

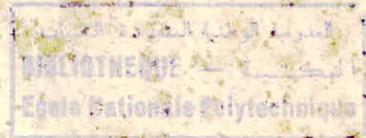
5/90

1 ex

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE - CIVIL



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE FLEXIONNELLE
DES
PLAQUES MULTICOUCHEES
PAR
DIFFERENCES FINIES - ELEMENTS FINIS
ET
BANDES FINIES

PROPOSE PAR :

Pr B. TELLOUCHE
M. DEMIDAN

ETUDIE PAR :

AL. BENSABER
AL. WAHE

CORRIGE PAR :

Pr AL. DEBBOUN
Pr B. TELLOUCHE

PROMOTION : JUIN 1990

DEDICACES

A la mémoire de mon père qui aurait tant voulu être là.
A ma mère qui a tant souffert pour me voir ainsi.
A mes tantes.
A mes oncles.
A tous mes amis (es) qui se reconnaîtrons d'eux-même.
A tous ceux qui me sont chers.
A tous les musulmans.

Mahmoud

A la mémoire de mon père qui aurait tant voulu être là.
A ma mère qui a tant souffert pour me voir ainsi.
A mes frères et soeurs.
A tous ceux qui me sont chers.

M'hamed

A tout ceux qui croient en ALLAH et le craignent.

Mahmoud et M'hamed.

REMERCIEMENTS³⁰

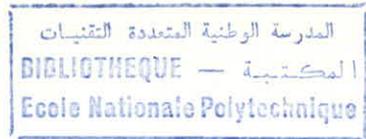
Nous remercions vivement notre professeur et promoteur M^r B. TILIOUIN qui n'a ménagé ni son effort, ni son temps pour nous aider, conseiller et diriger.

Nous remercions également M^r DEMIDEM pour la serviabilité et la gentillesse qu'il nous a toujours manifesté.

Qu'il nous soit permis de remercier également MMs REDA, BENRADOUANE Mustapha et BANAT Abdelkader qui nous ont également aidé.

Nos remerciements à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation, ainsi qu'au personnel du centre de calcul et de la bibliothèque de l'Ecole Nationale Polytechnique pour l'amitié et l'aide qu'ils nous ont toujours fournie.

Ministère de l'enseignement supérieur
Ecole Nationale Polytechnique
Département : Genie Civil



Promoteur : M. DEMIDEM et Pr. B. TILIUINE
Elèves Ingénieurs : M. BENSAIBI , M. YAHI

الموضوع : تحليل الانحناء لمفاتيح متعددة الطبقات بإستعمال
الفروق المحدودة، العناصر المحدودة والشروط المحدودة.
الملخص : هذا المشروع يهدف إلى إنجاز برامج آلية موجهة لتحليل
لانحناء لمفاتيح رقيقة متعددة الطبقات بإستعمال :
* طريقة الفروق المحدودة
* طريقة العناصر المحدودة
* طريقة الأشربة المحدودة
تسمح بتعيين المجاهيل الأساسية لمفاتيح تحت حملات
ساكنة عمودية لها شروط تثبيت مختلفة بغاية المقارنة
بين مختلف الطرق المذكورة سابقا.

Sujet : Analyse des plaques multicouches par différences finies, éléments finies et éléments bandes finis.

Résumé Le présent travail a pour objectif l'élaboration de programmes pour l'analyse flexionnelle des plaques multicouches par :

- * Méthode des différences finies,
- * Méthode des éléments finis,
- * Méthode des éléments bandes finis.

permettant la détermination des inconnues de base des plaques sous charge statique verticales ayant des conditions de fixation quelconques, afin de faire une comparaison entre les différentes méthodes citées ci-dessus.

Subject : Analysis of multilayers plates by the finit differences, finite elements and finite strips methods.

Abstract : The aim of the present research is to develop a computers programs (or software) for bending thus multiplayers plates per

- * The finit difference method.
- * The finite element method.
- * The finite strip method.

To permit the determination of the plates basis unknown under vertical static loads which have whatever conditions of fixation in order to compare the methods above.

Sujeto : Analisis flexional des las placas multicapas-con diferencias Accabadas, elementos acabados y elementos vendas acabados.

Resumido : Este proyecto tieme por objetivo l'elaboration de programas par analizar la flexion de las placas multicapas con methodos siguientes :

- * Difenrencias acabados.
- * Elements acabados.
- * Vendos acabados.

Sstes methodos permetan la determinacion des los desconocidos de base des las placas bajo carga estatica Vertical condiciones des fixation cualesquiera al fin de comparar entre los diffe-rentes methodos citados precedamente.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

I - INTRODUCTION GENERALE.....	
I-1) Objet du travail.....	
I-2) Importance du multicouche dans la pratique.....	
II - THEORIE DES PLAQUES MINCES	
II-1) Introduction.....	
II-2) Cadre général de la théorie des plaques stratifiées.....	
II-3) Etude flexionnelle des plaques minces.....	
II-4) Comportement d'un stratifié en flexion.....	
II-5) Conditions aux limites.....	
II-6) Méthodes de résolution de l'équation gouvernante.....	
II-7) Conclusion.....	
III - LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES	
III-1) Introduction.....	
III-2) Principe de la méthode.....	
III-3) Cas de deux variables indépendantes.....	
III-4) Approximation par différences finies de l'opérateur..... double Laplacien.....	
III-5) Solution des équations aux différences finies.....	
III-6) Calcul des efforts.....	
III-7) Autre manière de résolution du problème.....	
III-8) Conditions aux limites.....	
III-9) Etude des dalles.....	

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCES FINIES

- IV-1) Introduction.....
- IV-2) Description du programme.....
- IV-3) Exemple de résolution par différence finie.....
- IV-4) Présentation des résultats.....

V INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

- V-1) Introduction.....
- V-2) Evolution de la méthode.....

VI ELEMENT FINI POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES

- VI-1) Introduction.....
- VI-2) Discrétisation d'une structure.....
- VI-3) Problème de continuité.....
- VI-4) Matrice de rigidité élémentaire pour l'élément rectangulaire
- VI-5) Vecteur charge élémentaire pour l'élément rectangulaire.....
- VI-6) Généralisation du domaine entier - règle d'assemblage.....
- VI-7) La M-E-F considérée comme une minimisation de l'énergie.....
potentielle totale.....
- VI-8) Critères de convergence.....

VII ORGANISATION GENERALE D'UN PROGRAMME PAR ELEMENT FINI

- VII-1) Introduction.....
- VII-2) Programmation.....

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

- VIII-1) Méthodes de résolution des systèmes linéaires.....
- VIII-2) Méthode de factorisation de Cholesky.....
- VIII-3) Mise en oeuvre pratique des méthodes de résolution.....
- VIII-4) Méthode frontale.....
- VIII-5) Présentation des résultats.....
- VIII-6) Interprétation des résultats.....

X ORGANISATION

- X-1) Introduction.....
- X-2) Programmation.....
- X-3) Présentation des résultats.....
- X-4) Interprétation des résultats.....

XI CONCLUSION.....

INTRODUCTION

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

On s'accorde à penser aujourd'hui que l'utilisation des premiers matériaux, par l'homme, remonte à près de deux millions d'années. D'abord ramassée sous forme de galets, puis taillée au paléolithique, et enfin polie au néolithique, la pierre contribua, face à un univers hostile, à assurer la survie et le développement de l'espèce humaine. Avec l'emploi du bronze il y'a environ cinq mille ans, puis fer, l'âge de la pierre s'efface, pour faire place à celui des métaux. Leur apogée se situera à la fin du siècle dernier avec une contribution active à l'essor du machinisme et à l'avènement de la société industrielle.

La suprématie des métaux est déjà fortement entamée par l'arrivée des résines thermoplastiques et thermodurcissables ("les plastiques"). Ces matériaux de grande diffusion sont à l'origine de la banalisation de nombreux objets, dont l'esthétique se renouvelle parallèlement. Aujourd'hui, nous venons d'entrer dans l'âge des composites. Leur utilisation généralisée opérera une nouvelle révolution technologique, conduisant au travers de nombreuses innovations à une véritable mutation des produits et des hommes.

Qu'attend-on, au fait, des matériaux nouveaux ? Essentiellement qu'ils permettent des gains de performance et de poids, des économies de prix,

CHAPITRE

III

d'énergie et de devises et une réduction de la pollution. Côté matériaux traditionnels, force est de constater que le potentiel d'amélioration résiduel est limité à l'opposé le composite représentent un vaste famille dont les possibilités sont considérables. Ainsi leur introduction intensive a permis en une quinzaine d'années, de diviser par deux à trois la masse de nos moteurs Cette famille ne cesse de s'élargir. Un jour, elle couvrira de façon continue, l'ensemble du champ des spécifications techniques.

La recherche de performances techniques alliées au besoin d'optimisation et d'allègement a motivé, la conception et l'utilisation de matériaux spécifiques consiste donc à associer dans une même masse des matériaux différents par leur nature chimique et leur forme afin de tenter une sommation des performances.

I- INTRODUCTION GENERALE

I-1) Objet du travail

L'objet du présent travail consiste en l'analyse flexionnelle des plaques stratifiées par les méthodes numériques suivantes :

- Méthode des différences finies

- Méthode des éléments finis
- Méthode des bandes finis

Pour ce faire on a modélisé le stratifié par une couche homogène isotrope, le but étant la détermination des déplacements et des contraintes en n'importe quel point de cette couche soumise à un déplacement uniforme avec divers conditions d'appui, cette étude est indispensable si l'on veut être en mesure d'effectuer un dimensionnement correct, c'est à dire suivant les cas d'application, si l'on veut que la déformation du stratifié ne soit pas trop importante, ou bien que les contraintes conservent des valeurs admissibles, étude qui ne peut être menée à bien que si l'on a recouru à des programmes informatisés performant utilisant les méthodes cités précédemment.

En ce qui concerne la méthode des éléments finis, nous avons adoptés un élément "conforme" rectangulaire à quatre degrés de liberté par noeud, prenant en compte le phénomène de gauchissement, dans un souci de rendre le programme plus efficace, nous avons utilisés des algorithmes de résolution de plus en plus élaborés.

I-2) Importance du multicouche dans la pratique

Depuis leur naissance les stratifiés ont apporté un ensemble de propriétés extrêmement avantageux, ils se sont imposés surtout par leur facilité de mise en oeuvre et leur stabilité à la corrosion et ceci amena rapidement un bouleversement complet de secteurs industriels importants comme l'équipement de production chimique et agro-alimentaire, la navigation de plaisance, le gros appareillage électrique et les composants électroniques.

Leur emploi se développe avec circonspection dans des applications particulièrement exigeantes de l'aéronautique et de l'espace.

La lutte économique sans merci qui caractérise notre époque ne pouvait négliger les armes offertes par ces nouveaux produits ouvrant des possibilités dans tous les domaines dont le succès est lié à la performance, assortie de la qualité et de la sécurité d'emploi ... autant dire dans tous les secteurs, ou à peu près, les dalles plates, les tabliers de ponts, les planchers, les dômes et les réservoirs à parois minces, soumis à des pressions intérieures et extérieures, en sont des exemples frappants.

CHAPITRE

DEUX

II - THEORIE DES PLAQUES MINCES

II-1) INTRODUCTION

Les propriétés mécaniques spécifiques élevées des matériaux composites à hautes performances sont particulièrement mises à profit dans la réalisation de structures minces. La loi constitutive thermoélastique des plaques stratifiées permet de décrire de façon claire et simple les caractéristiques nouvelles de certains empilements et fait entrevoir la gamme très étendue de structures inédites qu'il devient possible d'imaginer et de concevoir.

La démarche suivie en vue de prévoir le comportement des stratifiés planes est tout à fait symptomatique .Elle souligne la nécessité à recourir à une représentation du comportement des stratifiés plan en tant que structures planes hétérogènes plutôt que matériaux. L'interprétation correcte d'un essai classique de flexion trois points ne peut être faite que dans le cadre de la théorie élastique des plaques stratifiées.

II-2) CADRE GENERAL DE LA THEORIE CLASSIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES

II-2-1) Definition

Une plaque mince est une structure matérielle continue limitée par deux plans parallèles et dont une dimension, l'épaisseur h , est petite devant les deux autres. Le plan équidistant des deux plans limites est le plan moyen

La notion de plaque mince n'est pas exclusivement de nature géométrique, elle dépend également de la configuration des efforts extérieurs.

La théorie des plaques est destinée à traduire le comportement tridimensionnel des structures planes au moyen des champs surfaciques en faisant appel à des approximations qui s'expriment par des hypothèses dynamiques et cinématiques.

Une plaque stratifiée est une plaque mince constituée d'un empilement de monocouches, ou strates, orthotropes parallèles et parfaitement soudées les unes aux autres. Cette hypothèse implique la continuité des déplacements aux interfaces monocouche/monocouche.

Les figures 1 et 2 présentent respectivement la base d'orthotropie X, Y, Z liée au monocouche (P), que nous avons supposé unidirectionnel selon X , et la base X_1, Y_1, Z_1 liée au stratifié. Les directions Z et Z_1 sont perpendiculaires au plan moyen et l'orientation de la monocouche (P) est définie par l'angle (p) que fait X avec X_1 .

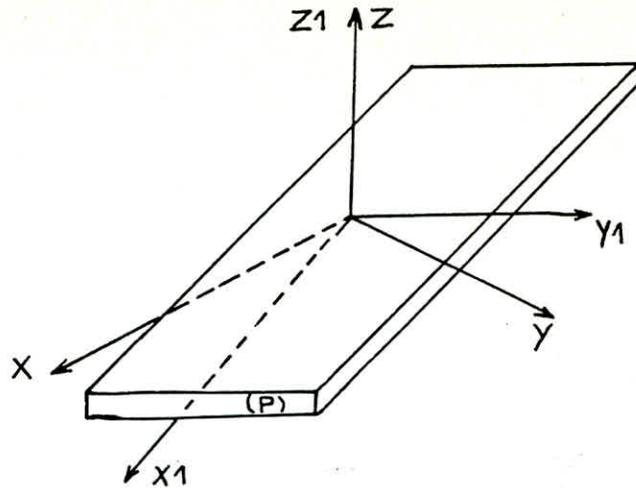


Figure II-1 : monocouche (P) unidirectionnelle selon X

X, Y, Z base d'orthotropie du monocouche

X_1, Y_1, Z_1 base liée au stratifié .

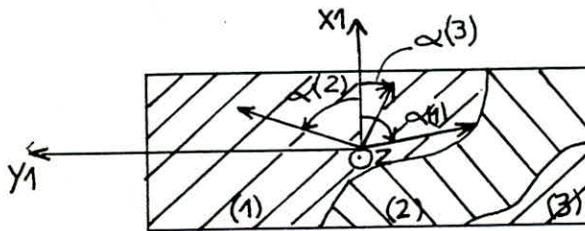


Figure II-2 : Orientation des monocouches dans le repère de la plaque.

II-2-2) HYPOTHESES

- I. Chaque monocouche a un comportement thermoélastique linéaire.
- II. Les déformations et les déplacements sont petits.

En première approximation :

III - Chaque monocouche est en état de contrainte plane.

IV - Les hypothèses cinématiques de Love-Kirchhoff sont vraies.

Dans le cas usuel les quatre hypothèses précédentes sont complétées par:

V - Les forces de masse sont négligeables devant les efforts surfaciques

VI - Le chargement transversal de la plaque est normal au plan moyen.

Remarque : L'hypothèse III signifie que l'effet des contraintes planes est prédominant, par suite la loi constitutive de chaque monocouche est écrite en contrainte plane. Cette hypothèse est justifiée par le fait que les cisaillements transversaux s'annulent sur les plans limites et que l'épaisseur h est faible. Il est clair cependant que l'équilibre interne du solide exige un état tridimensionnel des contraintes, la théorie présentée exclue à priori la représentation de cisaillements transversaux importants.

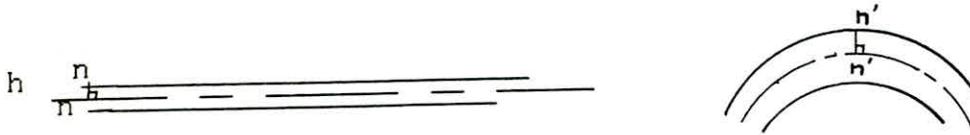
II-2-3) PLAQUES MINCES A PETITES FLECHES ($h/l < 15$ et $w/h < 1/5$)

Dans notre étude on ne s'intéressera qu'aux problèmes des plaques minces

à petites flèches pour lesquelles les hypothèses précédentes sont vraies.

- Hypothèses cinématiques de Kirchhoff

a) La normale matérielle après déformation reste normale à la surface moyenne déformée.



b) La dilatation linéaire transverse est nulle, c'est à dire, la flèche du plan moyen, n'est pas modifiée par la dilatation linéaire transverse de façon importante.

Tout est résumé par deux paramètres :

- w Le déplacement le long de z
- $\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}$ Les courbures.

II-2-4) PLAQUES MINCES A GRANDES FLECHES ($w/h > 1/5$)

L'hypothèse b de Kirchhoff n'est plus vérifiée, il existe alors une déformation due à la flexion : couplage des effets de flexion et des effets de membrane.

II-2-5) PLAQUES EPAISSES ($h/l > 1/5$)

Le problème n'est pas simple et doit être étudié à l'aide de la théorie de Mindling.

II-3) ETUDE FLEXIONNELLE DES PLAQUES MINCES

En conséquence des hypothèses de Kirchhoff on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = Z \frac{1}{r_x} = -Z \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \\ \epsilon_y = Z \frac{1}{r_y} = -Z \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \\ \epsilon_{xy} = Z \frac{1}{r_z} = -Z \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \end{array} \right. \quad (II-1)$$

En appliquant la loi de comportement élastique en contraintes planes

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_y}{E} \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} \\ \epsilon_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \cdot \epsilon_x + \epsilon_y) \\ \sigma_{xy} = \frac{E}{1 + \nu} \epsilon_{xy} \end{array} \right. \quad (II-2)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = -Z \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right] \\ \sigma_y = -Z \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \nu \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \right] \\ \sigma_{xy} = -Z \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \end{cases} \quad (\text{II-3})$$

Les contraintes régnant sur l'épaisseur de la plaque donnent naissance à des contraintes généralisées qui s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \, dz \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \, dz \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} \cdot z \, dz \end{cases} \quad \implies \begin{cases} M_x = -D \left[\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right] \text{ (m}^{\text{mt}} \text{ de flexion)} \\ M_y = -D \left[\frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \nu \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \right] \text{ (m}^{\text{mt}} \text{ de flexion)} \\ M_{xy} = -D \cdot (1-\nu) \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \text{ (m}^{\text{mt}} \text{ de torsion)} \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

D : rigidité flexionnelle de la plaque;

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\begin{cases} Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \, dz \\ Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} \, dz \end{cases} \quad \text{Efforts tranchants (II-5)}$$

II-3-1) EQUATION D'EQUILIBRE

$$\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta \sigma_{xz}}{\delta z} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta y} - Q_x = 0 \\ \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta M_y}{\delta y} - Q_y = 0 \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

On peut éliminer Q_x et Q_y en écrivant l'équilibre vertical des forces.

$$\frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} + P = 0 \quad P : \text{chargement}$$

$$\boxed{\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x \delta y} + p = 0} \quad (\text{II-7})$$

En remplaçant les moments dans les équations d'équilibre en fonction des déplacements on trouve :

$$\boxed{\frac{\delta^4 W}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 W}{\delta^2 x \delta^2 y} + \frac{\delta^4 W}{\delta y^4} = P / D \quad \langle \text{=====} \rangle \quad \Delta \Delta W = P / D} \quad (\text{II-8})$$

qu'on appelle équation gouvernante ou équation de Poisson. Par ailleurs on peut maintenant trouver Q_x et Q_y .

$$\begin{cases} Q_x = \frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta y} = -D \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right) = -D \frac{\delta}{\delta x} \Delta W \\ Q_y = -D \frac{\delta}{\delta y} \Delta W \end{cases} \quad (\text{II-9})$$

II-3-2) CAS DES PLAQUES ORTHOTROPES

Définition : Ce sont des plaques dont les propriétés matérielles (E, ν) suivant (x, x) sont différentes des propriétés matérielles suivant l'axe (y, y)

Dans ce cas on a :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E_x \epsilon_{xx} + E' \epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = E_y \epsilon_{yy} + E' \epsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} = 2 G \epsilon_{xy} \end{cases} \quad (\text{II-10})$$

avec

$$E_x = \frac{E_1}{1 - \nu_2^2} ; E_y = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} ; E' = \frac{E_1 \nu_2^2}{1 - \frac{E_1}{E_2} \nu_2^2} ; G = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)}$$

E_1 : module de Young suivant (x, x) E_2 : module de Young suivant (y, y)

ν_1 : coefficient de poisson suivant (x, x)

ν_2 : coefficient de poisson suivant (y, y)

La loi de comportement tridimensionnelle s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_{yy}}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_{zz}}{E_1} & ; \quad \epsilon_{xz} = (1 + \nu_1) \frac{\sigma_{xz}}{E_1} \\ \epsilon_{yy} = -\nu_2 \frac{\sigma_{xx}}{E_2} + \frac{\sigma_{yy}}{E_2} - \nu_2 \frac{\sigma_{zz}}{E_1} & ; \quad \epsilon_{xy} = \sigma_{xy} / (2G) \\ \epsilon_{zz} = -\nu_1 \frac{\sigma_{xx}}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_{yy}}{E_2} + \frac{\sigma_{zz}}{E_1} & ; \quad \epsilon_{yz} = \sigma_{yz} (1 + \nu_2) / E_2 \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

Sur le plan pratique $E_1 \approx E_x$ et $E_2 \approx E_y$

L'hypothèse de Kirchhoff mène à :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -Z \left[E_x \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + E' \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right] \\ \sigma_{yy} = -Z \left[E_y \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + E' \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \right] \\ \sigma_{xy} = -2GZ \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

$$\begin{cases} M_x = - \left[D_x \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + D_1 \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right] \\ M_y = - \left[D_y \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + D_1 \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \right] \\ M_{xy} = - 2D_{xy} \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

tel que :

$$D_x = E_x h^3 / 12 \quad ; \quad D_1 = E' h^3 / 12 \quad ; \quad D_y = E_y h^3 / 12 \quad ; \quad D_{xy} = G h^3 / 12$$

$$Q_x = - \frac{\delta M_x}{\delta x} - \frac{\delta M_{xy}}{\delta y} = D_x \frac{\delta^3 W}{\delta x^3} + (D_1 + 2 D_{xy}) \frac{\delta^3 W}{\delta x \delta y^2}$$

$$Q_y = D_y \frac{\delta^3 W}{\delta y^3} + (D_1 + 2 D_{xy}) \frac{\delta^3 W}{\delta x^2 \delta y}$$

En appliquant $\frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} = P$ on aura :

$$D_x \frac{\delta^4 W}{\delta x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\delta^4 W}{\delta x^2 \delta y^2} + D_y \frac{\delta^4 W}{\delta y^4} = P \quad \text{(Equation d'Huber)} \\ \text{(II-14)}$$

Dans la pratique on pose

$$H = D_1 + 2 D_{xy} \approx \sqrt{D_x D_y}$$

et on résoud

$$\frac{D_x}{D_y} \frac{\delta^4 W}{\delta x^4} + 2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \frac{\delta^4 W}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 W}{\delta y^4} = P / D_y \quad \text{(II-15)}$$

artifice de calcul

On pose $\lambda = \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}} \implies \frac{1}{\lambda^4} \frac{\delta^4 W}{\delta x^4} + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\delta^4 W}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 W}{\delta y^4} = P / D_y$

transformation géométrique $x' = \lambda x \implies \Delta \Delta W = P / D_y$.

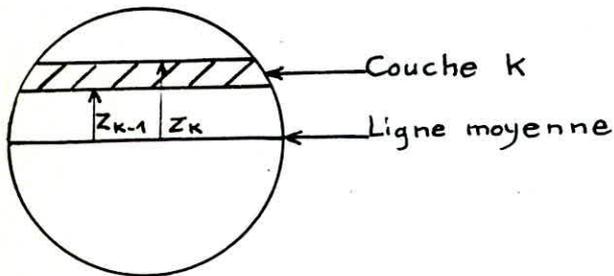
II-4) COMPORTEMENT D'UN STRATIFIE EN FLEXION

La matrice d'élasticité d'une couche K est donnée par :

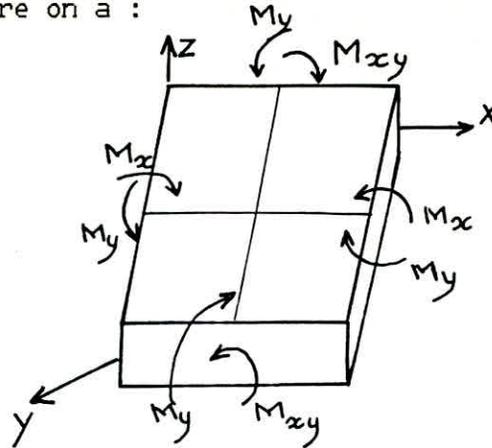
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{Bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{(II-16)}$$

avec $\bar{E}_{ij} = f(E_{ij}, \bullet)$

• étant l'angle que font les axes d'orthotropies avec les axes x,y



En flexion pure on a :



D'après le sens donné sur la figure, aux moments fléchissants et au moment de torsion, ces derniers s'expriment pour chaque couche k comme suit :

$$\left[\begin{array}{l} M_x^{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^{(k)} z \, dz \\ M_y^{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y^{(k)} z \, dz \\ M_{xy}^{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz \end{array} \right. \quad (\text{II-17})$$

D'après (II-16) $\sigma_x^{(k)} = E_{11}^{(k)} \cdot \epsilon_x + E_{12}^{(k)} \cdot \epsilon_y + E_{13}^{(k)} \cdot \epsilon_{xy}$

Portons cette expression dans $M_x^{(k)}$ on aura

$$M_x^{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\bar{E}_{11}^{(k)} \cdot \epsilon_x + \bar{E}_{12}^{(k)} \cdot \epsilon_y + \bar{E}_{13}^{(k)} \cdot \epsilon_{xy} \right] z \, dz$$

D'après les conséquences des hypothèses de Kirchhoff, les déformations

sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = -z \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \\ \epsilon_y = -z \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \\ \epsilon_{xy} = -2z \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \end{array} \right.$$

En tenant compte des expressions ci-dessus le moment M_x s'écrit alors :

$$M_x = - \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\bar{E}_{11}^{(k)} \cdot z^2 \cdot \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \bar{E}_{12}^{(k)} \cdot z^2 \cdot \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \bar{E}_{13}^{(k)} \cdot z^2 \cdot \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \right] dz \quad (\text{II-18-a})$$

En intégrant on obtient : (II-18-b)

$$M_x = - \sum_{k=1}^n \left[\frac{\bar{E}_{11}^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)}{3} \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \frac{\bar{E}_{12}^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)}{3} \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + 2 \frac{\bar{E}_{13}^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)}{3} \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \right]$$

On sait que la rigidité flexionnelle lie les contraintes généralisées

aux courbures donc :

$$M_x = D_{11} \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + D_{12} \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + D_{13} 2 \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \quad (II-19)$$

En identifiant terme à terme on déduit

$$D_{11} = - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{E}_{11}^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)$$

$$D_{12} = - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{E}_{12}^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)$$

$$D_{13} = - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{E}_{13}^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)$$

En généralisant

$$D_{ij} = -\frac{1}{3} \sum \bar{E}_{ij}^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \quad (\text{II-20})$$

d'où la loi de comportement en flexion d'un stratifié rendu homogène

obtenu en procédant de manière analogue avec M_y et M_{xy} .

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \\ \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \\ \frac{2 \cdot \delta^2 W}{\delta x \delta y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-21})$$

II-4-1) CAS PARTICULIER DE COUCHES ISOTROPES

Dans ce cas on a $E_x = E_y = E$ et $\nu_x = \nu_y = \nu$

La loi de comportement en flexion s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \nu \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \nu \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (\text{II-22})$$

Posons $\bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}$

Cette loi s'écrit alors

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{E} & \nu\bar{E} & 0 \\ \nu\bar{E} & \bar{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{E}}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (\text{II-23})$$

Et la loi de comportement en flexion du stratifié à couches isotropes

rendu homogène est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^2 W / \delta x^2 \\ \delta^2 W / \delta y^2 \\ 2\delta^2 W / \delta x \delta y \end{Bmatrix} \quad (\text{II-24})$$

Avec $D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n E^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)$

$$D_{12} = D_{21} = -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\nu \cdot E)^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)$$

$$D_{33} = -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left[\frac{E}{2(1-\nu)} \right]^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

Cherchons l'équation gouvernante dans le cas d'un multicouches à strates isotropes symétriques .

Dans chaque couche k la relation déformation-courbure s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x^{(k)} = -z_k \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \\ \epsilon_y^{(k)} = -z_k \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \\ \epsilon_{xy}^{(k)} = -2 \cdot z_k \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \end{array} \right.$$

La loi de Hooke donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{(k)} = \frac{E_k}{1-\nu_k^2} (\epsilon_x^{(k)} + \nu_k \epsilon_y^{(k)}) \\ \sigma_y^{(k)} = \frac{E_k}{1-\nu_k^2} (\epsilon_y^{(k)} + \nu_k \epsilon_x^{(k)}) \\ \tau_{xy} = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \epsilon_{xy}^{(k)} \end{array} \right.$$

En remplaçant les déformations par les courbures on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_x^{(k)} = - Z_k \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \nu_k \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right] \\ \sigma_y^{(k)} = - Z_k \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \nu_k \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \right] \\ \tau_{xy}^{(k)} = - Z_k \frac{E_k}{1 + \nu_k} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \right] \end{cases} \quad (\text{II-25})$$

Les moments résultants sont :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{(h_k)} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (\text{II-26})$$

Considérons l'expression de M_x (on procèdera par analogie pour M_y et M_{xy})

$$M_x = \sum_{k=1}^n \int_{(h_k)} \sigma_x^{(k)} z dz = \sum_{k=1}^n \left[\int_{-t_k}^{t_k} \sigma_x^{(k)} z dz - \int_{-t_{k+1}}^{t_{k+1}} \sigma_x^{(k)} z dz \right] + \int_{-t_{n+1}}^{t_{n+1}} \sigma_x^{(k)} z dz \quad (\text{II-27})$$

Cette dernière égalité traduit le fait de remplacer le stratifié par une couche homogène dont la loi de comportement est donnée par (II-24).

En remplaçant $\sigma_x^{(k)}$ par son expression donnée en (25) on aura :

$$M_x = \sum_{k=1}^n \left[\left[\int_{-t_k}^{t_k} z^2 dz + \int_{-t_{k+1}}^{t_{k+1}} z^2 dz \right] \left[\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \nu_k \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right] \left[\frac{E_k}{1 - \nu_k^2} \right] \right] + \frac{E_{n+1}}{1 - \nu_{n+1}^2} \int_{-t_{n+1}}^{t_{n+1}} z^2 \left[\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \nu_{n+1} \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right] dz \quad (\text{II-28})$$

En intégrant on aura donc :

$$M_x = -\frac{2}{3} \left[\sum_{k=1}^n \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} (t_k^3 - t_{k+1}^3) \left[\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \nu_k \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right] + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1 - \nu_{n+1}^2} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \nu_{n+1} \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right] \right] \quad (\text{II-29})$$

On aura donc pour M_y et M_{xy} .

$$M_y = -\frac{2}{3} \left[\sum_{k=1}^n \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} (t_k^3 - t_{k+1}^3) \left[\frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \nu_k \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \right] + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1 - \nu_{n+1}^2} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \nu_{n+1} \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \right] \right] \quad (\text{II-30})$$

$$M_{xy} = -\frac{2}{3} \left[\sum_{k=1}^n \frac{E_k(1-\nu_k)}{1-\nu_k^2} (t_k^3 - t_{k+1}^3) + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1-\nu_{n+1}^2} (1-\nu_{n+1}) \right] \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \quad (\text{II-31})$$

Comme on sait que

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} + 2 \frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x \delta y} + p = 0$$

p : densité de chargement

En remplaçant les moments en fonction des courbures on aura

$$-\frac{\delta^4 W}{\delta x^4} \left[\frac{2}{3} \left[\sum_{k=1}^n \frac{E_k(t_k^3 - t_{k+1}^3)}{1-\nu_k^2} + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1-\nu_{n+1}^2} \right] \right]$$

$$-\frac{\delta^4 W}{\delta y^4} \left[\frac{2}{3} \left[\sum_{k=1}^n \frac{E_k(t_k^3 - t_{k+1}^3)}{1-\nu_k^2} + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1-\nu_{n+1}^2} \right] \right]$$

$$- \frac{2 \delta^4 W}{\delta x^2 \delta y^2} \left[\frac{2}{3} \left[\sum_{k=1}^n \frac{E_k (t_k^3 - t_{k+1}^3)}{1 - \nu_k^2} \nu_k + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1 - \nu_{n+1}^2} \nu_{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{E_k (1 - \nu_k)}{1 - \nu_k^2} (t_k^3 - t_{k+1}^3) \right] + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1 - \nu_{n+1}^2} (1 - \nu_{n+1}) \right] + p = 0 \quad (\text{II-32})$$

Considérons l'expression que multiplie $\left[- 2 \frac{\delta^4 W}{\delta x^2 \delta y^2} \right]$, soit D_t

cette expression :

$$D_t = \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^n \left[\left[\frac{E_k (t_k^3 - t_{k+1}^3)}{1 - \nu_k^2} \right] (\nu_k + 1 - \nu_k) \right] + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1 - \nu_{n+1}^2} (\nu_{n+1} + 1 - \nu_{n+1}) \right)$$

$$\text{d'où} \quad D_t = \frac{2}{3} \left[\sum_{k=1}^n \frac{E_k (t_k^3 - t_{k+1}^3)}{1 - \nu_k^2} + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1 - \nu_{n+1}^2} \right] \quad (\text{II-33})$$

En considérant l'équation globale et en mettant en facteur D on obtient :

$$\frac{2}{3} \left[\sum_{k=1}^n \frac{E_k (t_k^3 - t_{k+1}^3)}{1 - \nu_k^2} + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1 - \nu_{n+1}^2} \right] \left[\frac{\delta^4 W}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 W}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 W}{\delta y^4} \right] = p \quad (\text{II-34})$$

i.e

$$\frac{\delta^4 W}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 W}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 W}{\delta y^4} = p / D_t \quad (\text{II-35})$$

Equation gouvernante pour la flexion d'une plaque multicouches isotropes.

Remarque :

D_t : rigidité flexionnelle équivalente de la multicouche.

II-5) CONDITIONS AUX LIMITES

Le déplacement W doit satisfaire à l'équation de LAGRANGE et aux conditions aux limites sur le contour de la plaque pour différents cas d'appuis

II-5-1) BORD ENCASTRE :

- le déplacement est nul .
- le plan tangent à la surface moyenne fléchie, coïncide avec la

position initiale du plan moyen de la plaque.

Exemple :

Si le bord ($x= a$) est encastré, alors les conditions le long de ce bord sont :

$$W(x=a) = 0 \text{ et } \left[\frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=a} = 0$$

Ces conditions sont appelées : CONDITIONS GEOMETRIQUES

II-5-2) BORD SIMPLEMENT APPUYE

Le long d'un bord simplement appuyée (Exemple : pour $x=a$)

- le déplacement latéral est nul.
- le moment de flexion M_x est nul, car ce bord peut tourner autour

l'axe y , on aura donc : $W(x=a)=0$ et

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

Ces conditions sont appelées : CONDITIONS MIXTES.

II-5-3) BORD LIBRE :

Si le bord d'une plaque, par exemple, le bord ($x=a$) est entièrement libre, il ne subit aucun moment de flexion, ni de torsion ni d'effort tranchant, donc :

$$(M_x)_{(x=a)} = 0 \quad M_{xy}(x=a) = 0 \quad \text{et} \quad Q_x(x=a) = 0$$

plus tard Kirchhoff démontra que trois conditions de Poisson relatives au moment de torsion M_{xy} et à l'effort tranchant Q peuvent se remplacer par une seule.

Les forces horizontales produisant le couple de torsion $M_{xy} d_y$ agissant sur un élément d_y du côté $x=a$, sont remplacées par deux forces verticales de grandeurs M_{xy} , à une distance d_y l'une de l'autre.

Si nous considérons deux éléments adjacents de ce côté, nous voyons que la répartition des moments de torsion M_{xy} est statiquement équivalente à une répartition d'effort tranchant d'intensité:

$$Q_x^* \quad \left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right]_{(x=a)}$$

Par conséquent les deux conditions relatives au moment de torsion M_{xy} et à l'effort tranchant Q le long du côté $(x=a)$, se réduisent à :

$$Q_x^k = Q_x + Q_x^* = \left(Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{(x=a)} = 0$$

En tenant compte des formules, exprimant M_x , Q_x et M_{xy} en fonction des

courbures, il vient :

$$M_x(x=a) = 0 \quad \text{=====>} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

$$Q_x^k = 0 \quad \text{=====>} \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0$$

Ces conditions sont appelées : CONDITIONS STATISTIQUES .

II-6) METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTE.

Les méthodes de calcul de l'équation différentielle sont classées en deux groupes.

- 1er groupe

Dans un premier lieu on part de la fonction satisfaisant à l'équation fondamentale de la plaque mais qui ne satisfait que quelques-unes ou aucune des conditions aux limites puis dans un second lieu on cherche une fonction complémentaire qui satisferait en commun avec la première, tant à l'équation générale de la plaque qu'à toutes les conditions aux limites.

2eme groupe

A l'inverse de la première méthode, on part de la fonction qui satisfait aux conditions limites mais pas à l'équation fondamentale, on cherche ensuite une fonction complémentaire telle que la fonction résultante $w(x,y)$ remplisse aussi l'équation fondamentale.

Parmi les méthodes de résolution nous avons :

II-6-1) METHODE DE SERIES DOUBLES DE FOURRIER

La solution de NAVIER est l'une des solutions connue depuis très longtemps et qui se sert des séries doubles de FOURRIER.

On développe la charge $p(x,y)$, appliquée à la plaque, en série double trigonométrique :

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \left[\frac{m \cdot \pi \cdot X}{a} \right] \cdot \sin \left[\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \right] = 0 \quad (\text{II-36})$$

Les coefficients A_{mn} sont donnés par la théorie et sont de la forme

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x,y) \cdot \sin \left[\frac{m \cdot \pi \cdot X}{a} \right] \cdot \sin \left[\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \right] dx dy \quad (\text{II-37})$$

Par exemple pour une plaque simplement appuyée sur toute la périphérie, les conditions aux limites sont :

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = b \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = 0 \end{array} \right.$$

Si les coordonnées ont leur origine au milieu de la largeur, l'expression du déplacement vertical peut être prise sous la forme :

$$w(x,y) = -1/2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} w_{mn} \sin \left[\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \right] \sin \left[\frac{n \cdot \pi \cdot y}{a} \right] \quad (\text{II-38})$$

Il suffit alors de reporter les développements de $w(x,y)$ et de $p(x,y)$ dans l'équation gouvernante pour trouver les coefficients w_{nm} .

II-6-2) METHODES VARIATIONNELLES

La fonction fondamentale s'exprime comme suit

$$w(x,y) = \sum_n a_n F_n(x,y) \quad (\text{II-39})$$

de sorte que les fonctions $F_n(x,y)$ satisfassent rigoureusement aux conditions aux limites de la plaque .

Il ne reste plus qu'à déterminer les constantes a_n de manière à ce que l'équation générale soit satisfaite au mieux.

Les constantes inconnues seront déterminées par exemple à l'aide de la méthode des moindres carrés, la méthode de Fitz du minimum d'énergie potentielle, la méthode de Goursat des variables complexes, la méthode de Galerkin etc.

II-6-3) METHODE PAR DIFFERENCES

Cette méthode consiste à remplacer les équations différentielles par des équations aux différences finies. Les inconnues sont les valeurs prises par la fonction en un certain nombre de points convenablement choisis et le problème revient finalement à résoudre un système d'équation linéaire.

Sur la plaque on adopte un réseau aux intersections duquel les valeurs statiques cherchées s'expriment comme combinaison des différences de la déformée w .

Les dérivées de la fonction $w(x,y)$ s'exprimeront de manière approchée :

$$\left[\frac{\delta w}{\delta x} \right]_n = \frac{1}{2} \frac{(w_{n+1} + w_{n-1})}{\Delta x} \quad (\text{II-40})$$

Ce qui signifie qu'au lieu de l'inclinaison de la ligne élastique au point étudié nous définissons l'inclinaison de différences.

D'une manière analogue nous obtiendrons les autres dérivées par rapport à x et, de même à y .

En portant les dérivées ainsi exprimées dans l'équation fondamentale de la plaque pour n points du réseau nous trouverons un système de n équations à n déplacements avec w inconnues. (voir chap III)

II-6-4) METHODES DIRECTES DE SOLUTION

Ces méthodes sont fondées sur l'intégration directe de l'équation fondamentale de la plaque.

On cherche l'intégrale générale de l'équation fondamentale de la plaque en forme de série de Maurice Levy.

en forme de série de Maurice Levy.

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \left[\frac{m \pi x}{a} \right] \quad (\text{II-41})$$

où Y_m est une fonction de Y

Chaque terme de la série satisfait aux conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} W = 0 \\ \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} = 0 \end{array} \right.$$

sur les bords appuyés $x=0$ et $x=a$.

Il nous reste seulement à déterminer $Y_m(y)$ sous une forme qui satisfasse tant aux conditions aux limites sur les bords non appuyés ($y=+b$ $y=-b$), qu'à l'équation de la plaque.

On exprime également le second membre de l'équation fondamentale de la plaque sous forme d'une série analogue.

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(y) \sin \left[\frac{m \pi x}{a} \right] \quad (\text{II-42})$$

En remplaçant w et p dans l'équation gouvernante de la plaque par les expressions ci-dessus, on trouve une équation différentielle linéaire ordinaire de laquelle découle une équation caractéristique de la forme :

$$r^4 + 2 a_1 r^2 + a_2 = 0$$

La solution générale est de la forme :

$$Y_m(m) = Y_{m0}(y) + Y_{m1}(y)$$

où $Y_{m0}(y)$ solution homogène de l'équation

$Y_{m1}(y)$ solution particulière

Les constantes d'intégration se calculent ensuite à partir des conditions aux limites.

En remplaçant $Y_m(y)$ dans l'équation (II-41) on obtient la déformée W et, en dérivant cette expression, les valeurs des moments et efforts tranchants.

II-6-5) SOLUTION DE MAURICE LEVY : FORMULATION GENERALE :

Maurice Levy a étudié les solutions de l'équation de Lagrange

$$\nabla^4 W = p(x,y) / D \quad (\text{II-43})$$

qui sont représentées par une série trigonométrique simple.

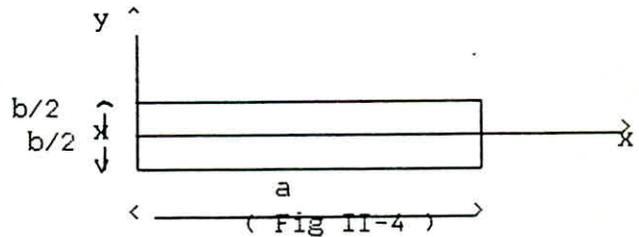
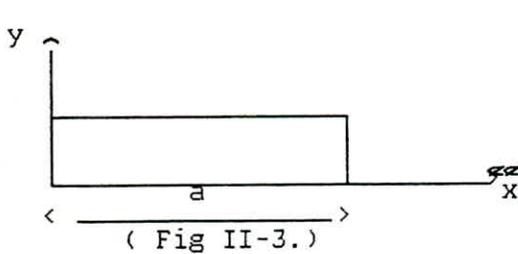
$$W(x,y) = \frac{1}{D} \sum F_m(y) \sin\left[\frac{m \pi x}{a}\right] \quad (\text{II-44})$$

Les solutions vérifient les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} W = 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

Elles conviennent donc pour une plaque rectangulaire simplement appuyée le long des deux bords opposés d'équation $x = 0$ et $x = a$.

On détermine $F_m(y)$ de manière à vérifier les deux autres bords .



L'axe ox en général est choisi de façon que : $b_1=0$ et $b_2=b$ (Fig II-3),mais

pour des raisons de symétrie (en particulier lorsque les conditions d'appui le long des deux côtés parallèles à ox sont identiques), il est souvent indiqué de choisir l'axe ox de façon que $b_1 = -b/2$ et $b_2 = +b/2$ (Fig 4).

Développons la densité de charge $P(x,y)$ en une série de sinus.

$$P(x,y) = \sum_m P_m(y) \sin \left[\frac{m \pi x}{a} \right] \quad (\text{II-45})$$

Substituons les équations (II-44) et (II-45) dans l'équation gouvernante,

on obtient :

$$\frac{d^4 F_m}{d^4 y} - 2(m \pi / a)^2 \frac{d^2 F_m}{d y^2} + (m \pi / a)^4 F_m = P_m(y) \quad (\text{II-46})$$

L'équation caractéristique de (46) :

$$r^4 - 2(m \pi / a)^2 r^2 + (m \pi / a)^4 = 0 \quad (\text{II-47})$$

donne deux racines

$$\begin{cases} r = \frac{m \pi}{a} \\ r = -\frac{m \pi}{a} \end{cases}$$

En posant, $y = m \cdot \pi \cdot y/a$, l'intégrale générale de (II-46) aura pour expression.

$$F_m(y) = F(y) + A_m \operatorname{ch}(y) + B_m Y \operatorname{sh}(y) + C_m \operatorname{sh}(y) + D_m Y \operatorname{ch}(y) \quad (\text{II-48})$$

Avec $F(y)$... intégrale particulière (à déterminer par la méthode de la variation de constante)

A_m, B_m, C_m et D_m constantes arbitraires déterminées de manière que W satisfait les conditions aux limites .

Il suffit d'écrire chaque solution particulière,

$$W_m = F_m(y) \sin(m \pi x / a) / D \quad (\text{II-49})$$

En vérifiant les conditions aux limites envisagées le long des côtés,

$y=b_1$ et $y=b_2$

Conditions aux limites par exemple : bord $y = b_1$

1°) bord simplement appuyé

$$\begin{cases} M_y(x, b_1) = 0 \\ W_m(x, b_1) = 0 \end{cases}$$

$F_m(y)$ doit vérifier

$$\begin{cases} F_m(b_1) = 0 \\ F'_m(b_1) = 0 \end{cases}$$

2°) bord encastré

$$\begin{cases} W_m(x, b_1) = 0 \\ \delta W_m(x, y) \\ \frac{\delta W_m(x, y)}{\delta y} = 0 \end{cases}$$

$F_m(y)$ doit vérifier :

$$\begin{cases} F_m(b_1) = 0 \\ F'_m(b_1) = 0 \end{cases}$$

3°) bord libre

$$\begin{cases} M(x, b_1) = 0 \\ M_{xy}(x, b_1) = 0 \\ Q_x(x, b_1) \end{cases}$$

$F_m(y)$ doit vérifier

$$\begin{cases} F''(b_1) - \nu (m \pi / a)^2 F_m(b_1) = 0 \\ F'''_m(b_1) - (2 - \nu) (m \pi / a)^2 F'_m(b_1) = 0 \end{cases}$$

II THEORIE DES PLAQUES MINCES

Il suffit de remplacer b_1 par b_2 pour trouver les conditions aux limites de $y = b_2$.

Les fonctions $F_m(y)$ doivent donc vérifier quatre conditions, deux le long de chacun des côtés $y=b_1$ et $y=b_2$, d'où on peut déterminer les constantes d'intégration A_m , B_m , C_m et D_m .

Ayant ainsi déterminé $W(x,y)$ sous la forme (II-44), les équations (II-4) donnent les moments fléchissants et le moment de torsion :

$$\begin{cases} M_x = \sum [(m \pi / a)^2 F_m(y) - \nu F_m''(y)] \sin \left[\frac{m \pi x}{a} \right] \\ M_y = \sum [(1 - \nu) (m \pi / a)^2 F_m(y) - F_m''(y)] \sin \left[\frac{m \pi x}{a} \right] \\ M_{xy} = - (1 - \nu) \sum [(m \pi / a) F_m'(y)] \cos \left[\frac{m \pi x}{a} \right] \end{cases} \quad (\text{II-50})$$

II - PLAQUES RECTANGULAIRES SUR DIVERS

CONDITIONS D'APPUIS :

II-6-5-1) PLAQUE RECTANGULAIRE SIMPLEMENT APPUYEE SUR SES COTES

UNIFORMEMENT CHARGEE :

A cause de la symétrie d'axes de façon que

$$b_1 = b/2 \text{ et } b_2 = -b/2 \quad (\text{Fig. 4})$$

Cette plaque est soumise à une densité de charge répartie :

$$P_m = \begin{cases} 4.P / m.\pi & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases} \quad (\text{II-51})$$

Dans ce cas la fonction $F_m(y)$ est une fonction paire que l'on peut écrire

sous la forme suivante :

$$F_m(y) = P_m (a/m \pi) \cdot (1 + A_m \cdot \text{ch}(y)) + B_m \cdot y \cdot \text{sh}(y) \quad (\text{II-52})$$

En tenant compte des conditions aux limites .

$$F_m(b/2) = 0 \quad \text{et} \quad F'_m(b/2) = 0$$

On obtient les constantes A_m et B_m :

$$A_m = (2 + \beta \cdot \text{th}(\beta)) / 2 \cdot \text{ch}(\beta) \quad (\text{II-53})$$

II THEORIE DES PLAQUES MINCES

avec $\beta = (m \cdot \pi \cdot b / 2 \cdot a)$

Nous obtenons ainsi la solution

$$W(x,y) = W_0(x) - \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} P_m \left(\frac{a}{m \cdot \pi} \right)^4 \cdot (A \cdot \text{ch}(\beta y) + B \cdot y \cdot \text{sh}(\beta y)) \cdot \sin(m \cdot \pi \cdot x)$$

$W_0(x)$: correspond à la flèche d'une plaque infiniment longue,
de largeur "a"

$$W_0 = - \frac{1}{D} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} P_m \cdot \left(\frac{a}{m \cdot \pi} \right)^4 \sin \left[\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \right] \quad (\text{II-54})$$

De plus, on peut déterminer les moments de flexion et de torsion selon les équations (II-50).

II-6-5-2) PLAQUE RECTANGULAIRE

* simplement appuyée pour : $x=0, x=a$

* libre pour : $y=b/2, y=-b/2$

A cause de la symétrie des conditions d'appui, on choisit un système d'axes

II THEORIE DES PLAQUES MINCES

de façon que $b_1 = b/2$ et $b_2 = -b/2$, et dans ce cas la fonction $F_m(y)$ est une fonction paire que l'on peut écrire sous la forme :

$$F_m = P_m (a/m.\pi)^4 \cdot (1 + A_m \cdot \text{ch}(y) + B_m \cdot y \cdot \text{sh}(y))$$

Les conditions aux limites,

$$F_m''(b/2) - \nu (m.\pi/a)^2 \cdot F_m(b/2) = 0 \quad (\text{II-55})$$

$$F_m'(b/2) - (2-\nu) \cdot (m.\pi/a)^2 \cdot F_m'(b/2) = 0 \quad (\text{II-56})$$

permettant de calculer les constantes A_m et B_m , nous trouvons :

$$A_m = [\nu / (1 - \nu)] \cdot \frac{[(1 + \nu) \text{sh}(\beta) - (1 - \nu) \cdot \beta \cdot \text{ch}(\beta)]}{[(3 + \nu) \cdot \text{sh}(\beta) - (1 - \nu) \cdot \beta]} \quad (\text{II-57})$$

$$B_m = [\nu / (1 - \nu)] \cdot \frac{[(1 - \nu) \cdot \text{sh}(\beta)]}{[(3 + \nu) \cdot \text{sh}(\beta) \cdot \text{ch}(\beta) - (1 - \nu) \cdot \beta]} \quad (\text{II-58})$$

Nous obtenons ainsi la solution : (II-59)

$$W(x, y) = W_0(x) - \frac{1}{D} \cdot \sum_1^m P_m \left[\frac{a}{m\pi} \right]^4 \cdot (A_m \cdot \text{ch}(y) + B_m \cdot y \cdot \text{sh}(y) \cdot \sin \left[\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \right])$$

$W_0(x)$: étant la fonction définie par (II-54)

II THEORIE DES PLAQUES MINCES

De plus on peut déterminer les moments fléchissants et le moment de torsion comme définis dans les fonctions (II-50).

II-6-5-3) PLAQUE RECTANGULAIRE

* simplement appuyée pour : $x=0, x=a, y=0$

* libre pour : $y=b$

La fonction $F_m(y)$ peut être écrite sous la forme : (II-60)

$$F_m(y) = P_m (a / m \cdot \pi)^4 (1 + A_m \cdot \text{ch}(y) + B_m \cdot y \cdot \text{sh}(y) + C_m \cdot \text{sh}(y) + D_m \cdot y \cdot \text{ch}(y))$$

Les conditions aux limites le long du côté $y=0$,

$$F_m(0) = 0 \quad \text{et} \quad F_m'(0) = 0 \quad (\text{II-61})$$

montrent que A_m et B_m ont pour valeurs, $A_m = 1$ et $B_m = 1/2$

Les conditions aux limites le long du côté $y=b$,

$$F_m'(b) - \nu (m \cdot \pi / a)^2 \cdot F_m(b) = 0 \quad (\text{II-62})$$

$$F_m''(b) - (2 - \nu) \cdot (m \cdot \pi / a)^2 \cdot F_m'(b) = 0 \quad (\text{II-63})$$

montrent que C_m et D_m ont pour valeurs,

II THEORIE DES PLAQUES MINCES

$$C_m = \frac{(3+\nu).(1-\nu).sh^2(\beta) - \nu(1-\nu).\beta.sh(\beta) + \nu(1+\nu).(ch(\beta)-1) - \frac{1}{2(1-\nu)^2\beta^2}}{(1-\nu) [(3 + \nu).sh(\beta).ch(\beta) + (1 - \nu).\beta]} \quad (II-64)$$

$$D_m = \frac{- 1/2 . (3 + \nu) sh^2(\beta) + \nu (ch(\beta) - 1)}{(3 + \nu) . sh(\beta) . ch(\beta) + (1 - \nu) . \beta} \quad (II-65)$$

Nous obtenons ainsi la solution :

$$W(x,y) = W_0(x) - \frac{1}{D} \sum P_m(a/m.\pi) - ch(y) + y/2 . sh(y) + C_m.sh(y) + D_m.y.ch(y) . \sin \left[\frac{m.\pi.X}{a} \right] \quad (II-66)$$

$W_0(x)$: désignant la fonction définie par (II-54).

De plus on peut déterminer les moments fléchissants, et le moment de torsion comme définis les fonctions (II-54).

II-7) CONCLUSION :

De ce qui précède, il en découle la conclusion suivante; Le comportement des systèmes physiques peut être décrit grâce à des dérivées partielles, dont

II THEORIE DES PLAQUES MINCES

la résolution exacte ne peut être obtenue que pour des cas simples.

Lorsque la distribution des charges, les caractéristiques géométriques et les conditions aux limites deviennent complexes, la résolution exacte devient laborieuse voire même impossible, pour cela on a recours à des méthodes numériques qui nécessitent l'utilisation intensive de l'ordinateur.

Parmi les méthodes numériques les plus efficaces, nous citerons la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des éléments bandes finis que nous allons développer ultérieurement.

CHAPITRE

TROIS

III METHODES DES DIFFERENCES FINIES

III- METHODES DES DIFFERENCES FINIES

III-1) INTRODUCTION

La méthode des différences finies est l'une des méthodes les plus couramment utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles .

Le principe est le suivant :

Le domaine de variation continue des arguments est remplacée par un ensemble fini de points, ou noeuds, appelé réseau. Les dérivées figurant dans l'équation différentielle et les conditions aux limites sont remplacées par des combinaisons linéaires de valeurs prises par la fonction en certains noeuds; le problème aux limites de l'équation différentielle se transforme en un système d'équations algébriques .

III-2) PRINCIPE DE LA METHODE

III-2-1) Méthode de trapèze

Nous supposerons qu'entre deux points voisins n et $(n+1)$ la fonction varie linéairement. Ceci revient à substituer à la courbe réelle continue un polygone inscrit; plus le nombre des côtés sera grand meilleur sera l'approximation de la courbe réelle (fig. III-1). En écrivant l'équation de la droite

(n, n+1).

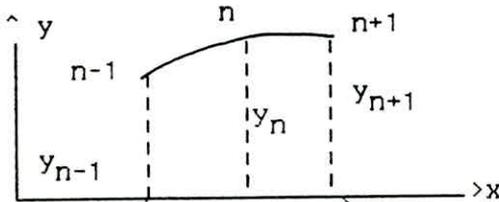


Fig. III-1

$$y = \frac{Y_{n+1} - Y_n}{h} (x - x_n) + y_n \quad (\text{III-1})$$

et en dérivant une fois nous obtiendrons

$$\left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{Y_{n+1} - Y_n}{h} \quad (\text{différence en avant}) \quad (\text{III-2})$$

La même approximation est réalisée en partant de l'équation (n-1,n).

$$\left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{h} \quad (\text{différence en arrière}) \quad (\text{III-3})$$

Les dérivées d'ordre supérieur peuvent être déduites par analogie. La dérivée seconde, par exemple, s'exprime sous la forme :

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] \approx \frac{\Delta}{h} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \right] = \frac{\left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \right]_{n+1} - \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \right]_n}{h}$$

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

$$\frac{\left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_n}{h} = \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h}}{h} = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} \quad (\text{III-4})$$

On obtiendra de même

$$\left[\frac{d^3 y}{dx^3} \right]_n = \frac{-y_{n-1} + 3y_n - 3y_{n+1} + y_{n+2}}{h^3} \quad (\text{III-5})$$

$$\left[\frac{d^4 y}{dx^4} \right]_n = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 6y_n - 4y_{n+1} + y_{n+2}}{h^4} \quad (\text{III-6})$$

Le schéma des points intervenant dans les expressions des quatre dérivées premières est représenté par la figure III-2.

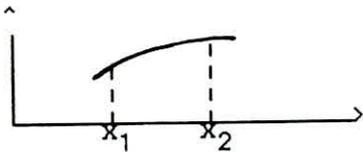
La règle générale suivante permet de former les coefficients des y_i :

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
$(y')_{12}$	1	1				
$(y'')_2$		1	1			
	1	2	1			
		1	2	1		
$(y''')_{23}$	1	3	3	1		
		1	3	3	1	
$(y''')_3$	1	4	6	4	1	

Les signes de ces coefficients sont alternés et le coefficient de y_i

III-2-2-1) Exemples

a) Interpolation linéaire (fig. III-4)



(Fig. III-4)

$$y = \frac{(x - x_2)}{x_1 - x_2} \cdot y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot y_2 \quad (\text{III-8})$$

$$\text{d'où : } y' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{III-9})$$

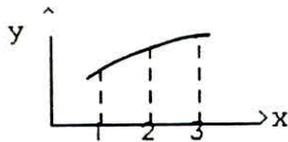
C'est le résultat donné par la méthode du trapèze.

b) Interpolation parabolique (Fig. III-5)

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 \quad (\text{III-10})$$

Supposons que les espacements sont égaux :

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = h \quad (\text{III-11})$$



(Fig. III-5)

On aura alors :

$$y' = \frac{1}{2h^2} \left[(x-x_2)(x-x_3)y_1 - 2(x-x_1)(x-x_3)y_2 + (x-x_1)(x-x_2)y_3 \right] \quad (\text{III-12})$$

$$y' = \frac{1}{2h^2} \left[\left[(x-x_2) + (x-x_3) \right] y_1 - 2 \left[(x-x_3) + (x-x_1) \right] y_2 + \left[(x-x_2) + (x-x_1) \right] y_3 \right] \quad (\text{III-13})$$

$$y'' = \frac{1}{h^2} \left[y_1 - 2y_2 + y_3 \right] \quad (\text{2eme différence au centre en } x_2) \quad (\text{III-14})$$

On retrouve ainsi le résultat (III-4)

En généralisant, la 2^{ième} différence au centre en x_n s'écrit :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) \quad (\text{III-15})$$

si dans l'équation (III-13) on pose $x = x_2$, on obtient

$$y'(x_2) = \frac{1}{2h} \left[-y_1 + y_3 \right] \quad (\text{III-16})$$

Cette valeur représente la moyenne des expressions (III-2) et (III-3) en prenant $n = 2$.

L'expression (III-16) donne généralement une meilleure approximation de la valeur de la dérivée seconde que celle fournit par (III-2) ou (III-3) (respectivement différences en avant et en arrière) à savoir :

$$\frac{1}{2h}$$

$$y'(x_2) = \frac{1}{h} (y_3 - y_2) \quad (\text{III-17})$$

$$y'(x_2) = \frac{1}{h} (y_2 - y_1) \quad (\text{III-18})$$

c)- Interpolation parabolique du 4^{ième} degré (Fig. III-6)

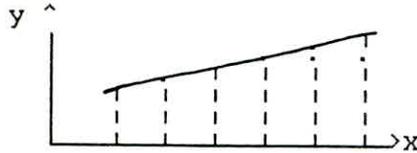


Figure. III-6

$$y = \sum L_i(x) \cdot y_i \quad (\text{III-19})$$

Si l'espacement est constant et égal à h, l'expression (18) s'écrit :

$$y = \frac{1}{24h^2} \left[\begin{aligned} &(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)y_1 - 4(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)y_2 \\ &+ 6(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)y_3 - 4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)y_4 \\ &+ (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)y_5 \end{aligned} \right] \quad (\text{III-20})$$

$$y'''' = \frac{1}{24h} 4 \left[\begin{aligned} &y_1 [24x - 6(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)] - 4y_2 [24x - 6(x_1 + x_3 + x_4 + x_5)] \\ &+ 6y_3 [24x - 6(x_1 + x_2 + x_4 + x_5)] - 4y_4 [24x - 6(x_1 + x_2 + x_3 + x_5)] \\ &+ y_5 [24x - 6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)] \end{aligned} \right] \quad (\text{III-21})$$

$$y'''' = \frac{1}{h^4} \left[\begin{aligned} &y_1 - 4y_2 + 6y_3 + 4y_4 + y_5 \end{aligned} \right] \quad (\text{III-22})$$

(4^{ième} différence au centre en x_3)

En généralisant la 4^{ième} différence au centre en x_n s'écrit

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{h^4} (y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}) \quad (\text{III-23})$$

Pour $x = x_3$, l'expression (21) devient

$$y'''' = \frac{1}{4h^3} \left[-2y_1 + 4y_2 - 4y_4 + 2y_5 \right] \quad (\text{III-24})$$

$$= \frac{1}{2h^3} \left[-y_1 + 2(y_2 - y_4) + y_5 \right] \quad (\text{III-25})$$

(3^{ième} différence au centre en x_3)

En généralisant, la 3^{ième} différence au centre en x_n s'écrit

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{2h^3} (y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_{n-1} - y_{n-2}) \quad (\text{III-26})$$

De la même manière, on trouve à partir de l'équation (III-20) pour $x=x_3$.

$$y'(x_3) = \frac{1}{12h} \left[y_1 - 8y_2 + 8y_4 - y_5 \right] \quad (\text{III-27})$$

$$y''(x_3) = \frac{1}{12h^2} \left[y_1 - 16y_2 + 30y_3 - 16y_4 + y_5 \right] \quad (\text{III-28})$$

III-2-2-2) Avantages de l'approche générale

Pour établir les équations aux différences finies, l'utilisation du polynôme d'interpolation de Lagrange constitue une approche présentant l'avantage :

- d'être simple, systématique et générale quelque soit l'ordre de la dérivée recherchée,

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

- de s'appliquer même si le pas h est variable,
- de permettre l'utilisation des polynômes de degré n supérieur à l'ordre de la dérivée m ($n > m$) et de faire intervenir ainsi des termes en y_i ($i = 1, \dots, n$) dont le nombre est supérieur au minimum (m) nécessaire. On peut ainsi améliorer l'approximation du calcul.

En effet, il est évident qu'avec les différences en avant et en arrière, l'erreur a le même ordre de grandeur que h alors qu'avec les différences au centre, elle est de celui de h^2 , en outre les expressions des différences au centre sont plus exactes que celles en arrière ou en avant.

C'est ainsi que la valeur de la dérivée première y' en un point donné peut faire intervenir, suivant le degré du polynôme d'interpolation utilisé:

- soit deux termes y_1 et y_2 (équation III-9);
- soit trois termes y_1 , y_2 et y_3 , le coefficient de y_2 étant nul (équation III-16) :
- soit cinq termes y_1 , y_2 , y_4 et y_5 , le coefficient de y_3 étant nul (équation III-27).

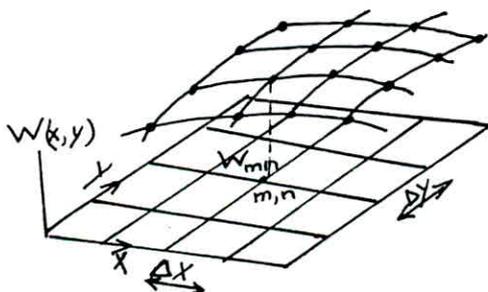
III-3) CAS DE DEUX VARIABLES INDEPENDANTES :

La méthode des différences finies peut être aisément étendue au cas où la fonction W considérée dépend de deux variables. Suivant la nature du problème posé et la forme du contour du corps étudié, on choisit le système de coordonnées rectilignes ou curvilignes le mieux adapté.

Parmi les principaux systèmes de coordonnées, nous examinerons en particulier les coordonnées rectilignes et rectangulaires.

Coordonnées cartésiennes rectangulaires

Si, dans le plan O_{xy} , on trace deux séries de droites parallèles aux axes, les droites déterminent un réseau de points (m,n) auxquelles correspondent les ordonnées de la fonction inconnue $W_{m,n}$ (Fig. III-7)



(Figure. III-7)

Les dérivées par rapport à une seule variable, par exemple x , s'écrivent comme s'il n'y avait que cette variable (x); la seule différence consiste dans le fait que l'on voit apparaître des indices doubles dont l'un reste

inchangé. Dans le cas des dérivées mixtes, les deux indices varient.

En vertu de la relation

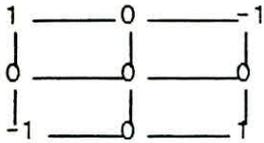
$$\frac{\delta^{m+n} W}{\delta x^m \delta y^n} = \frac{\delta^m}{\delta x^m} \left[\frac{\delta^n W}{\delta y^n} \right] = \frac{\delta^n}{\delta y^n} \left[\frac{\delta^m W}{\delta x^m} \right] \quad (\text{III-29})$$

Les différences mixtes peuvent être facilement évaluées, aussi bien par la méthode du trapèze que celle des paraboles de tous degrés. On aura:

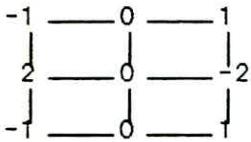
$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta W_{m,n}}{\delta x} &\approx \frac{W_{m+1,n} - W_{m-1,n}}{2 \Delta x} \\ \frac{\delta W_{m,n}}{\delta y} &\approx \frac{W_{m,n+1} - W_{m,n-1}}{2 \Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-30})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta^2 W_{m,n}}{\delta x^2} &\approx \frac{W_{m+1,n} - 2W_{m,n} + W_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\delta^2 W_{m,n}}{\delta y^2} &\approx \frac{W_{m,n+1} - 2W_{m,n} + W_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \\ \frac{\delta^2 W_{m,n}}{\delta x \delta y} &\approx \frac{W_{m+1,n+1} - W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n+1} + W_{m-1,n-1}}{4 \Delta x \cdot \Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-31})$$

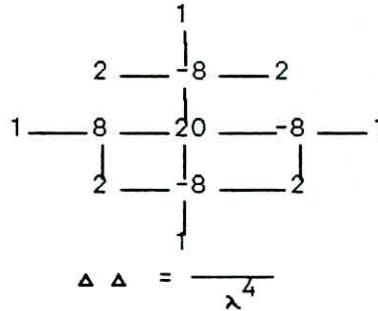
III METHODE DES DIFFERENCES FINIES



$$\frac{\delta^2}{\delta x \delta y} = \frac{1}{4 \lambda^2}$$



$$\frac{\delta^3}{\delta x \delta y^2} = \frac{1}{2 \lambda^3}$$



$$\Delta \Delta = \frac{1}{\lambda^4}$$

Figure. III-8

III-4) APPROXIMATION PAR DIFFERENCES FINIES DE L'OPERATEUR DOUBLE LAPLACIEN

L'équation de LAGRANGE faisant intervenir le double Laplacien de la flèche est :

$$\nabla^4 W = \frac{P_0}{D} \quad (\text{III-33})$$

La discrétisation de l'opérateur double Laplacien ∇^4 est :

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4} [W(x+2h, y) - 4W(x+h, y) + 6W(x, y) - 4W(x-h, y) + W(x-2h, y)]$$

$$= \frac{1}{h^4} [W_9 - 4W_1 + 6W_0 - 4W_3 + W_{11}] \quad (\text{Fig. III-9}) \quad (\text{III-34})$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4} [W(x, y+2h) - 4W(x, y+h) + 6W(x, y) - 4W(x, y-h) + W(x, y-2h)]$$

$$= \frac{1}{h^4} [W_{10} - 4W_2 + 6W_0 - 4W_4 + W_{12}] \quad (\text{Fig. III-9}) \quad (\text{III-35})$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{1}{h^4} [W_5 + W_6 + W_7 + W_9 + 4W_0 - 2(W_1 + W_2 + W_3 + W_4)] \quad (\text{Fig. III-9}) \quad (\text{III-36})$$

$$\nabla^4 W = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \quad (\text{III-37})$$

$$\nabla^4 W = [(W_9 + W_{10} + W_{11} + W_{12}) + 2(W_5 + W_6 + W_7 + W_8) - 8(W_1 + W_2 + W_3 + W_4) + 20W_0] \quad (\text{III-38})$$

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Les indices n, m désignent la position des points pivots comme on peut le voir sur la figure (III-9).

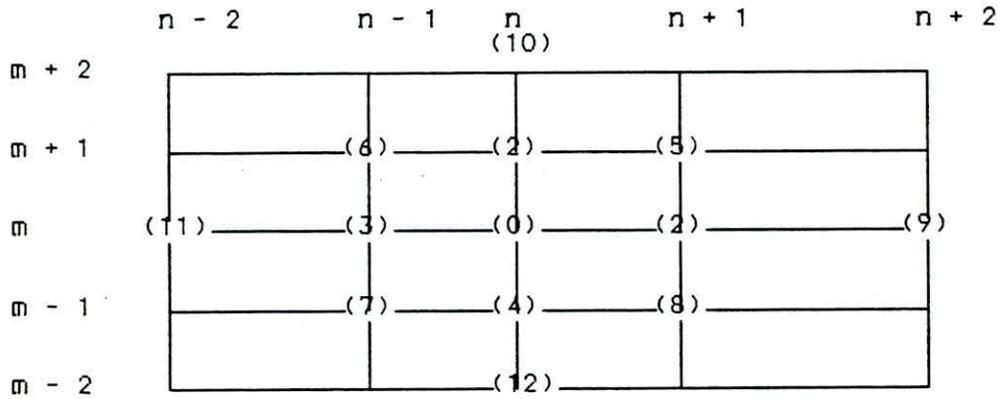


Figure III-9.

III-5) SOLUTION DES EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES :

Transformons l'équation différentielle de la ligne élastique de la plaque en une équation algébrique. Les coefficients de l'opérateur seront comme suit :

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & (1) & & & \\
 & & & \vdots & & & \\
 & & (2) & \text{---} & (-8) & \text{---} & (2) \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 (1) & \text{---} & (-8) & \text{---} & (20) & \text{---} & (-8) & \text{---} & (1) \\
 & & | & & | & & | & & \\
 & & (2) & \text{---} & (-8) & \text{---} & (2) & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & (1) & & & &
 \end{array}$$

$$\nabla^4 W = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{P_0}{D} \quad (\text{III-39})$$

$$\nabla^4 W = \frac{1}{h^4} [(W_9 + W_{10} + W_{11} + W_{12}) + 2(W_5 + W_6 + W_7 + W_8) - 8(W_1 + W_2 + W_3 + W_4) + 20W_0] \quad (\text{III-40})$$

Pour chaque noeud de la plaque, une expression similaire sera écrite en tenant compte des conditions aux limites, on obtient un système d'équations où les inconnues sont les déplacements.

III-6) CALCUL DES EFFORTS :

Une fois que les déplacements sont trouvés, les efforts (moment, efforts tranchants) seront facilement calculés en développant les expressions

$$M = L(W)$$

$$Q = L(W)$$

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

III-6-1) Les moments :

$$M_x = \frac{D}{h^2} [(2W_0 - W_1 - W_3) + \nu(2W_0 - W_2 - W_4)] \quad (\text{III-41})$$

$$M_y = \frac{D}{h^2} [(2W_0 - W_2 - W_4) + \nu(2W_0 - W_1 - W_3)] \quad (\text{III-42})$$

$$M_{xy} = \frac{D}{h^2} (1 - \nu) (W_6 - W_5 + W_6 - W_7) \quad (\text{III-43})$$

III-6-2) Les efforts tranchants :

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M}{D} \right] = \frac{\partial}{\partial x} (M) = \frac{M_1 - M_2}{2h} \quad (\text{III-44})$$

$$Q_y = \frac{\partial}{\partial y} (M) = \frac{M_2 - M_4}{2h} \quad (\text{III-45})$$

III-7) Autre manière de résolution du problème :

On peut résoudre le problème d'une autre manière

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III-46})$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (\text{III-47})$$

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

En sommant ces deux équations, on aboutit à :

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \nabla^2 W \quad (\text{III-48})$$

On résoud d'abord :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -P \quad (\text{III-49})$$

qui donne les moments

Ensuite, on résoud :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \quad (\text{III-50})$$

La solution du problème permet de déterminer les valeurs de M et W qui satisfont le système d'équations algébriques .

III-8) CONDITIONS AUX LIMITES :

Les noeuds qui se trouvent sur le pourtour de la plaque, font appel à des points fictifs qu'on peut connaître en faisant développer la condition.

d'appuis:

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

III-8-1) BORD SIMPLEMENT APPUYE

D'après ce qui précède les conditions d'appui sont :

$$W = 0 \quad \text{et} \quad M=0$$

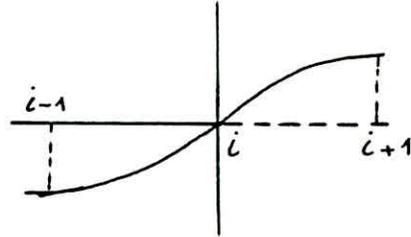
En développant l'opérateur

$$\Delta W = -M / D = 0$$

$$W_{i-1} + W_{i+1} + W_{i+n} + W_{i-n} - 4 W_i = 0$$

$$\text{avec : } W_i = W_{i+n} = W_{i-n} = 0$$

$$W_{i+1} = -W_{i-1}$$



Ainsi en général, quand les bords sont simplement appuyés, les déplacements d'un point d'une division au delà de la limite est égal et de signe opposé au déplacement du point de la division à l'intérieure de la limite et symétriquement par rapport à celle-ci.

III-8-2) BORD ENCASTRE

Le bord encasté doit vérifier les deux conditions :

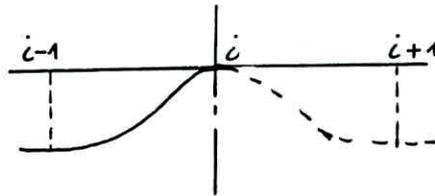
$$W = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0$$

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Puisque la pente normale au bord est nulle, on peut montrer que les déplacements des points opposés et situés sur une division de part et d'autre des bords sont égaux .

$$\frac{\partial W}{\partial n} = W_{i+1} - W_{i-1} = 0$$

$$W_{i+1} = W_{i-1}$$



Un encastrement correspond à une symétrie par rapport à un plan

III-8-3) BORD LIBRE

Le long de ce bord les moments et les efforts tranchants sont nuls .

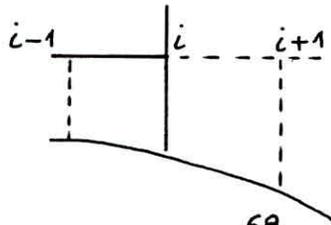
En développant l'équation

$$\Delta W = - \frac{M}{D} \quad \text{pour :}$$

$$\text{Le noeud } i+1 : M_{i+1} = - D (W_{i+1+n} + W_{i+1-n} + W_i + W_{i+2} - 4W_{i+1})$$

$$\text{Le noeud } i-1 : M_{i-1} = - D (W_{i-1+n} + W_{i-1-n} + W_i + W_{i-2} - 4W_{i-1})$$

$$W_{i-1} + W_{i+1} + W_{i+n} + W_{i-n} - 4W_i = 0$$



III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Les déplacements du bord libre sont identiques :

$$W_{i+1} = W_{i-n} = W_i$$

$$W_{i+1} = 2W_i - W_{i-1}$$

Donc un bord libre correspond à une symétrie par rapport au point caractérisé par $W = 0$.

Etudes des dalles

Exemple 1 :

L'étude des dalles est régie par l'équation d'équilibre de Lagrange .

$$\Delta \Delta W = \frac{q}{D}$$

Le schéma de discrétisation de $\Delta \Delta W$ en un point courant est donné par : la figure (III-8).

Supposons que la dalle est sur appui simple le long de son bord y (Fig.III-10)

En un noeud 7 situé à proximité du bord . Nous avons :

$$[W_1 + W_{13} + W_9 + W_5 + 2(W_2 + W_{10} + W_4 + W_{12})$$

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

$$- 8(W_8 + W_6 + W_3 + W_{11}) + 20 W_7] \cdot \frac{1}{h^4} = \frac{q}{D} \quad (a)$$

$$\text{ou } W_2 = W_3 = W_4 = 0 .$$

Nous devons alors éliminer la

flèche W en un point fictif 1,

obtenu en prolongeant le réseau

au delà du contour de la plaque.

Ceci se conçoit aisément à l'aide

de la relation $W_1 = - W_7$ lorsque

la plaque est en appui simple au

point 3 et à l'aide de la relation

$W_1 = W_7$ quand la plaque est est

encastree. Il ne reste donc dans l'équation (a) que les flèches des

points intérieurs et le nombre total de ces flèches inconnues ne dépasse

pas le nombre des équations dont nous disposons.

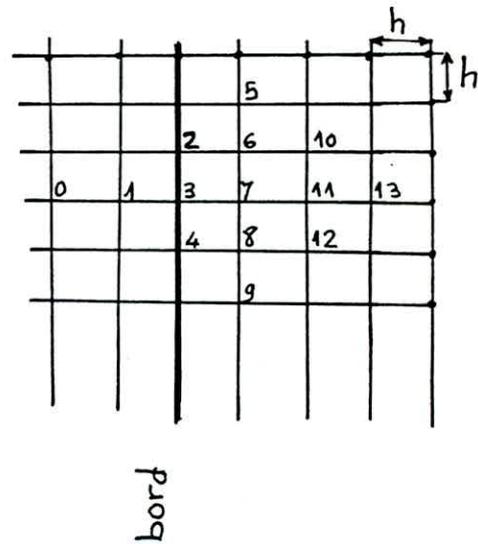


Figure III-10.

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Dans le cas d'un bord libre, on a le long de celui-ci les trois relations suivantes :

$$\Delta \Delta W = \frac{q}{D} \quad ; \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

celle-ci peuvent être discrétisées suivant les schémas de la figure (III-8) Il y a donc lieu de prolonger le maillage de deux rangées supplémentaires au delà du bord libre. Ainsi, on fait intervenir aussi bien les points situés sur le contour 2, 3, 4 ... que les points extérieurs 0,1, ... et on a autant d'équation que d'inconnues W_i .

Exemple 2 :

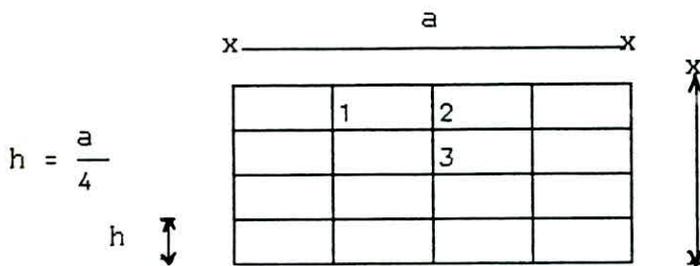
Une autre façon de faire est de résoudre le premier système d'équations qui est indépendant du deuxième système pour déterminer les valeurs de M à l'intérieur de l'élément. Puis on résoud le second système pour déterminer W.

Avec les valeurs de M et W évaluées pour chaque noeud on peut tirer les

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

expressions des moments et des efforts tranchants.

On divise le domaine en 16 éléments :



(Fig. III-11)

En tenant compte de la symétrie, on ne détermine M et W que pour les noeuds 1, 2, 3 (voir fig. III-11), aux frontières M et W sont nuls.

Dans une première étape on développe l'équation (III-50) au noeud 1, 2 et 3,

il en résulte :

$$\text{Noeud 1} \quad - 4 M_1 + 2 M_2 = P_0 h^2$$

$$\text{Noeud 2} \quad 2 M_1 - 4 M_2 + M_3 = P_0 h^2$$

$$\text{Noeud 3} \quad 4 M_2 - 4 M_3 = P_0 h^2$$

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = -P_0 h^2 [1]$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \frac{P_0 a^2}{128} \begin{bmatrix} 11/2 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Dans une seconde étape on développe l'équation (III-50) au noeud 1, 2, 3,

les moments étant trouvés dans la première étape .

$$-4 W_1 + 2 W_2 = M_1 h^2 / D \quad \text{Noeud 1}$$

$$2 W_1 - 4 W_2 + W_3 = M_2 h^2 / D \quad \text{Noeud 2}$$

$$4 W_2 - 4 W_3 = M_3 h^2 / D \quad \text{Noeud 3}$$

III METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Le système d'équations linéaires qui résulte est :

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = -P_0 h^4/D \begin{bmatrix} -11/6 \\ -7/8 \\ -9/8 \end{bmatrix}$$

Après résolution du système

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \frac{P_0 a^4}{P} \begin{bmatrix} 0.00214 \\ 0.00293 \\ 0.00403 \end{bmatrix}$$

La flèche au centre (W_3) est 0.79 % moins que la solution exacte .

Le moment au centre : $m_x = M_y = (1 + \nu).M/2 = 0.00457 P_0.a^2$.

CHAPITRE

QUATRE

IV- ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

IV-1) INTRODUCTION

Une fois le domaine discrétisé, l'approximation choisie et les équations aux différents nœuds du domaine écrites, nous nous retrouvons avec un système de n équations à n inconnues qui sont les valeurs de W aux nœuds du domaine. Les valeurs de W sont connues sur le contour du domaine. Ces n équations peuvent se mettre sous forme matricielle:

$$[A] [U] = [F]$$

[A] matrice coefficient

[U] vecteur déplacement inconnu

[F] vecteur chargement.

Il y a deux variantes d'obtention du système d'équation .

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

La première consiste à développer l'opérateur LAPLACIEN qui aboutit sur un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les moments, quant au vecteur second membre il dépend uniquement du chargement, ceci dans un premier lieu, dans un second lieu, le développement à nouveau de l'opérateur LAPLACIEN donne un second système d'équations linéaires dont les inconnues sont cette fois-ci les déplacements et le vecteur second membre dépend des moments qui sont justement fournis par le premier système.

La deuxième consiste à développer double LAPLACIEN qui aboutit sur un système dans lequel les inconnues sont les déplacements.

IV-2) DESCRIPTION DU PROGRAMME

IV-2-1) Dictionnaire des variables

La signification des différentes variables utilisées dans notre programme est illustrée ci-dessous :

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

- dimension de la plaque selon l'axe oxK
- dimension de la plaque selon l'axe oyL
- nombre de noeuds selon l'axe oxNX
- nombre de noeuds selon l'axe oyNY
- matrice des coefficientsCMC
- vecteur chargementCH
- nombre total de noeudsNT
- nombre de noeuds par étageN
- pas selon l'axe oxPX
- épaisseur de la plaqueH
- module de YoungE
- coefficient de PoissonU
- rigidité flexionnelle équivalenteDt

IV-2-2) Entrée des données

Les informations sur les propriétés géométriques mécaniques de la plaque, le nombre d'éléments à discrétiser selon l'axe ox et le chargement constituent les informations nécessaires pour résoudre le problème.

Selon la symétrie des conditions d'appui de la plaque, l'étude se réduit soit au quart soit à la moitié de celle-ci.

IV-2-3) Résolution

Les systèmes auxquels on aboutit ne sont pas symétriques, on utilise alors l'algorithme de résolution de Gauss pour les systèmes non symétriques, cet algorithme est caractérisé par deux étapes; la triangularisation puis la

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

résolution du système triangulaire.

IV-2-4) Développement de l'opérateur Laplacien et double Laplacien

a) double Laplacien

La génération de la matrice des coefficients est réalisée grâce au tableau des coefficients, suivant la position des noeuds à l'intérieur à la limite de la plaque, la résolution directe du système $[A] [U] = [F]$ donne les déplacements.

b) Laplacien

La matrice des coefficients est générée automatiquement à l'aide du tableau des coefficients ceci pour les noeuds intérieurs de la plaque, quant aux noeuds se trouvant aux frontières une modification des coefficients s'opère selon le cas d'appui.

On forme alors le vecteur second membre qui dépend uniquement du charge-

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

ment, la résolution donne les moments qui seront utilisés pour former le vecteur second membre la matrice des coefficients étant déjà prête, la résolution donne les déplacements.

IV-2-5) Programme principal et sous programmes

a) Programme principal

Il contient toutes les déclarations (nature des variables, dimension des matrices, etc), ainsi que les appels aux différentes sousroutines.

b) Sous programmes

Nous avons utilisés 12 sousroutines dont les fonctions sont résumées dans le tableau ci-dessous

Subroutine	Fonction
menu	Permet de fixer notre choix suivant les conditions d'appui auxquelles est soumise notre plaque.
lec	Permet d'introduire toute les informations sur les propriétés mécaniques et géométriques de la plaque.

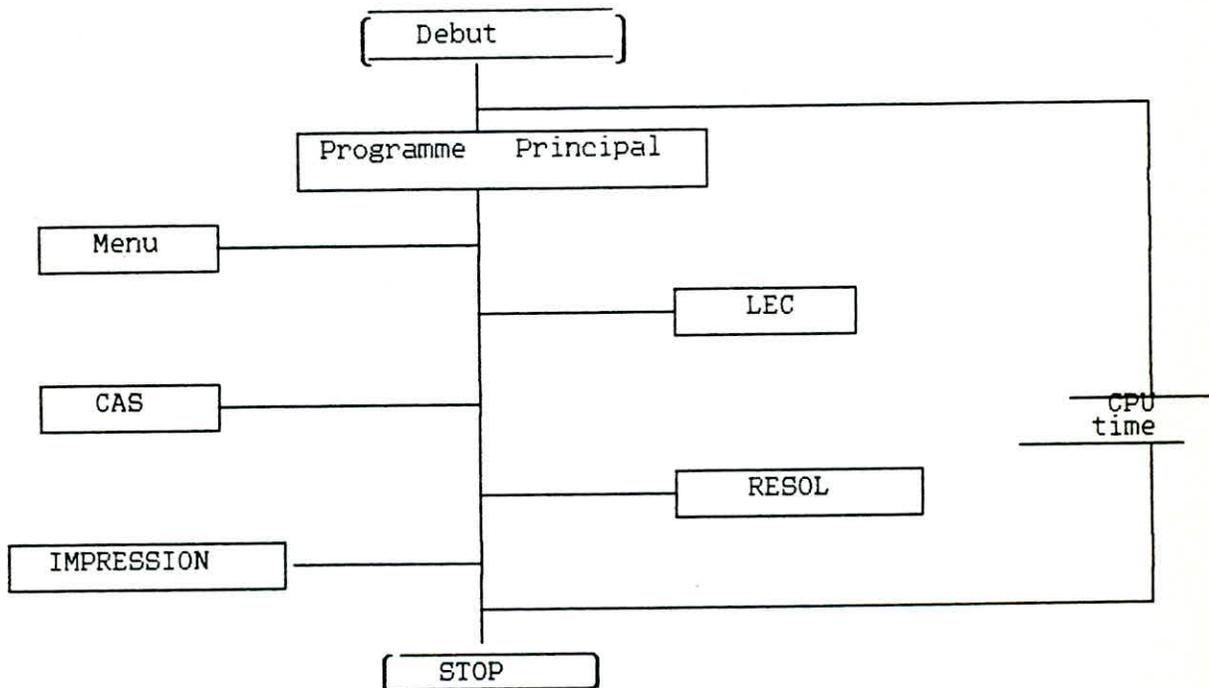
IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

Gènère	permet de générer la matrice des coefficients selon le cas d'appui.
--------	---

Subroutine	Fonction
<p>Cas i il y a 5 subroutines les cas 1,6 et 7 étant regrupés dans un même sous programme)</p> <p>COND COND1 RESOL IMPRESSION</p>	<p>subroutnie traitant chacun des cas suivants: cas 1: Plaque appuyée sur le pourtour cas 2: Plaque encastrée sur le pourtour cas 3: Plaque encastrée sur 2 bords opposés un encastré, l'autre étant libre. cas 5: Plaque encastrée sur les 2 bords opposés et libre sur les 2 autres. cas 6: Plaque appuyée sur les 2 bords opposés et libre sur les 2 autres. cas 7: Plaque appuyée sur 3 bords, le dernier étant libre.</p> <p>permettent de tenir compte des conditions aux limites selon les cas d'appui. Permet la résolution du système d'équations Permet l'impression des résultats.</p>

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

IV-2-5) ORGANIGRAMME



IV-3) EXEMPLE DE RESOLUTION PAR DIFFERENCE FINIE

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

Considérons une plaque carrée de côté a , simplement appuyée et uniformément chargée, on prendra un pas égal à $a/8$ ce qui conduit à discrétiser la plaque en 64 éléments (8×8) mais vu la symétrie du problème, l'étude ne portera que sur le quart de la plaque c'est à dire sur 16 éléments (4×4) ceci conduit à une réduction importante de la capacité mémoire de l'ordinateur

- Les conditions limites sont telles que :

a) Les noeuds de la ligne supérieure ont une rotation nulle ce qui se traduit par :

$$\frac{\delta W}{\delta y} = 0 \quad \text{=====>} \quad \begin{cases} W_{1+n} = W_{1-n} \\ M_{1+n} = M_{1-n} \end{cases}$$

b) Les noeuds de la $n^{\text{ième}}$ colonne ont une rotation nulle, ce qui se traduit par :

$$\frac{\delta W}{\delta x} = 0 \quad \text{=====>} \quad \begin{cases} W_{i+1} = W_{i-1} \\ M_{i+1} = M_{i-1} \end{cases}$$

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

- La numérotation des noeuds se fait par étage
- La formation de la matrice des coefficients se fait comme suit :

1- Du noeud $j=n+2$ jusqu'au noeud $j=2n$

$$M_{j+n} + M_{j+1} - 4 M_j$$

si $j=n+2$ $W_{j+n} + W_{j+1} - 4 W_j$

$$M_{j+n} + 2 M_{j-1} - 4 M_j$$

si $j=2n$ $W_{j+n} + 2 W_{j-1} - 4 W_j$

$$M_{j+n} + M_{j+1} + M_{j-1} - 4 M_j$$

si $n+2 < j < 2n$ $W_{j+n} + W_{j+1} + W_{j-1} - 4 W_j$

2- Du noeud $j=m-n+1$ jusqu'au noeud $NT - N$

$$M_{j+n} + M_{j-n} + M_{j+1} - 4 M_j$$

si $j=m-n+1$ $W + W + W - 4 W$

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 j+n & j-n & j+1 & j \\
 M_{j+n} + M_{j-n} + 2 M_{j+1} - 4 W_j \\
 \text{si } j = NT - N & W_{j+n} + W_{j-n} + 2 W_{j+1} - 4 W_j \\
 \\
 M_{j+n} + M_{j-n} + M_{j+1} - M_{j-1} - 4 M_j \\
 \text{si } M-N+1 < j < NT-N & W_{j+n} + W_{j-n} + W_{j+1} - W_{j-1} - 4 W_j
 \end{array}
 \end{array}$$

3- Du noeud $j=M+1$ jusqu'au noeud $j=NT$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 M_{j-n} + M_{j+1} - 4 M_j \\
 \\
 \text{si } j=M+1 \\
 \\
 2 W_{j-n} + 2 W_{j-1} - 4 W_j \\
 \\
 \text{si } j=NT \\
 \\
 2 M_{j-n} + M_{j+1} + M_{j-1} - 4 M_j \\
 \\
 \text{si } M-N+1 < j < NT \\
 2 W_{j-n} + W_{j+1} + W_{j-1} - 4 W_j
 \end{array}
 \end{array}$$

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

4- Du noeud $j=2n+2$ jusqu'au noeud $j=m-2n+1$ (sur la collone 2)

$$M_{j+1} + M_{j-n} + M_{j+1} - 4 M_j$$

$$W_{j+n} + W_{j-n} + W_{j+1} - 4 W_j$$

5- Du noeud $j=3n$ jusqu'au noeud $j=NT-2n$ (sur la colonne n)

$$M_{j+n} + M_{j-n} + M_{j-1} - 4 M_j$$

$$W_{j+n} + W_{j-n} + W_{j+1} - 4 W_j$$

6- Pour les noeuds intérieurs dont les sommets sont

$2n+3, 3n-1, m-2(n-1), NT-2n-1$

$$M_{j+n} + M_{j-n} + M_{j+1} + M_{j-1} - 4 M_j$$

$$W_{j+n} + W_{j-n} + W_{j+1} + W_{j-1} - 4 W_j$$

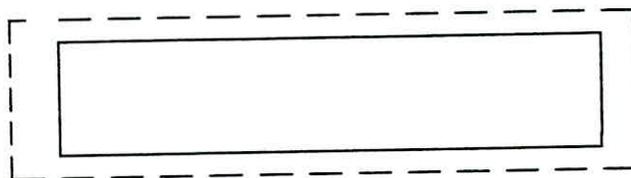
Après introduction des conditions aux limites, on résoud le système

$$\begin{aligned} [A] [M] &= - p a^2 / 8 \\ \text{Puis } [A] [W] &= - h^2 [M] / D \end{aligned}$$

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

IV-4) Présentation des résultats.

Plaque simplement appuyée sur le pourtour

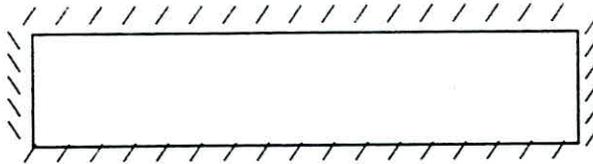


* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)
2 X 2	0.003906	22
4 X 4	0.004028	22
8 X 8	0.004055	38
10 X 10	0.004058	56
12 X 12	0.004059	81
16 X 16	0.004061	166
18 X 18	0.004061	251
SOL. EXACT	0.004062	

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

Plaque encastrée sur le pourtour

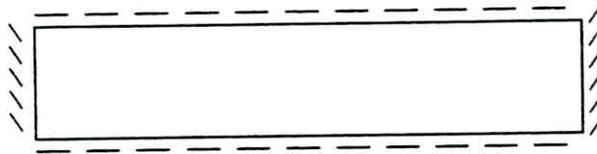


* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)
2 X 2	0.002604	11
4 X 4	0.001800	13
8 X 8	0.001424	26
10 X 10	0.001370	35
12 X 12	0.001339	47
16 X 16	0.001307	123
18 X 18	0.001299	186
SOL. EXACT	0.00126	

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

Plaque appuyée sur 2 côtés opposés
 encastrée sur les 2 autres.



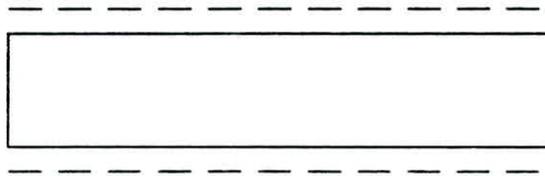
* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)
2 X 2	0.003125	12
4 X 4	0.002466	14
8 X 8	0.002088	23
10 X 10	0.002029	35
12 X 12	0.001996	48
16 X 16	0.001962	129
18 X 18	0.001939	184
SOL. EXACT	0.0019200	

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

Plaque appuyée sur 2 côtés opposés

libre sur les 2 autres.



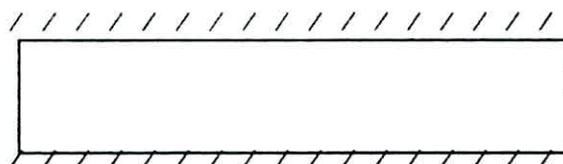
* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)
2 X 2	0.023438	16
4 X 4	0.015198	21
8 X 8	0.013537	40
10 X 10	0.013349	58
12 X 12	0.013248	78
16 X 16	0.013148	179
18 X 18	0.013121	259
SOL. EXACT	0.0130950	

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

Plaque encastrée sur 2 côtés opposés

libre sur les 2 autres.



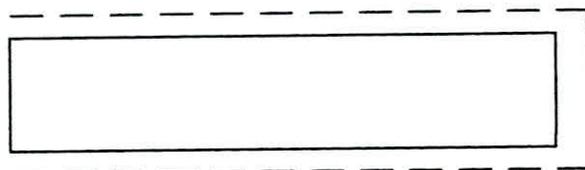
* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)
2 X 2	0.003125	16
4 X 4	0.002697	16
8 X 8	0.002211	26
10 X 10	0.002463	35
12 X 12	0.002463	35
SOL. EXACT	0.002920	

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

Palque appuyée sur 3 côtés

libre sur le dernier



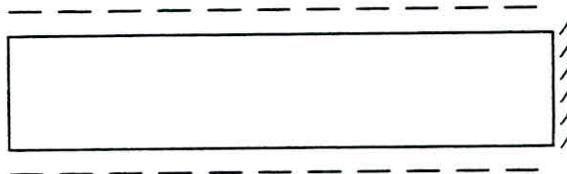
* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)
2 X 2	0.015625	15
4 X 4	0.013672	26
8 X 8	0.013184	65
10 X 10	0.013125	109
12 X 12	0.013093	183
16 X 16	0.013062	407
18 X 18	0.013053	885
SOL. EXACT	0.0115800	

IV ORGANISATION DU PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

Plaque appuyée sur 2 côtés opposés

l'un encastré, l'autre étant libre.



* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)
2 X 2	0.031250	12
4 X 4	0.013672	22
8 X 8	0.013184	38
10 X 10	0.013125	72
12 X 12	0.013093	123
16 X 16	0.013062	369
18 X 18	0.013053	681
SOL. EXACT	0.0113	

CHAPITRE

CINQ

V- INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMNTS FINIS

V-1) INTRODUCTION

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes. Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes.

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, transfert de chaleur ... etc) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui

s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique: problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles .
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques .
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs

sur ordinateur.

V-2) EVOLUTION DE LA METHODE

L'ingénieur a souvent une approche plus intuitive du problème en créant une analogie entre de vrais éléments "discrets" et des parties finies d'un domaine continu. Dans le domaine de la mécanique des solides par exemple, McHenry, Herinikoff et Newmark ont montré, dès les années 40, que l'on pouvait obtenir d'assez bonnes solutions au problème continu en remplaçant des petites parties du milieu continu par des arrangements de simples barres élastiques. Plustard, sur le même sujet, Argyris et Turner et al. montrèrent que l'on peut de façon non moins intuitive, mais beaucoup plus directe, procéder à une équivalence de propriété, en considérant que de petites parties du milieu ou "éléments" ont un comportement simplifié.

C'est le point de vue de l'ingénieur, basé sur cette "analogie directe", qui

a donné naissance au terme d' "élément fini". Il semble que Clough soit le premier à avoir employé ce terme, dont le contenu implique l'usage direct d'une méthode standard applicable aux systèmes discrets. Ceci est de la plus haute importance, à la fois en tant que concept, et en tant qu'outil de calcul : un concept qui permet une meilleure compréhension du problème, un moyen de calcul qui autorise l'emploi d'une même méthode pour des problèmes variés, et le développement de procédures de calcul standardisées.

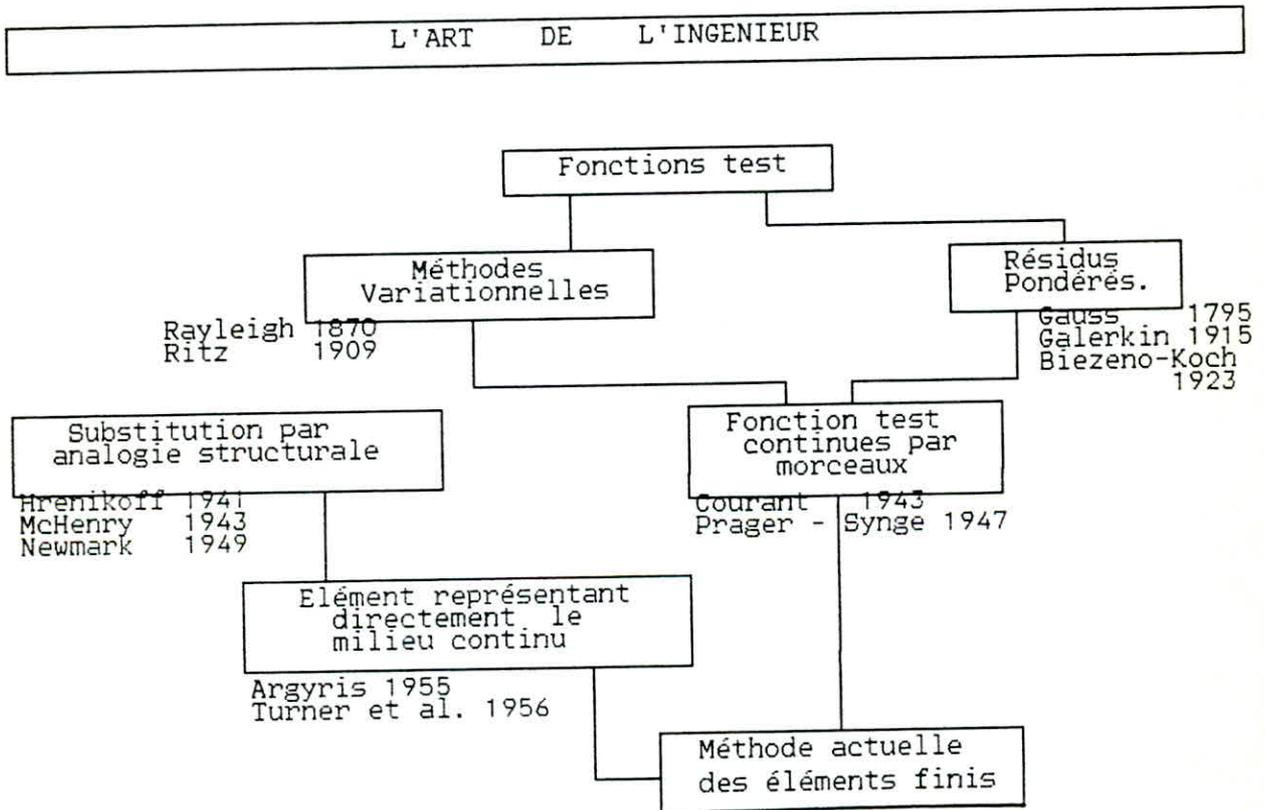
Depuis le début des années 60, on a fait beaucoup de progrès, et la méthode des éléments finis est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire.

Pour que la méthode des éléments finis soit efficace dans les applications industrielles, il faut des programmes d'assistance à la préparation des données et à l'interprétation des résultats. Ces pré- et postprocesseurs se

V INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

développent rapidement en ce moment ; ils utilisent les techniques de l'informatique graphique et interactive.

ARBRE GENEALOGIQUE DES METHODES D'ELEMENTS FINIS



CHAPITRE

SIX

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"

VI- ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEMES DE CONTINUITE C_1 "

VI-1) INTRODUCTION

Pour les "structures treillis", une subdivision en plusieurs éléments est naturelle, alors que pour une structure continue une subdivision finie correspondante naturelle n'existe pas, de telle sorte que la structure doit être artificiellement divisée en éléments, cependant la méthode des éléments finis permet de bâtir un modèle satisfaisant en utilisant un nombre fini de constituants bien définis. Cette approximation peut être obtenue de la manière suivante :

* Le milieu continu est divisé par des lignes ou par des surfaces imaginaires, en un certain nombre d'éléments finis.

* Les éléments sont supposés reliés entre eux en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières, appelés communément "noeuds".

Les déplacements de ces points seront des inconnues de base du problème, exactement comme un simple calcul de structure.

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITÉ"

- * On choisit une (ou des) fonction(s) permettant de définir de manière unique, le champ des déplacements à l'intérieur de chaque "élément fini" , en fonction des déplacements de ces noeuds.
- * Les fonctions de déplacements définissent maintenant l'état des déformations sans ambiguïté, à l'intérieur d'un élément, en fonction des déplacements nodaux. Et compte tenu des propriétés élastiques du matériau, ces mêmes fonctions définissent l'état de contrainte en tout point de l'élément et par conséquent sur ses frontières.
- * On détermine un système de forces concentrés aux noeuds qui équilibrent les contraintes s'exerçant aux frontières, et d'éventuelles forces réparties; il en résulte une relation de rigidité.

VI-2) DISCRETISATION D'UNE STRUCTURE :

Un corps déformable possède un nombre infini de points; en chacun de ceux-ci, on peut définir les forces extérieures, les contraintes, les déformations et les déplacements.

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"

Dés lors, il est indispensable de substituer à la structure étudiée, un modèle mathématique composé d'un certain nombre d'éléments appelés "éléments finis", reliés entre eux en un nombre fini de points appelés noeuds.

Il y a un grand nombre d'éléments finis, chacun ayant ses avantages particuliers. Dans ce présent travail, nous opterons pour un élément fini rectangulaire linéaire.

L'énergie de déformation devra approcher le plus possible celle de la structure continue. Les interactions entre éléments sont introduites sous forme de forces et de déplacements généralisés.

Certaines structures, notamment les plaques et les coques, sont idéalisées par des éléments discrets, dont les liaisons mutuelles sont continues le long des interfaces.

L'idéalisation consiste à ne considérer que les liaisons nodales, c'est à dire en un nombre fini de points situés sur les bords des éléments.

Les forces qui assureront ainsi l'interaction des éléments aux noeuds, sont dites généralisées.

Lorsque le champ de déplacement assure en outre la continuité des dépla-

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"

cements aux interfaces, l'élément constitue un modèle "pur ou conforme".

VI-3) PROBLEME DE CONTINUITE :

Dans la M-E-F, les éléments indépendants sont contraints de se déformer de façon bien spécifique.

Le choix d'un mode convenable de déformation pour les éléments doit être tel que toute la continuité de l'assemblage tende à être maintenue.

Pour la flexion des plaques, le déplacement latéral w du "plan médian" devra définir de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

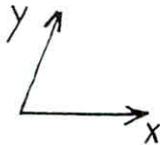
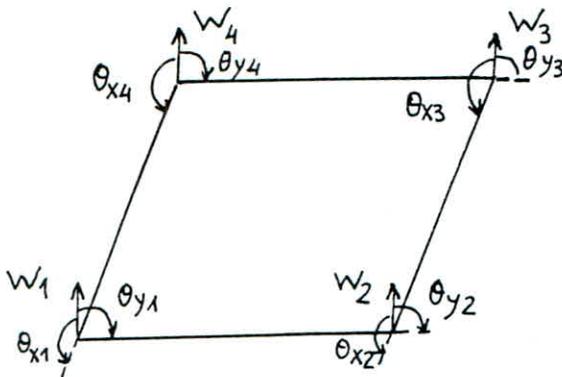
Pour que soit assurée la continuité des paramètres nodaux d'un élément à l'autre, le long des côtés, il est pratique de représenter par une expression polynômiale en (x,y) , et puisque son but est d'exprimer les déplacements de n'importe quel point $(U(x,y))$ en termes de déplacements nodaux $\{\hat{u}\}$, elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément.

Dans la plupart des cas étudiés de la flexion des plaques; l'élément

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"

choisi avait degrés de liberté en chaque noeud :

- w : déformation latérale;
- θ_x : rotation autour de l'axe des x ;
- θ_y : rotation autour de l'axe des y .



L'élément avait alors un total de 12 degrés de liberté, ce qui conduisait à avoir 12 coefficients indéterminés dans le polynôme représentant w . Mais cette fonction permet une discontinuité de la pente normale le long de

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"**

n'importe quel bord, elle n'est donc pas idéale, et elle est appelée "fonction non conforme".

Nous reverrons et développerons ce problème de non conformité dans l'étape concernant l'établissement de la matrice de rigidité élémentaire.

Un moyen de surmonter cette difficulté consiste à utiliser des éléments d'ordre plus élevé, donc à opter pour des polynômes d'ordre plus élevé pour les fonctions de déplacement.

Cela peut se faire de deux façons :

- La première consiste à donner des paramètres de déplacement additionnels aux noeuds situés sur les sommets (Eléments de haute précision de type Hermite).

- La seconde consiste à placer d'autres noeuds le long des côtés (en plus des noeuds aux sommets), en donnant à ceux-ci n'importe quel paramètre de déplacement (Eléments de haute précision de type Lagrange).

L'avantage de ces éléments est que très peu d'entre eux sont nécessaires pour modéliser une structure. Cependant cela est réalisé au détriment de la

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITÉ"**

simplicité du calcul.

Dans ce qui suivra, nous utiliserons, pour le calcul de la rigidité des éléments, la première solution, c'est à dire celle qui consiste à augmenter les degrés de liberté de chaque noeud.

Pour un assemblage d'éléments rectangulaires, cette méthode est pratique et licite lorsque la dérivée seconde mixte est prise comme l'un des paramètres nodaux.

Nous augmenterons donc chaque noeud d'un degré de liberté qui sera le gauchissement " $r = \delta^2 W / \delta x \delta y$ ". Chaque élément aura donc 16 degrés de liberté, et la fonction polynomiale 16 coefficients indéterminés .

VI-4) MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE POUR L'ELEMNT

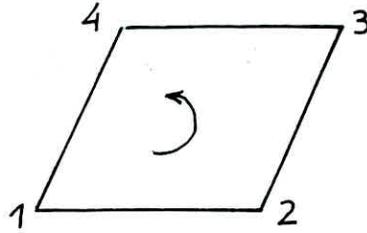
RECTANGULAIRE

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire suit 6 étapes de base.

** Etape I : choix d'un systme de coordonnées convenable et de numérotation des noeuds .

- La numérotation des noeuds se fera dans le sens trigonométrique.

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITÉ"



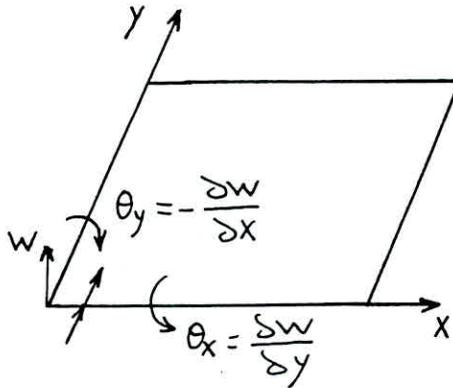
- On a 4 degrés de liberté pour chaque noeud, qui sont :

w : déplacement latéral,

θ_x : rotation autour de x ,

θ_y : rotation autour de y ,

r : gauchissement.



- Les directions positives adoptées seront définies :

>> vers le haut, pour les déplacements;

>> selon le sens trigonométrique, pour les rotations.

Le vecteur déplacement pour chaque noeud est alors :

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"**

$$\{ \hat{U}_i \} = \begin{bmatrix} w_i \\ x_i \\ y_i \\ r_i \end{bmatrix}$$

Les forces correspondantes en chaque noeud :

$$\{ \hat{F}_i \} = \begin{bmatrix} T_{1z} \\ M_{1y} \\ M_{1x} \\ M_{1z} \end{bmatrix}$$

Avec T_{1z} : force latérale transversale;

M_{1y} , M_{1x} : moments de flexion;

M_{1z} : moment gauchissement.

Donc pour un élément, on a 16 degrés de liberté, et par conséquent, la matrice de rigidité élémentaire est carrée, et d'ordre 16 .

Le vecteur déplacement pour chaque élément est :

$$\{ \hat{U} \}_e = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \hat{U}_3 \\ \hat{U}_4 \end{bmatrix}$$

Le vecteur force pour chaque élément est :

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITÉ"

$$\{ \hat{F} \}_e = \begin{bmatrix} \{ \hat{F}_1 \} \\ \{ \hat{F}_2 \} \\ \{ \hat{F}_3 \} \\ \{ \hat{F}_4 \} \end{bmatrix}$$

** ETAPE II : choix de la fonction déplacement $f(x,y)$.

La fonction déplacement est choisie, comme le produit de deux champs de déplacement de forme cubique, de poutres en flexion afin de garantir la continuité, et de définir de façon unique les paramètres nodaux.

$$W(x,y) = (a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3) (b_1 + b_2y + b_3y^2 + b_4y^3)$$

$$\begin{aligned} W(x,y) = & \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y \\ & + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3 + \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}x^2y^2 + \alpha_{13}xy^3 \\ & + \alpha_{14}x^3y^3 + \alpha_{15}x^2y^3 + \alpha_{16}x^3y^3 \end{aligned} \quad (IV-1)$$

Ceci peut être mieux visualiser en utilisant le triangle de Pascal (voir fig VI-1).

Cette fonction est aussi choisie de telle façon que l'isotropie soit préservée. A partir de cette fonction on obtient les expressions suivantes pour les rotations ainsi que le gauchissement.

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUTE"**

$$\epsilon_x = \delta w / \delta y = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + \alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 2\alpha_{12} x^2 y + 3\alpha_{13} xy^2 + 2\alpha_{14} x^3 y + 3\alpha_{15} x^2 y^2 + 3\alpha_{16} x^3 y^2$$

$$\epsilon_y = -\delta w / \delta y = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + 2\alpha_{12} xy^2 + 2\alpha_{13} y^3 + 3\alpha_{14} x^2 y^2 + 2\alpha_{15} xy^3 + 3\alpha_{16} x^2 y^3)$$

$$\Gamma = \delta^2 w / \delta x \delta y = \alpha_5 + 2\alpha_8 x + 2\alpha_9 y + 3\alpha_{11} x^2 + 4\alpha_{12} xy + 3\alpha_{13} y^2 + 6\alpha_{14} x^2 y + 6\alpha_{15} xy^2 + 8\alpha_{16} x^2 y^2$$

(voir fig VI-2.)

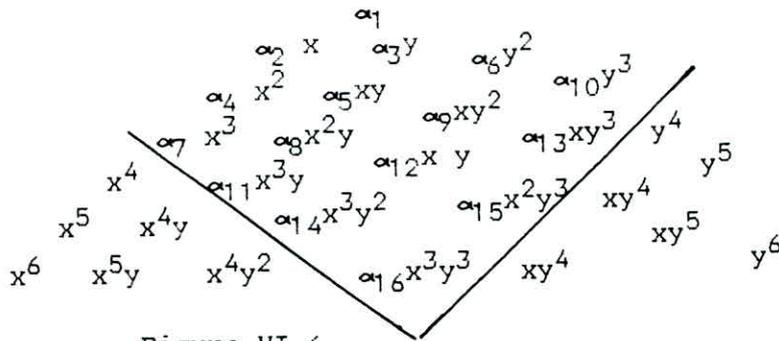


Figure VI-6.

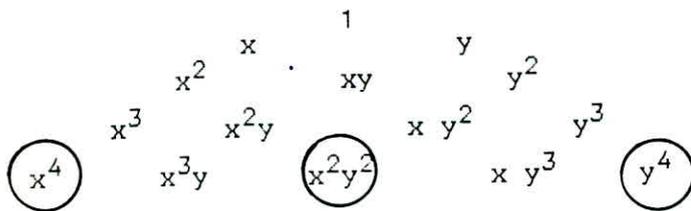
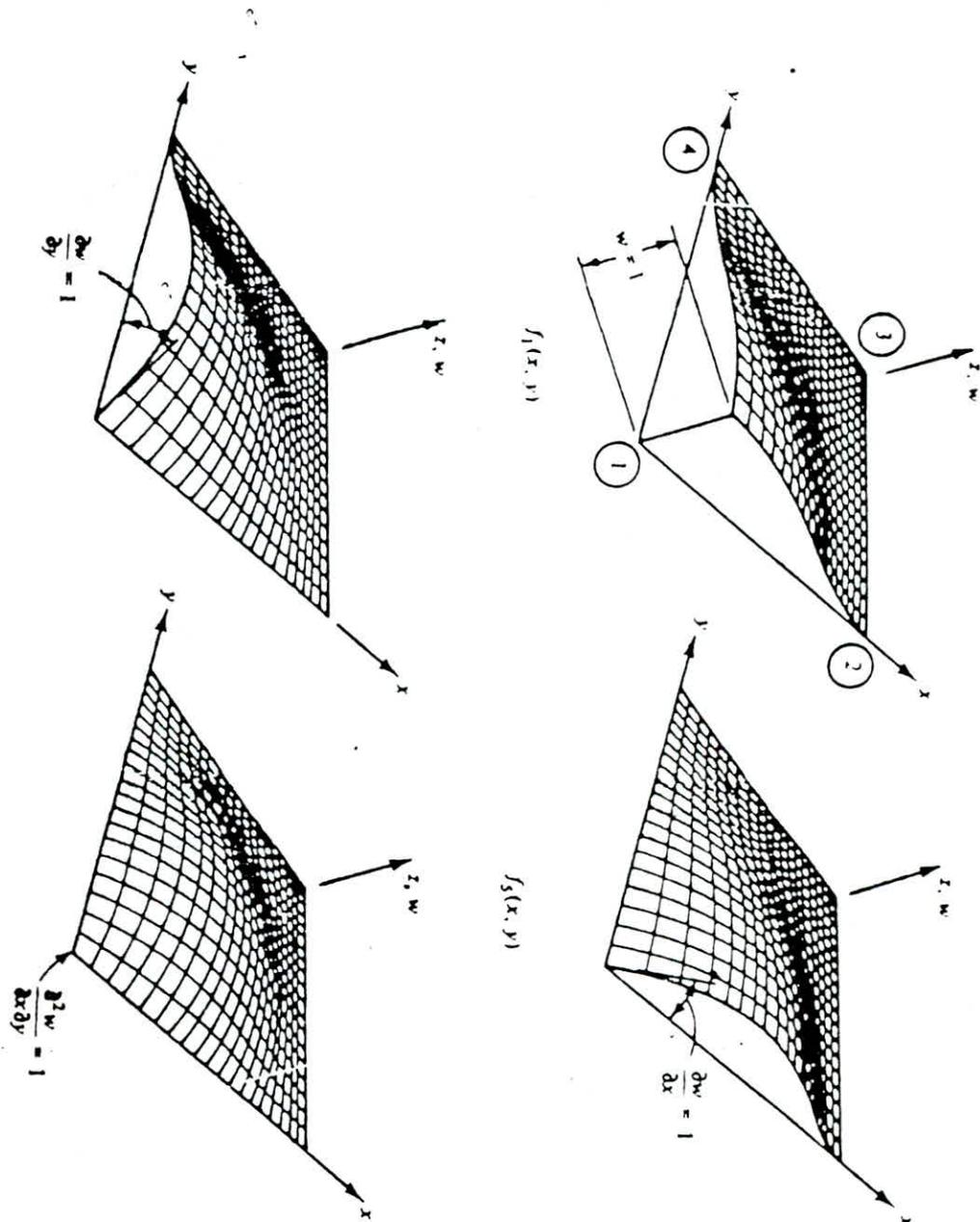


Figure VI-2.

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"



**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"**

Avant de vérifier que cette fonction assure bien la continuité des flèches des pentes et des gauchissements, montrons comment pour l'élément à 12 degrés de liberté, la continuité n'est pas vérifiée.

En effet, pour cet élément, nous avons pour la fonction déplacement :

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

Ce qui peut se voir beaucoup mieux encore en utilisant le triangle de Pascal (voir figure VI-2), qui donne les expressions suivantes :

$$w_x = \alpha_3 + \alpha_5 x + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_{10} xy + 3\alpha_{11} y^2 + \alpha_{12} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2 + 2\alpha_{12} y^3$$

$$w_y = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3)$$

Considérons par exemple le bord (1-4) où $x = \text{cste} = 0$

- Le déplacement latéral et les pentes, en chaque point de ce bord, sont donnés par :

$$w(0, y) = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_8 y^2 + \alpha_{10} y^3$$

$$w_x(0, y) = \alpha_3 + 2\alpha_8 y + 3\alpha_{10} y^2$$

$$w_y(0, y) = -(\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3)$$

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"**

Aux extrémités de bord :

Noeud 1 (y=0):

$$\begin{aligned} w(0,0) &= w_1 = \alpha_1 \\ \theta_x(0,0) &= \theta_{x1} = \alpha_3 \\ \theta_y(0,0) &= \theta_{y1} = -\alpha_2 \end{aligned}$$

Noeud 4 (y=b) :

$$\begin{aligned} w(0,b) &= w_4 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{10} b^3 \\ \theta_x(0,b) &= \theta_{x4} = \alpha_3 + 2\alpha_9 b + 3\alpha_{10} b^2 \\ \theta_y(0,b) &= \theta_{y4} = -(\alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_8 b^2 + \alpha_{12} b^3) \end{aligned}$$

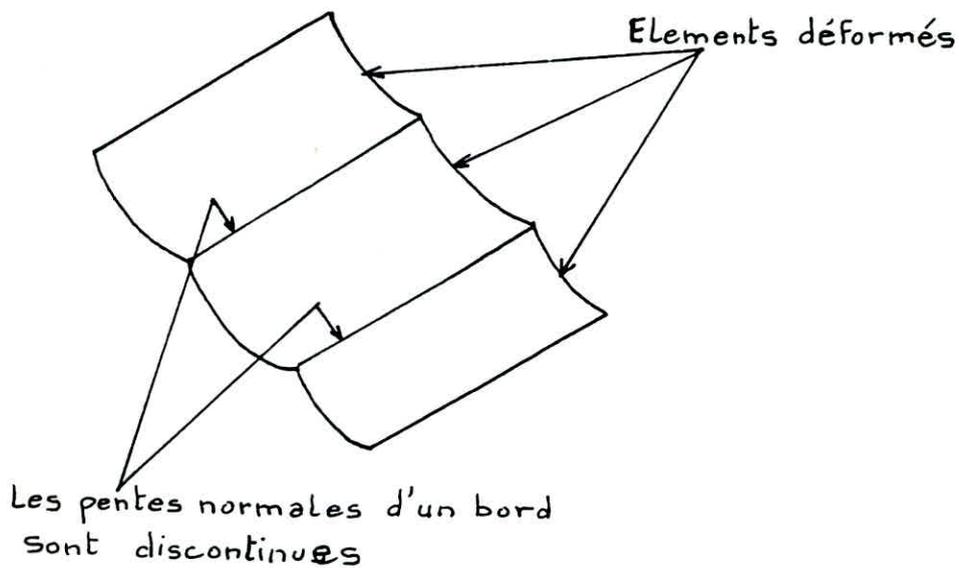
Ainsi on ne dispose seulement que de six équations pour obtenir les huit coefficients inconnus ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12}$), qui ne peuvent être déterminés.

Mais on remarque que w et θ_x contiennent les mêmes quatre coefficients ($\alpha_1, \alpha_3, \alpha_9, \alpha_{10}$), et que puisque quatre des conditions sur la frontière se rapportent à w et θ_x , on a alors un nombre suffisant d'équations pour calculer ces quatre coefficients. On peut donc exprimer θ_x et w d'une façon unique.

Quant à θ_y , il contient les quatre autres coefficients ($\alpha_2, \alpha_5, \alpha_8, \alpha_{12}$), alors qu'il ne reste que deux équations, qui seront donc insuffisantes pour

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITÉ"

leurs déterminations. La rotation θ_y n'est donc pas définie de façon unique.
On dit qu'elle est discontinue le long de ces bords.



A cause de cela, la fonction choisie n'est pas idéale, et elle est appelée "fonction non conforme", comme cela a été mentionné plus haut.

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"**

Remarque:

On a seulement considéré le cas du bord (1-4) où $x=0$. Cependant, la conclusion est généralement vraie et une continuité de la pente normale peut exister le long de n'importe quel bord.

Vérifions maintenant la conformité de la nouvelle fonction de déplacement munie de 16 coefficients. Nous procédons de la même manière que précédemment:

On considère le bord (1-4) :

Le déplacement latéral et les pentes en chaque point de ce bord sont donnés par :

$$w(0,y) = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_8 y^2 + \alpha_{10} y^3$$

$$\theta_x(0,y) = \alpha_3 + 2\alpha_8 y + 3\alpha_{10} y^2$$

$$\theta_y(0,y) = - (\alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_8 y^2 + \alpha_{13} y^3)$$

$$\Gamma(0,y) = \alpha_5 + 2\alpha_8 + 2\alpha_9 y + 3\alpha_{13} y^2$$

Aux extrémités de bord ;

Noeud 1 (y=0):

$$w(0,0) = w_1 = \alpha_1$$

$$\theta_x(0,0) = \theta_{x1} = \alpha_3$$

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUTE"**

$$e_y(0,0) = e_{y1} = -\alpha_2$$

$$r(0,0) = r_1 = \alpha_5$$

Noeud 4 (y=b) :

$$w(0,b) = w_4 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_8 b^2 + \alpha_{10} b^3$$

$$e_x(0,b) = e_{x4} = \alpha_3 + 2\alpha_8 b + 3\alpha_{10} b^2$$

$$e_y(0,b) = e_{y4} = -(\alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_8 b^2 + \alpha_{13} b^3)$$

$$r(0,b) = r_4 = \alpha_5 + 2\alpha_8 + 2\alpha_9 b + 3\alpha_{13} b^2$$

On dispose de 8 équations pour obtenir les 8 coefficients inconnus ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{13}$). Le nombre d'équations étant égal au nombre d'inconnues, w , e_x , e_y et r seront donc définis de façon unique.

On dira alors que la fonction est une fonction "conforme".

Ecrire les équations (VI-1) et (VI-2) sous forme matricielle peut être résumé par l'équation générale.

$$\begin{Bmatrix} w \\ e_x \\ e_y \\ r \end{Bmatrix} = \{ U(x,y) \} = [f(x,y)] \cdot \{ \alpha \} \quad \text{(VI-3)}$$

$[f(x,y)]$: Fonction reliant le déplacement d'un noeud de données (x,y) aux 16 coefficients α .

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITÉ"**

{ α } : Vecteur colonne des coefficients inconnus.

On aura : [f(x,y)] =

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & x^3y^2 & x^2y^3 & x^3y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 2x^2y & xy^2 & 2x^3y & 3x^2y^2 & 3x^3y^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & 2xy^2 & y^3 & 3x^2y^2 & 2xy^3 & 3x^2y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 3x^2 & 4xy & 3y^2 & 6x^2y & 6xy^2 & 9x^2y^2 \end{bmatrix}$$

** ETAPE III : Exprimer l'état de déplacement en chaque point, en fonction des déplacements nodaux - Calcul des fonctions d'interpolation.

A partir de la matrice [f(x,y)], on construit une matrice [A] qui lie les déplacements nodaux aux coefficients inconnus, en remplaçant chaque noeud par ses coordonnées et en plaçant les blocs selon la numérotation adoptée.

On obtient :

$$\{ \hat{U} \}_e = [A] \{ \alpha \}.$$

MATRICE [A] :

$$N_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"

$$N_2 \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & 0 & 0 & -3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$N_3 \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & a^2b^2 & ab^3 & a^2b^2 & a^2b^3 & a^3b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 2a^2b & ab^2 & 2a^3b & 3a^2b^2 & 3a^2b^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & -b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -2a^2b & -b^3 & -3a^2b^2 & -2ab^3 & -3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 2b & 0 & 3a^2 & 4ab & 3b^2 & 6a^2b & 6ab^2 & 9a^2b^2 \end{array} \right]$$

$$N_4 \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & b & a^2 & 0 & b^2 & a^3 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -b^2 & 0 & 0 & 0 & -b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dans ce système d'équations, on peut exprimer le vecteur colonne des coefficients inconnus en fonction des déplacements nodaux :

$$\{ \alpha \} = [A]^{-1} \{ \hat{U} \}_e.$$

d'où on peut exprimer le déplacement en n'importe quel point, en fonction des déplacements nodaux :

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITÉ"

L'équation (VI-3) devient :

$$\{ U \} = [f(x,y)][A]^{-1} \{ U \}_e = [N]_e \{ \hat{U} \}_e \quad (\text{VI-4})$$

Avec $[N]_e = [f(x,y)][A]^{-1}$, fonction de forme où d'interpolation de dimension (4,16) .

$$[N]_e = [[N]^1, [N]^2, [N]^3, [N]^4]$$

L'inversion de [A] peut être faite numériquement, mais pour pouvoir obtenir une expression explicite de la matrice de rigidité élémentaire, pour plus d'efficacité numérique (allègement du programme gain de calcul). L'inversion a été effectuée algébriquement comme suit.

Après avoir posé $a=1$ et $b=1$, [A] étant inversé numériquement, les variables $1/a$, $1/b$, $1/a$, $1/b$, $1/ab$... ont été introduites dans $[A]^{-1}$ de façon à ce que :

$$[A][A]^{-1} = [I] = \text{Matrice identité.}$$

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUTE"**

Matrice $[A]^{-1}$:

1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
$-3/a^2$	0	$2/a$	0	$3/a^2$	0	$1/a^2$	0
0	0	0	1	0	0	0	0
$-3/b^2$	$-2/b$	0	0	0	0	0	0
$2/a^3$	0	$-1/a^2$	0	$-2/a^3$	0	$-1/a^2$	0
0	$-3/a^2$	0	$-2/a$	0	$3/a^2$	0	$-1/a$
0	0	$3/b^2$	$-2/b$	0	0	0	0
$2/b^3$	$1/b^2$	0	0	0	0	0	0
0	$2/a^3$	0	$1/a^2$	0	$-2/a^2$	0	$1/a^2$
$9a^2b^2$	$6a^2b$	$-6/ab^2$	$4/ab$	$-9/a^2b^2$	$-6/a^2b$	$-3/ab^2$	$2/ab$
0	0	$-2/b^3$	$1/b^2$	0	0	0	0
$-6/a^2b^2$	$-4/a^3b$	$3/a^2b^2$	$-2/a^2b$	$6/a^3b^2$	$4/a^3b$	$3/a^2b^2$	$-2/a^2b$
$-6/a^2b^3$	$-3/a^2b^2$	$4/ab^3$	$-2/ab^2$	$6/a^2b^3$	$3/a^2b^2$	$2/ab^3$	$-1/ab^2$
$4/a^3b^3$	$2/a^3b^2$	$-2/a^2b^3$	$1/a^2b^2$	$-4/a^3b^3$	$-2/a^3b^2$	$-2/ab^3$	$1/a^2b^2$

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"**

* ETAPE IV : relier les déformations $\{\epsilon(x,y)\}$ en chaque point aux déplacements $\{U(x,y)\}$ et donc aux déplacements nodaux $\{\hat{U}\}_e$.

L'état de déformation en chaque point peut être représenté par 3 composantes.

- La courbure de la plaque dans le plan xz : $-\delta^2 w / \delta x^2$
- La courbure de la plaque dans le plan yz : $-\delta^2 w / \delta y^2$
- La torsion : $-\delta^2 w / \delta x \delta y$

Remarque :

Les moments internes M_x et M_y agissent chacun sur deux côtés de l'élément, il en est de même pour les moments de torsion M_{xy} et M_{yx} , mais puisque M_{xy} est égal à M_{yx} , on peut considérer que l'un des deux, par exemple M_{xy} , agit sur les quatre côtés, cela en doublant le terme de torsion dans le vecteur des déformations.

L'état de déformation dans l'élément est donc représenté par :

$$\{\epsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} -\delta^2 w / \delta x^2 \\ -\delta^2 w / \delta y^2 \\ -2\delta^2 w / \delta x \delta y \end{Bmatrix}$$

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUTE"**

En remplaçant w par son expression polynômiale, on obtient une équation qui peut être écrite sous la forme :

$$\{\epsilon(x,y)\} = [Q] \{\alpha\}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & -2y^2 & 0 & -6xy^2 & -2y^3 & -6xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -2x^2 & -6xy & -2x & -6x^2y & -6x^3y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -8xy & -6y^2 & -12x^2y & -12xy^2 & -18x^2y^2 \end{bmatrix}$$

En remplaçant $\{\alpha\}$ par $[A]^{-1} \{\hat{U}_e\}$, on obtient la relation suivante déformations-déplacements nodaux :

$$\{\epsilon(x,y)\} = [Q] [A]^{-1} \{\hat{U}_e\} = [B] \{\hat{U}_e\} \quad (\text{VI-5})$$

avec $[B] = [Q] [A]^{-1}$

ETAPE V : relier les contraintes internes $\{\sigma(x,y)\}$ aux déformations et donc aux déplacements nodaux $\{\hat{U}_e\}$.

Les relations entre contraintes et déformations, c'est à dire entre moments et courbures, sont données, comme il a été déjà vu dans la théorie de la flexion des plaques, par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = - (D_x \delta^2 w / \delta x^2 + \mu_x D_y \delta^2 w / \delta y^2) \\ M_y = - (D_y \delta^2 w / \delta y^2 + \mu_y D_x \delta^2 w / \delta x^2) \\ C = -2D_{xy} \delta^2 w / \delta x \delta y \end{array} \right.$$

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUTE"**

ces trois équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\{ \sigma(x,y) \} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & \mu_x D_y & 0 \\ \mu_y D_x & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\delta^2 w / \delta x^2 \\ -\delta^2 w / \delta y^2 \\ -2\delta^2 w / \delta x \delta y \end{Bmatrix}$$

c.a.d

$$\{ \sigma(x,y) \} = [A] \{ \epsilon(x,y) \}$$

définissant ainsi la matrice [D] symétrique, car $\mu_x D_x = \mu_y D_y$.

Pour le cas isotrope :

$$[D] = \begin{bmatrix} D & D\mu & 0 \\ D\mu & D & 0 \\ 0 & 0 & D/2(1-\mu) \end{bmatrix} = \text{Matrice d'élasticité}$$

En remplaçant $\{ \epsilon(x,y) \}$ par $[B] \{ \hat{U} \}_e$, on relie les contraintes en n'importe quel point aux déplacements nodaux par :

$$\{ \sigma(x,y) \} = [D][B] \{ \hat{U} \} = [H] \{ \hat{U} \} \quad (\text{VI-6})$$

avec :

$$[H] = [D][B]$$

** ETAPE VI : relier les forces nodales aux déplacements nodaux $\{ \hat{U} \}_e$ et, de là, obtenir la matrice de rigidité de l'élément $[K]_e$.

Nous utilisons le principe des travaux virtuels :

Imposons un déplacement virtuel $\delta \{ \hat{U} \}_e$ aux noeuds arbitraires de

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"**

l'élément, le principe est d'égaliser le travail extérieur et de l'énergie de déformation interne .

- Le travail extérieur produit lors du déplacement virtuel $\delta \{ \hat{U} \}_e$ est :

$$W_{\text{ext}} = \delta \{ \hat{U} \}_e^T \cdot \{ \hat{F} \}_e$$

- L'énergie de déformation interne est :

$$W_{\text{int}} = \int_{V_e} \delta \{ \epsilon(x,y) \}^T \cdot \{ \sigma(x,y) \} dV$$

En considérant l'équation (3-5), elle devient :

$$W_{\text{int}} = \int_{V_e} \delta \{ \hat{U} \}_e^T \cdot [B]^T \cdot [D][B] \cdot \{ \hat{U} \}_e dV_e$$

En égalisant W_{ext} et W_{int} , on obtient :

$$\delta \{ \hat{U} \}_e^T \cdot \{ \hat{F} \}_e = \delta \{ \hat{U} \}_e^T \cdot \left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \cdot \{ \hat{U} \}_e$$

ce qui donne

$$\{ \hat{F} \}_e = \left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \cdot \{ \hat{U} \}_e$$

analogue à

$$\{ \hat{F} \}_e = [K]_e \cdot \{ \hat{U} \}_e$$

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUTE"**

d'où par identification

$$[K]_e = \left(\int_{ve} [B]^T [D] [B] dv \right)$$

avec $[B]^T = [A^{-1}]^T [Q]^T$

d'où $[K]_e = \int_{ve} [A^{-1}]^T [Q]^T [D] [Q] [A^{-1}] dv$

Les matrices $[A^{-1}]^T$ et $[A^{-1}]$ ne contenant que des constantes, on peut les sortir de l'intégrale, on obtient donc

$$[K]_e = [A^{-1}]^T \cdot \int_{ve} [Q]^T [D] [Q] dv [A^{-1}]$$

En posant

$$[R] = \int_{ve} [Q]^T [D] [Q] dv \quad (VI-7)$$

$[K]_e$ devient comme produit de trois matrices

$$[K] = [A^{-1}]^T [R] [A^{-1}] \quad (VI-8)$$

Pour le cas spécifique d'un élément rectangulaire pour la flexion des plaques, on remplace l'expression générale $\left(\int_{ve} dv \right)$ par l'expression

$$\left(\int_0^b \int_0^a dx dy \right).$$

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"**

L'expression (VI-7), sous le signe "somme", peut être calculée et intégrée explicitement sans trop de difficultés.

La matrice [R] ne dépend donc que de μ , D, et a et b, et finalement l'expression explicite de [K] est obtenue suivant la formule (VI-8).

Matrice [K] :

A1	E1	F1	G1	H1	I1	J1	K1	L1	N1	M1	O1	P1	Q1	R1	S1
	B1	T1	U1	I1	V1	-K1	W1	-M1	X1	O1	Y1	-Q1	Z1	S1	A2
		C1	-B2	-J1	K1	C2	-D2	-N1	O1	E2	-F2	R1	-S1	G2	-H2
			D1	-K1	-W1	-D2	I2	O1	-Y1	F2	J2	-S1	A2	H2	K2
				A1	E1	-F1	-G1	P1	Q1	-R1	-S1	L1	M1	-N1	-O1
					B1	-T1	-U1	-Q1	Z1	-S1	-A2	-M1	X1	-O1	-Y1
							C1	-B2	-R1	S1	G2	-H2	N1	-O1	E2
								D1	S1	-A2	H2	K2	-O1	Y1	F2
									A1	-E1	-F1	G1	H1	-I1	-J1
										B1	T1	-U1	I1	V1	-K1
											C1	B2	J1	K1	C2
												D1	-K1	W1	D2
													A1	-E1	F1
														B1	-T1
															U1
															C1
															B2
															D1

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITÉ"**

avec :

$$A1 = 72*D/25*a*b + 156*D (b/a^3 + a/b^3)/35$$

$$E1 = 78*D*a/35*b^2 + 22*D*b^2/35*35*a^3 + D(6/25 + 6*\mu/5)/a$$

$$F1 = -78Db/35*a^2 - 22*D*a^2/35 - D*(6/25 + 6*\mu/5)/b$$

$$G1 = 11*D*b^2/35*a^2 + 11*D*a^2/35*b^2 + D*(1/50 + 1*\mu/5)$$

$$H1 = -72*D/25*a*b - 156*D*b/35*a^3 + 54*D*a/35*b^3$$

$$I1 = -22*D*b^2/35*a^2 + 27*D*a/35*b^2 - D*(6/25 + 6*\mu/5) / a$$

$$J1 = 13*D*a^2/35*b^3 - 78*D*a/35*a^2 - 6*D/25*b$$

VI-5) VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE POUR L'ELEMENT RECTANGULAIRE :

Afin de pouvoir calculer les forces nodales statiquement équivalentes aux chargements répartis sur les frontières de l'élément, on impose un déplacement virtuel $\delta (\hat{U})_e$ arbitraire aux noeuds de l'élément, puis on égalise l'expression des travaux intérieurs et extérieurs.

- Travail effectué par les forces nodales directement appliquées aux noeuds = somme des produits de chaque composante des forces par le déplacement correspondant :

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"

$$\delta \{ \hat{U} \}_e^T \cdot \{ \hat{F} \}_e \quad (a)$$

- Travail intérieur effectué par les contraintes et les chargements répartis $\{ q \}$, obtenu par intégration sur le volume de l'élément :

$$\int_{ve} \delta \{ \sigma(x,y) \}^T \cdot \{ \sigma(x,y) \} dV - \int_{ve} \{ \hat{U} \} \{ q \} \cdot dV$$

ou encore

$$\int_{ve} \delta \{ \hat{U} \}_e^T \cdot ([B]^T \{ \sigma(x,y) \} - [N]^T \{ q \}_e) \cdot dV \quad (b)$$

En égalisant (a) et (b) on obtient :

$$\delta \{ \hat{U} \}_e \{ \hat{F} \}_e = \delta \{ \hat{U} \}_e^T \cdot \left(\int_{ve} ([B]^T \{ \sigma(x,y) \} - [N]^T \{ q \}) dV \right).$$

Comme cette relation est valable pour n'importe quel déplacement virtuel, elle entraîne l'égalité des matrices par lesquelles sont multipliés ces déplacements, on a donc :

$$\{ \hat{F} \}_e = \int_{ve} ([B]^T \{ \sigma(x,y) \} - [N]^T \{ q \}) dV$$

et comme pour un comportement linéaire élastique

$$\{ \sigma(x,y) \} = [D] [B] \cdot \{ \hat{U} \}$$

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"**

On obtient :

$$\{ \hat{F} \}_e = \left(\int_{ve} [B]^T [B] dV \right) \{ \hat{U} \} - \int_{ve} [N]^T \{ q \} dV$$

$$\{ \hat{F} \}_e = [K]_e \cdot \{ \hat{U} \}_e - \int_{ve} [N]^T \{ q \} dV \quad (c)$$

Or l'on sait aussi que :

$$\{ \hat{F} \}_e = [K]_e \{ \hat{U} \}_e - \{ \hat{F} \}_e \quad (d)$$

avec

$[K]_e \{ \hat{U} \}_e$: Forces engendrées par le déplacement des noeuds.

$\{ \hat{F} \}_e$: Forces nodales statiquement équivalentes à une charge $\{ q \}$, répartie, s'exerçant sur l'élément.

Par identification de (c) et (d) on obtient :

$$\{ \hat{F} \}_e = \int_{ve} [N]^T \{ q \} dV \quad (VI-9)$$

Dans notre cas, cette intégrale généralisée se ramène à une intégrale surfacique, le vecteur charge $\{ q \}$ a une seule composante suivant l'axe Oz, et la matrice $[N]^T$ est une matrice de dimension (16-1).

$$[N]^T = [A^{-1}]^T [P]^T$$

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUTE"**

avec

$$[P] = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, x^2y^2, xy^3, x^3y^2, x^2y^3, x^3y^3)$$

L'expression (VI-9) devient donc

$$\{ \hat{F} \}_e^q = [A^{-1}]^T \cdot q \int_0^b \int_0^a [P]^T dx dy \quad (VI-10)$$

Après intégration, on obtient le vecteur de forces nodales suivant :

$$\{ \hat{F} \}_e^q = (q \cdot a \cdot b / 4) \begin{bmatrix} 1 \\ b/6 \\ -a/6 \\ ab/36 \\ 1 \\ b/6 \\ a/6 \\ -ab/36 \\ 1 \\ -b/6 \\ a/6 \\ -ab/36 \\ 1 \\ -b/6 \\ -a/6 \\ -ab/36 \end{bmatrix}$$

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUTE"

VI-6) GENERALISATION AU DOMAINE ENTIER - REGLE D'ASSEMBLAGE :

Dans les paragraphes précédentes, le principe des travaux virtuels a été appliqué à un élément isolé, et l'on a introduit le concept de force nodale équivalente.

Le principe de l'assemblage est basé sur la méthode conventionnelle de l'équilibrage direct de ces forces nodales.

Les raisonnements des paragraphes précédents peuvent s'appliquer directement au milieu continu entier. En effet l'équation (VI-4) peut s'interpréter comme s'appliquant cette fois à la structure entière, à savoir :

$$\{ U \} = [\bar{N}] \{ \hat{U} \}$$

où $\{ \hat{U} \}$ regroupe les déplacements de tous les points nodaux et où ,

$\bar{N}_i = N_i^e$: lorsque le point considéré est intérieur à l'élément e, et i est un point associé à cet élément,

$\bar{N}_i = 0$: si le point ne figure pas dans l'élément.

On donnera de la matrice [B] une définition semblable. On est alors en mesure d'appliquer le principe des travaux virtuels à toute la structure, et

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"**

le travail virtuel extérieur associé à un déplacement virtuel quelconque de tous les noeuds $\delta \{ U \}$ devient :

$\delta \{ \hat{U} \}^T \cdot \{ \hat{F} \}$, cependant que le travail virtuel intérieur a pour expression :

$$\int_V \delta \{ \epsilon(x,y) \}^T \{ \sigma(x,y) \} dV - \int_V \delta \{ U \}^T \{ q \} dV$$

L'intégration étant cette fois effectuée sur tout le domaine.

En effectuant la substitution de ,

$\delta \{ U \}$ par $[N] \delta \{ \hat{U} \}$ et de $\delta \{ \epsilon(x,y) \}$ par $[B] \delta \{ \hat{U} \}$

et en tenant compte de la relation contraintes-déformations $\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \}$

on obtient immédiatement, en égalant les travaux virtuels intérieur et extérieur,

$$[K] \{ \hat{U} \} - \{ \hat{F} \}_q = \{ F \}$$

Il vient, pour l'expression de la matrice de raideur,

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV$$

l'intégrale sur tout le domaine.

* Si l'on considère, cependant, la relation entre $[B]$ et $[B]$, il est évident que : $[K] = \Sigma [K]_e$, où les termes provenant de chaque élément ont été évalués individuellement, conformément aux méthodes ci-dessus.

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINuite"**

On peut facilement montrer qu'il en va de même pour les diverses composantes des forces qui interviennent .

Finalement, d'après ce que nous venons de décrire, on peut prévoir que l'assemblage comportera deux étapes :

- Construction de la matrice de rigidité élémentaire $[K]_e$ et du vecteur force élémentaire $(\hat{F})_e$ de chaque élément.

- Addition des matrices et des vecteurs élémentaires.

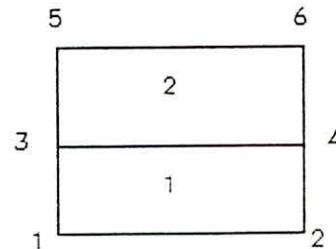
Afin de mieux voir ce qu'on vient d'expliquer, nous l'avons schématisé dans l'exemple ci-dessous.

Exemple d'assemblage :

Considérons la plaque (fig VI-4) composée de deux éléments et de six noeuds.

Considérons trois degrés de liberté par noeud, la matrice de rigidité globale sera de dimension 18x18.

Les matrices des différents éléments sont exprimées dans le repère global suit :



(Figure VI-4)

VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITE"

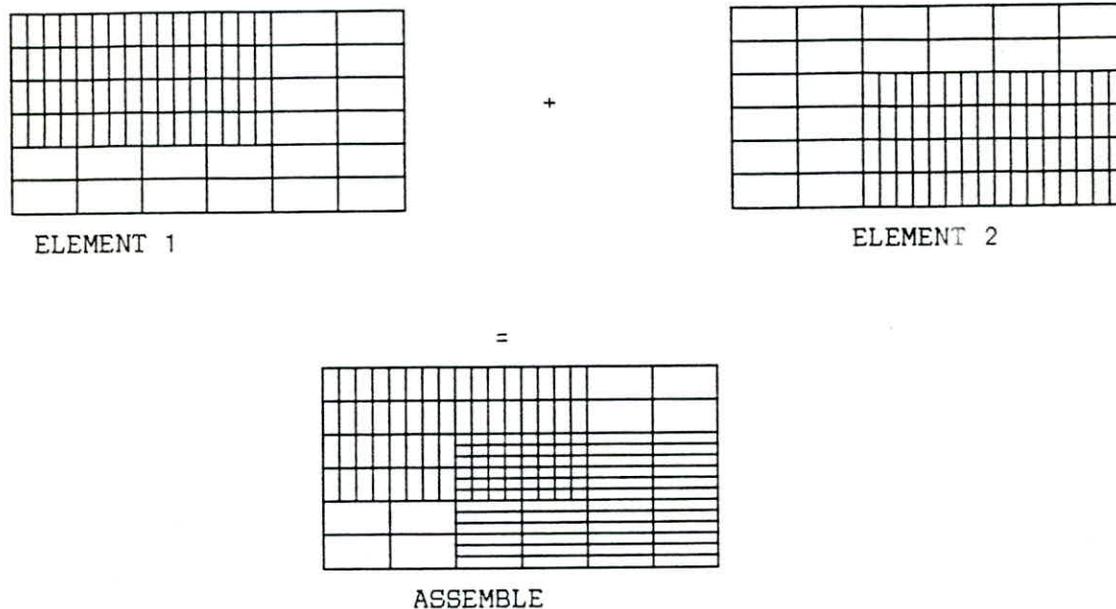


figure VI-4

VI-7) LA METHODE DES ELEMENTS FINIS CONSIDERE COMME UNE MINIMISATION
DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE :

Le principe des travaux virtuels utilisé dans les paragraphes précédents, a permis de satisfaire aux conditions d'équilibre dans les limites imposées par la distribution des déplacements choisie initialement.

C'est seulement dans le cas où l'égalité des travaux virtuels était

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITÉ"**

réalisée pour toutes les variations arbitraires de déplacements (en n'imposant que les conditions aux frontières), qu'alors l'équilibre serait achevé.

Le principe des travaux virtuels peut être reposé d'une manière différente en termes variationnels pour caractériser l'équilibre, en effet :

$$\begin{aligned} \pi &: \text{énergie potentielle totale} \\ \pi = U - W & \text{ avec } U : \text{énergie de déformation interne} \\ & W : \text{travail des forces extérieures.} \end{aligned}$$

$$\text{où } U = \int_V 1/2 \{ \epsilon \}^T [D] \{ \epsilon \} dV \quad \text{et} \quad W = \{ \hat{U} \}^T \{ \hat{F} \}$$

$$\text{On obtient donc : } \pi = 1/2 \{ \hat{U} \}^T [K] \{ \hat{U} \} - [\hat{U}]^T \{ \hat{F} \}$$

Or la minimisation de l'énergie potentielle totale correspond à l'équilibre des systèmes. Donc la solution du problème continu est une fonction $\{ \hat{U} \}$ qui π stationnaire, ce qui signifie que sa "variation" correspondant à des petits changements $\delta \{ U \}$ de la fonction inconnue doit être nulle et donc $\delta \pi = 0$.

$$\begin{aligned} \delta \pi = 0 \quad \{ \delta \hat{U} \}^T ([K] \{ \hat{U} \} - \{ \hat{F} \}) &= 0 \\ [K] \{ \hat{U} \} - \{ \hat{F} \} &= 0 \end{aligned}$$

Cette relation ne constitue rien d'autre que la traduction de cette

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINUITÉ"**

variation par rapport à l'ensemble des déplacements limité à un nombre fini de paramètres $\{ \hat{U} \}$.

On montre que dans le domaine élastique, non seulement l'énergie potentielle totale est stationnaire, mais qu'en plus elle est minimale :
Le processus des éléments finis consiste donc en la recherche d'un tel minimum, dans la limite d'un type imposé de champ de déplacements.
Mathématiquement, cela revient à poser le problème en termes de résolution d'un système d'équations simultanées.

IV-8) CRITERES DE CONVERGENCE

Si le nombre des paramètres $\{ \hat{U} \}$ définissant le déplacement augmente indéfiniment, on pourra alors obtenir une approximation de plus en plus précise de l'ensemble des conditions d'équilibre.

Donc, plus le nombre de degrés de liberté sera élevé, plus la solution obtenue sera proche de la solution exacte, qui est celle qui réalise l'équilibre complet, à condition que les déplacements tendent à la limite vers les déplacements réels. On pourrait donc en déduire les conditions nécessaires de convergence du processus des éléments finis qui sont :

**VI ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION
DES PLAQUES MINCES "PROBLEME DE CONTINuite"**

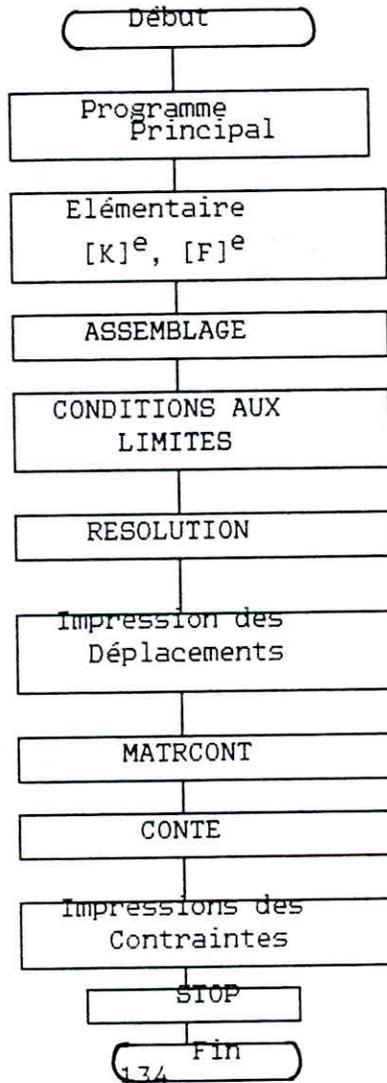
Ce critère suppose donc une certaine continuité des déplacements lorsque l'on passe d'un élément à un autre.

CHAPITRE

SEPT

PAR ELEMENT FINI

ORGANIGRAMME



**VII ORGANISATION GENERALE D'UN PROGRAMME
PAR ELEMENT FINI**

VII-1) INTRODUCTION

Mathématiquement, la M-E-F revient à poser le problème en terme de résolution d'un système d'équations simultanées, écrit sous la forme :

$$[K] \{ U \} = \{ F \}$$

où

- [K] : matrice de rigidité globale,
- { U } : vecteur déplacement inconnu,
- { F } : vecteur force global.

VII-2) PROGRAMMATION

On peut distinguer deux parties essentielles :

- * Module de génération des données.
- * Module de résolution et d'exploitation des résultats.

Les données sont construites principalement d'informations sur les noeuds (nombre de noeuds total, nombre de noeuds restreints, conditions d'appuis, conditions de chargement ...), et sur les éléments (nombre d'éléments suivant la direction X et la direction Y, la taille de l'élément, caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux.

VII-2-1 Entrée des données :

Pour qu'on puisse résoudre le problème, le module d'entrée des données doit

**VII ORGANISATION GENERALE D'UN PROGRAMME
PAR ELEMENT FINI**

transmettre toutes les informations nécessaires aux autres parties du programme, de façon à permettre la constitution de tous les tableaux qui sont utilisés par la suite.

Dans notre cas c'est la subroutine MECA qui est concerné. Cette subroutine permet l'introduction des caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux, ainsi que le calcul de la matrice d'élasticité $[D]_t$.

* Subroutine ELEM T .

Ce sous-programme contient la matrice de rigidité élémentaire explicite $[K]_e$ et le vecteur charge élémentaire $\{ F \}_e$. En tenant compte de la symétrie de la matrice, l'autre moitié est déduite automatiquement.

VII-2-2 Assemblage des matrices $[K]_e$ et des vecteurs $\{ F \}_e$.

La règle d'assemblage que nous exposons est une règle simple et efficace, dans laquelle le risque d'erreur par introduction est minimisé, la seule contrainte étant le sens de parcours, car il est très important de choisir un sens de parcours pour la numérotation des noeuds et des éléments.

On adoptera une numérotation par étage, de gauche à droite.

Suivant l'algorithme adopté à chaque fois pour la résolution du système une méthode d'assemblage adapté sera présenté (voir chap. VIII).

* Prise en compte des conditions aux limites .

**VII ORGANISATION GENERALE D'UN PROGRAMME
PAR ELEMENT FINI**

La prise en compte des conditions aux frontières peut se faire de plusieurs manières.

1- Méthode du terme diagonal dominant :

La matrice [K] est assemblée sans tenir compte des conditions aux limites, puis chaque relation $U_i = \bar{U}_i$ est introduite en remplaçant

- K_{11} par $K_{11} + \alpha$; α étant un très grand nombre par rapport à tous les K_{1j} .
- F_1 par $\alpha \cdot U_1$.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{11} & \dots & K_{11} + \alpha & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \bar{U}_1 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \alpha U_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

L'équation de la i^{eme} ligne s'écrit :

$$\alpha \cdot U_i + \left[\sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot U_j \right] = \alpha \cdot \bar{U}_i$$

et qui admet une solution approchée : $U_i \approx \bar{U}_i$

$$\alpha \cdot \bar{U}_i \gg \sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot U_j$$

cette méthode est simple à programmer (car il suffit de remplacer ou de

**VII ORGANISATION GENERALE D'UN PROGRAMME
PAR ELEMENT FINI**

changer les deux termes K_{ii} et F_i), mais peut poser des problèmes numériques quand la matrice de rigidité $[K]$ est mal conditionné, et lorsque certaines composantes du vecteur $\{ U \}$ sont grandes.

2- Méthode du terme unité sur la diagonale :

Pour chaque déplacement imposé $U_i = \bar{U}_i$, on modifie le vecteur $\{ F \}$ et la matrice $[K]$ de la manière suivante :

$$K_{ij} = K_{ji} = 0$$

$$F_j = F_j - K_{ji} \cdot \bar{U}_i$$

$$K_{ii} = 1$$

$$F_i = U_i$$

pour $j=1,n$ et $j \neq i$

pour $j=1,n$ et $j \neq i$

Le système devient donc :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & -K_{1,-1} & 0 & K_{1,1+1} & \dots & -K_{1n} \\ | & & | & & | & & | \\ K_{i-1,1} & \dots & -K_{i-1,1-1} & 0 & K_{i-1,i+1} & \dots & -K_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ K_{i+1,1} & \dots & -K_{i+1,i-1} & 0 & K_{i+1,i+1} & \dots & -K_{i+1,n} \\ | & & | & & | & & | \\ K_{n,1} & \dots & -K_{n,i-1} & 0 & K_{n,i+1} & \dots & -K_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ | \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ | \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - K_{1i} \cdot U_i \\ | \\ F_{i-1} - K_{i-1,i} U_i \\ U_i \\ F_{i+1} - K_{i+1,i} U_i \\ | \\ F_n - K_{ni} \cdot U_i \end{bmatrix}$$

La programmation de cette méthode est délicate, mais ne pose pas les

**VII ORGANISATION GENERALE D'UN PROGRAMME
PAR ELEMENT FINI**

problèmes numériques de la précédente.

3- Méthode de suppression des équations :

Elle consiste à restructurer la matrice [K] de manière à supprimer les équations correspondant aux degrés de liberté imposés U_i .

Cette méthode a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du système, et par conséquent elle réduit l'espace mémoire au stockage de la matrice.

La technique de restructuration de [K], { U } et { F } correspondant à $U_i = \bar{U}_i$, consiste en la suppression de la ligne (i) et de la colonne (i).

VII-2-3 Résolution du système [K] { U } = { F }

* Subroutine de résolution

permet la résolution du système { F } = [K] { U }, { F } et [K] étant obtenus après l'assemblage et l'application des conditions aux limites.

Pour notre cas, on a utilisé plusieurs algorithmes de résolution afin de pouvoir faire une comparaison du temps de calcul et du nombre d'opérations à effectuer. Ces algorithmes seront développés dans le chapitre suivant .

VII-2-4, Calcul des contraintes .

**VII ORGANISATION GENERALE D'UN PROGRAMME
PAR ELEMENT FINI**

* Subroutine MATRCONT :

Ce sous-programme est utilisé pour le calcul de la matrice de contraintes [H] donnée explicitement en fonction des caractéristiques de la plaque.

* Subroutine CONTE :

Une fois que les déplacements sont déterminés et la matrice [H] calculée, ce sous-programme permet de trouver les contraintes, pour chaque élément.

CHAPITRE

HUIT

VIII) TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE.

VIII-1) METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES .

Ce chapitre est consacré aux méthodes permettant la résolution du système des équations d'équilibre :

$$K U = F^{(i)} \quad i = 1 \dots N_p$$

avec N_p : nombre de cas de charges.

Nous considérons que l'on a préalablement éliminé les d.d.l. dépendants et pris en compte les conditions de déplacements imposés.

Le système des équations d'équilibre sera donc généralement défini positif .

Un caractère semi-défini positif correspondrait soit à l'existence de modes rigides ou de mécanismes, soit à la prise en compte de relations de dépendance linéaire par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Par ailleurs, l'ordre des systèmes linéaires correspondant aux modèles finis, est généralement élevé pour les structures complexes. Le coût de la résolution numérique de ces systèmes d'équations est une partie significative du coût global d'analyse.

Ainsi, les méthodes de résolution utilisées doivent être adaptées à ces types de problèmes en tirant profit de la symétrie des matrices de rigidité et généralement de leur faible densité de peuplement. En outre, de telles méthodes doivent permettre la résolution la plus économique possible avec de nombreux cas de charge. Enfin, mentionnons que l'importance de la résolution des systèmes linéaires dépasse le cadre de l'analyse statique. En effet, la résolution de problèmes dynamiques ou non-linéaires peut se ramener à une succession de résolutions de systèmes linéaires.

VIII-1-1) Classification des méthodes de résolution

Les méthodes de résolution en analyse statique peuvent se classer en :

Méthodes itératives

- méthode de Gauss-Seidel,
- méthode de relaxation (relaxation par blocs, sur-relaxation),
- minimisation de l'énergie potentielle totale par la méthode des gradients conjugués.

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

Méthodes directes

- méthode d'élimination de Gauss et ses variantes (factorisation de Crout),
- méthode de factorisation de Cholesky.

Les qualités requises pour une méthode de résolution utilisée dans un logiciel d'analyse des structures sont les suivantes :

* Performance : ces méthodes doivent conduire à un coût minimal pour une précision donnée en utilisant au mieux les ressources (mémoire centrale périphérique, ...) de l'ordinateur. Notons qu'il est très important de pouvoir connaître à l'avance le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires pour la résolution d'un système.

* Fiabilité : ces méthodes doivent permettre la détection des singularités ou de situation de mauvais conditionnement. Il est en outre souhaitable qu'elles permettent une évaluation de la précision obtenue sur la solution.

Certaines méthodes mentionnées précédemment peuvent être très perfor-

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

mantes pour des classes spécifiques de problèmes mais présentant des performances médiocres dans d'autres cas. Ces méthodes ne sont généralement pas utilisées en analyse de structures o l'on peut avoir à résoudre une grande variété de problèmes. La méthode utilisée ne doit donc pas être optimisée pour un type spécifique de problèmes mais plutôt avoir les meilleures qualités de performance et de fiabilité pour une vaste gamme d'applications.

Parmi les méthodes itératives les méthodes de relaxation (relaxation par blocs. ou sur-relaxation) peuvent pour certains types de problèmes, présenter d'excellentes propriétés de convergence. Cependant, il n'en est pas ainsi pour une grande variété des problèmes que l'on peut être amené à résoudre en analyse des structures et pour certains problèmes il est pratiquement impossible de prévoir le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. Pour ces raisons, ces méthodes ne sont pratiquement pas utilisées dans les logociles d'analyse de structures. La seule des méthodes itératives pouvant présenter quelque intérêt en analyse des structures est la minimisa-

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

tion de l'énergie potentielle totale des gradients conjugués qui converge théoriquement en N itérations pour un système d'ordre N et, en pratique, conduit à une précision convenable pour une fraction seulement de ce nombre d'itérations. Les avantages de cette méthode tiennent, d'une part à sa simplicité de mise en oeuvre et d'autre part, au fait qu'elle ne nécessite qu'un minimum de mémoire car elle ne requiert que cinq vecteurs de travail en mémoire centrale; de plus, elle ne nécessite ni en mémoire centrale, ni en mémoire auxiliaire, la matrice de rigidité assemblée sous forme explicite. L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans ses performances moindres par rapport aux méthodes directes de résolution bien adaptées et sa relative inaptitude à traiter des problèmes avec des cas de charge multiples.

Les méthodes directes de résolution en analyse statique sont basées soit sur l'algorithme d'élimination de Gauss ou ses variantes (factorisation de Crout) ou sur l'algorithme de factorisation de Cholesky. Ces méthodes ont en

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

commun une excellente fiabilité; elles permettent en particulier la détection des singularités. Par ailleurs, elles sont particulièrement bien adaptées à la résolution de problèmes avec des cas de charge multiples.

Enfin, leur implantation dans les logiciels d'analyse de structures peut être adaptée aux problèmes traités (prise en compte du peuplement faible des matrices de rigidité) en utilisant ces techniques particulières de manipulation des grandes matrices (résolution sur matrices bandes, ou avec bande variable, méthode frontale, etc ...).

Ces techniques de gestion de données plus ou moins élaborées permettent aujourd'hui la résolution de problèmes de grande taille avec des performances supérieures à celles des méthodes itératives dans la majorité des cas tout en utilisant au mieux les ressources de l'ordinateur disponible (encombrement mémoire centrale, entrées-sortie).

VIII-2) Méthode de factorisation de Cholesky

**VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE**

VIII-2-1) Assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur chargement.

Subroutine ASSEMBLAGE

Comme l'opération de localisation exige l'introduction des conditions aux frontières et qu'elle affecte la valeur zéro aux degrés de libertés inactifs, seuls les degrés de liberté actifs sont numérotés, et il n'est donc plus nécessaire de passer par l'opération d'expansion des matrices de rigidités élémentaires pour effectuer l'assemblage.

L'opération d'assemblage se fera donc par un simple transfert de chaque terme k_{1j} des matrices de rigidités élémentaires en K_{1j} de la globale, ainsi que les termes f_1 en F_1 , grâce au vecteur localisation élémentaire $\{ G \}$ dont les composantes nulles sont automatiquement éliminées.

L'assemblage s'effectue comme suit :

Pour tout $G(i) \neq 0$ et pour $G(j) \neq 0$ faire :

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

$$\text{où} \left\| \begin{array}{l} K_{IJ} = K_{IJ} + k_{ij} \\ I = G(i) \quad i = 1, \text{DOF} \\ J = G(j) \quad j = 1, \text{DOF} \end{array} \right.$$

$$\text{et} \left\| \begin{array}{l} F_I = F_I + f_1 \\ I = G(i) \quad i = 1, \text{DOF} \end{array} \right.$$

En ce qui concerne la prise en compte des conditions aux limites, nous opterons pour la méthode de suppression des équations, pour les raisons suivantes :

a) Comme la technique d'assemblage choisit exige l'introduction de conditions aux limites avant même d'assembler la matrice de rigidité globale, et que seuls les degrés de liberté actifs sont pris en considération, cela favorise implicitement l'utilisation de celle-ci.

b) De plus, vu la dimension de la matrice de rigidité globale qui devient importante à partir d'un certain maillage, la manipulation de cette matrice se complique, la méthode choisie permet d'augmenter le champ d'action par suppre-

**VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE**

ssion d'équations inutilies.

VIII-2-2) Algorithme de Cholesky

La résolution du système des équations d'équilibre par la méthode de Cholesky peut s'organiser en trois phases de calcul :

- 1 Factorisation de K

D'après le théorème de Cholesky, il est possible de factoriser K sous la forme :

$$K = S^T S$$

où S est une matrice triangulaire supérieure. L'algorithme de factorisation de Cholesky est rappelé ci-après. On a :

$$\left. \begin{aligned} s_{pp} &= \sqrt{k_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} s_{kp}^2} \\ s_{pj} &= \frac{1}{s_{pp}} \left[k_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} s_{kp} s_{kj} \right], \text{ pour } j = p+1 \dots n \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{pour} \\ p=2 \dots n \\ \text{(VIII-1)} \end{array}$$

2- Résolution du système triangulaire

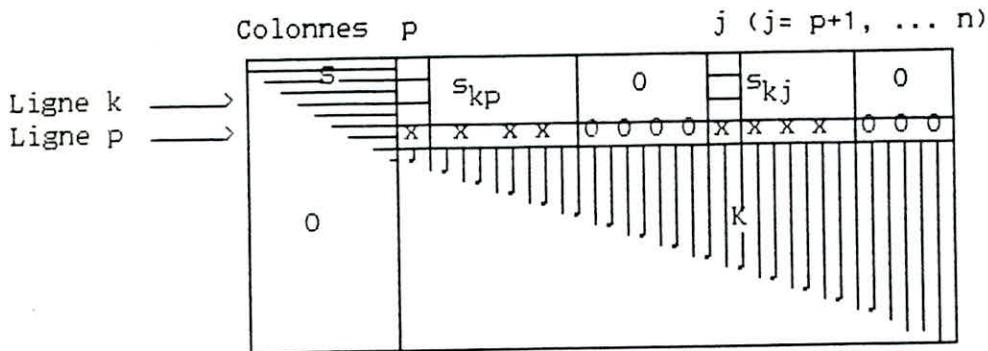
$$S^T Y = F \quad \text{(VIII-2)}$$

3- Résolution du système triangulaire

$$S q = Y \quad (\text{VIII-3})$$

De par son principe, la méthode de Cholesky est adaptée au cas des matrices symétriques. Dans la phase de factorisation, elle ne nécessite que la mémorisation d'une partie triangulaire (supérieure par exemple) de la matrice K. En cours de factorisation, on peut modifier successivement les termes affectés par les équations (VIII-1) de manière à obtenir en fin de factorisation la triangulaire supérieure S. Les opérations de factorisation correspondant à la colonne p sont illustrées en figure VIII-1. On peut y remarquer que la méthode de Cholesky peut être mise en oeuvre avec un système de gestion de données tenant compte de la structure creuse de la matrice K pour minimiser les opérations sur les termes nuls.

**VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE**



Opération de décomposition pour la colonne P :

1) Calcul de s_{pp} $s_{pp} = \sqrt{k_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} s_{kp}^2}$

2) Calcul de s_{pj} $s_{pj} = \frac{1}{s_{pp}} \left[k_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} s_{kp} s_{kj} \right]$
(j = P+1 ... n)



Termes de la matrice K qui ne sont pas encore affectés par la décomposition.



Termes de la matrice S n'intervenant pas dans cette phase de décomposition .

**VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE**

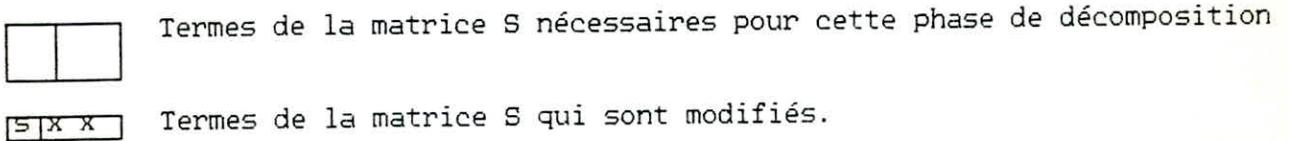


Figure VIII.1 : Mise en oeuvre de la méthode de Cholesky

VIII-5) MISE EN OEUVRE PRATIQUE DES METHODES DE RESOLUTION

Après le principe des méthodes directes de résolution, nous allons brièvement décrire les aspects pratiques de la mise en oeuvre de ces algorithmes dans les logiciels généraux d'analyse des structures.

VIII-5-1) Méthodes de mémorisation des grandes matrices

Il est évident qu'il y a intérêt à tirer profit des propriétés et de la structure des matrices de rigidité. En effet, ces matrices symétriques sont en général faiblement peuplées, avec de nombreux termes ou blocs au voisinage immédiat de la diagonale et avec quelques termes ou blocs additionnels hors diagonale. La structure d'une matrice de rigidité type est illustrée en figure VIII.2 . On remarque également en figure VIII.2, que la décomposition (Gauss ou Cholesky) de cette matrice fait apparaître quelques termes non nuls additionnels mais n'en change pas fondamentalement la structure initiale. Pour mémoriser ces matrices, les principales structures de données (fig.VIII.2

tire partie de la topologie des modèles d'éléments finis en combinant la phase d'assemblage des éléments et celle d'élimination.

Dans ce qui suit il ne sera développé que le chéma de mémorisation bande.

VIII.5.2 METHODES DE RESOLUTION POUR MATRICES BANDES

La structure de données la plus simple pour la mémorisation des matrices de rigidité consiste à les considérer comme des matrices bandes. Dans ce cas, on considère que les termes de rigidité extérieurs à la bande sont nuls :

$$k_{ij} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} j - i > b \\ i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots n \end{array} \right.$$

avec $(b+1) \ll n$ demi-largeur de bande.

En raison de la symétrie de K , on ne mémorise que la partie triangulaire supérieure ou inférieure, l'encombrement mémoire correspondant est $(b+1)(n-b/2)$. La figure VIII.3 présente un exemple typique de mémorisation sous forme bande. Notons sur cet exemple que ce schéma de mémorisation peut être très pénalisant quant à l'espace mémoire requis et aux nombres d'opérations arithmétiques. On voit également que l'élimination n'altère pas la forme bande de la matrice.

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

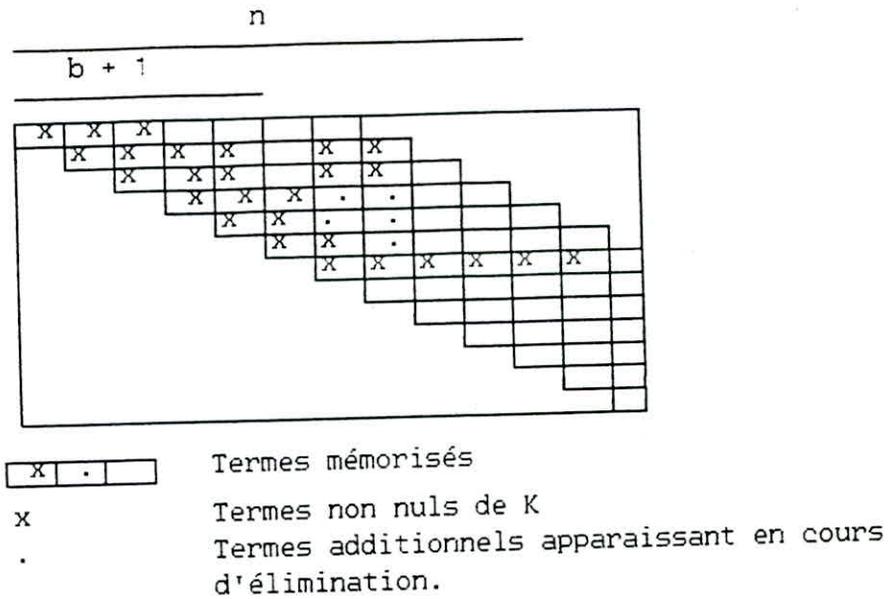


Figure VIII.3 :

Mémorisation d'une matrice de rigidité sous forme bande.

L'implantation la plus fréquente des méthodes de Gauss ou de Cholesky dans le cas de mémorisation bande est illustrée en figure VIII.10 . Cette implantation correspond à une organisation séquentielle des calculs ainsi qu'on peut le voir ci-après.

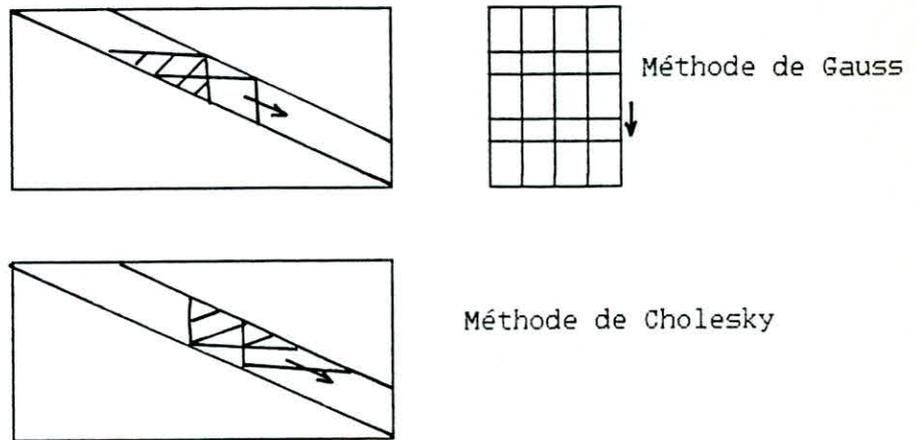


Figure VIII.4 :

Applications des méthodes de Gauss et Cholesky aux matrices bandes symétriques

En ce qui concerne l'algorithme de Gauss (subroutine GB)

On remarque en figure VIII.4, que chaque phase d'élimination ne requiert en mémoire centrale que la partie triangulaire supérieure (dimension $\frac{1}{2} (b+1)^2$) de K correspondant à la zone hachurée et éventuellement les parties correspondantes des vecteurs second-membre si les opérations d'élimination sont effectuées simultanément sur K et sur F . Après avoir effectué

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

L'élimination correspondant à une ligne donnée, on passe à la ligne suivante en recréant en mémoire centrale la partie triangulaire requise par transfert de la mémoire centrale à la mémoire périphérique de la ligne de K déjà décomposée n'intervenant plus et par transfert de la mémoire périphériques en mémoire centrale d'une nouvelle colonne de K. On procède ainsi jusqu'à triangularisation complète de K .

En ce qui concerne l'algorithme de Cholesky (Subroutine CB)

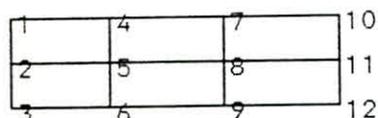
Chaque opération de factorisation correspondant à une ligne donnée ne requiert en mémoire centrale que la partie triangulaire supérieure de K de dimension $1/2 (b+1)^2$ correspondant à la zone hachurée. Après avoir effectué cette opération, on passe à la ligne suivante en recréant en mémoire centrale la nouvelle partie triangulaire requise par transfert séquentiel de lignes et colonnes entre mémoire centrale et mémoire périphérique et vice-versa.

L'inconvénient majeur du schéma de mémorisation sous forme bande réside

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

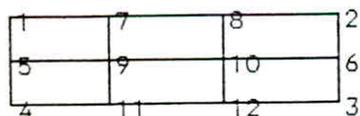
dans le fait que la largeur de bande dépend de l'ordre dans lequel les équations sont traitées et donc de la numérotation des noeuds du modèle aux éléments finis. La figure VIII.5 montre sur un maillage bidimensionnel très

simple que l'on peut choisir une numérotation des noeuds qui minimise la largeur de bande.



1	x	x		x	x							
2	x	x	x	x	x	x						
3		x	x		x	x						
4	x	x		x	x		x	x				
5	x	x	x	x	x	x	x	x	x			
6		x	x		x	x		x	x			
7				x	x		x	x		x	x	
8				x	x	x	x	x	x	x	x	x
9					x	x		x	x		x	x
10							x	x		x	x	
11								x	x	x	x	x
12									x	x		x

(a) NUMEROTATION OPTIMALE



10

1	x				x	x	x					
2		x				x		x		x		
3			x			x				x	x	
4				x	x				x		x	
5	x			x	x		x		x	x	x	
6		x	x			x		x		x	x	x
7	x				x		x	x	x	x		
8		x				x	x	x	x	x		
9	x			x	x		x	x	x	x	x	x
10						x	x	x	x	x	x	x
11					x	x			x	x	x	x
12						x			x	x	x	x

(b) MAUVAISE NUMEROTATION

8

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

Influence de la numérotation sur la largeur de bande.

On voit également sur cet exemple qu'une mauvaise numérotation peut avoir de graves conséquences sur la largeur de bande et donc sur l'efficacité de la résolution. Dans notre programme, la demi-largeur de bande est déterminée dans la subroutine WIDTH comme suit :

$$L = N * (D + 1)$$

D : plus grande différence des numéros des noeuds des éléments

N : nombre de degré de liberté par noeud

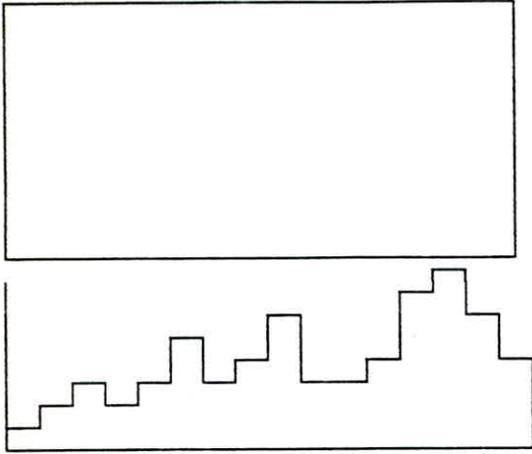
L : demi-largeur de bande.

Que ce soit pour la méthode de Gauss bande ou de Cholesky bande, pour la prise en compte des conditions aux limites (subroutine bound) on a utilisé la méthode du terme diagonale dominant (voir chapitre précédent).

VIII.3.3) Amélioration de la mémorisation bande

Cette méthode est généralement appelée "skyline" par les anglo-saxons.

Il existe des extensions de la méthode de mémorisation bande qui présentent des avantages certains par rapport à cette dernière mais au détriment de la simplicité de mise en oeuvre. Ces méthodes nécessitent des systèmes de gestion des données beaucoup plus sophistiqués.



SCHEMA DE MEMORISATION AVEC BANDE VARIABLE
Dans cette méthode qui est illustrée en figure VIII.12, la matrice est mémorisée colonne par colonne en faisant varier la demi-largeur de bande de façon à limiter la mémorisation au profil de la matrice. On notera que la partie de la matrice qui est mémorisée correspond aux termes non nuls de la triangularisation supérieure U après décomposition. Cette méthode peut être associée à un algorithme de renumérotation pour minimiser les termes non nuls additionnels, elle conduit dans ce cas à un nombre minimal du nombre d'opérations arithmétiques

Variation de largeur de bande

VIII-4) METHODE FRONTALE

La méthode frontale a été introduite par IRONS [VIII.7]. Dans sa forme originale, cette méthode permet d'éviter de façon élégante les opérations sur les zéros à l'intérieur de la bande de la matrice. Le principe de base de la méthode frontale découle de l'observation déjà faite (cf.VIII.3.3, fig.VIII.6) que n'interviennent dans l'élimination relative à une équation donnée que les termes de la matrice correspondant aux colonnes actives de cette équation. Ainsi, on peut rassembler en mémoire centrale les termes qui vont être

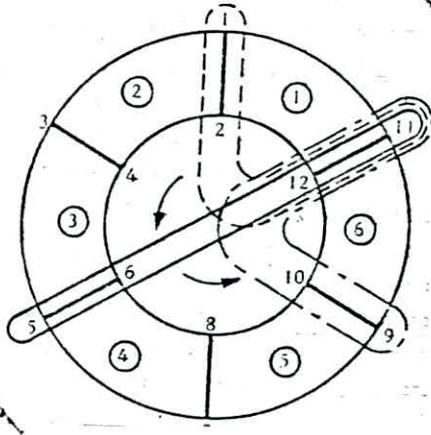
**VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE**

modifiés dans une sous-matrice triangulaire, dont la dimension est souvent très inférieure à la demi-largeur de bande. Cette méthode convient donc particulièrement aux matrices faiblement peuplées mais à largeur de bande importante que l'on obtient avec des maillages bidimensionnels de domaines multiplement connexes. La méthode est illustrée en figure VIII.7 par un exemple simple. A chaque élimination relative à un d.d.l., l'ensemble des d.d.l. correspondant aux colonnes qui vont être modifiées suivant l'équation

$$K U = F$$

(colonnes "actives") constituent le front. La largeur de front évolue de l'élimination en fonction de la topologie de la structure. On remarque, en effet, en figure VIII.7 comment la "front" évolue dans la structure pendant l'élimination. Irons a tiré de ces considérations topologiques sur l'élimination de Gauss en contrôlant l'ordre d'élimination des équations non pas d'après la numérotation des noeuds mais selon la séquence d'assemblage des éléments finis qui peut être choisie en fonction de la topologie de la structure de manière à minimiser la largeur maximale de front. Ainsi, l'encombrement maximal requis en mémoire centrale correspond à la dimension est la matrice triangulaire dont la dimension est la largeur maximale de front.

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE



d.d.l.

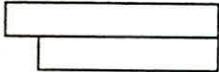
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	x	x	x	x								x	x
2		x	x	x									x
3			x	x	x	x							.
4				x	x	x							.
5					x	x	x						.
6						x	x	x					.
7							x	x	x				.
8								x	x	x			.
9									x	x	x		.
10										x	x	x	.
11											x	x	.
12												x	.

0

SYM.



Front d'équations à divers stades d'élimination



Termes intervenant dans l'élimination de l'équation n°5
ordre d'assemblage.

1 2 3

Remarque : On considère implicitement dans cet exemple qu'il y a 1 d.d.l. par noeud

Figure VIII.7 :

Méthode frontale d'élimination (IRONS).

On voit immédiatement que l'on peut effectuer séquentiellement l'élimination des d.d.l. pendant la phase d'assemblage sans avoir à construire expli-

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

citement la matrice de rigidité de la structure complète. Dans ce cas, après l'assemblage de chaque nouvel élément, on élimine les d.d.l. qui n'appartiennent pas au front, c'est à dire qui n'interviennent pas ultérieurement dans l'assemblage avec de nombreux éléments.

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

VIII-5) Présentation des résultats.

Plaque simplement appuyée sur le pourtour



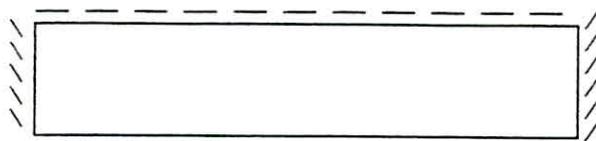
* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)			
		C	CB	GB	F
2 X 2	0.412270E-02	25	68	75	150
4 X 4	0.40633E-02	58	124	122	436
8 X 8	0.406253E-02	485	387	407	1732
10 X 10	0.406242E-02	1494	607	704	2568
12 X 12	0.406239E-02	4341	1011	1165	3694
SOL. EXACTE	0.4062E-02				

a / b = 1 Maillage	Contraintes $MX = MY (qb^2)$ $x=a/2; y=b/2$
2 x 2	0.05720
4 x 4	0.04922
8 x 8	0.04816
10 x 10	0.04806
12 x 12	0.04800
SOL. EXACTE	0.04790

**VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE**

Plaque appuyée sur 2 côtés opposés
encastrée sur les 2 autres.



* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)			
		C	CB	GB	F
2 X 2	0.194340E-02	21	82	73	155
4 X 4	0.191674E-02	50	115	135	415
8 X 8	0.191708E-02	382	392	437	1677
10 X 10	0.191711E-02	1211	666	746	2481
12 X 12	0.191713E-02	3499	1064	1211	3589
SOL. EXACTE	0.19200E-02				

a / b = 1 Maillage	Contraintes $MX (qa^2)$ $x=a/2; y=b/2$	$MY (qa^2)$ $x=a/2; y=b/2$
2 x 2	0.05228	0.03280
4 x 4	0.03668	0.02545
8 x 8	0.03394	0.02456
10 x 10	0.03369	0.02449
12 x 12	0.03341	0.02441
SOL. EXACTE	0.03320	0.02440

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

Plaque appuyée sur 2 côtés opposés
libre sur les 2 autres.



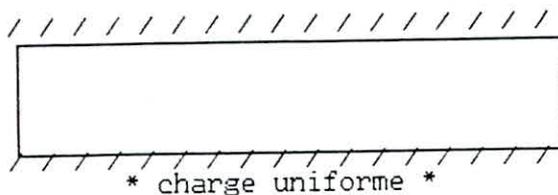
* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)			
		C	CB	GB	F
2 X 2	0.130136E-01	28	64	81	159
4 X 4	0.130228E-01	68	118	131	433
8 X 8	0.130212E-01	600	363	425	1658
10 X 10	0.130210E-01	1817	616	710	2489
12 X 12	0.120209E-01	4481	1034	1182	3555
SOL. EXACTE	0.130950-01				

a / b = 1 Maillage	Contraintes	
	$MX (qa^2)$ $x=a/2; y=b/2$	$MY (qa^2)$ $x=a/2; y=b/2$
2 x 2	0.03360	0.125000
4 x 4	0.03081	0.122720
8 x 8	0.02807	0.122449
10 x 10	0.02752	0.122480
12 x 12	0.02748	0.122540
SOL. EXACTE	0.02710	0.122540

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

Plaque encadrée sur 2 côtés opposés
libre sur les 2 autres.

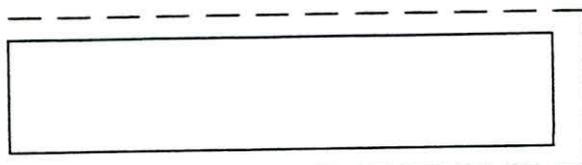


a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)			
		C	CB	GB	F
2 X 2	0.260417E-02	25	72	81	146
4 X 4	0.260312E-02	45	126	134	424
8 X 8	0.260405E-02	409	399	451	1746
10 X 10	0.264120E-02	1351	674	746	2735
12 X 12	0.260414E-02	3783	1092	1266	3815
SOL. EXACTE	0.25920E-02				

a / b = 1 Maillage	Contraintes $MX (qa^2)$ $x=a/2; y=b/2$	$MY (qa^2)$ $x=a/2; y=b/2$
2 x 2	0.042052	0.011715
4 x 4	0.042013	0.011689
8 x 8	0.042044	0.011697
10 x 10	0.042049	0.011704
12 x 12	0.042050	0.011712
SOL. EXACTE	0.041000	0.011000

VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

Palque appuyée sur 3 côtés
libre sur le dernier



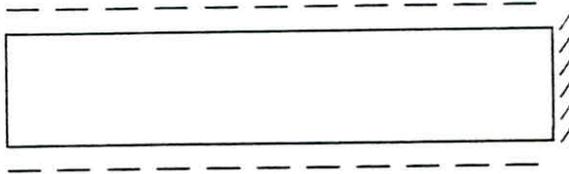
* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)			
		C	CB	GB	F
4 X 4	0.15000E-01	78	108	135	398
8 X 8	0.13245E-01	801	335	394	1564
10 X 10	0.12830E-01	2576	559	672	2424
12 X 12	0.1162E-01	3486	891	1077	3469
SOL. EXACTE	0.1158E-01				

a / b = 1 Maillage	Contraintes $MX (qa^2)$ $x=a/2; y=b/2$	$MY (qa^2)$ $x=a/2; y=b/2$
2 x 2	0.07930	0.047060
4 x 4	0.07010	0.042560
8 x 8	0.06833	0.040650
10 x 10	0.06830	0.038730
12 x 12	0.06893	0.037320
SOL. EXACTE	0.06900	0.036000

**VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE**

Plaque appuyée sur 2 côtés opposés
l'un encasturé, l'autre étant libre.



* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)			
		C	CB	GB	F
4 X 4	0.90660E-02	72	128	145	416
8 X 8	0.90660E-02	615	366	452	1584
10 X 10	0.93095E-02	1016	642	680	2525
12 X 12	0.10905E-02	1598	999	1176	3547
SOL. EXACTE	0.113E-01				

a / b = 1 Maillage	Contraintes $MX (qa^2)$ $x=a/2; y=b/2$	$MY (qa^2)$ $x=a/2; y=b/2$
2 x 2	0.10430	-0.08616
4 x 4	0.09177	-0.01065
8 x 8	0.08890	-0.11440
10 x 10	0.08856	-0.11550
12 x 12	0.08856	-0.11548
SOL. EXACTE	0.09720	-0.11900

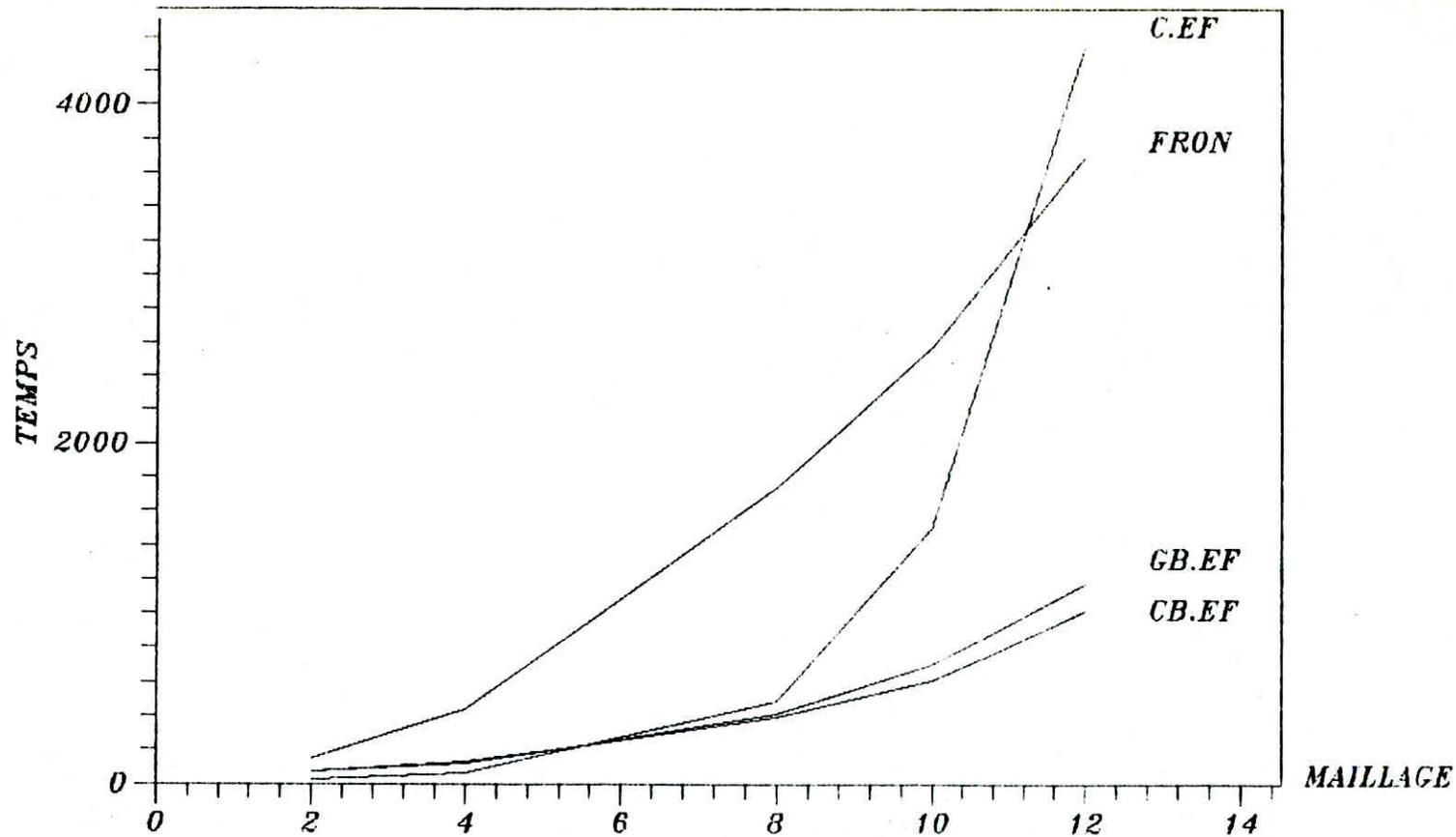
VIII TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE
RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

VIII-7) Interprétation des résultats

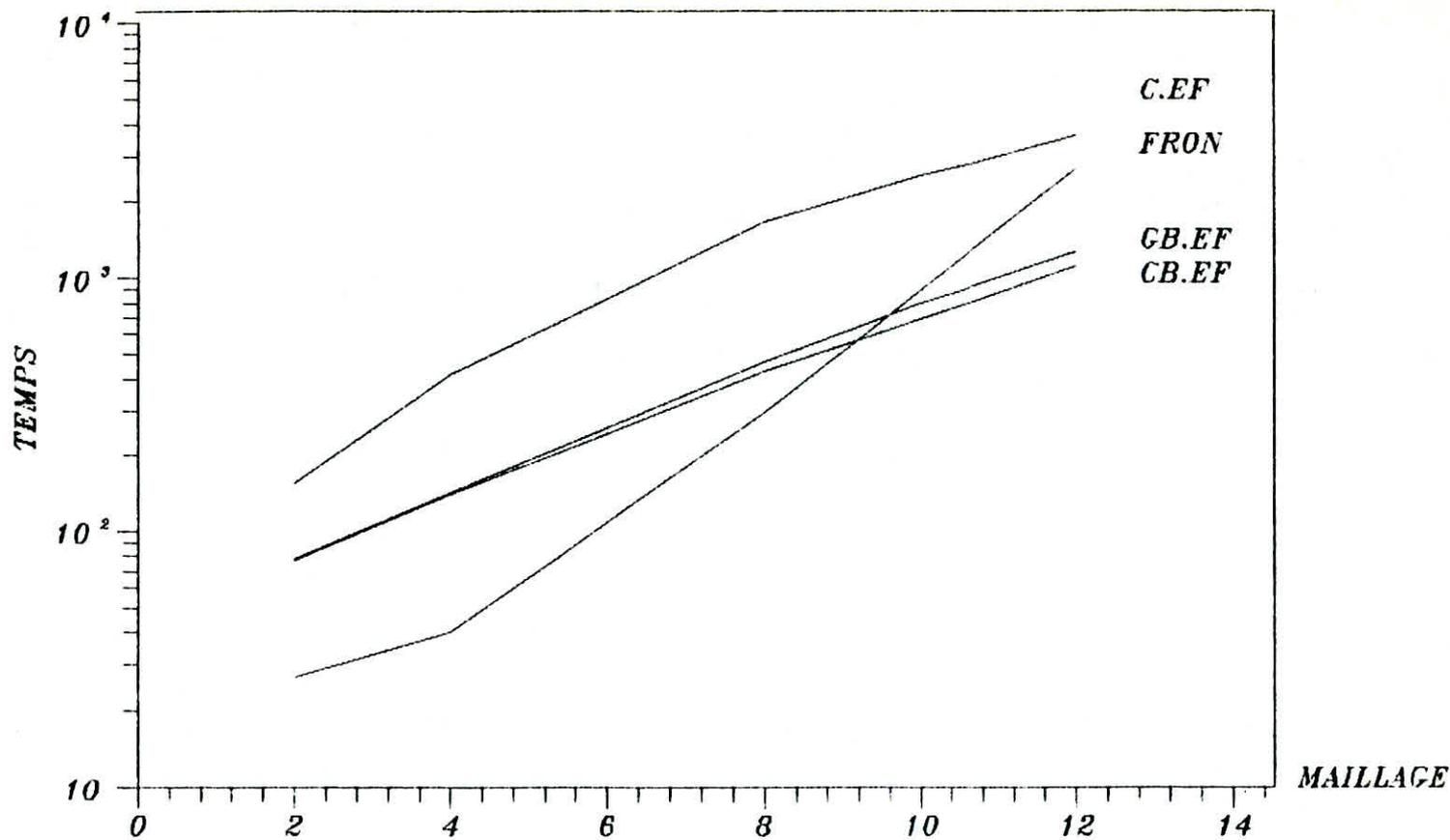
Pour illustrer les résultats précédents précédents, la plaque appuyée sur le pourtour, les figures (VIII-a) et (VIII-b) montrent que pour la M-E-F et pour des problèmes de petites dimensions, les algorithmes utilisant le stockage bande (Cholesky bande et Gauss bande), sont plus performants que l'algorithme utilisant la symétrie uniquement (Cholesky), ou que la méthode frontale. La contre performance de cette dernière réside dans le fait que l'algorithme est complexe, et nécessite donc un temps d'exécution important. Nous dirons que cette méthode pourrait être efficace pour des problèmes industriels.

Nous remarquons aussi, en figures (VIII-c) et (VIII-d), que pour de petits maillages, les algorithmes de Cholesky bande et Gauss bande, ont sensiblement le même temps, alors que pour de grands maillages, l'algorithme de Cholesky bande a un temps moindre.

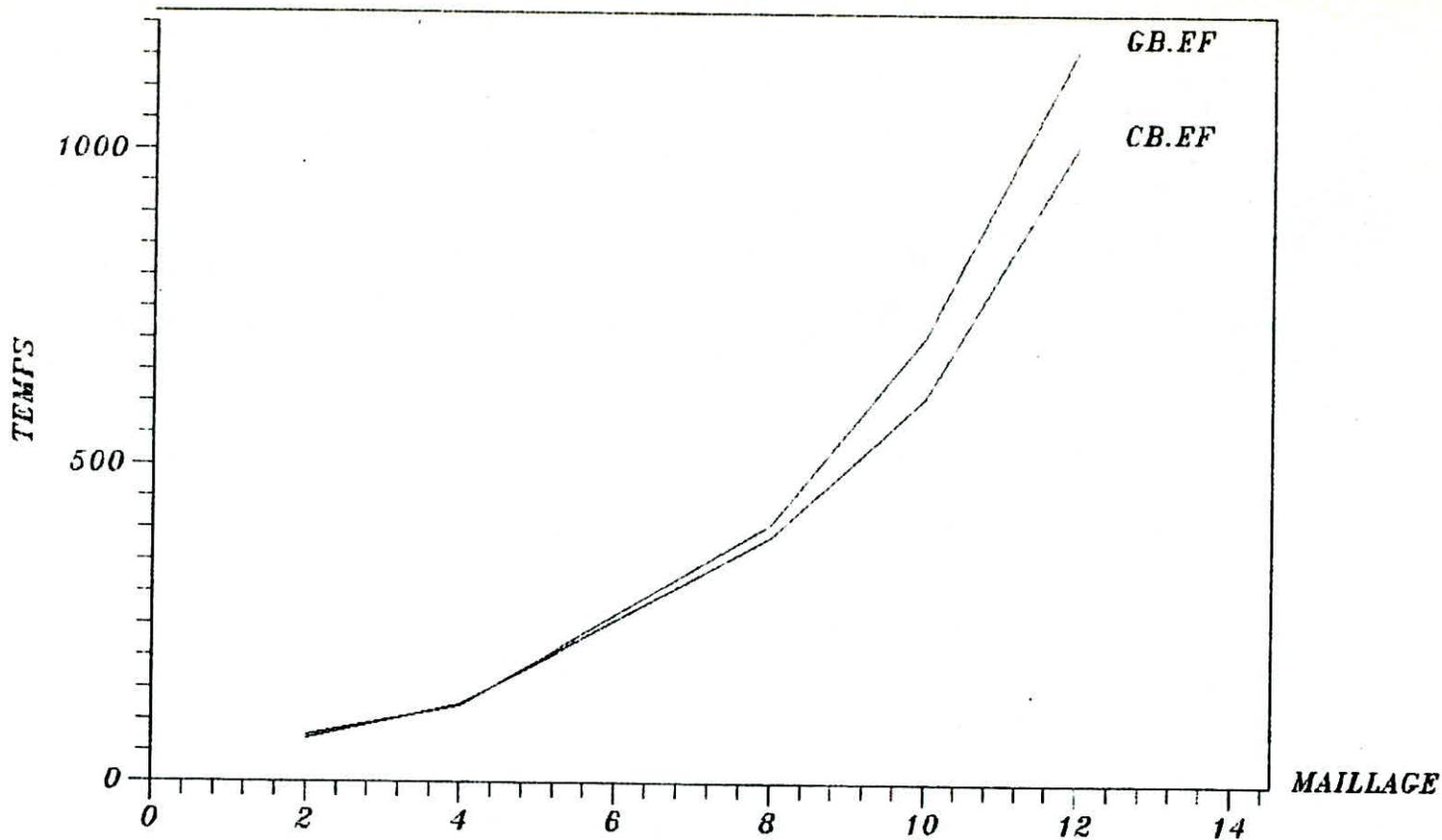
Des conclusions similaires peuvent être tirer pour la plaque encastrée sur le pourtour (voir figures 11 et 12 ainsi que les figures 13 et 14 en annexe).



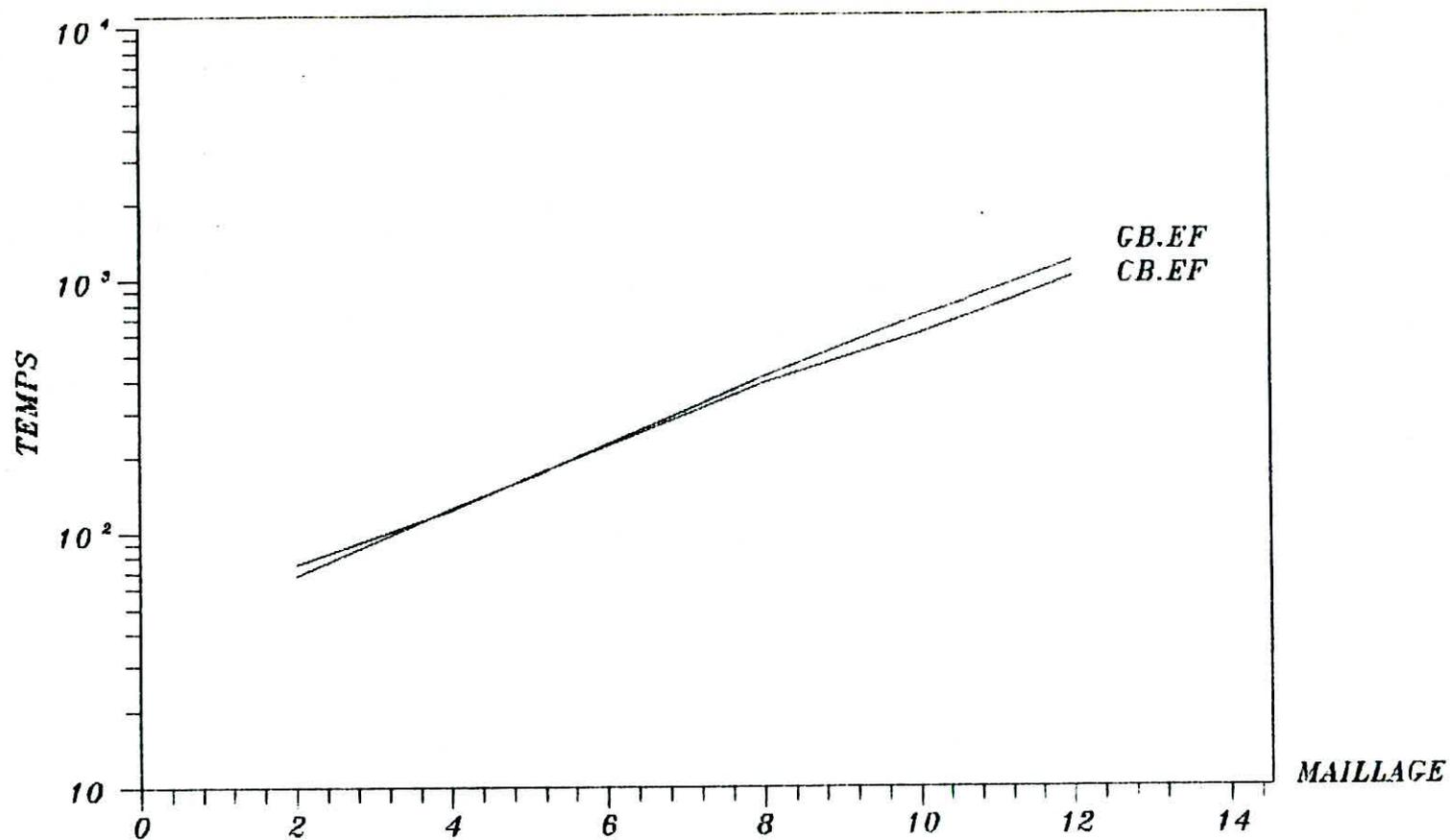
Fig(VIII-a) : Plaque simplement appuyee
sur le pourtour
(C.EF-FR-GB.EF-CB.EF)



*Fig(VIII=b) : Plaque simplement appuyee
sur le pourtour
(C.EF-FR-GB.EF-CB.EF)*



*Fig(VIII=c): Plaque simplement appuyée
sur le pourtour
(CB.EF-GB.EF)*



Fig(VIII=d): Plaque simplement appuyée
sur le pourtour
(CB.EF-GB.EF)

CHAPITRE

NEUF

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

**IX METODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PLAQUES**

IX-1) INTRODUCTION

De multiples problèmes complexes de plaques ont été résolus avec succès grâce à la méthode des éléments finis, cette dernière nécessite la division du domaine en éléments dans les deux directions, les conditions aux limites ne sont prises en compte qu'après avoir assemblé la matrice de rigidité globale; cependant pour les plaques rectangulaires avec deux bords opposés simplement appuyée ou encastrée, il est possible d'utiliser des fonctions qui, à priori, satisfont les conditions aux limites.

La présente approche a un avantage considérable par rapport à la M-E-F pour une certaine classe de problèmes. En effet le nombre de degrés de liberté le long d'une ligne nodale est égale à deux (une déflexion et une rotation) ce qui conduit à une matrice de rigidité grandement réduite par rapport à celle de la M-E-F (qui nécessite trois, voir même quatre degrés de liberté par noeud).

IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES

La philosophie de la méthode des bandes finies est semblable à celle de la méthode de Kantorovich qui consiste à réduire les équations différentielles partielles en équations différentielles normales en adoptant des fonctions continues qui satisfont les conditions aux limites. Cette approche peut être appliquée à d'autres conditions d'appuis.

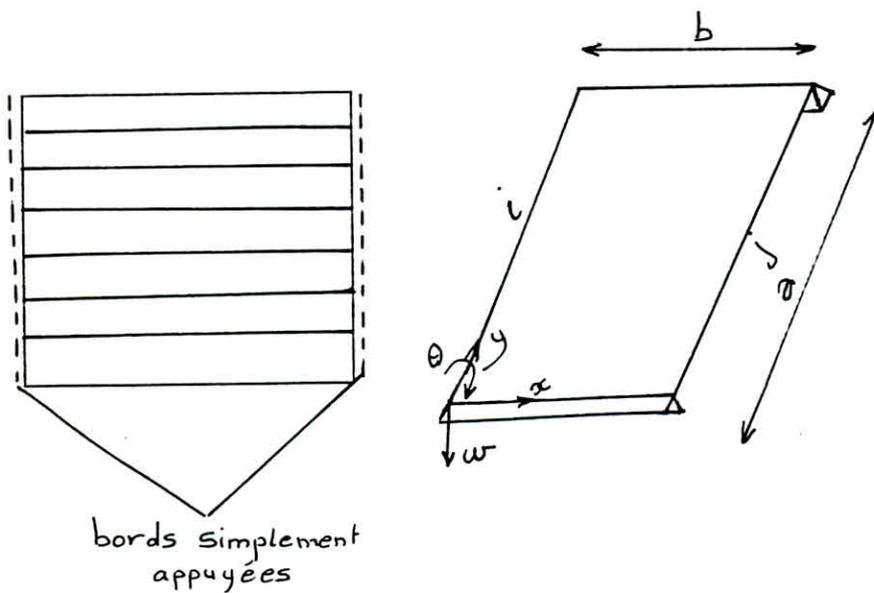


Fig IX-1 Schéma d'une bande type

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

IX-2) PROCEDURE

On choisit la fonction déplacement de la forme

$$W = \sum_{m=1}^r f(x) Y_m \quad (\text{IX-1})$$

où $f(x)$ est dite fonction poutre

Y_m sont les fonctions de base (de y seulement) satisfont les conditions aux limites.

Nous avons :

$$W = \sum \left[\left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} \right) W_{im} + \left(-x + \frac{2x^2}{b} - \frac{x^3}{b^2} \right) \bullet_{im} + \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} \right) W_{jm} + \left(\frac{x^2}{b} - \frac{x^3}{b^2} \right) \bullet_{jm} \right] Y_m \quad (\text{IX-2})$$

sous forme matricielle :

$$W = \sum_{m=1}^r [L]_m \{ D^* \}_m \quad (\text{IX-3})$$

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

$$\begin{aligned} \text{====>} \quad W &= [L] \{ D^* \} \\ \text{c.a.d.} \quad W &= \begin{bmatrix} [L]_1 & [L]_2 & \dots & [L]_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ D^* \}_1 \\ \{ D^* \}_2 \\ \vdots \\ \{ D^* \} \end{Bmatrix} \quad (\text{IX-4}) \end{aligned}$$

avec

$$[L]_m = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} \right) / \left(-x + \frac{2x^2}{b} - \frac{x^3}{b^2} \right) / \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} \right) / \\ \left(\frac{x^2}{b} - \frac{x^3}{b^2} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{IX-5})$$

et

$$\{ D^* \}_m = \begin{Bmatrix} W_{im} \\ \bullet_{im} \\ W_{jm} \\ \bullet_{jm} \end{Bmatrix}$$

où W_{im} , \bullet_{im} , W_{jm} et \bullet_{jm} sont les paramètres déplacement du $m^{\text{ième}}$ terme avec i et j indiquant les 2 bords de la bande.

Le déplacement le long des côtés i et j sont donnés par :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} W_i \\ \bullet_i \\ W_j \\ \bullet_j \end{Bmatrix} &= \sum_{m=1}^r Y_m \begin{Bmatrix} W_i \\ \bullet_i \\ W_j \\ \bullet_j \end{Bmatrix} = \left([I] Y_1, [I] Y_2, \dots, [I] Y_r \right) \begin{Bmatrix} \{ D^* \}_1 \\ \{ D^* \}_2 \\ \vdots \\ \{ D^* \}_r \end{Bmatrix} \\ &= [R] \{ D^* \} \quad (\text{IX-7}) \end{aligned}$$

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

Les courbures de la bande sont données par :

$$\begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [B] \{D^*\} = [[B]_1, [B]_2, \dots, [B]_r] \begin{Bmatrix} \{D^*\}_1 \\ \{D^*\}_2 \\ \vdots \\ \{D^*\}_r \end{Bmatrix} \quad (\text{IX-8})$$

$$\text{d'où } \{ \epsilon \} = \sum_{m=1}^r [B]_m \{D^*\}_m$$

ici les sous matrices $[B]_1, [B]_2$, etc sont obtenues en dérivant les fonctions déplacement en respectant les coordonnées appropriés x et y :

$$[B]_m = \quad (\text{IX-9})$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{6}{b^2} - \frac{12x}{b^3}\right) Y_m - \left(\frac{4}{b^2} + \frac{6x}{b^3}\right) Y_m & \left(\frac{12x}{b^3} - \frac{6}{b^2}\right) Y_m & \left(-\frac{2}{b} + \frac{x}{b^2}\right) Y_m \\ -\left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3}\right) Y_m' & \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right) Y_m' & -\left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3}\right) Y_m' & -\left(\frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b}\right) Y_m' \\ \left(\frac{12x}{b^2} + \frac{12x^2}{b^3}\right) Y_m' & \left(-2 - \frac{8x}{b} - \frac{6x^2}{b^2}\right) Y_m' & \left(\frac{12x}{b^3} - \frac{12x^2}{b^3}\right) Y_m' & \left(-\frac{6x^2}{b^2} - \frac{4x}{b}\right) Y_m' \end{bmatrix}$$

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

IX-2-1) Vecteur chargement élémentaire

Un chargement dans la direction z, d'intensité q par unité de longueur sur une ligne parallèle à l'axe y s'exprime comme :

$$q = q_1 Y_1 + q_2 Y_2 + \dots + q_r Y_r = \sum_{m=1}^r q_m Y_m \quad (\text{IX-10})$$

Le coefficient q_n peut être facilement obtenu, en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions de base Y_m .

Multipliant (1) par Y_n et intégrant entre 0 et 1, on obtient :

$$\int_0^1 q Y_n dy = q_1 \int_0^1 Y_1 Y_n dy + q_2 \int_0^1 Y_2 Y_n dy + \dots + q_n \int_0^1 Y_n^2 dy + \dots + q_r \int_0^1 Y_r Y_n dy \quad (\text{IX-11})$$

En utilisant l'orthogonalité des fonctions de base, on a :

$$\int_0^1 Y_m Y_n dy = 0 \quad \text{pour } m \neq n \quad (\text{IX-12})$$

alors l'équation 2 donne

$$q_n = \frac{\int_0^1 q Y_n dy}{\int_0^1 Y_n^2 dy} \quad (\text{IX-13})$$

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

a) Pour une charge uniformément distribué à partir de $y = c$ à $y = d$

$$q_n = \frac{\int_c^d q Y_n dy}{\int_0^1 Y_n^2 dy} \quad (\text{IX-14})$$

b) Pour une charge concentrée P à $y = c$

$$q_n = \frac{P Y_n (c)}{\int_0^1 Y_n^2 dy} \quad (\text{IX-15})$$

IX-2-2) MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE

Les distributions de force correspondantes aux déplacements le long des forces i et j peut être écrit comme :

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r Y_m \begin{Bmatrix} P_{im} \\ M_{im} \\ P_{jm} \\ M_{jm} \end{Bmatrix} = [[I]Y_1, [I]Y_2, \dots, [I]Y_r] \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \{P\}_2 \\ \vdots \\ \{P\}_r \end{Bmatrix} = [R][P] \quad (IX-16)$$

L'énergie potentielle totale de chaque bande est donnée par

$$U_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\rho} \int_0^b \left(-M_x \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} - M_y \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + 2 M_{xy} \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right) dx dy}_{(a)} - \underbrace{\int_0^{\rho} \int_0^b w^T q dx dy}_{(b)}$$

(a) montre l'énergie de contrainte de la bande.

(b) l'énergie potentiel de la charge distribué en surface.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\rho} \int_0^b (\epsilon)^T (\sigma) dx dy - \int_0^{\rho} \int_0^b w^T q dx dy \quad (IX-17)$$

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

$$\text{où } \{ \sigma \} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [d] \cdot \{ \epsilon \} = [d] [B] \{ D^* \} \quad (\text{IX-18})$$

d'où (IX-19)

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{ D^* \} [B]^T [d] [B] \{ D^* \} dx dy - \int_0^a \int_0^b \{ D^* \}^T [L] q dx dy$$

En appliquant le principe de l'énergie potentielle minimale totale, on a:

$$\left\{ \frac{\delta \sigma}{\delta \{ D^* \}} \right\} = \{ 0 \} \quad (\text{IX-20})$$

d'où

$$\left\{ \frac{\delta \sigma}{\delta \{ D^* \}} \right\} = \int_0^a \int_0^b [B]^T [d] [B] \{ D^* \} dx dy - \int_0^a \int_0^b [L]^T q dx dy$$

$$\text{or } [S^*] \{ D^* \} - \{ F_q \} = \{ 0 \} \quad (\text{IX-21})$$

$$\text{où } [S^*] = \int_0^a \int_0^b [B]^T [d] [B] dx dy \quad (\text{IX-22})$$

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

$$= \int_0^a \int_0^b [[B]_1 [B]_2 \dots [B]_r]^T [d] [[B]_1 [B]_2 \dots [B]_r] dx dy$$

$$= \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} [B]_1^T [d] [B]_1 & [B]_1^T [d] [B]_2 & \dots & [B]_1^T [d] [B]_r \\ [B]_2^T [d] [B]_1 & [B]_2^T [d] [B]_2 & \dots & [B]_2^T [d] [B]_r \\ [B]_r^T [d] [B]_1 & [B]_r^T [d] [B]_2 & \dots & [B]_r^T [d] [B]_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [S^*]_{11} & [S^*]_{12} & \dots & [S^*]_{1r} \\ \vdots & & & \\ [S^*]_{r1} & [S^*]_{r2} & \dots & [S^*]_{rr} \end{bmatrix} \quad (IX-23)$$

$$\text{avec } [S^*]_{mn} = \int_0^a \int_0^b [B]_m^T [d] [B]_n dx dy \quad (IX-24)$$

$$\text{et } (F_q) = \int_0^a \int_0^b [L]^T q dx dy \quad (IX-25)$$

$$= \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} [L]_1^T \\ [L]_2^T \\ \vdots \\ [L]_r^T \end{bmatrix} (q_1 Y_1 + q_2 Y_2 + \dots + q_r Y_r) dx dy \quad (IX-26)$$

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

Du fait de l'orthogonalité des fonctions Y et que $[L]^T$ dépend de y , on a :

$$\int_0^{\rho} Y_m Y_n = U \quad \text{pour } m \neq n$$

Donc :

$$\{ F_q \} = \int_0^{\rho} \int_0^b \begin{bmatrix} [L]_1^T q_1 Y_1 \\ [L]_2^T q_2 Y_2 \\ \vdots \\ [L]_r^T q_r Y_r \end{bmatrix} dx dy \quad (\text{IX-2})$$

$$\text{or } \{ F_q \} = \begin{bmatrix} \{ F_q \} \\ \{ F_q \} \\ \vdots \\ \{ F_q \} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \{ F_q \}_m = \int_0^{\rho} \int_0^b [L]_m^T q_m Y_m dx dy \quad (\text{IX-28})$$

IX-3) LES FONCTIONS DE BASE

La forme générale des fonctions de base est :

$$Y(y) = C_1 \sin \frac{\mu y}{l} + C_2 \cos \frac{\mu y}{l} + C_3 \operatorname{sh} \frac{\mu y}{l} + C_4 \operatorname{ch} \frac{\mu y}{l}$$

et elle satisfait l'équation différentielle suivante :

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

$$Y'''' = \frac{\mu}{4} Y \quad (IX-29)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 : sont des constantes déterminées par les conditions aux limites.

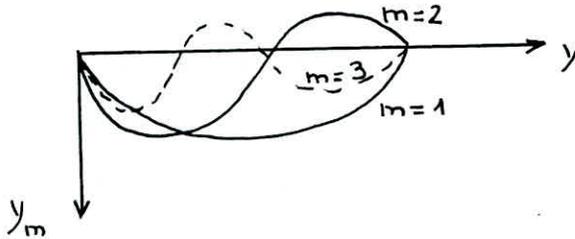
l : longueur de bande

μ : parametre.

Plaque simplement appuyée : $C_1 = 1$ et $C_2 = C_3 = C_4 = 0$

$$\implies Y_m(y) = \sin \frac{\mu_m y}{\rho} \quad (IX-30) \quad \mu_m = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, m\pi$$

diagramme de la fonction de base :



IX-4) BANDE SIMPLEMENT APPUYEE

Les intégrales intervenant dans les calculs sont:

$$\int_0^{\rho} Y_m Y_n dy, \quad \int_0^{\rho} Y_m' Y_n' dy, \quad \int_0^{\rho} Y_m Y_n' dy \quad \text{et} \quad \int_0^{\rho} Y_m Y_n'' dy$$

**IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES**

Les deux premières intégrales sont égales à 0 pour $m \neq n$ (ceci est dû à l'orthogonalité des fonctions)
 Nous allons montrer qu'il en est de même pour les 2 dernières.

$$Y_m = \sin \frac{m \pi y}{\rho} \quad ; \quad Y'_m = \frac{m \pi}{\rho} \cos \frac{m \pi y}{\rho}$$

$$Y'_m = - \left(\frac{m \pi}{\rho} \right)^2 \cdot \sin \frac{m \pi y}{\rho}$$

Nous avons $m \neq n$

$$\int_0^{\rho} Y'_m Y'_n dy = \left[\frac{m \cdot \pi}{\rho} \right] \left[\frac{n \cdot \pi}{\rho} \right] \int_0^{\rho} \cos \frac{m \cdot \pi \cdot y}{\rho} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot y}{\rho} dy = 0$$

$$\int_0^{\rho} Y'_m Y'_n dy = \frac{m^2 \cdot \pi^2}{2 \rho} \quad \text{pour } m = n$$

et pour $m \neq n$

$$\int_0^{\rho} Y_m Y'_n dy = - \frac{n^2 \cdot \pi^2}{\rho^2} \int_0^{\rho} \sin \frac{m \cdot \pi \cdot y}{\rho} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{\rho} dy = 0 \quad (\text{IX-31})$$

$$\int_0^{\rho} Y_m Y'_n dy = - \frac{m^2 \cdot \pi^2}{2 \rho} \quad \text{pour } m = n \quad (\text{IX-32})$$

Donc pour $m \neq n$ $[S^*]_{mn} = [b]$

L'équation s'écrit $[S^*]_{mn} \{ D^* \}_m - \{ F_q \}_m = \{ 0 \}$

IX METHODE DES ELEMENTS BANDES FINIES POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PALQUES

$$\begin{aligned} & [S^*]_{mn} \{ D^* \}_m - \{ F_q \}_m = \{ 0 \} \\ \text{où} \quad & [S^*]_m = [S^*]_{mn} \\ & \{ F^* \} = \{ F_q \}_m \end{aligned}$$

Le vecteur chargement s'écrit :

$$\{ F_q \} = \{ F^* \} = \frac{q m l}{2} \begin{bmatrix} b/2 \\ -b^2/12 \\ b/2 \\ b^2/12 \end{bmatrix}$$

CHAPITRE

DIX

X - ORGANISATION DU PROGRAMME PAR ELEMENTS BANDES FINIES

X-1) INTRODUCTION

La résolution par élément fini entraîne le calcul des matrices de rigidité de tous les éléments de la structure modélisée puis l'assemblage de la matrice de rigidité $[S]$ de toute la structure. On a vu que le vecteur charge $\{F\}_m$ était relié au vecteur déplacement $\{D\}_m$ par la relation :

$$\{F\} = [S]_m \{D\}_m$$

m : nombre d'harmonique,

$[S]$: matrice de rigidité global,

$\{F\}$: vecteur chargement global,

$\{D\}$: vecteur déplacement global.

Les résultats des différents termes obtenus sont alors additionnés pour donner la réponse finale.

X-2) PROGRAMMATION

On distingue deux parties essentielles :

X ORGANISATION DU PROGRAMME PAR ELEMENTS BANDES FINIES

- module de génération des données,
- module de résolution et sommation des résultats.

Les données sont construites principalement d'informations sur les lignes nodales (conditions aux frontières, conditions de chargement, etc) et sur les bandes (largeur, caractéristiques des matériaux).

La résolution est répétée autant de fois que d'harmoniques fixés, la solution finale étant obtenu par sommation de tous les termes.

X-2-1) Module de génération des données

* Subroutine "MECA" :

Permet l'introduction des caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque ainsi que de la bande élémentaire.

* Subroutine "LOCA" :

Permet de localiser les degrés de liberté pour chaque bande, d'où création d'un vecteur "LOCE".

X-2-2) Module de résolution

* Subroutine INITIAL :

X ORGANISATION DU PROGRAMME PAR ELEMENTS BANDES FINIES

Permet d'initialiser les matrices et vecteurs utilisés.

* Subroutine "ELEM" :

Contient la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur charge élémentaire donnés d'une manière explicite.

* Subroutine "ASSEMB" :

Est utilisée pour l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires donnant ainsi la matrice de rigidité globale et le vecteur force global.

* Subroutine "BOUND" :

Permet d'introduire les conditions aux limites avant de mettre en oeuvre la résolution, sous peine de rendre le problème insoluble.

La convention utilisée est :

0 : ==> le degré de liberté est autorisé (free).

1 : ==> le degré de liberté n'est pas autorisé (restreind).

* Subroutine "SOLV" :

Permet la résolution du système obtenu après assemblage et application des conditions aux limites. Deux algorithmes de résolution ont été

développés à savoir :

- Algorithme de Gauss.
- Algorithme de Cholesky.

* Subroutine "FORM" :

Contient le vecteur poutre donné explicitement.

* Subroutine "EFFORT" :

Contient la matrice de contrainte ($[H]$) donnée explicitement; elle permet en outre de faire le produit matrice de contrainte par le vecteur déplacement.

* Subroutine "IMPRESSION" :

Permet la sommation des différents termes des déplacements et des contraintes obtenus pour chaque harmonique puis imprime ces derniers.

X-2-3) Structure bande

Une autre variante du programme précédant est l'exploitation de la nature creuse et symétrique de la matrice de rigidité globale, ceci est mis en oeuvre grâce à un assemblage et à une résolution adaptés.

X ORGANISATION DU PROGRAMME PAR ELEMENTS BANDES FINIES

* Subroutine "ASSEM" :

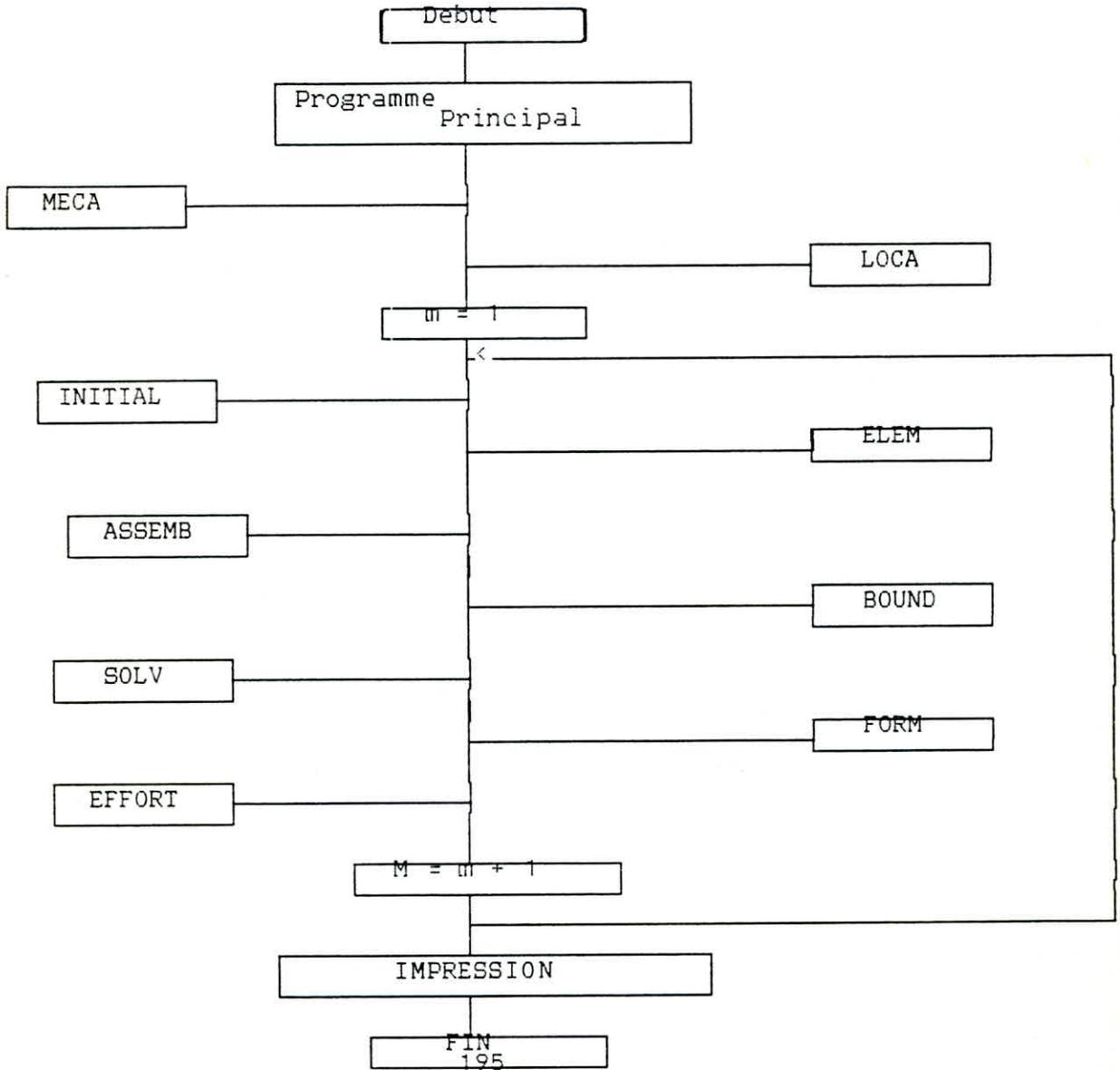
Assemble la matrice de rigidité globale en bande, la largeur de bande étant constante. Les caractéristiques de cet assemblage a été explicité dans le chapitre VIII .

* Subroutine "CHOLB" :

L'algorithme de résolution utilisé alors est l'algorithme de Cholesky adapté à la structure bande, cet algorithme a déjà été développé dans le chapitre VIII .

X ORGANISATION DU PROGRAMME PAR ELEMENTS BANDES FINIES

ORGANIGRAMME

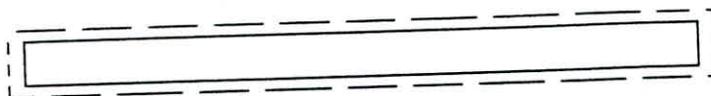


X ORGANISATION DU PROGRAMME PAR ELEMENTS BANDES FINIES

X-3) PRESENTATION DES RESULTATS

Plaque simplement appuyée sur le pourtour

* charge uniforme *

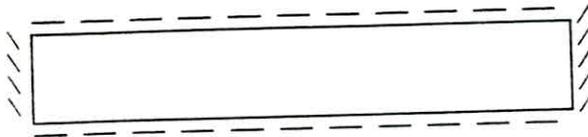


a / b = 1 Maillage	Déformation $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)		
		C	G	CB
2	0.406445E-02	29	32	14
3	0.406324E-02	35	36	18
4	0.406305E-02	45	46	20
5	0.406300E-02	51	60	24
6	0.406298E-02	66	75	26
8	0.406297E-02	92	126	29
10	0.406297E-02	138	191	31
12	0.406297E-02	193	280	37
SOL. EXACTE	0.4062E-02			

a / b = 1 Maillage	Contraintes $MX = MY (qb^2)$ $x=a/2; y=b/2$
2	0.4897E-01
3	0.4836E-01
4	0.4818E-01
5	0.4810E-01
6	0.4805E-01
8	0.4801E-01
10	0.4800E-01
12	0.4799E-01
SOL. EXACTE	0.4790E-01

X ORGANISATION DU PROGRAMME PAR ELEMENTS BANDES FINIES

Plaque appuyée sur 2 côtés opposés
encastree sur les 2 autres.



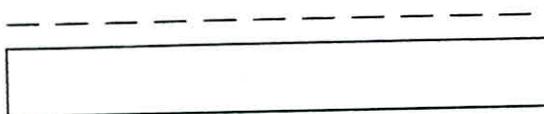
* charge uniforme *

a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)		
		C	G	CB
2	0.191662E-02	31	32	13
3	0.191747E-02	37	40	18
4	0.191765E-02	43	49	21
5	0.191771E-02	55	59	24
6	0.191773E-02	65	72	27
8	0.191774E-02	99	124	29
10	0.191775E-02	153	192	31
12	0.191775E-02	205	292	37
SOL. EXACTE	0.19200E-02			

a / b = 1 Maillage	Contraintes $MX (qb^2)$ $x=a/2; y=b/2$	Contraintes $MY (qb^2)$ $x=a/2; y=b/2$
	2	0.02559
3	0.02504	0.034625
4	0.02486	0.03403
5	0.02478	0.03377
6	0.02474	0.03363
8	0.02470	0.03350
10	0.02468	0.03343
12	0.02467	0.03340
SOL. EXACTE	0.024400	0.03320

X ORGANISATION DU PROGRAMME PAR ELEMENTS BANDES FINIES

Plaque appuyée sur 2 côtés opposés
libre sur les 2 autres.



* charge uniforme *

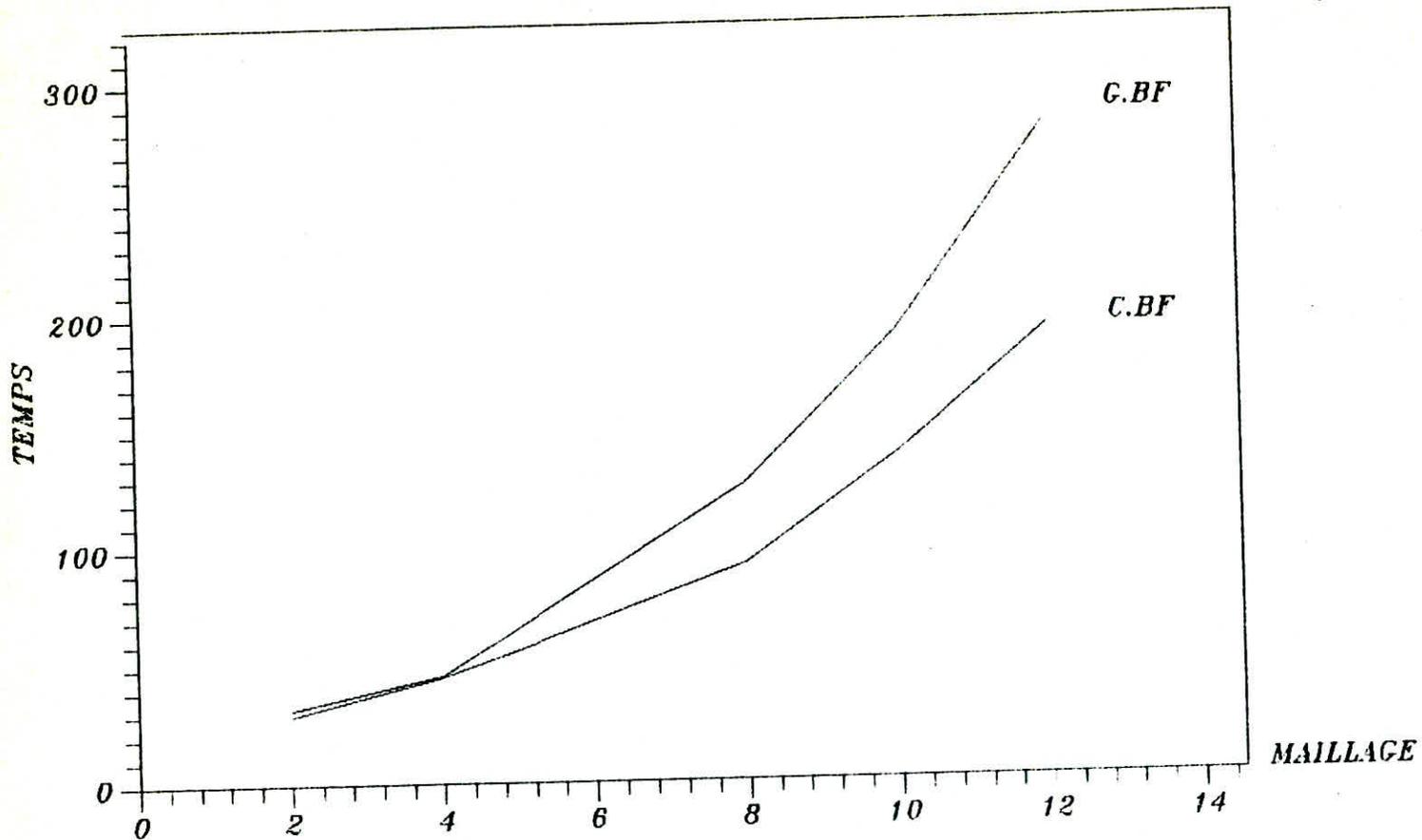
a / b = 1 Maillage	Déplacement $W(qa^4 / D_t)$ $x=a/2; y=b/2$	Temps (ms)		
		C	G	CB
2	0.130958E-01	29	27	12
3	0.130946E-01	31	35	17
4	0.130944E-01	39	43	19
5	0.130943E-01	47	61	25
6	0.130943E-01	60	75	28
8	0.130943E-01	98	123	30
10	0.130943E-01	142	182	32
12	0.130943E-01	138	185	42
SOL. EXACTE	0.130950E-01			

a / b = 1 Maillage	Contraintes	
	MX (qb^2) $x=a/2; y=b/2$	MY (qb^2) $x=a/2; y=b/2$
2	0.02831	0.12326
3	0.02764	0.1230
4	0.02743	0.1229
5	0.02733	0.1229
6	0.02727	0.1228
8	0.02722	0.1228
10	0.02720	0.1228
12	0.02719	0.1228
SOL. EXACTE	0.027100	0.122500

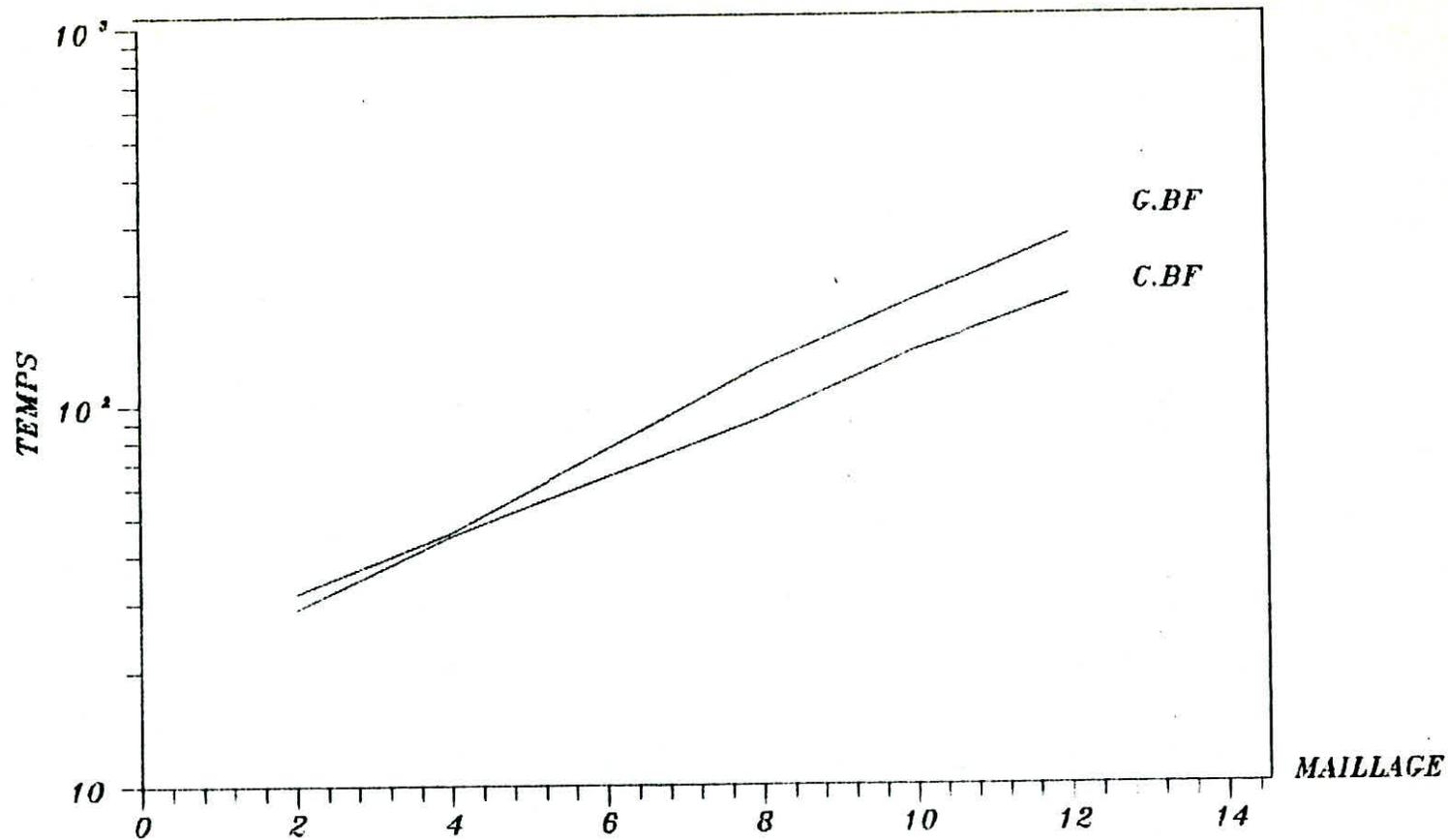
X-4) INTERPRETATION DES RESULTATS

Les figures (10-A) et (10-B) montrent que, l'algorithme Cholesky bande est plus performant que ceux de Cholesky et Gauss, pour cette raison, dans notre comparaison des différentes méthodes, nous opterons pour l'algorithme de Cholesky bande, pour la méthode des bandes finies.

Des résultats similaires pour la plaque appuyée sur deux côtés opposés encastrée sur les deux autres, peuvent être déduites des figures (15) et (16) se trouvant en annexe.



Fig(X - a): Plaque simplement appuyee
sur le pourtour
(C.BF-G.BF)



*Fig(X-b): Plaque simplement appuyee
sur le pourtour
(C.BF-G.BF)*

CHAPITRE

ONZE

XI CONCLUSION

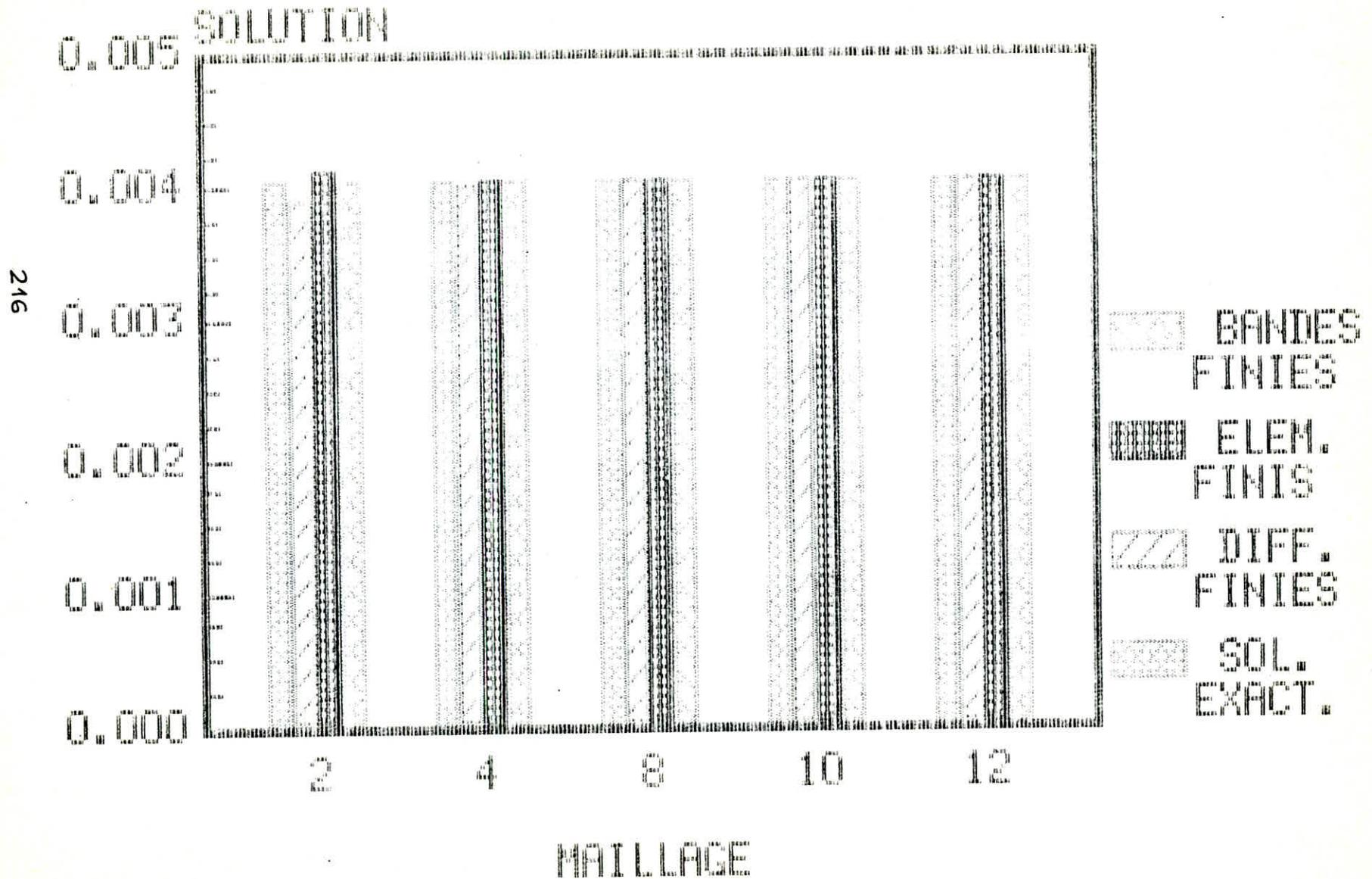
XI-1) INTERPRETATION DES RESULTATS

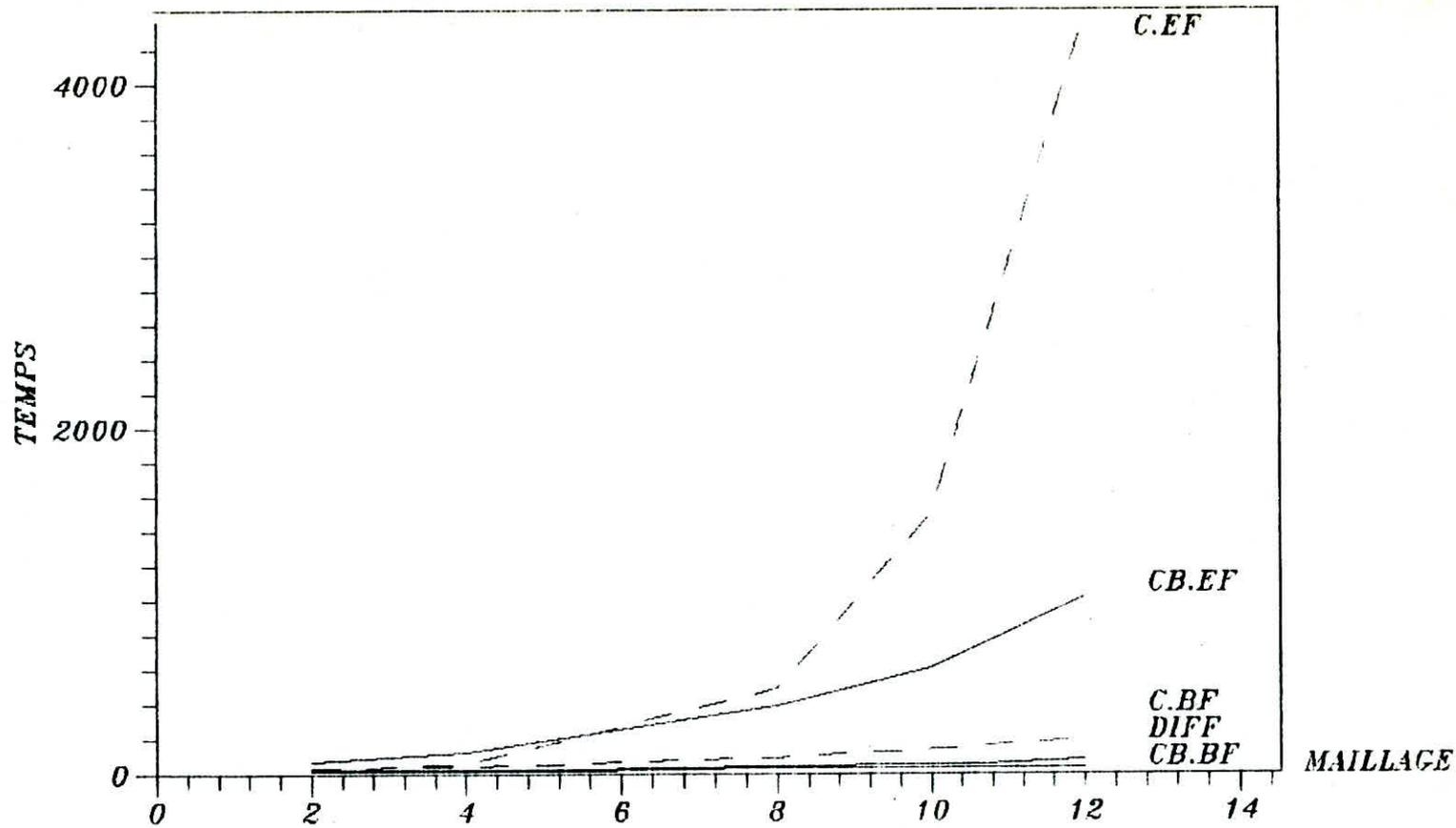
A) Convergence de la solution :

Considérons la cas de la plaque simplement appuyée sur le pourtour , d'après la figure XI-1, il apparait que la solution en bandes finies est déjà atteinte pour un maillage de deux (2) alors que pour les éléments finis, la solution est atteinte au maillage (4x4). En différence finies par contre, la solution n'est atteinte que pour un maillage de (8x8), ce qui montre bien l'efficacité de la méthode bandes finies. D'ailleurs, ce résultat est aussi mis en évidence par la plaque appuyée sur deux côtés opposés, encastrée sur les deux autres. En effet pour ce cas, la méthode bandes finies converge pour un maillage de deux (2), celle des éléments finis pour un maillage de (4x4), quant aux différences finies, elle ne converge que pour un maillage supérieur à (12x12) (voir Fig. 1. en annexe).

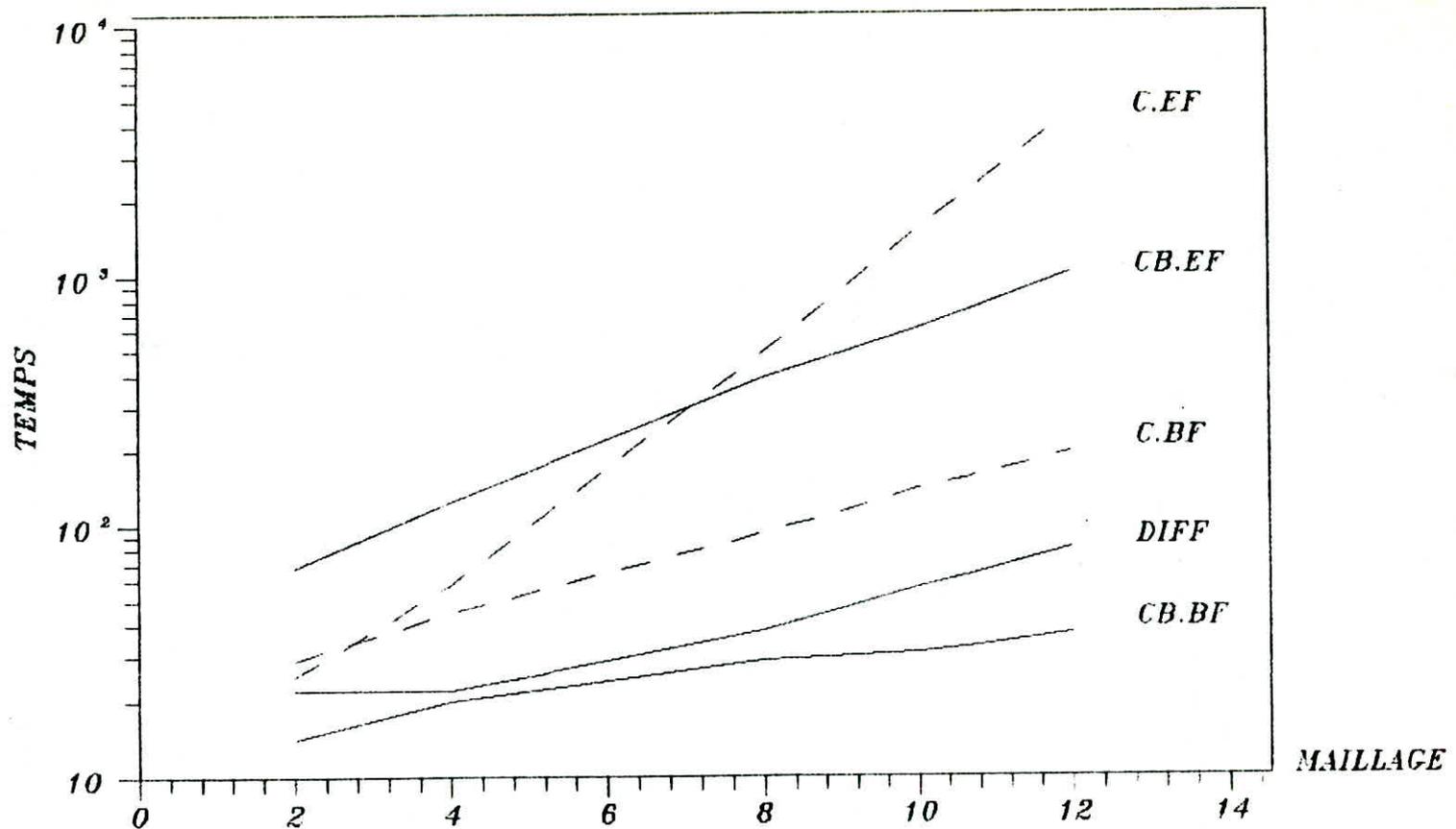
La supériorité de la M-E-F par rapport aux différences finies est encore apparente pour le cas de la plaque encastrée sur le pourtour (voir

Fig(XI-1) : Plaque simplement appuyée sur le pourtour

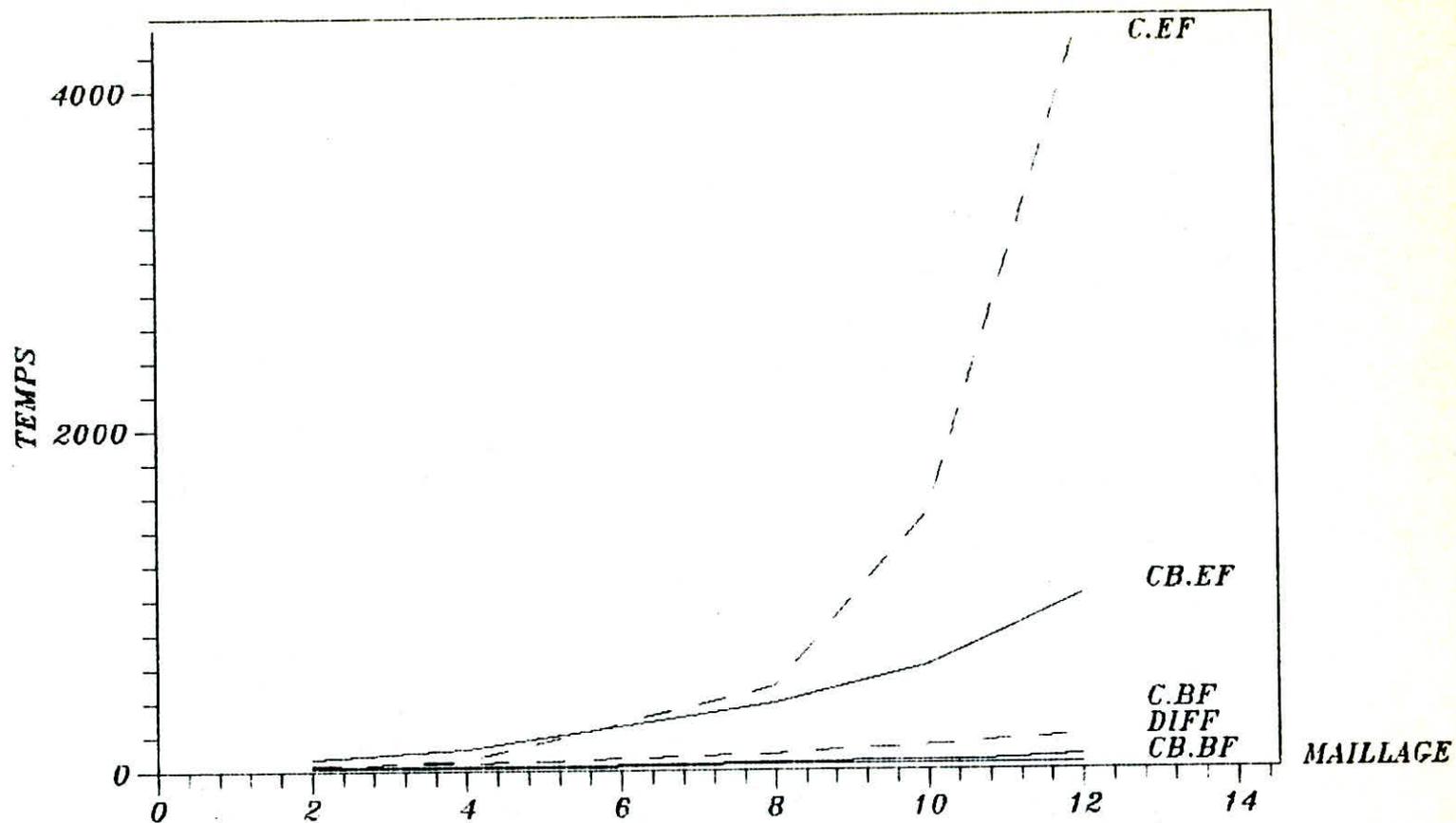




Fig(XI-2): Plaque simplement appuyee
 sur le pourtour
 (CB.BF-Di-C.BF-C.EF-CB.EF)



Fig(XI-3): Plaque simplement appuyee
sur le pourtour
(CB.BF-Di-C.BF-C.EF-CB.EF)



Fig(XI-2): Plaque simplement appuyee sur le pourtour
(CB.BF-Di-C.BF-C.EF-CB.EF)

XI CONCLUSION

Fig. 2. en annexe), pour ce dernier cas, nous ne l'avons pas traité par la méthode des bandes finies et ceci à cause de la complexité de la fonction de base.

B) Temps d'exécution

B-1) Courbes de variation Temps - Maillage

Prenons le cas de la plaque appuyée sur le pourtour, on voit apparaître d'après la figure XI-2, que la méthode des différences finies consomme moins de temps machine que les méthodes bandes finies et éléments finis utilisant l'algorithme de Cholesky. Par contre, nous voyons clairement que la méthode bandes finies utilisant l'algorithme de Cholesky bande est moins coûteuse (temps et stockage moindre) par rapport à la méthode des différences finies et même par rapport aux éléments finis utilisant le même algorithme.

Les différences finies l'emportent sur les éléments finis quelque soit l'algorithme utilisé aussi performant soit-il (voir figures XI-2 et XI-3).

Remarque : Toute discontinuité est inhérente à la méthode d'interpolation

XI CONCLUSION

incorporée dans le logiciel de graphisme.

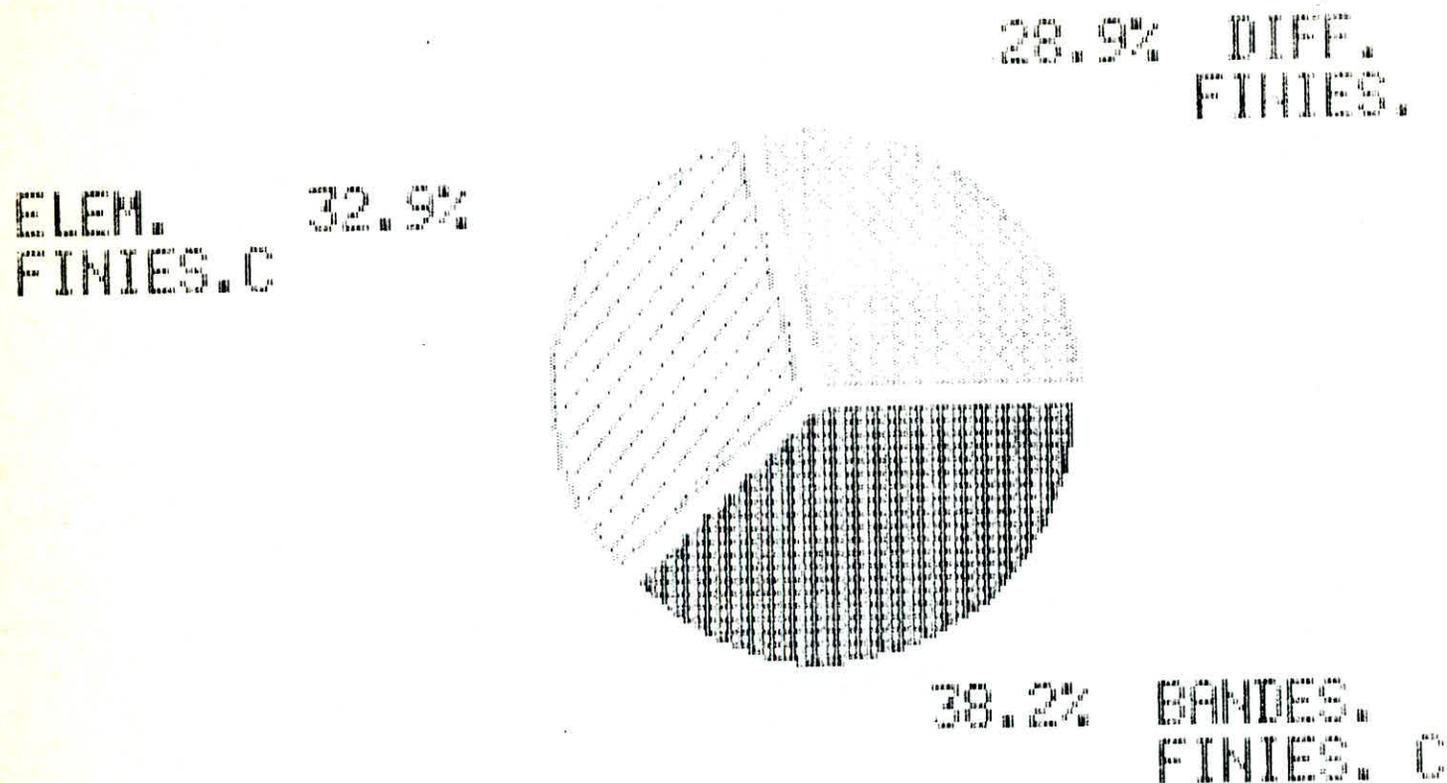
Pour le cas de la plaque appuyée sur deux côtés, encastrée sur les deux autres, la même tendance que pour le cas précédent est observée, avec une petite différence, c'est que pour de faibles maillages, la méthode des différences finies l'emporte sur la méthode bande utilisant Cholesky bande, mais dès que le maillage dépasse 10×10 , cette dernière reprend sa suprématie (voir figures 3 et 4 en annexe).

Pour la plaque encastrée sur le pourtour, étant donné que nous n'avons pas étudié ce cas pour la méthode bandes, nous nous contenterons de faire une comparaison entre les deux autres méthodes seulement et nous dirons que le temps d'exécution en différences finies est nettement inférieur à celui des éléments finis, aussi puissant que soit l'algorithme utilisé (voir figures 5 et 6 en annexe).

B-2) Pourcentage de temps pour un maillage donné.

Nous ne voudrions pas terminer ce paragraphe sans présenter un effet visuel des résultats obtenus. Nous avons pensé que sous cette forme ci,

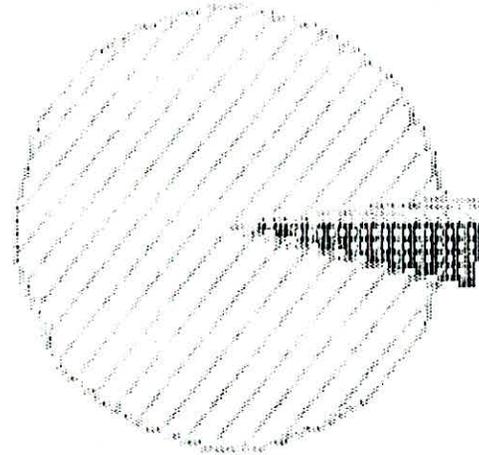
Fig(XI-4) : Plaque simplement appuyée
sur le pourtour



TEMPS
(maillage 2)

Fig(XI-5): Plaque simplement appuyée
sur le pourtour

ELEM. 94.1%
FINIES. C

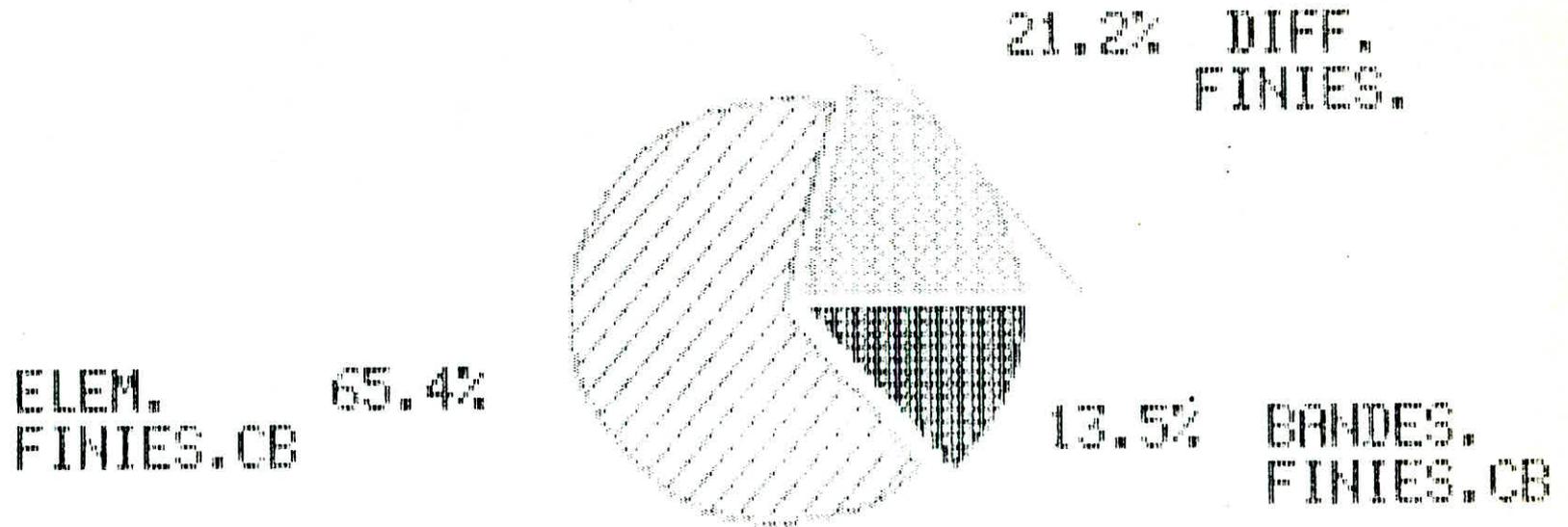


1.8% DIFF.
FINIES.

4.2% BANDES.
FINIES. C

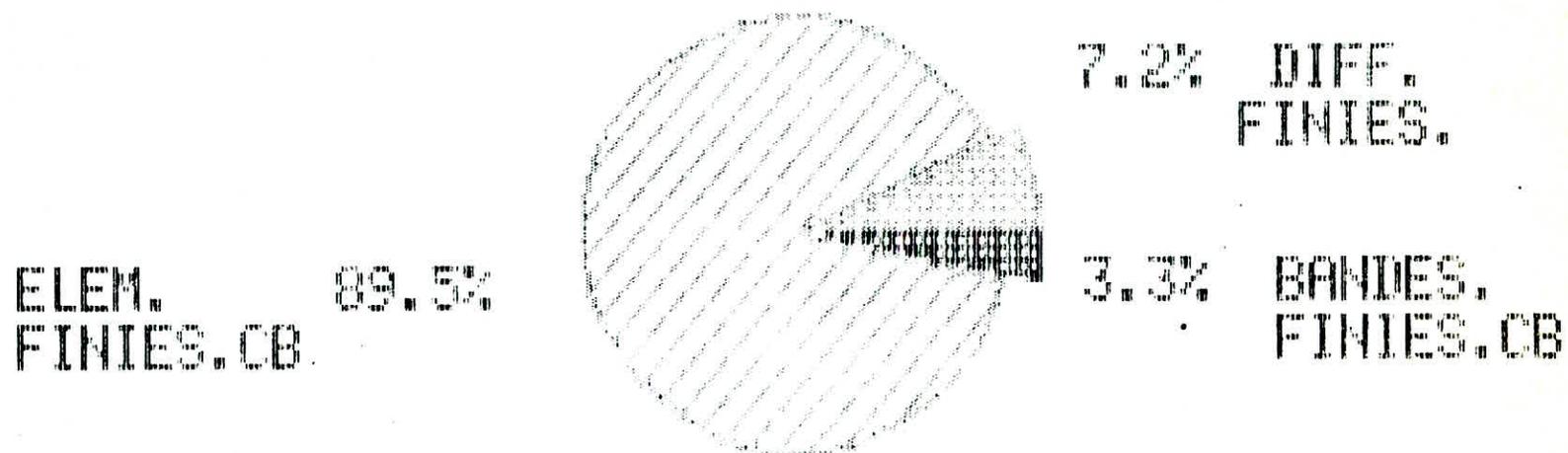
TEMPS
(maillage 12)

Fig(XI-6): Plaque simplement appuyée sur le pourtour



TEMPS
(maillage 2)

Fig(XI-7): Plaque simplement appuyée sur le pourtour



TENPS
(maillage 12)

XI CONCLUSION

l'importance du facteur serait mieux appréciée pour ceci nous avons choisi un petit maillage (2) et un grand maillage (12).

Pour la plaque simplement appuyée sur le pourtour, les figures (XI-4) (XI-5), (XI-6) et (XI-7) montrent clairement que pour les grands maillages la méthode bandes finies avec l'algorithme de Cholesky bande est meilleur que celle des différences finies, qui elle même est supérieure aux éléments finis.

Pour la plaque appuyée sur deux côtés opposés, encastrée sur les deux autres. Les conclusions citées précédemment restent valables (voir figures 7, 8, 9 et 10 en annexe).

Ainsi on voit que les interprétations qui se sont dégagées du paragraphe (XI-1-B-1) se trouvent réconfortées dans ce paragraphe.

XI-2) Conclusion générale

De cette étude, il ressort qu'il est très difficile de comparer la méthode des éléments finis à celle des différences finies. En effet, les deux sont des techniques de discrétisation. Dans les deux méthodes, le milieu continu est représenté par un ensemble de coordonnées nodales généralisées, et

XI CONCLUSION

toutes deux requièrent une résolution pour un ensemble d'équations algébriques simultanées.

A part cette similitude, les deux méthodes apparaissent assez différentes l'une de l'autre. En effet, en éléments finis, un élément fini est entièrement défini par ses déplacements nodaux à l'intérieur de ses frontières alors qu' en différences finies, le maillage peut donner des noeuds à l'extérieur de chaque élément. Aussi, l'approche de la M-E-F est habituellement vue comme une minimisation d'une fonctionnelle sans se référer aux équations différentielles, quand à l'approche des différences finies, elle est habituellement présentée comme une méthode d'approximation de l'équation différentielle gouvernante sans se référer aux fonctionnelles.

On peut dire que les deux méthodes diffèrent par le choix des coordonnées généralisées, ainsi que par la table de localisation des noeuds. Il est également à remarquer que la M-E-F peut être vue comme une méthode de génération de système d'équations aux différences finies.

Il apparait qu'aucune méthode ne peut supplanter l'autre aisément,

XI CONCLUSION

pour un nombre donné de degré de liberté, les deux sont capables des mêmes performances, cependant moins de temps machine est nécessaire pour générer les équations des structures par la méthode des différences finies.

Cependant, les comparaisons dépendent inévitablement du type de problème, la régularité du maillage et de l'organisation du programme.

On peut noter que la méthode des différences finies tend à être embarrassante quand une description mathématique de la géométrie de la structure n'est pas facile à décrire.

Généralement, les avantages de la M-E-F résident dans son attrait physique et la relative facilité avec laquelle les structures compliquées peuvent être modélisées et ses conditions aux limites traitées.

De même il en ressort qu'il est aussi compliqué de comparer la M-E-F à celle des bandes finies, du fait qu'elles sont assez similaires l'une à l'autre, d'une part, ce sont des techniques de discrétisation, le milieu continu étant représenté par un ensemble de coordonnées nodales généralisées, d'autre part, toutes les deux nécessitent une résolution d'un système d'équa-

XI CONCLUSION

tions linéaires. Par ailleurs, une bande finie est entièrement définie par ses déplacements nodaux à l'intérieur de ses frontières.

Autre similitude, les deux méthodes sont habituellement visualisées comme une minimisation d'une fonctionnelle.

La différence des deux méthodes réside dans le fait que la fonction de déplacement en M-E-F est un polynôme alors qu'en bande, c'est une sommation de produit de deux fonctions, la fonction poutre et la fonction de base. Cette dernière permet en outre l'autointroduction des conditions aux limites sur deux extrémités de la bande. D'ailleurs, c'est dans cette fonction que réside la plus grosse difficulté de la méthode en même titre que son attrait. En effet, elle permet d'avoir des conditions aux limites très réduites ainsi qu'un système d'équation restreint ayant en plus une largeur de bande minime.

Une différence notable entre les deux méthodes consiste dans le fait que la discrétisation du milieu continu de la M-E-F s'effectue dans les deux directions alors qu'en bande il s'effectue dans une seule direction. A noter que la méthode bande nécessite moins de capacité mémoire et moins de

XI CONCLUSION

temps machine pour la résolution.

Afin de pouvoir choisir une méthode par rapport à une autre, l'ingénieur pourrait être aidé par son intuition et son sens physique des réalités en joignant des éléments de différents types ou de différentes orientations dans l'espace etc .

BIBLIOGRAPHIE

1) OUVRAGES

- ABSCI : Théorie de l'élasticité.
- AUBOIN : Calcul des structures et informatique.
- BOUMAH RAT M. et GOURDIN : Méthodes numériques appliquées.
- COOK. ROBERT. D. : Concepts and applications of finite element.
- COURBON J. : Plaques minces élastiques.
- DAVIES : The finite element methods , a first approach.
- DAVIAUD R. : Introduction aux méthodes composites
FILLIATRE C. (conférences de BOMBANNES 1979, 1983)
- DHATT et TOUZOT : Une présentation de la M-E-F.
- FORSYTHE : Finite difference methods for partial differential equation.
- GALLAGHER RH. : Introduction aux éléments finis
GAY. D. Matériaux composites.
- HINTON N., OEN DR. J. : Finite element programming.
- IMBERT, J.F. : Analyse des structures par éléments finis.
- L'HERMITE, R. : Le flambage des arcs et des plaques.

BIBLIOGRAPHIE

- NEUVILLE : Structural analysis.
- ROCKY, K.C. : Introduction à la méthode des éléments finis.
- SHAMES : Energy and finite element method in structural mechanics.
- TIMOSHENKO, S. : Theory of plates and shells.
- WANG : Calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles
- YANG, T.Y. : Finite element structural analysis.
- ZIENKIEWICZ OC : La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur.

2) TRAVAUX

- BARAKA : Notes de cours M-M-C.
- BENALLEGUE et AISSAOUI : Analyse flexionnelle des plaques multicouches par éléments finis conformes (Projet de fin d'études Juin 1989).
- BOUABDELLAH et MOUSSAOUI : Analyse flexionnelle des plaques par la M-E-F (Projet de fin d'études Juin 1988).
- CHEUNG : Finite strip analysis for elastic slabs.
- IRON, M. BRUCE : A frontal program for finite element analysis.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

5/90

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

1ex

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE - CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANNEXE

ANALYSE FLEXIONNELLE
DES
PLAQUES MULTICOUCHES
PAR

DIFFERENCES FINIES - ELEMENTS FINIS
ET
BANDES FINIES

PROPOSE PAR :

Pr B. TELLOUNE

M. Demiden

ETUDE PAR :

M. BENSABT

M. VARI

DIRIGE PAR :

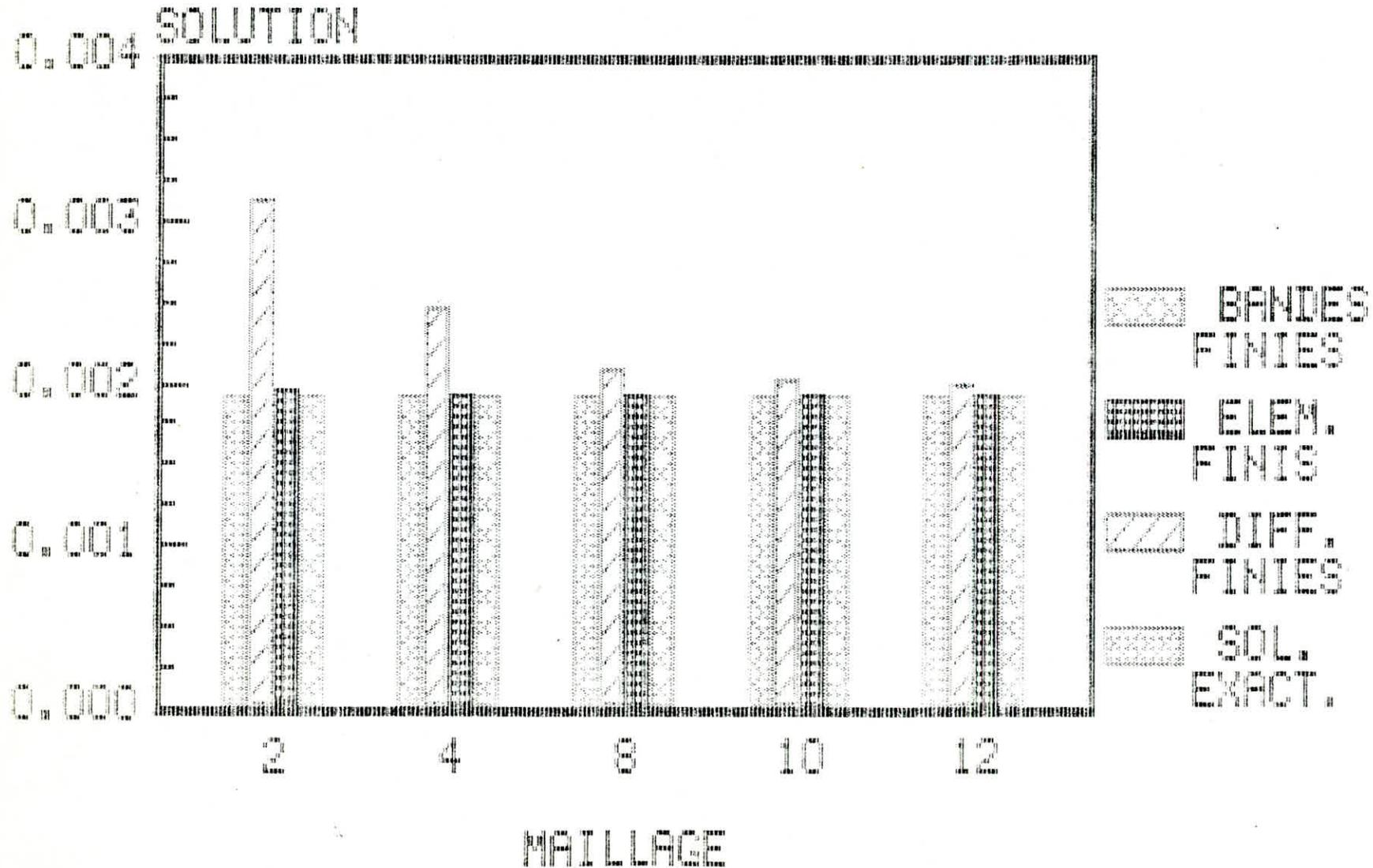
Pr M. BENIDEN

Pr B. TELLOUNE

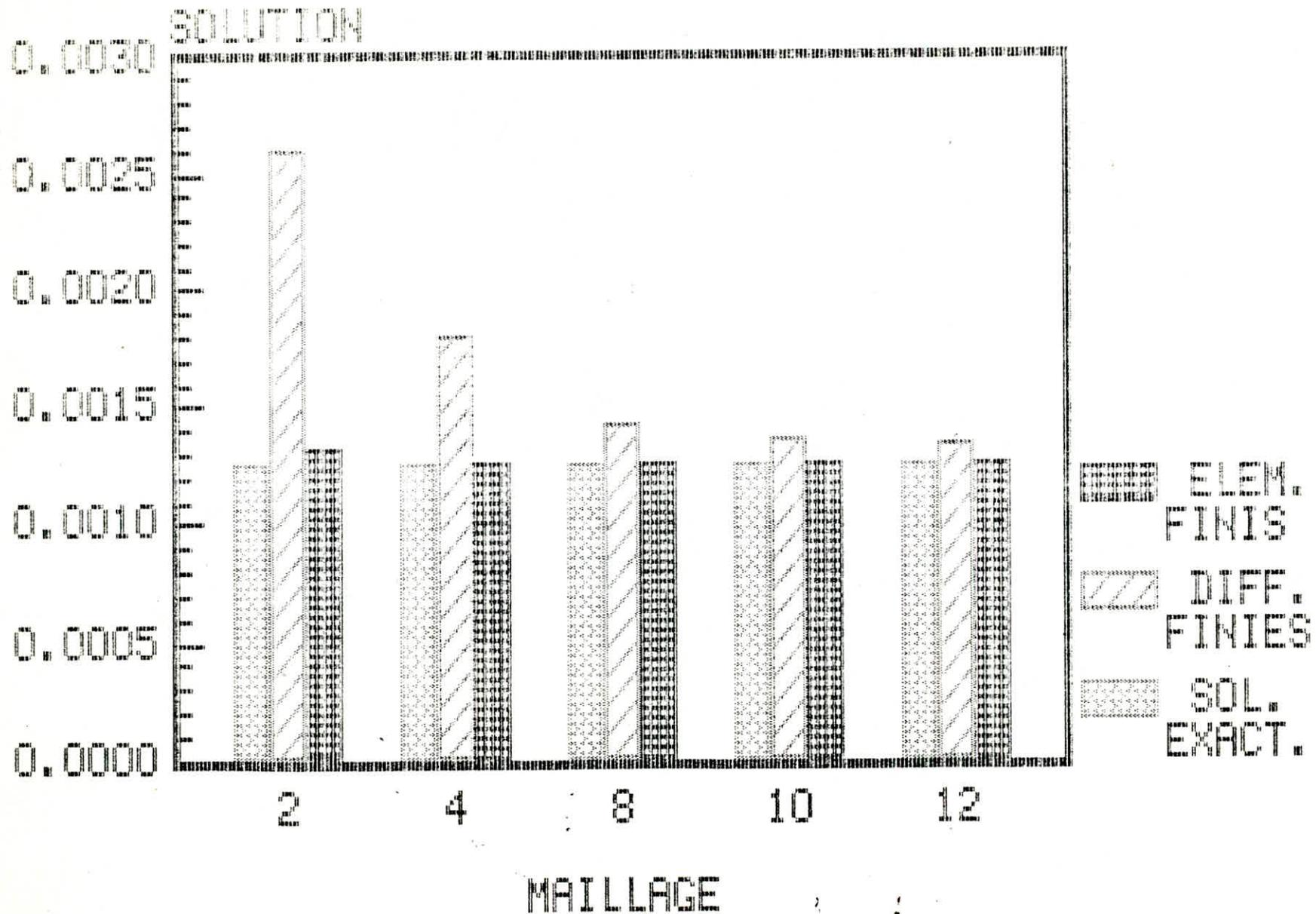
PROMOTION : JUIN 1990

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Fig(1): Plaque simplement appuyée sur deux cotés opposés, encastree sur les deux autres



Fig(2) : Plaque encastree sur le pourtour



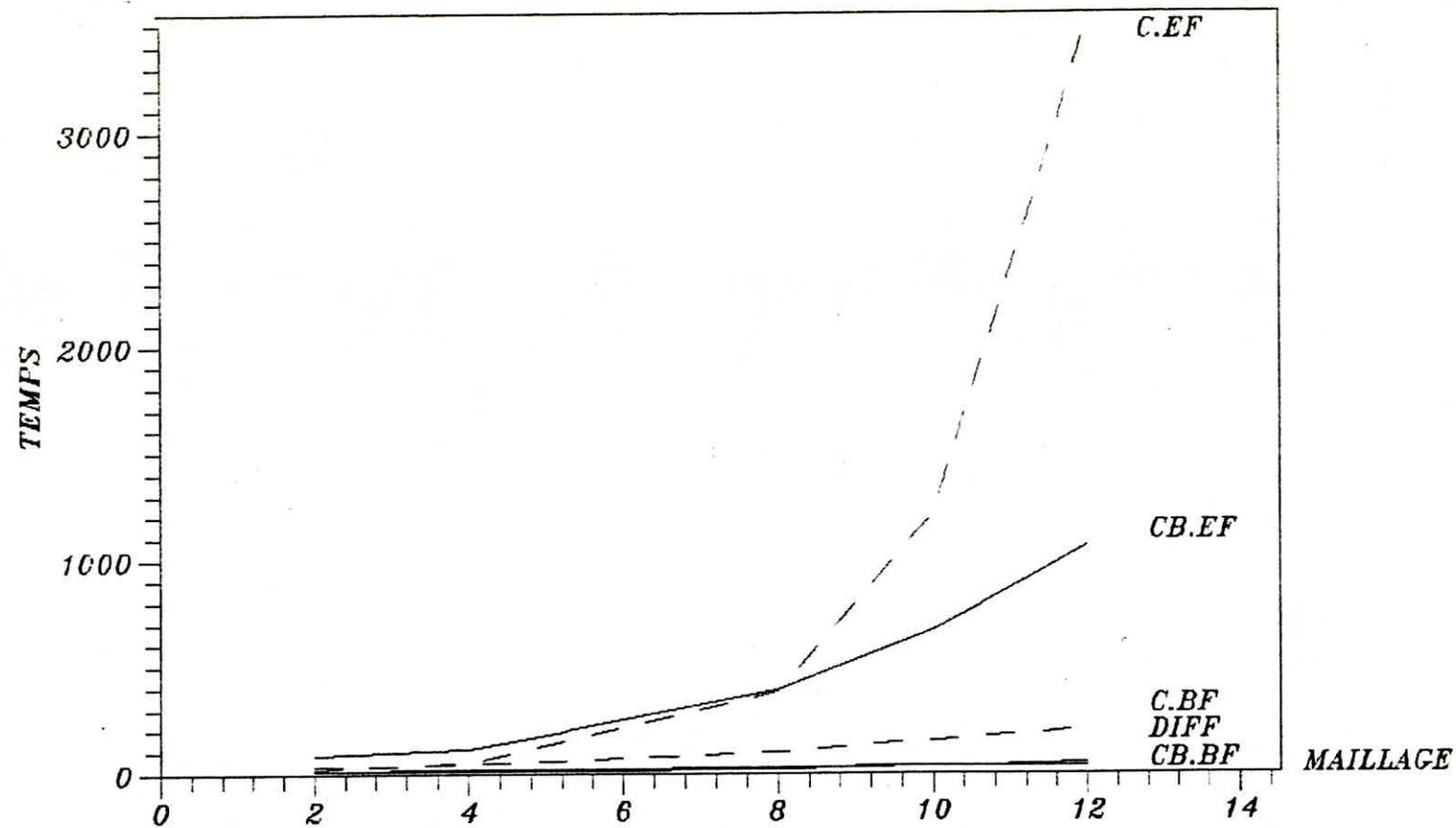


Fig (3): Plaque appuyee sur deux cotes opposes
 encastree sur les deux autres
 (DI-C.EF-C.BF-CB.EF-CB.BF)

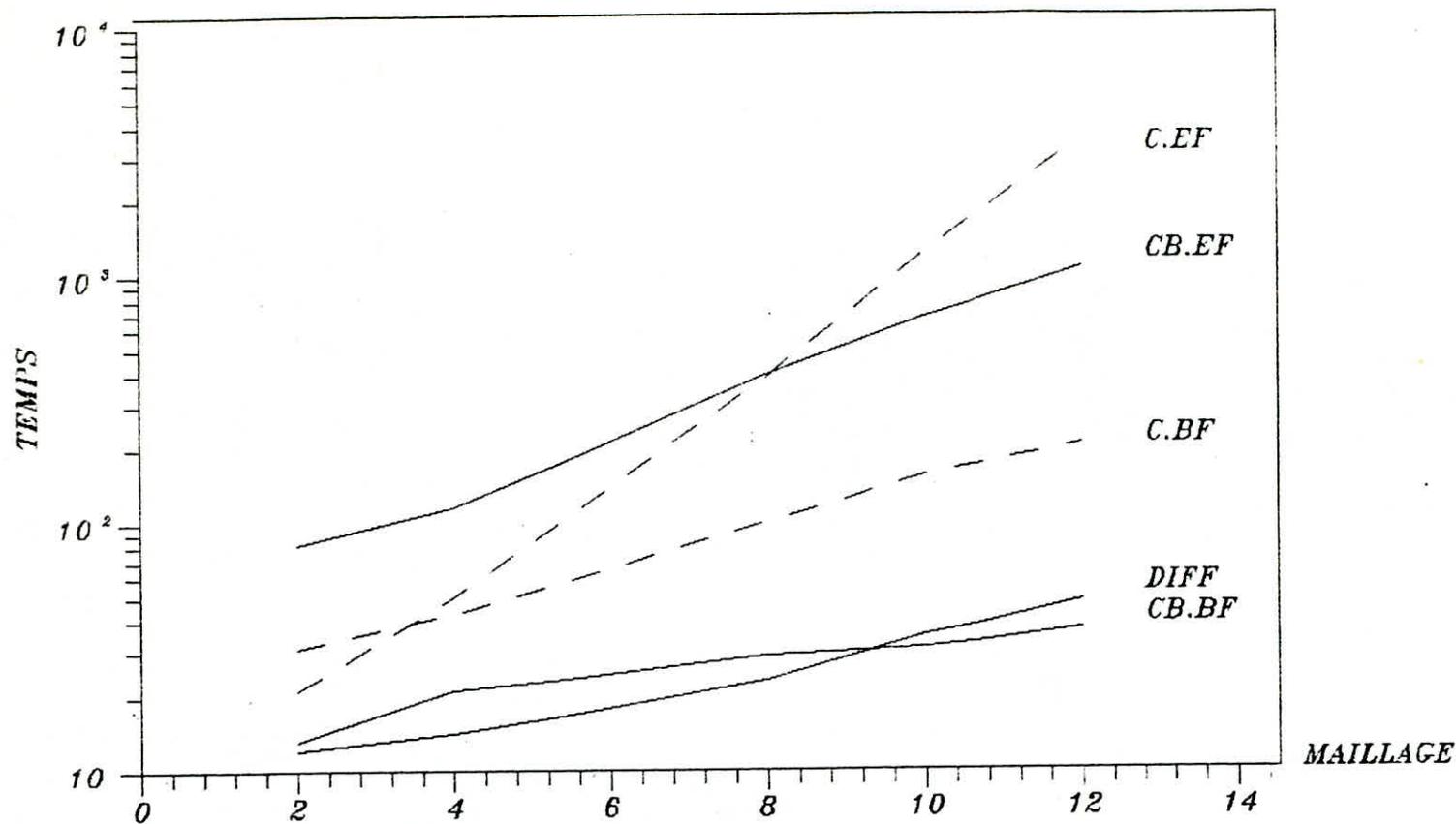
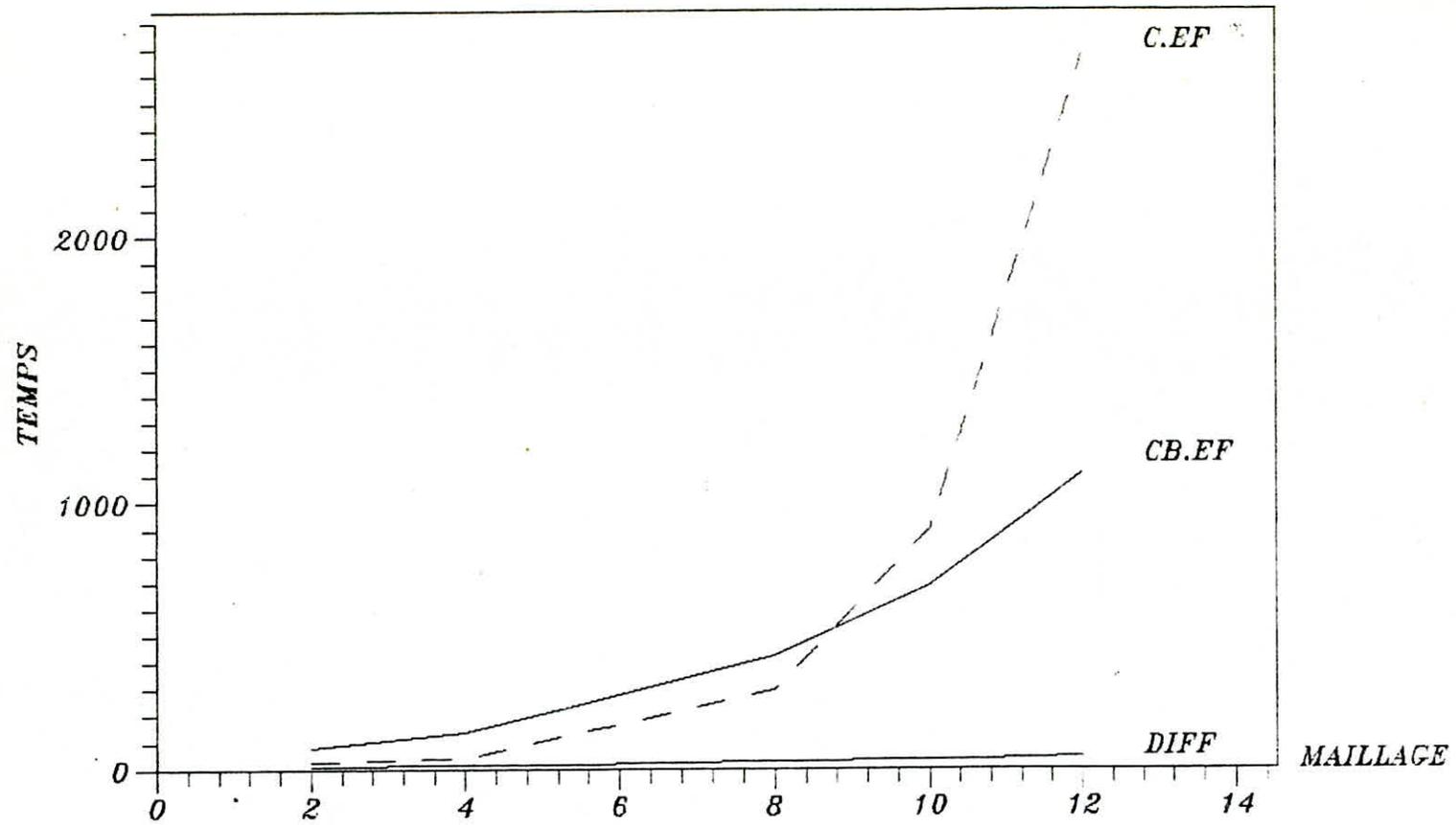
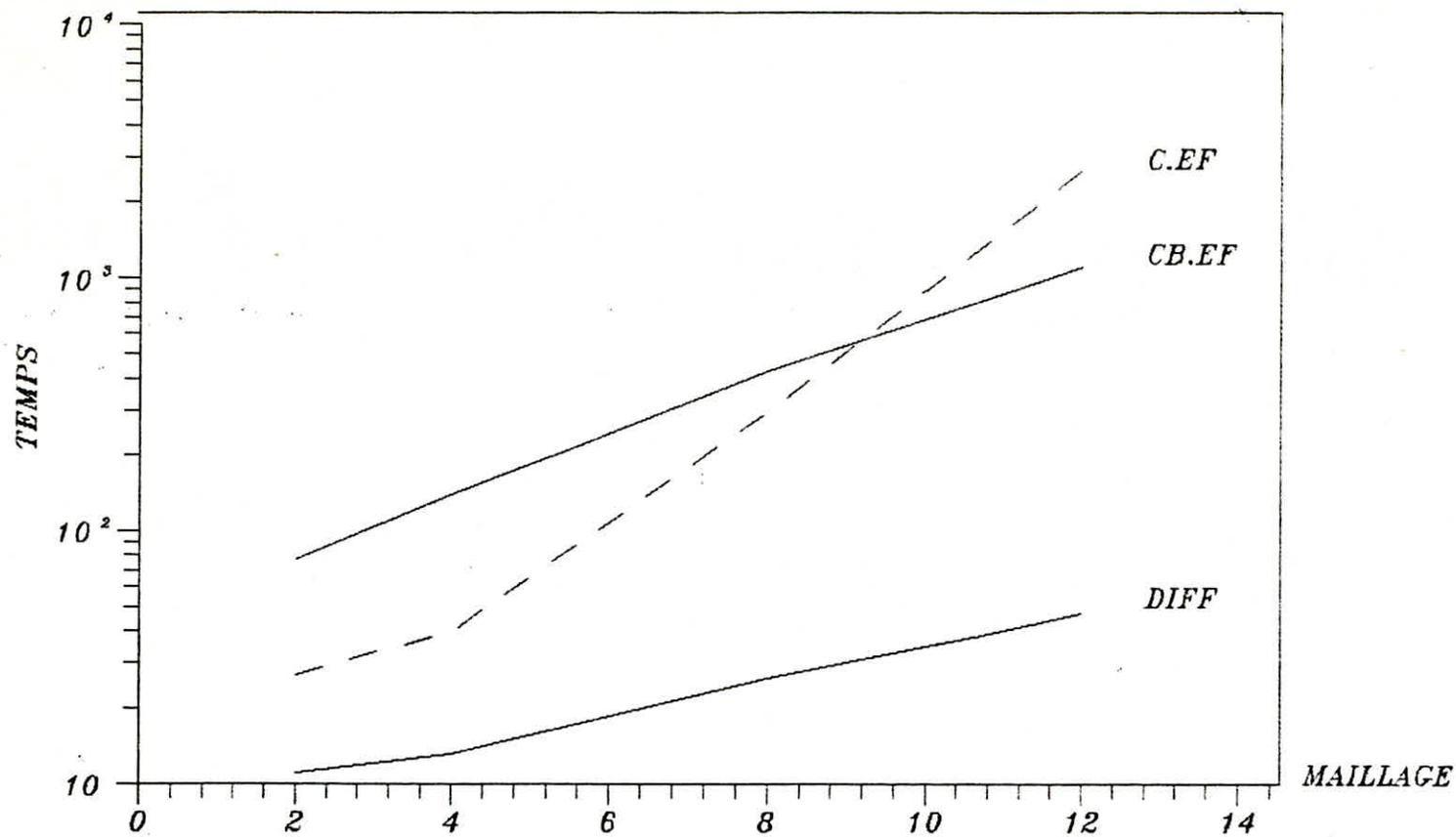


Fig (4): Plaque appuyee sur deux cotes opposes
 encastree sur les deux autres
 (DI-C.EF-C.BF-CB.EF-CB.BF)



Fig(5) : Plaque encastree sur
le pourtour
(C.EF-CB.EF-DI)

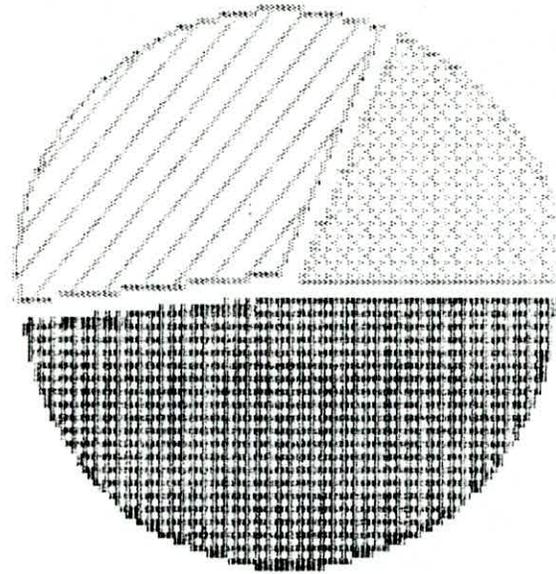


Fig(5) : Plaque encastree sur
le pourtour
(C.EF-CB.EF-DI)

Fig(7): Plaque simplement appuyée
sur deux cotés opposés, encastree sur
les deux autres

ELEM. 32.8%
FINIES.C

18.8% DIFF.
FINIES.



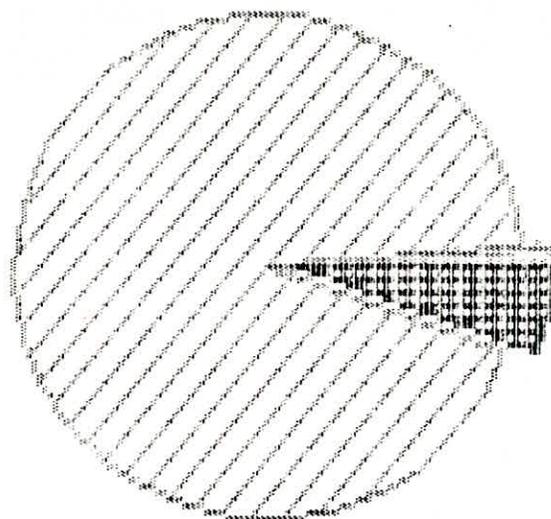
48.4% BANDES.
FINIES.C

TEMPS
(maillage 2)

Fig(8): Plaque simplement appuyée
sur deux cotés opposés, encastree sur
les deux autres

ELEM.
FINIES.C

93.3%

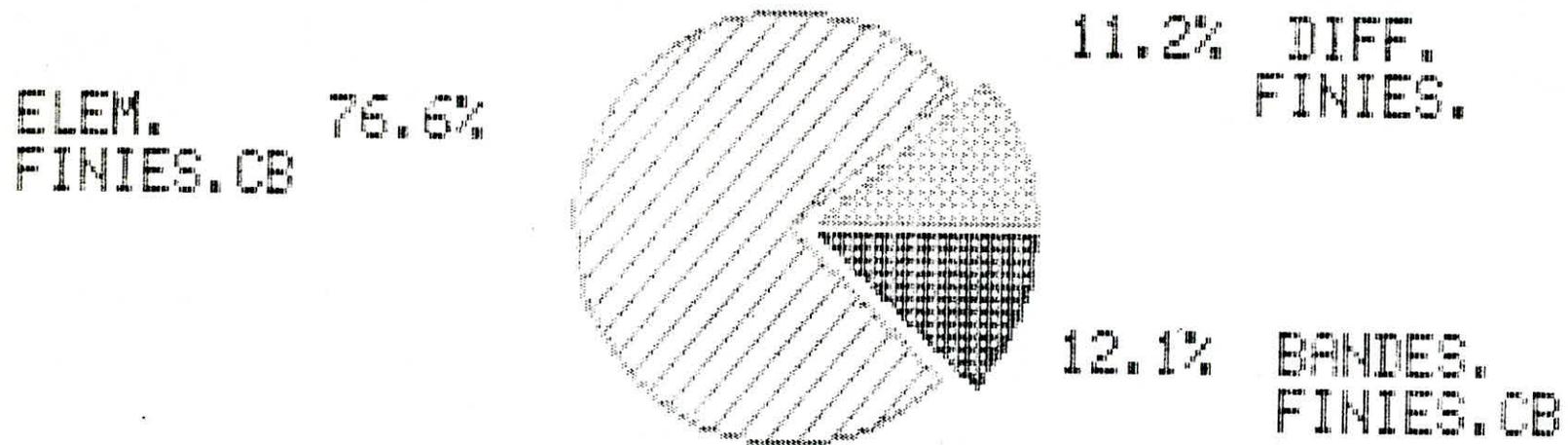


1.3% DIFF.
FINIES.

5.5% BANDES.
FINIES.C

TEMPS
(maillage 12)

Fig(9): Plaque simplement appuyée
sur deux cotés opposés, encastree sur
les deux autres

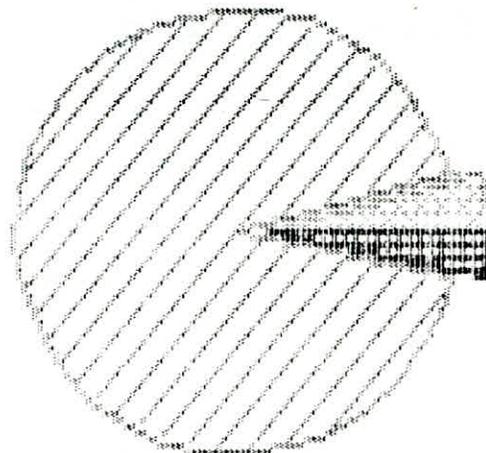


TEMPS
(maillage 2)

Fig(10):Plaque simplement appuyée
sur deux cotés opposés,encastree sur
les deux autres

ELEM.
FINIES.CB

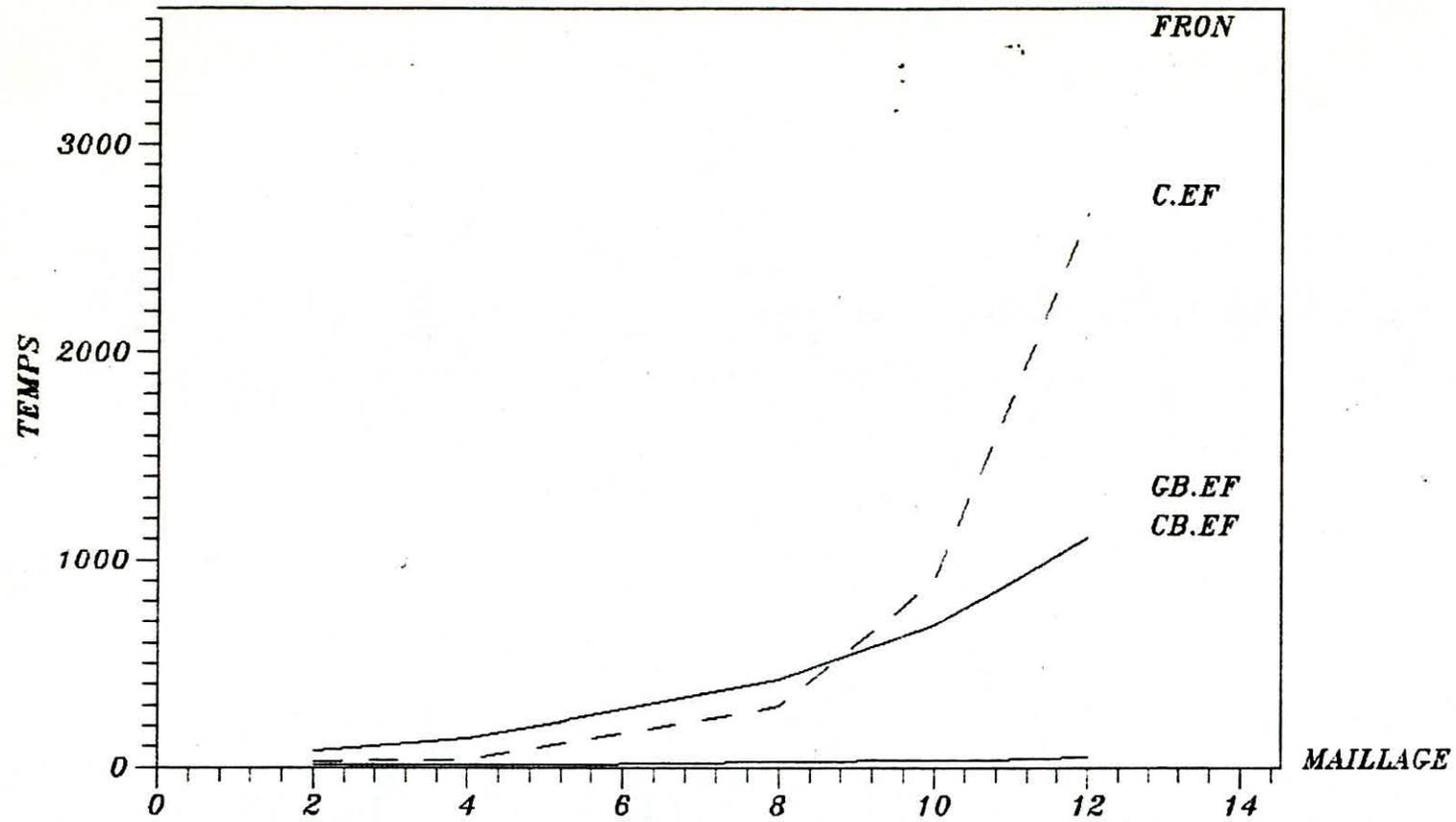
92.6%



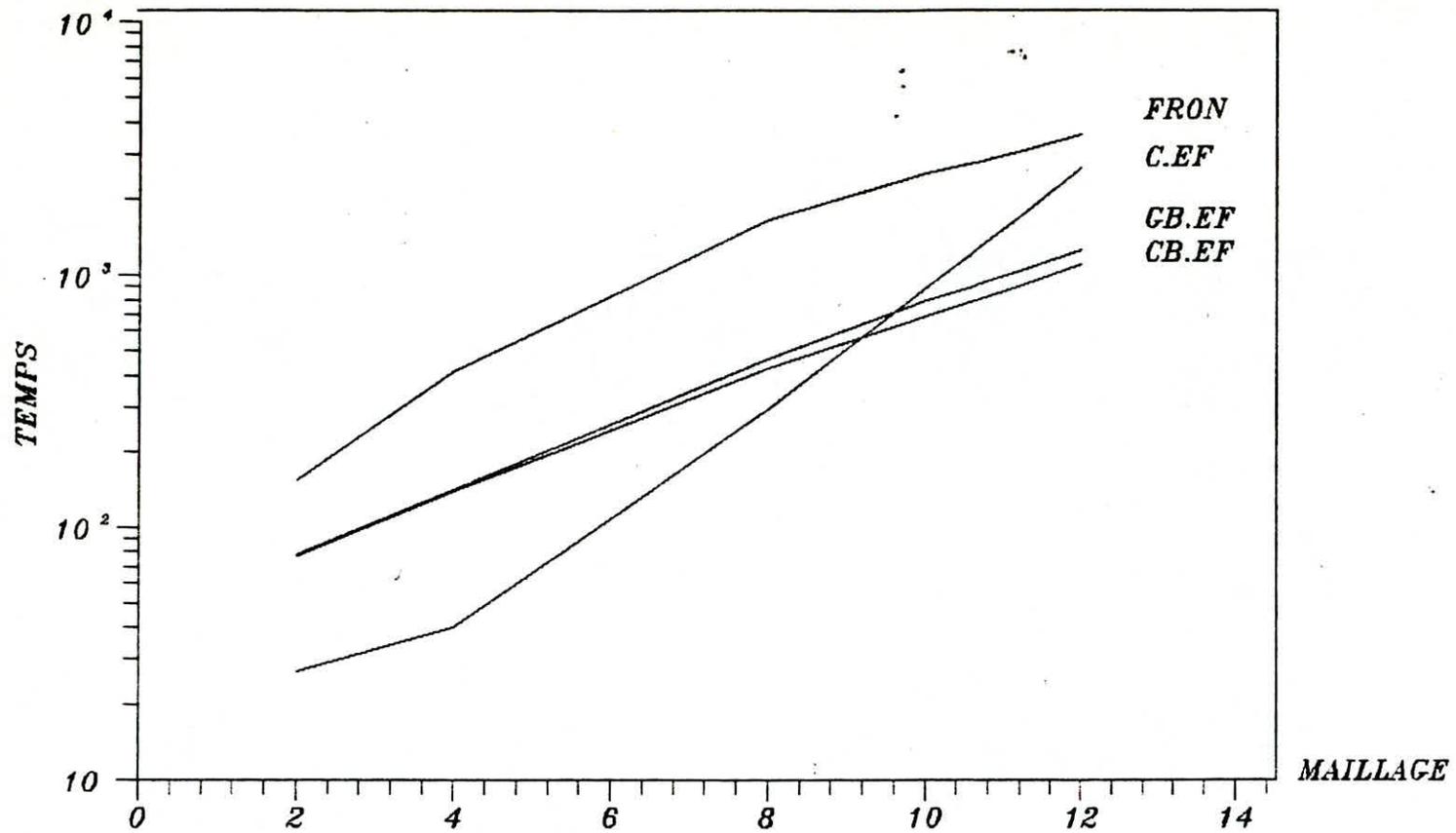
4.2% DIFF.
FINIES.

3.2% BANDES.
FINIES.CB

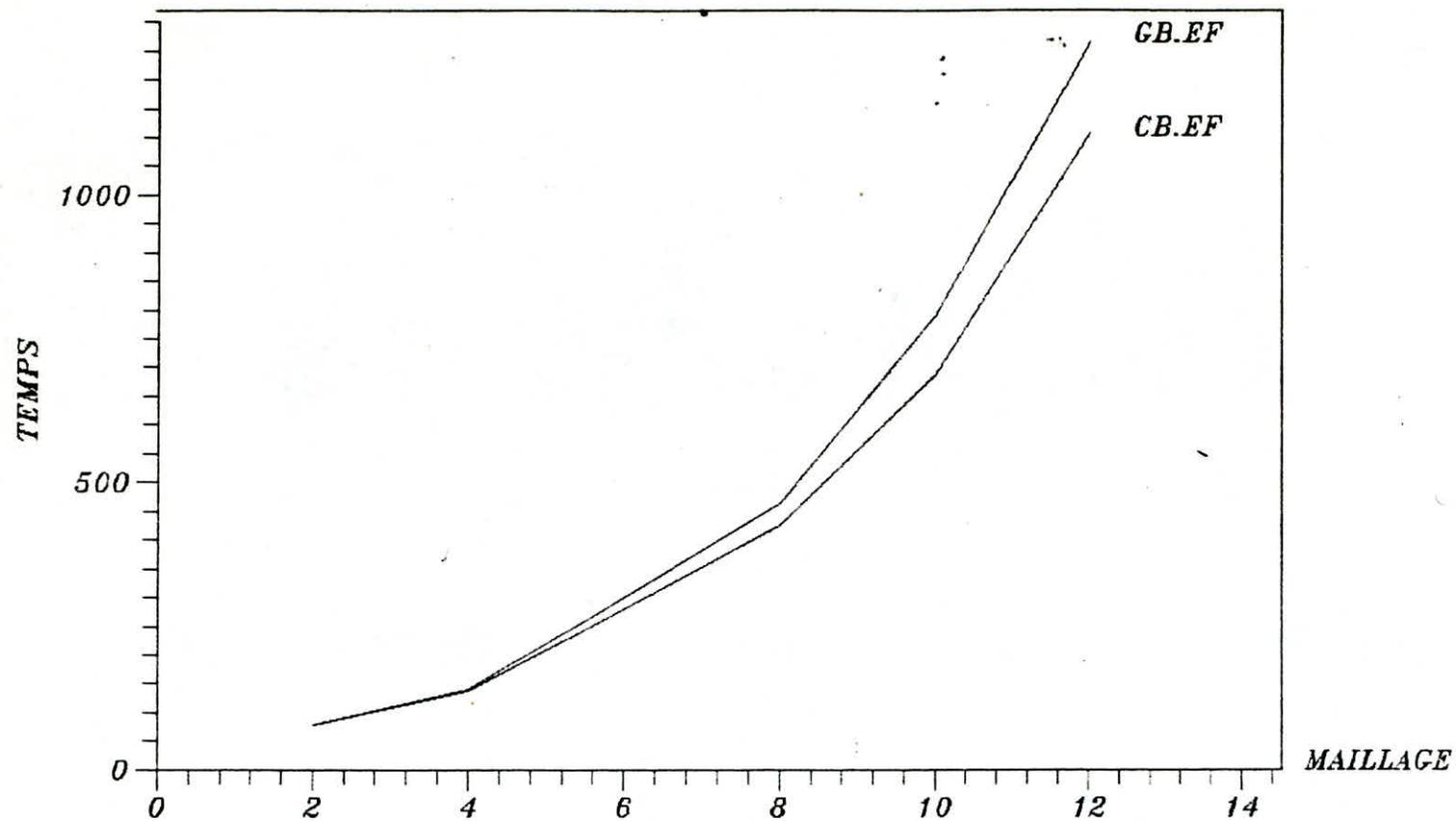
TEMPS
(maillage 12)



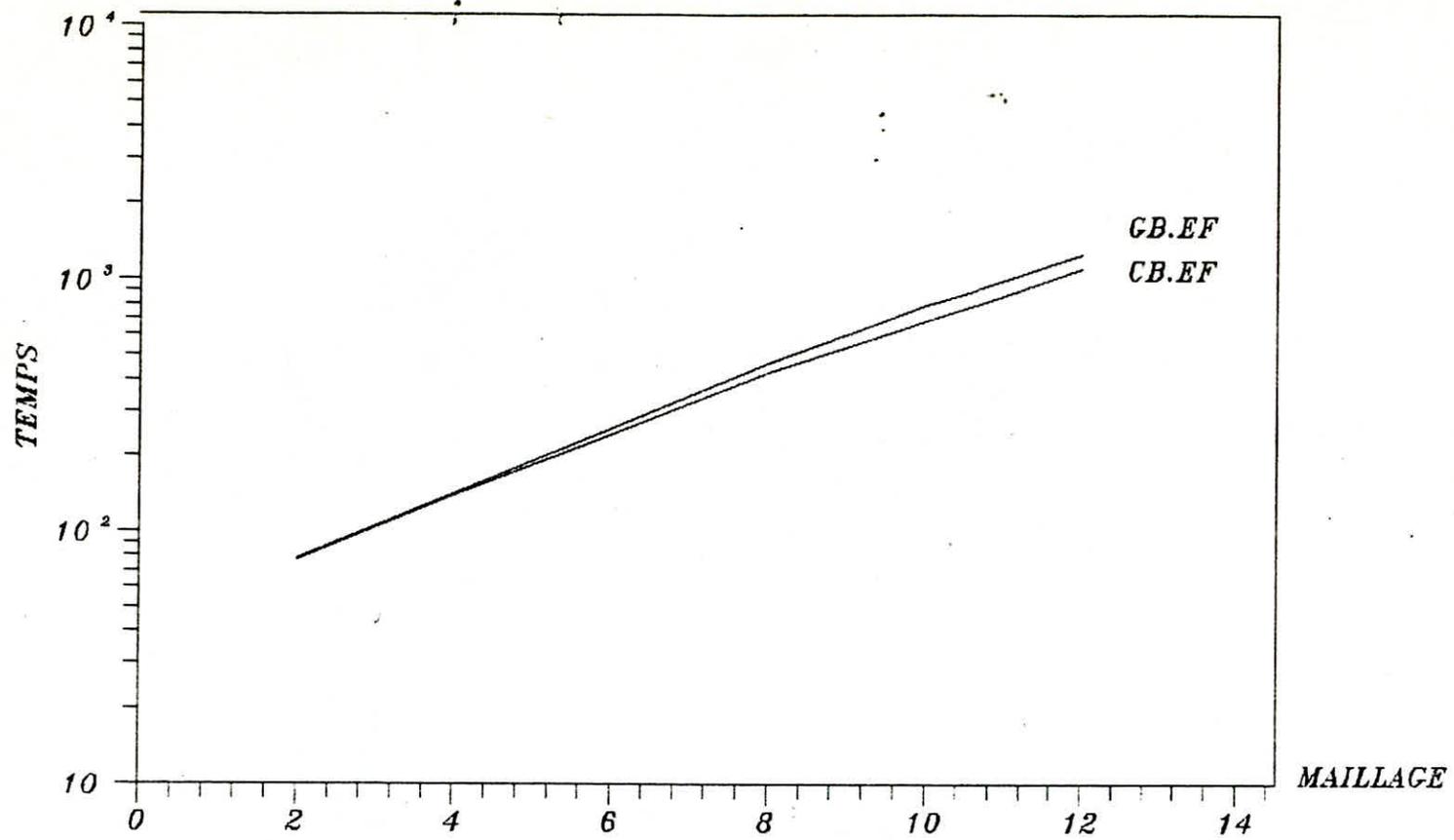
Fig(11): Plaque encastree sur
le pourtour
(C.EF-CB.EF-GB.EF-FRO)



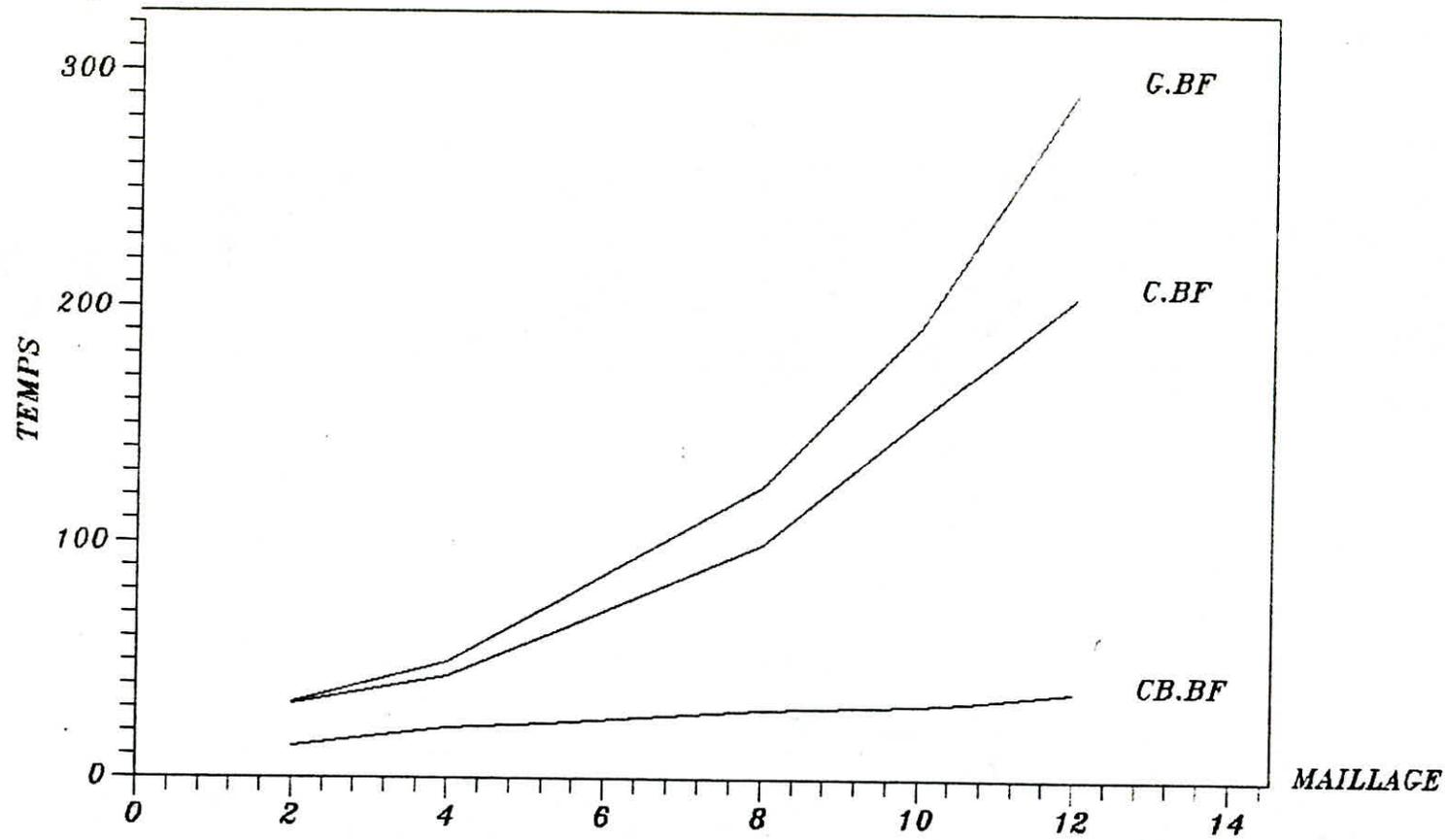
Fig(12): Plaque encastree sur
le pourtour
(C.EF-CB.EF-GB.EF-FRO)



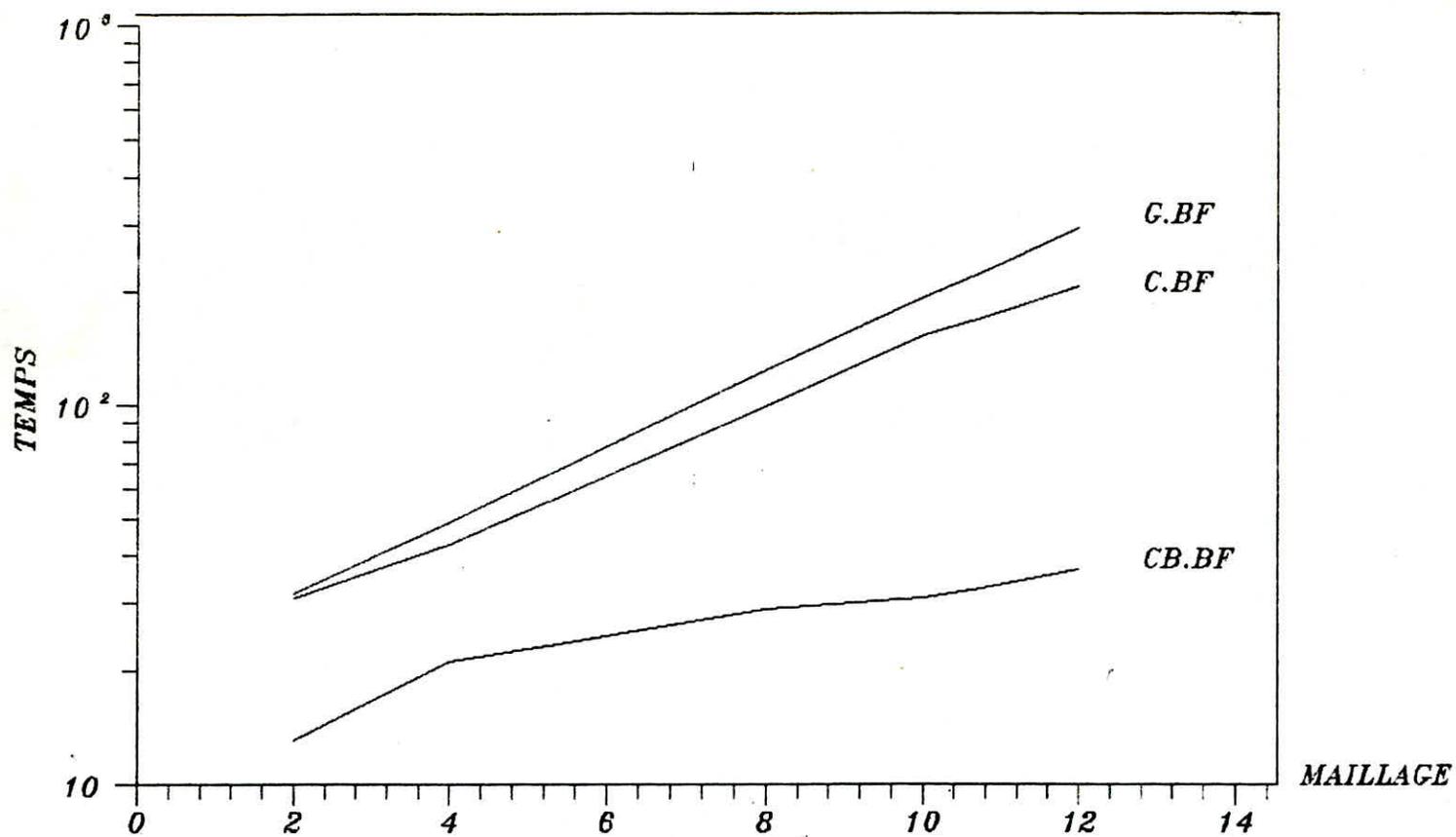
Fig(13): Plaque encastree sur
le pourtour
(CB.EF-GB.EF)



Fig(14): Plaque encastree sur
le pourtour
(CB.EF-GB.EF)



Fig(15): Plaque appuyee sur deux cotes opposes et encastree sur les deux autres (C.BF-G.BF-CB.BF)



Fig(16): Plaque appuyee sur deux cotes opposes et encastree sur les deux autres (C.BF-G.BF-CB.BF)

