P$$

On a déjà vu que $A_D = e^{AT}$ pouvait s'écrire sous forme d'une série matricielle infinie ($n \times n$), convergente pour tout T :

$$A_D = e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{k!} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots + \frac{A^k T^k}{k!} + \dots \quad (9)$$

En intégrant terme à terme on aboutit aux expressions suivantes:

$$B_D = \left[\sum_{k=0}^{\infty} A^k \cdot \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} \right] \cdot B \quad (10) \quad \text{et} \quad B_D P = \left[\sum_{k=0}^{\infty} A^k \cdot \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} \right] \cdot B P \quad (11).$$

Puisque l'état continu et l'état discret sont identiques aux instants d'échantillonnage, l'équation de sortie discrète sera:

$$Z(k) = H \cdot X(k) + V(k)$$

Le système discrétisé est donc modélisé par les équations:

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_D \cdot X_k + B_D \cdot U_k + B_D^P \cdot W_k \\ Z_k = H \cdot X_k + V_k \end{cases}$$

W_k et V_k sont dites, dans le cas discret, séquences pseudo-aléatoires.

La transposition des propriétés des bruits dans le cas discret est aisée, il suffit de remplacer l'impulsion de Dirac par le symbole de Kronecker comme on le verra tout de suite.

4: Le Filtre de Kalman discret:

4.1: Modèle discret:

on considère le système linéaire discret (obtenu par discrétisation du modèle continu précédemment défini):

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_D \cdot X_k + B_D \cdot U_k + B_D^P \cdot W_k \\ Z_k = H \cdot X_k + V_k \end{cases}$$

Les perturbations W_k et V_k sont des séquences aléatoires qui ont les propriétés statistiques suivantes:

$$\begin{aligned} E\{V_k\} &= 0 & ; & & E\{W_k\} &= 0 \\ E\{W_k W_j^T\} &= Q \delta_{kj} \\ E\{V_k V_j^T\} &= R \delta_{kj} \\ E\{V_k W_j^T\} &= 0 \quad \forall k, j \end{aligned}$$

Avec: $\delta_{kj} = \text{Symbole de Kronecker} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$

On considèrera de plus que X_0 (état initial) est indépendant des bruits V_k et W_k pour tout $k=1, 2, \dots$ c'est à dire que:

$$E\{X_0 V_k^T\} = 0 \quad \text{et} \quad E\{X_0 W_k^T\} = 0$$

4.2: Méthode d'estimation et formules de Filtrage:

Le filtre de Kalman se situe dans le cadre de la théorie de l'estimation dite générale dans la mesure où les résultats de mesure z_k ainsi que les estimations sont considérés comme étant à priori aléatoires.

Le but du filtre de Kalman discret est d'obtenir une estimation optimale du vecteur d'état $X_p = X(t_p)$ compte tenu des informations disponibles à l'instant t_p . Cette estimation est notée de la manière

Suivante :

$$\left[X(t_p) \right] \text{ estimée en } t_p \text{ à l'aide} = \hat{X}_{p|p}$$

des informations disponibles en t_p

Le filtre fournit de plus les matrices de covariance des erreurs d'estimation correspondantes :

$$E\{ (X_p - \hat{X}_{p|p}) (X_p - \hat{X}_{p|p})^T \} = \mu_{p|p}$$

La fonction coût de cette méthode d'estimation est donnée par :

$$C(X, \hat{X}) = \text{trace de } \mu_{k|k} = E\{ (X_k - \hat{X}_{k|k})^T (X_k - \hat{X}_{k|k}) \}$$

qui est la variance de l'estimation.

Le critère d'optimalité est par conséquent la minimisation de cette quantité.

R. E. KALMAN (voir [3-2]) a montré que l'adoption de ce critère conduit aux équations de filtrage suivantes :

$$\hat{X}_{k|k} = \hat{X}_{k|k-1} + K_k (z_k - H \hat{X}_{k|k-1})$$

$$\hat{X}_{k|k-1} = A_D \hat{X}_{k-1|k-1} + B_D \cdot U_{k-1}$$

K_k est appelé matrice de gain de Kalman, elle est donnée par :

$$K_k = \mu_{k|k-1} (H \mu_{k|k-1} H^T + R)^{-1}$$

Avec :

$$\mu_{k|k-1} = A_D \mu_{k-1|k-1} A_D^T + B_D^T \cdot Q \cdot B_D$$

$$\mu_{k|k} = \mu_{k|k-1} - K_k \cdot H \cdot \mu_{k|k-1}$$

où :

$$\begin{aligned} \mu_{k|k-1} &= \text{matrice de Covariance de l'erreur de prédiction} \\ &= E\{(X_k - \hat{X}_{k|k-1})(X_k - \hat{X}_{k|k-1})^T\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{k|k} &= \text{matrice de Covariance de l'erreur d'estimation} \\ &= E\{(X_k - \hat{X}_{k|k})(X_k - \hat{X}_{k|k})^T\} \end{aligned}$$

on pourra trouver diverses démonstrations de ces formules dans [1.2], [2.2], [4.2].

on voit donc que l'estimé optimal est la somme :

- d'un terme "état prédit" $\hat{X}_{k|k-1}$ déduit de l'estimé précédent grâce à l'équation d'évolution (11) en supposant que la valeur la plus probable du terme de bruit est nulle.

- d'un terme de correction $K_k y_k$ en notant :

$$y_k = z_k - H \cdot \hat{X}_{k|k-1} \quad (13)$$

y_k appelé "innovation" est l'écart entre la mesure et la prédiction de cette mesure (12) en supposant comme précédemment que la valeur la plus probable du terme de bruit est la valeur nulle.

outre les propriétés de l'estimation linéaire optimale (absence de biais, orthogonalité), le filtre de Kalman jouit de la propriété suivante :

La suite des innovations définies par (13) constitue un bruit blanc à moyenne nulle, c'est à dire :

$$E\{v_k\} = 0$$

$$E\{v_k v_j^T\} = (H \mu_{k|k-1} H^T + R) \delta_{kj} = U_{k|k-1} \delta_{kj}$$

Cette proposition facile à démontrer (voir [2.2]) signifie que si le filtre est optimal toute l'information contenue dans les mesures a pu être prise en compte par celui-ci. Elle peut être utilisée comme test d'optimalité du filtre.

En effet, à chaque cycle de calcul, il est possible de comparer chaque composante :

$$\delta z_{ki} = z_{ki} - \hat{z}_{k|k-1,i} \text{ de } z_k - \hat{z}_{k|k-1}$$

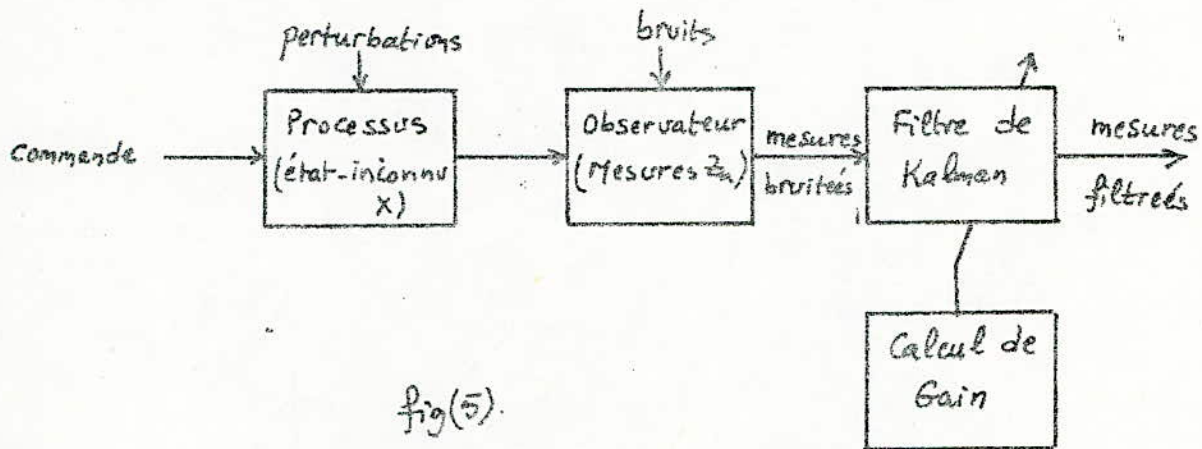
à l'écart type $\sigma_{\delta z_{ki}}$ déduit de la diagonale de la matrice $U_{k|k-1}$. Tout écart δz supérieur à $n\sigma_z$ ($n=3,4$) traduit l'apparition d'un résultat de mesure a priori très improbable.

IV APPLICATION DU FILTRE DE KALMAN A DES DONNEES

CALCULEES PAR SIMULATION :

1. Mise en œuvre du filtre de Kalman :

L'application du filtre de Kalman à un système physique est illustrée par la figure (5) :



fig(5).

Le calcul du gain est représenté à part car sur un des formules établies, les mesures z_k n'y interviennent pas; le calcul peut par conséquent être effectué à part. Etant donné que les équations obtenues sont du type récurent, les calculs sont effectués pas à pas en fonction des données disponibles.

Pour initialiser le filtre supposons que les mesures soient reçues à partir de l'instant 0 (zéro). Par ailleurs on suppose données l'espérance et la covariance de l'état initial x_0 sont :

$$E\{x_0\} = \bar{x}_0 \quad \text{et} \quad M_0 = E\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\}$$

Si la première mesure disponible est z_0 on prendra:

$$\hat{X}_{0|0} = \bar{X}_0 \quad \text{et} \quad \mu_{0|0} = \mu_0$$

et la première équation utilisée sera l'équation d'estimation

$$(X_{k|k}, \mu_{k|k}) \quad \text{pour} \quad k=0$$

Si la première mesure disponible est z_1 on prendra:

$$\hat{X}_{0|0} = \bar{X}_0 \quad \text{et} \quad \mu_{0|0} = \mu_0$$

et la première équation utilisée sera l'équation de

$$\text{prédiction } (X_{k|k-1}, \mu_{k|k-1}) \quad \text{pour} \quad k=0.$$

Par notre part nous avons effectué une application du filtre à des données calculées par simulation.

A cet effet, on calcule les mesures z_k de la manière suivante:

$$z_k^{\text{calculé}} = H \cdot X_k + V_k.$$

X_k est obtenu par un calcul théorique déduit du modèle mathématique discrétisé décrivant l'évolution du système sous l'action des commandes u_k et des perturbations W_k .

$$X_{k+1} = A_0 X_k + B_0 u_k + B_0 W_k.$$

W_k et V_k sont obtenus à partir du sous-programme GRAND générant des nombres aléatoires respectant les propriétés prévues pour les bruits d'état et de mesures respectivement.

La programmation du calcul des équations du filtre de Kalman, utilise des sous-programmes de calcul matriciel classique (Produit, somme algébrique) dont les algorithmes sont très simples, ainsi qu'un sous-programme effectuant l'inversion d'une

matrice selon la méthode bien connue de GAUSS (voir [7.2])

A chaque itération on calculera aussi les erreurs d'estimation δx_k (Composantes de $X_k - \hat{X}_{k|k}$) qui doivent rester compatibles avec les variances correspondantes $\sigma_{\delta x_k}^2$ (déduites de la diagonale de la matrice $M_{k|k}$).

on dispose donc d'un moyen de vérification très intéressant, mais il ne faut pas perdre de vue que lors de l'application du filtre à un système réel, on ne peut opérer ainsi car généralement on ne connaît pas X_k .

Dans ce cas on doit exploiter uniquement les résultats de mesures Z_k et la matrice $U_{k|k-1}$ (voir III.4.2)

La figure (6) illustre la structure générale du programme utilisé.

2. Méthode utilisée pour la discrétisation:

on a à calculer les matrices A_0 , B_0 et B_0^P dont les expressions s'écrivent:

$$A_0 = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots + \frac{(AT)^k}{k!} + \dots$$

$$B_0 = BD \cdot B \quad \text{et} \quad B_0^P = BD \cdot B^P$$

Avec :

$$BD = I \cdot T + AT \cdot \frac{T}{1+1} + \frac{(AT)^2}{2!} \cdot \frac{T}{2+1} + \dots + \frac{(AT)^k}{k!} \cdot \frac{T}{k+1} + \dots$$

* On constate que A_0 peut s'écrire :

$$A_0 = I + AT + \frac{AT}{2} \cdot \left(\frac{A}{1!}\right)T + \dots + \frac{AT}{k} \cdot \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} T^{k-1} + \dots$$

où chaque terme de la série contient le précédent. C'est sur cette constatation qu'est basée le calcul. De plus

la série étant convergente on arrête le calcul lorsque les incréments deviennent inférieurs à une précision fixée à l'avance (pour cela on teste la norme de l'incrément).

* Si on note SA_k le terme général de la série matricielle A_D et SB_k celui de B_D , on constate qu'ils sont liés par la relation:

$$SB_k = SA_k \cdot \frac{T}{k+1} \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

D'on l'algorithme de calcul suivante :

$$\left. \begin{array}{l} SA_k = I \\ SB_k = IT \end{array} \right\} \text{ pour } k=0$$

$$A_D = I$$

$$B_D = IT$$

$$K = 1$$

$$3 \quad SA_k = SA_{k-1} \cdot \frac{AT}{k}$$

$$\text{NORME} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |SA_k(i,j)|$$

Si (NORME - PRECISION) ≤ 0 aller à 1, sinon aller à 2

$$2 \quad SB_k = SA_k \cdot \frac{T}{k+1}$$

$$A_D = A_D + SA_k$$

$$B_D = B_D + SB_k$$

$$K = K+1$$

Aller à 3

$$1 \quad B_D = B_D \cdot B$$

$$BP_D = B_D \cdot BP$$

3. Nombre d'opérations requis par le filtre :

Les formules de filtrage de Kalman impliquent en général un volume de calcul important car il s'agit essentiellement de récurrences matricielles. C'est pourquoi nous allons nous intéresser à présent au nombre d'opérations requis par le filtre de Kalman. Les opérations nécessaires à chaque cycle de calcul sont consignées sur le tableau (A).

Comme n est la dimension qui risque de devenir assez grande (10 à 15 variables d'état parfois), on retiendra donc que le nombre d'opérations nécessaires à chaque cycle de calcul augmente comme n^3 ce qui peut être un inconvénient du filtre de Kalman.

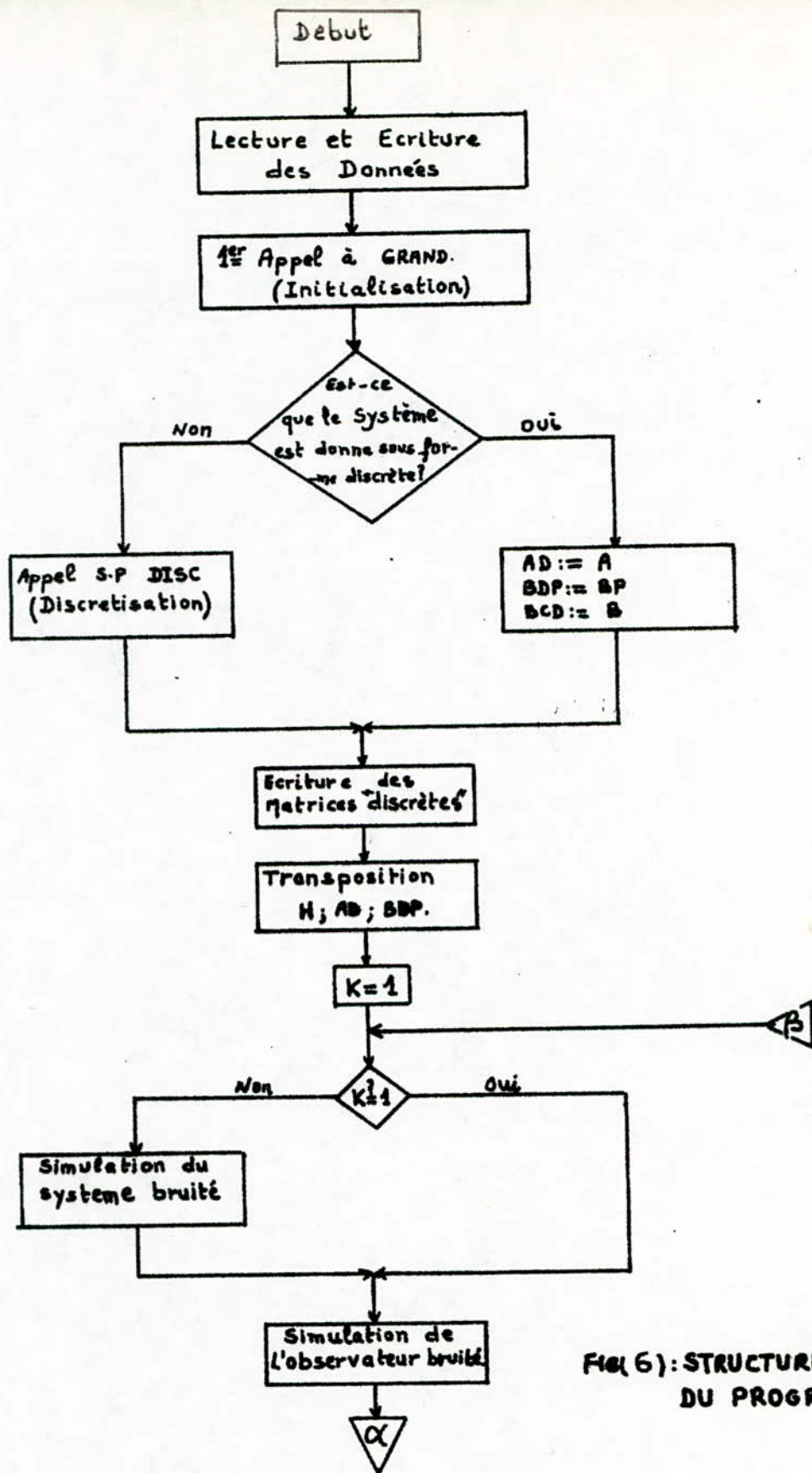
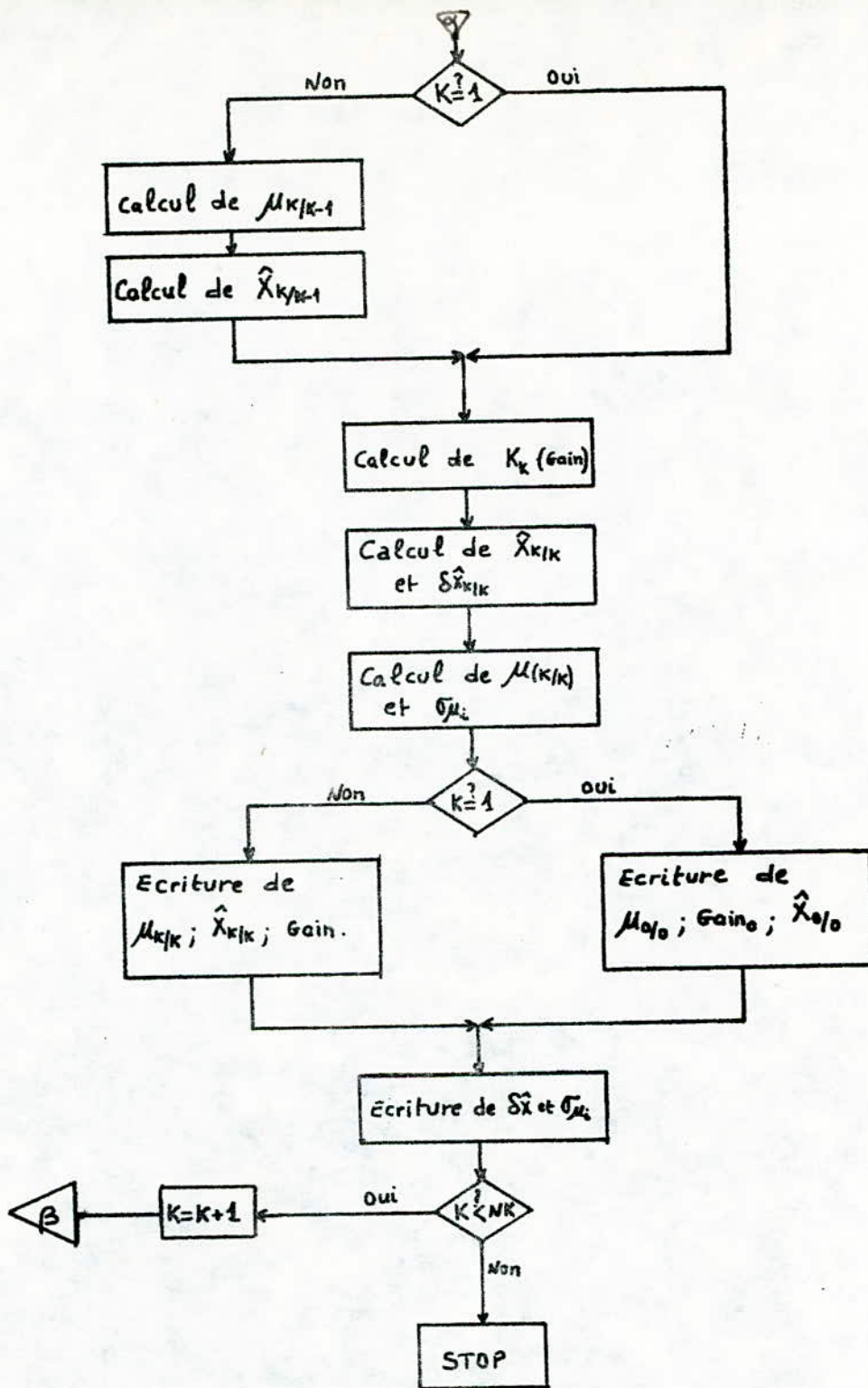


FIG (6): STRUCTURE GENERALE DU PROGRAMME.



FIG(6 bis) : STRUCTURE GENERALE
DU PROGRAMME (SUITE).

TABLEAU

Equation	Operation	Nombre de Multiplic.	Nombre d'Additions	Total
$K_k = \mu_{k k-1} H^T (H \mu_{k k-1} H^T + R)^{-1}$	$\mu_{k k-1} \cdot H^T$ $H (\mu_{k k-1} H^T)$ $H (\mu_{k k-1} H^T) + R$ $[H (\mu_{k k-1} H^T) + R]^{-1}$ $(\mu_{k k-1} H^T) (H \mu_{k k-1} H^T + R)^{-1}$	$n^2 r$ $r^2 n$ 0 $2r^3 + r^2 - r$ $n r^2$	$n^2 r - nr$ $r^2 (n-1)$ r^2 $2r^2 (r-1)$ $nr(r-1)$	<u>Multiplications:</u> $n^2 r + 2nr^2 + 2r^3 + r^2 - r$ <u>Additions:</u> $2r^3 - 2r^2 + 2nr^2 + n^2 r - 2nr$
$\mu_{k k-1} = A_D \mu_{k-1 k-1} A_D^T + B_D \cdot Q \cdot B_D^T$	$\mu_{k-1 k-1} A_D^T$ $A_D (\mu_{k-1 k-1} A_D^T)$ $Q \cdot B_D^T$ $B_D \cdot (Q \cdot B_D^T)$ $A_D \mu_{k-1 k-1} A_D^T + B_D \cdot Q \cdot B_D^T$	n^3 n^3 $m^2 n$ $n^2 m$ 0	$n^2 (n-1)$ $n^2 (n-1)$ $mn(m-1)$ $n^2 (m-1)$ n^2	<u>Multiplications:</u> $2n^3 + m^2 n + n^2 m$ <u>Additions:</u> $2n^3 - 2n^2 + n^2 m + m^2 n - mn$
$\mu_{k k} = \mu_{k k-1} - K_k H \mu_{k k-1}$	$H \cdot \mu_{k k-1}$ $K_k \cdot (H \cdot \mu_{k k-1})$ $\mu_{k k-1} - K_k H \mu_{k k-1}$	$n^2 r$ $n^2 r$ 0	$n^2 r - nr$ $n^2 (r-1)$ n^2	<u>Multiplications:</u> $2n^2 r$ <u>Additions:</u> $2n^2 r - nr$
$\hat{x}_{k k} = \hat{x}_{k k-1} + K_k (z_k - H \hat{x}_{k k-1})$	$H \cdot \hat{x}_{k k-1}$ $z_k - H \cdot \hat{x}_{k k-1}$ $K_k (z_k - H \cdot \hat{x}_{k k-1})$ $\hat{x}_{k k-1} + K_k (z_k - H \cdot \hat{x}_{k k-1})$	n^2 0 nr 0	$nr - r$ r $n(r-1)$ n	<u>Multiplications:</u> $2nr$ <u>Additions:</u> $2nr$
$\hat{x}_{k k-1} = A_D \hat{x}_{k-1 k-1} + B_D \cdot U_{k-1}$	$A_D \cdot \hat{x}_{k-1 k-1}$ $B_D \cdot U_{k-1}$ $A_D \hat{x}_{k-1 k-1} + B_D \cdot U_{k-1}$	n^2 np 0	$n(n-1)$ $n(p-1)$ n	<u>Multiplications:</u> $n^2 + np$ <u>Additions:</u> $n^2 + np - n$

TOTAL:

Multiplications: $2n^3 + 2r^3 + 3n^2 r + 2nr^2 + m^2 n + mn^2 + n^2 + r^2 + np + 2nr - r$

Additions: $2n^3 + 2r^3 - 2r^2 + 2nr + 3n^2 r - nr - n^2 + n^2 m + m^2 n - mn + np - n$

V: RESULTATS PRATIQUES OBTENUS:

1: essai du sous-programme de discrétisation:

$$\text{avec: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1. \\ -99.9998 & -19.9998 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}; \quad B_P = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}$$

$$T = 0.0001 \quad ; \quad \text{PRECI} = 0.000001$$

On obtient:

$$A_D = \begin{bmatrix} 1. & 0.999000 \cdot 10^{-4} \\ -0.998978 \cdot 10^{-2} & 0.998002 \end{bmatrix}; \quad B_D = B_P = \begin{bmatrix} 0.100005 \cdot 10^{-3} \\ 0.994004 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Cet exemple étant tiré de [4-2], les auteurs donnent pour résultat:

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 1. & 0.999002 \cdot 10^{-4} \\ -0.998979 \cdot 10^{-2} & 0.998002 \end{bmatrix}$$

2: Estimation de variables d'état: 1^{er} exemple

On a pris le modèle (discrétisé) d'une olonne à distiller (tiré de la thèse de doctorat d'état s-sciences physiques par: J.P. Gauthier).

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.731873 & & & \\ 1.0 & 1.70192 & & & \\ 0.413595 & 0.290548 & 0.0 & 0.0 & -0.275048 \\ & & 1.0 & 0.0 & -0.129479 \\ & & 0.0 & 1.0 & 1.33412 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.0807098 & 0.0 \\ 0.125847 & 0.0 \\ 0.266201 & -0.258189 \\ -0.608566 & 0.405757 \\ 0.515045 & -0.0563474 \end{bmatrix} ; H = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Pour introduire le bruit sur chaque variable d'état on a pris :

$$BP = \begin{bmatrix} 1.0 & & & & \\ & 1.0 & & & \\ & & 1.0 & & \\ & & & 1.0 & \\ & & & & 1.0 \end{bmatrix}$$

Comme entrées on a pris deux échelons unitaires :

$$COMU = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Pour conditions initiales on a pris : $X_0 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$

Propriétés statistiques des bruits et des conditions initiales :

$$\sigma_1 = 0.001 \quad (\text{écart type du bruit du système})$$

$$\sigma_2 = 0.1 \quad (\text{écart type du bruit de mesure})$$

$$P_{0/L} = \begin{bmatrix} 5.0 & & & & \\ & 5.0 & & & \\ & & 5.0 & & \\ & & & 5.0 & \\ & & & & 5.0 \end{bmatrix} ; Q_k = \begin{bmatrix} 10^{-6} & & & & \\ & 10^{-6} & & & \\ & & 10^{-6} & & \\ & & & 10^{-6} & \\ & & & & 10^{-6} \end{bmatrix} ;$$

$$R_k = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Les résultats sont consignés sur les courbes (7, 8, 9, 10 et 11)
 On constate que l'estimation est satisfaisante pour les 5 variables d'état et que les erreurs d'estimation ($\delta x_i = x_i - \hat{x}_i$) sont parfaitement compatibles avec les écarts déduits des termes diagonaux de $\mu_{k|k}$ et ce au bout de 30 à 40 itérations.

3: Estimation de variables d'état : 2^{ème} exemple.

On a pris un système simple du 2^e ordre dont l'intérêt réside dans le fait que l'une des variables (x_2) reste pratiquement constante, ce qui facilite l'interprétation notamment lors de l'étude de la sensibilité du filtre à un mauvais choix des propriétés statistiques des bruits et des conditions initiales.

Le système (discrétisé) est défini par : (cet exemple est pris de [2-2])

$$A = \begin{bmatrix} 1. & 1. \\ 0 & 1. \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; Bp = \begin{bmatrix} 1. & 0 \\ 0 & 1. \end{bmatrix} ; H = \begin{bmatrix} 1. & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 3. \end{bmatrix} \quad \text{où } X_0 \text{ représente les conditions initiales.}$$

$$\sigma_1 = 0.01 \quad ; \quad \sigma_2 = 0.32 \quad \text{d'où :}$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} ; R_k = 0.1 \quad \text{avec} \quad \mu_{0/1} = \begin{bmatrix} 1. & 0 \\ 0 & 3. \end{bmatrix}$$

Les résultats traduits par les courbes (12 et 13) montrent que les estimations restent toujours valables après 30 à 40 itérations.

Comme en pratique, l'incertitude règne sur les propriétés statistiques des bruits et des conditions initiales (matrices Q_k , R_k et $\mu_{0,1}$) on a pris volontairement des matrices qui ne correspondaient pas au bruit que l'on générerait.

1^{er} Cas: R_k trop élevé, Q_k et $\mu_{0,1}$ trop faibles:

Les données A , B , BP , H , X_0 , σ_1 et σ_2 restant les mêmes on prend:

$$R_k = 10. ; \quad Q_k = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} ; \quad \mu_{0,1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Les résultats obtenus (fig 14) montrent que l'estimation est toujours acceptable mais on remarque néanmoins que les estimations de x_2 sont toujours inférieures aux valeurs réelles de x_2 . On aboutit donc à un filtre "timide".

2^e Cas: R_k trop faible, Q_k et $\mu_{0,1}$ trop élevés:

Dans ce cas on prend:

$$R_k = 0.01 ; \quad Q_k = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix} ; \quad \mu_{0,1} = \begin{bmatrix} 10. & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$$

On aboutit à un filtre "trop entreprenant". En effet toutes les "tentatives" du filtre pour améliorer

l'estimation de x_2 après les différentes itérations conduisent à des estimations soit plus faibles soit plus grandes que la valeur réelle (fig 14).

4: Estimation de l'état d'un système à bruit important:

Le dernier essai porte sur le modèle de la colonne à distiller dont l'état comporte des termes de bruit importants (relativement aux variables d'état).

Pour $\sigma_n = 0.1$ on aboutit aux résultats consignés sur les courbes (15 et 16) pour les variables x_1 et x_2 .

On constate cette fois-ci que les estimations sont beaucoup moins bonnes que dans les cas précédents.

Mais il ne faut pas perdre de vue que pour les systèmes réels les perturbations importantes sont facilement mesurables, et que les perturbations non mesurables (bruits) sont par conséquent très faibles.

Enfin de compte on peut dire que le filtre de Kalman restera toujours fiable.

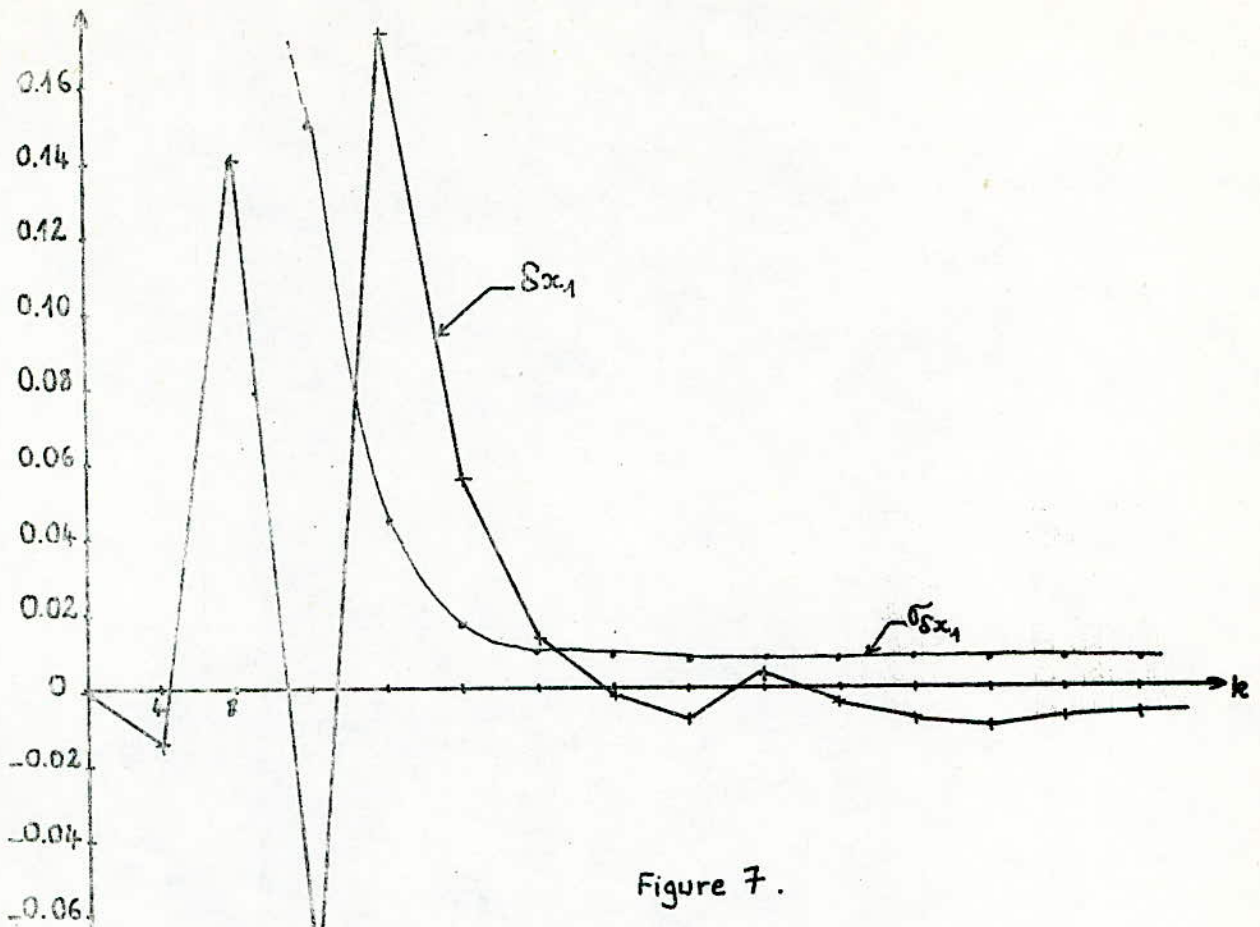


Figure 7.

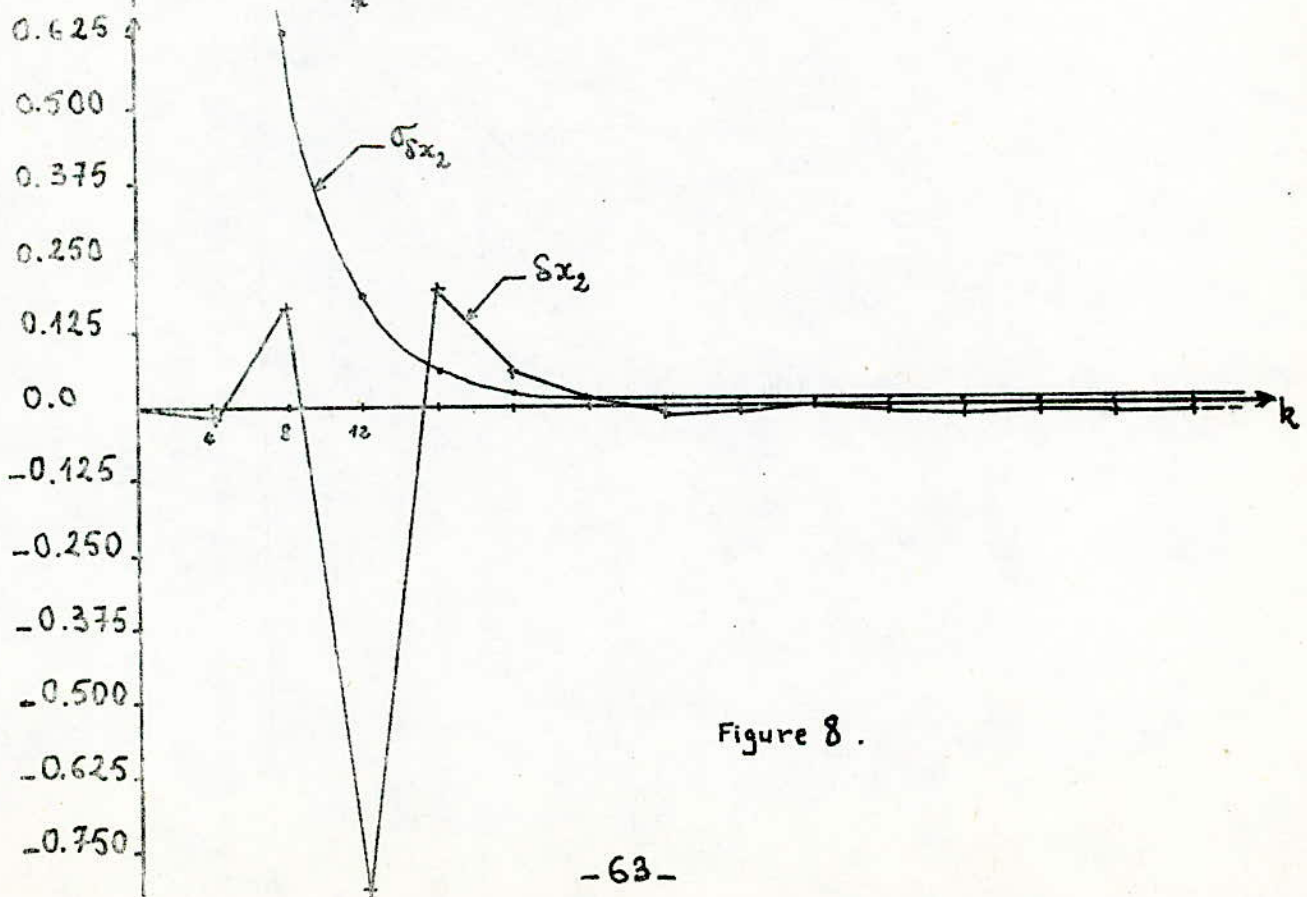
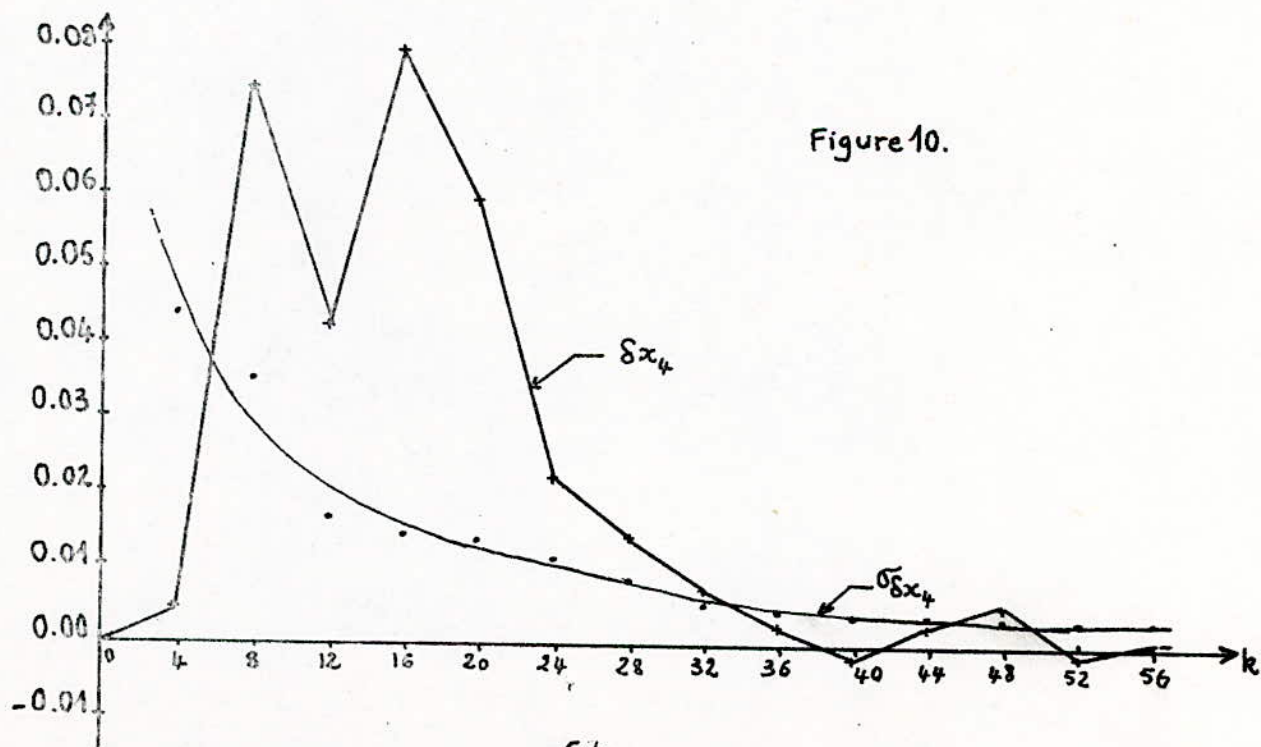
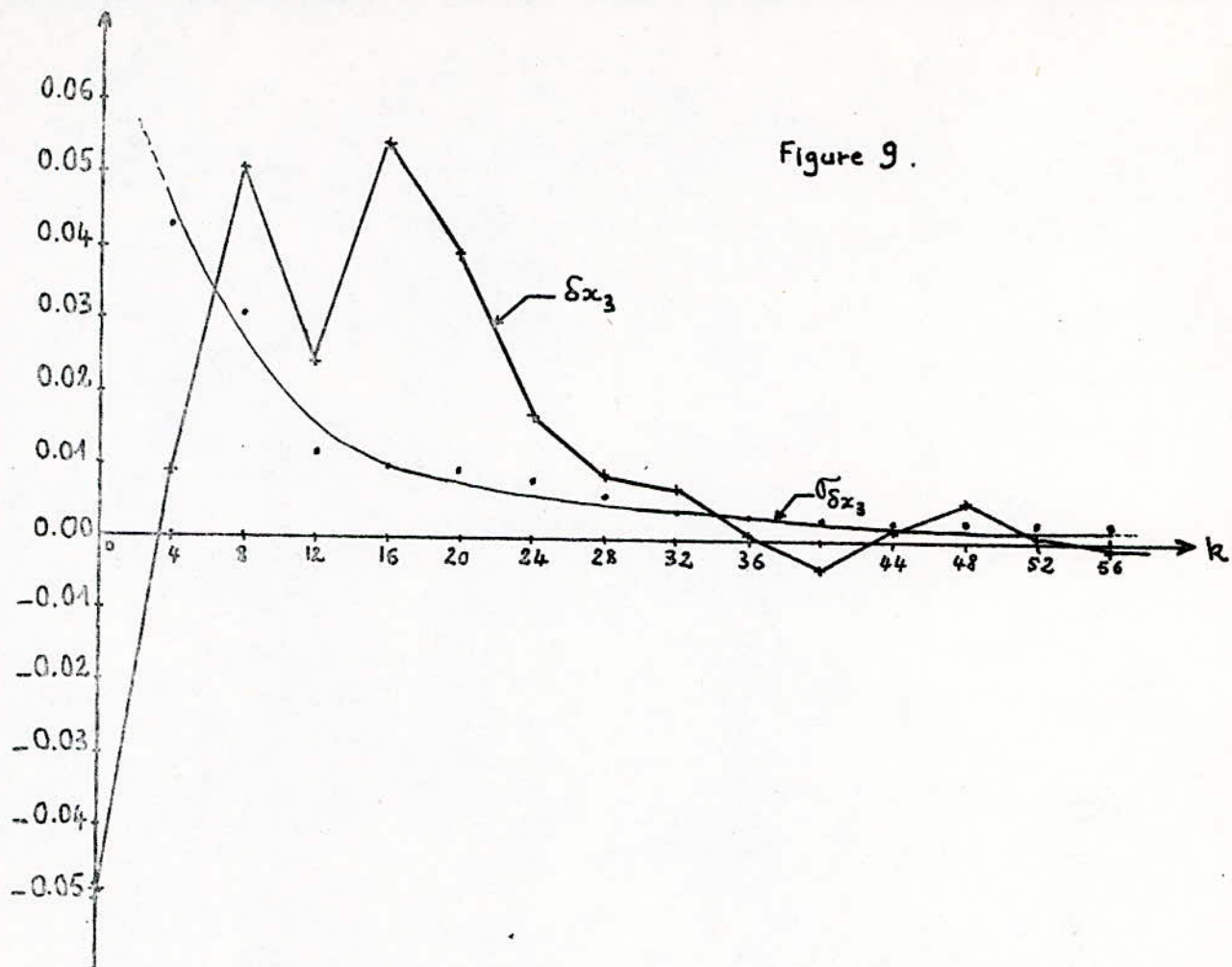


Figure 8.



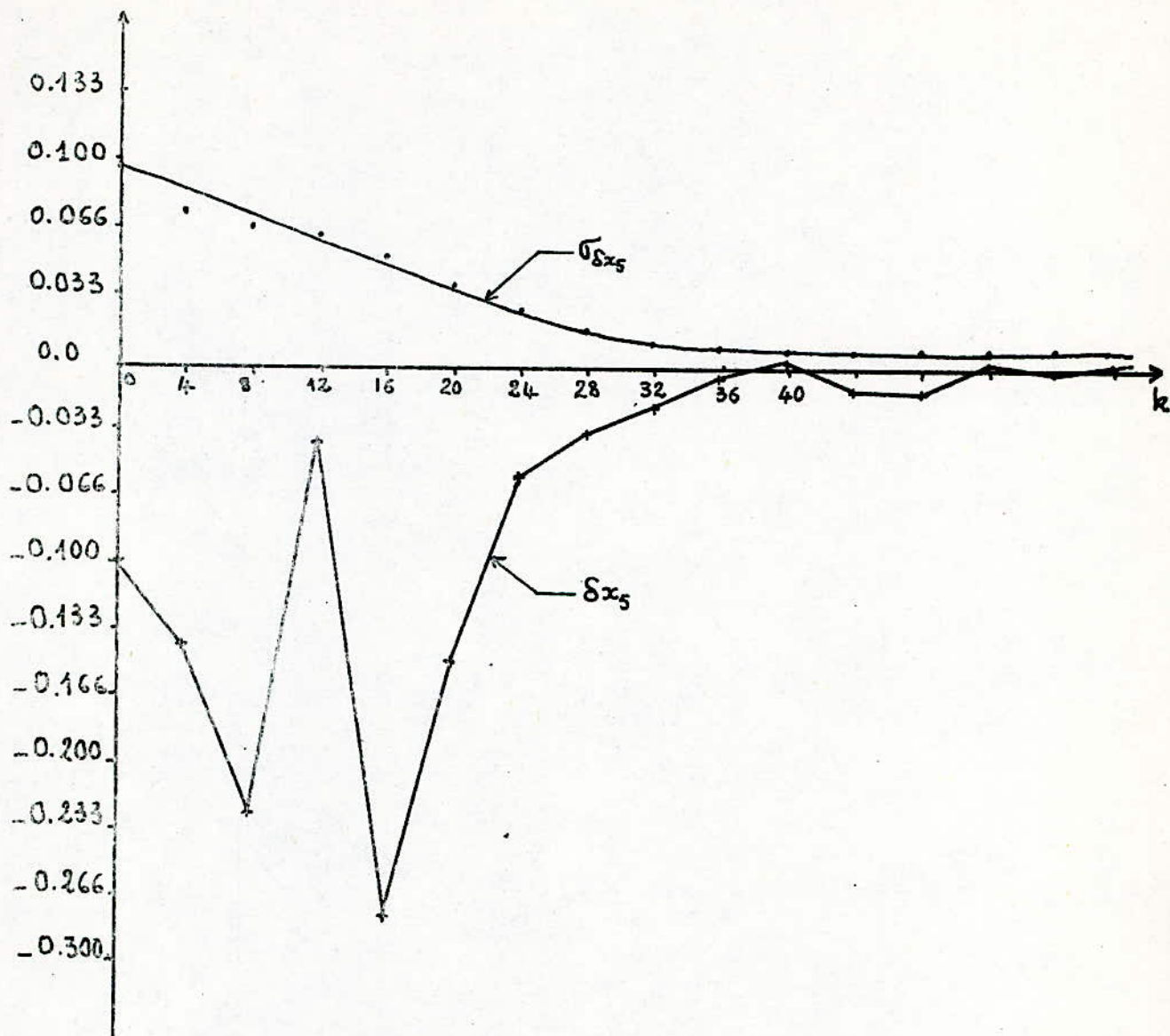
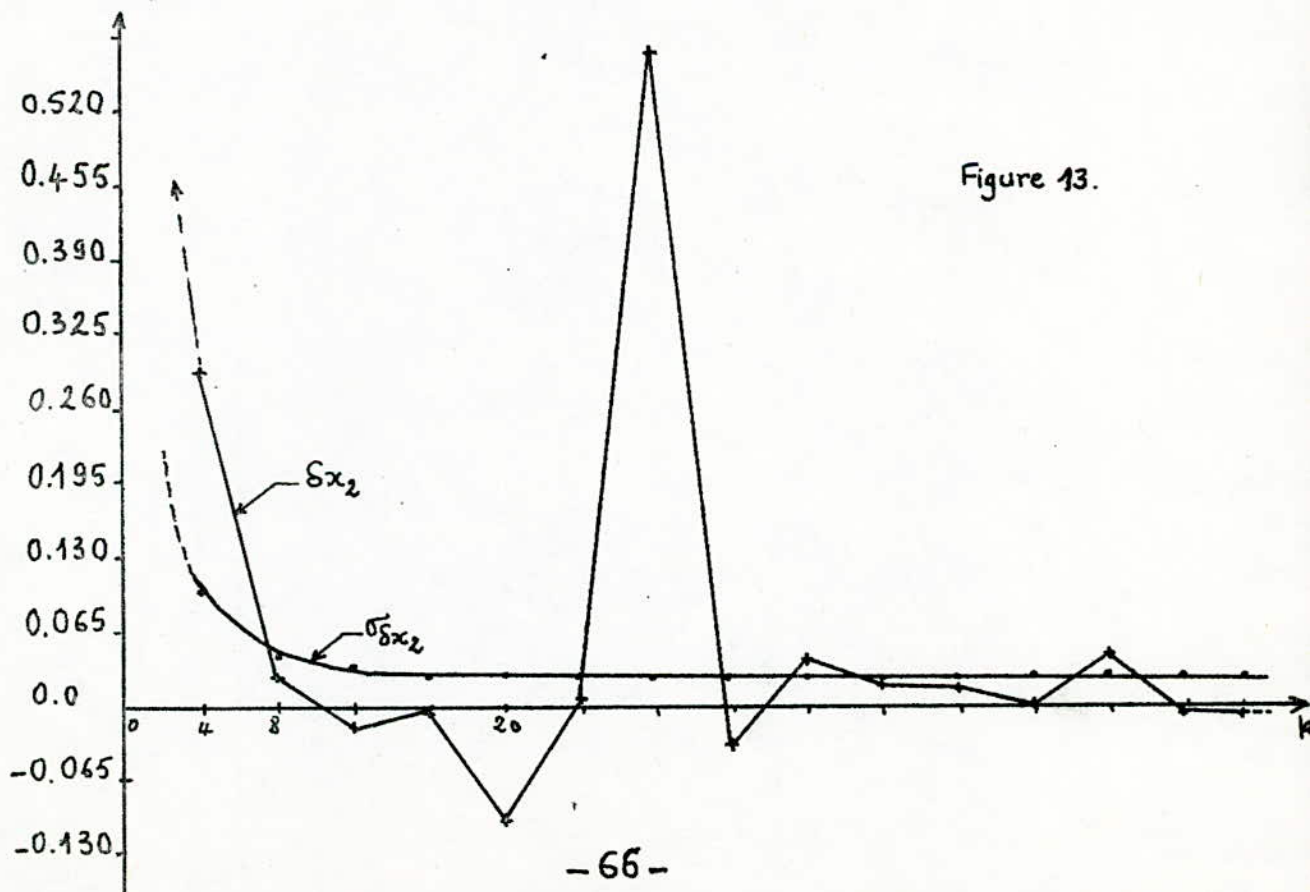
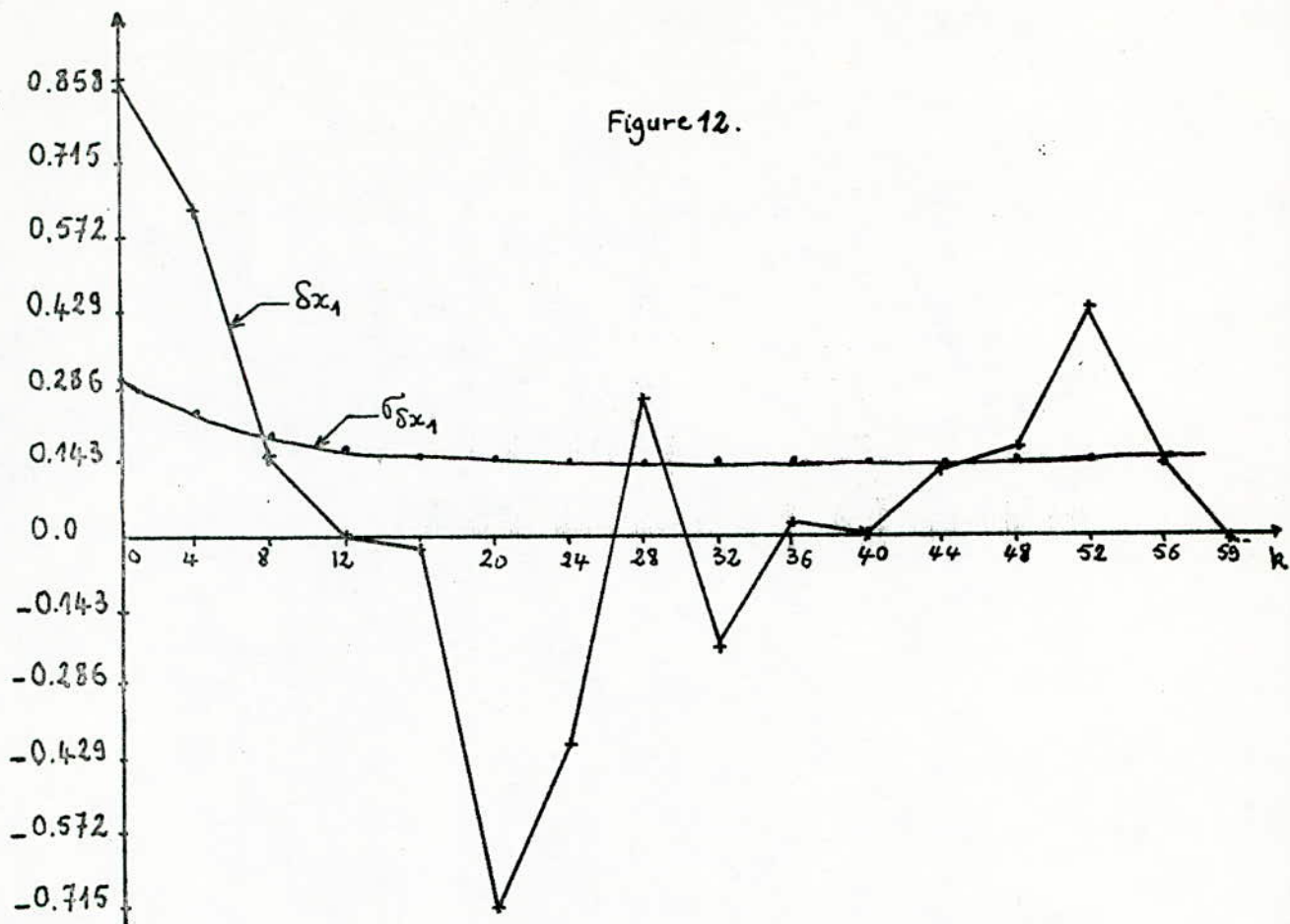


Figure 11.



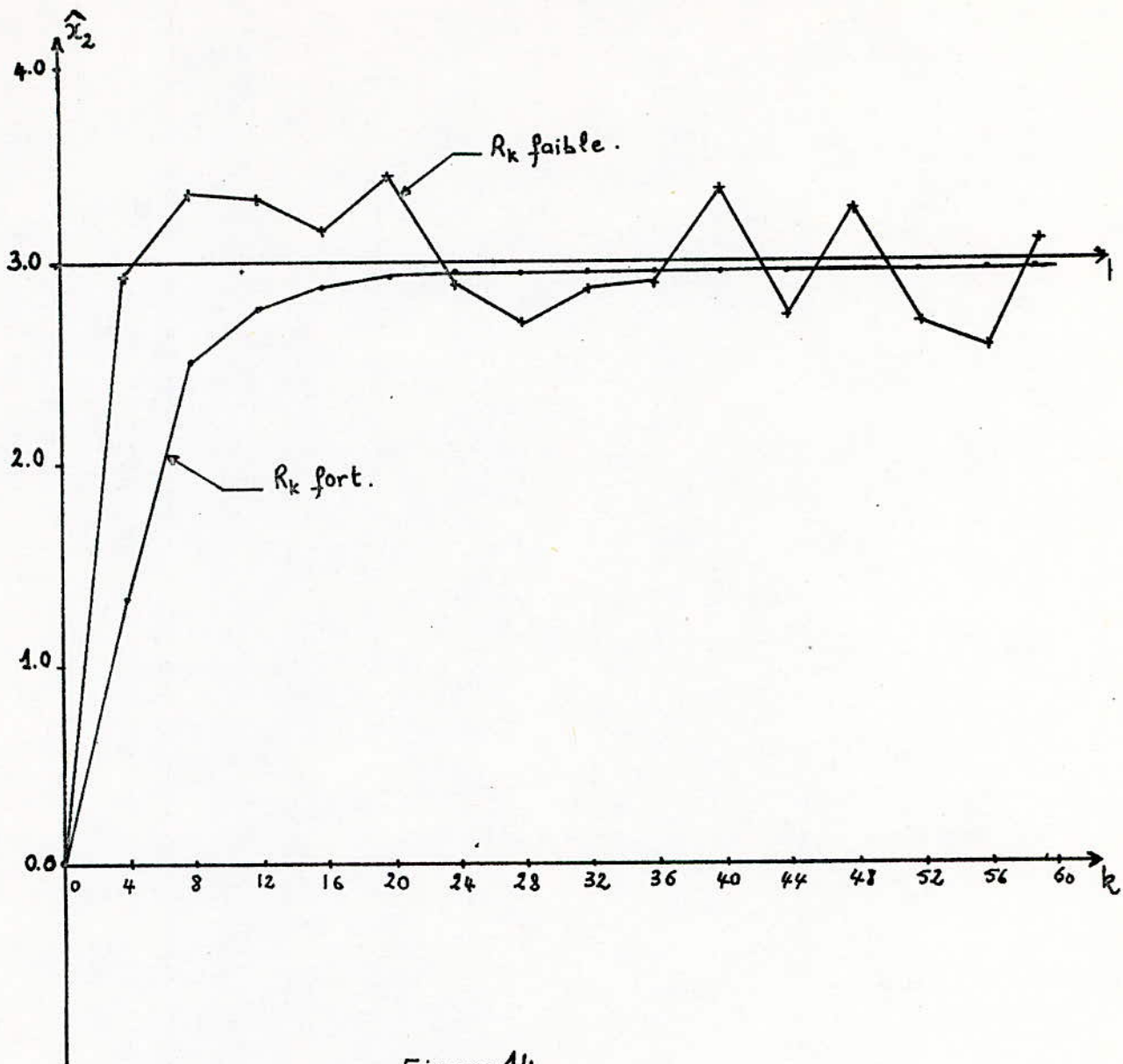
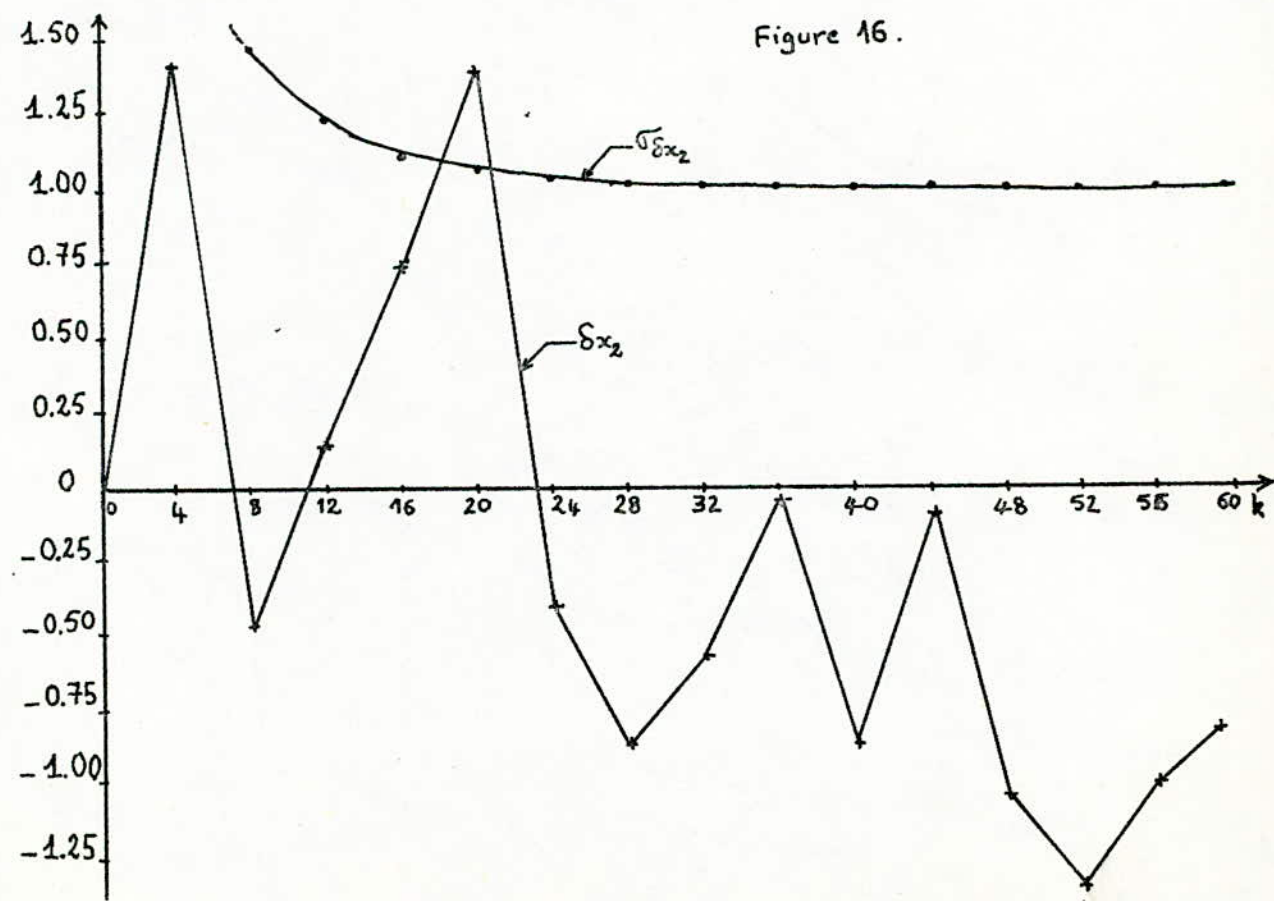
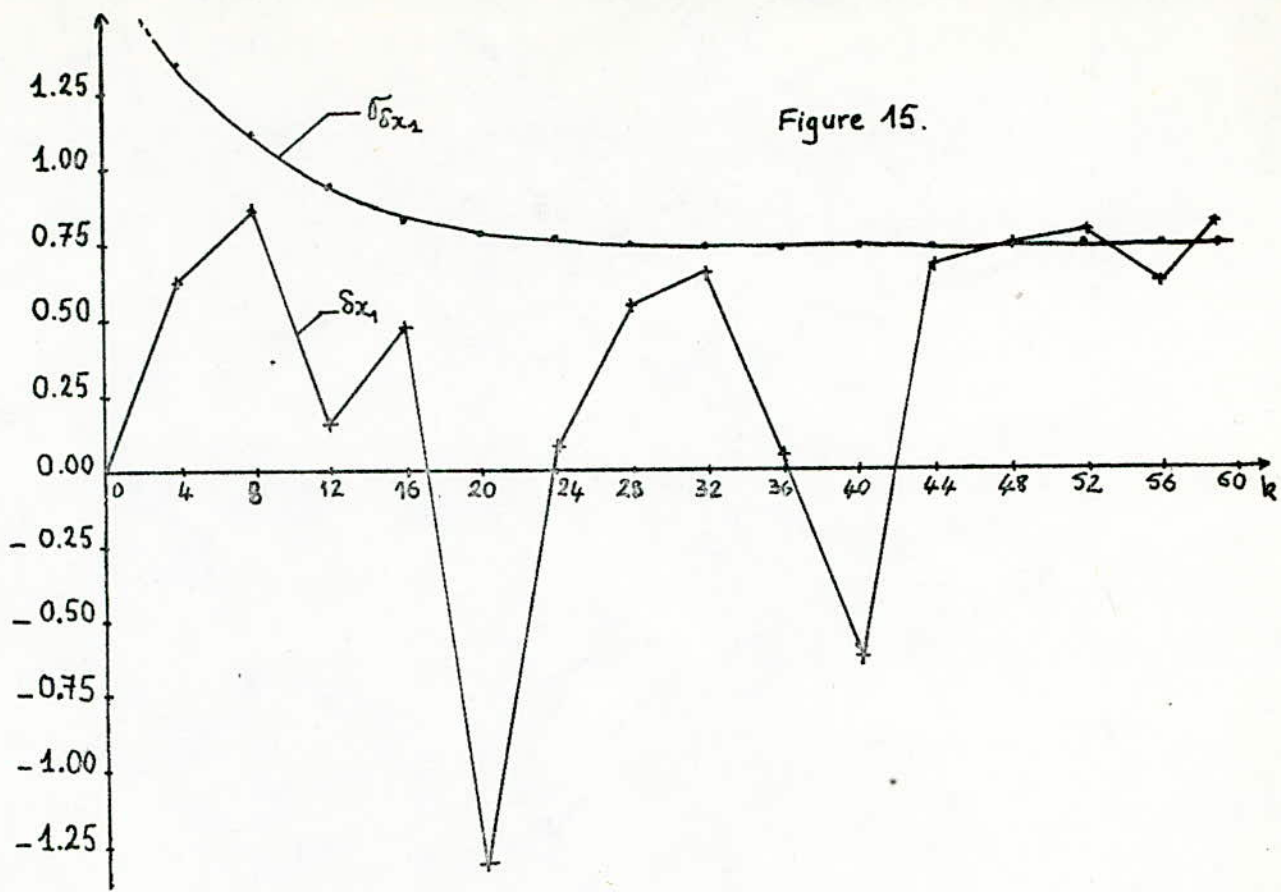


Figure 14.



C O N C L U S I O N

A la lumière de cette courte et modeste étude sur les techniques de traitement de signaux bruités, se dégagent les points importants suivants :

1 - Les corrélateurs et les détecteurs synchrones ne sont nullement des filtres parfaits qui, recevant à leur entrée un signal noyé dans du bruit restitueraient fidèlement en sortie le signal utile débarrassé de tout bruit: En effet ces appareils permettent seulement de restituer certaines caractéristiques du signal (période, forme..) d'une part, et d'améliorer le rapport signal sur bruit d'autre part.

2 - Pour pouvoir traiter correctement des signaux à l'aide de ces appareils il faut maîtriser à la fois les signaux étudiés et les signaux auxiliaires utilisés (phase, synchronisme).

Quant au filtrage de Kalman, et en tenant compte uniquement des résultats obtenus par simulation, on peut dire que les estimations sont très satisfaisantes même lorsque les propriétés des bruits ne sont pas connues avec une grande précision.

Cette étude ayant porté uniquement sur le filtre discret, il aurait été d'un grand intérêt de la faire suivre par une étude du filtre analogique; mais il faut souligner que la théorie du filtrage dans ce cas nécessiterait des connaissances mathématiques d'un niveau assez élevé.

PROGRAMME M M E X E

PROGRAMME R O G R A M M E S


```

C PROGRAMME PRINCIPAL
C CE PROGRAMME APPELE LES S-PROGRAMMES SUIVANTS:
C PFORMAT SCMAT TMATA MATIN DISC ET
C GRAND (QUI APPELE URAND ) POUR GENERER LE BRUIT DESIRE
C SIGNIFICATION DES PRINCIPALES VARIABLES
C XMOY=MOYENNE DES BRUITS
C SIGM1=ECART TYPE DU BRUIT DU SYSTEME
C SIGM2= // // DE MESURE
C NK= NOMBRE D ITERATIONS
C A ET AD = MATRICES DE DIM. L,L (DYNAMIQUE DU SYSTEME)
C B ET BCD = MATRICES DE DIM. L,N (MODELE DE COMMANDE DETERMINISTE)
C BP ET BDP = MATRICES DE DIM. L,M (MODELE DES PERTURBATIONS ALEATOIRES)
C A,B,BP CORRESPONDENT AU MODELE CONTINU
C AC,BCD,BDP CORRESPONDENT AU MODELE DISCRETISE
C HK=MATRICE DE SORTIE DE DIM. NR,L
C X=VECTEUR D ETAT DE DIM.L
C COMU=VECTEUR DE COMMANDE DE DIM.M
C POUR LA DISCRETISATION ON UTILISE LA METHODE
C DE LA SERIE MATRICIELLE AVEC:
C PRECI= NORME MINIMALE DU TERME DU DEV. POUR LEQUEL ON
C APPETE LA SOMMATION
C T=PERIODE D ECHANTILLONNAGE (DISCRETISATION).
C ESTAN=ESTIMEE INITIALE DE X DE DIM.L
C COV=MATRICE DE COVARIANCE NUL(K/K-1) DE DIM.L,L
C QK= // // // // DU BRUIT DU SYSTEME DE DIM.M,M
C RK= // // // // // DE MESURE DE DIM. NR,NR
C ESTAC=TABLEAU CONTENANT LE RESULTAT :ESTIMEE DE X
C COVKK= // // // // :COVARIANCE NUL(K/K).
C GAIN= // // // // : MATRICE DE GAIN
C ADEST=TABLEAU DE CALCUL QUI CONTIENRA A LA FIN : X ESTIME
C ESTACL= // // // // // :L ECART TYPE

```

```

C DIMENSION FK(10,10), FKT(10,10), COV(10,10), TABE1(1,10),
C *AC(10,10), RK(10,10), TAB2(10,20), GAIN(10,10), COVKK(10,10),
C *QK(10,10), TAB2(10,10), ADT(10,10), TAB4(10,10), TAB5(10,10),
C *TAB6(10,10), TAB7(10,10), TAB10(10,20)
C DIMENSION ESTAC(10), ESTAN(10), Z(10), COMU(10), ESTACL(10),
C *UNI(10,10), BD(1,10), A(10,10), AT(10,10), PH1(10,10), SA(10,10),
C *BDOM(10), SB(10,10), B(10,10), BCD(10,10), PH1(10,10), AD1(10,10),
C *X(10), XC(10), BD1(10,10), BF(10,10), PCF(10,10), ZINCV(10),
C *ZIN(10), ADEST(10), TAB8(10,10), PCFT(10,10), TAB9(10,10)
C SI LE SYSTEME A ETE DISCRETISE METTRE ICONT=0, SINON ICONT=1
C ICONT=0

```

```

C PREMIER APPEL A GRAND (DONNE UNE VALEUR NULLE)
C GINIT=GRAND(DS)
C
C LECTURE ET ECRITURE DES DONNEES
C READ(5,175)PRECI,XMOY,SIGM1,SIGM2
C READ(5,11)L,N,NR,T,NK,M
C READ(5,22)((A(I,J),J=1,L),I=1,L)
C READ(5,22)((B(I,J),J=1,N),I=1,L)
C READ(5,22)((BP(I,J),J=1,M),I=1,L)

```

```

READ(5,22)((HK(I,J),J=1,L),I=1,NR)
READ(5,22)(X(J),J=1,L)
READ(5,22)(CCML(K),K=1,N)
READ(5,22)((CCV(I,J),J=1,L),I=1,L)
READ(5,23)((CK(I,J),J=1,M),I=1,N)
READ(5,22)((RK(I,J),J=1,NR),I=1,NR)
READ(5,22)(ESTAN(I),I=1,L)
WRITE(6,7)
WRITE(6,173)PREC1,PMOY,SIGM1,SIGM2
WRITE(6,22)L,N,NR,T,NK,M
WRITE(6,9)
WRITE(6,105)((A(I,J),J=1,L),I=1,L)
WRITE(6,25)
WRITE(6,105)((B(I,J),J=1,M),I=1,L)
WRITE(6,27)
WRITE(6,105)((C(I,J),J=1,N),I=1,L)
WRITE(6,26)
WRITE(6,105)((HK(I,J),J=1,L),I=1,NR)
WRITE(6,107)
WRITE(6,105)(CCML(K),K=1,N)
WRITE(6,8)
WRITE(6,105)(X(I),I=1,L)
WRITE(6,80)
WRITE(6,105)((COV(I,J),J=1,L),I=1,L)
WRITE(6,81)
WRITE(6,105)((CK(I,J),J=1,M),I=1,M)
WRITE(6,82)
WRITE(6,105)((RK(I,J),J=1,NR),I=1,NR)
WRITE(6,83)
WRITE(6,105)(ESTAN(I),I=1,L)

```

```

C
C   SI LE SYSTEME EST DONNE SOUS FORME DISCRETISE LE PROGRAMME
C   IGNORE L ETAPE DE DISCRETISATION
C   IF(ICONT.EC.)GOTO76

```

```

C
C   DISCRETISATION DE L EQUATION D ETAT.
C   CALL DISC(L,M,N,T,PREC1,A,B,PE,PC,FC,PCF)
GO TO 90

```

```

78 DO 79 I=1,L
   DO 79 J=1,L
79   AD(I,J)=A(I,J)
   DO 101 I=1,L
   DO 101 J=1,M
101  BDP(I,J)=B(I,J)
   DO 76 I=1,L
   DO 76 J=1,N
   BCD(I,J)=B(I,J)
76  CONTINUE
90  WRITE(6,205)
   WRITE(6,205)
   WRITE(6,105)((AD(I,J),J=1,M),I=1,L)
   WRITE(6,405)
   WRITE(6,105)((BCD(I,J),J=1,N),I=1,L)
   WRITE(6,28)
   WRITE(6,105)((BDP(I,J),J=1,M),I=1,L)

```

```

C
C   TRANSPOSITION DES MATRICES AD,BCD,BK
DO 5 I=1,L

```

```

DO 5 I=1,L
DO 5 J=1,L
5 ADT(I,J)=AD(J,I)
DO 12 I=1,L
DO 12 J=1,M
12 EDPT(J,I)=EDP(I,J)
DO 6 I=1,NF
DO 6 J=1,L
6 HKT(J,I)=HKT(I,J)
C DEBUT DE LA BOUCLE GENERANT LES DIFFERENTES ITERATIONS AU)
C INSTANTS K1,K2.....,KN
DO 100 K=1,NK
K1=K-1
WRITE(6,50) K1
IF(K.EQ.1)GOTO 34
C
C SIMULATION DU SYSTEME
DO 30 I=1,L
X(I)=0.
DO 35 J=1,L
35 X(I)=X(I)+AD(I,J)*X(J)
DO 45 IO=1,N
45 X(I)=X(I)+BCD(I,IO)*CCML(IO)
DO 75 IO=1,M
BRU1=GRAND(OS)
75 X(I)=X(I)+BDF(I,IO)*(BRU1*SIGM1+X*CV)
20 CONTINUE
DO 169 I=1,L
169 X(I)=X(I)
WRITE(6,88)
WRITE(6,44)(X(I),I=1,L)
C
C SIMULATION DE L OBSERVATEUR
24 DO 43 I=1,NR
Z(I)=0.
DO 42 J=1,L
42 BRU2=GRAND(OS)
Z(I)=Z(I)+FK(I,J)*X(J)+BRU2*SIGM2+X*CV
42 CONTINUE
WRITE(6,66)
WRITE(6,44)(Z(I),I=1,NR)
C
C CALCUL DES MATRICES DE COVARIANCE ET DE GAIN SUCCESSIVES
C CALCUL DES ESTIMATIONS SUCCESSIVES DU VECT. X
IF(K.EQ.1)GO TO 77
CALL PROMAT(L,L,L,AD,CCVKK,TAB6)
CALL PROMAT(L,L,L,TAB6,AD7,TAB7)
CALL PROMAT(M,N,L,CK,EDPT,TAB8)
CALL PROMAT(L,N,L,BDP,TAB8,TAB9)
CALL SOMAT(L,L,1.,TAB7,TAB9,CCV)
CALL PROMAT(L,L,L,AD,ESTAC,CEST)
CALL PROMAT(L,N,L,BCD,CCML,BCCCM)
CALL SOMAT(L,L,1.,CEST,BCCCM,ESTAN)
77 CALL PROMAT(NF,L,L,HK,CCV,TAB1)
CALL PROMAT(NF,L,NR,TAB1,HKT,TAB2)
CALL SOMAT(NR,NR,1.,TAB2,FK,TAB3)
DO 91 I=1,NR
DO 91 J=1,NR
91 TAB10(I,J)=TAB3(I,J)

```

```
CALL MATIN(TAB10, NR)
CALL PROMAT(L, L, NR, COV, HK1, TABE4)
CALL PROMAT(L, NR, NR, TAB4, TAB10, GAIN)
CALL PROMAT(NR, L, L, HK, ESTAN, ZINCV1)
CALL SOMAT(NR, L, -L, Z, ZINCV1, ZINCV)
CALL PROMAT(L, NR, L, GAIN, ZINCV, ESTAC1)
CALL SOMAT(L, L, L, ESTAN, ESTAC1, ESTAC)
CALL PROMAT(L, NR, L, GAIN, TAB1, TAB5)
CALL SOMAT(L, L, -L, COV, TAB5, COVKK)
DO 181 I=1, L
ESTAC1(I) = (I) - ESTAC(I)
ADEST(I) = SQRT(COVKK(I, I))
181 CONTINUE
IF(K.EQ.1) GO TO 50
K2=K-2
WRITE(6, 80) K1, K1
WRITE(6, 44) (ESTAC(I), I=1, L)
WRITE(6, 55) K1, K1
WRITE(6, 44) ((COVKK(I, J), J=1, L), I=1, L)
WRITE(6, 33) K1
WRITE(6, 44) ((GAIN(I, J), J=1, NR), I=1, L)
GO TO 300
90 WRITE(6, 50)
WRITE(6, 44) ((COVKK(I, J), J=1, L), I=1, L)
WRITE(6, 60)
WRITE(6, 44) ((GAIN(I, J), J=1, NR), I=1, L)
WRITE(6, 70)
WRITE(6, 44) (ESTAC(I), I=1, L)
300 CONTINUE
WRITE(6, 182)
WRITE(6, 44) (ESTAC1(I), I=1, L)
WRITE(6, 183)
WRITE(6, 44) (ADEST(I), I=1, L)
100 CONTINUE
STOP
C
C FORMATS DE LECTURE ET D ECRITURE
44 FORMAT(5(1), E13.6)
7 FORMAT(5H DONNEES:)
11 FORMAT(2I3, E13.6, 2I3)
22 FORMAT(5F10.7)
23 FORMAT(5F15.12)
8 FORMAT(22H CONDITIONS INITIALES:)
9 FORMAT(10H MATRICE A)
25 FORMAT(10H MATRICE B)
26 FORMAT(11H MATRICE HK)
27 FORMAT(1X, 10H MATRICE PP)
23 FORMAT(1X, 2H L=, I2, 3H A=, I2, 4H NR=, I2, 3H T=, E13.6, 4H NK=, I2,
* 2H M=, I2)
105 FORMAT(5(1), E13.6)
107 FORMAT(20H VECTEUR DE COMMANDE)
205 FORMAT(1X, 22H MATRICES DISCRETISEES)
305 FORMAT(1X, 11H MATRICE A)
555 FORMAT(//1X, 15H COVARIANCE NU(, I2, 3F/, I2, 3F))
405 FORMAT(1X, 12H MATRICE BCD)
28 FORMAT(1X, 11H MATRICE EDPI)
505 FORMAT(//1X, 8H POUR K=, I2, 6H CN A:, 1X)
111 FORMAT(//1X, 25H MATRICE DE COVARIANCE MU(, I2, 14/, I2, 3F))
```

```
172  FORMAT(1X,7H PRECI=,F10.7,4H XCOY=,F10.7,7H SIGM1=,F10.7,  
*7H SIGM2=,F10.7)  
175  FORMAT(4F10.7)  
182  FORMAT(//1),25H DIFFERENCE ENTRE X ET ESTIME)  
183  FORMAT(//1),27H ECART TYPE DEDUIT DE COVEM)  
233  FORMAT(//1),18H MATRICE DE GAIN G(,I2,1H)  
F05  FORMAT(//1),25H MATRICE DE COVARIANCE C(O/O)  
F05  FORMAT(//1),20H MATRICE DE GAIN C(O)  
F05  FORMAT(//1),16H ESTIMEE DE X: X(,I2,1H/,I2,1H)  
705  FORMAT(//1),20H ESTIMEE DE X: X(O/O)  
F2  FORMAT(22H ESTIMEE INITIALE DE X)  
E2  FORMAT(23H COVARIANCE DU RESULT:FK)  
F1  FORMAT(23H COVARIANCE DU RESULT:CK)  
F0  FORMAT(21H MATRICE DE COVARIANCE INITIALE)  
F5  FORMAT(//1),7H GRADE=,F .3,1X)  
E4  FORMAT(//1),23H COMPOSANTES DU VECTEUR DE MESURE)  
F8  FORMAT(//1),30H COMPOSANTES DU VECTEUR D ETAT)  
END
```

SUBROUTINE MATIN(A,N)

```
C  
C          INVERSION D UNE MATRICE  
C  
DIMENSION A(10,20)  
NP1=N+1  
NN=2*N  
DO 10 I=1,N  
DO 10 J=NP1,NN  
10  A(I,J)=0  
DO 20 I=1,N  
NIP=N+I  
20  A(I,NIP)=1  
DO 15 K=1,N  
DO 30 I=1,N  
IF(I K)40,30,40  
40  R=A(I,K)/A(K,K)  
DO 30 J=1,NN  
A(I,J)=A(I,J)-R*A(K,J)  
30  CONTINUE  
R=A(K,K)  
DO 25 J=1,NN  
25  A(K,J)=A(K,J)/R  
15  CONTINUE  
DO 35 I=1,N  
DO 35 J=1,N  
NPJ=N+J  
35  A(I,J)=A(I,NPJ)  
RETURN  
END
```

```

FUNCTION GRAND(DSI)
EXCEPT ON THE FIRST CALL GRAND RETURNS A
PSEUDO RANDOM NUMBER HAVING A GAUSSIAN (I.E.
NORMAL) DISTRIBUTION WITH ZERO MEAN AND UNIT
STANDARD DEVIATION.  THUS, THE DENSITY IS  $f(x) =$ 
 $\exp(-0.5*x**2)/\sqrt{2.0*PI}$ .  THE FIRST CALL
INITIALIZES GRAND AND RETURNS ZERO.
THE PARAMETER A IS DUMMY.
GRAND CALLS A FUNCTION URAND, AND IT IS ASSUMED THAT
SUCCESSIVE CALLS TO URAND(I) GIVE INDEPENDENT
PSEUDO RANDOM NUMBERS DISTRIBUTED UNIFORMLY ON (0,
1), POSSIBLY INCLUDING 0 (BUT NOT 1).
THE METHOD USED WAS SUGGESTED BY VON NEUMANN, AND
IMPROVED BY FORSITHE, AHREAS, DIETER AND ERENT.
ON THE AVERAGE THERE ARE 1.37746 CALLS OF URAND FOR
EACH CALL OF GRAND.
WARNING - DIMENSION AND DATA STATEMENT BELOW ARE
MACHINE-DEPENDENT.
DIMENSION OF D MUST BE AT LEAST THE NUMBER OF BITS
IN THE FRACTION OF A FLOATING-POINT NUMBER.
THUS, ON MOST MACHINES THE DATA STATEMENT BELOW
CAN BE TRUNCATED.
IF THE INTEGRAL OF  $\sqrt{2.0/PI}*\exp(-0.5*x**2)$  FROM
A(I) TO INFINITY IS  $2**(-I)$ , THEN  $C(I) = A(I)$ 
A(I 1).
COMMON LY
DIMENSION D(60)
DATA D(1), D(2), D(3), D(4), D(5), D(6), D(7),
*D(8), D(9), D(10), D(11), D(12), D(13),
*D(14), D(15)/0.674489750, 0.475859630, 0.383771154, 0.328611323,
*0.291142827, 0.263684322, 0.242508452, 0.225567444, 0.211634166,
*0.199924267, 0.189910758, 0.181225181, 0.173601400, 0.166841909,
*0.160796729/
DATA D(16), D(17), D(18), D(19), D(20), D(21), D(22), D(23), D(24), D(25),
*D(26), D(27), D(28), D(29), D(30), D(31), D(32)/0.155349717,
*0.150409384, 0.145902577, 0.141770033, 0.137963174, 0.134441762,
*0.131172150, 0.128125965, 0.125279090, 0.122610833, 0.120103560,
*0.117741707, 0.115511892, 0.113402349, 0.111402720, 0.109503852,
*0.107697617/
DATA D(33), D(34), D(35), D(36), D(37), D(38),
*D(39), D(40), D(41), D(42), D(43), D(44),
*D(45), D(46), D(47)/0.105976772, 0.104334841, 0.102766012, 0.101265052,
*0.099827234, 0.098448282, 0.097124309, 0.095851778, 0.094627461,
*0.093448407, 0.092311909, 0.091215482, 0.090156838, 0.089133867,
*0.088144619/
DATA D(48), D(49), D(50), D(51), D(52), D(53), D(54), D(55), D(56), D(57),
*D(58), D(59), D(60)/0.087187293, 0.086260215, 0.085361834, 0.084490706,
*0.083645487, 0.082824924, 0.082027847, 0.081253152, 0.080499644,
*0.079766932, 0.079053527, 0.078358781, 0.077681899/
END OF MACHINE-DEPENDENT STATEMENTS
U MUST BE PRESERVED BETWEEN CALLS.
DATA U /C.0/
INITIALIZE DISPLACEMENT A AND COUNTER I.

```

```
REAL FUNCTION URAND(IY)
INTEGER IY
C URAND IS A UNIFORM RANDOM NUMBER GENERATOR BASED ON THEORY AND
C SUGGESTIONS GIVEN IN D.E. KNUTH(1969) VOL 2. THE INTEGER IY
C SHOULD BE INITIALIZED TO AN ARBITRARY INTEGER PRIOR TO THE FIRST
C CALL TO URAND. THE CALLING PROGRAM SHOULD NOT ALTER THE VALUE OF
C IY BETWEEN SUBSEQUENT CALLS TO URAND. VALUES OF URAND WILL BE
C RETURNED IN THE INTERVAL(0,1).
INTEGER IA,IC,ITWO,M2,M,MIC
DOUBLE PRECISION HALFM
REAL S
DOUBLE PRECISION DATA,DSQRT
DATA M2/0/, ITWO /2/
IF(M2 .NE. 0) GO TO 20
C IF FIRST ENTRY, COMPUTE MACHINE INTEGER WORD LENGTH
M = 1
10 M2 = M
M = ITWO*M2
IF(M .GT. M2) GO TO 10
HALFM = M2
IA = 9*IDINT(HALFM*DATAN(1.00)/8.00)+ 5
C COMPUTE MULTIPLIER AND INCREMENT FOR LINEAR CONGRUENTIAL METHOD
IC=2*IDINT(HALFM*(0.5-DSQRT(3.00)/6.00))+1
MIC = (M2 - IC) + M2
C S IS THE SCALE FACTOR FOR CONVERTING TO FLOATING POINT
S = 0.5/HALFM
C COMPUTE NEXT RANDOM NUMBER
20 IY = IY*IA
C THE FOLLOWING STATEMENT IS FOR COMPUTERS WHICH DO NOT ALLOW
C INTEGER OVERFLOW ON ADDITION
IF(IY .GT. MIC) IY = (IY - M2) - M2
IY = IY + IC
C THE FOLLOWING STATEMENT IS FOR COMPUTERS WHERE THE
C WORD LENGTH FOR ADDITION IS GREATER THAN FOR MULTIPLICATION
IF(IY/2 .GT. M2) IY = (IY - M2) - M2
C THE FOLLOWING STATEMENT IS FOR COMPUTERS WHERE INTEGER
C OVERFLOW AFFECTS THE SIGN BIT
IF(IY .LT. 0) IY = (IY + M2) + M2
URAND = FLAT(IY)*S
RETURN
END
```

```
A = 0.0
I = 0
C INCREMENT COUNTER AND DISPLACEMENT IF LEADING BIT
C OF U IS ONE.
10 U = U + U
   IF (U.LT.1.0) GO TO 20
   U = U - 1.0
   I = I + 1
   A = A + D(I)
   GO TO 10
C FORM W UNIFORM ON C .LE W .LT. D(I+1) FROM U.
20 W = D(I+1)*U
C FORM V = 0.5*((W-A)**2 + A**2). NOTE THAT C .LE.V
C .LT. LOG(2).
   V = W * ( 0.5 * W - A )
C GENERATE NEW UNIFORM U.
30 U = URAND(IY)
C ACCEPT W AS A ANDOM SAMPLE IF V .LE. U.
   IF (V.LE.U) GO TO 40
C GENERATE RANDOM V.
   V = URAND(IY)
C LOOP IF U .GT. V.
   IF (U.GT.V) GO TO 30
C REJECT W AND FORM A NEW UNIFORM U FROM V AND J.
   U = (V + U) / (1.0 + V)
   GO TO 20
C FORM NEW U (TO BE USED ON NEXT CALL) FROM U AND V.
40 U = ( U + V ) / ( 1.0 + V )
C USE FIRST BIT OF U FOR SIGAS RETURN NORMAL VARIATE.
   U = U + U
   IF (U.LT.1.0) GO TO 50
   U = U - 1.0
   GRAND = W - A
   RETURN
50 GRAND = A - W
   RETURN
END
```


SUBROUTINE DISC(L,M,N,T,PREC1,A,B,RP,AD,BCD,BDP)

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

SOUS PROGRAMME DE DISCRETISATION
LE SOUS PRCG. TRANSFORME LE SYSTEME CONTINU DEFINI
PAR LES MATRICES A, B, RP EN SYSTEME DISCRET DEFINI
PAR LES MATRICES CORRESPONDANTES RESPECTIVES AD,BCD BDP
ON UTILISE LA METHODE DU DEVELOPPEMENT LIMITE DE
L EXPONENTIELLE MATRICIELLE
SIGNIFICATION DES ARGUMENTS:
A ET AD = MATRICES DE DIM. L,L (DYNAMIQUE DU SYSTEME)
B ET BCD = MATRICES DE DIM. L,N (MODELE DE COMMANDE DETERMINISTE)
RP ET BDP = MATRICES DE DIM. L,M (MODELE DES PERTURBATIONS ALEATOIRE)
T=PERIODE D ECHANTILLONNAGE (DISCRETISATION).
PREC1= NORME MINIMALE DU TERME DU DEV. POUR LEQUEL ON
ARRETE LA SOMMATION

DIMENSION A(10,10), B(10,10), RP(10,10), BCD(10,10), BDP(10,10),
*AD(10,10), UNI(10,10), AT(10,10), PHI(10,10), PHI1(10,10),
*SA(10,10), SB(10,10), AD1(10,10), BC1(10,10), BE(10,10)

```
DO 4 I=1,L
DO 4 J=1,L
IF(I J)2,3,2
2 UNI(I,J)=0
GO TO 4
3 UNI(I,J)=1
4 CONTINUE
DO 1 I=1,L
DO 1 J=1,L
1 AD(I,J)=UNI(I,J)
CALL TMATN(L,L,UNI,T,B)
CALL TMATN(L,L,A,T,AT)
DO 12 I=1,L
DO 12 J=1,L
12 PHI(I,J)=UNI(I,J)
IFACT=1
I=1
5 IFACT=IFACT*I
CALL PROMAT(L,L,L,PHI,T,PHI1)
DO 16 K=1,L
DO 16 J=1,L
16 PHI(K,J)=PHI1(K,J)
XIFACT=1./FLOAT(IFACT)
CALL TMATN(L,L,PHI,XIFACT,SA)
ANORM=0
DO 19 K=1,L
DO 19 J=1,L
19 ANORM=ANORM+ABS(SA(K,J))
IF (ANORM/PREC1)2000,2000,2001
2001 CONTINUE
CALL TMATN(L,L,SA,T/FLOAT(I+1),SB)
CALL SOMAT(L,L,1.,AD,SA,AD1)
CALL SOMAT(L,L,1.,BD,SB,BC1)
DO 17 K=1,L
```

```

DO 17 J=1,L
AD(K,J)=AD1(K,J)
BD(K,J)=BD1(K,J)
17 CONTINUE
CALL PROMAT(L,L,M,BD,B,SCD)
CALL PROMAT(L,L,M,BD,SP,SCP)
I=I+1
GOTO5
2000 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE PROMAT(L,M,N,A,B,C)

```

C ***** PRODUIT DE DEUX MATRICES *****
C
DIMENSION A(10,10),B(10,10),C(10,10)
DO 2 I=1,L
DO 2 K=1,N
C(I,K)=0
DO 2 J=1,M
2 C(I,K)=C(I,K)+A(I,J)*B(J,K)
RETURN
END

```

SUBROUTINE TMA TN(L,M,A,TNB ANB)

```

C ***** MULTIPLICATION D UNE MATRICE PAR UN REEL *****
C
DIMENSION A(10,10),ANB(10,10)
DO 10 I=1,L
DO 10 J=1,P
10 ANB(I,J)=A(I,J)*TNB
RETURN
END

```

SUBROUTINE SOMAT(L,M,AK,A,B,C)

```

C ***** SOMME ALGEBRIQUE DE DEUX MATRICES *****
C
DIMENSION A(10,10),B(10,10),C(10,10)
DO 10 I=1,L
DO 10 J=1,P
10 C(I,J)=A(I,J)+AK*B(I,J)
RETURN
END

```

BIBLIOGRAPHIE

Première Partie : Corrélation - Détection Synchrone :

- [1-1] : J. MAX : Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques. Masson édition 1977.
- [2-1] : Y. LEE : Statistical theory of communication. John Wiley. 1967.
- [3-1] : J. DUPRAZ : Théorie de la communication et liaisons spatiales.
- [4-1] : Catalogue TEKELEC - AIRTRONIC INSTRUMENTATION 1972.

Deuxième Partie : Filtrage de Kalman :

- [1-2] : J. LIFERMANN : Les principes du traitement statistique du signal. Masson. Edition 1981
- [2-2] : J.C. RADIX : Introduction au filtrage numérique : Eyrolles E. 1970.
- [3-2] : R.E. KALMAN : A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans. ASME. 1960.
- [4-2] : IEE : Automatic and Control. 1973.
- [5-2] : P. DE LARMINAT et Y. THOMAS : Automatique des systèmes linéaires Flammarion Edition 1977
- [6-2] : C. FOULARD, S. GENTIL, J.P. SANDRAZ : Commande et régulation par ordinateur numérique : Eyrolles Edition 1979.
- [7-2] : P. PELLETIER : Techniques numériques appliquées au Calcul scientifique. Masson Edition 1971
- [8-2] : M. DREXFUS : Fortran IV. Dunod Edition 1975.