

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

26/96

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

### SUJET

## LA THEORIE DU VECTEUR SPIRAL

Proposé par :

Mr: O.TOUHAMI

Etudié par :

A.LAÏB

Dirigé par :

Mr: O.TOUHAMI

PROMOTION

SEPTEMBRE 1996

Projet de fin d'Etudes  
Ingénieurs

LA THÉORIE DU VECTEUR SPIRAL

Etudié par : LAIB Abdelghani

Promoteur : O. TOUHAMI

1996 - 1997

*To Dr. Omar Touhami who had borne with me so much*

*To all members of the family : father, mother, sisters, brothers, wives and  
children*

*I wish to thank all my friends and hope that we will never forget each  
other*

## SOMMAIRE

|   |    |
|---|----|
| INTRODUCTION.....   | 1  |
| Chapitre I : Théorie du vecteur spiral appliquée aux circuits électriques .....                             | 3  |
| Chapitre II : La méthode du vecteur spiral (MVS) et la méthode des<br>composantes symétriques (MCS).....    | 14 |
| II - 1 MCS à valeurs instantanées : .....   | 14 |
| II - 2 Combinaison du MCS ET MVS :.....   | 15 |
| II - 3 Exemple d'utilisation de la MCS et MVS POUR UN (Moteur<br>à induction) .....                         | 16 |
| Chapitre III : Commande et analyse du moteur à induction par MVS : .....                                    | 22 |
| III- 1 Commande en courant à l'entrée du moteur à induction : .....   | 22 |
| III- 2 Commande en tension à l'entrée du moteur à induction .....   | 25 |
| III - 3 Transformation de l'équation de performance et le circuit<br>équivalent du moteur à induction. .... | 27 |
| III - 4 - Analyse du transitoire et la commande FAM du moteur à<br>induction .....                          | 30 |
| III - 5 Diagramme bloc et fonction du transfert de la commande<br>FAM du moteur à induction :.....          | 34 |
| Conclusion : .....  | 37 |

## INTRODUCTION

Les moteurs à courant alternatif sont de plus en plus utilisés dans le domaine de l'entraînement électrique à vitesse variable. Le développement de la technologie des convertisseurs a rendu l'alimentation en puissance alternative très commandable. Cette alimentation en puissance de fréquence variable a libéré les moteurs à courant alternatif de la charge de la vitesse synchrone et sont devenus ainsi des moteurs à vitesse réglable.

Pour mieux profiter de la situation convenable qui résulte de l'utilisation de la technique des onduleurs, la commande des moteurs à courant alternatif doit être modernisée en se débarrassant de la commande classique par la vitesse du moteur. Elle sera remplacée par la commande moderne en couple du moteur dont le régime transitoire a une importante influence, ~~cependant~~ les théories conventionnelles du moteur à courant alternatif n'ont pas donné des solutions analytiques adéquates au phénomène transitoire, c'est pourquoi la commande en couple du moteur à courant alternatif est restée sans bases théoriques.

Le but de ce travail est de montrer comment S. Yamamura [1], grâce à sa proposition du vecteur spiral peut résoudre ce problème. En effet, le vecteur spiral peut exprimer tous les types de variables d'état qui apparaissent en génie électrique et il est la forme la plus convenable pour résoudre les équations électriques des circuits et les équations de performances des machines électriques. Les deux régimes, permanent et transitoire peuvent être exprimés par l'expression du vecteur spiral, ~~c-a-d qu'il unifie la théorie du régime permanent et la théorie du régime transitoire~~ qui ont été séparés à cause des différentes expressions des variables d'état et donc l'étude des circuits alternatifs sera facile et simple. La méthode du vecteur spiral a pu couvrir largement l'analyse des circuits triphasés en fonctionnement symétrique.

Dans le cas du fonctionnement assymétrique, l'analyse des systèmes triphasés par la méthode des composantes symétriques est limitée seulement pour l'étude du régime permanent du courant alternatif. S. Bekku [6] a proposé la méthode des composantes symétriques à valeurs instantanées pour faire étendre le domaine d'application de cette méthode à l'analyse des régimes transitoires en

fonctionnement asymétrique des systèmes triphasés. Malheureusement, cette méthode échoua et ce domaine resta sans étude. La méthode du vecteur spiral peut facilement étendre le domaine d'application de cette méthode à l'analyse des systèmes triphasés en fonctionnement a symétrique.

# CHAPITRE I

## CHAPITRE I : THÉORIE DU VECTEUR SPIRAL APPLIQUÉE AUX CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Le vecteur spiral est une fonction exponentielle du temps à variable complexe que l'on exprime comme suit (ici le vecteur spiral du courant) :

$$i = Ae^{\delta t} ; \delta = -\lambda + j\omega \quad (1)$$

Au fur et à mesure que le temps augmente, le vecteur décrit une spirale dans le plan complexe comme le montre la figure 1

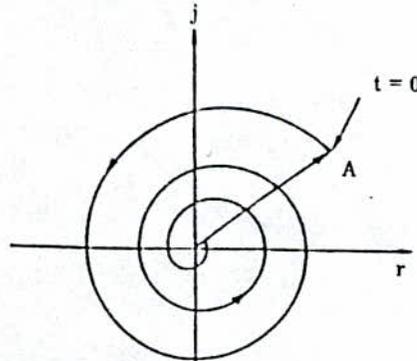


Figure (1) - Le vecteur spiral dans le plan complexe lorsque  $\lambda = 0$ ,  $\delta$  devient  $j\omega$  et  $i$  devient :

$$i = Ae^{j\omega t} \quad (2)$$

cela décrit un cercle dans le plan complexe qui correspond au régime permanent de courant alternatif,  $i$  devient vecteur circulaire. Lorsque  $\omega = 0$ , il devient le régime permanent du courant continu. Si  $\delta = 0$ ,  $i$  devient  $i = A$  c'est le régime permanent du courant continu. Donc le vecteur spiral peut exprimer presque tous les états, variables qui apparaissent en génie électrique.

### Relation entre le vecteur spiral et la valeur réelle correspondante.

Le vecteur spiral a pour expression :

$$i = Ae^{\delta t} \quad (3)$$

qui peut être écrit sous la forme :

$$i = |A|e^{j\varphi_A} e^{(-\lambda+j\omega)t} = |A|e^{-\lambda t} [\cos(\omega t + \varphi_A) + j \sin(\omega t + \varphi_A)] \quad (4)$$

La valeur réelle qui correspond à  $i$  de l'équation (4), peut être choisie de deux manières :

$$i_{\text{réel}} = |A|e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi_A) = \text{Valeur réelle de } i \quad (5)$$

ou bien :

$$i_{\text{réel}} = |A|e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi_A) = \text{Valeur réelle de la partie imaginaire de } i \quad (6)$$

Pour l'utilisation de la méthode du vecteur spiral, il est conseillé de prendre l'équation (5) pour toute détermination des expressions de la machine.

La valeur réelle de  $i$  est la projection de vecteur spiral  $i$  sur l'axe des réels dans la plan complexe de la Figure - 1. On obtient alors le théorème suivant :

1er Théorème du vecteur spiral : L'expression de la valeur réelle de la variable d'état est la partie réelle de l'expression du vecteur spiral c'est-à-dire :

$$i_{\text{réel}} = \text{Re}[i] \quad (7)$$

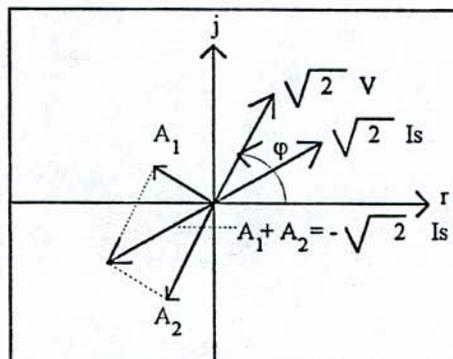


Figure 2 : Le diagramme vectoriel des vecteurs de l'équation 15 pour  $t = 0$

Puisque Le cosinus est une fonction paire, les deux expressions  $Ae^{(-\lambda+j\omega)t}$  et  $Ae^{(-\lambda-j\omega)t}$  donnent la même valeur  $i_{\text{réel}}$  selon ce théorème. Cependant seul les vecteurs spiraux tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre dans le plan complexe.

On obtient le théorème (2) :

2ème théorème du vecteur spiral :

Le vecteur spiral tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre dans le plan complexe.

Ce théorème montre que  $\omega > 0$  dans l'équation (3).

En notation, pour la méthode du vecteur spiral, les vecteurs spiraux sont exprimés par des caractères minuscules et les vecteurs circulaires par des caractères majuscules avec un point en haut du caractère.

le vecteur circulaire est décrit par  $\dot{I}$

On a alors  $p\dot{I} = j\omega\dot{I}$  et  $\frac{\dot{I}}{P} = \frac{\dot{I}}{j\omega}$

Cependant, pour la méthode du déphaseur (MD), de telles relations mathématiques, n'existent pas. La plupart des expressions analytiques obtenues par la MD sont valables pour la méthode du vecteur spiral, avec un léger changement du symboles tq :  $\dot{I} = Ie^{j\omega t}$  où I est le déphaseur du courant.

#### Exemple d'analyse par la méthode du vecteur spiral :

Pour un circuit électrique comprenant une capacité, une inductance et une résistance en série, l'équation du circuit s'exprime par :  $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v$

Si on dérive cette equation, alors on obtient :

$$L \frac{di^2}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{d}{dt} v \quad (8)$$

En réécrivant cette équation sous la forme suivante pour tirer l'équation caractéristique :

$$ap^2i + bpi + ci = pv \quad (9)$$

avec :  $a = LC$  ;  $b = RC$  ;  $c = 1$

Considérons la tension imposée aux bornes du circuit exprimée par le vecteur circulaire :

$$v = \sqrt{2} |\dot{V}| e^{(j\omega t + \phi)} = \sqrt{2} V e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{V} \quad (10)$$

supposons que la solution de l'équation (9) est un vecteur spiral de la forme :

$$i = Ae^{\delta t} \quad \text{avec} \quad \delta = -\lambda + j\omega \quad (11)$$

\* Le régime permanent :  $\delta$  sera égal à  $j\omega$  et on aura  $pi = j\omega i$

l'équation (9) devient donc :

$$[(j\omega)^2 a + (j\omega)b + c]i = \sqrt{2} |\dot{V}|_{j\omega} e^{(j\omega t + \varphi)} \quad (12)$$

qui donne le régime permanent :

$$i_s = \frac{\sqrt{2} |\dot{V}|_{j\omega}}{-\omega^2 a + c + j\omega b} e^{(j\omega t + \varphi)} = \sqrt{2} I_s e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{I}_s \quad (13)$$

\* Le régime transitoire : si on insère l'équation (11) dans l'équation homogène, on obtient alors :

$$a\delta^2 + b\delta + c = 0 \quad (14)$$

L'équation donne deux racines caractéristiques définies comme suit :

$$\delta_1, \delta_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (15)$$

Pour lesquelles correspond la solution du régime transitoire :

$$i_t = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} \quad (16)$$

$A_1$  et  $A_2$  sont des constantes arbitraires qu'on peut déterminer par les conditions initiales. La solution générale sera donc :

$$i = i_s + i_t = \frac{\sqrt{2} |\dot{V}|_{j\omega}}{-\omega^2 a + c + j\omega b} e^{(j\omega t + \varphi)} + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} \quad (17)$$

Notons qu'ici tous les termes sont des vecteurs spiraux.

En posant  $t = 0$ , la solution générale de l'équation (17) devient alors :

$$i_t = \sqrt{2} I_s + A_1 + A_2 \quad (18)$$

Où les termes sont des vecteurs stationnaires dans le plan complexe figure (2).

\* Lorsque  $b^2 - 4ac > 0$ , les racines caractéristiques sont des valeurs réelles différentes et les termes transitoires dans l'équation (17) sont des courants continus décroissants.

\* Lorsque  $b^2 - 4ac = 0$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont des racines réelles égales,  
La solution générale du régime transitoire est :

$$i_t = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 t e^{\delta_1 t} \quad (19)$$

\* Lorsque  $b^2 - 4ac < 0$ , les racines caractéristiques sont des racines complexes conjuguées qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\delta_1, \delta_2 = -\lambda \pm j\omega' \quad (20)$$

L'une d'elles est un vecteur spiral tournant dans le sens direct des aiguilles d'une montre en contradiction avec le théorème 2 ; donc on doit l'éliminer par le choix de  $A_2 = 0$  et on obtient alors la solution générale du régime transitoire.

$$i_s = A_1 e^{\delta_1 t} \quad (21)$$

Le terme conjugué ne contient aucune information additionnelle et la constante arbitraire de l'équation (21) est un complexe choisi suivant les conditions initiales.

Exprimons maintenant la puissance électrique en terme du vecteur spiral .  
La puissance électrique  $P$  est un scalaire exprimé par :

$$p = R_2 [v] \cdot \text{Re}[i] \quad (22)$$

La solution générale de courant de l'équation 17 peut être écrite sous la forme suivante :

$$v = \sqrt{2} |i| e^{(j\omega t + \varphi)} + |A_1| e^{(-\lambda + j\omega')t + j\varphi'} \quad (23)$$

et on obtient :

$$\text{Re}[i] = \sqrt{2} |i| \cos(\omega t + \varphi_1) + |A_1| e^{-\lambda t} \cos(\omega' t + \varphi') \quad (24)$$

En introduisant l'équation (10) et l'équation (24) dans l'équation (22) on trouve :

$$P = \sqrt{2}|\dot{V}| \cos(\omega t + \varphi) \cdot \left[ \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_1) + |A_1| e^{-\lambda t} \cos(\omega' t + \varphi') \right] \quad (25)$$

$$= \sqrt{2}|\dot{V}||\dot{I}| \left[ \cos(\varphi - \varphi_1) + \cos(2\omega t + \varphi + \varphi_1) + \frac{|\dot{V}||\dot{I}|}{\sqrt{2}} e^{-\lambda t} \times \right. \\ \left. \left[ \cos\{(\omega - \omega')t + \varphi - \varphi'\} + \cos\{(\omega + \omega')t + \varphi + \varphi'\} \right] \right]$$

qui peut être donnée par :

$$p = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[v_i^* + v_i] \quad (26)$$

Le symbole (\*) indique le conjugué . La puissance triphasée symétrique n'est plus donnée par  $3 p$ , les angles de phases  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi'$  ont un déphasage de  $2\frac{\pi}{3}$  par rapport aux phases c'est pourquoi les puissances de fréquence cumulative sont nulles dans les trois phases et donc elles ne sont pas incluses dans l'expression de la puissance triphasée qui est donnée par la formule suivante :

$$P_3 = \frac{3}{2} \operatorname{Re}[v_i^*] \quad (27)$$

La puissance constante dans l'équation (27) est :

$$P_3 = 3|V||I| \cos(\varphi - \varphi_1) \quad (28)$$

où en d'autres termes :

$$P_3 = 3|V||I| [\cos(\varphi - \varphi_1) + j \sin(\varphi - \varphi_1)] \quad (29)$$

Le premier terme est la puissance active triphasée et le second terme est la puissance réactive triphasée.

- Théorie du vecteur spiral pour un circuit électrique :

A partir des résultats précédents, on obtient la théorie du vecteur spiral généralisée.

L'équation générale d'un circuit en escalier peut être écrite sous la forme

$$A(p)i = B(p)v \quad (30)$$

A (p) et B (p) sont des polynômes en p définis comme suit :

$$\begin{aligned} A(p) &= a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n \\ B(p) &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m \end{aligned} \quad (31)$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$  et  $b_0, b_1, \dots, b_m$  sont dans la plupart des cas des valeurs réelles. Lorsque  $v$  de l'équation (30) est un vecteur circulaire, la solution du régime permanent du courant  $i_s$  est aussi un vecteur circulaire alors les expressions :

$p i_s = j\omega i_s$  et  $p v = j\omega v$  restent valables.

L'équation (30) devient alors :  $A(j\omega) i_s = B(j\omega)v$

et on obtient :

$$i_s = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} v = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \sqrt{2} |\dot{V}| e^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2} \dot{i}_s \quad (32)$$

$i_s$  est un vecteur circulaire  $\sqrt{2} \dot{i}_s$  et  $\frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}$  est l'impédance alternative.

L'équation caractéristique s'écrit :

$$A(p) = 0 \quad (33)$$

et les racines caractéristiques sont notées  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . Ceci donne la solution générale du régime transitoire :

$$i_t = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} + \dots + A_n e^{\delta_n t} \quad (34)$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des constantes arbitraires, qu'on détermine d'après les conditions initiales. Si  $\delta_r$  est la  $r^{\text{ème}}$  racine multiple, les termes suivants doivent être additionnés à  $i_t$  de l'équation (34).

$$i_t' = A'_1 e^{\delta_r t} + A'_2 t^2 e^{\delta_r t} + \dots + A'_{r-1} t^{r-1} e^{\delta_r t} \quad (35)$$

Lorsque les coefficients de l'équation (31) sont réels, les racines complexes deviennent conjuguées. L'une d'elle est un vecteur spiral tournant dans le sens direct des aiguilles d'une montre qu'on élimine d'après le théorème (2) en choisissant son coefficient arbitraire égale à zéro. On obtient le théorème suivant :

3ème théorème du vecteur spiral:

L'équation générale du circuit est :

$$A(p) i = B(p)v \quad (30)$$

Si la tension imposée  $v$  est un vecteur circulaire de l'équation (8), alors la solution générale du courant  $i$  est donnée par :

$$i = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \sqrt{2} |\dot{V}| e^{j(\omega t + \varphi)} + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} + \dots + A_n e^{\delta_n t} \quad (36)$$

selon ce théorème ;  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  sont les racines caractéristiques de  $A(p) = 0$ . Les termes de la solution générale de l'équation (36) tournent dans le sens direct des aiguilles d'une montre doivent être éliminés. Cette élimination n'a pas d'influence sur la solution car les racines conjuguées dont les vecteurs spiraux tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre existent dans cette expression.

Tous les termes de la solution générale de l'équation (36) sont des vecteurs spiraux. Les deux solutions du régime permanent et du régime transitoire respectivement sont écrites sous la forme du vecteur spiral. Elles sont unifiées.

Généralisons maintenant la théorie unifiée au cas où la tension imposée aux bornes du circuit est un vecteur spiral.

$$v = \sqrt{2} |\dot{V}| e^{(-\lambda + j\omega)t + j\varphi} = \sqrt{2} |\dot{V}| e^{\delta t + j\varphi} \quad (37)$$

La solution générale est donnée par le théorème suivant :

- 4ème théorème du vecteur spiral :

La solution générale de l'équation (30) dans le cas où  $v$  est un vecteur spiral est :

$$i = \frac{B(\delta)}{A(\delta)} \sqrt{2} |\dot{V}| e^{\delta t + j\varphi} + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} + \dots + A_n e^{\delta_n t} \quad (38)$$

Le second terme et les termes qui suivent sont la solution générale du régime transitoire, le premier terme a l'apparence d'être la solution du régime permanent, mais il n'est plus un vecteur circulaire. Appelons-le vecteur spiral de la solution particulière.

Démontrons maintenant que  $i = \left[ \frac{B(\delta)}{A(\delta)} \right] v$  est une solution particulière.

Introduisant-la dans l'équation (30), on trouve :

$$A(p) \frac{B(\delta)}{A(\delta)} v = B(p)v \quad (39)$$

En modifiant celle-ci de la manière suivante :

$$\frac{A(p)}{A(\delta)} v = \frac{B(p)}{A(\delta)} v \rightarrow \frac{A(\delta)}{A(\delta)} v = \frac{B(\delta)}{B(\delta)} v \rightarrow v = v$$

qui reste valable et donc  $i = \frac{B(\delta)}{A(\delta)} v$  est une solution.

Grâce à la solution générale du courant en terme du vecteur spiral on peut facilement exprimer la puissance électrique d'après les équation (26) et (29), on obtient le théorème suivant :

5ème théorème de la méthode du vecteur spiral :

La puissance instantanée  $p$  est donnée par :

$$p = \operatorname{Re}[v] \cdot \operatorname{Re}[i] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[v i^* + v i] \quad (40)$$

La puissance symétrique triphasée est donnée par :

$$P_3 = \frac{3}{2} \operatorname{Re}[v_i^*] \quad (41)$$

soit un exemple explicitant l'application du théorème 4, dans le cas où  $v$  est un vecteur spiral .

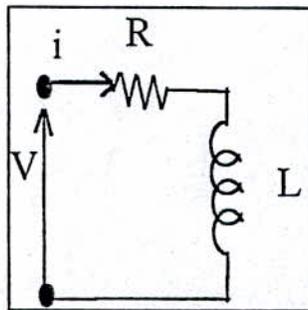


Figure 3 - Circuit RL

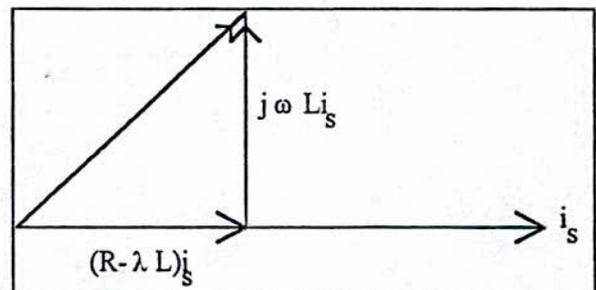


Figure 4 - Diagramme vectoriel du vecteur spiral de la solution particulière

D'après la figure (3) . La tension imposée aux bornes est un vecteur spiral :  
L'équation du circuit est alors :

$$Ri + Lpi = \sqrt{2} |\dot{V}| e^{(-\lambda + j\omega)t + j\phi} \quad (42)$$

qui a pour solution générale :

$$i = \frac{\sqrt{2} |\dot{V}| e^{(-\lambda + j\omega)t + j\phi}}{R + (\lambda + j\omega)} + Ae^{-\frac{R}{L}t} = i_s + i_t \quad (43)$$

Le premier terme est la solution particulière  $i_s$  , qui satisfait l'équation suivante :

$$Ri_s + (j\omega - \lambda)Li_s = \sqrt{2} |\dot{V}| e^{(-\lambda + j\omega)t + j\phi} \quad (44)$$

- à  $t = 0$  , cette équation nous donne le diagramme vectoriel de la figure (4). La résistance variable est  $R' = R - \lambda L$  et l'inductance reste égale à  $L$ .

Lorsque  $R = \lambda L$  la résistance variable est nulle et on obtient la résonance.

- Conversion de variables et équations du circuit :

Lorsque les expressions des variables d'états changent, généralement les équations du circuit changent aussi. Cependant, la conversion de variables entre l'expression de la valeur instantanée et l'expression du vecteur spiral n'a aucun effet sur les équations du circuit concerné. L'équation (30) du circuit reste inchangée. Expliquons alors l'applications du théorème (1).

L'application du théorème (1) du vecteur spiral donne :

$$\frac{d_{\text{réel}}}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Re}[i] = \text{Re} \left[ \frac{di}{dt} \right] \quad (45)$$

généralement la dérivée n<sup>ième</sup> du courant réel est la partie réelle de la dérivée du courant :

$$p^n i_{\text{réel}} = p^n \text{Re}[i] = \text{Re} [p^n i] \quad (46)$$

de l'équation (30) on obtient :

$$\text{Re}[A(p)i] = \text{Re}[B(p)v] \quad (47)$$

et on aura alors :

$$A(p)i_{\text{réel}} = B(p)v_{\text{réel}} \quad (48)$$

donc on a montré que l'équation (30) du circuit est valable par les deux expressions de variables d'état en terme du vecteur spiral soit en terme de valeur instantanée réelle.

Notons que les solutions générales des circuits sont faciles à obtenir par la méthode du vecteur spiral que par la méthode de la valeur réelle.

## CHAPITRE II

## CHAPITRE II : LA MÉTHODE DU VECTEUR SPIRAL (MVS) ET LA MÉTHODE DES COMPOSANTES SYMÉTRIQUES (MCS)

### **II - 1 MCS à valeurs instantanées :**

Cette méthode a été proposée par S. Bekku [6] ; expliquons-la brièvement :

Les courants asymétriques triphasés  $i_a$ ,  $i_b$  et  $i_c$  sont donnés par les expressions suivantes en terme de cosinus :

$$i_a = \sqrt{2}I_0 \cos(\omega t + \theta_0) + \sqrt{2}I_1 \cos(\omega t + \theta_1) + \sqrt{2}I_2 \cos(\omega t + \theta_2) \quad (49)$$

$$i_b = \sqrt{2}I_0 \cos(\omega t + \theta_0) + \sqrt{2}I_1 \cos(\omega t + \theta_1 - \frac{2\pi}{3}) + \sqrt{2}I_2 \cos(\omega t + \theta_2 + \frac{2\pi}{3})$$

$$i_c = \sqrt{2}I_0 \cos(\omega t + \theta_0) + \sqrt{2}I_1 \cos(\omega t + \theta_1 + \frac{2\pi}{3}) + \sqrt{2}I_2 \cos(\omega t + \theta_2 - \frac{2\pi}{3})$$

$I_0$  est la composante homopolaire,  $I_1$  est la composante directe,  $I_2$  est la composante inverse. En appliquant la transformation de variables des équations (49) - (50), nous obtenons les composantes symétriques suivantes :

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \frac{A}{3} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \alpha^2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \alpha^3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}I_0 \cos(\omega t + \theta_0) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I_1 e^{j(\omega t + \theta_1)} + \frac{1}{\sqrt{2}}I_2 e^{-j(\omega t + \theta_2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I_1 e^{-j(\omega t + \theta_1)} + \frac{1}{\sqrt{2}}I_2 e^{j(\omega t + \theta_2)} \end{bmatrix} \quad (51)$$

La composante homopolaire  $i_0$  est réelle comme elle a été initialement, la composante directe  $i_1$  et la composante inverse  $i_2$  deviennent des fonctions exponentielles du temps qui contiennent les deux composantes directes et inverse  $I_1$  et  $I_2$  respectivement. La transformation de variable a échoué dans la normalisation des vecteurs courants. Dans cette situation il est difficile de continuer l'analyse pour le fonctionnement asymétrique des systèmes triphasés et

dans ce cas nous proposons la combinaison de la méthode du vecteur spiral et celle des composantes symétriques.

## **II-2 Combinaison du MCS ET MVS :**

Lorsque les courants triphasés asymétriques de l'équation (49) sont exprimés par des vecteurs circulaires l'équation (52) sera obtenu :

$$i_a = \sqrt{2}|I_0|e^{j(\omega t + \theta_0)} + 2\sqrt{2}|I_1|e^{j(\omega t + \theta_1)} + \sqrt{2}|I_2|e^{j(\omega t + \theta_2)} \quad (52)$$

$$i_b = \sqrt{2}|I_0|e^{j(\omega t + \theta_0)} + 2\sqrt{2}|I_1|e^{j(\omega t + \theta_1 - \frac{2\pi}{3})} + \sqrt{2}|I_2|e^{j(\omega t + \theta_2 + \frac{2\pi}{3})}$$

$$i_c = \sqrt{2}|I_0|e^{j(\omega t + \theta_0)} + 2\sqrt{2}|I_1|e^{j(\omega t + \theta_1 + \frac{2\pi}{3})} + \sqrt{2}|I_2|e^{j(\omega t + \theta_2 - \frac{2\pi}{3})}$$

en utilisant la transformation de variable de l'équation (50), on obtient les composantes suivantes :

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}|I_0|e^{j(\omega t + \theta_0)} \\ \sqrt{2}|I_1|e^{j(\omega t + \theta_1)} \\ \sqrt{2}|I_2|e^{j(\omega t + \theta_2)} \end{bmatrix} \quad (53)$$

chaque composante symétrique  $I_0, I_1, I_2$  est séparée l'une de l'autre, dans ce cas la normalisation des variables a aboutit.

Pour l'analyse du régime transitoire, les vecteurs circulaires deviennent des vecteurs spiraux et les équations (52) et (53) deviennent respectivement :

$$i_a = A_0 e^{\delta_0 t} + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} \quad (54)$$

$$i_b = A_0 e^{\delta_0 t} + A_1 e^{\delta_1 t - j\frac{2\pi}{3}} + A_2 e^{\delta_2 t + j\frac{2\pi}{3}}$$

$$i_c = A_0 e^{\delta_0 t} + A_1 e^{\delta_1 t + j\frac{2\pi}{3}} + A_2 e^{\delta_2 t - j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 e^{\delta_0 t} \\ A_1 e^{\delta_1 t} \\ A_2 e^{\delta_2 t} \end{bmatrix} \quad (55)$$

$\delta_0, \delta_1, \delta_2$  sont les racines caractéristiques des composantes symétriques. La transformation inverse de l'équation (55) est :

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = 3A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = A^* \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 e^{\delta_0 t} & A_1 e^{\delta_1 t} & A_2 e^{\delta_2 t} \\ A_0 e^{\delta_0 t} & A_1 e^{\delta_1 t - j\frac{2\pi}{3}} & A_2 e^{\delta_2 t + j\frac{2\pi}{3}} \\ A_0 e^{\delta_0 t} & A_1 e^{\delta_1 t + j\frac{2\pi}{3}} & A_2 e^{\delta_2 t - j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \quad (56)$$

### II - 3 Exemple d'utilisation de la MCS et MVS POUR UN (Moteur à induction)

Dans cet exemple illustrant la MCS combinée avec la MVS, on analysons le phénomène transitoire du moteur à induction. La figure 5 représente le modèle du moteur à induction :

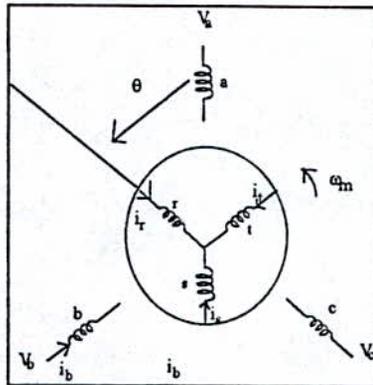


Figure 5:Modèle du moteur à induction

A partir des équations électriques suivantes :

Pour le stator :

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = (R_1 + l_1 p) \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad (57)$$

Pour le rotor :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (R_2 + l_2 p) \begin{bmatrix} i_r \\ i_s \\ i_t \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \lambda_r \\ \lambda_s \\ \lambda_t \end{bmatrix} \quad (58)$$

où  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_r, \lambda_s, \lambda_t$  sont les flux utiles embrassés par l'entrefer. En multipliant chaque terme par la matrice  $A/3$  du côté gauche des équations (57) et (58), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = (R_1 + l_1 p) \begin{bmatrix} i_{10} \\ i_{21} \\ i_{12} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \lambda_{10} \\ \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (R_2 + l_2 p) \begin{bmatrix} i_{20} \\ i_{22} \\ i_{22} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \lambda_{20} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Les flux utiles  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12}$  sont exprimés par des courants et des inductances. Lorsque les axes de la phase a et la phase r coïncident, l'angle  $\theta$  est nul et la mutuelle inductance devient maximale  $M$ . Lorsque  $\theta \neq 0$ , la mutuelle inductance est  $M \cos \theta$  et les flux utiles des enroulements triphasés du stator résultant du champ tournant dans l'entrefer sont donnés par :

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$+ M \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r \\ i_s \\ i_t \end{bmatrix}$$

On transforme ces flux utiles en composantes symétriques :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{10} \\ \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} M \begin{bmatrix} 0 & & \\ i_{11} + e^{j\theta} & i_{21} & \\ i_{12} + e^{-j\theta} & & i_{22} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_r \\ \lambda_s \\ \lambda_t \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r \\ i_s \\ i_t \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$+ M \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \cos\left(-\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(-\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(-\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(-\theta) & \cos\left(-\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(-\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(-\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Et finalement :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{20} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} M \begin{bmatrix} 0 & \\ i_{21} + e^{-j\theta} & i_{11} \\ i_{22} + e^{j\theta} & i_{12} \end{bmatrix} \quad (64)$$

les l'équation (62) et l'équation (64) montrent que les courants à composantes homopolaires ne produisent pas les flux utiles principaux. Les composantes symétriques sont séparées l'une de l'autre lors de la génération des flux utiles principaux, c'est à dire qu'ils sont maintenant indépendants. En insérant l'équation (62) et (64) dans l'équation (60) on obtient les équations suivantes :

a/ pour les composantes homopolaires :

$$\begin{aligned} V_{10} &= (R_1 + l_1 p) i_{10} \\ 0 &= (R_2 + l_2 p) i_{20} \end{aligned} \quad (65)$$

b/ pour les composantes directes :

$$\begin{aligned} V_{11} &= (R_1 + l_1 p) i_{11} + \left(\frac{3M}{2}\right) p (i_{11} + e^{j\theta} i_{11}) \\ 0 &= (R_2 + l_2 p) i_{21} + \left(\frac{3M}{2}\right) p (i_{21} + e^{-j\theta} i_{11}) \end{aligned} \quad (66)$$

c/ pour les composantes inverses :

$$V_{12} = (R_1 + l_1 p) i_{12} + \left( \frac{3M}{2} \right) p (i_{12} + e^{-j\theta} i_{22}) \quad (67)$$

$$0 = (R_2 + l_2 p) i_{22} + \left( \frac{3M}{2} \right) p (i_{22} + e^{-j\theta} i_{12})$$

Il faut noter que dans les équations (65) et (67) chaque composante symétrique est séparée l'une de l'autre; donc on a pu normaliser les équations. En faisant les changements suivants :

$$i'_{21} = e^{j\theta} i_{21} \quad (68)$$

la première équation du système d'équations (66) devient :

$$V'_{11} = R_1 i_{11} + \left( l_1 + \frac{3M}{2} \right) p i_{11} + \frac{3M}{2} p i'_{21} \quad (69)$$

la deuxième équation du système d'équations (66) est modifiée comme suit :

$$0 = R_2 i_{21} + \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right) p i_{21} + \frac{3M}{2} (e^{-j\theta} p i_{11} - j\omega_m) i_{11} \quad (70)$$

en multipliant chaque terme de l'équation (70) par  $e^{j\theta}$  on trouve :

$$0 = R_2 e^{j\theta} i_{21} + \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right) e^{j\theta} p i_{21} + \frac{3M}{2} (p - j\omega_m) i_{11} \quad (71)$$

En dérivant l'équation (68) on obtient :

$$p i'_{21} = j\omega_m i_{21} + e^{j\theta} p i_{21} \quad (72)$$

En remplaçant l'équations (72) dans l'équation (71), on trouve :

$$0 = R_2 i'_{21} + \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right) (p - j\omega_m) i'_{21} + \frac{3M}{2} (p - j\omega_m) i_{11} \quad (73)$$

En combinant les équations (69) et (73), on obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} V_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \left( l_1 + \frac{3M}{2} \right) p & \frac{3M}{2} p \\ \frac{3M}{2} (p - j\omega_m) & R_2 \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right) (p - j\omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{11} \\ i'_{21} \end{bmatrix} \quad (74)$$

Qui décrit les équations de performance en composantes symétriques directes, la Figure 6 montre son circuit électrique équivalent :

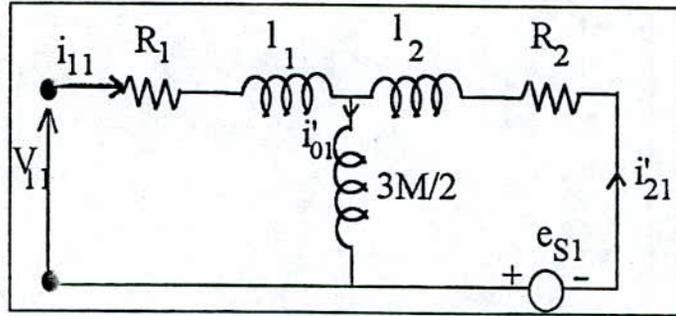


Figure 6 : Circuit équivalent du moteur à induction en composantes directes

où la f.e.m  $e_{s1}$  est :

$$e''_{s1} = -j\omega_m \left[ \frac{3M}{2} i_{11} + \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right) i'_{21} \right] \quad (75)$$

En faisant le remplacement :

$$i'_{22} = e^{-j\theta} i_{22} = e^{-j\omega_m t} i_{22} \quad (76)$$

Les équations du circuit en composantes inverses de l'équation (67) sont modifiées similairement comme suit :

$$\begin{bmatrix} V_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \left( l_1 + \frac{3M}{2} \right) p & \frac{3M}{2} p \\ \frac{3M}{2} (p + j\omega_m) & R_2 \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right) (p + j\omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{12} \\ i'_{22} \end{bmatrix} \quad (77)$$

qui décrivent les équations de performance en composantes inverses du moteur à induction. Le circuit électrique équivalent est donné à la Figure 7 :

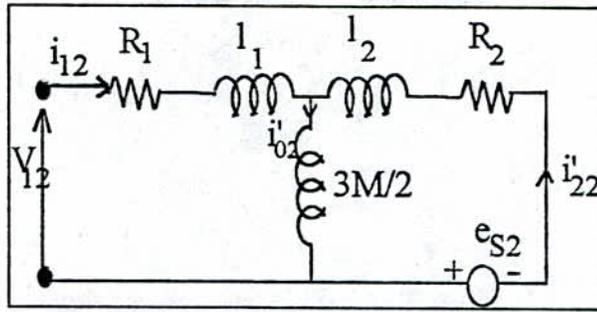


Figure 7 Le circuit équivalent du moteur à induction en composantes inverses

Où la f.e.m  $e_{S2}$  dans la figure est :

$$e_{s2} = -j\omega \left[ \frac{3M}{2} i_{12} + \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right) i'_{22} \right] \quad (78)$$

Les équations caractéristiques des équations de performance (74) et (77) obtenues sont du second ordre par rapport à  $p = \frac{d}{dt}$ . Ces équations sont faciles à résoudre. Elles sont valables aussi bien pour le régime permanent que pour le régime transitoire. Alors l'application de la MCS a été étendue à l'analyse des fonctionnements asymétriques du moteur à induction triphasé.

Remarques : lors du fonctionnement symétrique, les composantes homopolaires et inverses sont nulles et il reste seulement la composante directe de l'équation (56), qui donne :

$$i_a = i_1 ; i_b = \alpha i_a ; i_c = \alpha^2 i_a \quad (79)$$

Dans ce cas l'équation 74 du circuit en composante directe devient identique à celle de l'équation du circuit obtenue en terme de variable d'état de la phase a exprimée en terme de vecteur spiral, c'est la méthode de séparation de phase. Cette équation du circuit est utilisée pour analyser le régime transitoire du moteur à induction et les résultats analytiques obtenus peuvent être utilisés, pour obtenir une commande en couple très développée et très avancée qui fera l'étude dans le chapitre III.

# CHAPITRE III

## CHAPITRE III : COMMANDE ET ANALYSE DU MOTEUR À INDUCTION PAR MVS :

### **III-1 Commande en courant à l'entrée du moteur à induction :**

Considérons la figure 5, et écrivons les équations du circuit sous la forme suivante :

$$\text{pour la phase a du stator : } V_a = R_1 i_a + l_1 p i_a + p \lambda_{ga} \quad (80)$$

$$\text{pour la phase r du rotor : } 0 = R_2 i_r + l_2 p i_r + p \lambda_{gr} \quad (81)$$

Les symboles sont conventionnels,  $\lambda_{ga}$  et  $\lambda_{gr}$  sont les flux utiles résultant du champ tournant dans l'entrefer. D'après les expressions du premier chapitre, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{gr} &= M_{i_r} + M_{i_a} \cos \frac{2\pi}{3} + M_{i_b} \cos \left( -\frac{2\pi}{3} \right) + M_{i_c} \cos(-\theta) \\ &\quad + M_{i_b} \cos \left( -\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + M_{i_c} \cos \left( -\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= M \left( i_a - \frac{i_b + i_c}{2} \right) + M \left[ \left( i_r - \frac{i_s + i_t}{2} \right) \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} (i_s - i_t) \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (82)$$

notons qu'encre M est la valeur maximale de la mutuelle inductance entre les phases statoriques et rotoriques et elle est aussi l'auto-inductance attribuée à l'entrefer en supposant une répartition sinusoïdale. Pour la commande, les courants statoriques sont symétriques, et sont exprimés par les vecteurs circulaires suivants :

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2} |I_1| e^{j(\omega t + \phi_1)} \\ i_b &= \sqrt{2} |I_1| e^{j(\omega t + \phi_1 + \frac{2\pi}{3})} \\ i_c &= \sqrt{2} |I_1| e^{j(\omega t + \phi_1 - \frac{2\pi}{3})} \end{aligned} \quad (83)$$

En remplaçant dans l'équation (82) on trouve :

$$\lambda_{gr} = \frac{3M}{2} (i_r + i_a e^{-j\theta}) \quad (84)$$

remplaçons l'équation (84) dans l'équation (81) on obtient :

$$-\frac{3M}{2} p(i_a e^{-j\omega_m t}) = R_2 i_r + \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right) p i_r \quad (85)$$

$$\text{on a : } \theta = \omega_m t \quad (86)$$

l'équation (85) contient seulement les phases a et r qui sont séparées des autres phases. Puisque la phase a représente le stator et la phase r représente le rotor, les notations a et r sont modifiées en 1 et 2 respectivement, alors l'équation (85) devient :

$$-\frac{3M}{2} p[\sqrt{2}|i_1|e^{-j(\omega t + \theta)}] = R_2 i_2 + \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right) p i_2 \quad (87)$$

Sa solution générale est :

$$i_2 = A_2 e^{-\lambda t} + \sqrt{2}|i_2| e^{j(s\omega t + \theta_2)}, \quad \lambda = \frac{R_2}{l_2 + \frac{3M}{2}} \quad (88)$$

Le second terme est le courant rotorique en régime permanent. Le couple est donné par :

$$T_3 = \frac{9MP}{4} \text{Imag}[i_1 \cdot i_2^*] \quad (89)$$

où P est le nombre de pôle et le courant statorique est :

$$i_1 = \sqrt{2}|I_1| e^{j(s\omega t + \phi_1)} = \sqrt{2}|I_1| e^{js\omega t} = \sqrt{2}|i_1| \quad (90)$$

$I_1 = |I_1| e^{j\phi_1}$  est son déphaseur et  $|i_1|$  son vecteur circulaire.

Pour les conditions initiales de  $i_2 = 0$  à  $t = 0$ , le couple transitoire est déterminé à partir par des équations (88), (89), (90) :

$$T_3 = \frac{9MP}{4} |I_1|^2 \left[ \frac{s\omega(3M/2)}{|Z_2|} \cos\theta_2 - \frac{3M/2}{l_2 + 3M/2} e^{-\lambda t} \sin(s\omega t + \theta_2) \right] \quad (91)$$

avec  $Z_2 = R_2 + j\omega\left(l_2 + \frac{3M}{2}\right) = |Z_2|e^{j\theta_2}$  l'impédance rotorique. Notons que le couple transitoire ne contient pas explicitement la vitesse de rotation  $\omega_m$  et donc il peut être indépendant d'elle.

Le tableau 1 donne les paramètres du moteur à induction. Les courants transitoires et le couple sont calculés à partir des équations (88) et (91) et ils sont représentés à la figure 8.

Tableau 1

Plaque signalétique du moteur à induction

|  |
|--|
| $P = 3,7 \text{ kW}, V = 200 \text{ V}, f = 50 \text{ Hz}, P = 4 \text{ pôles}$<br>$X_1 = 0,408\Omega; X_2 = 0,269\Omega; X_m = 13,2\Omega;$<br>$R_2 = 0,463\Omega; R_2 = 0,432\Omega$ |
|--|

Le temps de retard est trop long et aussi les dépassements sont grands dans la réponse du couple, cela résulte du manque de la réponse de la commande.

Le circuit équivalent, tiré à partir de l'équation (87) est illustré à la Figure 9. Ce circuit identifie l'existence d'un courant  $i_0$  qui joue un rôle très important dans l'analyse et la commande du moteur à induction. Ce courant magnétisant est donné par l'équation (92) :

$$i_0 = i_1 + i_2 = A_2 e^{-\lambda t} + \sqrt{2}|i_0|e^{j(\omega t + \theta_0)} \quad (92)$$

Le second terme est le vecteur circulaire du courant. à  $t = 0$ , cette équation devient :

$$i_0 = A_2 + \sqrt{2}|i_0|e^{j\theta_0} \quad (93)$$

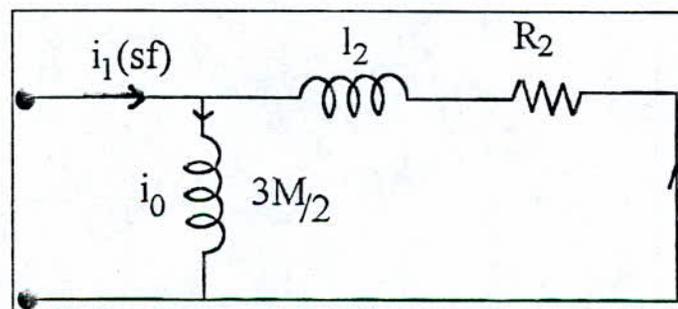


Figure - 9 Circuit équivalent pour la commande en courant du moteur à induction

### III-2 Commande en tension à l'entrée du moteur à induction

Lors de l'étude de la méthode des composantes symétriques combinée avec la méthode du vecteur spiral, on a déduit l'équation (74) que l'on écrit sous la forme suivante en changeant seulement quelques notations :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \left( l_1 + \frac{3M}{2} \right) & \frac{3M}{2} p \\ \frac{3M}{2} (p - j\omega_m) & R_2 + \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right) (p - j\omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (74')$$

le circuit équivalent reste le même de la Figure 6 en changeant seulement les notations. Sa solution générale est :

$$i_1 = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} + \sqrt{2} |i_1| e^{j(\omega t + \theta_1)} \quad (94)$$

Tous les termes sont des vecteurs spiraux. Pour le moteur à induction du tableau 1, les réponses du courant et du couple sont simulées et représentées à la figure (10).

$$\text{Si le moteur est "préexcité" par } i_0 = \sqrt{2} |i_0| e^{j\theta_0} = \sqrt{2} I_0 \quad (95)$$

Alors  $A_2$  devient nul et les termes transitoires disparaissent dans les équations (88) et (92). Donc l'équation (94) sera la condition pour qu'il n'y ait pas de transitoire dans le cas de la commande en courant. C'est le principe de la "préexcitation".

Le moteur est lancé à vide et soudainement on applique les tensions nominales triphasées, le couple et les courants ont un temps de retard très long et des grands dépassements qui peuvent endommager l'arbre du moteur et les semi-conducteurs de l'onduleur. Pour le fonctionnement en régime permanent, les variables deviennent des vecteurs circulaires, pour lesquelles  $p$  devient  $j\omega$ , d'où d'après l'équation (74'), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j(X_1 + X_m) & jX_m \\ jX_m & \frac{R_2}{s} + j(X_2 + X_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (96)$$

$x_1 = \omega l_1$ ,  $x_2 = \omega l_2$ ,  $x_m = \omega 3M/2$ . Le circuit équivalent correspondant est alors illustré à la Figure 11 qui est le circuit équivalent du régime permanent type T. Cependant, il faut noter que cette équation est valable seulement pour les variables exprimées en vecteurs circulaires.

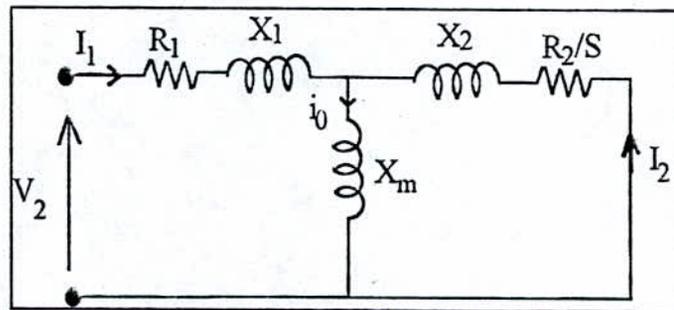


Figure- 11: Circuit équivalent du régime permanent type T du moteur à induction  
Le couple du régime permanent est :

$$T_3 = 3 \frac{P R_2}{2 S \omega} |\dot{I}_1|^2 = 3 \frac{P R_2}{2 S \omega} \frac{(S X_m)^2}{R_2^2 + (S X_2)^2} |\dot{I}_0|^2 \quad (97)$$

lorsque  $|\dot{I}_0|$  est gardé constant, le couple  $T_3$  est une fonction seulement de  $s$ . Alors les courbes couple-vitesse du moteur représentées à la figure 12 sont des droites, dans des intervalles très larges du couple.

Pour la comparaison, la courbe couple-vitesse à tension constante de 200 V et à fréquence constante de 50 Hz est illustrée aussi. Le courant  $i_0$  constant améliore remarquablement la linéarité des courbes couple-vitesse. Ce courant est le point principal de la commande par la méthode d'accélération du champ (FAM) du moteur à induction, qui a d'autres caractéristiques semblables.

### III - 3 Transformation de l'équation de performance et le circuit équivalent du moteur à induction.

Pour améliorer les caractéristiques de la commande du moteur à induction, l'équation de performance et le circuit équivalent vont être modifiés en utilisant la transformation suivante :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2^\alpha \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2^\alpha \end{bmatrix} \quad (98)$$

où  $\alpha$  est une constante arbitraire (elle représente le rapport de transformation)

La formule de transformation  $C_t [V] = C_t [Z] C [i]$  appliquée à l'équation (74') donne :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \left(\theta_1 + \frac{3M}{2}\right)p & \left(\frac{3M\alpha}{2}\right)p \\ \left(\frac{3M\alpha}{2}\right)(p - j\omega_m) & R_2\alpha^2 + \alpha^2\left(l_2 + \frac{3M}{2}\right)(p - j\omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2^\alpha \end{bmatrix} \quad (99)$$

Pour :

$$\alpha = \frac{3M}{2} \left( l_2 + \frac{3M}{2} \right)$$

cette équation devient donc :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \left(l_1 + \frac{3M}{2}\right)p & \frac{3M'}{2}p \\ \frac{3M'}{2}(p - j\omega_m) & R_2' + \frac{3M'}{2}(p - j\omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (100)$$

A partir de l'équation (100), le circuit équivalent sera représenté à la figure 13 et la f.e.m  $e'_s$  aura pour expression :

$$e'_s = -j\omega_m \left( \frac{3M'}{2} \right) (i_1 + i_2) = -j\omega_m \left( \frac{3M'}{2} \right) i'_o \quad (101)$$

Ce circuit est nommé : circuit équivalent du régime transitoire type I. Notons alors que l'inductance de fuite rotorique  $l'_\omega$  est nulle.

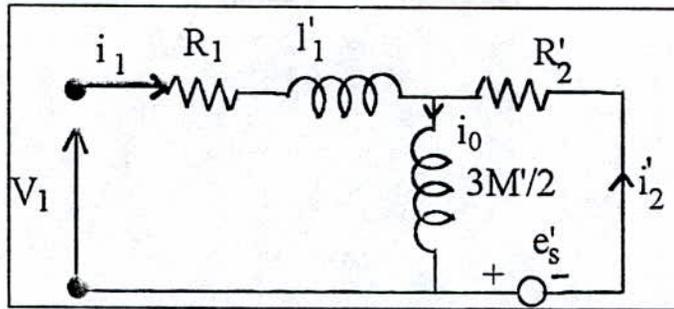


Figure 13- Le circuit équivalent type TII du régime transitoire du moteur à induction.

Pour le régime permanent les variables deviennent des vecteurs circulaires où  $p = j\omega$  et l'équation (100) sera donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j(x'_1 + x'_m) & jx'_m \\ jx'_m & \frac{R'_2}{s} + jx'_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Le circuit équivalent correspondant sera donc représenté à la figure 14. Dans ce circuit les relations suivantes sont valables :

$$I'_2 = -j \frac{sx'_m}{R'_2} I'_0 \quad (103)$$

$$T_3 = \frac{3p}{2} \frac{1}{R'_2} \left( \frac{3M'}{2} \right) s\omega |\dot{I}_0|^2 = \frac{9M'p}{4} |\dot{I}_0| |\dot{I}_2| \quad (104)$$

Dans le cas de la commande FAM, le courant  $|\dot{I}'_0|$  est gardé constant c'est pourquoi, ces relations restent les mêmes

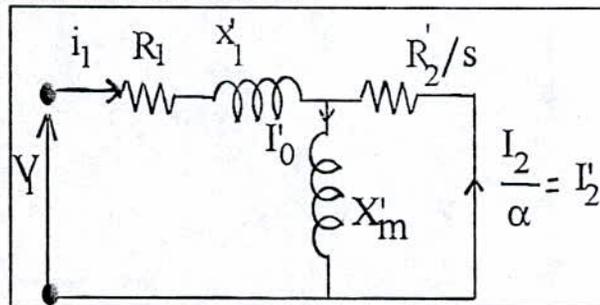


Figure 14- Le circuit équivalent du régime permanent du moteurs à induction.

Remarquons que :

$$T \sim sf \sim |\dot{I}'_2| \quad (105)$$

Pour la commande FAM les courbes couple-vitesse sont illustrées à la Figure 15

Interprétation :

Elles sont des droites. Trois valeurs des couples mesurées sont données pour 50 Hz, elles sont situées sur la même droite, cela montre que la saturation du fer n'a aucune influence sur les courbes couple - vitesse. L'équation (104) donne une relation très importante pour le moteur à induction qui est similaire à celle du moteur à courant continu. Elle ne contient pas de résistance rotorique ni autre constante du circuit à l'exception de  $\frac{3M'}{2}$ . Ce qui nous amène à la compensation par action de retour du courant rotorique lorsqu'on a une variation de la résistance rotorique due à la variation de la température du rotor.

En choisissant la valeur suivante de  $\alpha$  :

$$\alpha = \left(1 + \frac{3M}{2}\right) \frac{3M}{2} \quad (106)$$

l'équation (99) devient donc :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \left(\frac{3M''}{2}\right)p & 3M''p \\ 3M''(p - j\omega_m) & R_2'' + \left(1''_2 + \frac{3M''}{2}\right)(p - j\omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ 1''_2 \end{bmatrix} \quad (107)$$

A partir de l'équation (107), on obtient le circuit électrique équivalent schématisé par Figure 16, dans lequel la f.e.m  $e''_s$  est :

$$e''_s = -j\omega_m \left(\frac{3M''}{2}\right) i_1 - j\omega_m \left(e''_2 + \frac{3M''}{2}\right) i''_2 \quad (108)$$

Ce circuit est nommé : Circuit équivalent du régime transitoire type T-II. On remarquera que l'inductance de fuite statorique est nulle.

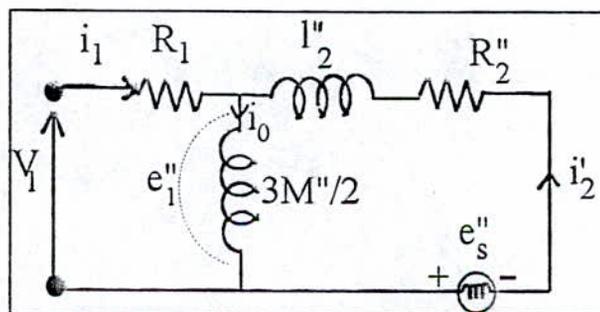


Figure 16: Le circuit équivalent du régime transitoire type II du moteur à induction

Pour le régime permanent, les variables sont des vecteurs circulaires où  $p = j\omega$ , l'équation (107) s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + jX''_m & jX''_m \\ jX''_m & R''_2/2 + j(X''_{2++} + X''_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (109)$$

Qui donne le circuit équivalent correspond représenté à la figure 17

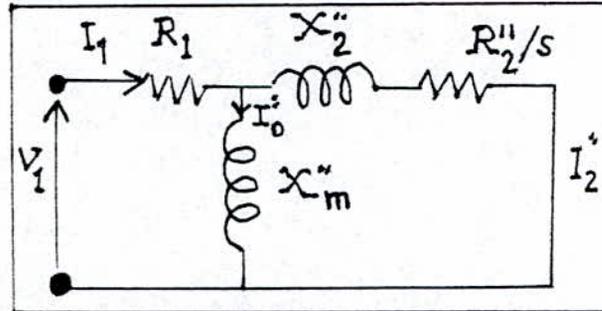


Figure 17: Le circuit équivalent du régime permanent type II du moteur à induction

avec :  $X''_m = \alpha X_m$ ,  $X''_2 = \alpha^2 X_2 - \alpha X_m$  et  $\frac{R''_2}{S} X''_m = \alpha^2 \frac{R''_2}{S}$

et :

$$T = \frac{P}{2} \frac{R''}{S\omega} \frac{SX''_m}{R''_2 + (SX''_m)^2} |I''_0| \quad (110)$$

Ceci permet d'avoir des courbes couple-vitesse, figure 18 obtenue grâce à la commande FAM. Malgré l'existence des points critiques qui apparaissent sur les courbes, les parties linéaires restent même très larges.

### **III - 4 - Analyse du transitoire et la commande FAM du moteur à induction**

Dans cette partie nous allons expliquer le phénomène transitoire électromagnétique lors de la commande FAM du moteur à induction.

Dans le cas de la commande en courant, le circuit équivalent du régime transitoire Figure 13, est le plus convenable et l'équation du circuit sera donnée par la seconde équation du système d'équations (100) :

$$-\frac{3M'}{2} \cdot (p - j\omega_m) i_1 = R'_1 i'_2 + \frac{3M'}{2} (p - j\omega_m) i'_2 \quad (111)$$

En introduisant  $i'_0 = i_1 + i'_2$ , cette équation devient :

$$R'_2 i_1 = R'_2 i_0 + \left(\frac{3M'}{2}\right)(p - j\omega_m) i'_0 \quad (112)$$

Sa solution générale est immédiatement obtenue comme suit :

$$i'_0 = A_0 e^{-(R'_2/2) t} + \sqrt{2} |I'_0| e^{j(\omega t + \theta_0)} \quad (113)$$

ici le second terme est le courant  $i_0$  du régime permanent exprimé par un vecteur circulaire.

$$\text{à } t = 0, \text{ cette équation devient : } i'_0 = A_0 + \sqrt{2} |I'_0| e^{j\theta_0} \quad (114)$$

La condition initiale satisfait la relation suivante :

$$i'_0 = \sqrt{2} |I'_0| e^{j\theta_0} \quad (115)$$

$A_0$  sera nulle dans équation (114) et le transitoire n'aura pas lieu. C'est le principe de la préexcitation qu'on avait étudié précédemment dans le cas du circuit équivalent type T, Cependant ce circuit est de type T-I, où l'inductance de fuite rotorique est nulle. Donc une commande plus rapide du courant rotorique  $i'_2$  est plus facile, théoriquement et pratiquement. La figure 19 illustre la réponse du couple par rapport à celle de la commande du couple du moteur à induction, lorsque le moteur est préexcité et le courant d'excitation reste un vecteur circulaire. C'est la méthode d'accélération du champ FAM (Field Acceleration Method).

La commande FAM type T-I étudiée précédemment, rend le moteur à induction un moteur à commande idéale. Les courbes couple-vitesse du régime permanent sont complètement linéaires et la réponse de la commande du couple est instantanée.

Aussi le cas de la commande en tension du moteur à induction le couple sera analysé. Selon le circuit équivalent Type I-II de la figure 16, les équations restent valables et on obtient :

$$e''_1 = \left(\frac{3M''}{2}\right) p i'_0 \quad (116)$$

$$e''_1 = -[R''_2 + l''_2 (p - j\omega_m)] i''_2 + j\omega_m \left(\frac{3M''}{2}\right) i''_0 \quad (117)$$

$$V_1 = R_1 i_1 + e''_1 \quad (118)$$

En commande FAM, le courant  $i''_0$  est gardé comme vecteur circulaire exprimé comme suit :

$$i''_0 = \sqrt{2} |I''_0| e^{j(\omega t + \theta_0)} \quad (119)$$

En introduisant l'équation (119) dans l'équation (116) la tension d'excitation  $e''_1$  sera exprimée par :

$$e''_1 = j\omega \left( \frac{3M''}{2} \right) \sqrt{2} |I''_0| e^{j(\omega t + \theta_0)} \quad (120)$$

Et en remplaçant l'équation (120) dans l'équation (117) on obtient :

$$e''_1 \left( 1 - \frac{\omega_m}{\omega} \right) = se''_1 = -[R''_2 + (L_2 - j\omega_m)] e^{j(\omega t + \theta_0)} \quad (121)$$

Sa solution générale est :

$$i''_2 = A''_2 e^{-(R''_2/L''_2)t + j\omega t} + \sqrt{2} |I''_2| e^{j(\omega t + \theta_2)} \quad (122)$$

Le second terme est le courant rotorique du régime permanent et il est donné par l'expression :

$$\sqrt{2} |I''_2| e^{j(\omega t + \theta_2)} = \frac{e''_1}{R''_2/s + j\omega L''_2} = \frac{j\omega \left( \frac{3M''}{2} \right) \sqrt{2} |I''_0|}{R''_2/s + j\omega L''_2} e^{j(\omega t + \theta_0)} \quad (123)$$

La condition initiale  $i''_0 = 0$  à  $t = 0$ , donne  $A''_2$  l'équation (122) :

$$A''_2 = -\sqrt{2} |I''_0| e^{j\theta_2} \quad (124)$$

et par suite le couple transitoire :

$$T_3 = \frac{9MP}{4} \text{IMAG}[i''_0 \cdot i''_2^*] = \frac{9MP}{4} |I''_0| |I''_2| \times [\sin(\theta_0 - \theta_2) - e^{-[R''_2/L''_2]t} \sin(s\omega t + \theta_0 - \theta_2)] \quad (125)$$

le déphasage  $\theta_2$  est déterminé d'après l'équation (123) :

$$\theta_2 = \theta_0 - \theta_2 - \pi/2, \quad \theta_2 = \text{Arctg}\left(\frac{s\omega \cdot l''_2}{R''_2}\right) \quad (126)$$

En introduisant l'équation (126) dans l'équation (125) on abouti à :

$$T_3 = \frac{9MP}{4} |I''_0| |I''_2| \times [\cos\theta_2 - e^{-[R''_2/l''_2]t} \cos(s\omega t + \theta_2)] \quad (128)$$

cette équation ne contient pas explicitement  $\omega_m$  et donc la réponse du couple est indépendante de la vitesse de rotation du moteur.

La figure 20 schématise la réponse du couple de par rapport à la réponse de la commande. La réponse n'est plus instantanée mais elle est très rapide avec aucun dépassement. Lorsque la température du rotor varie de 75°C à 150°C le couple en régime permanent décroît de 17% mais la réponse reste très rapide.

#### \* Compensation de la température du moteur à induction :

Lorsque les paramètres du circuit équivalent du moteur varient, son fonctionnement est influencé. L'influence est généralement importante dans le cas du moteur à induction que dans le cas du moteur à courant continu, c'est à dire que la sensibilité paramétrique est grande. Cependant pour la commande à haute qualité, une boucle fermée est nécessaire pour une alimentation de retour négatif (Feed back) qui tend à réduire la sensibilité paramétrique. Les changements paramétriques du moteur à induction sont dus aux changements des paramètres du circuit. Les variations de l'inductance sont dues à la saturation du fer qui peuvent causer le problème de détermination des paramètres du circuit équivalent. C'est donc un problème non linéaire et sa résolution analytique est plus difficile.

Cependant, dans la plupart des cas, l'influence de la saturation est négligeable, de telle sorte que les inductances constatées sont applicables aux analyses théoriques du moteur à induction.

Le circuit équivalent type T-I, son inductance de fuite rotorique est nulle et l'inductance de magnétisation est la seule inductance dans la branche magnétisantes.

Le courant magnétisant parcourt l'inductance qui est indépendante du courant rotorique. Le courant magnétisant reste constant dans le cas de la commande FAM.

Donc le circuit équivalent T-I tend à réduire l'influence des variations des inductances qui s'avère être un avantage de ce type de circuit.

Les inductances ne varient pas et restent constantes indépendamment de la température du moteur à induction, seules les résistances varient en fonction de la température. Un changement de valeurs des résistances influe sur le

fonctionnement du moteur à inductions, qui est très accentué dans les résistances rotoriques. C'est pourquoi il est nécessaire de compenser variations de la résistance rotorique lors de la commande en couple dans le cas de la commande FAM.

### **III - 5 Diagramme bloc et fonction du transfert de la commande FAM du moteur à induction :**

Pour la commande en courant à l'entrée du moteur à induction les deux circuits équivalent des Figures - 13 et 14 dont le phénomène transitoire est expliqué en paragraphe III.4, sont les plus convenables.

La commande est appelée la commande FAM Type T-I, son diagramme bloc est représenté par Figure 21. Le courant rotorique  $|I'_2|$  et la fréquence du glissement  $sf$  sont proportionnels au couple de commandé  $T_c$ . Le courant constant  $|I'_0|$  est additionnée perpendiculairement à  $|I'_2|$  pour obtenir le courant statorique déphaseur  $I_1$ , avec la fréquence  $f$ , alors la valeur instantanée du courant statorique  $i'_1$  est générée par l'onduleur triphasé. Le diagramme bloc est de structure simple, en utilisant les composantes ordinaires et en faisant les calculs de la commande par des vecteurs spiraux.

La réponse du couple par rapport à l'échelon unité est illustrée à la Figure 19.

La fonction du transfert correspondant est déterminée par Figure 21 et est proportionnellement constante par rapport au courant  $|I'_0|$ , donc le réglage du champ est possible.

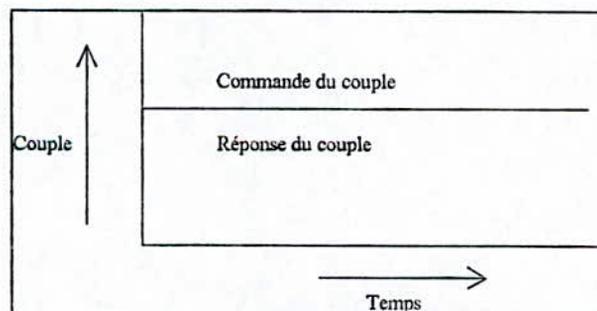


Figure 19 : La réponse du couple

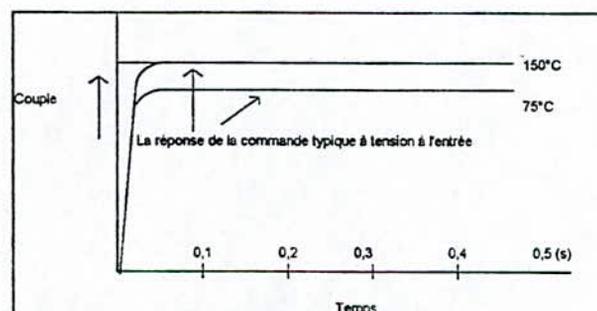


Figure 20 La réponse du couple de la commande FAM en tension à l'entrée

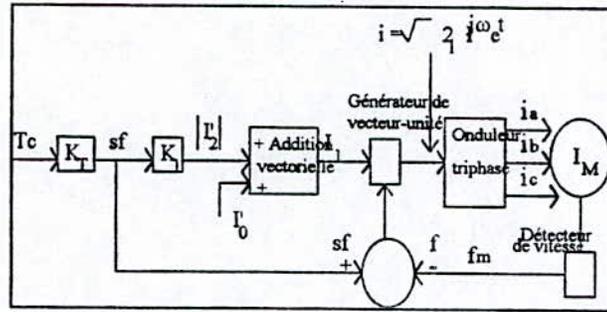


Figure - 21 Diagramme bloc de la commande FAM Type T-I ( commande en courant à l'entrée) du couple du moteur à induction.-

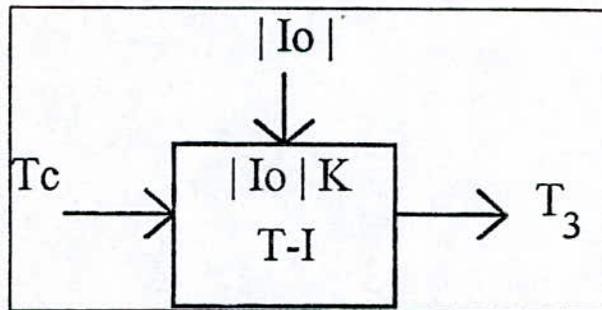


Fig. 22 - Fonction du transfert de la commande FAM en courant à l'entrée

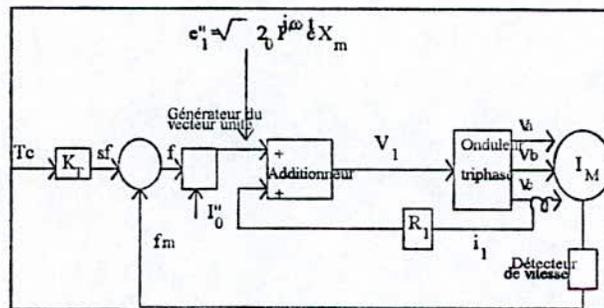


Figure 23- Diagramme bloc de la commande FAM type T- II ( commande en tension à l'entrée) du couple du moteur à induction.

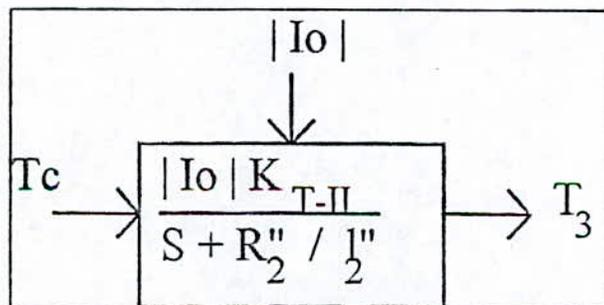
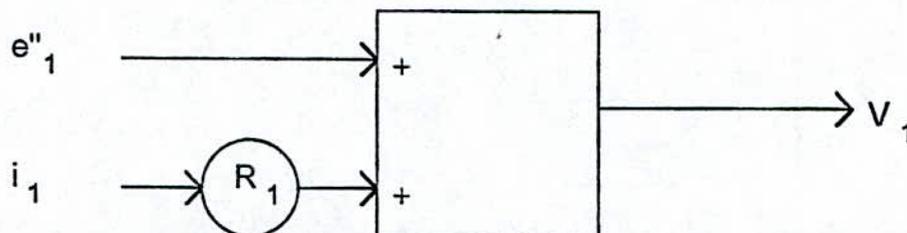


Figure 24 - Fonction de transfert de la commande FAM en tension à l'entrée.

Il y a un temps de retard, mais sa constante du temps  $L''_2/R''_2$  est très petite et donc ce temps de retard est très petit on déduit facilement que la commande FAM donne des fonctions de transfert excellentes pour la commande du couple du moteur à induction.

La figure 23 montre le diagramme bloc de la commande FAM type T-II (commande en tension) du moteur à induction basé sur les circuit équivalent type T-II .

En effet, l'équation (118) peut être calculer par le circuit analogue suivant :



Le courant statorique traversant la résistance  $R_1$  par alimentation de retour (Feed back) nous donne  $V_1$  .

## CONCLUSION:

- Comparaison entre la commande FAM en tension et la commande FAM en courant - (FAM : Field acceleration Method)

Pour la commande FAM du moteur à induction, le point essentiel est de garder le courant magnétisant constant. Ce courant est dépourvu du phénomène transitoire. Dans le cas de la commande FAM en courant, le courant statorique est l'entrée de la commande et est déterminé en se basant sur le circuit équivalent type T-I. Pour la commande en tension, l'entrée de la commande est la tension d'entrée déterminée sur la base du circuit équivalent type T-II.

La réponse de la commande est instantanée dans le cas de la commande en courant, contrairement à la commande en tension où la réponse du couple n'est plus instantanée. On peut conclure que la commande en courant est la meilleure de point de vue de rapidité de la réponse.

Cependant, si les calculs de la commande n'apportent aucune erreur dans la commande en courant, la réponse du couple contient un terme transitoire et le temps de retard n'est pas petit, parmi les nombreuses causes d'erreurs lors du calcul de la commande on peut citer celle de la variation de la température des enroulements qui peut avoir une grande influence non seulement sur la réponse transitoire mais aussi sur le fonctionnement en régime permanent.

C'est pourquoi, dans la plupart des cas on préfère la commande en tension car elle a une constante de temps très inférieure à celle de la commande en courant.

ANNEXE

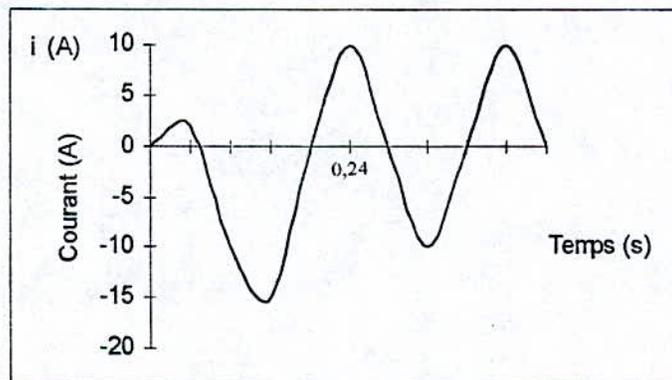
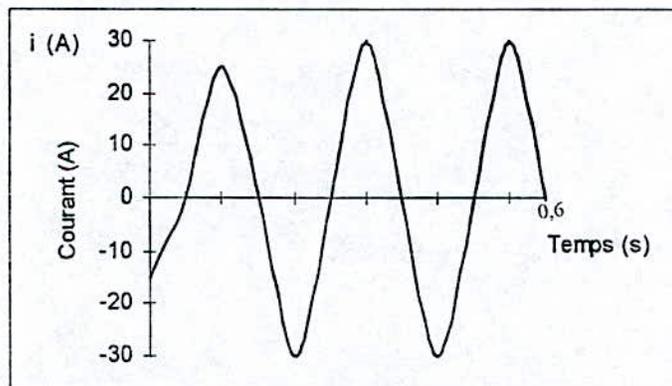
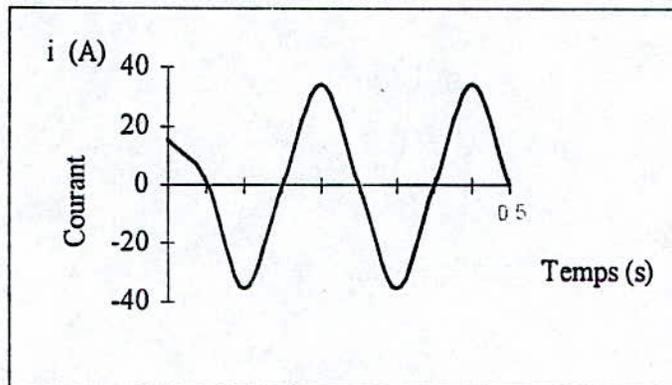
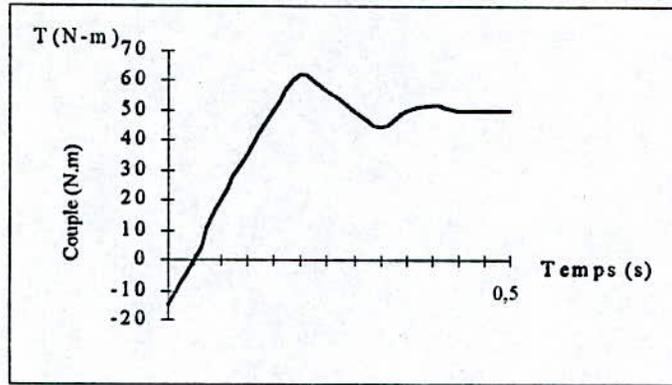


Figure 8 : Courbes de réponse de la commande en courant à l'entrée  
(Pas de courant initial)

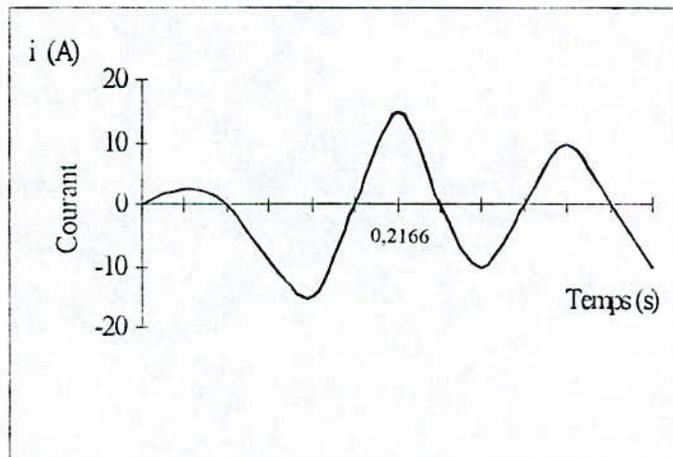
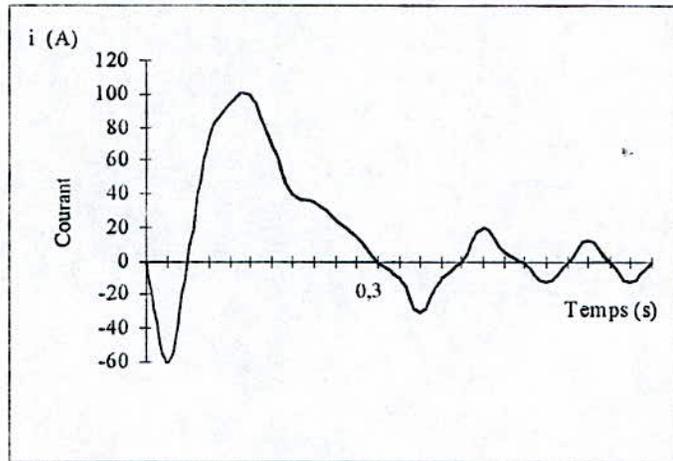
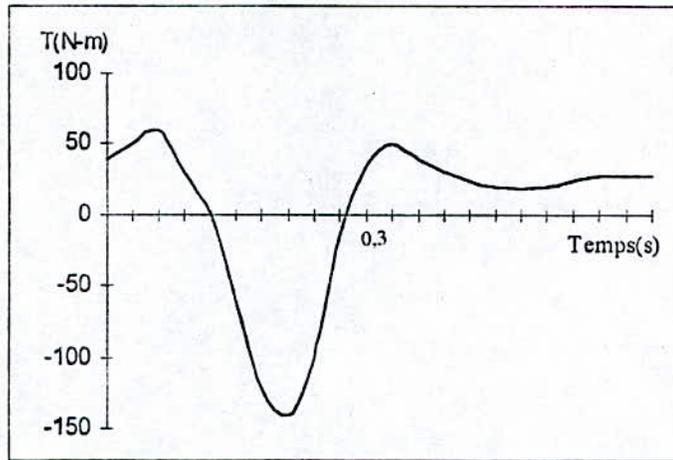


Figure 10 : Phénomène transitoire du moteur à induction

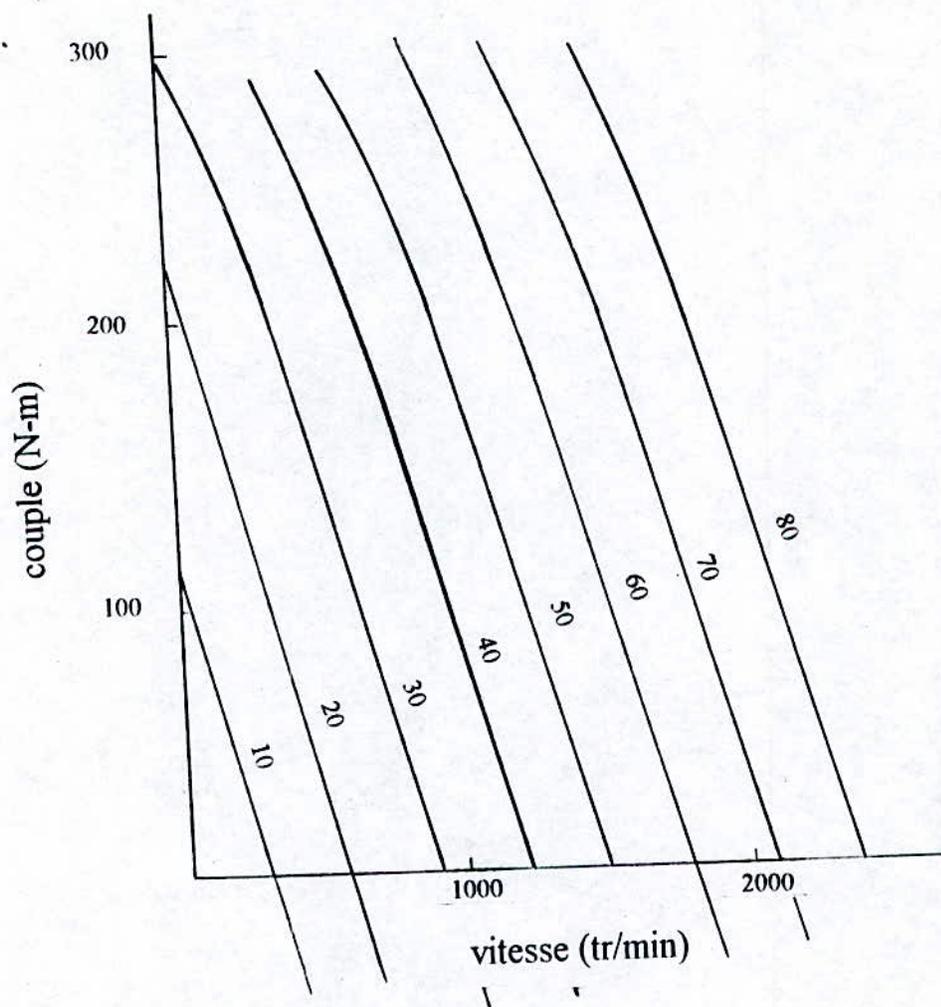


Figure (12) : Courbes couple-vitesse de la comande FAM type T du moteur à induction

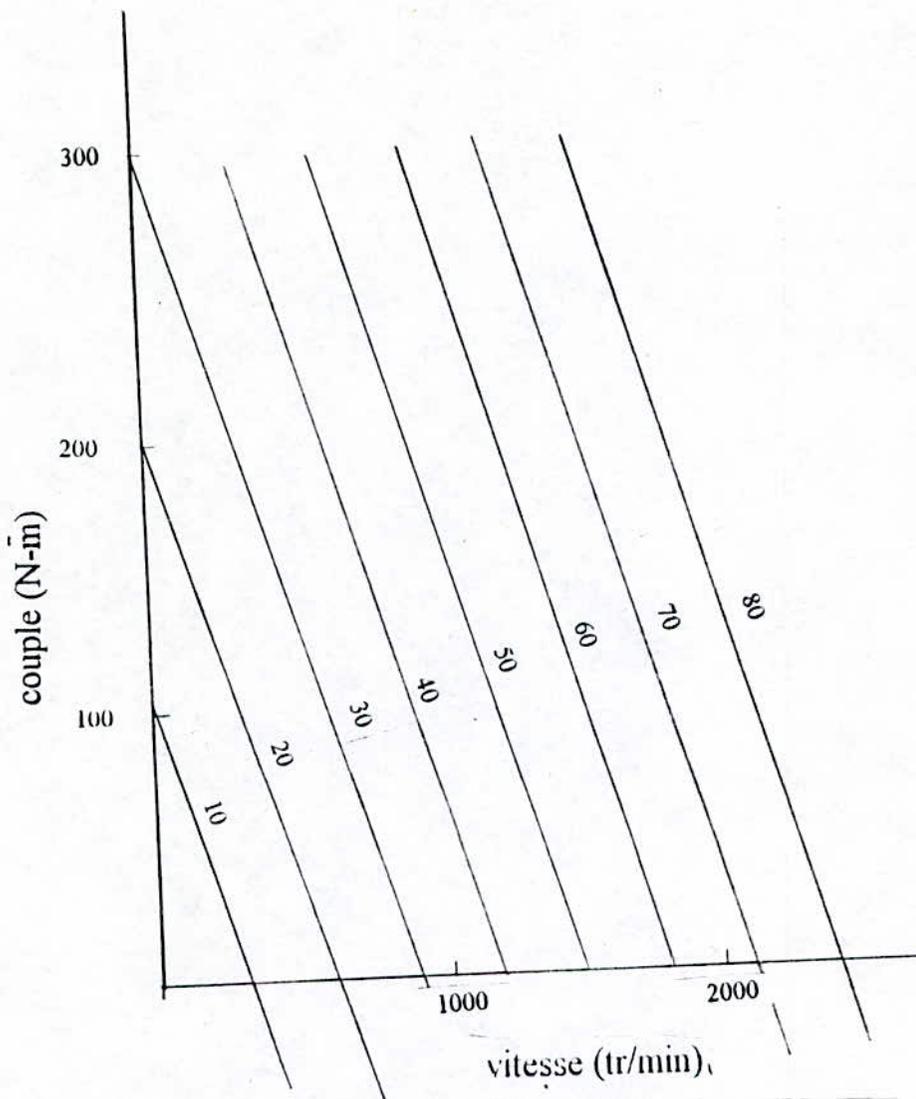
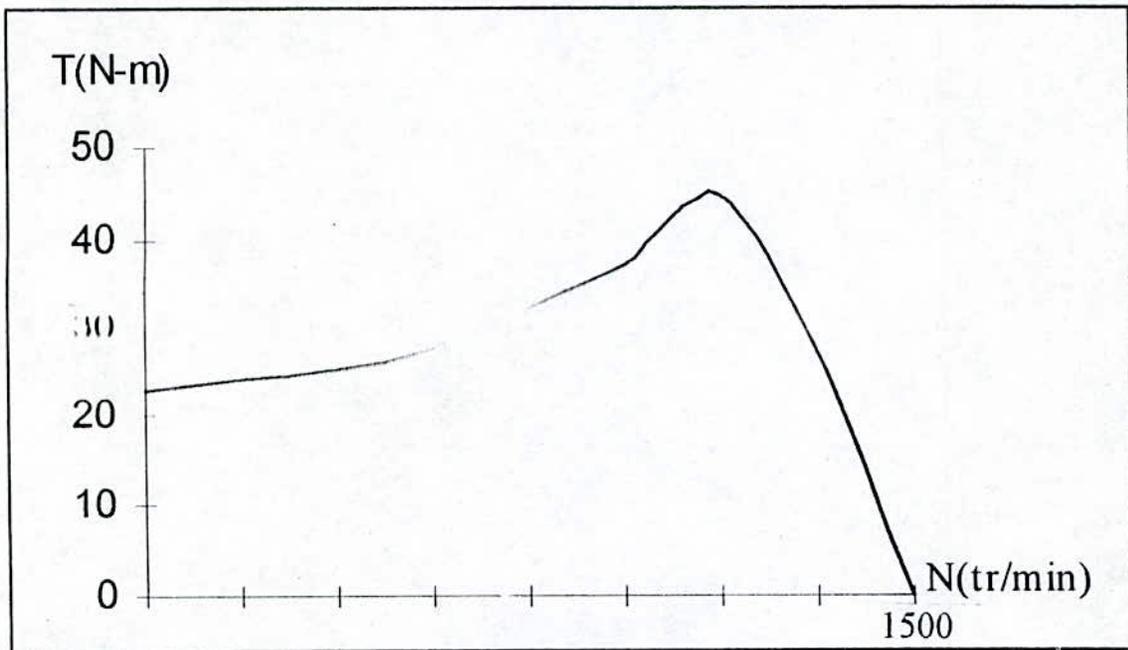


Figure (15) : Courbes couple-vitesse de la comande FAM type T-I du moteur à induction



Courbe couple-vitesse de la commande FAM Type T-I du moteur à induction

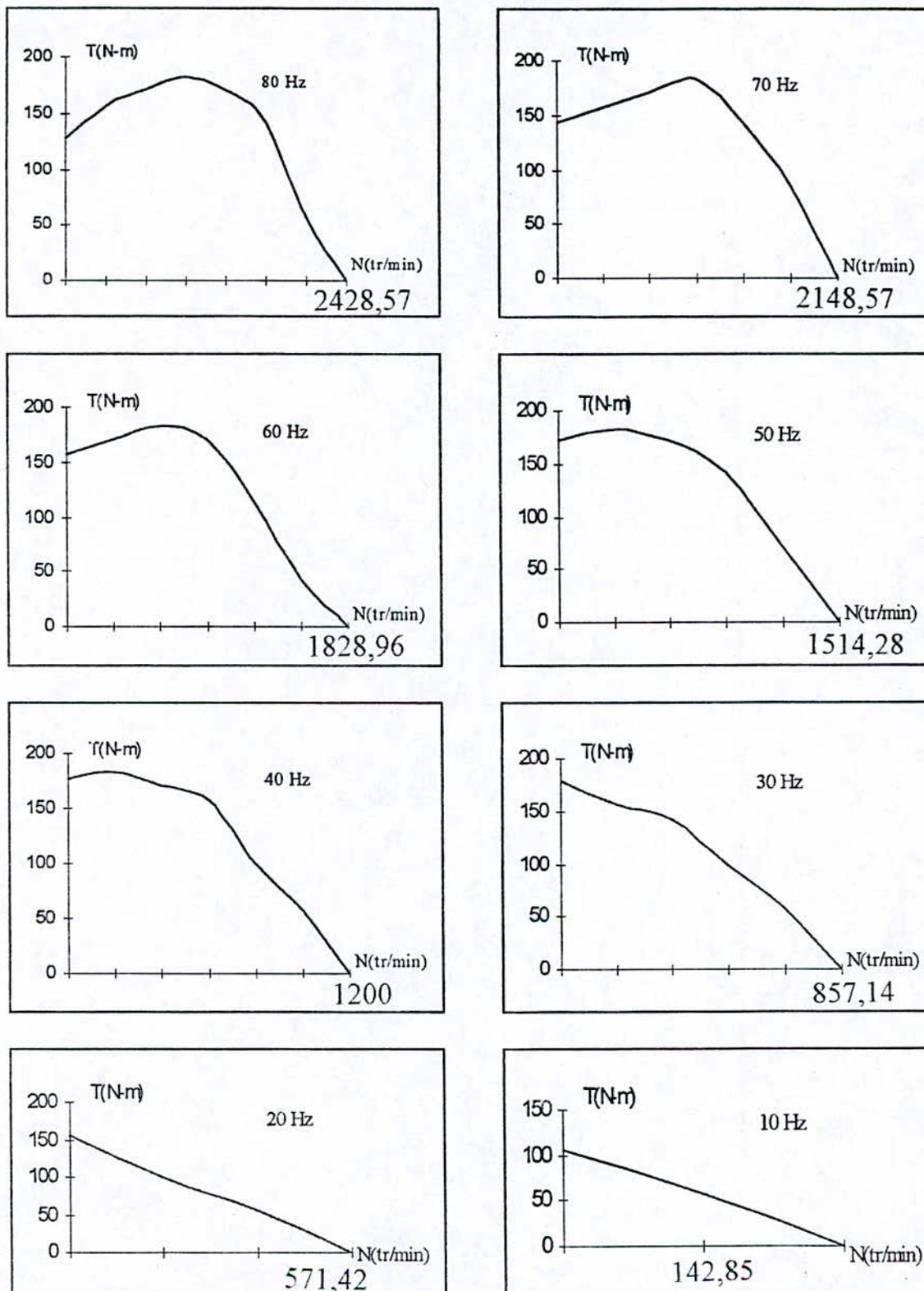


Figure (18) : Courbes couple-vitesse de la commande FAM Type T-II du moteur à induction

# BIBLIOGRAPHIE

1 - Spiral vector theory of ac motor analysis and control

Sakae Yamamura (1991)

2 - Spiral vector method and symmetrical component Method

Sakae Yamamura (1991)

3 - Spiral vector theory of electric circuit

Sakae Yamamura (1993)

4 - Ac motors for high performance application

- Analyses and control -

Sakae Yamamura (1986)

5 - Spiral vector theory of salient-pole synchronous machine

Sakae Yamamura (1992)

6 - On short - circuit currents of AC generator

S.Bekku (1927)