

U. S. T. H. B.

4/80
ECOLE NATIONALE
POLYTECHNIQUE

2 ex
DEPARTEMENT ELECTRICITE

FILIERE D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES



ETUDE ET REALISATION D'UNE MAQUETTE
DE SIMULATION DES SYSTEMES ASSERVIS
LINEAIRES ECHANTILLONNES



Proposé par : Mr. A. FARAH

(Ingenieur d'Etat)

ETUDIÉ PAR :

L. ASSAD

A. DZANOUNI

PROMOTION JUIN 1980



U. S. T. H. B.

ECOLE NATIONALE
POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ELECTRICITE

FILIERE D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

**ETUDE ET REALISATION D'UNE MAQUETTE
DE SIMULATION DES SYSTEMES ASSERVIS
LINEAIRES ECHANTILLONNES**

Proposé par : Mr. A. FARAH

(Ingenieur d'Etat)

ETUDIÉ PAR :

L. ASSAD

A. DZANOUNI

PROMOTION JUIN 1980

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

* شهد الله أنه لا إله إلا هو والملائكة وأولو العلم

قائما بالقسط لا إله إلا هو العزيز الحكيم *

صدق الله العظيم

D E D I C A C E

Je dédie ce memoire à mes Parents, à mes Frères, à tous mes amis
notamment : Abdelmadjid, SAAD, AMAR ET YOUSSEF.

ASSAD. L.

- A mes parents
- A mes Frères
- A tous mes amis.

DZANOUNI. A.

REMERCIEMENTS

Nos remerciements vont en premier lieu à notre promoteur Monsieur ~~XXX~~ H.FARAH qui nous a aidé tout au long de ce projet .

On remercie également tous les professeurs et assistants qui ont contribué, de près ou de loin, à l'enrichissement de nos connaissances qu'ils trouvent ici notre sincère gratitude .

P L A N

Introduction

page 1

Chap I : Théorie des systèmes asservis linéaires échantillonnés (p. 2).

I. A ETUDE THEORIQUE sur l'opération d'échantillonnage

I. A.1 l'échantillonnage

I. A.2 transformée de LAPLACE d'un signal échantillonné

I. A.3 spectre de fréquence d'un signal échantillonné

I. A.4 théorème de l'échantillonnage (Shannon)

I. A.5 reconstitution d'un signal échantillonné - Filtrés et bloqueurs

I. A.6 transformée en Z

I. A.7 transformée en Z modifiée

I. B. Analyse des systèmes asservis linéaires échantillonnés (p. 11).

I. B.1 transmittance pulsée :

I. B.2 transmittance pulsée modifiée

I. B.3 éléments échantillonnés en cascade

I. B.4 systèmes bouclés à échantillonnage

I. B.5 étude de la stabilité des systèmes échantillonnés

I. B.6 dynamique des systèmes échantillonnés

I. B.7 dilemme stabilité - précision

I. C. synthèse et correction des systèmes asservis linéaires échantillonnés

I. C.1 synthèse basées sur les diagrammes de BODE

I. C.2 méthode des deux pôles dominants (ZDAN).

I. C.3 synthèse basée sur les critères temporels

I. C.3.a système à temps de réponse fini - système minimal absolu

I. C.3.b système à réponse pile (ou plate)

I. C.4. correction des systèmes asservis linéaires échantillonnés

I. C.4.a correction analogique

I. C.4.b correction numérique

././.

Chapitre II. Simulation des équations algébriques et des fonctions de transfert. (p. 37)

- II. 1 Introduction à la simulation analogique
- II. 2 Symboles des éléments physiques
- II. 3 Simulation des équations algébriques
- II. 4 Simulation des fonctions de transfert

Chapitre III Conception de la maquette (p. 42)

- III. 1 Eléments physiques constituant le simulateur
- III. 2 Valeur des composants
- III. 3 Accessoires du simulateur
- III. 4 Circuit imprimé et coffret
- III. 5 Remarques sur la réalisation

Chapitre IV Manipulation (page 53)

- IV. 1 But
- IV. 2 Préparation
- IV. 3 Manipulations
- IV. 4 Résultats théoriques et expérimentaux
- IV. 5 Conclusion

I N T R O D U C T I O N

La tendance actuelle en automatisme consiste à introduire un calculateur numérique dans la commande des processus. Sous cette hypothèse, l'information ne peut être traitée de façon continue; pour être exploitable, elle doit subir un certain nombre d'opérations, échantillonnage, quantification, coxhage et multiplexage.

L'introduction de l'échantillonnage dans les boucles d'asservissements a nécessité l'utilisation de nouvelles méthodes d'analyse et de synthèse des systèmes gérés par ordinateurs.

On note en outre que la théorie de l'échantillonnage s'applique également aux télécommunications, au traitement automatique de l'information etc...

Notre travail consiste à faire :

-- Une approche théorique sur les systèmes asservis linéaires échantillonnés (S.A.L.E.) ainsi que les méthodes d'analyse, de synthèse et de correction en utilisant comme critère de performance la réponse pile.

-- Une description d'une méthode de simulation sur calculateur analogique.

-- Une conception et une réalisation d'un petit simulateur analogique destiné à illustrer le cours sur les S.A.L.E. , ce simulateur dispose d'un échantillonneur, d'un échantillonneur bloqueur ainsi que d'opérateurs analogiques pouvant simuler un 3^{ème} ordre.

I. A ETUDE THEORIQUE SUR L'OPERATION D'ECHANTILLONNAGE :

I. A. 1 L'échantillonnage

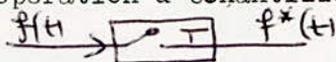
Une grandeur physique fonction du temps $f(t)$ peut être soit connue à un instant quelconque, soit être connue seulement à des instants généralement espacés régulièrement., dans ce cas la grandeur est connue par échantillons. Un système utilisant ce type d'information est un système à échantillonnage ou système pulsé. L'intervalle de temps T qui separe les echantillons est la periode d'échantillonnage. Mathematiquement cela peut se traduire comme une modulation d'amplitude d'un train d'impulsions de DIRAC $\delta_T(t)$ par le signal $f(t)$ qu'on note :

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) \quad (1) \quad (\text{voir fig I.1})$$

Où $f^*(t)$ est la fonction échantillonnée et

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \text{ avec } \delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = 0 \\ 0 & \text{si } \tau \neq 0 \end{cases}$$

On schematise l'operation d'échantillonnage par



En sachant que

$$\mathcal{L}[\delta(t - nT)] = e^{-nTp}$$

On déduit $\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(p) = f(0) + f(T)e^{-Tp} + \dots + f(nT)e^{-nTp}$

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTp} \quad (2)$$

La theorie des residus donne :

$$F^*(p) = \sum_{\substack{p_i \text{ poles} \\ \text{de } F^*(p)}} \text{residus de } \frac{F^*(p)}{1 - e^{-T(p - p_i)}} \Big|_{p=p_i} \quad (3)$$

N. B: Dans le cas particulier d'un échantillonnage non instantané, on considère que l'échantillonneur fournit des créneaux de période T et durée h . En appelant $F_h^*(p)$ la transformée de LAPLACE de $f^*(t)$, pour une durée $h \ll T$ on obtient :

$$F_h^*(p) = h F^*(p) \quad (4) \quad (\text{voir fig I.2})$$

grâce à la formule (4) tout système à échantillonnage non idéal est rendu idéal .

I. A. 2 Transformée de laplace d'un signal échantillonné

Un train d'impulsions $i(t)$ de période T de durée $\tau \ll T$ et d'amplitude unité peut être représenté par la serie de Fourier

$$i(t) = \frac{\tau}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega T}$$

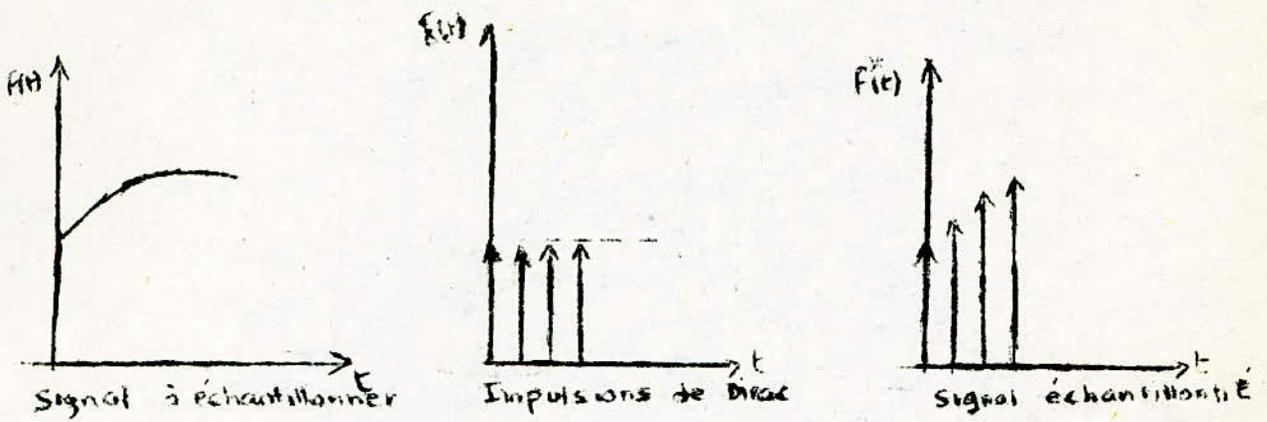


fig I. 1

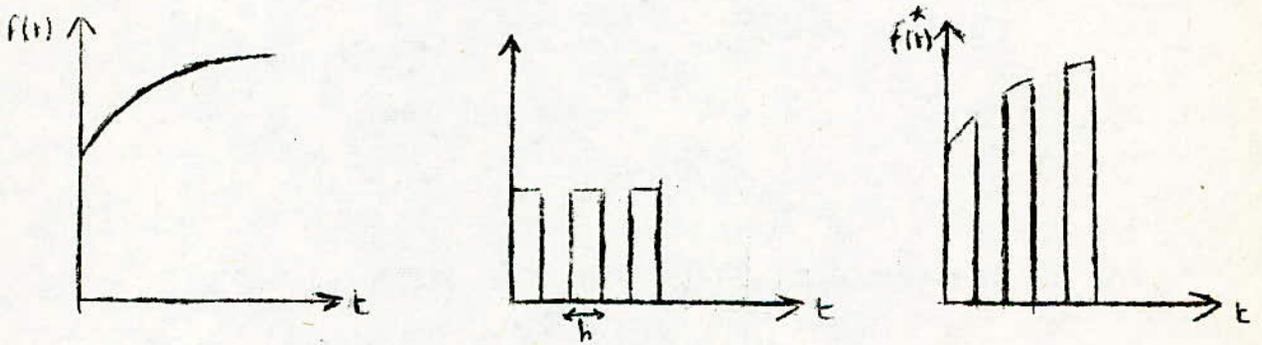


Fig I. 2

le signal échantillonné est donné par : $\tilde{f}(t) = i(t) f(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{jn\omega T}$

en utilisant le fait que $L[f(t)] = F(p)$ entraîne

$$L[e^{at} f(t)] = F(p-a)$$

on a :

$$L[e^{jn\omega t} f(t)] = F(p-jn\omega)$$

Par suite :

$$\tilde{F}(p) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(p-jn\omega)$$

en faisant apparaître la fonction d'échantillonnage $F^*(p) = \frac{\tilde{F}}{T}$ et en remarquant qu'on peut changer n en $-n$

$$F^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(p+jn\omega) \quad (5)$$

I. A.3 Spectre de fréquence d'un signal échantillonné

La relation (5) montre que la spectre de fréquence $F^*(j\omega)$ de $f^*(t)$ s'étale jusqu'à l'infini. Il est obtenu en faisant subir des translations de $\frac{2\pi}{T}$, au spectre $F(j\omega)$ et en effectuant la somme vectorielle. on considère deux cas :

- cas où la pulsation maximale ω_M du spectre $F(j\omega)$ de $f(t)$ est inférieure à $\frac{\pi}{T}$ (voir fig I. 3)
- cas où $\omega_M > \frac{\pi}{T}$ (voir fig I. 4)

Dans ce deuxième cas au lieu d'avoir la courbe (a) on a la courbe (b) donc si $\omega_M > \frac{\pi}{T}$ on a une déformation du spectre .

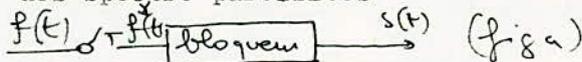
I. A.4 Théorème d'échantillonnage (Shannon)

Les (fig I. 3) et (fig I.4) montrent que pour reconstituer $f(t)$ à partir des échantillons à la fréquence $\frac{1}{T}$, il est nécessaire que ω_M soit inférieur à $\frac{\pi}{T}$. Autrement dit, il est nécessaire que la fréquence d'échantillonnage soit au moins égale à deux fois la plus grande fréquence contenue dans le spectre de $f(t)$.

I. A.5 reconstitution d'un signal échantillonné .

- Filtres et bloqueurs .

Du théorème de Shannon il résulte que toute opération d'échantillonnage doit dans la mesure du possible être suivie d'une opération de filtrage afin d'éliminer des spectre parasites



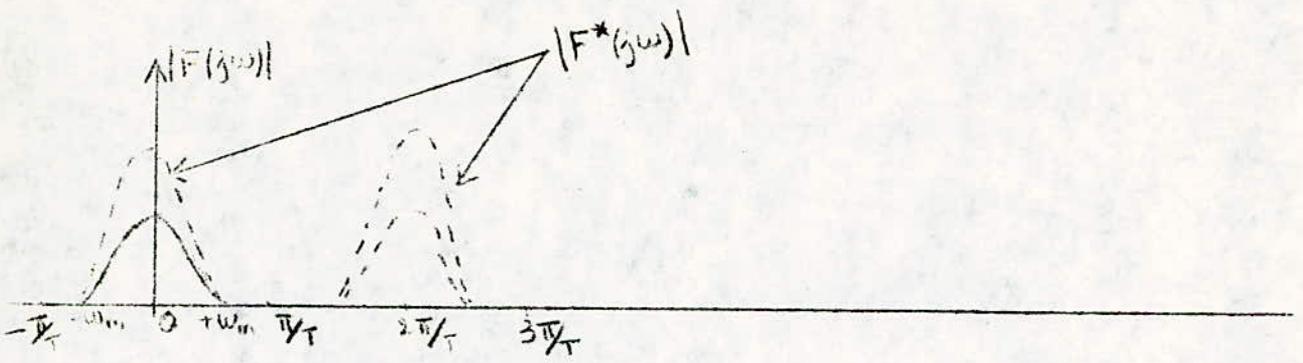


fig I 3

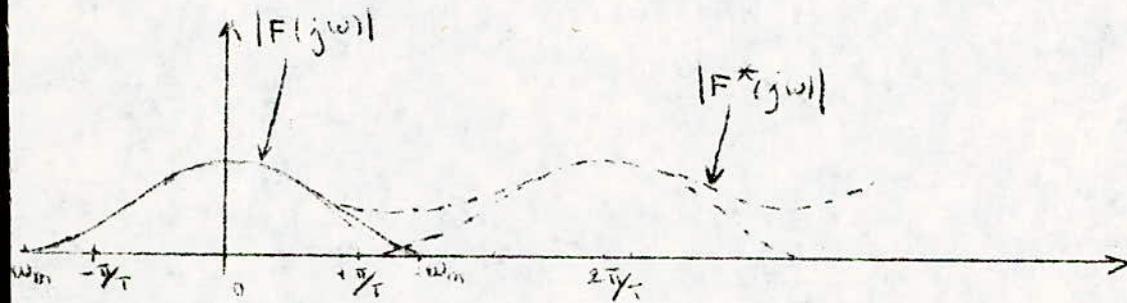


fig I 4

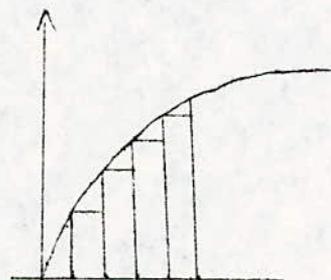
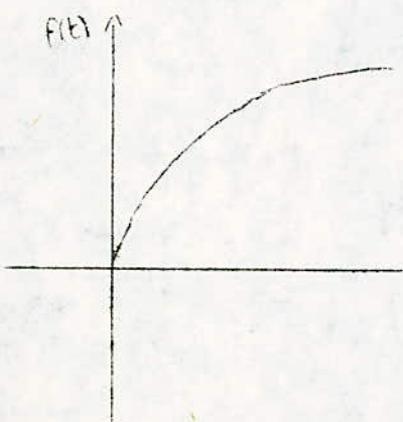


fig I 5

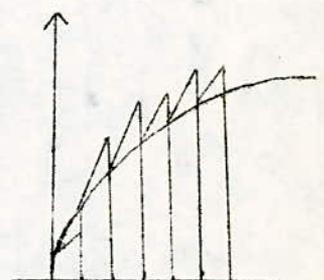


fig I 6

Pour les systèmes échantillonnés ^{des} filtres spéciaux appelés extrapolateurs ou bloqueurs vont effectuer l'opération de filtrage.

Il sont basés sur le développement de TAYLOR de $f(t)$ ou voisinage de $t = nT$

$$f(nT + \tau) = f(nT) + \frac{\tau}{T} [f(nT) - f[(n-1)T]] + \frac{\tau^2}{2!T^2} [f(nT) - 2f[(n-1)T] + f[(n-2)T]]$$

Les filtres principaux sont :

- bloqueur d'ordre zéro $B_0(p)$ (voir fig I. 5)

$$s(t) = f(nT + \tau) \approx f(nT) \quad nT < t < (n+1)T$$

Une impulsion unitaire appliquée à l'entrée de la fig. a donné la sortie représentée (fig b)

$$L[s(t)] = L[s(t)] \cdot B_0(p) \quad \text{avec} \quad L[s(t)] = \frac{1}{p} - \frac{e^{-Tp}}{p}$$

d'où $B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \quad (6)$



- bloqueur d'ordre un $B_1(p)$

$$f(nT + \tau) = f(nT) + \frac{\tau}{T} [f(nT) - f[(n-1)T]]$$

$$B_1(p) = T \left[\frac{1 - e^{-Tp}}{Tp} \right]^2 (1 + Tp) \quad (7) \quad (\text{voir fig I. 6})$$

Les bloqueurs d'ordre élevé sont difficiles à réaliser.

Le bloqueur d'ordre zéro est de loin le plus utilisé.

Caractéristiques fréquentielles de $B_0(p)$

En posant $p = j\omega$ dans la formule (6)

Un calcul simple donne $B_0(j\omega) = T \frac{e^{-0,5jT\omega} \sin 0,5T\omega}{0,5T\omega}$

- le gain $|B_0(j\omega)| = T \frac{\sin 0,5T\omega}{0,5T\omega} \quad (8)$

- la phase $\text{Arg } B_0(j\omega) = -0,5T\omega \quad (9)$

- courbes (voir fig I. 7)

I. A.6 Transformée en Z

Pour simplifier l'expression des fonctions d'échantillonnage on pose

$$z = e^{pT}$$

d'après la formule (2) on a

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (10)$$

d'après la formule (3) on a

$$F(z) = \sum_{\substack{p_i \text{ pôles} \\ \text{de } F(p)}} \text{residus de } \frac{F(p)}{1 - e^{-pT} z^{-1}} \Big|_{p=p_i} \quad (11)$$

posons

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

- Pour les pôles simples, le résidu Ω_i correspondant à p_i est :

$$\Omega_i = \frac{N(p_i)}{\frac{d}{dy} [D(y) [1 - e^{yT} z^{-1}]]_{y=p_i}} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i) [1 - e^{p_i T} z^{-1}]} \quad (12)$$

- Pour les pôles multiples d'ordre n

$$\Omega_i = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left((y - p_i)^n \frac{F(y)}{1 - e^{yT} z^{-1}} \right) \right]_{y=p_i} \quad (13)$$

I. A.6.1 Transformées en Z de $u(t)$, $\delta(t)$ et e^{-at}

a) échelon unité $u(t)$

$$u^*(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \dots + \delta(t-nT) + \dots$$

$$u^*(p) = 1 + e^{-Tp} + \dots + e^{-nTp} + \dots$$

$$u^*(z) = 1 + 1/z + \dots$$

cette série converge si $|z| > 1$ c.à.d. $|e^{Tp}| > 1$

or $p = \alpha + j\beta \Rightarrow |e^{Tp}| = e^{T\alpha}$, la série converge si $\alpha > 0$

donc la somme est :
$$u(z) = \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{z}{z-1}$$

b) impulsion de Dirac $\delta(t)$

$$\delta(t) \Rightarrow \Delta(p) = 1 \Rightarrow \Delta(z) = 1$$

c) exponentielle e^{-at}

$$f(t) = e^{-at}$$

$$F^*(z) = 1 + e^{-at}/z + e^{-2at}/z^2 + \dots + e^{-nat}/z^n$$

la série converge si $|ze^{at}| > 1$

$$p = \alpha + j\beta \quad e^{(\alpha+a)T} > 0 \Rightarrow \alpha > -a$$

on a
$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Pour les autres fonctions voir tableau page 63

I. A.6.2 Propriétés de la transformée en Z

- linéarité $Z[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 Z(f_1) + \lambda_2 Z(f_2)$

- translations temporelle

retard $Z[f(t - kT)] = z^{-k} F(z)$

avance $Z[f(t + kT)] = z^k F(z) - z^k f(0) - z^{k-1} f(T) + \dots - z f[(k-1)T]$

- translation complexe $Z[F(p+a)] = Z[e^{-at} f(t)] = F(ze^{aT})$

- multiplication par t^k : $Z[t^k f(t)] = -Tz \frac{d}{dz} Z[t^{k-1} f(t)]$

- théorème de la valeur initiale $\lim_{n \rightarrow 0} f(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$

- théorème de la valeur finale : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$

- théorème de la sommation : $Z \sum_{k=0}^n f(kT) = \frac{z}{z-1} F(z)$

- théorème de convolution discrète

$$F_1(z) \cdot F_2(z) = Z \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) \cdot f_2[(n-k)T] \right]$$

• inversion de la transformée en Z

Souvent dans les problèmes on connaît la transformée en Z, des signaux, et il convient de déduire $f(nT)$

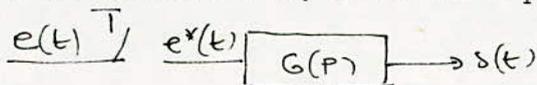
- Développement en série : les valeurs de $f(nT)$ sont les coefficients de z^{-n} lors du développement en série de $F(z)$.

- Méthodes des résidus $f(nT) = \sum_{p_i} (\text{résidus de } z^{-n-1} F(z))_{z=p_i}$
- Division suivant les puissances croissantes de z^{-1}
- Méthodes des fractions rationnelles.

On décompose la transformée en Z en fractions simples et on cherche l'original de chaque terme en z^{-1} : $F(z) = \frac{A}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{B}{1-\beta z^{-1}} \Rightarrow f(nT) = A\alpha^n + B\beta^n$

I. A.7 Transformée en Z modifiée

Supposons un système de transmittance $G(P)$ commandé par un signal $e(t)$ échantillonné :



Un tel système est peu commode à étudier à cause de la présence de deux structures différentes, entrée échantillonnée et sortie continue. On préfère discretiser complètement le système en observant la sortie par l'intermédiaire d'un échantillonneur fictif synchrone du premier.

Afin de récupérer toute l'information entre les instants d'échantillonnage, on introduit un retard fictif λT ($0 < \lambda < 1$) devant l'échantillonneur fictif précédent : (voir fig I. 8) en faisant varier λ , on observe le signal $s(t)$ à tout instant. La transformée en Z du signal retardé $s(t - \lambda T)$

s'écrit

$$Z[s(t - \lambda T)] = \sum_{n=0}^{\infty} s[(n - \lambda)T] z^{-n} \quad (14)$$

$$Z[s(t - \lambda T)] = \sum_{v=p_i} \text{résidus de } \frac{s(v) e^{-\lambda T v}}{1 - e^{-T v} z^{-1}} \Big|_{v=p_i} \quad (15)$$

on pose $\lambda = 1 - m$

on obtient finalement les deux expressions :

$$S(z, m) = Z[s(t - \lambda T)] = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} s[(n + m)T] z^{-n} \quad (16)$$

et

$$S(z, m) = Z[s(t - \lambda T)] = z^{-1} \sum_{p_i} \text{résidus de } \frac{s(v) e^{m T v}}{1 - e^{-T v} z^{-1}} \Big|_{v=p_i} \quad (17)$$

I. A.7.1 Propriétés de la transformée en Z modifiée

- linéarité $Z_m[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 F_1(z, m) + k_2 F_2(z, m)$

- théorème de la valeur initiale

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(n+m)T = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z, m)$$

- théorème de la valeur finale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n+m)T = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z, m)$$

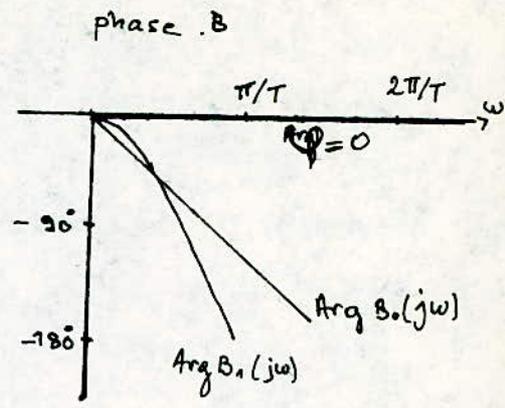
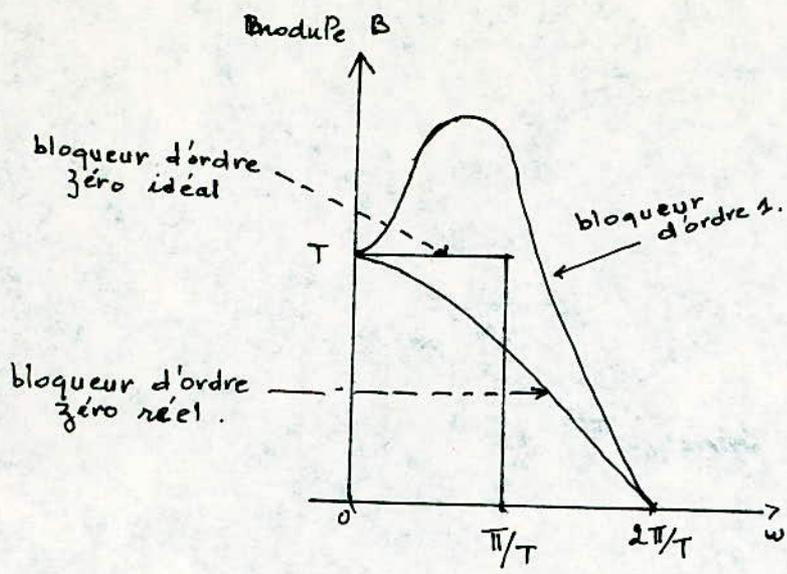


Fig. I. 7

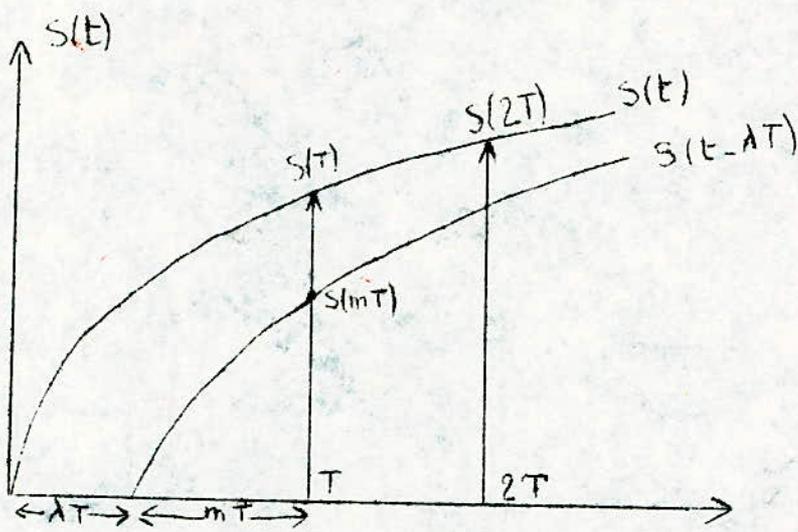


Fig I. 8

- Relation entre la transformée en Z et la transformée en Z modifiée

$$S(z) = \lim_{m \rightarrow 0} z [S(z, m)] = \lim_{m \rightarrow 1} S(z, m) + S(0)$$

I. A.7.2 Inversion de la transformée en Z modifiée

- méthode des résidus $S[(n-1+m)T] = \sum_{p_i} \text{residus de } S(z, m) z^{n-1}$
- division suivant les puissances croissantes de z^{-1} s'effectue lorsque $S(z, m)$ est sous forme d'une fonction rationnelle.
- méthode des fonctions rationnelles .

Remarques sur ce chapitre .

Il existe d'autres méthodes pour étudier les systèmes discrets :

- méthodes des matrices temporelles
- méthodes des variables d'état (plus générale)

/.

I.B. Analyse des systèmes asservis linéaires échantillonnés

I.B.1 - Transmittance pulsée

Pour analyser un système comportant un ou plusieurs échantillonneurs de Dirac, on discretise la sortie au moyen d'un échantillonneur fictif. Voir fig. II 1.

La transmittance pulsée est définie comme étant

$$G^*(P) = \frac{S^*(P)}{E^*(P)} \quad \text{ou} \quad G(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

$$S(z) = G(z) \cdot E(z) \quad (16)$$

I. B.2 - Transmittance pulsée modifiée.

D'après la figure I.9 on montre que $G(z, m) = \frac{S(z, m)}{E(z)}$

$$S(z, m) = E(z) \cdot G(z, m) \quad (17)$$

I.B.3 - Eléments échantillonnés en cascade

En utilisant les règles de composition en cascade des fonctions de transfert, on résoud les différents cas comme indiqué ci-après :

$$S(P) = H(P) \cdot E(P)$$

$$S(P) = H(P) \cdot E^*(P)$$

$$S^*(P) = H^*(P) \cdot E^*(P) \quad \text{ou} \quad S(z) = H(z) \cdot E(z)$$

voir fig II.10 dans l'ordre

$$S^*(P) = [H(P) \cdot E(P)]^* \quad \text{ou} \quad S(z) = \overline{HE}(z)$$

$$S(P) = H_1(P) \cdot H_2(P) \cdot E(P)$$

$$S(P) = H_1(P) \cdot H_2(P) \cdot E^*(P)$$

$$S^*(P) = [H_1(P) \cdot H_2(P)]^* \cdot E^*(P) \quad \text{ou} \quad G(z) = \overline{H_1 H_2}(z) \cdot E(z)$$

$$S^*(P) = H_1^*(P) \cdot H_2^*(P) \cdot E(P) \quad \text{ou} \quad S(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot \bar{E}(z)$$

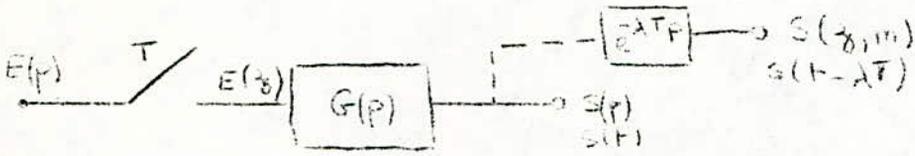


Fig I. 9

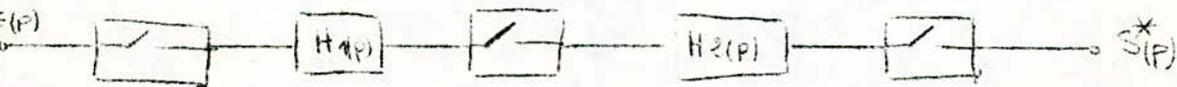
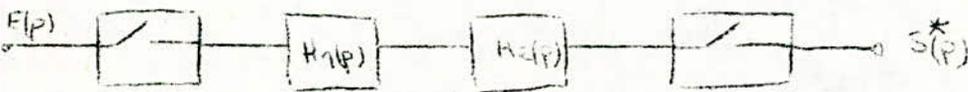
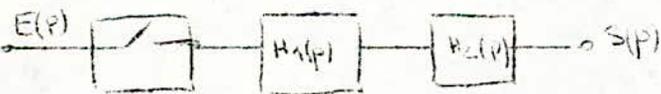
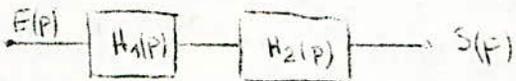
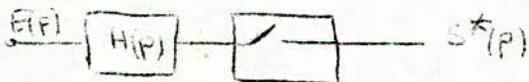
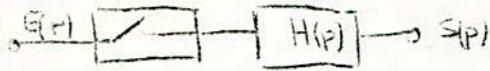


Fig I. 10

I.B.4 Systèmes bouclés à échantillonnage

On considère les 2 cas suivants:

1° - cas voir fig I. 11

$$E = E^* - E^* G \beta$$

$$E^* = E^* - E^* (G \beta)^*$$

l'erreur échantillonnée est $E^*(P) = \frac{E^*(P)}{1 + (G \beta)^*(P)}$ ou $E(z) = \frac{E(z)}{1 + G \beta(z)}$

la fonction de transfert est $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1 + G \beta(z)}$

2° cas voir fig I. 12

l'erreur échantillonnée $E^* = E^* - \beta^* E^* G^*$

$$E^*(P) = \frac{E^*(P)}{1 + G^*(P) \beta^*(P)} \text{ ou } E(z) = \frac{E(z)}{1 + G(z) \beta(z)}$$

la fonction de transfert est

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z) \beta(z)}$$

N.B. $\overline{G \beta}(z) \neq G(z) \cdot \beta(z)$ (18)

I.B.5 Etude de la stabilité des systèmes échantillonnés

Un système échantillonné linéaire est stable s'il la suite d'impulsions à sa sortie reste bornée en réponse à une suite bornée à son entrée.

Inversement un système échantillonné est instable si la suite d'impulsions à sa sortie ne reste pas bornée en réponse à une suite bornée à son entrée.

Soit $G(z)$ la fonction de transfert d'un système (\dots) .

$$S(z) = G(z) \cdot E(z)$$

$$\text{on pose } G(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

les pôles de $E(z)$ caractérisent le régime permanent; les racines de $B(z) = 0$ caractérisent le régime transitoire. Seul $B(z)$ nous intéresse pour l'étude de la stabilité.

si α_i sont ces racines supposées simples, réelles ou complexes, l'expression de la sortie (pour $E(z) = 0$) aux instants d'échantillonnage

$$s(nT) = \sum c_i \alpha_i^n$$

Ce signal tendra vers l'état d'équilibre zéro si tous les α_i ont leur module inférieur à 1.

La condition générale de stabilité est donc que toutes les racines de l'équation caractéristique, c'est-à-dire les pôles de $G(z)$ soient situés à l'intérieur du cercle unité du plan z (voir fig I.13)

I B.5.1 Critères algébrique de stabilité.

I B.5.1 a Critère de Routh - HURWITZ.

Ce critère permet de savoir si toutes les racines d'une équation polynomiale sont à partie réelle négative.

$$F(p) = \beta_n p^n + \dots + \beta_1 p + \beta_0 = 0$$

Formons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \beta_{n-1} & \beta_n & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{n-3} & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} & \beta_n & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{n-5} & \beta_{n-4} & \beta_{n-3} & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$F(p) = 0$ a toutes ses racines à partie réelle négative si :

- 1°) tous les $\beta_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
- 2°) tous les mineurs $\Delta_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

$$\Delta_1 = \beta_{n-1} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_{n-1} & \beta_n \\ \beta_{n-3} & \beta_{n-2} \end{vmatrix} \quad \text{etc} \dots$$

Lorsqu'il s'agit d'une transmittance en z l'application de ce critère n'est pas possible; On utilise alors une transformation homographique en w qui fait corespondre à l'intérieur du cercle unité dans le plan z , le demi-plan de gauche du plan W (voir fig I.14)

exemple : soit $F(z) = z^2 + \alpha z + \beta = 0$

on pose $z = \frac{1+w}{1-w} \Rightarrow$

$$F(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \alpha \left(\frac{1+w}{1-w}\right) + \beta = 0 = \frac{N(w)}{D(w)}$$

AVEC $N(w) = w^2(1-\alpha+\beta) + 2w(1-\beta) + 1+\alpha+\beta = 0$
 $= w^2 \beta_2 + w \beta_1 + \beta_0 = 0$

Formons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_0 \end{vmatrix} \quad 1^\circ) \beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$$

$$2^\circ) \Delta_1 = \beta_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \beta_1 \beta_0 > 0$$

donc il suffit que

$$\begin{vmatrix} \beta_0 = 1 + \alpha + \beta > 0 \\ \beta_1 = 2(1 - \beta) > 0 \\ \beta_2 = 1 - \alpha + \beta > 0 \end{vmatrix}$$

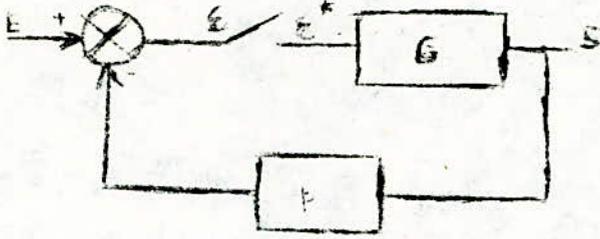


Fig I-11

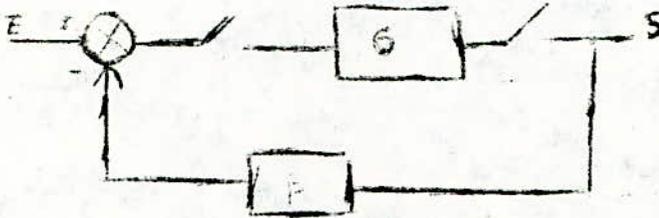


Fig I-12

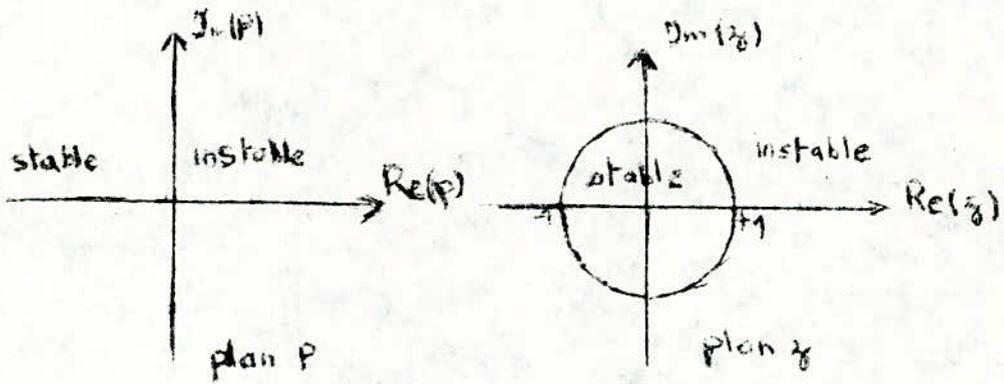
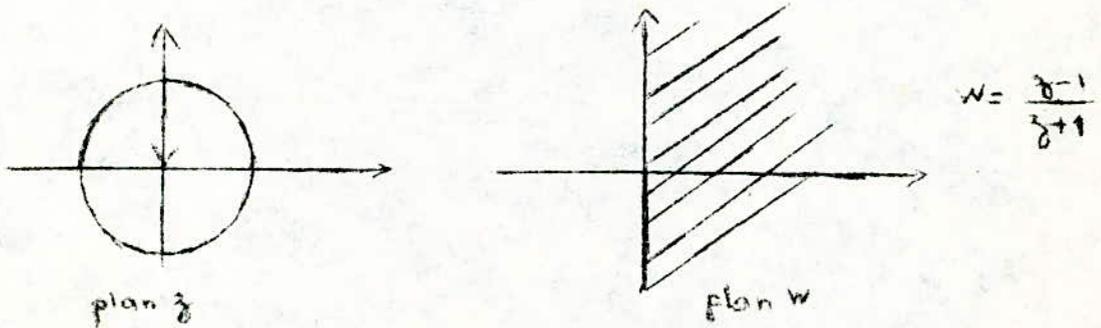


Fig I-13



I B.5.1. b Critère de Schur-Cohn

Ce critère permet de savoir si l'équation à coefficients complexes $B(z) = \sum_{l=0}^n b_l z^l = 0$ a ses racines inférieures à 1 en module.

Pour cela on construit les n déterminants suivants

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_n & b_{n-1} & \dots & b_{n-k+1} \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & b_n & \dots & b_{n-k+2} \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & b_{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & b_0 & 0 & | & 0 & \dots & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \bar{b}_n & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \bar{b}_0 & \bar{b}_1 & \dots & \bar{b}_{k-1} \\ \bar{b}_{n-1} & \bar{b}_n & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \bar{b}_0 & \dots & \bar{b}_{k-2} \\ \bar{b}_{n-2} & \bar{b}_{n-1} & \bar{b}_n & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & \bar{b}_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b}_{n-k+1} & \bar{b}_{n-k+2} & \dots & \bar{b}_n & 0 & | & 0 & 0 & \dots & \bar{b}_0 \end{vmatrix}$$

AVEC $k=1, 2, \dots, n-1$ $\bar{b}_k = c_{k-j} \ominus k$

critère de schur-cohn

$B(z) = 0$ a ses racines inférieures à 1 en module si

$\Delta_k < 0$ pour k impair

$\Delta_k > 0$ pour k pair

exemple : prenons l'exemple précédent .

$F(z) = z^2 + \alpha z + \beta$ α et β réels

$k=1$ $b_{k-1} = b_0 = \beta$
 $n=2$ $b_{n-k+1} = b_2 = 1$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{b_0}{b_2} & \frac{b_2}{b_0} \\ \frac{b_2}{b_0} & \frac{b_0}{b_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 - 1 < 0$$

$0 < \beta < 1$

$\alpha > 0$
 $\beta > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \beta & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 & \beta \end{vmatrix} = (\beta-1)^2 \left[(\beta+1)^2 - \alpha^2 \right] > 0$$

$$\Rightarrow (\beta+1)^2 - \alpha^2 > 0$$

$\Rightarrow (\beta+1-\alpha)(\beta+1+\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha + \beta + 1 > 0$ car $\alpha, \beta > 0$

$\Rightarrow \beta + 1 - \alpha > 0$ on retrouve les relations

de l'exemple précédent .

I B.5.2 Critère géométriques de stabilité .

I B.5.2 a. Application du critère de NYQUIST dans le plan z.

On montre que l'équivalent du contour Γ utilisé lors du critère de NYQUIST continu (l'axe imaginaire) est constitué dans le plan des z par le cercle de rayon unité et le cercle de rayon infini (voir fig I.15); la seule contribution effective de ce contour aux variation étant due au cercle de rayon unité car elle est nulle pour le cercle de rayon infini où $|G(z)|=0$, nulle pour BC et AD.

Il convient de tracer le lieu en boucle ouverte $\overline{GH}(z) = K(z)$ pour $z = e^{j\omega T}$ et de raisonner de façon analogue au cas continu (nombre de tours par rapport au point - 1) .

Un système ~~discret~~ linéaire est stable si la courbe $K^*(j\omega)$ de la transmittance en boucle ouverte du système; tracée dans le plan complexe présente un tracé tel que le point $-1 + 0j$ soit situé à gauche de cette courbe quand on la parcourt en faisant varier ω de 0 à 2π

En pratique on se contente de faire varier de 0 à π la courbe $K^*(j\omega)$ étant symétrique par rapport à l'axe réel. (voir fig I.16. a,b,c,d).

I B.5.2.b. Application du critère de Nyquist dans le plan p.

on utilise la relation :

$$\overline{GH}^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{GH}(p + jn\omega_T)$$

on peut raisonner sur $\overline{GH}^*(p)$ et tracer $\overline{GH}^*(j\omega)$

avec ω_T : pulsation d'échantillonnage

ω : pulsation analysée .

$$T \overline{GH}^*(j\omega) = \overline{GH}(j\omega) + \overline{GH}(j\omega - \omega_T) + \dots + \overline{GH}(j\omega - k\omega_T) + \dots + \overline{GH}(j\omega + \omega_T) + \dots + \overline{GH}(j\omega + k\omega_T) + \dots$$

la construction graphique du lieu $T \overline{GH}^*(j\omega)$ s'effectue à partir du lieu $\overline{GH}(j\omega)$ pour ω variant de 0 (point réel ou infini) à $\omega_T/2$ (point réel)

I B.5.2.c Critère d'Evans (lieu des racines)

Considérons le système asservi échantillonné de la fig.I. 17

L'équation caractéristique de ce système est :

$$B(z) = 1 + K G_1(z) = 0$$

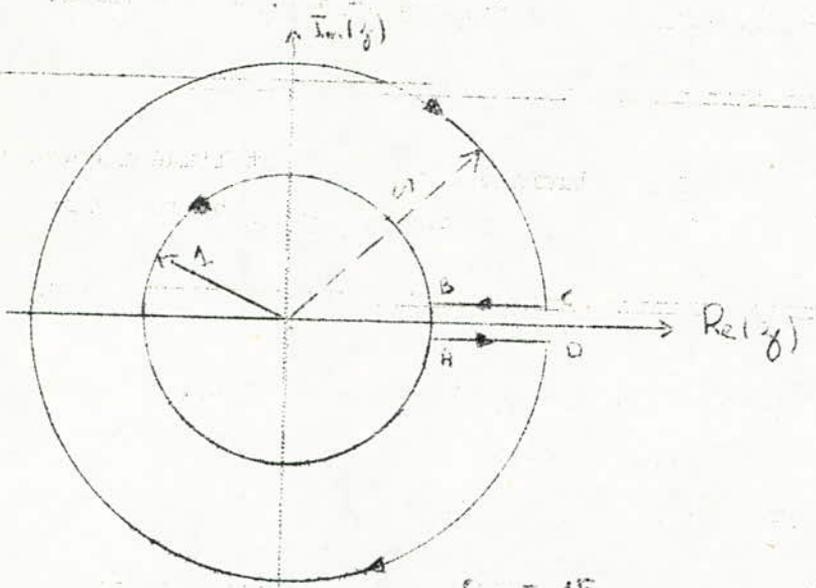


Fig I 15

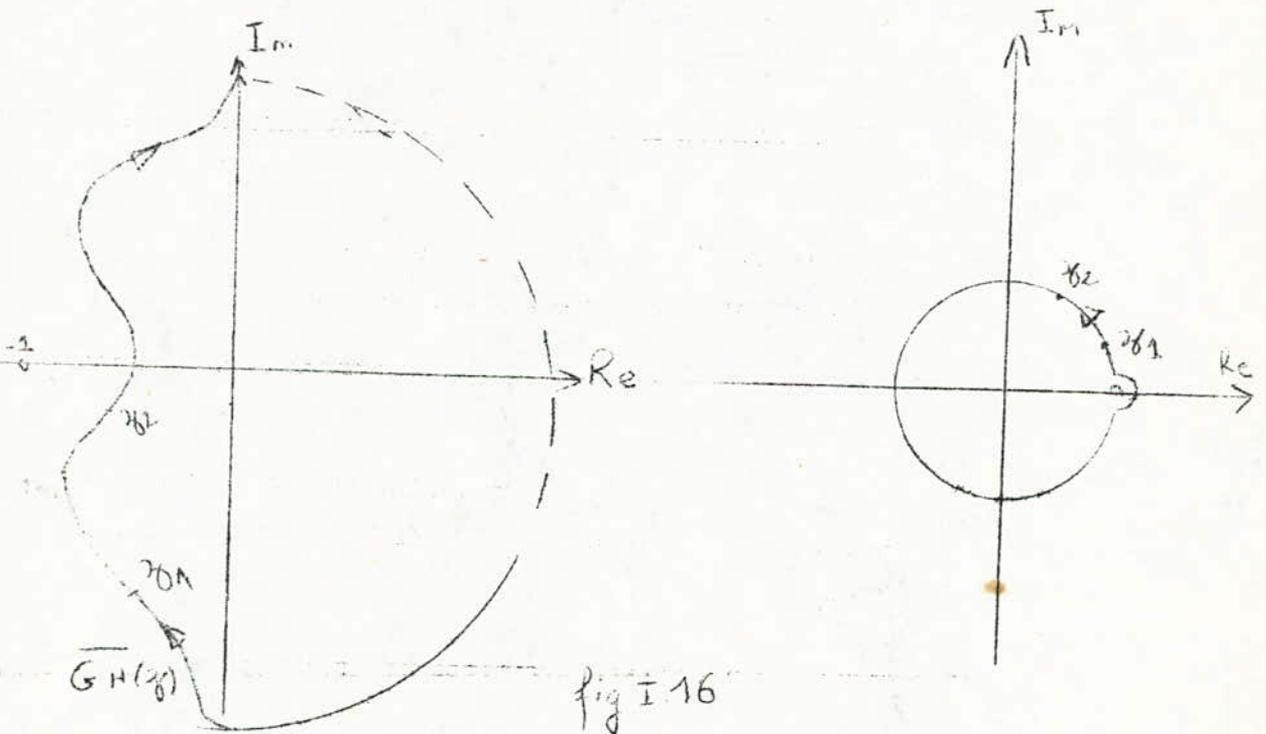


Fig I 16

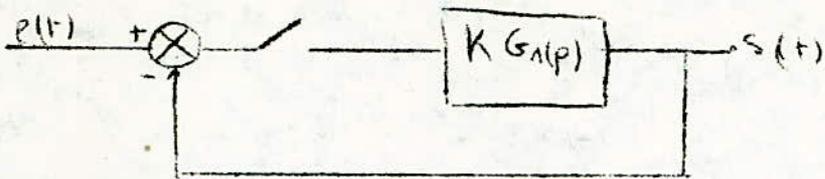


Fig I. 17

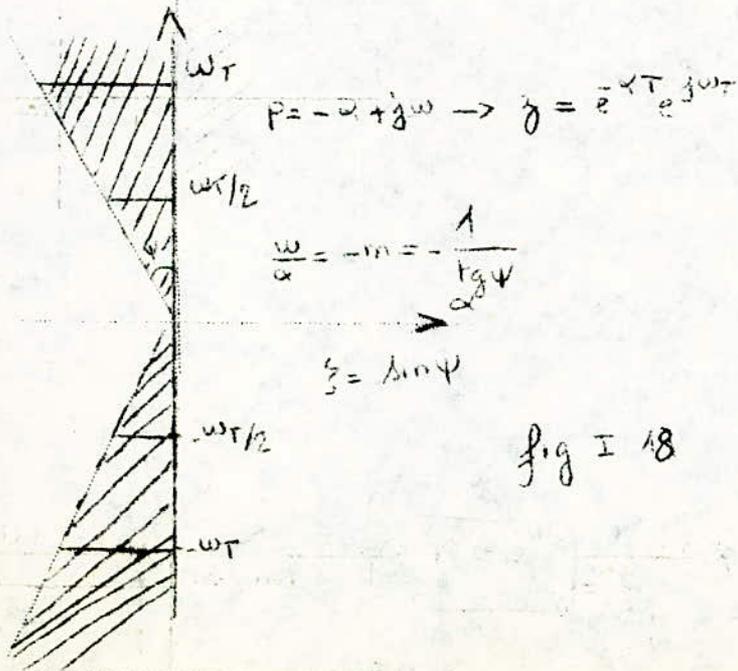
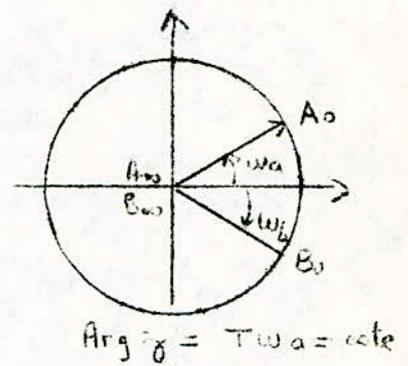
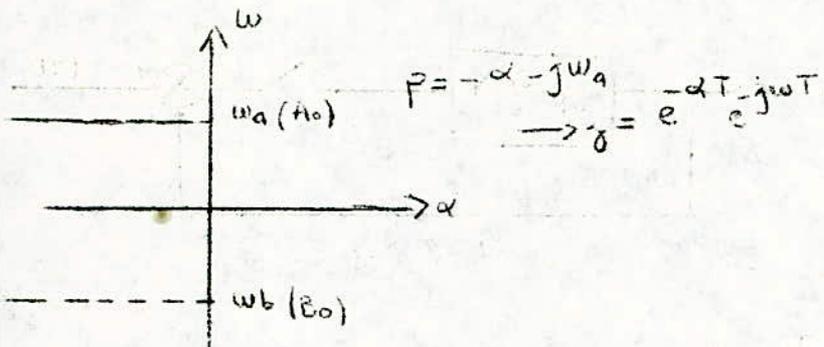
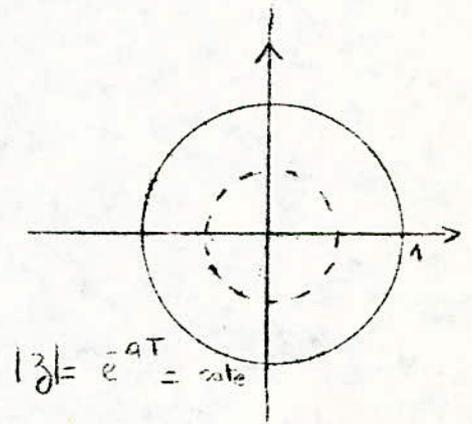
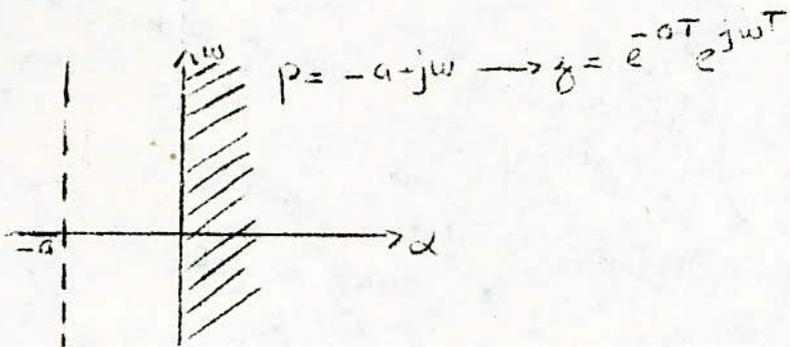
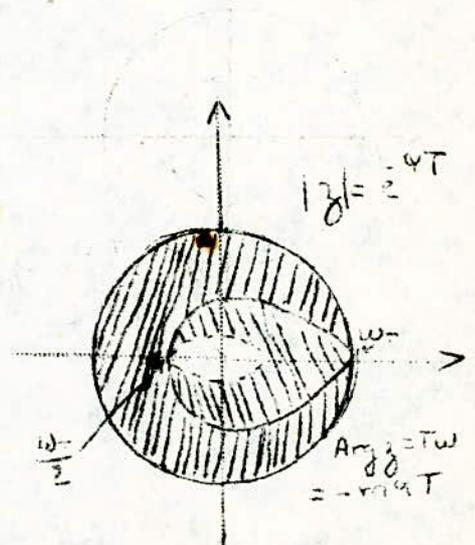


Fig I 18



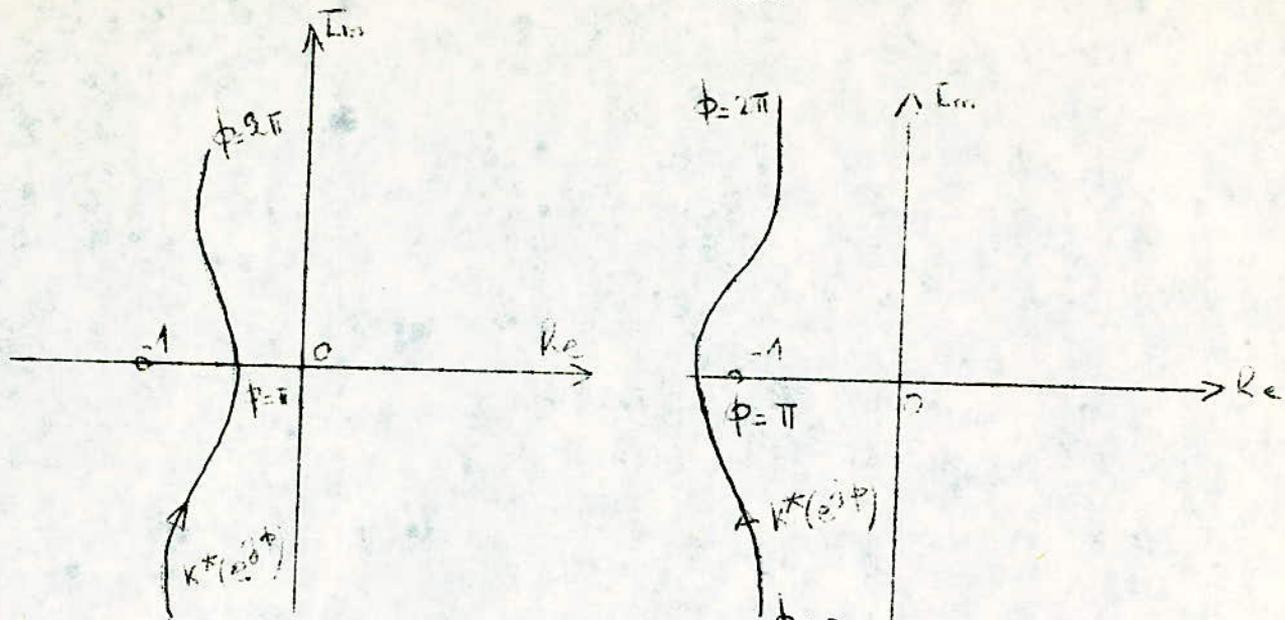


fig I.16 (suite) $\phi=0$

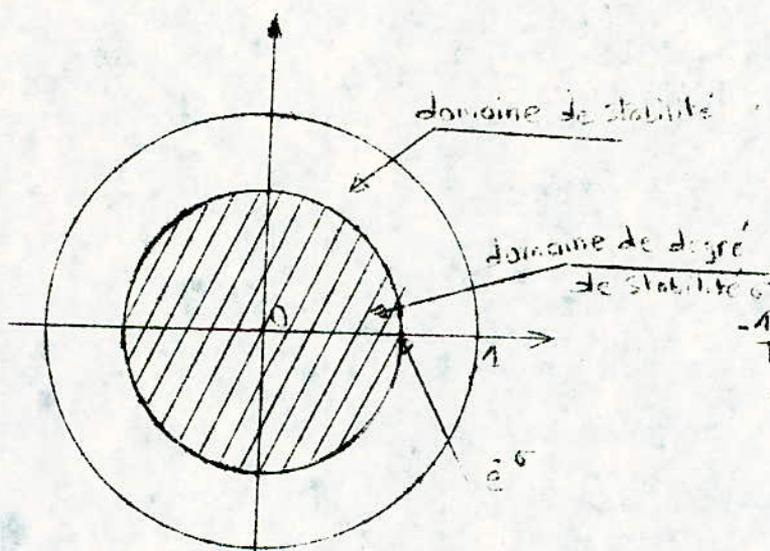


fig I.19

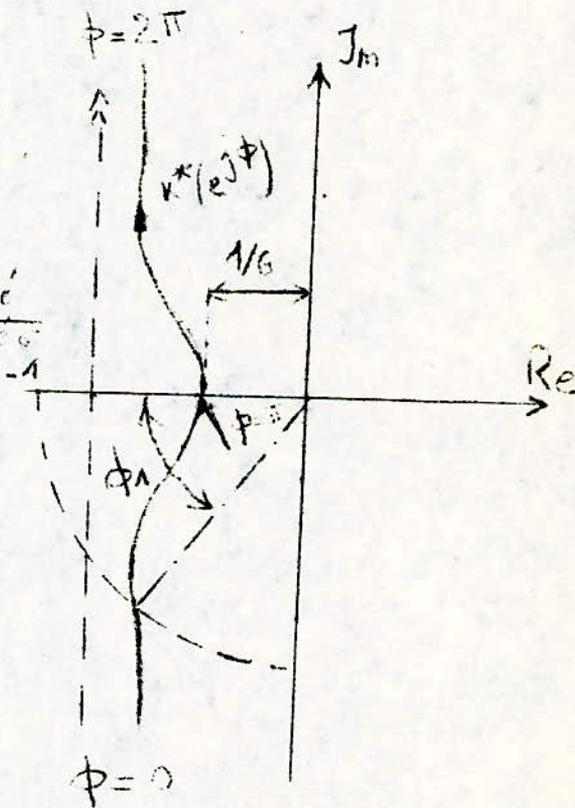


fig I.20

Tout comme l'étude des asservissements linéaires continus, on peut tracer le lieu des racines de cette équation en fonction d'un paramètre et rechercher pour quelles valeurs de ce paramètre les racines sont à l'intérieur du cercle unité; ce qui donne les conditions de stabilité par rapport à ce paramètre.

Le paramètre que l'on choisit en général pour cette construction est le coefficient K qui apparaît lorsqu'on met $K G_1(z)$ sous la forme

$$K G_1(z) = K G(z) = K \frac{\sum (z-z_i)}{\sum (z-p_i)}$$

La construction du lieu résulte de l'exploitation des propriétés

$$\begin{cases} 1 + K G(z) = 0 & K > 0 \\ |G(z)| = 1/K \\ \text{Arg } G(z) = \pi(1 + 2\lambda) & \lambda = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Cette construction est facilitée par la connaissance des règles suivantes:

Règle n° 1: nombre de branches du lieu

Si l'équation caractéristique $1 + KG(z) = 0$, soit $KG(z)$, est de degré d , elle a d racines réelles ou complexes. Le lieu des racines comprend donc d branches.

Règle n° 2: points de départ : qui sont les pôles de $G(z)$ ($K=0$)

Règle n° 3: points d'arrivée : sont les zéros de $G(z)$ ($K=\infty$)

avec $d-n$ direction d degré du dénominateur
 n degré du numérateur.

Règle n° 4: direction asymptotiques soit $O\Delta$ une direction asymptotique et Ox l'axe des abscisses on a

$$\begin{cases} (Ox, O\Delta) = \frac{\pi}{d-n} (1 + 2\lambda) \\ \lambda = 0, 1, 2, \dots \\ K > 0 \end{cases}$$

Les asymptotes se coupent sur l'axe réel au point d'abscisse:

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{d-n}$$

Règle n° 5: parties du lieu sur l'axe réel: Le lieu comprend les segments de l'axe réel joignant les pôles et les zéros de $G(z)$ à partir du pôle ou zéro est le plus à droite.

Règle n° 6: points de départ de l'axe réel :

$$\frac{d[\text{Log } N(\alpha)]}{d\alpha} = \frac{d[\text{Log } D(\alpha)]}{d\alpha}$$

ou bien $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha - z_i} = \sum_{j=1}^d \frac{1}{\alpha - p_j}$

Règle n° 7: Intersection avec l'axe imaginaire : elles correspondent aux racines imaginaires pures conjuguées de l'équation caractéristique $1 + K G(z) = 0$

Règle n° 8: Tangente en un point de départ ou d'arrivée complexe : la tangente en un pôle ou zéro complexe de $G(z)$ est donnée par la condition des applications générales appliquée en un point voisin du pôle ou du zéro. les correspondances entre le plan p et le plan z ($z = e^{pT}$) sont présentées à la figure I. 18

I B. 6 Dynamique des systèmes échantillonnés

I B. 6.1 Degré de stabilité .

Afin d'estimer la qualité d'un système asservi linéaire échantillonné, on introduit la notion de degré de stabilité.

En effet la stabilité d'un système est une condition nécessaire, impérative de fonctionnement mais n'est pas suffisante. La qualité essentielle d'un bon système est de proséder un régime transitoire rapide et bien amorti.

On impose aux r racines de l'équation caractéristique du système de se trouver à l'intérieur du cercle rayon $e^{-\delta}$, qui a le même critère que le cercle de rayon unité (voir fig I. 19).

I B.6.2 Marge de gain - Marge de phase

Il est intuitif de dire que plus le lieu de Nyquist discret est situé près du point critique, plus le système a tendance à osciller.

La marge de phase est déterminée comme la valeur de l'angle $-\pi - \theta(\omega_1)$ pour la phase ω_1 correspondant à :

$K^*(e^{j\omega_1 T}) = -1$ voir fig I. 20

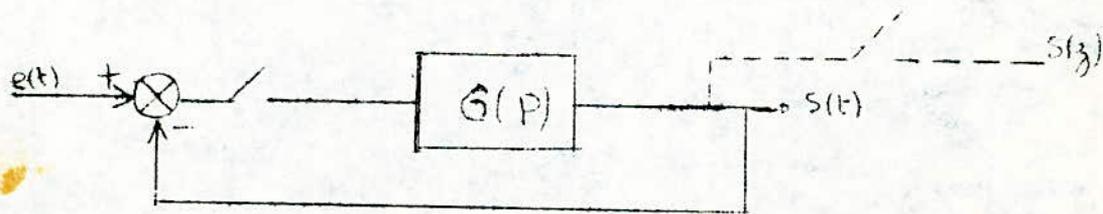
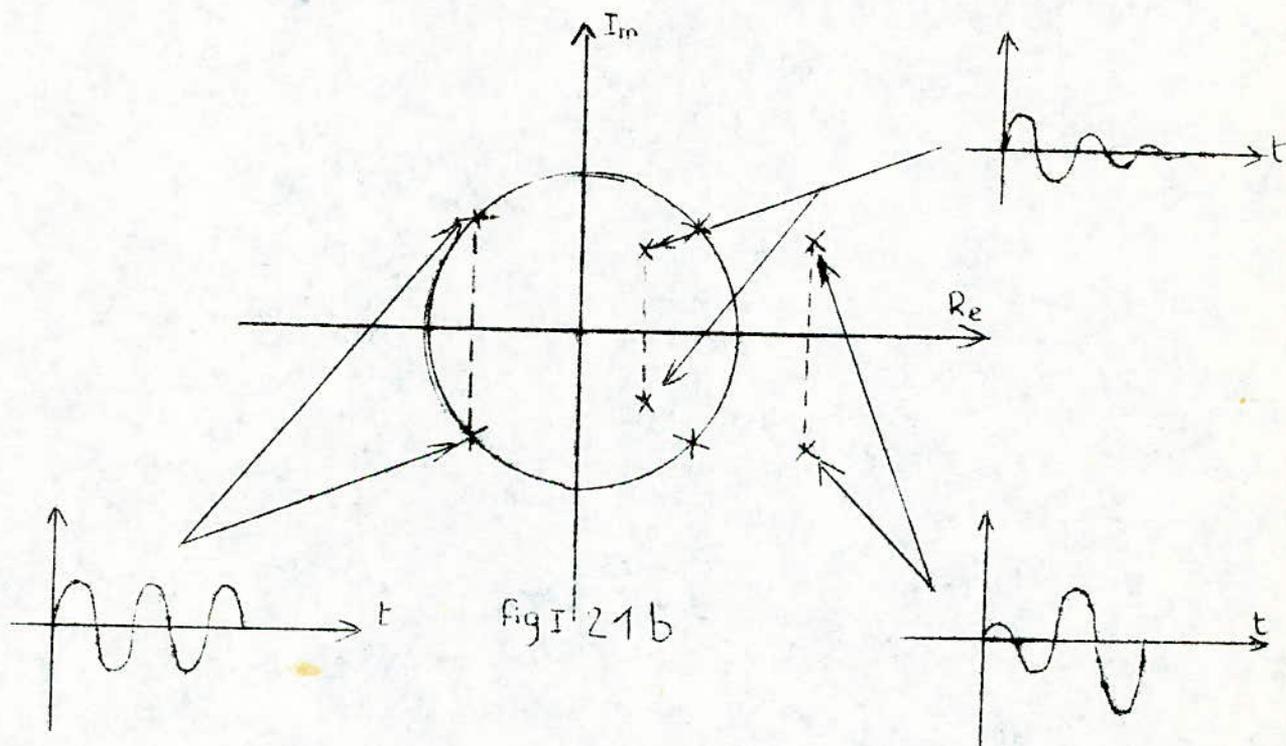
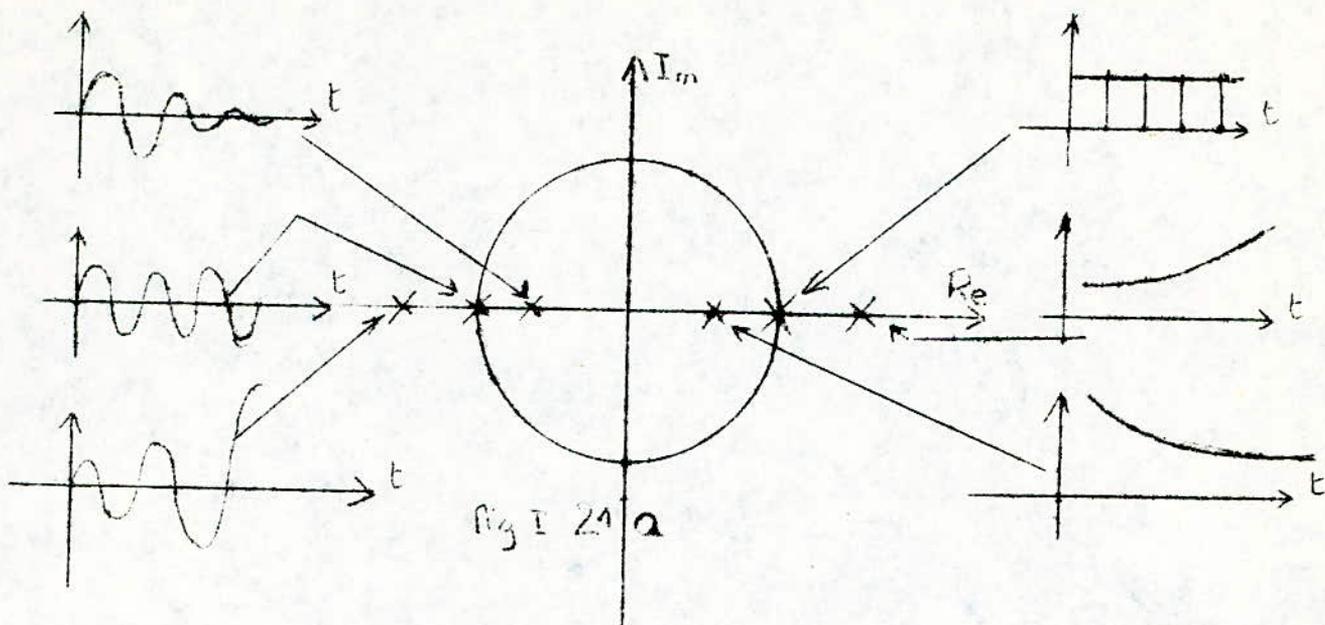
Cette phase est déterminée comme le point d'intersection du cercle de rayon 1 avec le lieu de réponse en phase du système en boucle ouverte.

La marge de gain δ est définie comme l'inverse du module de $K^*(e^{j\omega_1 T})$ correspondant au point d'intersection de K^* avec l'axe réel. Lorsque ω_1 et δ présentent des valeurs élevées, le système possède une stabilité élevée;

La stabilité d'un système est une condition nécessaire, impérative de fonctionnement mais n'est pas suffisante. La qualité essentielle d'un bon système est de proséder un régime transitoire rapide et bien amorti.

On impose aux r racines de l'équation caractéristique du système de se trouver à l'intérieur du cercle rayon $e^{-\delta}$, qui a le même critère que le cercle de rayon unité (voir fig I. 19).

I B.6.2 Marge de gain - Marge de phase



I. B.6.3 Régime transitoire

I. B.6.3. a Lieu de Nyquist discret.

Ainsi qu'on l'a vu à propos de la marge de gain et de phase, l'inspection du lieu de transfert en boucle ouverte renseigne sur l'allure de la réponse transitoire.

Selon la classe du système considéré; on peut, par comparaison aux systèmes échantillonnés du second ordre, avoir un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, ainsi que son degré d'amortissement.

Toutefois il convient de signaler la complexité de cette méthode.

I. B.6.3. b Effet de la configuration des pôles .

Reprenons le système de transmittance en boucle fermée :

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Pour une entrée échelon unité $E(z) = \frac{z}{z-1}$ on peut tracer $S(nT)$ en fonction des configurations des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée . (voir figures II 21. a et II 21 b)

I. B.6.4 Régime permanent et précision.

on a l'habitude d'évaluer l'erreur en régime permanent en fonction des entrées types : échelon de position, échelon de vitesse, d'accélération.

Considérons par exemple la fig I. 22

$$\text{On a } F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

$$e(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{E(z)}{1+G(z)}$$

Ceci représente l'erreur en régime permanent.

I. B.6.4. a Echelon de position

$$e(t) = 1 \quad E(z) = \frac{z}{z-1} \quad e_{p(\infty)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+G(z)}$$

$$e_{p(\infty)} = \frac{1}{1+G(1)} = \frac{1}{K_p}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} (1+G(z)) \quad K_p = \text{cte d'erreur de position}$$

I. B.6.4. b Echelon de vitesse .

$$e(t) = t \quad E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad \epsilon_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)(1+G(z))}$$

$$\epsilon_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)G(z)} = \frac{T}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) \quad K_v: \text{cte d'erreur de vitesse}$$

I. B.6.4 c Echelon d'accélération

$$e(t) = \frac{t^2}{2} \quad E(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^2} \quad \epsilon_a(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2 z+1}{2(z-1)^2(1+G(z))}$$

$$\epsilon_a(\infty) = T^2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^2 G(z)} = \frac{T^2}{K_a}$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) \quad K_a: \text{cte d'erreur d'accélération}$$

I. B.7 Dilemme stabilité - précision.

Ou bien on choisit k faible pour être tranquille du côté de la stabilité mais l'asservissement est lent et peu précis .

Ou bien pour améliorer la précision on augmente k mais le système risque de devenir instable; en général on fait un compromis

$$\epsilon < 5\%$$

I.C Synthèse et correction des systèmes asservis linéaires échantillonnés

On distingue différentes méthodes pour la synthèse des systèmes asservis linéaires échantillonnés:

- Synthèses basées sur les diagrammes de Bode
- Synthèse par la méthode des deux pôles dominant (ZDAN)
- Synthèse basée sur les critères temporels

I. C.A Synthèses basées sur les diagrammes de BODE

I. C.1 a Première méthode : étude approchée

Cette méthode est applicable lorsque les échantillonneurs sont suivis de bloqueur d'ordre zéro : elle consiste à assimiler l'ensemble échantillonneur - bloqueur à un retard pur égale à $T/2$

Cette approximation se justifie à partir des caractéristiques fréquentielles (gain et phase) du bloqueur $B_0(p)$ ou qualitativement à partir de la fig I.23

Par conséquent, dans cette méthode, le système échantillonné est approché par un système continu qui n'est pas à minimum de phase puisqu'il comporte un retard pur. Ce qui nécessitera impérativement la construction des courbes de gain et de phase. Le réseau correcteur auquel on aboutira sera un réseau correcteur analogique. (Voir fig I. 24)

I. C.1. b Deuxième méthode : utilisation de la transformation W

Cette méthode permet d'utiliser la représentation de Bode sans faire l'approximation précédente .

On pose $w = \frac{z-1}{z+1}$ avec $z = e^{pT}$ et $p = j\omega$

on a $w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = th \frac{j\omega T}{2} = j tg \frac{\omega T}{2}$

on pose $v = tg \frac{\omega T}{2} \Rightarrow w = jv$ $0 < v < \infty$ pour $0 < \omega < \frac{\pi}{T}$
 ω : pulsation fictive

considérons la fig I.25

a) on calcule $\overline{B_0 G}(z)$

b) on remplace z par $\frac{1+w}{1-w}$

on obtient $\overline{B_0 G}(w)$ que l'on peut écrire sous forme :

$$\frac{k(1+av)(1+bw)\dots}{w(1+cw)\dots} = \frac{k(1+jav)(1+jbv)\dots}{jv(1+jcv)}$$

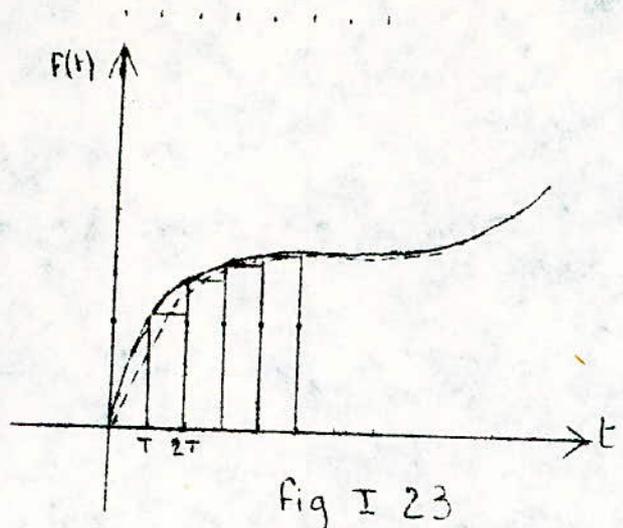


fig I 23

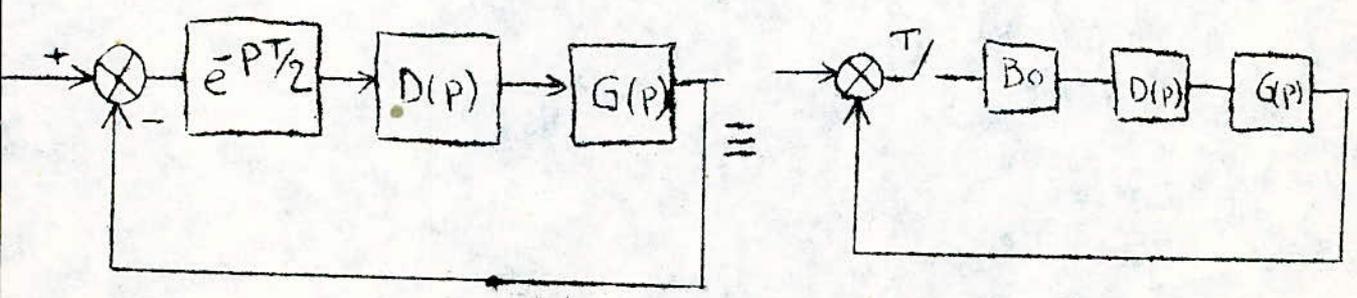
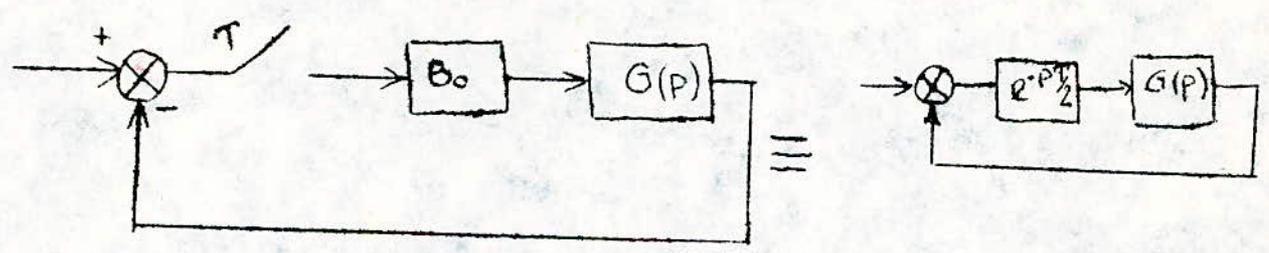


fig I 24

c) on trace $20 \log |B_0 G(jv)|$ et $\arg B_0 G(jv)$

on remarquera que la courbe de gain se termine par une horizontale pour $v \rightarrow \infty$

d) on adopte alors un correcteur

$$(1) \quad D(w) = \frac{1 + \alpha w}{1 + \beta w} \quad \alpha > \beta \text{ avance de phase}$$

$$1 + \beta w \quad \alpha < \beta \text{ retard de phase}$$

pour respecter les conditions de marge de gain et de phase et de précision.

e) on remplace w par $\frac{z-1}{z+1}$ dans (1)

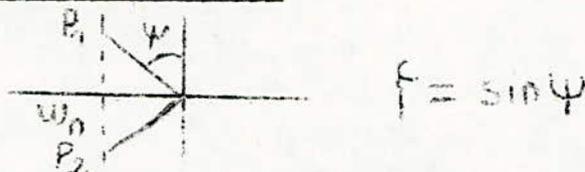
le système corrigé sera représenté par la fig I. 26

I. C.2 méthode des deux pôles dominants (ZDAN)

I. C.2. a But de la méthode

Le but de la méthode est d'obtenir un système à boucle fermée dont le comportement soit voisin de celui d'un système deux deuxième ordre, c'est à dire caractérisé essentiellement par une paire de pôles dominants.

I. C.2. b Principe de la méthode



Precisons tout d'abord que la synthèse du réseau correcteur $D(z)$ sera effectuée en considérant les signaux aux seuls instants d'échantillonnage, donc basée sur la transformation en z .

Les spécifications sur le système corrigé concerneront :

- le régime transitoire défini par deux paramètres : en général l'amortissement ζ et la pulsation propre du système non amorti .
- le régime permanent : erreur nulle pour un échelon de position ou de vitesse en général, valeur de l'erreur pour l'entrée d'ordre immédiatement supérieure à la précédente. D'après la fig I. 26 on a

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{D(z) H(z)}{1 + D(z) H(z)}$$

$H(z)$ et de la forme par exemple :

$$H(z) = k \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \frac{1 + az^{-1}}{1 - bz^{-1}} \quad k, a, b \text{ connus.}$$

Après correcteur, le système doit se comporter comme le système du deuxième ordre défini par ω_n et ξ , il faut donc que son équation caractéristique se réduise à

$$(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) = 0$$

$$= 1 - (z_1 + z_2) z^{-1} + z_1 z_2 z^{-2} = 0 \quad (1)$$

La méthode consiste à choisir un correcteur $D(z)$ de la forme :

$$D(z) = k_1 \frac{1 - b z^{-1}}{1 + a z^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} (1 + a_1 z^{-1})$$

k_1, a_1 étant des inconnues à déterminer à partir des conditions imposées dans l'énoncé cette forme a été choisie de façon :

- à faire disparaître les zéros et pôles de $H(z)$ situés à l'intérieur du cercle de centre zéro et de rayon un.
- à faire apparaître un intégrateur $\frac{1}{1 - z^{-1}}$, qui, ajouté à celui qui existe dans $H(z)$, permet d'obtenir une erreur nulle quand x_i est un signal rampe.

on a $D(z) \cdot H(z) = k k_1 \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} (1 + a_1 z^{-1})$

d'après l'équation caractéristique du système est :

$$1 + D(z) H(z) = 0$$

$$1 + (-2 + k k_1) z^{-1} + (1 + k k_1 a_1) z^{-2} = 0 \quad (2)$$

par identification de (1) et (2) on obtient :

$$\begin{cases} -2 + k k_1 = -(z_1 + z_2) \\ 1 + k k_1 a_1 = z_1 z_2 \end{cases}$$

d'où

$$k_1 = \frac{2 - (z_1 + z_2)}{k}$$

$$a_1 = \frac{z_1 z_2 - 1}{2 - (z_1 + z_2)}$$

Avec

$$p_1 = \omega_n \sin \psi + j \omega_n \cos \psi$$

$$p_2 = \omega_n \sin \psi - j \omega_n \cos \psi$$

$$z_1 = e^{p_1 T} \quad z_2 = e^{p_2 T}$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 e^{\omega_n \sin \psi T} \cos [\omega_n \cos \psi T] \\ z_1 z_2 = e^{2 \omega_n \sin \psi T} \end{cases}$$

Remarque :

La méthode est basée sur la compensation des pôles et des zéros de $H(Z)$ par des zéros et des pôles de $D(Z)$

Physiquement cette compensation n'est pas parfaite si ces couples sont situés à l'intérieur du cercle $|Z|=1$, il ne peut en résulter une instabilité. Il n'en est plus de même pour des couples situés à l'extérieur du cercle, ou même près du cercle en raison des variations imprévisibles des paramètres au cours du temps, ou des erreurs de mesure ou d'estimation.

I. C.3 Synthèse basée sur les critères temporels

I. C.3. a Systèmes à temps de réponse fini - système minimal absolu

I. C.3.A.1 Système à temps de réponse fini

Considérons le système de la fig I. 26

En appliquant au système un signal d'entrée ayant la forme d'un polynôme en t de degré $m=2$ par exemple on a $x(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) u(t)$

qui lui correspond en transformée de Z

$$X(z) = a_0 \frac{z}{z-1} + a_1 \frac{Tz}{(z-1)^2} + a_2 \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^2}$$

c'est-à-dire dans le cas général

$$X(z) = \frac{P_m(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}}$$

avec $P_m(z)$ polynôme de degré m n'ayant pas de racines $Z=1$

La transmittance en boucle fermée est

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

calculons $E(z)$

$$E(z) / X(z) = (X(z) - Y(z)) / X(z) = 1 - T(z)$$

d'où

$$E(z) = X(z) [1 - T(z)] = \left(\frac{P_m(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}} \right) [1 - T(z)]$$

si $[1 - T(z)]$ est de la forme: $(1-z^{-1})^k A_r(z)$

avec $A_r(z)$ polynome en z^{-1} de degré r n'ayant pas de racine $z=1$ et $k \geq m+1$

on constate que :

$$E(z) = P_m(z) (1-z^{-1})^{k-m-1} A_r(z)$$

$E(z)$ est donc un polynôme de degré $k+r-1$, ce qui signifie que $E(nT) \neq 0$ pour les $k+r$ premiers instants ...

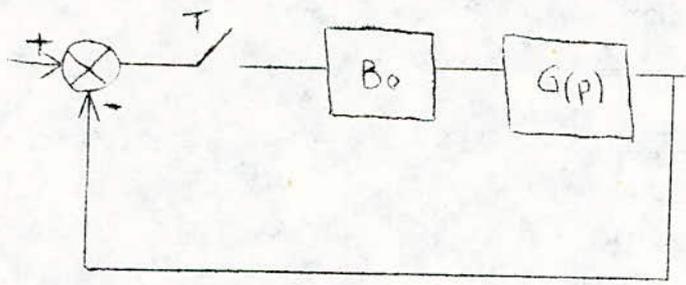


Fig I. 25

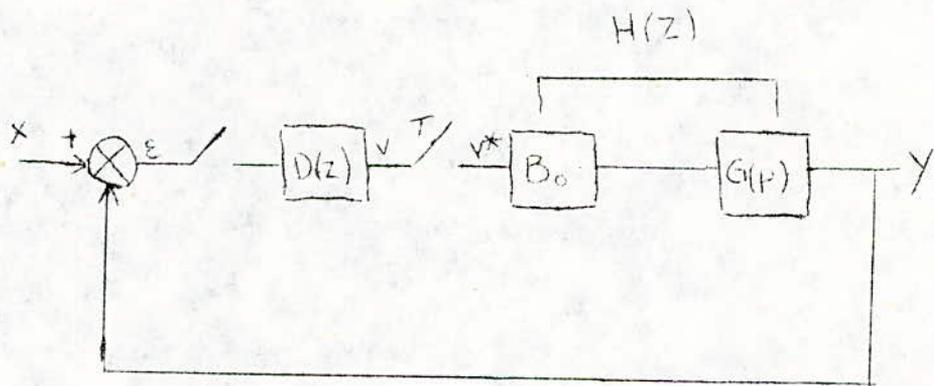


Fig I. 26

$x(t)$	$X(z)$	$\epsilon(z)/X(z)$	$Y(z)/X(z)$
$\delta(t)$	$(1 - z^{-1})^{-1}$	$1 - z^{-1}$	z^{-1}
t	$Tz^{-1}(1 - z^{-1})^{-2}$	$(1 - z^{-1})^{-2}$	$2z^{-1} - z^{-2}$
t^2	$T^2z^{-1}(z + z^{-1})(1 - z^{-1})^{-3}$	$(1 - z^{-1})^{-3}$	$3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$

Fig I 27

d'échantillonnage et nuls pour les instants d'échantillonnage suivants :

car : $E(z) = E_0 + E_1 z^{-1} + E_2 z^{-2} + \dots$

on dit qu'un tel système est à temps de réponse fini.

I.C.3.a.2 Système minimal absolu

Si l'on choisit $K = m + 1$ on obtient : $E(z) = P_m(z) A_r(z)$

$E(nT)$ s'annule pour $n > m + r + 1$

Si de plus on choisit $A_r(z) = 1$ on obtient

$$E(z) = P_m(z)$$

avec $E(nT) = 0$ pour $n > m + 1$

le système est minimal absolu

dans ce cas on a

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = T(z) = 1 - (1-z)^{-m+1} ; \frac{E(z)}{X(z)} = 1 - T(z) = (1-z)^{-m+1}$$

voir quelques exemples : fig I. 27

N.B: $T(z)$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur est z^{k+r} en temps de réponse fini.

le degré du numérateur doit être au plus ^{égal} à $k+r-1$

synthèse:

$$\frac{E(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + D(z) \cdot H(z)} ; D(z) = \frac{X(z) - E(z)}{E(z) \cdot H(z)} = \frac{1 - E(z)/X(z)}{E(z)/X(z) \cdot H(z)}$$

$$= \frac{T(z)}{[1 - T(z)] \cdot H(z)} ; D(z) = \frac{1 - (1-z)^{-m+1}}{(1-z)^{-m+1} \cdot H(z)} = D_0 + D_1 z^{-1} + \dots$$

N.B: 1 il importe de vérifier si le correcteur $D(z)$ peut être réalisé c'est-à-dire si tous les exposants de z sont négatifs.

N.B: 2 il importe de voir si $H(z)$ présente des racines ou des pôles non intérieurs au cercle $|z|=1$ dans ce cas il est nécessaire d'adopter un polynôme $A_r(z) \neq 1$ de façon à obtenir un système stable.

I.C.3.b Système à réponse pile (OU PLATE)

I.C.3.b.1 Définition: Un système est dit à réponse pile lorsque la sortie atteint son régime définitif, pour une entrée type donnée, en un nombre fini d'échantillons .

I.C.3.b.2 Conditions que doit satisfaire le système pour être à réponse pile (Voir fig I. 26)

Condition 1

$x(t)$ étant un polynome en t , on veut que $y(t)$ soit identique à $x(t)$ pour $t > t_1$, on en déduit que $v(t)$ n'est pas constante donc le degré de $v(t)$ ne doit pas être ^{par} conséquent supérieur à l'ordre de l'extrapolateur $B(p)$; par exemple si $B(p)$ est un bloqueur d'ordre zéro, $v(t)$ doit être une constante; si $B(p)$ est un bloqueur d'ordre un, $v(t)$ doit être une constante ou une fonction linéaire en t .

Condition 2

Si m est le degré du polynome $x(t)$ et n l'ordre du bloqueur $B(p)$, $G(p)$ doit comporter $m - n$ integrateurs.

en effet :
$$v(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{F(z)E(z)}{G(z)} = \frac{F(z)E(z)D(z)}{N(z)} \quad (2)$$

$F(z)$ n'a pas de racine à $z = 1$, puisque pour un système à temps d'établissement fini $F(z) = 1 - (1 - z^{-1})^k \cdot A_p(z)$

D'autre part $v(z)$, d'après la condition (1), a au plus un pôle d'ordre $n+1$ à $z = 1$ Enfin $E(z)$ a par hypothèse, un pôle d'ordre $m+1$ à $z = 1$.

Pour pouvoir identifier les deux membres de l'équation (2), il faut que $D(z)$ contiennent $(1 - z^{-1})$ à la puissance $(m - n)$ au moins, donc que $G(p)$ possède au moins $(m - n)$ intégrations .

Condition 3

il faut noter que $\varepsilon(nT) = 0$ pour $n > 0$ n'implique pas $\varepsilon(t)$ soit nulle

pour tout $t > nT$

Par exemple :

$$x(t) = u(t) \quad y(t) = 1 - e^{-at} \sin \omega t$$

quand $\omega = \frac{2\pi}{T} \cdot b$

la différence $x - y \neq 0$ sauf pour $t = nT$

$$\text{car } x(nT) = 1 \quad y(nT) = 1 - e^{-anT} \sin \frac{2\pi}{T} nT = 1$$

en transformée Z on a :

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z e^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$$

Cette transformée présente les pôles

$$z = 1$$

$$\text{et } z = e^{-aT} (\cos \omega T \pm j \sin \omega T) = e^{-aT} e^{\pm j b (\frac{2\pi}{T}) T}$$

$$\text{or } Y(z) = V_0 \cdot H(z)$$

cela se produit donc lorsque $H(z)$ a des pôles de la forme :

$$z = e^{-aT} [\cos bT \pm j \sin bT]$$

ou ce qui revient au même, lorsque $H(p)$ a des pôles de la forme

$$p = -a \pm j \frac{2\pi}{T} b$$

on dit qu'on a affaire à des oscillations cachées entre les instants

d'échantillonnage.

condition 4

Pour un système à réponse pile correspondant à une entrée à échelon

$$x(t) = u(t) \quad y(\infty) = 1 \quad \text{or}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[(n+m)T] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot Y(z, m)$$

$$\text{ET } Y(z, m) = X(z) \cdot \frac{D(z)}{1 + D(z)H(z)} \cdot H(z, m)$$

finalement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[(n+m)T] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{D(z)}{1 + D(z)H(z)} \cdot H(z, m)$$

$$= 1 = \frac{D(1)}{1 + D(1) \cdot H(1)} \cdot H(1, m) \quad \text{or } H(z, m) = \frac{\sum a_i(m) z^{-i}}{B(z)}$$

; $B(z)$ polynome en z^{-1}

et $H(z, m) = \frac{\sum a_i(m)}{B(z)}$

il résulte que

$$\sum_{i=0}^m a_i(m) = cte$$

condition 5 : un système à réponse pile est d'abord un système à temps de réponse fini donc il faut que $1 - T(z)$ présente parmi ses racines les poles de $H(z)$ non situés à l'intérieur du cercle de rayon 1.

condition 6: IL FAUT DE PLUS QUE $T(z)$ présente parmi ses racines de $H(z)$ Toutes les racines de $H(z)$

En effet $v(t) = cte$ or $V(z) = Y(z) / H(z) = X(z) \cdot T(z) / H(z)$

d'où $\frac{v_0}{1-z^{-1}} = \frac{P_m(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}} \frac{T(z)}{H(z)} \quad (3)$

or $H(z)$ qui doit avoir m poles z^{-1} , est de la forme générale :

en reportant dans (3): $\frac{N(z)}{(1-z^{-1})^m} \cdot D(z)$

d'où : $v_0 = \frac{P_m(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}} \frac{T(z) \cdot (1-z^{-1})^m \cdot D(z)}{N(z)}$

$v_0 N(z) = P_m(z) \cdot T(z) \cdot D(z)$

il en résulte que $T(z)$ doit contenir tous les zéros de $N(z)$

N.B: Durée du transitoire

Le fait que $T(z)$ doit contenir parmi ses racines tous les zéros de $H(z)$:
 alors que pour les systèmes minimaux il devait seulement contenir les zéros de $H(z)$ extérieurs au cercle unité, entraîne que la durée du transitoire d'un système à réponse pile sera supérieure à celle d'un système minimal.

I . C . 4 CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES ECHANTILLONNES.

La correction est necessaire si on désire que la sortie d'un système présente certaines caractéristiques (dépassement, durée du régime transitoire, erreurs permanentes, etc...), lorsque l'entrée est soit constante quelque soit les variations extérieures (système régulateur soit que le système travaille en assrvissement.

On distingue deux sortes de correcteurs

- correcteur analogique
- correcteur numérique

I . C . 4 . a correction analogique

Dans ce cas le correcteur est conçu grâce à des éléments en générale passifs telles que resistances, capacités. en montre que l'on peut avec ce type de correcteurs réaliser des transmittances en Z à zéros reels compris entre 0 et 1.

I . C . 4 . b correction numérique

elle est définie par un programme de calcul . Il s'agit d'obtenir valeur de la sortie $S(KT)$ au temps KT , fonction d'un certain nombre de valeur $e(KT)$, $e(K-1)T$, ... et $S(K-1)T$, $S(K-2)T$?...

le calcul étant effectué par l'ordinateur commandant le processus en temps réel .

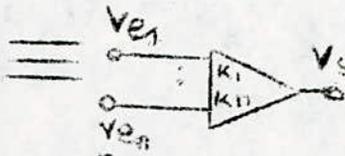
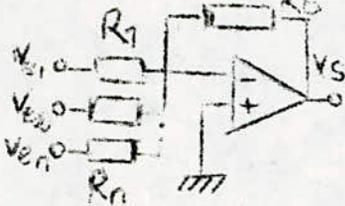
Chap. II : Simulation des équations algébriques et des fonction de transfert

II. 1 Introduction à la simulation analogique

Les machines analogiques sont utilisées dans le domaine de la simulation. Qu'est-ce que la simulation ? C'est l'utilisation d'éléments physiques qui répondent aux memes lois que le système étudié. S'il n'est pas toujours facile de formuler un modèle mathématique qui permet de prévoir le comportement du système étudié, il est souvent aisé de construire un modèle analogique physique.

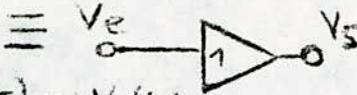
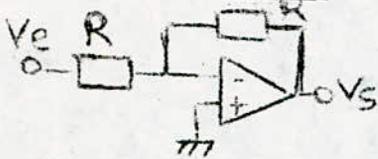
II. 2 Symboles des éléments physiques

II. 2. 1 Sommateur



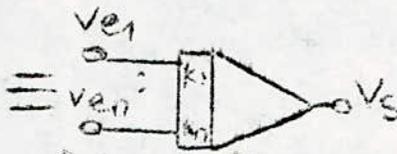
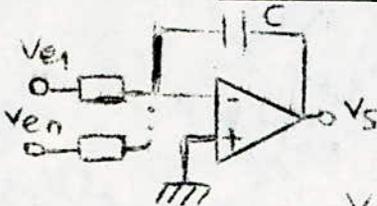
$$V_s(t) = - \sum_{i=1}^n K_i V_{e_i}(t) \quad \text{AVEC } K_i = \frac{R_b}{R_i}$$

II. 2. 2 Inverseur



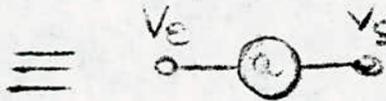
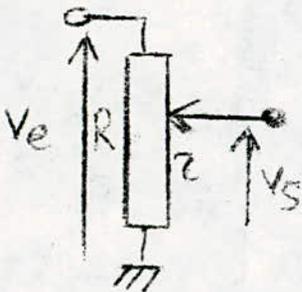
$$V_s(t) = -V_e(t)$$

II. 2. 3 Intégrateur



$$V_s(t) = - \sum_{i=1}^n K_i \int_0^t V_{e_i}(t) dt \quad \text{AVEC } K_i = \frac{1}{R_i C}$$

II. 2. 4 Atténuateur



$$V_s = a V_e \quad a = \frac{r}{R} \quad 0 \leq a \leq 1$$

II. 3 Simulation des équations algébriques.

Soit à simuler l'équation différentielle suivante;

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (1)$$

on pose

$$y_1 = \frac{dx}{dt} ; y_2 = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt}$$

$$y_3 = \frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{dy_2}{dt} ; \dots ; y_n = \frac{d^n x}{dt^n} = \frac{dy_{n-1}}{dt}$$

l'équation (1) devient: $a_n y_n + a_{n-1} y_{n-1} + \dots + a_1 y_1 + a_0 x = f(t)$

II. 3. 1 Transformation de l'équation initiale

cette transformation se fait par rapport à la plus grande dérivée

l'équation (1) devient:

$$y_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_{n-1} - \dots - \frac{a_1}{a_n} y_1 - \frac{a_0}{a_n} x + \frac{f(t)}{a_n}$$

$$y_{n-1} = -b_{n-1} y_{n-2} - \dots - b_1 y_1 - b_0 x + c f(t)$$

II. 3. 2 élaboration du schéma symbolique

préons l'exemple classique de l'équation du 2ème degré

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

$$a_2 y_2 + a_1 y_1 + a_0 x = f(t)$$

$$y_2 = -\frac{a_1}{a_2} y_1 - \frac{a_0}{a_2} x + \frac{1}{a_2} f(t)$$

$$y_2 = -b_1 y_1 - b_0 x + c f(t) \quad (\text{voir fig II.1})$$

II.3.3 Choix d'échelle : variables machines et temps machine

on distingue deux sortes de variables

- Les variables physiques $x, x', \dots, x^{(n)}$

- Les variables machines $u, u', \dots, u^{(n)}$ (en volt)

il faut connaître l'échelle entre les x et les u

on pose $M_x = \frac{X}{U}$; $M_y = \frac{Y}{X_0}$ avec $Y = f(t)$

Pour chaque variable il existe son échelle :

$$M_{x'} = \frac{X'}{U'} \quad M_{x^{(n)}} = \frac{X^{(n)}}{U^{(n)}}$$

En considérant que la sortie est égale à ± 10
peuvent être choisies directement

et

$$M_x = \frac{|X|_{\text{MAX}}}{10} \quad M_y = \frac{|Y|_{\text{MAX}}}{10}$$

Pour les $X^{(n)}$ il faut choisir l'échelle de temps

$$t = M_t t_m$$

t_m : temps machine

t : temps du processus

on a

$$M_{X'} = \frac{X'}{U'} = \frac{dX/dt}{dU/dt_m} \quad \text{AVEC } U = \frac{X}{M_x} \quad \text{ET } t_m = \frac{t}{M_t}$$

$$\Rightarrow M_{X'} = \frac{dX/dt}{d\left(\frac{X}{M_x}\right)/d\left(\frac{t}{M_t}\right)} = \frac{M_x}{M_t}$$

de même

$$M_{X''} = \frac{M_x}{(M_t)^2} ; \dots ; M_{X^{(n)}} = \frac{M_x}{(M_t)^n}$$

II.4 simulation des fonctions de transfert

II.4.1 fonctions de transfert continues

ces fonctions de transfert sont en générale du type :

$$F(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad m \leq n$$

$$F(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{V_S}{V} \cdot \frac{V}{V_E} \quad \text{AVEC } V \neq 0$$

$$\frac{V}{V_E} = \frac{1}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad (1)$$

$$\text{ET } \frac{V_S}{V} = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ DEVIENT } V(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) = V_E$$

$$\Rightarrow p^n V = V_E - (a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0) V$$

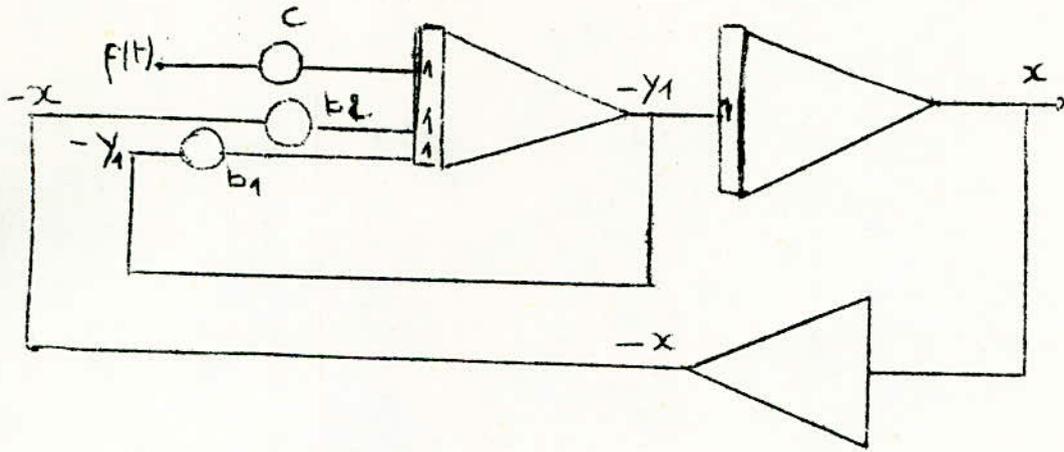


Fig II 1

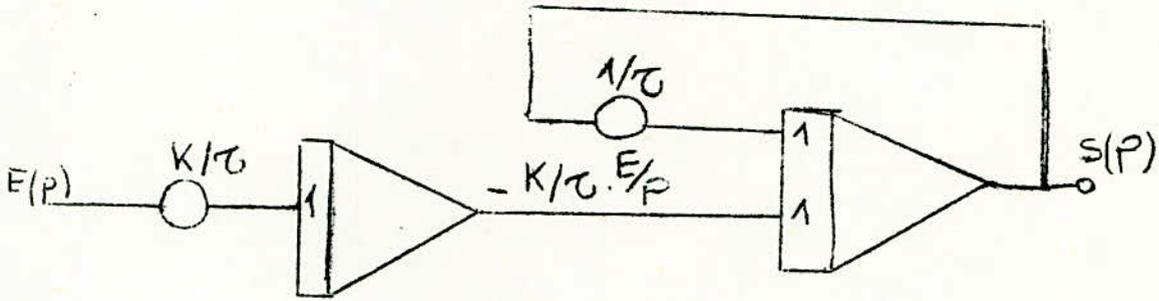


Fig II 2

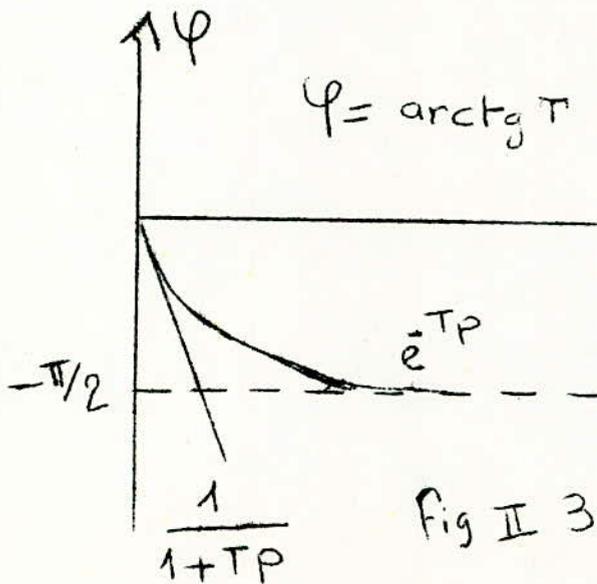


Fig II 3

illustrant ceci par une fonction de transfert du 2ème ordre

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{p(1+zp)}$$

en transformant $F(p)$ on aura :

$$S.p(1+zp) = kE$$

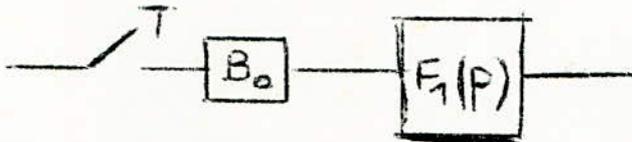
$$S.p + S.zp^2 = kE$$

$$S.zp^2 = kE - S.p$$

$$D'où \quad S = \frac{k}{z} \frac{E}{p^2} - \frac{1}{z} \frac{S}{p} \quad (\text{voir fig II.2})$$

II.4.2 Fonctions de transfert échantillonnées

considérant le schéma ci-dessous



la fonction de transfert du système s'écrit :

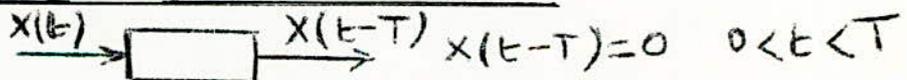
$$F(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \cdot F_1(p) \quad (1)$$

la fonction $\frac{1 - e^{-Tp}}{p}$ est simulé par l'échantillonneur bloqueur, par contre $F_1(p)$ qui est une fonction de transfert continue sera simulée comme précédemment

N.B: Si la fonction de transfert est donnée en Z on revient à la transformée $\frac{z-1}{z}$ et on la met sous forme de (1)

II.4.3 Simulation des retards (voir fig.II. 3)

II. 4.3.a Caractéristique de la fonction retard



$$L[x(t)] = X(p) \quad L[x(t-T)] = e^{-Tp} X(p)$$

le développement en série de Taylor donne

$$e^{-Tp} = 1 - Tp + \frac{T^2 p^2}{2} - \frac{T^3 p^3}{6} + \dots$$

mais cette série converge lentement

II. 4.3.b Approximation par une fonction de 1ère ordre

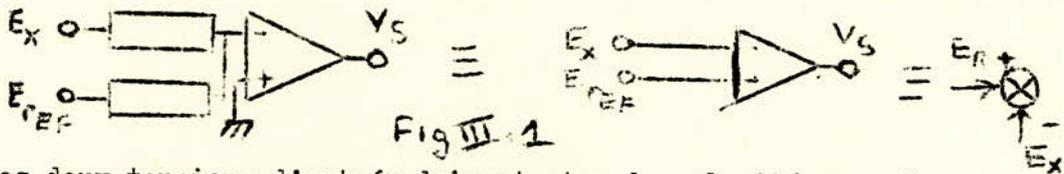
$$\frac{1}{1+Tp} = 1 - Tp + T^2 p^2 - T^3 p^3 \quad (\text{faibles retards})$$

Chapitre III. CONCEPTION DE LA MAQUETTE

III. 1 Eléments physiques constituant le simulateur

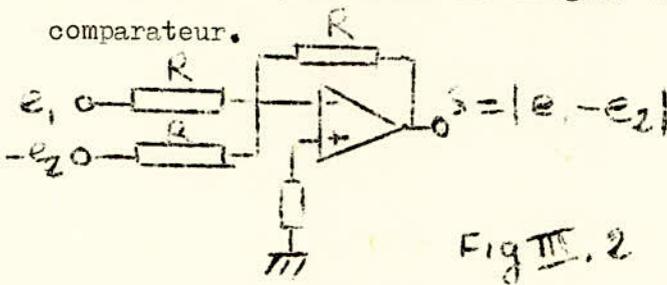
III. 1. a comparateur

Un comparateur est un organe analogique essentiellement un amplificateur opérationnel, dont la fonction est d'indiquer si la tension analogique appliquée sur l'une de ses deux entrées est inférieure ou supérieure à celle appliquée sur l'autre. Comme comparateur, un amplificateur opérationnel en montage inverseur est utilisé.



Les deux tensions d'entrée doivent être de polarité opposée.

Dans notre cas, un sommateur de gain unité est utilisé en guise de comparateur.



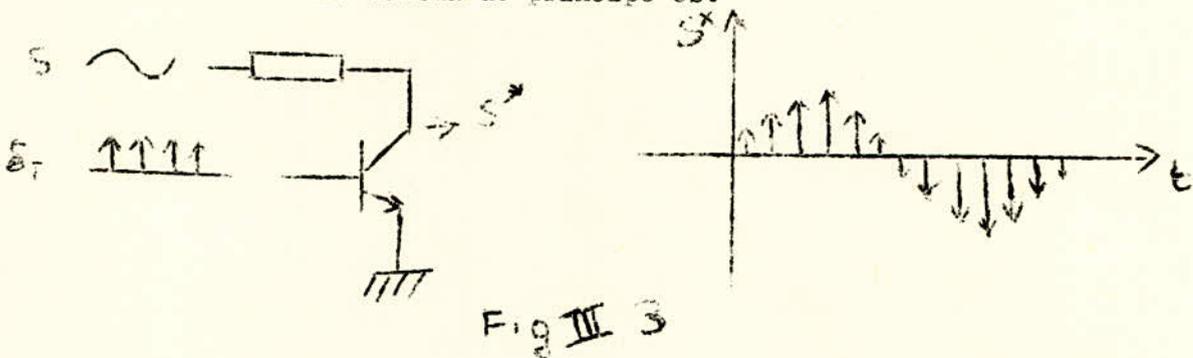
III. 1. b Echantillonneur-échantillonneur bloqué

III. 1. b. 1 Echantillonneur

Pour avoir un système linéaire, l'échantillonneur doit être un moduleur d'impulsions en amplitude.

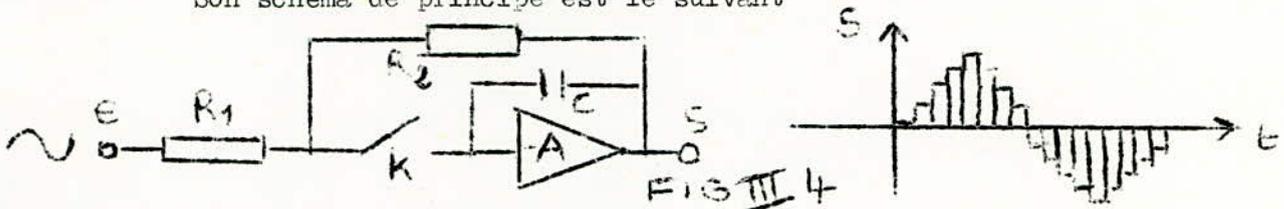
Pour avoir un échantillonneur, on peut utiliser un amplificateur normal bloqué que l'on débloquent pendant les instants d'échantillonnage.

Le schéma de principe est



III. 1. b. 2 Echantillonneur bloqueur

Son schéma de principe est le suivant



Le commutateur électronique K (à diodes ou à transistor bloqué ou à FET) est ~~dirigé~~ par les impulsions d'échantillonnage, à ce moment on a un amplificateur suiveur qui donne en sortie

A l'ouverture de K il y a échantillonnage et blocage car le condensateur C gardant sa charge, la tension S reste constante (le courant de décharge est négligeable car A a une très grande impédance d'entrée et du fait de son grand gain, sa tension d'entrée est très faible.

Dans notre cas en guise de porte analogique, on utilise un commutateur quadruple bilatéral. CD 4016

III. 1. b. 3 Caractéristiques de la porte analogique CD 4016

Le brochage et le schéma interne se trouvent à la fig. III. 5

C'est un commutateur bilatéral quadruple. Si le signal de commande d'une porte (V_C) est égale à V_{DD} , l'inverseur attaqué fournit le V_{SS} (unc) et la porte de transfert correspondante est conductrice (dans les deux sens). A l'inverse, une attaque $V_C = V_{SS}$ aboutit à bloquer la porte de transfert. Un tel commutateur transmet des signaux logiques ou analogiques jusqu'à 15 V crête, pour $V_{DD} = 15V$, et sa résistance $R_{on} = 300\Omega$. Un tel circuit s'applique ainsi à la commutation, au multiplexage, à la conversion analogique à digitale et vice versa.

III. 1. C Amplificateurs opérationnels

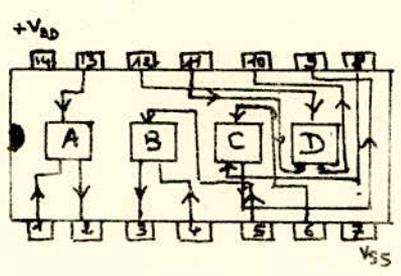
C'est des éléments à courant continu (donc à large bande) à grand gain et à forte impédance d'entrée. Ils entrent dans la composition des comparateurs, des sommateurs, des intégrateurs...

Comme amplificateur opérationnel, on utilise le $\mu A 741C$ qui possède une compensation en fréquence et dont la sortie est protégée contre les court-circuits (voir fig. III. 6)

III. 1. C. 1 Réglage de la tension offset

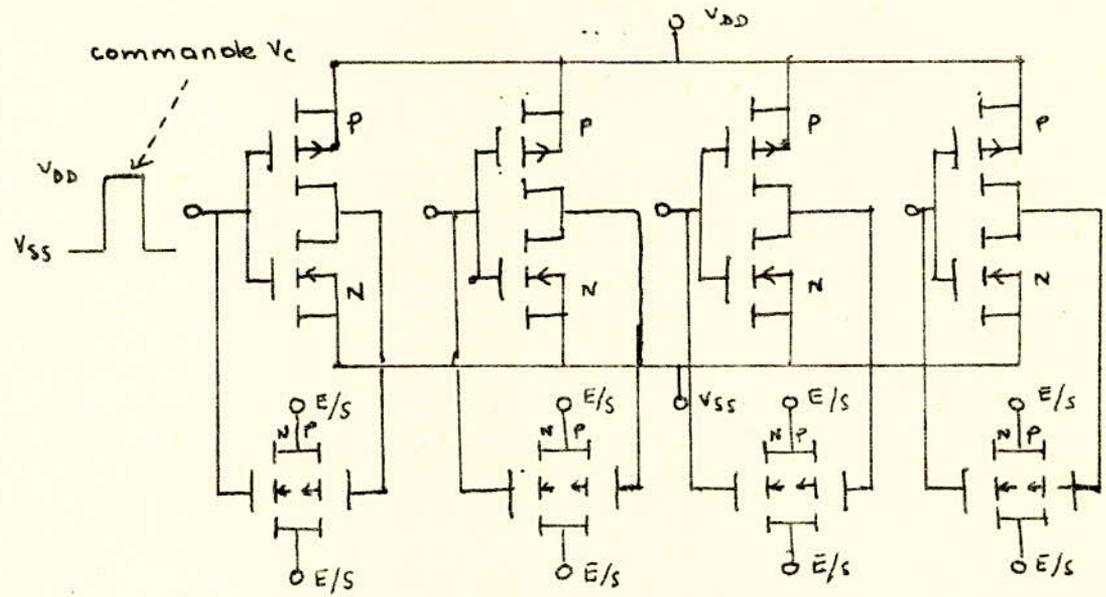
L'amplificateur idéal utilisé en boucle ouverte doit donner une tension de sortie nulle quand les deux entrées sont court-circuitées à la masse. En pratique ce n'est pas le cas, les éléments internes de l'amplificateur différentiel n'étant pas parfaitement symétriques vont engendrer une tension d'erreur à l'entrée (tension d'offset)

brochage et schéma interne du CD4016 QUAD. BIATERAL SWITCH



- (13) controle A
- (5) " B
- (6) " C
- (12) " D
- (1) entrée A
- (4) " B
- (8) " C
- (11) " D
- (2) sortie A
- (3) " B
- (9) " C
- (10) " D

V_{DD} jusqu'à 15 V max
 V_{SS} potentiel négatif ou masse



E : entrée
 S : sortie

fig III. 5

brochage DU SN 7400N (PORTES NAND)

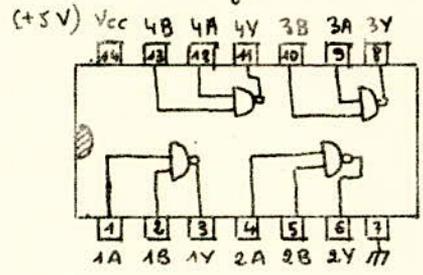


table de verité'

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

schéma du commutateur SANS REBONDISSEMENTS avec bascule R-S

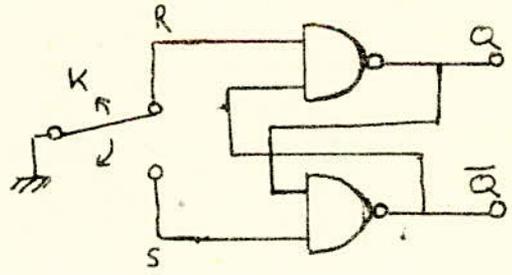


fig III. 12

Caracteristiques principales DU $\mu A 741C$

. Tension de decalage A L'ENTRÉE ($R_s \leq 10k\Omega$)	1 mV
. COURANT de decalage A L'ENTRÉE	30 nA
. COURANT de polarisation	100 nA
. RESISTANCE d'ENTRÉE	1 M Ω
. Gain pour signaux forts ($R_L \geq 2k\Omega$ $V_o = \pm 10V$)	$2 \cdot 10^5$
. EXCURSION de la Tension de sortie ($R_L > 10k\Omega$)	$\pm 14V$
. Gamme des Tensions d'ENTRÉE	$\pm 15V$
. RRMC ($R_s \leq 10k\Omega$)	90 dB
. RRTA ($R_s \leq 10k\Omega$)	30 $\mu V/V$
. Consommation	50 mW
. SLEW rate	0,5 V/ μs
. TENSIONS D'ALIMENTATION	$\pm 15V$
. TEMPERATURE DE SERVICE	-55 \bar{a} +125 $^{\circ}C$

R_s : RESISTANCE de SOURCE
 R_L : RESISTANCE de CHARGE
 V_o : TENSION DE SORTIE

broche 8 NON CONNECTÉE
 broche 6 SORTIE

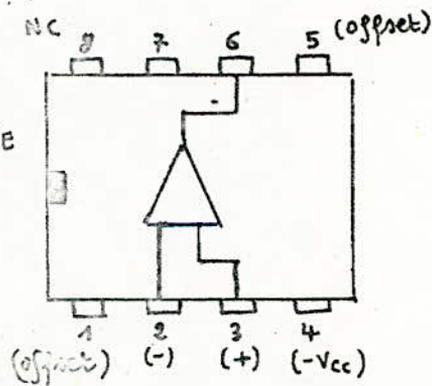
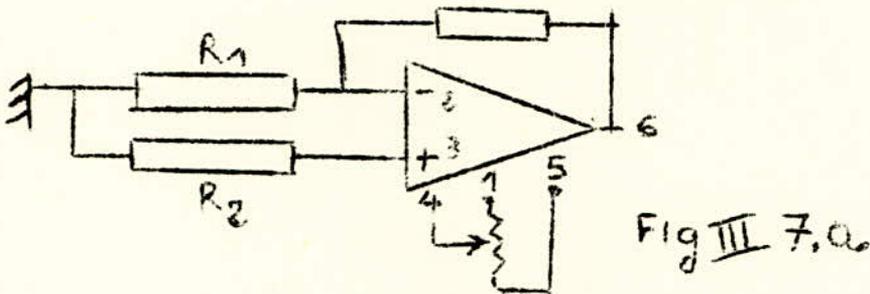


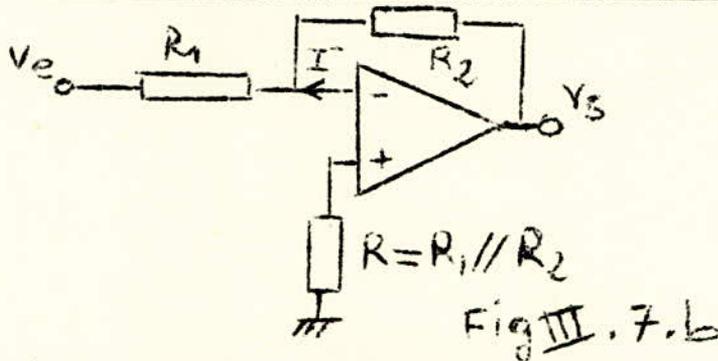
fig III . 6

Sa valeur courante est de 2 mv en s'amplifiant elle provoque la saturation de l'amplificateur.

En boucle fermée, avec un gain de 100 la tension en sortie est de 200 mv alors que celle d'entrée est nulle; cette tension étant indésirable aussi s'efforce-t-on de la neutraliser. Pour ce faire, on utilise un potentiomètre de 10 K DONT LES EXTREMITÉS sont reliées aux broches (1) et (5), le curseur étant relié à la broche (4) on preleve une fraction de tension négative qu'on injecte à l'intérieur de l'amplificateur suivant (le schéma)



III. C. 2 Compensation de la tension d'erreur due au courant I^-



Le courant I^- doit obligatoirement retourner à la masse; il va donc se répartir selon les impedances des chemins suivants

- * R_1 plus l'impedance de la source du régime d'entrée (supposée nulle)
- * R_2 plus l'impedance de sortie de l'amplificateur (de valeur négligeable)

Il résulte de ce courant une erreur qui peut être assimilée à une petite pile placée entre la borne (+) et la masse de valeur $(R_1 // R_2) I^-$ (cette expression est valable aussi pour le courant I^+). Pour compenser cette tension d'erreur on insère une résistance $R_1 // R_2$ entre la borne + et la masse.

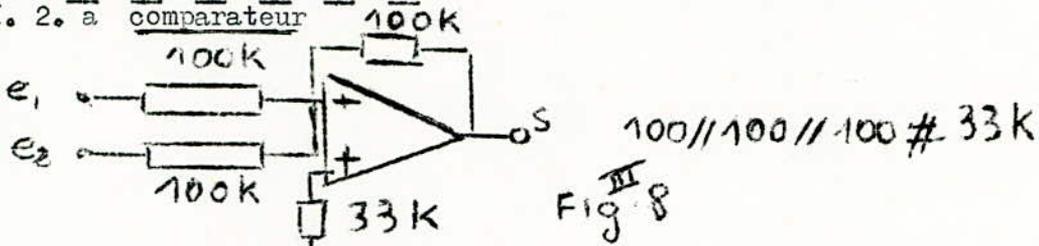
Si $I^+ = I^-$ LA COMPENSATION EST TOTALE

En générale $I^+ \neq I^- \rightarrow$ la tension d'erreur $E_c = R |I^+ - I^-|$

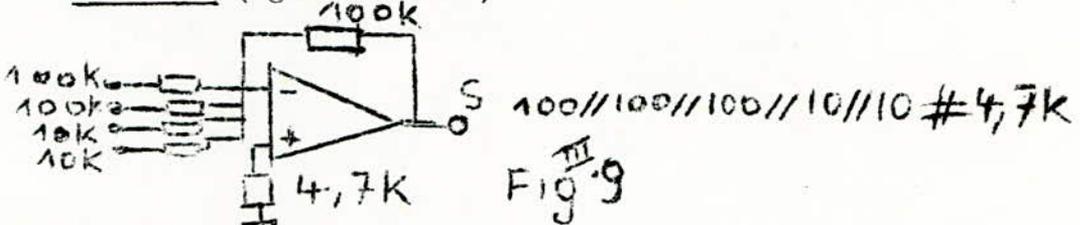
($I^+ - I^-$; différence appelée courant d'offset).

III. 2 Valeurs des composants

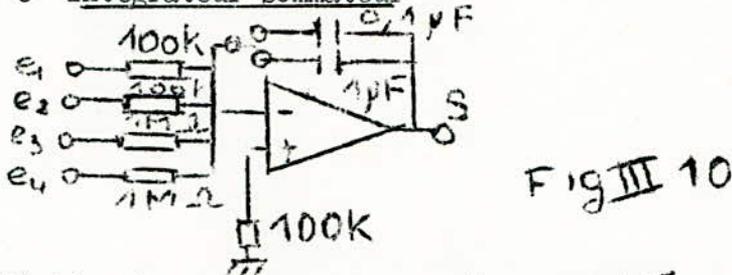
III. 2. a comparateur



III. 2. b sommateur (gain 1 et 10)

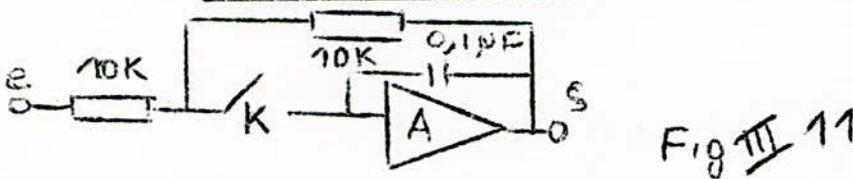


III. 2. c intégrateur sommateur



pour l'intégrateur, pour compenser le courant I on met la résistance qui permet le plus grand gain car le courant qui traverse la résistance de 100 K est plus important que celui dans 1MΩ

III. 2. d échantillonneur bloqueur



La porte analogique K se ferme périodiquement. Quand la porte est fermée le schéma fig. III 11 se comporte alors comme un suiveur puisque sa constante de temps est très petite ($\tau = RC = 10^4 \cdot 10^{-7} = 10^{-3}$), c'est pourquoi la tension à sa sortie est presque instantanément égale à son entrée. Quand la porte s'ouvre le système se transforme alors en intégrateur à entrée ouverte et soutient cette tension de sortie pendant tout ce temps d'ouverture jusqu'à la prochaine fermeture de la porte.

III. 3 Accessoires du simulateur

III. 3. a Commutateur sans rebondissement

La plupart des systèmes numériques demandent un certain nombre de commandes nouvelles comme le comptage ou remise à zéro etc... Un simple commutateur ne convient pas car il produit une série d'impulsions parasites avant d'atteindre l'état final (ouvert ou fermé) ce qui entraîne un fonctionnement erratique.

Pour éviter cet inconvénient, on utilise le montage de la fig. III. 12 à droite. L'ensemble constitue une classique bascule R-S qui n'a pas ici de configuration indéfinie sur ses sorties puisqu'il y a toujours une entrée au niveau logique 0. Lorsque K est au repos la sortie Q est au niveau logique 1; lorsqu'il met l'entrée S à 0, la sortie \bar{Q} est forcée à 1 tandis que Q passe à 0.

Le circuit intégré SN 7400 TTL nous permet d'utiliser 2 portes NAND en connexion avec le commutateur K. Ainsi nous obtiendrons à la sortie $Q(\text{ou } \bar{Q})$ un échelon de tension dont on peut régler l'amplitude grâce au potentiomètre le plus à gauche de la fig. III. 15 du panneau n° 2. Cet échelon de tension sera le signal à échantillonner.

III. 3. b Alimentation stabilisée symétrique

considérons le schéma de la fig. III. 13

Un transformateur (20 w, 1 A) comprenant un primaire 220 V et un secondaire 24 V alimente un pont redresseur BY 179 (400 v, 1 A le seul disponible).

La tension redressée est filtrée par un condensateur chimique C de valeur 1100 μ F. AINSI NOUS DISPOSONS D'UNE TENSION D'ENVIRON 38 V pour attaquer le premier circuit régulateur formé par deux diodes BZ x 87 C/ 13 qui délivre ± 13 v (pour alimenter les $\mu A741c$), à la sortie de ce dernier se trouve un deuxième circuit régulateur formé par deux diodes BZ x 46 C/5,1 qui délivre ± 5 V pour alimenter les circuits intégrés **SN 7400N et CD 4016**

Notons que la résistance R_3 avec C jouent le rôle d'un filtre.

III. 4 Circuit imprimé et coffré

Le circuit imprimé se trouve à la fig. III. 14, il a été reproduit à l'échelle 1 IL EST VU DU COTÉ CUIVRE. Il sera relié aux deux panneaux suivant la disposition des éléments et la destination des différents trous.

Le coffret se trouve à la fig. III. 15

Pour le panneau n° 1

- * A_1 et A_2 sont des comparateurs
- * A_3 et A_4 sont des sommateurs (gain 1 et 10)
- * A_5, A_6 et A_7 sont des intégrateurs sommateurs

On dispose de deux entrées impulsion, l'une pour l'échantillonnage, l'autre pour l'échantillonnage- blocage

Le voyant de l'interrupteur secteur ont été connectés comme suit

ALIMENTATION STABILISÉE SYMETRIQUE

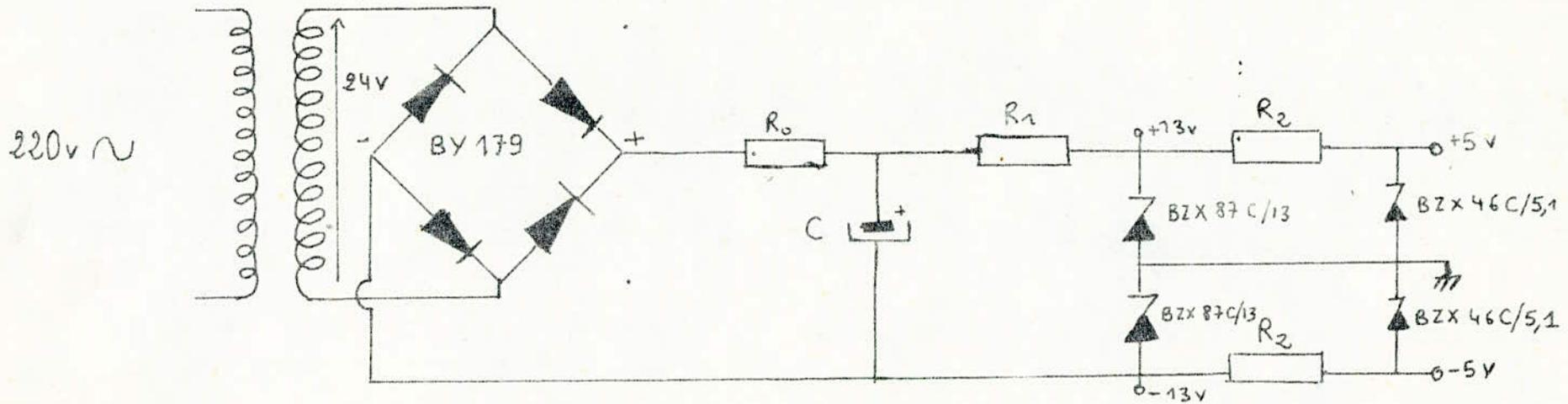


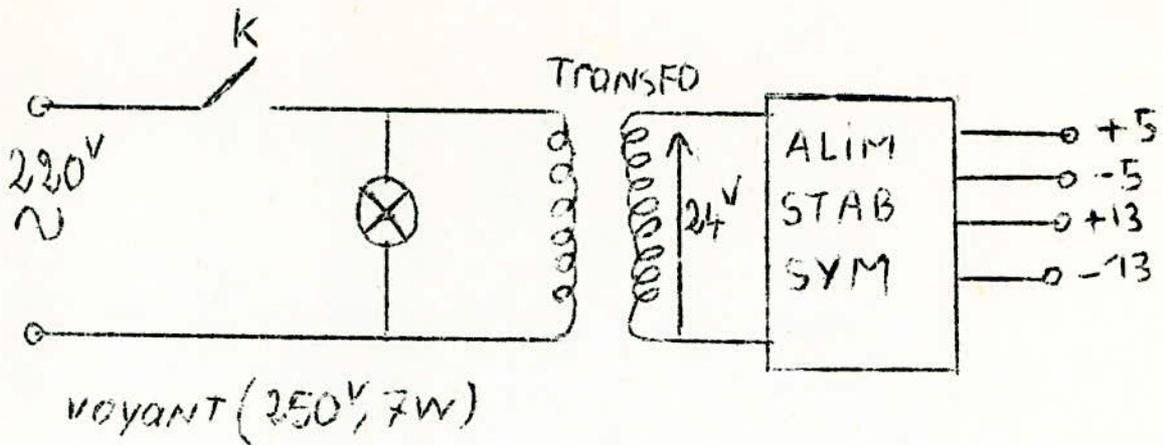
fig III. 13

$$R_0 = 10 \Omega \text{ (1W).}$$

$$R_1 = 245 \Omega \text{ (2W).}$$

$$R_2 = 330 \Omega \text{ (1/2 W)}$$

$$C = 2 \text{ de } 2200 \mu\text{F}/25\text{V} = 1100 \mu\text{F}/50\text{V}$$



Pour le panneau N° 2 à part le commutateur on dispose de six atténuateurs pour régler les entrées des comparateurs, sommateurs et des intégrateurs.

III .5 Remarques sur la réalisation

on note que les éléments physiques sont indépendants les uns des autres. Ils sont alimentés en même temps; les résistances sont figées sur chaque éléments (car dans d'autres cas elles peuvent être en fichables); le câblage se fera de l'extérieur pour réaliser n'importe quel circuit. Sur le panneau N° 1 on remarque trois trous : de l'extérieur on commute les capacités de $1\mu F$ et de $0,1\mu F$ pour avoir un gain de 1 OU DE 10.

On a utilisé 2 comparateurs, 2 sommateurs et 3 intégrateurs pour réaliser un circuit de 1ere ordre, un circuit de 2ème ordre et éventuellement un circuit du 3ème ordre.

CIRCUIT IMPRIMÉ DU SIMULATEUR

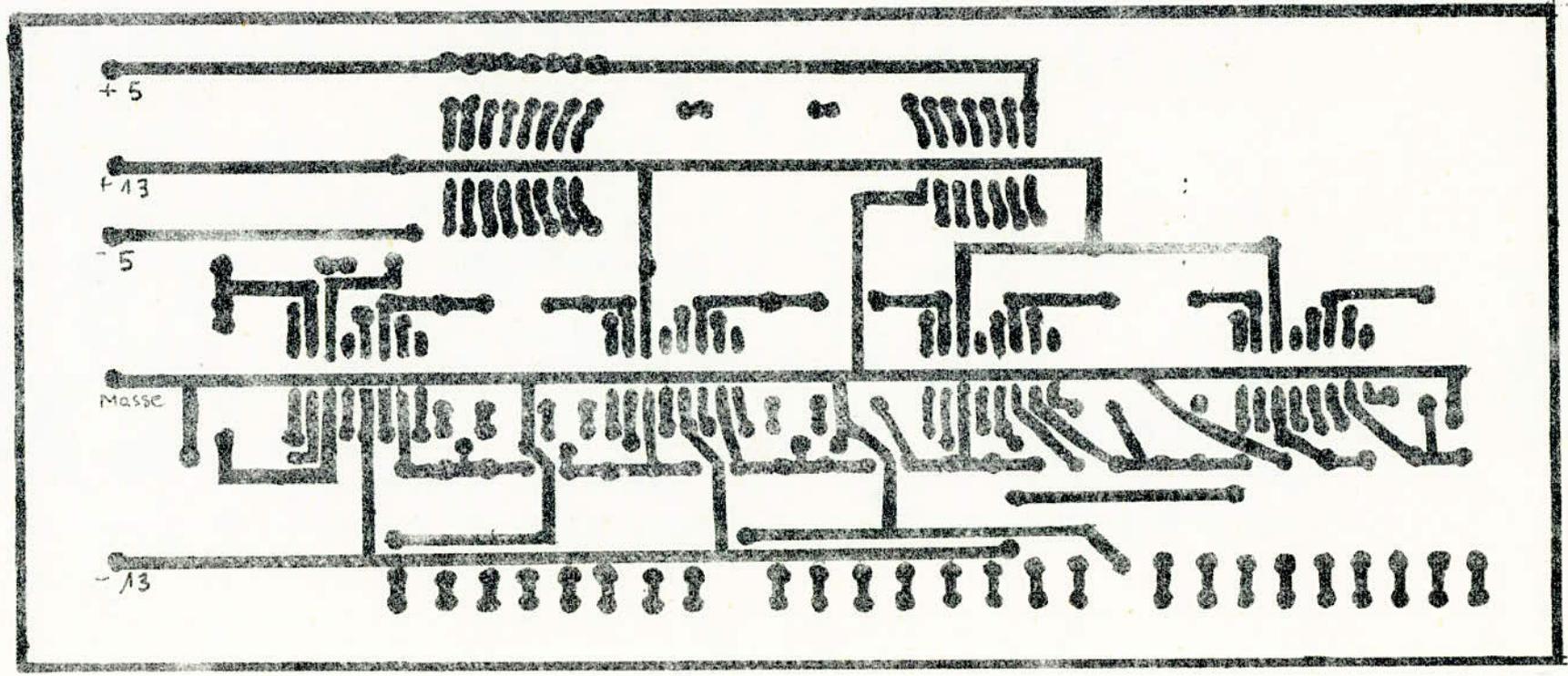


Fig. III - 14

COFFRET

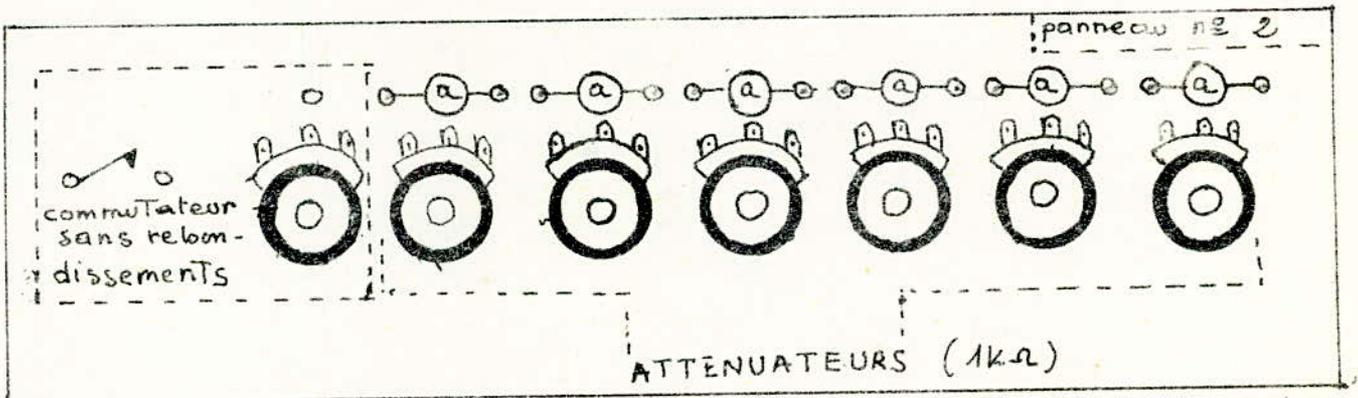
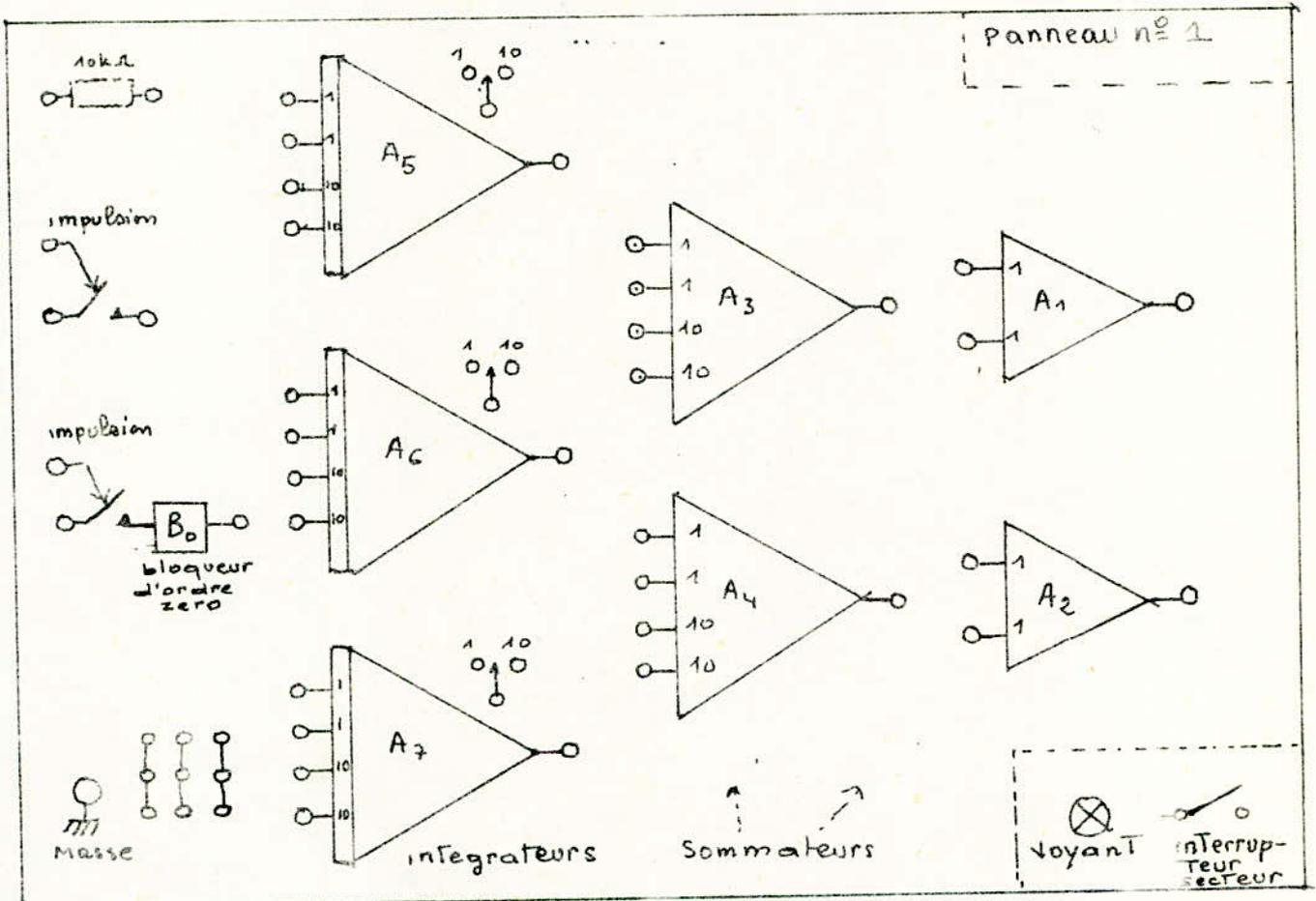
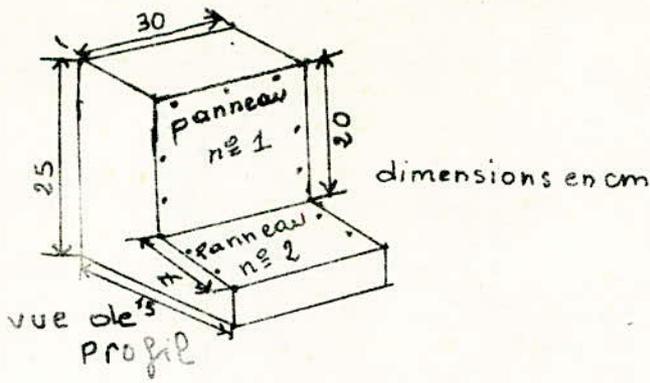


fig III. 15

Chapitre IV. MANIPULATIONS

IV. 1 But

Le but de la manipulation est double :

- d'une part montrer qu'un système continu stable devient instable si on l'échantillonne à une certaine fréquence.

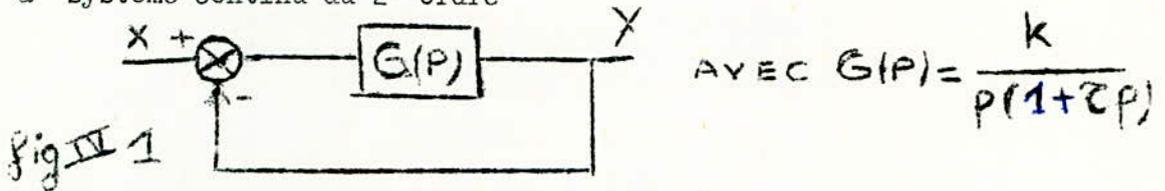
* Déterminer le gain critique k_c pour une fréquence donnée.

* Déterminer la fréquence d'échantillonnage critique f_c pour un gain donné;

- d'autre part montrer comment simuler un correcteur numérique à l'aide d'une boucle de réaction comportant un système de 1° ordre.

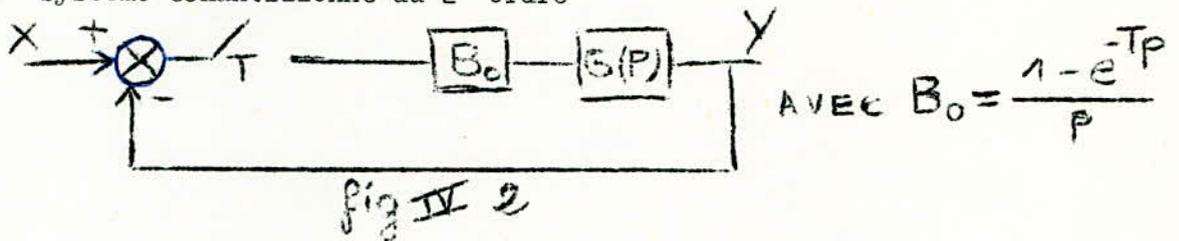
IV. 2 PREPARATION

IV. 2. a système continu du 2° ordre



étudier sa stabilité par EVANS en prenant $\tau = 1 \text{ s}$

IV. 2. b système échantillonné du 2° ordre



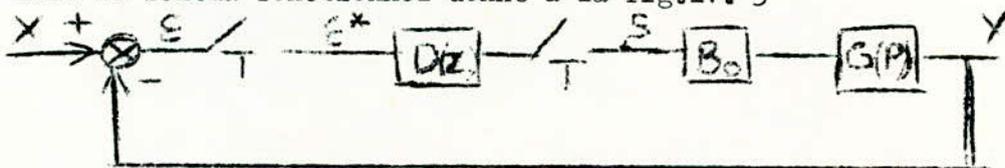
IV. 2. b. 1 simuler ce système

IV. 2. b. 2 étudier sa stabilité par EVANS

IV. 2.c système échantillonné du 2° ordre corrigé

on insère un réseau correcteur dans le schéma de la fig. IV. 2 afin d'augmenter les performances du système et on le simule par une boucle fermée contenant un 1° ordre

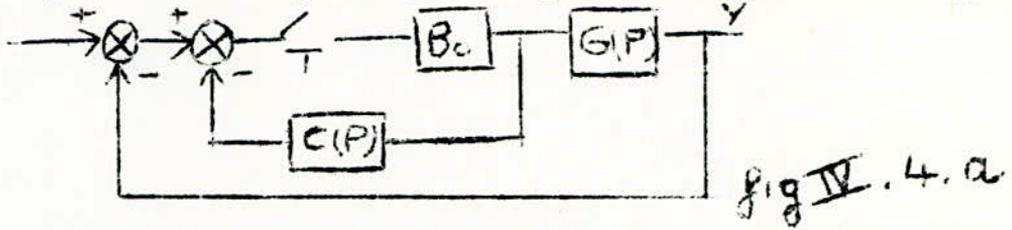
soit le schéma fonctionnel donné à la fig. IV. 3



AVEC $D(z)$: CORRECTEUR NUMERIQUE

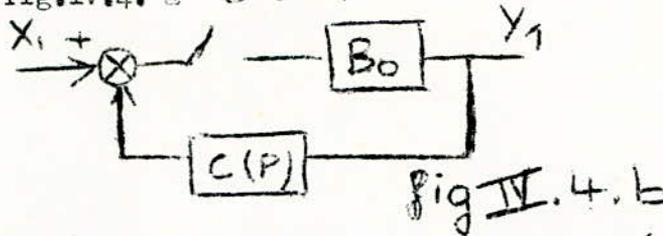
Fig IV. 3

IV. 2. c. 1 trouver la fonction de transfert $C(P) = \frac{K_i}{1+T_c P}$ de façon à ce que le système de la fig. IV. 3 soit équivalent à celui de la fig. IV.4.a



au point S on calculera la sortie du correcteur

IV. 2. c.2. calculer la fonction de transfert de la boucle du réseau linéaire de la fig. IV.4. a



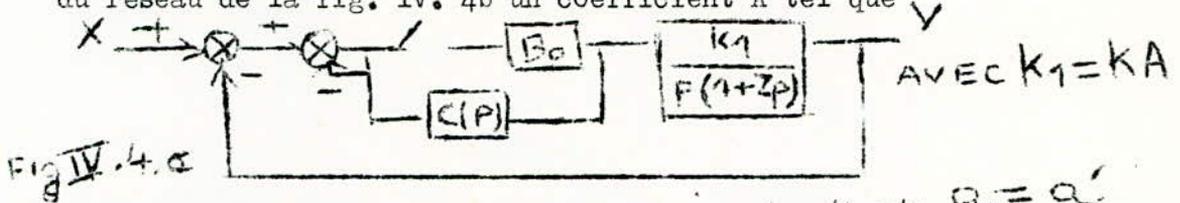
et montrer qu'on peut la mettre sous la forme $\frac{z-a'}{z+b'}$

IV.2.c. 3 calculer le correcteur $D(z)$ de la fig. IV.3 en se basant sur la synthèse du système à réponse pile et la mettre sous la forme

$$D(z) = A \frac{z-a}{z+b}$$

Afin d'avoir l'équivalence entre les deux systèmes, on insère à l'arrière

du réseau de la fig. IV. 4b un coefficient A tel que



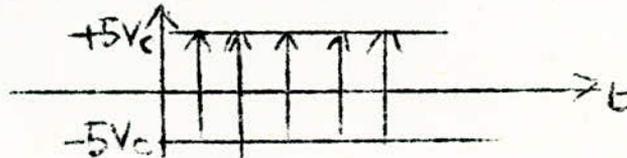
donc le système de la fig. IV. 4.a devient équivalent et $a = a'$
 $b = b'$

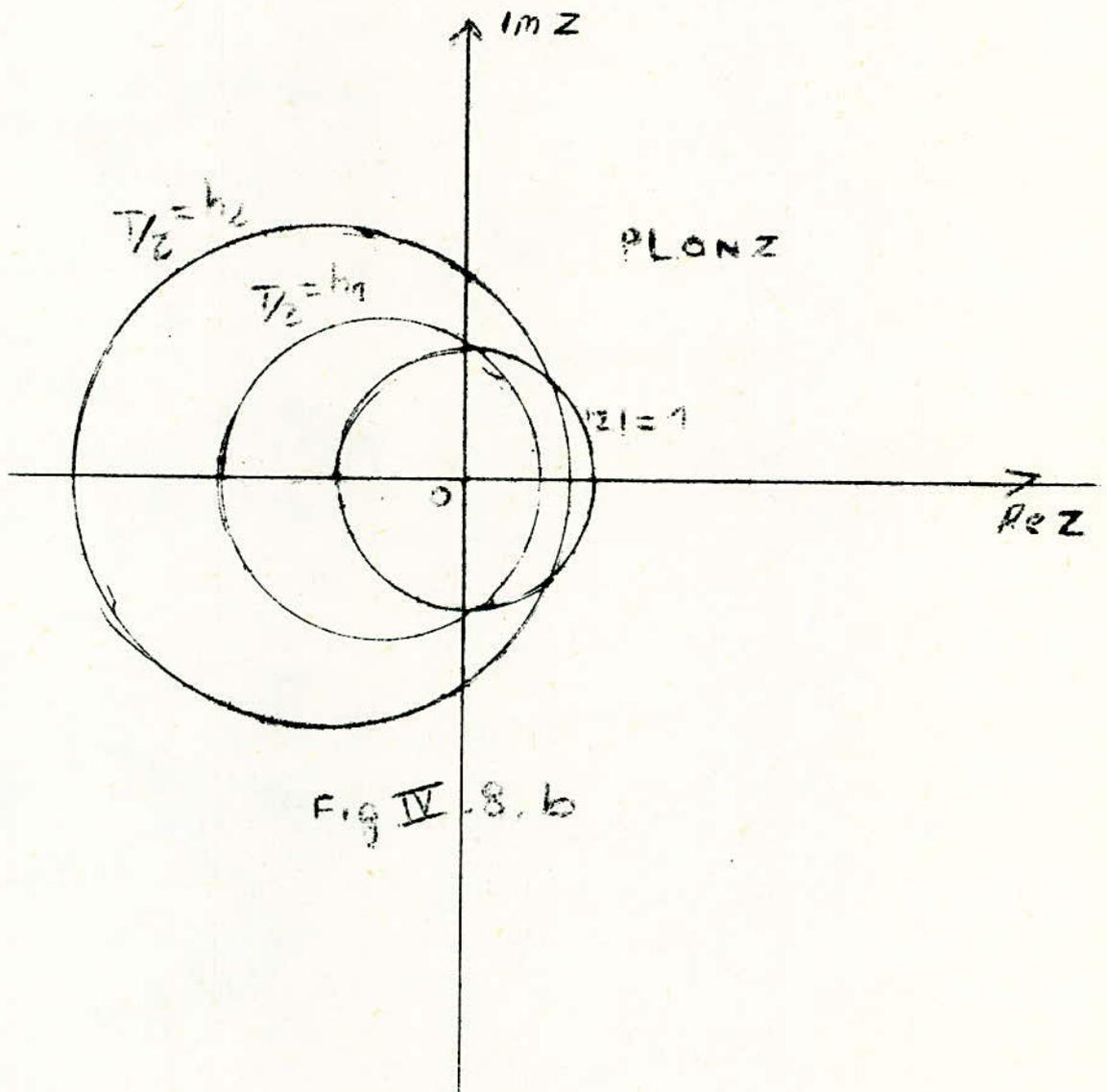
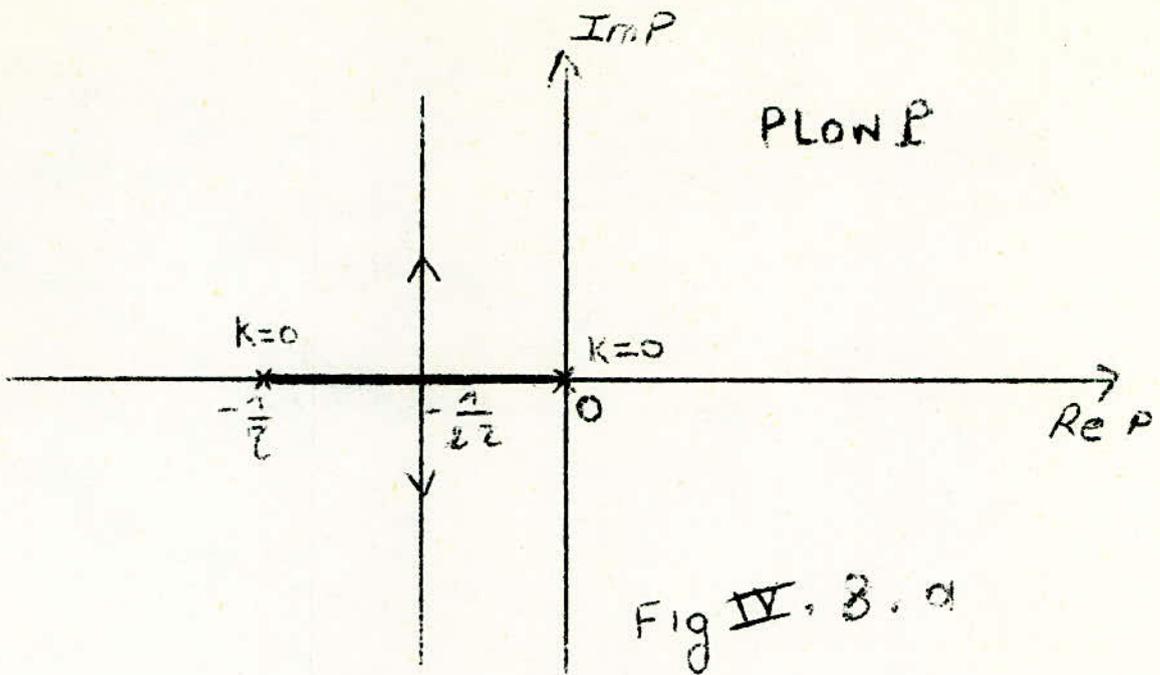
IV. 3 MANIPULATIONS

IV.3. a introduction aux manipulations

- l'alimentation de la porte (C.D. 4016) se fait en $\pm 5V_c$

- l'impulsion d'échantillonnage est délivrée par le générateur PM 5770 et est de la forme

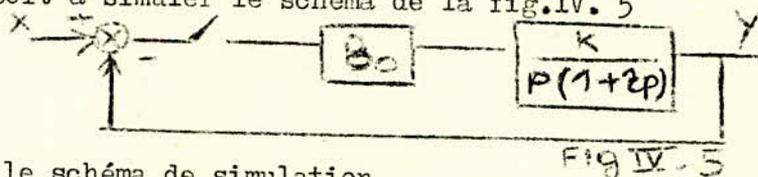




- l'offset peut être réglée en consultant la fiche sur le dos du simulateur
- La réponse transitoire est visualisée sur un oscilloscope à mémoire
- Vérifier le bon fonctionnement de l'échantillonneur-bloqueur
- Pour obtenir des gains véritables, on utilise les atténuateurs.
- Pour avoir l'échelon, on met le commutateur sur la position "1" et on règle l'amplitude à l'aide du potentiomètre le plus à gauche à 1 volt.

IV. 3.b Système du 2° ordre non corrigé

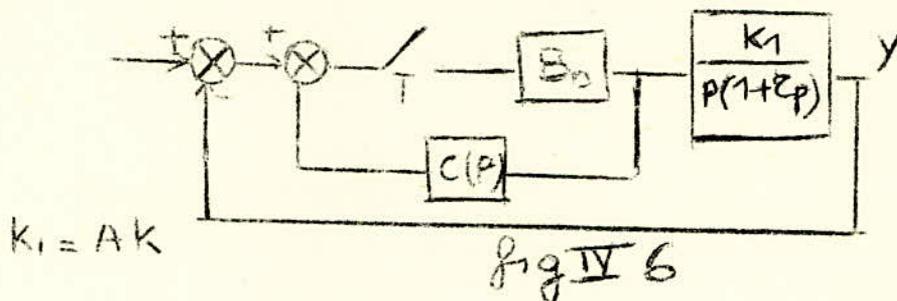
Soit à simuler le schéma de la fig.IV. 5



- cabler le schéma de simulation
- Attaquer l'entrée par l'échelon et relever la courbe $y(t)$
- Vérifier la condition de stabilité et la comparer à la valeur théorique

IV.3. c Système du 2° ordre corrigé

- A, K_1 et Z_c étant calculés, simuler le schéma de la fig.IV.6



$$K_1 = AK$$

- cabler le schéma de simulation
- Attaquer l'entrée à l'aide de l'échelon de 1 volt
- Relever la courbe et la comparer à la précédente conclusion sur la correction

IV. 3. d Matériels utilisés

- * Simulateur
- * Générateur d'impulsions PM 6770
- * Oscilloscope à mémoire 1201 A HP
- * Générateur de fonctions carrée et sinusoidale GBF 515

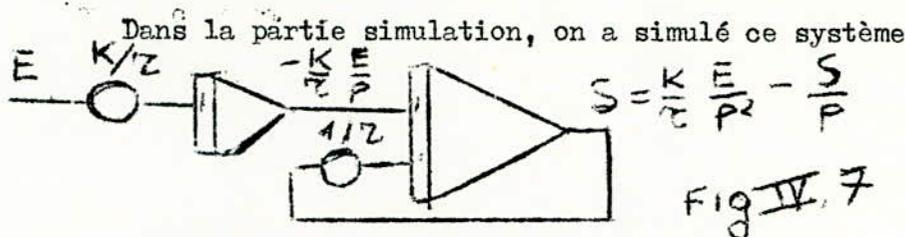
IV. 4 Résultats théoriques et expérimentaux

IV. 4. a Résultats théoriques

IV. 4. a. 1 Système du 2) ordre non corrigé

Considérons le système de la fig. IV. 2

IV. 4.a.2 Simulation de ce système



IV.4.a.3 Stabilité par EVANS (fig. IV. 8. b) $\tau = T$

on a
$$B_0 G(p) = \frac{K(1 - e^{-T/p})}{p^2(1 + \tau p)}$$

En décomposant en éléments simples et en prenant les transformées en Z, on en déduit

$$B_0 G(z) = Kz \left[\frac{T}{z} - 1 + e^{-T/z} \right] \frac{z+b}{(z-1)(z - e^{-T/z})}; \quad b = \frac{1 - e^{-T/z}}{T/z - 1 + e^{-T/z}}$$

l'équation caractéristique étant

$$1 + B_0 G(z) = 0$$

en posant $z = x + iy$ on déduit le lieu des racines

$$\begin{cases} y^2 + (x+b)^2 = b^2 + b + (1+b)e^{-T/z} \\ y = 0 \end{cases}$$

ce lieu qui comprend le cercle de centre $(-b, 0)$, la partie de l'axe réel $e^{-T/z} < z < 1$ et $-\infty < x < -b$

on obtient la valeur critique K_c au delà de laquelle le système devient instable en prenant l'intersection de ce cercle avec le cercle unité.

Entre K_c , τ et T on obtient la relation

$$K_c = \frac{1 - e^{-T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}(1 + T/\tau)}$$

dans notre cas, on prend $\tau = 1 \text{ s}$ et on trace la courbe $K_c = f(T)$

(voir fig. IV. 9)

4. a. 4 SYSTEME du 2^{eme} ORDRE CORRIGE

4. a. 4.1 Calcul du reseau lineaire C(P)

Considérons la fig IV. 4. B

$$\text{on a } C(P) = \frac{ki}{1+r_i p} \text{ et } B_0 = \frac{1-e^{-TP}}{P}$$

$$\text{La fonction de transfert } \frac{Y_1}{X_1} = D'(z) = \frac{1}{1+B_0 C(z)}$$

$$B_0 C = \frac{1-e^{-TP}}{P} \cdot \frac{ki}{1+r_i p} = ki (1-e^{-TP}) \left[\frac{1}{P} - \frac{r_i}{1+r_i p} \right]$$

par transformation en z on a :

$$B_0 C(z) = ki (1-z^{-1}) \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T/r_i}} \right] = ki \left[\frac{1-e^{-T/r_i}}{z-e^{-T/r_i}} \right]$$

Tout calcul fait donne :

$$D'(z) = \frac{z - e^{-T/r_i}}{z + ki [1 - e^{-T/r_i}] - e^{-T/r_i}} = \frac{z - a'}{z + b'} \text{ avec } \begin{cases} a' = e^{-T/r_i} \\ b' = ki(1 - e^{-T/r_i}) - e^{-T/r_i} \end{cases}$$

4. a. 4.2 Calcul du correcteur de la fig IV. 3

$$\text{on a } \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{D(z) H(z)}{1 + D(z) H(z)} = T(z) \quad (1)$$

$$G(P) = \frac{k}{P(1+r_i p)} ; H(z) = \overline{B_0 G}(z)$$

$$\overline{B_0 G}(p) = k(1-e^{-TP}) \left[\frac{1}{p^2} - \frac{r}{p} + \frac{r^2}{1+r_i p} \right]$$

$$H(z) = k(1-z^{-1}) \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{rz}{z-1} + \frac{rz}{z-e^{-T/r_i}} \right]$$

$$= \frac{k [T + r(e^{-T/r_i} - 1)] z + k[r(1 - e^{-T/r_i}) - T e^{-T/r_i}]}{(z-1)(z - e^{-T/r_i})} = \frac{\alpha z + \beta}{(z-1)(z - e^{-T/r_i})}$$

$$= \frac{\alpha z^{-1} (1 + \beta/\alpha z^{-1})}{(1-z^{-1})(1 - z^{-1} e^{-T/r_i})}$$

$$\text{de (1) on tire } D(z) = \frac{T(z)}{[1 - T(z)] H(z)}$$

il faut d'après la condition (6) du chap I. C que T(z) soit de la forme :

$$T(z) = z^{-1} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} z^{-1} \right) (r_0 + r_1 z^{-1} + \dots) \quad (a)$$

courbes du reseau du 2^{em}e ordre non corrigé

$\tau = 15$

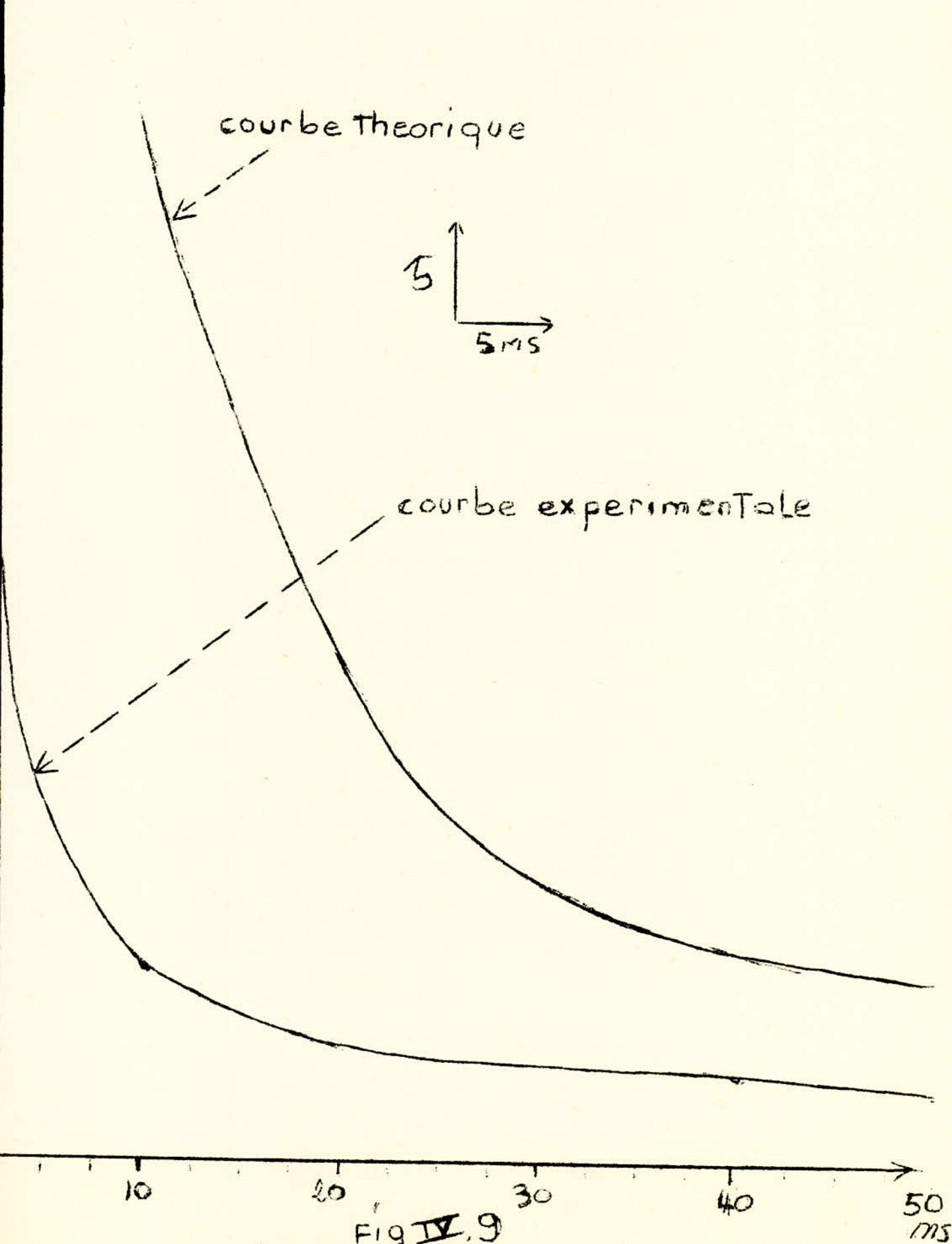


Fig IV, 9

50 ms

et que d'après la condition (5) du même chap. $1-T(z)$ soit de la forme

$$1-T(z) = (1-z^{-1})(q_0 + q_1 z^{-1}) \quad (b)$$

en identifiant (a) et (b) on aura : $r_1 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \beta/\alpha r_0 = q_1 \\ r_0 = q_0 - q_1 \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} r_0 = 1 - \frac{\beta}{\alpha} r_0 \Rightarrow \\ r_0 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{array} \right\}$

en remplaçant α et β par leurs valeurs on aura :

$$r_0 = \frac{T + \tau (e^{-T/\tau} - 1)}{T(1 - e^{-T/\tau})}$$

en remplaçant dans $D(z)$ on trouve finalement

$$D(z) = \frac{1}{kT(1 - e^{-T/\tau})} \cdot \frac{z - e^{-T/\tau}}{z + q_1} = A \frac{z - a}{z + b}$$

$$\text{avec } A = \frac{1}{kT(1 - e^{-T/\tau})} ; a = e^{-T/\tau} ; b = q_1 = \frac{\tau(1 - e^{-T/\tau}) - T e^{-T/\tau}}{T(1 - e^{-T/\tau})}$$

Pour l'équivalence on a

$$k_1 = Ak = \frac{1}{T(1 - e^{-T/\tau})} ; a = a' \Rightarrow \tau = \tau_i$$

$$b = b' \Rightarrow k_i(1 - e^{-T/\tau}) - e^{-T/\tau} = \frac{\tau(1 - e^{-T/\tau}) - T e^{-T/\tau}}{T(1 - e^{-T/\tau})}$$

d'où on peut calculer k_i et τ_i pour T et τ donnés

on peut vérifier en outre que la condition (4) du même chap. est satisfaite.

$$H(z, m) = k \frac{z^{-1}}{z} \left[\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2} - \frac{\tau}{z-1} + \frac{\tau e^{-mT}}{z - e^{-T/\tau}} \right]$$

$$= \frac{k}{z} \frac{z^2 [mT + \tau(e^{-T/\tau} - 1)] + z [T(1 - m - m e^{-T/\tau}) + \tau(1 + e^{-T/\tau} z e^{-mT/\tau})] + a_0(m)}{(z-1)(z - e^{-T/\tau})}$$

$$= \frac{k}{z} \frac{a_2(m)z^2 + a_1(m)z + a_0(m)}{(z-1)(z - e^{-T/\tau})}$$

$$\text{on vérifie que } a_2(m) + a_1(m) + a_0(m) = T(1 - e^{-T/\tau}) = \text{cte}$$

(indépendante de m)

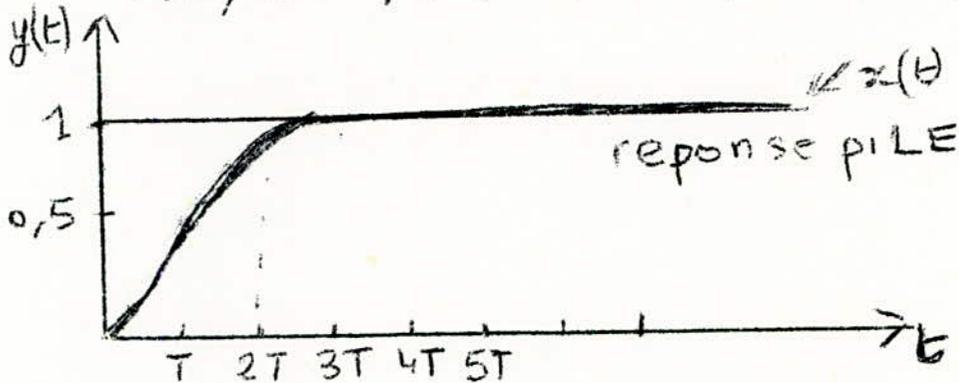
En revenant aux expressions de k_1 , τ_i et k_i on établit le tableau de valeurs suivantes :

$$T_c = 1 \text{ s}$$

T/ms	40	60	80	100	150	200
K _n	625	277	156,3	100	47,6	27,5
K _c	49	32,3	24	14,7	9,86	7,24

$$Y(z) = T(z) X(z)$$

pour $T = 0,2 \text{ s}$ $T(z) = 0,5 z^{-2} (1 + z^{-1})$
 avec $X(z) = \frac{z}{z-1}$ (echelon unite)
 d'où $Y(z) = 0,5 z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$



IV.4.b Résultats expérimentaux

IV.4.b.1 Système du 2^o ordre non corrigé

On fixe T et on fait varier K jusqu'à $K=K_c$ puis on fixe K et on fait varier T jusqu'à T_c et on trace la courbe expérimentale de la fig. IV.9. On obtient la même allure mais les valeurs sont assez différentes, ceci est dû à la faible précision des composants, des capacités parasites et aux erreurs inhérentes à la numulation.

IV.4.b.2 Système du 2° ordre corrigé

On part d'un système qui est instable, on insère un correcteur C(P) en amenant une stabilité puis on agit sur les éléments de telle façon à obtenir une réponse plate.

Pour $T = 0,25$ sec on trouve $K_1 = 16$
 $\zeta = 1$ sec $K_i = 5,1$

alors que les résultats théoriques donnent $K_1 = 27,5$
 $K_i = 7,2$

pour les mêmes causes on a des différences.

IV.5 CONCLUSION

La maquette réalisée a donné les résultats assez conformes avec la théorie. Elle peut être utilisée de ce fait comme un bon sujet de travaux pratiques des systèmes asservis.

Plusieurs applications émanent de la théorie des S.A.L.E.

- simulateur de vol d'avion
- simulateur d'une centrale thermique
- simulateur de réacteur nucléaire etc...

Notons en outre que notre simulateur résout les équations différentielles avec conditions initiales nulles.

TABLEAU DES TRANSFORMÉES EN "P" ET EN "Z"

$f(t)$	$F(p)$	$F(z)$	$F(z, m)$
$\delta(t)$	1	1 ou z^0	0
$u(t)$	$1/p$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
t	$1/p^2$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$1/(p+a)$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
$t e^{-at}$	$1/(p+a)^2$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{T e^{-amT} [e^{aT} + m(z-e^{-aT})]}{(z-e^{-aT})^2}$
$\delta(t-kT)$	e^{-kTp}	z^{-k}	z^{m-1-k}
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$\frac{z \sin m \omega T + \sin (1-m) \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$\frac{z \cos m \omega T + \cos (1-m) \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\text{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\frac{z \text{sh} \omega T}{z^2 - 2z \text{ch} \omega T + 1}$	$\frac{z \text{sh} m \omega T + \text{sh} (1-m) \omega T}{z^2 - 2z \text{ch} \omega T + 1}$
$\text{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\frac{z(z - \text{ch} \omega T)}{z^2 - 2z \text{ch} \omega T + 1}$	$\frac{z \text{ch} m \omega T - \text{ch} (1-m) \omega T}{z^2 - 2z \text{ch} \omega T + 1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z e^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$	$\frac{[z \sin m \omega T + e^{-aT} \sin (1-m) \omega T] e^{-amT}}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - z e^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$	$\frac{[z \cos m \omega T - e^{-aT} \cos (1-m) \omega T] e^{-amT}}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$\frac{a t}{T}$	$\frac{1}{p - \frac{1}{T} \ln a}$	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{a^m}{z-a}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT}) z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$	$\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$

BIBLIOGRAPHIE

- Systèmes et asservissements lineaires ECHANTILLONNES
Y. SEVELY DUNOD 1973
- AUTOMATIQUE TOME 2
R. PRUDHOMME MASSON ET CIE 1974
- Les systèmes asservis
J. THURIN EYROLLES 1969
- ETUDES PRATIQUES DE L'Amplificateur opérationnel
M. MARSTON EYROLLES 1977
- Aide memoire Automatique
P. VIDAL DUNOD 1978

