

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

Génie Electrique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Commande optimale
avec
modele de reference.*

Proposé par :

ILLOUL Rachid

Etudié par :

CHABOU Riad

Dirigé par :

ILLOUL Rachid

PROMOTION

Juillet 1993

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

Genie Electrique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Commande optimale
avec
modele de reference.*

Proposé par :

ILLOUL R

Etudié par :

CHABOU R

Dirigé par

ILLOUL R

PROMOTION

Juillet 1993

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

A MES PARENTS :

Les êtres qui me sont les
plus chers, qu'ils trouvent ici
l'expression de mon affection,
mon respect, ma profonde gratitude
et reconnaissance pour tout leurs sacrifices,

A MES FRERES ET SOEURS :

Pour leurs encouragements tout
le long de ma formation,

A TOUS LES COPAINS DE MA PROMOTION :

Avec qui j'ai passé d'agréables moments.

Je dédie ce mémoire

CHABOU RIAD

REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser mes remerciements par le biais de ce mémoire :

— A mon promoteur, M^F ILLOUL RACHID. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour ses critiques instructives pour m'avoir guidé attentivement et pour tout ce qu'il m'a enseigné lors de ma formation.

— A mon enseignant, M^F LOUAM NAJIB. Qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance pour tous les conseils qu'il m'a apporté.

— A mon enseignant, M^F STIHI OMAR. Pour qui, j'éprouve un grand respect à cause de l'aide qu'il a apporté à tous les étudiants.

— A tous les enseignants du génie-électrique qui ont contribué à ma formation.

— A tous les membres du jury qui auront bien voulu juger et évaluer ce modeste travail.

PRINCIPALES NOTATIONS

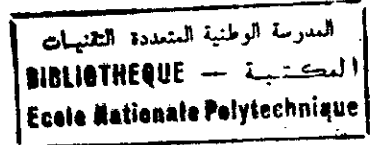
Les matrices sont représentées par des lettres majuscules;
 exemple : A .

Les vecteurs (colonnes) sont représentés par des lettres
 minuscules soulignées; exemple : \underline{x}

Notations utilisées dans le mémoire :

- \underline{u} : entrées-actions ($r \times 1$).
- \underline{Y} : sorties ($m \times 1$).
- \underline{x} : variables d'état ($n \times 1$).
- t : temps (continu).
- T : période d'échantillonnage.
- iT : ou i , temps (discret).
- A : matrice d'état ($n \times n$).
- B : matrice d'entrée ($n \times n$).
- C : matrice de sortie ($m \times n$).
- D : matrice de couplage ($m \times r$).
- A^T : transposée de la matrice A .
- J : critère à minimaliser.
- N : horizon d'optimisation.
- L : matrice de retour d'état.
- K : matrice de **RICCATI** ($n \times n$).
- N : matrice d'anticipation ($r \times n$).
- \underline{z} : vecteur de consigne ($m \times 1$).
- \underline{v} : vecteur des sorties des intégrateurs ($m \times 1$).
- M : matrice de gain des intégrateurs ($r \times m$).
- E, F, H : matrices de représentation d'état du modèle de référence.
- \underline{w} : sortie du modèle de référence, sorties désirées ($m \times 1$).
- \underline{s} : vecteur d'état du modèle de référence (1×1).
- \underline{P} : matrice d'anticipation à partir des variables d'état du modèle de référence ($r \times 1$).
- $\underline{\pi}$: vecteur des perturbations mesurables ($q \times 1$).
- \underline{v} : vecteur d'état du modèle des perturbations mesurables.
- A_3, B_3, C_3 : matrices de la représentation d'état du modèle des perturbations mesurables ($r \times q$).
- T : matrice d'anticipation à partir des variables d'état des perturbations mesurables ($r \times q$).
- W : matrice d'anticipation à partir des perturbations mesurables ($r \times p$).

SOMMAIRE



INTRODUCTION.....	1
Chapitre 1: COMMANDE PAR CRITERE QUADRATIQUE	3
Introduction.....	3
1.1 Méthode utilisée	3
1.2 Forme générale de la comande	5
1.3 Utilisation pratique	7
Remarques	8
Chapitre 2: AMELIORATION DE LA STRUCURE DE COMMANDE	9
Introduction	9
2.1 Annulation des erreurs permanentes	10
2.2 Prise en compte d'un modèle de référence	15
2.3 Prise en compte des perturbations mesurables	22
Remarques	23
Chapitre 3: IMPLEMENTATION SUR CALCULATEUR	25
Introduction	25
3.1 Choix du modèle de référence	25
3.2 Choix des matrices de pondération	25
3.3 Etapes de calcul	27
3.4 Remarques importantes	28
Chapitre 4: APPLICATION A UN PROCEDE REEL	30
Introduction	30
4.1 Présentation du système	30
4.2 Calcul de la commande et simulation	33
4.3 Interprétation des résultats	37
Remarques	39
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	46
REFERENCES	48

INTRODUCTION

Une question qui mérite d'être posée, est, pourquoi utiliser une commande optimale?

Nous connaissons, pour un système SISO, la méthode de conception d'un compensateur consistant à placer les pôles en boucle fermée à l'endroit désiré.

Pour un système MIMO, cette technique ne pourrait spécifier complètement les paramètres (gains) du régulateur. En effet, il y'a une infinité de chemins par lesquels les mêmes pôles en boucle fermée peuvent être obtenus. Il s'agira donc de trouver un algorithme qui détermine des gains de retour et d'anticipation qui permettent à une loi de commande qui optimise des performances bien définies. L'ingénieur chargé de la conception de la commande a des objectifs relatifs à la stabilité, au degré de stabilité, au temps de réponse, à la précision; il sait également que l'énergie qu'il peut appliquer au système est limitée.

La plupart de ces indices de qualité sont en contradiction : il est bien connu que pour une configuration donnée, la stabilité diminue lorsque la précision augmente; de même, l'énergie appliquée au système augmente quand on veut diminuer le temps de réponse. Toute solution est donc le fruit d'un compromis, que l'on établit par rapport à un critère donné. Minimiser une somme quadratique pour réaliser un critère.

En effet, la minimisation d'un critère quadratique constitue l'un des moyens de parvenir à la détermination d'une structure de commande par retour d'état pour les systèmes linéaires multidimensionnels. Pour les systèmes linéaires, la minimisation du critère est simple, de plus elle nous permet d'obtenir une structure de commande unique et linéaire dite optimale.

Avec les moyens actuels de calcul, l'implémentation de la commande optimale est devenue une chose aisée. Plusieurs applications industrielles réussies sont disponibles, elles ont permis d'améliorer sensiblement les performances des systèmes par rapport à des correcteurs classiques (PID).

Pour un modèle mathématique donné sous forme d'équations d'état, il s'agira dans le premier chapitre de ce présent travail de proposer une méthode de synthèse pour la régulation et la commande par critère quadratique dont les bases ont été jetées par **KALMAN** [6].

Au second chapitre, des solutions seront proposées pour l'amélioration de la structure de commande optimale, en effet, à cause des imperfections des modèles et de la présence des perturbations non mesurables, cette commande optimale n'est pratiquement pas applicable telle quelle mais le devient lorsqu'on introduit des intégrateurs, elle est encore plus performante si l'on prend en compte un modèle de référence et si l'on introduit la compensation des perturbations mesurables.

Au dernier chapitre des études de simulation seront appliquées à un procédé réel dont le modèle mathématique est déjà établi.

CHAPITRE 1

COMMANDE PAR CRITERE QUADRATIQUE

Introduction.

1.1. Méthode utilisée.

1.2. Forme générale de la commande.

1.3. Utilisation pratique.

Remarques.

1. COMMANDE PAR CRITERE
QUADRATIQUE

INTRODUCTION

Plusieurs théories permettent de traiter le problème de la commande des systèmes linéaires par minimisation d'un critère quadratique. La plus ancienne des théories, est celle basée sur le principe de **Pontryaguine**[4], la seconde est celle qui utilise la programmation dynamique de **Bellman**[3], plus simple; donc qui sera utilisée pour solutionner notre problème. Sa simplicité provient de la simplicité du principe même et du fait qu'elle nous permet d'établir une commande optimale de manière itérative.

1.1 Méthode utilisée

1.1.1 Principe d'optimalité de Bellman [3] :

Si l'ensemble des actions correspondant à un problème **P** est optimal, l'ensemble des actions correspondant au problème partiel **P1** doit l'être également, quelles que soient les données du problème initial **P** et les actions déjà réalisées pour passer de **P** à **P1**.

On appliquera ce principe à la détermination de la loi de commande minimisant le critère quadratique.

1.1.2 Application du principe d'optimalité :

Nous considérons un système linéaire discret à **n** variables d'état, **r** entrées et **m** sorties, défini par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \underline{x}(i+1) = A \underline{x}(i) + B \underline{u}(i) + \underline{f} \\ \underline{y}(i) = C \underline{x}(i) + D \underline{u}(i) \end{cases}$$

où \underline{f} : vecteur constant de dimension **n**.

La commande optimale recherchée est une suite de vecteur $\underline{u}(i)$ qui minimise le critère quadratique suivant :

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} \{ \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) + \underline{e}^T(i) Q \underline{e}(i) \}$$

$\underline{e}(i)$ est un vecteur d'écart : $\underline{e}(i) = \underline{z} - \underline{y}(i)$

\underline{z} : vecteur de consigne.

$\underline{y}(i)$: vecteur des sorties.

R et Q sont deux matrices carrées, symétriques, définies positives, de dimensions respectives ($r \times r$) et ($m \times m$), très souvent choisies diagonales.

On considère le problème commençant à un instant i quelconque compris dans l'intervalle $[0, N]$, pour lequel l'état du système est défini par le vecteur d'état $\underline{x}(i)$, on se propose d'étudier la valeur optimale $J[\underline{x}(i)]$ d'un critère quadratique J_i défini par :

$$J_i = \sum_{j=i}^{N-1} \{ \underline{u}^T(j) R \underline{u}(j) + \underline{e}^T(j) Q \underline{e}(j) \}$$

On voit bien que le critère minimal peut se définir par récurrence:

$$\hat{J}[\underline{x}(i)] = \min_{\underline{u}} \{ \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) + \underline{e}^T(i) Q \underline{e}(i) + \hat{J}[\underline{x}(i+1)] \} \quad (1.3)$$

Si l'état final est libre, la récurrence commencera de $\hat{J}[\underline{x}(N)] = 0$.

Remarque: On constate que la détermination de la commande optimale s'effectue en temps inverse; nécessite donc que la commande soit calculée sur la totalité de l'intervalle de temps $[0, N]$ avant de commencer à l'appliquer.

1.2 Forme générale de la commande

L'équation (1.3) s'écrit :

$$\hat{J}[\underline{x}(i)] = \min_{\underline{u}} \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) + \underline{e}^T(i) Q \underline{e}(i) + \hat{J}[\underline{x}(i+1)] \quad (1.4)$$

On démontre [1] que, \hat{J} est une forme quadratique; idem pour \hat{J}_{i+1}

$$\hat{J}[\underline{x}(i+1)] = \underline{x}^T(i+1) K(i+1) \underline{x}(i+1) + 2 \underline{g}^T(i+1) \underline{x}(i+1) + \underline{h}(i+1) \quad (1.5)$$

avec:

$K(i+1)$: matrice carrée symétrique

$\underline{g}(i+1)$: vecteur de dimension n

$\underline{h}(i+1)$: scalaire

Notation:

Dans toute la suite, les indices (i) seront supprimés et les indices (i+1) remplacés par (+).

En remplaçant (1.5) dans (1.4) et en utilisant les équations d'état (1.1) du système on aboutit à l'expression, en fonction de $\underline{u}(i)$, du critère optimale :

$$J[\underline{x}] = \underline{u}^T R \underline{u} + [\underline{z} - \underline{C}\underline{x} - \underline{D}\underline{u}]^T Q [\underline{z} - \underline{C}\underline{x} - \underline{D}\underline{u}] + [\underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} + \underline{f}]^T K(+) [\underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} + \underline{f}] + 2 \underline{g}^T(+) [\underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} + \underline{f}] + \underline{h}(+) \quad (1.6)$$

Le minimum correspondant au vecteur \underline{u} annulant les dérivées partielles de cette expression par rapport à \underline{u} ; donc :

$$2 [R \hat{\underline{u}} - D^T Q (\underline{z} - \underline{C}\underline{x} - \underline{D}\hat{\underline{u}}) + B^T K(+) (\underline{A}\underline{x} + \underline{B}\hat{\underline{u}} + \underline{f}) + B^T \underline{g}(+)] = \underline{0}$$

Soit encore :

$$[R + B^T K(+) B + D^T Q D] \underline{u} = - [B^T K(+) A + D^T Q C] \underline{x} + D^T K \underline{z} - B^T [\underline{g}(+) + K(+) \underline{f}] \quad (1.7)$$

Il suffit que le déterminant de $[R + B^T K(+) B + D^T Q D]$ soit non nul pour écrire:

$$\hat{u}(i) = -L(i) x(i) + \underline{\mu}(i) \quad (1.8)$$

Pour que cette commande corresponde bien à un minimum du critère, il faut vérifier que les conditions du second ordre sont satisfaites également. L'expression des dérivées partielles secondes est:

$$R + D^T Q D + B^T K(+) B$$

Or, il suffit que les matrices R et Q soient définies positives pour que le résultat de l'expression précédente soit définie positive.

D'après (1.7), $L(i)$ et $\underline{\mu}(i)$ sont respectivement une matrice ($r \times n$) et un vecteur de dimension r définis par :

$$L(i) = [R + B^T K(+) B + D^T Q D]^{-1} [B^T K(+) A + D^T Q C] \quad (1.9)$$

$$\underline{\mu}(i) = [R + B^T K(+) B + D^T Q D]^{-1} (D^T K \underline{z} - B^T [\underline{g}(+) + K(+) \underline{f}]) \quad (1.10)$$

On démontre [1] que :

$$K(i) = \Omega K(+) [A - B L(i)] + \Phi C \quad (1.11)$$

$$\underline{g}(i) = \Omega \{ \underline{g}(+) + K(+) [B \underline{\mu}(i) + \underline{f}] \} - \Phi \underline{z} \quad (1.12)$$

Avec les constantes :

$$\begin{aligned} \Omega &= A^T - C^T Q D (R + D^T Q D)^{-1} B^T \\ \Phi &= C^T Q - C^T Q D (R + D^T Q D)^{-1} D^T Q \end{aligned} \quad (1.13)$$

Remarque : Une remarque doit être soulevée à ce niveau; tous les résultats établis jusqu'à présent restent valables si toutes les matrices ($A, B, C, D, Q, R \dots$) et tous les vecteurs ($\underline{f}, \underline{z} \dots$) sont fonctions du temps.

1.3 Utilisation pratique

La commande optimale $\underline{u}(i) = -L(i) \underline{x}(i) + \underline{\mu}(i)$ comporte un terme de correction par retour d'état et un terme anticipatif.

La présence d'un retour d'état est particulièrement intéressante pour l'automaticien qui se trouve ainsi ramené, en quelque sorte, à une structure comparable aux traditionnelles "boucles fermées" des régulateurs monovariabiles classiques. L'avantage de ces compensations en réaction est bien sûr de permettre de tenir compte en permanence de l'état réel du système physique, et donc de réagir sur lui en conséquence pour choisir le comportement souhaité.

La réalisation pratique de la commande telle qu'elle a été précédemment définie nécessite de précalculer la matrice $L(i)$ et le vecteur $\underline{\mu}(i)$ pour tous les instants d'action de l'horizon considéré. L'ensemble de ces éléments doit être, en effet, entièrement connu au moment de la mise en oeuvre de la commande optimale, puisque les relations de récurrences sont définies en temps inverse. Cela supposerait, donc, de reprendre les calculs et d'en mémoriser tous les résultats par exemple avant chaque changement de consigne. Il est évident que cela peut constituer, une contrainte importante pour le calculateur industriel couplé au procédé.

Il est donc particulièrement intéressant, pour la majorité des applications pratiques en milieux industriels, de considérer l'horizon d'optimisation comme infini, ou tout au moins comme très grand par rapport à l'échelle de temps des phénomènes physiques concernés; par conséquent le critère quadratique devient :

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \{ \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) + \underline{e}(i)^T Q \underline{e}(i) \} \quad (1.14)$$

Il faut remarquer que pour un horizon d'optimisation fini, la commande optimale existe toujours [4], le problème pourrait se poser lorsque l'horizon d'optimisation est infini, dans ce cas certaines conditions sur la commandabilité et l'observabilité du système doivent être vérifiées, [7], [8] ont énoncé des théorèmes en disant, qu'il suffisait que le système soit commandable pour que l'équation récurrente (1.11) ou (1.12) converge. D'autres mathématiciens font intervenir la notion d'observabilité [4]. Pour éviter toute confusion, les systèmes auxquels seront appliqués notre algorithme d'optimisation, seront commandables et observables.

On démontre que le passage au cas de l'horizon infini, pour un système vérifiant les conditions requises, est également possible; dans ce cas le vecteur $\underline{g}(i)$ peut alors être assimilé à un vecteur constant \underline{g} solution limite de (1.12), la matrice $\mathbf{K}(i)$ à une matrice constante \mathbf{K} solution limite de (1.11), à condition, bien sûr, que le vecteur des consignes \underline{z} soit lui même constant (c'est à dire qu'il ne soit pas modifiable que sous forme d'échelon à l'instant initial considéré) [1], et dans ces conditions, la matrice \mathbf{L} et le vecteur $\underline{\mu}$ sont donc constants leurs expressions lorsque les limites finies de $\mathbf{K}(i)$ et $\underline{g}(i)$ sont atteintes, deviennent :

$$\mathbf{L} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} + \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{A} + \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \quad (1.15)$$

$$\underline{\mu} = +(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} + \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \mathbf{D})^{-1} \{ \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \underline{z} - \mathbf{B}^T (\underline{g} + \mathbf{k} \underline{f}) \} \quad (1.16)$$

Remarques:

- Des développements mathématiques nombreux et puissants s'imposent lors du calcul de la commande optimale, il est préférable d'utiliser un langage de programmation dirigé dans le calcul matriciel, pour élaborer l'algorithme d'optimisation.

- Pour des systèmes physiques propres (la matrice \mathbf{D} nulle), les formules déjà établies se trouvent encore plus simplifiées [1]

- On démontre que le système stationnaire bouclé par la matrice \mathbf{L} ainsi obtenue est toujours stable. Intuitivement, ceci est justifiable, car dans le cas contraire, le critère quadratique (1.14) prendrait une valeur infinie que ne pourrait représenter le minimum du critère.

CHAPITRE 2

AMELIORATION DE LA STRUCTURE DE COMMANDE

Introduction.

2.1. Annulation des erreurs permanentes.

2.2. Prise en compte d'un modèle de référence.

2.3. Prise en compte des perturbations mesurables.

Remarques.

2. AMELIORATION DE LA STRUCTURE DE COMMANDE

INTRODUCTION

La méthode décrite au chapitre précédent est très générale, et les algorithmes de calcul correspondant s'appliquent à toute représentation d'état discrète vérifiant les conditions requises.

Le système d'équations d'état à partir duquel s'effectue la détermination des matrices de commande peut évidemment ne représenter que le procédé physique étudié lui-même, mais on peut adjoindre à ce modèle de base initial d'autres équations caractérisant certains dispositifs numériques jugés intéressants pour le problème considéré. Ces éléments annexes, pris en compte dans le calcul de la structure de commande, ont pour but d'en améliorer les performances dans des conditions de fonctionnement recouvrant une très large part des utilisations prévisibles.

On s'aperçoit en effet que la structure de commande élaborée en ne considérant que le procédé physique lui-même, présente des insuffisances évidentes liées au principe de la méthode retenue, et qui risquerait d'en restreindre sérieusement le domaine d'emploi. Il apparaît donc intéressant de chercher à perfectionner l'ensemble de commande tout en conservant les avantages fondamentaux assurés par cette méthode basée sur l'optimisation quadratique. Diverses améliorations très notables sont ainsi possibles sans compliquer outre mesure les calculs et la mise en oeuvre. Pour ces extensions, une étude détaillée permet de mettre en évidence des séparations simples entre différents aspects du problème considéré, conduisant ainsi à une présentation assez modulaire des éléments correspondants.

2.1 Annulation des erreurs permanentes

Comme il est connu en automatique, l'introduction d'intégrateurs dans une boucle de régulation ou d'asservissement, sert à annuler les erreurs de réponses en régime permanent. En effet, la structure de commande précédemment définie présente l'inconvénient de ne pas assurer des erreurs permanentes nulles. Pour améliorer la structure de commande déjà établie, il est nécessaire de lui adjoindre des intégrateurs numériques qui ont pour entrées respectives les écarts entre consignes et mesures correspondantes.

Le nombre d'intégrateurs qu'il est possible d'ajouter à la structure de commande n'est pas arbitraire, **M. FOND**[5] a énoncé une condition nécessaire et suffisante pour que le système élargi demeure commandable (on rappelle que cette commandabilité est une condition nécessaire pour l'existence de la commande optimale pour un horizon infini). D'une manière très globale, on peut retenir de cette condition, qu'il faudrait un nombre d'intégrateurs inférieur ou égal au nombre d'entrées. Dans notre cas, on supposera que chaque sortie à commander est munie d'un intégrateur. Chaque intégrateur numérique est approximé par la méthode des rectangles; donc :

$$\underline{v}(i+1) = \underline{v}(i) + T \cdot \underline{e}(i)$$

\underline{v} : vecteur de dimension m

T : période d'échantillonnage

En divisant par T le gain des éléments de l'intégrateur on obtient: $\underline{v}(i+1) = \underline{v}(i) + \underline{e}(i)$

$$\underline{v}(i+1) = \underline{v}(i) - C\underline{x}(i) - D\underline{u}(i) + \underline{z} \quad (2.1)$$

Le système élargi, de dimension $(n+m)$, a ainsi pour équations d'états (si on suppose $\underline{f}=0$) :

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(i+1) \\ \underline{v}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(i) \\ \underline{v}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ -\mathbf{D} \end{bmatrix} \underline{u}(i) + \begin{bmatrix} \underline{o} \\ \underline{z} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{y}(i) \\ \underline{v}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(i) \\ \underline{v}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \underline{u}(i)$$

Le vecteur de sortie devient de dimension $2m$, avec \mathbf{I} une matrice unitaire de rang m .

La représentation précédente peut être mise sous la forme condensée suivante :

$\underline{x}_1(i+1) = \mathbf{A}_1 \underline{x}_1(i) + \mathbf{B}_1 \underline{u}(i) + \underline{f}_1$ $\underline{y}_1(i+1) = \mathbf{C}_1 \underline{x}_1(i) + \mathbf{D}_1 \underline{u}(i)$	(2.3)
---	-------

\mathbf{A}_1 : matrice de dimension $[(n+m) \times (n+m)]$

$\mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1$: matrices de dimensions respectives $[(n+m) \times r]$, $[2m \times (n+m)]$, $(2m \times r)$.

\underline{f}_1 : vecteur de dimension $[(n+m) \times 1]$

Le critère J_1 à minimiser sur un horizon N a, dans ce cas, pour expression:

$$J_1 = \sum_{i=0}^{N-1} \{ \underline{e}_1^T(i) \mathbf{Q}_1 \underline{e}_1(i) + \mathbf{R} \underline{u}^T(i) \}$$

\mathbf{Q}_1 : matrice de pondération définie positive $(2m \times 2m)$

\underline{e}_1 : vecteur d'écart "globale" $(2m \times 1)$.

Ces deux éléments définis par :

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{e}_1(i) = \begin{bmatrix} \underline{z} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{y}(i) \\ \underline{v}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}(i) \\ -\underline{v}(i) \end{bmatrix}$$

En utilisant ces définitions, J_1 devient :

$$J_1 = \sum_{i=0}^{N-1} \{ \underline{e}^T(i) Q \underline{e}(i) + \underline{v}^T(i) Q_v \underline{v}(i) + \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) \}$$

Pour le système (2.3) élargi, la commande optimale minimisant le critère J_1 est :

$$\hat{\underline{u}}(i) = -L_1(i) \underline{x}_1(i) + \underline{\mu}_1(i) \quad (2.4.a)$$

La matrice L_1 est décomposable en L , M de dimensions respectives $(r \times n)$ et $(r \times m)$. Par suite :

$$\hat{\underline{u}}(i) = -L(i) \underline{x}(i) - M(i) \underline{v}(i) + \underline{\mu}_1(i) \quad (2.4.b)$$

en se basant sur les résultats du chapitre précédent, les relations de récurrence permettent de déterminer, en temps inverse, le nouveau vecteur de commande optimale $\underline{u}(i)$ sont :

$$\begin{aligned} L_1(i) &= [R + B_1^T K_1(i+1) B_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} [B_1^T K_1(i+1) A_1 + D_1^T Q_1 C_1] \\ \underline{\mu}_1(i) &= [R + B_1^T K_1(i+1) B_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} \{ D_1^T Q_1 \underline{z}_1 - B_1^T [\underline{g}_1(i+1) + K_1(i+1) \underline{f}_1] \} \\ \hat{\underline{u}}(i) &= -L_1(i) \underline{x}_1(i) + \underline{\mu}_1(i) \quad (2.5.a) \\ K_1(i) &= \Omega_1 K_1(i+1) [A_1 - B_1 L_1(i)] + \Phi_1 C_1 \\ \underline{g}_1(i) &= \Omega_1 \{ \underline{g}_1(i+1) + K_1(i+1) [B_1 \underline{\mu}_1(i) + \underline{f}_1] \} - \Phi_1 \underline{z}_1 \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 K_1(N) &= 0, \quad \underline{g}_1(N) = 0 \\
 \Omega_1 &= A_1^T - C_1^T Q_1 D_1 (R + D_1^T Q_1 D_1)^{-1} B_1^T \\
 \Phi_1 &= C_1^T - C_1^T Q_1 D_1 (R + D_1^T Q_1 D_1)^{-1} D_1^T Q_1
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dans une application industrielle l'horizon d'optimisation est considéré comme infini. En remplaçant (i+1) par j et i par (j+1), les équations (2.5.a) deviennent :

$$\begin{aligned}
 L_1(j+1) &= [R + B_1^T K_1(j) B_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} [B_1^T K_1(j) A_1 + D_1^T Q_1 C_1] \\
 \underline{\mu}_1(j+1) &= [R + B_1^T K_1(j) B_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} \{ D_1^T Q_1 \underline{z}_1 - B_1^T [\underline{g}_1(j) + K_1(j) \underline{f}_1] \} \\
 K_1(j+1) &= \Omega_1 K_1(j) [A_1 - B_1 L_1(j+1)] + \Phi_1 C_1 \\
 \underline{g}_1(j+1) &= \Omega_1 \{ \underline{g}_1(j) + K_1(j) [B_1 \underline{\mu}_1(j) + \underline{f}_1] \} - \Phi_1 \underline{z}_1
 \end{aligned} \tag{2.5.b}$$

Les conditions initiales : $K_1(N) = 0, \quad \underline{g}_1(N) = 0$

Lorsque les solutions limites constantes sont atteintes, la commande optimale est de la forme :

$$\hat{\underline{u}}(i) = -L \underline{x}(i) - M \underline{v}(i) + \underline{\mu}_1 \tag{2.4.c}$$

Foulard [1] propose une démonstration pour mettre en évidence que, $\underline{\mu}_1 = N \underline{z}$, avec :

$$N = (R + B_1^T K_1 B_1 + D_1^T Q_1 D_1)^{-1} \{ D_1^T Q_1 H_a - B_1^T [I - (A_1 - B_1 L_1)^T]^{-1} \{ (D_1 L_1 - C_1)^T Q_1 H_a + K_1 H_b \} \} \tag{2.7}$$

d'où :

$$\hat{\underline{u}}(i) = -L \underline{x}(i) - M \underline{v}(i) + N \underline{z} \tag{2.4.d}$$

Ainsi le schéma général de la structure de commande avec action intégrale est représenté sur la figure (2.1) :

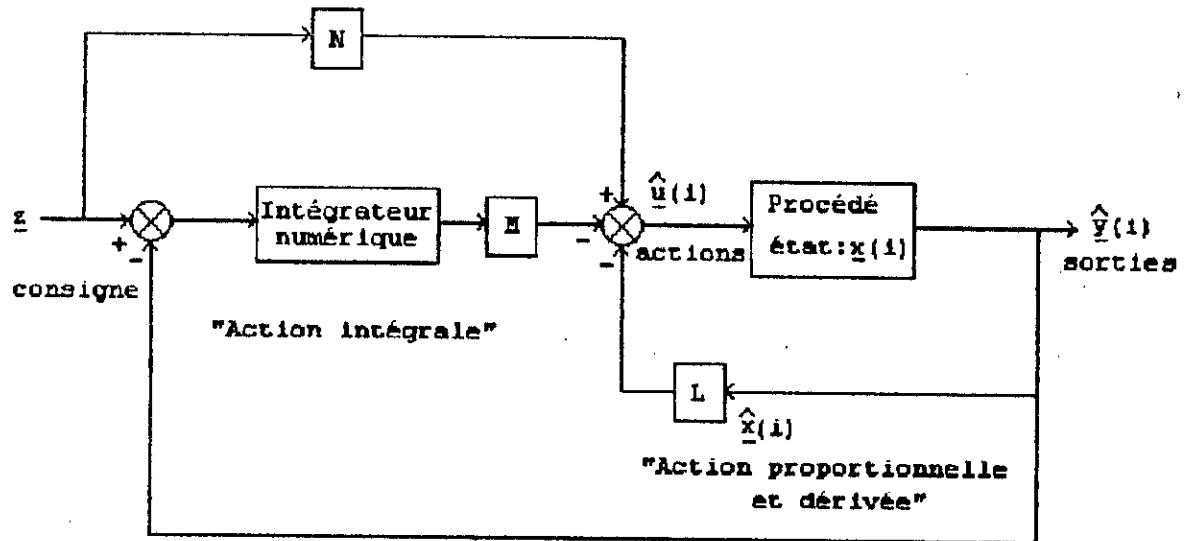


schéma général de la commande avec action intégrale

figure (2.1)

2.2 Prise en compte d'un modèle de référence

Pour un fonctionnement en asservissement, c'est à dire pour des changements de consigne, la commande calculée dans le chapitre précédent, s'avère inacceptable dans certaines applications industrielles. En effet le critère devant être minimisé est une fonction des écarts entre ces consignes et les mesures correspondantes.

La commande tend donc à rapprocher la réponse du système d'une évolution en échelon et, pour réaliser en quelque sorte une compensation de la dynamique du procédé, les amplitudes des premières actions introduites par le terme (Nz) sont généralement très fortes, souvent égales à plusieurs fois les valeurs permanentes finalement atteintes.

Dans l'industrie il n'est jamais souhaitable d'imposer aux actionneurs et au procédé des variations aussi brutales. On peut bien évidemment, pour corriger cet état de fait, changer les coefficients de la matrice de pondération R en augmentant leur valeurs pénalisant ainsi les entrées du système (commandes), en effet ce-ci est possible mais ne constitue pas une bonne solution car les boucles de réaction seront lentes. Pour conserver un bon fonctionnement dans les deux cas, régulation et asservissement, on propose d'introduire dans la structure de la commande un " modèle de référence " ayant pour entrées le vecteur z des consignes.

Une autre façon de voir, l'introduction d'un modèle de référence dans une boucle d'asservissement sert à imposer une forme d'évolution souhaitée pour le vecteur des sorties $y(i)$ du procédé, pendant le régime transitoire. Ce modèle de référence peut être considéré comme un processus générateur parallèle au système physique, dont il représenterait le fonctionnement idéal désiré lors des changements intervenant sur les valeurs des consignes.

Considérons la représentation d'état pour le processus générateur :

$$\begin{cases} \underline{s}(i+1) = E \underline{s}(i) + F \underline{z} \\ \underline{w}(i) = H \underline{s}(i) \end{cases} \quad (2.8)$$

$\underline{s}(i)$: vecteur d'état du modèle de référence, de dimension 1

$\underline{z}(i)$: vecteur des consignes imposées au procédé, de dimension m

$\underline{w}(i)$: vecteur des sorties du modèle de référence, de dimension m

E, F et H sont des matrices à coefficients constants, respectivement de dimension (1×1) , $(1 \times m)$ et $(m \times 1)$.

La figure (2.2) illustre le couplage du modèle de référence au système à asservir :

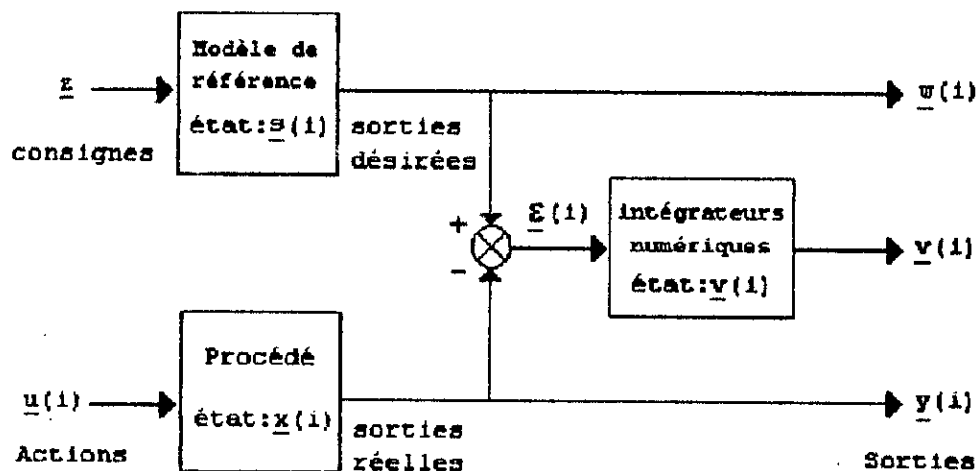


Figure 2.2 - Entrées, sorties et états du système considéré

Les équations (1.1), (2.1) et (2.8) écrites ensembles forment le système (on suppose toujours $\underline{f} = 0$) :

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(i+1) \\ \underline{y}(i+1) \\ \underline{z}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -C & I & H \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(i) \\ \underline{v}(i) \\ \underline{z}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -D \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}(i) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Fz \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{y}(i) \\ \underline{v}(i) \\ \underline{w}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(i) \\ \underline{v}(i) \\ \underline{z}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}(i)$$

Comme il est montré à la figure (2.2), ce sont les écarts : $\underline{\varepsilon}(i) = \underline{w}(i) - \underline{y}(i)$ qui sont utilisées par les intégrateurs
On peut écrire aussi :

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_1(i+1) \\ \underline{z}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & H_1 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1(i) \\ \underline{z}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}(i) + \begin{bmatrix} 0 \\ Fz \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}(i) \\ \underline{v}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1' & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1(i) \\ \underline{z}(i) \end{bmatrix} + D_1' \underline{u}(i)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} ; \quad C_1' = \begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} ; \quad H_2 = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad D_1' = \begin{bmatrix} -D \\ 0 \end{bmatrix}$$

De dimensions respectives : $[(n+m) \times (n+m)]$, $[2m \times (n+m)]$, $[(n+m) \times 1]$, $[2m \times 1]$ et $[2m \times r]$:

En adoptant des notations condensées, (2.10) devient :

$$\begin{cases} \underline{x}_2(i+1) = A_2 \underline{x}_2(i) + B_2 \underline{u}(i) + \underline{f}_2 \\ \underline{y}_2(i) = C_2 \underline{x}_2(i) + D_2 \underline{u}(i) \end{cases} \quad (2.11)$$

Les éléments A_2 , B_2 , f_2 , C_2 , D_2 sont respectivement de dimensions : $[(n+m+1) \times (n+m+1)]$, $[(n+m+1) \times r]$, $[(n+m+1) \times 1]$, $[2m \times (n+m+1)]$ et $[2m \times r]$.

Il faut remarquer que le vecteur de consigne \underline{z}_2 de dimension $2m$ correspondant au vecteur de sortie global \underline{y}_2 sera toujours identiquement nul, puisque la commande doit tendre à annuler $\underline{y}_2(i)$ c'est à dire $\underline{\epsilon}(i)$ et $\underline{v}(i)$.

Le critère J_2 à minimiser sur un horizon N , a dans ce cas pour expression :

$$J_2 = \sum_{i=0}^{N-1} \{ \underline{e}_2^T(i) Q_1 \underline{e}_2(i) + \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) \}$$

Soit :

$$J_2 = \sum_{i=0}^{N-1} \{ \underline{\epsilon}^T(i) Q \underline{\epsilon}(i) + \underline{v}^T(i) Q_u \underline{v}(i) + \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) \}$$

En utilisant les résultats du premier chapitre, les relations de récurrence permettant de déterminer, en temps inverse, le nouveau vecteur de commande optimale $\underline{\hat{u}}(i)$, sont :

$$\begin{aligned} L_2(i) &= [R + B_2^T K_2(i+1) B_2 + D_2^T Q_1 D_2]^{-1} [B_2^T K_2(i+1) A_2 + D_2^T Q_1 C_2] \\ \underline{\mu}_2(i) &= [R + B_2^T K_2(i+1) B_2 + D_2^T Q_1 D_2]^{-1} B_2^T [\underline{g}_2(i+1) + K_2(i+1) \underline{f}_2] \\ \underline{\hat{u}}(i) &= L_2(i) \underline{x}_2(i) + \underline{\mu}_2(i) \\ K_2(i) &= \Omega_2 K_2(i+1) [A_2 - B_2 L_2(i)] + \Phi_2 C_2 \\ \underline{g}_2(i) &= \Omega_2 \{ \underline{g}_2(i+1) + K_2(i+1) [B_2 \underline{\mu}_2(i) + \underline{f}_2] \} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les matrices Ω_2 et Φ_2 , de dimensions respectives :
 $[(n+m+1) \times (n+m+1)]$ et $[(n+m+1) \times 2m]$ sont calculées à l'aide
 des expressions :

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= A_2^T - C_2^T Q_1 D_2 (R + D_2^T Q_1 D_2)^{-1} B_2^T \\ \Phi_2 &= C_2^T Q_1 - C_2^T Q_1 D_2 (R + D_2^T Q_1 D_2)^{-1} D_2^T Q_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

On peut décomposer ces différentes équations pour faire
 apparaître certaines expressions précédemment établies.

La matrice symétrique K_2 peut se mettre sous la forme :

$$K_2 = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{21} \\ \hline K_{12} & K_{22} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} (n+m) \\ 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (n+m) \\ 1 \end{array}$$

De même, la matrice de bouclage L_2 , peut être décomposée
 de telle sorte que :

$$L_2 = \left[\begin{array}{c|c} L_{21} & L_{22} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} (n+m) \\ 1 \end{array} \right\} r$$

On démontre [1] que : $L_{21} = L_1$, $K_{11} = K_1$
 et en posant $P = -L_{22}$ [1] établit les formules
 de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned}
L_1(i) &= [R + B_1^T K_1(i+1) B_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} [B_1^T K_1(i+1) A_1 + D_1^T Q_1 C_1] \\
P(i) &= [R + B_1^T K_1(i+1) B_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} \{D_1^T Q_1 H_2 - B_1^T [K_1(i+1) H_1 + K_{21}(i+1) E]\} \\
\underline{\mu}_2(i) &= - [R + B_1^T K_1(i+1) B_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} B_1^T \underline{h}_2(i+1) \\
\underline{\hat{u}}(i) &= -L_1(i) \underline{x}_1(i) + P(i) \underline{s}(i) + \underline{\mu}_2(i) \quad (2.15) \\
K_1(i) &= \Omega_1 K_1(i+1) [A_1 - B_1 L_1(i)] + \Phi_1 C_1 \\
K_{21}(i) &= [A_1 - B_1 L_1(i)]^T [K_1(i+1) H_1 + K_{21}(i+1) E] - [C_1 - D_1 L_1(i)]^T Q_1 H_2 \\
\underline{h}_2(i) &= [A_1 - B_1 L_1(i)]^T \underline{h}_2(i+1) + K_{21}(i+1) \underline{f} \underline{z}
\end{aligned}$$

Avec les conditions : $K_1(N) = 0$; $K_{21}(N) = 0$; $\underline{h}_2(N) = \underline{0}$

Application Industrielle

Dans une application industrielle, où l'horizon d'optimisation est infini, tous les éléments définis dans le système (2.15) convergeront vers des limites constantes, tels que $P(i)$ et $\underline{\mu}_2(i)$ deviennent respectivement :

$$\begin{aligned}
P &= [R + B_1^T K_1 B_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} [D_1^T Q_1 H_2 - B_1^T (K_1 H_1 + K_{21} E)] \quad (2.16) \\
\underline{\mu}_2 &= - [R + B_1^T K_1 B_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} B_1^T [I - (A_1 - B_1 L_1)^T]^{-1} K_{21} F \underline{z}
\end{aligned}$$

Et le vecteur de commande $\underline{\hat{u}}$ aura pour expression :

$$\underline{\hat{u}}(i) = -L_1 \underline{x}_1(i) + P \underline{s}(i) + N \underline{z} \quad (2.17.a)$$

Ou :

$$\underline{\hat{u}}(i) = -L \underline{x}(i) - M \underline{v}(i) + P \underline{s}(i) + N \underline{z} \quad (2.17.b)$$

La matrice N de dimensions $(r \times m)$ est tel que $\underline{\mu}_2 = N \underline{z}$, elle est dite matrice d'anticipation, il faut remarquer que N contient l'élément F , elle dépend donc des caractéristiques du modèle de référence.

Le schéma général de la structure de commande multidimensionnelle avec modèle de référence est représentée sur la figure (2.3), dans le cas d'un horizon infini.

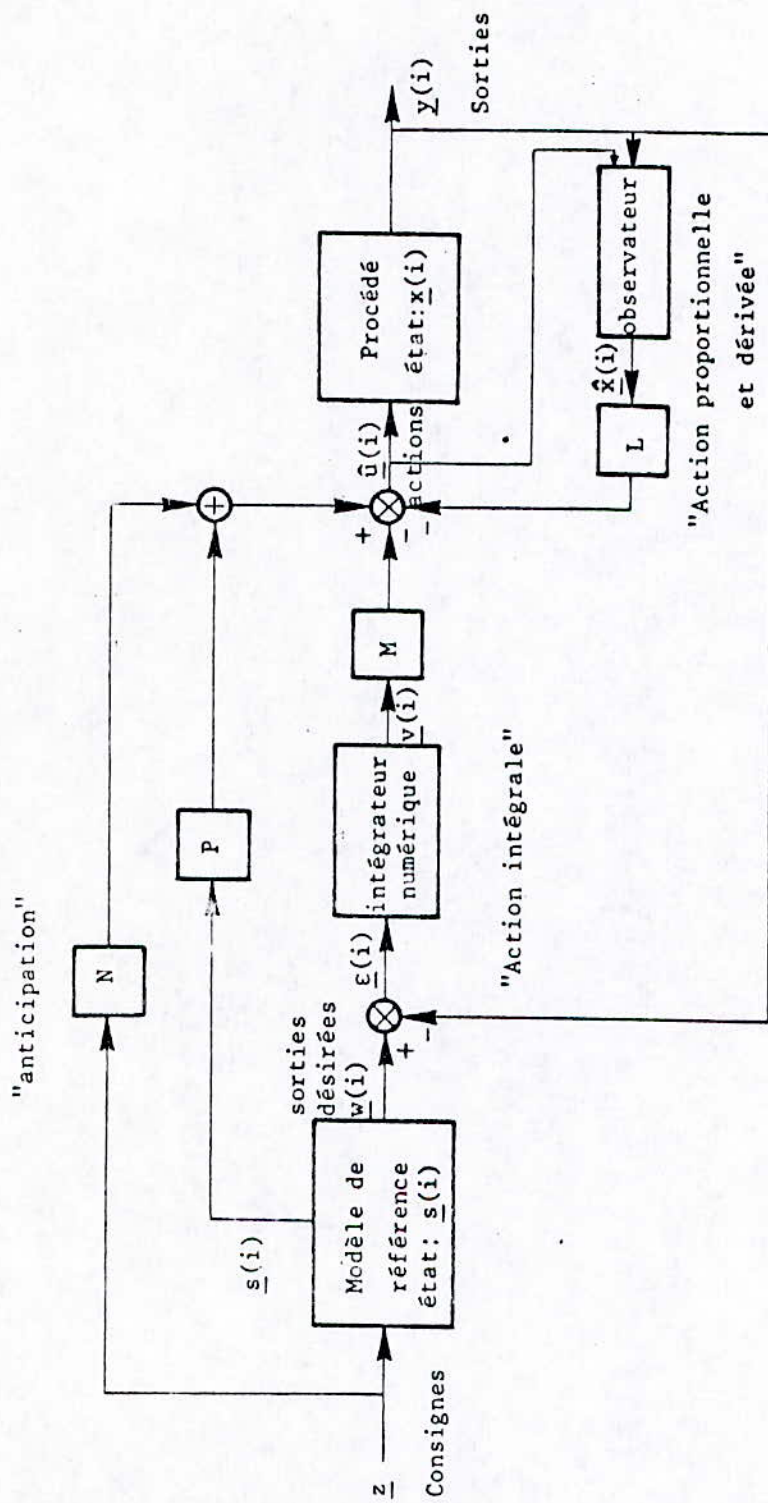


Figure 2.3.- Schéma de la commande multivariable avec modèle de référence (asservissement).

2.3 Prise en compte des perturbations mesurables

Pour améliorer d'avantage les performances de la commande déjà calculée lors de sa mise en oeuvre pratique, on complète cette commande optimale (2.17.b) par de nouveaux termes qui tiennent compte des perturbations mesurables que l'on rencontre souvent en pratique.

Dans le but de maîtriser ces perturbations mesurables, on leur établit un modèle mathématique de la forme :

$$\begin{aligned}\underline{r}(i+1) &= A_3 \underline{r}(i) + B_3 \underline{\pi} \\ \underline{y}_3(i) &= C_3 \underline{r}(i)\end{aligned}\tag{2.18}$$

A_3 , B_3 , C_3 ont pour dimensions $(q \times q)$, $(q \times p)$ et $(m \times q)$

L'influence des perturbations se caractérise dans ce cas par la superposition à chaque instant du vecteur $\underline{y}_3(i)$ au vecteur des sorties $\underline{y}(i)$. On fait remarquer que le vecteur des perturbations mesurées $\underline{\pi}$ doit être considéré constant dans la résolution, en pratique ça veut dire que sa variation est faible devant la dynamique du procédé.

Pour un horizon d'optimisation infini la commande optimale dans ce cas :

$$\underline{\hat{u}}(i) = -L\underline{x}(i) - M\underline{v}(i) + P\underline{s}(i) + N\underline{z} - T\underline{r}(i) - W\underline{\pi}\tag{2.19}$$

L, M, P, N sont les mêmes éléments que ceux calculés au paragraphe précédent.

On démontre [1] les deux relations récurrentes :

$$\begin{aligned} T(i) &= [R + B_1^T K_1(i+1) B_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} \{ B_1^T [K_1(i+1) T_1 + K_{43}(i+1) A_3] - D_1^T Q_1 T_2 \} \\ K_{43}(i) &= [A_1 - B_1 \cdot L_1(i)]^T [K_1(i+1) T_1 + K_{43}(i+1) A_3] - [C_1 - D_1 L_1(i)]^T Q_1 T_2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Avec les conditions : $K_{43}(N) = 0$ et $K_1(N) = 0$.

Rappel :

Pour la programmation remplacer $(i+1)$ par j et i par $j+1$.

Une fois, les limites constantes atteintes, on a :

$$W = [R + B_1^T \cdot K_1 \cdot B_1 + D_1^T \cdot Q_1 \cdot D_1]^{-1} B_1^T [I - (A_1 - B_1 \cdot L_1)^T]^{-1} K_{43} B_3 \quad (2.21)$$

Les matrices T_1 et T_2 de l'équation (2.20) sont telles que :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{-----} \\ -C_3 \end{bmatrix} ; \quad T_2 = \begin{bmatrix} -C_3 \\ \text{-----} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De dimensions respectives $(n + m) \times q$ et $(2m \times q)$.

Le schéma général de la structure de commande optimale est représenté sur la figure (2.4)

Remarques :

Remarque 1 : D'après les résultats théoriques, les matrices de retour d'état n'ont pas été changées lors de la prise en compte de modèle de référence, par conséquent la stabilité du système muni de sa commande optimale n'est pas altérée.

Remarque 2 : De même, L et M ne sont pas modifiées lors de la prise en compte du modèle des perturbations mesurables.

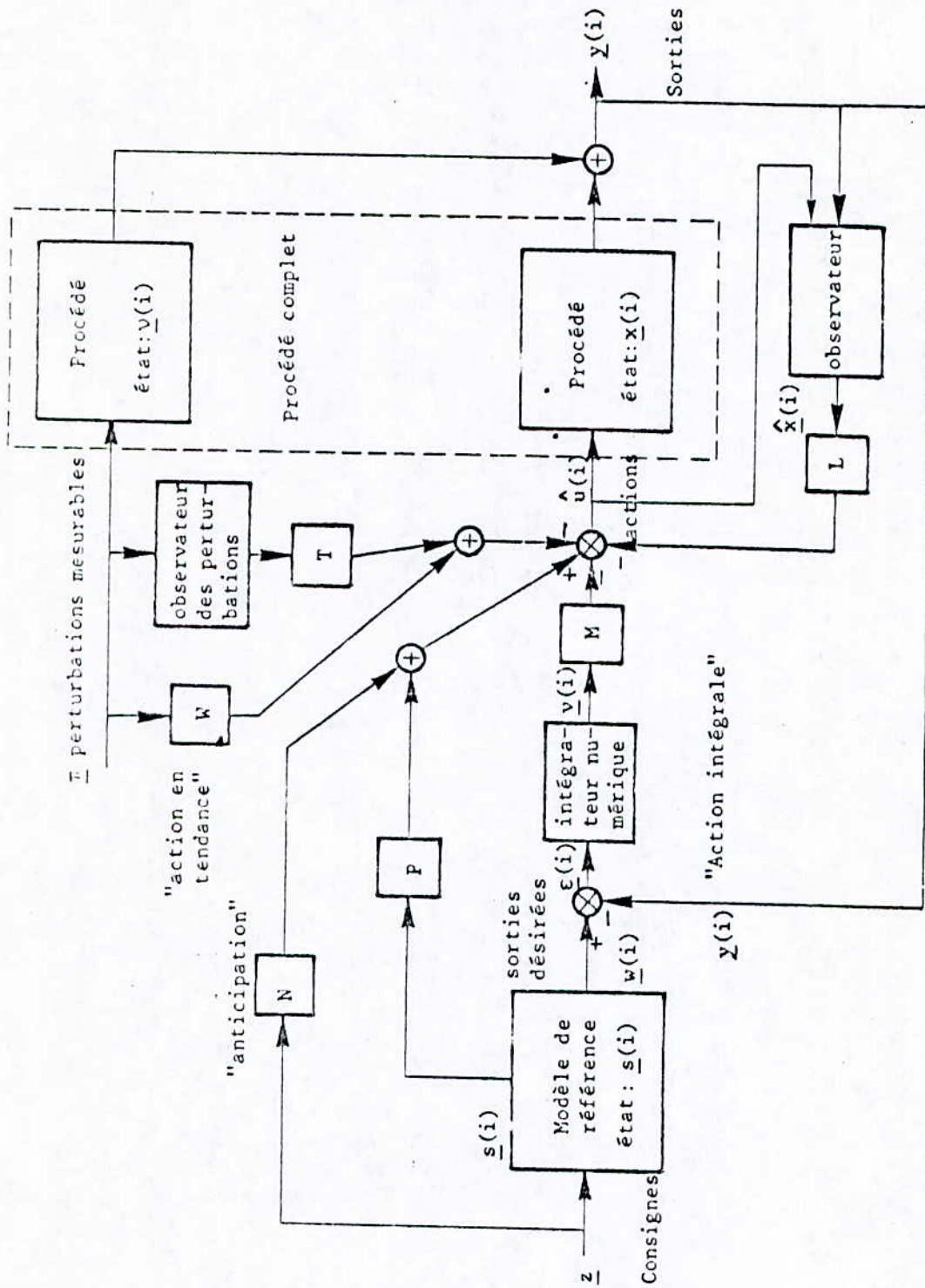


Figure 2.4.- Structure de commande complète.

CHAPITRE 3

IMPLEMENTATION SUR CALCULATEUR

Introduction.

3.1. Choix du modèle de référence.

3.2. Choix des matrices de pondération.

3.3. Etapes de calcul.

3.4. Remarques importantes.

3. IMPLEMENTATION SUR CALCULATEUR

Introduction

Le lecteur s'aperçoit que de nombreuses formules s'imposent pour générer la loi de commande optimale, dans ce chapitre on résumera la procédure à suivre pour générer la commande qui optimise les performances souhaitées pour le système, lorsqu'un modèle de référence est pris en compte.

3.1 Choix du modèle de référence

La dynamique retenue pour le modèle de référence engendre une plus ou moins grande rapidité d'évolution des sorties du système lorsque leurs valeurs de consigne sont modifiées. Pour obtenir cela, ce sont évidemment aux grandeurs d'actions que la structure de commande impose des variations plus ou moins importantes, par l'intermédiaire notamment des matrices P et N dépendant du modèle de référence.

Le choix pratique du modèle de référence doit tenir compte à la fois des nécessités de rapidité pour le passage d'un point de fonctionnement à un autre et des possibilités offertes par les actionneurs utilisés. Une solution simple peut consister à adopter pour le modèle de référence une dynamique comparable à celle qui caractérise le procédé (système).

3.2 Choix des matrices de pondération

Les caractéristiques dynamiques du système en boucle fermée munie de la commande en réaction dépendent des valeurs des matrices de pondération Q , Q_v et R , en effet dans les expressions des matrices L et M on retrouve les éléments Q_1 et R .

Le choix des matrices Q_1 et R demande quelque temps et de nombreuses simulations, il n'y a pas de formule ou de règle qui pour des performances souhaitées, nous définissent une relation entre les valeurs de Q et de R .

Intuitivement, plus les éléments de la matrice R seront grands par rapport aux éléments des deux autres matrices Q et Q_v plus les amplitudes des grandeurs d'action seront pénalisées par la minimisation du critère, inversement une pondération plus faible pour la matrice R donnera une plus grande importance à la minimisation des erreurs de sortie.

Cette approche ne suffit pas pour atteindre des performances désirées, il faut ajuster entre eux les coefficients de chaque matrice Q , Q_v et R . Il faut noter en outre que la robustesse du système en boucle fermée ne dépend en effet que du choix du critère quadratique.

A noter que la formulation du critère possède une influence importante sur l'allure du régime transitoir. Bühler [9] analyse ce problème de plus près pour les système monovariabiles, par des essais de simulation, il montre que l'augmentation du coefficient de pondération relative à la commande, entraîne un ralentissement des dépassements lors du régime transitoir.

Il met en évidence aussi que l'augmentation de la valeur du coefficient de pondération q relative à l'erreur entraîne la diminution de sa valeur globale.

Une autre façon de voir les choses est dire que l'augmentation des valeurs des coefficients des matrices Q et Q_v entraîne une diminution du temps de réponse.

On tient à rappeler que ces trois matrices doivent être définies positives. Dans les problèmes d'application, elles seront choisies diagonales, pour pouvoir vérifier sans calcul, la propriété d'être définies positives.

3.3 Etapes de calcul

Considérons le système S :

$$S \left\{ \begin{array}{l} \underline{x}(i+1) = A \underline{x}(i) + B \underline{u}(i) \\ \underline{y}(i) = C \underline{x}(i) + D \underline{u}(i) \end{array} \right.$$

(1) Choix du modèle de référence :

$$R \left\{ \begin{array}{l} \underline{s}(i+1) = E \underline{s}(i) + F \underline{z} \\ \underline{w}(i) = H \underline{s}(i) \end{array} \right.$$

(2) Choix du critère quadratique :

Lors de cette étape, le concepteur doit fixer la dynamique générale du système en boucle fermé qui ne dépend que de Q , Q_v et R , en choisissant ces trois matrices. Par conséquent, le concepteur doit avoir une idée de la relation globale qui existe entre les valeurs de ces matrices et la dynamique générale du système, avant de commencer à ajuster les valeurs de chacune de ces trois matrices.

(3) Construction de Q_1 :

A partir de Q et Q_v , construire Q_1 :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_v \end{bmatrix}$$

(4) Construction du système élargi S_1 :

A partir des équations d'état du système S on construit les équations d'état du système S_1 élargi :

$$(A_1, B_1, C_1, D_1, \underline{f}_1)$$

(5) Programmation :

Trouver les solutions limites des équations 1, 2, 5 et 6 du système (2.15) et les solutions limites des équations du système (2.20) correspondantes respectivement à :

L_1 , P , K_1 , K_{21} , T , K_{43} .

Pour cela il suffit de tester si les variations de ces éléments sont inférieures à un seuil fixé à l'avance, lorsqu'on passe de l'itération j à l'itération $(j+1)$.

(6) Calcul des matrices de réaction et d'anticipations :

- Pour L_1 : (cf étape (5)).
- M est déduite de L_1 .
- $N = -(R + B_1^T K_1 B_1 + D_1^T Q_1 D_1)^{-1} B_1^T [I - (A_1 - B_1 L_1)^T]^{-1} K_{21} F$
- Pour T : (cf étape (5)).
- Pour W : (cf équation 2.21).

(7) Simulation :

Après que les éléments définissant la commande optimale soit calculée, on simule, pour visualiser les réponses des sorties du système muni de cette commande.

Si les performances désirées ne sont pas atteintes, on ajuste les matrices Q , Q_v et R puis on passe à l'étape (3).

3.4 Remarques importantes

Remarque 1 : La matrice K_1 est dite matrice de **Ricatti** et l'équation correspondante du système (2.1.5.b) équation de **Ricatti**, de même pour K_{21} et K_{43} .

On démontre [4] que les matrices de **Ricatti** sont toujours symétriques; donc il faut en prendre compte lors de la programmation.

Remarque 2 : D'autres formulations des équations de **Ricatti** sont établies, **Foulard** [1] en propose. Nous avons opté pour la formulation employée dans le système (2.1.5.b) à cause de sa simplicité de programmation.

Néanmoins pour certains systèmes, il est possible qu'une instabilité numérique soit observée, due aux erreurs d'arrondi qui se traduit par le fait que la matrice de **Ricatti** calculée n'est pas définie positive. On peut utiliser des approches établies par **Foulard** [1], pour remédier à ce phénomène.

Remarque 3 : Le choix d'un langage de programmation adapté à ce type de calcul est recommandé.

CHAPITRE 4

APPLICATION A UN PROCEDE REEL

Introduction.

4.1. Présentation du système de commande.

4.2. Calcul de la commande et simulation.

4.3. Interprétation des résultats.

Remarques.

4. APPLICATION A UN
PROCEDE REEL

Introduction

Entre les développements théoriques et leurs applications à un procédés réels, les études de simulation ont souvent un rôle important. En effet les caractéristiques de fonctionnement des système ne sont pas toujours faciles à mettre en évidence de manière précise par des voies purement théoriques. La simulation se révèle alors un moyen d'investigation simple et efficace.

4.1. Présentation du système de commande

Le modèle du système sur lequel des études de simulation seront appliquées est celui d'un procédé réel, qui résulte de l'identification des paramètres dynamiques d'une unité pilote de fabrication du papier.

Ce modèle comporte deux grandeurs d'actions, le débit de pâte et la pression de vapeur en post-sècherie, et deux grandeurs de sortie à commander, le grammage sec et l'humidité. Le modèle donné sous sa forme continue est représenté sur la figure 4.1

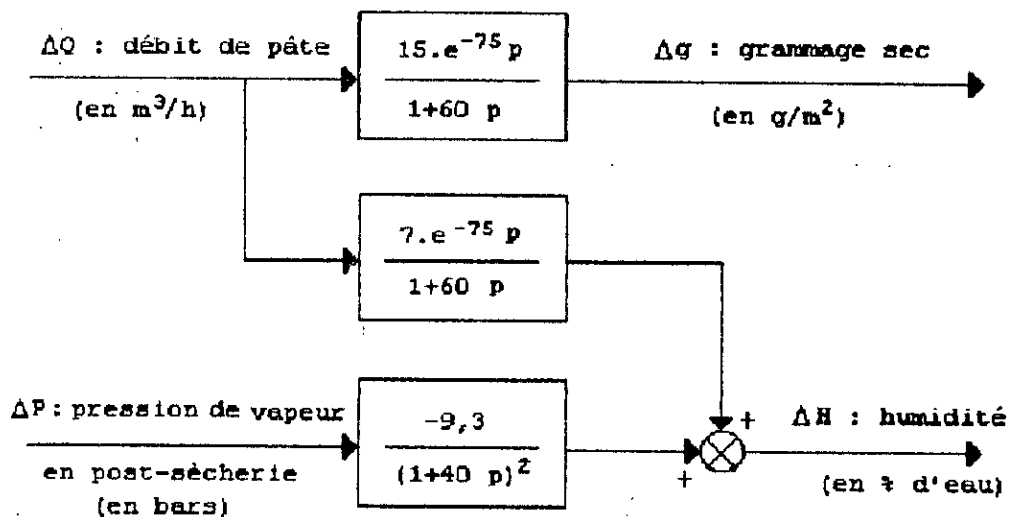


Figure 4.1 - Système utilisé pour les simulations.

La représentation d'état discrète est :

$$A = \begin{bmatrix} 0.7788 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3746 & -0.4724 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.2212 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.09779 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70 & -0.315 & -0.245 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.1.1 Choix de la dynamique en boucle fermée :

On choisit le critère quadratique déterminant le comportement du système bouclé correspondant en "régulation".

Le critère finalement retenu est :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 220 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 110 \end{bmatrix}$$

4.1.2 Choix du modèle de référence :

La dynamique du modèle de référence est prise comparable à la dynamique du procédé. Avec les notations précédemment employées, le modèle de référence est donné sous forme continue par :

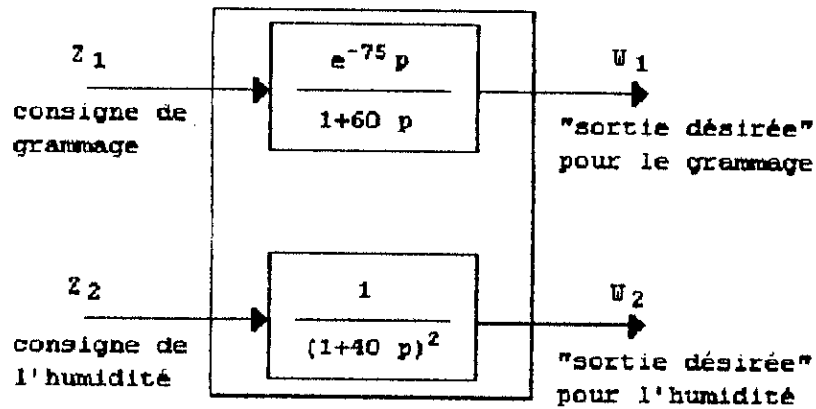


Figure 4.2 - Modèle de référence choisi.

Les équations d'état sont alors :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.7788 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3746 & -0.4724 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.2212 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.9779 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.562 & 0.438 \end{bmatrix}$$

4.2. Calcul de la commande et simulation

4.2.1 Calcul de la commande :

En suivant pas à pas les directives du chapitre précédent pour l'implémentation sur calculateur, toutes les matrices définissant la loi de commande optimale pour le critère retenu, sont déterminées selon l'organigramme de la figure 4.3. Les résultats de la programmation sont :

$$L = \begin{bmatrix} 1.2282 & 0.3372 & 0.3255 & 0.3809 & 0.3201 & 0.3203 & -0.2712 & 0.1295 \\ -0.6624 & -0.5321 & -0.6549 & -0.7367 & -0.7620 & -0.7574 & 4.0265 & -1.3107 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -2.0026 & -0.028 \\ -0.324 & 1.152 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 6.9559 & 2.0026 & 2.0026 & 2.0026 & 2.0026 & 2.0026 & 0.4842 & -0.2312 \\ 1.1098 & 0.3243 & 0.3243 & 0.3243 & 0.3243 & 0.3243 & -7.1897 & 2.3397 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 7.5323 & -0.0000 \\ 0.8645 & -1.7854 \end{bmatrix}$$

4.2.2 Simulation :

Comme il a été déjà signalé, le langage de programmation doit être adapté au calcul matriciel.

On a opté pour l'utilisation du langage propre au logiciel MATLAB.

4.2.2.a Test de robustesse :

Les figures 4.4 et 4.5 présentant respectivement les sorties et commandes du système, illustrent le comportement du système bouclé, pour une perturbation en échelon intervenant pour ce cas est prise égale à $-5g/m^2$.

La même étude est faite pour une perturbation en échelon, intervenant sur la sortie humidité de valeur 2% , les résultats sont représentés sur les figures 4.6 et 4.7.

4.2.2.b Intérêt de l'utilisation d'un modèle de référence :

Dans cette partie on met en évidence l'intérêt de l'utilisation d'un modèle de référence lors du fonctionnement en " Asservissement " , c'est à dire pour des changements de consigne réalisés d'une part avec une structure de commande ne comportant pas de modèle de référence, et d'autre part avec une structure de commande incluant un tel élément.

Les figures 4.8 et 4.9 présentent respectivement les variations des sorties et des commandes, du système, lorsqu'un changement de $+5g/m^2$ sur la consigne du grammage sec (soit environ 7% de sa valeur), sans modèle de référence c'est à dire avec un vecteur d'action \underline{u} de la forme :

$$\underline{u}(i) = -L \underline{x}(i) - M \underline{v}(i) + N \underline{z}$$

On constate que l'emploi d'une telle commande engendre un dépassement important, environ ($4g/m^2$) sur la mesure du grammage sec.

Les figures 4.10 et 4.11 illustrent le même changement de consigne de $+5g/m^2$ sur le grammage sec mais en utilisant un modèle de référence, le vecteur d'action est dans ce cas défini par :

$$\underline{u}(i) = -L \underline{x}(i) - M \underline{v}(i) + P \underline{s}(i) + N \underline{z}$$

Le même type de comparaison a été effectué pour des changements de la consigne d'humidité.

Les figures 4.12 et 4.13 se rapportent à un changement de cette consigne égale à 4 ‰ (soit environ le tiers de sa valeur moyenne), sans utilisation d'un modèle de référence. Comme on peut le constater, l'action principalement concernée, c'est à dire la pression de vapeur, subit au début de l'évolution une variation très importante, peu compatible avec une utilisation industrielle. La grandeur d'humidité présente un dépassement transitoir très sensible environ 1 ‰ d'eau, qui est très important par rapport à l'incrément de consigne imposé qui est de 2 ‰.

Les figures 4.14 et 4.15 sont relatives au même changement de consigne accompli à l'aide de la structure de commande comportant le modèle de référence, on peut remarquer que les performances pendant le régime transitoir sont nettement meilleures.

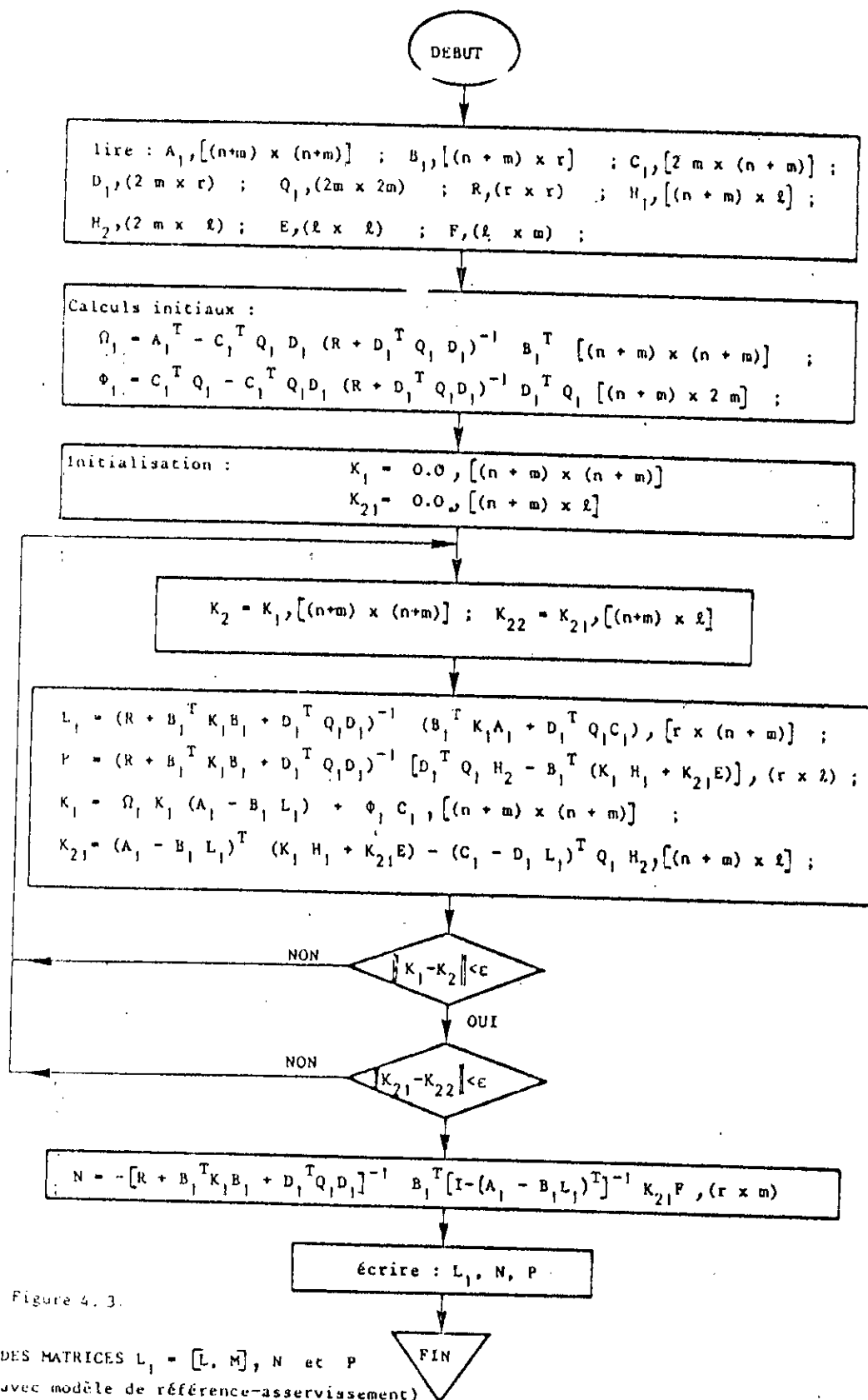


Figure 4.3.

CALCUL DES MATRICES $L_1 = [L, M]$, N et P
 (commande avec modèle de référence-asservissement)

4.3. Interprétation des résultats

4.3.1. Robustesse :

Sur la figure 4.4 représentant les sorties du système pour une perturbation sur le grammage sec, la dynamique due aux matrices de réaction L et M apparaît de manière très claire sur l'évolution de la grandeur de sortie perturbée est comparable à celle d'un système du 1^{er} ordre dont le temps de réponse serait de 5mn. Sur la même figure la sortie humidité subit des variations transitoires en amplitude, importantes.

En effet elle oscille une seule fois entre les deux valeurs 4% et 7% ; par conséquent, un couplage passager important se révèle entre les sorties. Dans toute régulation multivariables une des plus importantes performances souhaitées par le concepteur est d'assurer un couplage aussi satisfaisant que possible entre les grandeurs de sorties, donc cet objectif n'est pas réalisé par la structure de commande de la figure 2.1.

La figure 4.5 montre l'évolution des commandes, cette évolution d'une manière globale, est logique; car les commandes doivent augmenter en amplitudes pour compenser la valeur de la perturbation qui est négative.

La même analyse est faite sur les figures 4.6 et 4.7 pour une perturbation de 2% sur l'humidité. Pour ce cas on constate un couplage négligeable entre les sorties, en effet la sortie non perturbée ne change pratiquement pas, et la commande correspondante (débit de pâte), de même. On peut dire donc qu'il'y a un couplage partiel, c'est le couplage grammage-humidité; une variation de la grandeur du grammage sec entraînerait une variation de la grandeur humidité et non le contraire.

Théoriquement, la commande principalement concernée, c'est à dire la pression vapeur doit augmenter en amplitude pour compenser la perturbation de valeur positive, vu que la fonction de transfert entre pression vapeur et humidité apparaît avec un signe négatif d'où la justification pour la forme d'évolution de la commande pression-vapeur, schématisé sur la figure 4.6.

En conclusion, on peut retenir de ces résultats :
Une robustesse de la commande et un couplage partiel grammage sec-humidité, qui est dû au modèle lui même.

En effet sur la figure 4.1 représentant le modèle, sous la forme continue, il apparaît que la commande débit de pâte agit directement sur la sortie humidité par le biais d'une fonction de transfert, ce qui n'est pas le cas pour la commande pression vapeur et la sortie grammage sec, et par conséquent le résultat du couplage partiel se trouve, d'une manière globale, justifié.

4.3.2. Fonctionnement en asservissement :

Pour un fonctionnement en asservissement l'introduction d'un modèle de référence est recommandé, et les résultats de la simulation le confirme.

La figure 4.9 révèle que lors des changements de consignes du grammage, sans modèle de référence, les amplitudes des actions sont considérables au début d'évolution, et constituent un inconvénient certain pour une application réelle.

En outre l'emploi de la commande u qui ne comporte pas d'élément qui tient compte du modèle de référence, engendre un dépassement important sur la mesure du grammage, et ne permet pas de diminuer le couplage existant entre les sorties, en effet la figure 4.8 fait apparaître des variations transitoires importantes de la sortie humidité dues au couplage des sorties.

Les figures 4.10 et 4.11 permettent de mettre en évidence le rôle du modèle de référence, puisque pour le changement de consigne, les amplitudes des actions demeurent acceptables et la variation transitoire de l'humidité est devenue faible d'où la diminution du degré de couplage entre les sorties.

Pour un changement de consigne sur l'humidité sans modèle de référence puis avec modèle de référence, les résultats de simulation sont représentés respectivement sur les figures 4.12 et 4.13, puis sur les figures 4.14 et 4.15.

On constate alors des variations transitoires moins importantes des commandes pour le deuxième cas.

Remarque :

Pour l'exemple retenu, la solution de l'équation de **Ricatti** est obtenue à l'itération 55 pour une précision de 10^{-4} , à l'itération 24 pour 10^{-3} .

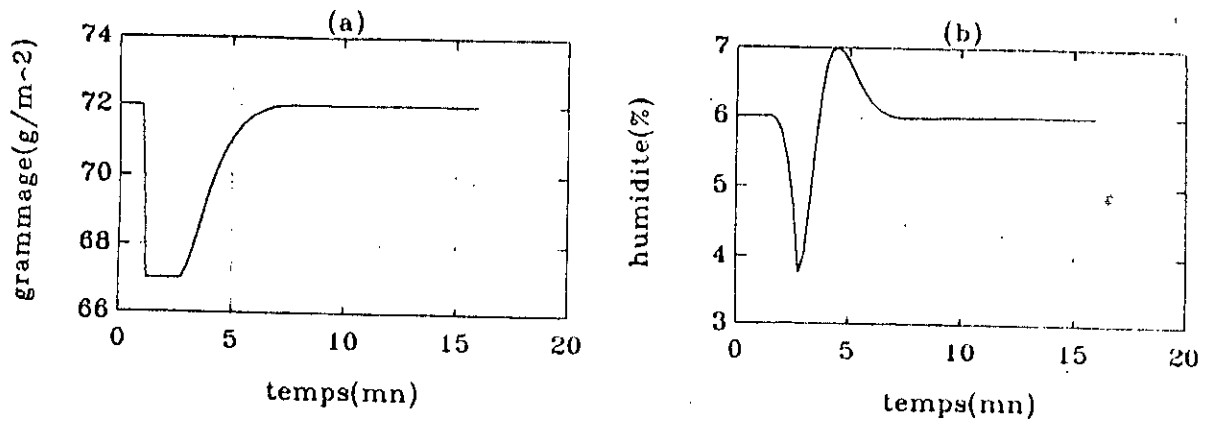


Figure 4.4 - Sorties du système pour une perturbation sur le grammage.

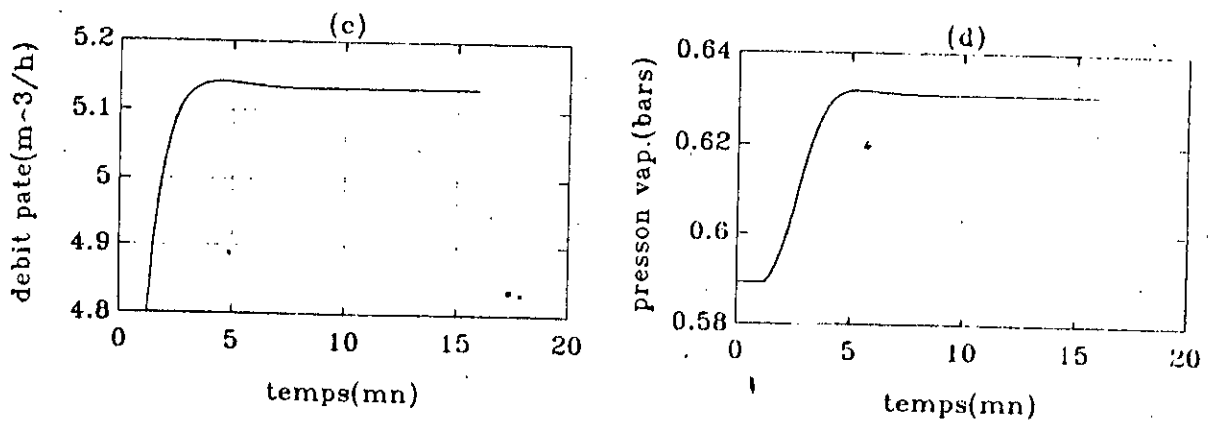


Figure 4.5 - Variations des commandes pour une perturbation sur le grammage.

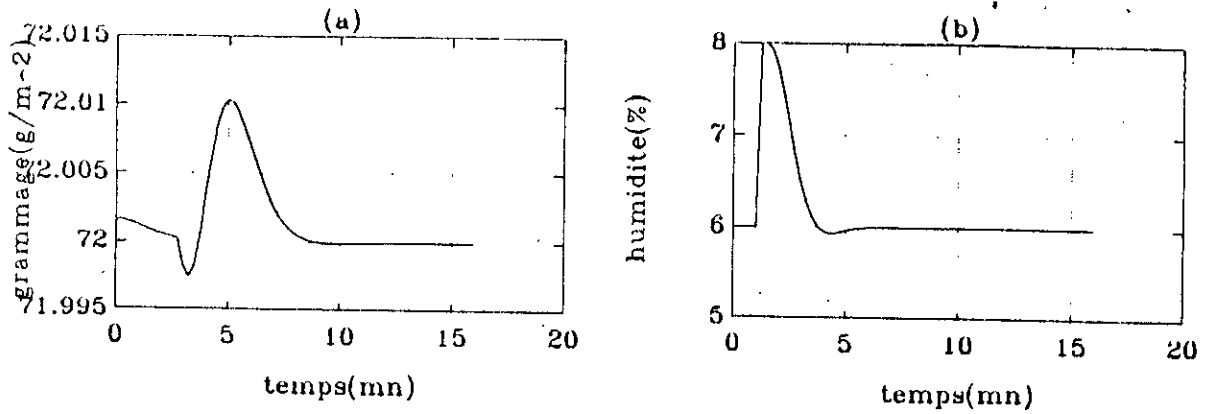


Figure 4.6 - Sorties du système pour une perturbation sur l'humidité.

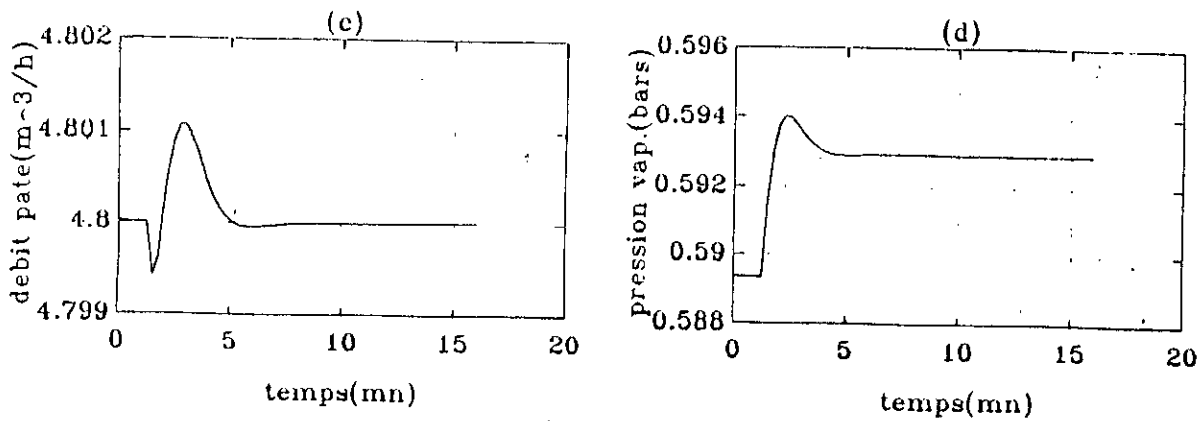


Figure 4.7 - Variations des commandes pour une perturbation sur l'humidité.

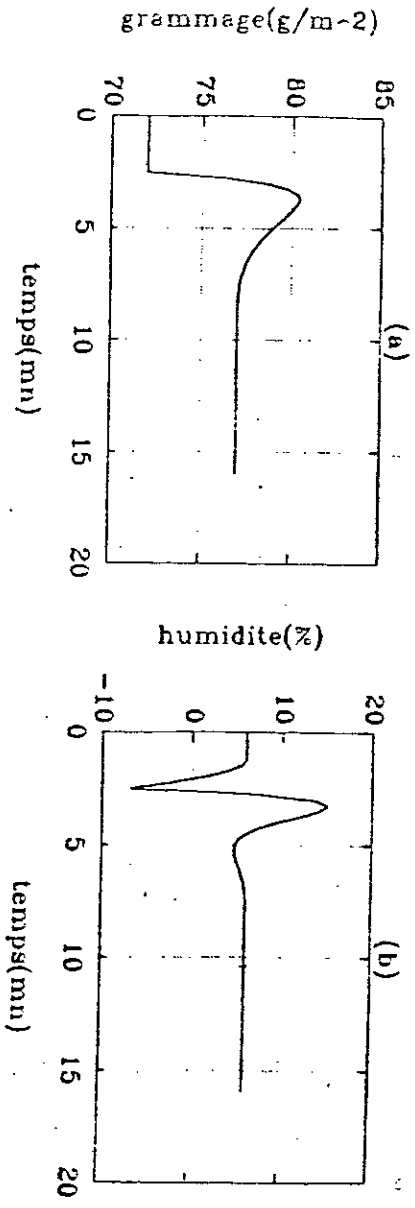


Figure 4.8 - Sorties du système pour un changement de consigne sur le grammage sans modèle de référence.

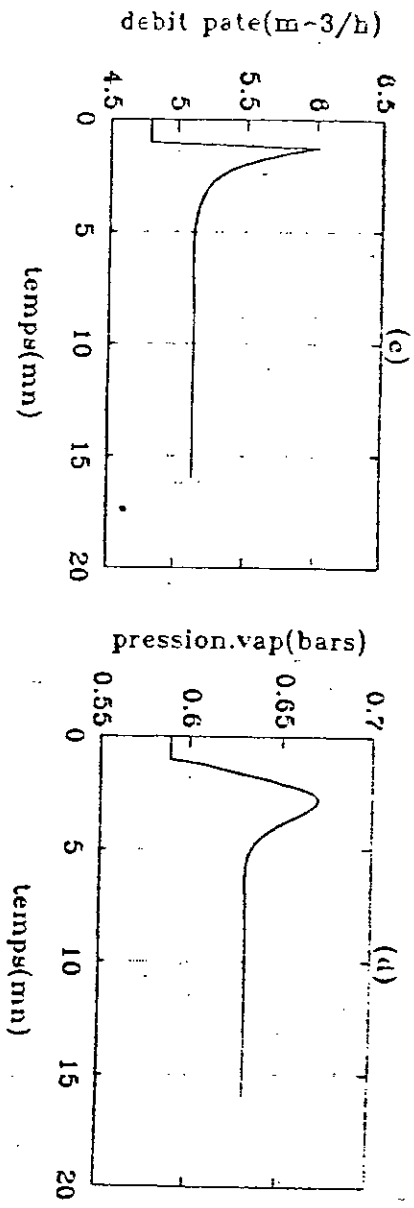


Figure 4.9 - Variations des commandes pour un changement de consigne sur le grammage sans modèle de référence

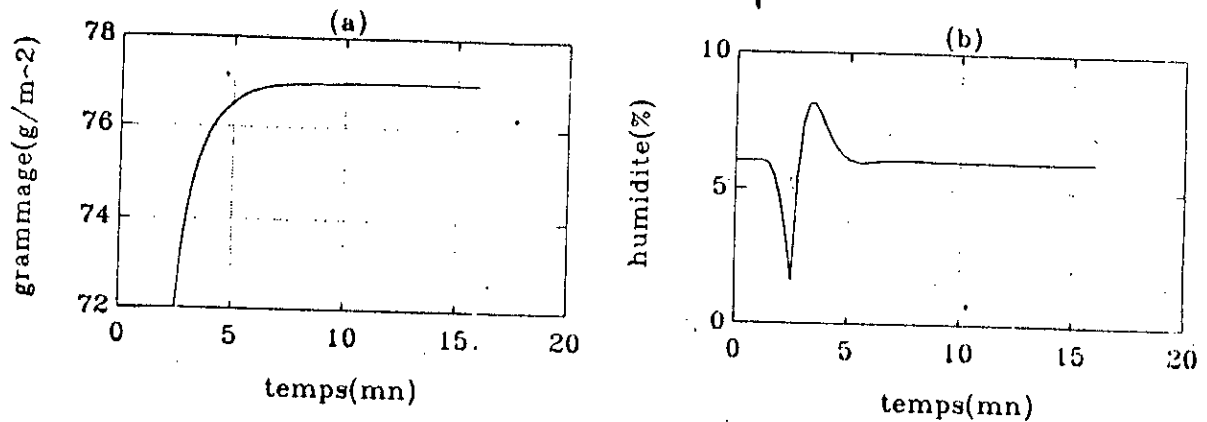


Figure 4.10 - Sorties du système pour un changement de consigne sur le grammage avec modèle de référence.

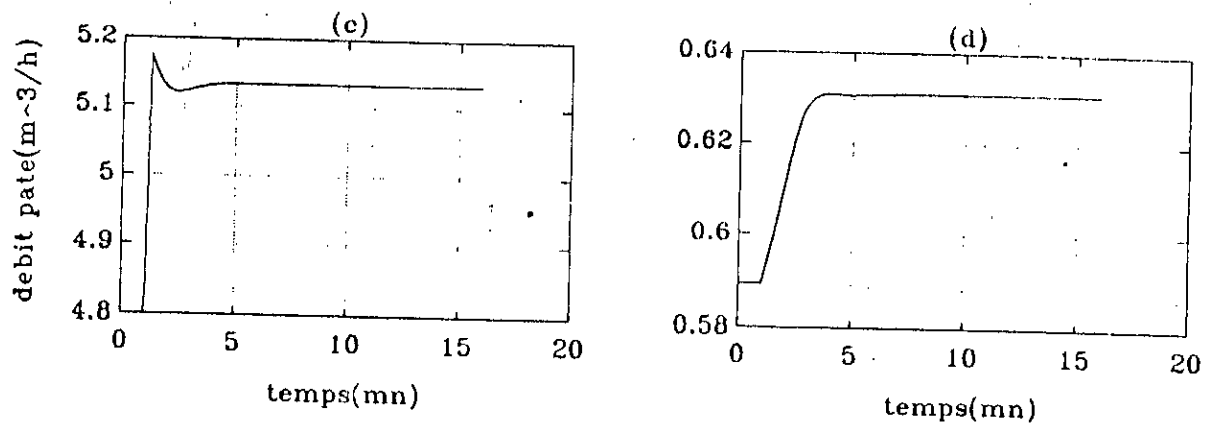


Figure 4.11 - Variations des commandes pour un changement de consigne sur le grammage avec modèle de référence

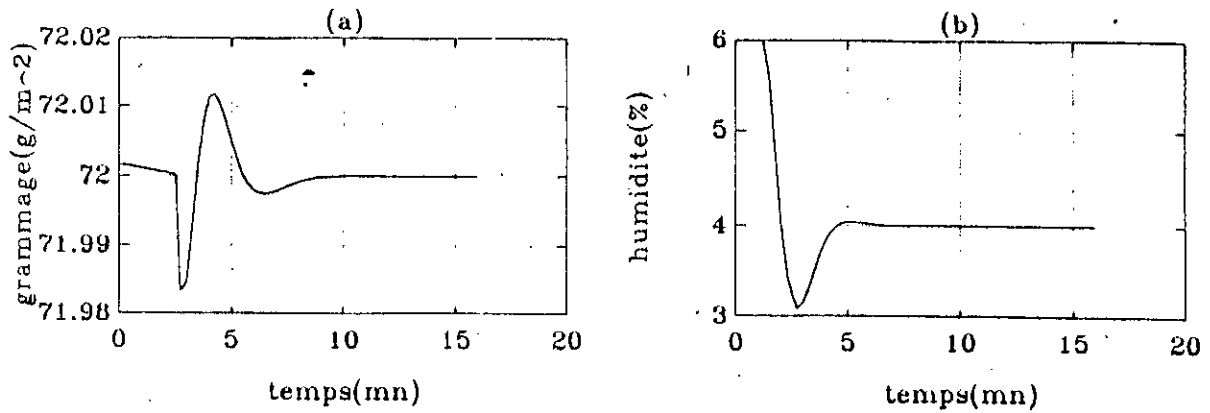


Figure 4.12 - Sorties du système pour un changement de consigne sur l'humidité sans modèle de référence.

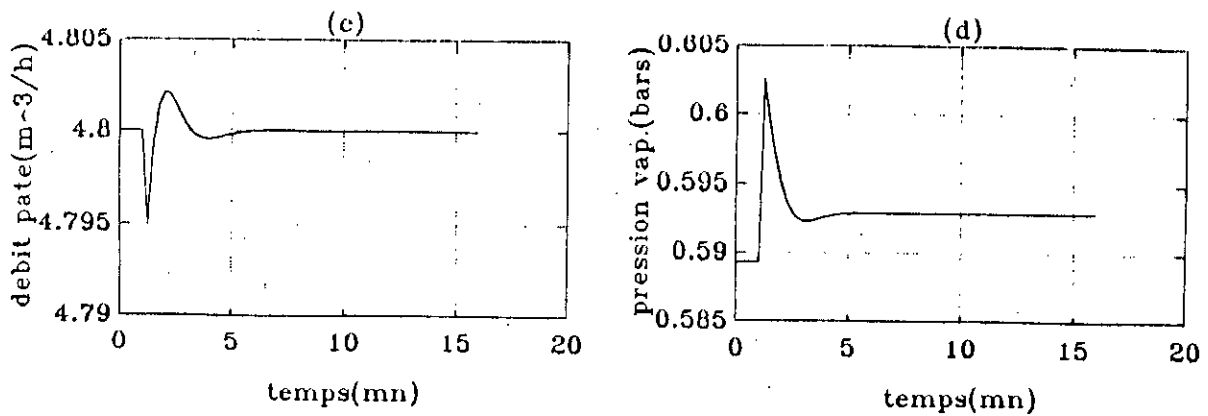


Figure 4.13 - Variations des commandes pour un changement de consigne sur l'humidité sans modèle de référence.

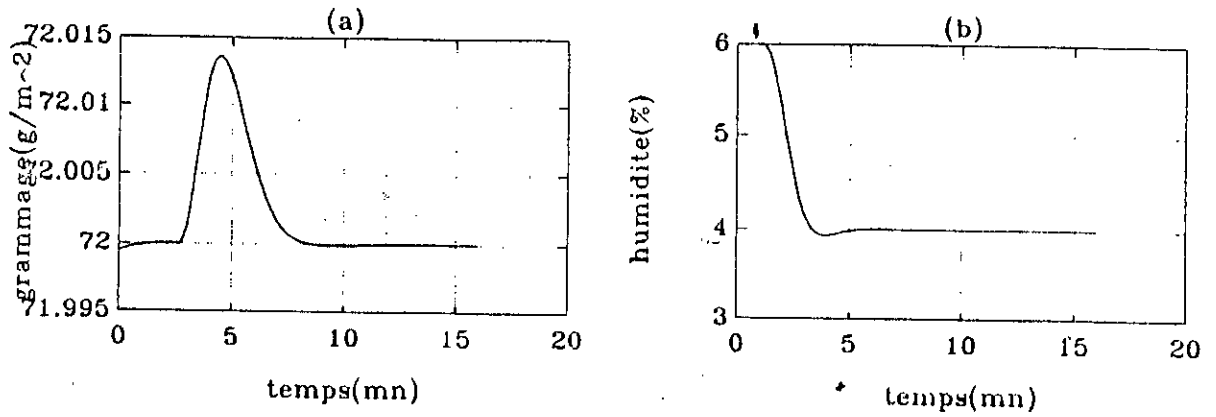


Figure 4.14 - Sorties du système pour un changement de consigne sur l'humidité avec modèle de référence.

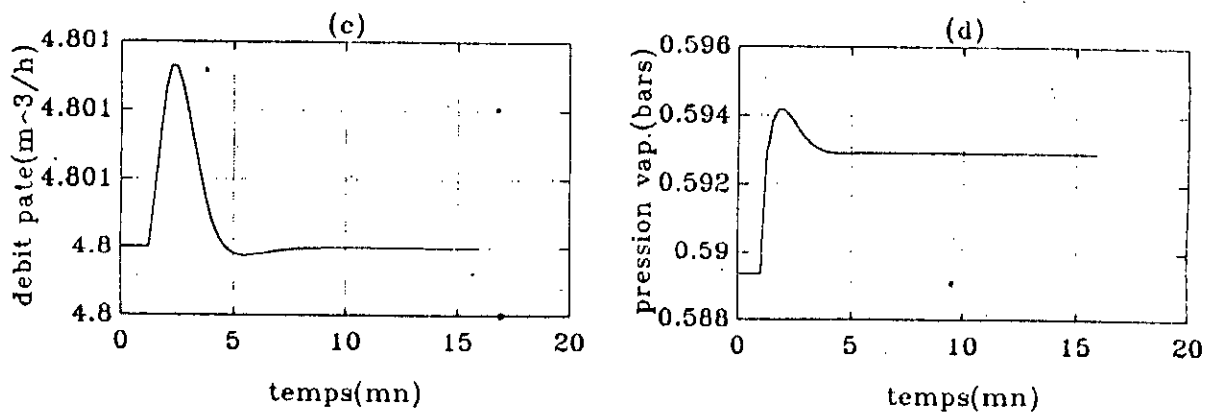


Figure 4.15 - Variations des commandes pour un changement de consigne sur l'humidité avec modèle de référence.

CONCLUSION GENERALE
ET PERSPECTIVES

Il existe de nombreuses méthodes de synthèse pour la régulation et la commande par ordinateur numérique de systèmes dynamiques linéaires, celle que nous avons proposée, qui est basée sur la minimisation d'un critère quadratique fournit une commande en boucle fermée qui est toujours stable et qui possède des propriétés d'insensibilité aux imperfections du système, et aux perturbations.

Le critère quadratique, qui est à la base de la synthèse, est un outil. Le choix de ses coefficients permet, pour un problème particulier, d'obtenir en quelques itérations une commande satisfaisant le compromis choisi. Son avantage essentiel est de fournir une solution unique et robuste, c'est à dire relativement peu sensible aux écarts entre le procédé et son modèle.

La plupart des autres méthodes générales, valables pour un système récurrent linéaire multivariables, ne possèdent pas cet intermédiaire de synthèse et sont, de ce fait, beaucoup moins souples. C'est du moins la conviction des mathématiciens et l'expérience n'a pas encore apporté la contradiction.

Une question qui pourrait se poser, est de dire : La première idée du retour d'état ne proviendrait-elle pas du résultat du calcul de l'optimum du critère quadratique ? En effet, comme il a été déjà démontré, le vecteur de commande minimisant le critère est de la forme :

$$\underline{u}(i) = -L \underline{x}(i) + \underline{\mu}(i).$$

Certaines performances souhaitées qui ne peuvent être formulées mathématiquement par un choix du critère, sont obtenues par l'introduction d'un modèle de référence, entre autres, éviter des variations brusques pour les commandes pendant le régime transitoire.

Ainsi, le modèle de référence n'intervient que pour compléter par des performances qui permettent une réalisation pratique de la commande.

A ce propos, il est important de signaler que le choix pratique du modèle de référence doit tenir compte à la fois des nécessités de rapidité pour le passage d'un point de fonctionnement à un autre et des possibilités offertes par les actionneurs utilisés.

Il ne faut pas perdre de vue que, pour un ingénieur, le but final demeure toujours l'application des méthodes développées à des systèmes réels. Très utiles pour une meilleure compréhension des phénomènes, les études de simulation ne sauraient constituer à elles seules une justification parfaite de la validité de la solution proposée.

C'est pourquoi il serait très intéressant d'appliquer les structures de commandes, proposées dans ce mémoire, à la conduite du procédé physique réel choisi dans notre exemple du chapitre quatre, à savoir une unité-pilote de fabrication du papier installée au centre technique de l'industrie des papiers de GRENOBLE, et de présenter les résultats obtenus.

REFERENCES

- [1] : FOULARD C., GENTILS S., SANDRAZ J.P.,
"Commande et régulation par ordinateur numérique",
EYROLLES, (1987)
- [2] : FRIEDLAND M.,
"Control system design", Mc GRAW HILL (New York, 1987)
- [3] : BELLMAN R.E.,
"Dynamic programming", Princeton University Press, (1957)
- [4] : BENJAMIN R., QU. H.,
"Digital control systems", Mc GRAW HILL (1981)
- [5] : FOND M.,
"Contributions à la synthèse de la commande dynamique de systèmes multidimensionnels",
Thèse de docteur ingénieur, (Grenoble, 1971)
- [6] : KALMAN R.E.,
"Contributions to the theory of optimal control",
Bol. Soc. Mat. Mexicana, Vol. 5, (1960)
- [7] : CAINES P. E., MAYNE D. Q.,
"On the discrete time matrix equation of optimal control",
Internat. J. Control, Vol. 12, (1970)
- [8] : DORATO P., LEVIS A. H.,
"Optimal linear regulators, the discrete time case",
I-E-E-E. Trans. Autom. Control, Vol. AC-16, (Dec. 1971)
- [9] : BÜHLER H.,
"Réglages échantillonnés",