UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ALGER 5/81

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE ET D'ELECTROTECHNIQUE

FILIERE D'INGENIEUR EN

ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET : RESOLUTION DES EQUATIONS A DERIVEES PARTIELLES DE LA PHYSIQUE PAR DES METHODES ITERATIVES SUR UN MAILLAGE IRREGULIER

PROPOSE PAR : J. P GAUTHIER
DOCTEUR INGENIEUR

REALISE PAR : Y. AICHE
K. FERDJANI

Promotion JUIN 81

A Mes Parents

A Toute la Famille

A Tous les Amis

Y : Aiche.

A Mes Parants

A Mes Freres et Soeurs

A Tous les Amis

K. FERDJANI.

-=oOo=- REMERCIEMENTS -=oOo=-
****

- Que Monsieur GAUTHIER ,notre promoteur trouve l'expression de nos remerciements les plus vifs en consacrant une partie de son temps à nous orienter et nous conseiller judicieusement

- Nous exprimons aussi notre profonde gratitude a tous ceux qui ont contribué à notre formation ,ainsi qu'a tous ceux qui nous ont facilité le travail y compris le personnel du centre national du traitement de l'information (C.N.T.I.) .-/-

****
$
**

AVANT- PROPOS

Ce polycopié, travail d'un semestre est le developpement d'une théorie destiné à la resolution des equations à derivées partielles,necessaires aux applications de la physique tel que le problème de transmission (equation des télegraphistes), distribution des températures, phénomenes de vibrations...?

Pour cela, on a jugé utile de donner dans une première partie quelques notions de base sur les propriétés des matrices et normes vectorielles car leurs utilisations rendent de si grands services quant à la résolution des equations à dérivées partielles.

Dans la deuxième partie,ou autrement dit dans le vif du sujet on expose la méthode de discrétisation permettant d'aboutir à un système linéaire de la forme forme AX=B et les méthodes de resolution du système(GAUSS,JACOBI, GAUSS-SEIDEL).

En effet ,les methodes directes sont pratiquement utilisables sur des machines actuelles pour des systèmes de petite dimension;au déla d'un certain nombre,le nombre des données devient considérable, le nombre des multiplica--tion aussi;on peut se demander si une méthode qui consisterait à s'approcher de plus en plus de la solution ne serait pas plus interressante que l'utilisa--tion d'une méthode directe .

La troisième partie des applications avec un exemple type " équation de LAPLACE " et choix du maillage.—

P/ L A N

I. 1 Ra N O T I O N S D E B A S E

I.1 Rappels sur les matrices.

I.1.1 Matrices Carrées

I.1.2. Valeures propres et rayons spectral.

I.1.3. Théorié de Pérron Frobenius .

a - Enoncé du Théoreme de Perron Frobenius .

b - Théorme de Stein Rosenberg.

I.1.4 M. Matrices et H matrices.

I. 2. Normes vectorielles.

I.2.1 Proprietés générales

I.2.2. Normes vectorielles reguliéres.

I.2.3 Contraction en nommes vectorielles.

a- Définition.

b- Théoreme du point fixe.

c- Cas d'opérateur affine.

I.2.4. Normes vectorielles de matrices.

I.3 Methodes d'tération

I.3.1 Itérations Successives.

I.3.2 Itérations Chaotiques.

II E Q U A T I O N S A U X D E R I V E E S P A R T I E L L E S

II. 1 - Définition

II.2 - CLASSIFICATION des equations aux dérivées partielles.

II.3 - Discretisation.

I. NOTIONS DE BASE

I. 1 RAPPELS SUR LES MATRICES.

I. 1..1 MATRICES CARREES.

une matrice carrée A est dite singuliere si $|A| = 0$ (determinant nul). sinon A est dite régulière (on non singuliere)

Pour tout couple de matrices reguliéres, on a

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

une matrice Carrée A est dite triangulaire supérieure (triangulaire inferieure) sitous les élements au dessous(au dessus) de la diagonale sont nul.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

une matrice diagonale est un cas particulier de matrice à la fois triangulaire superieure et triangulaire inferieure.

SI $A = \|a_{ik}\|$ ($i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$ $k = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$) la matrice transposée AT est définie par $A^T = \|a_{ki}\|$

$\star$ $(A+B)^T = A^T + B^T$

$\star$ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

$\star$ $(AB)^T = B^T A^T$

$\star$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Si une matrice carrée $S = \|S_{ij}\|_{ij}^{n}$ coincide avec Sa transposée ($S^t = S$), S est dite Symétrique .Dans une telle matrice,les éléments Symétriques par rapport à la diagonale principal sont égaux.

I.1.2 SPECTRE ET RAYON SPECTRAL.

Soit une matrice carrée (a_{ij}) donné; on appelle spectre ou valeur propres de (a_{ij}) l'ensemble des racines du polynome carateristique tel que $P(x) = |A-\lambda I| = 0$. Le rayon spectral d'une matrice carrée est le maximum de ses valeurs propres $\rho(A)=\max_i |\lambda_i|$

I.1.3 Théorie de Perron Frobenius

a) Enonocé du théorème de Perron Frobenius.

La théorie de Perron Frobenius etudie les propriétés particulières des matrices non negatives (une matrice est dite non negative si tous les a_{ij} sont positifs ou nuls)

Théorème 1: (Cas Générale).

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice (n,n) non negative alors:

- son rayon spectral est valeur propre positive ou nul de A
- il lui correspond un vecteur propre $w \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}^n$: $A\,W = \rho(A)\,w$
- Si $B \geqslant A$ alors $\rho(B) \geqslant \rho(A)$
- $0 \leqslant \sup\limits_{\substack{u>0 \\ u\in\mathbb{R}^n}} \min\limits_i \sum\limits_j \frac{a_{ij}\,u_j}{u_i} \leqslant \rho(A) \leqslant \inf\limits_{\substack{u>0 \\ u\in\mathbb{R}^n}} \max\limits_i \frac{a_{ij}\,u_j}{u_i}$
- Pour toute matrice B, réelle on complexe il vient

$$\rho(B) \leqslant \rho(|B|)$$

Théorème 2: (Cas irreductible)

Soit $A= (a_{ij})$ une matrice (n,n) non negative et irreductible alors!

- son rayon spectral $\rho(A)$ est valeur propre simple et positive de A
- Il lui correspond un vecteur propre W, $w > 0$ dans $\mathbb{R}^n$: $Aw = \rho(A)w$
- si $B \geqslant A$ et $B \neq A$ alors $\rho(B) > \rho(A)$
- on a pour tout $u>0$ dans $\mathbb{R}^n$:

soit $\min\limits_i \sum \frac{a_{ij}\,u_j}{u_i} < \rho(A) < \max\limits_i \sum\limits_j \frac{a_{ij}\,u_j}{u_i}$

soit $\rho(A) = \sum\limits_j \frac{a_{ij}\,u_j}{u_i}$ $(i=1.2.\ldots\ldots n)$

comme par exemple pour $u=w$. D'où

$$\max_{\substack{u>0 \\ u\in\mathbb{R}^n}} \min_i \sum_j \frac{a_{ij}\,u_j}{u_i} = \rho(A) = \min_{\substack{u>0 \\ u\in\mathbb{R}^n}} \max_i \sum_j \frac{a_{ij}\,u_j}{u_i}$$

on rappelle qu'une matrice A réelle (n,n) est dite reductable s'il existe une matrice de Permutation $^{(*)}$ P telle que PAP^t ait la forme suivante

$$P\,A\,P^t = \begin{vmatrix} A^{11} & A^{12} \\ o & A^{22} \end{vmatrix}$$

les blocs diagonaux A11 et A 22 etant carrées .A est dite irreductible si elle n'est pas reductible.

Une matrice de permutation (n,n) est une matrice ayant un 1 et un seul dans chaque ligne et dans chaque colone,les autres éléments étant nuls.

b) Théorème de STEIN ROSENBERG:

Soient L et U deux matrice non negatives (n,n)

-si $\rho(L+U)=0$ alors $(I-L)^{-1}U$ existe ,est non négative et $\rho(I-L)^{-1}U=0$

-Si $0 < \rho(L+U) < 1$ alors $(I-L)^{-1}U$ existe est non négative et

$$0 \leqslant \rho\left[(I-L)^{-1}U\right] \leqslant \rho(L+U) < 1 .$$

-Sis $\rho(L+U)=1$ et si $\rho(L)<1$

alors $(I-L)^{-i}U$ existe ,est non négative,et . $(i-l)^{-i}\,U = 1$

-Si $\rho(L+U)>1$ et SI $\rho(L)<1$

alors $(I-L)\,U$ existe ,est négative,et $1 \leqslant \rho(L+U) \leqslant \rho\left[(I-L)^{-1}U\right]$

I.1.4 M. Matrices et H matrices.

Les M. matrices et les H matrices s'introduisent souvent dans l'études de convergence des méthodes iteratives.Pour cela,il est nécessaire de donner quelques définitions de ces matrices.

a) M. Matrices.

une matrices carrée réelle est dite Z matrice si sa hors diagonale est formée d'éléments négatifs ou nuls.

une Z matrice est dite M matrice si elle admet une inverse non négative

Pour q'une Z matrice N soit une M matrice il faut et il suffit que/:

-Les éléments diagonaux de N soient strictement positifs (la matrice J de Jacobi associé à N est donc bien definie et non négative)

le rayon spectral de J soit inferieur à 1 : $\rho(J)<1$

Si Aest une M matrice ,les méthodes de JACOBI ,et GAUSS SEIDEL pour resoudre un système lineaire de matrice A sont convergentes ,le seconde cnvergeant au moins aussi vite que la premiere.

Presque A = 0 (i-j) est une M .matrices , J est non négative et de rayon spectral < 1. En appliquant le théorème de STEIN ROSENBERG il vient $0 \leqslant \rho(\mathcal{L}) \leqslant \rho(J) < 1$

ou $\mathcal{L}$ designe la matrice d'iteration de GAUSS Seidel associé A c'est le cas non negatif.

Pour qu'un Z matrice symétrique soit definie positive il faut et il suffit que ce soit une M matrice . ou rappelle q'une matrice réelle A(n,n) est dite definie positive si:

$$\forall x \in R^n,\ x^t A x \geqslant 0$$
$$\text{avec } x^t A x = 0 \Rightarrow x=0$$

les Z matrices symetriques definies positives sont les M matrices symetriques (on appelle matrices de STIELTJES de Telles matrices)

b) <u>H. Matrices</u>

soit A =(aij) une matrice (n,n) complexe ,soit alors N(A) la matrice réelle (n,n)

$$N(A) \quad \begin{vmatrix} |a_{11}| & -|a_{ij}| \\ -|a_{ij}| & |a_{nn}| \end{vmatrix}$$

A est dite H matrice si la Z matrice N(A) est une M matrice

Toute M matrice A est evidemment une H matrice/on a laors N(A)=A

Pour qu'une matrice complexe (n,n) A soit une H. matrice il faut et il suffit que :

- la diagonale D de A soit non singulier
- $\rho(|J|) < 1$; J étant la matrices de JACOBI.

associé a A.

-Si A est une H. matrice,les methodes de JACOBI et GAUSS SEIDEL Pour un système lineaire de matrice A sont convergantes.

Sous classe de la classe des H matrices:

soit L et U la triangulaire inferieure stricte ,et la triangulaire superieure stricte de la matrice de JACOBI alors si $S_{\infty}(I-|D|)^{-1}|U| < I$
on dira que A est une G matrice
si $|a_{ij}| > \sum |a_{ij}|$ on dira que A est une matrice à diagonale dominante.

I. 2 NORMES VECTORIELLES.

I.2.1 Proprietés générales.

a) Definitions/

Soit X un espace vectoriel sur C , toute application P de X dans $\mathbb{R}^k$ tel que:

$$-\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in X \quad P(\lambda x) = |\lambda| = P(x)$$
$$-\forall x, y \in X \qquad P(x+y) \leq P(x) + P(y)$$
$$\cdot P(n) = 0 \quad \text{entraine } x = 0$$

est appelée (s'il en existe) norme vectorielle detaille k sur x si une telle application P existe ,X sera dit vectoriellement normé par P on premier axiome resulte pour λ nul que P (o) = o donc $p(o)=o \iff x=o$ d'autre part les deux première axiomes entrainent que:

$$\forall x, y \in X \quad |P(x) - P(y)| \leq P(x-y)$$

b) **SEMI-NORMES:**

Soit P (n) la iéme Composante de p (n) dans $\mathbb{R}^k$(i=1,2,......k) les deux première axiomes montrent que k applications Pi sont des semi normes sur X.

I.2.2. Normes vectorielles régulieres

La classe des normes vectorielles régulières à l'importante propriété suivante:si P est une norme vectorielle réguliere sur un espace vectoriel X,elle engendre une norme vectorielle (elle même reguliere) sur l'algebre $\mathcal{L}$(X,X) des opérateurs linéaires, continus de X dans X. Cette construction est rendue possible parce-qu'alors tout élément de $\mathcal{L}$(x,x) admet une petite majorante (pour la relation d'ordre élément à élément)

a)- Definition:

une norme vectorielle p de taille k sur un espace vectoriel (réel) X est dite reguliere si W =X

W étant la somme directe algébrique de Wi $(i=1,2\ldots\ldots k)$
$W_i = \cap V_j$ $(i=1,2\ldots\ldots\ldots k)$ et V_i ensemble des $x \in X$

tel que $P_i(x)=o$

remarque: En dimension finie $(x=\mathbb{R}^n)$ un exemple de base est le suivant : Tout x X est decomposé en k "blocs" x_i de X i composantes $(\sum^k \lambda_i = n)$. Munissant $\mathbb{R}^{\lambda_i}$ d'une norme φ_i on definit la norme vectorielle réguliere detailée k sur X

$$x \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{\lambda_1} \\ \hline \vdots \\ \xi_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \} \lambda_1 \\ \\ \} \lambda_k \end{matrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x^k \end{vmatrix} \longrightarrow P(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_k(x_k) \end{vmatrix}$$

b) <u>Plus petite majorante d'un operateur lineaire continus</u>

l'opérateur $T \in \mathcal{L}(X,X)$ s'ecrit de façon unique

$$T = \sum_{i,j=1}^{k} T_{ij}$$

on T_{ij} est un opérateur lineaire contenus de W_j dans W_i
T admet une plus majorante $M(T) = (m_{ij}(T))$
avec $m_{ij}(T)$ sup $\displaystyle\sup_{\substack{x_j \in W_j \\ x_j \neq 0}} \frac{\|T_{ij}\, x_j\|_i}{\|x_j\|_j}$; $(i,j=1,2,\ldots k$

L'ensemble des majorants B de T caraterisé par $M(T)$ B
l'application $T \longrightarrow M(T)$ est une norme vectorielle regulière sous multiplicative ,detaille k^2 sur l'algebre $\mathcal{L}(X,X)$

$$\forall\, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,X) \quad M(T_1 T_2) \leqslant M(T_1) \cdot M(T_2)$$

on dira que M est engendrée par P
-on a pour toute valeur propre λ de T et toute majorante B de T:

$$|\lambda| \leqslant \rho(M(T)) \leqslant \rho(B)$$

$(M(T))$ est Donc une majorante de rayon spectral minimum

c) <u>Decomposition en blocs.</u>

R^n est décomposé en blocs dètaille λ_i($\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$) norme par φ_i. D'où la norme vectoriellè réguliére détaille k sur $\mathbb{R}^n$

---/...

$$x = \begin{vmatrix} \left.\begin{matrix} \xi \\ \vdots \\ \xi_{\lambda_1} \end{matrix}\right\} \lambda_1 \\ \hline \left.\begin{matrix} \xi_n \end{matrix}\right\} \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{vmatrix} \longrightarrow P(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_k(x) \end{vmatrix}$$

-Toute matrice $T(n,n)$ à elements dans $\mathbb{R}$ est alors décomposée en blocs T_{ij} de type (λ_i, λ_j) $\{i,j = 1,2 \ldots\ldots\ldots k\}$

$$T = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c|c} T_{11} & & & T_{1k} \\ \hline & & & \\ \hline T_{k1} & & & T_{kk} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\lambda_1 \\ \\ \}\lambda_k \end{array} \\ \underbrace{\phantom{T_{11}}}_{\lambda_1} \qquad\qquad \underbrace{\phantom{T_{kk}}}_{\lambda_k} \end{array}$$

les bloc diagonaux sont donc donc carrés ,T admet une plus petite majorante $M(T) = \big(m_{ij}(T)\big)$

avec $m_{ij}(T) \sup\limits_{x_j \neq 0} \dfrac{\varphi_i(T_{ij}\, x_j)}{\varphi_j(x_j)} = S\, \varphi_i\, \varphi_j\, (T_{ij})$

$M(T)$ est bien obtenue en remplaçant chaque bloc de T par sa norme .L'ensemble des majorants B de T est alors caractérisé par $M(T) \leqslant B$

L'application M est une norme vectorielle reguliere,sous multiplicative de taille k^2 sur m_n (algebre des matrices complexes (n,n))et pour tout T dans m_n

$$\rho(T) = \rho(M(T)) \leqslant \rho(B)$$

remarque! Dans le cas ou P est la norme vectorielle type sur C^n $P(x) = |x|$ alors ,pour tout T dans m_n

$$M(T) = |T|$$

I.2.3 Contraction en norme vectorielle.

Cette notion étend la notion usuelle d'opérateur contractant sur un espace vectoriel normé :son principal intérêt est le suivant: si X est un produit d'espaces deBanach,muni de la norme vectorielle canonique,et si F est un opérateur contractant sur X, alors non seulement la méthode des approximations successives conduite sur F converge vers l'unique point fixe de F dans X, mais de plus

La méthode de GAUSS -SEIDEL correspondante converge également vers ce point fixe

a) Définition :

soit F une application d'une partie D de X dans X, F est dit contractant sur D (relativement a la norme P) ,s'il existe une matrice non négative K (k,k) de rayon spectral inferieur à 1 telle que

$$\forall x,y \in D \qquad P(F (x) -F(y)) \leq k\, P(x-y)$$

K. sera appelée matrice de contraction de F, alors si F admet un point fixe $f(\xi) = \xi$ dans D ,il est unique.

b) théoreme du point fixe:

si F est contractant sur X complet,alors F admet dans X un unique point fixe ξ ,Pour x_o quelconque dans X la suite $x_{r+1} = F(x_r)$ r=1,2 (méthode des approximations successives sur F) converge vers ξ.On a alors l'estimation suivante en norme vectorielle:

$$P(\xi - x_r) \leq K^r \ (I-K)^{-1} P (x_1 - x_o)$$

c) Cas d'opérateur affine.

Considérons sur X l'opérateur F definé par $F(x) = T x + h$
T étant un opérateur linéaire et h donné dans X.

Alors dire que F est contractant dans X, c'est dire qu'il existe une matrice non négative K (k,k) de rayon spectral inferieur à 1 Telle que

$$\forall x \in X \quad P (T x) \leq k\, P (x).$$

soit P une norme vectorielle réguliere de taille k sur X complet et M la norme vectorielle engendrée par P sur l'algebre des opérateurs, lineaire $T \in \mathcal{L}(X,X)$,alors si $\rho(M(T)) < 1$ l'équation $x = T x + h$ admet une solution unique ξ dans X, calculable par le méthode des approximations successives; $x_{r+1} = T x_r + h$ r = o,1 x_o quelconque et l'on a

$$P(\xi - x_r) \leq [M(T)]^r \, [I - M(T)]^{-1} P (x_1 - x_o)$$

I.2.4 Normes vectorielles de matrices.

La norme vectorielle engendrée par p sur l'ensemble des matrices réelles est $S_{\varphi_i \varphi_j}(A_{ij}) = \sup \dfrac{\varphi_i (A_{ij}\, x_j)}{\varphi_j(x_j)}$ ce qui donne pour les 3 normes usuelles.

Norme du maximum :

$$S_{\varphi\infty\varphi\infty}(A) = S_{\infty}(A) \quad \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\varphi_\infty(Ax)}{\varphi_\infty(x)} = \operatorname{Max}_i \sum_j |a_{ij}|$$

norme de la valeur absolue

$$S \quad (A) = S_1(A) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\varphi_1(Ax)}{\varphi_1(x)} = \operatorname{Max}_j \sum_i |a_{ij}|$$

norme euclidienne

$$S_{\varphi_2\varphi_2}(A) = S_2(A) = \sup \frac{\varphi_2(Ax)}{\varphi_2(x)} = \sqrt{|\lambda_M|}$$ λ M:max des valeurs propres de $A^T.A$

ainsi en décomposant une matrice en blocs on peut faire l'approximation du rayen spectral par une norme ,ce qui permet entre autre d'étudier le probleme de l'existance pour une matrice donnée d'une M.minorante (T).

$\cdot \rho(T) \leqslant \rho(M(T))$

si A est une bloc H matrice,les méthodes par blocs de JACOBI et GAUSS-SEIDEL pour résoudre tout systeme linéaire $A x = B$ convergent vers l'unique solution $x = A^{-1} B$

I. 3 Méthodes d'iteration

I.3.1 Itérations successives.

La méthode des iterations successives consiste a partir d'un vecteur de départ x_0 (donné) et de calculer les valeurs de x à chaque itération en consedirant le vecteur calculé précédamment.

Cette méthode se détaille ainsi:

$$\begin{aligned} x_1^{r+1} &= f_1(x_1^r, \ldots\ldots\ldots x_k^r) \\ &\vdots \\ x_i^{r+1} &= f_i(x \ldots\ldots\ldots\ldots x_k^r) \\ x_k^{r+1} &= f_k(x, \ldots\ldots\ldots\ldots x_k^r). \end{aligned}$$

I.3.2 Itération chaotiques:

La motivation d'une suite convergente vers le point fixe unique est de justifier de telles techniques numériques d'itération (chaotiques)utilisées. En particulier, dans une itération conduite sur une grille ,pour la résolution approchée d'un problème aux limites disrétisées,on peut pratiquer utilement ces méthodes; Au lieu d'activer les itérations en balayant la grille dans un ordre systématique,on ne se prive pas d'itérer plus frequemmant en des noeuds de la grille ou la convergence est lente qu'aux noeuds(par exemple voisins des bords du

ou convergence est plus rapide:ceci,bien entendu de diminuer le temps de calcul total,ces techniques sont justifiees: précisement , à la seule condition de F contraction de F et a condition que l'iteration chaotique considérée n'abandonne jamais définitivement une seule composante.

La méthode se détaille ainsi en prenant un exemple:

-soit à résoudre dans R^n une équation de point fixe $x = F(x)$

$$
\begin{aligned}
. x_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots x_n) \\
. x_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots x_n) \\
. x_n &= f_n(x_1, x_2 \dots x_n)
\end{aligned}
$$

si on considère pour n=4 une suite s de parties de $\{1,2,3,4\}$

.. $\{1,2\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2\}$

un vecteur de départ $x^0 = \left| \begin{array}{l} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \end{array} \right.$ étant donné ,quelconque,dans R^4,

envisageons alors pour résoudre numériquement (1) la construction de la suite suivantes des vecteurs de R^4

$$\{1,2\} .; \quad x^1 = \quad x^1 = \left| \begin{array}{lll} x_1^1 & = & f1 \; (x_1^0 , x_2^0 , x_3^0 , x_4^0) = f \; (x) \\ x_2^1 & = & f2 \; (x_1^0 , x_2^0 , x_3^0 , x_4^0) = f \; (x) \\ x_3^1 & = & x_3^0 \\ x_4^1 & = & x_4^0 \end{array} \right.$$

$$\{1,3,4\} ; \quad x^2 = \begin{array}{ll} x_1^2 & = f \; (x^1) \\ x_2^2 & = x_2^1 \\ x_3^2 & = f_3 \; (x^1) \\ x_4^2 & = f_4 \; (x^1) \end{array}$$

$$\{2\} ; \quad x^3 = \left| \begin{array}{lll} x_1^3 & = & x_1^2 \\ x_2^3 & = & f_2 (x^2) \\ x_3^3 & = & x_3^2 \\ x_4^3 & = & x_4^2 \end{array} \right.$$

Une Telle itération sera appelé itération chaotique se parallèle (C S P) Conduite sur F attachée à la Suite S et partant de x^0

Il est clair que la méthode des approximations successive est une itération entiérement parallele .si les éléments de la suite sont des parties de 1,2,3,4, réduites a un élément on obtient une itération chaotique qui est entiérement "serie"

si l'on considère le suite s suivante:

(1), (2), (3) , (4) , ...(1) , (2) ,(3) ,(4),.....etc on obtient alors la méthode de GAUSS-Seidel. En regroupant les pas de 4 en 4 cette méthode s'ecrit ainsi :

$$x_1^{n+1} = f_1(x_1^n \quad x_2^n \quad x_3^n \quad x_4^n)$$

$$x_2^{n+1} = f_2(x_1^{n+1} \quad x_2^n, \quad x_3^n, \quad x_4^n)$$

$$x_3^{n+1} = f_3(x_1^{n+1} \quad x_2^{n+1} \quad x_3^n, \quad x_4^n)$$

$$x_4^{n+1} = f_4(\, x_1^{n+1}, x_2^{n+1} \quad x_3^{n+1}, \quad x_4^n)$$

II. EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES

II.1 Définition:

Une equation aux derivées partielles est une relation entre une fonction inconnue de plusieurs variables réelles indépandantes, les variables et les dérivées partielles de divers ordres de la fonction inconnue par rapport à ces variables, les fonctions qui verifient une équation aux partielles en sont les solutions ou les integrales et toute solution est une surface integrale dans une hypersurface.

Les equations lineaires que nous nous proposons d'étudier sont du second ordre et a deux variables d'inconnue f (x,y) dont la forme générale est:

$$P(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x^2} + Q(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + 2R(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$+ S(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + T(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + U(x,y) = 0$$

P, Q, R, S, T, U sont des fonctions données indépendantes de f(x,y).

II.2 CLASIFICATION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.

-Si dans une region du plan des x y on a $R^2 - PQ > 0$, l'équation est dite hyperbolique dans cette region . par exemple l'equation des ondes:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad R = 0,\ P = 1,\ Q = \frac{1}{a^2},\ S = 0,\ T = 0,\ U = 0$$

d'ou $R^2 - PQ = 1 > 0$

si dans une region du plan des x,y: $R^2 - PQ = 0$, l'équation est dite elliptique dans cette region par exemple l'equation de laplace:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou } P=1 \quad Q=1,\ R=S=T=U=0$$

d'ou $R^2 - PQ = -1$ qui est négatif.

-si dans une région du plan des x,y on a $R^2 - PQ = 0$ l'équation est dite parabolique dans cette région du plan, par exmple l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \quad \text{on } a = \text{constante}$$

$$P = 1,\ Q = R = S = 0 \text{ et } T = -a^2$$

III.3 DISCRETISATION :

III.3.1 Position du Problème.

Soit a résoudre le problème aux derivées partielles du second ordre à deux vanables:

$$P(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + Q(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + 2R(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + S(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + T(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + U(x,y) = 0$$

dans le carré C : $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$ et avec des conditions sur bords AB DA, BC, CD, de ce carré connues. Donc le problème consiste a definir la fonction en differents points du carré C.

La méthode dite "des différences finies consiste à partager les cotés en N +1 et M + 1 parties inégales respectivement suivant les directions x,y et obtenir une grille de points

on notera les intervalles sur les axes x,y respectivement par $\Delta^i_{k_1}$ et $\Delta^j_{k_2}$ $k_1 = 1, \dots N+1$; $k_2 = 1 \dots M+1$ (voir figure

les points interieurs du carré sont ceux qui correspondent à i =1,2 ....N et j=1,2........,M.

Un point quelconque du maillage étant represehté par Pij =(xi,yj)

i =1.......,N +1

j= 1.......,M +1

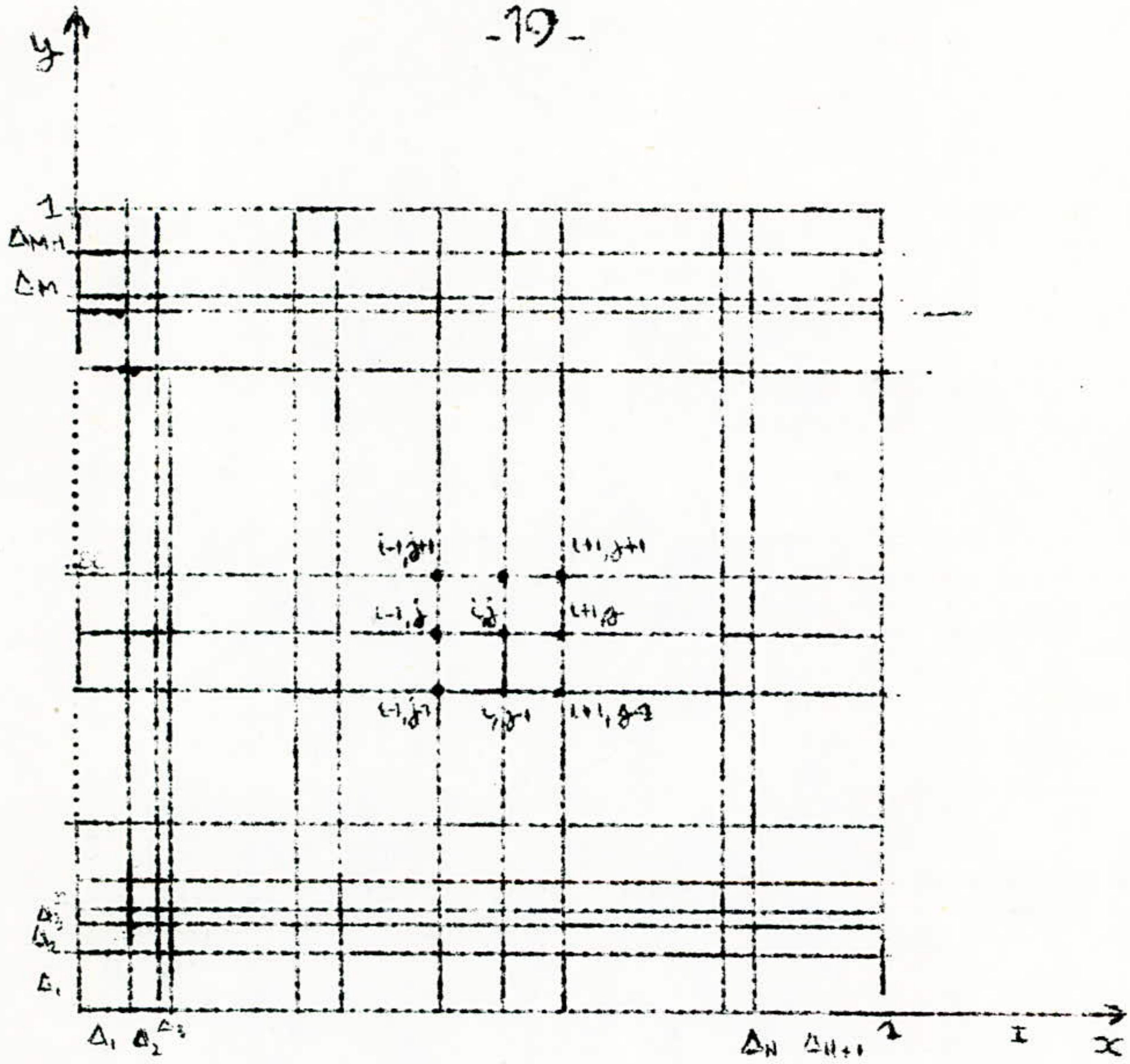
On note par f (i,j)= f(xi,yj) la fonction definie en ces (N+1) (M +1) points.

II.3.2 Approximation de l'équation générale.

En ecrivant le developpement en serie de Taylor limité au pre premier ordre pour la derivée on a:

$$\frac{\partial f(i,j)}{\partial x} = \frac{f(i+1,j) - f(i,j)}{\Delta^i_{i+1}} \quad (1)$$

ou
$$\frac{\partial f(i,j)}{\partial x} = \frac{f(i+1,j) - f(i-1,j)}{\Delta^i_i + \Delta^i_{i+1}} \quad (2)$$


y
1
ΔM+1
ΔM
i-1,j+1
i+1,j+1
i-1,j
i,j
i+1,j
i-1,j-1
i,j-1
i+1,j-1
Δ3
Δ2
Δ1
Δ1
Δ2
Δ3
ΔN
ΔN+1
1
I
x

ou encore $$\frac{\partial f}{\partial x}(i,j) = \frac{f(i,j)-f(i-1)}{\Delta^i_i} \quad (3)$$

on utilisera l'une ou l'autre de 3 formes de Telle soite qu'on soit toujoeurs limité par les bords du carré.

Et en ecrivant la même chose pour le dérivéé par rapport a y ,ou obtient:

j f (i,j)

$$\frac{\partial f(i,j)}{\partial y} = \frac{f(i,j+1) - f(i,j)}{\Delta^j_{j+1}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial f(i,j)}{\partial y} = \frac{f(i,j+1)-f(i,j-1)}{\Delta^j_j + \Delta^j_{j+1}} \quad (5)$$

$$\frac{\partial f(i,j)}{\partial y} = \frac{f(i,j)-f(i,j-1)}{\Delta^j_j} \quad (6)$$

En dervivant une seconde fois l'expression (1) ou aura:

$$\frac{\partial^2 f(i,j)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(i,j)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(i+1,j)-f(i,j)}{\Delta^i_{i+1}}\right.$$

Et en utilisant l'expression (3) on obtient:

$$\frac{\partial^2 f(i,j)}{\partial x^2} = \frac{\dfrac{f(i+1,j)-f(i,j)}{\Delta^i_{i+1}} - \dfrac{f(i,j)-f(i-1,j)}{\Delta^i_i}}{\Delta^i_i}$$

(7) $$\boxed{\frac{\partial^2 f(i,j)}{\partial x^2} = \frac{f(i+1,j)-f(i,j)}{\Delta^i_{i+1}\,\Delta^i_i} - \frac{f(i,j)-f(i-1,j)}{(\Delta^i_i)^2}}$$

De la même façon ,on obtient la derivée second par rapport à y:

$$\frac{\partial^2 f(i,j)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(i,j)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f(i,j+1)-f(i,j)}{\Delta^j_{j+1}}\right.$$

Et en utilisant l'expression (6) on obtient:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(i,j) = \frac{\dfrac{f(i,j+1)-f(i,j)}{\Delta^j_{j+1}} - \dfrac{f(i,j)-f(i,j-1)}{\Delta^j_j}}{\Delta^j_j}$$

(8) $$\boxed{\frac{\partial^2 f(i,j)}{\partial y^2} = \frac{f(i,j+1)-f(i,j)}{\Delta^j_{j+1}\,\Delta^j_j} - \frac{f(i,j)-f(i,j-1)}{\Delta^j_j}}$$

Et pour la dérivée mixte on oura:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(i,j)}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(i,j+1)-f(i,j-1)}{\Delta^j_j + \Delta^j_{j+1}}\right]$$

Pour cela, on utilsé l'expression (2)

d'où alors:

$$\frac{\partial^2 f(i,j)}{\partial x \partial y} = \frac{\dfrac{f(i+1,j+1)-f(i+1,j-1)}{\Delta^j_j} - \dfrac{f(i-1,j+1)-f(i-1,j+1)}{\Delta^j_j + \Delta^j_{j+1}}}{\Delta^i_i + \Delta^i_{i+1}}$$

(9) $$\boxed{\frac{\partial^2 f(i,j)}{\partial x \partial y} = \frac{f(i+1,j+1)-f(i+1,j-1)-f(i-1,j+1)+f(i-1,j-1)}{(\Delta^j_j+\Delta^j_{j+1})(\Delta^i_i+\Delta^i_{i+1})}}$$

pour les dervivées premieres, on prendra respectivement les formes (2) et (5) pour $\frac{\partial f(i,j)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(i,j)}{\partial y}$.

En remplaçant les expressions des derivées dans l'équation générale on obtient:

$$P(x,y)\left[\frac{f(i+1,j)-f(i,j)}{\Delta^i_{i+1}\;\Delta^i_i} - \frac{f(i,j)-f(i-1,j)}{(\Delta^i_i)^2}\right]$$

$$+\,Q(x,y)\left[\frac{f(i,j+1)-f(i,j)}{\Delta^j_{j+1}\cdot\Delta^j_j} - \frac{f(i,j)-f(i,j-1)}{(\Delta^j_j)^2}\right.$$

$$+2R(x,y)\left[\frac{f(i+1,j+1)-f(i+1,j-1)-f(i-1,j+1)+f(i-1,j-1)}{(\Delta^i_i+\Delta^i_{i+1})(\Delta^j_j+\Delta^j_{j+1})}\right]$$

$$+S(x,y)\,\frac{f(i+1,j)-f(i-1,j)}{\Delta^i_{i+1}+\Delta^i_i}+T(x,y)\left[\frac{f(i,j+1)-f(i,j-1)}{\Delta^j_j+\Delta^j_{j+1}}\right]+U(x,y)$$

en ordonnant cette équation il vient :

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l}
-f(i,j)\left[\dfrac{P(x,y)}{\Delta^i_{i+1}\Delta^i_i}+\dfrac{P(x,y)}{(\Delta^i_i)^2}+\dfrac{Q(x,y)}{\Delta^j_{j+1}\Delta^j_j}+\dfrac{Q(x,y)}{(\Delta^j_j)^2}\right]\\[2ex]
+f(i+1,j)\left[\dfrac{P(x,y)}{\Delta^i_{i+1}\Delta^i_i}+\dfrac{S(x,y)}{\Delta^i_{i+1}+\Delta^i_i}\right]+f(i-1,j)\left[\dfrac{P(x,y)}{(\Delta^i_i)^2}-\dfrac{S(x,y)}{\Delta^i_{i+1}+\Delta^i_i}\right]\\[2ex]
+f(i,j+1)\,\dfrac{Q(x,y)}{\Delta^j_{j+1}\Delta^j_j}+\dfrac{T(x,y)}{\Delta^j_j+\Delta^j_{j+1}}+f(i,j-1)\,\dfrac{Q(x,y)}{(\Delta^j_j)^2}-\dfrac{T(x,y)}{\Delta^j_j+\Delta^j_{j+1}}\\[2ex]
+\dfrac{2R(x,y)\,f(i+1,j+1)}{(\Delta^i_i+\Delta^i_{i+1})(\Delta^j_j+\Delta^j_{j+1})}-\dfrac{2R(x,y)f(i+1,j-1)}{(\Delta^i_i+\Delta^i_{i+1})(\Delta^j_j+\Delta^j_{j+1})}-\dfrac{2R(x,y)\,f(i-1,j+1)}{(\Delta^i_i+\Delta^i_{i+1})(\Delta^j_j+\Delta^j_{j+1})}\\[2ex]
+\dfrac{2R(x,y)f(i-1,j-1)}{(\Delta^i_i+\Delta^i_{i+1})(\Delta^j_j+\Delta^j_{j+1})}+U(x,y)=0
\end{array}\right.$$

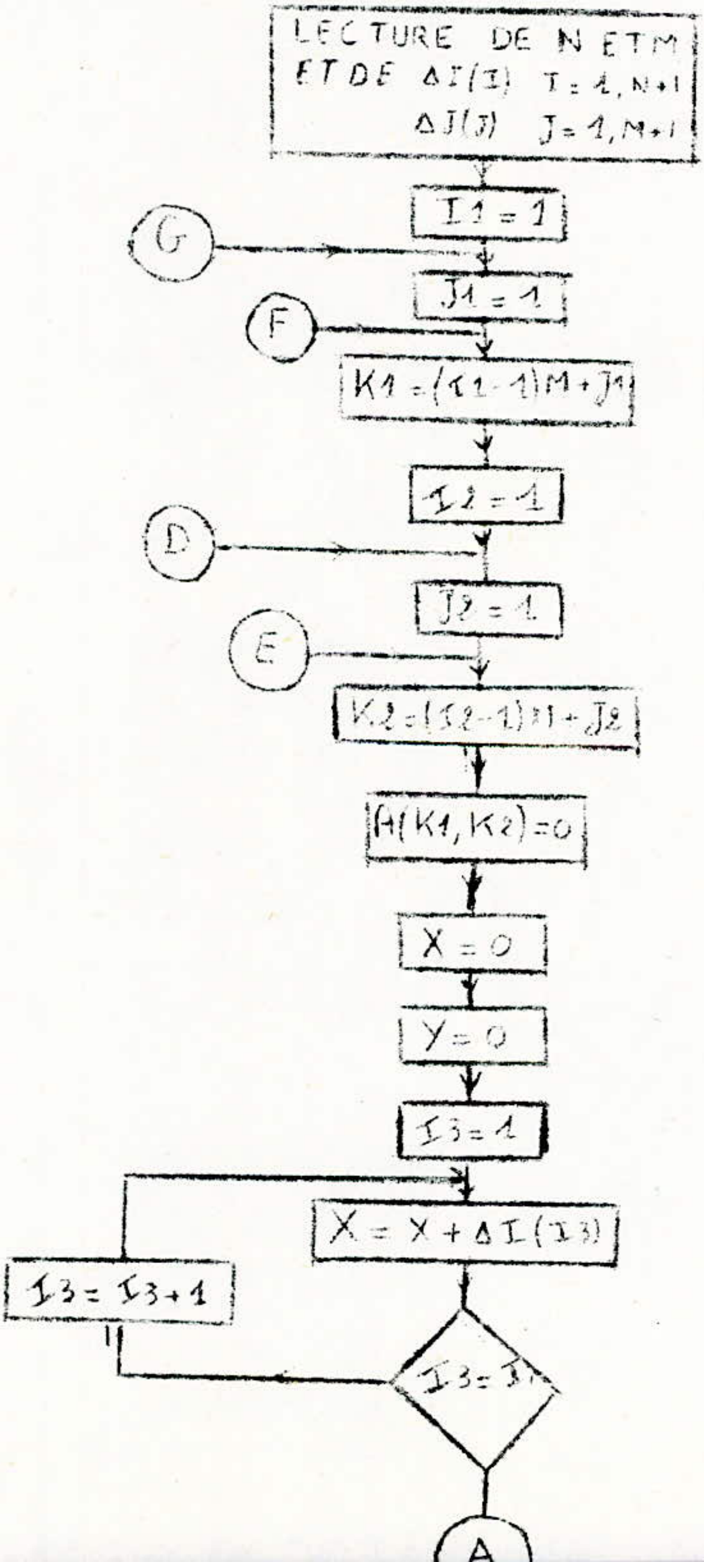
L'expresion de cette equation en chaque noeud (variation de i et j) du maillage permet d'obtenir N.N équations c'est à dire un système linéaire de la forme AX=B ou A est une matrice carrée d'ordre N.N ET B un vecteur de dimention N.N

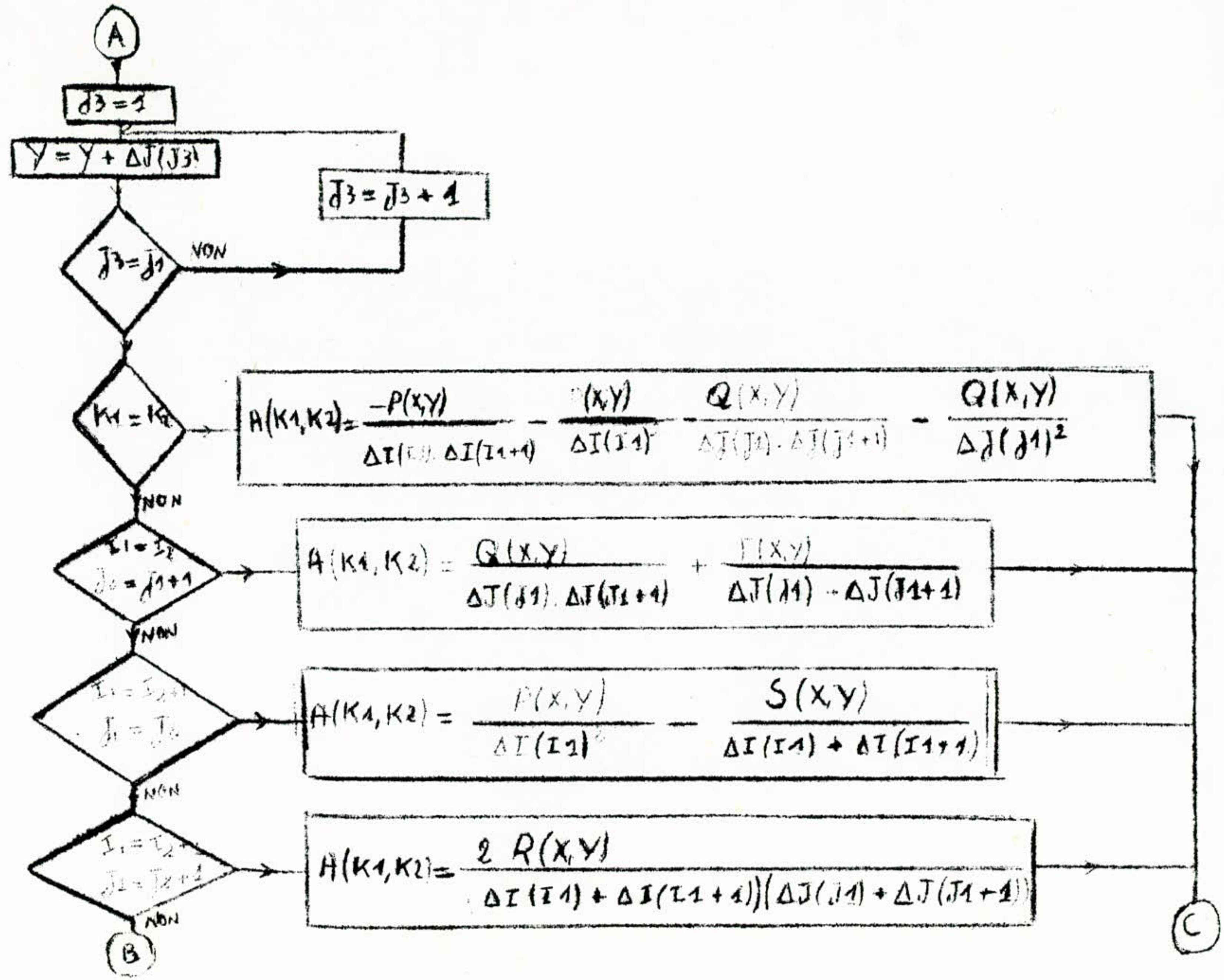
X sera donc un vecteur dont les composantes representent le valeurs de $f(x,y)$ en chaque noeud intérieur du maillage ;

II.4 Remplissage de la matrice A

On convient de parcourir le maillage de bas en haut et de gauche à droite, et en chaque point ; on écrit l'équation donnée antérieurement (équation9) . Un point du maillage donne une ligne de la matrice A; puisqu'on a N.M points ,on obtient alors N.M lignes, donc un système linéaire N.M equations à N.M inconnues .

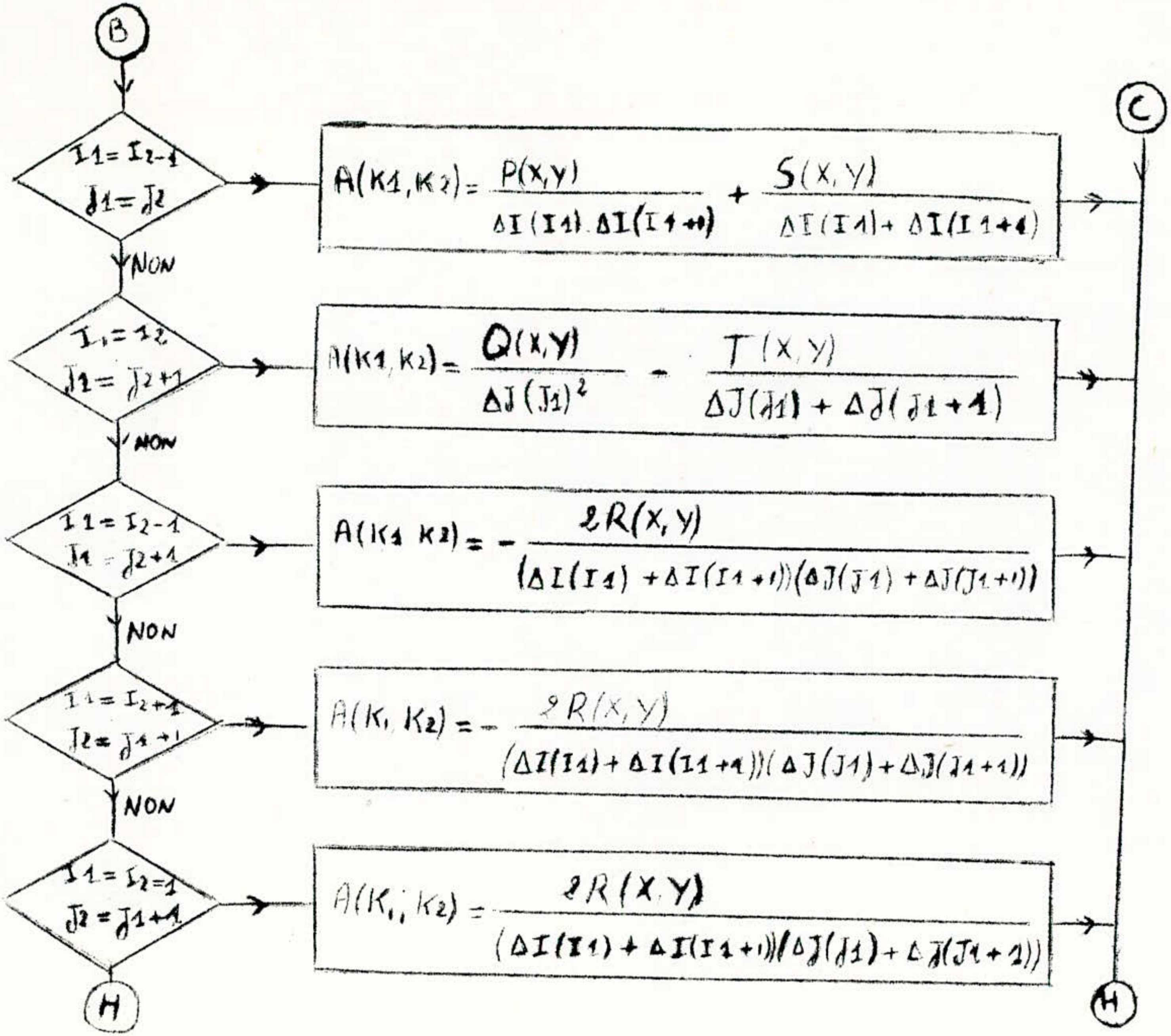
ORGANIGRAMME DE REMPLISSAGE DE LA MATRICE $\underline{\text{II-1}}$





A
J3 = 1
Y = Y + ΔJ(J3)
J3 = J3 + 1
J3 = J1
NON
K1 = K2
A(K1,K2) = −P(X,Y) / ΔI(I1)·ΔI(I1+1) − (X,Y) / ΔI(I1) − Q(X,Y) / ΔJ(J1)·ΔJ(J1+1) − Q(X,Y) / ΔJ(J1)²
NON
I1 = I2
J2 = J1+1
A(K1,K2) = Q(X,Y) / ΔJ(J1)·ΔJ(J1+1) + (X,Y) / ΔJ(J1)·ΔJ(J1+1)
NON
A(K1,K2) = P(X,Y) / ΔI(I1) − S(X,Y) / ΔI(I1) + ΔI(I1+1)
NON
A(K1,K2) = 2 R(X,Y) / (ΔI(I1) + ΔI(I1+1))(ΔJ(J1) + ΔJ(J1+1))
NON
B
C

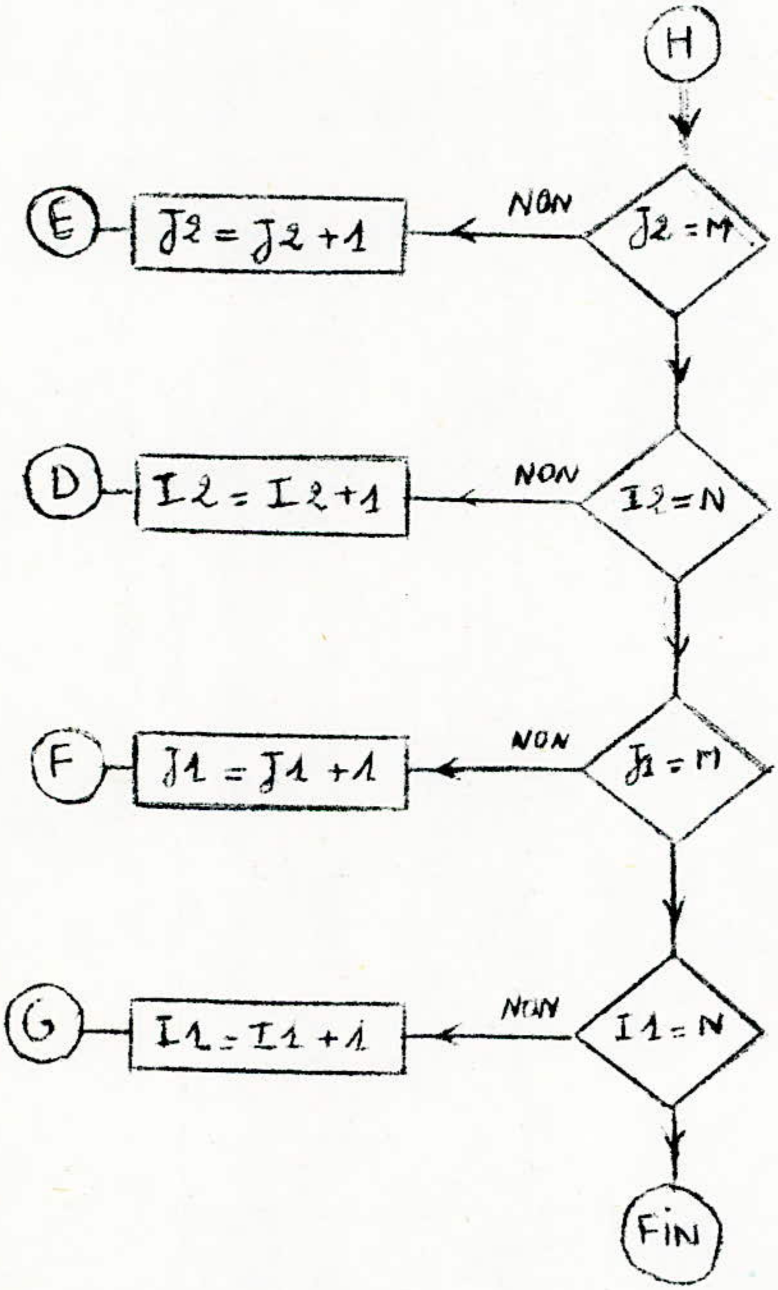
SUITE



B
I1 = I2-1
J1 = J2
NON
I1 = I2
J1 = J2+1
NON
I1 = I2-1
J1 = J2+1
NON
I1 = I2+1
J2 = J1+1
NON
I1 = I2-1
J2 = J1+1
H
A(K1,K2) = P(X,Y) / ΔI(I1).ΔI(I1+1) + S(X,Y) / ΔI(I1)+ΔI(I1+1)
A(K1,K2) = Q(X,Y) / ΔJ(J1)^2 - T(X,Y) / ΔJ(J1)+ΔJ(J1+1)
A(K1 K2) = - 2R(X,Y) / (ΔI(I1)+ΔI(I1+1))(ΔJ(J1)+ΔJ(J1+1))
A(K1 K2) = - 2R(X,Y) / (ΔI(I1)+ΔI(I1+1))(ΔJ(J1)+ΔJ(J1+1))
A(K1, K2) = 2R(X,Y) / (ΔI(I1)+ΔI(I1+1))(ΔJ(J1)+ΔJ(J1+1))
C
H

SUITE

SUITE.


H
J2 = M
NON
J2 = J2 + 1
E
I2 = N
NON
I2 = I2 + 1
D
J1 = M
NON
J1 = J1 + 1
F
I1 = N
NON
I1 = I1 + 1
G
FIN

SOUS-PROGRAMME DE REMPLISSAGE DE LA MATRICE /T-1

```
      SUBROUTINE  REMAN (N,M,DI,DJ,A)
      DIMENSION A(100,100),DI (101)DJ (IOI)
      EXTERNAL  P, Q ,R ,S ,T
      DOI30II =I, N
 217  FORMAT (9I2)
      DOI30JI =1,M
      K1=(II-I) * M+JI
      DOI30I2=1,N
      DDI30J2=1,M
      K2=(I2-1)*M+J2
      A(KI,K2)=0
      X=0
      Y=0
      DOIOII3=1;II
IOI   X=X+DI(I3)
      DOI02J3=I,JI
I02   Y=Y+DJ(J3)
      IF(KI.EQ.K2) A(K1,K2)=P(X,Y)/(DI(II)*DI(II+I))+ P(X,Y)/DI(II)**2 +
     1.Q(X,Y)/DJ(JI)*DJ(JI+I))+Q (X,Y)/DJ(JI)**2
      J4=JI+I
       I4=I2+1
      J5=J2+I
      I5=I2-I
      IF(II.EQ.12.AND.J2EQ.J4)A(K1,K2)=Q(X,Y)/(DJ (JI)*DJ(JI+I))2+T(X,Y)/(DJ(JI)+
      DJ(JI+I))
       IF(II.EQ.I4.AND.J` JI.EQ.J2.)A(K1,K2)=P(X,Y)/DI(II)**2-S(X,Y)/(DI(II)
      +3DI(II+I))
       IF(II.EQ.14.AND.JI .EQ.J5)   A(K1,K2)=2.*R(X,Y)/((DI(I1)+DI(II +I))
      4*(DJ (JI)+DJ(JI +1)))
       IF(II.EQ.15.AND.JI.EQ.J2)    A(KI,K2)=P(X,Y)/(DI(II)*DI(II+1))
      5+S (X,Y)/(DI(II)+DI(II +1))
      IF(II.EQ.12.AND.JI.EQ.J5  )    A(KI,K2)=Q(X,Y)/DJ(J1)**2-T(X,Y)DJ(J1)6+DJ(J1+1))
      IF(II.EQ.15.AND.JI.EQ.J5. )    A(KI,K2)=-2.*R(X,Y/((DI(II)+DI(II+I)) 7*(DJ(JI)+
     5 DJ(JI +I)))
```

- SUITE 28-

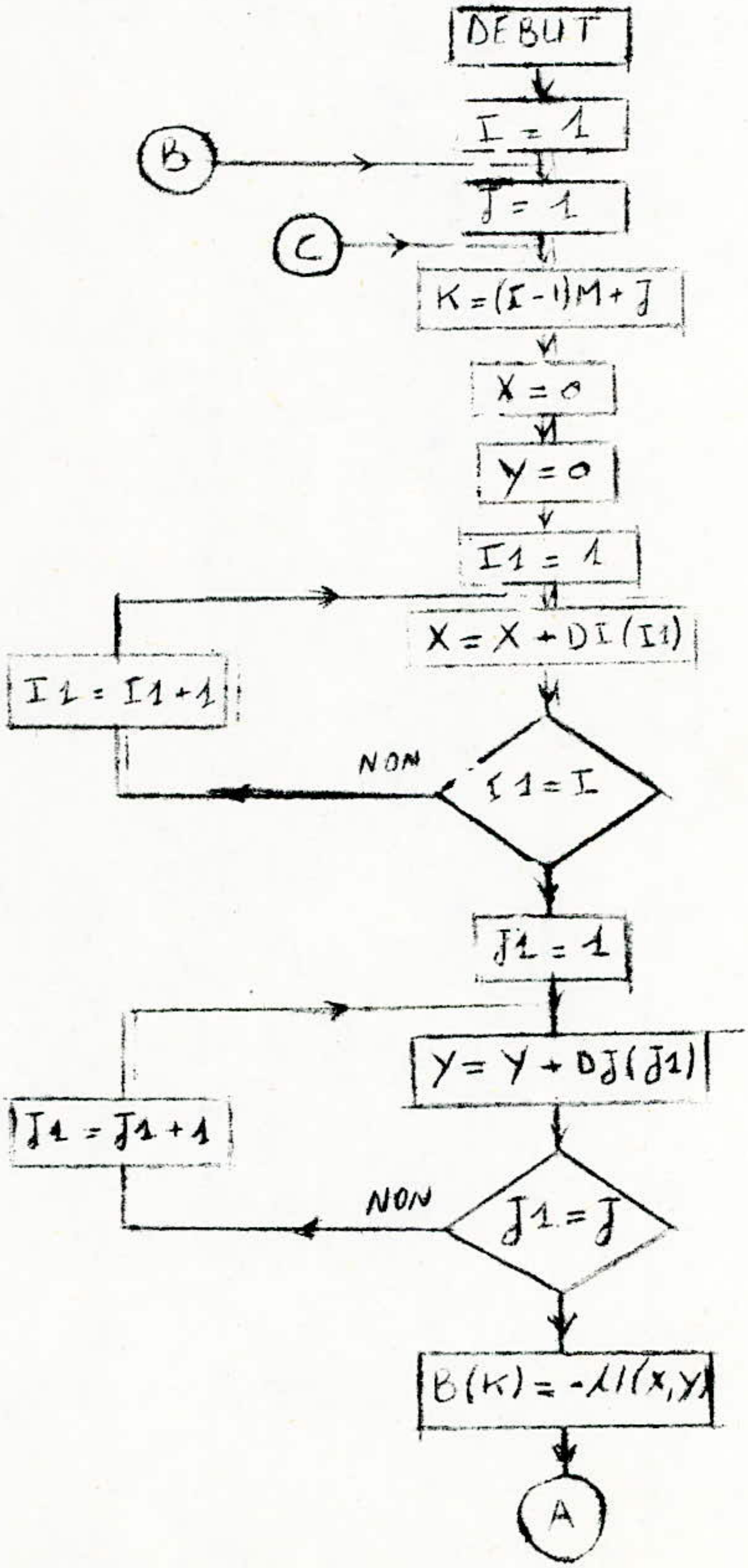
```
      IF (11?EQ.14.AND.J2.EQ.J4)   A(K1,K2)=-2.*R(X,Y)/((D1 (11)+D1(11 +1))
      8*(DJ(J1+DJ (J1+1)))
      IF(11.EQ.15.AND.J2.EQ.J4)   A(K1,K2)=2.* R(X,Y)/((D1(11)+D1(11+1))
      9*(DJ(J1)+DJ(J1+1)))
  130 CONTINUE
      RETURN
      END.
```

II.5 REMPLISSAGE DU VECTEUR B.

Le vecteur B contiendra ,en plus de la fonction $u(x,y)$ les conditions aux bords du maillage ,c'est à dire les valeurs de la fonction $f(x,y)$ pour les noeuds placés sur la frontière du carré unitaire unitaire.

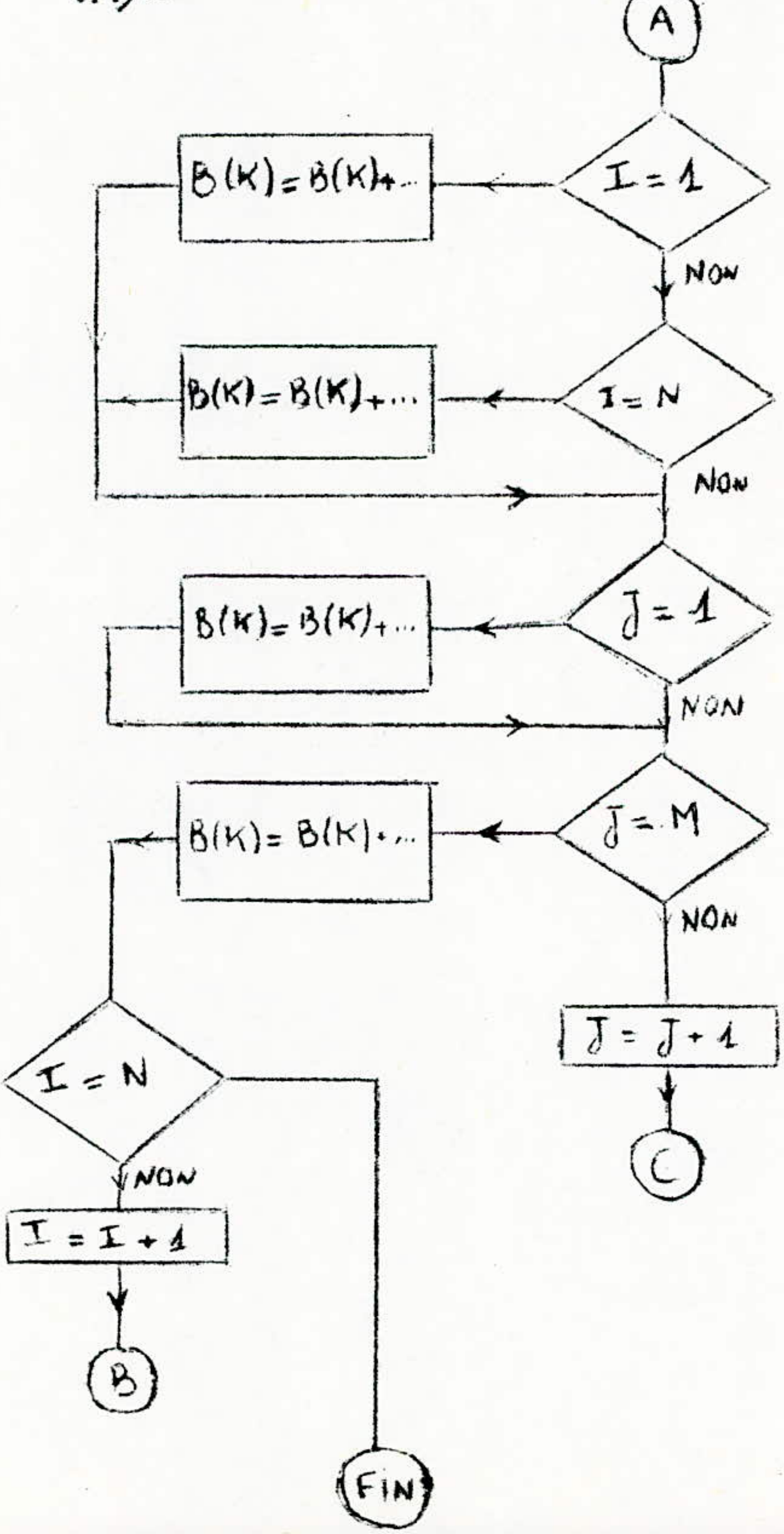
Les conditions aux bords sont données.
Notons par $F_1(y)$, la fonction connuesur l'axe des ordonnées ($x=o$ et $o\leq y\leq 1$)
par F_2 (y) la fonction connue sur la droite $x=1$ et $0\leq Y\leq 1$
par $F_3(x)$ la fonction connue sur l'axe des abscissés ($y = 0$ $0 < X < 1$
par F_4 (x) la fonction connue sur la droite $y=1$ et $0 < x < 1$

ORGANIGRAMME DE REMPLISSAGE DU VECTEUR B



SUITE

.../...


A
I = 1
B(K) = B(K)+...
NON
I = N
B(K) = B(K)+...
NON
J = 1
B(K) = B(K)+...
NON
J = M
B(K) = B(K)+...
NON
J = J + 1
C
I = N
NON
I = I + 1
B
FIN

SOUS-PROGRAMME DE REMPLISSAGE DU VECTEUR B

```
      SUBROUTINE REMB(N.M.DI.DJ.B.FI.F2.F3.F4.)
      DIMENSION B(100),DJ(IOI),DI(IOI)FI(102),F2(102),F3(IOO),F4(IOO)
      EXTERNAL P,Q,R,S,T,U
      DDIOOI=I,N
      DOIOOJ=I,M
      K=(I - I)*M+J
      X=0
      Y=0
      D0110I=1,I
  IIO X=X+DI(II)
      D0120 JI=I,J
  I20 Y=Y+DJ(JI)
      B(K)=-U(X,Y)
      IF(I.EQ.1) B(K)=B(K)-(P(X,Y)/DI(I )**2-S(X,Y)/(DI(I +I)+DI(I )))*
      IF(J+I)+(2.*R(X,Y)/(DI(I )+DI(I +I))*(DJ(J)+DJ(J  +I))))*(FI(J+2)-2FI(J))
      IF(I.EQ.N) B(K)=B(K)-(P(X,Y)/(DI(I) *DI(I+I))+S(X,Y)/(DI(I)+DI(I +I3)))
         *F2(J+I)+(2.*R(X,Y)/((DI(I)+DI(I+I))*(DJ(J+1)+DJ(J))))*( F2(J )-F2(J+2))
      IF(J.EQ.I) B(K)=B(K) -(Q(X,Y)/DJ(J   )**2-T(X,Y)/(DJ (J )+ DJ +1)))*F3
      5 (I)+(2.*R(X,Y)/((DI(I)+DI(I+I))*(DJ(J)+DJ(J+I))))*(F3(I+I)
      6-F3(I-I)))
      IF (J.EQ.M). B(K)=B(K)-(Q(X,Y)/(DJ(J )*DJ(J+T))+T(X,Y)/(DJ(J)+
      7DJ(J+I))) *F4(I)+(2.*R(X,Y)/((DI(I)+DI(I+1))1(DJ(J)+DJ(J+I))))*
      8(F4(I -I)+F4(I+1))
  100 CONTINUE
      RETURN
      END
```

II. 6 RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE AX=B

II.6.1 Par la methode directe (GAUSS)

Soit

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2n}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \qquad (1)$$

un système de n equations lineaires a n inconnues

sous forme matricielle ,ce système peut s'ecrire:

$$AX = B$$

On suppose que ,dans le système d'équation (1),on a $a_{11} = o$.

on elimine x_1 à partir de la deuxième équation en ajoutant à la seconde équation,la premiere multipliée par $-a_{22} / a_{11}$,à la troisième,la première multipliée par $-a_{32} /a_{11}$..etc.le Système (1) est alors remplacé par le système suivant:

$$\begin{array}{l} a\,x + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots\dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \quad\quad a_{33}^{(2)}x_3 + \dots\dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad\quad a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots\dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{array}$$

Les nouveaux coefficients et les nouveaux membres de droite sont reliés aux precedents par les formules:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}a_{2j}^{(1)}}{a_{22}} \qquad b_i^{(2)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}b_2^{(1)}}{a_{22}}$$

$$(i,j = 3\dots\dots n)$$

En continuant l'algorithme,on passe en n-i etapes du système (1)qan système triangulaire recurrent

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots\dots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \quad\quad a_{33}^{(2)}x_3 + \dots\dots a_{3n}x_n = b_3^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad\quad\quad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array}$$

Cette reduction ne peut être effectuée que si,et seulement si,dans le processus ,tous les nombres.

$a_{11}, a_{22}^{(1)}; a_{33}^{(2)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-2)}$

Dans notre cas,on a utilisé une méthode plus générale qui conaiste à triangulariser et resondre le système matriciel AX=B

ou A est une matrice carrée d'ordre m

X est une matrice à m lignes et n colonnes (matrice solution)

R est une matrice à m lignes et n colonnes .

Dans cette methode qui consiste a tester le pivot ,on se fixe une tolerance E P S assez petite.

I E R est un parametre codé comme suit:

I E R = 0 pas d'érreur

I E R = - 1 pas de resultat

Aprés toutes les étapes d'élimination et de résolution le resultat est mis dans la matrice R.

Remarque :la matrice R doit être rangée en colonne dans un vecteur.

SUBROUTINE GELG(R,A,M,N,EPS,IER)

```
      DIMENSION A(1),R(1)
      IF(M) 23,23,1
C     RECHERCHE DU PLUS GRAND ELEMENT DE A
    1 IER=0
      PIV=0
      MM= M*M
      NM =N*M
      DO 3 L=1,MM
      TB =ABS(A(L))
      IF(TB-PIV)3,3,2
    2 PIV = TB
      I=L
    3 CONTINUE
      TOL=EPS*PIV
C     DEBUT D'ELIMINATION
      LST =1
      DO 17 K=1,M
C     TEST DE SINGULARITE
      IF(PIV)23,23,4
    4 IF(IER)7,5,7
    5 IF(PIV-TOL)6,6,7
    6 IER =K-1
    7 PIVI=1./A(I)
      J=(I-1)/M
      I=I-J*M-K
      J=J+1-K
      DO 8 L =K,NM,M
      LL=L+I
```

```
      SUITE
      TB = PIV*R(LL)
      R(LL) =R(L)
    8 R(L)= TB
C     TEST DE FIN D'ELIMINATION
      IF(K-M)9,18,18
      LEND =LST+M-K
      IF(J)12,12,10
   10 II =J*M
      DO 11 L = LST,LEND
      TB =A(L)
      LL =L+II
      A(L) =A(LL)
   11 A(LL) = TB
   12 DO 13 L=LST,NM,M
      LL =L+I
      TB =PIVI*A(LL)
      A(LL) =A(L)
   13 A(L) =TB
C     REDUCTION D'UN ELEMENT ET RECHERCHE DU PROCHAIN PIVOT
      PIV=0
      LST =LST +1
      J = 0
      DO 16 II =LST,LEND
      PIVI =-A(II)
      IST = II+M
      J = J+1
      DO 15 L =IST,NM,M
      LL =L-J
      A(L) =A(L)+PIVI*A(LL)
```

```
      TB =ABS(A(L))
      IF(TB-PIV) 15,15,14
   14 PIV=TB
      I=L
   15 CONTINUE
      DO 16 L=K,MM,M
      LL =L+J
   16 R(LL) =R(LL)+PIVI*R(L)
   17 LST =LST+M
C     FIN D'ELIMINATION
   18 IF(M-1)23,22,19
   19 IST =MM+M
      LST=M+1
      DO 21 I=2,M
      II=LST-I
      IST=IST-LST
     L=IST-M
      L=A(L)+.5
      DO 21 J=II,MM,M
      TB=R(J)
      LL=J
      DO 20 K=IST,MM,M
      LL=LL+1
   20 TB=TB-A(K)*R(LL)
      K=J+L
      R(J)=R(K)
   21 R(K)=TB
   22 RETURN ERREUR
   23 IER=-1
      RETURN
```

SOUS PROGRAMME DE RANGEMENT DE A DANS UNE COLONNE C

```
      SUBROUTINE RANGE(DIM,JJ,VECT(R))
      DIMENSION VECT(1000), DIM(100,100)
      L=0
      DO 16 IP=1,JJ
      DO 16 KP=1,JJ
      L=L+1
      VECT(L)=DIM(KP,IP)
   16 CONTINUE
      RETURN
      END
```

II.6.2 Par des méthodes itératives:

a) Méthode de JACOBI:

soit A =(aij) une matrice carrée (n,n) ; on peut chercher la solution du système d'équations lineaire :

$$\sum aij\ xj = bi \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

qu'on peut ecrire sons forme matricielle Ax= B,

le vecteur solution x existe et est unique si et seulement le matrice A est non singuliere ,et ce vecteur solution est donné explicitement par $x=A^{-1}B$.

on décompose la matrice A sous la forme suivante:

A=D-E-F avec D= dij dij =o pour $i \neq j$

d ii =air

F=fij fij = aij pour $i > j$

fij = o pour $i \leqslant j$

E = cij cij =o pour $i \geqslant j$

cij =o aij pour $i < j$

Autrement dit ,D est la matrice diagonale,F la sur diagobale et E la sons diagonale.

L'équation devient alors:

$$(D - E - F)\ X = B$$

$$D\ X = (E + F)X + B \quad \text{d'où } X = D^{-1}(E + F)\ X + B$$

En notation matricielle cette derniere devient

$$x^{(n+1)} = D^{-1}(E + F)\ x^{(n)} + D^{-1}B \qquad n \geqslant 0$$

ou pose $J = D^{-1}(E+ F)$

d'ou alors $x^{n+1} = J\ x^{n} + D^{-1}B$

En partant d'un vecteur uritial quelqonque ,cette methode converge à condition que $\rho(J) < 1$

La matrice J d'iteration s'ecrit /:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & 0 \\ & \frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{vmatrix} \quad X \quad \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

donc $J(J_{ij})$ avec $J_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{pour } i \neq j \\ 0 & \text{pour } i = j \end{cases}$

b) <u>Méthode de GAUSS SEIDEL:</u>

En considere la même décomposition pour A c'est a dire $A = D - E \quad F$ (le vecteur x solution existe et est unique si et seulement si la matrice A est non singuliéré) ,on ecrit le système sous la forme $(D - E)X = Fx + B$ doù $x = (D - E)^{-1} Fx + (D - E)^{-1} B = \mathcal{L}_1 X + (D - F)^{-1} B$

...ices d'itération de GAUSS SEIDEL Suivant le cas consideré.

En partant d'un vecteur initial quelconque ,cette méthode converge si et seulement si $\rho(\mathcal{L}) < 1$

En notation matricielle on peut ecrire à l'iteration r+1

$$x^{r+1} = \mathcal{L}\, x^{r} + (D - E)^{-1} B$$

$$x^{r+1} = \mathcal{L}'\, x^{r} + (D - F)^{-1} B$$

c)- Vecteur erreur

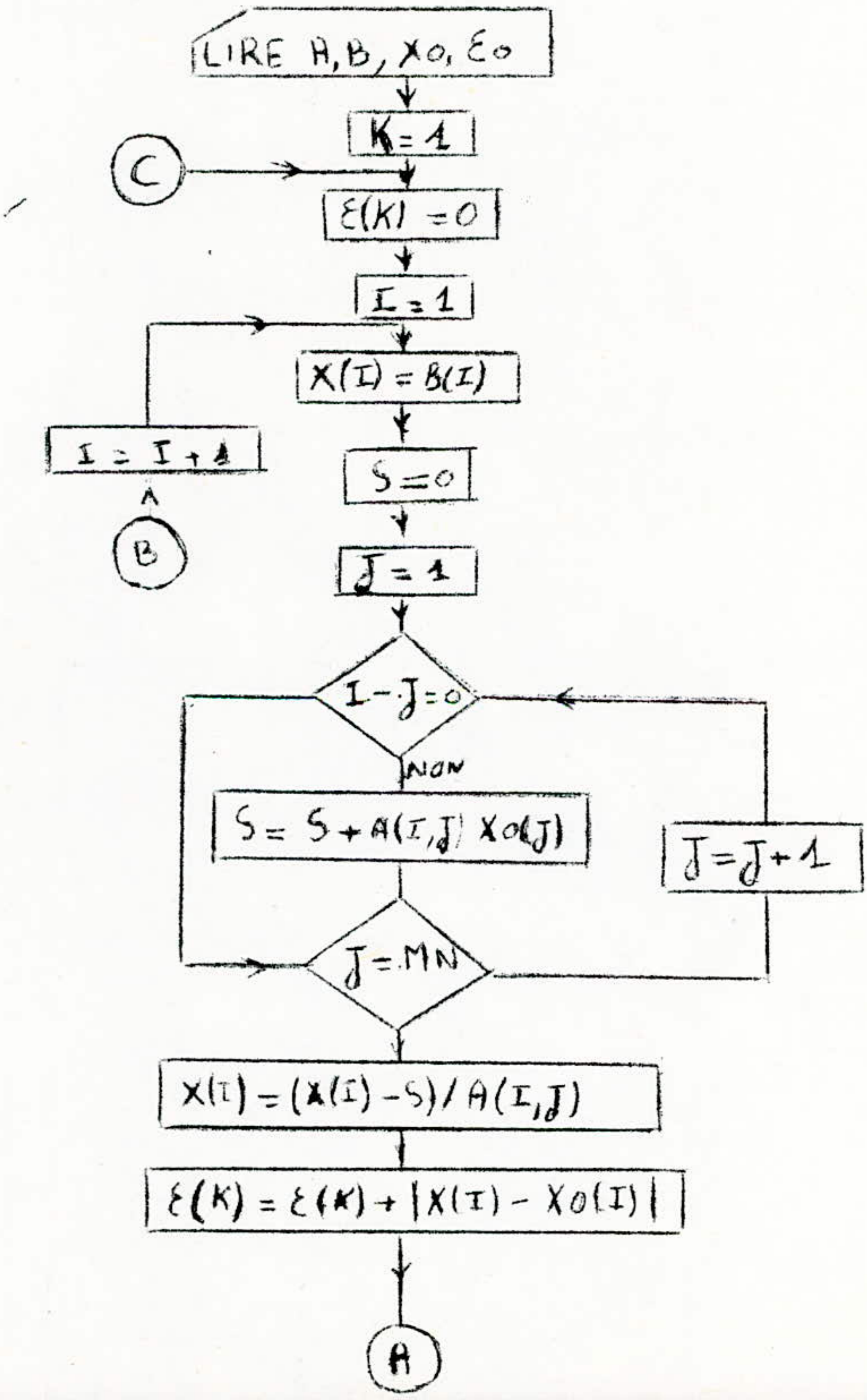
A chaque methode iterative ,on peut associer le vecteur erreur defini par $\varepsilon(r) = x(r) - x$, $r \geqslant 0$ ou x est l'unique vecteur solution du système lineaire $Ax = B$;

Dans chaqye cas des deux methodes on peut exprimer le vecteur erreur de la maniere suivante.

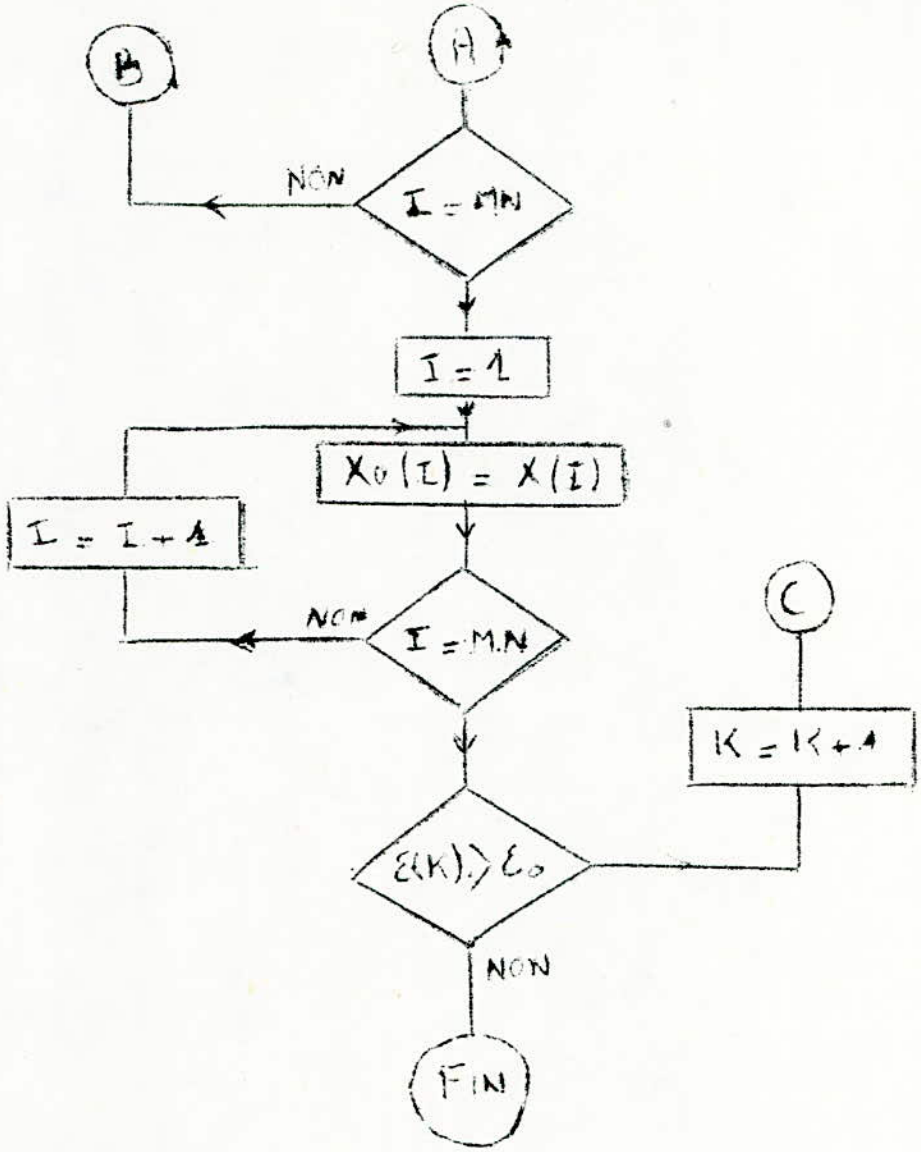
$$\varepsilon(r) = M\,\varepsilon(r-1) = \;..........\; = M^{r}\varepsilon(o) \quad r \geqslant o$$

ou M est la matrice d'iteration ,le vecteur erreur $\varepsilon(r)$ de ces méthodes iratives tend vers $\varepsilon(o)$ si et seulement si le rayon spectral $\rho(M)$ de la matrice M est inferieur à l'unité

ORGANIGRAMME DE RESOLUTION PAR METHODE DE JACOBI



SUITE

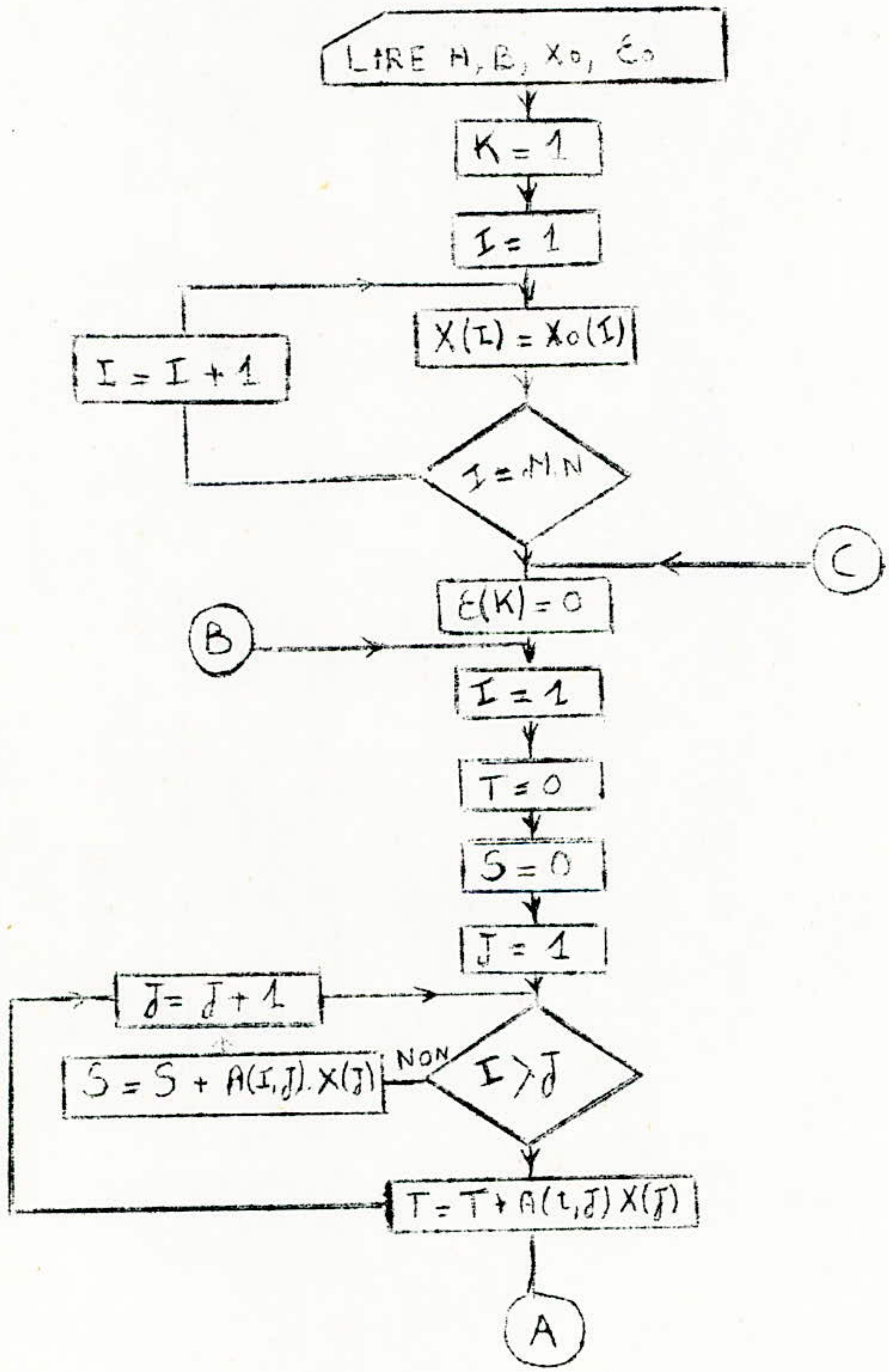


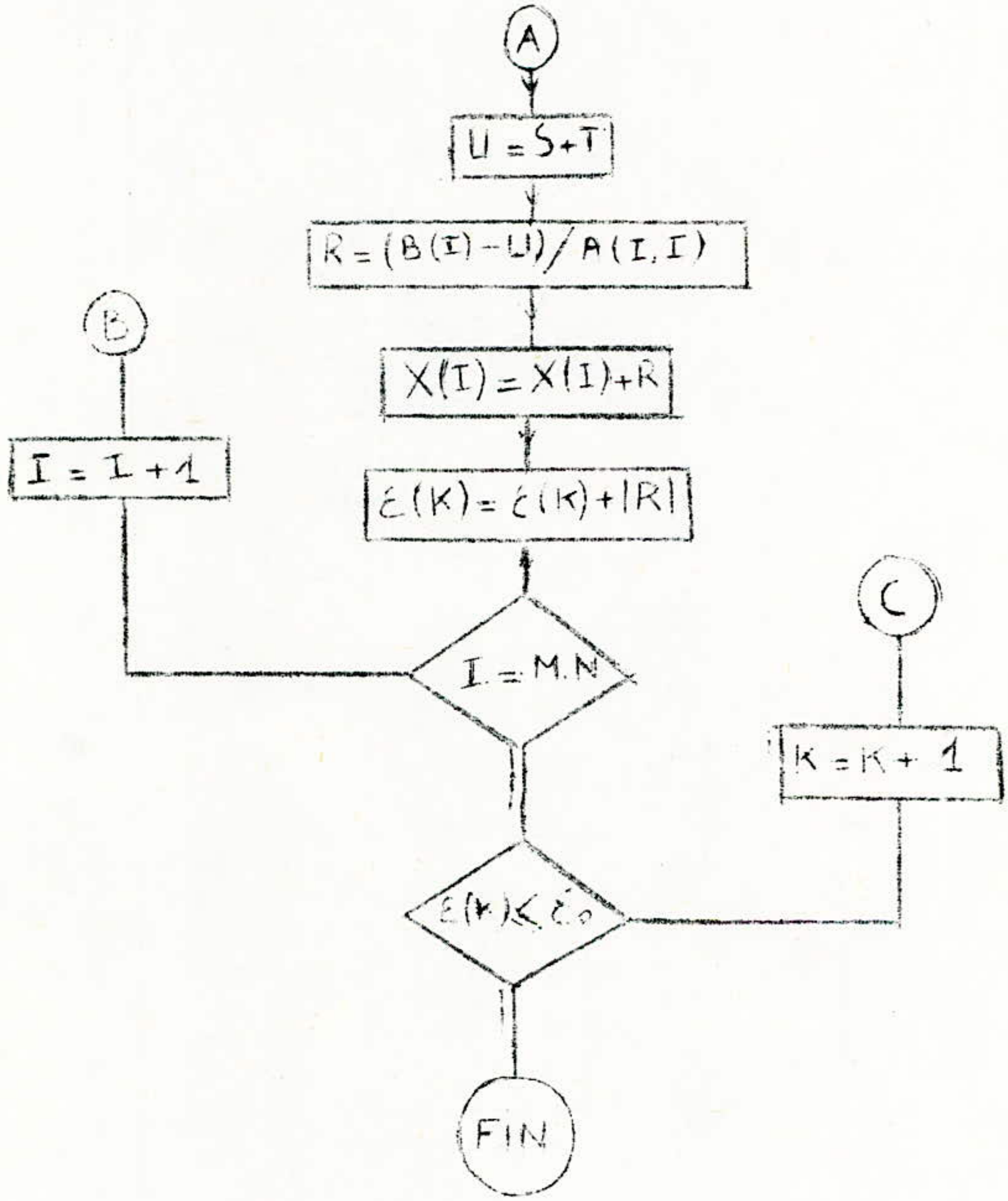
-=oOo=- S O U S -PROGRAMME DE RESOLUTION PAR METHODE DE JACOBI -=oOo=-

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o--

```
      SUBROUTINE  JACOBI (N;M.A.B.XO.EPSO.x)
      DIMENSION A(100.100).B(IOO),XO(IOO).X(IOO)  ,EBS (IOO)
      M=M*N
      K=I
   11 EPS (K)=0
      00 6 I =1,M
      X(I) =B (I)
       S=0
      00 3 J =1,M
      IF(I-J) 4,3,4
    4 S=S+A(I,J)*XO(J)
    3 CONTINUE
      X(I)=(X(I)-S)/A(I,I)
      EPS(K)=EPS(K)+A B S(X(I)-XO(I))
    6 CONTINUE
      00  9 I=I, M
    9 XO(I)=X(I)
      WRI T E(6,IIO) EPS(K)
  IIO FORMA T(14  ,E 15.8)
      IF(EPS(K)-EPSO) 7,7,8
    8 K=K+I
      GO TO II
    7 RETURN
      END
```

ORGANIGRAMME DE RESOLUTION PAR METHODE DE GAUSS-SEIDEL




A
U = S+T
R = (B(I) - U)/A(I,I)
B
X(I) = X(I)+R
I = I + 1
ε(K) = ε(K) + |R|
C
I = M.N
K = K + 1
ε(K) ≤ ε₀
FIN

SOUS-PROGRAMME DE RESOLUTION PAR METHODE DE GAUSS-SEIDEL

```
      SUBROUTINE G SD  (M.N.A.B.XO.EPSO.K)
      DIMENSION A(IOO.IOO).B(100).XO (IOO).X (IOO).   EPS (IOO)
      K =I
      M=M*N
      OO I I=I.M
    1 X(     I)=XO(I)
   11 EPS(K) =0
      OO 2  I= 1, M
      T=0
      S=0
     OO  3  J=1,M
    IF(I-J) 4,4,6
    4 T=T+A(I.J)*X(     J)
      GO  TO 3
    6 S=S+A (I, J) *X(  J)
    3 CONTINEE
      U=S+T
      R=(B(I )-U)/(I,I)
      X(I)=R + X(I )
      EP S(K )=A B S(R) +E PS (K)
    2 CONTINUE
      WR I TE (6,100) EPS(K)
  IOO FORMA T(1 H ,E 15.8)
      IF(EPS(K)-EPSO)7,7,8
    8 K=K +I
      GO TO  11
    7 RETURN
      END
```

III. A P P L I C A T I O NSS

III.1 Cas d'un maillage regulier.

on considère l'équation suivante:

$$-\cos(x+y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} - \sin(x+y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$$

dont la Solution est $f(x,y)=\cos(x+y)$ avec les conditions au x bords sont:

sur l'axe des y: $F_1(Y) = \cos y$

$x=1$, y quelconque : $F_2(y) = \cos(1+Y)$

sur l'axe des x : $F_3(X) = \cos x$

x quelconque, $y=1$ $F_4(x) = \cos(x+1)$

En prenant un maillage regulier N=7 et M=7 on aura:

$\Delta I = 0{,}125$ et $\Delta J = 0{,}125$

La discrétisation donne une matrice A d'ordre 49 et un vecteur B à 49 Composantes.

En résolvant alors le système AX=B par la méthode directe de GAUSS, on obtient les resultats représentés sur le maillage de la figure 1.
En comparant avec les valeurs réelles représentées sur le maillage de la figure2, on constate que l'erreur est plus grande au milieu du maillage (figure 3)

Les érreurs sont dus particulièrement à la discretisation, ainsi en resolvant le système lineaire par la méthode iterative on constate que les résultats obtenus sont meilleurs (figure 4), mais malgré celà l'erreur est toujours plus importante au coeur du maillage (voir figure 5)

VALEURS OBTENUES PAR LA METHODE

DE GAUSS SUR CHAQUE POINT DU MAILLAGE

y \ x	0,125	0,25	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875
1							
0,875	0,54 044	0,43140	0,31558	0,19476	0,07077	-0,05482	-0,17858
0,750	0,64113	0,54053	0,43143	0,31558	0,19465	0,07063	-0,05182
0,625	0,73185	0,64129	0,54068	0,43143	0,31574	0,19492	0,07106
0,500	0,81115	0,73203	0,64145	0,54083	0,43173	0,31583	0,19490
0,375	0,87777	0,81130	0,73215	0,64153	0,54085	0,43167	0,31564
0,25	0,93065	0,87785	0,81132	0,73209	0,64141	0,54066	0,43140
0,125	0, 96906	0,93078	0,87795	0,81138	0,73211	0,64136	0,54053

0,125 0,25 0,375 0,500 0,625 0,750 0,875 1

fig 1

VALEURS REELLES DE LA FONCTION SUR CHAQUEPOINT DU MAILLAGE

y \ x	0,125	0,25	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875
0,875	0,54030	0,43118	0,31532	0,19455	0,07074	-0,05418	-0,17825
0,750	0,64100	0,54030	0,43118	0,31532	0,19455	0,07074	-0,05418
0,625	0,73169	0,64100	0,54030	0,43118	0,31532	0,19455	0,07074
0,500	0,81096	0,73169	0,64100	0,54030	0,43118	0,31532	0,19455
0,375	0,87758	0,81096	0,73169	0,64100	0,54030	0,43118	0,31532
0,25	0,93051	0,87758	0,81096	0,73169	0,64100	0,54030	0,43118
0,125	0,96891	0,93051	0,87758	0,81096	0,73169	0,64100	0,54030

fig 2

ERREUR DONNEE PAR LA METHODE DE GAUSS EN CHAQUE POINT DU MA. LLAGE.

Y

1,4,10^{-4}	2,210^{-4}	2,610^{-4}	2,210^{-4}	0 310^{-4}	0,6 410^{-4}	4,310^{-4}
1,3.10	2 3,10^{-4}	2,510^{-4}	2,610^{-4}	1,010^{-4}	1,110^{-4}	0,110^{-4}
1,6.10^{-4}	2,9.10^{-4}	3,810^{-4}	4,210^{-4}	4,210^{-4}	3,710^{-4}	3,1 10^{-4}
1,9 10^{-4}	3,410^{-4}	4,510^{-4}	5,610^{-4}	5,510^{-4}	5,110^{-4}	3,5.10^{-4}
1.910^{-4}	3,410^{-4}	4,610^{-4}	5,310^{-4}	5,510^{-4}	4,910^{-4}	3,210^{-4}
1,4.10^{-4}	2,7.10^{-4}	3,6.10^{-4}	4,10^{-4}	4,1 10^{-4}	3,610^{-4}	2,200^{-4}
1,5.10^{-4}	2,7 10^{-4}	3,7.10^{-4}	4,210^{-4}	4,2.10^{-4}	3,6.10^{-4}	2,2.10^{-4}

x

fig 3

Valeurs obtenus par méthode **JACOBI** **(Maillage régulier)**

y

1

0,53968	0,42962	0,31380	0,19240	0,06225	-0,05572	-0,01791
0,64126	0,54069	0,43177	0,31586	0,19515	0,070143	-0,05437
0,73151	0,64038	0,53959	o,62996	0,31408	o,19319	o,06969
0,81198	0,73368	0,64357	0,54330	0,43398	0,31760	0,89582
0,87677	0,80942	0,72990	0,63875	0,53847	0,42960	0,31458
0,93204	0,88061	0,81469	0,73604	0,64481	0,54346	0,43281
0,96782	0,92853	0,81509	0,80815	0,72948	0,63924	0,53953

0,125

1

FIGURE 4

ERREURS OBTENUES PAR METHODE JACOBI
(MAILLAGE REGULIER)

y

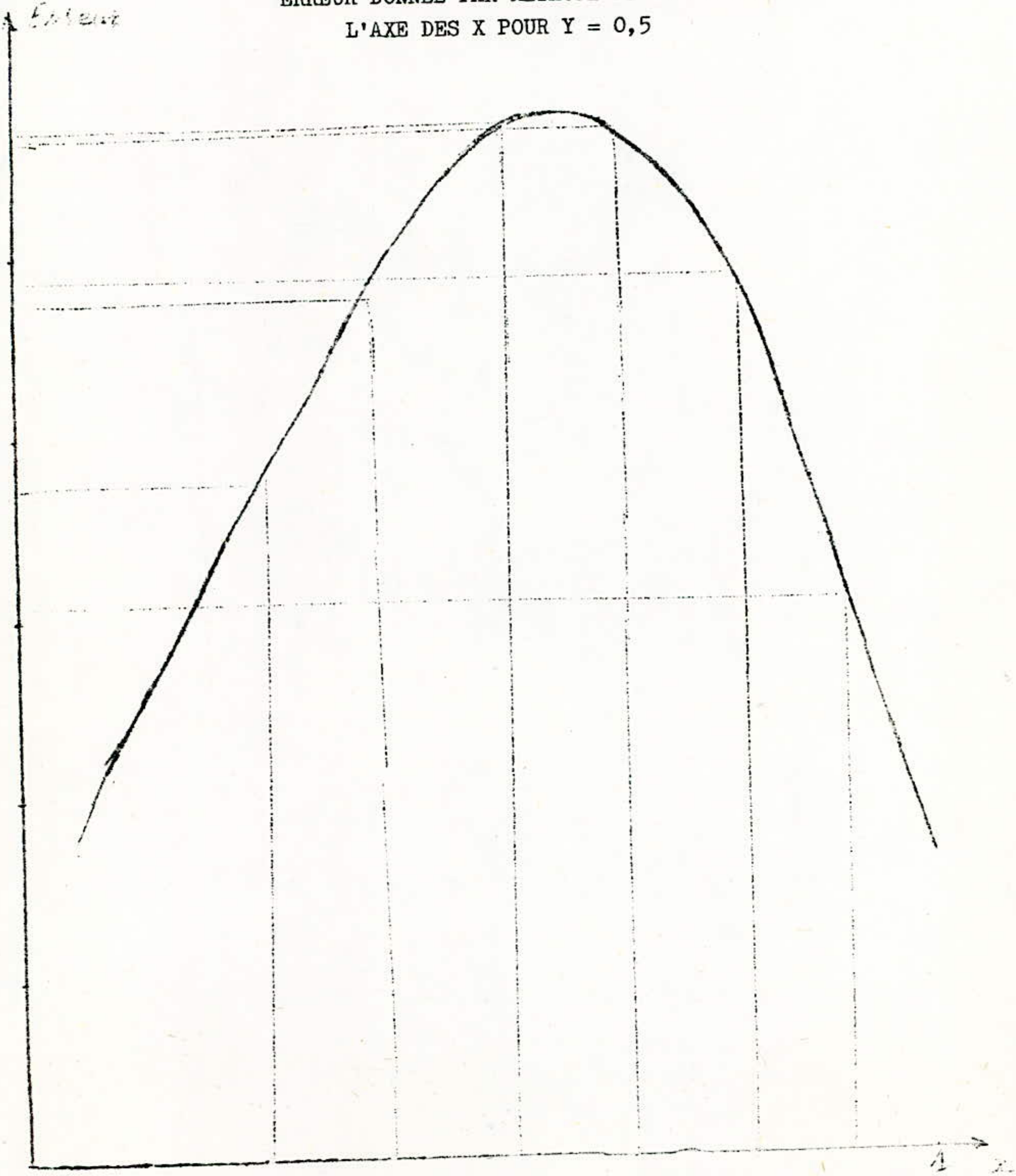
0,62	1,56	1,52	2,15	1,15	1,54	0,09
0,86	0,39	0,59	0,54	0,6	0,4	0,19
0,18	0,62	0,71	1,22	1,24	1,36	1,05
1,02	1,99	2,57	3	2,80	2,28	1,27
0,81	1,54	1,79	2,25	1,83	1,58	0,74
3,06	3,03	3,73	4,35	3,8[illegible]	3,16	1,63
1,09	1,98	2,49	2,8	2,21	1,76	0,77

x

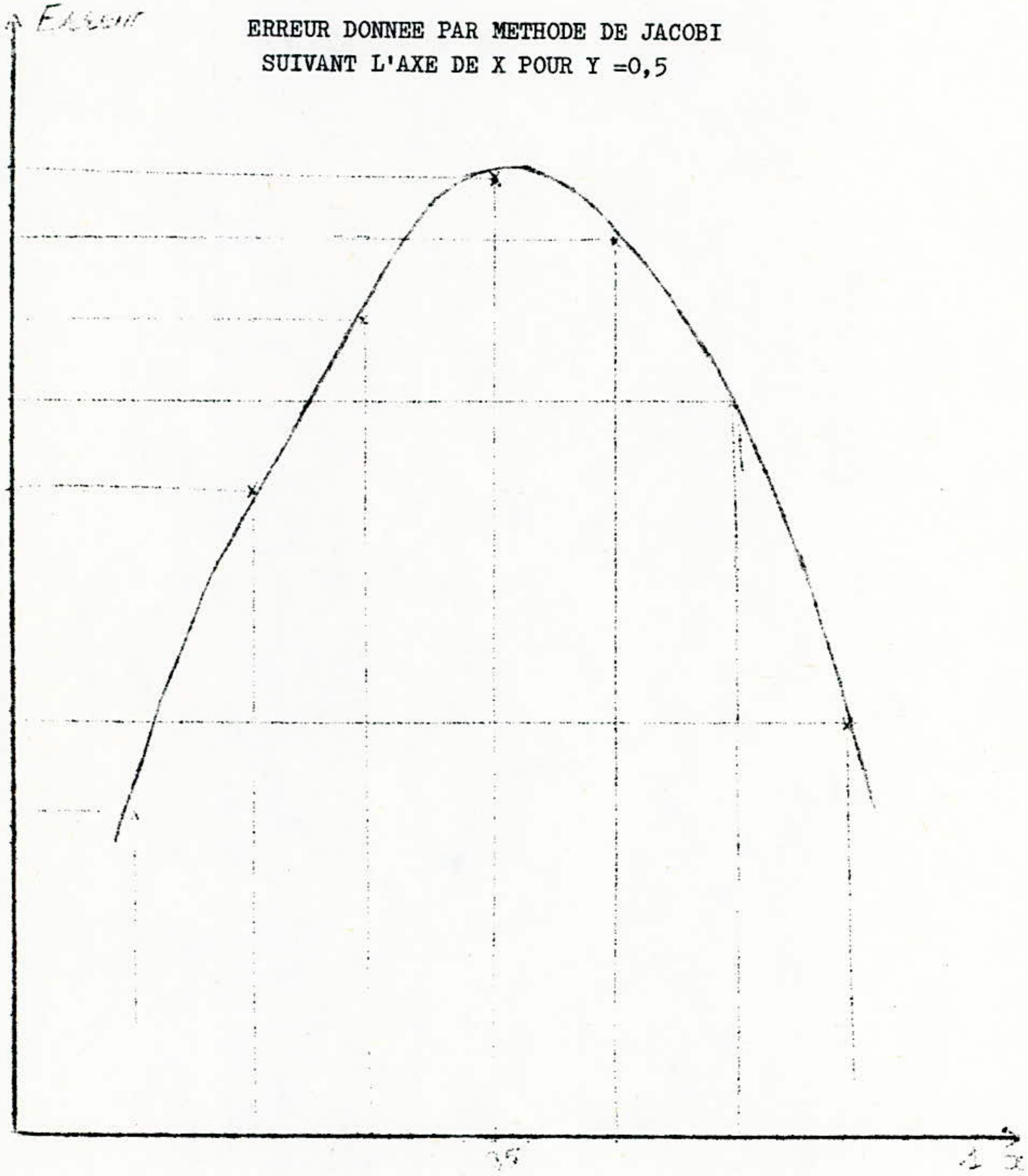
Figure 5

N.B Les valeurs données sont exprimées en 10^{-3}

ERREUR DONNEE PAR METHODE DE GAUSS SUIVANT
L'AXE DES X POUR Y = 0,5



ERREUR DONNEE PAR METHODE DE JACOBI
SUIVANT L'AXE DE X POUR Y =0,5



```
      PROGRAMME  PRINCIPAL
      DIMENSION A(100,100),B(100),DI(101),DJ(101),F1(102),F2(102),F3(100)?F4(100)
     1B1(100),X0(100),X(100),A1(100,100),C(1000),Z(100),X1(100),F(10,10)
      READ(5,100) N,M
100   FORMAT(8I3)
      WRITE(6,140)N,M
140   FORMAT(1X, 'PROGRAMMATION DES EQUATIONS A DERIVEES PARTIELLES ',///,1X,'N=',I3,
     1 'M=',I3)
      NP1=N+1
      MP1=M+1
110   FORMAT(8F6.3)
      READ(5,110) (DI(I),I=1,NP1), (D(J)(I),I=1, P1
      WRITE(6,150) (DI(I),I=1,NP1),(DJ(I), I=1,MP1
150   FORMAT(1X,'VECTEURS DDI ET DJ : ',//,4(1X,F6.3))
      L=N+2
      Y=0
      DO 500I =1,L
      F1(I) =FF1(Y)
      F2(I) =FF2(Y)
      Y=Y+DJ(I)
500   CONTINUE
      XX=DI(1)
      DO 510 I=1,N
      F3(I) =FF3(XX)
      F4(I) =FF4(XX)
      XX=XX+DI(I+1)
510   CONTINUE
C     REMPLISSAGE DU VECTEUR B
      CALL REMB(N,M,DI,DJ,B,F1,F2,F3,F4)
```

SUITE

```
      NN=N*M
      WRITE(6,170)(B(I),I=1,NN)
  170 FORMAT(1X,'VECTEUR B:',///,4(1X,F6.2))
C     REMPLISSAGE DE LA MATRICE A
      CALL REMA(N,M,DI,DJ,A)
      WRITE(6,180)
  180 FORMAT(1X,'MATRICE A:',//)
      DO520 I=1,NN
      WRITE(6,340) (A(I?J),J=1,NN)
  340 FORMAT(1X,10E13.6)
  520 CONTINUE
      DO 540 I=1,NN
      B1(I)=B(I)
      DO 540 J=1,NN
      A1(I?J) =A(I,J)
  ((o CONTINUE
      READ(5,220) EPS
  220 FORMAT(E8.2)
      WRITE(6,360) EPS
  360 FORMAT(1X,'EPS=',E8.2)
      CALL RANGE(A,NN,C)
      MN=NN*NN
C     RESOLUTION PAR METHODE DE GAUSS
      CALL GELG(B,C,NN,1,EPS,IER)
      WRITE (6,370) (B(I),I=1,NN)
  370 FORMAT(1X,'SOLUTION PAR METHODE DE GAUSS:',//,6(1X,E13.6))
      IF(IER.EQ.-1) WRITE(6,380)
  380 FORMAT(1X,'PAS DE SOLUTION')
```

```
C     RESOLUTION PAR METHODE DE GAUSS SEIDEL
      READ(5,201) EPS1
  201 FORMAT(E10.4)
      READ(5,217) (X1(I),I=1,NN
  217 FORMAT(49I1)
      CALL GSD(N,N,A1,B1,X1,EPS1,Z)
      WRITE(6,470)(Z(I),I=1,NN)
  470 FORMAT(1X,'VECTEUR Y:',//,6(1X,E13.6))
C     RESOLUTION PAR METHODE DE JACOBI
  200 RORD(5,200) EPSO
  200 FORMAT(E10.4)
      WRITE(6,410) EPSO
  410 FORMAT(1X,'EPSO=',E10.4)
      READ(5,210) (XO(I),I=1,NN)
  210 FORMAT(49I1)
      WRITE(6,420)  (XO(I),I=1,NN)
  420 FORMAT (1X,'VECTEUR XO:',6(1X,I2))
      CALL JACOBI(N,MA1
      WRITE(4,460) (X(I),I=1,NN)
  460 FORMAT(1X,'VECTEUR X:',//,6(1X,E13.6)
      CALL EXIT
      STOP
      END
```

```
FUNCTION P(X,Y)
P = -COS(X+Y)
RETURN
END

FUNCTION Q(X,Y)
Q= 0
RETURN
END

FUNCTION R(X,Y)
R=0
RETURN
END

FUNCTION S(X,Y)
S=0
RETURN
END

FUNCTION T(X,Y)
T=- SIN(X+Y)
RETURN
END
```

```
FUNCTION FF1(Y)
FF1 = COS(Y)
RETURN
END

FUNCTION FF2(Y)
FF2 = COS(Y+1)
RETURN
END

FUNCTION FF3(X)
FF3 =COS(X)
RETURN
END

FUNCTION FF4(X)
FF4 = COS(X+1)
RETURN
END
```

SUITE

```
FUNCTION U(X,Y)

U= -1

RETURN

END
```

III.2 Cas du maillage irrégulier:

En prenant le même exemple que précedement ,on choisit un maillage irrégulier (maillage fin au milieu du carré unitaire et large aux bords.

On prend pour celà:

N= 7 N= 7

D1 (i) =DJ (j) = 0,167

i = 1,2

j = 1,2

D1 (i) =DJ (j) =0,083

i = 3,4?5;6

j = 3,4,5,6

Et DI(i)= DJ(j)=0,167

i= 7,8

j= 7,8

En résolvant ,ainsi, le sustème lineaire obtenu,par la méthode de GAUSS on obtient les résultats donnés sur le maillage de la figure "7" on peut ca calculer ,en caque noeud, l'érreur obtenue par cette .On constate alors que l'érreur devient plus uniforme à travers le maillage ce qui montre l'intéret du maillage irrégulier Figure "6"

Avec encore plus de précision ,les methodes itératives permettent le rapprochement vers la solution exacte .Ceci s'explique par le fait que l'opératuer de JACOBI (matrice est contractant et que $\rho(J)<1$ (voir théorème du point fixe)

Les resultats par methode de JACOBI sont données à la figure 8 et l'erreur à la figure 9 .

Valeursobtenus par methode Gaus (Maillage Irregulièr)

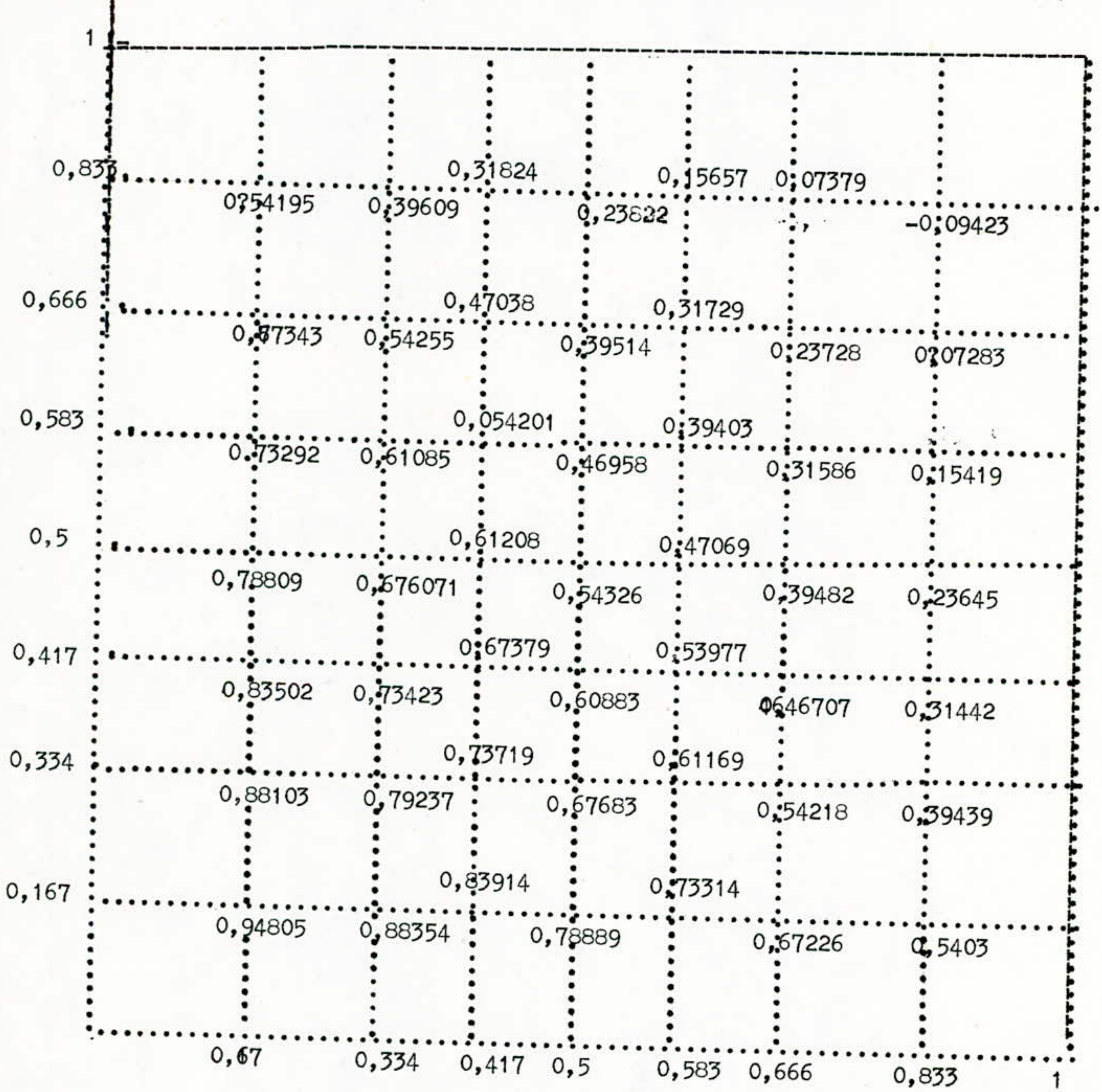


Figure 7

ERREUR OBTENUES PAR METHODE JACOBI (MAILLAGE IRREGULIER)

y \ x	0,167	0,334	0,417	0,5	0,583	0,666	0,833
0,833	1,65	3,18	2,92	2,66	2,39	2,06	0,83
0,666	0,77	2,24	1,7	1,31	1,02	0,75	1,1
0,583	1,22	2,65	1,71	0,9	0,2	0,41	0,01
0,500	2,4	4,78	3,87	2,96	2,01	0,99	0,88
0,417	1,56	3,22	1,87	0,62	[illegible],53	1,61	0,9
0,334	3,93	7,31	6,18	4,91	3,50	1,88	1,48
0,167	3,32	6,44	4,88	0,32	1,45	0,4	0

N.B. Les Valeurs données sont exprimées en 10^{-3}

fig 3

Valeurs obtenus par méthode de JACOBI
(Maillage irrégulier)

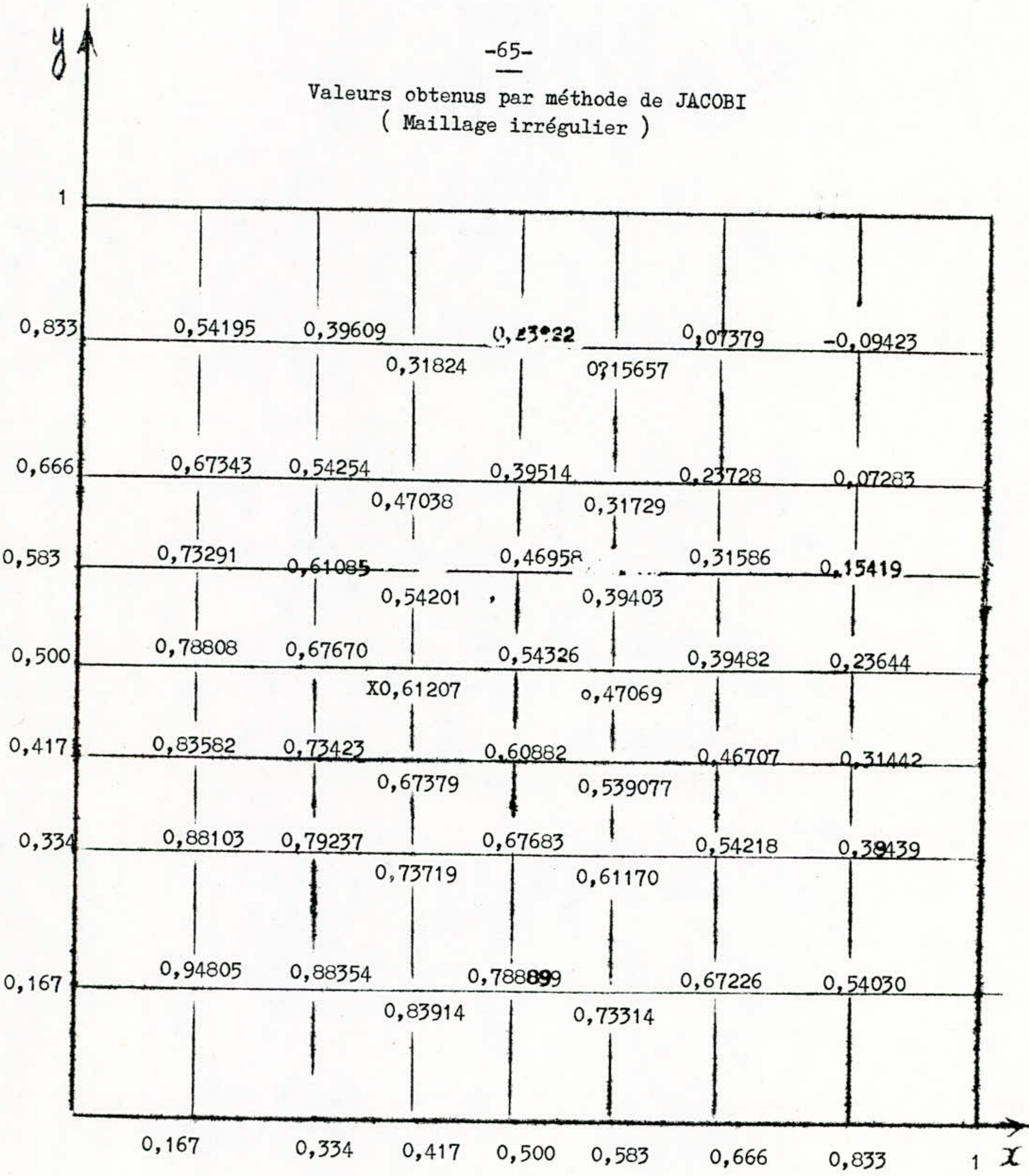
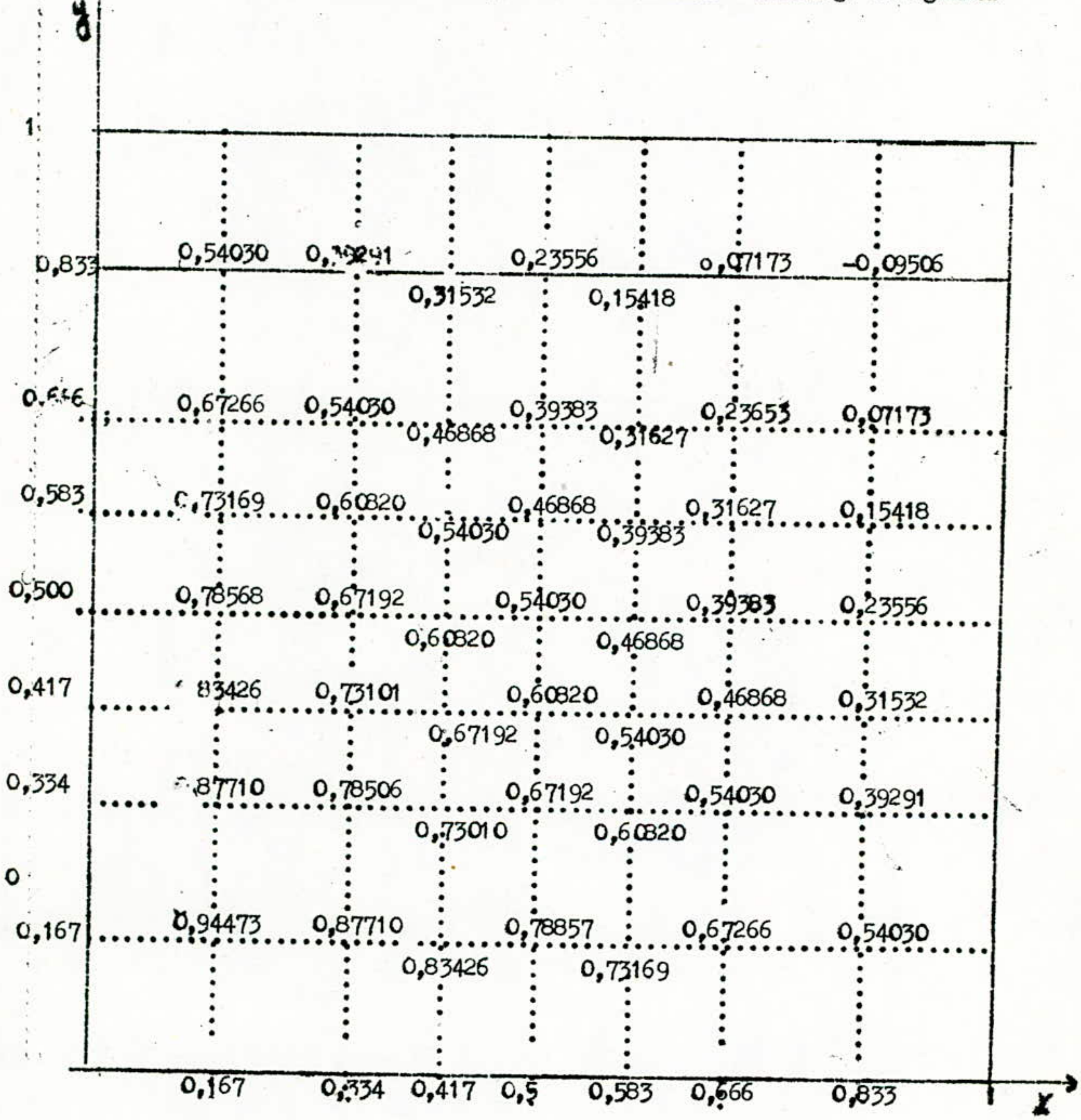


FIGURE -8-

Valeurs réelles de la fonction - maillage irrégulier



ERREUR OBTENUES PAR METHODE DE GAUSS (MAILLAGE IRREGULIER)

y \ x	0,167	0,334	0,417	0,5	0,583	0,666	0,833
0,833	1,65	3,18	2,92	2,66	2,39	2,06	0,83
0,666	0,78	2,28	1,7	1,31	1,02	0,75	1,1
0,583	1,23	2,65	0,99	0,9	0,21	0,41	0,1
0,5	2,41	4,79	3,83	2,96	2,01	0,99	0,89
0,417	0,57	3,22	1,87	0,63	0,52	1,61	0,9
0,334	3,93	7,31	6,18	4,91	3,5	1,88	1,48
0,167	3,32	6,44	4,88	0,32	1,45	0,4	0

Fig 6

III.3 Exemple type "La matrice du Potentiel"

La discretisation standard de l'opérateur la placien

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ conduit à la matrice

$$A = \begin{vmatrix} B & I & & \\ I & B & I & \\ & & \ddots & I \\ & & I & B \end{vmatrix}$$

on tous les blocs sont carrés ,avec I :matrice unité et

$$B = \begin{vmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Relativement à la décomposition en blocs mise en évidence, la matrice J de JACOBI par blocs associée à A s'ecrit:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & -B^{-1} & & \\ -B^{-1} & 0 & -B^{-1} & \\ & \ddots & \ddots & -B^{-1} \\ & & -B^{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Or les valeurs propres de B, matrice (m,m) sont

$$Up = -4 + 2 \cos \frac{P\,\pi}{m+1} \qquad P = (1,2 \ldots\ldots\ldots m)$$

$$\text{donc } -6 < Up < -2$$

l'équation de la place $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ à l'interieur du carré unité de R^2 , u étant donnée,continue,sur les bords du carré,admet une solution unique (problème de Dirichlet)et conduit par une discretisation trés classique a k^2 points intérieurs ,à un système lineaire dont la matrice A est la matrice du potentiel (matrice A).

A est detype (k,k) .

on pose $n = k^2$, R^n est alors décomposé ,de façon adaptée au problème, en k sous espaces de dimension k;Precisement, tout vecteur x de R^n sera décomposé en k "bloces" x1......xk de k composantes.munissant chaque sous espace correspondant de la norme de max,ou de-finit ainsi (de façon adaptée au problème) la norme vectorielle (reguliere detaille k) notée P sur R^n

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \end{vmatrix} \longrightarrow \quad P_\infty (x) = \begin{vmatrix} \varphi_\infty (x_1) \\ \\ \\ \varphi_\infty (x_k) \end{vmatrix}$$

et la décomposition en blocs engendrée par P sur m_n est alors celle figurée pour A nous noterons encore M la norme vectorielle engendrée apr P sur m_n

$$\text{on a : } \quad M_\infty(A) = \begin{vmatrix} 6 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{matrice } (k,k)$$

On obtient $M_\infty(A)$ en remplaçant ,dans A chaque bloc par la norme S_∞ de ce bloc

Formons alors la matrice de JACOBI 1 pra point J associée a A,

$$J = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} C & I & & \\ I & C & I & \\ & \ddots & \ddots & I \\ & & I & C \end{vmatrix}$$

on I est encore la matrice unité (k,k) et ou C est la matrice (k,k)

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

si l'on note L La triangulaire inferieure de J et $U = L^t$ la triangulaire superieure de J ,il vient.

$$M_\infty(L) = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & \end{vmatrix} \qquad \text{et } M_\infty(U) = \left[M_\infty(L) \right]^t$$

Formons la matrice $M_\infty(L) + M_\infty(U)$,ici égale à

$$M_\infty(L+U) = M_\infty(J) :$$

$$M_\infty(L) + M_\infty(U) = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{(matrice k,k)}$$

de rayon spectral egal à :

$$\frac{1}{4}\left[2 + 2\cos\frac{\pi}{k+1} \right] < 1$$

$\rho\left(M_\infty(L) + M_\infty(U) \right) < 1$ nons permet d'assurer:

* la convergence de la methode de JACOBI par point pour résoudre le système lineaire considére

A la contraction de l'opérateur de JACOBI par point relativement à la norme vectorielle P_∞

A La contraction de l'opérateur de Gauss Seidel par point correspondant relativement à la norme vectorielle P .Cet opérateur ,s'ecrit

$$G(x) = (I - L)^{-1} U x + h$$

-Aest une M . matrice (car,par exemple,avec les notations utilisées ici

$$\rho(J) \leq \left(M_\infty(J) \right) = \rho\left(M_\infty(L) + M_\infty(U) \right) < 1$$

Donc les methodes de JACOBI et GAUSS SEIDEL par point associées à A sont convergentes De plus -A estune M matrice symétrique.

donc donc une matrice symetrique définie positive

III-4 C H O I X D U M A I L L A G E

Pour obtenir des résultats plus précis , on a intéret à faire un choix plus adéquat du maillage. Ainsi le maillage irrégulier améliore la précision en comprimant l'écart entre le bord et le centre du maillage;ceci nous permet donc de faire une constation importante quant au choix du maillage fin au milieu du carre unitaire, de telle maniére à optimiser l'erreur; autrement dit la rendre trés petite en valeur absolue (l'erreur est toujours très grande au milieu du maillage).

Ainsi dans ce qui suit , on se propose d'exposer brièvement une methode permettant un choix optimum du maillage et ceci en divisant le carre unitaire en plusieurs parties ou les parties fines sont concentrées au milieu.

Pour se fixer les idées on divise le carré en 3 parties dont le milieu est un maillage serré d'epaisseur D_1 et comportant n_1 intervalles et à l'extérieur un maillage large d'epaisseur D_2 et comportant $n_2$intervalles (voir figure 10).

Il suffit donc de fixer n_1, n_2 et D_1 pour déterminer le maillage, ceci nous permet de tirrer la valeur de D_2 par la relation suivante

$$n_1 D_1 + 2 n_2 D_2 = 1$$

($n_1 D_1$ represente la partie fine,tandis que $2n_2 D_2$ les deux parties larges qui sont de part et d'autre de la partie serrée)

ce qui donne $D_2 = \dfrac{1 - n_1 D_1}{2n_2}$

En affectant l'indice 1 pour D_1 et l'indice 2 pour D_2 on dresse un tableau (vecteur X(K)) contenant dans l'ordre choisi précedemment tous les points du maillage suivant l'algorithme:

I = 1,N

J = 1,M

K =(I -1) M + J

X(K) =2

si $I_o < I \leqslant I_1$ et $J_o < J \leqslant J_1$

X(K) = 1

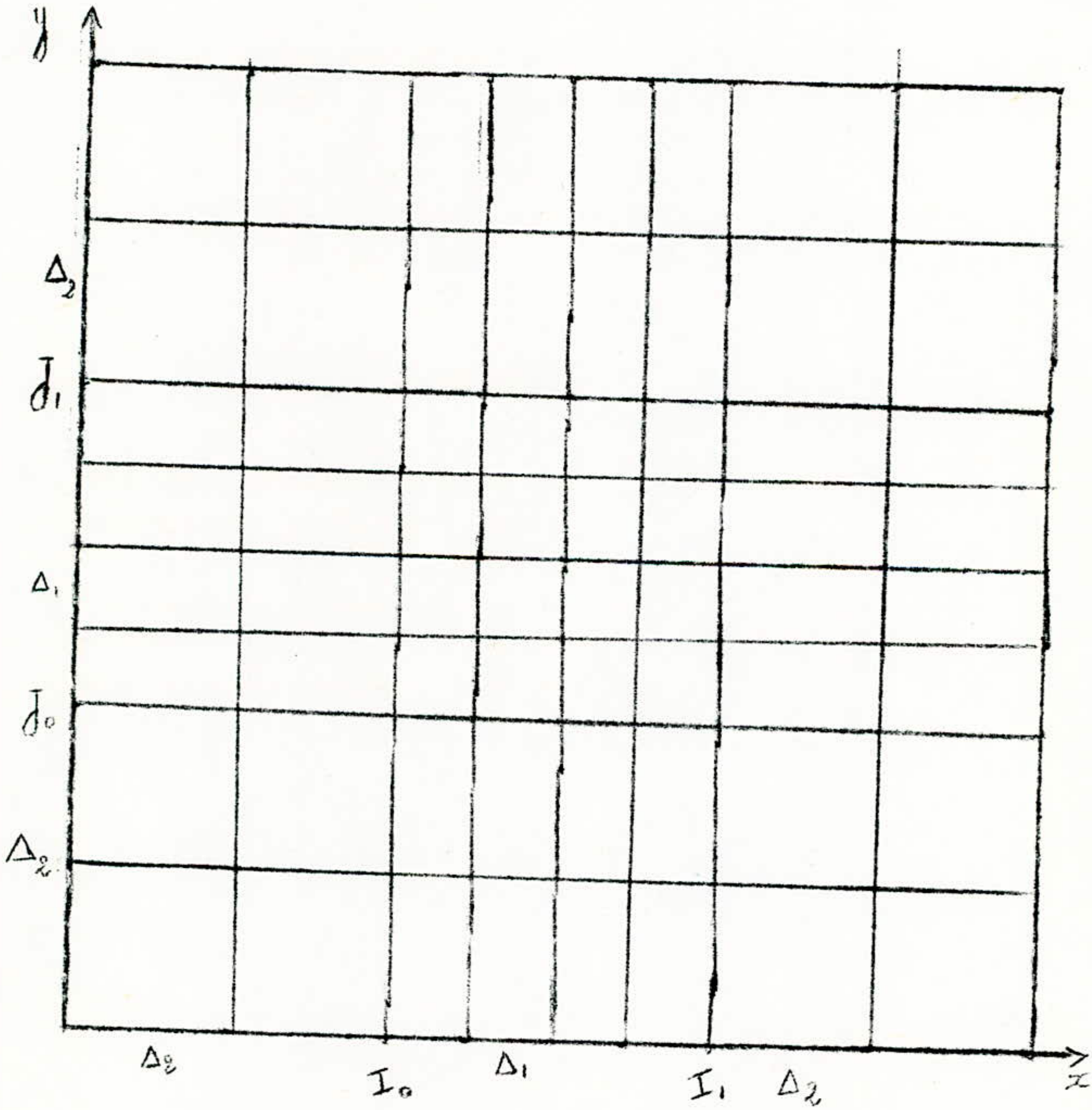


fig 10

En remplaçant les valeurs de DI et DJ correspondant dans la matrice A et en déterminant la matrice A (J de JACOBI ou de GAUSS-SEIDEL),on décompose $\tilde{A}$ en 4 blocs : $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{A}_{12}$, $\tilde{A}_{21}$, $\tilde{A}_{22}$ correspondant à la décompo--sition en blocs du vecteur X(K)(blocs I1,I2)

On calcule alors la norme vectorille de la matrice d'itération engen--dree par la norme vectorielle sur $\mathbb{R}^4$

$$\|\tilde{A}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Pour celà ,on choisit la norme du maximum

d'ou $a_{11} = \max\limits_{i \in I_1} \sum\limits_{j \in J_1} |\tilde{A}_{ij}|$

$$a_{12} = \max_{i \in I_1} \sum_{j \in J_2} |\tilde{A}_{ij}|$$

$$a_{21} = \max_{i \in I_1} \sum_{j \in J_2} |A_{ij}|$$

$$a_{22} = \max_{i \in I_2} \sum_{j \in J_2} |\tilde{A}_{ij}|$$

On calcule les valeurs propres de cette matrice,celles-ci sont données par la solution du polynome caracteristique$\|A\| - \lambda I$

$$(a_{11} - \lambda)\ (a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} = 0$$

Une fois que les valeurs propres sont déterminéés on pourrait minimiser la fonction $F(D_1) = (|\lambda_1| - |\lambda_2|)^2$ par une méthode analytique adéquate de telle manière à obtenir D_1 qui fixe le maillage .

CONCLUSION

D'aprés ce qui a eté formulé antérieurement on peut dire que les les méthodes directes sont gén"ralement utilisables pour des systèmes à petites dimensions,généralement n 100; cependant lorsque le système est à grande dimension,le nombre des opérations de multiplication devient considerable , ce qui entraine une influence extrème des erreurs; pour remédier à cela, il est préférable d'utiliser d méthodes itératives qui permettent justement d'approcher en quelque sorte vers la solution exacte car en itérant plusieurs fois, on étale l'erreur en balayant le maillage, mais malgré cela les erreurs subsistent toujours.;;..

Encore faudrait t'il les minimiser et c'est au coeur du maillage que la stabilisation des calculs est la plus lente(les erreurs se trouvent entassées au milieu du maillage).Ce paramètre ërreur est dû particulièrement à la discrétisation;plus on s'eloigne du bord(conditions connues) et plus l'erreur grossit jusqu'à atteindre son summum au milieu du maillage car à chaque déplacement sur le carre unitaire et en s'appro--chant du milieu les erreurs s'accumulent.Donc pour les minimiser,il est utile de choisir un maillage irrégulier singulièrement serre au milieu du carre unitaire,ce qui pour effet de trouver congrûment la solution qui s'approche des valeurs exactes.

Reste à savoir si les méthodes itératives chaotiques qui consistent à activer l'iteration particulièrement sur les composantes du milieu ne seraient pas plus interressantes afin d'aboutir à un resultat plus approprié et de diminuer en consequence le coût pour un système à grande dimension n 1000 (utilisation moins onéreuse) et là la question reste ouverte à ceux qui veulent ébaucher un travail d'analyse numérique dont l'outil de base a été formulé dans ce polycope :— .

FIN

M.L

-: B IBLIOGRAPHIE :-

MATRICES NONNEGATIVES ET NORMES VECTORIELLES

F.ROBERT (I.N.P. GRENOBLE)

METRIX ITERATIVE ANALYSIS PRENTICE HALL .

R.S. VARGA.