

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Industriel

Mémoire du Projet de Fin d'Etudes d'Ingénieur d'état en génie industriel

Thème

**Contribution à la mise en œuvre de l'outil Value at Risk
pour l'estimation du risque de crédit au sein de
BNP PARIBAS EL DJAZAÏR**

Présenté par :

M. TAHCHI Lakhdar

Dirigé par :

M. ATIK Fahim

M. ABBAOUI Sabir

Promotion : juin 2008

A ma petite famille

REMERCIEMENTS

Ce projet n'aurait pu voir le jour sans l'aide et le soutien de nombreuses personnes, aussi je voudrais simplement leur exprimer ici toute ma reconnaissance et ma gratitude.

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à M^r F.ATIK, pour sa continuelle disponibilité, pour ses précieux conseils et indications.

Que soit également remercié ici M^r S. ABBAOUI auquel je dois de précieuses orientations, ainsi pour son encouragement.

Je remercie les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail.

Mes remerciements s'adressent au corps enseignant du Département Génie Industriel, à leur tête M^{elle} N. ABOUN, auxquels je dois ma formation d'ingénieur.

Je prie M^r. H. LARBI et M^{elle} H. BENACHOUR de trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour leur accueil chaleureux et l'intérêt qu'ils n'ont cessé de témoigner à mon égard.

Je ne saurais omettre de remercier M^r. B. TAHCHI pour sa contribution à l'élaboration de ce travail.

الملخص

إن النشاط الأساسي للبنوك، هو إعطاء قروض لمختلف الزبائن ولكن عدم إرجاع بعض الزبائن الديون، يترتب عليه عدة نتائج تصل إلى حد اختلال توازن النظام المالي الدولي. لذلك البنوك مجبرون على حساب القيمة المعرضة للخطر وتخصيص رأس مال مخصص لحفظ سيولتها والحفاظ على توازن النظام المالي الدولي.

الهدف من هذا العمل هو حساب القيمة المعرضة للخطر باستعمال نموذج رياضي موافق لقروض BNP PARIBAS EL DJAZAÏR.

كلمات مفتاحية

القيمة المعرضة للخطر، خطر القرض، تسيير الأخطار، رأس المال الاقتصادي، دالة كثافة الضياع.

Résumé

L'activité principale d'une banque est d'accorder des crédits à des différents types de clients. Mais certain clients présentent un risque de ne pas honorer leurs dettes à temps ou font défaut. La banque est appelée, alors, à mesurer l'exposition à ce risque et allouer le capital nécessaire qui assure sa solvabilité pour préserver le système financier international et se prémunir de toute situation périlleuse.

L'objectif de ce travail est d'évaluer le risque potentiel du crédit par la Value at Risk en appliquant un modèle mathématique convenable aux caractéristiques du portefeuille de crédit de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR.

Mots clés

Value at Risque, CreditRisk⁺, CreditMetrics, Risque de crédit, Gestion du risque, Fonction de densité des pertes, Capital économique.

Abstract

The principal activity of banks is to grant loans to different kinds of customers. But some customers make default to honor their debts. The bank must allocate the necessary capital by measuring the credit risk to ensure her solvency, to preserve international financial system and avoid all perilous situations.

Our work aim's is measuring the credit risk by applying a suitable mathematical model to calculate the Value at Risk of BNP PARIBAS EL DJAZAÏR portfolio.

Key words

Value at Risk, CreditRisk⁺, CreditMetrics, Credit Risk, Risk Management, economic capital, probability density function.

TABLE DES MATIERES

| | |
|---|-----------|
| INTRODUCTION GENERALE ET PROBLEMATIQUE | |
| CHAPITRE I. LA GESTION DU RISQUE DANS LES INSTITUTIONS FINANCIERES | 3 |
| 1. Définition du risque | 3 |
| 2. Les principaux risques financiers | 3 |
| 2.1 Le risque de solvabilité | 3 |
| 2.2 Le risque de marché | 3 |
| 2.3 Le risque de liquidité | 3 |
| 2.4 Le risque opérationnel | 4 |
| 2.5 Le risque de crédit | 4 |
| 2.5.1. Le risque de défaut | 4 |
| 2.5.2. Le risque de dégradation du spread | 5 |
| 2.5.3. Le risque de recouvrement | 5 |
| 3. La gestion du risque | 6 |
| 3.1 Définition de la gestion du risque financier | 6 |
| 3.2 Les étapes de la gestion du risque | 6 |
| 3.2.1. Identification du risque | 6 |
| 3.2.2. Evaluation et mesure du risque | 7 |
| 3.2.3. Sélection des techniques de gestion du risque | 7 |
| 3.2.4. Mise en œuvre | 7 |
| 3.2.5. Contrôle et Reporting | 7 |
| 4. Analyse complémentaire | 7 |
| 4.1 Stress-testing | 8 |
| 4.1.1. Types de scénarios | 8 |
| 4.1.2. Sélection des scénarios | 10 |
| 5. Les finalités de la gestion des risques | 10 |
| 6. Les principaux acteurs de l'univers bancaire | 11 |
| 6.1 Agences de notation (de <i>Rating</i>) | 11 |
| 6.2 Les autorités réglementaires | 11 |
| 7. Composantes du risques Crédit | 11 |
| 7.1 Pertes attendues | 12 |
| 7.2 Pertes inattendues | 12 |
| 8. Eléments de la quantification du risque de crédit | 13 |
| 8.1 La fonction de densité des pertes (Probability Density Function) | 13 |
| 8.2 Le capital économique | 13 |
| Conclusion | 14 |
| CHAPITRE II. LA VALUE AT RISK | 15 |
| 1. Origine et définition de la Value At Risk | 15 |
| 1.1 Aperçu historique et adoption de la Value At Risk | 15 |
| 1.2 Définition de la Value At Risk | 16 |
| 1.2.1 Exemple illustratif | 16 |
| 1.3 Formulation mathématique de la Value At Risk | 17 |
| 1.4 La démarche générale pour le calcul de la Value At Risk | 18 |
| 2. Méthodologie de calcul de la Value At Risk | 19 |

| | | |
|---|--|-----------|
| 2.1 | Les données nécessaires | 19 |
| 2.2 | Hypothèse distributionnelle et le choix des paramètres | 20 |
| 3. | Evaluation de la robustesse et validation du modèle | 21 |
| 3.1 | Back-Testing | 21 |
| 3.2 | Stress-Testing | 22 |
| 4. | Adaptation de la VaR au Risque de crédit | 23 |
| 5. | Discussion critique de la Value At Risk | 24 |
| 5.1 | Les forces de la Value At Risk | 24 |
| 5.2 | Limites de la Value At Risk | 25 |
| CHAPITRE III. MODELISATION DU RISQUE DE CREDIT | | 27 |
| 1. | Les particularités du risque de crédit | 27 |
| 1.1 | La nature de l'événement de défaut | 27 |
| 1.2 | Effets de cycle | 27 |
| 2. | Architecture d'un modèle de défaut | 27 |
| 2.1 | Evaluation du risque au niveau individuel | 28 |
| 2.1.1. | La détermination des classes de risque | 28 |
| 2.1.2. | La mesure des probabilités de migration | 28 |
| 2.1.3. | La mesure de l'exposition en cas de défaut (EAD) | 30 |
| 2.1.4. | La mesure de la perte en cas de défaut (LGD) | 30 |
| 2.2 | Evaluation du risque au niveau du portefeuille | 31 |
| 2.2.1. | Les caractéristiques générales de l'approche de portefeuille | 31 |
| 2.2.2. | La construction de la distribution de probabilité des pertes futures | 32 |
| 3. | Validation du modèle | 34 |
| 4. | Le modèle CreditMetrics | 34 |
| 4.1 | Le cadre général de CreditMetrics | 34 |
| 4.2 | Mesure du risque au niveau individuel | 35 |
| 4.3 | Mesure du risque au niveau du portefeuille | 37 |
| 4.3.1. | Valeurs futures du portefeuille | 38 |
| 4.3.2. | Probabilités de migration jointes | 38 |
| 4.3.2.1. | Cas où les corrélations sont nulles | 38 |
| 4.3.2.2. | Introduction des corrélations | 39 |
| 4.3 | La simulation Monte Carlo | 43 |
| 4.4 | Les limites du modèle CreditMetrics | 43 |
| 5. | Le modèle CreditRisk+ | 44 |
| 5.1 | La démarche | 44 |
| 5.2 | Modélisation à taux de défaut fixes | 46 |
| 5.2.1. | Occurrence de défauts | 46 |
| 5.2.2. | Pertes de défaut | 47 |
| 5.3 | Passage à des taux de défaut aléatoires | 50 |
| 5.3.1. | Incertitude des taux de défaut | 50 |
| 5.3.2. | Analyse par secteur | 51 |
| 5.3.3. | Occurrence de défauts | 53 |
| 5.3.4. | Distribution des pertes de défaut | 54 |
| 5.4 | Avantages du modèle | 55 |
| 5.5 | Faiblesses du modèle | 56 |

| | |
|---|-----------|
| CHAPITRE IV. APPLICATION SUR LE PORTEFEUILLE DE BNP PARIBAS EL DJAZAIR | 57 |
| 1. Organisation du groupe BNP Paribas et place du CC&R | 57 |
| 1.1 Organisation de l'entité CRI | 57 |
| 1.2 Mission de la fonction CC&R dans les sites | 58 |
| 2. Politique de notation du Groupe BNP PARIBAS | 59 |
| 2.1 Principes généraux | 59 |
| 2.2 La note de contrepartie | 60 |
| 2.3 Processus de notation | 61 |
| 3. Constitution du portefeuille et traitement des données | 63 |
| 3.1 Collecte des données | 63 |
| 3.2 Traitement des données | 63 |
| 3.2.1. Notations des contreparties | 63 |
| 3.2.2. Moyennes et volatilité du taux de défaut | 64 |
| 3.2.3. Les TRG des crédits en dépassement d'autorisation | 64 |
| 3.2.4. Calcul des expositions pour certains types de crédits | 65 |
| 4. Analyse descriptive des données | 65 |
| 4.1 Ventilation par classe de risque ou de rating | 65 |
| 4.2 Répartition par secteur d'activité | 65 |
| 4.3 Caractéristiques du portefeuille de crédit de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR | 68 |
| 5. Inputs du modèle CreditRisk+ | 68 |
| 6. Illustration du mécanisme d'agrégation du risque dans CreditRisk+ | 71 |
| 7. Le calcul de la VaR | 72 |
| 8. Analyse de l'effet de la diversification | 75 |
| 8.1 Commentaire sur les résultats | 76 |
| 8.2 Conclusion | 76 |
| CONCLUSION GENERALE | 78 |
| BIBLIOGRAPHIE | |
| ANNEXES | |

LISTE DES FIGURES

| | |
|--|----|
| Figure 1.1 - Processus de gestion du risque dans une institution financière | 06 |
| Figure 1.2 - Fonction de densité des pertes et capital économique | 14 |
| Figure 2.1 - la Value-at-Risk à partir de la fonction de répartition et de la fonction de densité de la loi normale | 17 |
| Figure 2.2 – Principe du Back-testing | 22 |
| Figure 3.1 - Architecture d'un modèle de défaut | 28 |
| Figure 3.2 - Relation entre facteurs de risque systématiques et taux de défaut | 29 |
| Figure 3.3 - Des expositions aux pertes en cas de défaut | 31 |
| Figure 3.4 - Cadre général de CreditMetrics | 35 |
| Figure 3.5 - Mesure du risque au niveau individuel | 35 |
| Figure 3.6 - Mesure du risque au niveau du portefeuille | 37 |
| Figure 3.7 - Généralisation du modèle de Merton pour la prise en compte des ratings | 40 |
| Figure 3.8 - Impact des corrélations sur les défauts | 42 |
| Figure 3.9 - Organigramme de la démarche suivie par CreditRisk+ | 45 |
| Figure 3.10 - Volatilité du taux de défaut à horizon donné | 51 |
| Figure 3.11 - Forme de la PDF en introduisant la volatilité du taux de défaut | 51 |
| Figure 4.1 - Organigramme de la structure GRM-CRI | 58 |
| Figure 4.2 - Répartition des expositions sur les classes de risque | 66 |
| Figure 4.3 - Répartition du nombre des entreprises par classe du risque | 66 |
| Figure 4.4 - Répartition du nombre des entreprises et les expositions par secteur | 67 |
| Figure 4.5 - Expositions nettes | 69 |
| Figure 4.6 - Le taux de défaut moyen pour une année | 69 |
| Figure 4.7 - Fonction de densité des pertes | 73 |
| Figure 4.8 - Effet de la diversification | 76 |

LISTE DES TABLEAUX

| | |
|---|----|
| Tableau 3.1 - Exemple de matrice de transition | 36 |
| Tableau 3.2 - Courbe zéro-coupon | 37 |
| Tableau 3.3 - Valeurs futures du portefeuille | 38 |
| Tableau 3.4 - Les probabilités de migration jointes quand les corrélations sont nulles | 39 |
| Tableau 3.5 - Les seuils de transition | 41 |
| Tableau 3.6 - Les probabilités jointes quand les corrélations ne sont pas nulles | 41 |
| Tableau 4.1 – Répartition des engagements par classe de risque | 65 |
| Tableau 4.2 – Ventilation : exposition et nombre d'entreprises / secteur d'activité | 67 |
| Tableau 4.3 - Moyennes des taux de défaut BNP PARIBAS / Moody's | 70 |
| Tableau 4.4 - Notations | 71 |
| Tableau 4.5 - Décomposition du portefeuille en bandes | 71 |
| Tableau 4.6 - Probabilités de défaut | 72 |
| Tableau 4.7 - Paramètres à introduire pour chaque titre | 73 |
| Tableau 4.8 – Les moments de la distribution des pertes | 74 |
| Tableau 4.9 - Value at Risk à différents niveaux de confiance | 74 |
| Tableau 4.10 - Value at Risk à différents niveaux de confiance pour un seul secteur | 75 |
| Tableau 4.11 - Value at Risk à différents nombres de secteurs | 75 |

ACRONYMES ET ABREVIATIONS

| | |
|-----------------|---|
| EAD | Exposition At time of Default |
| EL | Expected Losses |
| CC&R | Credit Control & Reporting |
| CRI | Credit Risk International |
| CSFB | Crédit Suisse First Boston |
| CSFP | Credit suisse Financial Products |
| GRM | Group Risk Management |
| LGD | Loss Given Default |
| PD | probabilité de défaut |
| PDF | Probability Density Function |
| SCO | Senior Credit Officer |
| SEC | Securities and Exchanges Commission |
| SFDI | Services Financiers et Banque de Détail à l'International |
| S&P | Standard & Poor's |
| TRG | Taux de Récupération Global |
| UL | Unexpected Losses |
| VAR | Value-at-Risk |

INTRODUCTION GENERALE ET PROBLEMATIQUE

Les désastres financiers engendrés par les faillites bancaires durant les dernières décennies (Continental Illinois, LTCM, etc.) ont fait témoignage d'une grande fragilité du système financier international, ces faillites ont été causées par une faiblesse du niveau des fonds propres dont disposaient les banques à l'époque.

Dès lors, la communauté bancaire a été soumise à une réglementation prudentielle exigeant la détention de fonds propres adéquats permettant la couverture du risque inhérent à l'activité bancaire, principalement le risque de crédit, afin de préserver la stabilité du système financier international.

La sphère bancaire assiste, actuellement, à de nombreuses mutations : expansion des marchés des titres financiers et le changement de la philosophie réglementaire en cours. Les banques sont passées de l'approche par supervision prudentielle à la concurrence prudentielle. Elles doivent, dorénavant, adopter leurs propres modèles (approche de notations internes avancée) pour l'évaluation du risque encouru et le calcul du capital réglementaire associé à ce risque.

Dans cette optique, le groupe BNP PARIBAS s'est engagé dans un processus d'harmonisation de toutes ses filiales (BNP PARIBAS EL DJAZAÏR, étant une de ses filiales) en terme de gestion du risque de crédit, dans le cadre de l'adoption de l'approche des modèles internes.

Pour cela, BNP PARIBAS EL DJAZAÏR doit développer un dispositif de gestion fine du risque de crédit basé sur les notations internes :

- Etablir une politique de tarification qui intègre le risque en tant que principal paramètre.
- Allouer d'une manière optimale les fonds propres adéquats (Capital réglementaire).

Cet objectif nécessite le déploiement d'un outil fiable de quantification du risque encouru ce qui constitue notre problématique.

Plusieurs outils de mesures existent, mais la Value at Risk en est l'outil par excellence. Depuis son apparition, la Value at Risk s'est imposée pour la qualité des résultats qu'elle fournisse et sa facilité de mise en œuvre.

Le présent travail a pour objectif de mettre en évidence les modèles de calcul de la Value at Risk adapté au risque de crédit et appliquer l'un de ces modèles dans l'estimation du risque du portefeuille de crédit de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR.

Pour répondre à la problématique posée, nous avons adopté la démarche suivante :

Le premier chapitre est consacré à la compréhension de la notion du risque financier, sa gestion et ses différents types. Une fois la notion du risque appréhendée, nous abordons le processus de la gestion du risque dans une institution financière et nous nous étalons sur l'analyse complémentaire à l'évaluation du risque qui est transversale au processus ainsi mentionnée.

Le second chapitre est dédié à la Value at Risque, nous passons en revue tous les aspects théoriques liés à ce concept et sa méthodologie de mise en œuvre.

Le troisième chapitre aura pour objectif la mise en évidence des étapes de la modélisation du risque de crédit et nous y exposons les deux modèles de référence, en cernant chaque modèle par la présentation de son principe, ses hypothèses, ainsi que ses avantages et ses inconvénients.

C'est dans le chapitre quatre, que nous allons présenter la structure d'accueil et sa politique de notation. Nous constituons, ainsi, l'échantillon représentatif du portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR pour appliquer un modèle de calcul de la Value at Risk que l'on retienne sur la base des caractéristiques de l'échantillon en question.

Nous examinons ensuite, à partir des résultats, obtenus l'effet de la diversification du portefeuille détenu par BNP PARIBAS EL DJAZAÏR.

CHAPITRE I. LA GESTION DU RISQUE DANS LES INSTITUTIONS FINANCIERES

Introduction

La gestion des risques est devenue incontestablement l'un des domaines les plus importants pour toute institution financière. Les dernières crises n'ont fait qu'accroître l'intérêt porté à ce sujet. Cette évolution s'est accompagnée également d'une supervision et d'une régulation croissante pour contrôler l'exposition au risque des banques.

1. Définition du risque

Le risque peut être défini comme suit : « c'est un ensemble d'événements simultanés ou consécutifs dont l'occurrence est incertaine et dont la réalisation affecte les objectifs de l'entreprise qui le subit ». [BES'95]

2. Les principaux risques financiers

Le risque désigne l'incertitude qui pèse sur les résultats et les pertes futurs. On distingue traditionnellement cinq grands types de risques financiers.

2.1. Le risque de solvabilité

Le risque de solvabilité est celui de ne pas disposer de fonds propres suffisants pour absorber les pertes éventuelles. Ce risque résulte du montant des fonds propres disponibles d'une part, et du risque encouru d'autre part. Le problème fondamental de l'adéquation en capital, consiste à ajuster de la meilleure manière possible, fonds propres et risques.

2.2. Le risque de marché

Le risque de marché peut être défini comme le risque de perte lié aux variations des conditions de marché. Ce risque prend différentes formes:

- Le risque de change, qui modifie la valeur des avoirs en devises de l'institution;
- Le risque de taux, qui affecte la valeur des instruments de taux;
- Le risque de marché, proprement dit, qui affecte le prix des actions.

2.3. Le risque de liquidité

Il s'agit pour une entreprise, du risque de ne pas pouvoir mobiliser, à un instant donné, assez de liquidité pour faire face à ses engagements. La matérialisation du risque de liquidité peut, en effet, survenir à l'occasion :

- d'un retrait massif des dépôts ou de l'épargne de la clientèle ;
- d'une crise de confiance du marché à l'égard de l'établissement concerné ;
- d'une crise de liquidité générale du marché.

2.4. Le risque opérationnel

Le comité de Bâle définit le risque opérationnel comme étant « *le risque de pertes directes ou indirectes résultant d'une inadéquation ou d'une défaillance attribuable aux procédures, au facteur humain et au système, ou à des causes externes* ». [BAL'03]

2.5. Le risque de crédit

Le risque de crédit peut être défini comme la perte potentielle supportée par un agent économique, suite à une modification de la qualité de crédit de l'une de ses contreparties, ou d'un portefeuille de contreparties, sur un horizon donné.

Le risque de crédit peut prendre trois formes principales :

- Le risque de défaut ;
- Le risque de dégradation du *spread*;
- Le risque de recouvrement.

2.5.1. Le risque de défaut [RIB'99]

Cette première forme de risque est associée à l'occurrence d'un défaut, caractérisée par l'incapacité de la contrepartie à assurer le paiement de ses échéances.

Le comité de Bâle définit le défaut comme suit:

« *Le défaut d'un débiteur intervient lorsque l'un des deux événements ci-dessous se produit, sinon les deux :*

- *La banque estime improbable que le débiteur rembourse en totalité son crédit au groupe bancaire, sans qu'elle ait besoin de prendre des mesures appropriées, telles que la réalisation d'une garantie (si elle existe) ;*
- *L'arriéré du débiteur sur un crédit important dû au groupe bancaire dépasse 90 jours. Les découverts sont considérés comme des créances échues, dès que le client ait dépassé une limite autorisée ou qu'il a été averti, qu'il disposait d'une limite inférieure à l'encours actuel.»*

Les agences de notations (Moody's, S&P et Fitch) considèrent qu'un débiteur est en défaut lorsque l'un des trois événements suivants se produit : [MOO'03]

- Défaut ou retard de paiement des intérêts ou du principal (incluant les retards de paiement ayant fait l'objet d'une négociation) ;
- Faillite du débiteur ;
- Modification du contrat initial où :
 - Le débiteur donne au détenteur du titre de nouvelles valeurs, dans le but de faire diminuer ses obligations financières ;

- La modification a le but apparent d'aider l'emprunteur à éviter le défaut de paiement.

2.5.2. Le risque de dégradation du spread

Sur les marchés financiers où les instruments de crédit font l'objet de cotations régulières, le risque de crédit est évalué par des primes de risque (*spread*), qui traduisent en termes monétaires, la vraisemblance de la réalisation du risque de non remboursement. L'évolution aléatoire de ces *spreads*, constitue elle-même une forme de risque de crédit, dans la mesure où elle agit sur la valeur de marché de ces titres. Il n'est donc pas nécessaire, que le défaut se réalise pour que le risque de crédit affecte négativement la valeur d'un actif ou d'un portefeuille. Il suffit que la vraisemblance de l'événement augmente, suite par exemple à la dégradation d'un rating. Ce risque peut être mesuré au niveau individuel, dans la mesure où il affecte des instruments financiers ou des emprunteurs considérés isolément. Il peut aussi être mesuré au niveau du portefeuille de crédit d'une institution, ce qui conduit à tenir compte des corrélations entre les facteurs de risque, affectant les différentes composantes de ce portefeuille. [ESC'03]

2.5.3. Le risque de recouvrement

Le taux de recouvrement permet de déterminer la proportion des créances qui sera récupérée, en entreprenant des procédures judiciaires, suite à la faillite de la contrepartie.

Ce taux de recouvrement est déterminé par plusieurs facteurs, dont on peut citer :

- La durée des procédures judiciaires, qui varie d'un pays à l'autre ;
- La valeur réelle des garanties ;
- La priorité donnée au règlement de certaines créances.

Il convient de faire remarquer qu'il existe une typologie particulière du risque de crédit qui joue un rôle déterminant lors de sa modélisation. [RIB'99]

a) Risque spécifique

Appelé également risque *intrinsèque* ou risque *idiosyncrasique*, il est indépendant des phénomènes qui affectent l'ensemble des titres. Il résulte uniquement d'éléments particuliers qui affectent tel ou tel titre : c'est la mauvaise gestion de l'entreprise, l'incendie qui détruit son usine ou l'invention technologique qui rend obsolète sa principale gamme de produits, etc.

b) Risque systématique

Le risque *systématique* est la probabilité d'occurrence d'un dysfonctionnement paralysant l'ensemble du système financier dans une vaste zone ou dans le monde entier, par le biais des engagements croisés, première étape avant des faillites en chaîne. Cela conduirait à un effondrement du système financier mondial. Il s'oppose au risque *non-systématique*, qui décrit les risques apparaissant lorsque l'économie mondiale doit faire face à un événement extérieur majeur (tel qu'une guerre).

3. La gestion du risque

Le risque est l'une des dimensions les plus importantes de l'univers bancaire. En effet, toutes les activités de la banque sont génératrices de risques. Savoir définir le risque, l'identifier, le mesurer, allouer les fonds propres adéquats, puis lier ce processus à la prise de décision, est un atout incontestable dans un environnement caractérisé par la concurrence.

Nous jugeons qu'il est de prime de définir le concept de gestion du risque avant d'évoquer son processus.

3.1. Définition de la gestion du risque financier

La gestion des risques est l'ensemble des outils, des techniques et des dispositifs organisationnels, permettant l'identification, la mesure et le suivi des risques. On distingue entre gestion interne et gestion globale. La première, porte sur les risques pris individuellement, et selon leur nature (risque de marché, risque de liquidité, risque de crédit...etc.). Tandis que la gestion globale est un processus holistique, qui suppose une consolidation de tous les risques et la prise en compte de leurs interdépendances.

3.2. Les étapes de la gestion du risque [BOD'01]

Selon R. Merton et Z. Bodie, une gestion saine des risques doit nécessairement suivre le processus représenté par le schéma ci-dessous :

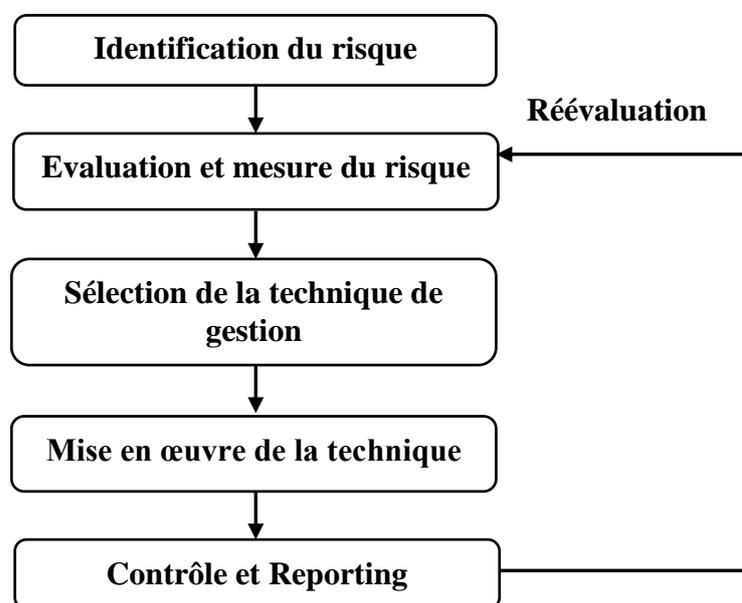


Figure 1.1 – Processus de gestion du risque dans une institution financière

3.2.1. Identification du risque

Pour bien identifier les risques, il faut considérer l'actif à analyser dans sa totalité, et recenser l'ensemble des incertitudes qui peuvent affecter cet actif.

3.2.2. Evaluation et mesure du risque

Elle consiste à quantifier les coûts associés aux risques qui ont été identifiés dans la première étape.

3.2.3. Sélection des techniques de gestion du risque

Il y'a quatre (04) techniques fondamentales pour réduire le risque :

- a) Eviter le risque ;
- b) Prévenir le risque ;
- c) Absorber le risque ;
- d) Transférer le risque.

3.2.4 Mise en œuvre

Une fois que l'on a décidé des techniques à adopter, il s'agit de les mettre en œuvre. Le principe sous-jacent à cette étape du processus, est qu'il faut minimiser les coûts de mise en œuvre de la solution.

3.2.5. Contrôle et Reporting

La gestion du risque requiert un suivi régulier pour s'assurer que les décisions adoptées sont toujours optimales. En effet, au fil du temps, et en fonction des circonstances, de nouvelles expositions au risque peuvent apparaître, les informations sur les probabilités et l'importance des risques peuvent s'affiner.

4. Analyse complémentaire de l'évaluation [DIE'03]

Il est clair, à partir du processus **Fig1.1**, que l'évaluation et la mesure du risque est l'étape clé du processus de gestion du risque car elle donne lieu à un choix de la technique de couverture du risque et qui doit être appropriée. Pour cela l'évaluation s'accompagne d'une analyse complémentaire du risque assuré principalement par le stress-testing.

La quantification et la mesure du risque fait l'objet de notre travail, il nous semble donc judicieux de donner un aperçu concis de l'analyse complémentaire.

L'entreprise doit analyser l'impact des différents facteurs de risque sur le niveau du capital ou du risque d'un portefeuille et cela pour deux raisons. D'une part, parce que la mesure statistique du risque ignore la perte au-delà du niveau de confiance. D'autre part, l'entreprise doit prendre en considération les différentes variables susceptibles d'affecter sa situation financière future et les intégrer dans son plan de gestion et la prise de décision.

Les paramètres initiaux du modèle correspondent à des performances actuelles de l'institution financière et à l'état du marché à la date de modélisation. Ces paramètres peuvent évoluer, dans certains cas de manière extrême, ce qui peut causer une insolvabilité ou des difficultés financières majeures.

En réponse aux résultats des mesures de risque et de stress-testing, l'institution doit gérer ses risques et son capital par l'élaboration des différentes stratégies et la couverture des risques. La gestion du capital consiste à satisfaire les exigences en capital des autorités de contrôle, celle des agences de notation et celle des actionnaires (l'optimisation du rapport risque/rentabilité)

4.1. Stress-testing

Le stress-testing est un terme utilisé dans la pratique financière sans aucune définition courante ou standard précise pour l'élaboration des scénarios de crise. C'est un ensemble de techniques utilisées pour évaluer la vulnérabilité d'un portefeuille (ou d'une société) aux changements de l'environnement économique ou à des événements exceptionnels mais plausibles.

Le plus souvent, le stress-testing est utilisé pour compléter les modèles internes de calcul de la VaR et le système de management.

Outre l'utilisation interne, l'institution doit fournir aux autorités de contrôle les résultats des stress tests les plus défavorables et leurs hypothèses sous-jacentes. Les scénarios peuvent être de différents types, historiques ou hypothétiques, déterministes ou stochastiques.

4.1.1. Types de scénarios

On distingue entre les scénarios historiques ou hypothétiques (dits subjectifs), et les scénarios déterministes ou stochastiques.

Scénarios historique ou hypothétique

L'approche historique est basée sur les expériences observées dans le passé. Les scénarios peuvent être construits à partir des données des crises passées pour estimer l'impact de ces mêmes crises avec le portefeuille actuel, ou à partir des données simulées en appliquant ces événements de crises historiques aux conditions actuelles du marché.

L'approche hypothétique, en revanche, se base sur des événements jugés possibles à l'avenir sachant des changements éventuels des facteurs macro-économiques, socio-économiques ou politiques. Cette méthode ne fait donc pas référence aux données de crises passées. Les scénarios sont élaborés à partir des hypothèses sur les crises potentielles futures.

Contrairement à l'approche historique qui fournit un scénario de crise dont la crédibilité est assurée puisqu'il s'est déjà produit, les scénarios basés sur l'approche subjective sont difficiles à construire et requièrent les différents types d'expertise de la société (expertise financière, actuarielle, comptable, juridique...).

Scénarios déterministes et scénarios stochastiques

Pour mesurer l'impact des mouvements atypiques ou extrêmes, il y a de nombreuses techniques qui peuvent être employées dans le stress-testing. Celles-ci incluent des modèles

déterministes et les différents types de modélisation stochastique, y compris la simulation de Monte Carlo.

a) Scénarios déterministes

L'établissement construit un ensemble de scénarios en répondant à un nombre de questions de type « what if... ? ». Dans ce cas, le scénario est l'exécution du modèle en fixant un nombre de facteurs de risques et ses valeurs particulières, par exemple une augmentation de taux d'intérêt de x points de base. Ces types de scénarios peuvent être historiques ou hypothétiques.

Ces scénarios peuvent être utilisés pour tester la sensibilité à un facteur de risque donné (sensitivity test) ou pour tester l'impact d'un scénario spécifique (scenario analysis). Dans le premier cas, il s'agit d'estimer l'impact d'un ou de plusieurs mouvements d'un facteur de risque particulier. Dans le deuxième cas, le test implique l'estimation de l'effet d'un mouvement simultané d'un groupe de facteurs de risque.

Le choix des scénarios déterministes doit être soumis à des critères de crédibilité spécifiques, pour pouvoir exploiter les résultats obtenus. En effet, les résultats obtenus avec un scénario donné n'est valable que pour ce seul et unique scénario et ne sont exploitables que dans la mesure où le scénario choisi est correct.

b) Scénarios stochastiques

Les scénarios stochastiques reflètent l'incertitude de facteurs de risques tels que le taux d'intérêt, taux d'inflation, taux de défaut, la fréquence et le coût des sinistres... En se basant sur la distribution de probabilité de ces facteurs, la valeur finale d'une position peut être générée de manière stochastique. Le résultat de la simulation peut être facilement utilisable pour l'analyse et la détermination de la mesure de risque.

Cette approche exige d'abord l'estimation des lois de probabilité (ou des processus stochastiques) qui gouvernent les différents facteurs de risque et les paramètres de ces lois (i.e. le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR) pour le taux d'intérêt, loi de Poisson pour la fréquence de sinistres...). Le résultat de simulation donne la distribution empirique jointe et permet de déterminer la valeur finale de la position et la mesure de risque.

Les scénarios stochastiques fournissent beaucoup plus d'information que les scénarios déterministes. Le résultat obtenu à partir de ces derniers est directement lié à la survenance d'un événement particulier décrit par le facteur de risque. En revanche, le nombre de scénarios obtenus à partir d'une distribution donnée peut être très élevé ce qui permet de tenir compte de la queue de distribution, des événements extrêmes et de la non linéarité dans le processus (tel que la présence d'options).

L'inconvénient des scénarios stochastiques réside dans la fiabilité des hypothèses du modèle. En effet si le modèle est mal calibré, tous les risques seront calculés avec l'erreur, et il peut être dangereux d'utiliser les résultats obtenus pour la gestion des risques. Ce problème est plus important sur le long terme car les calculs sur un long horizon sont extrêmement sensibles aux hypothèses sous-jacentes du modèle. Si l'utilisateur utilise des distributions inappropriées ou des paramètres erronés dans le modèle, la mesure de risque peut aboutir à de mauvais résultats qui peuvent se manifester sur l'horizon.

4.1.2. Sélection des scénarios

Les scénarios ne doivent être sélectionnés que s'ils peuvent avoir un impact défavorable sur le résultat futur.

La sélection des scénarios doit prendre en considération l'environnement dans lequel l'institution opère. Ces scénarios doivent être raisonnables et appropriés aux décisions à prendre et aux objectifs fixés.

a) Sélection de scénarios de base

Les scénarios de base correspondent aux facteurs de risque qui sont inclus comme inputs dans le modèle. Ces facteurs sont estimés à partir des données historiques. Ils sont de ce fait les plus raisonnables concernant le futur :

- Le scénario déterministe : les scénarios de base correspondent à des valeurs prédéterminées pour chaque variable. Ces valeurs prédéterminées sont typiquement les meilleures estimations de ces variables.
- Le scénario stochastique : le scénario de base inclut les paramètres et les distributions (ou processus stochastiques) utilisées pour modéliser chaque variable aléatoire.

b) Sélection de scénarios alternatifs

Les scénarios de base servent comme points de référence pour les scénarios alternatifs. Ces derniers peuvent être construits en déviant des scénarios de base par la sélection d'une autre valeur pour un facteur de risque donné (scénarios déterministes), ou en changeant certains paramètres du modèle (scénarios stochastiques).

Le choix des scénarios alternatifs dépend des objectifs de l'analyse. Souvent, les scénarios alternatifs peuvent être utilisés pour tester la sensibilité du résultat financier à certains facteurs ou hypothèses. Le fait de modifier un facteur et de garder les autres constants permet d'isoler l'effet de ce facteur de risque.

5. Les finalités de la gestion des risques [BES'95]

La gestion des risques a pour objet de mesurer et contrôler les risques. Ses finalités sont :

- Assurer la pérennité de l'établissement en évaluant les risques, qui se traduiront, tôt ou tard, par des coûts ;
- Faciliter la prise de décision pour les opérations nouvelles, par la connaissance des risques ;
- Réorienter les portefeuilles d'engagements vers les opportunités les plus profitables, compte tenu de leurs risques.

6. Les principaux acteurs de l'univers bancaire [BOD'01]

6.1. Agences de notation (de *Rating*) (voir Annexe I.A)

Les plus importantes sont :

- Moody's Investor Services.
- Standard & Poor's.
- Fitch IBCA.
- Duff & Phelps.

Ces agences à travers les bases de données dont elles disposent, sur les entreprises défaillantes, publient régulièrement des études statistiques fournissant :

- En fonction du rating initial, et l'horizon considéré, les probabilités de défaut, et les matrices de transitions markoviennes des Rating.
- Le taux de recouvrement en cas de défaut, en fonction du rang d'inscription, appelé séniorité, qui exprime l'ordre dans lequel les dettes seront payées aux créanciers.

6.2. Les autorités réglementaires

Le risque de crédit étant au cœur de l'activité financière internationale, le comité de Bâle, a établi des réglementations destinées à garantir la solvabilité des grandes institutions financières, par l'intermédiaire du célèbre ratio « Cooke », datant de 1988, et ayant deux objectifs fondamentaux :

- Améliorer la solvabilité et la robustesse du système bancaire international face aux crises financières.
- Trouver des règles et des mesures, les plus uniformes et efficaces possible, pour diminuer les sources d'inégalités concurrentielles.

En d'autre terme ces réglementations visent à assurer l'adéquation entre les fonds propres de la banque, et les risques liés à ses engagements.

7. Composantes du risque de crédit [ABB'05]

Les composantes du risque de crédit sont la défaillance, les pertes en cas de défaut (attendues et inattendues).

Nous commençons par discuter la notion de défaillance en prenant l'exemple de prêts aux entreprises. La notion de défaillance est complexe et des aspects différents peuvent être privilégiés selon qu'il s'agit du régulateur, d'une agence de notation, ou d'un organisme prêteur. Cette définition conditionne l'analyse des pertes potentielles. Il est usuel de décomposer celles-ci entre pertes attendues, c'est à dire anticipées, et pertes inattendues, introduites pour capturer l'erreur d'anticipation éventuelle. Les pertes potentielles dépendent

de la probabilité de défaut, de l'exposition à la date de défaut, de la perte en cas de défaut. Nous expliquons comment interviennent ces divers aspects.

Les prévisions des défaillances et pertes sont sensiblement améliorées en tenant compte de caractéristiques des engagements ou des contreparties. Ces effets sont habituellement présentés sous la forme agrégée de notes (ou score, ou rating) donnant une idée de la qualité du risque.

En conclusion : la défaillance d'une entreprise exprime un état d'insolvabilité constaté à une échéance donnée.

7.1. Pertes attendues

Les pertes attendues (*EL*) (*Expected Losses*) se définissent comme étant les pertes moyennes que la banque s'attend à subir sur son portefeuille de crédits. Ces pertes, normalement couvertes par des provisions, dépendent pour un emprunteur individuel de:

- La probabilité de défaut moyenne ou stationnaire (*PD*) ;
- L'exposition en cas de défaut (*EAD*) (*Exposition At time of Default*) : c'est le montant de la créance encouru ;
- La perte en cas de défaut (*LGD*) (*Loss Given Default*) : celle-ci dépend de l'éventuel taux de récupération qui lui même dépend de la prise de garanties, de la séniorité de la créance et des voies juridiques de recouvrement.

A un niveau individuel, les pertes attendues sont données par la formule suivante :

$$EL = EAD \times PD \times LGD \quad \text{[RIB'99]}$$

Pour le portefeuille dans son ensemble, il suffit de sommer les différentes pertes attendues individuelles pour obtenir la perte attendue globale.

Mais connaître les pertes attendues est insuffisant pour se prémunir contre le risque de crédit. Les pertes effectives durant une année de récession économique, par exemple, peuvent de très loin dépasser le niveau des pertes attendues. C'est pourquoi, la banque est tout autant préoccupée par le niveau des pertes inattendues (*UL*) (*Unexpected Losses*).

7.2. Pertes inattendues

Ces pertes sont par définition imprévisibles et donc ne peuvent être connues d'avance. On cherche donc particulièrement, à un horizon de temps et à niveau de confiance donnés, à déterminer le montant maximum potentiel qu'elles peuvent atteindre. Ces pertes potentielles doivent alors être couvertes par les fonds propres économiques.

8. Eléments de la quantification du risque de crédit

8.1. La fonction de densité des pertes (Probability Density Function)

Pour connaître le niveau maximal des pertes à un horizon donné, il est nécessaire de pouvoir cerner de la manière la plus rationnelle, la distribution des pertes probables. La construction de la fonction de densité des pertes (PDF) (*Probability Density Function*) est en définitive la finalité de tout modèle de risque de crédit et qui fera l'objet du chapitre III.

C'est à partir de cette fonction que l'on déterminera, en choisissant un quantile de la distribution, le montant des pertes maximales à travers le calcul de la VaR du portefeuille de crédit. Le capital économique requis pour la couverture des pertes en est immédiatement déduit (voir Figure 1.2).

8.2. Le capital économique

C'est le montant de fonds propres que la banque juge nécessaire pour absorber les pertes maximales inattendues auxquelles elle peut avoir à faire face dans le cours de ses activités.

Comme nous venons de le signaler au paragraphe précédent, le capital économique dépend du choix d'une part, de l'horizon temporel, et d'autre part, du niveau de confiance. Ce dernier est choisi selon le degré d'aversion de la banque au risque : Plus une banque a d'aversion au risque, plus elle tendra à choisir un niveau de confiance élevé.

Celui-ci, influe également sur le rating de l'institution à l'horizon choisi : Si par exemple, une banque vise, à un horizon de un an, un rating de AA (selon S&P), elle choisira un niveau de confiance de 99,97%, c'est-à-dire qu'à un horizon d'un an, la probabilité que ses pertes dépassent ses fonds propres (qu'elle fasse défaut elle-même) est de 0,03%, qui correspond justement à la probabilité de défaut historique pour un rating AA.

Notons dans ce cadre que l'utilisation de niveaux de confiance trop élevés engendre d'importantes difficultés de validation. Par exemple, si une banque cherche à couvrir les pertes à un niveau de confiance de 99,99% elle doit vérifier que les événements exceptionnels (qui ont une probabilité de 0,01%) ne se produisent que 1 fois sur 10000, c'est-à-dire que si l'évaluation des pertes est faite annuellement, celles-ci ne doivent dépasser le quantile d'ordre 99,99% que une fois tous les 10000 ans. [DIE'03]

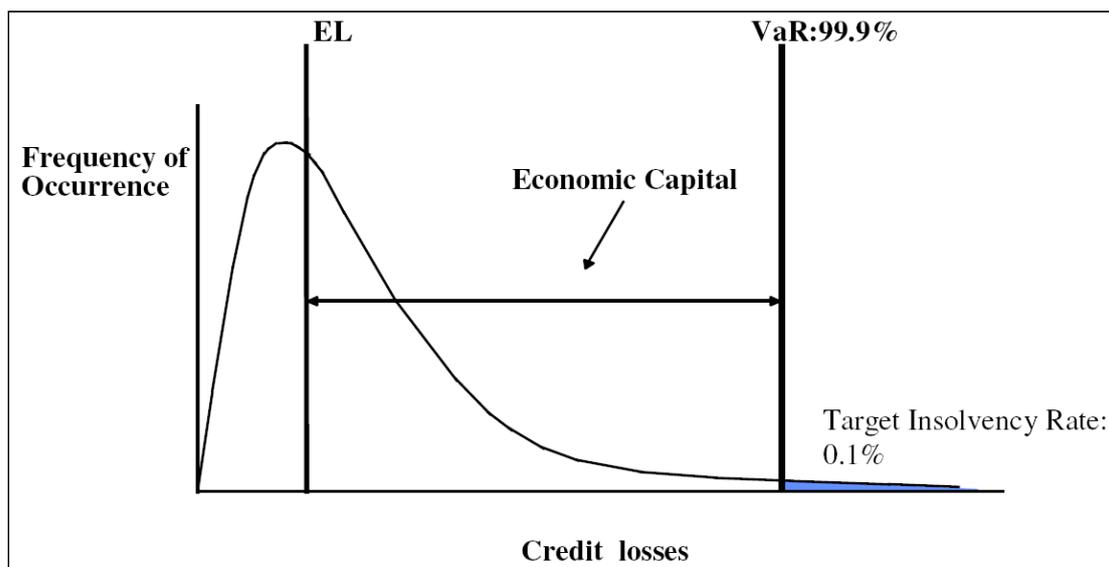


Figure 1.2 - Fonction de densité des pertes et capital économique

9. Conclusion

Comme on peut le constater d'après le schéma ci-dessus, la forme de la distribution des pertes est fortement asymétrique et *leptokurtique* (queue de distribution épaisse). De ce fait la Value at Risk intervient, indéniablement, comme outil unique de quantification des pertes potentielles inattendues présentant une distribution similaire, car l'approche fondée sur l'analyse moyenne-variance de Markowitz se révèle incapable de fournir une évaluation satisfaisante du principal risque encouru par l'institution financière, par conséquent souffre d'une sous estimation du capital requis par la réglementation en vigueur.

Le risque de crédit tient essentiellement à l'incertitude des pertes, d'où l'intérêt d'évaluer la distribution des pertes futures encourues par une institution de crédit.

CHAPITRE II. LA VALUE AT RISK

1. Origine et définition de la Value At Risk

1.1 Aperçu historique et adoption de la VaR

En juillet 1993, le Groupe des 30 (constitué de représentants de l'industrie financière et des autorités de surveillance) recommande la quantification des risques par une mesure uniforme appelée Value-at-Risk (VaR). La recommandation a été très largement suivie puisque la VaR est devenue en quelques années, un standard pour l'évaluation des risques financiers. Plusieurs événements ont favorisé l'adoption de la VaR par la communauté financière, selon Paul Glasserman, trois événements importants ont conduit à son adoption :

Le premier événement a été la publication gratuite, en 1994, de la méthode et du système RiskMetrics par la banque américaine JP Morgan. Les autres entreprises et organismes financiers pouvaient dès lors utiliser le calculateur de RiskMetrics et l'exploiter au sein de leur propre système de gestion des risques.

Le second événement date de 1995 avec la première réunion du comité de Bâle. Adoptée en 1996, la réforme de Bâle a incité les banques à développer leur propre système interne de calcul de la VaR afin de déterminer leur nécessité en fonds propres réglementaires. En effet, en l'absence de modèle interne, le calcul de fonds propres est standardisé et donne des valeurs beaucoup plus élevées que les valeurs obtenues par le développement de modèles internes, plus adaptés localement aux entreprises.

Le troisième événement a certainement moins d'impact aujourd'hui mais a conduit à l'adoption de la VaR par les entreprises américaines. En 1997, la Securities and Exchanges Commission (SEC) a imposé des règles de communication aux entreprises américaines concernant le risque associé à leur utilisation d'instruments dérivés. Trois solutions étaient proposées aux entreprises, dont la VaR.

Mais la VaR a aussi été adoptée par rapport à sa facilité d'approche et à ses caractéristiques : elle est synthétique et globale. En effet, elle permet une évaluation simple et compréhensible pour des néophytes en fournissant un indicateur quantitatif exprimé de façon monétaire. De plus, la VaR a de nombreux avantages sur les autres méthodes classiques de mesure du risque :

- elle donne une perception simple de l'envergure des pertes possibles.
- elle n'est pas assujettie à la distribution normale des rendements du portefeuille ou des actifs étudiés contrairement à de nombreux modèles qui se basent sur une distribution normale de ces rendements.
- elle prend en compte l'asymétrie de la distribution des rendements. [DEM'01]

1.2. Définition de la Value At Risk

La Valeur en risque, plus connue sous le nom anglais Value at Risk ou VaR.

De nombreuses définitions de la VaR existent, nous en reprenons deux :

1. Selon Best [BES'98], la VaR d'un portefeuille d'actifs financiers correspond au montant de pertes maximum sur un horizon de temps donné, si l'on exclut un ensemble d'événements défavorables ayant une faible probabilité de se produire.

2. Selon Esch, Kieffer et Lopez [ESC'03] ainsi que P. Jorion [JOR'01], la VaR d'un portefeuille ou d'un actif, pour une durée T et un niveau de probabilité α , se définit comme le montant de perte attendu de façon que ce montant, pendant la période $[0, T]$, ne devrait pas être plus important que la VaR et ceci avec une probabilité de $(1 - \alpha)$.

Nous pouvons donc dire que la Value at Risk est une mesure probabiliste de la perte possible sur un horizon donné. Elle représente un niveau de perte, pour une position ou un portefeuille, qui ne sera dépassé durant une période donnée qu'avec un certain degré de confiance.

1.2.1 Exemple illustratif

Pour introduire l'idée de base, prenons un exemple. Vous avez investi une partie de vos économies dans un portefeuille d'actions. Votre conseiller vient de vous informer que la valeur de votre portefeuille a encore baissé le mois dernier et que celui-ci vaut maintenant 5000 DA. Après avoir écouté ses explications sur les raisons de cette mauvaise performance, vous désirerez sûrement avoir une idée de la perte maximale que le portefeuille pourrait enregistrer d'ici la fin du mois.

La réponse la plus correcte serait que vous pourriez perdre toutes vos économies. Or cette réponse n'est pas satisfaisante parce qu'elle ne vous apporte rien de nouveau et, surtout, parce que le scénario de perte totale a trop peu de chances de se produire. Il serait plus réaliste et plus professionnel de dire: «En l'absence d'événements exceptionnels, il y a 95% de chances que le portefeuille reparte à la hausse ou qu'il perde 1000 DA ou moins d'ici la fin du mois.» C'est le genre de réponse que la méthode VaR permet de donner.

A l'aide du concept VaR, on peut ainsi exprimer en un seul chiffre le montant à risque d'un portefeuille, même s'il est composé de différents types d'actifs. On pourra alors dire si le portefeuille est trop risqué ou non, en fonction du chiffre obtenu, de la valeur du portefeuille et de l'aversion de l'investisseur au risque.

De cette définition de la Value At Risk, on constate que le calcul de cet indicateur et son interprétation nécessite la détermination de quelques paramètres à savoir la distribution des pertes, le niveau de confiance et la période de temps.

1.3. Formulation mathématique de la Value At Risk [ESC'03]

Considérons V_h comme la valeur future, et donc aléatoire, d'un portefeuille d'actifs (ou d'un actif) à l'instant h et V_0 sa valeur à la date d'estimation. Alors la variation de la valeur de ce portefeuille d'actifs pour un horizon h , appelée une fonction de pertes est de:

$$\Delta_{[0;h]} V = V_h - V_0 \quad (2.1)$$

La Value-at-Risk d'un portefeuille d'actifs pour une période $[0; h]$ avec probabilité q est définie comme un montant, notée $VaR_h(q)$, telle que la variation $\Delta_{[0;h]} V$ observée pour le portefeuille d'actifs durant l'intervalle $[0; h]$ ne sera supérieure au montant $VaR_h(q)$ qu'avec une probabilité de $(1 - q)$. En d'autres termes, la perte de ce portefeuille pour la période $[0; h]$ sera supérieure à $VaR_h(q)$ avec une probabilité $(1 - q)$.

Ou encore :

$$P \left[\Delta_{[0;h]} V \leq VaR_h(q) \right] = 1 - q \Leftrightarrow P \left[\Delta_{[0;h]} V > VaR_h(q) \right] = q \quad (2.2)$$

$$VaR_h(q) = F_h^{-1}(1 - q) \quad (2.3)$$

Avec : F_h la fonction de répartition de la variable aléatoire $\Delta_{[0;h]} V$

F_h^{-1} sa fonction inverse

f_h la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire $\Delta_{[0;h]} V$

Nous pouvons illustrer la $VaR_h(q)$ sur le Graphique [ESC'03]

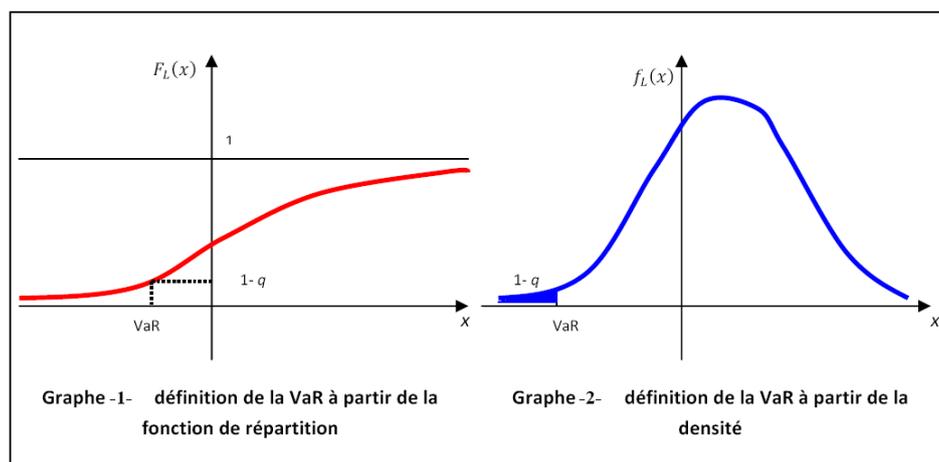


Figure 2.1 - la Value-at-Risk à partir de la fonction de répartition et de la fonction de densité de la loi normale

1.4. La démarche générale pour le calcul de la VaR [JOR'01]

Nous avons pu remarquer le long de notre recherche qu'il existe différentes méthodes de mesure de la VaR, mais elles ont en commun ces différents points :

- L'utilisation d'informations statistiques : c'est à dire toutes les informations statistiques pertinentes à propos des composantes du portefeuille, comme les volatilités historiques et les corrélations entre les différentes sources de risques qui sont utilisées dans la quantification du risque du portefeuille.
- La reconnaissance de l'interaction : il faut prendre en compte dans le portefeuille total les effets de diversification et de couverture. Par exemple : une position couverte est assez peu risquée tandis qu'une position sur un dérivé seul peut se révéler très risquée. Pour cette raison le risque d'un portefeuille n'est généralement pas la simple somme des risques de ces différentes composantes, et la contribution marginale d'une position au risque total d'un portefeuille dépend de la composition du portefeuille (*Cf Chapitre II, §5.2*).

Le concept de VaR semble plutôt simple, mais sa mise en œuvre pratique ne l'est pas.

Il existe différentes mesures qui se différencient par leurs hypothèses et les outils statistiques utilisés. Cependant les principes de bases restent les mêmes entre les différentes mesures.

Pour commencer, les données concernant l'ensemble des positions de l'institution financière doivent être réunies dans une base de données centralisée.

- Une fois les données centralisées, le risque global doit être calculé par agrégation des risques des instruments individuels entrant dans la composition du portefeuille, de sorte que les effets de diversification soient correctement pris en compte.
- C'est à dire qu'il faut déterminer les facteurs de risque individuels communs aux différentes positions comme les principaux indices boursiers, les principaux cours de change et de matières premières et les taux zéro coupons pour différentes maturités, qui sont censés influencer les différentes composantes du portefeuille.
- Il faut choisir la période de détention.
- Il faut déterminer les variations des facteurs de risques individuels pour la période de détention.
- Puis il faut estimer les effets des variations des facteurs de risques individuels sur la valeur des composantes du portefeuille.

La VaR peut ensuite être calculée, une fois que la relation précise entre la variation de la valeur du portefeuille et les variations de chaque source de risque individuel a été déterminée.

Cette dernière étape est sans doute la plus difficile pour le calcul de la VaR, et nécessite certaines approximations qui peuvent se révéler dangereuses.

Il ressort une hypothèse sous-jacente dans l'étape de la détermination des facteurs de risques, et de l'effet de la variation de ces facteurs sur la valeur du portefeuille. C'est à dire que la distribution des futures variations des facteurs de risques est identique à celle des variations passées (stabilité de la loi), et que la relation entre la variation de la valeur du portefeuille et les variations des facteurs est stable.

Les différentes procédures pour ces deux dernières étapes classifient les méthodes de détermination de la VaR en différentes catégories.

2. Méthodologie de calcul de la VaR [DIE'01]

Après avoir choisi le type de la Value-at-Risk qui s'adapte, au mieux, aux besoins de l'institution financière, la suite logique sera le calcul de la VaR. Ce processus est constitué de plusieurs étapes qui requièrent une attention particulière. En effet, toute méthodologie de calcul de la VaR commence, naturellement, par la constitution d'une base de données, elle se poursuit par un choix judicieux des paramètres. Ensuite, intervient le calcul et en fin, elle s'achève par une évaluation de la robustesse du modèle obtenu.

2.1. Les données nécessaires

Le calcul de la VaR commence toujours par une collecte de données. En effet, l'institution financière doit disposer de données non seulement concernant son portefeuille mais également sur les prix et taux de marché, cela est dû au fait que le calcul de la VaR se base sur des projections de facteurs de risque influençant la valeur du portefeuille. Or, pour effectuer des projections, les modèles économétriques sont indispensables.

Une bonne estimation des paramètres du modèle économétrique, nécessite une base de données historique qui répond à trois exigences : la richesse, la longueur (une taille suffisante) et la mise à jour (suivi quotidien).

Quant à la richesse de la base de données, elle est reflétée par le nombre de variables qu'elle contient. En effet, pour mieux cerner les changements des facteurs de risque, il faut prendre en compte un nombre suffisant et bien choisi de variables de marché, cela requiert une bonne connaissance du marché et un recours à l'avis d'expert.

La longueur de la période d'échantillonnage est déterminée selon un arbitrage entre une prise en compte rapide des changements survenus dans les conditions de marché d'une part et la précision des estimations réalisées de l'autre.

Souvent, les institutions financières optent pour un long historique de données car la qualité de l'estimation augmente avec la longueur de la série. Cependant, une longue série

d'observation intègre, à la fois, des périodes de forte volatilité et des périodes calmes, ce qui influence le chiffre VaR. pour remédier à ce problème, les institutions financières recourent à des pondérations décroissantes qui privilégient les observations récentes.

Ainsi, une base de données non fiable constitue la première source d'estimation erronée et met en défaut toute la méthodologie de calcul de la VaR. notons enfin que la longueur minimale exigée par les autorités est d'une année.

2.2. Hypothèse distributionnelle et choix des paramètres

Le calcul de la VaR est, comme nous l'avons déjà vu, soumis à un certain nombre d'hypothèses et de choix de paramètres. Il s'agit, essentiellement, d'opter pour un horizon et un seuil de confiance, mais aussi de déterminer la distribution de perte.

a. Hypothèse de normalité

Le choix d'une distribution de probabilité est primordial pour le calcul de la VaR notamment la VaR paramétrique. Généralement, on considère que l'on peut décrire le rendement des portefeuilles par la notion statistique de distribution normale ou log-normale. L'utilisation en finance de telles distributions repose, en premier lieu, sur des arguments de simplicité du fait qu'elles sont entièrement déterminées par les deux premiers moments, l'espérance et la variance. Certains auteurs ont tenté de justifier le recours à la loi normale par le théorème central-limite qui établit la convergence vers la loi normale sous des hypothèses peu contraignantes.

Cependant, nous savons depuis fort longtemps que les séries financières ne sont ni normales ni log-normales. En effet, un examen attentif du graphe des rendements des instruments les plus négociés révèle une déviation remarquablement cohérente des données de marché par rapport à la distribution normale, elle se traduit par un aplatissement faible avec des queues épaisses. Ces distributions sont qualifiées de *Leptokurtiques*. Lorsque les distributions présentent des queues de distribution «épaisses», le quantile q est alors bien au delà (en valeur absolue) du quantile de la loi normale correspondant.

b. La période de détention

L'estimation de la VaR repose sur la détermination de l'horizon de risque sur la base duquel les résultats défavorables sont mesurés. Différents facteurs affectent le choix de l'horizon de la VaR :

- La période de détention doit correspondre à la période de détention de l'actif objet de l'estimation. La période de détention appropriée pour tout marché doit correspondre à l'intervalle de temps nécessaire pour assurer la liquidation des positions sur ce marché ;
- Le calcul de la VaR suppose implicitement que la composition du portefeuille reste inchangée durant la période de détention choisie. Cette hypothèse est donc d'autant

plus plausible que l'horizon considéré est court puisque, en réalité, les positions peuvent varier fréquemment, notamment pour couvrir le risque ;

- Une estimation fiable de la VaR requiert un grand nombre de données. Or, plus la période de détention est longue, plus il faut disposer d'un volume d'observations plus important.

Ce problème de fiabilité pousse donc à l'utilisation d'un horizon de risque relativement court. Le choix de l'horizon de risque dépend également du degré d'aversion du détenteur du portefeuille au risque.

c. Le degré de confiance

Une autre convention quantitative à déterminer pour le calcul de la VaR est le niveau de probabilité. Derrière cette notion, il y a l'idée que la probabilité que l'événement survienne est trop faible pour que cet événement se réalise effectivement. Cette probabilité devient une simple « mesure d'incertitude » pouvant varier avec les circonstances et l'observateur.

Si l'institution poursuit un objectif de fiabilité du système interne de gestion du risque, elle choisit un seuil élevé mais cela aura un impact direct sur sa performance étant donné que la VaR générée sera élevée.

Aussi, le seuil de confiance tient une très grande importance pour le calcul d'exigences internes en fonds propres. En effet, le seuil de confiance reflète le degré d'aversion au risque des gestionnaires donc plus cette aversion est élevée, plus ils désirent détenir suffisamment de fonds propres ce qui se traduit par un choix d'un seuil de confiance élevé.

En outre, la VaR peut être utilisée comme moyen de comparaison entre les différentes institutions ou sur les différents marchés en termes de risque. Dans ce cas, l'institution n'a pas vraiment le choix quant au seuil de confiance. En effet, cela n'a aucun sens de comparer deux VaR calculées à des niveaux différents de probabilité.

Dans la pratique, la VaR est estimée sur base de degrés de confiances allant de 95 à 99 %.

Notons toutefois qu'une institution n'est pas obligée de travailler avec un seul seuil. Elle pourrait donc utiliser le degré de confiance approprié à l'objectif poursuivi.

3. Evaluation de la robustesse et validation du modèle

3.1. Back-Testing [HUL'04]

La performance d'un modèle doit faire l'objet d'une mesure permanente, non seulement au moment de sa construction, mais aussi lors de son fonctionnement. Cela afin de s'assurer que le montant des fonds propres prévu par la VaR correspond aux risques encourus en toutes circonstances.

Le principe du back-testing est que, de façon continue, le comportement réel des pertes sur les crédits est comparé au comportement prévu par la VaR. Les principes du back-testing des modèles de risque de crédit sont les mêmes que ceux qui prévalent en matière de risque de marché.

D'une manière générale le back-testing consiste à s'assurer que le nombre de dépassements de la limite calculée par la VaR au cours du temps ne dépasse pas un certain seuil, comme le montre la figure ci-après :

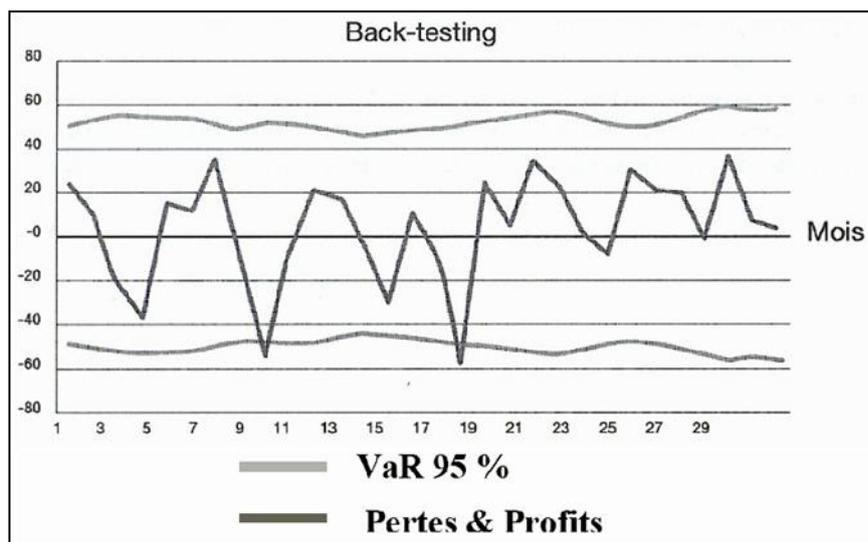


Figure 2.2 – Principe du Back-testing

Sur le graphique, on voit que la VaR est dépassée 2 mois sur 30, c'est-à-dire dans 7% des cas. On tend donc à rejeter le modèle en raison de défaillances de prévision. [DIE'03]

3.2. Stress-Testing [SER'04]

Parallèlement au Back-Testing, reposant sur des mesures dans des environnements « normaux », il est nécessaire de tester le comportement des modèles dans les situations extrêmes. Cela conduit à simuler des scénarii de crises et tester la robustesse des modèles.

La mise en place d'un système de Stress-testing répond à un double objectif :

- Il s'agit d'abord de s'assurer que la banque, peut faire face à une situation économique très dégradée (ex : crise macroéconomique majeure).
- Il s'agit également pour les banques, d'évaluer l'impact en terme de risque de crédit, de décisions internes comme par exemple le lancement d'une nouvelle ligne commerciale. Le Stress-testing devient dans ce cas, un outil de pilotage.

Le Stress-testing est conduit de manière moins récurrente que le Back-testing, mais il est essentiel pour maîtriser le comportement du modèle dans des situations où la mesure du risque doit absolument rester fiable.

4. Adaptation de la VaR au risque de crédit [DIE'03]

La *Credit Value-at-Risk* est la perte maximale sur un crédit à un horizon donné (généralement 1 an pour le risque de crédit) avec un certain degré de confiance.

Dans sa forme la plus générale, la VaR peut être dérivé de la distribution de probabilité de la valeur future du crédit $f(w)$. A un certain seuil de confiance c , on cherche la réalisation la plus défavorable W^* de cet actif telle que la probabilité de passer au-dessus de cette valeur est c :

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w) dw$$

Ou telle que la probabilité d'une valeur inférieure à W^* ,

$$p = P(w \leq W^*) \text{ est } 1 - c :$$

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w) dw = p(w \leq W^*) = p \quad (2.4)$$

Autrement dit, l'aire allant $-\infty$ de à W^* doit se sommer à $p = 1 - c$, par exemple 5%. Le nombre W^* est le quantile de la distribution.

L'aire sous la distribution des valeurs possibles du crédit (titre) apporte donc une information sur les probabilités de défaut. Par exemple, si la distribution est normale, on sait que 99% des observations sont comprises entre 2,33 fois et -2,33 fois l'écart type de la distribution.

Dans ces conditions, si la valeur moyenne du titre égale à 100€ et son écart type égale à 10€ à (1 an), il y a donc 1% de chance que la valeur du titre passe à $100 - 2,33 \times 10 = 76,7$ € ou 99% de chance que l'on perde sur ce titre moins de 23,3€. La VaR est donc égale à 23,3 au seuil de 1% (la maturité étant supposée égale à 1 an).

Ainsi, les éléments nécessaires au calcul de la VaR sont la valeur de l'écart type (ou la volatilité) du prix de l'actif. Ces éléments sont naturellement disponibles pour les actifs faisant l'objet d'une cotation sur un marché organisé. En revanche dans le cas de crédits bancaires, ni la valeur ni la volatilité ne sont facilement calculables, la première parce que la valeur n'est pas observable, la seconde parce que l'on ne dispose que très rarement de séries

historiques pour ce type d'actifs. De plus, l'hypothèse selon laquelle la valeur d'un crédit classique a une distribution normale est difficile à justifier. La distribution de la valeur des crédits bancaires est en effet très asymétrique dans la mesure où cette valeur est plafonnée par le haut et où sa dispersion est très étalée vers la gauche.

5. Discussion critique de la Value At Risk

La VaR constitue un concept attirant et ambitieux. Elle représente une avancée majeure dans la manière d'appréhender les risques. Toutefois, la VaR comporte des limites et inconvénients que les institutions financières doivent en être conscientes pour ne pas commettre d'erreurs. Le reste de ce chapitre sera donc réservé à une discussion critique qui mettra en exergue les principales forces et faiblesses du concept VaR.

5.1. Les forces de la VaR

Dès sa création, la VaR a connu une expansion rapide et devenue un outil de référence parmi les institutions financières grâce à ses avantages qui peuvent être scindés en deux blocs l'un est issu du concept théorique lui-même et l'autre relevant de sa mise en place.

a. Avantages du concept Value At Risk [SAU'04]

Une des caractéristiques les plus intéressantes du concept VaR est sa capacité de résumer les différents risques auxquels le portefeuille est exposé en un seul nombre, compréhensible et facilement interprétable. En effet, une telle mesure est fortement appréciée dans une structure de Risk Management grâce au volume d'information qu'elle véhicule.

De plus, un avantage significatif de la VaR par rapport aux autres méthodes de gestion du risque réside dans la prise en compte des corrélations existantes entre les actifs composants le portefeuille. Un tel avantage permet d'intégrer les effets de la diversification dans la quantification du risque et donc de préparer une bonne stratégie de gestion de portefeuille.

Aussi, la VaR permet une gestion optimale des fonds propres. Dès lors qu'une approche de modèle interne basée sur le calcul de VaR est adoptée pour la quantification des risques, une mesure précise de l'exposition de l'institution financière sera fournie. Cela permet une meilleure allocation de fonds propres si on l'a comparée à une approche standard qui consiste à allouer des fonds sur la base d'un pourcentage fixe des engagements pris. Par conséquent, l'institution financière disposera d'une marge supplémentaire de fonds et peut donc augmenter son volume d'activité.

Enfin, la mesure VaR se présente comme un outil efficace pour l'évaluation de performance. Comparer deux résultats financiers n'aura pas de sens si on ne considère pas les risques engendrés pour leur réalisation. Pour cela on recourt à la notion du RPAM (Risk Adjusted Performance Measure) qui consiste à diviser le profit par la VaR correspondante.

b. Avantages de l'application de la VaR [DEM'01]

L'avantage majeur de l'incorporation de la VaR dans le système interne d'une institution financière reste l'implication des différents départements dans le processus de gestion du risque. De même, la mise en place d'une méthodologie VaR nécessite tout un préalable qui pousse l'institution financière à effectuer des changements organisationnels, d'actualiser son système de management, de mettre en place un système d'information efficace et de rechercher les compétences humaines nécessaires. Tous ces facteurs contribuent à la pérennité de l'institution et augmentent son niveau de compétitivité.

Finalement, une méthodologie VaR permet de répondre aux besoins internes de l'institution, notamment celui d'informer les actionnaires et les Managers. Elle renforce aussi la gestion en imposant des limites VaR à ne pas dépasser.

Les éléments positifs de la VaR sont nombreux mais ils ne doivent toutefois pas occulter les limites de ce concept.

5.2. Limites de la Value At Risk

Certaines approches de calcul de la VaR s'appuient sur des hypothèses qui, certes, simplifient le calcul de la VaR, mais ne tiennent pas toujours dans la pratique. En comparant les réalités du risque avec ces hypothèses simplificatrices nous pouvons appréhender quelques obstacles liés au concept VaR.

Une première limite est directement liée au concept lui-même. En effet, la VaR ne fournit aucune indication sur l'ampleur des pertes si un événement défavorable devait se produire. C'est d'ailleurs pour cette raison que le régulateur oblige les banques à compléter leurs calculs VaR par des analyses de scénarios catastrophes «stress testing». Dans une telle analyse, on calcule la perte que pourrait occasionner une variation extrême du marché, indépendamment de toute hypothèse de modélisation. Le choix de scénarios intéressants est souvent un exercice délicat, qui relève plus de l'intuition et de l'expérience.

[ESC'03]

Une autre limite de la VaR est que son calcul dépend de la loi utilisée, aussi, les résultats diffèrent selon la méthode choisie. Ainsi, pour un même portefeuille, on peut trouver des VaR différentes à cause de l'utilisation de paramètres divergents ce qui rend la comparaison d'autant plus difficile. La VaR peut dès lors être qualifiée de mesure subjective.

[BES'98]

Tous les travaux de recherche sur la VaR ont montré formellement que la VaR ne possède pas la quatrième propriété (Voir Annexe II.A). La raison en est que deux positions, dont le risque est évalué avec une $VaR_{99,9}$ par exemple, peuvent présenter un risque agrégé très différents si les queues de distribution au-delà du quantile sont très différentes. En d'autres termes, la VaR est une mesure du risque incomplète car, en tant que quantile de distribution,

elle n'apporte aucune information sur la forme de la distribution au-delà du quantile en question.

CHAPITRE III. MODELISATION DU RISQUE DE CREDIT

1. Les particularités du risque de crédit

1.1. La nature de l'événement de défaut

A la différence du risque de marché uniforme, le risque de crédit a des expressions fort différentes : défaut de la contrepartie, changement de rating, variation du spread de signature...etc. Selon que l'on retienne un événement ou un autre, la distribution des pertes est extrêmement différente.

Pour cette raison, il est nécessaire de définir un fait générateur des pertes. Tous les modèles s'attachent à déterminer les pertes provenant des défauts de remboursement, mais certains tentent aussi de mesurer celles qui proviennent de la variation de la valeur marchande des crédits, consécutive au changement de rating. De ce fait, on distingue généralement entre deux types de modèles (Voir Annexe III.A) :

- Les modèles de défaut (Default Models) ;
- Les modèles Marked-to-Market (MTM).

1.2. Effets de cycle

Il est clair que le taux de défaillance des entreprises est une variable fortement corrélée au cycle d'affaire (business cycle). Les probabilités de défaillance ont tendance à être plus élevées en fin de période d'expansion et début de période de récession, plus faibles en fin de période de récession et début de période d'expansion. [ABB'05]

Cette relation avec le cycle induit des non stationnarités des taux de défauts qui peuvent être prises en compte de deux façons différentes dans les modèles de référence CreditMetrics et CreditRisk+ que nous présenterons dans ce chapitre.

2. Architecture d'un modèle de défaut [DIE'03]

D'abord, le risque est mesuré au niveau individuel, par la probabilité de défaut. Puis au niveau du portefeuille, le risque est mesuré par la Value at Risk, en tenant compte des différentes corrélations. Enfin pour s'assurer, en permanence, de la performance du modèle, on effectue des Back-Testings.

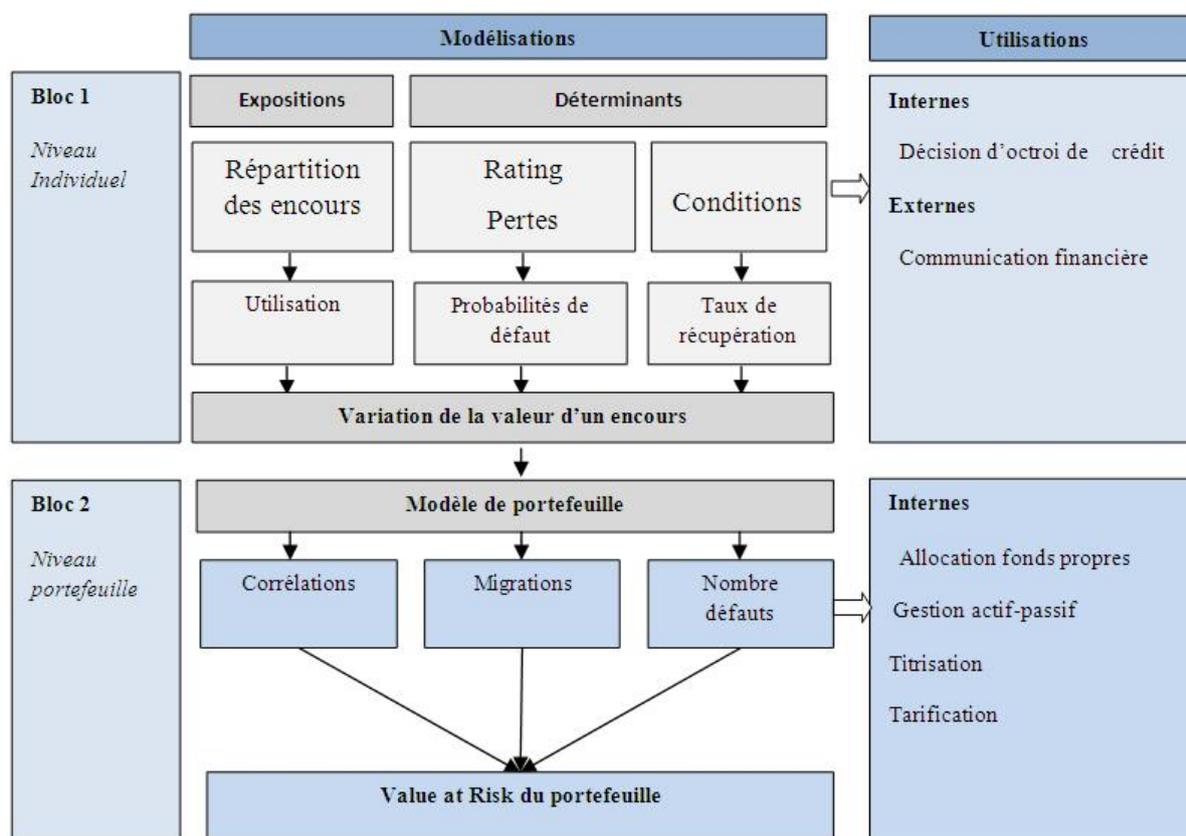


Figure 3.1 - Architecture d'un modèle de défaut [DIE'03]

2.1. Evaluation du risque au niveau individuel

La construction de ce premier bloc s'effectue elle-même en plusieurs étapes.

2.1.1. La détermination des classes de risque

Cette première étape consiste à décomposer le portefeuille en classes de risque homogènes et à affecter les positions individuelles dans chaque classe. Par définition, tous les individus d'une même classe présentent le même niveau de risque.

Ces classes de risque sont déterminées par le système de notation interne de l'institution. En pratique, la plupart des grandes banques disposent de systèmes plus ou moins élaborés : des systèmes de scoring pour les clients de la banque de détail, ou des systèmes experts de diagnostic financier pour les entreprises.

2.1.2. La mesure des probabilités de migration

Dans cette étape, l'objectif est de mesurer la probabilité qu'un crédit migre d'une classe de risque vers une autre, dont la classe de défaut. Cette dernière ne peut constituer une classe de départ, alors elle est dite « absorbante » (*absorbing state*).

Evidemment, dans un modèle de défaut, la seule possibilité de migration est la classe de défaut ; tandis que dans un modèle MTM toutes les classes sont prises en considération.

La modélisation des probabilités de défaut conduit à deux concepts clé :

- La probabilité conditionnelle de défaut ;
- La probabilité non conditionnelle de défaut.

a. La probabilité conditionnelle de défaut

C'est la probabilité de défaut attribuée à un emprunteur selon la réalisation des facteurs de risque. Koyluoglu et Hickman (1998) ont montré que les principaux modèles de risque de crédit établissent une relation causale théorique entre les événements de crédit et les facteurs de risques.

Ces derniers sont soit des facteurs propres à chaque emprunteur (facteurs idiosyncrasiques), soit des facteurs communs à tous les emprunteurs (facteurs systématiques).

Les facteurs systématiques correspondent à :

- Des facteurs sectoriels : une crise dans un secteur d'activité affecte tous les opérateurs de ce secteur.
- Des facteurs de localisation géographique : une crise régionale touche beaucoup plus les emprunteurs appartenant à cette zone géographique.
- Des facteurs macro-économiques comme le chômage, le niveau des taux d'intérêt, le taux de croissance de l'économie ... etc.

$$P_D = \Phi (X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{3.1}$$

Où les X_i représentent les facteurs de risque.

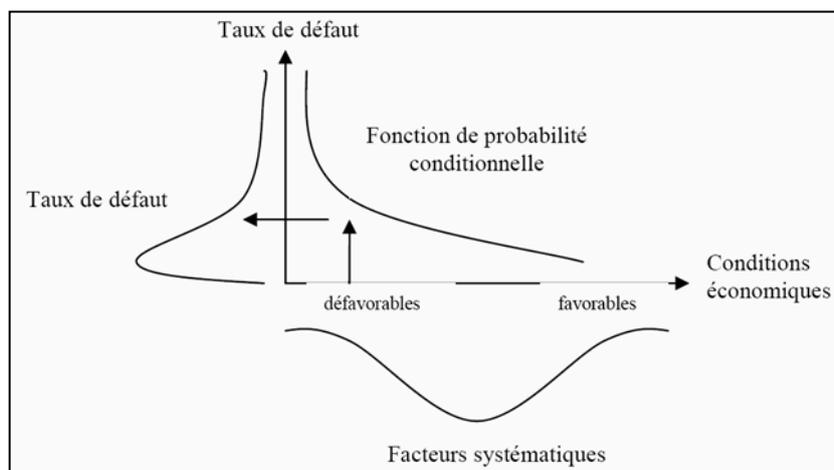


Figure 3.2 - Relation entre facteurs de risque systématiques et taux de défaut [ABB'05]

b. La probabilité non conditionnelle de défaut

Dans ce cas le risque de défaut n'est pas relié aux facteurs de risque, et il n'existe pas de relations causales entre les probabilités de défaut et les facteurs de risque.

De ce fait, cette approche, issue de la théorie assurantielle, ne fait aucune hypothèse sur le défaut, qui est pensé comme un événement aléatoire, d'une faible probabilité d'occurrence.

La construction des tables de défaut (dites « de mortalité ») nécessite de rassembler des séries historiques de défaut. A partir de ces séries, on calcule les taux de défaut moyens pour chaque classe de risque et leurs volatilités. Ces résultats sont résumés dans des tables, dont les plus connues sont celles fournies par les agences de rating (exemple l'agence Moody's).

Cette étape de la construction d'un modèle de risque de crédit est cruciale, car les probabilités de migration en général, et les probabilités de défaut en particulier, sont les principaux inputs et influencent sensiblement les résultats de la modélisation.

2.1.3. La mesure de l'exposition en cas de défaut (EAD)

L'exposition au risque de contrepartie est mesurée par les montants susceptibles d'être perdus au moment du défaut. Pour déterminer le montant des expositions, on doit construire les profils temporels des risques.

2.1.4. La mesure de la perte en cas de défaut (LGD)

La perte conditionnelle au défaut peut être réduite, du moins partiellement, en exigeant des garanties. Ces dernières sont de natures multiples : sûretés réelles ou personnelles.

Certaines clauses contractuelles assurent une protection supplémentaire, en fixant des seuils à respecter pour certains ratios (comme le ratio d'endettement) ou en limitant toute opération de la contrepartie qui fragilise sa situation, comme le changement d'activité.

Le véritable problème est de valoriser ces garanties et de savoir si cette valeur sera effectivement disponible au moment du défaut. A cet effet, des grilles de valorisation par type de garanties sont nécessaires. De plus, il est important de prendre en considération la durée des procédures de recouvrement, en cas de mise en jeu de ces garanties. Si ces procédures sont lourdes, il convient d'actualiser les montants à récupérer.

Ainsi, le passage des expositions brutes aux expositions nettes est modulé par les garanties (voir figure). Si ces dernières ne sont pas suffisantes, un risque résiduel subsiste. Cependant, même sur ce risque résiduel une récupération partielle est possible. Pour pouvoir mesurer ce taux de recouvrement, l'accent doit être mis sur la constitution de bases de données fiables. Celles-ci devraient inclure pour chaque type de prêt :

- La date de défaut ;
- Le montant des sommes récupérées avec les dates de récupération ;
- Le niveau de séniorité de la dette ;
- Les coûts et la durée liés à cette récupération.

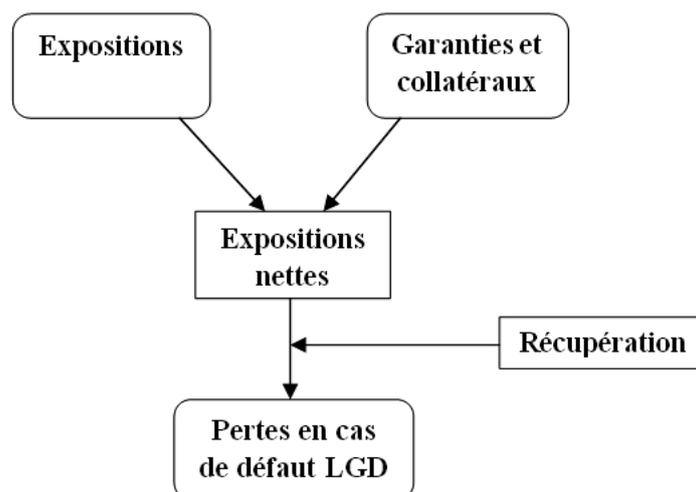


Figure 3.3 - Des expositions aux pertes en cas de défaut [SAU'04]

A la fin de cette première étape, on doit disposer des éléments suivants :

- Des classes de risque, avec une mesure des probabilités de défaut, et des probabilités de migration dans le cas d'un modèle MTM;
- Une mesure de l'exposition en cas de défaut (EAD) ;
- Une mesure des pertes en cas de défaut (LGD), qui suppose la connaissance des taux de recouvrement.

2.2. Evaluation du risque au niveau du portefeuille

Cette étape consiste à trouver une fonction, qui permet de passer des caractéristiques associées aux crédits individuels, à la distribution de probabilité des pertes sur le portefeuille dans son ensemble à un horizon donné. Une première approche est le modèle moyenne-variance de Markowitz.

2.2.1. Les caractéristiques générales de l'approche de portefeuille

Dans cette approche, le rendement de tout crédit est décrit par une variable aléatoire entièrement caractérisée par les deux premiers moments de sa distribution de probabilité : son rendement moyen et la volatilité de ce rendement.

En connaissant la distribution des rendements, il est possible de déterminer une frontière des portefeuilles efficients sur laquelle se situent les crédits offrant le meilleur rendement pour un niveau de risque donné ; ou le risque de crédit le plus faible pour un niveau de rentabilité choisi comme objectif.

Le rendement moyen d'un portefeuille est donné par :

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^n x_i \bar{r}_i \quad (3.2)$$

Et sa variance par :

$$\sigma_p^2 = \sum x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (3.3)$$

Où :

r le rendement moyen sur le portefeuille,

r_i le rendement moyen du i ème crédit,

ρ_{ij} le coefficient de corrélation entre les rendements du i ème crédit et du j ème crédit,

σ_i et σ_j leurs volatilités respectives, et les x_i les montants.

On sait toutefois, que cette approche ne considère que les deux premiers moments de la distribution des rendements, ce qui n'est compatible qu'avec l'hypothèse de normalité du rendement des actifs.

2.2.2. La construction de la distribution de probabilité des pertes futures

La première étape de la construction d'un modèle de risque de crédit nous a permis d'obtenir les probabilités de changement de classe, y compris vers la classe de défaut, pour chaque position individuelle. Dans une approche de portefeuille, il importe de déterminer le risque global, ce qui suppose l'intégration des corrélations entre les événements de crédit qui affectent les différents emprunteurs.

a. Les corrélations entre les événements de crédit

La perte sur un portefeuille de crédit est conditionnée par le niveau et la variation des événements de crédit. Ces derniers, rappelons le, sont essentiellement : le défaut et la perte en cas de défaut (qui dépend elle-même de l'exposition au moment du défaut et du taux de recouvrement). En conséquence, trois catégories de corrélations doivent, en théorie, être estimées :

- Les corrélations entre les défauts et dans un modèle MTM, les corrélations entre migrations ;
- Les corrélations entre les pertes conditionnelles au défaut (les taux de récupération);
- Les corrélations entre les défauts et les pertes conditionnelles au défaut.

Cependant, en raison de l'absence ou du caractère incomplet des données disponibles, les hypothèses suivantes sont, généralement, retenues :

H 1 : les pertes conditionnelles au défaut sont indépendantes entre emprunteurs.

H 2 : les pertes en cas de défaut (LGD) sont indépendantes du défaut lui-même.

En conséquence, les seules corrélations à estimer sont celles entre les défauts.

b. Les corrélations entre les défauts

Nous avons vu, précédemment, que la probabilité de défaut est conditionnée par les facteurs de risque, et que ces facteurs sont soit des facteurs systématiques soit des facteurs idiosyncrasiques.

L'existence de corrélations entre les défauts s'explique par l'exposition des crédits à des facteurs de risque communs, en d'autres termes, par la dépendance commune des défauts par rapport à un ensemble de facteurs systématiques. C'est pourquoi, l'estimation des corrélations nécessite de déterminer quels sont les facteurs de risque de nature systématique. Selon les modèles et les données disponibles, ces facteurs peuvent être identifiés (facteurs macroéconomiques ou sectoriels, par exemple) ou, au contraire, être supposés latents (non observables).

c. La construction de la fonction de densité des pertes (PDF)

La fonction (PDF) sur l'horizon retenu est l'output final d'un modèle de risque de crédit. Quelle que soit la méthodologie retenue pour sa construction, le principe demeure identique. Pour chaque état de la nature, il s'agit de déterminer, conjointement, la répartition de fin de période des emprunteurs, au sein des classes de risque, et la variation de la valeur de chaque crédit, en fonction de la classe de risque, dans laquelle il se trouve alors. La perte totale s'obtient par simple agrégation des positions individuelles. Pour un modèle s'inscrivant dans le paradigme de défaut, il suffit de déterminer le nombre de défauts dans chaque classe, pour chaque réalisation des facteurs de risque et la perte relative à chaque défaut.

Deux options peuvent être retenues pour la construction de la fonction de densité des pertes.

1) L'approche analytique

Cette première option peut être choisie lorsque les éléments constitutifs de la perte (distribution des probabilités de défaut et les expositions) ont une forme connue. Ces éléments sont alors combinés afin d'obtenir une formulation analytique de la loi de distribution des pertes.

2) L'approche par simulation

La seconde option consiste à construire la distribution des pertes sur la base d'une simulation Monte Carlo (Voir Annexe III.B). Cette technique suppose, cependant, de disposer d'un modèle explicatif du défaut (ou plus généralement des transitions).

Génération des scénarii : après avoir déterminé une distribution statistique des facteurs de risque, on procède à des tirages aléatoires. Chaque tirage correspond à un

« état de la nature ». Dans notre cas ces « états de la nature » correspondent soit à un défaut soit à un nouveau rating.

Réévaluation du portefeuille : pour chaque scénario, on réévalue le portefeuille pour refléter la nouvelle situation de chaque emprunteur.

On répète ces deux étapes un très grand nombre de fois (par exemple, 200 000 simulations), puis à la fin, on obtient la distribution globale des pertes.

3. Validation du modèle [SER'04]

La finalité de chaque modèle de risque de crédit est de fournir la fonction de distribution des pertes qui sert à calculer la VaR à différents niveaux de confiance. Or, on ne peut valider le modèle conçu qu'après avoir calculé la VaR, et donc on se ramène à une validation du modèle globale ayant pour but l'estimation du risque potentiel assurée par la VaR.

Deux instruments de référence s'imposent pour valider le modèle :

- Back-testing
- Analyse des scénarii

A cette étape, après avoir vu comment contourner toutes les complexités liées au risque de crédit, nous présentons les modèles de référence proposés par l'industrie financière.

4. Le modèle CreditMetrics [SAU'04]

CreditMetrics est le premier modèle de risque de crédit proposé dans l'industrie bancaire. Développé par JP Morgan, en partenariat avec plusieurs autres banques et sociétés, CreditMetrics se veut une ébauche de standard et d'uniformisation en matière de mesure du risque de crédit.

4.1 Le cadre général de CreditMetrics

La méthodologie de CreditMetrics est basée sur l'estimation de la distribution future des changements de valeurs du portefeuille de crédit, pour un horizon donné, dus aux éventuelles migrations d'une classe de risque vers une autre. Le modèle traite de manière similaire les crédits bancaires et les obligations. Le cadre général de CreditMetrics est résumé sur la figure 3.4, qui montre que la construction de ce modèle passe par deux grandes étapes :

- La mesure de la VaR au niveau individuel ;
- La mesure de la VaR du portefeuille dans son ensemble, en tenant compte des diverses corrélations.

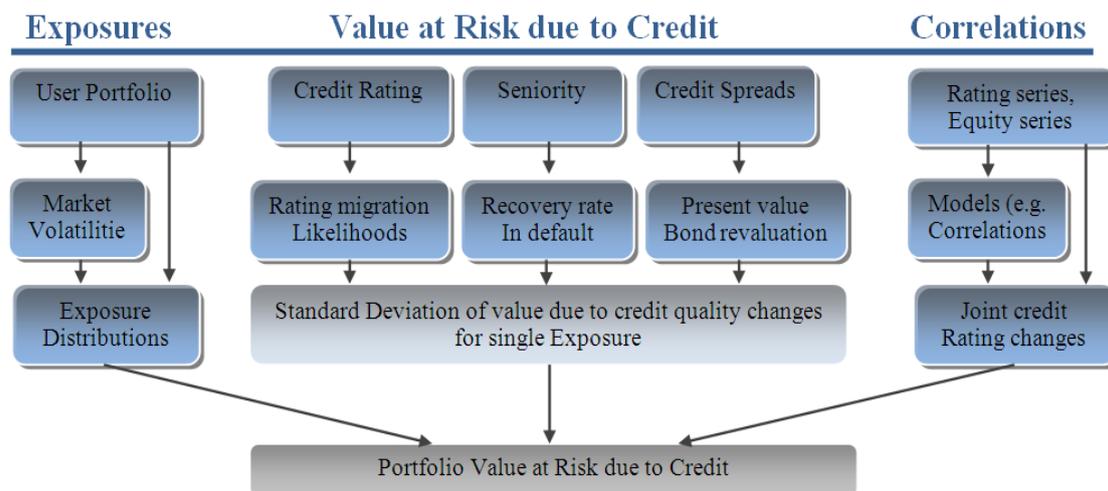


Figure 3.4 - Cadre général de CreditMetrics [SAU'04]

A première vue, la pluralité des sources d'informations, fait que ce modèle parait d'une certaine complexité. Cependant, nous procéderons étape par étape, à la reconstruction de cette démarche générale, à partir de la matrice de transition.

4.2 Mesure du risque au niveau individuel

Trois étapes sont nécessaires pour mesurer le risque d'un « portefeuille » composé d'un seul crédit, comme illustré sur la figure.

- **Etape 1** : le rating initial du crédit détermine la vraisemblance qu'il soit en défaut ou migre vers n'importe quelle autre classe de risque à l'horizon retenu.
- **Etape 2** : la séniorité du crédit et les garanties recueillies déterminent le taux de recouvrement en cas de défaut. La courbe zéro-coupon correspondant à chaque rating détermine la valeur du crédit.
- **Etape 3** : la probabilité de la première étape combinée à la valeur de l'instrument calculée dans la seconde étape, donne une mesure du risque de crédit.

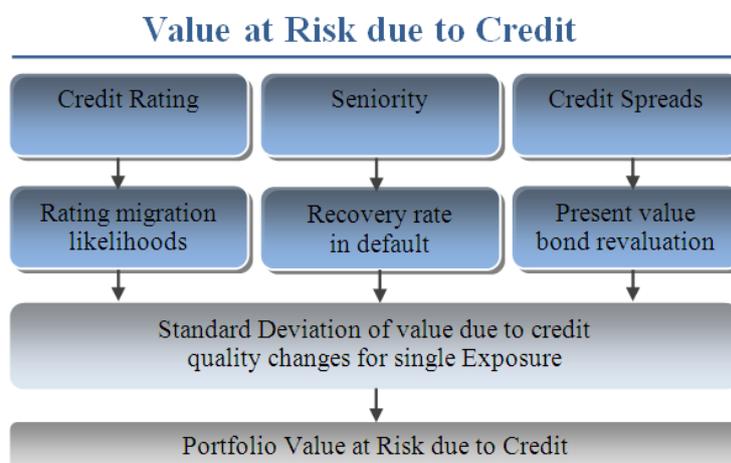


Figure 3.5 - Mesure du risque au niveau individuel [SAU'04]

Etape 1 : La matrice de transition

Etant donné que CreditMetrics est un modèle MTM, la première étape consiste à spécifier un système de rating, avec les classes de risque et les probabilités de migration. Cette matrice de transition est la composante clé du modèle proposé par JP Morgan.

La matrice de transition peut, soit provenir des agences externes, soit être développée en interne. L'une des hypothèses les plus restrictives du modèle, est que tous les crédits d'une même classe de rating présentent un risque homogène. De ce fait, ils ont la même probabilité de transition et en particulier la même probabilité de défaut. A titre d'exemple, nous retenons la matrice de transition de Standard & Poor's.

Tableau 3.1 - Exemple de matrice de transition

| Rating initial (%) | Rating après un an (%) | | | | | | | |
|--------------------|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | Défaut |
| AAA | 93,66 | 5,83 | 0,40 | 0,09 | 0,03 | 0,00 | 0 | 0 |
| AA | 0,66 | 91,72 | 6,94 | 0,49 | 0,06 | 0,09 | 0,02 | 0,01 |
| A | 0,09 | 2,27 | 91,05 | 5,52 | 0,74 | 0,26 | 0,01 | 0,06 |
| BBB | 0,02 | 0,33 | 5,95 | 86,93 | 5,30 | 1,17 | 0,12 | 0,18 |
| BB | 0,03 | 0,06 | 0,44 | 6,66 | 83,23 | 7,46 | 1,05 | 1,08 |
| B | 0 | 0,1 | 0,32 | 0,46 | 5,72 | 83,62 | 3,84 | 5,94 |
| CCC | 0,15 | 0 | 0,29 | 0,88 | 1,91 | 10,28 | 61,23 | 25,26 |

L'horizon des probabilités de transition doit correspondre à l'horizon retenu pour la mesure de la VaR. Ainsi, pour un horizon de risque de six mois doit correspondre une matrice de transition de six mois. Cette dernière peut être obtenue par transformation des matrices à un an (Voir Annexe III.D).

Etape 2 : Réévaluation du portefeuille

Dans la première étape, nous avons déterminé les probabilités de migration. Dans cette seconde étape nous évaluerons la position dans tous les états possibles.

a) Réévaluation de la position dans le cas du défaut

Si le crédit migre vers la classe de défaut, sa valeur résiduelle dépendra de la séniorité du crédit. Cette dépendance entre taux de recouvrement et séniorité est mesurée sur la base d'historiques de défauts. Cependant, ces études donnent des résultats instables et approximatifs.

b) Réévaluation de la position dans les autres cas

Si le crédit migre vers une classe de risque autre que le défaut, l'exposition doit être réévaluée par un autre moyen. Pour obtenir la valeur de l'exposition à l'horizon retenu, selon le rating final, on doit suivre les étapes suivantes :

- Construire la courbe zéro-coupon pour chaque rating. Cette courbe doit correspondre à l’horizon du risque (Voir Annexe III.C).
- Réévaluer la position en actualisant les cash-flows restant au taux zéro-coupon selon le rating. Le tableau suivant est un exemple de courbe zéro-coupon.

Tableau 3.2 - Courbe zéro-coupon

| Rating | Année 1 | Année 2 | Année 3 | Année 4 |
|--------|---------|---------|---------|---------|
| AAA | 3.60% | 4.17% | 4.73% | 5.12% |
| AA | 3.65% | 4.22% | 4.78% | 5.17% |
| A | 3.72% | 4.32% | 4.93% | 5.32% |
| BBB | 4.10% | 4.67% | 5.25% | 5.63% |
| BB | 5.55% | 6.02% | 6.78% | 7.27% |
| B | 6.05% | 7.02% | 8.03% | 8.52% |
| CCC | 15.05% | 15.02% | 14.03% | 13.52% |

Etape 3 : Estimation du risque

Nous disposons à présent de toutes les informations nécessaires pour estimer le risque dû au changement de rating : (1) la valeur de la position dans chaque « état de la nature », et (2) la vraisemblance d’être dans chaque état. CreditMetrics utilise deux estimateurs de risque :

- La volatilité
- *Percentage Level* (Value at Risk).

4.3 Mesure du risque au niveau du portefeuille

Pour plus de clarté, et avant de généraliser, nous traiterons le cas où le portefeuille est composé de plus d’un titre, à travers un exemple de deux obligations. Dans ce cas, on utilise en plus de l’obligation de type BBB du paragraphe précédent, une autre obligation de type A de maturité trois ans. Cette obligation paye un coupon annuel de 5%.

D’abord nous commençons par mettre à jour notre démarche représentée sur la figure 3.5, en ajoutant un élément fondamental : les corrélations.

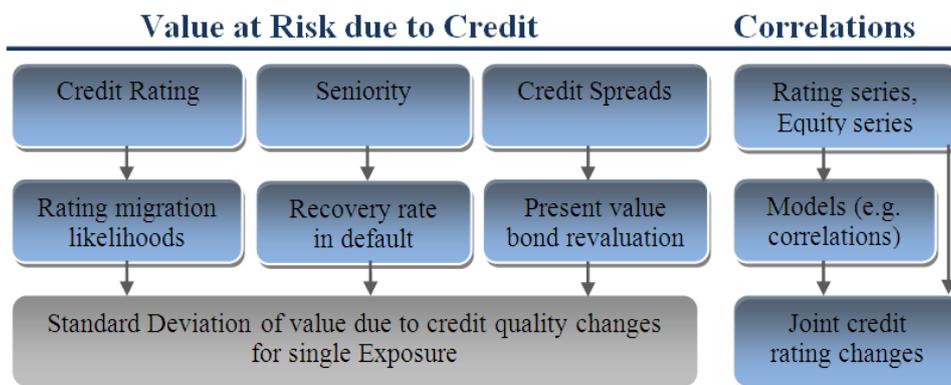


Figure 3.6 - Mesure du risque au niveau du portefeuille [SAU’04]

4.3.1. Valeurs futures du portefeuille

Notre objectif est d'obtenir l'état du portefeuille après une année. Comme l'obligation BBB, la nouvelle obligation peut migrer dans un an vers huit états. Ainsi, notre portefeuille peut prendre 64 (8x8) différentes valeurs. La valeur du portefeuille dans chaque état est la somme des valeurs des deux obligations. Ainsi, en suivant la même démarche que précédemment, on calcule les valeurs de l'obligation A. Puis en additionnant les valeurs des deux obligations on obtient les valeurs futures du portefeuille représenté dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3 - Valeurs futures du portefeuille

| Obligation #1 BBB | Obligation #2 A | | | | | | | | |
|----------------------|-----------------|--------------|------------|---------------|--------------|-------------|--------------|-----------------|--------|
| | AAA 106.59 | AA 106.49 | A 106.3 | BBB 105.64 | BB 103.15 | B 101.39 | CCC 88.71 | Défaut 51.13 | |
| AAA | 109.37 | 215.96 | 215.86 | 215.67 | 215.01 | 212.52 | 210.76 | 198.08 | 160.50 |
| AA | 109.19 | 215.78 | 215.68 | 215.49 | 214.83 | 212.34 | 210.58 | 197.90 | 160.32 |
| A | 108.66 | 215.25 | 215.15 | 214.96 | 214.3 | 211.81 | 210.05 | 197.37 | 159.79 |
| BBB | 107.55 | 214.14 | 214.04 | 213.85 | 213.19 | 210.7 | 208.94 | 196.26 | 158.68 |
| BB | 102.02 | 208.61 | 208.51 | 208.33 | 207.66 | 205.17 | 203.41 | 190.73 | 153.15 |
| B | 98.1 | 204.69 | 204.59 | 204.4 | 203.74 | 201.25 | 199.49 | 186.81 | 149.23 |
| CCC | 83.64 | 190.23 | 190.13 | 189.94 | 189.28 | 186.79 | 185.03 | 172.35 | 134.77 |
| Défaut | 51.13 | 157.72 | 157.62 | 157.43 | 156.77 | 154.28 | 152.52 | 139.84 | 102.26 |

4.3.2 Probabilités de migration jointes

4.3.2.1 Cas où les corrélations sont nulles

Nous avons vu que pour chaque rating, huit états futurs sont possibles. Maintenant, nous considérons les changements des deux obligations conjointement. En d'autres termes, on s'intéressera aux migrations jointes des deux obligations.

Une manière aisée d'obtenir ces probabilités jointes, est de supposer que les migrations ne sont pas corrélées. Ainsi, la probabilité que les deux obligations gardent le même rating est donnée par :

$$79,15\% = 86,93\% \times 91,05\%$$

Sachant que 86,93% est la probabilité que l'obligation BBB garde son rating et que 91,05% est la probabilité que l'obligation A garde son rating.

En répétant cette opération pour les 64 états possibles, on obtient les probabilités jointes du tableau ci-dessous :

Tableau 3.4 - Les probabilités de migration jointes quand les corrélations sont nulles

| Obligation #1 BBB | | Obligation #2 A | | | | | | | |
|----------------------|-------|-----------------|------------|------------|-------------|------------|-----------|-------------|----------------|
| | | AAA 0.09 | AA 2.27 | A 91.05 | BBB 5.52 | BB 0.74 | B 0.26 | CCC 0.01 | Défaut 0.06 |
| AAA | 0,02 | 0.00% | 0.00% | 0.02% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| AA | 0,33 | 0.00% | 0.01% | 0.30% | 0.02% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| A | 5,95 | 0.01% | 0.14% | 5.42% | 0.33% | 0.04% | 0.02% | 0.00% | 0.00% |
| BBB | 86.93 | 0.08% | 1.97% | 79.15% | 4.80% | 0.64% | 0.23% | 0.01% | 0.05% |
| BB | 5.30 | 0.00% | 0.12% | 4.83% | 0.29% | 0.04% | 0.01% | 0.00% | 0.00% |
| B | 1.17 | 0.00% | 0.03% | 1.07% | 0.06% | 0.01% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| CCC | 0.12 | 0.00% | 0.00% | 0.11% | 0.01% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Défaut | 0.18 | 0.00% | 0.00% | 0.16% | 0.01% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |

4.3.2.2. Introduction des corrélations

a) Le modèle sous-jacent

En réalité, les corrélations ne sont pas nulles. Elles sont élevées pour les entreprises du même secteur, et moins élevées pour les entreprises de différents secteurs. De plus, les corrélations varient avec l'état général de l'économie : en cas de récession, la qualité des actifs des entreprises se dégrade ainsi que leurs valeurs, ce qui entraîne une augmentation des défauts, et en cas de croissance, le phénomène inverse se produit.

Pour mesurer les corrélations, CreditMetrics s'appuie sur une extension du modèle de Merton : les corrélations entre les migrations sont déterminées à partir des corrélations entre le rendement des actifs des emprunteurs.

Le modèle de Merton, représenté sur la figure 3.7, a été généralisé par CreditMetrics afin qu'il intègre les changements de rating, comme illustré sur la figure 3.4. Cette dernière représente une distribution normalisée des rendements des actifs des emprunteurs. Cette généralisation consiste à « découper en bandes » la distribution des rendements des actifs et à calculer les seuils à partir desquels l'emprunteur change de rating, de manière à refléter les probabilités de transition.

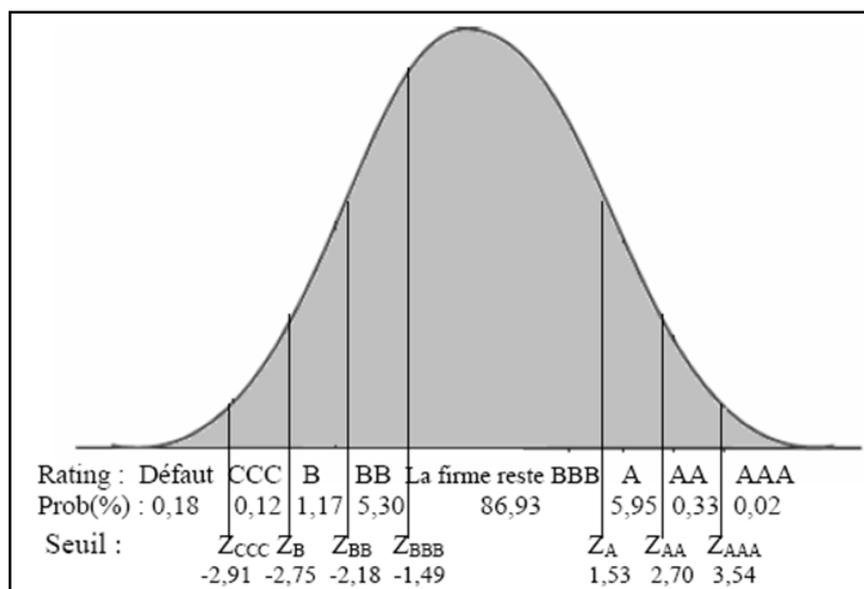


Figure 3.7 - Généralisation du modèle de Merton pour la prise en compte des ratings [HUL'04]

On peut lire sur la figure, que la surface à gauche de Z_{CCC} correspond à la probabilité de défaut, celle à droite de Z_{AAA} correspond à la probabilité que l'emprunteur passe au rating AAA, et la surface entre Z_{BBB} et Z_A correspond à la probabilité que la firme soit notée BBB.

b) Les probabilités jointes de migration

La probabilité de défaut dans le modèle de Merton est donnée par :

$$p_{Def} = P[V_t \leq V_{Def}]$$

$$= N\left(-\frac{\ln[V_0/V_{Def}] + [\mu - (\sigma^2/2)] \times t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Les rendements normalisés $r \rightarrow N(0,1)$ sont donnés par :

$$r = \left(\frac{\ln[V_t/V_0] - [\mu - (\sigma^2/2) \times t]}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Ainsi Z_{CCC} est simplement le fractile de la loi normale $N(0,1)$, correspondant à la probabilité P_{Def} .

Finalement on peut écrire :

$$P_{Def} = P[r \leq Z_{ccc}] \Rightarrow Z_{ccc} = N^{-1}(P_{Def}) \tag{3.4}$$

Cette dernière équation relie les seuils aux probabilités de transition. En l'appliquant pour les autres probabilités de transition, on obtient le tableau suivant :

Tableau 3.5 - Les seuils de transition

| Obligation #1 BBB | Obligation #2 A | | | | | | | |
|-------------------|-----------------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|
| | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | Défaut |
| AAA | 0.00% | 0.00% | 0.03% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| AA | 0.00% | 0.02% | 0.30% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| A | 0.00% | 0.29% | 5.48% | 0.14% | 0.01% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| BBB | 0.02% | 1.90% | 79.39% | 4.69% | 0.61% | 0.21% | 0.01% | 0.00% |
| BB | 0.07% | 0.04% | 4.62% | 0.51% | 0.08% | 0.03% | 0.00% | 0.04% |
| B | 0.00% | 0.01% | 0.99% | 0.14% | 0.02% | 0.01% | 0.00% | 0.01% |
| CCC | 0.00% | 0.00% | 0.10% | 0.02% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Défaut | 0.00% | 0.01% | 0.90% | 0.13% | 0.02% | 0.01% | 0.00% | 0.00% |

On peut lire à partir du tableau que le seuil de défaut pour une obligation A est de $-3,24\sigma$ par rapport au rendement moyen, alors qu'il est de $-2,91\sigma$ pour une obligation BBB.

Puisque les transitions pour un emprunteur sont décrites à partir d'un processus normal, il en découle que les transitions jointes sont décrites par une loi normale bivariable :

$$f(r_{BBB}, r_A, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} [r_{BBB}^2 - 2\rho r_{BBB}r_A + r_A^2]\right\} \quad (3.5)$$

Supposant que la corrélation entre le rendement des actifs est $\rho = 0.2$

La probabilité que les deux emprunteurs précédents gardent le même rating est donnée par:

$$p(-1.49 < r_{BBB} < 1.53, -1.51 < r_A < 1.98) = \int_{-1.49}^{1.53} \int_{-1.51}^{1.98} f(r_{BBB}, r_A, \rho) dr_{BBB} dr_A = 0.8304 \quad (3.6)$$

Tableau 3.6 - Les probabilités jointes quand les corrélations ne sont pas nulles

| Rating dans un an | Obligation de rating A | | Obligation de rating BBB | |
|-------------------|------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| | Probabilités (%) | Seuils : Z (σ) | Probabilités (%) | Seuils : Z (σ) |
| AAA | 0.09 | 3.12 | 0.02 | 3.54 |
| AA | 2.27 | 1.98 | 0.33 | 2.70 |
| A | 91.05 | -1.51 | 5.95 | 1.53 |
| BBB | 5.52 | -1.51 | 86.93 | -1.49 |
| BB | 0.74 | -2.72 | 5.30 | -2.18 |
| B | 0.26 | -3.19 | 1.17 | -2.75 |
| CCC | 0.01 | -3.24 | 0.12 | -2.91 |
| Défaut | 0.06 | | 0.18 | |

c) L'impact des corrélations sur les défauts

La probabilité jointe de défaut de deux emprunteurs est donnée par :

$$P(DEF1, DEF2) = P[V_1 \leq V_{Def1}, V_2 \leq V_{Def2}]$$

Ou de manière équivalente :

$$P(DEF1, DEF2) = P[r_1 \leq Z1_{ccc}, r_2 \leq Z2_{ccc}] = N_2(Z1_{ccc}, Z2_{ccc}, \rho) \quad (3.7)$$

La figure 3.8 est une représentation graphique de la formule 3.4 lorsque la corrélation de la rentabilité des actifs varie de 0 à 1.

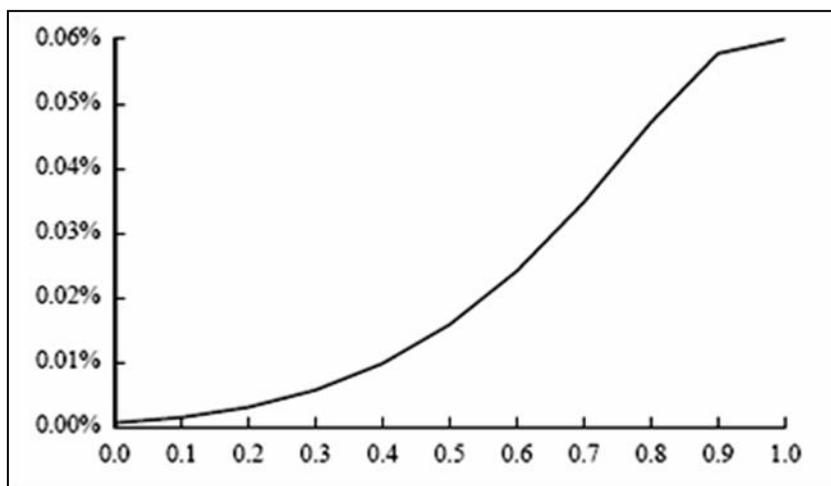


Figure 3.8 - Impact des corrélations sur les défauts [ABB'05]

d) Les corrélations entre les défauts

Considérons deux emprunteurs dont les probabilités de défaut sont respectivement $P1$ et $P2$. La corrélation entre les rentabilités de leurs actifs est ρ . Notons DEF1 et DEF2 les événements de défaut, et $P(DEF1, DEF2)$ la probabilité jointe de défaut.

La corrélation entre les défauts est donnée par :

$$corr(DEF1, DEF2) = \frac{P(DEF1, DEF2) - P1.P2}{\sqrt{P1(1 - P1).P2(1 - P2)}} \quad (3.8)$$

4.3.3. La simulation Monte Carlo (Voir Annexe III.B)

Jusqu'à présent nous avons présenté une méthode analytique de construction de la distribution future du portefeuille. Mais cette méthode devient inapplicable avec l'augmentation du nombre de crédits dans le portefeuille. Avec deux emprunteurs, nous avons déterminé 64 états possibles, avec 3 emprunteurs, le nombre de possibilités augmente à 512, et avec 5 le nombre d'états possibles passe à 32 768. D'une manière générale, avec N crédits, il existe 8^N possibilités pour le portefeuille.

Pour surmonter cette difficulté, CreditMetrics met en œuvre une simulation Monte Carlo. Le principe de la simulation consiste à générer, en tenant compte de la matrice des corrélations, des scénarii qui représentent la valeur future du portefeuille. Cette simulation est réalisée selon les étapes suivantes :

- Déterminer les seuils de transition Z , à partir de la matrice de transition, pour tous les emprunteurs ;
- Déterminer la matrice des corrélations ;
- Faire un tirage d'une loi normale standard multi-variée. Chaque tirage est un vecteur représentant les n rendements des actifs des emprunteurs ;
- Transformer les rendements obtenus en ratings ;
- Réévaluer le portefeuille à l'aide des courbes zéro-coupon ;
- Répéter cette procédure un nombre élevé de fois (par exemple 200 000) ;
- Enfin représenter les résultats sous forme d'un histogramme, et calculer le *percentage level* à partir des scénarii obtenus.

4.4 Les limites du modèle CreditMetrics, [GOR'98]

- Le modèle est beaucoup plus adapté aux instruments de marché. Pour les crédits bancaires classiques, une approche MTM semble plus compliquer les calculs et accroître le volume de données nécessaires, qu'apporter une réelle contribution en matière de précision ;
- CreditMetrics, et plus généralement les modèles fondés sur la simulation, deviennent très approximatifs dans le cas de portefeuilles restreints et particulièrement homogènes. En effet, ces caractéristiques ne permettent pas aux biais dus au hasard de se compenser entre les émetteurs, chose qui aurait été possible si le portefeuille était homogène ;
- La notion de poids des facteurs communs (les β_{ik}) est très vague. En effet, on peut s'interroger sur la fiabilité de la décomposition sectorielle par chiffre d'affaires : tient-elle compte du différentiel de marges entre divers secteurs ? On pourrait alors utiliser les chiffres de répartition des résultats par secteur, mais ceux-ci sont plus difficiles à obtenir... ;
- Pour le calcul des facteurs d'actualisation, nous avons besoin, pour chaque rating, d'une courbe des taux sans risque (qui ne sont pas nécessairement constants) et d'une

courbe des spreads. CreditMetrics suggère d'utiliser les courbes fournies par Bridge, qui ne sont évidemment fournies que pour les USA. En effet, les spreads évoluent en fonction du niveau absolu des taux d'intérêt qui peut être différent d'un pays à un autre.

5. Le modèle **CreditRisk+** [CSFB'97]

Ce modèle proposé par Credit Suisse Financial Products (CSFP) apparaît comme une alternative à celle de J.P. Morgan. Ce modèle est fondé sur une approche probabiliste du processus de défaut de paiement d'une contrepartie sans faire aucune hypothèse sur la cause du défaut. Le modèle **CreditRisk+** considère le taux de défaut comme une variable aléatoire continue. La prise en compte d'une volatilité du taux de défaut associée à une analyse par secteur permettent de rendre compte à la fois de l'incertitude du niveau de défaut et des éventuelles corrélations existant entre plusieurs obligations. Ce choix s'explique d'après CSFP par l'instabilité des corrélations de défaut et par le manque de données empiriques pour suivre la démarche proposée par CreditMetrics.

En appliquant des techniques mathématiques plus souvent rencontrées dans le domaine de l'assurance que dans celui de la finance, ce modèle cerne les caractéristiques essentielles de l'occurrence de défauts de paiement et permet un calcul explicite de la distribution des pertes d'un portefeuille comportant un risque de crédit.

5.1. La démarche

Les concepts clés qui sont à la base de **CreditRisk+** sont les suivants :

- Les taux de défaut sont stochastiques.
- Le niveau du taux de défaut a une incidence sur l'occurrence du défaut, mais il n'y a pas de relations causales entre ces occurrences.

Le modèle est alors structuré selon la Figure 3.9. La démarche suivie focalise tout d'abord son étude sur un modèle simplifié dans lequel la volatilité des taux de défaut n'est pas prise en compte. Une fois la distribution des pertes obtenue dans un cas simple, on intègre cette volatilité dans le processus, ce qui au vu des résultats correspond à une dimension aléatoire supplémentaire et donc à une simple composition de lois de probabilités. On montre alors l'existence de cas où le modèle à volatilité converge vers le cas simple. Finalement, on étend la première approche sectorielle à un cas plus complet. On est alors en mesure d'exploiter les résultats, notamment pour déterminer les différentes contributions au risque d'un portefeuille des émetteurs qui le composent ou les corrélations des taux de défaut entre ces mêmes émetteurs.

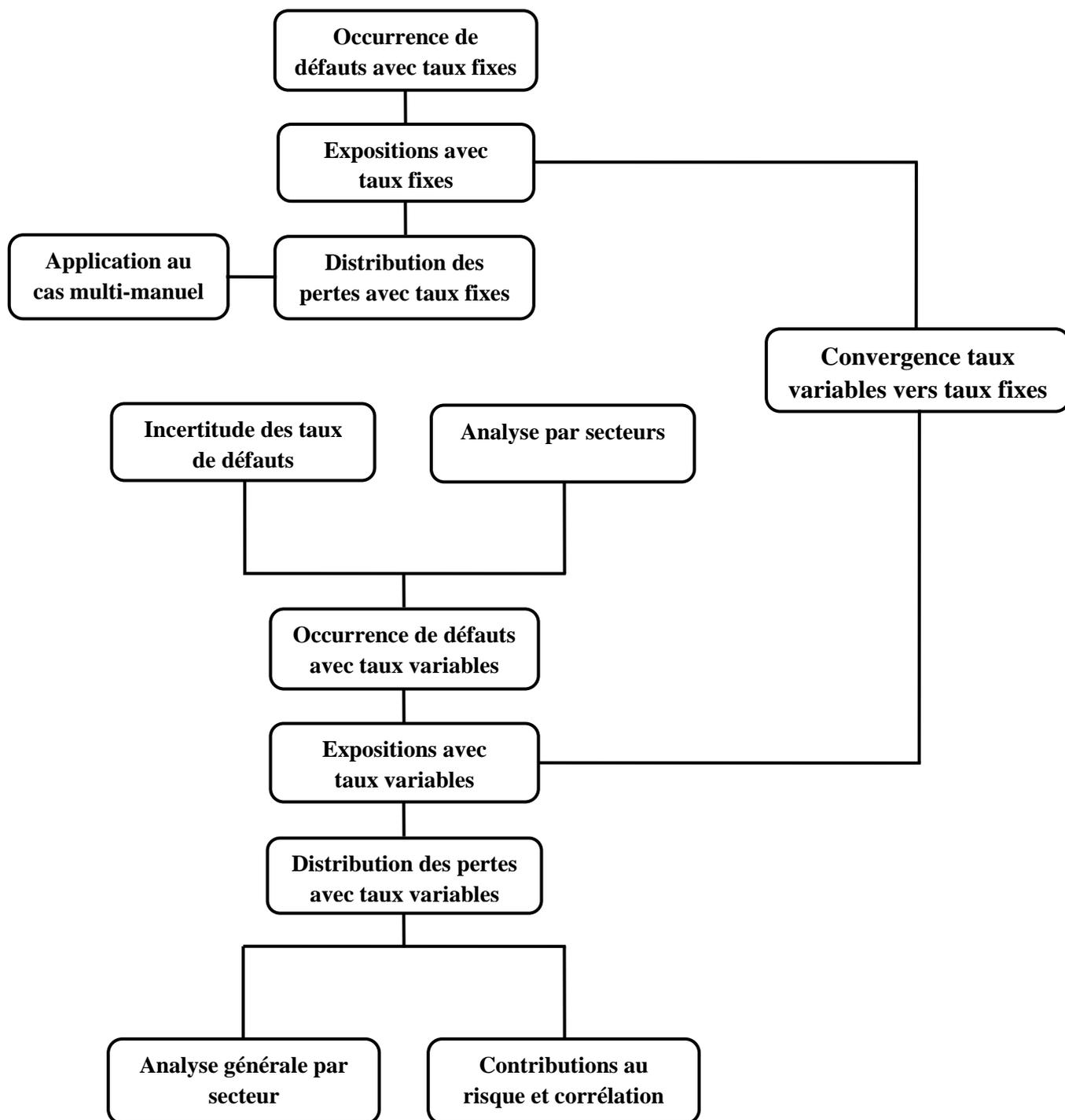


Figure 3.9 - Organigramme de la démarche suivie par CreditRisk+ [CSFB'97]

5.2. Modélisation à taux de défaut fixes [CSFB'97]

5.2.1 Occurrence de défauts

Les défauts de crédits ne peuvent pas être prévus ni dans leur date, ni dans leur nombre, si bien que **CreditRisk+** tente de modéliser globalement le risque crédit d'un portefeuille.

Nous considérons un portefeuille composé de N obligations. Nous supposons dans cette partie que chacun de ces titres est sujet à une probabilité de défaut à un horizon de un an connue. Ainsi, nous avons

$$P_A = \text{Probabilité annuelle de défaut pour } A \quad (3.1)$$

On introduit alors la fonction génératrice associée au nombre D de défauts survenus parmi les obligations du portefeuille :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(D = n) \cdot z^n \quad (3.2)$$

Or, chaque émetteur fait ou ne fait pas défaut ; la fonction génératrice d'un portefeuille composé d'une unique obligation s'obtient donc facilement :

$$F_A(z) = 1 - P_A + P_A \cdot z = 1 + P_A \cdot (z - 1) \quad (3.3)$$

De plus, les événements sont supposés indépendants, ce qui induit

$$F(z) = \prod_A F_A(z) = \prod_A (1 + P_A \cdot (z - 1)) \quad (3.4)$$

Ce qui revient à écrire

$$\ln F(z) = \sum_A \ln(1 + P_A \cdot (z - 1)) \quad (3.5)$$

Or, nous pouvons raisonnablement penser que les probabilités sont suffisamment faibles pour approximer cette dernière expression par un développement limité au premier ordre, ce qui se traduit par :

$$F(z) = \exp\left(\sum_A P_A \cdot (z - 1)\right) = \exp(\mu \cdot (z - 1)) \quad (3.6)$$

Avec

$$\mu = \sum_A P_A \quad (3.7)$$

μ représente en fait le nombre moyen de défauts attendus en un an parmi les émissions du portefeuille considéré. On remarque de plus que la dernière expression peut s'écrire sous une autre forme, grâce aux séries entières, ce qui donne une formule explicite de la répartition de la variable aléatoire D :

$$F(z) = \exp(\mu \cdot (z - 1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} z^n \quad (3.8)$$

D'où :

$$P(D = n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} \quad (3.9)$$

Finalement, sous les hypothèses faites plus haut, le nombre de défaut à survenir suit une loi de Poisson de paramètre μ . Ce paramètre est l'unique inconnue du modèle, il ne dépend ni du nombre de titres présents dans le portefeuille ni des probabilités individuelles de défaut de chaque obligation, pourvu qu'elles soient suffisamment petites pour valider les approximations effectuées. Reste à noter, pour la suite, qu'une loi de Poisson de paramètre μ a pour moyenne μ et pour écart-type $\sqrt{\mu}$.

Evidemment, les hypothèses faites ne sont pas satisfaisantes et ne cadrent pas avec la réalité. Toutefois, ces résultats seront utiles pour la suite, notamment pour le passage à des taux variables et à l'introduction de volatilité des taux de défauts.

5.2.2 Pertes de défaut

L'objectif principal est de quantifier le risque de perte d'un portefeuille. Or, un même niveau de perte peut être obtenu par un seul "gros" défaut aussi bien que pour de nombreux "petits" défauts. Cette constatation a incité CSFP à regrouper les émissions contenues dans un portefeuille par tranche d'exposition.

Ceci a pour effet de réduire considérablement le nombre de données à l'entrée pour l'implémentation.

Cette approximation sera d'autant plus légitime que les tranches d'expositions seront nombreuses et étroites en comparaison avec l'exposition moyenne du portefeuille. Ainsi, ces approximations seront utiles sans pour autant modifier significativement les résultats.

On adopte les notations suivantes :

| Référence | Notation |
|------------------------------|-------------|
| Emetteur | A |
| Exposition | L_A |
| Probabilité de défaut | P_A |
| Pertes attendues | λ_A |

L'exposition et les pertes attendues sont exprimées en L, qui représente une unité arbitraire choisie, si bien que pour chaque émetteur A, on définit ε_A et v_A de la manière suivante :

$$L_A = v_A \times L \quad (3.10)$$

Et

$$\lambda_A = \varepsilon_A \times L \quad (3.11)$$

Le passage important est d'arrondir chaque v_A à l'entier le plus proche. Ainsi, pour un gros portefeuille, un choix adapté de L permettra de réduire à un nombre relativement petit les valeurs v_A partagées par plusieurs émissions. Le portefeuille se retrouve alors divisé en m tranches d'exposition, indexée par j , ce qui revient à ne retenir que les notations suivantes :

| Référence | Notation |
|---|-----------------|
| Exposition commune dans la tranche j en L | v_j |
| Pertes attendues dans la tranche j en L | ε_j |
| Nombre de défaut attendu dans la tranche j | μ_j |

De plus, ces trois variables sont reliées par la relation suivante

$$\varepsilon_j = \mu_j \times v_j \quad (3.12)$$

Donc

$$\mu_j = \frac{\varepsilon_j}{v_j} = \sum_{(A|v_A=v_j)} \frac{\varepsilon_A}{v_A} \quad (3.13)$$

Nous utiliserons aussi par la suite

$$\mu = \sum_{j=1}^m \mu_j = \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{v_j} \quad (3.14)$$

a. Procédure de calcul et distribution des pertes

On adopte ici le même point de vue que pour le nombre de défauts ; on définit la distribution des pertes agrégées à travers sa fonction génératrice

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{Pertes agrégées} = n \times L) \cdot z^n \quad (3.15)$$

Nous faisons alors intervenir le fait que les titres ont été regroupés par niveau d'exposition, et que les tranches sont indépendantes entre elles, ce qui s'écrit de manière plus formalisée:

$$G(z) = \prod_{j=1}^m G_j(z) \quad (3.16)$$

On considère alors chaque tranche comme un portefeuille à part entière, et on applique le résultat suivant où on note D_j la variable aléatoire rendant compte du nombre de défaut à survenir dans la tranche j .

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(D_j = n) \cdot z^{nv_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} z^{nv_j} = \exp(-\mu_j + \mu_j z^{v_j}) \quad (3.17)$$

Et donc, en revenant au portefeuille global

$$G(z) = \exp\left(-\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j}\right) \quad (3.18)$$

C'est la formule désirée qui nous renseigne sur la distribution des risques crédits du portefeuille.

On remarque que si on pose $P(z)$ le polynôme

$$P(z) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j} = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon_j}{v_j}\right) z^{v_j}}{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon_j}{v_j}\right)} \quad (3.19)$$

La fonction génératrice des pertes agrégées se présente alors sous la forme :

$$G(z) = \exp(\mu \cdot (P(z) - 1)) = F(P(z)) \quad (3.20)$$

$G(z)$ s'exprime alors comme la composée de deux sources d'incertitude : la loi de Poisson du nombre de défauts et la variabilité des montants d'exposition. On remarque également qu'elle ne dépend que de deux types de données v et ε . Ainsi, les seules entrées nécessaires à la mesure du risque crédit d'un portefeuille sont la connaissance des différentes tailles d'exposition et les pertes attendues pour chaque taille. CSFP estime que cela représente peu d'efforts, même pour un portefeuille assez important.

Toutefois, la dernière expression de la fonction génératrice n'est pas très maniable et ne nous renseigne pas explicitement sur la distribution des pertes. Aussi, on est amené à déterminer les probabilités associées à une perte de $n \times L$ par un autre algorithme. En effet d'après l'expression (3.15), on a :

$$P(\text{pertes agrégées} = n \times L) = \frac{1}{n!} \frac{d^n G}{dz^n}(0) = A_n \quad (3.21)$$

On applique alors successivement la formule de Leibnitz pour obtenir une formule de récurrence nous permettant de calculer A_n :

$$\begin{cases} A_0 = G(0) = \exp(-\mu) = \exp\left(-\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{v_j}\right) \\ A_n = \sum_{(j|v_j \leq n)} \frac{\varepsilon_j}{n} A_n - v_j \end{cases} \quad (3.22)$$

b. Application au cas multi-annuel

Il peut sembler plus intéressant de considérer l'étude du risque de crédit d'un portefeuille sur une période plus longue qu'une année. En effet, la maturité d'un portefeuille pourrait sembler être un horizon légitime. Dans cette optique, il faut être capable d'adapter les expressions précédentes à ce cas multi-annuel, moyennant la définition de notations plus adaptées :

| Référence | Notation |
|---|-----------------------|
| Exposition commune dans la tranche j en L pendant l'année t | $v_j^{(t)}$ |
| Pertes attendues dans la tranche j en L pendant l'année t | $\varepsilon_j^{(t)}$ |
| Nombre de défaut attendu dans la tranche j pendant l'année t | $\mu_j^{(t)}$ |

Alors, en supposant les événements de différentes années indépendants, on applique les résultats obtenus précédemment, d'où :

$$G(z) = \exp\left(\sum_{t,j} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{v_j^{(t)}} (z^{v_j^{(t)}} - 1)\right) \quad (3.23)$$

Ce qui implique une relation de récurrence semblable à la précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = G(0) = \exp(-\mu) = \exp\left(-\sum_{j,t} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{v_j^{(t)}}\right) \\ A_n = \sum_{(j,t | v_j^{(t)} \leq n)} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{n} A_{n-v_j^{(t)}} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

5.3 Passage à des taux de défaut aléatoires [CSFB'97]

2.3.1 Incertitude des taux de défaut

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des portefeuilles composés d'obligations dont le taux de défaut était connu et fixe. **CreditRisk+** prend en compte le fait que ces taux sont difficiles à déterminer et sont sujets à une variabilité non négligeable pour des titres semblables. De plus, les statistiques publiées sur la fréquence des défauts montrent des variations assez importantes d'une année sur l'autre. La situation se résume alors en trois points :

- Les probabilités de défaut sont volatiles dans le temps, même pour des émetteurs de qualité crédit comparable.
- La variabilité des probabilités de défaut peut être expliquée par des variabilités sous-jacentes d'un petit nombre de variables liées à l'environnement économique.

- Un changement dans l'économie ou d'un autre facteur ayant de l'influence sur la variabilité des taux de défaut ne doit pas nécessairement induire un défaut. Le défaut d'une contrepartie est un événement rare.

5.3.2 Analyse par secteur

Le second point énoncé souligne l'existence de facteurs susceptibles d'agir sur la qualité crédit de plusieurs émissions à la fois. Pour mesurer cet effet, et donc être en mesure de quantifier l'impact des volatilités des taux de défaut individuelles au niveau du portefeuille, CSFP a eu recours à une analyse par secteur. L'économie est alors divisée en K secteurs, et CreditRisk+ suppose que chaque secteur peut être modélisé par un unique facteur sous-jacent. C'est ce facteur qui nous permettra d'expliquer la variabilité dans le temps du nombre total de défaut mesuré pour ce secteur.

Pour chaque secteur k , nous introduisons une variable aléatoire x_k qui représente le nombre moyen de défauts dans ce secteur. L'espérance de x_k sera noté μ_k , et l'écart-type σ_k .

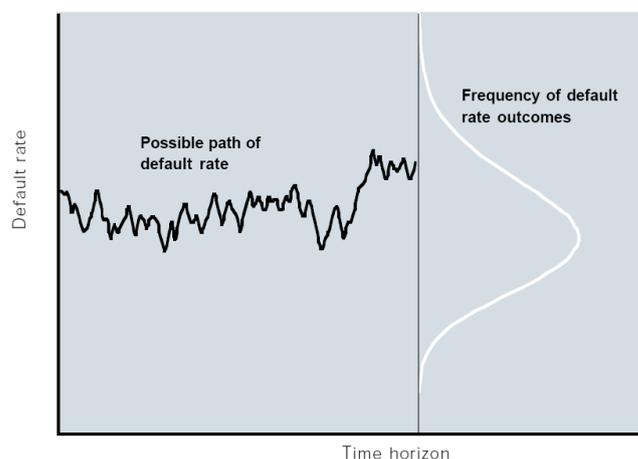


Figure 3.10 - Volatilité du taux de défaut à horizon donné [CSFB'97]

L'incorporation de la volatilité des taux de défaut agit sur la queue de distribution de la PDF, en la rendant plus épaisse (*fat tail*), et donc accroît la VaR.

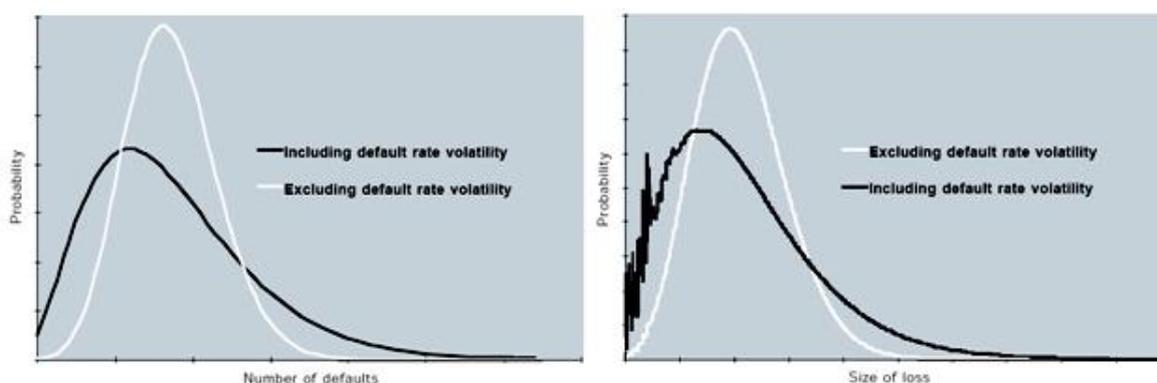


Figure 3.11 - Forme de la PDF en introduisant la volatilité du taux de défaut [CSFB'97]

| Référence | Notation |
|---|---|
| Unité d'exposition au risque | L |
| Tranche ou bande d'exposition | $L_j^{(k)} = v_j^{(k)} \times L (1 \leq k \leq K \text{ et } 1 \leq j \leq m(k))$ |
| Pertes attendues dans chaque tranche d'exposition | $\lambda_j^{(k)} = \varepsilon_j^{(k)} \times L (1 \leq k \leq K \text{ et } 1 \leq j \leq m(k))$ |

Sous ces nouvelles notations, on a donc :

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} = \sum_{A \in k} \frac{\varepsilon_A}{v_A} \quad (3.25)$$

Où $\frac{\varepsilon_A}{v_A}$ est la probabilité de défaut sur la période de A. Pour obtenir une estimation semblable de l'écart-type du taux de défaut pour chaque secteur, on est contraint d'assigner un écart-type pour le taux de défaut de chaque émetteur du secteur considéré. Une manière pratique de faire cela revient à supposer que cet écart-type dépend de la qualité crédit de l'émetteur. On obtient donc σ_k à partir des σ_A , sachant que la probabilité de défaut de chaque émetteur appartenant au secteur k sera considérée comme proportionnelle à la variable aléatoire x_k , ce qui s'écrit :

$$x_A = \frac{\varepsilon_A}{v_A} \frac{x_k}{\mu_k} \quad (3.26)$$

On peut noter que l'espérance de x_A vaut $\frac{\varepsilon_A}{v_A} = P_A$. Nous sommes alors en mesure de lier les σ_A à σ_k selon l'équation suivante :

$$\sum_{A \in k} \sigma_A = \sum_{A \in k} \frac{\varepsilon_A}{v_A} \frac{\sigma_k}{\mu_k} = \sigma_k \quad (3.27)$$

Les statistiques montrent que le ratio $\frac{\sigma_A}{P_A}$ est de l'ordre de 1, si bien que l'écart-type du nombre de défauts parmi les émetteurs d'un même groupe de qualité crédit est du même ordre que le nombre moyen annuel de défauts. C'est la même chose à l'échelle du secteur, comme le montre la relation suivante :

$$\frac{\sigma_k}{\mu_k} = \frac{\sum_{A \in k} \sigma_A}{\sum_{A \in k} P_A} = \frac{\sum_{A \in k} P_A \left(\frac{\sigma_A}{P_A} \right)}{\sum_{A \in k} P_A} \quad (3.28)$$

Ainsi, en l'absence de données suffisamment détaillées, les estimations caractéristiques de chaque émetteur $\frac{\sigma_A}{P_A}$ peuvent être remplacées par un unique ratio $\overline{\omega}_k$ pour le secteur, ce qui induit alors :

$$\sigma_k = \overline{\omega}_k \times \mu_k \quad (3.29)$$

Chercher à estimer σ_k est alors équivalent à estimer

5.3.3 Occurrence de défauts

En suivant la même démarche que précédemment, et en incluant la volatilité du taux de défaut dans le modèle, on obtient une fonction génératrice du nombre de défauts du type :

$$F(z) = \prod_{k=1}^K F_k(z) = \prod_{k=1}^K \int_{x=1}^{\infty} \exp(x \cdot (z - 1)) f_k(x) dx \quad (3.30)$$

Où $f_k(x)$ est la densité de la variable x_k .

Pour prolonger les calculs, il est alors nécessaire de donner une loi de distribution à x_k :

CreditRisk+ conseille de choisir une loi Gamma de moyenne μ_k et d'écart-type μ_k :

Sous ces hypothèses $f_k(x)$ est alors défini de la manière suivante :

$$P(x \leq x_k \leq x + dx) = f_k(x) dx = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} \exp\left(-\frac{x}{\beta_k}\right) x^{\alpha_k-1} dx \quad (3.31)$$

Où :

$$\alpha_k = \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}, \beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\mu_k} \text{ et } \Gamma(\alpha) = \int_{x=1}^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

Après simplification et en notant $p_k = \frac{\beta_k}{1+\beta_k}$, on obtient l'expression suivante :

$$F_k(z) = \left(\frac{1-p_k}{1-p_k z}\right)^{\alpha_k} = (1-p_k)^{\alpha_k} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+\alpha_k-1}{n} p_k^n z^n \quad (3.32)$$

On en déduit que :

$$P(D_k = n) = (1-p_k)^{\alpha_k} \binom{n+\alpha_k-1}{n} p_k^n \quad (3.33)$$

D_k qui est le nombre de défaut dans le secteur k suit donc une Loi Binomiale Négative.

5.3.4 Distribution des pertes de défaut

a) Pertes de défaut

Nous reprenons l'approche définie dans le cas où les taux de défaut étaient fixes, et nous généralisons ce procédé en y incorporant la volatilité de ces taux de défauts. On obtient alors des expressions semblables à celles rencontrées plus haut :

$$G(z) = \prod_{k=1}^K G_k(z) = \prod_{k=1}^K F_k(P_k(z)) = \prod_{k=1}^K \int_{x=0}^{\infty} e^{x(P_k(z)-1)} f_k(x) dx \quad (3.34)$$

Où :

$$P_k(z) = \frac{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} \right) z^{v_j^{(k)}}}{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} \right)} \quad (3.35)$$

Et là encore les intégrales peuvent être calculées, ce qui abouti à l'expression analytique suivante :

$$G(z) = \prod_{k=0}^K \left(\frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} \right) z^{v_j^{(k)}}} \right)^{\alpha_k} \quad (3.36)$$

b) Relation de récurrence

Pour être suffisamment exploitable, la fonction génératrice doit être mise sous forme de série entière où les probabilités associées aux pertes sont lues sans aucun effort. Or, pour arriver à cette forme, on est amené à traiter la dernière expression obtenue de $G(z)$ et mettre en évidence les coefficients A_n définis de la même manière que ceux rencontrés plus haut. Le fait que $G(z)$ se présente sous la forme de fractions rationnelles nous facilite la tâche. En effet, il existe de nombreuses méthodes pour transformer une fraction rationnelle et la présenter sous forme de polynôme de degré infini. Ces algorithmes sont plutôt techniques et ne méritent pas d'être détaillés ici. Ils semblent, en outre, ne pas poser de difficultés particulières. Il est en effet préférable de livrer le type de raisonnement suivi et la relation de récurrence à laquelle on aboutit après la mise en œuvre d'un de ces algorithmes. Ainsi, on cherche les A_n tels que :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \quad (3.37)$$

Or, si $G(z)$ vérifie une relation du type :

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} \quad (3.38)$$

Où $A(z)$ et $B(z)$ sont respectivement deux polynômes de la forme suivante :

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 + \dots + a_r z^r \\ B(z) &= b_0 + \dots + b_s z^s \end{aligned} \quad (3.39)$$

Alors les coefficients A_n vérifient la relation de récurrence :

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)} \left(\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{i=0}^{\min(s-1,n-1)} b_i + 1(n-1)A_{n-1} \right) \quad (3.40)$$

On applique alors cette relation, sachant que $G(z)$ vérifie la condition sur sa dérivée logarithmique.

En effet, nous avons :

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=1}^K \frac{\frac{p_k \alpha_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \varepsilon_j^{(k)} z^{v_j^{(k)} - 1}}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} \right) z^{v_j^{(k)}}} \quad (3.41)$$

On applique alors la relation de récurrence, après avoir réduit au même dénominateur la dernière expression. Evidemment, un choix judicieux de L , l'unité d'exposition, permettrait de réduire le degré du polynôme $B(z)$ de telle sorte que les calculs soient plus faciles à traiter. On se retrouve alors en possession de la forme explicite de la distribution des pertes du portefeuille.

Sur la base des travaux de Gordy [GOR'98], les avantages et les inconvénients du modèle se résument comme suit:

5.4.1. Avantages du modèle

CreditRisk+ présente l'avantage d'être relativement simple à mettre en œuvre. De plus, ce modèle a la particularité de se concentrer seulement sur le risque de défaut, ne demandant que peu de données en entrée pour calculer la distribution des pertes d'un portefeuille.

5.4.2. Faiblesses du modèle

Notons enfin les principales limites du modèle, qui sont résumés par deux points essentiels:

- N'essayant pas d'expliquer les causes du défaut, le modèle ignore les pertes dues aux changements de rating subséquents à des périodes de conjoncture défavorable ;
- Il ne convient pas à une gestion de portefeuille qui a pour vocation d'être assez liquide, comme c'est le cas des portefeuilles d'obligations ou de produits dérivés. Il reste cependant convenable aux cas de banques accordant des crédits qu'elles détiendront jusqu'à maturité.

CHAPITRE IV. APPLICATION SUR LE PORTEFEUILLE DE BNP PARIBAS EL DJAZAIR

Nous appliquons dans ce chapitre, le modèle le plus adapté pour répondre à la problématique posée :

Calculer la Value at Risk à horizon d'une année à différents niveaux de confiances

Nous allons commencer par une présentation de la structure d'accueil et sa politique de notation, puis nous aborderons les étapes de l'application qui ont été structurés comme suit :

- Constitution du portefeuille et traitement des données
- Analyse descriptive des données
- Inputs du modèle CreditRisk+
- Illustration du mécanisme d'agrégation du risque dans CreditRisk+
- Analyse de l'effet de la diversification du portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAIR

1. Organisation du Groupe BNP PARIBAS et place du CC&R [BNP'08]

Le groupe BNP Paribas est structuré en pôles d'activité qui rassemblent les Métiers. Son unité est assurée par la coordination et le pilotage exercés par la Direction Générale et les fonctions groupe. Le système de contrôle interne, dans lequel s'intègre GRM (Groupe Risk Management), constitue un cadre d'ensemble qui participe totalement à cette volonté.

Le Group Risk Management (GRM) a pour mission de garantir à la Direction Générale que les risques pris par la banque sont conformes et compatibles avec son objectif de rentabilité et de notation sur le marché. Il est important de signaler que GRM exerce un contrôle continu, nettement différencié de celui de l'audit effectué de façon périodique.

Les pôles et les Métiers demeurent responsables pour les risques qu'ils initient. La mission de GRM est de rapporter à la Direction Générale de la Banque, indépendamment des responsables des pôles/ Métiers/ Territoires.

Au sein de GRM, Credit Risk International (CRI) a la responsabilité de suivre les risques «Entreprises & Détail» pour l'ensemble des pôles BFI et SFDI.

Le dispositif de surveillance et de Reporting repose sur la fonction CC&R (Credit Control & Reporting) dont la responsabilité est de garantir en permanence :

- La conformité aux décisions de crédit des autorisations mises en place ;
- La fiabilité des données risques contenues dans les Reporting ;
- La qualité du suivi des risques pris par la Banque.

1.1 Organisation de l'entité CRI :

Comme précédemment mentionné, CRI est la structure, au sein de GRM, qui est chargée de la gestion et du suivi des risques liées aux opérations de crédit à la clientèle de détail et des entreprises.

L'organisation typique de CRI dans un site de BNP Paribas est articulée autour de:

- Un Senior Credit Officer (SCO), (ou deux dans certains cas) responsable de l'équipe de CRI au sein du site et qui interagi *à priori* dans le processus d'octroi du crédit avec les Métiers (Business) et les lignes clientèle (Client Lines) ;
- Une équipe d'administration du crédit (CC&R) responsable de la validation des entrées dans les systèmes de « Risk management », afin de servir à un but de Reporting des données du risque à la maison mère et aux différentes structures de contrôle de conformité.

Il est important de signaler que les équipes d'analystes n'interfèrent pas dans cette organisation.

Leurs rapports vont directement au métier/ligne clientèle concernés.

L'organisation de la structure GRM-CRI est résumée par l'organigramme suivant:

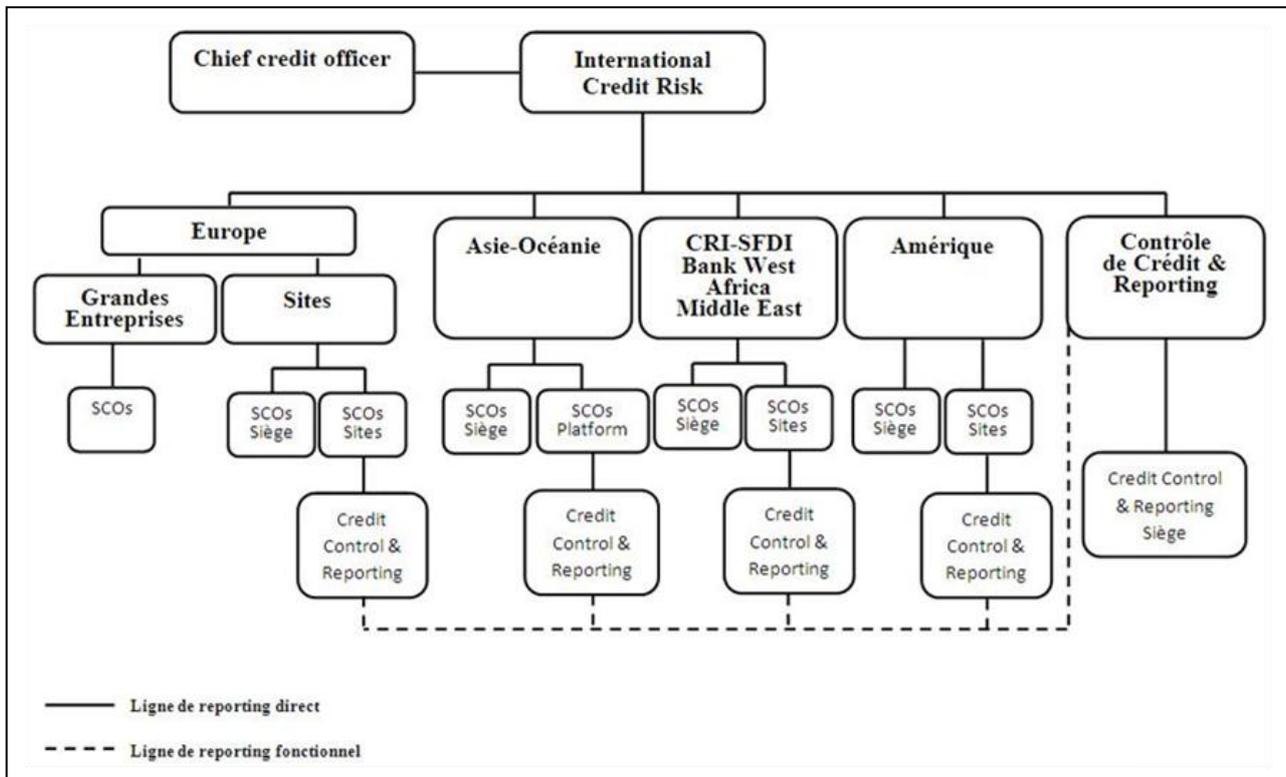


Figure 4.1 Organigramme de la structure GRM-CRI [BNP'08]

1.2.Missions de la fonction CC&R dans les sites :

Credit Control & Reporting (CC&R) qui joue donc un rôle central dans l'organisation de CRI, a plus précisément deux types de missions :

- Une mission de contrôle du crédit qui inclut les contrôles a priori/de conformité et les contrôles à posteriori/surveillance du risque ;
- Une mission de Reporting.

1.2.1. La mission de Contrôle du Crédit :

a. Contrôle à priori/de conformité :

- Contrôle des données de la proposition de crédit ;

- Participation au processus d'approbation ;
- Saisie des données risque dans les systèmes ;
- Contrôle de la documentation juridique ;
- Validation des données saisies dans les systèmes ;
- Contrôle de la première utilisation ;
- Contrôle des utilisations irrégulières.

b. Contrôle à posteriori/surveillance des risques :

- Responsabilité de suivi du risque ;
- Surveillance quotidienne du risques ;
- Détection et suivi du risque impayé ;
- Surveillance des utilisations en anomalie ;
- Revue annuelle des clients ;
- Suivi des pièces manquantes ;
- Contrôle du suivi de la validité des garanties et autres sûretés.

1.2.2. La mission de Reporting :

- CC&R doit garantir au profit des lignes de Métiers, des Territoires, de GRM, la production de rapports fiables et complets des risques. Ces rapports peuvent être pour l'usage des régulateurs locaux ou de Paris ;
- Ces rapports de suivi des risques doivent permettre aux Métiers d'être alertés des situations anormales, des échéances à venir, des situations difficiles...etc.

2. La politique de notation du Groupe BNP Paribas [BNP'08]

La politique générale de notation fixe le cadre permettant aux Pôles et à la Direction des Risques (Group Risk Management) de mesurer, de hiérarchiser et de suivre l'évolution des risques de crédit encourus par le Groupe BNP Paribas sur l'ensemble de son activité. Les principes et la méthodologie de notation visent à qualifier et à quantifier ces risques et à favoriser la consolidation d'une culture commune et homogène en matière de risque de crédit à l'échelle mondiale, le système de notation concourt par ailleurs à la mesure du capital économique (et réglementaire à terme), ainsi qu'au processus de tarification et de provisionnement.

2.1. Principes généraux

L'évaluation du risque de crédit résulte de la combinaison de trois paramètres : le risque de défaut de la contrepartie, le risque de perte en cas de défaut de cette contrepartie et le risque d'exposition au défaut.

L'Exposition Au Défaut (EAD) reflète, pour chaque engagement, le montant de la créance due par la contrepartie au moment du défaut tel qu'anticipé à la date d'évaluation par application de conventions.

Le dispositif de notation du groupe BNP Paribas est donc fondé sur les deux données suivantes : la Note de Contrepartie et le Taux de Récupération Global (TRG).

2.2. La Note de Contrepartie :

Celle-ci reflète le risque de défaut de la contrepartie. Le risque de défaut est la probabilité qu'une contrepartie soit dans l'incapacité de faire face à une quelconque de ses dettes sur un horizon à moyen terme, en général de 5 à 7 ans :

- La Note de Contrepartie ne constitue donc pas un indicateur des performances à court terme de la contrepartie ;
- Elle ne représente pas le risque spécifique que l'emprunteur fasse défaut sur une facilité octroyée par BNP Paribas mais sur l'ensemble de ses obligations, quels qu'en soient les créanciers ;
- Tous les emprunteurs ayant la même Note de Contrepartie présentent une probabilité de défaut analogue, quels que soient leur taille, leur activité et leur pays d'implantation.
- L'échelle de notation est constituée de 12 catégories principales (1 à 12) classées en 2 groupes : contreparties saines (catégories 1 à 10) et contreparties en défaut (catégories 11 et 12). Des échelons matérialisés par l'adjonction des signes « + » et « - » permettent, à titre facultatif, de hiérarchiser les contreparties appartenant aux catégories 1 à 10 comprises : la catégorie 1 est composée des échelons 1+, 1 et 1-, la catégorie 2 des échelons 2+, 2 et 2-, et ainsi de suite.

L'attribution de la Note de Contrepartie doit résulter d'une analyse en trois étapes :

- Détermination de la Note Intrinsèque en évaluant la qualité de crédit propre à l'entreprise, indépendamment de tout support apporté par une tierce entité juridique ;
- Appréciation du support éventuel pouvant émaner d'une tierce entité ;
- Détermination de la Note de Contrepartie.

2.2.1. Note intrinsèque

Une Note Intrinsèque doit être déterminée pour chaque contrepartie considérée en tant que telle, indépendamment du support apporté par un tiers, en utilisant l'échelle de notation BNP Paribas.

Cette note s'apprécie en fonction des critères suivants :

a. Environnement du Pays de Business

La prise en compte de ce critère conduit à attribuer aux meilleures contreparties d'un pays une Note Intrinsèque qui ne peut être nettement meilleure que celle de son Pays de Business. Notons que ce critère ne représente en aucun cas le risque de non convertibilité de la monnaie locale.

b. Secteur d'activité

Il s'agit d'évaluer l'industrie d'appartenance et le positionnement de l'entreprise sur son secteur.

En particulier, il convient de juger le degré de volatilité et de cyclicité des cash flows induits par le secteur. Par exemple, l'industrie des nouvelles technologies est qualifiée de très fortement volatile, le secteur des mines et métaux, du papier, de l'automobile et du transport aérien présentent une volatilité élevée. En revanche, les industries à cash flows très stables comme la distribution d'eau apparaissent faiblement volatiles.

Il convient également d'apprécier le positionnement de la contrepartie sur son secteur. Celle-ci dépend de sa taille et de sa part de marché, de l'efficacité de son outil industriel, de la diversité et de la volatilité des produits, clients et zones géographiques.

c. Capacité de remboursement

L'analyse de la capacité de l'entreprise à assurer dans les années à venir le remboursement de sa dette s'appuie sur une analyse :

- de sa capacité à générer des profits sur un cycle d'activité ;
- du service de la dette (Dette / EBE, Dette / ENE, couverture des intérêts) ;
- de sa rentabilité (*Profit & Loss* de l'entreprise) ;
- de sa structure financière.

d. Qualité du management :

Elle est fonction de l'expérience et de l'efficacité de l'équipe dirigeante, de la crédibilité de la stratégie annoncée, des réalisations constatées par rapport aux objectifs anticipés et de la rotation des hommes-clés.

2.3. Processus de Notation

• Proposition

La Note de Contrepartie et le TRG sont proposés par le responsable du dossier de crédit. Aboutissement logique de l'analyse approfondie de la contrepartie et de la facilité formalisée dans le dossier de crédit, la proposition peut être appuyée par des éléments de comparaison, qu'il s'agisse de données de référence internes ou externes. L'utilisation d'un outil d'aide à la décision est recommandée chaque fois qu'elle est jugée pertinente pour évaluer le risque de défaut ou la récupération espérée en cas de défaut. Dans ce cas, le responsable du dossier a la possibilité de proposer une Note de Contrepartie et/ou un Taux de Récupération Global différents de ceux extériorisés par l'outil, tout écart devant être étayé et documenté.

Parmi les outils d'aide à la décision de Notation, on peut citer :

- Les ratings publiés par les agences de notation telles que Moody's, S&P et Fitch,

- Les Expected Default Frequency (EDF) de Credit Monitor (KMV),
- Les modèles statistiques de Notation, tant internes comme BNP PARIBAS Intrinsic Rating Decision aid-tool (B.I.R.D) et les scores de RECORD (Rentabilité Corrigée du Risque Sur Débiteur), qu'externes ; Chaque modèle doit être documenté de manière à permettre à un tiers d'en évaluer la pertinence statistique,
- Les outils internes de suivi et d'alerte.

- **Décision**

La décision résulte d'un débat entre les délégataires de crédit au sein des Pôles d'une part, et les représentants de la Direction des Risques d'autre part. La Direction des Risques est garante de la cohérence des Notes de Contrepartie et des Taux de Récupération Globaux. En cas de désaccord persistant, il est possible de solliciter l'arbitrage du niveau de décision supérieur. La Direction des Risques décide en dernier ressort de la notation des débiteurs et des Taux de Récupération Globaux. Tout écart entre proposition et décision doit être étayé et documenté.

- **Fréquence**

Les Notes de Contrepartie et les Taux de Récupération Globaux doivent respectivement être attribués à chaque contrepartie et à chaque facilité lors de l'approbation de toute nouvelle opération. Ils font l'objet d'une révision chaque fois que l'évolution du risque le nécessite. Ils sont réexaminés lors de chaque renouvellement de dossier et au minimum une fois par an. Pour les contreparties classées "Douteux" ou "Sous surveillance", la révision de la Note de Contrepartie et du Taux de Récupération Global se fait à une fréquence au moins trimestrielle.

La qualité et la cohérence doivent être assurées tout au long du processus de notation. Les points suivants doivent faire l'objet d'une attention particulière :

- **Octroi**

La qualité de la Notation réside notamment dans son caractère discriminant et prédictif. Afin d'assurer une discrimination pertinente, l'utilisation des échelons, a priori facultative, peut être rendue obligatoire pour un sous-portefeuille donné par la/les Politique(s) Spécifique(s) de Notation appropriée(s).

L'enregistrement des données de Notation dans les systèmes d'information du groupe doit être diligent, exhaustif et fiable.

- **Reporting**

Pour les besoins de reporting interne à la Direction Générale, de calcul de capital économique et à terme du capital réglementaire, les informations de Notation des contreparties et des facilités doivent être restituées par le Pôle concerné à la Direction des Risques via les systèmes d'information de la Banque.

3. Constitution du portefeuille et traitement des données

Pour constituer l'échantillon qui reflète au mieux le portefeuille de crédit de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR, nous avons eu recours à un traitement préliminaire des données brutes pour pouvoir ventiler les données de façon à ce qu'elles soit prêtes à alimenter le modèle qui calcule la VaR.

3.1 Collecte des données :

L'échantillon en question est constitué des crédits accordés par BNP PARIBAS EL DJAZAÏR à ses clients. Il comprend différents types de crédits notamment : les *crédits par signature*, les *crédits d'exploitation* et les *crédits d'investissement*.

Le téléchargement des données s'est fait à partir de la base de données centrale du Groupe BNP PARIBAS (CAPRI) à l'aide du logiciel de gestion des bases de données « Business Object ».

Nous avons constitué une base de données contenant 933 crédits accordés à 451 entreprises différentes et comprenant les informations suivantes :

- L'identifiant et la raison sociale des différentes entreprises emprunteuses ;
- Le type de la ligne de crédit autorisée ;
- Le montant de l'autorisation ;
- L'échéance de l'autorisation ;
- Le montant des utilisations ;
- La note de contrepartie de l'entreprise emprunteuse ;
- Les TRG (Taux de Récupération Global) associés aux différentes lignes autorisées ;
- Les codes sectoriels associés aux différentes entreprises.

A partir de cette base, nous avons procédé à un traitement visant à éliminer les crédits présentant les caractères suivants :

- Une utilisation de 0 DA considérée comme une ligne de crédit non confirmée ;
- Le TRG associé est de 100%. C'est le cas des lignes garanties par des institutions financières.
- Les crédits ayant une autorisation fictive, c'est-à-dire qu'ils n'ont jamais fait l'objet d'une étude de risque.

3.2 Traitement des données

3.2.1 Notations des contreparties

Certaines entreprises ayant bénéficié de crédits n'ont pas été notées lors de l'entrée en relation avec la banque. Pour cette catégorie, nous avons procédé de deux manières :

- Les entreprises, pour lesquelles on possède des éléments de notation (essentiellement des données comptables), ont fait l'objet d'un processus de notation de masse automatisé grâce à l'outil BIRD.
- Les entreprises pour lesquelles on ne possède ni d'éléments de notation ni d'indices sur une défaillance future, nous avons, par souci de prudence, attribué la note la plus défavorable, c'est-à-dire 10-.

3.2.2 Moyennes et volatilité du taux de défaut

La première étape à faire est d'associer des moyennes des taux de défaut à un 1 an aux différentes notes de contreparties. Il nous a suffi d'utiliser le tableau (joint en annexe IV.A) de la politique de notation du Groupe, qui associe à chaque catégorie de note une série de taux de défauts (de 1 à 10 ans) calculés sur la base des historiques de défaillances propres au groupe BNP PARIBAS.

La seconde est de trouver les écarts types de ces mêmes taux de défaut. En raison de l'absence d'informations concernant ces données, nous avons procédé par un processus de « matching » avec l'échelle de notation de Moody's, c'est-à-dire en convertissant les notes de BNP PARIBAS vers une autre échelle (qui est celle de Moody's) à l'aide d'une table de correspondances (Voir Annexe IV.B). Les écarts types ont été ensuite extraits de la matrice de transition correspondante propre à l'agence Moody's.

3.2.3. Les TRG des crédits en dépassement d'autorisation

Un bon nombre de crédits présents dans le portefeuille de BNP Paribas El Djazaïr présentent la particularité d'avoir une utilisation supérieure à l'autorisation ou encore dont l'autorisation est échue. On ne peut donc considérer le même TRG pour la partie autorisée et pour la partie en dépassement. En effet, les garanties prises lors de l'attribution de la ligne ne couvrent généralement que la partie autorisée. Et quand on sait que celles-ci sont un élément déterminant du TRG, il serait bien évidemment imprudent de considérer un même TRG pour des montants de crédit couverts par des garanties et d'autres montants qui ne le sont pas.

La méthode que nous avons adopté pour remédier à ce problème, a été de calculer un TRG moyen qui est une moyenne pondérée du TRG « normal » de l'autorisation et du TRG « minimal » associé au type du crédit:

$$TRG_{\text{moyen}} = \frac{(TRG_{\text{de l'autorisation}} \times \text{autorisation}) + (TRG_{\text{minimum}} \times \text{dépassement})}{(\text{autorisation} + \text{dépassement})}$$

Pour illustrer tout ce qui vient d'être dit, prenons l'exemple d'un découvert autorisé à hauteur de 100 KDA, mais dont le niveau d'utilisation est de 150 KDA et donc en dépassement de 50 KDA.

Supposons que l'on a estimé le TRG de cette autorisation à 30% et que l'on sait que la fourchette du TRG pour les crédits à blanc est située entre 15% et 35%, on peut alors appliquer la dernière formule pour trouver le TRG moyen :

$$\text{TRG}_{\text{moyen}} = \frac{(30 \times 100) + (15 \times 50)}{(150)} = 25\%$$

3.2.4. Calcul des expositions pour certains types de crédits

Le calcul de l'exposition au défaut (EAD) nécessite dans certains cas l'application de conventions adoptées au sein du Groupe BNP Paribas. Il s'agit en particulier des lignes de crédit pour lesquelles il reste une part non utilisée (PNU). Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

- Les facilités confirmées : l'EAD dans ce cas est égale à l'utilisation + 75% de la PNU ;
- Les facilités non confirmées : $\text{EAD} = \text{Utilisation} + \beta \times \text{PNU}$ où β est un coefficient qui varie en fonction de la note de l'entreprise. En effet, on peut penser qu'une entreprise plus proche du défaut aura tendance à consommer ses lignes de crédit d'une manière plus importante qu'une entreprise, dont la situation financière est plutôt bonne le ferait. Pour illustration, le coefficient β égale 5% pour les notes 1 et 2, tandis qu'il est de 20% pour les notes 6 et 7.

4. Analyse descriptive des données

Avant d'évoquer le calcul de la VaR, il est primordial de faire une analyse descriptive qui nous permet de caractériser le portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAIR

4.1 Ventilation par classe de risque ou de rating

Le tableau suivant donne les engagements par classe de risque :

Tableau 4.1 – Répartition des engagements par classe de risque

| RATING | Nbre d'etp | % | EAD (KDA) | % |
|--------|------------|-------|-----------|-------|
| 1+ | | | | |
| 1 | | | | |
| 1- | | | | |
| 2+ | | | | |
| 2 | | | | |
| 2- | | | | |
| 3+ | | | | |
| 3 | | | | |
| 3- | | | | |
| 4+ | | | | |
| 4 | | | | |
| 4- | | | | |
| 5+ | | | | |
| 5 | | | | |
| 5- | | | | |
| 6+ | 43 | 4,6 | 10099603 | 13,2 |
| 6 | 45 | 4,82 | 16684372 | 21,8 |
| 6- | 50 | 5,36 | 6940142 | 9,07 |
| 7+ | 208 | 22,3 | 9687789 | 12,66 |
| 7 | 273 | 29,26 | 17226595 | 22,5 |
| 7- | 152 | 16,3 | 7798926 | 10,19 |
| 8+ | 19 | 2,03 | 905919 | 1,18 |
| 8 | 58 | 6,22 | 4271672 | 5,59 |
| 8- | 21 | 2,25 | 749889 | 0,98 |
| 9+ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 39 | 4,18 | 1513708 | 1,98 |
| 9- | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10+ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 3 | 0,32 | 7669 | 0,01 |
| 10- | 2 | 0,21 | 103524 | 0,13 |

Il ressort de ce tableau que le portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR est principalement composé des engagements accordés à des entreprises notées 7-, 7 et 7+ ce qui correspond à 67,86 % du portefeuille.

Le tableau est représenté par les graphiques suivants :

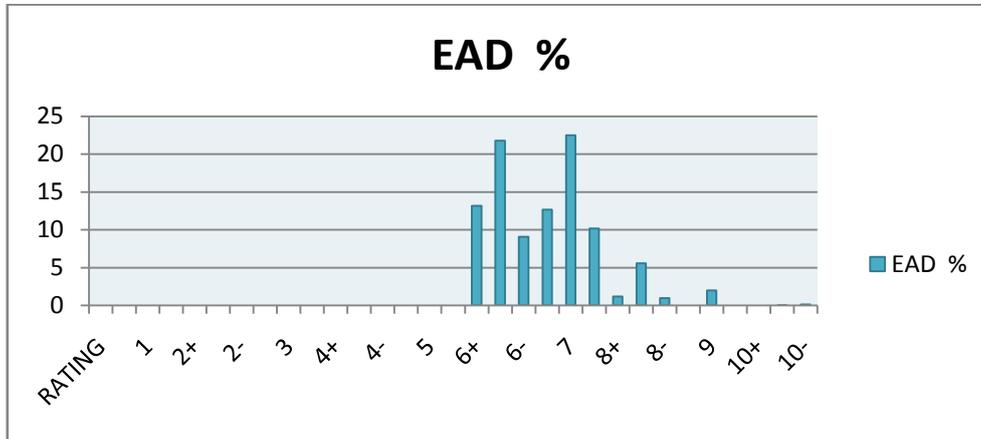


Figure 4.2 - Répartition des expositions sur les classes de risque

On constate que toutes les notes sont supérieures à 6 ceci est expliqué par le critère : pays du business comme nous l'avons signalé précédemment : l'Algérie étant notée 6 et donc, les meilleures entreprises algériennes ne peuvent être mieux notées.

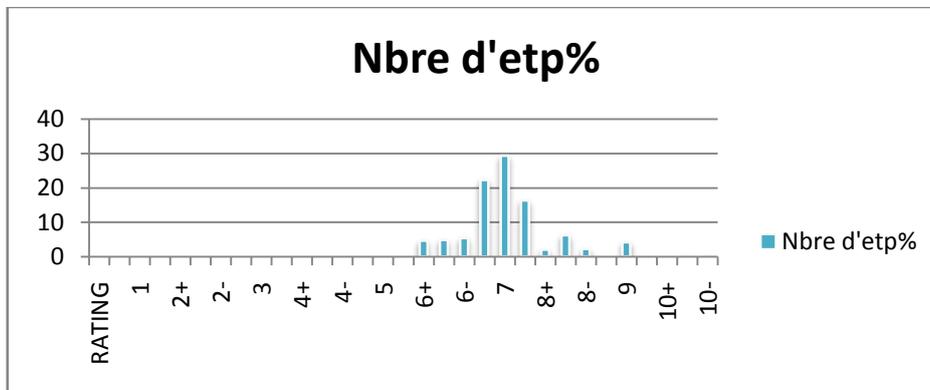


Figure 4.3 - Répartition du nombre des entreprises par classe du risque

L'histogramme montre une concentration des expositions sur les ratings 6 et 7.

4.2 Répartition par secteur d'activité

Le portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR est composé de crédits accordés à des entreprises de différents secteurs d'activités, et ce pour bénéficier de l'effet de la diversification que nous analyserons en fin de l'application.

Pour ventiler le portefeuille en secteurs d'activités significatifs, nous avons conçu une méthode de décomposition se basant sur un critère combiné (Nombre d'entreprises/secteur d'activité, Exposition).

Nous avons abouti à une attribution de toutes les entreprises à 8 secteurs d'activités différents, à savoir :

- 1- Distribution automobile ;
- 2- BTP ;
- 3- Industrie agroalimentaire ;
- 4- Industrie et distribution pharmaceutiques ;
- 5- Négoce – Commerce ;
- 6- Télécommunication-Informatique ;
- 7- Autres industries ;
- 8- Autres.

Tableau 4.2 – Ventilation : exposition et nombre d'entreprises / secteur d'activité

| | Nbre d'etp | % | EAD (KDA) | % | Exposition Moyenne(KDA) |
|-------------|------------|-------|-----------|-------|-------------------------|
| Dist. Auto | 81 | 8,68 | 16789256 | 21,93 | 207274,7654 |
| B.T.P | 111 | 11,89 | 11793619 | 15,47 | 106248,8198 |
| I. AGRO | 73 | 7,82 | 13639964 | 17,81 | 186848,8219 |
| I. Dist. Ph | 89 | 9,53 | 5858808 | 7,65 | 65829,30337 |
| Nég. Com | 137 | 14,68 | 7174864 | 9,37 | 52371,27007 |
| Télé.Info | 93 | 9,96 | 5259567 | 6,87 | 56554,48387 |
| Autres. I. | 216 | 23,15 | 10586577 | 13,82 | 49011,93056 |
| Autres | 133 | 14,25 | 5447301 | 7,11 | 40957,15038 |
| Total | 933 | 100% | 76549956 | 100% | |

Le tableau précédent est interprété par le graphique suivant :

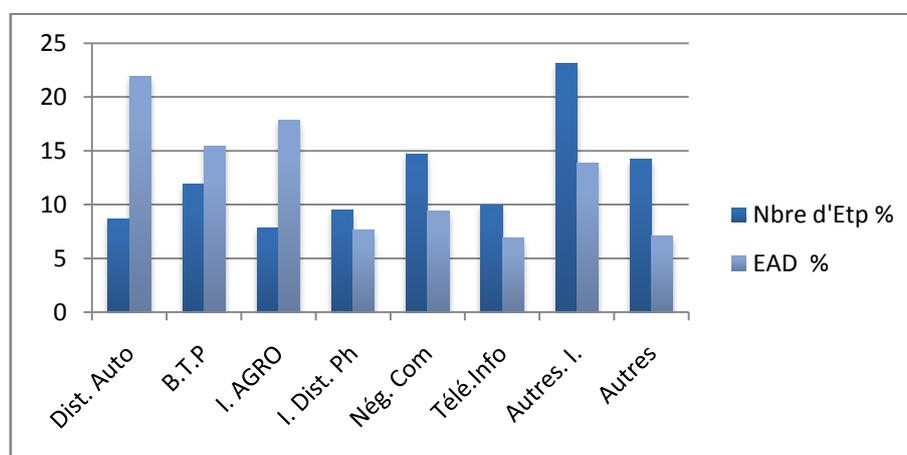


Figure 4.4 - Répartition du nombre des entreprises et les expositions par secteur

4.3. Caractéristiques du portefeuille de crédit de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR

Grâce à l'analyse descriptive de l'échantillon, nous avons pu caractériser le portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR.

a) Crédits bancaires classiques

Tous les contrats de crédit accordés par BNP PARIBAS EL DJAZAÏR sont des crédits bancaires classiques de types : (Engagements par signature, Crédit d'investissement, Crédit d'exploitation, etc.) et qui sont détenus par la banque jusqu'à leurs maturités.

b) Restreint

BNP PARIBAS EL DJAZAÏR n'a commencé son activité effective qu'à partir de 2003 et donc la base de données contient un historique de six ans environ. Ce qui réduit la qualité des estimations des paramètres d'entrée des modèles du risque de crédit, particulièrement les modèles MTM qui nécessitent un historique assez long.

c) Homogène

Le portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR présente une certaine homogénéité des ratings des titres qu'ils le composent.

Le choix de CreditRisk+ pour l'implémentation et le calcul de la Value at Risk nous semble plus judicieux pour les raisons suivantes :

Le modèle CreditRisk+ a la particularité de se concentrer sur le risque de défaut, ce qui convient au portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR qui est composés des titres qu'elle détienne jusqu'à maturité.

Le modèle CreditMetrics appliqué sur des portefeuilles restreints et présentant une certaine homogénéité donne des résultats très approximatifs. Il est beaucoup plus adapté aux portefeuilles composés de produits dérivés.

5. Inputs du modèle CreditRisk+

L'exactitude des résultats du modèle dépend étroitement de la qualité des données utilisées en inputs. Les décisions qui sont alors prises en utilisant les résultats de la modélisation, doivent donc, elles mêmes, prendre en considération l'erreur due au caractère imparfait de l'information apportée au modèle.

- Les expositions nettes ($EAD \times LGD$) ;
- Les taux de défaut moyens (stationnaires) ;
- Les volatilités des taux de défaut mesurés par leurs écarts types.
- Décomposition sectorielle.

5.1 Les expositions nettes

Le modèle CreditRisk+ nécessite en entrée la valeur de l'exposition pondérée au risque associé.

Exposition nette

| agrégé | SEC | TRG | Devise | Utilisation | LGD % | EAD * LGD |
|--------|---------------------------|-----|--------|-------------|-------|-----------|
| | Autres industrie | 50 | USD | 985 | 50 | 493 |
| ire | Industrie agroalimentaire | 99 | DZD | 73 116 | 1 | 731 |
| ire | Industrie agroalimentaire | 25 | DZD | 49 018 | 75 | 36 764 |
| ire | Industrie agroalimentaire | 45 | DZD | 7 639 | 55 | 4 201 |
| ire | Industrie agroalimentaire | 50 | USD | 79 248 | 50 | 39 624 |
| ire | Industrie agroalimentaire | 35 | DZD | 21 000 | 65 | 13 650 |
| ues | Industrie agroalimentaire | 50 | EUR | 2 255 | 50 | 1 128 |
| ues | Industrie agroalimentaire | 50 | USD | 1 323 | 50 | 662 |
| ues | Industrie agroalimentaire | 50 | DZD | 15 270 | 50 | 7 635 |
| ues | Industrie agroalimentaire | 50 | DZD | 6 000 | 50 | 3 000 |
| ues | Industrie agroalimentaire | 95 | DZD | 300 000 | 5 | 15 000 |
| ues | Industrie agroalimentaire | 50 | EUR | 2 339 783 | 50 | 1 169 892 |
| ues | Industrie agroalimentaire | 50 | USD | 111 821 | 50 | 55 811 |
| ues | Industrie agroalimentaire | 30 | DZD | 404 048 | 70 | 282 834 |
| ues | Industrie agroalimentaire | 90 | DZD | 32 877 | 10 | 3 288 |
| | Autres industrie | 35 | DZD | 154 942 | 65 | 100 712 |

Figure 4.5 - Expositions nettes

5.2 Le taux de défaut moyen PD

On ne peut calculer le taux de défaut moyen dans le cas du portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR à partir des spreads de marché, car le portefeuille ne contient pas des instruments dérivés. En revanche on peut faire, pour certaines notations une correspondance avec les probabilités de défaut moyennes fournies par les agences de notation par catégorie de rating.

| | RATING | 1 AN | 2 ANS | 3 ANS | 4 ANS | 5 ANS | 6 ANS | 7 ANS | 8 ANS | 9 ANS | 10 ANS |
|----|--------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 2 | 1+ | 0,01 | 0,02 | 0,06 | 0,11 | 0,18 | 0,27 | 0,38 | 0,49 | 0,61 | 0,74 |
| 3 | 1 | 0,01 | 0,04 | 0,09 | 0,16 | 0,25 | 0,36 | 0,48 | 0,61 | 0,75 | 0,90 |
| 4 | 1- | 0,01 | 0,06 | 0,12 | 0,21 | 0,32 | 0,45 | 0,59 | 0,74 | 0,90 | 1,07 |
| 5 | 2+ | 0,02 | 0,08 | 0,16 | 0,27 | 0,41 | 0,56 | 0,72 | 0,89 | 1,08 | 1,27 |
| 6 | 2 | 0,03 | 0,11 | 0,22 | 0,36 | 0,52 | 0,70 | 0,88 | 1,08 | 1,29 | 1,51 |
| 7 | 2- | 0,04 | 0,14 | 0,29 | 0,47 | 0,67 | 0,90 | 1,15 | 1,39 | 1,65 | 1,92 |
| 8 | 3+ | 0,06 | 0,19 | 0,38 | 0,61 | 0,88 | 1,18 | 1,48 | 1,80 | 2,11 | 2,44 |
| 9 | 3 | 0,08 | 0,25 | 0,50 | 0,81 | 1,15 | 1,53 | 1,92 | 2,32 | 2,71 | 3,10 |
| 10 | 3- | 0,10 | 0,30 | 0,57 | 0,91 | 1,29 | 1,70 | 2,13 | 2,56 | 3,00 | 3,44 |
| 11 | 4+ | 0,13 | 0,35 | 0,66 | 1,03 | 1,44 | 1,88 | 2,35 | 2,83 | 3,32 | 3,81 |
| 12 | 4 | 0,16 | 0,42 | 0,76 | 1,16 | 1,60 | 2,08 | 2,59 | 3,13 | 3,68 | 4,23 |
| 13 | 4- | 0,21 | 0,53 | 0,95 | 1,45 | 2,00 | 2,60 | 3,23 | 3,88 | 4,53 | 5,16 |
| 14 | 5+ | 0,26 | 0,66 | 1,18 | 1,81 | 2,51 | 3,25 | 4,02 | 4,81 | 5,59 | 6,30 |
| 15 | 5 | 0,33 | 0,83 | 1,47 | 2,26 | 3,14 | 4,06 | 5,01 | 5,96 | 6,88 | 7,70 |
| 16 | 5- | 0,48 | 1,25 | 2,24 | 3,40 | 4,62 | 5,84 | 7,01 | 8,15 | 9,22 | 10,16 |
| 17 | 6+ | 0,69 | 1,88 | 3,40 | 5,13 | 6,81 | 8,39 | 9,82 | 11,15 | 12,36 | 13,42 |
| 18 | 6 | 1,00 | 2,84 | 5,17 | 7,73 | 10,03 | 12,06 | 13,75 | 15,25 | 16,56 | 17,72 |
| 19 | 6- | 1,46 | 3,87 | 6,77 | 9,82 | 12,51 | 14,85 | 16,77 | 18,44 | 19,85 | 21,08 |
| 20 | 7+ | 2,11 | 5,27 | 8,88 | 12,47 | 15,60 | 18,28 | 20,45 | 22,29 | 23,80 | 25,07 |
| 21 | 7 | 3,07 | 7,19 | 11,84 | 15,84 | 19,46 | 22,50 | 24,95 | 26,95 | 28,53 | 29,81 |
| 22 | 7- | 4,01 | 8,95 | 14,00 | 18,60 | 22,43 | 25,58 | 28,09 | 30,16 | 31,84 | 33,21 |

Figure 4.6 - Le taux de défaut moyen pour une année

5.3 La volatilité des taux de défaut

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les taux de défaut peuvent varier d'une année à une autre, ceci est dû à l'influence des facteurs de risques systématiques. Pour cela la volatilité des taux de défaut représente une donnée essentielle en entrée du modèle.

Le tableau ci-dessous donne un exemple d'estimation des taux de défaut, à partir de l'échelle de notation de Moody's :

Tableau 4.3 - Moyennes des taux de défaut BNP PARIBAS / Moody's

| RATING | 1 AN | Note Moody's | Ecart Type |
|--------|-------|--------------|------------|
| 1+ | 0,01 | Aaa | 0,00 |
| 1 | 0,01 | Aa1 | 0,00 |
| 1- | 0,01 | Aa2 | 0,00 |
| 2+ | 0,02 | Aa3 | 0,27 |
| 2 | 0,03 | A1 | 0,00 |
| 2- | 0,04 | A2 | 0,10 |
| 3+ | 0,06 | A3 | 0,09 |
| 3 | 0,08 | Baa1 | 0,29 |
| 3- | 0,10 | Baa1 | 0,29 |
| 4+ | 0,13 | Baa2 | 0,22 |
| 4 | 0,16 | Baa2 | 0,22 |
| 4- | 0,21 | Baa2 | 0,22 |
| 5+ | 0,26 | Baa3 | 1,01 |
| 5 | 0,33 | Baa3 | 1,01 |
| 5- | 0,48 | Baa3 | 1,01 |
| 6+ | 0,69 | Ba1 | 0,90 |
| 6 | 1,00 | Ba2 | 0,88 |
| 6- | 1,46 | Ba2 | 0,88 |
| 7+ | 2,11 | Ba3 | 1,95 |
| 7 | 3,07 | Ba3 | 1,95 |
| 7- | 4,01 | B1 | 2,29 |
| 8+ | 5,23 | B2 | 5,48 |
| 8 | 6,82 | B2 | 5,48 |
| 8- | 8,06 | B2 | 5,48 |
| 9+ | 9,53 | B3 | 7,71 |
| 9 | 11,27 | B3 | 7,71 |
| 9- | 13,32 | B3 | 7,71 |
| 10+ | 15,75 | Caa1 | 20,23 |
| 10 | 18,62 | Caa2 | 20,23 |
| 10- | 21,81 | Caa3 | 20,23 |

5.4 Décomposition sectorielle

Nous avons vu lors de la description théorique de CreditRisk+ (*Cf Chap. III*) que la corrélation de défaut entre les différents emprunteurs qui sont soumis aux mêmes facteurs de risque systématique peut être prise en compte par une analyse sectorielle en calculant la VaR pour plusieurs classifications sectorielles selon: Secteur d'activité, Chiffre d'affaire, pays, indice macroéconomiques, etc.

Pour notre cas, nous sommes contraints de ne considérer qu'un seul facteur de risque systématique et donc une seule décomposition sectorielle.

Les secteurs qui alimentent le modèle CreditRisk+ sont ceux que l'on a constitués lors de l'analyse descriptive.

6. Illustration du mécanisme d'agrégation du risque dans CreditRisk+

Supposons que le portefeuille de la banque est composé de 500 crédits, dont les expositions varient entre 50 000 et 1 million.

Les notations à utiliser sont les suivantes :

Tableau 4.4 - Notations

| | Notation |
|------------------------------|------------------------------|
| Emprunteur | A |
| Exposition | L_A |
| Probabilité de défaut | P_A |
| Perte attendue | $\lambda_A = L_A \times P_A$ |

D'abord, la banque commence par découper son portefeuille en bandes (dans notre exemple en bandes de 100 000). Le tableau suivant montre les expositions des six premiers emprunteurs.

Tableau 4.5 - Décomposition du portefeuille en bandes

| Emprunteur | Exposition L_A | Exposition \bar{v}_j (en unité de 100 000) | Arrondissement de l'exposition v_j (en unité de 100 000) | Bande j |
|------------|---------------------|---|---|-----------|
| 1 | 150 000 | 1,5 | 2 | 2 |
| 2 | 460 000 | 4,6 | 5 | 5 |
| 3 | 435 000 | 4,35 | 5 | 5 |
| 4 | 370 000 | 3,7 | 4 | 4 |
| 5 | 190 000 | 1,9 | 2 | 2 |
| 6 | 480 000 | 4,8 | 5 | 5 |

L'unité des expositions est supposée $L = 100\,000$. Chaque bande $j, j = 1, \dots, m$, avec $m = 10$, a une exposition commune moyenne $v_j = 100\,000 \times j$.

L'étape suivante consiste à calculer la répartition des pertes à l'intérieur de la première bande.

Supposant que les informations disponibles donnent une probabilité moyenne de défaut de 3% à l'intérieur de ce portefeuille. En utilisant la loi de poisson, il est possible de calculer la probabilité qu'il y ait dans cette bande, 0 défaut, 1 défaut, 2 défauts, ..., N défauts, comme illustré sur le tableau suivant :

Tableau 4.6 - Probabilités de défaut

| Nombre de défauts | Probabilités | Probabilités cumulées |
|--------------------------|---------------------|------------------------------|
| 0 | 0,050 | 0,050 |
| 1 | 0,149 | 0,199 |
| 2 | 0,224 | 0,423 |
| 3 | 0,224 | 0,647 |
| 4 | 0,168 | 0,815 |
| 5 | 0,101 | 0,916 |
| 6 | 0,050 | 0,966 |
| 7 | 0,022 | 0,988 |
| 8 | 0,008 | 0,996 |
| 9 | 0,003 | 0,999 |
| 10 | 0,001 | 1,000 |

Dans la mesure où l'on suppose un montant de perte uniforme à l'intérieur de chaque bande, soit 100 000 pour la première, on peut aisément calculer la distribution des pertes à l'intérieur de chacune. Puis en répétant la même opération pour toutes les bandes, et en agréant, on obtient la distribution des pertes de tout le portefeuille.

7. Le calcul de la VaR

Nous avons utilisé l'application VBA (Visual Basic for Applications) fournie par CSFP. Grâce à cette application nous avons pu agréer le risque de toutes les contreparties du portefeuille en nous fournissant la Fonction de densité des pertes.

Cette application permet également la prise en charge d'une approche *hold to maturity* qui permet de prendre en compte des échéances différentes, ainsi que l'analyse sectorielle généralisée qui autorise l'affectation d'une même contrepartie à différents secteurs. Mais notre objectif est de calculer la VaR du portefeuille de crédit à horizon d'une année.

Nous avons introduit pour chaque emprunteur ces paramètres d'input, comme illustré ci-après :

Tableau 4.7 - Paramètres à introduire pour chaque titre

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|----|------|----------|--------------|-----------|----------|--------|-------------|--------------|-----------|----|------------|-------------|-------------|
| | | | | | | | | | | | | | |
| | Name | Exposure | Default rate | Mean | Standard | Autres | Autres indu | Distribution | Industrie | ac | Négoce - C | Produits Pt | Télécom - I |
| | | | | Deviation | | | BTP | | | | | | |
| 11 | 1 | 1463.8 | 0.0307 | 0.0195 | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% | 0% | 0% |
| 12 | 2 | 19961.15 | 0.0401 | 0.0229 | | 0% | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 13 | 3 | 1665.46 | 0.0806 | 0.0548 | | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 14 | 4 | 282 | 0.0682 | 0.0548 | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% | 0% | 0% |
| 15 | 5 | 3309.6 | 0.0307 | 0.0195 | | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 16 | 6 | 74.7 | 0.0401 | 0.0229 | | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 17 | 7 | 362.95 | 0.0401 | 0.0229 | | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 18 | 8 | 7.64 | 0.0307 | 0.0195 | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% |
| 19 | 9 | 12039.3 | 0.0211 | 0.0195 | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% | 0% | 0% |
| 20 | 10 | 20927.95 | 0.0211 | 0.0195 | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% | 0% | 0% |
| 21 | 11 | 14312.75 | 0.0401 | 0.0229 | | 0% | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 22 | 12 | 11.21 | 0.0307 | 0.0195 | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% |
| 23 | 13 | 7257.1 | 0.0401 | 0.0229 | | 0% | 0% | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 24 | 14 | 42.6 | 0.0682 | 0.0548 | | 0% | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 25 | 15 | 292 | 0.0682 | 0.0548 | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% | 0% | 0% |
| 26 | 16 | 7485.1 | 0.0211 | 0.0195 | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% | 0% |
| 27 | 17 | 4709.5 | 0.0682 | 0.0548 | | 0% | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| 28 | 18 | 7507.47 | 0.0401 | 0.0229 | | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% | 0% | 0% |

L'agrégation du risque de chaque titre a donnée la PDF suivante :

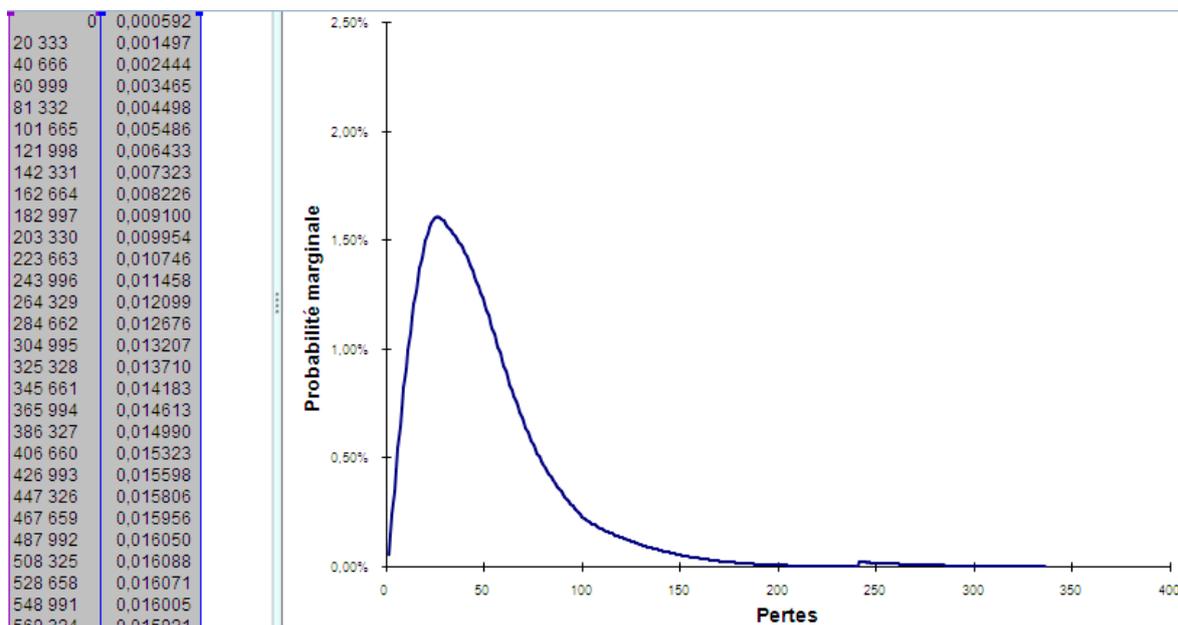


Figure 4.7 - Fonction de densité des pertes

Les moments de la distribution :**Tableau 4.8 – Les moments de la distribution des pertes**

| | | |
|--|---|---------------------------------------|
| Moyenne | $E(Y)$ | 57 586 973 |
| Ecart-type | $\sigma(Y)$ | 8 146 108 |
| Skewness (Coefficient d'asymétrie) | $S_k = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{(Y_k - E(Y))^3}{(\sigma(Y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$ | 2×10^{-17} |
| Kurtosis (Coefficient d'aplatissement) | $K = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{(Y_k - E(Y))^4}{(\sigma(Y)^2)^2} \right)$ | 3,73 |

A partir de ce tableau, nous pouvons conclure qu'il s'agit d'une distribution leptokurtique et asymétrique confirmé par le troisième et le quatrième moment de la distribution.

La distribution des pertes du portefeuille est construite et il ne nous reste donc qu'à calculer la Value at Risk.

La Value at Risk correspond aux quantiles de la distribution des pertes qu'on vient d'obtenir à différents niveaux de confiance.

Tableau 4.9 Value at Risk à différents niveaux de confiance

| Seuil de Confiance% | Value-at-Risk en DA |
|---------------------|---------------------|
| 95,00 | 2 299 389 |
| 97,50 | 2 729 011 |
| 99,00 | 3 243 386 |
| 99,50 | 3 616 557 |
| 99,75 | 3 991 727 |
| 99,90 | 4 496 295 |

On remarque que les pertes augmentent sensiblement aux niveaux de confiances les plus poussés, ceci est justifié par le caractère leptokurtique de la distribution des pertes du risque de crédit.

8. Analyse de l'effet de la diversification

CreditRisk+ présente l'avantage de l'analyse sectorielle qui tient compte de l'effet de la diversification.

Pour mieux cerner la diversification du portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAIR, nous nous proposons maintenant d'examiner cet effet en suivant la démarche suivante :

- 1- Nous décomposons le portefeuille en K secteurs, tel que : $1 \leq k \leq 8$
- 2- On calcul la $VaR_{99,9}$ à horizon d'un an, pour : $k = \overline{1, 8}$
- 3- Calcul du ratio :

$$R_{k+1} = \frac{VaR_{99}^{(k+1)}}{VaR_{99}^{(1)}}$$

Nous calculons la Value at Risk pour $k = 1$, En considérant que tous les titres composant le portefeuille appartiennent à un même secteur.

Les résultats sont présentés ans le tableau 4.10

Tableau 4.10 Value at Risk à différents niveaux de confiance pour un seul secteur

| Seuil de confiance % | Value at Risk en DA |
|----------------------|---------------------|
| 95 | 2 692 685 |
| 97,5 | 3 232 947 |
| 99 | 3 926 265 |
| 99,5 | 4 441 890 |
| 99,75 | 4 949 744 |
| 99,9 | 5 610 752 |

Les $VaR_{99}^{(k)}$ et les R_{k+1} sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau 4.11 Value at Risk à différents nombres de secteurs

| K | VaR à 99,9% | R (k+1) |
|---|-------------|---------|
| 1 | 5610752 | 1,00 |
| 2 | 4769139,2 | 0,94 |
| 3 | 4488601,6 | 0,89 |
| 4 | 4320279,04 | 0,85 |
| 5 | 4208064 | 0,83 |
| 6 | 4151956,48 | 0,82 |
| 7 | 4095848,96 | 0,81 |
| 8 | 4095848,96 | 0,80 |

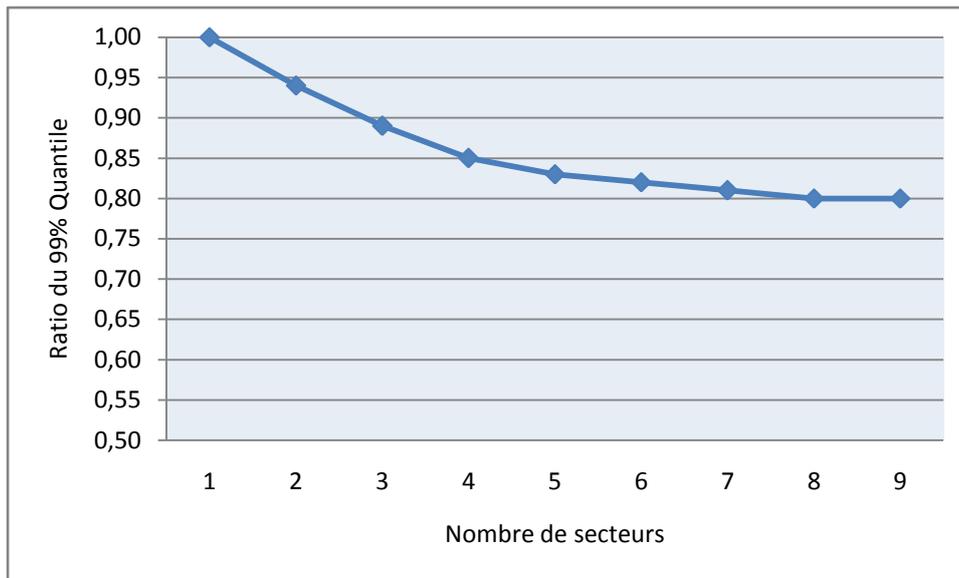


Figure 4.8 Effet de la diversification

Commentaire sur les résultats

Nous constatons que, le ratio R_{k+1} à 99,9 %, diminue paraboliquement inversement au nombre de secteurs. L'application que nous disposons ne nous permet pas d'aller plus loin (plus de secteurs) mais nous estimons que les pertes sur un portefeuille de crédit est fonction convexe de la diversification. Nous pouvons donc minimiser la Value at Risk en minimisant les corrélations de défaut, dû aux facteurs systématiques, entre les contreparties d'un même secteur.

C'est pourquoi CreditRisk+ utilise une approche alternative, qui consiste à prendre en compte des facteurs systématiques (et donc des corrélations) en admettant que le taux de défaut est lui-même aléatoire.

La décision de choisir une exposition plus importante sur un emprunteur va toujours accroître son risque marginal (risque qui augmente proportionnellement avec l'engagement). De manière opposée, l'addition d'exposition sur des contreparties de différents secteurs va engendrer moins de risque (risque total du portefeuille). En effet, des emprunteurs individuellement risqués peuvent offrir une faible contribution au risque du portefeuille, grâce à l'effet de diversification.

8.2 Conclusion

Le calcul de la Value at Risk à des niveaux de confiances élevés donne une estimation des pertes que la banque est susceptible d'enregistrer dans les situations extrêmes. Comme nous l'avons déjà signalé, le capital économique se calcule à partir de la mesure du risque potentiel en soustrayant de la VaR, le montant des pertes espérées (Expected Losses).

Une allocation sur estimée des fonds propres en choisissant des seuils de confiances les plus extrêmes empêche la banque de bénéficier de l'élargissement de son portefeuille et tirer profit de la diversification.

Nous pouvons dire que la Value at Risk est un outil fiable de mesure, mais nécessite une étude qualitative en amont pour fixer les seuils de confiances qui conviennent aux objectifs de la banque.

CONCLUSION GENERALE

En guise de conclusion, nous présentons un extrait du texte lu par Robert Merton lors de la remise du prix Nobel :

“At time we can lose sight of the ultimate purpose of the models when their mathematics becomes too interesting. The mathematics of financial models can be applied precisely, but the models are not at all precise in their application to the complex real world. Their accuracy as a useful approximation to that world varies significantly across time and place. The models should be applied in practice only tentatively, with careful assessment of their limitations in each application.”

Nobel lecture by Robert Merton, December 9, 1997

Notre travail avait pour objectif d’apporter une contribution à la mise en œuvre de la Value at Risk, en mettant en évidence les modèles de calcul, pour estimer les pertes du portefeuille de crédit de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR filiale du groupe BNP PARIBAS.

Ce travail s’inscrit dans le cadre de la mise en place d’un dispositif d’évaluation du risque de crédit basé sur les notations internes du groupe BNP PARIBAS.

Dans un premier temps, nous avons appréhendé la notion du risque de crédit, cible de notre étude et sa typologie. Ainsi nous avons accordé dans ce chapitre introductif une partie à la gestion des risques dans les institutions financières, puis nous avons mis l’accent sur la phase la plus importante du processus de la gestion du risque qui est la phase de l’évaluation. Nous en avons pu tirer que l’outil de quantification est l’élément clé du processus.

La structure CC&R de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR nous a chargés de mettre en œuvre la Value at Risk. Ceci n’aurait pu être réalisé sans passer par une description théorique détaillée de la Value at Risk, sa formulation mathématique, les hypothèses émises et sa méthodologie de mise en œuvre.

C’est en exprimant la capacité de la Value at Risk à évaluer les performances et la possibilité de résumer le risque potentiel en un seul chiffre, que nous avons ressenti l’utilité et la nécessité de recours à cet outil.

Toutefois, il ne faut perdre de vue les limites de la notion de la Value at Risk qui sont liés au fait qu’elle se calcule à partir de modèles mathématiques se basant sur des hypothèses très restrictives. Ainsi, quelle que soit l’exactitude et la précision mathématique d’un modèle, son application introduit toujours des approximations.

Nous avons, ensuite, présenté un panorama de la modélisation du risque de crédit et les différentes techniques permettant de contourner ses complexités. Ceci, nous a amené à exposer les deux modèles de référence de l’industrie bancaire, à savoir : CreditRisk+ et CreditMetrics, leurs avantages et leurs limites.

Pour implémenter la Value at Risk nous avons utilisé le modèle CreditRisk+ fourni par CSFB, en s'appuyant sur une analyse descriptive d'un échantillon représentatif du portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR. Nous avons estimé qu'une bonne compréhension du mécanisme de CreditRisk+ conduirait à une saine implémentation et utilisation des résultats.

Encore, CreditRisk+ nous a procuré l'avantage d'examiner la diversification du portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR.

Nous avons constaté par le biais de notre étude que le portefeuille de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR est classique et ne contient pas d'instruments financiers dérivés. Ceci s'explique par le faible développement du marché de ces instruments financiers en Algérie. Il convient de faire remarquer que le modèle CreditMetrics appliqué sur des portefeuilles contenant des produits dérivés donne des résultats meilleurs par rapport à CreditRisk+.

BIBLIOGRAPHIE

- [ABB'05] Abbaoui S., 2005, Modélisation du risque de crédit, Ecole Supérieure des Banques, Alger.
- [BAL'03] Comité de Bâle, 2003, Nouvel accord de Bâle sur les fonds propres, Article 607.
- [BES'95] Bessis J., 1995, gestion des risques et gestion actif-passif des banques, édition Dalloz, Paris.
- [BES'98] Best P., 1998, Implementing Value at Risk, édition John Wiley & Sons, New York.
- [BNP'08] Documents internes de BNP PARIBAS EL DJAZAÏR, 2008.
- [BOD'01] Bodie Z. & Merton R., 2001, Finances, édition Pearson Education, Paris.
- [CSFB'97] Credit Suisse First Boston, 1997, CreditRisk+ technical document, London.
- [DEM'01] Demazy M., 2001, Value at Risk et contrôle prudentiel des banques, édition Academia-bruyant, Bruxelles.
- [DIE'03] Dietsch M., Petey J., 2003, Mesure et gestion du risque de crédit dans les institutions financières, REVUE BANQUE EDITION, Paris.
- [ESC'03] Esch L., Kieffer R., Lopez T., 2003, Asset et Risk Management, la finance orientée risque, édition De Boeck, Paris.
- [GOR'98] Gordy M., 1998, A comparative anatomy of credit risk models, Board of Governors of the Federal Reserve System Working Paper.
- [HUL'04] Hull J., 2004, Options, futurs et autres actifs dérivés, édition Pearson Education, Paris.
- [JOR'01] Jorion P., 2001, Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk, édition McGraw-Hill, New York.
- [JOR'03] Jorion P., 2003, Financial Risk Manager handbook, édition GARP, New Jersey.
- [RIB'99] Riboulet G. & Roncalli T., 1999, présentation du risque de crédit, Crédit lyonnais, Groupe de Recherche Opérationnelle.
- [SAU'04] Saunders A., 2004, Understanding market, credit and operational risk the value at risk approach, édition Oxford BlackWell.
- [SER'03] De Servigny A., 2003, Le risque de credit : nouveaux enjeux bancaires, édition Dunod, Paris.

Autres documents consultés

Benaissa A., Kheliouen R., 2007, Mise en œuvre de l'outil de mesure du risque prix : Value-at-Risk au sein de la direction Risk Management- SONATRACH, Mémoire de projet de fin d'étude, département Génie Industriel, Ecole National Polytechnique, Alger.

Marot E., Michel L. & Salomon E., Le stress-testing : piloter la stratégie risque de la banque de détail, Banque Magazine n°660 Juillet-Août 2004.

Moody's, 2002, Default and Recovery rate of corporate Bond Issuers.

Finance computationnelle et gestion des risques, Presses de l'Université de Québec, 2006, Québec.

Webographie

[S1] www.gloriamundi.org

[S2] www.csfb.com

[S3] www.defaultrisk.com

[S4] www.finance-concepts.com

[S5] www.riskmetrics.com

[S6] www.finance-research.net

Annexe I.A

NOTATION ET AGENCES DE NOTATION

1. Définition de la notation

La notation financière ou rating est un indicateur du risque de défaut d'une entreprise. Elle est définie comme étant une évaluation du risque de non-paiement de la totalité du principal et des intérêts relatifs à une obligation financière. Elle analyse donc la capacité et la volonté de l'emprunteur à remplir ses obligations contractuelles. La notation concerne, à la fois, les émetteurs (entreprises, établissements de crédit, établissements publics, collectivités locales et compagnies d'assurance, pays), les opérations de titrisation, et tous types de dettes financières (certificats de dépôts, billets de trésorerie, emprunts bancaires, émissions obligataires...etc.). Les notes peuvent être obtenues par, l'analyse statistique des données historiques sur les défauts, par le suivi des différentiels de taux pour les prêts aux entreprises et par recours aux avis d'experts. Ces techniques d'évaluation n'ont évidemment de sens que si elles sont intégrées dans une méthodologie rigoureuse d'analyse financière du risque de crédit.

2. Agences de notation ou de Rating

En 1909, John Moody a introduit un système graduel de notation pour les obligations émises par les compagnies des chemins de fer aux Etats Unis, qui résume l'information sur la qualité du crédit, exprimant la santé financière de la compagnie, la fréquence de défaut, la sévérité des pertes, et les transitions de rating.

Depuis, plusieurs agences de rating ont vu le jour, pour apprécier le risque de défaut des emprunteurs. Les plus importantes sont :

- Moody's Investor Services.
- Standard & Poor's.
- Fitch IBCA.
- Duff & Phelps.

De par leur connaissance de l'analyse crédit, ces agences jouissent d'une reconnaissance internationale, leur décision se fonde sur les informations disponibles au sujet de l'entreprise, sur le contexte macroéconomique et sectoriel. De plus, elles ont droit à des visites et à des entretiens avec les dirigeants des entreprises, qui leur fournissent des informations confidentielles sur leurs performances, investissement et comptabilité, non disponibles sur le marché. Depuis 1970, ce service est devenu payant et presque obligatoire pour les émetteurs, vu que son absence suscitera le doute des investisseurs quant à la qualité du crédit.

Annexe I.B

LE PROBLEME DES DISTRIBUTIONS NON NORMALES

Dans la réalité, la distribution des rendements et des pertes d'un portefeuille suit rarement l'hypothèse simplificatrice de la normalité. Pour caractériser une loi Normale, seulement deux paramètres sont utilisés : la moyenne et la variance qui représentent les moments d'ordre un et deux. Deux autres paramètres ont une grande importance dans la distribution des rendements : le coefficient de *Skewness* et le coefficient de *Kurtosis*.

Skewness ou coefficient d'asymétrie

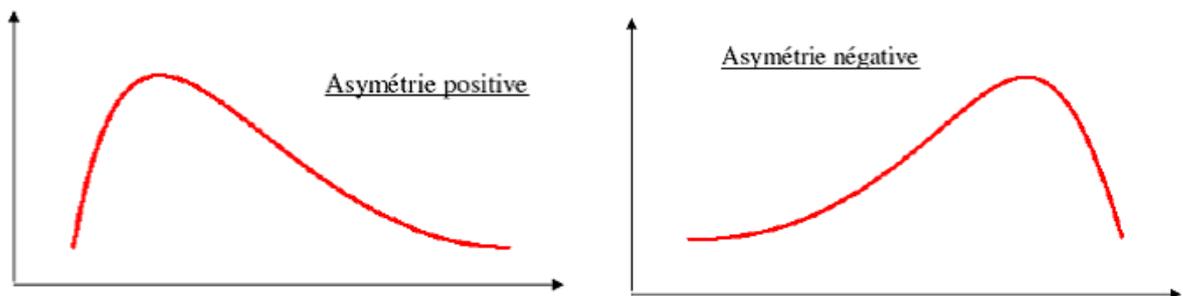
Le coefficient de Skewness, que l'on notera S_k caractérise l'asymétrie d'une distribution. Il est associé au moment d'ordre 3 d'une distribution. Voici sa formule de calcul :

$$S_k = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{(\Delta W_k - E(\Delta W))^3}{(\sigma(\Delta W)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Où n représente le nombre de données disponibles.

On compare le Skewness empirique à celui d'une loi Normale qui vaut 0.

- Si $S_k = 0$ alors la distribution est symétrique et a donc de grandes chances d'être proche d'une loi Normale.
- Si $S_k > 0$ alors la distribution s'étale vers la droite et est dite à asymétrie positive.
- Si $S_k < 0$ alors la distribution s'étale vers la gauche et est dite à asymétrie négative.



Kurtosis ou coefficient d'aplatissement

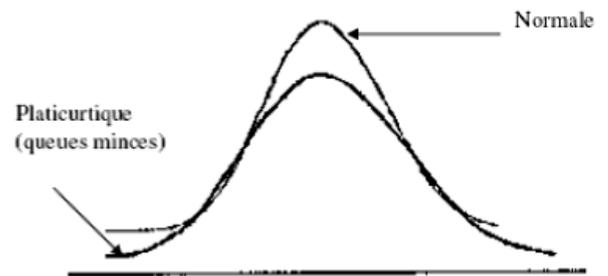
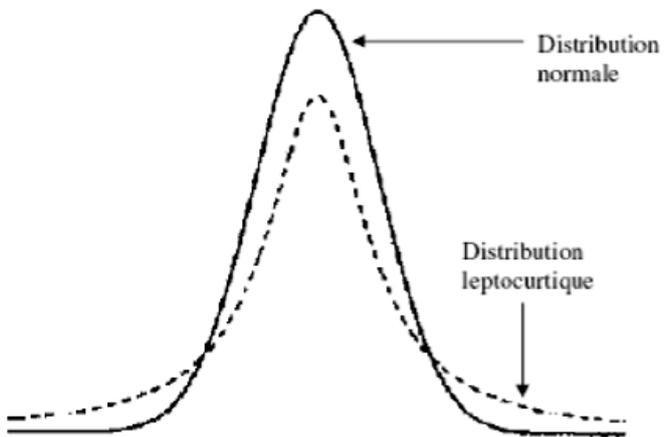
Le coefficient de Kurtosis, que l'on notera K caractérise l'aplatissement d'une distribution. Il est associé au moment d'ordre 4 d'une distribution. On l'utilise pour les distributions ayant des queues épaisses « fat-tails ». Voici sa formule de calcul :

$$K = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{(\Delta W_k - E(\Delta W))^4}{(\sigma(\Delta W)^2)^2} \right)$$

Où n représente le nombre de données disponibles.

On compare le Kurtosis empirique à celui d'une loi Normale qui vaut 3.

- Si $K = 3$ alors la distribution est dite mesocurtique, ses queues sont proches de la loi Normale.
- Si $K > 3$ alors la distribution est dite leptocurtique, elle présente des queues épaisses.
- Si $K < 3$ alors la distribution est dite platicurtique, elle présente des queues minces.



Annexe II.A

AXIOMATIQUE DU RISQUE

Il existe quatre propriétés de cohérence que devaient satisfaire une bonne mesure de risque. Chacune de ces propriétés repose sur une intuition financière :

- Monotonie : si la probabilité de perte sur un portefeuille est toujours supérieure à celle d'un deuxième alors leurs mesures de risque sont dans le même sens

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

- Homogénéité : Le risque double si la taille du portefeuille double

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

- Invariance par translation : l'ajout d'une poche d'actif sans risque à un portefeuille risqué ne fait que translater la mesure du risque

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c$$

- Sous-additivité : cette propriété traduit la notion de diversification : le risque sur un portefeuille est plus faible que la somme des risques individuels

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Annexe III.A

DEUX FAMILLES DE MODELES DE DEFAUT

1. Les modèles de défaut (DM)

Les modèles de défaut mesurent seulement le risque de crédit relatif au défaut de l'emprunteur.

Deux états de la nature sont jugés pertinents : le défaut et l'absence de défaut. Ce type de modèle convient pour les crédits bancaires classiques, dans la mesure où ils sont appelés à rester dans le portefeuille de la banque jusqu'à l'échéance.

2. Les modèles Marked-to-Market (MTM)

Les modèles Marked-to-Market mesurent le risque de crédit à partir des variations de la valeur de marché des crédits. De ce fait, ils étendent l'analyse au-delà des deux états : défaut et absence de défaut. Par exemple, la dégradation de la cote d'une obligation AA à A, entraîne une perte pour son détenteur, malgré l'absence de défaut.

L'état le plus défavorable dans un modèle MTM est le défaut.

Le choix entre les deux types de modèles, dépend de la nature du portefeuille. A ce titre, un modèle de défaut conviendra davantage à un portefeuille composé de petits crédits : PME, particuliers...etc. Tandis qu'un modèle MTM s'applique davantage au risque des « grandes entreprises », faisant l'objet d'une notation, pour lesquelles on dispose réellement des informations requises.

Annexe III.B

SIMULATION MONTE-CARLO

1. Principe

La méthode de Monte-Carlo utilise le lien entre probabilités et volumes dans l'espace probabilisé. Alors que la théorie de la mesure exprime la probabilité d'un événement en termes de volume de cet événement dans l'univers des réalisations possibles des variables aléatoires, la méthode de Monte-Carlo fait exactement le contraire en estimant le volume d'un événement et en l'interprétant comme une probabilité. La méthode de Monte-Carlo dans sa version la plus élémentaire consiste à simuler un échantillon de réalisations des variables aléatoires, et la fraction des résultats qui appartiennent à l'événement considéré donne une estimation de son volume. La loi des grands nombres assure la convergence de cette estimation lorsque la taille de l'échantillon simulé tend vers l'infini. Concrètement, si une expérience aléatoire a plusieurs résultats possibles, nous effectuons N tirages, et si on suppose que le résultat numéro i a une probabilité p_i d'apparaître et apparaît N_i fois, nous avons :

$$\frac{N_i}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p_i$$

Soit à présent une variable aléatoire continue X de densité de probabilité f , et nous souhaitons calculer l'espérance de la variable aléatoire $g(X)$. Supposons que les $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ constituent un ensemble de N réalisations de la variable aléatoire X . La méthode Monte-Carlo repose sur la relation obtenue de la loi des grands nombres :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E[g(X)]$$

Comme l'indique le théorème de la limite centrale, cette convergence de la moyenne sur l'échantillon vers l'espérance est malheureusement très lente, et l'écart type de l'estimateur de l'espérance décroît comme $1/\sqrt{N}$. Réduire l'incertitude sur l'estimateur d'un facteur 10 requiert 100 fois plus de simulations. En revanche, l'universalité de la loi des grands nombres fait de la méthode Monte-Carlo une méthode applicable en toutes circonstances, qu'elle qu'en soit la complexité. Sa faiblesse vient de la lenteur de la convergence des estimateurs.

La précision d'une estimation par méthode Monte-Carlo vient d'une part, comme nous l'avons vu, de la taille de l'échantillon simulé, et d'autre part de la qualité du générateur de nombres aléatoires. L'élément clé à ce niveau est de disposer d'un générateur de nombres aléatoires uniformes entre 0 et 1 qui soit très performant ; en particulier il ne doit pas y avoir d'auto corrélations entre ces nombres. Cette problématique constitue un pan important des mathématiques appliquées.

Une fois une variable uniforme U engendrée, il y a plusieurs méthodes pour engendrer une variable aléatoire X de fonction densité f :

- Inverse de la fonction de répartition : appelons F la fonction de répartition de X . Cette fonction appliquée à la variable X étant une variable uniforme, on en déduit que l'on peut poser $X = F^{-1}(U)$. Cette méthode est la plus simple lorsqu'on dispose d'une forme explicite pour F .
- Méthode de rejet : cette méthode est utile pour les variables à support compact et dont la fonction de densité reste bornée, mais dont la fonction de répartition ne s'exprime pas simplement. C'est par exemple le cas de la loi beta. Soit m tel que pour toute valeur de x ,

nous avons $f(x) < m$. Nous simulons une réalisation de deux variables uniforme U sur $[0,1]$ et V sur l'intervalle $[0, m]$. Si $V < f(U)$, on garde U et on pose $X=U$; dans le cas inverse, on rejette U et on recommence.

- Variables normales : elles sont au Cœur de la modélisation en finance et requièrent une méthodologie spécifique car l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires. Une première méthode consiste à trouver des approximations polynomiales de la fonction de répartition inverse de la loi normale. Une deuxième méthode consiste à engendrer deux variables aléatoires U_1 et U_2 et à utiliser la formule de Box-Muller $X = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(U_2)$.

2. Méthodes de réduction de variance

Lors de simulations Monte-Carlo, il y a une perte d'information due à la différence entre la loi théorique de la variable aléatoire considérée et l'histogramme des réalisations simulée de cette variable

- Si la loi possède des symétries, celles-ci sont généralement perdues dans l'histogramme des réalisations
- L'échantillon aléatoire est toujours biaisé par rapport à la vraie distribution
- Si les évènements qui contribuent le plus à la quantité que nous cherchons à calculer, même un grand nombre de simulation ne seront pas suffisantes pour estimer cette grandeur avec précision

2.1 Variables antithétiques

La méthode des variables antithétiques a pour but de restaurer dans l'histogramme des réalisations de la variable aléatoire, la symétrie de la loi théorique de cette variable. Dans l'exemple d'une variable normale centrée réduite, la loi de probabilité possède une symétrie par rapport à la valeur 0. Ainsi, la densité de probabilité de réalisation de x et de $-x$ sont égales. Un estimateur non biaisé de $E[g(X)]$ est obtenue en introduisant dans l'échantillon des réalisations toutes les variables antithétiques $-x$. L'estimateur non biaisé de cette espérance est :

$$\frac{1}{2N} \sum_i (g(X_i) + g(-X_i))$$

Cela permet de doubler la taille de l'échantillon sans consommation en temps de calcul supplémentaire. L'efficacité de la méthode dépend bien sûr de la forme de la quantité à calculer. En particulier, si la fonction g est impaire, une seule simulation donnera le résultat exact. Si cette fonction est paire, la méthode n'aura aucun intérêt car $g(X) = g(-X)$. Entre ces deux situations extrêmes, la méthode des antithétiques est utile car elle restaure la symétrie de la loi de distribution dans l'échantillon des tirages à moindres frais.

2.2 Variable de contrôle

Lors d'une simulation Monte-Carlo, soit on sur estime le résultat, soit on le sous-estime. Dans certains cas, il est possible d'avoir une idée approximative de combien on surestime ou sous-estime le résultat. En effet, si on connaît une quantité proche de celle que nous cherchons à estimer pour laquelle nous connaissions la vraie espérance, la méthode de Monte-Carlo nous permettrait de calculer l'erreur que nous commettons sur cette deuxième variable et donc d'avoir une idée de l'erreur commise sur la première variable.

Supposons que nous souhaitons calculer l'espérance $a = E[f(X)]$ dont une estimation est obtenue par simulation Monte-Carlo: $\hat{a} = \sum_i f(X_i)/N$. Supposons qu'il existe une fonction g proche de la fonction f telle que nous sachions calculer exactement l'espérance $b = E[g(X)]$. A l'aide de l'échantillon ayant servi à estimer a , on peut obtenir une estimation Monte-Carlo de b grâce à la formule: $\hat{b} = \sum_i g(X_i)/N$. Si l'estimation Monte Carlo surestime la quantité b , il y a des chances que ce soit également le cas pour a puisque les fonctions f et g sont proches.

On peut donc corriger l'estimateur de a par une quantité proportionnelle à $b - \hat{b}$. Notre estimateur corrigé s'écrit donc :

$$\tilde{a} = \hat{a} + c(b - \hat{b})$$

Par construction, nous avons bien $E[\tilde{a}] = E[\hat{a}] = a$. Nous choisissons la quantité c de manière à minimiser la variance de l'estimateur corrigé :

$$\text{var}(\tilde{a}) = \text{var}(\hat{a}) - 2c \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) + c^2 \text{var}(\hat{b})$$

La valeur optimale de c est donc donnée par :

$$c = \frac{\text{cov}(\hat{a}, \hat{b})}{\text{var}(\hat{b})}$$

Ainsi, conformément à l'intuition, plus les fonctions f et g sont proches, plus les variables \hat{a} et \hat{b} sont corrélées, et plus la correction à l'estimation sera importante et efficace.

2.3 Importance sampling

Dans une grande majorité des cas, une fraction importante des simulations Monte-Carlo ne contribue que très peu au résultat d'estimation de la quantité qui nous intéresse. C'est en particulier le cas pour l'estimation d'événements rares.

Dans ce cas, l'astuce consiste à effectuer un changement de probabilité et calculer notre espérance sous cette nouvelle probabilité sous laquelle les événements qui vont contribuer au résultat sont plus fréquents. Cette méthode repose sur la relation suivante :

$$E[g(X)] = \int dx g(x)f(x) = \int dy g(y) \frac{f(y)}{h(y)} h(y) = \tilde{E} \left[\frac{f(Y)}{h(Y)} g(Y) \right]$$

L'espérance sous la densité h de la variable corrigée de la dérivée de Radon-Nikodym est égale à l'espérance que nous recherchons ; en revanche, la variance de l'estimation sera plus faible que sous la densité f si nous choisissons un changement de probabilité approprié. Le choix de la nouvelle mesure de probabilité est dicté par la minimisation de la variance suivante :

$$\min_h \left\{ \tilde{E} \left[\left(\frac{f(X)}{h(X)} g(X) \right)^2 \right] - \tilde{E} \left[\frac{f(X)}{h(X)} g(X) \right]^2 \right\}$$

La minimisation de la variance ci-dessus requiert une optimisation fonctionnelle qui est très lourde en mettre en œuvre sauf dans de rarissimes cas simples. En pratique, nous limitons le choix de h parmi des lois normales centrées sur une valeur μ sur laquelle porte l'optimisation. Il est également possible d'optimiser sur la variance σ^2 associé à la densité h , ce qui conduit à résoudre les équations suivantes ($h_{\mu,\sigma}$ étant la densité de la loi normale centrée sur μ et d'écart type σ) :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\tilde{E} \left[\left(\frac{f(X)}{h_{\mu, \sigma}(X)} g(X) \right)^2 \right] - \tilde{E} \left[\frac{f(X)}{h_{\mu, \sigma}(X)} g(X) \right]^2 \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\tilde{E} \left[\left(\frac{f(X)}{h_{\mu, \sigma}(X)} g(X) \right)^2 \right] - \tilde{E} \left[\frac{f(X)}{h_{\mu, \sigma}(X)} g(X) \right]^2 \right) = 0$$

A titre d'exemple, nous pouvons considérer le calcul de la probabilité $P[X \leq s]$ pour $s < 0$ et X une variable normale centrée réduite. Le résultat exact est bien-sûr donné par $N(s)$, mais pour des seuils très négatifs, la méthode Monte-Carlo standard va s'avérer très imprécise car peu de tirages vont se retrouver en dessous de ce seuil. Nous allons mettre en œuvre la méthode d'importance sampling et changer la densité $f(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ par la densité :

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2} \right]$$

Si la variable X a pour densité la fonction f et Y a la densité h , alors on a la relation suivante :

$$E[1_{\{X \leq s\}}] = \tilde{E}[1_{\{Y \leq s\}} e^{\mu^2/2 - \mu Y}]$$

Nous pouvons écrire la variance de l'estimateur sous la nouvelle mesure de probabilité :

$$v(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-x^2} e^{(x-\mu)^2} \cdot 1_{\{x \leq s\}} - \left(\int dx \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1_{\{x \leq s\}} \right)^2$$

L'équation de maximisation de cette variance par rapport à la variable μ s'écrit :

$$v'(\mu) = 0 = \frac{d}{d\mu} (N(s + \mu) e^{\mu^2})$$

Dans la limite asymptotique ($s \rightarrow \infty$), on peut montrer que $N(X) \approx \frac{\exp(-x^2/2)}{|x|\sqrt{2\pi}}$. On en déduit dans cette limite que la valeur optimale du changement de probabilité correspond à $\mu^* \approx s$. Le changement optimal de probabilité revient à centrer la gaussienne au niveau du seuil sur lequel les événements « intéressants » vont se produire. L'efficacité de la méthode d'importance sampling sera d'autant plus importante que le changement de probabilité sera visible. Dans notre exemple, plus le seuil s sera grand en valeur absolue, plus la valeur de μ^* sera grande. Dans la méthode de Monte-Carlo standard, le ratio signal sur bruit (ratio entre la valeur de l'espérance et l'incertitude de l'estimation se calcule aisément :

$$\frac{N(s)}{\sqrt{N(s) \cdot (1 - N(s)) \sqrt{N}}} \approx \sqrt{N(s)/N}$$

Dans la méthode d'importance sampling, ce ratio signal sur bruit s'écrit :

$$\frac{N(s)}{\sqrt{N v(\mu^*)}} \approx \frac{N(s)}{\sqrt{N \cdot [N(2s) e^{s^2} - N(s)^2]}} \approx \sqrt{2|s|/N}$$

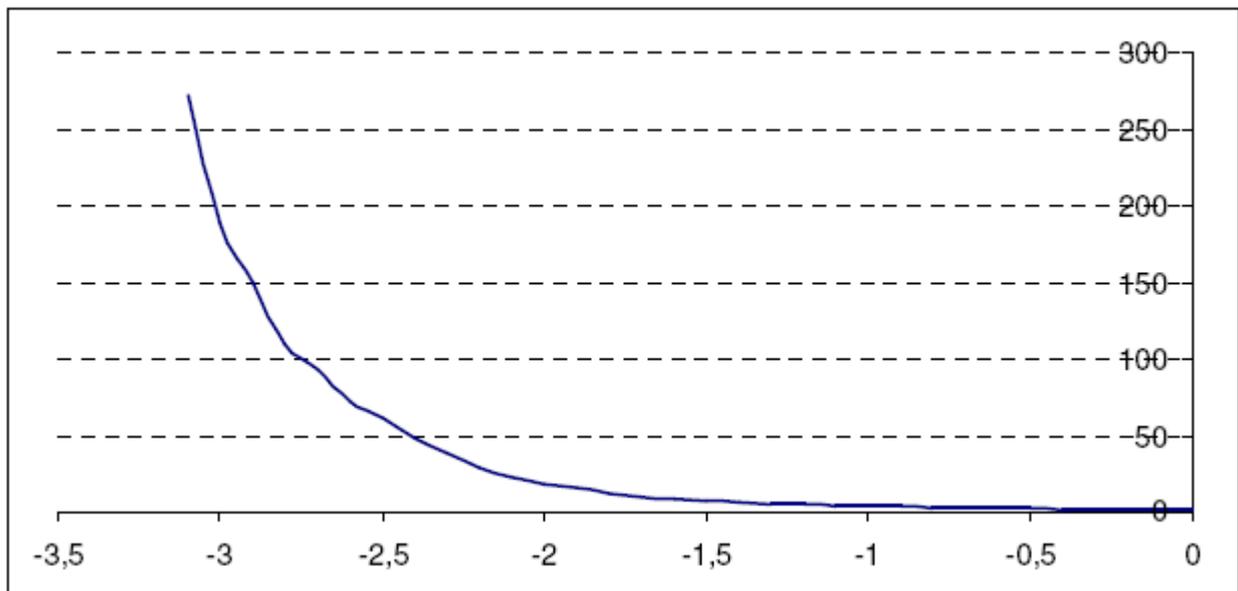
L'efficacité de la méthode Monte Carlo dépend du seuil retenu car pour un échantillon de taille donnée, le nombre d'événements qui contribuent à l'espérance décroît avec le seuil. Ce n'est plus le cas dans la méthode d'importance sampling. On peut introduire le facteur de qualité de la méthode d'importance sampling par rapport à la méthode de Monte-Carlo simple. En effet la variance de l'estimation dans la méthode de Monte-Carlo s'écrit :

$$N \cdot N(s) \cdot (1 - N(s))$$

Pour la méthode d'importance sampling, elle s'écrit :

$$N \cdot [N(2s)e^{s^2} - N(s)^2]$$

Le rapport entre la variance de l'estimation en Monte-Carlo et la variance en importance sampling indique le gain en termes de nombres de simulations apporté par l'importance sampling pour un niveau de précision donné. Ainsi, ce facteur qualité tend asymptotiquement vers $s/2n(s)$, c'est-à-dire qu'il augmente exponentiellement à l'infini lorsque le seuil s'éloigne. Le facteur qualité que nous obtenons dans cet exemple dépend du seuil retenu de la façon suivante :



Annexe III.C

CONSTRUCTION DES COURBES ZERO-COUPON

On détermine les taux zéro-coupon à partir des prix des instruments cotés. La méthode s'appelle *bootstrap*, pour illustrer cette méthode, considérons les prix des obligations du tableau1.

Les trois premières ne payent pas de coupons, les taux zéro-coupon correspondant à ces maturités sont aisément obtenus. Le prix d'une obligation zéro-coupon est l'actualisation du flux versé à l'échéance: $P_{ZC} = Ke^{-rT}$ où r est le taux zéro-coupon et K le principal. Donc :

$$r = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{K}{P_{ZC}} \right)$$

Tableau.1 - Caractéristiques des obligations

| Principal de l'obligation | Maturité | Coupon annuel ¹³ | Prix de l'obligation |
|------------------------------|----------|--------------------------------|-------------------------|
| 100 | 0,25 | 0 | 97 |
| 100 | 0,50 | 0 | 95 |
| 100 | 1,00 | 0 | 90 |
| 100 | 1,50 | 10 | 96 |
| 100 | 2,00 | 14 | 101 |

En remplaçant, on obtient le taux zéro-coupon à trois mois :

$$4 \times \ln \left(\frac{100}{97} \right) = 12,184\%$$

De la même façon le taux zéro-coupon à six mois est:

$$2 \times \ln \left(\frac{100}{95} \right) = 10,195\%$$

Et à un an on trouve 10,536 %.

Les deux dernières obligations payent des coupons semestriels. Par conséquent, les flux de l'obligation à 18 mois sont :

| | |
|--------|-----|
| 6 mois | 5 |
| 1 an | 5 |
| 1,5 an | 105 |

Nous avons déjà calculé les taux zéro-coupon à 6 mois et 1 an. Si l'on note R le taux zéro-coupon à dix huit mois, il est solution de l'équation :

$$5 \times e^{-0,10159 \times 0,5} + 5 \times e^{-0,10536 \times 1} + 105 \times e^{-R \times 1,5} = 96$$

On trouve $R = 12,730 \%$

En appliquant le même raisonnement à l'obligation d'échéance deux ans, on aura à résoudre l'équation suivante :

$$7 \times e^{-0,10159 \times 0,5} + 7 \times e^{-0,10536 \times 1} + 7 \times e^{-0,12730 \times 1,5} + 107 \times e^{-R \times 2} = 101$$

La solution est $R = 13,145 \%$

Les taux zéro-coupon obtenus sont résumés dans le tableau 2. On appelle courbe des taux zéro-coupon la fonction qui, à la maturité, associe le taux zéro-coupon correspondant.

Quand on utilise une méthode de bootstrap, il est courant de faire une interpolation linéaire pour déterminer les taux zéro-coupon aux maturités ne correspondant pas aux dates de tombées des échéances. Par exemple, le taux zéro-coupon à quinze mois est supposé égal à :

$$0,5 \times 0,10536 + 0,5 \times 0,12730 = 11,633 \%$$

Tableau.2 - Courbe des taux zéro-coupon

| Maturité (années) | Taux zéro-coupon (en %) |
|----------------------|----------------------------|
| 0,25 | 12,184 |
| 0,50 | 10,159 |
| 1,00 | 10,536 |
| 1,50 | 12,730 |
| 2,00 | 13,145 |

Annexe IV.A

Transition Matrix Moody's

Standard Deviation

| | Aaa | Aa1 | Aa2 | Aa3 | A1 | A2 | A3 | Baa1 | Baa2 | Baa3 | Ba1 | Ba2 | Ba3 | B1 | B2 | B3 | Caa | D | WR | UpGr | Dow nGr |
|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|------------|
| Aaa | 6,60 | 3,92 | 2,54 | 0,75 | 1,19 | 0,75 | 0,38 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 2,17 | 0,00 | 11,71 |
| Aa1 | 2,59 | 28,04 | 5,79 | 5,88 | 2,77 | 0,69 | 0,16 | 0,67 | 0,00 | 0,00 | 0,34 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 1,68 | 2,59 | 17,97 |
| Aa2 | 1,34 | 4,10 | 11,40 | 6,65 | 2,85 | 2,37 | 1,16 | 0,30 | 0,18 | 0,00 | 0,00 | 0,15 | 0,19 | 0,19 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 2,34 | 5,44 | 16,38 |
| Aa3 | 0,26 | 1,01 | 2,77 | 27,53 | 5,53 | 2,13 | 0,98 | 0,49 | 0,42 | 0,37 | 0,05 | 0,14 | 0,34 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,27 | 2,53 | 4,04 | 13,26 |
| A1 | 0,11 | 0,24 | 0,77 | 3,40 | 27,18 | 3,90 | 1,95 | 1,02 | 0,35 | 0,41 | 1,12 | 0,82 | 0,20 | 0,29 | 0,10 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 2,09 | 4,52 | 12,27 |
| A2 | 0,14 | 0,15 | 1,09 | 1,77 | 3,91 | 10,90 | 4,43 | 1,93 | 1,52 | 0,75 | 0,45 | 0,21 | 0,27 | 0,23 | 0,14 | 0,00 | 0,09 | 0,10 | 1,67 | 7,06 | 11,79 |
| A3 | 0,17 | 0,19 | 0,09 | 0,53 | 1,36 | 3,64 | 25,37 | 3,19 | 2,38 | 1,41 | 0,60 | 0,31 | 0,33 | 0,57 | 0,13 | 0,12 | 0,06 | 0,09 | 2,40 | 5,99 | 11,60 |
| Baa1 | 0,17 | 0,11 | 0,24 | 0,27 | 0,30 | 2,63 | 4,01 | 24,99 | 4,12 | 2,30 | 0,98 | 0,60 | 0,48 | 0,76 | 0,23 | 0,20 | 0,19 | 0,29 | 2,52 | 7,74 | 12,68 |
| Baa2 | 0,13 | 0,36 | 0,28 | 0,37 | 0,76 | 2,07 | 3,69 | 3,59 | 15,06 | 5,38 | 3,32 | 1,44 | 0,61 | 0,56 | 0,55 | 0,50 | 0,54 | 0,22 | 2,53 | 11,25 | 15,65 |
| Baa3 | 0,12 | 0,00 | 0,10 | 0,19 | 0,44 | 0,70 | 0,75 | 2,90 | 4,80 | 24,91 | 3,88 | 2,12 | 2,08 | 1,25 | 0,64 | 0,29 | 0,59 | 1,01 | 3,93 | 10,01 | 15,79 |
| Ba1 | 0,15 | 0,00 | 0,00 | 0,09 | 0,40 | 0,33 | 0,85 | 0,93 | 2,21 | 4,36 | 23,46 | 2,78 | 2,28 | 1,27 | 1,01 | 1,36 | 0,96 | 0,90 | 4,00 | 9,31 | 14,56 |
| Ba2 | 0,00 | 0,00 | 0,18 | 0,11 | 0,14 | 0,29 | 0,31 | 0,57 | 1,62 | 2,03 | 4,61 | 14,17 | 6,26 | 3,92 | 2,29 | 1,16 | 1,45 | 0,88 | 3,79 | 9,86 | 19,75 |
| Ba3 | 0,00 | 0,09 | 0,00 | 0,00 | 0,12 | 0,48 | 0,32 | 0,26 | 0,36 | 1,02 | 1,68 | 3,66 | 24,71 | 8,11 | 2,44 | 1,75 | 1,19 | 1,95 | 3,85 | 7,99 | 19,29 |
| B1 | 0,08 | 0,00 | 0,10 | 0,00 | 0,13 | 0,20 | 0,34 | 0,16 | 0,64 | 0,52 | 0,48 | 2,25 | 4,02 | 25,45 | 8,77 | 3,65 | 2,55 | 2,29 | 4,80 | 8,91 | 22,05 |
| B2 | 0,00 | 0,00 | 0,24 | 0,05 | 0,43 | 0,00 | 0,19 | 0,46 | 0,55 | 0,44 | 0,40 | 2,89 | 2,25 | 5,52 | 15,36 | 10,85 | 3,56 | 5,48 | 4,49 | 13,42 | 24,38 |
| B3 | 0,00 | 0,00 | 0,17 | 0,00 | 0,08 | 0,17 | 0,15 | 0,32 | 0,34 | 0,38 | 0,61 | 0,51 | 1,49 | 2,98 | 3,31 | 23,54 | 6,24 | 7,71 | 5,01 | 10,51 | 18,96 |
| Caa | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 1,90 | 1,90 | 1,65 | 1,74 | 4,11 | 3,19 | 1,82 | 3,23 | 22,82 | 20,23 | 7,56 | 19,53 | 27,79 |

ANNEXES IV.B

ECHELLE DE NOTES BNP PARIBAS

Contreparties saines :

- 1 Excellent**
- 2 Très bon**
- 3 Bon**
- 4 Satisfaisant**
- 5 Moyen**
- 6 Acceptable**
- 7 Médiocre**
- 8 Faible**
- 9 Préoccupant**
- 10 Très préoccupant**

Contreparties en défaut :

11 Défaut

Les contreparties classées dans la catégorie 11 sont celles pour lesquelles on constate :

- soit (a) un risque probable ou certain de défaut de paiement, susceptible d'entraîner pour BNP PARIBAS un non recouvrement partiel ou total des créances indépendamment de garanties reçues (ceci inclut donc les emprunteurs dont tout ou partie de la dette présente un risque probable ou certain d'être restructurée en raison de leurs difficultés financières),
- soit (b) l'existence d'un quelconque défaut de paiement (en principal, intérêts ou commissions) non régularisé dans un délai de 3, 6 ou 9 mois suivant le type de créances,
- soit (c) l'existence d'une quelconque procédure contentieuse telle que mesures de protection, redressement, ou assimilées.

12 Défaut irréversible

Les contreparties classées dans la catégorie 12 sont celles dont la banque estime, en présence d'un cas de défaut (a), (b) ou (c), qu'elles ont une probabilité quasi-nulle de retour en sain. Par définition les contreparties en liquidation judiciaire sont incluses dans cette catégorie.

ANNEXE IV.C

CORRESPONDANCE INDICATIVE AVEC LES ECHELLES DE RATING DES AGENCES DE NOTATION

Le tableau ci-dessous met en équivalence, à titre indicatif. L'échelle de notes BNP PARIBAS avec les 'long term issuer Credit Ratings' et les ratings 'long Term Senior Unsecured' (monnaie locale) des agences de notation.

| | BNP PARIBAS | LT Issuer / Unsecured issues ratings | | |
|-----------------------------|-------------|--------------------------------------|------|------------|
| | | Moody's | S&P | FITCH IBCA |
| Investment Grade | 1+ | Aaa | AAA | AAA |
| | 1 | Aa1 | AA+ | AA+ |
| | 1- | Aa2 | AA | AA |
| | 2+ | Aa3 | AA- | AA- |
| | 2 | A1 | A+ | A+ |
| | | | A | A |
| | 2- | A3 | A- | A- |
| | 3+/3/3- | Baa1 | BBB+ | BBB+ |
| | 4+/4/4- | Baa2 | BBB | BBB |
| 5+/5/5- | Baa3 | BBB- | BBB- | |
| Non Investment Grade | 6+ | Ba1 | BB+ | BB+ |
| | 6/6- | Ba2 | BB | BB |
| | 7+/7 | Ba3 | BB- | BB- |
| | 7- | B1 | B+ | B+ |
| | 8+/8/8- | B2 | B | B |
| | 9+/9/9- | B3 | B- | B- |
| | 10+ | Caa1 | CCC+ | CCC+ |
| | | Caa2 | CCC | CCC |
| | | Caa3 | CCC- | CCC- |
| | 10 | Ca | CC | CC |
| 10- | C | C | C | |
| Default | 11 | D | SD/D | DDD/DD/D |
| | 12 | | | |

ANNEXE IV.D

TAUX DE DEFAUT CUMULES A TERME

Les taux de défaut à terme ci-dessous sont exprimés en %.

A titre d'exemple, une contrepartie notée 1 présente un risque de défaut cumulé de 0,90% à un horizon de 10 ans.

| Note BNP PARIBAS | 1 an | 2 ans | 3 ans | 4 ans | 5 ans | 6 ans | 7 ans | 8 ans | 9 ans | 10 ans |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1+ | 0.01 | 0.02 | 0.06 | 0.11 | 0.18 | 0.27 | 0.38 | 0.49 | 0.61 | 0.74 |
| 1 | 0.01 | 0.04 | 0.09 | 0.16 | 0.25 | 0.36 | 0.48 | 0.61 | 0.75 | 0.90 |
| 1- | 0.01 | 0.06 | 0.12 | 0.21 | 0.32 | 0.45 | 0.59 | 0.74 | 0.90 | 1.07 |
| 2+ | 0.02 | 0.08 | 0.16 | 0.27 | 0.41 | 0.56 | 0.72 | 0.89 | 1.08 | 1.27 |
| 2 | 0.03 | 0.11 | 0.22 | 0.36 | 0.52 | 0.70 | 0.88 | 1.08 | 1.29 | 1.51 |
| 2- | 0.04 | 0.14 | 0.29 | 0.47 | 0.67 | 0.90 | 1.15 | 1.39 | 1.65 | 1.92 |
| 3+ | 0.06 | 0.19 | 0.38 | 0.61 | 0.88 | 1.18 | 1.48 | 1.80 | 2.11 | 2.44 |
| 3 | 0.08 | 0.25 | 0.50 | 0.81 | 1.15 | 1.53 | 1.92 | 2.32 | 2.71 | 3.10 |
| 3- | 0.10 | 0.30 | 0.57 | 0.91 | 1.29 | 1.70 | 2.13 | 2.56 | 3.00 | 3.44 |
| 4+ | 0.13 | 0.35 | 0.66 | 1.03 | 1.44 | 1.88 | 2.35 | 2.83 | 3.32 | 3.81 |
| 4 | 0.16 | 0.42 | 0.76 | 1.16 | 1.60 | 2.08 | 2.59 | 3.13 | 3.68 | 4.23 |
| 4- | 0.21 | 0.53 | 0.95 | 1.45 | 2.00 | 2.60 | 3.23 | 3.88 | 4.53 | 5.16 |
| 5+ | 0.26 | 0.66 | 1.18 | 1.81 | 2.51 | 3.25 | 4.02 | 4.81 | 5.59 | 6.30 |
| 5 | 0.33 | 0.83 | 1.47 | 2.26 | 3.14 | 4.06 | 5.01 | 5.96 | 6.88 | 7.70 |
| 5- | 0.48 | 1.25 | 2.24 | 3.40 | 4.62 | 5.84 | 7.01 | 8.15 | 9.22 | 10.16 |
| 6+ | 0.69 | 1.88 | 3.40 | 5.13 | 6.81 | 8.39 | 9.82 | 11.15 | 12.36 | 13.42 |
| 6 | 1.00 | 2.84 | 5.17 | 7.73 | 10.03 | 12.06 | 13.75 | 15.25 | 16.56 | 17.72 |
| 6- | 1.46 | 3.87 | 6.77 | 9.82 | 12.51 | 14.85 | 16.77 | 18.44 | 19.85 | 21.08 |
| 7+ | 2.11 | 5.27 | 8.88 | 12.47 | 15.60 | 18.28 | 20.45 | 22.29 | 23.80 | 25.07 |
| 7 | 3.07 | 7.19 | 11.64 | 15.84 | 19.46 | 22.50 | 24.95 | 26.96 | 28.53 | 29.81 |
| 7- | 4.01 | 8.95 | 14.00 | 18.60 | 22.43 | 25.58 | 28.09 | 30.16 | 31.84 | 33.21 |
| 8+ | 5.23 | 11.13 | 16.83 | 21.85 | 25.86 | 29.07 | 31.63 | 33.75 | 35.53 | 37.00 |
| 8 | 6.82 | 13.86 | 20.23 | 25.65 | 29.82 | 33.05 | 35.61 | 37.77 | 39.65 | 41.22 |
| 8- | 8.06 | 15.65 | 22.19 | 27.63 | 31.78 | 35.04 | 37.65 | 39.90 | 41.89 | 43.62 |
| 9+ | 9.53 | 17.68 | 24.33 | 29.75 | 33.88 | 37.15 | 39.81 | 42.16 | 44.26 | 46.16 |
| 9 | 11.27 | 19.97 | 26.69 | 32.04 | 36.12 | 39.39 | 42.10 | 44.54 | 46.76 | 48.86 |
| 9- | 13.32 | 22.13 | 28.78 | 34.02 | 38.04 | 41.27 | 44.02 | 46.50 | 48.81 | 51.06 |
| 10+ | 15.75 | 24.54 | 31.04 | 36.13 | 40.06 | 43.24 | 46.03 | 48.54 | 50.95 | 53.36 |
| 10 | 18.62 | 27.21 | 33.47 | 38.36 | 42.19 | 45.32 | 48.13 | 50.67 | 53.19 | 55.76 |
| 10- | 21.81 | 30.32 | 36.45 | 41.21 | 44.99 | 48.09 | 50.98 | 53.59 | 56.25 | 59.04 |