

14/77

207

UNIVERSITÉ D'ALGER

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

ET

D'ÉLECTROTECHNIQUE EN SCIENCES EXACTS

THÈSE DE FIN D'ÉTUDES

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHEQUE
SIMULATION ANALOGIQUE

DES
PROCESSUS AUX PARAMÈTRES RÉPARTIS

Proposé par :

L. ZEBROWSKY.

Étudié par :

BOULARAS A.

BENHADDAD N.

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
PROMOTION JUIN 1977
المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHEQUE

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَمَا أَرْسَلْنَا مِنْ قَبْلِكَ مِنْ نَبِيٍّ إِلَّا أَنْزَلْنَا مَعَهُ الْقُرْآنَ وَالْحَقُّ وَالْكَرِيمُ
فَلْيَعْلَمُوا أَنَّهُ هُوَ اللَّهُ الْغَنِيُّ الْغَنِيُّ
فَلْيَعْلَمُوا أَنَّهُ هُوَ اللَّهُ الْغَنِيُّ الْغَنِيُّ

قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ

الْحَقُّ وَالْكَرِيمُ
فَلْيَعْلَمُوا أَنَّهُ هُوَ اللَّهُ الْغَنِيُّ الْغَنِيُّ

UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Departement électricité

PROJET de FIN D'ETUDES

**SIMULATION ANALOGIQUE DES
PROCESSUS AUX PARAMETRES
REPARTIS
.Type parabolique.**

Proposé par :

L. ZEBROWSKY

étudié par :

BENHADDAD - N. E

BOULARAS - A

1 9 7 7

A V A N T - P R O P O S .

Les travaux qui font l'objet de cette thèse, ont été effectués dans le laboratoire du département électricité de l'école nationale polytechnique, et se basent sur les travaux de M^r JABLONSKI [4]
Il sanctionne avant tout cinq années d'études dans la filière électronique et trois mois et demi de travail sur ce sujet .

M^r ZEBROWSKY, maître de conférence, professeur à l'ENPA, a accepté de par-
-raîner nos recherches. Nous lui sommes redevables du grand intérêt qu'il a porté à notre travail et de nous avoir fourni la documentation voulue .
Sa présence dans le jury est pour nous un gage d'estime. Nous lui exprimons nos marques de déférence .

M^r BOUSSEKSOU, enseignant à l'ENPA, nous a conseillé dans nos recherches.
Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude .

Ce travail doit beaucoup à la collaboration scientifique de Messieurs,
DJADANE, HAMDACHE, et ZIANI docteurs es-sciences mathématiques et professeurs du département de mathématiques à l'UNIVERSITE D'ALGER .
Nous sommes heureux de pouvoir les remercier de nous avoir accordé leur confiance .

Une mention spéciale est accordée à M^{elle} BOULARAS F-Z qui a assuré la frappe de ce projet avec une conscience professionnelle on ne peut mieux exemplaire .

Nous remercions aussi toutes les personnes qui ont collaboré de près ou de loin à l'élaboration de ce travail, particulièrement M^{rs} BOUMZAR et LOUHIBI et M^{elle} NOEMY pour leur assistance matérielle .

L'être humain est périssable ainsi que ses remerciements à tous nous prions ALLAH de les remercier éternellement .

BENHADDAD . N

BOULARAS . A

*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*

 E D I C A C E S

*** A mon père et à ma mère, les deux êtres qui m'ont offert au berceau le don le plus précieux : celui de la FOI, et si j'écris aujourd'hui cette thèse c'est grâce à eux .

*** A mon frère KARIM, en témoignage de mon amour fraternel .

*** A la mémoire de mon grand-père paternel et de mon aïeul maternel au contact desquels j'ai appris le sens de la vie .

*** A ma grand-mère paternelle et mes grands parents maternels ainsi qu'à ma famille au sein de laquelle j'ai grandi .

*** A mes amis, auprès desquels j'ai affermi ma personnalité .

BENHADDAD-- . N.E

*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*

II) E D I C A C E S

*** A mon père et à ma mère, les deux êtres qui m'ont offert au berceau le don le plus précieux : celui de la FOI, et si j'écris aujourd'hui cette thèse, c'est grace à eux .

*** A la mémoire de ceux qui ont versé leur sang pour qu'un jour je puisse accéder aux études supérieures .

*** A ma famille , en témoignage de mon affection .

*** A la mémoire de ma soeur L . .

*** A mes frères en l'ISLAM au contact desquels j'ai appris le véritable sens de la vie .

BOULARAS * A .

* TABLE DES MATIERES *

	PAGE
<u>CHAPITRE 0 : INTRODUCTION</u>	1
I: POSITION DU PROBLEME	1
II--ETAT DU PROBLEME	4
III- DEVOIR	5
<u>CHAPITRE I : GENERALITES</u>	7
I-1 - EQUATIONS ELLIPTIQUES	9
I-2 - EQUATIONS PARABOLIQUES	10
I-3 - EQUATIONS HYPERBOLIQUES	13
<u>CHAPITRE II : METHODES DE RESOLUTIONS DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES</u>	15
II-1 - METHODES DE RESOLUTION ANALYTIQUE	15
II-2 - METHODES DE RESOLUTION NUMERIQUE	16
II-2.1 : Methodes explicites	17
II-2.2 : Méthodes implicites	17
II-3 - METHODES DE RESOLUTION ANALOGIQUE	18
II-4 - METHODES DE RESOLUTION HYBRIDE	23
<u>CHAPITRE III : DISCRETISATION</u>	26
III-1 : METHODE AUX DIFFERENCES FINIES	26
III-2 : CRITERE DE SELECTION DES FORMULES D'APPROXIMATIONS	30
III-3 : ERREURS ET CONVERGENCE DE LA METHODE	32
<u>CHAPITRE IV : LE PROBLEME PARABOLIQUE</u>	33
IV-1 : SIMULATION DES PROBLEMES LINEAIRES	34
IV-1.1 : Simulation des processus aux parametres repartis sur reseaux RC	34
IV-1.1.1 : Modèle électrique du processus	34
IV-1.1.2 : Réalisation du modèle réticulaire RC	36
IV-1.1.3 : Modelage des problemes lineaires sur reseau RC homogene	44

IV-1.2 : Simulation des processus a para-	47
-metres répartis sur reseaux RR	
IV-1.2.1:Modele électrique	47
IV-1.2.2:Réalisation du modele elec.	49
IV-2 : LE PROBLEME NON LINEAIRE	53
IV-2.1:Simulation des problemes quasi-	
linéaire sur les reseaux RC	53
IV-2.1.1:La méthodique du procédé	53
IV-2.1.2:Simulation sur des reseaux RC	
avec des éléments non linéaires	56
IV-2.1.3:Simulation sur des reseaux RC avec	
modification des C.I	61
IV-2.1.4:Modelage sur les reseaux RC avec	
modification discrete des C.I	66
IV-2.2 :Simulation des problemes sur des	
reseaux RR homogenes	77
IV-2.2.1La méthodique du procédé	77
IV-2.2.2:Modelage sur les reseaux RR	
homogenes avec C.R de jonction	79
<u>CHAPITRE V : EXEMPLES PRATIQUES</u>	91
V-1 : CONCEPTION DU MODELE	91
V-2 : ESSAIS	93
V-2.1 : Essais linéaires	93
V-2-2 : Simulation chiffrée des modèles réti-	
culaires RR et RC pour la solution des	
equations quasi-linéaires aux D.P	97
V-2.2.1:Expression du probleme	97
V-2.2.2:Analyse des résultats	108
<u>CHAPITRE VI : CONCLUSION</u>	112
<u>BIBLIOGRAPHIE :</u>	117

CHAPITRE 0

I N T R O D U C T I O N

I - POSITION DU PROBLEME

Notion de système : Un système physique est une entité relativement complexe parfaitement délimitée du reste de l'univers caractérisé par des mesures qu'on peut y effectuer.

Les problèmes que rencontre l'ingénieur soit de trois sortes :

- Problème d'Analyses : Les plus fréquents consistent à rechercher la réponse d'un système lorsque l'excitation et le système sont connus.
- Problème d'instrumentations : Recherche de l'excitation lorsque la réponse et le système sont connus.
- Problème de synthèse : Détermination du système lorsque excitation réponse sont connues.

Pour qu'un système fournisse une réponse à une excitation donnée, il convient que l'excitation soit d'une nature physique décelable par le système considéré (l'excitation doit apparaitre sous **une** forme énergétique, capable d'être décelée par le système physique étudié et que celui-ci y répondra soit sous la **même** forme énergétique soit après transformation).

Il convient aussi, de noter la différence qui existe dans la résolution d'un problème par un ingénieur et par un mathématicien. Ce dernier essayera de le résoudre rigoureusement, tandis que l'ingénieur se contentera d'un résultat avec une précision donnée.

- Tout système est défini à partir de ses éléments ou paramètres constitutifs. Ces derniers sont de deux (2) sortes :

• Soit du type "à paramètres localisés" si leur comportement, c'est-à-dire l'utilisation qu'ils font de l'énergie circulant à travers les liaisons qui les connectent aux autres éléments du système est complètement défini en fonction de la relation "excitation réponse" existant entre leurs extrémités.

• Soit du type "à paramètres répartis" si les relations "excitation-réponse" sont considérées non pas pour l'ensemble des éléments mais pour chacun des constituants unitaire de cet élément.

- Les systèmes à paramètres localisés sont systématiquement représentés par des équations ou des systèmes d'équations différentielles du 2° et 4° ordre.

- Les systèmes à paramètres répartis sont représentés par des équations aux dérivées partielles de différentes nature. (Elliptiques, paraboliques, hyperboliques), mais ceci dépend des paramètres c'est-à-dire :

- Dans le cas où les 3 types de paramètres classifiés en : paramètres de dissipation d'énergie, paramètre d'accumulation d'énergie potentielle, paramètre d'accumulation d'énergie cinétique, ne sont pas fonctions des variables dépendantes.

Dans le cas contraire, des complications sont introduites sans pour cela infirmer les règles générales.

- Seront appelées variables dépendantes, les variables dont l'évolution est fonction d'une ou de plusieurs autres variables.

- Les variables dépendantes peuvent être classées en deux catégories :

• Variables référencées ou de "différences" : caractérisent l'état physique du système par rapport à un certain état de référence.

Exemple : Température, potentiel.

• Variables non référencées : sont mesurées d'une façon absolue.

- Seront appelées variables indépendantes, les variables par rapport auxquelles évoluent les variables dépendantes.

- L'étude du comportement d'un système physique en tant que système est très difficile voire impossible car il faudrait avoir accès à l'intérieur du système qui forme généralement un tout indissociable.
- Par exemple trouver la température d'un four en un point donné en un temps donné est impossible une fois le dispositif mis en marche.

Trouver la pression au centre d'un mur en béton est impossible car il faudrait détruire le mur d'ou détruire le système.

De même aussi pour analyser un système : trouver la fonction d'entrée qui donnerait l'excitation voulue est difficile aussi. C'est pour cette raison que l'ingénieur est amené à simuler le système.

- C'est à dire dans une première étape traduire le comportement du système sous forme mathématique auquel pourront alors être appliquées les méthodes générales d'analyse théorique.
- Dans une seconde étape, il faudra disposer d'un modèle électronique permettant de simplifier la résolution de ces ensembles mathématiques qui sont des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles.
- C'est donc dans le cas très général des problèmes d'analyse que la résolution sur modèle électronique des équations différentielles trouvera son importance.
- Les problèmes relatifs aux systèmes à paramètres répartis sont traités actuellement de deux manières :
 - Méthodes empiriques d'identification : on ramène le système à paramètres répartis à un système à paramètres localisés.
 - Traitement mathématique direct des équations aux dérivées partielles mettant en oeuvre les modèles électroniques. Les résultats seront acquis en s'appuyant sur la théorie et l'expérience.

Les moyens dont on dispose pour les résoudre relèvent du calcul analytique, numérique, analogique et hybride.

II-ETAT DU PROBLEME

La résolution des équations aux dérivées partielles par les méthodes numériques et analogiques et parfois même analytique nécessitent une discrétisation des variables.

- Les travaux pour la résolution par la méthode numériques ont été entrepris par RICHARDSON (1910) qui a proposé un schéma explicite aux différences finies complètement instable.

Ensuite SOUTHWELL (1940) utilisant aussi les différences finies "avant" conduisait à un schéma conditionnellement stable.

GRANK et NICOLSON (1947) ont proposé un schéma "implicite" (utilisant les différences "arrières" et "moyennes" qui donnait une méthode inconditionnellement stable.

En 1952, LIEBMAN proposait un schéma utilisant les différences finies et utilisant un réseau de résistances.

En 1956, une méthode aux éléments finis a été mise en place pour étudier les points de distribution des contraintes dans les structures.

Pour ce qui est de la résolution par la méthode analogique BEUKEN a mis en oeuvre un modèle utilisant un réseau R.C.

De grandes machines ont été utilisées sur le principe d'imposer des conditions aux limites et initiales et d'enregistrer les potentiels solutions du problème.

Ces dispositifs ont été utilisés par KAYAN, V PASCHKIS aux Etats Unis et par l'Institut Français du Pétrole, l'ONERA etc.. en France et ce pour les domaines linéaires.

C'est à propos de l'étude concernant les échanges transitoires de chaleur dans la paroi d'une tuyère de fusée que MIROUX a été amené à étudier un appareil permettant de résoudre des problèmes thermiques non stationnaires et d'apporter d'intéressants perfectionnement technologiques.

PAKLEZA au LIMSIS a entrepris des travaux pour developper des méthodes de simulation de phénomènes thermiques transitoires en présence de conditions d'échanges non linéaires. Un simulateur a été réalisé en 1968 et depuis il a reçu de nombreux perfectionnements. Etant de conception modulaire, l'association des éléments de base se faisant en fonction du problème a étudier.

- Enselme et GAUBERT ont réalisé eux aussi un réseau constitué de résistances fixes et d'ensembles électroniques qui permettent de faire varier C en fonction de V suivant une loi donnée. Ce réseau parallèle permet de résoudre l'équation de la chaleur.

Plus antérieurement RENARD et TA PHUOC LOC au LIMSIS ont réalisé un ensemble de réseaux R.C comprenant des opérateurs de calcul analogique a chaque noeud pour traduire le phénomène de la non linéarité.

III - DEVOIR

Notre travail consiste en la résolution par la méthode analogique d'une équation aux dérivées partielles du type parabolique, présentant un type de non linéarité particulier.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[D \psi \frac{\partial \psi}{\partial X} \right] = \frac{GA}{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial E} \quad (0.1)$$

A cette équation nous appliquerons les transformations de KIRCHOFF et de GOODMAN.

Transformation de KIRCHOFF :

L'équation est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + F(x) = b(x, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (0.2)$$

Transformation de KIRCHOFF :

On pose $d\theta = k(x, \varphi) \cdot d\varphi$ (0.3)

On obtient $\theta = \int_{\varphi_0}^{\varphi} k(x, \varphi') d\varphi'$ (0.4)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + F(x) = g(x, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} ; (0.5) \text{ avec } g(x, \theta) = \frac{b(x, \varphi(\theta))}{k(x, \varphi(\theta))} ; (0.6)$$

Transformation de GOODMAN :

on pose : $d\phi = b(x, \varphi) \cdot d\varphi$ (0.7)

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, \phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + F(x) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (0.8)$$

avec :

$$f(x, \phi) = \frac{k(x, \varphi(\theta))}{b(x, \varphi(\theta))} ; \quad (0.9)$$

CHAPITRE I - GENERALITES

Types des équations aux D.P.

Tout système dont les excitations et les réponses sont mesurables, peut être mis en équation en utilisant les deux seuls principes de conservation et de continuité.

- Principe de conservation :

Il exprime que lorsqu'une quantité physique est appliquée à un système, la valeur totale de cette quantité existante, à partir de cet instant, à l'intérieur, est égale à la somme de la quantité ainsi ajoutée (ou soustraite) et de la quantité initialement présente à l'intérieur du système.

- Principe de continuité :

Complémentaire du précédent, il doit être appliqué aux variables **non référencées** et peut s'énoncer comme suit :

"Dans tout système physique, la variable non référencée est continue et doit provenir d'une source d'énergie (excitation intérieure ou extérieure au système) et retourner à la même source d'énergie ou tout autre source de même nature".

Nous avons vu que les systèmes à paramètres répartis sont régis par des équations aux dérivées partielles. Ces dernières sont de trois (3) types :

1°) - Les Equations **elliptiques** : qui seront de la forme :

$$\operatorname{div} \left[\vec{K} \cdot \operatorname{grad} \varphi \right] = \lambda \varphi + \lambda' \quad (1.1)$$

2°) - Les Equations **paraboliques** qui seront de la forme :

$$\operatorname{div} \left[\vec{K} \cdot \operatorname{grad} \varphi \right] = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda_1 \varphi + \lambda' \quad (1.2)$$

3°) - Les Equations hyperboliques qui sont de la forme :

$$\operatorname{div} \left[K \cdot \vec{\operatorname{grad}} \psi \right] = \lambda_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \lambda_3 \psi + \lambda_4 \quad (1.3)$$

Nous distinguons deux (2) cas :

- Cas linéaire : - Homogène lorsque les paramètres du système sont constant.
 - Non homogène lorsque les paramètres du système sont fonction des variables d'espaces uniquement.

- Cas non linéaire :- Lorsque les paramètres du système sont fonctions et des variables d'espace et de la grandeur considérée ψ

C'est ce cas là que nous allons étudier dans les chapitres suivants, car les équations aux D.P. linéaires qui régissent des systèmes limités par des contours réguliers, sont facilement résolubles par la méthode analytique d'où il n'y a pas grand intérêt à simuler des systèmes régis par de telles équations.

EXEMPLE :

La donnée d'une seule équation (1.2) ne suffit pas à déterminer entièrement le système physique régi par la dite équation; il faut encore donner son état à l'instant initial $t = 0$ (en plus l'état de sa dérivée à l'instant $t = 0$).

Ces conditions que doit vérifier la fonction ψ pour $t = 0$, sont les conditions initiales.

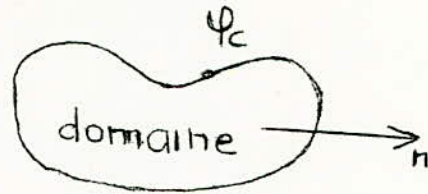
Si le système est limité par un contour C on aura également sur ce contour une condition aux limites qui peut varier selon les données physiques.

Parmi celles-ci, les plus classiques sont les conditions aux limites linéaires, elle peuvent être :

- Soit de DIRICHLET :

Connaissance de la fonction en tout point du contour.

$$\varphi_c(x, y, z) = f(x, y, z, t)$$



- Soit de NEUMANN :

Connaissance de la dérivée normale de la fonction en tout point du contour.

$$\frac{\partial \varphi_c(x, y, z)}{\partial n} = f(x, y, z, t)$$

- Soit de FOURIER :

Connaissance d'une forme linéaire de la valeur de φ et de $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ en tout point du contour. $\varphi_c(x, y, z) + \frac{\partial \varphi_c}{\partial n}(x, y, z) = f(x, y, z, t)$

n : Etant la direction normale à ce contour.

Par ailleurs, on suppose connues les C.I. à l'intérieur du domaine.

I-1. EQUATIONS ELLIPTIQUES

Les équations aux dérivées partielles du type elliptique caractérisent

- soit les champs physiques qui ne sont constitués que d'un seul type d'éléments ou paramètre, c'est-à-dire qui ne comportent que :

- . Des éléments dissipateurs d'énergie
- . Des éléments accumulateurs d'énergie potentielle
- . Des éléments accumulateurs d'énergie cinétique.

- Soit certains champs contenant à la fois :

- . Des éléments dissipateurs d'énergie et l'un des éléments accumulateurs d'énergie, sous réserve que les phénomènes transitoires et qu'un régime permanent existent.

Les champs physiques ne comportant qu'un seul type d'élément s'appliquent à des domaines tels que :

- L'électrostatique
- Le magnétisme
- La gravitation.

ou éventuellement caractérisent la distribution d'un potentiel de vitesse dans certains phénomènes de mécanique des fluides.

Les champs physiques de la 2ème catégorie mentionnée précédemment s'appliquent par exemple :

- Soit à une distribution de température en régime permanent dans un milieu conducteur,
- Soit à un potentiel de vitesse dans un milieu poreux contenant un fluide compressible. Ceci bien entendu en régime stabilisé.

Il convient enfin de noter que les champs (physiques) dont le comportement est régi par des équations elliptiques permettent généralement une définition très précise des conditions aux limites, qui pourront être, comme il a été indiqué précédemment :

- Soit de DIRICHLET
- Soit de NEUMANN
- Soit de FOURIER.

I - 2 - EQUATIONS PARABOLIQUES

Les équations paraboliques constituent la famille la plus importante gouvernant les phénomènes transitoires ; d'après la forme de ces équations (équation n° 1.2) il serait possible de dire que les domaines de la physique régis par des équations paraboliques correspondront à des champs dont la divergence est proportionnelle, en particulier, à la dérivée première de la fonction / temps.

Les équations aux dérivées partielles du type paraboliques caractérisent le comportement dynamique de tous les **champs** physiques qui contiennent un paramètre de dissipation d'énergie, aussi bien que l'un des deux paramètres d'accumulation d'énergie soit potentielle, soit cinétique. (dans de tels systèmes, le temps est une variable indépendante).

Cette remarque fondamentale permettra, après examen de la nature des éléments ou paramètre existant dans le système physique à étudier, de connaître la forme générale de l'équation aux dérivées partielles qui en caractérise le fonctionnement.

Les équations paraboliques sont aussi très généralement appelées "équation de diffusion" du fait qu'elles permettent de décrire l'évolution de particules de fluides dans le milieu correspondant.

Parmi les principaux domaines de la physique régis par de telles équations, il convient de citer :

a) - THERMIQUE .

Les problèmes de transfert de chaleur comportent systématiquement l'existence de résistances thermiques et de capacités thermiques.

Comme la deuxième loi de la thermo dynamique prohibe l'existence d'éléments ou paramètres accumulateurs d'énergie cinétique, c'est à dire l'existence de réservoirs de flux dans des systèmes de transfert de chaleur le phénomène de la conduction thermique est invariablement gouvernée par l'équation de la diffusion ou l'une de ses formes modifiées.

La température est alors la fonction potentielle, tandis que le flux thermique est la variable non référencée.

Il convient de remarquer que l'analyse des systèmes de transfert de chaleur est fréquemment compliquée par des non-linéarité intervenant dans l'ensemble des paramètres, c'est à dire que la conductivité thermique et la chaleur spécifique sont des fonctions de la température.

L'application d'énergie thermique aux frontières du milieu régi par une telle équation, peut être du type conduction, soit du type convection, soit du type radiation.

b)- MECANIQUE DES FLUIDES EN MILIEU POREUX

En mécanique des fluides, la viscosité est le paramètre de dissipation, tandis que l'inertie et la compressibilité constituent respectivement des paramètres d'accumulation d'énergie potentielle et accumulateurs d'énergie cinétique.

Lorsque les fluides sont contraints de circuler à travers des canaux correspondants aux phénomènes de capillarité dans les milieux poreux, les forces de viscosité résultant de la friction du fluide contre les parois des pores, sont plus importantes que les forces d'inertie à telle enseigne que celles-ci peuvent être alors négligées.

Sous réserve que le fluide soit compressible, comme dans le cas d'huile avec gaz dissout, l'écoulement du fluide est gouverné par l'équation de diffusion.

La conductivité du fluide, appelée généralement perméabilité, est fréquemment une fonction grandement non linéaire de la vitesse de potentiel, ainsi que d'autres variables dépendantes. Fréquemment en résolvant les problèmes correspondant aux réservoirs de pétrole, il est nécessaire de considérer deux ou trois fluides différents tels que gaz, huile, eau en analysant simultanément les phénomènes correspondants.

Une complication complémentaire dans une telle étude est due à la géométrie d'un champ qui n'est, de façon générale, pas connue avec précision, ainsi qu'au fait que les paramètres varient de façon irrégulière, aussi bien en fonction de la profondeur que de la surface du domaine.

c)- DIFFUSION DE PARTICULES ELEMENTAIRES

Les phénomènes de diffusion de particules élémentaires, soit dans l'air, soit dans tout autre fluide, sont aussi très généralement gouvernés par les équations aux dérivées partielles du type parabolique.

Les problèmes de l'ingénieur dans ce domaine impliquent la détermination de ces particules diffusées en fonction de la distance de la source ~~emis-~~
~~sive~~ et de ces particules en fonction du temps.

Les solutions de tels problèmes apparaissent sous forme de familles de courbes, présentant le potentiel en fonction du temps en certains points placés à des intervalles discrets à l'intérieur du champ. Occasionnellement, les valeurs de la distribution du potentiel le long d'une coordonnée à des intervalles discrets de temps, peuvent être utiles à la compréhension du phénomène.

- 3. EQUATIONS HYPERBOLIQUES

Les équations hyperboliques sont associées aux phénomènes de vibration et aux phénomènes de mouvement ondulatoire : on les appelle généralement "équation d'onde".

D'après leur forme (équation n° 1.3), il est possible de dire que les domaines de la physique régie par de telles équations correspondent à des champs dont la divergence est proportionnelle, en particulier, à la dérivée seconde de la fonction / temps.

Les champs physiques dont le comportement est représenté par les équations hyperboliques sont caractérisés par :

- Le fait que le temps est une variable indépendante
- La réponse à toute excitation se présente sous forme oscillatoire.

Dans le cas de présence de dissipateur d'énergie thermique, la réponse oscillatoire est de type "amorti".

Les domaines de la physique régis par de telles équations sont principalement les suivants :

- Electrodynamique supasonique
- Acoustique quantique
- Acoustique, et plus généralement propagation d'ondes dans les milieux compressibles.
- Propagation des signaux électriques dans les lignes
- Propagation des ondes e. m. à travers l'espace et dans les guides d'ondes.
- Comportement de membranes élastiques.

Parmi les problèmes régis par les équations hyperboliques, deux grandes catégories doivent être distinguées. D'une part, les problèmes transitoires dans lesquels il convient de déterminer les variables de potentiel et de flux du système en fonction du temps, et ceci en des points donnés du domaine; d'autre part, les problèmes conduisant à l'aboutissement du régime permanent périodique, dans lesquels il est seulement nécessaire de déterminer certaines caractéristiques de fréquence..

Le cas le plus complexe correspond bien évidemment à l'étude des problèmes transitoires, ce qui impose de préciser sans ambiguïté les points suivants :

- Structures et limites du système.
- Paramètres du système qui peuvent être non-linéaires, en fonction d'un temps ou en fonction des variables indépendantes d'espace.
- Deux conditions initiales pour chaque point, à l'intérieur d'un champ à l'instant $t = 0$. Ces conditions initiales peuvent consister dans la connaissance de la fonction et de ses dérivées par rapport au temps en tous les points du champ.
- Conditions aux limites qui comportent soit la connaissance des lignes équipotentiellles, soit la connaissance de lignes de courant, soit la connaissance de lignes pour lesquelles la dérivée normale du potentiel est une fonction du potentiel existant aux limites.
- La distribution interne des excitation qui peuvent être fonction du potentiel dans le temps ou de la position à l'intérieur du champ.

CHAPITRE II - METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS

AUX DERIVEES PARTIELLES

II - 1. METHODES DE RESOLUTION ANALYTIQUES

Le problème étudié est décrit par une équation aux dérivées partielles du type :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2D\psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = \frac{6A}{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2-1)$$

ou A, B, D = constantes positives .

Après transformation de KIRCHOFF l'équation devient : $\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{2A\theta}{B} \frac{\partial \theta}{\partial t}$

$$\begin{aligned} x \in]0, S[\quad & \text{avec } \theta(0, t) = \theta(S, t) = 0 \\ & \text{et } \theta(x, 0) = \frac{A}{K} (Sx - x^2) \end{aligned} \quad (2-2)$$

on sait que ce problème admet une solution analytique :

$$\theta(x, t) = \frac{A}{K+Bt} (Sx - x^2) \quad (2-3)$$

et 2.1 à la solution :

$$\text{(voir [4])} \quad \psi = \left(\frac{B}{D} \cdot \theta \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.4)$$

La nature de l'équation est du type parabolique non linéaire du 2° degré.

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = c \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

La résolution classique de cette équation dans des espaces de SOBOLEV n'est pas un résultat classique, du fait de la non linéarité de l'opérateur intervenant.

Les méthodes générales qui peuvent être utilisées compte tenu des informations que l'on a sur l'opérateur sont :

- 1°) - Le coefficient de non linéarité de A est simple
(multiplication par ψ de $\frac{\partial \psi}{\partial x}$).

Cette non linéarité permet de classer d'une manière plus précise l'équation qu'on étudie dans l'équation du type quasi linéaire.

Les techniques utilisées en général sont :

- Méthode de compacité i-e recherche d'estimation à priori pour ψ (c'est à dire choix du cadre fonctionnel).

- Méthode de monotonie i-e vérifier que $(A.U - Av, U-V) \gg 0$ (espace convenable).

Ce qui est vrai si on impose $\psi \geq \delta$ presque partout.

- Une méthode itérative du type
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\psi^{n-1} \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \right] = \frac{\partial \psi^n}{\partial t} \quad (2.5)$$

Conjugé avec une méthode de compacité $\|\psi^n\| \leq M$ ψ_0 donné.

- Mettre en oeuvre une méthode numérique du type FAEDO-GALERKIN en choisissant une base convenable d'espace sur lequel on travaille. Ces techniques sont détaillées dans [7].

II - 2. METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE

Pour traiter des problèmes régis par des équations aux dérivées partielles sur calculateur numérique toutes les variables doivent être discrétisées.

La méthode consiste à remplacer l'équation aux dérivées partielles par une équation approchée.

En fonction des méthodes d'approximation utilisées, les méthodes de résolution pourraient être de deux(2) sortes :

- Méthodes explicites
- Méthodes implicites.

2.2.1- Méthodes explicites :

Caractérisées par le fait que les variables dépendantes à l'instant $t + \Delta t$ sont exprimés en fonctions des potentiels connus à l'instant antérieur à t . Il n'est pas nécessaire d'effectuer d'itérations. Elles conduisent à des méthodes conditionnellement stables. Ce qui limite l'amplitude de l'incrément δt et conduisent à un grand nombre de cycles de calcul.

Les critères de stabilité et de précision appliqués aux problèmes homogènes ou quasi-linéaires mènent à des temps de calcul très long et à une stabilité dans certaines régions seulement du domaine considéré.

Il faut aussi remarquer que lorsque δt décroît, cela ne veut pas dire que la précision augmente. Ceci montre l'intérêt des méthodes implicites inconditionnellement stables.

2.2.2- Méthodes implicites : (problèmes unidimensionnels)

Dans les techniques du type implicite, le potentiel inconnu au point de coordonnées x et $t + \Delta t$ est exprimé en fonction du potentiel connu à l'instant t aussi bien qu'en fonction du potentiel inconnu correspondant à l'instant $t + \delta t$. L'utilisation des équations aux différences finies destinées à fournir une approximation de l'équation aux dérivées partielles paraboliques à résoudre conduit bien évidemment à une complication non négligeable de la programmation, mais ceci en faveur de l'obtention d'une stabilité inconditionnelle. Ce qui permet de choisir une valeur de δt plus grandes relativement aux méthodes explicites.

Les temps de calculs sont multipliés par 4.

Ces méthodes mènent à la résolution d'un système d'équations algébriques d'un même nombre que les noeuds du maillage.

Elles permettent aussi dans une certaine mesure, de contrôler l'espace de variation t et l'erreur de troncature.

II- 3. LES METHODES DE RESOLUTION ANALOGIQUES

On distingue deux analogies :

Une première analogie physique qui consiste à présenter un système physique réel et un même système physique mais en un modèle beaucoup plus réduit.

Exemple : Le laboratoire d'hydraulique reprend un système hydraulique réel en un autre plus petit.

- Une analogie mathématique qui utilise une correspondance entre les éléments d'un système physique réel et les éléments d'un système équivalent qui aurait le même comportement devant des causes semblables présentées sous une autre forme d'énergie. Les deux systèmes sont représentés par la même équation mathématique.

- Pour le traitement des équations aux dérivées partielles du type parabolique, les variables doivent être discrétisées en utilisant une méthode aux différences finies.

METHODES DES DIFFERENCES :

Consistent à discrétiser une ou plusieurs variables indépendantes de façon à ne faire intervenir dans les calculs qu'un nombre fini de points, On distingue deux méthodes :

- Méthodes utilisant une discrétisation du type D.S.D.T.

Soit l'équation :
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = K \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.6)$$

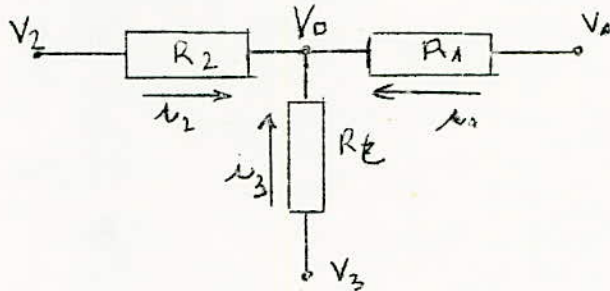
En utilisant les opérateurs de différences on obtient :

$$\frac{1}{\delta x^2} \left[\varphi_{x+\delta x, t+\delta t} - \varphi_{x, t+\delta t} \right] + \frac{1}{\delta x^2} \left[\varphi_{x-\delta x, t+\delta t} - \varphi_{x, t+\delta t} \right] = \frac{K}{\delta t} \left[\varphi_{x, t+\delta t} - \varphi_{x, t} \right]$$

qu'on met sous la forme :
$$\frac{1}{\delta x^2} \left[\varphi_{x+\delta x, t+\delta t} - \varphi_{x, t+\delta t} \right] + \frac{1}{\delta x^2} \left[\varphi_{x-\delta x, t+\delta t} - \varphi_{x, t+\delta t} \right] + \frac{K}{\delta t} \left[\varphi_{x, t} - \varphi_{x, t+\delta t} \right] = 0 \quad (2.7)$$

qui comporte trois différences par rapport à : $\varphi_{x, t+\delta t}$

Le principe de cette méthode consiste à concevoir schéma électrique analogue au processus décrit par l'équation. On considère le schéma suivant :



En appliquant la loi de KIRCHOFF pour le noeud on a :

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad \frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} + \frac{V_3 - V_0}{R_t} = 0 \quad (2.8)$$

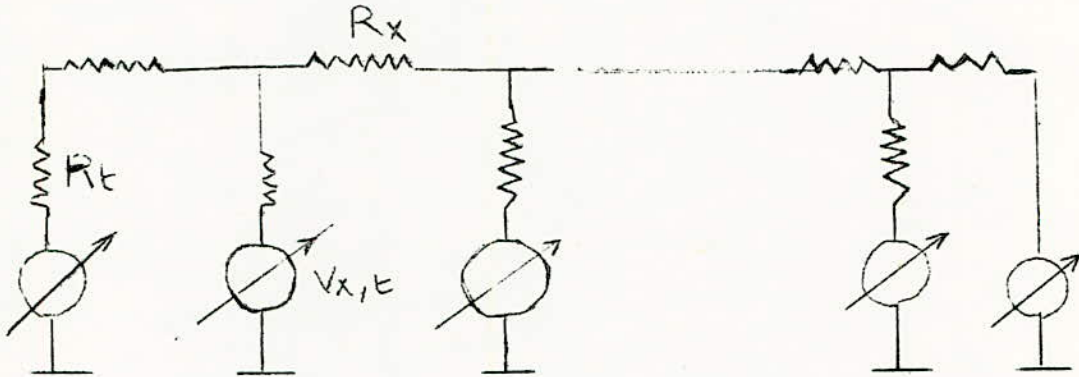
Equation analogue à (2.7) et on a les analogies suivantes, en comparant les deux (2) équations :

$$\begin{aligned} \varphi_{x, t+\delta t} &= V_0 & \delta x^2 &= R_1 \\ \varphi_{x+\delta x, t+\delta t} &= V_1 & \delta x^2 &= R_2 \\ \varphi_{x-\delta x, t+\delta t} &= V_2 & \frac{\delta t}{K} &= R_t \\ \varphi_{x, t} &= V_3 & & \end{aligned}$$

Il est ainsi possible de constituer un réseau maillé résistif tel que, en appliquant les potentiels connus à l'instant t sous forme de tensions électriques continues, les potentiels à l'instant $t + \delta t$ sont déterminés en mesurant la tension en chacun des noeuds de ce réseau maillé.

De ce fait pour résoudre une équation du type (2.6) on utilisera le schéma électrique suivant, dans lequel une source de tension est appliquées à chacune des extrémités des résistances du type R_t .

Chacune de ces tensions correspondant à la valeur de la variable dépendante au noeud correspondant à l'instant t , les mesures sur le noeud fournissent les valeurs de la variable dépendante à l'instant $t + \delta t$.



De ce fait, les opérations à effectuer sont les suivantes :

- 1- Construction d'un réseau maillé par connexion de résistances tel que le montre le schéma. Chacune des résistances R_x a une amplitude proportionnelle au carré de la distance entre deux noeuds entre lesquels elle est connectée. Chaque résistance R_t a une amplitude proportionnelle à $\frac{\delta t}{K}$
- 2- Les tensions d'alimentation $V_{X,t}$ sont proportionnelles à la condition initiales correspondante en chacun des points du maillage.
- 3- Les sources de tension sont appliquées aux extrémités du réseau correspondant aux points : $X = 0$ et $X = N$ et correspondant aux conditions aux limites pour $t = \delta t$.
- 4- Les tensions apparaissent en chacun des noeuds sont mesurées.
- 5- Les tensions $V_{X,t}$ sont modifiées de façon à prendre une valeur égale aux tensions relevées en chacun des noeuds.
- 6- Les potentiels correspondant aux conditions aux limites sont ajustés pour correspondre aux conditions aux limites spécifiques de l'incrément temporel suivant :

7- Les potentiels apparaissant aux noeuds du réseau sont mesurés.

8- La procédure est répétée jusqu'à ce que le domaine complet de variation de la variable indépendante temporelle ait été explorée.

- Méthodes comportant l'utilisation d'une discrétisation D S C T.
L'équation (2.6) à laquelle on applique les différences finies en discrétisant l'espace seulement donne :

Comme pour la méthode précédent, on utilise un schéma électrique analogue qui sera :

$$\frac{\psi_{x+\delta x}(t) - \psi_x(t)}{\delta x^2} + \frac{\psi_{x-\delta x}(t) - \psi_x(t)}{\delta x^2} = K \frac{\partial \psi_x(t)}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\frac{V_1(t) - V_0(t)}{R_1} + \frac{V_2(t) - V_0(t)}{R_2} = C \frac{dV_0(t)}{dt} \quad (2.10)$$

et en identifiant avec l'équation aux différences finies on a :

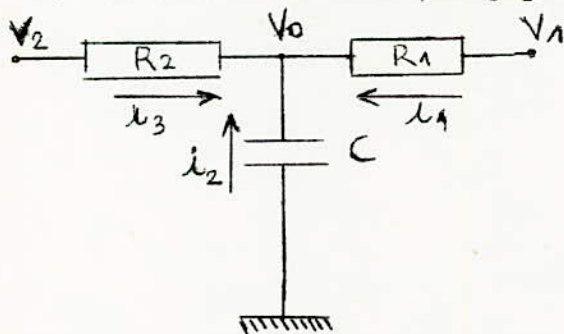
$$\psi_x(t) = V_0(t) \quad \delta x^2 = R_1$$

$$\delta x^2 = R_2$$

$$\psi_{x+\delta x}(t) = V_1(t)$$

$$\psi_{x-\delta x}(t) = V_2(t) \quad K = C$$

et on aura le schéma analogique électrique suivant :



$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$

$$i_1(t) = \frac{V_1(t) - V_0(t)}{R_1} \quad (2.11)$$

$$i_2(t) = \frac{V_2(t) - V_0(t)}{R_2}$$

$$i_3(t) = C \frac{dV_0(t)}{dt}$$

De ce fait on aura les opérations suivantes :

- 1- Réalisation d'un réseau électrique composé de résistances R_x et de capacités .. R_x proportionnelle à x^2 et C proportionnelle à K , sans oublier le facteur d'échelle permettant d'étudier une variable temporelle sur un calculateur analogique.
- 2- Chaque capacité est chargée d'une valeur initiale correspondant à la condition initiale du point du maillage géométrique.
- 3- Les sources de tension sont appliquées aux extrémités du réseau pour simuler les conditions aux limites. Ces sources pouvant être soit fixes, soit transitoires.
- 4- L'enregistrement de la tension en chacun des noeuds est effectué en tenant compte du fait que cette tension varie en fonction du temps.
- 5- Interprétation des réponses et tension en chacun de ces points, cette interprétation nécessitant en particulier le retour aux échelles temporelles correspondant aux phénomènes physiques.

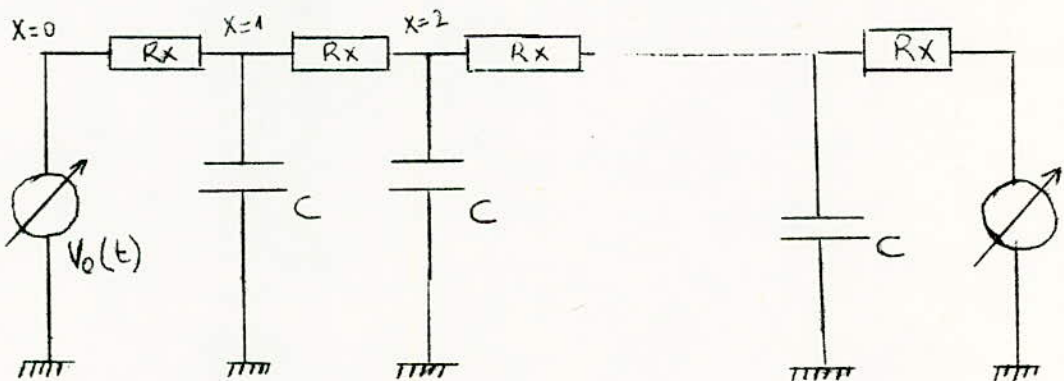


Schéma Analogique électrique RC .

II-4 - METHODES DE RESOLUTION HYBRIDE

Les méthodes analogiques et les méthodes numériques ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients.

Les méthodes analogiques ont pour principal avantage, la rapidité comme inconvénient la difficulté pour résoudre, simplement et économiquement les problèmes non linéaires. Les méthodes basées sur l'utilisation des calculateurs numériques, ont pour avantage dominant une plus grande facilité de prise en compte des problèmes non-linéaires et comme inconvénient majeur le temps et par conséquent, le coût des calculs.

C'est de ces constatations qu'est née, il ya une vingtaine d'années l'idée d'associer les calculateurs numériques et analogiques en profitant de leurs avantages spécifiques pour constituer des calculateurs hybrides.

- PRINCIPE

Un calculateur hybride a la structure représentée sur la (figure). Le déroulement des opérations complexes qu'il convient d'assurer est le suivant :

a) - Un calculateur analogique convenablement agencé et alimenté fournit automatiquement et presque instantanément en chacun de ses noeuds, le résultat d'opérations élémentaires intéressant tout ou partie de l'équation aux dérivées partielles.

Ces informations doivent tout d'abord être recueillies sélectivement, noeud par noeud, et transmises à une cadence appropriée par une commutation de lecture à l'autre d'un convertisseur analogique numérique.

b) - Traduites en numériques, ces informations sont envoyées dans l'ordinateur où sont effectuées diverses opérations plus ou moins importantes, suivant le rôle dévolu au numérique.

- c)- A la sortie de l'ordinateur, un convertisseur numérique analogique (C.N.A.) transforme les données numériques en quantités électriques.
Par l'intermédiaire d'une commutation d'affichage, ces quantités électriques sont adressées sélectivement aux systèmes d'injection associés à chaque noeud.
- d)- Le cycle est répété autant de fois qu'il est nécessaire, exactement comme pour l'application de la méthode analogique.

REMARQUE

Bien que le réseau à résistances soit le ~~calculateur~~ analogique le mieux adapté (rapport prix sur performances) à la résolution du type d'équations qui nous intéresse, W.J. KARPLUS a proposé un calculateur hybride basé sur la liaison d'éléments analogiques à courants continus avec un ordinateur.

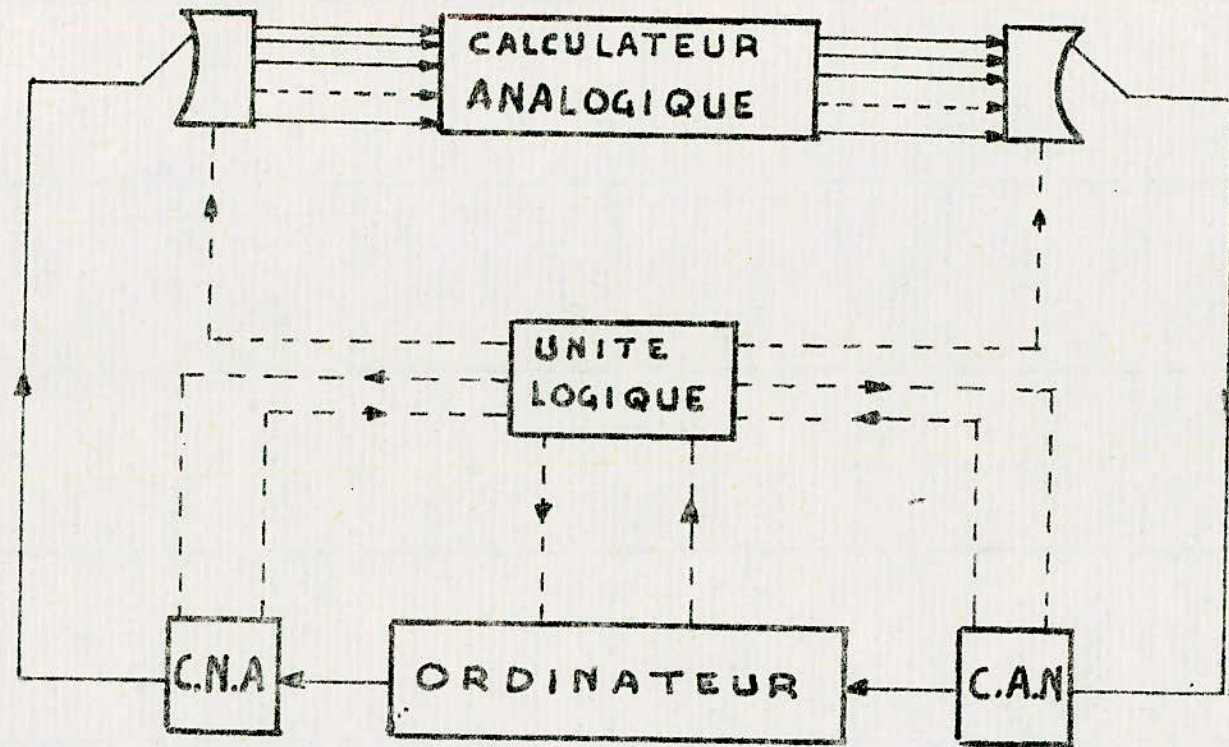


Schéma bloc d'un système hybride.

CHAPITRE III- DISCRETISATION

III-1-LA METHODE AUX DIFFERENCES FINIES

Dans toutes les méthodes pratiques de résolutions d'équations aux dérivées partielles que ce soit par la méthode numérique, analogique ou même analytique, intervient la notion de discrétisation c'est-à-dire la recherche de la solution du problème en un nombre limité de points du domaine régi par l'équation aux dérivées partielles considérées.

Les opérateurs de différentiation sont remplacés par des opérateurs de différence et les domaines de variation des variables indépendantes continues X, Y, Z, T par un ensemble de valeurs discrètes de points appelés noeuds du système.

Pour le problème unidimensionnel que nous considérons, on considère deux (2) méthodes de discrétisation (D S C T et D S D T) :

- D S C T : La variable d'espace seule est discrétisée. La variable temporelle est continue.

- D S D T : Discrétisation de la variable d'espace et de temps.

L'utilisation des opérateurs de différence permet de remplacer l'équation aux dérivées partielles à résoudre par un système d'équations algébriques dans lequel la variable dépendante est exprimée en chacun des noeuds du maillage en fonction de la valeur de cette variable aux noeuds adjacents.

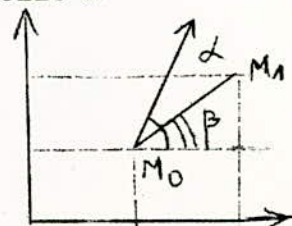
- Différence entre opérateur de différentiation et opérateur de différence

Pour une fonction de la variable unidimensionnelle x

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$t_{g\alpha} = \frac{df(x)}{dx} \quad t_{g\beta} = \frac{f(x)}{x}$$



Le fait de remplacer l'opérateur de différentiation par un opérateur de différence conduit à une approximation. De ce fait, on est amené à considérer la précision, l'erreur et convergence du processus s'il y a lieu.

L'approximation est donnée par la formule de TAYLOR:

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot \frac{df(x_0)}{dx} + (x_1 - x_0)^2 \cdot \frac{d^2f(x_0)}{2!dx^2} + \dots \quad (3.1)$$

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \mathcal{E}(x) = \frac{\delta f}{\delta x} + \mathcal{E}(x) \quad (3.2)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = - \frac{f(x)}{x} = \mathcal{E}(x) ; \quad \mathcal{E}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x_1 - x_0)^i}{i!} \frac{d^{i+1}f(x)}{dx^{i+1}} \quad (3.3)$$

plus $X_1 - X_0$ sera faible plus $\frac{\delta f(x)}{\delta x}$ sera comparable à $\frac{df(x)}{dx}$.

Dans le cas de la résolution des équations aux dérivées partielles du type parabolique, il convient de définir des approximations valables pour trois types de dérivées partielles :

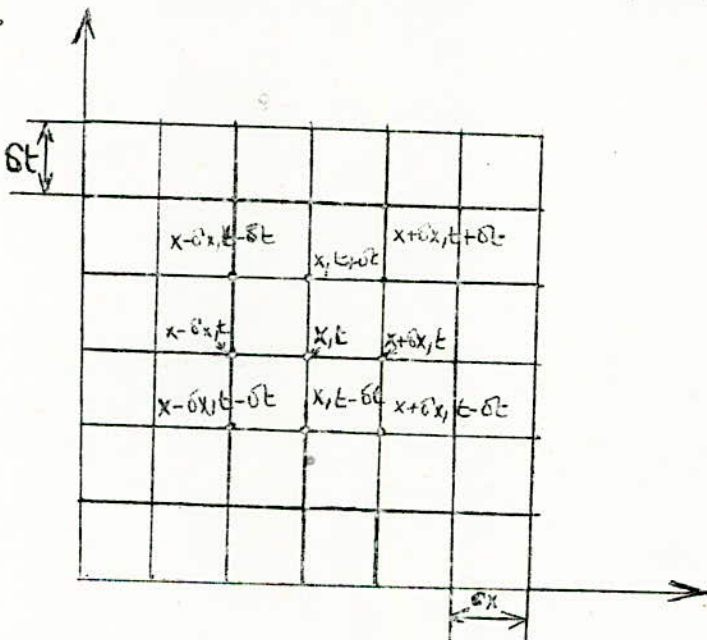
- Dérivées secondes de la fonction potentielle par rapport aux variables d'espaces.
- Dérivées premières de la fonction potentielle par rapport aux variables d'espaces.
- Dérivée première de la fonction potentielle par rapport à la variable temporelle.

La première étape dans l'obtention d'approximations aux différences finies pour toute équation aux dérivées partielles du type parabolique, implique la définition d'un maillage géométrique.

La discussion est facilitée s'il est supposé que les points adjacents dans les directions x et t sont à des distances égales les uns des autres, et séparés par des intervalles δx et δt .

La deuxième étape consiste à choisir parmi les différentes formules permettant de remplacer les opérateurs aux dérivées partielles par des opérateurs de différence.

Il est possible alors de prendre des opérateurs de différence du 2ème ordre utilisant des points du domaine symétriques par rapport au point considéré.



Les développements en série de TAYLOR donnent :

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{\delta x^2} [\varphi_{i+1,k} - 2\varphi_{i,k} + \varphi_{i-1,k}] - \frac{\delta x^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_{x,t} - \frac{\delta x^4}{360} \left(\frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6}\right) - \frac{\delta x^6}{10160} \left(\frac{\partial^8 \varphi}{\partial x^8}\right)$$

$i+1 = x + \delta x \quad k = t$

(3.4)

en prenant pour $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{\delta x^2} [\varphi_{i+1,k} - 2\varphi_{i,k} + \varphi_{i-1,k}]$ (3.5)

on fait une erreur : $\mathcal{E} = - \frac{\delta x^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)$ (3.6)

On peut pour plus de précision, utiliser non pas 1 point de part et d'autre du point considéré, mais 2 points. On peut utiliser un point de part et d'autre mais on prendra δx suffisamment petit.

Il peut être nécessaire aussi d'utiliser une approximation de la dérivée seconde en introduisant la moyenne pondérée de cette grandeur pour deux valeurs différentes de t . On aura alors :

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_{x, t+\theta \delta t} = \frac{\theta}{\delta x^2} [\psi_{i+1, k+1} - 2\psi_{i, k+1} + \psi_{i-1, k+1}] \quad (3.7)$$

$$+ \frac{1-\theta}{\delta x^2} [\psi_{i+1, k} - 2\psi_{i, k} + \psi_{i-1, k}] + \varepsilon$$

$$0 < \theta < 1$$

Pour la discrétisation de la variable temporelle, deux formules peuvent être utilisées donnant la même erreur : $\varepsilon = \frac{\delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_{x, t}$

$$-\left(\frac{\delta \psi}{\delta t}\right)_{x, t} = \frac{1}{\delta t} [\psi_{i, k+1} - \psi_{i, k}] \quad (3.8)$$

$$-\left(\frac{\delta \psi}{\delta t}\right)_{x, t} = \frac{1}{\delta t} [\psi_{i, k} - \psi_{i, k-1}] \quad (3.9)$$

Une meilleure approximation est fournie en faisant la moyenne algébrique des formules précédemment fournies et on obtient :

$$\left(\frac{\delta \psi}{\delta t}\right)_{x, t} = \frac{1}{2\delta t} [\psi_{i, k+1} - \psi_{i, k-1}] \quad (3.10)$$

l'erreur étant : $\varepsilon = \frac{\delta t^2}{6} \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3}\right]_{x, t} \quad (3.11)$

Et dans le cas général de discrétisation des variables temps et d'espace, on aura la formule :

$$K \frac{\Delta x^2}{\delta t} \left[\psi_{i,k+1} - \psi_{i,k} \right] = \theta \left[\psi_{i+1,k+1} - 2\psi_{i,k+1} + \psi_{i-1,k+1} \right] + (1-\theta) \left[\psi_{i+1,k} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i-1,k} \right]$$

(3.12)

avec $0 \leq \theta \leq 1$

III-2-CRITERE DE SELECTION DES FORMULES D'APPROXIMATIONS

Les formules donnant les approximations seront sélectionner selon les critères : facilité d'emploi, erreur, stabilité et donc convergence.

- Facilité d'emploi : Directement liée au nombre de pas de calcul nécessaire pour obtenir l'ensemble des potentiels à l'instant $t + \delta t$ ensupposant connu le potentiel en chacun des noeuds du maillage à l'instant t car ces derniers constituent les conditions initiales ou aux limites pour la détermination des potentiels à l'instant $t + \delta t$ qui eux aussi caractériseront les conditions initiales ou aux limites pour la détermination des potentiels à l'instant $t + 2\delta t$.

Deux types de méthodes peuvent être employées :

- Méthodes explicites : ($\theta=0$ pour l'équation : 3.12 .)

Cette formule doit être appliquée en chacun des points du maillage car on explicite à partir de la formule d'approximation aux différences finies, les potentiels à l'instant $t + \delta t$ ($\psi_{x,t+\delta t}$) en fonction des potentiels à l'instant t ($\psi_{x,t}$) et cela séparément pour chacun des points du maillage.

- Méthodes implicites : $\theta \neq 0$

Equation 3.12

Ces méthodes nécessitent d'exprimer les potentiels inconnus à l'instant $t + \Delta t$ ($\psi_{x,t + \Delta t}$) en fonction à la fois des potentiels connus à l'instant t ($\psi_{x,t}$) et des potentiels inconnus et cela de façon implicite.

On est conduit à un système d'équations algébriques dont la résolution nécessite l'utilisation des méthodes dites "d'inversion matricielles".

III-3 -ERREURS ET CONVERGENCE DE LA METHODE

- ERREURS : Les deux principaux types d'erreurs intervenant dans la résolution d'un problème de champ par la méthode des différences finies correspondent :
 - D'une part, à l'erreur dite "d'arrondi" qui caractérise les différences obtenues entre la solution fournie par le calculateur, et la solution correcte du système d'équations aux différences finies.
 - D'autre part, les erreurs de "troncature" qui caractérisent les **erreurs** intervenant du fait de la transformation de l'équation aux dérivées partielles en un système d'équation aux différences finies.

- STABILITE DE CALCUL :

Une méthode aux différences finies est dite "stable" lorsque les effets dus à une erreur commise au cours d'un cycle de calcul seront graduellement amortis et disparaîtront au cours des cycles suivants :

- Si la méthode est instable, une erreur dans le calcul de $\psi_{x,t}$ conduira à des erreurs d'amplitude croissante dans le calcul de $\psi_{x,t + \delta t}$ de telle sorte que l'effet d'une simple erreur est considéré comme devant augmenter au cours des différences de calcul, jusqu'à atteindre des valeurs d'autant plus élevées que le nombre de pas de calcul sera élevé.

Il convient de noter que si les critères de stabilité sont utiles pour mettre en évidence les difficultés inhérentes aux méthodes aux différences finies, il n'en demeure pas moins que le critère fondamental est le "critère de convergence". C'est la raison pour laquelle, les méthodes conduisant à une impossibilité d'obtenir un processus instable sont particulièrement appréciées.

On est amené à considérer trois méthodes dans la résolution des équations aux dérivées partielles du type parabolique, on distingue :

- Les méthodes systématiquement stables
- Les méthodes systématiquement instables
- Les méthodes conditionnellement stables.

Pour utiliser les différences finies, on a trois possibilités qui sont à la base des différentes méthodes :

On peut soit :

- Utiliser les différences avant
- Utiliser les différences arrières
- Soit utiliser les différences centrées.

CHAPITRE IV - LE PROBLEME PARABOLIQUE

La simulation analogique des processus à paramètre répartis du type parabolique peut se faire de deux manières : soit par réseaux RC ou par réseaux RR. Nous aborderons dans ce chapitre le problème linéaire et quasi-linéaire. L'équation générale sur laquelle nous allons travailler est de la forme :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K(\varphi, x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + F(x, t, \varphi) = b(x, t, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.1)$$

$n \in \mathbb{N}$

Nous ne considererons que le cas unidimensionnel. L'équation 4.1 devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, t, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + F(x, t, \varphi) = b(x, t, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.2)$$

A cette équation seront appliquées les transformations de KIRCHOFF et de GOODMAN CITEES DANS LE CHAPITRE 1.

Les conditions initiales et aux limites seront :

- Condition initiale : $w_0 = \varphi(x, 0)$
 - Condition de DIRICHLET : $w_{BI} = \varphi(r, t)$
 - Condition de NEUMANN : $w_{BII} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{\Gamma}$
 - Condition de FOURIER : $w_{BIII} = \lambda_1 \varphi(r, t) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{\Gamma}$
- Γ : Frontière du domaine. n : Normale au domaine.

IV - 1. SIMULATION DES PROBLEMES LINEAIRES

4.1.1- SIMULATION DES PROCESSUS A PARAMETRES REPARTIS SUR RESEAUX RC.

4.1.1.1 - MODELE ELECTRIQUE DU PROCESSUS.

La méthodique du modelage linéaire de l'équation de FOURIER sur les réseaux RC a été élaborée en 1936 par BEUKEN.

LES PROBLEMES de l'analogie électrique et du modelage des processus réels seront présentés en bibliographie [4-24], [4-36], [4-45]. Donc dans notre travail seront présentés seulement les plus importants éléments du modelage des problèmes linéaires sur les reseaux RC.

On considère une équation de FOURIER unidimensionnelle, linéaire et hétérogène :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + F(x) = b(x) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.3)$$

Avec les conditions initiales et aux limites :

$$w_0 = \varphi(x, 0)$$

$$w_0 = \varphi(x, 0) \quad ; \quad w_{BI} = \varphi(r, t) \quad ; \quad w_{BII} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_r$$

Les opérations suivantes dépendent du genre du modèle RC. Les modèles réticulaires RC simulent les processus à paramètres répartis selon la règle DSCT, c'est à dire qu'ils provoquent la discrétisation des coordonnées spatiales en gardant la fonction continue du temps.

L'opération suivante est la discrétisation des dérivées spatiales dans l'équation (4.3) et en conséquence on substitue la valeur de la fonction par un système d'équations aux différences approchant la description réelle du processus.

La discrétisation est donc le processus du choix de la répartition des points singuliers isolés (nœud du réseau spatial) et de la détermination des liaisons entre les valeurs d'une fonction en ces points décrivant les caractéristiques de l'aire étudiée.

Pour l'exécution de la discrétisation on pose le pas spatial $\Delta x = h$. La discrétisation de l'équation résultant du développement de TAYLOR est exécutée pour tous les noeuds intérieurs du réseau spatial.

Donc dans chaque noeud intérieur de l'aire on a l'équation :

$$K(x_i + h/2)(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + K(x_i - h/2)(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + h^2 F(x_i) = h^2 b(x_i) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \quad (4.4)$$

Dans le modèle réticulaire RC (le schéma du noeud est présente fig 1), en conformité avec la 1ère loi de KIRCHOFF, le bilan des courants dans ce noeud est présenté par :

$$G_{i+1,i}(V_{i+1} - V_i) + G_{i-1,i}(V_{i-1} - V_i) + \bar{I}_i = C_i \frac{dV_i}{dt} \quad (4.5)$$

Avec les conditions initiales et aux limites : W_o^E , W_{BI}^E , W_{BII}^E où $W_o^E = W_o$.

Conformément avec les lois de l'analogie, les équations du modèle électrique 4.5 et du processus 4.4 sont équivalent si les coefficients de l'analogie.

$$\alpha_V = \frac{\varphi}{V} ; \alpha_T = \frac{t}{\tau} ; \alpha_C = \frac{h^2 b}{C} ; \alpha_G = \frac{K}{G} ; \alpha_{\bar{I}} = \frac{h^2 F}{I} \quad (4.6)$$

Effectuent les relations :

$$\frac{\alpha_{\bar{I}}}{\alpha_V \cdot \alpha_G} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_C}{\alpha_G \cdot \alpha_T} = 1 \quad (4.7)$$

Bien sûr conformément avec les coefficients correspondants de l'analogie les conditions initiales et aux limites se transforment :

$$W_0^E = \frac{1}{\alpha_V} W_0; \quad W_{B\underline{I}}^E = \frac{1}{\alpha_V} W_{B\underline{I}}; \quad W_{B\underline{II}}^E = \frac{1}{\alpha_I} W_{B\underline{II}} \quad (4.8)$$

4.1.1.2 - REALISATION DU MODELE RETICULAIRE RC.

A) - MODELE CLASSIQUE DU RESEAU RC.

Le modèle classique RC, modèle de BEUKEN permet de modéliser des problèmes aux limites linéaires non stationnaire avec la méthode DSCT.

C'est à dire que la solution obtenue dans les noeuds est continue dans le temps et englobe l'intervalle de temps dès l'initiation du processus (du moment où sont définies les conditions initiales) jusqu'à l'obtention de l'état établi (charge constante dans tous les condensateurs).

Le modèle classique RC est constitué par le réseau de résistances et condensateurs. Les résistances et les condensateurs utilisés modèlent conformément des paramètres de l'espace réel.

L'initiation du processus consiste au branchement par pas des conditions initiales, aux limites et des courants d'injection. La vitesse du travail du modèle par rapport au processus modèle défini la valeur du coefficient de l'analogie du temps α_T .

La mesure et l'enregistrement de la solution sont réalisés avec les instruments permettant de mesurer la valeur instantanée de la tension (oscilloscope enregistreur analogique ...).

Le moyen présenté du travail du modèle classique entrave la réception des mesures exactes des potentiels de jonction dans les moments de temps choisis, et rends impossible la définition de la solution dans l'intervalle de temps quelconque si on ne pratique pas un travail répétitionnaire et exige un système complexe pour poser les conditions aux limites, initiales et les courants d'injections.

Les défauts présentés n'existent pas dans les modèles modifiés RC.

B) - LE MODELE RECTIFIE DU RESEAU RC

Ce modèle rend possible la solution des équations paraboliques linéaires et quasi-linéaire avec la méthode modifiée DSCT.

La modification de la méthode consiste à la division de la coordonnée temporelle sur les segments d'une longueur définie en gardant l'effet continu de l'échelle chronométrique. Le réseau RC est constitué par les résistances, condensateurs et disjoncteurs séparant les condensateurs de noeuds du réseau. (FIG 2)

On introduit la notion de phase active et de phase passive du travail du modèle modifié RC. Dans la période de la phase active se produit le développement du processus non établi dans le segment défini de temps. Le passage à la phase passive repose ^{sur} la "congélation" du développement de l'état non établi par l'isolation simultanée des condensateurs et des noeuds du réseau.

La phase passive est constitué de deux étapes :

L'étape de mesure

Et l'étape de la modification des conditions initiales.

Pendant l'étape de mesure, se produit la mesure des tensions dans les condensateurs qui exercent en même temps la fonction de mémoire analogique .

Pour obtenir la solution des équations linéaires, l'étape de modification est inutile

La fin d'une phase (active + passive) équivaut à la réalisation d'un pas de temps dans le modèle RC modifié, c'est à dire, à la fin d'un cycle de la procédure de travail du modèle .

Le cycle suivant commence la solution du problème à partir de la distribution des potentiels qui est à la fin de la phase passive du cycle précédent .

Pendant la durée de l'étape de mesure , le modèle RC modifié fournit deux (2) genres de distributions des potentiels dans l'espace modélisé (espace modélisé) .

Dans les noeuds de résistances du réseau existe une distribution de l'état établi fixe du processus modélisé; donc la solution du système des équations aux différences:

$$G_{i,i+1} \cdot (V_{i+1}^{k+1} - V_i^{k+1}) + G_{i-1,i} \cdot (V_{i-1}^{k+1} - V_i^{k+1}) + I_i = C_i \cdot \left. \frac{dV_i}{d\tau} \right|_{\tau_{k+1}} \quad (4.9)$$

Sur les plaques de condensateurs isolés des noeuds du réseau, existe une distribution de potentiels résultante de la solution du système des équations différentielles pour l'intervalle de temps \bar{t}_{k+1} :

$$G_{i,i+1}(V_{i+1} - V_i) + G_{i-1,i}(V_{i-1} - V_i) + I_i = 0 \quad (4.10)$$

avec $V_i^{k+1} = V_i(\bar{t}_{k+1})$.

D'où la possibilité de la définition directe de la solution du problème dans l'intervalle de temps quelconque du processus pour tout l'espace modelé.

Bien sûr pendant la phase active, les potentiels des plaques des condensateurs sont identiques, et leur distribution correspond au problème non stationnaire étudié :

Le problème présenté est réalisé avec les hypothèses suivantes :

- a)- Dans les circuits électriques linéaires, le condensateur avec la condition initiale (la tension) qui n'est pas nulle $U_c(0)$ est équivalent, dans le sens de différences de potentiels, au montage en série du condensateur non chargé et d'une source de tension idéale de force électromotrice égale à la tension (condition) initiale $E = U_c(0)$.
- b)- La valeur de la constante de temps de la décharge du condensateur par la résistance de perte est infiniment plus grande.
- c)- L'action de l'interrupteur ne provoque pas la perte d'énergie de circuit (pas de phénomène de jaillissement d'étincelles, décharge par les pointes de contact, circuit de pertes nulles).

d)- Processus de changement de tension des condensateurs dans le modèle RC modifié a le caractère continu indépendant de l'action discrétisante de l'interrupteur. Cette condition veut dire que dans la pratique, la continuation dans la phase active suivante du processus linéaire non établi de la valeur de tension et avec l'inclinaison des changements de tension qui existait à la fin de la précédente phase active.

Pour confirmer la condition d on procède le raisonnement suivant :

On pose le circuit RC (fig. 4) avec la source de tension et la source représentant la condition initiale. La résistance du circuit est considérée comme une résistance interimaire du réseau du modèle modifié. L'interrupteur facilite la réalisation de la phase active et de la phase passive.

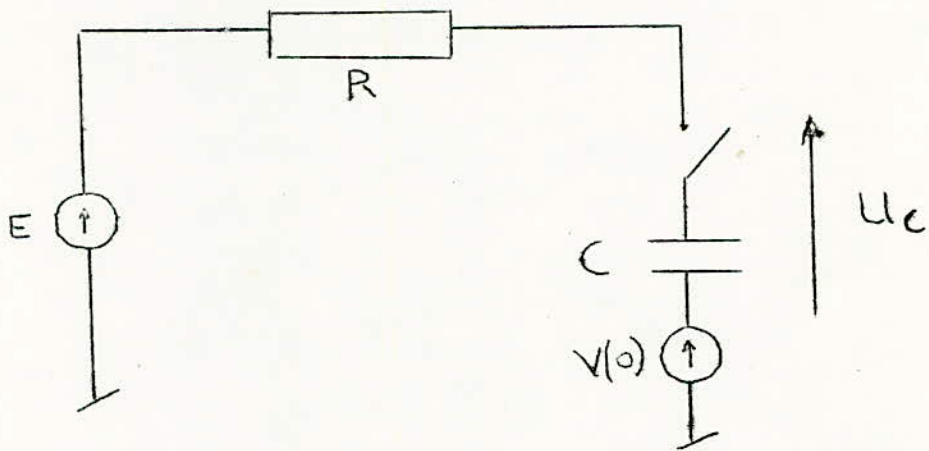


FIGURE 4 - SCHEMA SIMPLIFIE INTERIMAIRE DU MODELE MODIFIE RC.

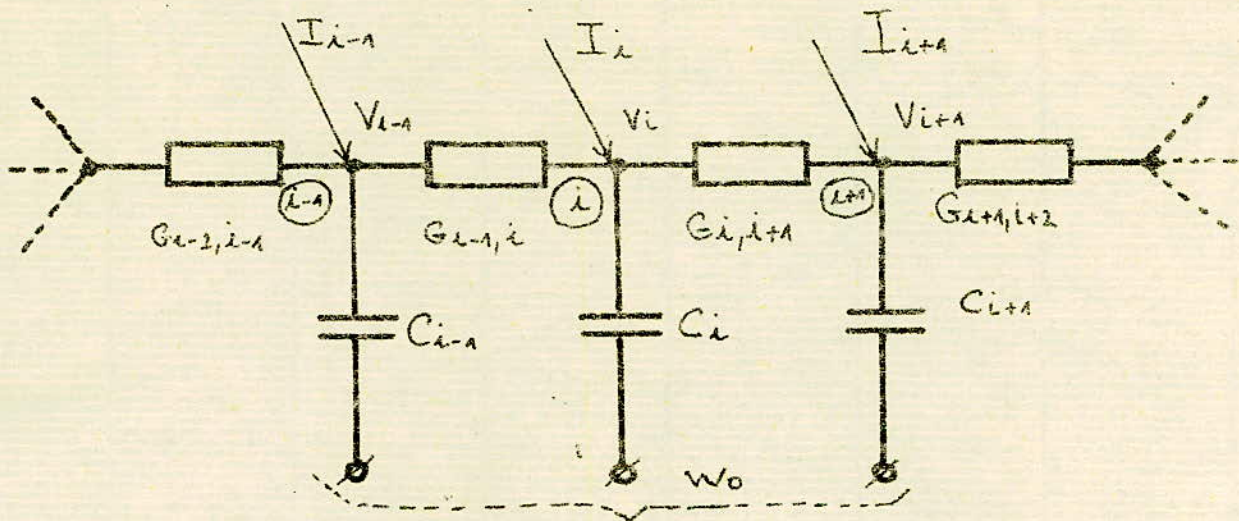


FIG 1: FRAGMENT DU MODELE CLASSIQUE.

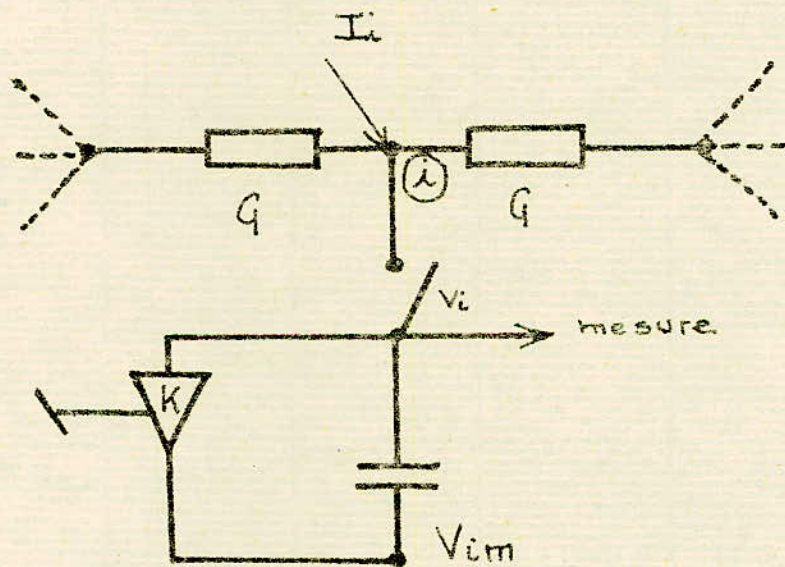


FIG 5: Schema d'un noeud modifié d'un réseau A.C.
K: Amplificateur de coefficient K.

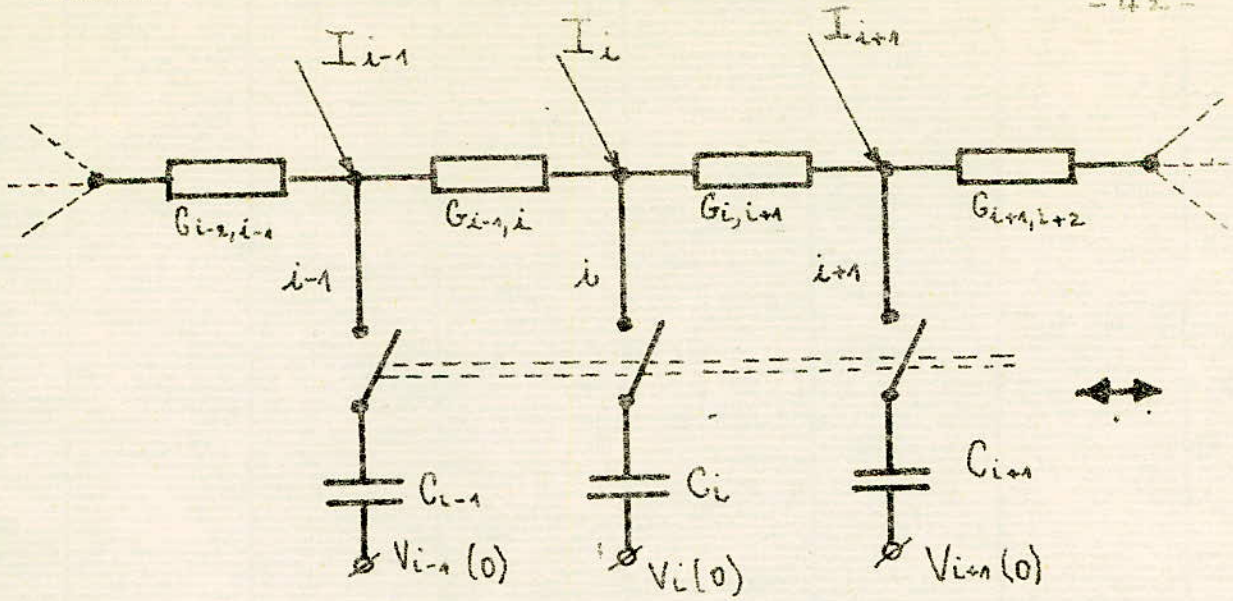


FIG 2 : FRAGMENT DU MODELE MODIFIE R.C.

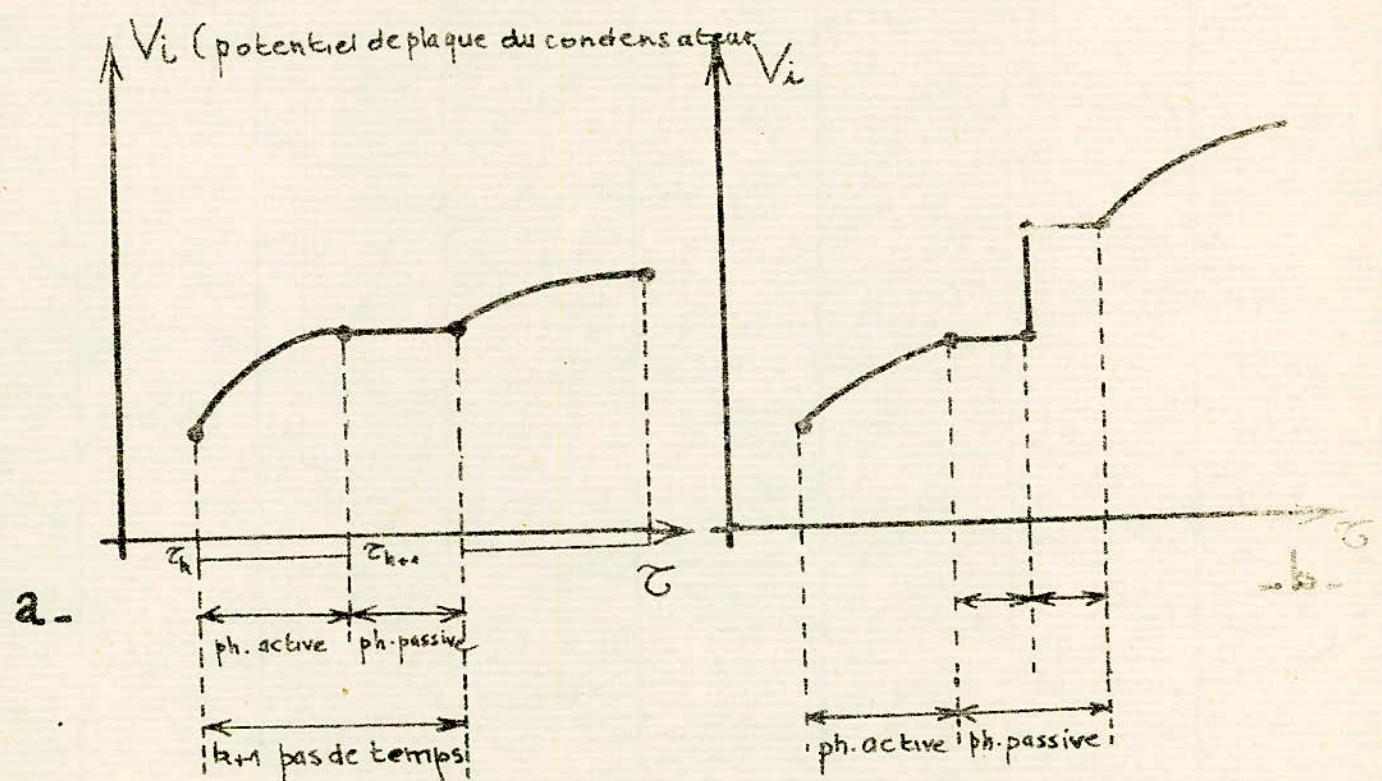


FIG 3 : diagramme temporel des changements de potentiel de Jonction.
du modele.

- a - sans modification des C.I
- b - Avec modification des C.I

Dans la première phase active, on réalisera dans l'intervalle du temps Δt en prenant les conditions initiales nulles. Après la fin de la phase active, la tension de condensateur est égale :

$$\Delta t \in [\tau_k; \tau_{k+1}]$$

$$U_c^I(\tau_{k+1}) = E \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{RC}\right) \right] \quad (4.11)$$

L'inclinaison de la courbe de la charge au moment τ_{k+1} est égale :

$$\frac{dU_c^I}{d\tau} = \frac{E}{R.C} \cdot \exp\left(-\frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{R.C}\right) \quad (4.12)$$

U_c - tension de condensateur dans la 1^è phase active.

Ensuite on procède à la réalisation de la 2^è phase active en considérant la tension $U_c^I(\tau_{k+1})$ comme la nouvelle condition initiale. En prenant le temps d'initiation du processus comme $\tau = \tau_{k+1}$ on peut dire que les tensions :

$$U_c^{II}(\tau_{k+1}) = U_c^I(\tau_{k+1}).$$

Règle de continuité de la tension.

et l'inclinaison de la courbe de la charge au début de la 2^e phase active est égale :

$$\frac{dU_c^{II}}{d\tau} = \frac{1}{R.C} \left[E - V^{k+1} \right] \exp\left(- \frac{\tau - \tau_{k+1}}{R.C} \right). \quad (4.13)$$

$$\text{avec } V^{k+1} = E \left[1 - \exp\left(- \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{R.C} \right) \right]$$

U_c : tension dans la 2^e phase active.

$$\text{d'où } \frac{dU_c^{II}}{d\tau} = \frac{E}{R.C} \exp\left(- \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{R.C} \right) \quad (14)$$

$$\text{donc : } \left. \frac{dU_c^{II}}{d\tau} \right|_{\tau_{k+1}} = \left. \frac{dU_c^I}{d\tau} \right|_{\tau_{k+1}}$$

Alors réellement l'introduction de la phase passive n'a pas provoqué de modification au cours du changement de la tension du condensateur.

On peut faire un raisonnement analogue pour le processus de la décharge du condensateur.

4.1.1.3 - MODELAGE DES PROBLEMES LINEAIRES NON HOMOGENES SUR LE RESEAU RC HOMOGENE

Dans ce chapitre, on va présenter la conception de la méthode du modelage des problèmes aux limites non homogènes et non stationnaires sur le réseau RC homogène.

On considère un problème aux limites linéaires unidimensionnel décrit par la formule 4.1.

Après la transformation de KIRCHOFF on obtient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + F(x) = g(x) \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

(4.15)

avec $g(x) = \frac{b(x)}{k(x)}$: la non homogénéité est reportée au second membre.

Avec les conditions initiales et aux limites conformément transformées.

La loi de KIRCHOFF par analogie avec 4.15 nous donne .

$$G.(V_{i+1} + V_{i-1} - 2.V_i) + I_i = C_i . \frac{dV_i}{d\tau} \quad (4.16)$$

Le réseau RC qui réalise la relation 4.16 est ainsi constitué de résistances homogènes et de capacités hétérogènes.

L'étape suivante sera consacrée à l'homogénéisation de tous les éléments du réseau RC.

Le réseau homogène permettant de modéliser le problème 4.16 sera décrit par l'équation :

$$G.(V_{i+1} + V_{i-1} - 2.V_i) + I_i = C . \frac{d(V_i - V_{im})}{d\tau} \quad (4.17)$$

où C : constante pour tous les noeuds du réseau.

L'équivalence complète des solutions obtenues sur les réseaux décrits par les équations 4.16 et 4.17 assure la réalisation de l'égalité.

$$C_i \cdot dV_i = C \cdot d(V_i - V_{im}) \quad (4.18)$$

en étudiant l'équation différentielle 4.18 on en déduit le potentiel V_{im} :

$$dV_{im} = \left(1 - \frac{C_i}{C}\right) \cdot dV_i \quad (4.19)$$

d'où :

$$V_{im} = \left(1 - \frac{C_i}{C}\right) [V_i - V_i(0)] \quad (4.20)$$

où $V_i(0)$: condition initiale au $i^{\text{ème}}$ noeud du réseau.

En fait en processus non établi, le plus important est la composante variable du potentiel V_{im} , donc en réalisation pratique on ignore la composante continue et on utilise la relation :

$$V_{im} = \left(1 - \frac{C_i}{C}\right) \cdot V_i \quad (4.21)$$

En pratique, la génération du potentiel V_{im} peut être réalisée par l'enclenchement d'un amplificateur de jonction branché aux bornes de la capacité (fig.5).

En changeant le coefficient K de l'amplificateur :

$$K = 1 - \frac{C_i}{C} = 1 - \frac{\mathcal{L}_c \cdot h^2 \cdot g(x_i)}{C} \quad (4.22)$$

On réalise l'assortiment des paramètres du réseau pour modeler le processus.

On choisit la valeur de la capacité C du condensateur en tenant compte de la vitesse de travail du modèle et de la technique de mesure utilisée.

Il faut croire que souvent les utilisateurs de la méthode vont chercher à atteindre la conservation de la conformité complète de la valeur du paramètre de conductance du modèle et de l'espace modelé, ce qui est important en étude des problèmes de synthèses.

Dans les cas pareils, on néglige la transformation 4.15 de l'équation 4.3; les résistances du réseau sont décrites conformément à 4.3 et 4.6, et on prend les capacités homogènes des condensateurs C, et les coefficients K des amplificateurs seront décrits par la relation

$$K = 1 - \frac{C_i}{C} = 1 - \frac{\mathcal{L}_c \cdot h^2 \cdot b(x_i)}{C} \quad (4.23)$$

L'utilisation de la régulation continue du coefficient K permet de simuler exactement les valeurs réelles des capacités de l'espace.

4.1.2 -- SIMULATION DES PROCESSUS A PARAMETRES REPARTIS SUR RESEAU R-R.

4.1.2.1 -- MODELE ELECTRIQUE DU PROCESSUS

* La méthodique du modelage de l'équation linéaire de FOURIER sur les réseaux R-R a été présentée par LIEBMAN en 1956. Ses inconvénients comme l'accroissement de l'erreur de troncature, et le fait de mettre un temps long dans la réalisation de la procédure et aussi le fait de demander beaucoup de travail, n'ont pas empêché son utilisation.

Dans cette étude, on présente les éléments les plus importants de la simulation des problèmes linéaires sur les réseaux R-R.

On considère l'équation de FOURIER linéaire non homogène unidimensionnelle déterminée dans l'espace :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + F(x) = b(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.24)$$

Avec les conditions: initiale W_0 et aux limites W_{BI} et W_{BII} :

$$\begin{aligned} * W_0 &= \varphi(x, 0) \\ * W_{BI} &= \varphi(p, t) \end{aligned} \quad * W_{BII} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\Gamma}$$

Le modèle RR est obtenu par discrétisation DSDT et utilisant des différences finies des dérivées spatiales et temporelles.

On obtient alors un système d'équations aux différences approchant la description réelle du processus.

Pour l'exécution de la discrétisation, on pose le pas spatial $\Delta x = h$.

On a alors pour chaque noeud intérieur de l'espace : (4.25)

$$k \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \cdot \left[\frac{\varphi_{i+1}^{k+1} - \varphi_i^{k+1}}{h} \right] + k \left(x_i - \frac{h}{2} \right) \cdot \left[\frac{\varphi_{i-1}^{k+1} - \varphi_i^{k+1}}{h} \right] + h^2 \cdot F(x_i) = h^2 \cdot b(x_i) \cdot \frac{\varphi_i^{k+1} - \varphi_i^k}{t_{k+1} - t_k}$$

Dans le modèle électrique R-R avec le schéma présenté sur la figure 4.1 ; conformément avec la loi de KIRCHOFF, on peut constater que le bilan des courants au i^{ème} noeud à la forme :

$$G_{i+1,i} (V_{i+1}^{k+1} - V_i^{k+1}) + G_{i-1,i} (V_{i-1}^{k+1} - V_i^{k+1}) + I_i = G_{t,i} (V_i^{k+1} - V_i^k) \quad (4.26)$$

avec les conditions : initiale ; $W_0^E = \frac{1}{L_V} \cdot W_0$

et aux limites : $W_{BI}^E = \frac{1}{L_V} \cdot W_{BI}$ et $W_{BII}^E = \frac{1}{L_V} \cdot W_{BII}$

Conformément aux lois d'analogie, les équations du modèle électrique 4.26 et du processus 4.25 seront équivalentes si on a la relation :

$$\frac{L_V \cdot L_G}{L_I} = 1 \quad (4.27)$$

avec les coefficients d'analogie :

$$* L_V = \frac{\Psi}{V} \quad L_G = \frac{k}{G} = \frac{h^2 \cdot b(x)}{\Delta t \cdot G_t} \quad L_I = \frac{h^2 \cdot F(x)}{I} \quad (4.28)$$

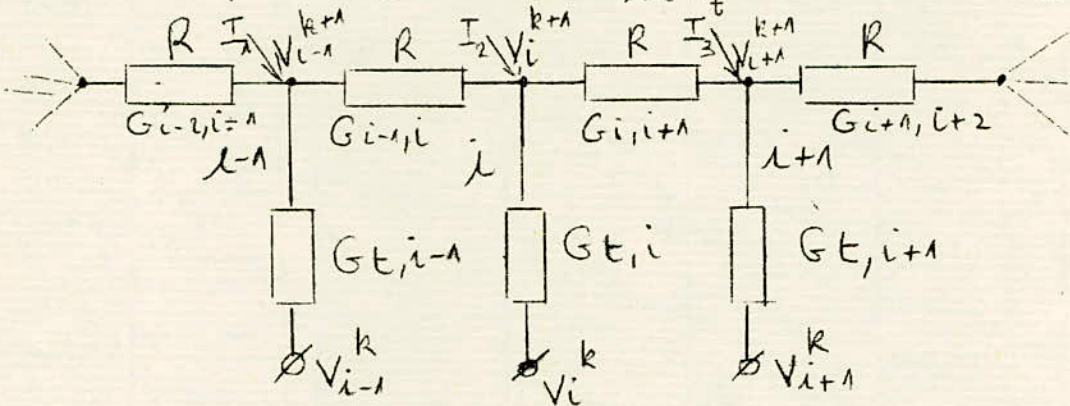


FIGURE 4-1 - FRAGMENT DU MODELE RR CLASSIQUE .

4-1-2-2 : REALISATION DU MODELE ELECTRIQUE

A- MODELE CLASSIQUE R-R

La méthode de LIEBMAN dans sa forme originale, se base sur le modèle électrique R-R, d'où la simulation de tous les membres de l'équation décrivant le processus par des résistances.

On présente ci-dessus le schéma électrique du fragment du modèle R-R (fig.4.1)

Le modèle contient le réseau lié de résistances $G_{i,i+1}$ représentant l'espace et l'ensemble des résistances $G_{t,i}$ représentant le temps, liées avec les noeuds du réseau et l'ensemble des sources de courant I_i (simulant les sources intérieures de l'énergie de l'espace).

L'initiation du travail du modèle se fait sur le branchement des conditions initiales sur les extrémités libres des résistances $G_{t,i}$, par le branchement des conditions aux limites et par l'injection des courants.

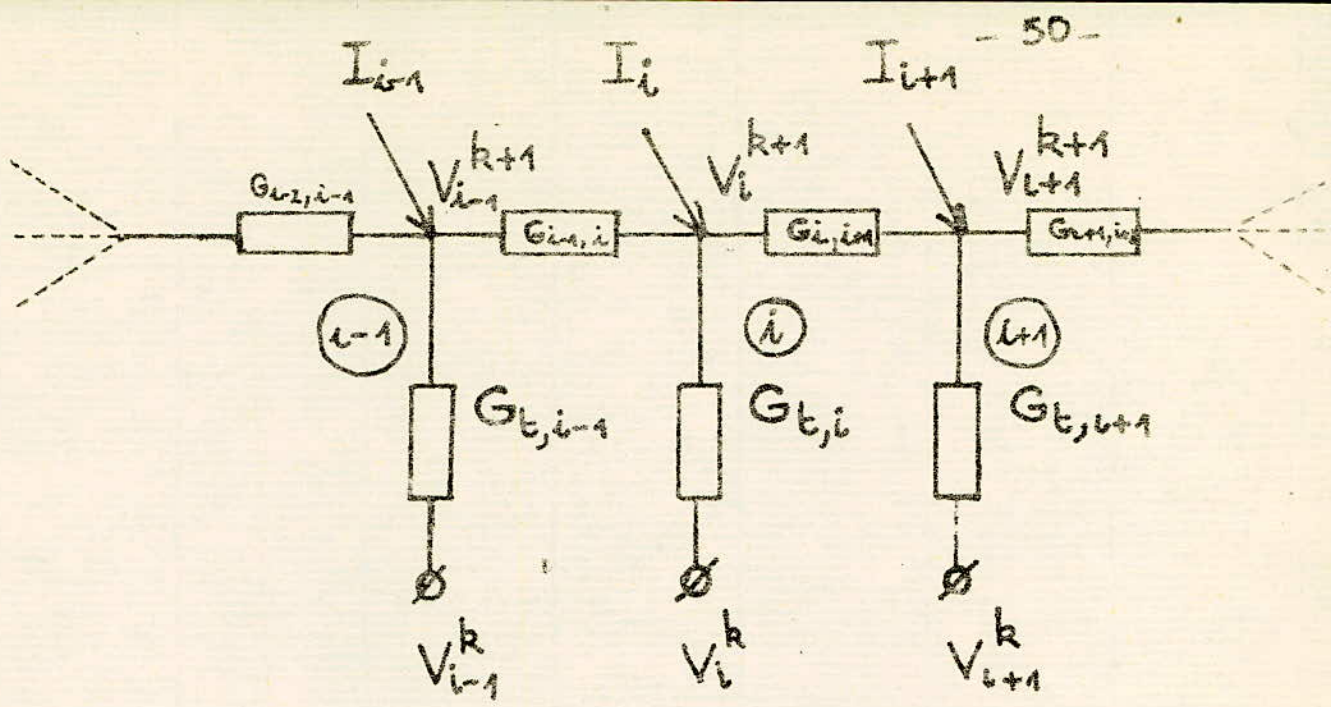


Fig 4.1: FRAGMENT DU MODELE RR .

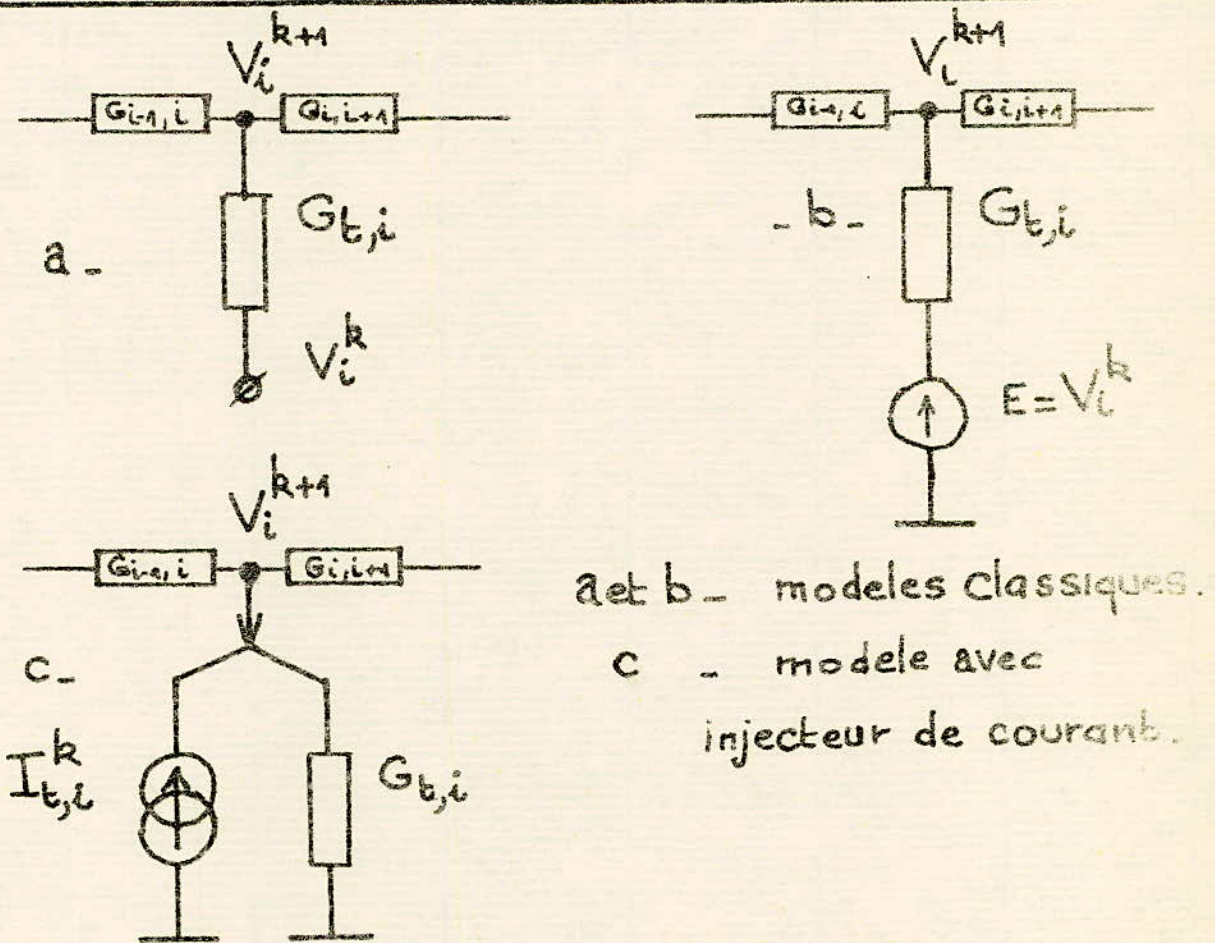


FIG 4.2 - ETAPES DE LA MODIFICATION DU RESEAU RR.

On obtient dans les noeuds du réseau la distribution des potentiels de jonction formant la solution du problème après le pas de temps déterminé par la valeur de la résistance $G_{t,i}$.

La technique de mesure utilisée est la mesure numérique de la valeur des potentiels de jonction.

B - MODELE R.R AVEC INJECTION DE COURANT.

Le travail nécessaire pour résoudre le problème sur réseau R-R demande des opérations techniques nombreuses qui ont pour but l'automatisation de la méthode qui consiste le plus souvent en un changement automatique utilisant les sources de tensions contrôlées numériques, des tensions alimentant les résistances $G_{t,i}$.

Des méthodes hybrides développées se basent sur l'affectation des courants d'injections déterminés dans les noeuds du réseau.

On est confronté au problème de minimisation du nombre de matériel technique utilisé. Ci-dessous est proposée une modification du modèle R-R classique introduisant à la place des sources de tensions générant les potentiels de jonction du pas de temps précédent, une sources de courant contrôlée. (fig 4.2)

La figure 4.2 présente les étapes de la modification du modèle R-R :
 en a et en b : modèle classique. en c) : modèle avec injecteur de courant ;
 le courant passant dans la résistance $G_{t,i}$ dans le modèle classique vaut :

$$I_{t,i}^{k,k+1} = G_{t,i} \cdot (V_i^{k+1} - V_i^k) = I_{t,i}^{k+1} - I_{t,i}^k \quad (4.29)$$

et peut être considéré comme superposition de deux (2) composantes :

- Une composante solution relativement au pas de temps précédent.
- Une composante de la solution du pas de temps actuel.

A cause de l'impossibilité de la détermination directe de la composante $I_{t,i}^{k+1}$,
 on réalise uniquement l'injection avec la composante $I_{t,i}^k$ avec le courant de
 sortie.

$$I_{t,i}^k = G_{t,i} \cdot V_i^k \quad (4.30)$$

on a la valeur du courant sautant du noeud du réseau pour les éléments simulant
 la dérivée de temps :

$$I_{t,i}^{k,k+1} = I_{t,i}^{k+1} - I_{t,i}^k \quad (4.31)$$

Le système électrique conforme à la relation 4.31 est présenté sur la figure 4.2.c
 en page 50. Des résultats semblables sont obtenus en utilisant pour le modèle
 classique RR (fig. 4.2 b) le théorème de la source équivalente de courant.

Le passage du contrôle de la tension au contrôle du courant dans le modèle RR
 permet l'utilisation multiple d'un injecteur de courant générant la valeur résul-
 tante du courant d'injection possédant les composantes déterminées.

Ansi en prenant l'équation du type 4.26 et en tenant compte de 4.31 le modèle
 électrique RR avec injecteur de courant peut être décrit par l'équation :

$$G_{i-1,i} \cdot (V_{i-1}^{k+1} - V_i^{k+1}) + G_{i,i+1} \cdot (V_{i+1}^{k+1} - V_i^{k+1}) + I_{I,i} = G_{t,i} \cdot V_i^{k+1} \quad (4.32)$$

Avec :
$$I_{I,i} = I_i + I_{t,i}^k \quad (4.33)$$

Souvent les non homogénéité de l'espace sont prises en considération à l'aide des courants injectés supplémentaires dans les noeuds du réseau R-R homogène. Dans ce cas, la valeur du courant injecté aura en plus la composante corrigeant l'hétérogénéité de l'espace. (voir bibliographie [4-33], [4-44], [4-50])

IV-2.- LE PROBLEME NON LINEAIRE

4.2.1- SIMULATION DES PROBLEMES QUASI-LINEAIRES AUX LIMITES SUR LES RESEAUX R-C.

4.2.1.1- LA METHODIQUE DU PROCEDE

Le problème primaire, dans le modelage des problèmes quasi-linéaires aux limites, est de définir le modèle électrique effectuant les conditions de la conformité avec le processus réel. La définition du modèle électrique, ayant le caractère du bilan énergétique, doit avoir un caractère général et ne doit pas dépendre du choix de la méthodique du procédé.

Il faut souligner la nécessité d'élaborer un modèle électrique dans le contexte des paramètres du processus réel et non seulement comme l'équation qui donne le sens de la fonction non linéaire. Le manque de détermination des liaisons entre les coefficients de l'analogie paralyse l'application directe des méthodes élaborées pour le processus réel.

Dans ce travail, on considère exclusivement que des équations quasi-linéaires unidimensionnelles non stationnaires du type :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + F(x) = b(x, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.34)$$

A cette équation on applique la transformation de KIRCHOFF précédemment citée, d'où la construction du modèle qui concerne l'équation transformée de FOURIER :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + F(x) = g(\theta, x) \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.35)$$

Et sa forme simplifiée :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = g(\theta, x) \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.36)$$

Avec les conditions initiale et aux limites déterminées dans un espace donné.

Dans la partie qui suit du travail on ne soulignera pas chaque fois l'existence des conditions aux limites et initiales ainsi que l'espace pour le processus et modèle électrique sachant que le problème d'analyse est toujours correctement posé.

En discrétisant le laplacien dans l'équation 4.35 on obtient le système d'équations :

$$\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i + h^2 F(x_i) = h^2 g(\theta_i, x_i) \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (4.37)$$

En introduisant les coefficients d'analogie électrique :

$$\alpha_V = \frac{\theta}{V} ; \alpha_I = \frac{h^2 F(x_i)}{I_i} ; \alpha_G = \frac{1}{G} ; \alpha_\tau = \frac{t}{\tau} \quad (4.38)$$

Dans les équations 4.37 on obtient la relation :

$$\frac{\alpha_V \cdot \alpha_G}{\alpha_I} G (V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i) + I_i = \frac{\alpha_V}{\alpha_I \cdot \alpha_\tau} h^2 g(\alpha_V V_i, x_i) \frac{\partial V_i}{\partial \tau} \quad (4.39)$$

Qui dans la réalisation :

$$\frac{\alpha_V \cdot \alpha_G}{\alpha_I} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_V}{\alpha_\tau \alpha_I} = 1 \quad (4.40)$$

est le modèle électrique du processus :

$$G(V_{i+1} + V_{i-1} - 2 \cdot V_i) + I_i = h^2 \cdot g(\alpha_V V_i, X_i) \cdot \frac{\partial V_i}{\partial \tau} \quad (4.41)$$

La résolution du problème sur le réseau RC sera en plus lié avec le conditionnement $h^2 = C$.

En discrétisant l'équation simplifiée et souvent utilisée 4.36, on obtient le système d'équations :

$$\Theta_{i+1} + \Theta_{i-1} - 2 \Theta_i = h^2 g(\Theta_i, X_i) \frac{\partial \Theta_i}{\partial t} \quad (4.42)$$

En introduisant les coefficients de l'analogie électrique :

$$\alpha_V = \frac{\Theta}{V} ; \quad \alpha_\tau = \frac{t}{\tau} \quad (4.43)$$

dans les équations 4.42 on obtient la relation 4.44 qui est le modèle électrique du processus 4.36 :

$$V_{i+1} + V_{i-1} - 2 V_i = \frac{h^2}{\alpha_\tau} g(\alpha_V V_i, X_i) \cdot \frac{\partial V_i}{\partial \tau} \quad (4.44)$$

En étudiant les problèmes du type 4.44 sur les réseaux RC il faut accomplir la condition :

$$RC = \frac{h^2}{\alpha \tau} \quad (4.45)$$

Les modèles électriques 4.41 et 4.44 seront utilisés dans la partie suivante de notre travail.

4.2.1.2 - SIMULATION SUR DES RESEAUX RC AVEC DES ELEMENTS NON LINEAIRES.

L'élaboration présentée dans ce sous chapitre a un caractère théorique et s'efforce d'appuyer sur la nécessité de rechercher des solutions de constructions accomplissant les relations obtenues.

La charge emmagasinée dans le condensateur non linéaire C (C varie en fonction de la tension U) est donnée par :

$$Q = C(U) \cdot U \quad (4.46)$$

où U est la différence de potentiel aux bornes du condensateur.

D'où le courant i_c qui parcourt le condensateur :

$$i_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(C \cdot U)}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt} + U \cdot \frac{dC}{dt} = \left(C + U \cdot \frac{dC}{dU} \right) \cdot \frac{dU}{dt} \quad (4.47)$$

Dans le cas d'un condensateur linéaire on a bien $\frac{dC}{dU} = 0$ et le courant i_c est égal d'après 4.47 :

$$i_c = C \cdot \frac{dU}{dt} \quad (4.48)$$

Comme le condensateur est non linéaire on utilisera la formule :

$$i_c = \left(C(U) + U \cdot \frac{dC(U)}{dU} \right) \cdot \frac{dU}{dt} \quad (4.49)$$

A partir de 4.49 on calculera les valeurs de i_c correspondants à celle de $C(U)$ donnée :

a) - $C(U) = k \cdot U$	$i_c = 2 \cdot k \cdot U \cdot \frac{dU}{dt}$
b) - $C(U) = k \cdot U^2$	$i_c = 3 \cdot k \cdot U^2 \cdot \frac{dU}{dt}$
c) - $C(U) = k \cdot \frac{1}{U^{1/2}}$	$i_c = K \cdot \frac{1}{2 U^{3/2}} \cdot \frac{dU}{dt}$
d) - $C(U) = k \cdot \frac{1}{U}$	$i_c = 0$
e) - $C(U) = k \cdot \ln U$	$i_c = k \cdot (\ln U + 1) \cdot \frac{dU}{dt}$

En utilisant la relation 4.49 dans la description du modèle réticulaire RC on suppose la mise à la terre d'une des plaques du condensateur et ainsi la tension U sera confondue avec le potentiel de noeud du réseau $U_i = V_i$:

En créant le réseau RC avec les résistances et des condensateurs non linéaires en parallèle de capacité $C(V_i)$, on peut présenter le bilan des circuits dans les noeuds intérieurs du réseau :

$$G \cdot (V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i) + I_i = \left(C_i + V_i \frac{dC_i}{dV} \right) \cdot \frac{dV_i}{dt} \quad (4.50)$$

En même temps on considère le processus avec des constantes réparties 4.35 et son modèle électrique 4.41, c'est à dire :

$$G \cdot (V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i) + I_i = h^2 \cdot g(\alpha \sqrt{V_i}, X_i) \cdot \frac{dV_i}{dt} \quad (4.51)$$

Le second membre de 4.41 a aussi le caractère de **courant** d'où en profitant de 4.50 et de 4.41 on peut déterminer la fonction de l'affinité de la capacité $C(U_i)$ de l'équation différentielle.

$$C + V \cdot \frac{dC}{dV} = h^2 \cdot g(\mathcal{L}_V V, X) \quad (4.52)$$

Soit après la transformation et introduction de la notation auxiliaire :

$$q(V) = h^2 \cdot g(\mathcal{L}_V V, X) \quad (4.53)$$

On détermine la fonction d'affinité de la capacité $C(V_i)$ de l'équation :

$$\frac{dC}{dV} + \frac{C}{V} = \frac{q(V)}{V} \quad (4.54)$$

L'équation différentielle 4.54 possède la solution générale sous forme de :

$$C(V) = \frac{1}{W(V)} \cdot \left[\int^V W(V) \cdot R(V) \cdot dV + A \right] \quad (4.55)$$

Avec :

$$W(V) = \exp \left[\int^V P(V) \cdot dV \right] = V \quad (4.56)$$

$$R(V) = \frac{q(V)}{V} \quad (4.57)$$

$$P(V) = \frac{1}{V} \quad (4.58)$$

A = Constante.

En tenant compte des relations 4.55 et 4.58, la capacité du condensateur en parallèle est égale à :

$$C(V) = \frac{1}{V} \cdot \left[\int^V q(V) \cdot dV + A \right] \quad (4.59)$$

Pour effectuer l'analyse de l'influence de la valeur de la constante A, on place la relation 4.59 dans l'expression 4.50 décrivant le circuit passant par le condensateur en parallèle (non linéaire) :

$$i_c = \left\{ \frac{1}{V} \left[\int^V q(v) dv + A \right] + V \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{V} \left[\int^V q(v) dv + A \right] \right) \right\} \frac{dV}{dt} = \quad (4.60)$$

$$= q(V) \frac{dV}{dt}$$

D'où on conclue, que la valeur de la constante A n'influe pas la valeur du circuit, donc pour simplifier on prend $A = 0$

Donc l'expression générale décrivant la capacité des condensateurs en parallèle du réseau RC a la forme :

$$C_i(V) = \frac{h^2}{V_i} \cdot \int^{V_i} g(\sigma, V, X_i) \cdot dV \quad (4.61)$$

Comme exemple on donne la fonction $C(U)$ pour les affinités souvent rencontrées :

- | | | |
|-----|------------------------------------|--|
| a)- | $q(V) = k \cdot V$ | $C(U) = \frac{k}{2} \cdot V$ |
| b)- | $q(V) = k \cdot V^2$ | $C(V) = \frac{k}{3} \cdot V^2$ |
| c)- | $q(V) = k \cdot \frac{1}{V^{1/2}}$ | $C(V) = 2 \cdot k \cdot \frac{1}{V^{1/2}}$ |
| d)- | $q(V) = k \cdot \frac{1}{V}$ | $C(V) = \frac{k}{V} \cdot \ln V$ |
| e)- | $q(V) = k \cdot \ln V$ | $C(V) = k \cdot (\ln V - 1)$ |

L'interprétation des conditions aux limites par les condensateurs en parallèle est présentée en 2.

2- Les réseaux RC avec des résistances non linéaires en parallèle

On considère l'équation quasi-linéaire de FOURIER 4.35 soumise à la transformation de GOODMAN : $d\phi = b(X, \phi) \cdot d\psi$ (voir chapitre 2 "LES METHODES").

La forme obtenue de l'équation permet la construction du réseau RC possédant les résistances en parallèle et les valeurs homogènes de la capacité des condensateurs.

Il faut souligner la complexité de construction des éléments résistants ainsi que les difficultés technologiques liées avec la réalisation des éléments répétés avec une caractéristique déterminée. Pour le groupe de problèmes i.e des équations du type 4.36 avec le paramètre non linéaire, homogènes de l'espace, on peut utiliser le modèle électrique suivant :

$$V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i = \frac{h^2}{L\tau} \cdot g(\mathcal{L}_V V) \frac{dV_i}{d\tau} \quad (4.62)$$

Dans ce cas, les résistances du réseau devront posséder une caractéristique conforme avec la fonction affine (non linéaire) :

$$V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i = R(V) \cdot C \cdot \frac{dV_i}{d\tau} \quad (4.63)$$

d'où : $R(V) = g(\mathcal{L}_V V) \cdot C$

Bien sûr les difficultés liées avec la réalisation technique restent les mêmes.

3- L'interprétation des conditions aux limites dans les réseaux avec des éléments non linéaires

Le problème de l'interprétation des conditions aux limites dans les réseaux avec des éléments non linéaires, et surtout avec des condensateurs en parallèle prend de l'importance dans le chapitre 4.1.1.2 (2°). On a présenté deux solutions équivalentes. Autant pour les réseaux avec des résistances en parallèles (les deux solutions peuvent être utilisées échangeablement), que pour les réseaux avec des condensateurs en parallèles, se pose le problème d'équivalence de la détermination des paramètres du réseau.

On considère deux moyens pour poser les conditions initiales par rapport au condensateur $C = C(U)$.

Le chargement initial du condensateur (fig.4.3 .a) a la tension $U = V_0 = V(0)$, détermine la capacité de l'état initial pour le commencement du processus non établi. Cette capacité est égale $C = C \sqrt{V(0)}$.

Le deuxième moyen (fig. 4.3b) c'est-à-dire le branchement en série du condensateur non chargé avec la source de tension de valeur SEM-eme $E = V(0)$, détermine la valeur de la capacité pour la différence des potentiels des plaques égales à zéro(0) i-e $C = C(0)$.

Puisque en général pour les condensateurs non linéaires (en parallèles) :

$$C(0) \neq C / V(0) \quad ; \quad V(0) \neq 0 \quad (4.64)$$

D'où résulte le manque d'équivalence de l'interprétation des paramètres du réseau. La figure 4.3c représente l'exemple du manque d'équivalence pour la fonction de la capacité $C = k \cdot \bar{U}$.

Il se pose le problème de la détermination de la correction de la méthode d'introduction des conditions initiales.

Il faut souligner la nécessité de se rapporter au problème même avec des constantes réparties. Puisque dans les processus réels on trouve toujours la valeur déterminée de la capacité de l'espace qui résulte de la distribution initiale des valeurs du champ potentiel.

Donc la méthode du chargement initial du condensateur en parallèle (non linéaire) assurant l'analogie complète avec le processus réel, est la méthode correcte.

4.2.1.3 - SIMULATION SUR LES RESEAUX RC AVEC MODIFICATION DES CONDITIONS INITIALES

* 1)- Algorithme de la modification continue des conditions initiales

Comme on a présenté ci-dessus, la méthode du modelage des problèmes quasi-linéaires sur les réseaux^{RC} avec des éléments non linéaires, est difficile et presque impossible dans la réalisation pratique.

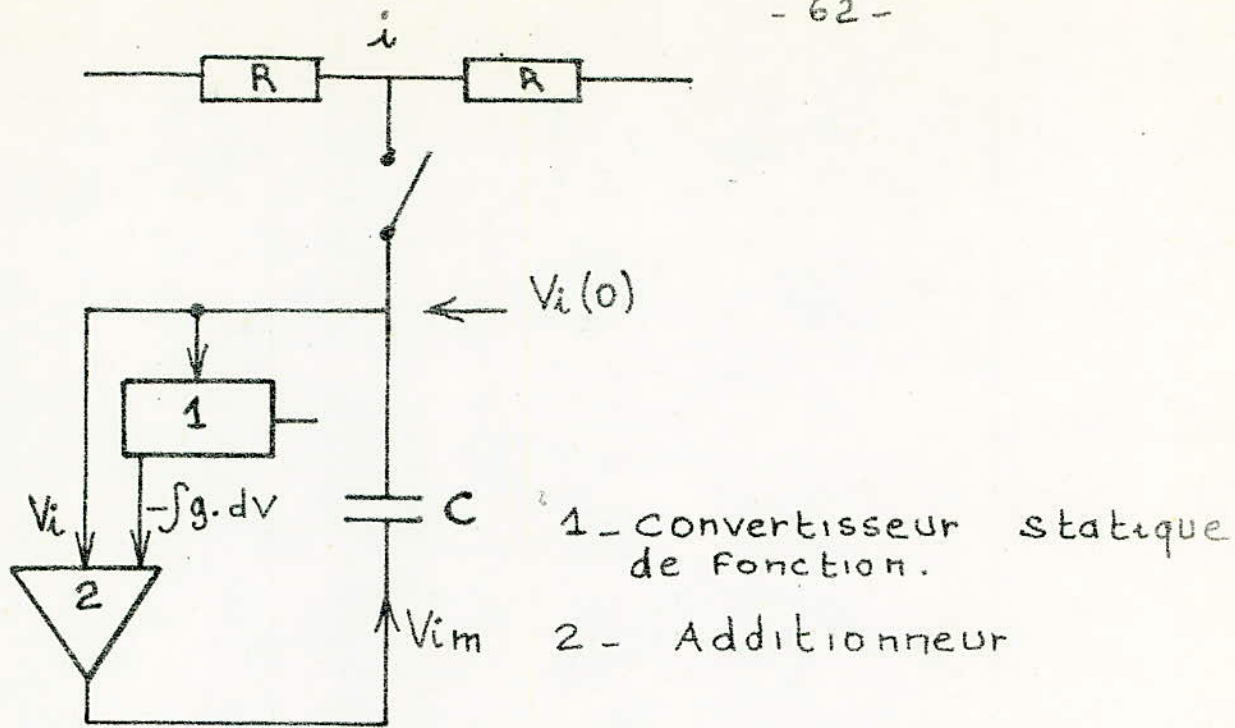
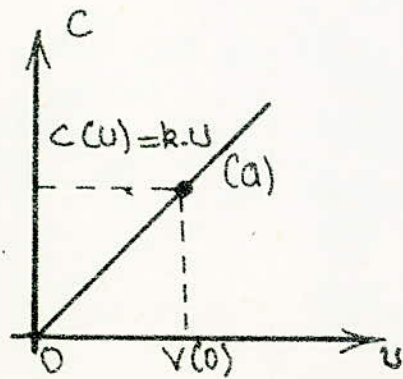
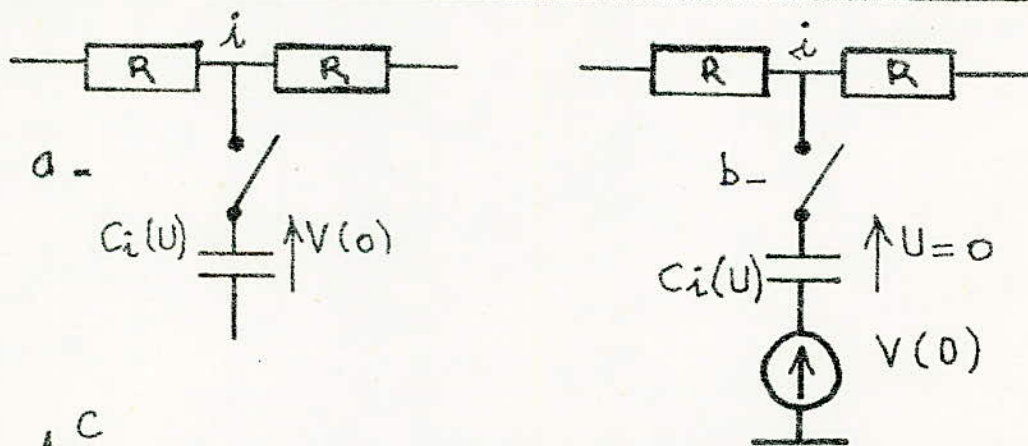


Fig 4.4 : Schema de realisation du modele RC avec modification continue des C.I



- a - cond. initiale introduite par la charge initiale.
- b - condition initiale introduite par la serie SEM.
- c - Caracteristique de la capacite du cond. avec les points de marche pour les cas a et b.

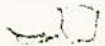


Fig 4.3 : Exemple du manque d'equivalence pour la fonction $C=k.U$

Donc en se basant sur la règle de la construction des modèles réticulaires accomplissant un bilan énergétique donné on essaiera de déterminer un réseau RC homogène dans lequel sont réalisées des affinités définies.

Ci-dessous est présentée ^{l'idée} de la simulation quasi-linéaire du problème aux limites. On introduit le terme de la modification continue des conditions initiales des condensateurs. Il détermine l'échangeabilité en temps de la valeur constante de la condition initiale, comprise par le branchement en série du condensateur avec la source de tension.

$$i_c = C \cdot \frac{d(V - V_m)}{dt} \quad (4.65)$$

Avec $V - V_m$: potentiels des plaques du condensateur.

On peut constater que pour $V_m = V_m(t)$, se fait une possibilité de façonner les changements de la valeur du courant $i_c(t)$.

Jusqu'ici $V_m = V_m(0)$ n'influe pas sur la valeur instantanée du courant passant par le condensateur. On prend les modèles électriques 4.41 et 4.44 comme le résultat d'application des lois de l'analogie par rapport aux équations 4.35 et 4.36 soumises à la transformation de KIRCHOFF.

Dans les deux modèles, les valeurs des courants passant par les condensateurs du réseau RC, ont le caractère non linéaire.

En profitant de la possibilité 4.64 de l'introduction en valeur instantanée des courants, on essaiera de déterminer les conditions d'équivalence du modèle réticulaire RC avec la modification continue des conditions initiales et de déterminer le modèle général électrique du processus.

En assemblant les modèles électriques du processus et les équations décrivant le réseau RC avec la modification continue on obtient : 4.65 et 4.66.

Les équations 4.65 et 4.66 seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} G. (V_{i+1} + V_{i-1} - 2 V_i) + I_i = h^2 . g(\mathcal{L}.V , X_i) . \frac{dV_i}{d\tau} \\ G. (V_{i+1} + V_{i-1} - 2 V_i) + I_i = C \frac{d(V_i - V_{im})}{d\tau} \end{array} \right. \quad (4.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (V_{i+1} + V_{i-1} - 2 V_i) = \frac{h^2}{\mathcal{L}\tau} g(\mathcal{L}.V_i , X_i) \frac{dV_i}{d\tau} \\ (V_{i+1} + V_{i-1} - 2 V_i) = RC . \frac{d(V_i - V_{im})}{d\tau} \end{array} \right. \quad (4.66)$$

En accomplissant préliminairement les conditions d'équivalence 4.38 et 4.40 pour le système 4.65 et condition 4.45 (i.e $h^2 = .RC$ pour le système 4.66, on détermine l'équation différentielle liant la fonction d'affinité avec la fonction de modification des conditions initiales :

$$g(\mathcal{L}.V_i , X_i) \frac{dV_i}{d\tau} = \frac{d(V_i - V_{im})}{d\tau} \quad (4.67)$$

En effet on résout l'équation :

$$dV_{im} = [1 - g(V_i , X_i)] . dV_i \quad (4.68)$$

La valeur instantanée de la tension modifiant est égale :

$$V_{im} = V_i - V_i(0) - \int_{V_i(0)}^{V_i} g(\mathcal{L}.V_i , X_i) . dV_i \quad (4.69)$$

avec $V_i(0)$: condition initiale .

Puisque dans le processus non établi dans le réseau R-C n'est valable que la composante variable de la tension modifiante, donc en négligeant dans la réalisation, la composante continue on utilise la relation :

$$V_{im} = V_i - g \quad (\mathcal{L}_v \cdot V_i, X_i) \quad (4.70)$$

avec : $(\mathcal{L}_v \cdot V_i, X_i)$ fonction primitive de la fonction :

$$g \quad (\mathcal{L}_v \cdot V_i, X_i)$$

La conception présentée est la **génération** du problème du modelage des problèmes linéaires hétérogènes sur les réseaux homogènes R-C.

2- Réalisation du modèle R-C avec modification continue des conditions initiales.

La **relation** 4.70 détermine les conditions nécessaires pour la réalisation de la modification continue des conditions initiales. Puisque la détermination directe de la valeur du potentiel de noeud (de jonction) est impossible, on utilise donc une contre-réaction.

En tenant compte du modèle modifié R-C caractérisé par les qualités déterminées, on accouple conformément deux plaques de tous les condensateurs. La figure 4.4. **représente l'idée générale** de la réalisation du modèle R-C avec la modification continue des conditions initiales. Le système présenté concerne tous les noeuds du réseau R-R modelant le processus quasi-linéaire avec des constantes réparties. Par égard au caractère **hétérogène** de la fonction affine dans les problèmes particuliers, la structure du convertisseur statique de fonction doit subir conformément le changement. D'où la construction des réseaux R-C spécialisés destinés au type de la fonction affine déterminée. Les exemples sont tous les problèmes de la filtration non-établie qui se basent sur l'affinité du type :

$$g (\theta, n) = B (n) \cdot \theta^{1/2} \quad (4.71)$$

résultant de la transformation de KIRCHOFF.

La qualité de la méthode présentée est la possibilité d'obtenir la solution directe d'un problème aux limites non-linéaires sur le réseau R-C homogène, dans l'instant de temps quelconque. Les résultats obtenus peuvent être enregistrés en ^{dés} points d'espace désignés ou pour un intervalle de temps défini. L'inconvénient de la méthode est la nécessité d'utilisation d'un grand nombre d'éléments électroniques.

4.2.1.4. Modelage sur les réseaux R-C avec la modification discrète des conditions initiales.

1- Algorithme de la modification discrète des conditions initiales

Il existe une tendance de créer des systèmes hybrides de calcul qui est utilisée dans les processus avec constantes réparties. On distingue deux directions du développement de ce problématique. La première prédisposant l'étude des algorithmes pour les systèmes hybrides composés de la machine analogique classique et de la machine numérique.

La deuxième basée sur les méthodes réticulaires, étudiées pour le système hybride composé de réseaux R-R, soit de réseau R-C qui représente la machine numérique.

Dans ce cas, le réseau accomplit la fonction du sous-programme, en générant la solution de l'étape donnée du problème.

Les études connues concernent en général l'utilisation des réseaux R-R dans le système hybride. A cause des difficultés de construction, la coopération des réseaux R-C avec la machine en chiffres est rarement réalisée.

L'étude [5] présente un essai de cette solution.

En prenant les hypothèses exposées en 4-21 , 4-55 on présente ci-dessous, la méthode du modelage des problèmes quasi-linéaires sur le réseau R-C homogène avec la modification discrète des conditions initiales.

En étudiant la méthode, on utilise les hypothèses suivantes :

a)- On ne considère que des équations aux dérivées partielles, quasi-linéaires, hétérogènes et unidimensionnelles soumises à la transformation de KIRCHOFF.

b)- Le problème est résolu sur le réseau R-C homogène en réalisation modifiée avec l'assistance de la machine numérique.

c)- La solution concerne la section de temps déterminée et est effectuée en un cycle de procédure (4.1.1.2 (2))

d)- Les conditions initiales de chaque cycle, constituent la solution du problème non-linéaire et sont modifiées par machine numérique dans l'étape de la modification de la phase passive du cycle précédent.

Donc au début, on résoud le problème linéaire sur le modèle R-C modifié en faisant le pas de temps de la longueur définie, en partant des conditions initiales égales aux valeurs de la solution du problème affine dans un instant de temps donné.

Ensuite, en profitant de l'information sur la distribution initiale, distribution de la solution après avoir effectué le pas de temps et la forme de la fonction affine de l'équation, on désigne la solution du problème non-linéaire pour l'instant fixant la fin du pas de temps. Figure 45a,b représente l'illustration des distributions et valeurs des potentiels de jonction pour les instants de temps quelconque t_k et t_{k+1} . La longueur du pas de temps est définie par la différence des instants de temps.

$$C_{k,k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k \quad (4.72)$$

Fig. 4.5 courbes de variabilité des potentiels de jonction dans la fonction de :

a) - La coordonnée spatiale.

b)- du temps.

1- Distribution initiale (τ_k)

2- Distribution de la solution linéaire (τ_{k+1})

3- Distribution de la solution affine non linéaire (τ_{k+1})

On a fait les considérations pour un noeud intérieur quelconque en tenant compte de l'influence des noeuds voisins, et pour un instant de temps quelconque τ_k traité comme le début du cycle suivant de la procédure. L'algorithme obtenu, il faut utiliser pour tous les noeuds intérieurs du réseau en partant du moment initial τ_k .

On considère le processus quasi-linéaire du type 4.36 désigné par le modèle électrique de la forme :

$$V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i = \frac{h^2}{Lz} g (L.V) \frac{dV_i}{d\tau} \quad (4.73)$$

Le réseau RC homogène sans les injections intérieures de courant est décrit par le système d'équations :

$$V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i = RC \frac{dV_i}{d\tau} \quad (4.74)$$

On considère que pour chaque noeud de l'espace, la solution linéaire est la somme de la solution du problème non linéaire et d'une valeur inconnue déterminée comme erreur de l'inacceptation de l'affinité :

$$V_i = V_i + \epsilon_i (\tau) \quad (4.75)$$

1. Distribution Initiale τ_k
2 - Distribution de la solution linéaire τ_{k+1}

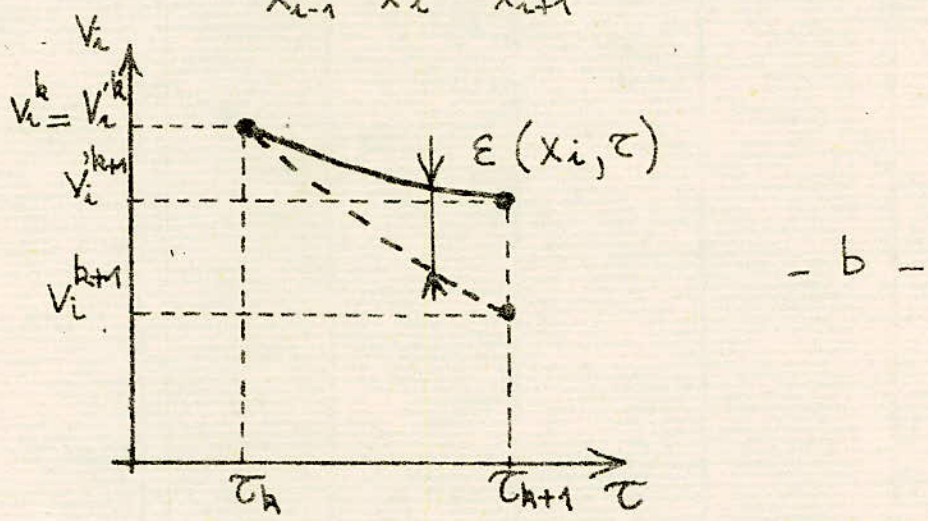
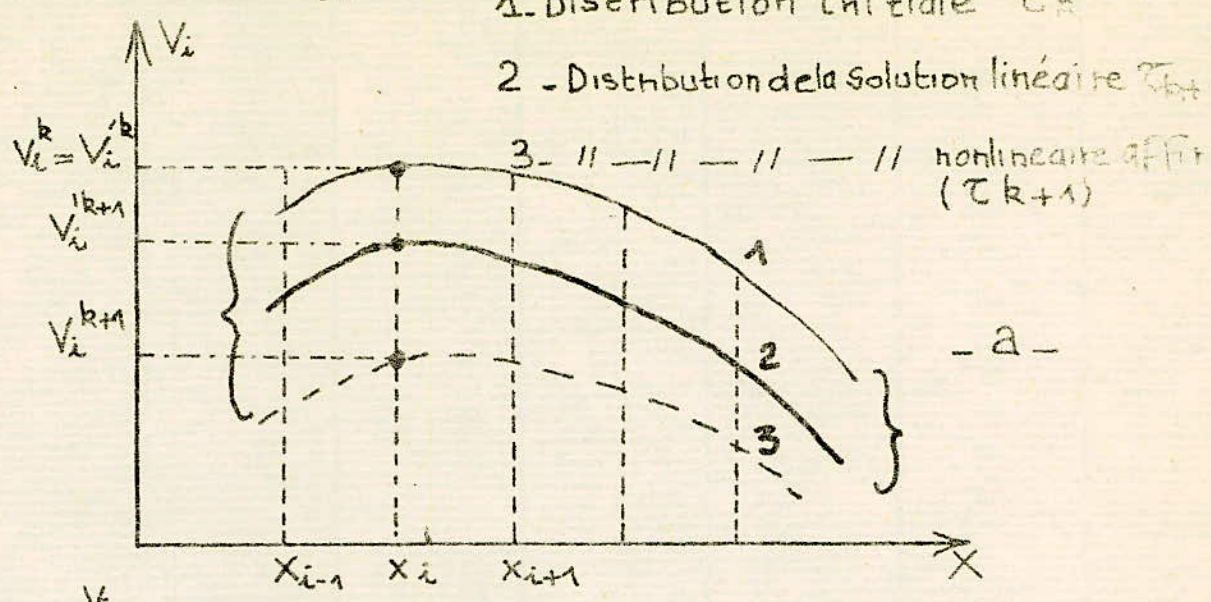


FIG 4.5: Courbes de Variabilité des potentiels de jonction
a - en fonction de X.
b - en fonction de t.

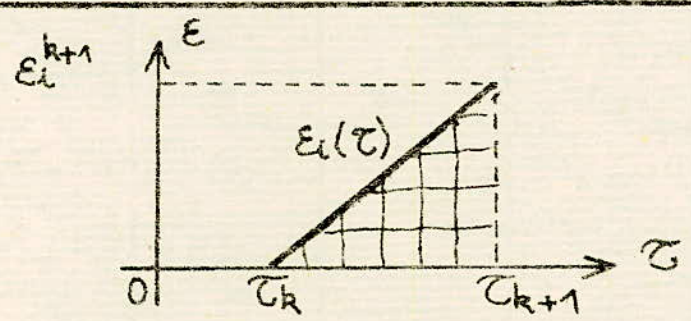


FIG 4.6: Relation entre l'erreur $E_i(\tau)$ et le temps.

En plus on pose :

- Pour le début du cycle : $\mathcal{E}_i(\tau_k) = \mathcal{E}_i^k = 0, V_i^k = V_i^k$

- Pour la fin du cycle : $\mathcal{E}_i(\tau_{k+1}) = \mathcal{E}_i^{k+1}$

En utilisant 4.75 pour 4.74 on obtient :

$$(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i) + (\mathcal{E}_{i+1} + \mathcal{E}_{i-1} - 2\mathcal{E}_i) = RC \frac{dV_i}{d\tau} \quad (4.76)$$

En remplaçant 4.73 en 4.76, on obtient après les transformations :

$$dV_i' = \frac{h^2}{2\tau RC} g(Lv, V_i, X_i) dV_i + \frac{1}{RC} (\mathcal{E}_{i+1} + \mathcal{E}_{i-1} - 2\mathcal{E}_i) d\tau \quad (4.77)$$

En cherchant la solution 4.77 pour la section de temps $\Delta \tau_{k, k+1}$ on intègre l'expression, on obtient :

$$\int_{V_i^k}^{V_i^{k+1}} dV_i' = \frac{h^2}{2\tau RC} \int_{V_i^k}^{V_i^{k+1}} g(Lv, V_i, X_i) dV_i + \frac{1}{RC} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\mathcal{E}_{i+1} + \mathcal{E}_{i-1} - 2\mathcal{E}_i) d\tau \quad (4.78)$$

En obtenant après la transformation :

$$\int_{V_i^k}^{V_i^{k+1}} g(Lv, V_i, X_i) dV_i = \frac{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\mathcal{E}_{i+1} + \mathcal{E}_{i-1} - 2\mathcal{E}_i) d\tau}{h^2} - \frac{d\tau}{h^2} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\mathcal{E}_{i+1} + \mathcal{E}_{i-1} - 2\mathcal{E}_i) d\tau \quad (4.79)$$

Dans le but de déterminer la valeur de l'intégrale du laplacien discrétiser de l'erreur et de l'inacceptation de l'affinité ϵ on pose que pour les petits accroissements de temps (courts pas de temps) l'erreur ϵ_i dans chaque noeud est la fonction linéaire de temps (fig.3.9) et est déterminé par la relation :

$$\epsilon_i(\tau) = \frac{\epsilon_i^{k+1}}{\tau_{k+1} - \tau_k} (\tau - \tau_k) \quad (4.80)$$

La relation considérée entre l'erreur $\epsilon_i(\tau)$ (fig 4.6) et le temps.

La valeur de l'intégrale de l'erreur est donc :

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \epsilon_i(\tau) d\tau = \frac{(\tau_{k+1} - \tau_k) \epsilon_i^{k+1}}{2} \quad (4.81)$$

En substituant 4.81 dans 4.79 on obtient :

$$\int_{V_i^k}^{V_i^{k+1}} g(L_v, V_i, x_i) dV_i = \frac{\Delta \tau RC}{h^2} (V_i^{k+1} - V_i^k) \frac{\Delta \tau (\tau_{k+1} - \tau_k)}{2h^2} [\epsilon_i^{k+1} - \epsilon_i^k] \quad (4.82)$$

En substituant aussi 4.72 et 4.75 dans 4.82 on a :

$$\int g(L_v, V_i, x_i) dV_i = \frac{\Delta \tau RC}{h^2} (V_i^{k+1} - V_i^k) - \frac{\Delta \tau \Delta k, k+1}{2h^2} \left[(V_i^{k+1} - V_i^k) \rightarrow (V_i^{k+1} - V_i^k) - 2(V_i^{k+1} - V_i^k) \right] \quad (4.83)$$

En liant les paramètres de l'équation du modèle électrique et du réseau R-C conformément à 4.45 on considère que $h^2 = \alpha \epsilon \cdot R \cdot C$

En obtenant la forme définitive de l'équation 4.83 comme :

$$\int_{V_i^k}^{V_i^{k+1}} g(\alpha_v \cdot V_i, x_i) dV_i = (V_i^{k+1} - V_i^k) - \frac{\Delta T_{i,k+1}}{2RC} \left[(V_{i+1}^{k+1} - V_{i+1}^k) + (V_{i-1}^{k+1} - V_{i-1}^k) - 2(V_i^{k+1} - V_i^k) \right] \quad (4.84)$$

La valeur recherchée de la solution c'est-à-dire V_i^{k+1} ne peut pas être déterminée directement parcequ'elle paraît aussi dans la limite supérieure de l'intégrale de la fonction affine et dans le membre tenant compte de l'influence des nœuds voisins. En fait on obtient le système d'équations affines.

On propose l'utilisation des méthodes d'itération [4 - 71] qui facilitent la solution cherchée.

Dans ce but, on introduit l'indice "j" déterminant le numéro de l'itération suivante. D'où la désignation de la valeur recherchée. V_i^{k+1}

Exemple :

On désigne la valeur de la solution V_i^{k+1} traitée comme le résultat de l'itération suivante :

$$V_i^{k+1} = R \varphi^{-1} \left\{ \varphi(V_i^k) + (V_i^{k+1} - V_i^k) - \frac{\Delta T_{i,k+1}}{2RC} \left[(V_{i+1}^{k+1} - V_{i+1}^k) + (V_{i-1}^{k+1} - V_{i-1}^k) - 2(V_i^{k+1} - V_i^k) \right] \right\} \quad (4.85)$$

Avec : φ^{-1} - la fonction réciproque de la fonction primitive $g(\alpha_v \cdot V, x)$

k - Coefficient résultant

La procédure de l'itération commence à l'hypothèse :

$$0 \quad v_i^{k+1} = v_i^{k+1} \quad (4.86)$$

La fin du processus d'itération doit avoir lieu après l'obtention dans chaque noeud :

$$\left| v_i^{j+1, k+1} - v_i^{j, k+1} \right| < \delta \quad ; \quad \delta > 0 \quad (4.87)$$

Dans le but de déterminer la condition de convergence de la procédure d'itération, il faut comparer les résultats de la solution dans les pas d'itération suivants :

Les paramètres qui ont une influence directe sur la convergence sont :

- La longueur du pas de temps effectué et le pas de la discrétisation de l'espace. D'où, le coefficient de convergence peut être défini comme suit :

$$\gamma = \Delta \tau \frac{\Delta \bar{t}_{k, k+1}}{2 h^2} = \frac{\Delta \bar{t}_{k, k+1}}{2 R C} \quad (4.88)$$

L'utilisation pratique de la procédure présentée, a démontré la correction de la méthode permettant d'obtenir la solution après avoir effectué quelques itérations.

L'utilisation de la méthode avec la modification discrète des conditions initiales pour le processus avec les constantes réparties du type 4.35 conduit à la relation semblable, sous l'exigence de réaliser des conditions d'analogie déterminées.

2- Réalisation du modèle R-C avec la modification discrète des conditions initiales.

Présenté en 1, l'algorithme de détermination de la solution possède une structure compliquée qui suggère la nécessité d'utilisation de la technique du calcul numérique. Il faut souligner le fond du problème consistant à l'élimination du processus d'itération, et à mettre les calculs techniques sur calculateur numérique.

Le réseau R-C homogène accompli dans la méthode, la fonction de sous-programme pour la solution du problème linéaire aux limites, ce qui est important dans le modelage des processus sur des espaces grands et complexes.

La méthode nécessite l'utilisation du modèle R-C modifié (2) qui rend possible l'arrêt du processus non établi du réseau à l'instant de temps quelconque. La réalisation de la méthode avec modification discrète des conditions initiales peut être présentée par le schéma fonctionnel (4.7).

Figure 4.8 : Légende de la désignation des blocs :

- M C : Machine numérique - Unité qui transforme les données selon algorithme posé et qui coordonne le travail du système de contrôle (manoeuvre).
- B : Tampon ensemble des machines qui adoptent les vitesses réelles du travail des systèmes de la partie chiffrée et analogique.
- CNA : Convertisseur numérique analogique, transformant l'information binaire en valeur analogique de la tension électrique (valeur des conditions initiales).
- D : Distributeur, machine distribuant le signal électrique en points du réseau (introduction des conditions initiales dans les condensateurs du réseau R-C).

determination de la methode
determination de l'espace
determination des parametres

start

neutralisation du temps
//--// des condens.

$t=0$
 $V_i=0$

CI du processus
 V_i^0

Modification des conditions
initiales.

$V_i^k \rightarrow V_i^{k+1}$

start
mesure du temps initiation du
travail RC

t_k

V_i^k

Fin de la mesure
du temps Arrêt du
travail RC
STOP

t_{k+1}

V_i^{k+1}

$\Delta t_{k,k+1}$

Enregistrement du temps

Mesure et enregistrement
de la solution lineaire
sur le reseau RC

V_i^{k+1}

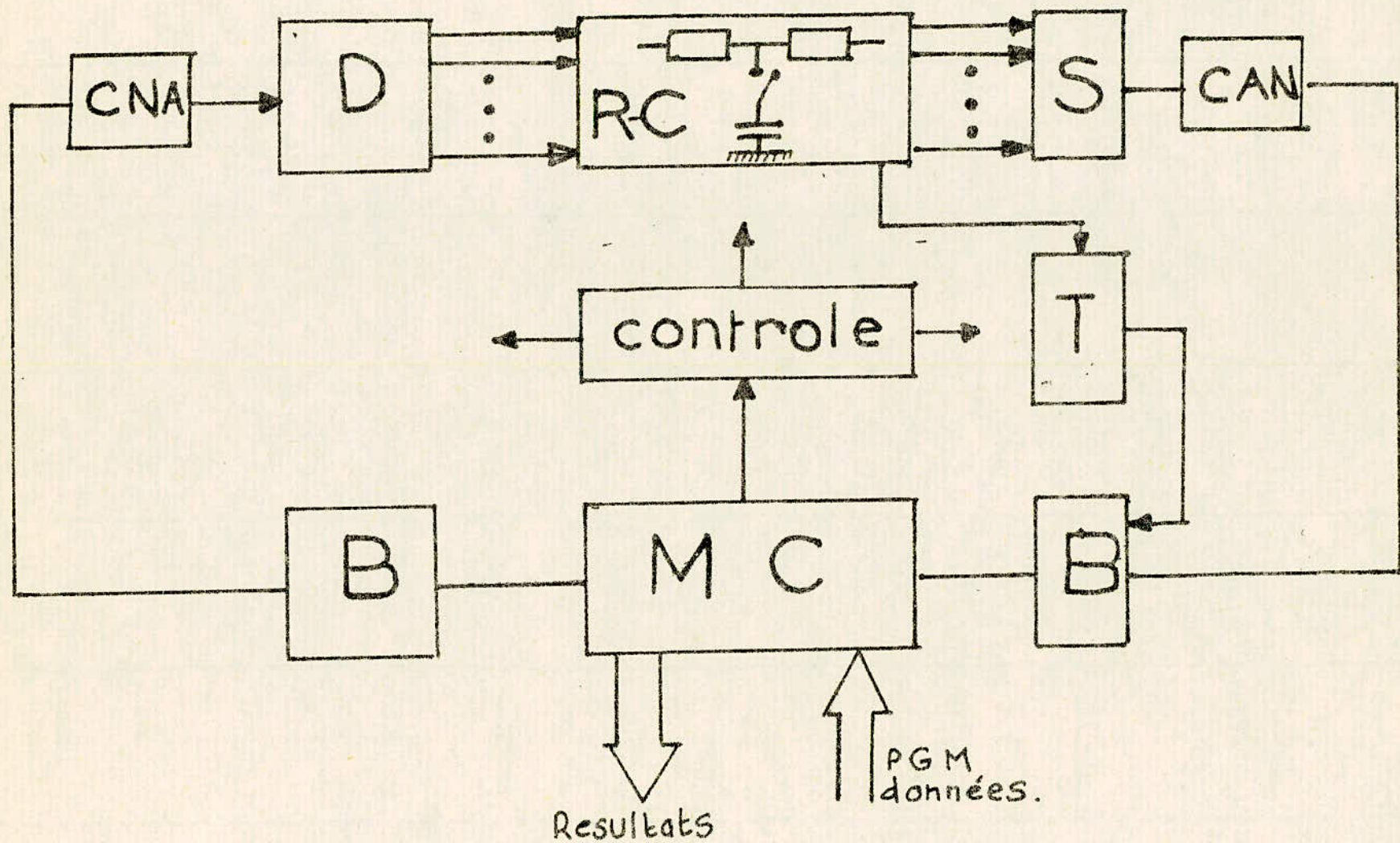
PGM
donnees
 $i \in [0, n]$

Transformation des donnees
calcul de la valeur de la
solution affine

Resultats

V_i^{k+1}

Fig 4.7 schema bloc de la modification des conditions initiales.



-9t-

Fig 4.8. Proposition de la Realisation technique du Systeme hybride

R-C : Le réseau R-C homogène en forme modifiée avec les conditions aux limites et les circuits d'injection déterminée.

S : Pulsateur - machine liant les points conformes du réseau (plaque de condensateur) avec le système de mesure (convertisseur CAN).

CAN : Convertisseur analogique numérique. Machine transformant le signal initial analogique en information binaire.

T : Chronomètre en chiffres- Machine mesurant la longueur du pas de temps effectué (la durée de la phase active du modèle R-C).

Contrôle : L'ensemble des machines avec l'opération logique réalisant le contrôle du travail de certains éléments du système, qui est coordonné par ordinateur numérique.

4.2.2. - Simulation des problèmes quasi-linéaires aux limites sur les réseaux R-R homogène.

4.2.2.1- La méthodique du procédé.

Les deux directions fondamentales du procédé sont :

a)- Simulation des problèmes sur des réseaux R-R avec les éléments variables.

b)- Simulation des problèmes sur les réseaux R-R homogènes en utilisant les méthodes d'itération qui engage la structure du réseau dans chaque pas d'itération.

- Le premier moyen possède deux sortes de réalisation technique. Le plus souvent, c'est l'échange manuel des résistances du réseau, utilisant les calculs basés sur la linéarisation de l'affinité.

La deuxième méthode est l'utilisation de résistances contrôlées. Le plus souvent ce sont des photorésistances contrôlées numériquement selon l'algorithme résultant de la linéarisation de l'affinité et basé sur la connaissance des caractéristiques statiques de chacun des éléments.

Très souvent, la détermination des valeurs définitives des résistances du réseau dans le pas de temps donné, a un caractère d'itération.

- La deuxième direction du procédé, utilise le réseau R-R homogène, sur lequel par l'intermédiaire des injections de courants déterminées par l'itération, on obtient la distribution cherchée des potentiels de jonction.

Les deux moyens du procédé ne permettent pas d'obtenir la solution directement ce qui rend difficile l'étude de l'influence des paramètres de l'espace sur la distribution des potentiels, d'où la nécessité de l'utilisation d'un matériel technique compliqué.

Dans les chapitres suivants, on a présenté des propositions de deux méthodes :

- a)- Méthode du réseau R-R avec la rétro-action de jonction qui permet d'obtenir la solution d'un problème affine dans chaque pas de temps.
- b)- Méthode du réseau R-R avec la correction des potentiels de jonction-élimine le processus d'itération sur la structure du réseau.

4.2.2.2 - Modelage sur les réseaux R-R homogènes avec la rétro-action de jonction

1- Algorithme de la génération des potentiels instantanés.

On pose le modèle homogène R-R décrit par l'équation de jonction :

$$G (V_{i+1}^{k+1} + V_{i-1}^{k+1} - 2V_i^{k+1}) + I_i = G_t (V_i^{k+1} - V_{ip}^{k,k+1}) \quad (4.89)$$

$$\text{ou : } G(V_{i+1}^{k+1} + V_{i-1}^{k+1} - 2V_i^{k+1}) = G_t (V_i^{k+1} - V_{ip}^{k,k+1}) \quad (4.90)$$

Avec : $V_{ip}^{k,k+1}$: Le potentiel instantané donné sur l'extrémité libre de la résistance $G_{t,i}$ déterminé pour le pas de temps $\Delta t_{k,k+1}$.

On considère les modèles électriques du processus du type :

$$G(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i) + I_i = h^2 g (\mathcal{L}_v \cdot V_i, x_i) \frac{dV_i}{dt} \quad (4.91)$$

$$\text{ou : } V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i = h^2 g (\mathcal{L}_v \cdot V_i, x_i) \frac{dV_i}{dt} \quad (4.92)$$

Accomplissant les conditions 4.40 pour $\mathcal{L}_T = 1$.

Ensuite, on compare les équations du modèle électrique et du réseau R-R c'est-à-dire, 4.89 avec 4.91 et 4.90 avec 4.92, pour un pas de temps déterminé.

En résultant de la comparaison, on obtient les relations :

$$G_t (V_i^{k+1} - V_{ip}^{k,k+1}) = h^2 g(\mathcal{L}_v \cdot V_i, x_i) \frac{dV_i}{dt} \Big|_{V_i = V_i^{k+1}} \quad (4.93)$$

et

$$\frac{G_t}{G} (V_i^{k+1} - V_{ip}^{k,k+1}) = h^2 g(\mathcal{L}_v \cdot V_i, x_i) \frac{dV_i}{dt} \Big|_{V_i = V_i^{k+1}} \quad (4.94)$$

En discrétisant la dérivée par rapport au temps à l'aide du quotient aux différences régressives, on obtient les relations :

$$G_t (V_i^{k+1} - V_{ip}^{k,k+1}) = \frac{h^2}{\Delta t_{k,k+1}} g(\mathcal{L}_v \cdot V_i^{k+1}, x_i) (V_i^{k+1} - V_i^k) \quad (4.95)$$

$$\frac{G_t}{G} (V_i^{k+1} - V_{ip}^{k,k+1}) = \frac{h^2}{\Delta t_{k,k+1}} g(\mathcal{L}_v \cdot V_i^{k+1}, x_i) (V_i^{k+1} - V_i^k) \quad (4.96)$$

En introduisant les conditions d'équivalence pour les deux (2) cas :

$$G_t = \frac{h^2}{\Delta t_{k;k+1}} \quad (4.97) \text{ pour } 4.95$$

et

$$\frac{G_t}{G} = \frac{h^2}{\Delta t_{k,k+1}} \quad (4.98) \text{ pour } 4.96.$$

On obtient après la transformation, la relation déterminant la valeur du potentiel instantané :

$$V_{ip}^{k,k+1} = V_i^{k+1} - g(\mathcal{L}_V V_i^{k+1}, X_i) \cdot (V_i^{k+1} - V_i^k). \quad (4.99)$$

Cela veut dire, qu'en introduisant les valeurs des potentiels $V_{i,p}^{k,k+1}$ sur les extrémités libres de toutes les résistances à temps du réseau R-R, on obtient pour le problème affine, la distribution voulue des potentiels de jonction.

2- Réalisation du modèle R-R avec la rétro-action de jonction.

Pour la réalisation on prend un réseau R-R homogène rempli par les résistances déterminées par les conditions d'équivalence (4.40 - 4.97- 4.98.)

Ensuite, on enveloppe chaque noeud et la résistance de temps G_t avec le lacet de la rétro-action de jonction pour que les résistances à temps soient alimentées par la tension $V_{ip}^{k,k+1}$

La fig. 4.9 présente le schéma-bloc de la rétro-action de jonction :

1. - Convertisseur
- 2 et 4. - Additionneur
3. - Membre de multiplication,

De même que dans la méthode des réseaux R-C avec modification continue des conditions initiales, le convertisseur de fonction est réalisé par un type déterminé de la fonction affine,

L'initiation du travail du modèle se fait par l'application des conditions initiales, des sources d'injection et l'application des potentiels de la distribution initiale V_i^0 .

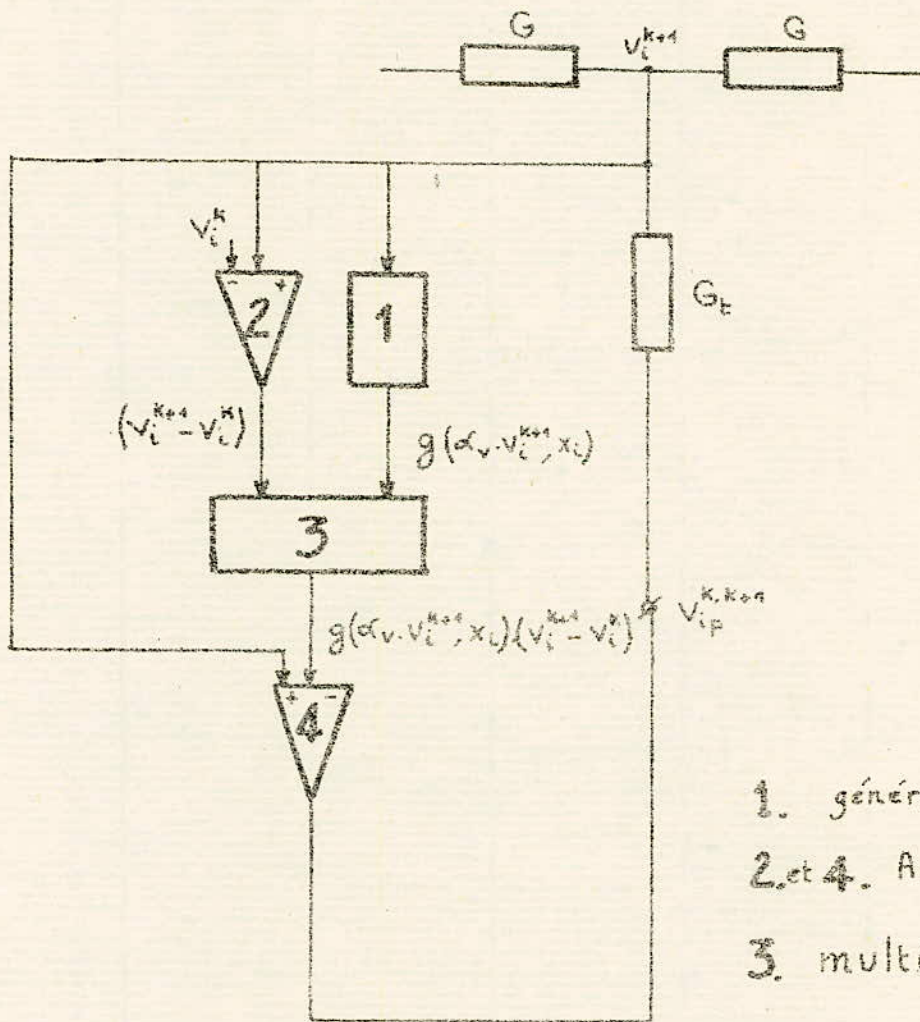
4.2.2.3 - Simulation sur les réseaux R-R avec la correction des potentiels de jonction.

- 1- Algorithme de la détermination des valeurs des potentiels de jonction corrigés.

La méthode présentée est conforme à la méthode du réseau R-C homogène avec la modification discrète des conditions initiales.

En utilisant l'information sur la distribution des potentiels de jonction au début du pas de temps, le résultat de la solution linéaire sur le réseau R-R homogène et la forme de la fonction de l'affinité, on corrige numériquement les valeurs des potentiels de jonction obtenant en effet, la solution affine recherchée.

La distribution des potentiels obtenu est la condition initiale pour effectuer le pas de temps suivant.



- 1. générateur de fonction.
- 2. et 4. Additionneurs
- 3. multiplicateur.

Fig. 4.9. Schéma bloc de la retroaction de jonction.

En analysant le travail du réseau R-R homogène et du réseau R-C homogène modifié, on peut constater qu'avec l'accomplissement des conditions déterminées, l'effet final, c'est-à-dire, la distribution des potentiels pour un instant choisi t_{k+1} est identique.

La différence consiste en des moyens différents de la réalisation du pas de temps. Dans le modèle R-C modifié, le changement du potentiel de jonction de la valeur V_i^k à V_i^{k+1} (conforme à la longueur du pas de temps) a un caractère continu, et la longueur du pas $\Delta t_{k,k+1}$ ne dépend pas des paramètres du réseau et peut être changée.

Dans le modèle R-R, la réponse en forme de la distribution des potentiels V_i^{k+1} est établie tout de suite après l'alimentation des résistances à temps par la valeur des potentiels V_i^k , et la longueur du pas de temps est dépendante de la valeur des résistances à temps G_t et souvent reste constante.

Du fait de l'existence de la conformité rigoureuse des solutions pour les instants de temps choisis dans les modèles R-R et R-C étudiés, résulte la conclusion suggérant l'utilisation de l'algorithme (4.2.1.4) de la solution du problème affine et la détermination des conditions d'équivalence des modèles R-R et R-C homogènes.

On considère le modèle R-R homogène avec l'équation de noeud :

$$G (V_{i+1}^{k+1} + V_{i-1}^{k+1} - 2V_i^{k+1}) = G_t (V_i^{k+1} - V_i^k) \quad (4.100)$$

et le modèle R-C homogène avec l'équation de noeud :

$$G (V_{i+1}^{k+1} + V_{i-1}^{k+1} - 2V_i^{k+1}) = \frac{d}{dt} C \cdot \frac{dV_i}{dt} \Big|_{t=t_{k+1}} \quad (4.101)$$

La version modifiée du réseau R-C rend possible l'arrêt du processus ("congelation") en un instant de temps quelconque t_{k+1} d'où l'équation 4.101 qu'on peut présente comme suit :

$$G (V_{i+1}^{k+1} + V_{i-1}^{k+1} - 2V_i^{k+1}) = \mathcal{L}\tau.C \frac{dV_i}{dt} \quad \Big| \quad t = t_{k+1} \quad (4.102)$$

En posant l'équivalence de deux réseaux comme la distribution identique des potentiels de jonction V_i^{k+1} on peut constater l'égalité :

$$G_t (V_i^{k+1} - V_i^k) = \mathcal{L}\tau.C \frac{dV_i}{dt} \quad \Big| \quad t = t_{k+1} \quad (4.103)$$

En discrétisant la dérivée instantanée à l'aide du quotient aux différences régressif et ignorant l'erreur donnée par la discrétisation on obtient :

$$G_t (V_i^{k+1} - V_i^k) = \mathcal{L}\tau.C \cdot \frac{1}{\Delta t_{k,k+1}} (V_i^{k+1} - V_i^k) \quad (4.104)$$

D'où on peut directement déterminer les conditions d'équivalence de deux réseaux comme :

$$\frac{\mathcal{L}\tau.C}{G_t \cdot \Delta t_{k,k+1}} = 1 \quad (4.105)$$

En utilisant l'expression 4.63 et les conditions 4.105, on obtient la relation :

$$\int_{V_i^k}^{V_i^{k+1}} g(\Psi_v \cdot v_i, X_i) = \frac{R \cdot \Delta t_{k,k+1}}{R_t \cdot h^2} (v_i^{k+1} - v_i^k) - \frac{\Delta t_{k,k+1}}{2h^2} \left[(v_{i+1}^{k+1} - v_{i+1}^k) + (v_{i-1}^{k+1} - v_{i-1}^k) - 2(v_i^{k+1} - v_i^k) \right] \quad (4.106)$$

Avec : $R_t = \frac{1}{G_t}$

En liant les paramètres du modèle électrique et du réseau R-R, on pose :

$$\frac{\Delta t_{k,k+1}}{h^2} = \frac{Rt}{R} \quad (4.107)$$

D'où la forme définitive de l'équation 4.106 :

$$\int_{V_i^k}^{V_i^{k+1}} g(\Psi_v \cdot v_i, X_i) dv_i = (v_i^{k+1} - v_i^k) - \frac{Rt}{2R} \left[(v_{i+1}^{k+1} - v_{i+1}^k) + (v_{i-1}^{k+1} - v_{i-1}^k) - 2(v_i^{k+1} - v_i^k) \right] \quad (4.108)$$

Pareillement comme en 4.2.1.4. 1°, la détermination de la valeur de la solution affine V_i^{k+1} est effectuée à l'aide de la procédure d'itération, réalisée numériquement :

$$V_i^{k+1} = \varphi^{-1} \left\{ \varphi(V_i^k) + (V_i^{k+1} - V_i^k) - \frac{Rt}{2R} \left[(V_{i+1}^{k+1} - J_{V_{i+1}^{k+1}}) + (V_{i-1}^{k+1} - J_{V_{i-1}^{k+1}}) - 2(V_i^{k+1} - J_{V_i^{k+1}}) \right] \right\} \quad (4.109)$$

Les conditions d'initiation de la fin et de la convergence de la procédure, sont définies en 4.2.1.4. (1°) en étudiant les méthodes du réseau R-C avec la modification discrète des conditions initiales.

L'utilisation de la méthode du réseau R-R avec la correction des potentiels de jonction pour le processus du type 4.91 conduit à une relation semblable avec l'exigence d'accomplissement des conditions de l'analogie déterminées.

2.- Réalisation du modèle R-R avec la correction des potentiels de jonction.

Présenté en chapitre précédent, l'algorithme de la détermination de la solution du problème affine, exige l'organisation du système de calcul hybride dans le système "réseau R-R- calculateur numérique". Le réseau R-R homogène, effectue la fonction de sous-programme pour la solution du problème aux limites linéaires, ce qui est important dans le modelage pour des espaces grands et asses complexes.

La fig.4.9 présente un schéma-bloc simplifié de la réalisation de la méthode du réseau R-R avec la correction des potentiels de jonction.

La figure 4.10 présente l'exemple de la solution pour la réalisation technique du système hybride.

Il faut constater la possibilité d'utilisation du réseau R-R homogène avec l'injecteur de courant (4.1.2.2.B). Dans ce cas, le système de la mémoire analogique doit posséder une sortie de courant. Par contre, l'algorithme 4.109 doit être complété par les conditions d'équivalence pour les processus du type 4.26.

Légende : (Fig. 410)

D - Distributeur - Distribution des signaux électriques dans les cellules de la mémoire analogique.

P - Mémoire analogique - système qui permet de se souvenir de la valeur déterminée du signal électrique (potentiels à temps).

Contrôle - L'ensemble des systèmes à l'action logique, coordonnés par la machine numérique, réalisant le contrôle du travail des éléments particuliers du système.

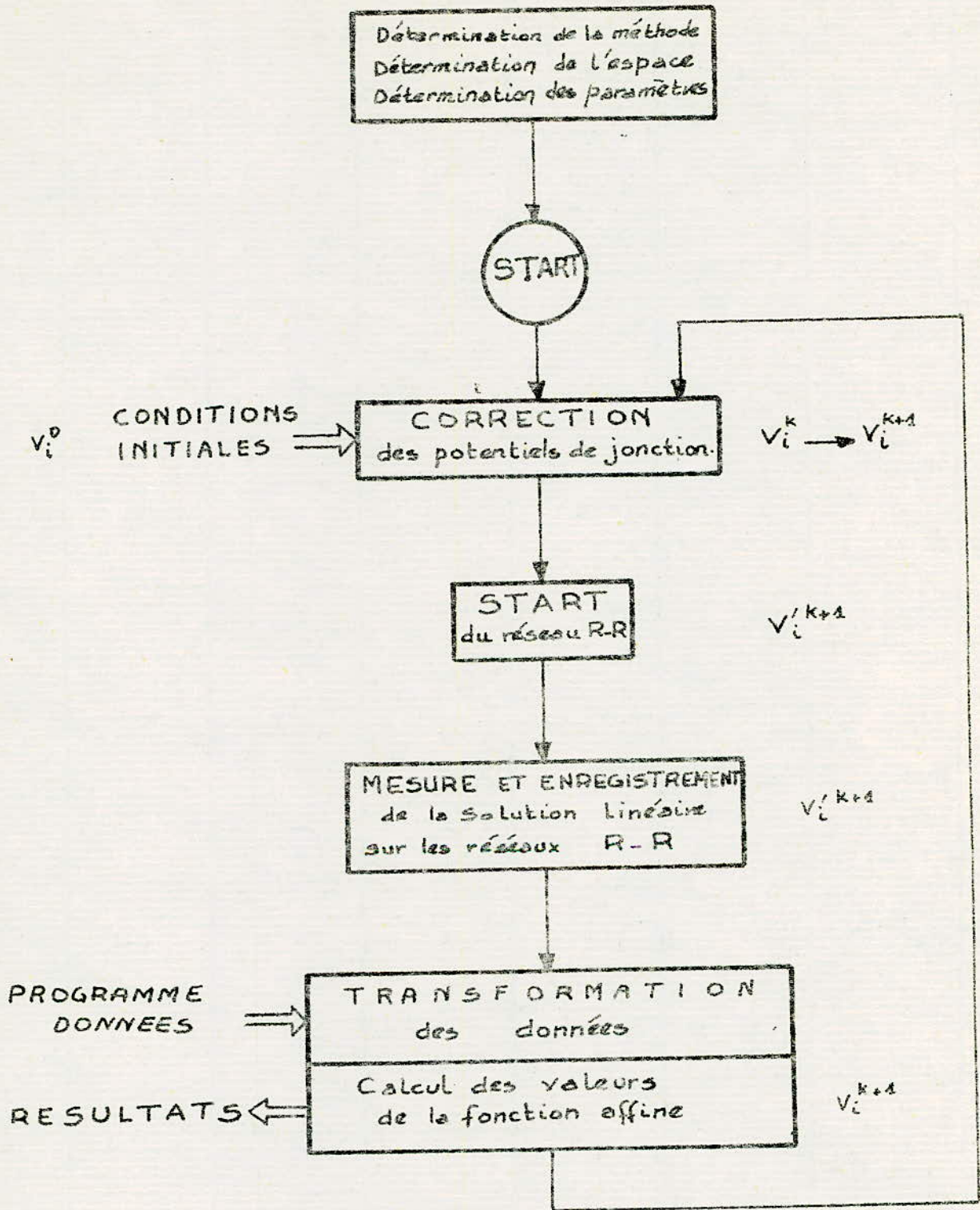


Fig. 4.10. Schéma - bloc de la réalisation de la méthode R-R avec la correction des potentiels de jonction.

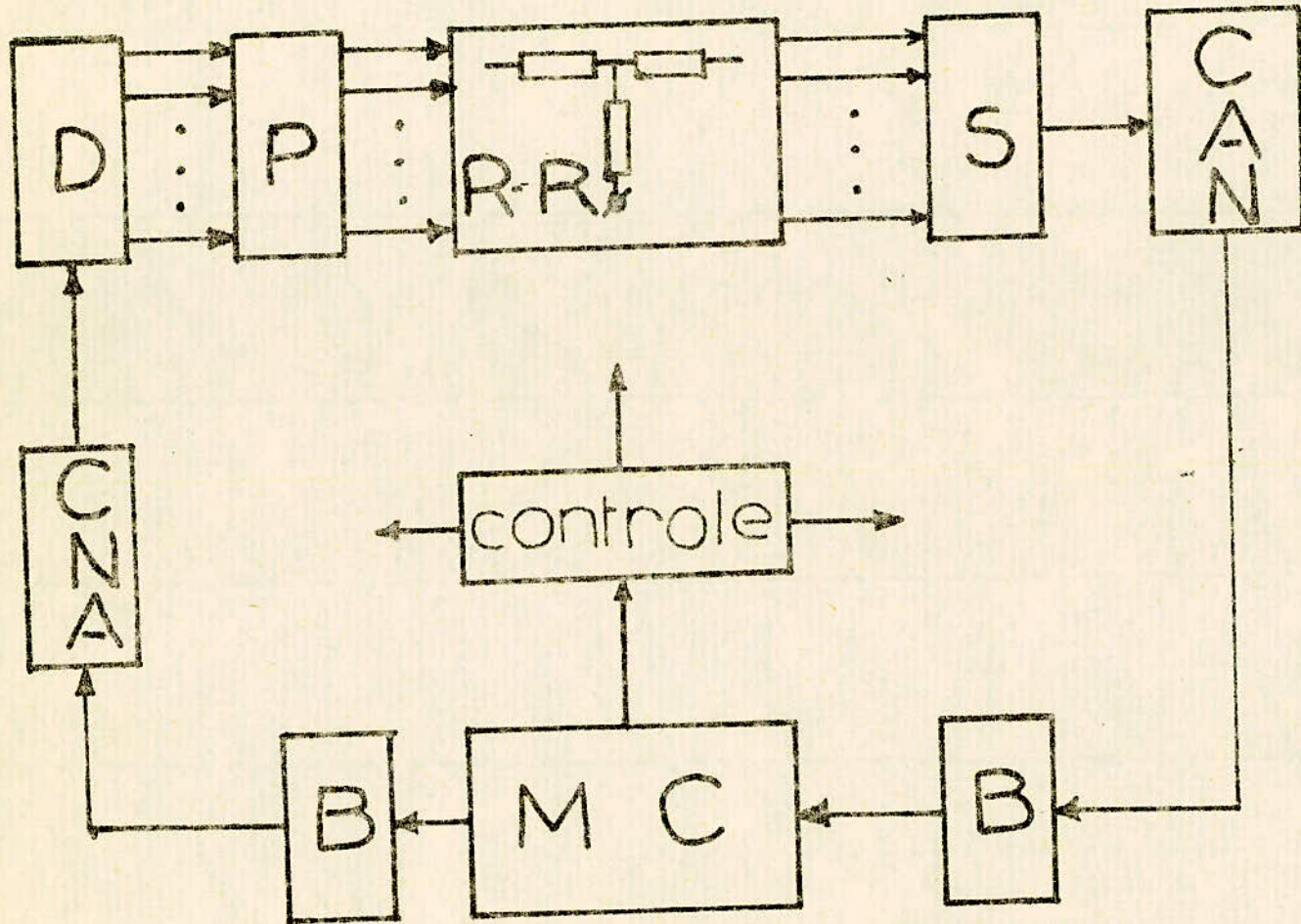


FIG 4.11 : Schema bloc du Systeme hybrides Reseau RR -
 - Calculateur numérique -

CHAPITRE V - EXEMPLES PRATIQUES

Après l'étude théorique des modèles réticulaires R-R et R-C, nous avons conçu un réseau R-R à 10 noeuds pour simuler des équations aux dérivées partielles du type parabolique (cas linéaire et non-linéaire).

Si pour le cas linéaire nous n'avons pas rencontré trop de difficultés quant aux mesures, par contre pour le cas non-linéaire il nous a été impossible de les faire, vu que le modèle R-F, conçu, se prête bien à la simulation non-linéaire à condition de mettre en oeuvre un processus d'itération pour chaque noeud, utilisant un matériel technique important et fort couteux.

Un deuxième facteur, le temps, a joué en notre défaveur car pour simuler un problème non-linéaire sur des modèles R-R ou R-C, il aurait fallu un calculateur numérique, car la correction des conditions initiales pour les prochains pas de temps (processus d'itération) demande un grand nombre d'opérations et par conséquent, beaucoup de temps.

Néanmoins, un travail remarquable a été fait dans ce sens par JABLOWSKI qui disposait de meilleurs conditions et qui est exposé en [4] et [5]
Il a abouti à des résultats que nous commenterons dans la dernière partie de ce chapitre.

V-1- CONCEPTION DU MODELE

Le modèle conçu est un modèle R-R avec des résistances R_x pour simuler le pas d'espace et des résistances R_t pour le temps. (Nous nous sommes intéressés uniquement qu'aux problèmes unidimensionnels).

Les intervalles de temps et d'espace sont réguliers (l'espace et le temps sont divisés en un nombre égaux d'intervalles) donc les résistances R_x sont égales demême que pour les résistances R_t . Nous avons choisi des intervalles d'espace et de temps normalisés :

$$x \in]0,1[\quad \text{et} \quad t \in]0,1[$$

Nous nous sommes imposés les conditions aux limites (pour $X=0$ et $X=1$).

Nous avons pris pour : $X=0$ $V_0 = 0$ volt

$X=1$ $V_L = 10$ volts

En tenant compte de la relation d'équivalence :

$$\frac{\alpha t}{R} = 1 \quad (\text{cas linéaire sans consigne}). \quad (5.1)$$

avec $V = \frac{\psi}{V}$ 5.2 ; $t = \frac{\delta t}{K R t}$ 5.3 ; $R = \frac{\delta x^2}{R x}$ 5.4

où δt est le pas de temps et δx le pas d'espace.

Vu que $V_L = 10$ volts et pour la simplicité des calculs, nous avons pris $\alpha v = 0,1$ ce qui donne $\psi = 1$ pour $V_L = 10V$.

La longueur de l'espace étant l'unité et comme le nombre d'intervalles est 10, le pas d'espace aura pour valeur $\delta x = 0,1$.

Nous avons choisi pour R_x , la valeur 100Ω .

Ce qui donne $\alpha R = \frac{\delta x^2}{R x} = 10^{-4}$

Comme le courant dans R_t doit être très faible par rapport à celui traversant R_x , nous avons pris $R_t > 10 R_x$; la valeur de $5,6 K \Omega$ a été prise alors pour R_t .

αt est déterminé par la relation d'équivalence 5.1

$$\alpha t = 10^{-4}$$

Le choix de t doit être fait de manière à satisfaire la condition de convergence :

$$K \frac{\delta t}{\delta x^2} \leq 1/2 \quad (5.5)$$

V.2 - ESSAIS

V.2.1 - ESSAIS LINEAIRES

Le but de la manipulation est de voir l'efficacité et les performances de notre méthode de simulation.

Pour cela, nous avons choisi une solution théorique de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique afin de comparer les valeurs théoriques aux valeurs enregistrées lors de nos essais pratiques.

L'équation choisie est :

$$F(x,t) = X \frac{-1}{\pi} \sin \pi x \cdot e^{-\pi^2 a^2 t} \quad \text{avec } K = 1/2$$

Cette équation est une solution particulière de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = K \frac{\partial F}{\partial t}$$

mais qui vérifie les conditions aux limites que nous nous sommes imposées :

$$F(0, t) = 0$$

$$F(1, t) = 1$$

Pour $a^2 = 112$ et d'après 5,5 on a choisi $t = 0,05$ sec.

Le matériel utilisé pour la réalisation de nos essais, est constitué par deux (2) alimentations stabilisées, 1 voltmètre à affichage numérique, une plaquette constituée de dix (10) potentiomètres (0-100 Ω) placés en dérivation de manière à pouvoir régler des tensions variant entre 0 et 10 volts pour les dix noeuds et enfin le réseau R-R.

Sur la figure 1 nous avons tracé les courbes théoriques en fonction de la variable d'espace pour différents pas de temps.

Remarquons que pour $t \geq \delta t$ la fonction $F(X, t)$ tend vers la fonction $F(X) = X$ et ceci à cause du terme atténuateur $e^{-\pi^2 \alpha^2 t}$

Sur la figure 2 nous avons tracé les variations de l'erreur relative :

$$U = \frac{V_{i,th}^{k+1} - V_{i,mes}^{k+1}}{V_{i,th}^k + 1} \quad 100 \% \text{ en fonction de la variable}$$

d'espace pour différents pas de temps.

Nous remarquons que :

- U (X) diminue quand la variable d'espace croit.

La valeur maximale pour l'erreur relative se situe pour le premier noeud, ceci est dû certainement aux erreurs dues à l'approximation de l'opérateur différentiateur par l'opérateur aux différences finies à ce niveau.

- Pour $t = 0$ la décroissance se fait presque linéairement.

- Pour $t \geq \delta t$ au niveau du 6^o noeud la courbe croit puis présente un maximum pour le 7^o noeud enfin elle décroît. Cette croissance au niveau des derniers noeuds est due probablement à l'influence de la source de tension aux bornes du dernier noeud ($V_L = 10V$) (le courant traversant R_t ne serait plus négligeable par rapport à celui traversant R_x).

Sur la figure 3 a été représentée la courbe donnant la variation de l'erreur absolue $W = V_{i,th}^{k+1} - V_{i,mes}^{k+1}$ en fonction de la variable spatiale pour différents pas de temps.

Pour $t = 0$ la courbe présente un maximum au milieu de l'intervalle spatiale. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'influence des conditions aux limites

(0V pour $X = 0$)

(10V pour $X = 1$)

est la plus faible pour les noeuds du milieu ce qui explique le maximum d'erreurs à cet endroit là.

Pour $t = \delta t$ la courbe présente un maximum dans les noeuds voisins du dernier noeud et ceci probablement pour la même raison que celle donnée précédemment pour la figure 2.

Sur la figure 4 ont été tracées les variations des erreurs relatives $U\%$ et absolues W en fonction de la variable temporelle pour différents pas spatiaux.

Les courbes ont la même allure : décroissance très rapide. Après $3 \delta t$ elles tendent toutes vers 0 quelque soit le pas spatial. Ceci prouve que la méthode utilisée converge très rapidement .

Il faut remarquer que les courbes d'erreurs données concernent uniquement les points de discrétisation, de même que pour la précision .

Pour comparer les mesures essentiellement continues faites sur le système physique avec les données expérimentales, on recourt à un algorithme d'interpolation pour l'équation discrétisée .

Pour éstimer la précision de la méthode utilisée au cours des essais pratiques, on pourrait utiliser un nombre plus grand de points de discrétisation .

Les méthodes d'interpolation utilisées seront les formules de NEWTON, GAUSS, STIRLING, BESSEL ou de LAGRANGE .

Aussi on pourra déterminer l'erreur due à l'interpolation par les formules propres à la méthode d'interpolation utilisée .

En fait les courbes expérimentales obtenues sont polygonales car entre deux points de discrétisation il existe d'autres points sur lesquels on ne peut rien dire à priori et la courbe obtenue entre ces deux points serait un segment de droite .

L'interpolation donnera un polynôme qui approchera la courbe réelle .

Donc pour les courbes d'erreurs interpolées, une erreur supplémentaire est ajoutée du fait de la formule d'approximation, mais c'est un moyen commode pour une estimation correcte de la précision de la méthode d'essais utilisée .

Pour plus de clarté dans l'exposé nous allons montrer sur un exemple la procédure utilisée. Une étude approfondie est faite en [3].

Considérons un intervalle x_0, x_1 , de longueur $x = x_1 - x_0$.

Divisons cet intervalle en n parties égales distantes de h .

Puisque les parties sont régulières on pourra se servir des méthodes d'interpolation de NEWTON (1^{ère} ou 2^{ème} formule), de GAUSS, de STIRLING ou de BESSEL.

La deuxième formule d'interpolation de NEWTON donnera le polynôme suivant :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

Avec la notation des puissances généralisées :

$$(x - x_i)^{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1} (x - x_i - k.h)$$

Les coefficients a_i seront déterminés par la formule suivante ;

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! h^i}$$

où $\Delta^i y_{n-i}$ est la différence finie d'ordre i de la fonction y c'est à dire :

$$\Delta^i y_{n-i} = \Delta(\Delta(\Delta(\dots(\Delta y_{n-i})))\dots))$$

L'erreur sera donnée par la formule du reste :

$$R_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n+1} (q+i)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_n$$

$$q = \frac{x - x_c}{h}$$

En conclusion nous pouvons dire que la méthode de résolution analogique par réseau R-R se prête bien à la simulation d'équations linéaires. Les mesures sont faciles à faire, la convergence est rapide, la précision appréciable.

V.2.2- SIMULATION CHIFFREE DES MODELES RETICULAIRES R-R ET R-C POUR LA SOLUTION DES EQUATIONS QUASI-LINEAIRES AUX DERIVEES PARTIELLES.

Exemple :

Faute de pouvoir faire des essais pratiques pour le cas quasi-linéaire sur notre réseau R-R pour les raisons citées plus haut, nous allons essayer de commenter l'étude pratique et les résultats faits par Monsieur JABLOWSKI.

5.2.2.1- Expression du problème

Parmi les méthodes présentées du modelage sur les réseaux R-C et R-R, on a choisi deux méthodes équivalentes pour documenter la correction des résultats obtenus :

- a) - Méthode du réseau R-C homogène avec la modification discrète des conditions initiales.
- b) - Méthode du réseau R-R homogène avec la correction des potentiels de jonction.

Le test d'autres méthodes est lié avec la construction du matériel technique compliqué ce qui est coûteux.

Les problèmes choisis, testés sur les modèles expérimentaux, sont présentés dans les élaborations de l'institut et signalisés dans le texte du travail.

Cela concerne surtout la méthode du modelage des problèmes hétérogènes sur les réseaux R-C homogènes et partiellement le modelage des problèmes quasi-linéaires sur des réseaux R-C avec la modification continue des conditions initiales.

Pour tester les méthodes choisies, on pose l'équation quasi-linéaire aux dérivées partielles possédant une solution analytique exacte avec les conditions aux limites et initiales données.

Processus linéaire

$$y = x - \frac{1}{\pi} \sin \pi x : e^{-\pi^2 a^2 t} \quad a^2 = 10$$

Pas de discretisation spatiale :
 Pas de discretisation temporelle :
 nombre de nœuds du réseau :
 nombre de pas de temps :

$\delta x = 0.1$
 $\delta t = 0.05$
 $N = 11$
 $P = 20$

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y = F(x, 0)$	$1.6 \cdot 10^3$	$13 \cdot 10^3$	$42.5 \cdot 10^3$	$97.3 \cdot 10^3$	0.182	0.297	0.442	0.613	0.802
$W(x, 0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$U(x, 0)$	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

$T = 0.05$

F(x, T)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F(x, T)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$V(x, T)$	0.0845	0.143	0.261	0.356	0.455	0.554	0.658	0.771	0.885
$W(x, T)$	0.0155	0.027	0.033	0.044	0.045	0.046	0.042	0.029	0.017
$U(x, T)$	15.5%	13.5%	13%	11%	9%	7.6%	6%	3.6%	1.7%

$T = 0.10$

F(x, T)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F(x, T)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$V(x, T)$	0.096	0.146	0.294	0.394	0.496	0.592	0.691	0.795	0.893
$W(x, T)$	0.004	0.004	0.006	0.006	0.004	0.008	0.009	0.005	0.002
$U(x, T)$	4%	2%	2%	1.5%	0.8%	1.3%	1.3%	0.62%	0.22%

$T = 0.15$

F(x, T)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F(x, T)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$V(x, T)$	0.098	0.2	0.299	0.4	0.5	0.598	0.696	0.799	0.8
$W(x, T)$	0.002	0.00	0.001	0.00	0.00	0.002	0.004	0.001	0.00
$U(x, T)$	2%	0%	0.33%	0%	0%	0.33%	0.55%	0.12%	0.00%

$T = 0.20$

F(x, T)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F(x, T)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$V(x, T)$	0.098	0.2	0.3	0.4	0.5	0.599	0.697	0.8	0.9
$W(x, T)$	0.002	0.00	0.00	0.00	0.00	0.001	0.003	0.00	0.00
$U(x, T)$	2%	0%	0%	0%	0%	0.17%	0.43%	0%	0%

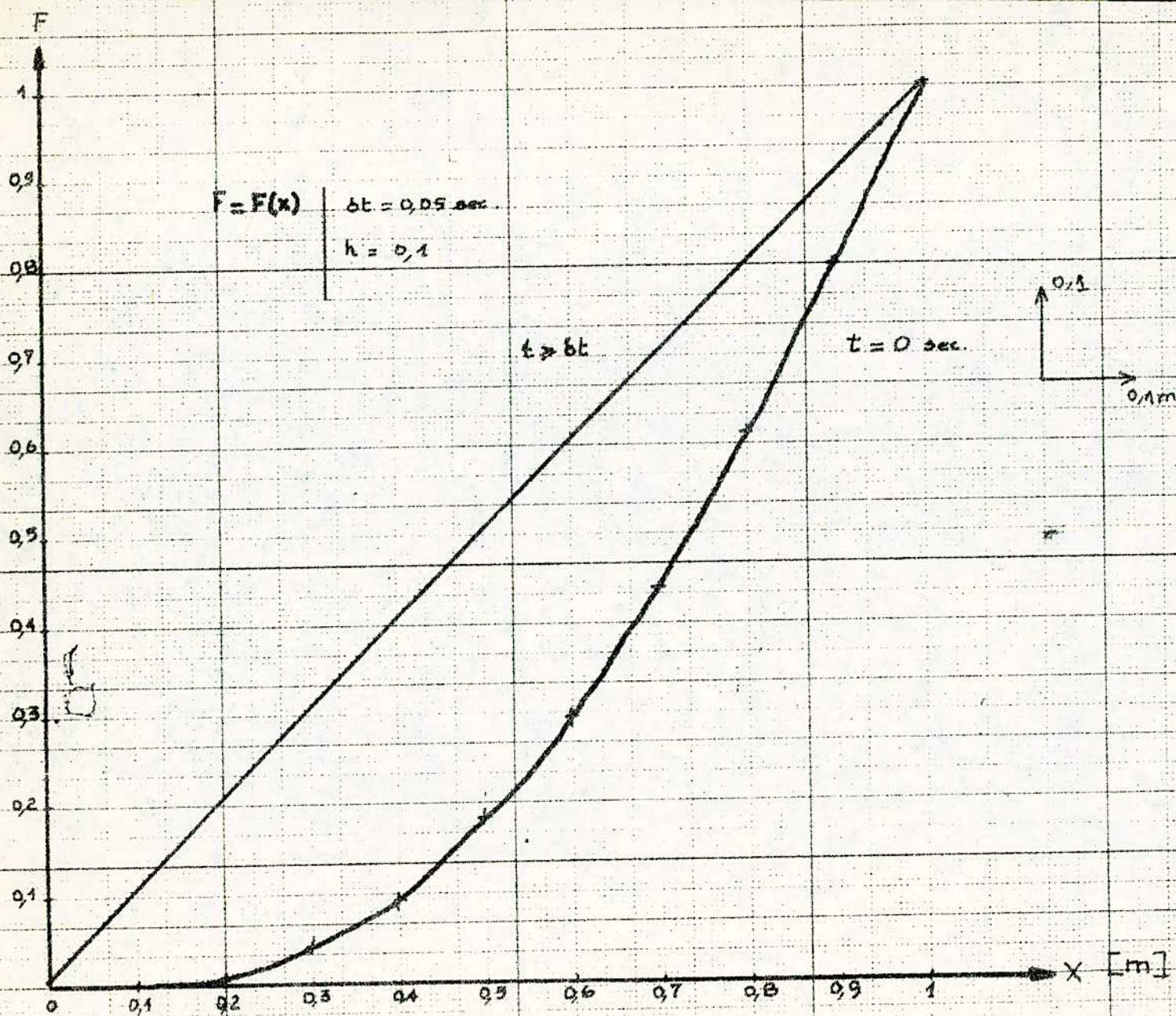


FIG. 1 - Diagramme de la distribution des valeurs de la fonction dans l'espace modelé pour les sections de temps différentes

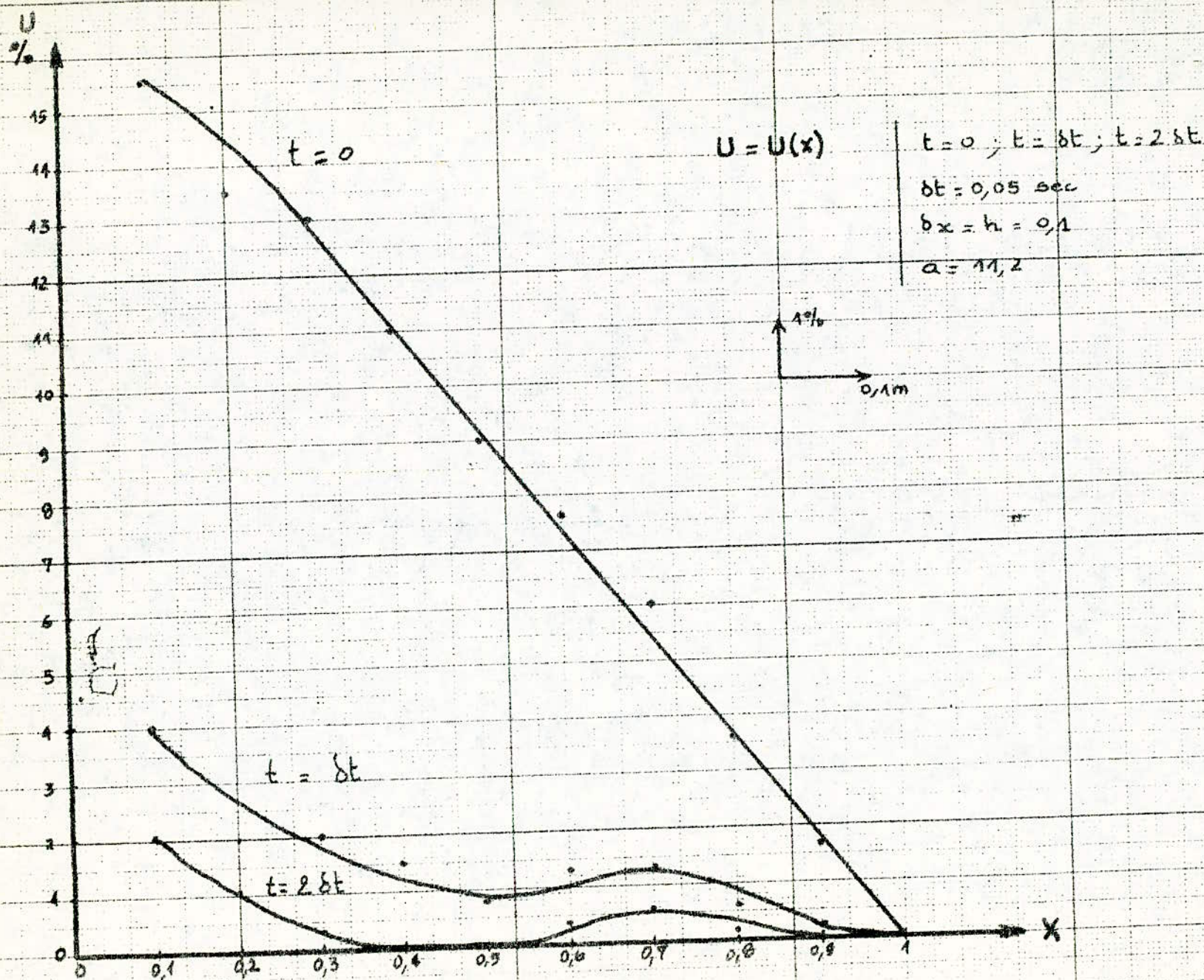
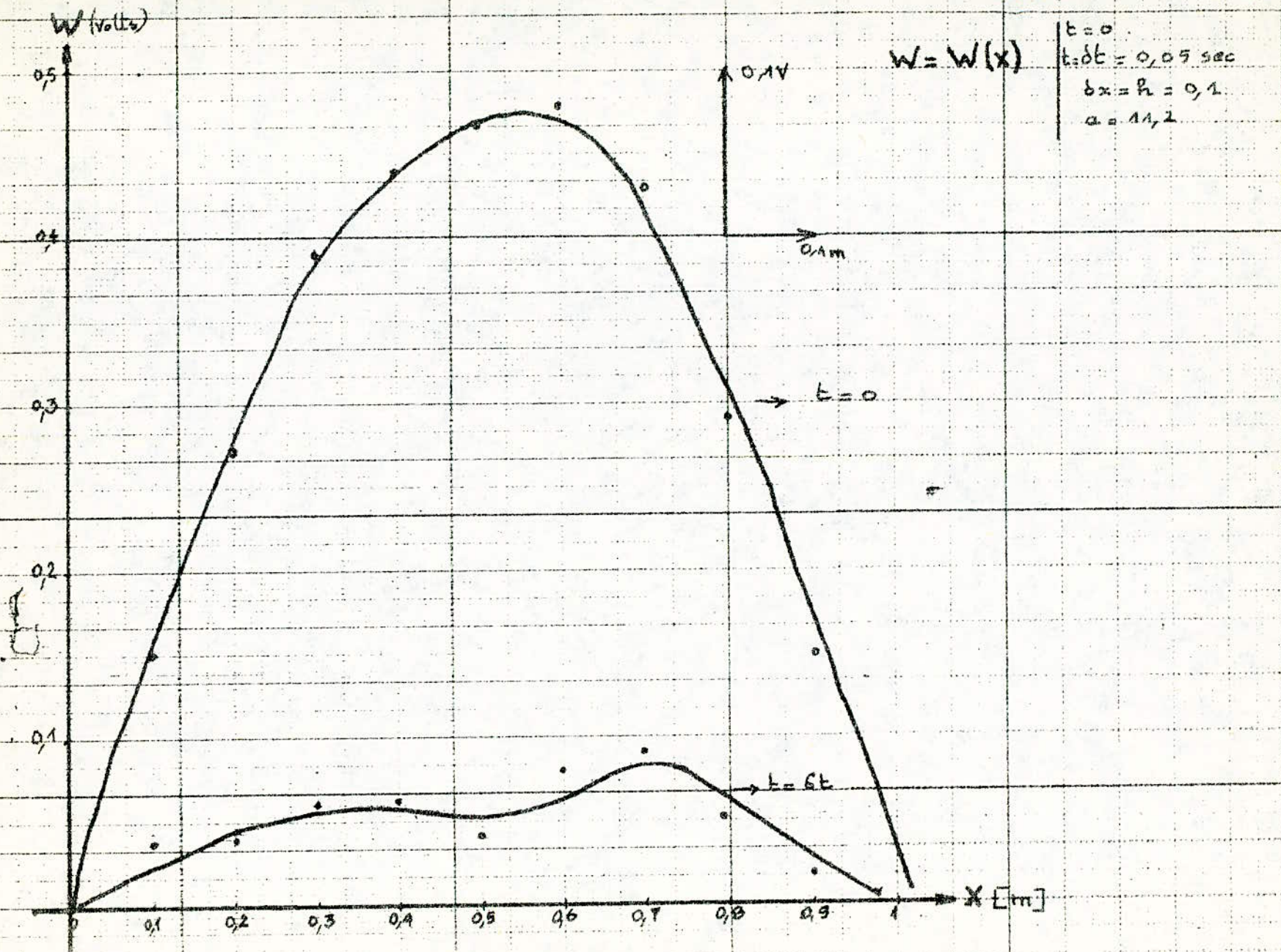


Fig. 2. Diagramme de la distribution de l'erreur relative en fonction de la variable d'espace.



- 100 -

Fig 3 : Diagramme de distribution de l'erreur absolue en fonction de la variable spatiale.

W U
(Volts) %
0,5 15

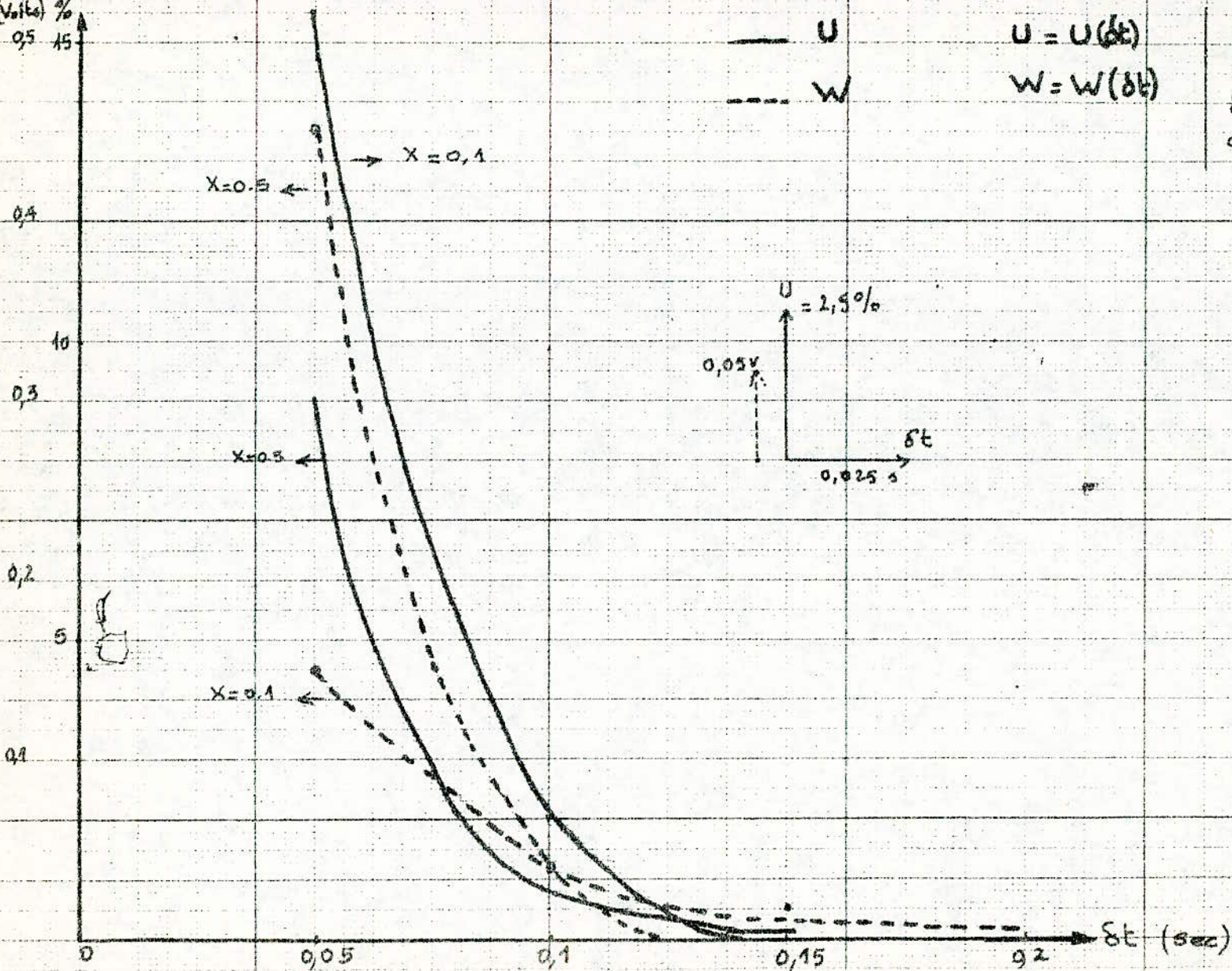


Fig. 4: Diagramme de distribution des erreurs absolues et relatives en fonction du temps.

Puisque les travaux méthodologiques et de la simulation devrait précéder le traitement des problèmes du type constructif-technique, on s'est décidé sur la simulation chiffrée du réseau R-R (ou R-C modifié) en éliminant dans ce cas la participation de l'analyseur réticulaire.

La taille peu importante de l'espace et la forme simple des conditions aux limites simplifient la simulation chiffrée du réseau.

On pose une équation quasi-linéaire aux dérivées partielles soumise à la transformation de KIRCHOFF :

$$\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 2A \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (5.6)$$

Avec les conditions aux limites : $\theta(0,t) = \theta(S,t) = 0$ (5.7)

et la condition initiale : $\theta(x,0) = A (Sx - x^2)$ (5.8)

avec : A - coefficient de l'équation : $\theta(x,t) = \frac{A}{1+t} (Sx - x^2)$ (5.9)

S - Dimension de l'espace.

Le problème consiste à déterminer la solution affine de l'équation 5.6 et la comparer avec des résultats de la solution analytique connue de la forme 5.9. Par égard à la symétrie du problème il suffit de résoudre le problème pour l'espace $x \in [0, S/2.]$

Donc les conditions aux limites auront la forme : $\theta(0,t) = 0$ (5.10)

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{x=S/2} = 0 \quad (5.11)$$

Ensuite on prend les coefficients de l'analogie des valeurs exemplaires

α_V, α_τ avec

$$\alpha_V = 1, \alpha_\tau = 1$$

et on discrétise l'équation 5.6

$$V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i = \frac{2A}{V_i} h^2 \frac{dV_i}{d\tau} \quad (5.12)$$

avec les conditions aux limites :

$$V_0(\tau) = 0 \quad (5.13)$$

$$\left. \frac{\partial V_i}{\partial n} \right|_{x_i = x_n} = 0 \quad (5.14)$$

et la condition initiale. $V_i(0) = A (S x_i - x_i^2)$ (5.15)

La solution analytique prend la forme :

$$V_i(\tau) = \frac{A}{1 + \tau} (S x_i - x_i^2) \quad i = 0, \dots, n \quad (5.16)$$

Ainsi discrétisée la moitié de tout l'espace possède $(n + 1)$ noeud où n est défini comme :

$$n = \frac{S}{2h} \quad (5.17)$$

En même temps on prend un pas de temps constant $\Delta t_{k,k+1} = P$ rendant possible la détermination du temps comme multiple du pas de temps.

$$\tau_k = k \cdot P \quad (5.18)$$

Par égard à la convenance d'enregistrement numérique la condition initiale et la solution analytique sont présentées en forme :

$$V_i^k = \frac{A}{1+k.p} \left[\text{Shi} - h^2 \right] \quad \begin{matrix} i \in [0, n] \\ k \in [0, m] \end{matrix} \quad (5.19)$$

Il faut remarquer que la condition initiale est le cas particulier de la solution analytique pour $k = 0$.

La simulation chiffrée du réseau R-R homogène peut être facilement effectuée à l'aide du schéma aux différences manifestes - ()

$$V_i^{k+1} = V_i^k + \frac{P}{h^2} (V_{i+1}^k + V_{i-1}^k - 2V_i^k) \quad i = 1, \dots, n \quad (5.20)$$

exigeant la réalisation de la condition de convergence : $\frac{P}{h^2} \ll \frac{1}{2}$ (5.21)

et la détermination de la valeur des potentiels de jonction comme :

$$V_0^k = 0, \quad V_{n-1}^k = V_{n+1}^k \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (5.22)$$

La valeur de la fonction affine $g(\alpha_v, V, x)$ a la forme :

$$g(\alpha_v, V, X) = g(V) = \frac{2A}{V} \quad (5.23)$$

L'algorithme 4.84 ou 4.108 exige la détermination de l'intégrale définie de cette fonction :

$$\int_{V_i^k}^{V_i^{k+1}} g(V) dV = 2A \int_{V_i^k}^{V_i^{k+1}} \frac{dV}{V} = 2A \ln \frac{V_i^{k+1}}{V_i^k} \quad (5.24)$$

En utilisant la condition d'équivalence 4.46 , 4.105 ou 4.107 et l'algorithme transformé 4.84 ou 4.109 tenant compte de 5.24, on obtient :

$${}^{j+1}V_i^{k+1} = V_i^k \exp \left\{ \frac{1}{2A} \left[V_i^{k+1} - V_i^k - \frac{P}{2h^2} \left(V_{i+1}^{k+1} - j_{i+1}^{k+1} + V_{i-1}^{k+1} - j_{i-1}^{k+1} - 2(V_i^{k+1} - j_{i+1}^{k+1}) \right) \right] \right\} \quad i=1, \dots, n ; \quad k=0, \dots, m. \quad (5.25)$$

En introduisant, pour simplification de l'enregistrement et de l'organisation du programme, la grandeur $J_{E_i}^{k+1}$ déterminée comme :

$$J_{E_i}^{k+1} = V_i^{k+1} - J_{V_i}^{k+1} \quad i=1, \dots, n \quad (5.26)$$

$$k=0, \dots, m$$

L'algorithme de la détermination de la solution affine a forme :

$${}^{j+1}V_i^{k+1} = V_i^k \exp \left\{ \frac{1}{2A} \left[V_i^{k+1} - V_i^k - \frac{P}{2h^2} \left(J_{E_{i+1}}^{k+1} - j_{E_{i-1}}^{k+1} - 2 J_{E_i}^{k+1} \right) \right] \right\} \quad (5.27)$$

La procédure d'itération commence dès la pose :

$$o_{E_i}^{k+1} = 0 \quad (5.28)$$

et finit par l'obtention :

$$\left| J_{V_i}^{k+1} - J_{V_i}^{k+1} \right| < D ; \quad (5.29)$$

Pour l'estimation des conditions de la convergence de la procédure, on compare les résultats successifs de l'itération :

$$\beta \ll \frac{J_{V_i}^{k+1}}{V_i^{k+1}} \quad (5.30)$$

$$0 < \beta \leq 1$$

Fixant par $\delta = \frac{P}{2h^2}$, la condition 5.30 tenant compte de 5.27 conduit à la relation:

$$\frac{j+1 \sqrt{v_i^{k+1}}}{j+2 \sqrt{v_i^{k+1}}} = \exp \left[\delta \left(j+1 \frac{v_{i+1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} + j \frac{v_{i-1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} - 2 \left(j+1 \frac{v_{i+1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} - j \frac{v_{i-1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} \right) - j \frac{v_{i+1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} - j \frac{v_{i-1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} \right) \right] \quad (5.31)$$

qui après la considération 5.26, prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{j+1 \sqrt{v_i^{k+1}}}{j+2 \sqrt{v_i^{k+1}}} &= \exp \left\{ \delta \left[\left(j+1 \frac{v_{i+1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} - j \frac{v_{i+1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} \right) + \left(j+1 \frac{v_{i-1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} - j \frac{v_{i-1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} \right) - 2 \left(j+1 \frac{v_{i+1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} - j \frac{v_{i-1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} \right) \right] \right\} \\ &= \exp (\delta Z) \end{aligned} \quad (5.32)$$

On pose que :

$$\max_i \left| j+1 \frac{v_{i+1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} - j \frac{v_{i+1}^{k+1}}{v_i^{k+1}} \right| = D ; \quad i = 1, \dots, n \quad (5.33)$$

$$\text{et estime la valeur maximale comme : } \max |Z| = 2D \quad (5.34)$$

Ensuite on résout les inégalités 5.30 avec la considération de 5.32 et 5.34.

$$\text{En considérant } \beta = 0, \quad ; \quad D = 1$$

$$\text{on obtient : } 0,95 \leq \exp^{-\delta^2}$$

$$\text{d'où } \delta = \frac{P}{2h^2} \leq 0,025$$

Les exemples résolus confirment la justesse de l'estimation de la valeur de la condition de convergence.

L'erreur absolue, déterminant la différence entre la valeur de la solution analytique et la valeur de la solution obtenue en effet de l'utilisation de la méthode est calculée pour chaque pas de temps dans chaque noeud intérieur de l'espace :

$$W_i^{k+1} = V_{i,anal}^{k+1} - V_i^{k+1} \quad (5.35)$$

L'erreur relative d'intérêt déterminant l'efficacité de la méthode, est calculée pour chaque pas de temps dans chaque noeud intérieur de l'espace de la relation :

$$U_i^{k+1} = \frac{V_{i,anal}^{k+1} - V_i^k}{V_{i,anal}^{k+1}} \quad 100 \% \quad (5.36)$$

avec $V_{i,anal}^{k+1}$ - Valeur de la solution analytique

V_i^{k+1} - Valeur de la solution, obtenue après avoir effectué la procédure de l'itération.

Pour l'accomplissement des exigences posées par le langage de la programmation (ALGOL) de la machine numérique, dans la réalisation du programme, on introduit la notation suivante :

N, H, M, P, S, A, D

Ce programme exige l'introduction des données suivantes :

où :

- N : - Nombre de noeuds intérieurs
- H : - Saut de la discrétisation de l'espace
- M : - Nombre de pas de temps
- P : - Longueur du pas de temps
- S : - Dimension de l'espace total
- A : - Coefficient de l'équation
- D : - Exactitude de l'itération

5.2.2.2- L'analyse des résultats

En posant initialement les valeurs des données de départ, on se dirige avec des règles suivantes :

- a)- Les valeurs des variables doivent être conformes aux réels techniques du réseau de l'analyseur de l'espace.
- b)- Le réseau simulé doit avoir une structure simple dans le sens de nombre de noeuds.
- c)- Les résultats obtenus doivent être représentatifs pour l'estimation de la méthode utilisée.

Les exigences de la conformité technique du réseau simulé et du réseau réel se tient avec :

- L'acceptation de la valeur "1000" comme maximale de la solution de l'unité de machine utilisée dans l'analyseur réticulaire [4-68] .
- Limitation de la longueur du pas de temps jusqu'à 0,01S qui se lie avec la technologie de la réalisation du modèle R-C modifié (pour le modèle R-R cette limitation n'existe pas).
- L'acceptation de la valeur "1" du coefficient d'exactitude de l'itération ce qui est lié avec la distinction pratique des mesures dans l'analyseur réticulaire.

Les résultats de calculs présentés concernent les cas pour lesquels la procédure de calcul est convergente à la solution. On a constaté que pour les variables déterminées des données, on n'a pas obtenu la solution finale, par égard à la divergence de la procédure d'itération.

Sur la figure 5.5, on a présenté la distribution de la valeur de la solution du problème dans l'espace modelé.

Par égard à la symétrie du problème, les résultats donnés concernent uniquement la moitié de l'espace.

Le paramètre est le temps, d'où les courbes concernent les sections de temps déterminées. La distribution de la valeur de la fonction de l'aire à la forme de la parabole (pour tout l'espace).

La figure 5.6 présente pour les noeuds choisis du réseau, la variabilité de la solution dans le temps. En état établi du processus modelé, la solution dans chaque noeud atteint la valeur zéro. Sur la figure 5.7 on a assemblé les diagrammes des changements de la solution du problème linéaire et affine dans les pas de temps successifs.

Ensuite, on a analysé l'influence des paramètres particuliers du modèle sur la valeur des erreurs, absolue et relative d'intérêt déterminées pour 5.35 et 5.36.

L'erreur absolue, déterminée par les unités du potentiel, permet la constatation du degré de l'inexactitude de la solution obtenue en aspect des possibilités techniques de l'appareillage de mesure utilisé.

L'erreur relative d'intérêt détermine l'aptitude de la méthode utilisée dans le sens d'exactitude posée de la solution du problème.

La figure 5.8 présente la distribution de la valeur de l'erreur d'intérêt de la solution dans l'espace modelé.

Le paramètre est le temps ce qui facilite l'analyse du changement de l'erreur pour les instants de temps différents.

Généralement, il faut constater que la plus grande valeur de l'erreur existe dans le premier noeud du modèle en diminuant pour les noeuds placés à l'intérieur de l'espace. La solution dans le noeud médiane (du milieu) de l'espace ($X = \frac{S}{2}$) a l'erreur la plus petite.

Les causes de cet état il faut chercher dans l'influence des limites de l'espace sur les noeuds du réseau.

L'acceptation d'un saut de discrétisation plus grand avec le nombre de noeuds constants cause la diminution des erreurs surtout dans les premiers noeuds (Fig. 5.11).

Très importante est l'analyse des changements de la valeur d'erreurs de la solution en fonction de temps qui décide de l'aptitude de la méthode testée.

Sur la figure 5.9 on a présenté les résultats de telle analyse pour le premier noeud intérieur, en prenant comme paramètre la longueur du pas de temps.

Il faut souligner que dans la plupart des cas, les diagrammes concernent les noeuds initiaux (ou le 1er intérieur) du modèle où les valeurs d'erreurs sont les plus grandes.

Pour les pas de temps de longueur $P \gg 0,08S$, la solution est divergente jusqu'à l'infini qui est manifesté par l'accroissement évident de la valeur d'erreur.

Dans le domaine de la convergence de la procédure d'itération utilisée dans la réalisation de la méthode caractéristique est l'accroissement de l'erreur relative et l'existence du maximum pour l'erreur absolue.

Dans la phase initiale du processus, les deux erreurs croissent assez vite, ensuite l'erreur relative croît avec petite inclinaison tandis que l'erreur absolue après avoir atteint le maximum, diminue. Ce fait confirme l'utilité d'analyse des deux erreurs et indique le sens de l'information obtenue.

Par égard à l'existence de l'influence du pas de discrétisation du temps sur les valeurs d'erreurs de la solution sur la fig. 5.10, on a tracé les courbes des changements des valeurs d'erreurs dans la fonction de la longueur des pas de temps. L'analyse concerne les noeuds choisis du modèle.

Le croissement du saut de la discrétisation du temps, cause le croissement successif des erreurs de la solution conduisant à la divergence de la solution pour ses valeurs définies.

Sur la figure 5.11 on a les conclusions sortant de la considération des résultats du modelage d'un problème donné dans les espaces des dimensions différentes.

Chaque fois l'espace était couvert par le nombre identique de noeud du réseau. On a constaté une diminution importante de l'erreur d'intérêt avec le croissement de la longueur de l'espace.

Il faut chercher les causes de ce phénomène, dans la diminution réciproque, de l'influence des noeuds voisins du réseau.

Bien sûr l'erreur résultante de la discrétisation de l'espace (réseau linéaire) a des tendances contraires, mais dans ce cas pour le problème affine, ce n'est pas important.

Les conclusions semblables donnent l'analyse de l'influence du nombre de pas de discrétisation d'un espace déterminé sur les erreurs de la solution (fig.5.12).

En conclusion, il faut constater que dans la méthode utilisée importante est l'influence réciproque des noeuds voisins et la réalisation du principe de la relation linéaire : de l'erreur de l'acceptation de l'affinité $\xi_1(\tau)$ et du temps.

En plus, il faut souligner le caractère spécifique du problème testé et lié avec lui la fonction exponentielle.

Aussi, l'acceptation d'un autre moyen de résoudre le système d'équations affines peut conduire à l'élimination du problème de la divergence de la solution.

Les résultats obtenus confirment entièrement l'efficacité de la méthode.

L'erreur absolue de la solution est plus petite que la distinction des appareils de mesure utilisés.

L'erreur relative correspond aux exigences posées dans le modelage des processus réels avec des constantes réparties.

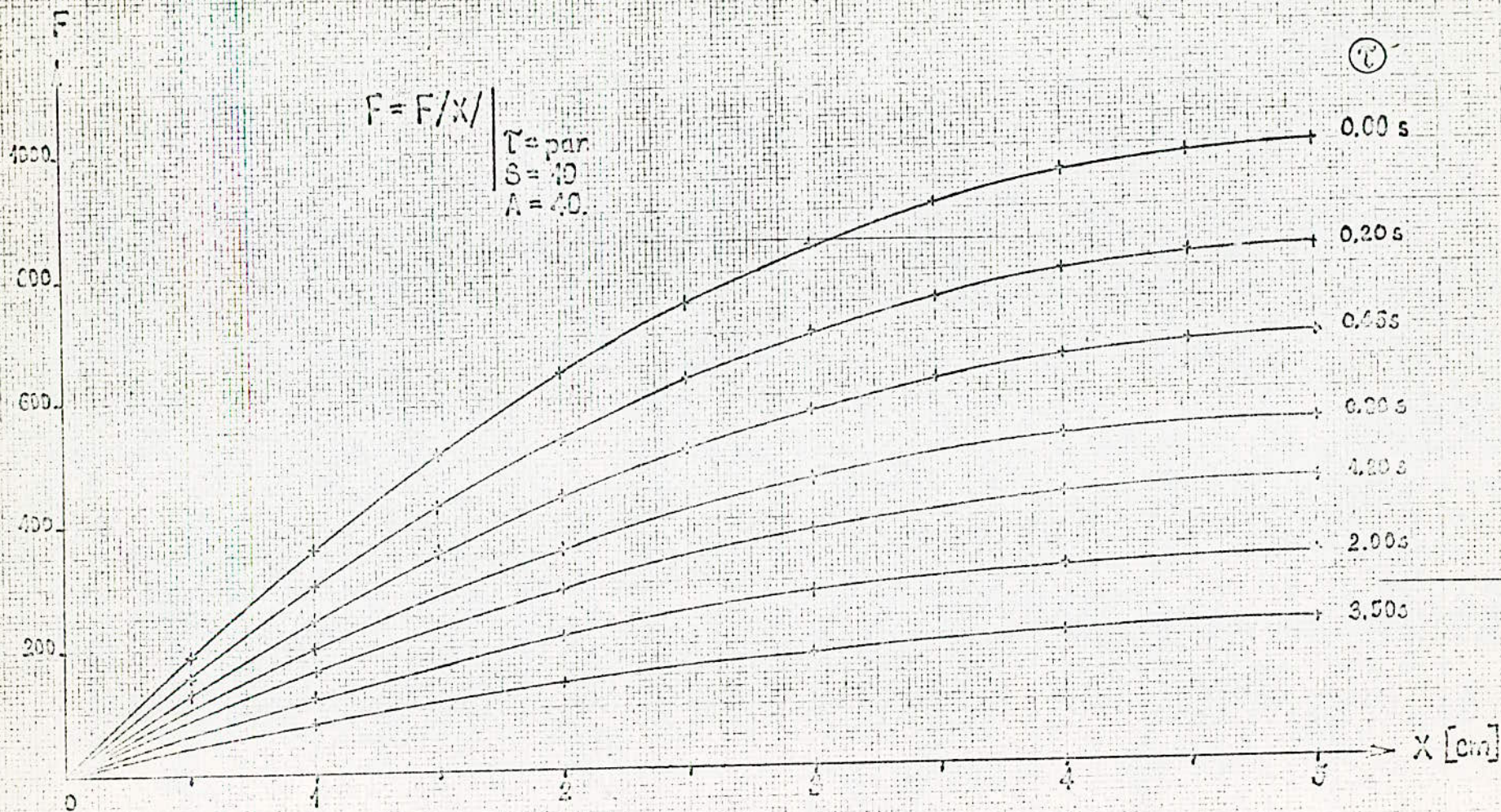


Figure 5.5 : Diagramme de la distribution des valeurs de la fonction dans l'espace modelé pour des sections de temps différentes .

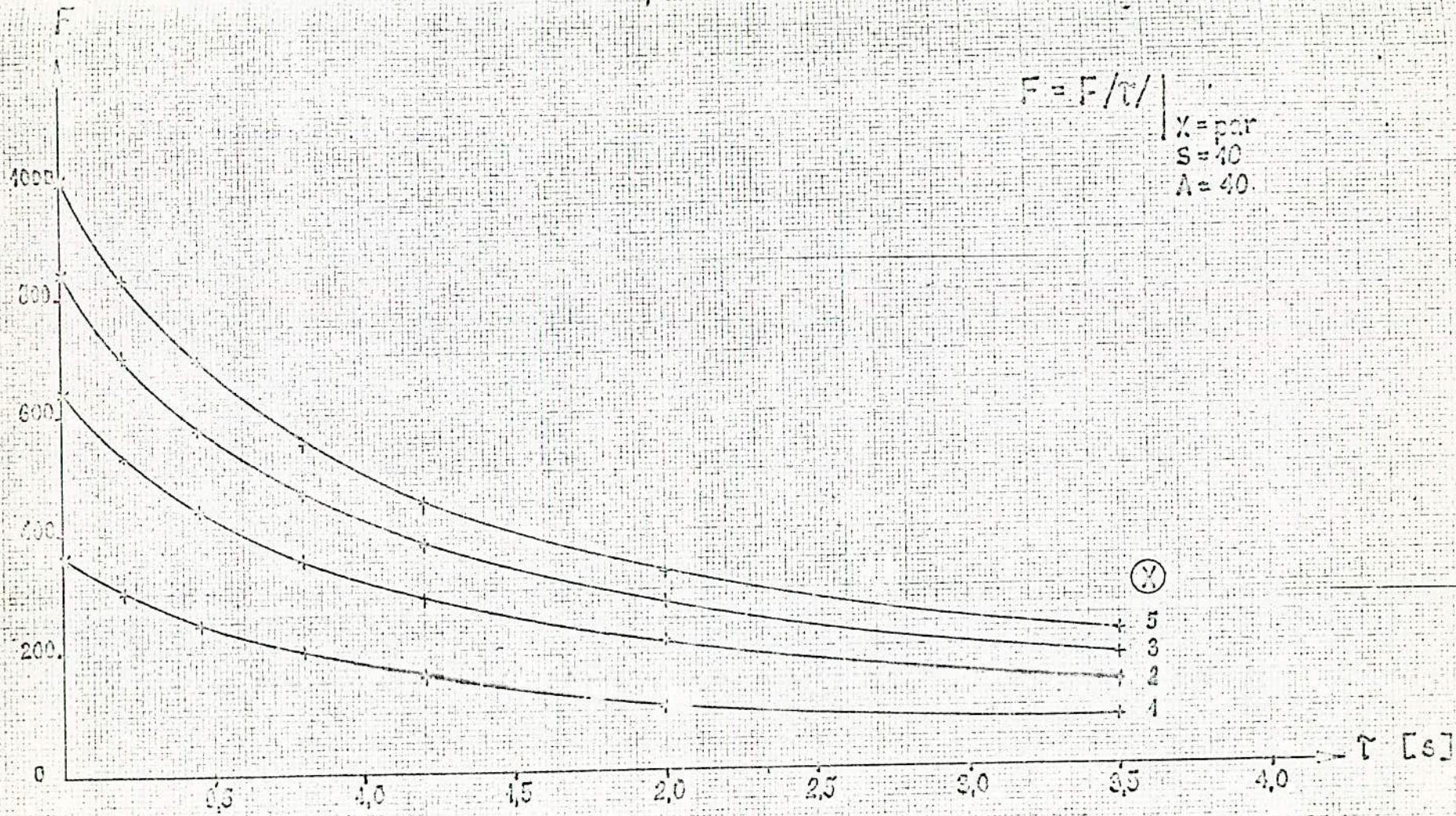


Figure 5.6 : Diagramme de la distribution de la solution en fonction du temps pour des noeuds choisis du réseau du modèle .

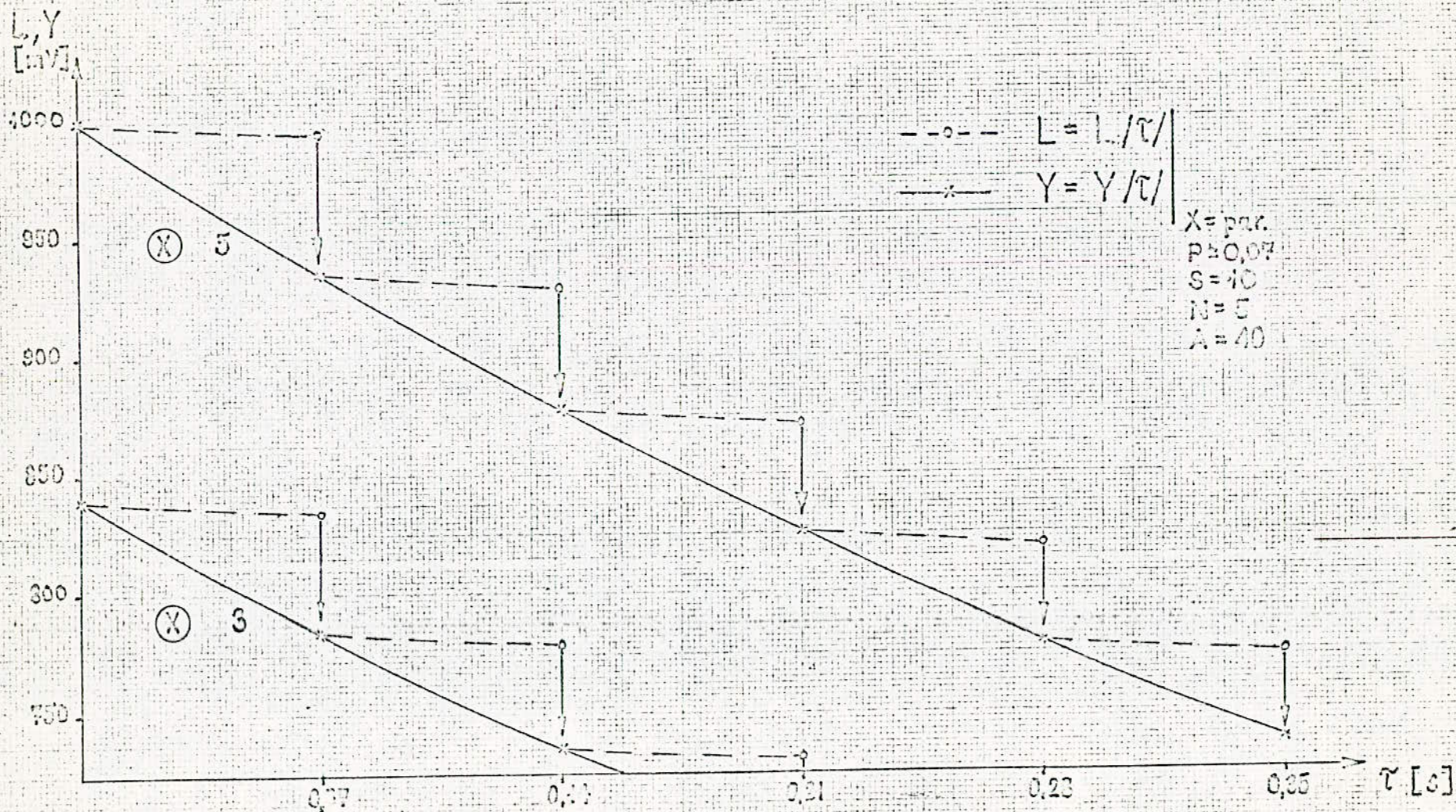


Figure 5.7 : Diagramme de variations de la solution des problèmes linéaire et affine dans les pas de temps successifs .

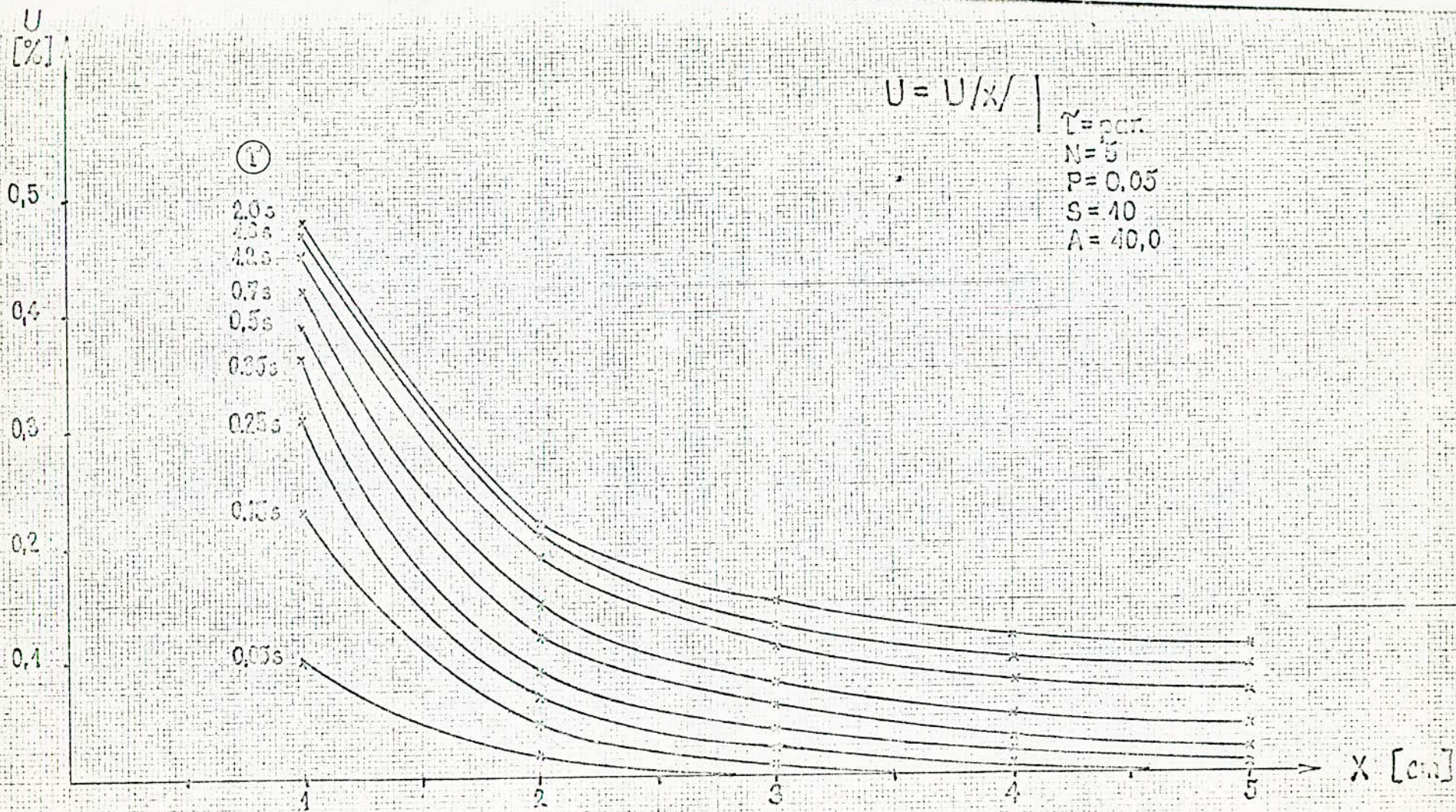


Figure 5.8 : Diagramme de la distribution des valeurs de l'erreur relative de la solution dans l'espace modelé .

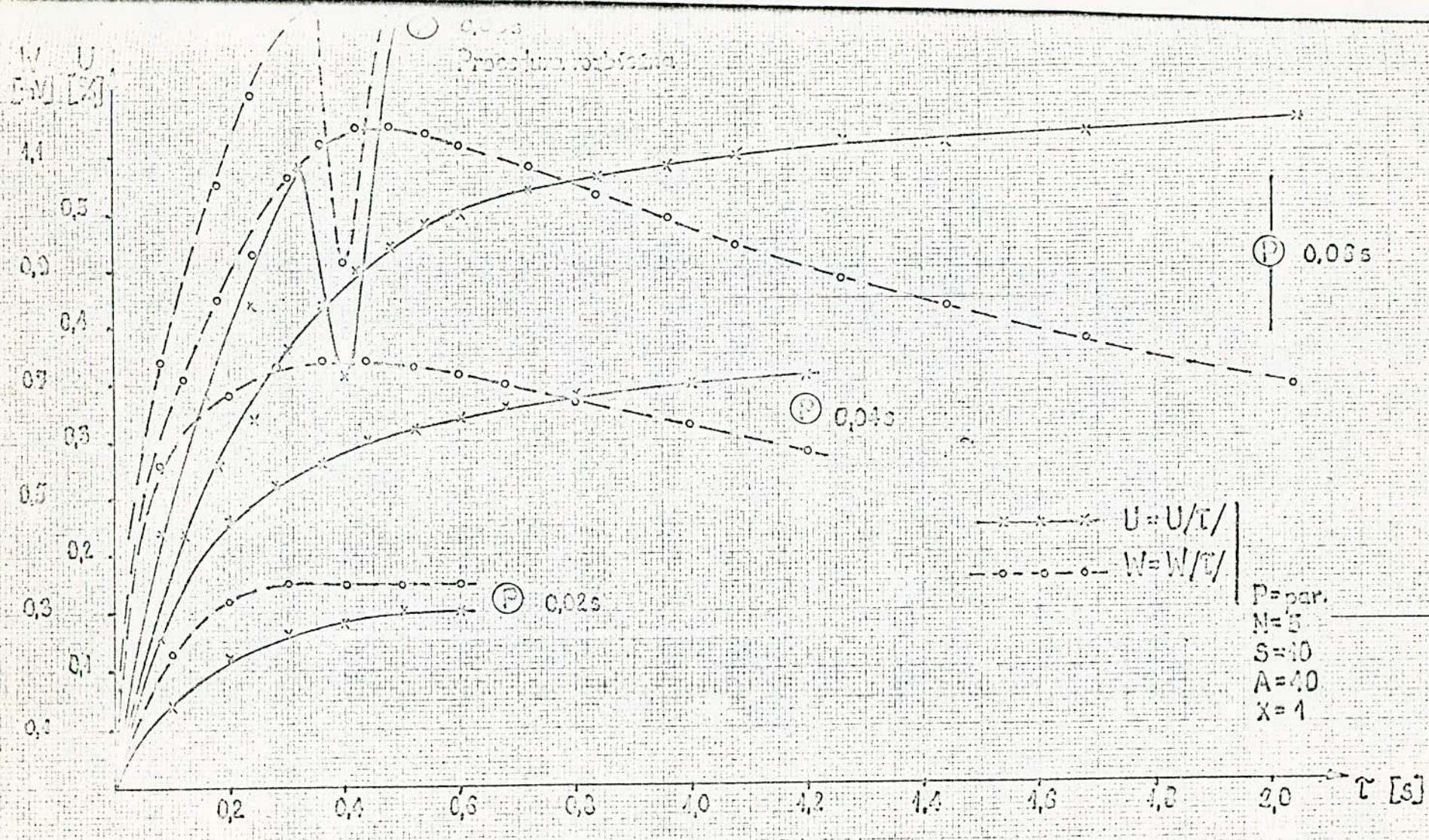


Figure 5.9 : Diagramme de variation des valeurs des erreurs de la solution en fonction du temps pour des pas de temps différents .

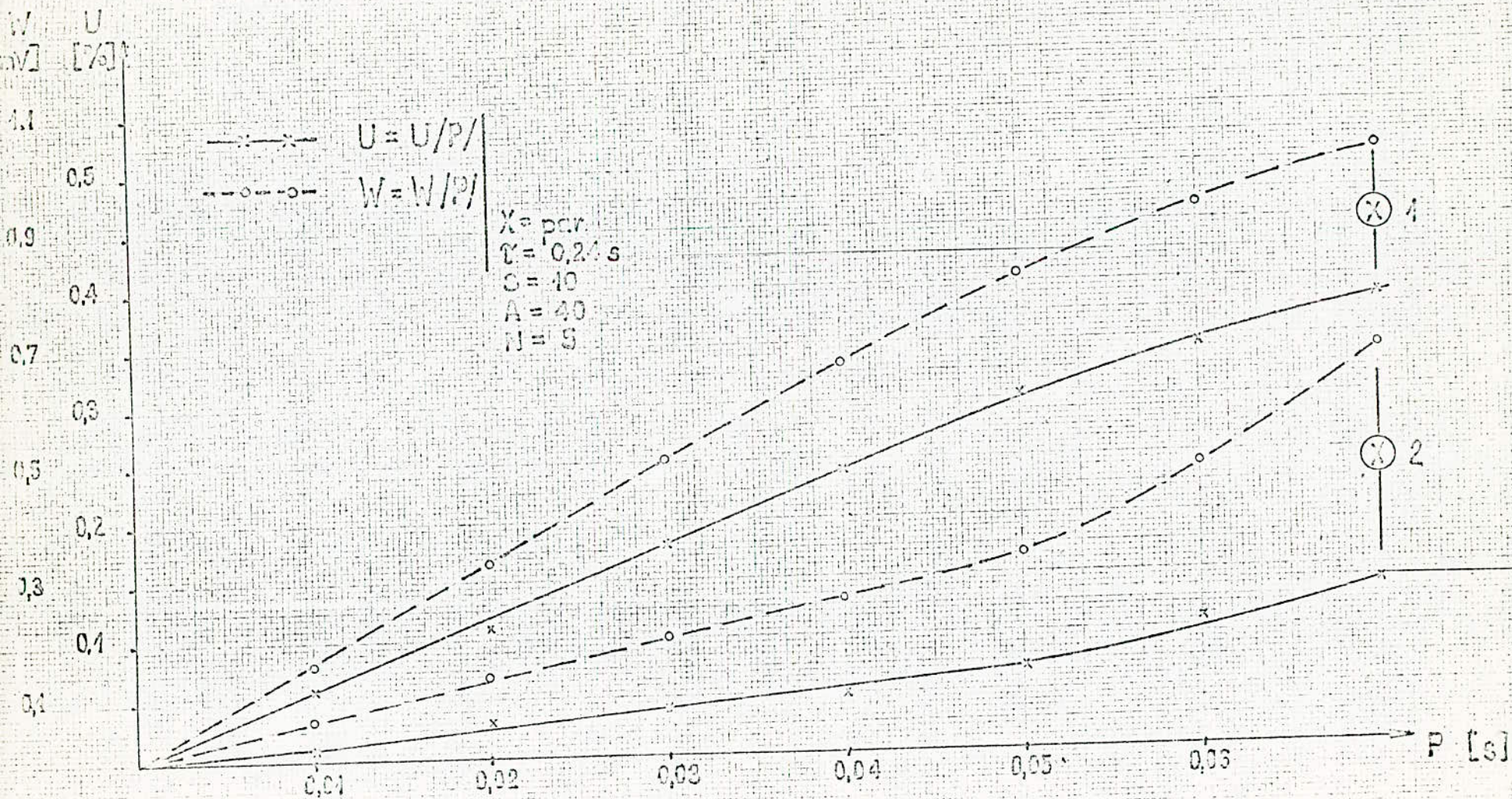


Figure 5.10: Diagramme de variation des valeurs des erreurs de la solution en fonction de la longueur des pas de temps pour des noeuds choisis du réseau .

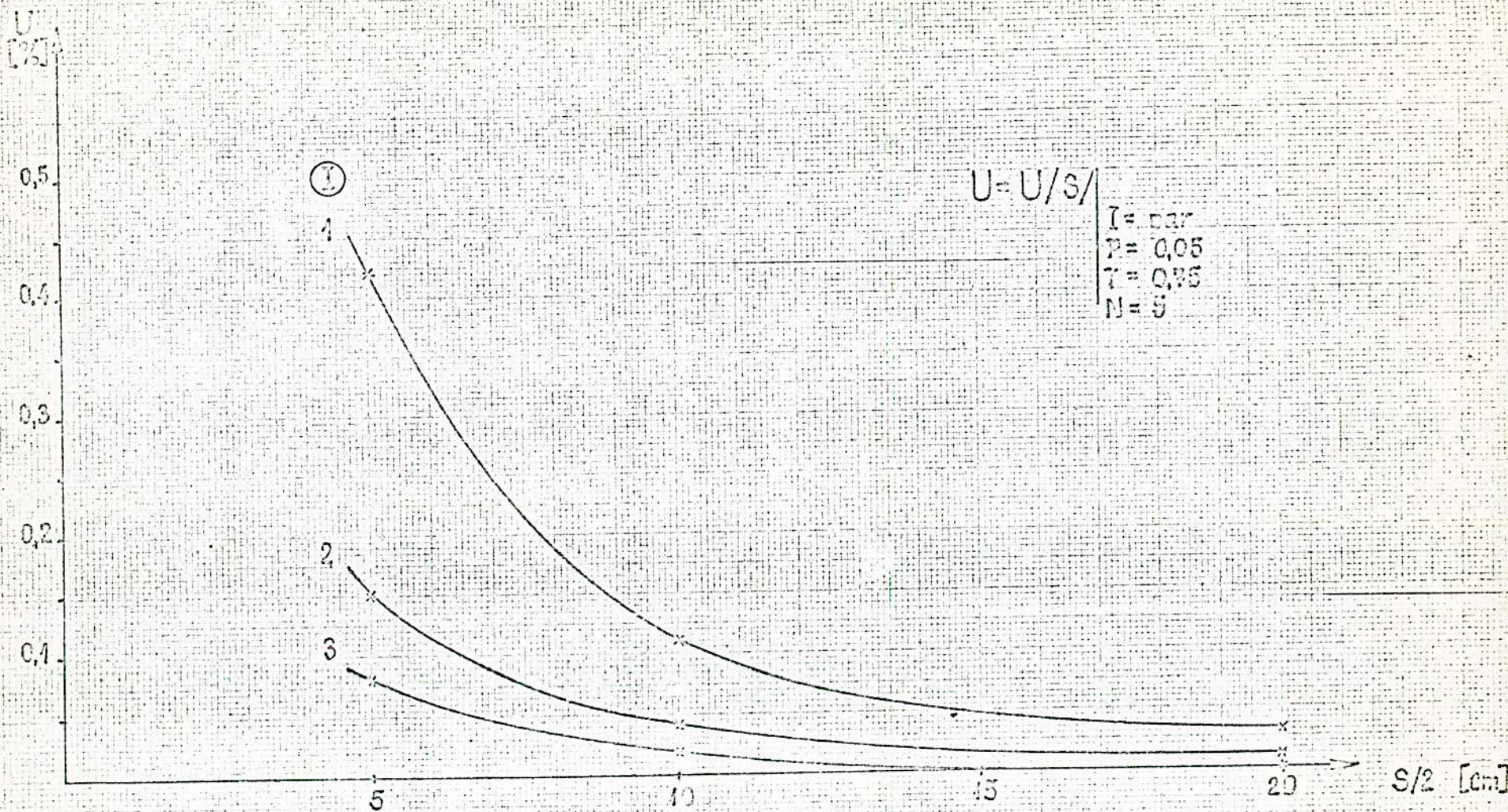


Figure 5.11 : Diagramme de variation des valeurs de l'erreur relative de la solution en fonction de la dimension de l'espace modelé .

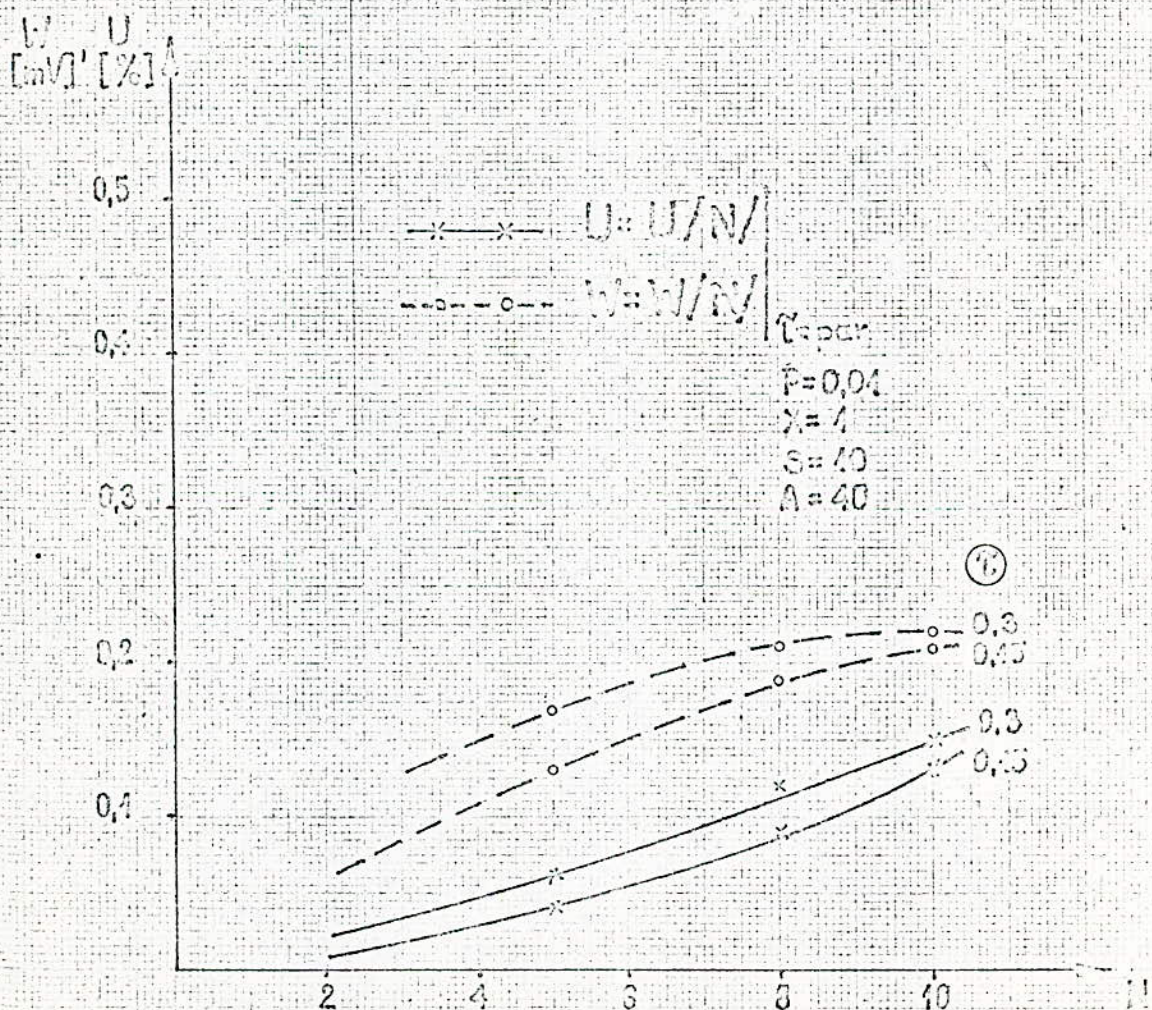


Figure 5.12 : Diagramme de variation des valeurs des erreurs de la solution en fonction du nombre de pas de discrétisation de l'espace modelé pour des sections de temps différentes .

CHAPITRE 6 - CONCLUSION

Les méthodes présentées de la simulation sur les réseaux R-C et R-R se basent sur l'hypothèse fondamentale telle que l'utilisation de la transformation de KIRCHOFF pour les équations aux dérivées partielles quasi-linéaires.

Cette hypothèse donne la possibilité de :

- a)- La transformation des équations quasi-linéaires jusqu'à une forme assemblant la fonction résultante affine avec la dérivée partielle par rapport au temps, et liée avec une élimination des valeurs non homogènes du paramètre de conductivité de l'aire.
- b)- Pour les équations linéaires, l'assemblage des valeurs des paramètres hétérogènes de l'aire avec la dérivée par rapport au temps.

La conséquence de ces faits est la possibilité d'utiliser des réseaux R-C ou R-R avec des valeurs homogènes des résistances simulant le paramètre hétérogène de la conductivité de l'aire.

Dans l'étude on a fait une distinction des méthodes séparant les réseaux R-C et R-R et aussi les cas linéaires du cas quasi-linéaire.

Chaque fois la présentation des méthodes débute sur une étude de la modification des versions classiques des réseaux.

Aussi est présentée l'utilisation des conceptions déterminées pour des équations aux dérivées partielles, linéaires non homogènes. Cette problématique a une importance pratique dans la simulation des processus réels aux paramètres répartis.

Ainsi est présentée une proposition pour le modelage de l'équation linéaire, hétérogène, de FOURIER soumise à la transformation de KIRCHOFF, sur le réseau homogène R-C.

Le remplacement de l'ensemble des condensateurs par un système électronique analogue permet de créer des conditions favorables de mesure des valeurs de la solution, et la reproduction précise des paramètres de l'air modelé.

Le modèle réticulaire R-C était accepté comme modèle de départ pour l'étude de la démarche des méthodes déterminées.

En se basant sur l'analogie du modèle et du processus, on peut analyser les éléments particuliers. Au début est présentée la conception du modèle R-C modifié qui est caractérisé par une suite de traits positive :

- a)- Possibilité de mesure en chiffres des potentiels (de la solution) dans la section de temps quelconque de toute l'aire du réseau.
- b)- On garde le caractère continu de la variable dépendante en fonction du temps.
- c)- Simplicité de donner les conditions initiales et l'initiation du travail du réseau.
- d)- Possibilité d'accouplement avec un système hybride de mesure.

Dans l'étude trois méthodes de résolution des problèmes quasi-linéaires sur les réseaux R-C ont été présentées:

- a)- Méthode du réseau R-C avec condensateur non linéaire (en parallèle).
- b)- Méthode du réseau R-C avec modification continue des conditions initiales.
- c)- Méthode du réseau R-C avec modification discrète des conditions initiales.

Dans la première, on a introduit le terme de condensateur en parallèle. Dans le cas général c'est l'élément non réalisable, mais malgré tout le problème à un caractère complétant le domaine du modelage sur les réseaux avec des éléments non linéaires.

La détermination de la valeur instantanée du courant passant par le condensateur en parallèle permet une juste interprétation des valeurs de la capacité du condensateur dans le réseau R-C.

La deuxième méthode consiste en l'utilisation de la modification continue des conditions initiales des condensateurs pour modeler la valeur instantanée du courant conformément avec le caractère de la fonction affine.

La réalisation pratique de cette méthode est liée avec une certaine complication de système de réseau R-C homogène.

Il faut souligner que la première méthode ainsi que la deuxième permettent la solution des problèmes aux limites quasi-linéaires d'une manière directe c'est-à-dire que les distributions reçues des potentiels de noeuds sont la solution du problème.

La troisième méthode se base sur le réseau R-C homogène modifié et elle est destinée pour un système hybride de mesure.

On obtient la solution pour des instants de temps choisis qui sont les limites des pas de temps. Elle est déterminée numériquement par un algorithme qui tient compte du caractère de la fonction affine du processus, de la distribution initiale de chaque pas de temps et de la distribution de la solution linéaire.

Les valeurs de la solution reçues modifient les conditions initiales des condensateurs du réseau en créant une distribution initiale pour le pas de temps suivant. La longueur des pas de temps peut être changée dans le modèle R-C.

Cette méthode caractérise le départ de la réalisation d'un processus itératif sur le réseau jusqu'à l'obtention de la solution du problème par voie numérique.

Le réseau accomplit la fonction de sous-programme résolvant les problèmes linéaires.

La méthode présentée entache la solution d'une erreur supplémentaire due à la méthode.

La détermination générale de la valeur de l'erreur est plus difficile, ainsi dans l'étude est présentée uniquement l'analyse des résultats de l'exemple testant la méthode.

Les résultats obtenus vérifient l'exactitude de la méthode du réseau R-C avec la modification discrète des conditions initiales. La méthode est limitée par la nécessité de la détermination des paramètres du réseau permettant la convergence de la procédure d'itération.

Ensuite on a présenté la problématique du modelage des problèmes aux limites quasi-linéaires sur des réseaux R-R.

Au début on a proposé une version du réseau R-R qui diffère du modèle classique R-R par un injecteur de courant.

Cette solution permet de minimiser le matériel technique avec une automatisation du réseau. Dans l'étude, deux méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles quasi-linéaires sur des réseaux R-R homogènes, sont présentées :

- a)- Méthode du réseau R-R avec contre-réaction pour le potentiel de jonction (Fig. 4.9).
- b)- Méthode du réseau R-R avec correction des potentiels de jonction.(4.2.2.3)

La première méthode est liée avec la complication du système du modèle, mais permet d'obtenir une solution directe.

La deuxième méthode permet d'avoir le résultat dans les instants de temps choisis, en utilisant l'information sur la solution du pas de temps précédent, la solution du problème linéaire et la fonction affine de l'équation.

Cette méthode est destinée à des systèmes hybrides de mesure accouplée à un réseau R-R homogène automatisé.

Le changement de la longueur du pas de temps exige le changement de toutes les résistances simulant le temps ce qui n'est pas très commode.

C'est pour cette raison que le plus souvent les réseaux R-R travaillent avec le même pas de temps.

Cette méthode possède un caractère universel pour les différentes fonctions affines, mais exige un assemblage des paramètres du réseau assurant la convergence de la procédure d'itération (choix des paramètres). Elle entache la solution d'une erreur dont la détermination en général est très difficile (de même que pour les réseaux R-C).

Il faut constater que l'acceptation du modèle R-C comme modèle de départ permet la transposition des méthodes étudiées sur des réseaux R-R par introduction des conditions supplémentaires d'équivalence des solutions des deux réseaux.

Parmi les méthodes présentées (dans le sous-programme) la méthode du réseau R-C avec modification discrète des conditions initiales et la méthode du réseau R-R avec la correction des potentiels de jonction sont échangeables.

L'exemple pratique non linéaire teste les deux méthodes.

Dans le travail a été utilisé un calculateur numérique adapté aux réseaux ce qui est très commode comme solution pour le problème unidimensionnel avec simples conditions aux limites.

Il faut remarquer que les méthodes présentées sont étudiées pour des problèmes unidimensionnels. Pour résoudre les problèmes aux limites dans un espace à plusieurs dimensions, les propositions présentées sont appelées à être développées.

Ceci est possible pour toutes les équations où on peut utiliser la transformation de KIRCHOFF.

Enfin, il faut souligner l'existence des méthodes utilisant des modèles réticulaires pour la simulation des processus aux paramètres répartis, et surtout leur application dans les systèmes hybrides de mesure permettant une utilisation optimale des techniques analogiques et numériques.

La fréquence, l'abondance des processus aux paramètres répartis font que dans beaucoup de domaines on a besoin des méthodes de simulation des problèmes aux limites.

Les exigences de la technique conduisent à résoudre les équations aux dérivées partielles affines non simplifiées.

On espère que dans les méthodes présentées de résolution des processus choisis avec des paramètres répartis seront les méthodes utilisées dans le domaine de la simulation des phénomènes physiques.

B I B L I O G R A P H I E .

- [1] : CAUSSADE (B.H) : Simulation hybride des processus à paramètres répartis du type parabolique . Thèse 1975 .
- [2] : CHAPPE (D) : Régulation des processus à paramètres répartis du type parabolique .Thèse 1973 .
- [3] : DEMIDOVITCH (B) - MARON (I) : Eléments de calcul numérique . Editions MIR - MOSCOU .
- [4] : JABLONSKI (A) : Methodes de modelage des processus linéaires et quasi-linéaires sur des réseaux RC et RR . Thèse de doctorat ; VARSOVIE 1975 .
- [5] : JABLONSKI (A) : Simulation chiffrée d'un processus non linéaire du type parabolique sur systeme hybride .
- [6] : KARPLUS (W-J) et GIRERD (J) : Traitement des équations différentielles sur calculateurs électronique .Gauthiers-Villiar -PARIS 1968 .
- [7] : LIONS (J-L) : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites . Editions mathématiques .
- [8] : PISKOUNOV (N) : Calcul différentiel et intégral . Editions MIR MOSCOU .
- [9] : SMIRNOV (N) : Mathématiques supérieures .T.4 Editions MIR.MOSCOU

NB : M^r JABLONSKI a utilisé une abondante bibliographie au laquelle on s'est référé sans la citer ICI .Néanmoins elle est indiquée de la manière suivante 4 - 68 pour le N° 68 de la thèse citée en 4 ici .