

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT G-CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE DES PLAQUES MINCES
PLIEES PAR LA METHODE DES
BANDES FINIES

Proposé par :

P^r Tiliouine
M^r Demidem

Etudié par :

A. ATTAR
A.K. TAYEBI

Dirigé par :

P^r B. Tiliouine
M^r M. Demidem

PROMOTION : Juin 90

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللَّهُمَّ اجْعَلْ هَذَا الْعَمَلُ خَالِصًا
لِرَبِّكَ الْكَرِيمِ

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACES

Abdelkader Kamel TAYEBI

A mes parents,

A mes grands-parents,

A ma tante,

A mes Cheikhs

et à tous ceux qui croient en Dieu et le craignent.

Ahmed ATTAR

A mes parents,

A mes professeurs,

et à tous ceux qui se dévouent pour la Science, le Progrès
et le bien être de l'Homme.

R E M E R C I E M E N T S

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude au Professeur B. TILIOUINE et à Monsieur M. DEMIDEM qui nous ont proposé le sujet et nous ont éclairés de leurs conseils durant toute l'année.

Nous remercions vivement, pour toute l'aide que nous avons trouvée auprès d'eux :

- Professeur A. CHARIF
- Monsieur M.K. BERRAH
- Monsieur I. BEDJA
- Madame F. TAMALOUS

Nos remerciements vont également à tous nos enseignants et à tout le personnel de l'Ecole Nationale Polytechnique dont le dévouement est à citer en exemple.

S O M M A I R E

INTRODUCTION

PARTIE A :

CHAPITRE I. : PRESENTATION DE LA METHODE DES BANDES FINIES

1. Introduction
2. Philosophie de la méthode
3. Choix des fonctions de déplacements
- critères de convergence
4. Formulation des caractéristiques d'une bande.

PARTIE B : COMPORTEMENT FLEXIONNEL

CHAPITRE II : THEORIE DES PLAQUES MINCES EN FLEXION

1. Définitions et hypothèses fondamentales
2. Etude de la flexion pure
3. Flexion des plaques chargées transversalement
4. Méthodes de résolution de l'équation gouvernante.

CHAPITRE III : ANALYSE DE LA FLEXION DES PLAQUES PAR LA METHODE DES BANDES FINIES

1. Introduction
2. Etude d'une bande en flexion

CHAPITRE IV : PRESENTATION DU PROGRAMME FL BANDE

1. Introduction
2. Présentation du programme
3. Exemples numériques

PARTIE C : COMPORTEMENT MEMBRANAIRE

CHAPITRE V : THEORIE DE L'ELASTICITE PLANE

1. Rappels d'élasticité linéaire tridimensionnelle
2. Elasticité plane en coordonnées cartésiennes.

CHAPITRE VI : APPLICATION DE LA METHODE DES BANDES FINIES A L'ANALYSE DES PROBLEMES D'ELASTICITE PLANE

1. Introduction
2. Etude d'une bande en contrainte plane
3. Cas particulier

CHAPITRE VII : PRESENTATION DU PROGRAMME PLBANDE

- Exemple

PARTIE D : SUPERPOSITION DES DEUX COMPORTEMENTS (PLAQUES PLIEES)

CHAPITRE VIII : ANALYSE DES PLAQUES PLIEES PAR LA METHODE DES BANDES FINIES

1. Introduction
2. Etude des plaques pliées prismatiques

CHAPITRE IX : PRESENTATION DU PROGRAMME PPLBANDE

1. Présentation du programme PPLBANDE
2. Exemples

PARTIE E : PRESENTATION GENERALE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

CHAPITRE X : PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

1. Introduction
2. Formulation directe des caractéristiques d'un élément.
3. Calcul des déplacements des noeuds.
4. La méthode des déplacements considérée comme une minimisation de l'énergie potentielle.

5. Critères de convergence.
6. Erreur d'ue à la discrétisation et taux de convergence
7. Eléments non conformes : test de rapiéçage (Patch test)

CONCLUSION

INTRODUCTION

Depuis une cinquantaine d'années la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et poutres, le comportement de chaque élément de barres ou de poutres est représenté par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la résistance des matériaux. A partir des matrices élémentaires nous construisons un système d'équations algébriques en utilisant des conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonction des éléments. (noeuds)

La résolution du système d'équations correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements nodaux; c'est la méthode des déplacements qui s'applique aux systèmes discrets (barres et poutres). Les milieux continus tels que les plaques et les coques ne sont analysés que pour des cas particuliers de géométrie et de chargement simples, par des méthodes analytiques parfois très laborieuses.

L'apparition des ordinateurs, l'évolution de la technologie, la complexité des projets réalisés par les ingénieurs et les besoins de l'industrie aéronautique ont provoqués un développement rapide de la mécanique des structures donnant naissance à la méthode des éléments finis vers les années 60, où l'élément triangulaire était utilisé pour l'analyse des problèmes d'élasticité plane; depuis elle subit des développements rapides et de nouveaux éléments sont développés (rectangulaire, isoparamétrique, élément de coque, etc...

Les critères d'économie en temps d'exécution et de préparation des données deviennent de plus en plus importants donnant ainsi naissance à la méthode des bandes finies en 1968 par Y. K. CHEUNG pour les structures à géométrie et conditions aux limites régulières tout de suite après, la méthode jeune voit le développement d'éléments de plus en plus précis et s'étend aux plaques biaisées et aux coques, elle trouvera un grand champ d'application dans les ponts en étudiant les poutres en caissons et les tabliers de ponts, comme des plaques pliées fermées.

De nombreux programmes généraux sont développés en éléments finis, NASTRAN, SAP, ANSYS, TITUS, ADINA mais nécessitent de grosses machines, en parallèle sont apparus des programmes de bandes finies tel que le programme STRIP pour l'analyse des ponts droits et courbes, ce programme a été utilisé par le département de l'environnement de Grande Bretagne. L'apparition des micro-ordinateurs a permis le développement de nouveaux programmes adaptés à ces machines utilisées par les entreprises et les bureaux d'étude. On peut citer SAP 80, SUPERSAP, ROBOCAD, etc....

Les méthodes d'éléments finis et bandes finies consistent à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elles font appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'Ingénieur, pour construire les équations aux dérivées partielles,
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

Les structures en plaques pliées ont fait l'objet (et le font encore actuellement) de plusieurs recherches par éléments finis (ZIENCKIENVICZ, ROCKEY et al, BATOZ....) et par bandes finies (Y. K. CHEUNG, M.S. CHEUNG, A. GHALI, Y.C. LOO, A. CUSENS....) utilisant divers types d'éléments et de bandes.

Pour notre travail, nous traiterons :

- la méthode des bandes finies,
- nous présenterons :
- la théorie des plaques minces en flexion, et l'application de la méthode des bandes finies à cette théorie.
 - La théorie de l'élasticité plane, l'analyse des problèmes d'élasticité plane par la méthode des bandes finies.
 - La superposition des comportements flexionnels et membranaires et application aux plaques pliées.
 - la méthode des éléments finis.

PARTIE A



CHAPITRE I : PRESENTATION DE LA METHODE DES
BANDES FINIES

PRESENTATION DE LA METHODE DES BANDES FINIES (MBF)

INTRODUCTION

La méthode des éléments finis est devenue de nos jours un outil universel très puissant pour l'analyse des structures.

Elle consiste à :

- Découper la structure par des lignes ou des surfaces imaginaires dans des directions qu'on se fixe. La structure est ainsi subdivisée en un nombre fini d'éléments.
- Choisir des fonctions de déplacement permettant de définir de manière unique le champ de déplacement à l'intérieur de chaque élément.
- Formuler des matrices de rigidité élémentaires pour chaque élément respectivement.
- Assembler ces différentes matrices en une matrice dite matrice de rigidité globale de la structure.
- Déterminer un système de forces concentrées aux noeuds qui équilibrent les contraintes s'exerçant aux frontières et d'éventuelles forces réparties.
- Introduire les conditions aux limites pour la détermination des inconnues du problème.

Cependant pour un grand nombre de structures, à géométrie régulière et aux conditions aux limites simples, une analyse par éléments finis est souvent coûteuse en temps de préparation des données et en temps machine.

Cette remarque étant particulièrement valable pour l'analyse des structures bidimensionnelles (plaques), des solides tridimensionnels et des structures spatiales telles que plaques pliées.

Il était donc souhaitable de trouver une méthode simplifiant le problème, c'est à dire réduisant le nombre de paramètres à introduire. C'est ainsi qu'apparut la Méthode des Bandes finies.

Dans cette méthode, la structure est subdivisée en sous domaines bidimensionnels (bandes) ou tridimensionnels (prismes et couches) dont deux extrémités (cas de bandes) ou deux faces (cas de prismes et couches) opposées coïncident avec les côtés de la structure.

Comme généralement, la géométrie de la structure est constante le long d'un ou deux axes de coordonnées, la largeur de la section droite de la bande, des prismes ou de la couche ne varie pas d'une extrémité à l'autre.

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à l'analyse des structures bidimensionnelles, découpées dans une seule direction, en un certain nombre de bandes, de largeurs et une épaisseur propres.

Pour ce type de structures bidimensionnelles, il est bon de rappeler que la méthode des éléments finis choisit des fonctions de déplacement dans toutes les directions alors que la méthode des bandes finies approche le champ de déplacement à l'intérieur de chaque bande par des fonctions simples dans une seule direction et des séries de fonctions continument dérivables dans la direction normale satisfaisant à priori aux conditions aux limites suivant cette direction.

La forme générale de la fonction de déplacement résulte donc du produit de fonctions polynomiales dans une direction avec des constantes comme inconnues et des séries dites fonctions de base dans la direction normale.

- la méthode des bandes finies ramène ainsi un problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel.

Aussi pour assurer la convergence vers la solution exacte, ces fonctions de déplacement doivent satisfaire aux conditions suivantes :

- les fonctions de base doivent satisfaire à priori aux conditions aux limites des deux extrémités de la bande.
- la forme des expressions polynomiales doit être choisie de telle manière qu'on puisse représenter un état de déformation constante suivant la largeur de la bande.
- les fonctions de déplacement doivent satisfaire aux conditions de compatibilité entre les bandes, c'est à dire sur les lignes nodales (frontière entre deux bandes consécutives).

La méthode des bandes finies est en somme la combinaison d'une méthode analytique et de la méthode des éléments finis du type déplacement.

2; PHILOSOPHIE DE LA METHODE

L'essentiel de la méthode se résume comme suit :

- La structure continue est divisée par des lignes imaginaires parallèles en un nombre fini de bandes dont les extrémités coïncident avec les côtés de la structure.
- Ces bandes sont reliées les unes aux autres par des lignes nodales qui constituent les frontières longitudinales de chaque bande. Il est à noter qu'il est possible d'utiliser des lignes nodales internes à chaque bande pour former une bande d'ordre plus élevé. Le nombre de degrés de liberté par ligne nodale dans le cas de la méthode des bandes finies est inférieur au nombre de degrés de liberté par noeud dans le cas de la méthode des éléments finis. Ceci est dû essentiellement à l'utilisation de fonctions continues dans le sens longitudinal.
- Des fonctions de déplacement sont choisies pour représenter le champ de déplacement à l'intérieur de la bande et par conséquent le champ de déformation et de contraintes.
- Partant de ces fonctions de déplacement et en se basant sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale de chaque bande, nous obtenons la matrice de rigidité et le vecteur chargement élémentaires qui équilibrent les différentes charges réparties et ou concentrées agissant sur la bande.
- Les équations exprimant le minimum de l'énergie potentielle de toute la structure sont obtenues en assemblant les matrices de rigidité et les vecteurs chargement de toutes les bandes en une matrice de rigidité générale et un vecteur chargement global. Comme la matrice de rigidité générale ainsi que sa largeur de bande sont très réduites, le système d'équations est facilement résolu par une méthode de résolution bande standard telle que Gauss bande ou Cholesky bande calculant ainsi les inconnues du problème.

En fait, une fois que la matrice de rigidité ainsi que le vecteur chargement sont développés pour chaque bande, le problème des plaques est similaire à celui des poutres et le problème des plaques pliées ou des coques à celui des portiques.

3. CHOIX DES FONCTIONS DE DEPLACEMENT : CRITERES DE CONVERGENCE

Il résulte de ce qui précède que le choix de la fonction de déplacement à un rôle déterminant pour les étapes à venir dans l'application de la méthode car de fausses fonctions de déplacement (ou inadéquates) peuvent aboutir à des résultats erronés et parfois même des résultats qui convergent vers des solutions inexactes.

Pour assurer la convergence de la solution, on doit vérifier les critères suivants :

- les séries en y des fonctions de déplacement doivent satisfaire aux conditions aux limites de la bande. Par exemple, dans la flexion des plaques simplement appuyées, la fonction de déplacement doit vérifier la nullité de la déflexion w et de sa dérivée seconde.
- la partie polynomiale en x doit satisfaire au critère de déformation constante sinon, il n'y a aucune garantie pour que la solution obtenue converge vers la solution exacte lorsque le nombre de bandes augmente.

Ce critère peut être illustré de deux façons :

- . Si on utilise un polynôme simple de la forme le critère sera vérifié, si le polynôme différencié pour obtenir la déformation, contient un terme constant.

Par exemple, dans la flexion des plaques, le polynôme en x doit contenir au moins un terme d'ordre deux. Si on choisit la fonction :

la dérivée seconde est alors dans laquelle a représente un terme constant.

Par contre, si on choisit la fonction : $a_1 + a_2x + a_3x^3 + a_4x^4$ la dérivée seconde est $-6a_3x - 12a_4x^2$ ne contient pas ce terme constant, par conséquent, pour $x = 0$ par exemple, cette fonction ne convergera jamais vers la solution exacte dans le cas d'une déformation constante.

- . Si on utilise des fonctions de formes, il n'est pas facile de connaître la complétude du polynôme. On adopte alors une approche différente : on introduit des paramètres de déplacements nodaux. En général, les paramètres de déplacements nodaux d'une bande déformée prennent des valeurs arbitraires indépendantes. Cependant, pour un état de déformation uniforme (la flexion cylindrique, cisaillement pur etc....) ceux-ci sont reliés d'une manière spécifique en prenant certaines valeurs prescrites. Si cet ensemble

de paramètres de déplacements nodaux, compatibles avec le critère de déformation constante, sont introduits dans la fonction de déplacement, le critère sera vérifié, si les fonctions de formes sont correctement choisies.

Par exemple, dans la flexion des plaques :

$$w = \sum_{m=1}^r \left[\left(1 - 3 \frac{x^2}{b^2} + 2 \frac{x^3}{b^3} \right) w_{im} + \left(x - 2 \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2} \right) \theta_{im} + \left(3 \frac{x^2}{b^2} - 2 \frac{x^3}{b^3} \right) w_{jm} + \left(\frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b} \right) \theta_{jm} \right] \gamma_m$$

pour : $w_{im} = w_{jm} = 0$ et $\theta_{im} = -\theta_{jm}$

(plaque assimilée à une seule bande)

$$w = \sum \left(x - \frac{x^2}{b} \right) \theta_{im} \gamma_m$$

$$\frac{\partial w}{\partial x^2} = \sum -\frac{2}{b} \theta_{im} \gamma_m = \text{constante pour } y \text{ donné}$$

donc l'état de déformation constante dans la direction x est vérifié.

- Les fonctions de déplacement doivent satisfaire la condition de compatibilité des déplacements le long des lignes nodales des bandes adjacentes, ce qui implique la continuité des déplacements et de leurs premières dérivées (au moins). Cette condition peut être formulée différemment : des fonctions de déplacement doivent être choisies de façon que les déformations requises, introduites dans la formulation de l'énergie restent finies le long des interfaces entre les bandes.

Ainsi pour l'élasticité bidimensionnelle, les déformations correspondant aux dérivées premières des fonctions de déplacement, on doit assumer la continuité des déplacements seulement. D'autre part pour la flexion des plaques, les déformations correspondant aux dérivées secondes et on doit alors assumer la continuité des déplacements et de leurs dérivées premières aux interfaces. Dans de telles conditions, il n'y aura pas de déformations infinies aux interfaces et donc pas de contribution des interfaces dans la formulation de l'énergie. L'énergie totale est alors égale à la somme des énergies de toutes les bandes. Une telle énergie potentielle sera toujours quelque peu supérieure à la valeur réelle car on a toujours tendance à surestimer la rigidité des éléments.

4. FORMULATION DES FONCTIONS DE DEPLACEMENT

Comme la fonction de déplacement résulte du produit de séries de fonctions en y , satisfaisant aux conditions aux limites suivant y , et de fonctions polynomiales en x , dites fonctions de formes exprimant la déformée, il est plus intéressant d'étudier chaque partie de la fonction de déplacement séparément.

4.1. LES SERIES

Les séries les plus utilisées sont les fonctions de base, dérivées de l'équation de vibration des poutres :

$$y = \frac{\mu^4}{a^4} \cdot y \quad \text{ou } a : \text{ la longueur de la poutre}$$

μ : un paramètre relatif aux fréquences naturelles de la bande.

La forme générale de la fonction de base est donnée par :

$$Y(y) = C_1 \cdot \sin \frac{\mu \cdot y}{a} + C_2 \cdot \cos \frac{\mu \cdot y}{a} + C_3 \cdot \sinh \frac{\mu \cdot y}{a} + C_4 \cdot \cosh \frac{\mu \cdot y}{a}$$

où les coefficients C_1, C_2, C_3 et C_4 sont déterminés par les conditions aux limites des deux extrémités de la bande :

On peut trouver dans la littérature les solutions pour les différentes conditions aux limites nous en donnons ci-après quelques unes :

- Deux extrémités simplement appuyées

$$Y_m(y) = \sin \frac{\mu_m \cdot y}{a} \quad \mu_m = m \cdot \pi \quad m = 1, r.$$

- Deux extrémités encastées :

$$Y_m(y) = \sin(\mu_m \cdot y/a) - \sinh(\mu_m \cdot y/a) - \alpha_m [\cos(\mu_m \cdot y/a) - \cosh(\mu_m \cdot y/a)]$$

$$\alpha_m = (\sin \mu_m - \sinh \mu_m) / (\cos \mu_m - \cosh \mu_m) \quad \text{avec } \mu_m = (2 \cdot m + 1) \cdot \pi / a \quad m = 1, r.$$

- Une extrémité simplement appuyée et l'autre extrémité encastée

$$Y_m(y) = \sin \frac{\mu_m \cdot y}{a} - \alpha_m \sinh \frac{\mu_m \cdot y}{a}$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m}{\sinh \mu_m} \quad \text{avec } \mu_m = \frac{4 \cdot m + 1}{4} \cdot \pi \quad m = 1, r.$$

- Une extrémité simplement appuyée et l'autre libre

$$Y_1(y) = y/a$$

$$Y_m(y) = \sin \frac{\mu_m \cdot y}{a} + \alpha_m \cdot \sinh \frac{\mu_m \cdot y}{a}$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m}{\sinh \mu_m} \quad \text{avec } \mu_m = \frac{2 \cdot m - 3}{4} \cdot \pi \quad m = 2, 3, \dots, r.$$

- Une extrémité encastée et l'autre libre

$$Y_m(y) = \sin(\mu_m \cdot y/a) + \sinh(\mu_m \cdot y/a) - \alpha_m (\cos \frac{\mu_m \cdot y}{a} - \cosh \frac{\mu_m \cdot y}{a})$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m + \sinh \mu_m}{\cos \mu_m + \cosh \mu_m} \quad \text{avec } \mu_m = \frac{2 \cdot m - 1}{2} \cdot \pi \quad m = 1, \dots, r.$$

- Deux extrémités libres

$$Y_1(y) = 1$$

$$Y_2(y) = 1 - 2y/a$$

$$Y_m(y) = \sin(\mu_m \cdot y/a) + \sinh(\mu_m \cdot y/a) - \alpha_m [\cos(\mu_m \cdot y/a) + \cosh(\mu_m \cdot y/a)]$$

$$\alpha_m = (\sin \mu_m - \sinh \mu_m) / (\cos \mu_m - \cosh \mu_m) \quad \text{avec } \mu_m = \frac{(2 \cdot m - 3) \cdot \pi}{2} \quad m = 3, r$$

Les fonctions citées ci-dessus sont utilisées pour la flexion et pour l'élasticité plane sauf que dans celle-ci pour le cas d'une bande encastree à ces deux extrémités, une autre fonction est utilisée, comme il sera détaillé plus tard. Ces fonctions possèdent la propriété remarquable d'orthogonalité:

$$\text{Pour } m \neq n \quad \int_0^2 Y_m Y_n dy = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^2 Y_m'' Y_n'' dy = 0$$

Cette propriété d'orthogonalité va s'avérer très significative en économie de temps et de mémoire. Cette multitude d'intégrales n'est nullement un handicap. En pratique les différentes fonctions de base, sont stockées dans une même subroutine et les intégrales sont évaluées numériquement ou analytiquement. On peut donc résoudre, par un même programme informatique, des problèmes avec plusieurs types de conditions aux limites.

4.2. FONCTION DE FORME

Une fonction de forme est un polynôme associé à un paramètre de déplacement nodal, décrivant le champ de déplacement le long de la section transversale de la bande, lorsque le paramètre nodal en question est égal à 1.

Pour un paramètre de déplacement nodal donné, la fonction de forme représente l'équation de la déformée d'une poutre de portée égale à la largeur de la bande, lorsque celui-ci prend une valeur unité pendant que tous les autres paramètres de déplacement nodaux sont pris égaux à zéro.

Ainsi l'expression (1-1) prend la forme suivante :

$$w = \sum_{m=1}^r [C_m] [C_m] \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta\}_1 \\ \{\delta\}_2 \end{Bmatrix}$$

La forme (1-2) vérifie bien que :

$$\begin{aligned} \text{Pour } x = 0 \quad [C_m] [C_m] &= [1000] \quad ; \quad \left[\frac{\partial [C_m]}{\partial x} \quad \frac{\partial [C_m]}{\partial x} \right] = [0100] \\ \text{et pour } x = b \quad [C_m] [C_m] &= [0010] \quad ; \quad \left[\frac{\partial [C_m]}{\partial x} \quad \frac{\partial [C_m]}{\partial x} \right] = [0001] \end{aligned}$$

Nous remarquons qu'au lieu de polynômes à coefficients indéterminés, nous avons utilisé des fonctions de forme, ceci pour les raisons suivantes :

- Eviter la longue procédure de relier les coefficients aux paramètres de déplacement nodaux, comme pour la méthode des éléments finis.
- S'assurer de la compatibilité des déplacements le long de l'interface de deux bandes adjacentes c'est à dire que les déplacements sont définis de façon unique par les paramètres de déplacement d'un noeud commun à ces deux bandes. Par définition, les fonctions de formes prennent une valeur unité pour les paramètres de ce noeud et s'annulent pour les autres noeuds.

Il est bon de donner ci-dessous quelques fonctions de formes usuelles :

- bande avec deux lignes nodales et deux paramètres de déplacement par ligne nodale

$$C_1 = 1 - \frac{x}{b} ; \quad C_2 = \frac{x}{b}$$

- bande avec deux lignes nodales et deux paramètres de déplacement par ligne nodale

$$\begin{aligned} [C_1] &= [(1 - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3) ; x(1 - 2\bar{x} + \bar{x}^2)] \\ [C_2] &= [(3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3) ; x(\bar{x}^2 - \bar{x})] \end{aligned} \quad \text{avec } \bar{x} = \frac{x}{b}$$

- bande avec deux lignes nodales et trois paramètres de déplacement par ligne nodale.

$$\begin{aligned} [C_1] &= [(1 - 10\bar{x}^3 + 15\bar{x}^4 - 6\bar{x}^5) ; x(1 - 6\bar{x}^2 + 8\bar{x}^3 - 3\bar{x}^4) ; x^2(0,5 - 1,5\bar{x} + 1,5\bar{x}^2 - 0,5\bar{x}^3)] \\ [C_2] &= [(10\bar{x}^3 - 15\bar{x}^4 + 6\bar{x}^5) ; x(-4\bar{x}^2 + 7\bar{x}^3 - 3\bar{x}^4) ; x^2(0,5\bar{x} - \bar{x}^2 + 0,5\bar{x}^3)] \end{aligned}$$

avec $\bar{x} = x/b$.

- bande avec trois lignes nodales et deux paramètres de déplacement par ligne nodale (U et V)

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - 3\bar{x} + 2\bar{x}^2 \\ C_2 &= 4\bar{x} - 4\bar{x}^2 \\ C_3 &= -\bar{x} + 2\bar{x}^2 \end{aligned} \quad \text{avec } \bar{x} = x/b$$

- bande avec trois lignes nodales et deux paramètres de déplacement par ligne nodale.

$$\begin{aligned} [C_1] &= [(1 - 23\bar{x}^2 + 66\bar{x}^3 - 68\bar{x}^4 + 25\bar{x}^5) ; x(1 - 6\bar{x} + 13\bar{x}^2 - 12\bar{x}^3 + 4\bar{x}^4)] \\ [C_2] &= [(16\bar{x}^2 - 32\bar{x}^3 + 16\bar{x}^4) ; x(-8\bar{x} + 32\bar{x}^2 - 40\bar{x}^3 + 16\bar{x}^4)] \\ [C_3] &= [(7\bar{x}^2 - 34\bar{x}^3 + 52\bar{x}^4 - 24\bar{x}^5) ; x(-\bar{x} + 5\bar{x}^2 - 8\bar{x}^3 + 4\bar{x}^4)] \end{aligned}$$

avec :

$$\bar{x} = x/b$$

4.2.1. FORMULATION DE FONCTIONS DE FORMES

4.2.1.1. utilisation de polynomes simples

Inversion directe

Soit une ligne avec deux noeuds et deux degrés de liberté par noeud () Le champ de déplacement pour ce modèle peut être défini de façon commode par une fonction polynomiale de la forme

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3$$

ou sous forme matricielle :

$$w = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix}$$

En introduisant les coordonnées convenables de chacune des deux lignes nodales respectivement dans l'expression (1-3) :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix}$$

Pour $x_1 = 0$ et $x_2 = b$, l'expression (1-4) devient :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/b^2 & -2/b & 3/b^2 & -1/b \\ 2/b^3 & 1/b^2 & -2/b^3 & 1/b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Le vecteur des coefficients inconnus (A1, A2, A3, A4) peut être obtenu en inversant l'expression de l'équation (1-5) ; cela donne :

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/b^2 & -2/b & 3/b^2 & -1/b \\ 2/b^3 & 1/b^2 & -2/b^3 & 1/b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

En remplaçant (A1, A2, A3, A4) par sa valeur dans l'équation (1-3) nous obtenons :

$$w = \left[\left(1 - 3 \frac{x^2}{b^2} + 2 \frac{x^3}{b^3}\right); \left(x - 2 \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right); \left(3 \frac{x^2}{b^2} - 2 \frac{x^3}{b^3}\right); \left(-\frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right) \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Cette méthode est très utilisée pour les cas simples, mais pour des cas complexes l'inversion devient très difficile et parfois même impossible si la matrice est singulière : On a alors recours à la formulation directe des fonctions de formes qui est souvent plus avantageuse.

4.2.1.2. Formulation directe des fonctions de formes

Dans cette approche directe, des polynômes de Lagrange et de l'Hermite sont utilisées pour construire des familles de fonctions de formes.

Par exemple pour le cas (d) on combine des polynômes linéaires.

Pour la fonction C1 elle doit prendre la valeur unité à la ligne nodale 1 est la valeur 0 aux deux autres lignes nodales.

Soient les deux polynômes linéaires $P_1 = (1 - x/b)$ et $P_2 = (1 - 2x/b)$

Fonction	L.N1	L.N2	L.N3	Critère satisfait
P1	1	1/2	0	NON
P2	1	0	1	NON
P1 X P2	1	0	0	OUI

Et on fait de même pour les autres fonctions.

5. FORMULATION DIRECTE DES CARACTERISTIQUES D'UNE BANDE

5.1. FONCTIONS DE DEPLACEMENT

La forme générale des fonctions de déplacement peut être écrite comme suit :

$$\{f\} = \sum_{m=1}^r [C_1] \dots [C_k] \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \vdots \\ \{\delta_k\} \end{Bmatrix} \cdot y_m = \sum_{m=1}^r y_m \sum_{i=1}^K [C_i] \cdot \{\delta_i\}_m \quad (1.6)$$

où :

K : représente le nombre de lignes nodales par bande
 m : le m ième terme de la série
 $\{\delta_i\}_m$: les paramètres de déplacement de la ligne nodale (i) relatifs au m ième terme de la série.

(C_i) : La fonction de forme associée aux paramètres de déplacement nodaux de la ligne nodale (i)

L'expression (1-6) peut être exprimée plus simplement sous la forme :

$$\begin{aligned} \{f\} &= \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^K [N_i]_m \cdot \{\delta_i\}_m \\ &= \sum_{m=1}^r [N]_m \cdot \{\delta\}_m \\ &= [N] \cdot \{\delta\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

5.2. DEFORMATIONS :

Connaissant les fonctions de déplacement, il est alors possible de trouver les déformations en effectuant les dérivations appropriées :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^K [B_i]_m \cdot \{\delta_i\}_m = \sum_{m=1}^r [B]_m \cdot \{\delta\}_m \\ &= [B] \cdot \{\delta\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

(B) est appelée Matrice de déformation.

5.3. CONTRAINTES

Les contraintes sont liées aux déformations par la relation suivante

$$\{\epsilon\} = [D] \cdot \{\epsilon\}$$

En remplaçant $\{\epsilon\}$ par sa valeur, l'expression de $\{\epsilon\}$

devient :

$$\{\epsilon\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\} \quad (1.9)$$

5.4. MATRICE DE RIGIDITE ET VECTEUR CHARGEMENT ELEMENTAIRE

D'après le principe de l'énergie potentielle minimum : pour que l'équilibre soit réalisé, il faut que l'énergie potentielle totale de la bande soit stationnaire par rapport à l'ensemble des variations des paramètres de déplacement nodaux de cette bande, ce que nous exprimons ci-dessous par la formule :

$$\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial \{\delta\}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \pi}{\partial \{\delta\}_i} \\ \frac{\partial \pi}{\partial \{\delta\}_r} \end{array} \right\} = \{0\} \quad (1.10)$$

π étant l'énergie potentielle totale de la bande.

Remarque

L'obtention de l'équilibre vrai, nécessite un minimum absolu de l'énergie potentielle totale (π) de la bande, une solution obtenue par la méthode des bandes finies, fournira toujours une valeur approchée de π supérieure à la valeur exacte.

L'énergie potentielle totale d'une bande est donnée par :

$$\pi = U + W_e$$

où

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^t \cdot \{\epsilon\} \cdot dV$$

(U : énergie potentielle de formation)

$$W_e = - \int_A \{\delta\} \cdot \{q\} \cdot dA$$

(W_e : travail du chargement surfacique (q) dans le déplacement.)

Compte tenu des valeurs de U et W_e :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^t \cdot \{\epsilon\} \cdot dV - \int_A \{\delta\}^t \cdot \{q\} \cdot dA \quad (1.11)$$

En remplaçant $\{\delta\}$, $\{\epsilon\}$, et $\{\epsilon\}$ par leurs valeurs respectives (1-7), (1-8) et (1-9), l'expression (1-11) devient :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\delta\}^t \cdot [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\} \cdot dV - \int_A \{\delta\}^t \cdot [N]^t \cdot \{q\} \cdot dA \quad (1.12)$$

substituons dans l'expression (1-10) à π sa valeur (1-12) et posons :

$$[S] = \int_V [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \quad \text{et} \quad \{F\} = \int_A [N]^t \cdot \{q\} \cdot dA$$

Nous obtenons la relation fondamentale :

$$[S] \cdot \{\delta\} - \{F\} = \{0\}$$

dans laquelle :

$[S]$: matrice similaire à la matrice de rigidité en éléments finis, n'est pas singulière comme celle-ci, mais est considéré tout de même comme une matrice de rigidité.

$\{F\}$: vecteur chargement qu'il faut appliquer aux lignes nodales pour équilibrer la densité de force $\{q\}$ lorsque les déplacements $(\{\delta\})$ sont empêchés.

5.4.1. Formulation de la matrice de rigidité élémentaire

$$[S] = \int_V [B]^t [D] [B] dV = \int_V \begin{bmatrix} [B]_1^t & \dots & [B]_r^t \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} [B]_1 \\ \dots \\ [B]_r \end{bmatrix} dV$$

$$= \int_V \begin{bmatrix} [B]_1^t [D] [B]_1 & \dots & [B]_1^t [D] [B]_r \\ \vdots & & \vdots \\ [B]_r^t [D] [B]_1 & \dots & [B]_r^t [D] [B]_r \end{bmatrix} dV$$

ou, plus simplement :

$$[S] = \begin{bmatrix} [S]_{11} & \dots & [S]_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ [S]_{r1} & \dots & [S]_{rr} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

avec ;

$$[S]_{mn} = \int_V [B]_m^t [D] [B]_n dV \quad (1.14)$$

L'équation (1-14) peut être exprimée en fonction du nombre de lignes nodales k de la bande par la formule suivante :

$$\begin{bmatrix} [S]_{11} & [S]_{12} & \dots & [S]_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [S]_{k1} & [S]_{k2} & \dots & [S]_{kk} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

dans laquelle :

$$[S]_{ij} = \int_V [B]_i^t [D] [B]_j dV \quad (1.16)$$

où les indices i et j représentent respectivement les lignes nodales i et j de la bande et V le volume de la bande.

5.4.2. Formulation du vecteur chargement élémentaire :

De même pour le vecteur chargement :

$$\{F\} = \int_A [N]^t \{q\} dA = \int_A \begin{bmatrix} [N]_1^t \\ \vdots \\ [N]_r^t \end{bmatrix} \{q\} dA \quad (1.17)$$

le même terme du vecteur chargement est donc : $\{F\}_m = \int_A [N]_m^t \{q\} dA$ (1.18)

et en fonction des lignes nodales de la bande :

$$\{F\}_m = \int_A \begin{bmatrix} [N]_1^t \\ \vdots \\ [N]_m^t \\ \vdots \\ [N]_k^t \end{bmatrix} \{q\} dA$$

avec :

$$\{F\}_i = \int_A [N]_i^t \{q\} dA \quad (1.19)$$

PARTIE B

COMPORTEMENT FLEXIONNEL

CHAPITRE II : THEORIE DES PLAQUES MINCES
EN FLEXION.

THEORIE DES PLAQUES MINCES EN FLEXION

1. DEFINITIONS ET HYPOTHESES FONDAMENTALES

Une plaque mince est un solide limité par un contour fermé et deux plans parallèles d'équations respectives : $z = +h/2$ et $z = -h/2$, pour lequel existe un plan moyen. (Fig. 2.1)

Ses dimensions sont liées par l'inéquation :

$$h/\min(a,b) < 1/5$$

La théorie classique des plaques minces (théorie de KIRCHOFF) est basée sur certaines hypothèses simplificatrices portant sur une variation linéaire des déformations et des contraintes selon l'épaisseur h de la plaque.

Figure 2.1.

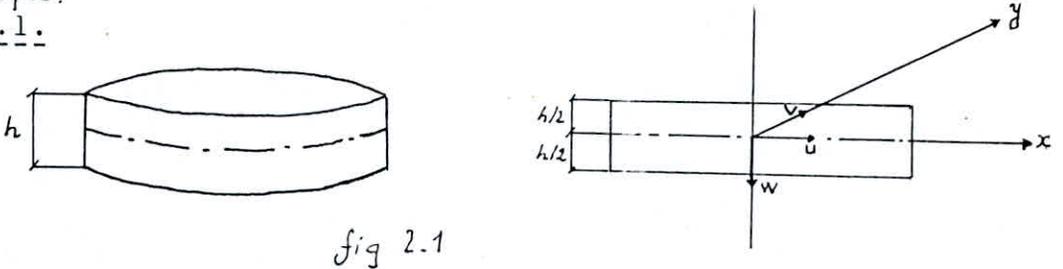


fig 2.1

Ces hypothèses sont les suivantes :

1. Les forces extérieures (y compris le poids propre de la plaque) peuvent être considérées comme appliquées au plan moyen.
2. La contrainte normale (ϵ_z) sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée par rapport à ϵ_x et ϵ_y c'est à dire $\epsilon_z = 0$
3. Le plan moyen ne subit aucune contraction, ni extension lors de la flexion de la plaque. On a donc : $u_0 = v_0 = 0$.
4. Les fibres de la plaque, normales au plan moyen avant la flexion, restent normales au plan moyen après déformation c'est à dire : $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ (Fig 2.2)

Figure 2.2

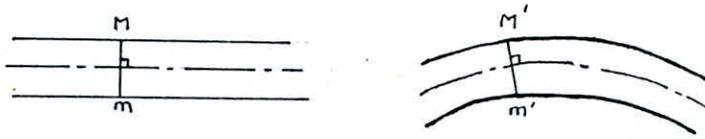


fig 2-2

On distingue deux sortes de plaques minces :

- Les plaques minces à petites flèches pour lesquelles toutes les hypothèses de KIRCHOFF sont vérifiées et sont caractérisées par :

$$w/h < 1/5$$

- Les plaques minces à grandes flèches pour lesquelles l'hypothèse 3 de KIRCHOFF n'est pas vérifiée :

Cette déformation étant dûe au fait que les contraintes de membrane ne sont plus négligeables devant celles dûes à la flexion.

Remarque :

Les plaques pour lesquelles on a :

$$h/\min(a,b) > 1/5$$

sont des plaques épaisses.

Dans ce cas la théorie de KIRCHOFF n'est plus valable et leur étude doit être conduite à l'aide de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. (Théorie de Mindlin)

Dans tout ce qui suit, on traitera uniquement l'étude des plaques minces à petites flèches.

2. ETUDE DE LA FLEXION PURE

2.1. RELATIONS DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS

D'après les hypothèses de KIRCHOFF, les relations déformations-déplacements se réduisent à :

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{ll} \epsilon_x = \partial u / \partial x & (a) \\ \epsilon_y = \partial v / \partial y & (b) \\ \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x & (c) \end{array} \right. & \begin{array}{ll} \epsilon_z = \partial w / \partial z & (d) \\ \gamma_{xz} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z & (e) \\ \gamma_{yz} = \partial w / \partial y + \partial v / \partial z & (f) \end{array} \end{aligned} \quad (2.1)$$

On se ramène donc à un état de déformation plane.

En intégrant l'équation (d) on obtient :

$$W = W(x,y)$$

C'est à dire que les hypothèses de KIRCHOFF permettent de poser le problème en deux dimensions.

En intégrant aussi les équations (e) et (f) on obtient :

$$U = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y)$$

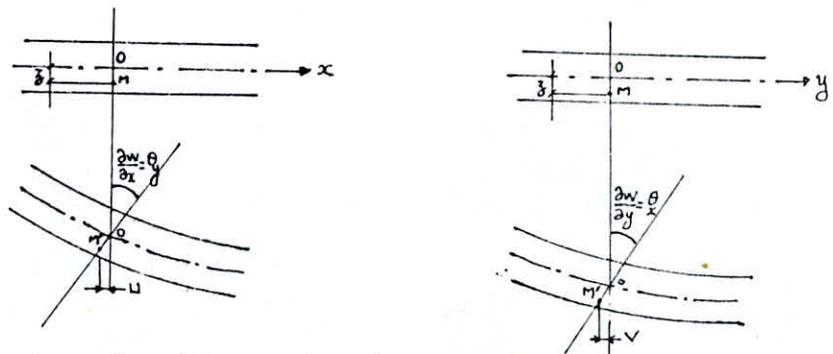
$$V = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y)$$

or $u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0$

(hypothèse 3) et donc finalement :

$$\begin{cases} U = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ V = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2.2)$$

Figure 2.3



En substituant les équations (2-2) dans les trois premières équations de (2-1) on obtient le tenseur de déformation suivant :

$$\begin{cases} \epsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.3)$$

$1/r_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$: courbure du plan moyen dans le plan xoz
 $1/r_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$: courbure du plan moyen dans le plan yoz
 $1/r_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$: courbure du plan moyen dans le plan zoy

Remarque :

Une courbure étant considérée négative si elle est concave vers le bas, ce qui explique les signes (-) des équations (2-3)

2.2. RELATIONS CONTRAINES-COURBURES

D'après la loi de HOOKE généralisée :

Plaque orthotrope :

On appelle plaque orthotrope, une plaque pour laquelle les propriétés matérielles suivant les directions x et y sont différentes.

C'est à dire :

suivant x : E_x et ν_x module de YOUNG coefficient

de POISSON respectivement :

avec :

$$\epsilon_x \cdot \nu_y = \epsilon_y \cdot \nu_x$$

En effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_y}{E_y} \cdot \sigma_y \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_x}{E_x} \cdot \sigma_x \\ \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \end{array} \right.$$

G étant le module d'élasticité transversal.

Ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = E_1 \cdot \epsilon_x + E' \cdot \epsilon_y \\ \sigma_y = E' \cdot \epsilon_x + E_2 \cdot \epsilon_y \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \end{array} \right. \quad \text{avec : } E_1 = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} ; E_2 = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} ; E' = \frac{\nu_x \cdot E_y}{1 - \nu_x \nu_y} = \frac{\nu_y \cdot E_x}{1 - \nu_x \nu_y}$$

En introduisant les courbures de la plaque on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -z \left(E_1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E' \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -z \left(E' \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \tau_{xy} = -2 \cdot G \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (2-4)$$

Plaque isotrope :

Pour le cas d'un matériau isotrope :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E_y = E \\ \nu_x = \nu_y = \nu \\ G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right.$$

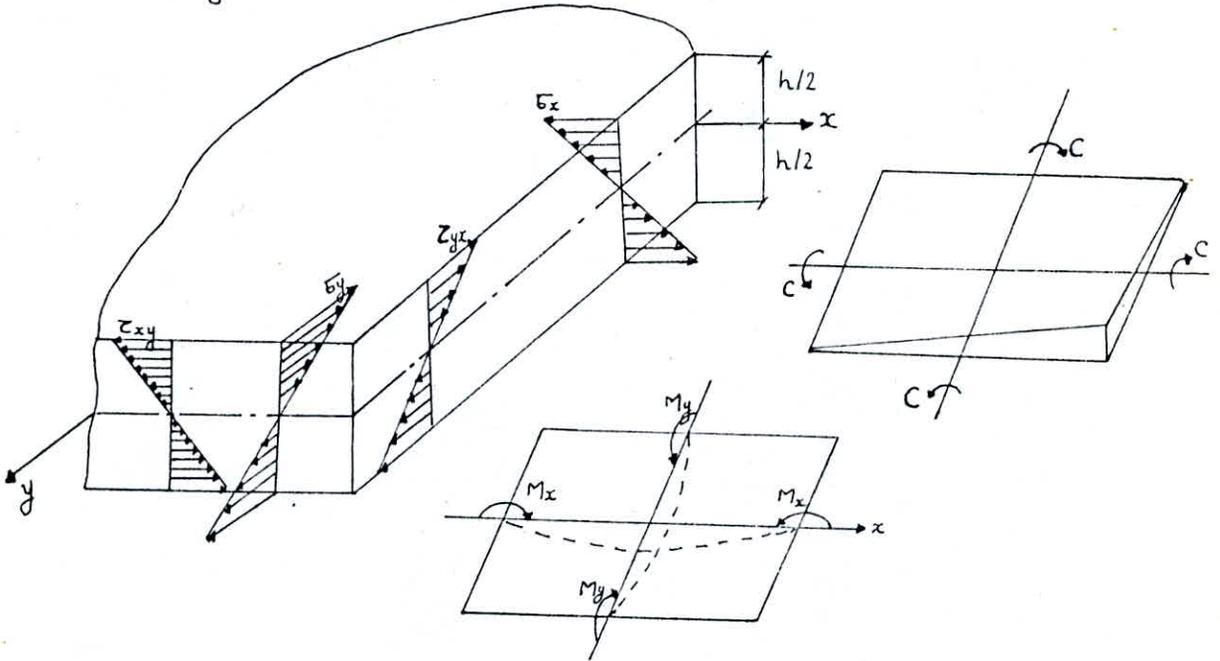
En remplaçant ces valeurs dans les équations (2-4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = - \frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = - \frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = - \frac{E \cdot z}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (2-5)$$

2.3. EFFORTS INTERNES

Les contraintes qui règnent sur l'épaisseur de la plaque produisent des moments de flexion, de torsion et des efforts tranchants par unité de longueur qui sont appelés "contraintes généralisées".

fig 2-4



Ces contraintes généralisées seront données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_x \cdot dz && \text{(moment de flexion autour de y} \\
 &&& \text{par unité de longueur dy)} \\
 M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_y \cdot dz && \text{(moment de flexion autour de x} \\
 &&& \text{par unité de longueur dx)} \\
 M_{xy} = M_{yx} = C &= \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \tau_{xy} \cdot dz && \text{(moment de torsion par unité de} \\
 &&& \text{longueur dx ou dy)}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Cas orthotrope :

En introduisant les équations (2-4) dans (2-6), il vient après intégration :

$$\begin{cases}
 M_x = - (D_x \cdot \partial^2 w / \partial x^2 + D_1 \cdot \partial^2 w / \partial y^2) \\
 M_y = - (D_y \cdot \partial^2 w / \partial y^2 + D_1 \cdot \partial^2 w / \partial x^2) \\
 C = - 2 \cdot D_{xy} \cdot \partial^2 w / \partial x \partial y
 \end{cases} \tag{2-7}$$

avec

$$D_x = E_1 \cdot h^3 / 12 \quad ; \quad D_y = E_2 \cdot h^3 / 12 \quad ; \quad D_1 = E' \cdot h^3 / 12 \quad \text{et} \quad D_{xy} = G \cdot h^3 / 12.$$

Cas isotrope :

En introduisant les équations (2-5) dans (2-6), il vient après intégration :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = -D (\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2) \\ M_y = -D (\partial^2 w / \partial y^2 + \nu \partial^2 w / \partial x^2) \\ C = -D (1 - \nu) \partial^2 w / \partial x \partial y \end{array} \right. \quad (2-8)$$

ou (D) représente la rigidité flexionnelle de la plaque :

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

D'après les relations (2-5) et (2-8) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = M_x \cdot z / I \\ \epsilon_y = M_y \cdot z / I \\ \tau_{xy} = C \cdot z / I \end{array} \right. \quad (2-9)$$

$$I = h^3 / 12$$

: moment d'inertie d'une section normale de la plaque de largeur unité.

3. FLEXION DES PLAQUES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT

En plus des moments M_x , M_y , et C , il existe des forces de cisaillement verticales agissant sur les côtés de l'élément, quand la plaque est chargée transversalement. Les valeurs de ces cisaillements T_x et T_y par unité de largeur sont :

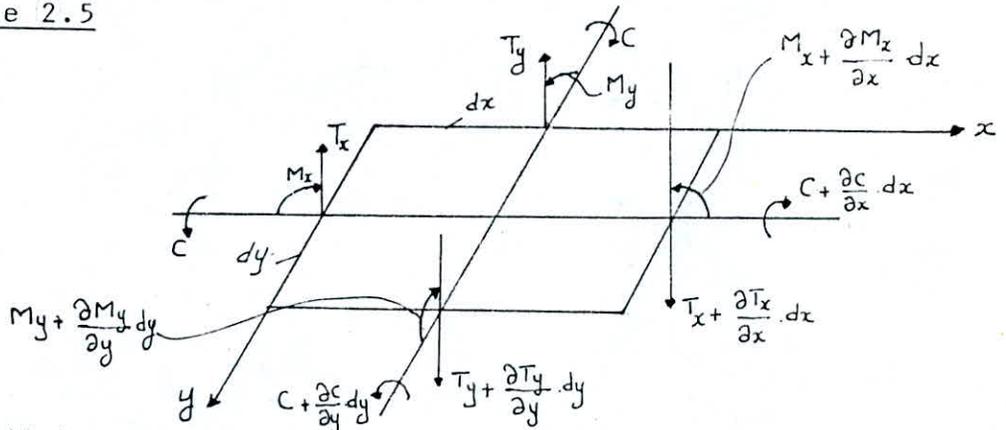
$$T_x = \int_{-h/2}^{+h/2} z_{x3} dz \quad \text{et} \quad T_y = \int_{-h/2}^{+h/2} z_{y3} dz$$

L'effet de cisaillement étant négligé dans la flèche, les expressions de M_x , M_y et C données pour le cas de la flexion pure, s'appliquent aussi dans ce cas.

3.1. EQUATION D'EQUILIBRE

Considérons un élément $dx \cdot dy$ de la plaque sur lequel agit une charge répartie $q(x,y)$ par unité de surface

Figure 2.5



Considérons l'équilibre de cet élément :

- $\sum F_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \cdot dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \cdot dx + q \cdot dx \cdot dy = 0$
d'où $\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -q$
- $\sum M_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x = 0$
- $\sum M_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - T_y = 0$

Dans ces deux équations nous avons négligé le moment de la charge q et les moments dûs aux variations de T_x et T_y car ce sont des infiniments petits d'ordre plus élevés que ceux retenus.

Les équations d'équilibre se réduisent aux trois équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -q(x,y) \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = T_x \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = T_y \end{array} \right. \quad (2.10)$$

En éliminant T_x et T_y entre ces trois équations nous trouvons :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x,y)$$

puis, en remplaçant M_x , M_{xy} et M_y par leurs expressions (2-7) pour le cas orthotrope et (2-8) pour le cas isotrope on obtient : l'équation gouvernante pour la déformée des plaques minces.

Cas orthotrope

$$D_x \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot H \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + D_y \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x,y) \quad (2.11) \text{ Equation d'Huber}$$

$$\text{ou } H = 2 \cdot D_{xy} + \frac{\nu_y \cdot D_x + \nu_x \cdot D_y}{2}$$

Cas isotrope

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{-q(x,y)}{D} \quad (2.12) \text{ Equation de Lagrange}$$

Remarque :

Si l'on remplace dans les deux dernières équations d'équilibre, M_x , M_y et M_{xy} par les valeurs (2-7) dans les cas isotrope on obtient ainsi les expressions des efforts tranchants en fonction de W :

Cas isotrope

$$T_x = D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D \cdot \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x}$$

$$T_y = D \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D \cdot \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y}$$

Cas orthotrope

$$T_x = -D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_1 + 2 \cdot D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

$$T_y = -D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_1 + 2 \cdot D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$$

3.2. CONDITIONS AUX LIMITES

Le déplacement $W(x,y)$ en plus des équations d'équilibre, doit satisfaire aussi aux conditions aux limites sur le contour de la plaque.

Bord encastré :

Le long d'un bord encastré :

- le déplacement latéral est nul
- le plan tangent à la surface moyenne fléchie coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque.

Exemple d'une plaque rectangulaire.

Si le bord ($x = a$) est encastré alors

$$w(x=a) = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x=a) = 0.$$

Bord simplement appuyé :

Le long d'un bord simplement appuyé :

- le déplacement latéral est nul.
- moment de flexion par rapport à la normale à ce bord.

Exemple d'une plaque rectangulaire.

Si le bord ($x=a$) est simplement appuyé alors

$$w(x=a) = 0$$

$$M_x(x=a) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ or } \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ (puisque'il n'y a pas de rotation autour de } x)$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ et la relation devient: } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Bord libre :

 Le long d'un bord libre :

- . le moment de flexion par rapport à la normale à ce bord est nul.
- . Le moment de torsion par rapport à la normale à ce bord est nul.
- . l'effort tranchant perpendiculaire à ce bord est nul.

Exemple d'une plaque rectangulaire :

si le bord ($x = a$) est libre alors

$$M_x(x=a) = 0 \quad ; \quad M_{xy}(x=a) = 0 \quad \text{et} \quad T_x(x=a) = 0.$$

KIRCHOFF démontra que trois conditions aux limites sont surabondantes.

Il remplaça les conditions relatives au moment de torsion et à l'effort tranchant par une seule

$$R_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{réaction nulle})$$

d'où alors l'expression des conditions aux limites pour le bords libre ($x = a$) de la plaque rectangulaire.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

3.3. ENERGIE DE DEFORMATION D'UNE PLAQUE

 Le travail élémentaire effectué par les moments internes $M_x dy$ et $M_y dx$ est donné par :

$$dw_1 = \frac{1}{2} \left(M_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx \cdot dy$$

Le travail élémentaire effectué par les couples $M_{xy} dy$ et $M_{yx} dx$ est donné par

$$dw_2 = \frac{1}{2} \left(M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + M_{yx} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx \cdot dy = M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \cdot dy$$

L'énergie de déformation de toute plaque est donc :

$$U = \iint_A (dw_1 + dw_2)$$

(A) étant la surface de la plaque. et donc :

$$U = \iint_A \left[\frac{1}{2} \left(M_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dx \cdot dy$$

4. METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTE

Les méthodes de résolution sont regroupées en deux classes :

1ere classe :

On part d'une fonction satisfaisant à l'équation gouvernante mais ne remplissant aucune ou quelques unes des conditions aux limites, puis on cherche une fonction complémentaire, qui satisfairait, en commun avec la première, tant à l'équation gouvernante, qu'à toutes les conditions aux limites.

2ème classe :

On procède de manière inverse : Partant d'une fonction satisfaisant aux conditions aux limites, mais pas à l'équation gouvernante, on cherche une fonction complémentaire telle que la fonction résultante $w(x,y)$ remplisse aussi l'équation gouvernante.

4.1. METHODES ANALYTIQUES

4.1.1. Méthode des séries doubles de Navier :

Plaque rectangulaire (a-b) simplement appuyée.

Cette méthode consiste à développer la charge $q(x,y)$ en série double de Fourier soit :

$$q(x,y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

où :

$$A_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

On exprime de la même façon le déplacement :

$$W(x,y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange W par sa valeur :

$$W(x,y) = \frac{1}{\pi^4 \cdot D} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Pour le cas d'une charge uniforme $q(x,y) = q_0$

$$W(x,y) = \frac{16q_0}{\pi^4 \cdot D} \sum_m \sum_n \frac{1}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

4.1.2. Méthodes variationnelles

On exprime W sous la forme

$$W(x,y) = \sum_n a_n \cdot f_n(x,y)$$

$f_n(x,y)$ étant des fonctions vérifiant les conditions aux limites.

Les inconnues du problème sont les coefficients a_n déterminés, de façon à ce que l'équation gouvernante de la plaque soit satisfaite, par différentes méthodes :

- Méthode des moindres carrés
- Méthode de RITZ du minimum de l'énergie potentielle
- Méthode de GOURSAT des variables complexes
- Méthode de GALERKINE
- Méthode des perturbations etc....

4.1.3. Méthodes directes d'intégration: Solution de MAURICE LEVY pour les plaques rectangulaires

(a, b) simplement appuyées sur deux côtés opposés :

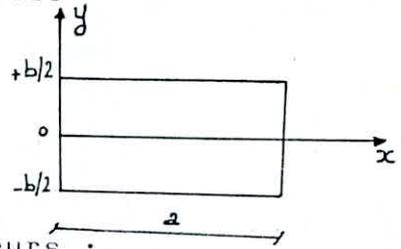
Maurice Levy a étudié les solutions de l'équation de Lagrange qui sont représentées par une série trigonométrique simple :

$$w(x,y) = \frac{1}{D} \cdot \sum_m Y_m(y) \cdot \sin \frac{m \cdot \pi x}{a}$$

dont les coefficients sont des fonctions de y. Cette solution qui vérifie les conditions $W=0$ et $\partial^2 W / \partial x^2 = 0$ pour $x=0$ et $x=a$ convient donc pour une plaque rectangulaire simplement appuyée sur ces deux côtés opposés $x = 0$ et $x = a$.

Nous allons voir qu'il est possible de déterminer les fonctions $y_m(y)$ de façon à vérifier des conditions aux limites diverses (bord encasturé, bord simplement appuyé au bord libre) le long des deux autres côtés de la plaque d'équation $y = \pm b/2$.
 Développons la charge $q(x,y)$ en série

$$q(x,y) = \sum_m q_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$



dont les coefficients ont pour valeurs :

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x,y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot dx$$

En reportant les séries donnant $w(x,y)$ et $q(x,y)$ dans l'équation de LAGRANGE, on trouve que les fonctions $Y_m(y)$ doivent vérifier les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

$$\sum_m \left(Y_m^{(4)} - 2 \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{(2)} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} = \sum_m q_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

soit :

$$Y_m^{(4)} - 2 \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{(2)} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = q_m(y)$$

L'intégrale générale de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$Y_m(y) = \bar{Y}_m(y) + Y_{m0}$$

• $\bar{Y}_m(y)$: solution homogène

$$\bar{Y}_m(y) = A_m \cosh(y) + B_m y \sinh(y) + C_m \sinh(y) + D_m y \cosh(y) ; A_m, B_m, C_m \text{ et } D_m$$

coefficients déterminés par les conditions aux limites.

Y_{m0} : Solution particulière évidente.

$$Y_{m0} = \frac{a^4}{\pi^4 m^4} \cdot q_m(y)$$

Précisons par exemple les conditions aux limites le long du côté $y=b$

- le côté $y = b/2$ est encasturé :

$$Y_m(b/2) = 0 \quad \text{et} \quad Y_m'(b/2) = 0$$

- le côté $y = b/2$ est simplement appuyé

$$Y_m(b/2) = 0 \quad \text{et} \quad Y_m''(b/2) = 0$$

- le côté $y = b/2$ est libre

$$Y_m''(b/2) - \frac{\partial \cdot m^2 \pi^2}{a^2} Y_m(b/2) = 0$$

$$\text{et} \quad Y_m'''(b/2) - (2 - \partial) \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'(b/2) = 0$$

Les fonctions $Y_m(y)$ doivent donc satisfaire à quatre conditions deux sur chacun des côtés $y = -b/2$ et $y = b/2$

Nous obtenons ainsi quatre équations linéaires pour déterminer les quatre constantes A_m, B_m, C_m et D_m .

4.2. Méthodes numériques :

Bon nombre de méthodes numériques traitent aussi le problème de la flexion des plaques, essentiellement :

- Méthode des différences finies
- Méthode des éléments finis
- Méthode des bandes finies
- Méthode des éléments aux frontières

Dans ce qui suit nous parlerons brièvement de la méthode des différences finies et de la méthode des éléments aux frontières. Les deux autres méthodes seront développées dans les chapitres suivants.

4.2.1. Méthode des différences finies

Le principe de la méthode consiste à remplacer l'équation différentielle de la plaque par une équation aux différences.

On quadrille la plaque par une série de droite parallèles aux axes de coordonnées.

Ces droites déterminent ainsi n points auxquels correspondent des déplacements inconnus

Les dérivées au noeud (i, j) s'expriment alors par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x} \approx \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} \\ \frac{\partial w_{ij}}{\partial y} \approx \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta y} \end{array} \right.$$

Δx et Δy étant le pas du maillage suivant x et y respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x^2} \approx \frac{w_{i+1,j} - 2 \cdot w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y^2} \approx \frac{w_{i,j+1} - 2 \cdot w_{i,j} + w_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \\ \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x \partial y} \approx \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial x^4} \approx \frac{w_{i+2,j} - 4 \cdot w_{i+1,j} + 6 \cdot w_{i,j} - 4 \cdot w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{(\Delta x)^4} \\ \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial y^4} \approx \frac{w_{i,j+2} - 4 \cdot w_{i,j+1} + 6 \cdot w_{i,j} - 4 \cdot w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{(\Delta y)^4} \\ \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} \cdot [4 \cdot w_{i,j} - 2 \cdot (w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1})] \end{array} \right.$$

En remplaçant les dérivées par leurs valeurs dans l'équation de Lagrange pour chaque noeud nous obtenons un système à n équations et n inconnues. Dans le cas particulier d'un maillage carré les équations du système ont la forme suivante :

$$\frac{1}{\lambda^4} \left[w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + 2(w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2}) - 8(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + 20 w_{i,j} \right] = \frac{P}{D}$$

avec $\lambda = \Delta x = \Delta y$

Les conditions aux limites s'expriment :

• Bord encasturé :

$$w_{2,j} = 0$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{2,j} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} (w_{3,j} - w_{1,j}) = 0$$

• Bord simplement appuyé :

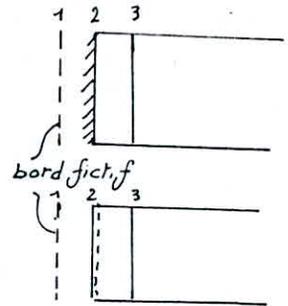
$$w_{2,j} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{2,j} = 0 \Rightarrow w_{1,j} - 2w_{2,j} + w_{3,j} = 0 \text{ or } w_{2,j} = 0 \Rightarrow w_{1,j} + w_{3,j} = 0$$

• Bord libre :

$$M_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{et } R_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$



Remarques :

- Une méthode plus simple est utilisée en pratique et qui consiste à :

écrire que :

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \nabla^2 w \Rightarrow \nabla^4 w = -\frac{1}{D} \nabla^2 M$$

l'équation de la plaque

$$\nabla^4 w = \frac{P}{D}$$

devient

$$-\frac{1}{D} \nabla^2 M = \frac{P}{D} \Rightarrow -\nabla^2 M = P$$

On résoud d'abord $\nabla^2 M = -P$ puis $\nabla^2 w = -\frac{M}{D}$.

- Pour les plaques doublement symétriques il suffit d'étudier le quart de la plaque seulement.

4.2.2. Méthode des éléments frontières ou Méthodes des équations intégrales de frontière

1. Introduction

Malgré sa souplesse et son immense champ d'application, la méthode des éléments finis peut présenter un certain nombre d'inconvénients quand elle est mise en oeuvre au travers de développements polynomiaux définis localement en tout point du domaine étudié. En particulier, des difficultés surgissent dans deux situations bien définies :

- a) quand le domaine devient infini et :
- b) quand apparaissent des singularités en des points (voir toutes les dérivées deviennent infinies).

La méthode des éléments finis ne s'applique évidemment pas telle quelle dans le premier cas. Quant au second cas, la solution est très grossièrement approchée par des développements polynomiaux : en effet, les théorèmes de convergence ne s'appliquent plus puisque le développement de Taylor ne converge pas au voisinage de telles singularités.

La technique la plus puissante pour la résolution de tels problèmes est la méthode de "résolution aux frontières" ou méthode des éléments frontières (Boundary element method). Comme dans l'histoire de la méthode des éléments finis, il est également difficile de remonter aux origines de la méthode.

Les distributions de sources de Von Karman dans la résolution des problèmes d'écoulement aérodynamique en 1930 contiennent certaines des idées de la méthode, qui a également bénéficié des travaux effectués dans le domaine de la théorie du potentiel par Jaswon et Symm et dans le domaine de l'élasticité par Masson et Oliveira en 1963, 1965 et 1968, Rizzor en 1967-68 et Cruze en 1970. Depuis la méthode a connu de nombreux développements et application dans d'autres domaines.

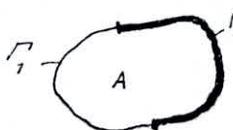
De façon générale, c'est une méthode qui s'applique aux problèmes d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites. Cette méthode a déjà eu des applications pratiques avec succès surtout dans les domaines de mécanique des sols et d'hydraulique (transfert de chaleur, écoulements dans les milieux poreux).

2. Formulation générale

Contrairement à la méthode des éléments finis, la méthode des éléments aux frontières n'est pas universelle, et il faut construire un modèle théorique pour chaque type d'équation aux dérivées partielles.

Nous allons donner une idée de la méthode pour le cas particulier de l'équation harmonique. $\Delta U = 0$ et on cherche la solution $U = U(x, y)$

Soit le domaine A limité par un contour $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$U = \bar{U} \text{ connu sur } \Gamma_1 \quad \Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \bar{q} \text{ connu sur } \Gamma_2$$


soit $U = U(x, y)$ solution exacte
 $\hat{U}(x, y)$ solution approchée
 $\Delta \hat{U}(x, y) = R$

R = résidu non nécessairement nul

On cherche à construire une solution approchée qui minimise le résidu R, en utilisant des fonctions de pondérations

$$\int_A R(x, y) \cdot \psi(x, y) dA = 0. \quad (1)$$

où $\psi(x, y)$ est la fonction poids

$$\text{où} \quad \int \Delta \hat{U}(x, y) \cdot \psi(x, y) dA = 0.$$

Appliquons le théorème de Green une première fois

$$\int_A \nabla \hat{U}(x, y) \cdot \nabla \psi(x, y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{U}}{\partial n} \cdot \psi(x, y) \cdot ds = 0.$$

et une deuxième fois

$$\int_A \hat{U}(x, y) \cdot \Delta \psi(x, y) dA + \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{U}}{\partial n} \psi(x, y) \cdot ds - \int_{\Gamma} \hat{U} \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot ds = 0.$$

On choisit alors $\psi(x,y)$ telle que $\Delta \psi = 0$.
 et ψ a alors une valeur bien déterminée.

3. Formulation pour la flexion des plaques :

La plaque pouvant être supportée le long de ses côtés ou à l'intérieur de son domaine l'équation gouvernante s'écrit :

$$D \cdot \nabla^4 w(x,y) = p(x,y)$$

Les variables du problème sont exprimées en fonction de la flèche w (en rotation indicelle).

$$q_\alpha = w_{,\alpha} \quad (\text{rotation}) \quad (2)$$

$$M_{\alpha\beta} = -D [\nu \cdot w_{,\alpha\alpha} \cdot \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) \cdot w_{\alpha,\beta}] \quad (\text{moment}) \quad (3)$$

$$Q_\alpha = -D \cdot w_{,\alpha\alpha\alpha} \quad (4) \quad (\text{Effort tranchant})$$

$\delta_{\alpha,\beta}$: symbole de CRONECKER

Le long de ses côtés, la plaque peut être
 - simplement appuyée $M_n = \bar{M}_n = 0$; $w = \bar{w} = 0$.

- encastrée $q_n = \bar{q}_n = 0$; $w = \bar{w} = 0$

- libre sur un, deux ou trois côtés $K_n = \bar{K}_n = 0$; $M_n = \bar{M}_n = 0$

où k_n représente l'effort tranchant équivalent ou réaction équivalente dans la théorie de Kirchhoff

$$K_n = Q_n + \frac{\partial M_{ni}}{\partial s}$$

soit la variable intermédiaire M telle que

$$M = \frac{M_{\alpha\alpha}}{1+\nu}$$

(I) s'écrit

$$\begin{cases} \nabla^2 M = -P \\ \nabla^4 w = -M/D \end{cases} \quad (6)$$

Ces expressions admettent une représentation intégrale en utilisant le second théorème de Green :

$$C(P) \cdot M(P) + \int_{\partial D} M(Q) \cdot \frac{\partial \psi(P,Q)}{\partial n} ds(Q) = \int_{\partial D} \frac{\partial M(Q)}{\partial n} \psi(P,Q) ds(Q) + \int_D P(B) \psi(P,B) dA(B)$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ étant la dérivée normale

(7)

où P et Q sont des points appartenant à la frontière et B un point appartenant au domaine.

\int_D l'intégrale étendue au domaine
 $\int_{\partial D}$ l'intégrale étendue au contour du domaine.

ψ est la solution fondamentale de l'équation de la place (fonction poids)

C(P) est un terme dont la valeur dépend de la forme locale de la frontière au point P

Si les valeurs de W et M sont cherchés à l'intérieur du domaine alors $C(P) = 1$

Les valeurs des variables Q_α et $M_{\alpha\beta}$ admettent aussi une représentation intégrale et peuvent être calculées à l'intérieur du domaine une fois que les valeurs des variables le long de la frontière sont trouvées en résolvant (7) et (8)

Dans les équations (7) et (8) les deuxième intégrales sont étendues au domaine et afin de résoudre le problème il faut les ramener au contour, en appliquant une seconde fois le théorème de Green : Ces intégrales ont la forme :

$$I = \int_D \psi(P, R) g(R) dA(R) \quad (9) \quad R \in D \text{ pouvant appartenir au domaine ou au contour}$$

On suppose que $g(R)$ admet une représentation de la forme :

$$g(R) = \sum_{j=1}^L \alpha_j f_j(R)$$

Si ξ_j est relié à f_j par $\nabla^2 \xi_j = f_j$ (10)

Alors en appliquant une seconde fois le théorème de Green

$$C(P) \xi_j(P) = \int_{\partial D} \xi_j(Q) \frac{\partial \psi(P, Q)}{\partial n(Q)} ds(Q) + \int_{\partial D} \frac{\partial \xi_j(Q)}{\partial n} \psi(P, Q) - \int_D f_j(R) \psi(P, R) dA(R)$$

Si on connaît une solution particulière de l'équation (10), il est possible d'évaluer l'équation (9) par les intégrales de frontière :

$$I = \sum_{j=1}^L \alpha_j \left[C(P) \xi_j(P) + \int_{\partial D} \xi_j(Q) \frac{\partial \psi(P, Q)}{\partial n(Q)} ds(Q) - \int_{\partial D} \frac{\partial \xi_j(Q)}{\partial n} \psi(P, Q) ds(Q) \right] \quad (11)$$

Indépendamment de la manière d'évaluation des intégrales, les variables w , $\partial w / \partial n$, M et $\partial M / \partial n$ doivent être définies, on discrétise la frontière par un nombre N de segments rectilignes avec une évolution constante ou pour plus de précision linéaire d'une extrémité à l'autre du segment.

Le détail de cette discrétisation et sa liaison aux intégrales ne font pas l'objet de ce travail.

Les intégrales (7) et (8) mènent alors à un système linéaire d'équation

$$\begin{aligned} [H].\{M\} - [G].\{q^M\} &= \{D\} \\ [H].\{w\} - [G].\{q^W\} &= \{E\} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad q_j^M = \frac{\partial M_j}{\partial n} \quad \text{et} \quad q_j^W = \frac{\partial w_j}{\partial n}$$

où $\{w\}$, $\{q_w\}$, $\{M\}$ et $\{q^M\}$ sont les valeurs des variables

aux N points de la frontière utilisés dans la discrétisation. (H) et (G) sont des matrices contenant des coefficients découlant du calcul des intégrales (7) et (8) (Ces intégrales sont calculées numériquement par la méthode de Gauss ou de Gauss Le genre)

Le long du contour tantôt M est connu et $\frac{\partial M}{\partial n}(q^M)$ est inconnu et tantôt l'inverse, et de même $\frac{\partial w}{\partial n}$ pour W

On introduit les conditions aux limites qui sont le long du contour.

Le seul inconvénient à la résolution est que les matrices [H] et [G] soient pleines, non symétriques et ne possèdent aucune propriété qui facilite la résolution.

Conclusion :

La méthode des intégrales aux frontières est donc un nouvel outil puissant de résolutions des problèmes de l'ingénieur, elle permet de ramener l'étude d'un domaine à l'étude de sa frontière et par conséquent un problème de deux dimensions à une seule et de trois dimensions à deux, elle permet aussi de surmonter les singularités (telles que les plaques percées), et d'étudier les problèmes à dimension semi infini (géomécanique). C'est une méthode relativement jeune qui est toujours en voie de développement et fait concurrence à la méthode des éléments finis.

CHAPITRE III : ANALYSE DE LA FLEXION DES
PLAQUES PAR LA METHODE DES
BANDES FINIES

ANALYSE DE LA FLEXION DES PLAQUES PAR LA METHODE DES BANDES FINIES

I. INTRODUCTION

Il est possible de résoudre le problème de la flexion des plaques par la méthode des bandes finies, pour diverses conditions aux limites.

Nous pouvons avoir des bandes :

- Simplement appuyées aux deux extrémités.
- Encastrées aux deux extrémités.
- Libres aux deux extrémités.
- Simplement appuyées à une extrémité et encastrées à l'autre.
- Simplement appuyées à une extrémité et libres de l'autre.
- Encastrées à une extrémité et libres à l'autre.
- Supportées élastiquement par des poutres.

Dans notre présent travail nous étudierons des plaques minces rectangulaires appuyées diversement et nous en tirerons un programme informatique qui nous permettra de les calculer simultanément, pour différents types de chargements transversaux. L'analyse de la flexion des plaques discrétisées en bandes, a été formulée, pour la première fois, par Hellan en 1963, pour une plaque rectangulaire isotrope, subdivisée en bandes reliées à leurs côtés, par considération de l'équilibre et de la continuité aux interfaces de ces bandes.

Puis ce fut **YK. CHEUNG** qui en 1968 proposa une meilleure approche connue sous le nom de "**METHODE DES BANDES FINIES**" semblable à la méthode des **ELEMENTS FINIS**. Il a d'abord étudié des bandes simplement appuyées et il introduisit d'autres conditions d'extrémités.

Un peu plus tard en 1969, **POWELL** et **OGDEN** ont publié, indépendamment, un article sur la formulation de la bande simplement appuyée.

Dans toutes les publications apparues jusqu'en 1969, les auteurs ont utilisé des bandes d'ordre inférieur ayant des fonctions de formes cubiques, les déplacements obtenus étaient très satisfaisants ; Cependant il existait des discontinuités des moments aux deux extrémités de la bande et des moments résiduels aux deux côtés libres pour un nombre de bandes petit ; cette discontinuité diminuait jusqu'à même disparaître lorsqu'on raffinait le maillage.

Pour assurer une convergence plus rapide avec un nombre restreint de bandes, **YK CHEUNG** suggera l'utilisation de bandes d'ordre supérieur en établissant des compatibilités d'ordre supérieur au niveau des lignes nodales.

De leur côté, en 1971, Loo et CUSENS, développeront deux types de bandes d'ordre supérieur ayant des fonctions de formes quintiques :

Bande Ho2 : Introduction de la courbure transverse parmi les paramètres de déplacement nodaux.

Bande Ho3 : Introduction d'une ligne nodale intermédiaire.

L'introduction de conditions aux limites, autres que simplement appuyées et encastées, fut présentée pendant la même année par YK CHEUNG et MS CHEUNG.

II. BANDE D'ORDRE INFÉRIEUR (Lo2)

La bande Lo2 est comparable à l'élément rectangulaire à 3 degrés de liberté par noeud.

Elle a comme avantages par rapport à celui-ci :

- une meilleure compatibilité des déplacements
- un nombre de degrés de liberté inférieur
- un nombre d'éléments, à la convergence, inférieur.

Notre plaque étant subdivisée en un certain nombre de bandes (fig 3.1) considérons une bande type, définie par deux côtés (i) et (j) et liée au repère x, y, z (fig 3.2)

Appelons θ la rotation autour de y et w le déplacement suivant z. Comme il a été dit dans le chapitre précédent, la méthode des bandes finies ramène un problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel.

Effectivement, le problème est similaire à celui d'une poutre c'est à dire que suivant x, le comportement de la bande est identique à celui d'une poutre à deux degrés de liberté par noeud.

Considérons alors une poutre de longueur b avec deux degrés de liberté par noeud (fig 3.3) :

un déplacement vertical w et une rotation θ .

En imposant tout à tour chaque déplacement nodal puis en superposant les effets pour chaque cas indépendant, nous obtenons le déplacement total d'un point de la poutre :

$$w_x = \psi_1(x) \cdot w_i + \psi_2(x) \theta_i + \psi_3(x) w_j + \psi_4(x) \theta_j$$

Les $\psi_i(x)$ étant des fonctions de formes telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{b^2} + 2 \cdot \frac{x^3}{b^3} \\ \psi_2(x) = x - 2 \cdot \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2} \\ \psi_3(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{b^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{b^3} \\ \psi_4(x) = \frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b} \end{array} \right.$$

Cependant pour tenir compte de la seconde dimension des séries de fonctions sont assumées et satisfont automatiquement aux conditions aux limites des extrémités de la bande.

fig: 3-1

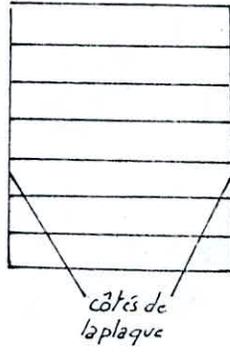


fig 3-2

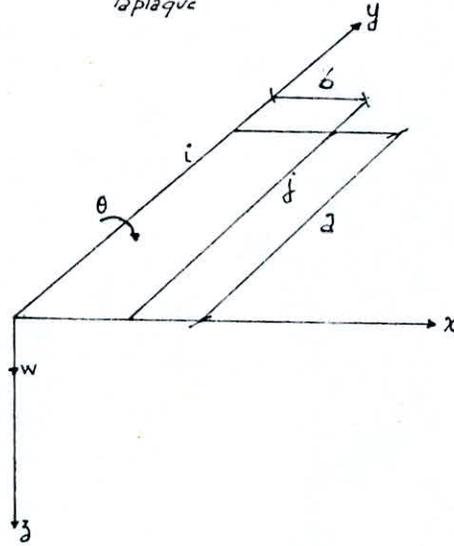
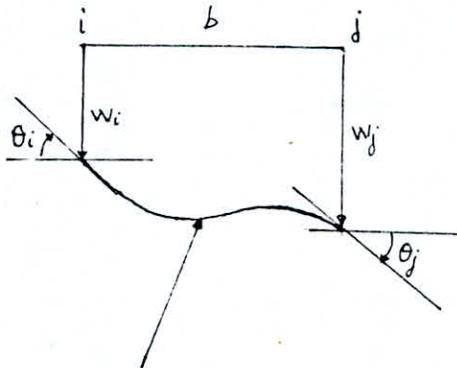


fig: 3-3



Position déformée de la poutre

1. Fonction de déplacement

L'assemblage des deux critères précédents à adopter l'expression suivante pour le déplacement vertical w des points de la bande.

$$w = \sum_{m=1}^r \left(\psi_1(x) w_{im} + \psi_2(x) \theta_{im} + \psi_3(x) w_{jm} + \psi_4(x) \theta_{jm} \right) \cdot \gamma_m \quad (3-1)$$

avec :

- r : nombre de coefficients de la série.
- γ_m : Fonction de base dépendant de y seulement et satisfaisant aux conditions aux limites suivant y .
- $\psi_i(x)$: Fonction de forme dépendant de x seulement.

En posant :

$$[C_1] = \left[1 - \frac{3x^2}{b^2} + 2 \frac{x^3}{b^3} ; x - 2 \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2} \right]$$

$$[C_2] = \left[3 \frac{x^2}{b^2} - 2 \frac{x^3}{b^3} ; \frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b} \right]$$

$$\{\delta_m\} = \begin{Bmatrix} w_{im} \\ \theta_{im} \\ w_{jm} \\ \theta_{jm} \end{Bmatrix}$$

L'expression (3-1) devient :

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^r \gamma_m \cdot [[C_1] \quad [C_2]] \{\delta_m\} \\ &= \sum_{m=1}^r [N]_m \cdot \{\delta\}_m \\ &= [N] \cdot \{\delta\} \quad (3-2) \end{aligned}$$

De la même manière le déplacement le long des lignes nodales (i) et (j) est donné par

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \gamma_m \cdot \{\delta\}_m = [[I] \cdot \gamma_1, [I] \cdot \gamma_2, \dots, [I] \cdot \gamma_r] \begin{Bmatrix} \{\delta\}_1 \\ \{\delta\}_2 \\ \vdots \\ \{\delta\}_r \end{Bmatrix} = [R] \cdot \{\delta\}$$

[I] étant la matrice unité d'ordre 4×4
 [R] matrice d'ordre $4 \times 4r$.

Remarques

- Les termes du vecteur $\{\delta\}_m$ sont des inconnues dont la signification physique est l'amplitude du même harmonique de la fonction de flèche et de rotation des lignes adjacents à la bande.
- La fonction w étant définie de la même manière pour toutes les bandes de la plaque, la continuité du déplacement vertical W et de sa dérivée $\partial w / \partial x$ est assurée le long des frontières (i) et (j) : ce qui accélère la convergence de la fonction vers la solution exacte.

2. Déformations :

Ayant la fonction de déplacement, exprimons les déformations ou plus exactement les courbures en fonction des paramètres de déplacement nodaux. Pour la flexion des plaques, les courbures correspondant aux dérivées secondes de la fonction de déplacement.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2 \cdot \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r [B]_m \cdot \{\delta\}_m = [B] \cdot \{\delta\} \quad (3-3)$$

avec :

$$[B]_m = \begin{bmatrix} \left(\frac{6}{b} - \frac{12x}{b^3}\right) \gamma_m & \left(\frac{4}{b} - \frac{6x}{b^2}\right) \gamma_m & \left(-\frac{6}{b^2} + \frac{12x}{b^3}\right) \gamma_m & \left(-6 \cdot \frac{x}{b^2} + \frac{2}{b}\right) \gamma_m \\ \left(1 - 3 \cdot \frac{x^2}{b^2} + 2 \cdot \frac{x^3}{b^3}\right) \gamma_m'' & \left(x - 2 \cdot \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right) \gamma_m'' & \left(3 \cdot \frac{x^2}{b^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{b^3}\right) \gamma_m'' & \left(\frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b}\right) \gamma_m'' \\ 2 \left(-\frac{6x}{b^2} + 6 \cdot \frac{x^2}{b^3}\right) \gamma_m' & 2 \left(1 - 4 \cdot \frac{x}{b} + 3 \cdot \frac{x^2}{b^2}\right) \gamma_m' & 2 \left(6 \cdot \frac{x}{b^2} - 6 \cdot \frac{x^2}{b^3}\right) \gamma_m' & 2 \left(3 \cdot \frac{x^2}{b^2} - 2 \cdot \frac{x}{b}\right) \gamma_m' \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

3. Contraintes :

Les contraintes sont représentées par les moments (moments de flexion et de torsion).
 Exprimons aussi le vecteur contraintes en fonction des paramètres de déplacement nodaux.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\epsilon\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\} = \sum_{m=1}^r [H]_m \cdot \{\delta\}_m \quad (3-5)$$

[D] étant la matrice d'élasticité.

- Plaque orthotrope :

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

$$D_x = \frac{E_x \cdot h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} ; D_y = \frac{E_y \cdot h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} ; D_1 = \frac{\nu_x \cdot E_y \cdot h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} ; D_{xy} = \frac{G h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}$$

(ν_x, ν_y) coefficients de Poisson suivant x et y respectivement.

(E_x, E_y) modules d'élasticité longitudinaux suivant x et y respectivement.

G : module d'élasticité transversal

h : épaisseur de la bande.

- plaque isotrope :

$$[D] = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \cdot D \end{bmatrix}$$

avec : $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$

ν : coefficient de Poisson

E : Module d'élasticité longitudinal

h : épaisseur de la bande

[H] m étant la matrice contrainte donnée par :

$$[H]_m = \begin{bmatrix} D_x \cdot A_1 + D_1 \cdot A_2 & D_x \cdot A_4 + D_1 \cdot A_5 & -D_x \cdot A_1 + D_1 \cdot A_7 & D_x \cdot A_8 + D_1 \cdot A_9 \\ D_1 \cdot A_1 + D_y \cdot A_2 & D_1 \cdot A_4 + D_y \cdot A_5 & D_1 \cdot A_4 + D_y \cdot A_5 & D_1 \cdot A_4 + D_y \cdot A_9 \\ D_{xy} \cdot A_3 & D_{xy} \cdot A_6 & -D_{xy} \cdot A_3 & D_{xy} \cdot A_{10} \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

ou

$$A_1 = \left(\frac{6}{b^2} - \frac{12x}{b^3} \right) y_m$$

$$A_2 = \left(1 - 3 \frac{x^2}{b^2} + 2 \frac{x^3}{b^3} \right) y_m''$$

$$A_3 = 2 \cdot \left(-6 \frac{x}{b^2} + 6 \cdot \frac{x^2}{b^3} \right) y_m'$$

$$A_4 = \left(\frac{4}{b} - 6 \cdot \frac{x}{b^2} \right) y_m$$

$$A_5 = \left(x - 2 \cdot \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2} \right) y_m''$$

$$A_6 = 2 \left(1 - 4 \frac{x}{b} + 3 \frac{x^2}{b^2} \right) y_m'$$

$$A_7 = A_2 - y_m''$$

$$A_8 = \left(-6 \frac{x}{b^2} + \frac{2}{b} \right) y_m$$

$$A_9 = \left(\frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b} \right) y_m''$$

$$A_{10} = 2 \cdot \left(3 \frac{x^2}{b^2} - 2 \cdot \frac{x}{b} \right) y_m'$$

4. Matrice de rigidité élémentaire

En intégrant l'expression (1.14), la sous matrice (S)_{mn} devient :

$$\begin{matrix}
 \text{[} \\
 \text{mn} = \\
 \text{]}
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 \frac{12}{b^3} \cdot D_x \cdot I_1 - \frac{6}{5b} \cdot D_1 (I_2 + I_3) & \frac{6}{b^2} D_x \cdot I_1 - \frac{1}{10} D_1 (I_3 + 11I_4) & -\frac{12}{b^3} D_x \cdot I_1 + \frac{6}{5b} D_1 (I_2 + I_3) & \frac{6}{b^2} D_x \cdot I_1 - \frac{1}{10} D_1 (I_2 + I_3) \\
 + \frac{13b}{35} D_y \cdot I_4 + \frac{24}{5b} \cdot I_5 & + \frac{11}{210} b^2 D_y \cdot I_4 + \frac{2}{5} D_{xy} \cdot I_5 & + \frac{9}{70} b \cdot D_y \cdot I_4 - \frac{24}{5b} D_{xy} \cdot I_5 & - \frac{13}{420} b^2 D_y \cdot I_4 + \frac{2}{5} D_x \cdot I_5 \\
 \frac{6}{b^2} \cdot D_x \cdot I_1 - \frac{1}{10} D_1 (I_2 + 11I_3) & \frac{4}{b} \cdot D_x \cdot I_1 - \frac{2}{15} b D_1 (I_2 + I_3) & -\frac{6}{b^2} D_x \cdot I_1 + \frac{1}{10} (I_2 + I_3) D_1 & \frac{2}{b} \cdot D_x \cdot I_1 + \frac{b}{30} D_1 (I_2 + I_3) \\
 + \frac{11}{270} \cdot b^2 \cdot D_y \cdot I_4 + \frac{2}{5} D_{xy} \cdot I_5 & + \frac{b^3}{105} D_y \cdot I_4 + \frac{8}{15} D_{xy} \cdot I_5 & + \frac{13}{420} b^2 D_y \cdot I_4 - \frac{2}{5} D_{xy} \cdot I_5 & - \frac{b^3}{140} D_y \cdot I_4 - \frac{2}{15} b \cdot D_{xy} \cdot I_5 \\
 -\frac{12}{b^3} \cdot D_x \cdot I_1 + \frac{6}{5b} D_1 (I_2 + I_3) & -\frac{6}{b^2} D_x \cdot I_1 + \frac{1}{10} D_1 (I_2 + I_3) & \frac{12}{b^3} D_x \cdot I_1 - \frac{6}{5b} D_1 (I_2 + I_3) & \frac{6}{b^2} D_x \cdot I_1 + \frac{1}{10} D_1 (I_3 + 11I_4) \\
 + \frac{9}{70} \cdot b \cdot D_y \cdot I_4 - \frac{24}{5b} D_{xy} \cdot I_5 & + \frac{13b}{420} D_y \cdot I_4 - \frac{2}{5} D_{xy} \cdot I_5 & + \frac{13}{35} b D_y \cdot I_4 + \frac{24}{5b} D_{xy} \cdot I_5 & - \frac{11}{210} b^2 D_y \cdot I_4 - \frac{1}{10} D_{xy} \cdot I_5 \\
 \frac{6}{b^2} \cdot D_x \cdot I_1 - \frac{1}{10} D_1 (I_2 + I_3) & \frac{2}{b} D_x \cdot I_1 + \frac{b}{30} D_1 (I_2 + I_3) & \frac{6}{b^2} D_x \cdot I_1 + \frac{1}{10} D_1 (I_2 + 11I_3) & \frac{4}{b} D_x \cdot I_1 - \frac{2}{15} b D_1 (I_2 + I_3) \\
 - \frac{13}{420} b^2 D_y \cdot I_4 + \frac{2}{5} D_x \cdot I_5 & - \frac{b^3}{140} D_y \cdot I_4 - \frac{2b}{15} D_{xy} \cdot I_5 & - \frac{11}{210} b^2 D_y \cdot I_4 - \frac{1}{10} D_{xy} \cdot I_5 & + \frac{b^3}{105} D_y \cdot I_4 + \frac{8}{15} D_{xy} \cdot I_5
 \end{bmatrix}
 \quad (3-8)$$

ou

$$I_1 = \int_0^a y_m \cdot y_n \cdot dy$$

$$I_2 = \int_0^a y_m'' \cdot y_n \cdot dy$$

$$I_3 = \int_0^a y_m \cdot y_n'' \cdot dy$$

$$I_4 = \int_0^a y_m'' \cdot y_n'' \cdot dy$$

$$I_5 = \int_0^a y_m' \cdot y_n' \cdot dy$$

Vu la propriété d'orthogonalité des fonctions de base, pour m différent de n , les intégrales I_1 et I_4 s'annulent, quel que soit le type de conditions aux limites ; par contre, les autres intégrales ne s'annulent que pour le cas de la bande simplement appuyée à ces extrémités.

Dans ce dernier cas la matrice de rigidité est découplée c'est à dire que :

$$[S]_{mn} = 0 \text{ pour } m \neq n.$$

Elle prend donc la forme :

$$\begin{bmatrix} [S]_{11} & & & 0 \\ & [S]_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [S]_{rr} \end{bmatrix}$$

avec

$$[S]_{mm} = \begin{bmatrix} \left. \begin{array}{l} 13ab \cdot k_m^4 D_y + \frac{12a}{5b} k_m^2 D_{xy} \\ + \frac{6a}{5b} k_m^2 D_1 + \frac{6a}{b^3} D_x \end{array} \right\} & & & \\ \left. \begin{array}{l} \frac{3a}{5} k_m^2 D_1 + \frac{a}{5} k_m^2 D_{xy} \\ + \frac{3a}{b^2} D_x + \frac{11 \cdot ab^2}{420} k_m^4 D_y \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} \frac{a \cdot b^3}{210} k_m^4 D_y + \frac{4ab}{15} k_m^2 D_{xy} \\ + \frac{2 \cdot ab}{15} k_m^2 D_1 + \frac{2a}{b} D_x \end{array} \right\} & & \\ \left. \begin{array}{l} \frac{9ab}{140} k_m^4 D_y - \frac{12a}{5b} k_m^2 D_{xy} \\ - \frac{6a}{5b} k_m^2 D_1 - \frac{6a}{b^3} D_x \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} \frac{13ab^2}{840} k_m^4 D_y - \frac{a}{5} k_m^2 D_{xy} \\ - \frac{a}{10} k_m^2 D_1 - \frac{3a}{b^2} D_x \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} \frac{13ab}{70} + \frac{12a}{5b} k_m^2 D_{xy} \\ + \frac{6a}{5b} k_m^2 D_1 + \frac{6a}{b^3} D_x \end{array} \right\} & \\ \left. \begin{array}{l} -\frac{13ab^2}{840} k_m^4 D_y + \frac{a}{5} k_m^2 D_{xy} \\ + \frac{a}{10} k_m^2 D_1 + \frac{3a}{b^2} D_x \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} -\frac{3ab^3}{840} k_m^4 D_y - \frac{ab}{15} k_m^2 D_{xy} \\ - \frac{a \cdot b}{30} k_m^2 D_1 + \frac{a}{b} D_x \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} -\frac{11ab^2}{420} k_m^4 D_y - \frac{a}{5} k_m^2 D_{xy} \\ - \frac{3a}{5} k_m^2 D_1 - \frac{3a}{b^2} D_x \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} \frac{ab^3}{210} k_m^4 D_y + \frac{4ab}{15} k_m^2 D_{xy} \\ + \frac{2 \cdot ab}{15} k_m^2 D_1 + \frac{2 \cdot a}{b} D_x \end{array} \right\} \end{bmatrix}$$

symétrique

(3-9)

Remarque :

Dans la Méthode des Eléments finis, pour une colonne donnée de la matrice de rigidité élémentaire, les coefficients de rigidité relatifs aux forces simples ont une somme nulle. Il en est de même pour les coefficients relatifs aux moments. Ce qui traduit l'équilibre des forces et des moments.

Par contre, dans la Méthode des Bandes Finies, ceci n'est pas vérifié, car la matrice de rigidité tient compte des conditions aux limites et les réactions des supports entrent en ligne de compte.

5. Vecteur chargement élémentaire :

5.1. Première formulation :

a) Charge répartie sur toute la bande

D'après l'expression (1-18) :

$$\{F\}_m = \int_0^a \int_0^b \begin{Bmatrix} [C_1]^t \\ [C_2]^t \end{Bmatrix} \cdot [q] \cdot Y_m \cdot dx \cdot dy \quad (3-10)$$

- cas d'une charge rectangulaire

$$\{F\}_m = q \cdot \begin{Bmatrix} b/2 \\ b^2/12 \\ b/2 \\ -b^2/12 \end{Bmatrix} \int_0^a Y_m \cdot dy \quad (3-11)$$

- cas d'une charge triangulaire

$$\{F\}_m = \frac{q}{a} \begin{Bmatrix} b/2 \\ b^2/12 \\ b/2 \\ -b^2/12 \end{Bmatrix} \int_0^a y \cdot Y_m \cdot dy \quad (3-12)$$

b) Charge uniforme partiellement répartie (q) de x_1 à x_2 (sens x) et de y_1 à y_2 (sens y)

$$\{F\}_m = q \cdot \int_{x_1}^{x_2} \begin{Bmatrix} [C_1]^t \\ [C_2]^t \end{Bmatrix} dx \int_{y_1}^{y_2} Y_m \cdot dy \quad (3-13)$$

c) Charge linéaire uniformément répartie suivant la droite $x = x_1$

$$\{F\}_m = q \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 \frac{x_1^2}{b^2} + 2 \frac{x_1^3}{b^3} \\ x_1 - 2 \frac{x_1^2}{b} + \frac{x_1^3}{b^2} \\ 3 \frac{x_1^2}{b^2} - 2 \frac{x_1^3}{b^3} \\ \frac{x_1^3}{b^3} - \frac{x_1^2}{b} \end{array} \right\} \int_0^a y_m \cdot dy \quad (3-14)$$

d) Charge concentrée (P) appliquée au point C (x_c, y_c)

$$\{F\}_m = P \cdot y_m(y_c) \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 \frac{x_c^2}{b^2} + 2 \frac{x_c^3}{b^3} \\ x_c - 2 \frac{x_c^2}{b} + \frac{x_c^3}{b^2} \\ 3 \frac{x_c^2}{b^2} - 2 \frac{x_c^3}{b^3} \\ \frac{x_c^3}{b^3} - \frac{x_c^2}{b} \end{array} \right\} \quad (3-15)$$

avec $y_m(y_c)$ la valeur de la fonction de base pour $y = y_c$

5.2. Deuxième formulation

Dans cette formulation, le chargement q est lui aussi exprimé sous forme de série de fonction de base dans la direction y c'est à dire :

$$q = q_1 \cdot y_1 + \dots + q_r \cdot y_r = \sum_{m=1}^r q_m \cdot y_m \quad (3-16)$$

Les coefficients q_m sont obtenus en multipliant (3.16) par Y_n et en l'intégrant.

En utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions de base nous obtenons :

- Pour une charge répartie de 0 à a :

$$q_m = \frac{\int_0^a q \cdot y_m \cdot dy}{\int_0^a y_m^2 \cdot dy} \quad (3-17)$$

- Pour une charge q répartie de $y = y_1$ à $y = y_2$

$$q_m = \frac{\int_{y_1}^{y_2} q \cdot y_m \cdot dy}{\int_0^a y_m^2 \cdot dy} \quad (3-18)$$

- Pour une charge P concentrée, appliquée au point $y = y_c$

$$q_m = \frac{y_m(y_c) \cdot P}{\int_0^a y_m^2 \cdot dy} \quad (3-19)$$

5.2.1. Expression du vecteur chargement :

Mettons d'abord le déplacement sous la forme suivante :

$$w = [[C] \cdot y_1, \dots, [C] \cdot y_r] \begin{Bmatrix} \{\delta\}_1 \\ \vdots \\ \{\delta\}_r \end{Bmatrix} = [C^e] \cdot \{\delta^e\} \quad (3-20)$$

avec : $[C] = [c_1, c_2, c_3, c_4]$

où : $c_i = \psi_i(x) \quad i=1, 4$ (fonctions de formes)

a) Cas d'une charge répartie sur toute la bande

$$\begin{aligned} \{F_q\} &= \int_0^b \int_0^a [C^e]^t \cdot q \cdot dx \cdot dy \\ &= \int_0^b \int_0^a \begin{Bmatrix} [C]^t \cdot y_1 \\ \vdots \\ [C]^t \cdot y_r \end{Bmatrix} (q \cdot y_1 + \dots + q \cdot y_r) \, dx \, dy \end{aligned}$$

or : $\int_0^a y_m y_n \cdot dy = 0 \quad \text{pour } m \neq n$

$$\text{d'où : } \{F_q\} = \int_0^b \int_0^a \begin{Bmatrix} [C]^t \cdot q_1 \cdot y_1^2 \\ \vdots \\ [C]^t \cdot q_r \cdot y_r^2 \end{Bmatrix} dx \, dy = \begin{Bmatrix} \{F\}_1 \\ \vdots \\ \{F\}_r \end{Bmatrix} \quad (3-21)$$

avec :

$$\{F\}_m = q_m \cdot \int_0^b [C]^t \cdot dx \int_0^a y_m^2 \cdot dy$$

En remplaçant q_m par sa valeur (3-17)

$$\{F\}_m = \int_0^b [C]^t dx \int_0^a q \cdot y_m dy$$

donc :

$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} b/2 \\ b^2/12 \\ b/2 \\ -b^2/12 \end{Bmatrix} \int_0^a q \cdot y_m dy \quad (3-22)$$

b) Cas d'une charge partiellement répartie de x_1 à x_2 (sens x)

$$\{F\}_m = \int_{x_1}^{x_2} [C]^t dx \int_{y_1}^{y_2} q \cdot y_m dy$$

Remplaçons q_m par sa valeur (3-18)

$$\{F\}_m = \int_{x_1}^{x_2} [C]^t dx \int_{y_1}^{y_2} q \cdot y_m dy \quad (3-23)$$

c) Cas d'une charge P concentrée, appliquée au point $C(x_c, y_c)$

$$\{F\}_m = q_m \cdot [C]^t \int_0^a y_m^2 dy$$

Remplaçons q_m par sa valeur (3-19) et x par x_c dans $[C]^t$

$$\{F\}_m = P \cdot y_m(y_c) \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 \cdot \frac{x_c^2}{b^2} + 2 \cdot \frac{x_c^3}{b^3} \\ x_c - 2 \cdot \frac{x_c^2}{b} + \frac{x_c^3}{b^2} \\ 3 \cdot \frac{x_c^2}{b^2} - 2 \cdot \frac{x_c^3}{b^3} \\ \frac{x_c^3}{b^2} - \frac{x_c^2}{b} \end{array} \right\} \quad (3-24)$$

d) Charges linéaires uniformément réparties sur les lignes no-
(i) et (j) de la bande :

En présence de ce type de chargement, l'expression de l'énergie potentielle totale de la bande devient :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^a \{\epsilon\}^t \{\epsilon\} dx dy - \int_a^b \int_a^a \{\delta\}^t \{q\} dx dy - \int_a^a [w_i \theta_i w_j \theta_j] \begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_j \\ M_j \end{Bmatrix} dy \quad (3-25)$$

- * le 1er terme représente l'énergie de déformation
- * le 2ème terme représente le travail du chargement surfacique $\{q\}$ dans le déplacement $\{\delta\}$
- * Le 3ème terme représente le travail des chargements le long des lignes nodales (i) et (j) dans le déplacement le long des lignes nodales (i) et (j)

- Pi et Mi représentent respectivement la force et le moment appliqués le long de (i)
- Wi et θi représentent respectivement le déplacement vertical et la rotation au niveau de (i)
- Pj et Mj représentent respectivement la force et le moment appliqués le long de (j)
- Wj et θj représentent respectivement le déplacement vertical et la rotation au niveau de (j)

Exprimons le chargement nodal $[P_i, M_i, P_j, M_j]$ sous forme de série :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_j \\ M_j \end{Bmatrix} &= \sum_{m=1}^r \gamma_m \begin{Bmatrix} P_{im} \\ M_{im} \\ P_{jm} \\ M_{jm} \end{Bmatrix} = [[I] \cdot \gamma_1, \dots, [I] \cdot \gamma_r] \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \vdots \\ \{P\}_r \end{Bmatrix} \quad (3-26) \\ &= \sum_{m=1}^r [R]_m \cdot \{P\}_m \\ &= [R] \cdot \{P\} \quad (3-26') \end{aligned}$$

avec :

$$[R]_m = \gamma_m \cdot [I] = \gamma_m \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

Le vecteur $\{P\}_m$ est obtenu en multipliant l'expression (3-26) par la matrice $[R]_m$ et en intégrant.

D'après la propriété d'orthogonalité des fonctions de base nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} P_{im} \\ M_{im} \\ P_{jm} \\ M_{jm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\int_0^a y_m^2 dy} \int_0^a y_m \cdot [I] \cdot \begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_j \\ M_j \end{Bmatrix} dy \quad (3-28)$$

- Pour $\begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_j \\ M_j \end{Bmatrix}$ constant et répartie de 0 à a :

$$\{P\}_m = \begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_j \\ M_j \end{Bmatrix} \frac{\int_0^a y_m \cdot dy}{\int_0^a y_m^2 dy} \quad (3-29)$$

- Pour $\begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_j \\ M_j \end{Bmatrix}$ constant et répartie de y_1 à y_2 (sens y)

$$\{P\}_m = \begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_j \\ M_j \end{Bmatrix} \frac{\int_{y_1}^{y_2} y_m \cdot dy}{\int_0^a y_m^2 dy} \quad (3-30)$$

En remplaçant $\{\varepsilon\}$, $\{c\}$, $\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_j \\ M_j \end{Bmatrix}$ par leurs valeurs, l'énergie potentielle π devient

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^d \{S\}^t [B]^t [D] [B] \{S\} dx dy - \int_0^b \int_0^d \{S\}^t [C]^t q dx dy - \int_0^a \{S\}^t [R]^t [R] \{P\} dy \quad (3-31)$$

Celle-ci étant minimale on peut écrire :

$$\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial \{S\}} \right\} = 0 \Leftrightarrow \int_0^b \int_0^d [B]^t [D] [B] \{S\} dx dy - \int_0^b \int_0^d [C]^t q dx dy - \int_0^a [R]^t [R] \{P\} dy$$

Posons alors :

$$\begin{cases} [S] = \int_0^b \int_0^d [B]^t [D] [B] dx dy \\ \{F\}_q = \int_0^b \int_0^d [C]^t q dx dy \\ \{F\}_P = \int_0^a [R]^t [R] \{P\} dy \end{cases} \quad (3-32)$$

Nous obtenons :

$$[S] \cdot \{S\} - \{F\}_q - \{F\}_P = 0 \quad (3-33)$$

Developpons : $\{F\}_P$

$$\begin{aligned}
 \{F\}_P &= \int_0^a [R]^T \cdot [R] \cdot \{P\} \cdot dy \\
 &= \int_0^a \begin{Bmatrix} [R]_1 \\ \vdots \\ [R]_r \end{Bmatrix} \cdot [R]_1, \dots, [R]_r \cdot \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \vdots \\ \{P\}_r \end{Bmatrix} dy \\
 &= \int_0^a \begin{Bmatrix} [I] \cdot y_1 \\ \vdots \\ [I] \cdot y_r \end{Bmatrix} [I] \cdot y_1, \dots, [I] \cdot y_r \cdot \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \vdots \\ \{P\}_r \end{Bmatrix} dy \\
 &= \int_0^a \begin{bmatrix} [I] \cdot y_1 \cdot y_1 & [I] \cdot y_1 \cdot y_2 & \dots & [I] \cdot y_1 \cdot y_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [I] \cdot y_r \cdot y_1 & [I] \cdot y_r \cdot y_2 & \dots & [I] \cdot y_r \cdot y_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \vdots \\ \{P\}_r \end{Bmatrix} dy \quad (3-34)
 \end{aligned}$$

De part la propriété d'orthogonalité la relation (3-34) devient

$$\{F\}_P = \int_0^a \begin{Bmatrix} [I] \cdot y_1^2 \cdot \{P\}_1 \\ \vdots \\ [I] \cdot y_r^2 \cdot \{P\}_r \end{Bmatrix} dy = \begin{Bmatrix} \{F_P\}_1 \\ \vdots \\ \{F_P\}_r \end{Bmatrix} \quad (3-35)$$

avec

$$\{F_P\}_m = \int_0^a [I] \cdot y_m^2 \cdot \{P\}_m \cdot dy = \{P\}_m \int_0^a y_m^2 \cdot dy \quad (3-36)$$

(P)_m étant donné par la relation (3-28)

5.3. Vecteur chargement pour le cas d'une bande simplement

appuyée:

-65-

Type de Chargement	Uniformement réparti q	partiellement réparti de x_1 à x_2 (sens x) et de y_1 à y_2 sens y	Linéique uniforme suivant la droite $x = x_1$	Concentrée au point $P(x_c, y_c)$
q_m	$q \cdot \frac{(1 - (-1)^m) b}{2 k_m}$	$q \cdot (\cos k_m x_1 - \cos k_m x_2)$	$q \cdot \frac{1 - (-1)^m}{k_m}$	-
Expression du vecteur chargement élément	$q_m \begin{Bmatrix} 1 \\ b/6 \\ 1 \\ -b/6 \end{Bmatrix}$	$q_m \begin{Bmatrix} x_0 - \frac{x_0^3}{b^2} + \frac{x_0^4}{2b^3} \\ \frac{x_0^2}{2} - \frac{2}{3} \frac{x_0^3}{b} + \frac{x_0^4}{4b^2} \\ \frac{x_0^3}{b^2} - \frac{x_0^4}{2b^3} \\ \frac{x_0^4}{4b^2} - \frac{x_0^3}{3b} \end{Bmatrix}$	$q_m \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x_1^2}{b^2} + \frac{2x_1^3}{b^3} \\ x_1 - \frac{2x_1^2}{b} + \frac{x_1^3}{b^2} \\ \frac{3x_1^2}{b^2} - \frac{2x_1^3}{b^3} \\ \frac{x_1^3}{b^2} - \frac{x_1^2}{b} \end{Bmatrix}$	$P \cdot \sin k_m y_c \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x_c^2}{b^2} + \frac{2x_c^3}{b^3} \\ x_c - \frac{2x_c^2}{b} + \frac{x_c^3}{b^2} \\ \frac{3x_c^2}{b^2} - \frac{2x_c^3}{b^3} \\ \frac{x_c^3}{b^2} - \frac{x_c^2}{b} \end{Bmatrix}$

CHAPITRE IV : PRESENTATION DU PROGRAMME
FLBANDE

PRESENTATION DU PROGRAMME FLEBANDE

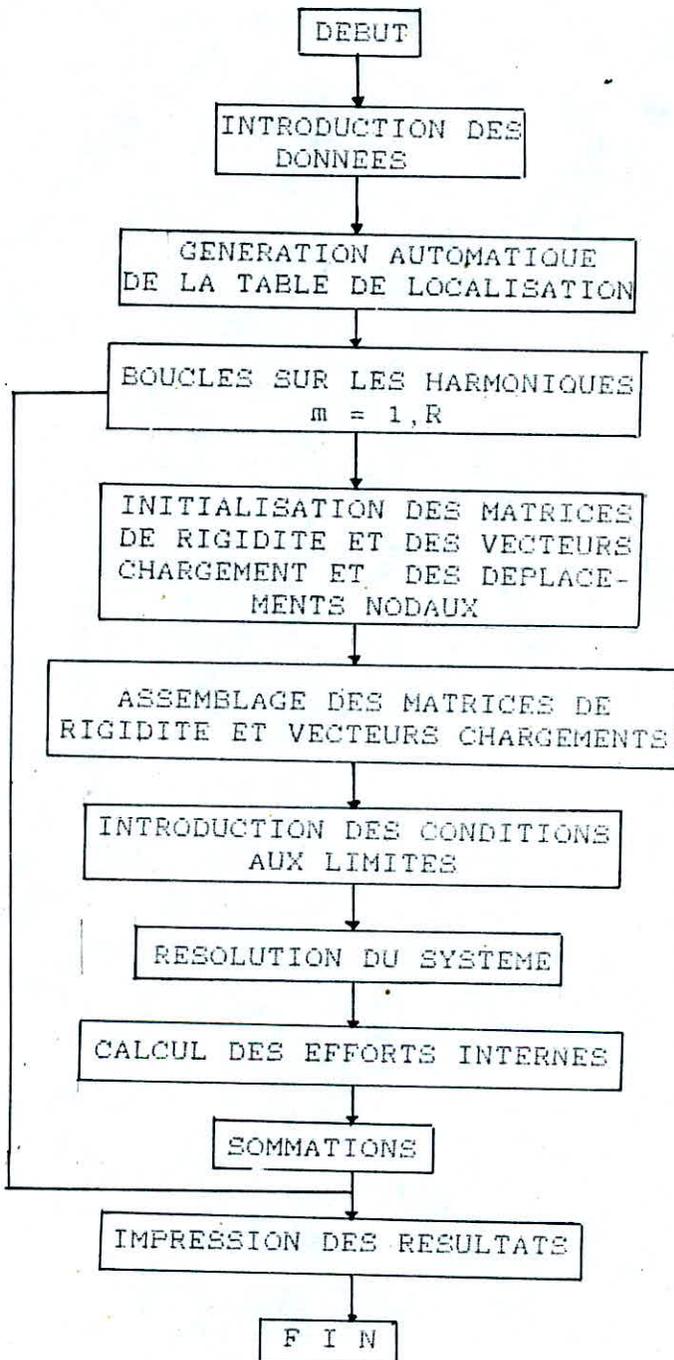
1. INTRODUCTION

Une analyse par éléments finis, finis ou bandes finies ou toute autre méthode numérique ne peut se faire que par l'aide de l'informatique, vu la manipulation de matrices et de vecteurs de grandes tailles et de résolution de systèmes d'équations importants, ce qui rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle à l'application de ces méthodes.

2. PRESENTATION DU PROGRAMME

Ce programme constitue la première partie du travail, il permet de résoudre les problèmes de flexion de plaques simplement appuyées sur deux côtés opposés et présente une structure beaucoup plus souple que les programmes d'éléments finis.

Il se présente comme suit :



2.1. LECTURE DES DONNEES : (SUBROUTINE LEC)

Les données à introduire sont :

- Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque.
- Largeur de bande dans le cas de bandes d'égales largeurs
- Les abscisses des lignes nodales dans le cas de bandes de largeurs différentes.
- Nombre de bandes

Il est à noter que dans ce programme on se passe de la table des connectivités.

2.2. TABLES DE LOCALISATIONS : (SUBROUTINE CLOCE)

La table de localisation est générée automatiquement vu qu'à la ligne nodale (i) sont associés les paramètres de déplacements $2i-1$ et $2i$.

2.3. SUBROUTINE D'INITIALISATION : (INI)

Comme les matrices de rigidités sont découplées alors pour chaque harmonique les matrices de rigidité et les vecteurs chargements globaux doivent être initialisés.

2.4. ASSEMBLAGE (SUBROUTINE ASSEMB)

Ce sous programme fait appel au sous programme ELEM qui calcule la matrice de rigidité et le vecteur chargement élémentaires.

Il est bon de rappeler que si le maillage est régulier et que tous les éléments ont les memes propriétés mécaniques et géométriques. L'appel de subroutine (ELEM) se fait qu'une seule fois au lieu de NELT fois (NELT étant le nombre de bandes de la structure.)

Nous avons utilisé deux types d'assemblages :

- ASSEMBLAGE SIMPLE

Toutes les matrices de rigidité sont assemblées dans une matrice globale carrée d'ordre $n = 2 \cdot \text{NELT} + 2$ ($n =$ nombre d'inconnues), la localisation des différents termes, des matrices élémentaires.

Ce mode d'assemblage n'est pas du tout avantageux (consommation de l'espace mémoire et du temps d'exécution). Vu la symétrie de la matrice de rigidité et son aspect de bandes c'est à dire :

les termes de la matrice sont concentrés dans une bande de largeur LRB.

$$LRB = (\text{Max}(\text{dif}) + 1) + \text{NDLN}$$

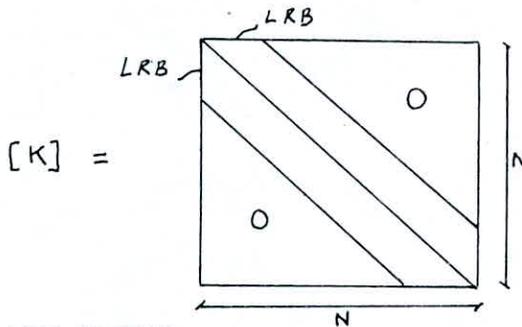
NDLN = nombre de degré de liberté par noeud (ligne modale)

Max(dif) = Maximum des différences des numéros des connectivités.

Dans notre cas

$$LRB = 4$$

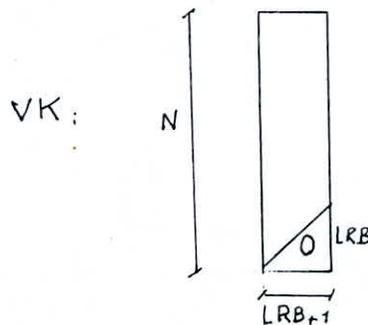
et à l'extérieur de cette bande les termes sont nuls:



ASSEMBLAGE BANDE :

Ce mode d'assemblage se prête bien au type de matrice utilisé.

Il permet de réduire la dimension de la matrice de rigidité globale et par conséquent le temps d'exécution.



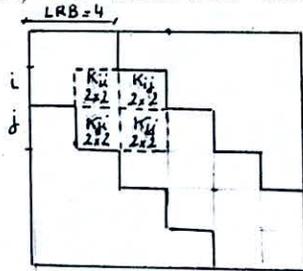
$$K_{IJ} = VK_{ij} \text{ si } \begin{cases} i = I \\ j = J - I + 1 \\ J \geq I \end{cases}$$

Il faut stocker $N(LRB+1)$ termes au lieu de N^2 .

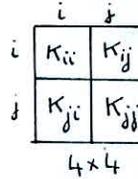
Notons qu'il existe d'autres types d'assemblages tels que :

- Matrice ligne de ciel
- Assemblage frontal
- Assemblage noeud par noeud

L'assemblage est relativement simple vu que deux bandes adjacentes ne peuvent avoir en commun qu'une seule ligne nodale, la matrice assemblée a l'allure suivante



Contribution de la matrice de la bande à la matrice globale



Matrice de rigidité de la bande ij

Le principe de l'assemblage est le suivant :

$$K_{ij} = K_{ij} + K_{ij}$$

$$I = \text{LOCA} (i)$$

$$J = \text{LOCA} (j)$$

où : i et j sont les localisations du terme k dans la matrice élémentaire (i, j = 1, NDLE)

I et J sont les localisations du terme de rigidité dans la matrice globale.

et de même : $\hat{F}_I = \hat{F}_I + F_i$

2.5. PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS AUX LIMITES

Contrairement à la méthode des éléments finis la matrice de rigidité assemblée n'est pas régulière et peut même être résolue sans introduction de conditions aux limites dans le cas de bords libres.

Il existe 03 méthodes bien connues d'introduction des conditions aux limites.

METHODE DU TERME DICIGONAL DOMINANT

La matrice (K) est assemblée sans tenir compte des conditions aux limites, puis chaque relation $U_i = U_i$ est introduite en remplaçant :

- K_{ii} par $K_{ii} + \alpha$; α étant un nombre très grand par rapport à tous les termes K_{ij}

- F_i par αU_i :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} + \alpha & \dots & K_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & \dots & K_{Ni} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \alpha U_i \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix}$$

L'équation i s'écrit :

$$\alpha U_i + \left(\sum_{j=1}^N K_{ij} U_j \right) = \alpha \bar{U}_i$$

Elle admet la solution

$$U_i \approx \bar{U}_i \quad \text{si} \quad \alpha \bar{U}_i \gg \sum_{j=1}^N K_{ij} U_j$$

En pratique on peut choisir $\alpha = 10^{20}$.

Cette méthode est simple à programmer mais crée des instabilités surtout quand la matrice est mal conditionnée, et le fait d'avoir un terme de rigidité très grand, crée des dépassements de la précision de l'ordinateur (underflow).

METHODE DU TERME UNITE SUR LA DIAGONALE

Cette technique consiste à remplacer le terme de rigidité diagonal correspondant au degré de liberté imposé i, par 1 et d'annuler tous les termes des lignes et colonnes i, ainsi que de remplacer le terme du vecteur force par $F_i - K_{ii} \bar{U}_i$; et les autres termes par $F_j, K_{ji} U_i$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & 0 & \dots & K_{1N} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ K_{N1} & \dots & 0 & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - K_{1i} \bar{U}_i \\ \vdots \\ \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_N - K_{Ni} \bar{U}_i \end{Bmatrix}$$

L'équation i devient

$$0 \cdot \sum_{j=1}^N U_j + U_i = \bar{U}_i$$

C'est cette méthode que nous avons adopté pour notre programme.

Pour ces deux méthodes le fait que la matrice soit stockée en bande les substitutions se font sur la première colonne de la matrice qui représente la diagonale.

METHODE DE SUPPRESSION DES LIGNES ET COLONNES

Cette méthode consiste à restructurer la matrice globale K de façon à supprimer les équations correspondant aux degrés de liberté imposés.

Cette méthode a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du système, et par conséquent de réduire l'espace mémoire.

Cette méthode nécessite une localisation spéciale différente de celle précédemment décrite, et qui consiste à donner des termes de localisations nuls aux degrés de libertés imposés, lors de l'assemblage ces degrés de libertés ne sont pas assemblés.

Nous avons utilisés cette méthode pour la dernière version du programme utilisant le stockage en ligne de ciel.

2.6. RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATION (SUBROUTINE RESO)

Il existe beaucoup de méthodes de résolution des systèmes d'équation, nous avons choisi celles qui conviennent le mieux à notre cas (matrices bandes symétriques), soit la méthode de CHOLESKY et la méthode de GAUSS, qui sont des méthodes directes (les méthodes indirectes, itératives, sont conseillées pour les grands systèmes).

La méthode de GAUSS est une méthode d'élimination, elle consiste à triangulariser le système puis le remonter, alors que la méthode de CHOLESKY est une méthode de factorisation qui consiste à décomposer la matrice du système en deux matrices : l'une triangulaire supérieure et l'autre triangulaire inférieure, puis remonter le système. Cette décomposition est unique et peut être utilisée pour la résolution de plusieurs problèmes se référant à la même structure (on décompose une seule fois, et on fait la remontée du système autant de fois qu'il y a de problèmes).

Les matrices de rigidité obtenues étant symétriques et à diagonales fortement dominantes, il n'est pas nécessaire d'opérer des révolutions à l'intérieur des algorithmes.

Nous devons, enfin, faire remarquer que les algorithmes de ces méthodes de résolutions ont été modifiés pour s'adapter aux matrices stockées en bande.

Nous donnons ici une idée du nombre d'opération de chaque algorithmes.

METHODE	GAUSS	CHOLESKY	GAUSS (bande)	CHOLESKY (bande)
NOMBRE D'OPERATION	$n^3 / 3$	$n^3 / 6$	$\approx nb^2 / 2$	$\approx nb^2 / 2$

Pour un système 10 x 10 de largeur de bande 4, nous avons noté les temps d'exécution suivants :

METHODE	GAUSS-SEIDL	GAUSS	GAUSS BANDE	CHOLESKY BANDE
TEMPS en MS	11	3	1	0

Ainsi nous déduisons les paramètres de déplacements nodaux pour chaque harmonique.

2.7. CALCULS DES EFFORTS INTERNES (SUBROUTINE EFF)

Les efforts internes sont liés aux paramètres de déplacements nodaux par les matrices contraintes élémentaires et sont calculés aux points de sortie.

SOMMATION

A la fin de chaque boucle d'harmonique, les contraintes et les déplacements sont sommés pour obtenir finalement les valeurs définitives.

REMARQUE

Quand le chargement est symétrique le pas de la boucle des harmoniques est égal à 02 réduisant ainsi le nombre de calcul.

EXEMPLES NUMERIQUES

1/ Plaque carrée isotrope appuyée sur le pourtour

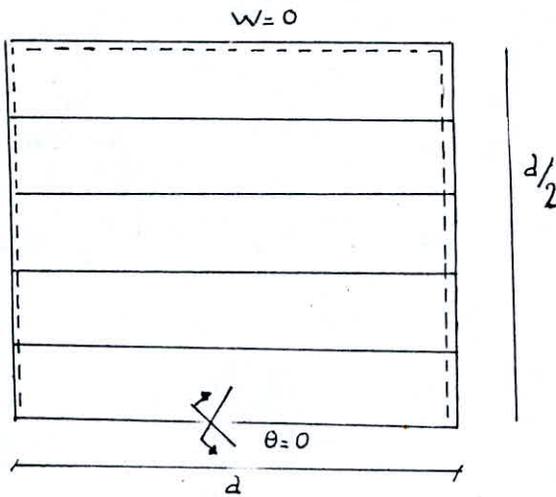
La plaque est étudiée sous trois différents types de chargement :

- charge répartie uniforme sur toute la plaque
- charge concentrée au centre de la plaque
- charge répartie sur un rectangle d'impact

- Le rectangle d'impact $0,2 a \times 0,2 a$

En raison de la symétrie, seulement la moitié de la plaque est étudiée.

La demi plaque est divisée en 5 bandes d'égales largeurs



Nombre de termes	charge uniforme q			Charge ponctuelle P au centre de la plaque			charge concentrée P répartie en un rectangle		
	W_{max}	M_{xmax}	M_{ymax}	W_{max}	M_{xmax}	M_{ymax}	W_{max}	M_{xmax}	M_{ymax}
$m=1$	$4,10338 \cdot 10^{-2}$	$4,932 \cdot 10^{-2}$	$5,1705 \cdot 10^{-2}$	$1,0766 \cdot 10^{-2}$	0,214	10,16036	$1,032 \cdot 10^{-2}$	0,176	0,1455
$m=3$	$-5,05 \cdot 10^{-5}$	$-1,14 \cdot 10^{-3}$	$-4,15478 \cdot 10^{-3}$	$5,95 \cdot 10^{-4}$	$6,16 \cdot 10^{-2}$	$6,62 \cdot 10^{-2}$	$4,63 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$4,7079 \cdot 10^{-2}$
$m=5$	$4,16 \cdot 10^{-6}$	$3,11 \cdot 10^{-4}$	$1,0288 \cdot 10^{-3}$	$1,278 \cdot 10^{-4}$	$3,219 \cdot 10^{-2}$	$3,83 \cdot 10^{-2}$	0,0001	$9,8 \cdot 10^{-3}$	$17,8 \cdot 10^{-3}$
Σ	$4,063 \cdot 10^{-2}$	$4,80963 \cdot 10^{-2}$	$4,8186 \cdot 10^{-2}$	$1,148 \cdot 10^{-2}$	0,308	0,2659	0,0109	0,218	0,211
Exact	$4,062 \cdot 10^{-2}$	$4,75 \cdot 10^{-2}$	$4,79 \cdot 10^{-2}$	$1,16 \cdot 10^{-2}$				0,214	0,214
coefficient multiplicateur	$q \cdot a^4 / D$	$q \cdot a^2$		$P \cdot a^4 / D$	$P \cdot a$		P		

Dans le tableau suivant nous montrons la convergence vers la solution exacte avec le nombre de lignes nodales croissant.

Pour une plaque carrée isotrope simplement appuyée et uniformément chargée.

$\nu = 0.3$		W_{max}	$M_{x,max}$	$M_{y,max}$	nombre d'équations pour chaque itération	Temps d'exécution
NOMBRE DE LIGNES NODALES	NOMBRE DE TERMES	10^{-3}	10^{-2}	10^{-2}		
2	5	4,0928	5,4850	5,0434	4	4
	9	4,0923	5,4801	5,0221		5
3	5	4,0644	4,897	4,846	6	5
	9	4,0639	4,891	4,826		8
4	5	4,0632	4,8358	4,8267	8	6
	9	4,0626	4,8298	4,8068		9
5	5	4,0630	4,8175	4,8267	10	8
	9	4,0624	4,8115	4,8011		12
6	5	4,0630	4,806	4,8186	12	10
	9					
11	5	4,06296	4,7996	4,8156	22	17
	9	4,06241	4,7936	4,7957		29
21	5	4,06296	4,7972	4,81	42	35
	9	4,06241	4,7912	4,7949		49
EXACT		0,0040623	0,0479	0,0479		
COEFFICIENT MULTIPLI- CATEUR		$q \cdot a^4 / D$	$q a^2$			

La matrice de rigidité a une longueur de bande constante pour tous les cas étudiés ($LRB = 4$)

D'après ces résultats on remarque que la convergence vers la solution exacte pour la flèche est plus rapide que celle pour les moments.

Le temps d'exécution est très court pour des solutions presque similaires à celles qui sont exactes.

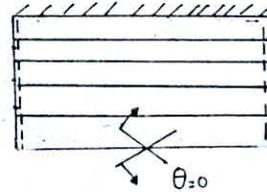
Le fait d'augmenter le nombre d'harmoniques donne des solutions plus précises sans pour autant augmenter de beaucoup le temps d'exécution.

Exemple 2

Plaque simplement appuyée sur deux cotés opposés et encastrée aux deux autres, sous charge uniforme.

$L/l = 1,0$

Nombre d'harmoniques	W_{max}	$M_{x max}$	$M_{y max}$
$m=1$	0,001961	0,0035052	0,028135
$m=3$	-0,000048	-0,0015940	-0,004379
$m=5$	0,000004	0,0003120	0,001026
Σ	0,001917	0,03377	0,02478
Exact	0,001920	0,0332	0,0244
coefficient multiplicateur	$q a^4 / D$	$q a^2$	$q a^2$

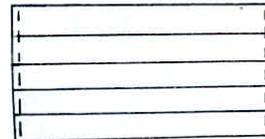


Exemple 3

Plaque simplement appuyée sur deux cotés opposés et libres aux deux autres sans charge uniforme.

$L/l = 1$

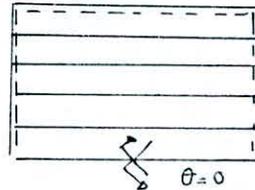
Nombre d'Harmoniques	W_{max}	$M_{x max}$	$M_{y max}$
$m=1$	0,01314000	0,028450	0,12658
$m=3$	-0,00005354	-0,001430	-0,00475
$m=5$	0,00000418	0,000309	0,00103
Σ	0,01309400	0,027300	0,12280
Exact	0,0130900	0,027100	0,12250
coefficient multiplicateur	$q a^4 / D$	$q a^2$	$q a^2$



Exemple 4

Plaque carrée orthotrope simplement appuyée (sans charge uniforme) moitié de la plaque divisée en 5 bandes.

	$W_{max} (10^{-3})$	$M_{xmax} (10^{-2})$	$M_{ymax} (10^{-2})$
$Dy = 5,6025 \cdot Dx$ $D1 = 0,375 \cdot Dx$ $Dxy = 0,9375 \cdot Dx$			
Nombre d'harmoniques			
$m = 1$	1,4591	1,7090	8,5060
3	-0,00955	-0,0326	-0,4750
5	0,000746	0,006907	0,1032
Somme Σ	1,450300	1,6830	8,1340
Exact	1,520000	1,7800	7,7400
Coefficient Multiplicatif	q^2/Dx	q^2	q^2

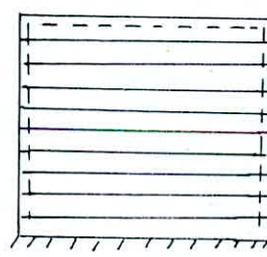


Exemple 5

Plaque carrée isotrope appuyée sur 3 cotés et encastrée au 4e soumise à une charge uniforme. (nombre de bandes = 10)

1/ Utilisation série de fonction (1) SS, on ne peut ici utiliser la symétrie et on est obligé d'étudier la plaque complète :

Nombre d'harmoniques	$W (10^{-3})$ au centre	$M_x (10^{-4})$ au centre	$M_y (10^{-4})$ au centre
$m = 1$	2,831300	4,07988	3,7668
$m = 3$	-0,049400	-0,1567	-0,4463
$m = 5$	0,004160	0,0371	0,1027
Σ	2,788609	3,9543	3,4232
Exact	2,800000	3,9000	3,4000
coef. multiplicateur	q^2/D	q^2	q^2

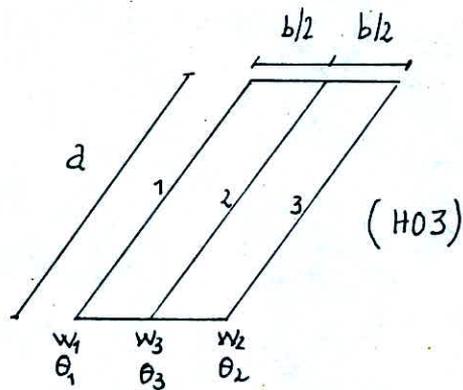
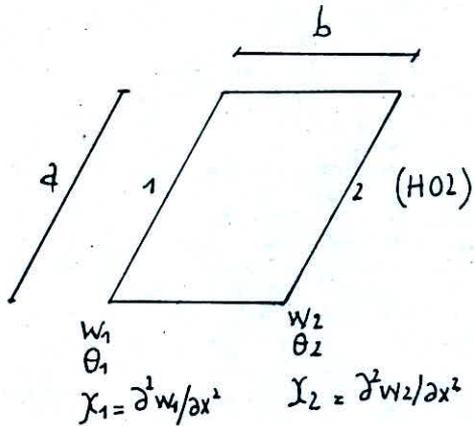


CONCLUSION

Les résultats obtenus sont très satisfaisants quand on les compare avec les solutions exactes. Le nombre de bandes nécessaires à une bonne approximation est très réduit (5 bandes) ainsi que le temps d'exécution.

Le fait d'utiliser les fonctions de formes des poutres ne permet pas la continuité des moments de torsion aux lignes nodales, pour cela nous suggérons l'utilisation de bandes d'ordre supérieure H02 à 3 degrés de liberté par lignes nodales (polynome quintique), Le 3ème étant la courbure $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Pour plus de précision et l'utilisation d'un nombre moindre d'élément on peut aussi utiliser des bandes d'ordres supérieures H03 à ligne nodale interne et deux degrés de liberté par noeud (la ligne nodale est éliminée dans l'assemblage par la technique de condensation statique).



PARTIE C : COMPORTEMENT MEMBRANAIRE

CHAPITRE V : THEORIE DE L'ELASTICITE
PLANE.

THEORIE DE L'ELASTICITE PLANE

I. RAPPELS D'ELASTICITE LINEAIRE TRIDIMENSIONNELLE :

I.1. Introduction

Sous l'action de forces extérieures (forces surfaciques et forces de volume) un solide devient le siège d'un champ de contraintes et d'un champ de déformation.

On appelle milieu élastique, un milieu répondant aux deux hypothèses suivantes :

- * On suppose que le matériau est homogène, que la matière qui le constitue est un milieu continu et qu'il occupe un domaine continu et borné de l'espace.
- * Sous l'action d'une sollicitation donnée, les déformations sont supposées lentes et petites et par conséquent à chaque instant le matériau est dans un état d'équilibre et que sa température ne varie pas, c'est à dire que si les actions extérieures cessent d'agir, le corps revient à son état initial.

A priori, les relations, contraintes-déformations peuvent être fonction du point considéré, du temps et de la température.

Vu sous cet angle le problème devient très complexe, c'est pourquoi nous compléterons les hypothèses initiales par les hypothèses complémentaires suivantes :

- * On considère toujours le corps déformé à une certaine température θ_0 (constante dans tout le corps) et on admet l'existence d'un état neutre en l'absence de forces extérieures.
- * On suppose que l'état de déformation du corps est indépendant du temps (pas de phénomène de relaxation, adaptation, fluage, fatigue, etc....)

Il en découle donc qu'un même état de déformation conduit à un même état de contrainte quelque soit le point intérieur au corps, et que les contraintes sont donc des fonctions linéaires et homogènes des déformations.

1.2. Relations physiques entre contraintes et déformations :

Loi générale de HOOKE

L'état de contrainte ainsi que l'état de déformation, au sein d'un solide élastique sont définis respectivement par les tenseurs symétriques suivants :

$$(\Sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

avec :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \end{array} \right. \quad i \neq j$$

Pour un matériau élastique linéaire, et pour des petites déformations, la généralisation de la loi de Hooke peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad (5-2)$$

Les 36 constantes a_{ij} sont appelées, constantes élastiques. L'expérience montre qu'en élasticité linéaire des petites déformations, il y a correspondance biunivoque entre l'état de contrainte et l'état de déformation.

Il en résulte donc que la matrice (5-2) est inversible.

Pour un matériau homogène, isotrope le nombre de constantes élastiques est réduit à deux : λ et μ .

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \theta \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \epsilon_{ij} \quad (5-3)$$

avec :

- $\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ coefficient de dilatation volumique.
- δ_{ij} : symbole de KRONECKER.
 - δ_{ij} : 0 pour $i \neq j$
 - δ_{ij} : 1 pour $i = j$

λ et μ coefficients de Lamé

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

E et ν module de Young et coefficient de Poisson respectivement.

1.3. Equations générales de l'élasticité

a) Equations de l'équilibre statique

al. Les forces de volume.

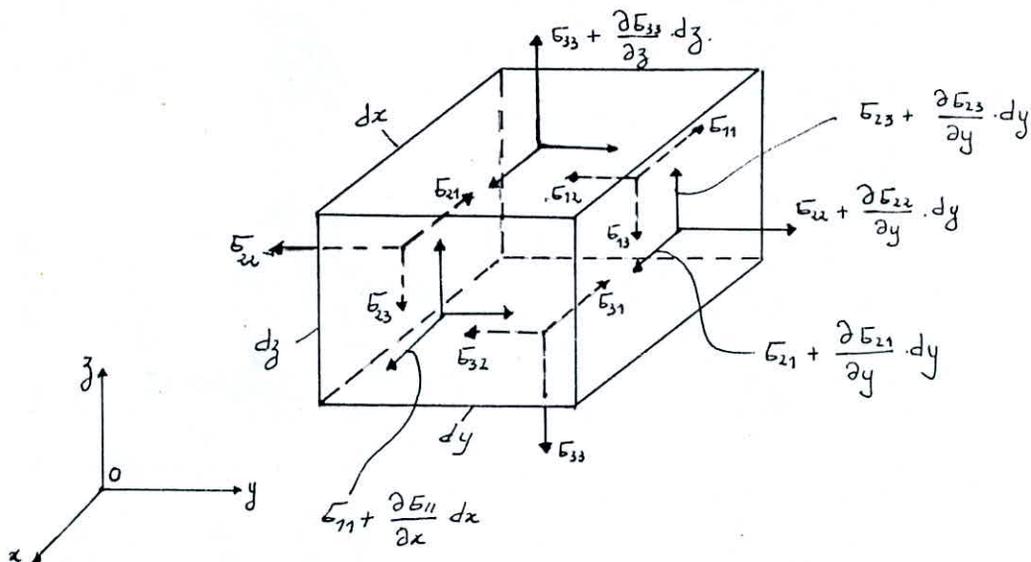


fig: 5.1

L'état de contrainte dans le corps chargé varie d'un point à l'autre et les composantes des contraintes sont donc des fonctions des coordonnées du point :

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x, y, z), \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x, y, z) \quad \text{etc...}$$

On suppose que ces fonctions sont continues et développables en série de TAYLOR, ce qui est justifié par les hypothèses du milieu continu, et qu'elles sont telles que le parallépipède dx, dy, dz soit en équilibre (fig 5.1)

Si nous désignons par X, Y, Z les composantes de cette force par unité de volume, les équations d'équilibre obtenues en faisant le bilan des forces élastiques agissant sur l'élément prennent la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (5-4)$$

Remarque :

Les moments de toutes ces forces et des forces de volume sont négligeables. L'équilibre se traduit donc uniquement par l'équilibre des forces.

a2. Conditions aux limites :

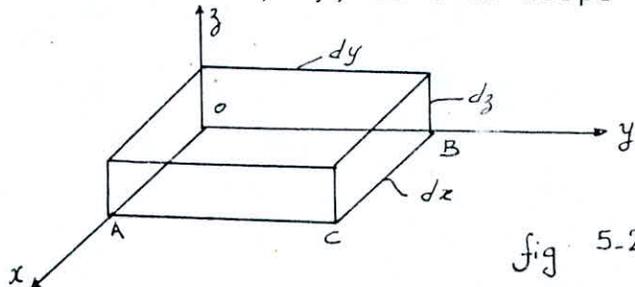
Les fonctions $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ doivent aussi satisfaire aux conditions aux limites résultant de l'équilibre d'un tétraèdre élémentaire et qui sont en désignant par $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ les composantes de la résultante des forces agissant en surface par unité d'aire, au point considéré :

$$\begin{cases} \bar{X} + \sigma_{11} \cdot l + \sigma_{12} \cdot m + \sigma_{13} \cdot n = 0 \\ \bar{Y} + \sigma_{12} \cdot l + \sigma_{22} \cdot m + \sigma_{23} \cdot n = 0 \\ \bar{Z} + \sigma_{13} \cdot l + \sigma_{23} \cdot m + \sigma_{33} \cdot n = 0 \end{cases} \quad (5-5)$$

l, m et n étant les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface du corps au point considéré.

b. Equations géométriques :

Considérons un élément dx, dy, dz d'un corps élastique.



Si le corps subit une déformation et que U, V, W sont les composantes du déplacement du point O , (On admettra

que ces composantes sont des infiniments petits que varient d'une manière continue dans la volume du corps), le déplacement dans la direction des x d'un point voisin A situé sur l'axe des x à la distance dx du point O sera

$$U + \frac{\partial U}{\partial x} dx$$

L'accroissement de longueur de l'élément OA, par suite de la déformation, est donc $\frac{\partial U}{\partial x} dx$. Par conséquent l'allongement par unité de longueur au point O dans la direction des x est $\frac{\partial U}{\partial x}$.

De la même manière les allongements dans le sens des y et des z seront respectivement $\frac{\partial V}{\partial y}$ et $\frac{\partial W}{\partial z}$.

Considérons maintenant la modification subie par l'angle que forment entre eux les éléments OA et OB.

Si U et V représentent les déplacements du point O dans les directions x et y , le déplacement du point A dans la direction y et celle du point B dans la direction x seront respectivement

$$V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad \text{et} \quad U + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

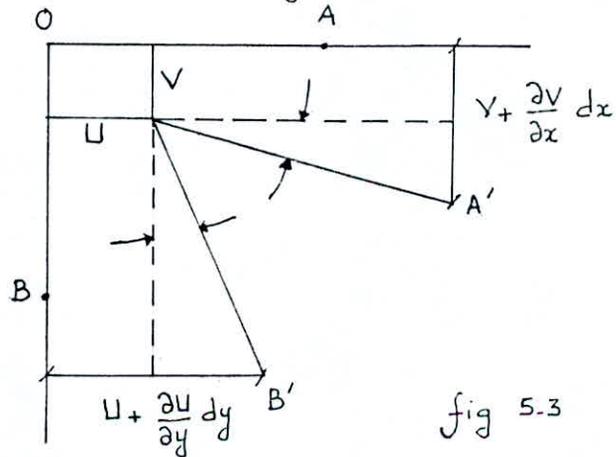


fig 5.3

Par suite de ce déplacement, la nouvelle direction O'A' de l'élément OA fera avec la direction initiale un angle extrêmement petit $\frac{\partial V}{\partial x}$. De même la direction O'B' fera avec OB un petit angle $\frac{\partial U}{\partial y}$. On en déduit que l'angle primitivement rectangle que faisaient entre eux OA et OB est diminué de $\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}$. C'est la déformation transversale entre les plans xz et yz (distorsion).

Les déformations transversales entre les plans xy et xz et entre les plans yx et yz seront obtenues de la même manière.

Ainsi les équations géométriques obtenues sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad (5-6)$$

c. Equations de compatibilité :

Si l'on se donne arbitrairement six fonctions ε_{ij} , il n'y a aucune raison pour qu'elles soient les composantes d'un tenseur de déformation. Les fonctions de déformation ε_{ij} doivent donc satisfaire à un ensemble de conditions, dites conditions de compatibilité (ou d'intégrabilité) des déformations.

Ces équations sont au nombre de six :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^4 \varepsilon_{11}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial y \partial z} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^4 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial z^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x \partial z} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^4 \varepsilon_{33}}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (5-7)$$

1.4. Méthodes de résolution des problèmes d'élasticité :

L'analyse d'un solide en élasticité à conduit à considérer :

- 3 fonctions de déplacement (u, v, w)
- 6 composantes du tenseur de déformation
- 6 composantes du tenseur de contrainte.

soient alors 15 fonctions inconnues.

Pour résoudre le problème, on dispose :

* Données

- . loi de répartition des forces de surface
- . loi de distribution des forces de volume
- . les caractéristiques mécaniques du corps
- . des caractéristiques géométriques.

* Equations:

- 6 équations géométriques + 6 conditions de compatibilité
- 3 équations d'équilibre + 3 conditions aux limites
- 6 relations physiques.

La résolution d'un problème d'élasticité se ramène à l'intégration d'un système de 15 équations aux dérivées partielles en tenant compte des 09 conditions.

Les conditions aux limites pouvant être soit en déplacement soit en forces nous distinguons ainsi deux méthodes de résolution.

a) Méthode des déplacements :

Elle consiste à prendre comme inconnues, les trois composantes du vecteur déplacement (u, v, w)

Elle est à utiliser notamment lorsqu'on impose sur la frontière du corps des conditions aux déplacements.

On utilise alors les équations d'équilibre où seuls les déplacements (u, v, w) y figurent (équations de NAVIER)

Pour cela nous remplaçons dans les équations (5-3) les déformations par leurs valeurs (5-6)

Les valeurs des contraintes ainsi obtenues sont introduites dans les équations d'équilibre.

b) Méthode des forces :

Ici les inconnues étant les composantes du tenseur des contraintes. Cette méthode est conseillée lorsqu'on se donne sur les frontières les forces surfaciques liées aux contraintes par les équations (5-5). Les équations de compatibilité peuvent être transformées en relations entre les composantes des contraintes et les forces de volume (Equations de BELTRAMI) en utilisant les équations d'équilibre et la loi de HOOKE.

1.5. Energie de déformation :

Considérons un élément volumique $dx dy dz$. L'énergie accumulée dans un volume élémentaire est égal au travail des forces élastiques agissant sur les faces.

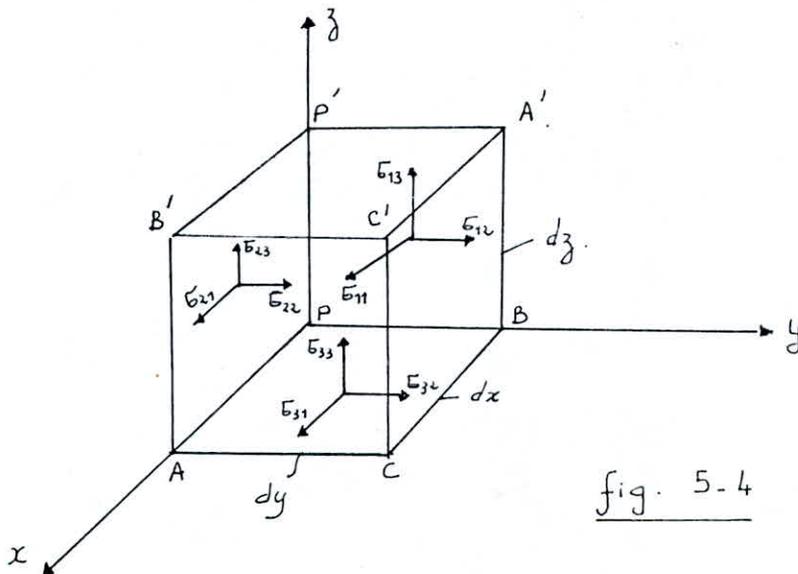


fig. 5-4

Explicitons le travail de ces forces :

En supposant la face P'A'BP fixe, on fait subir un déplacement à la face B'C'CA qui est dû à la déformation.

Les projections sur les axes Pxyz de ce déplacement sont :

$$\epsilon_{12} dx, \epsilon_{11} dx, \epsilon_{13} dx$$

Le travail de ces forces élastiques est :

$$-\frac{1}{2} (\epsilon_{11} \epsilon_{11} + \epsilon_{12} \epsilon_{12} + \epsilon_{13} \epsilon_{13}) dx dy dz$$

(les relations contraintes-déformations étant linéaires)

Le travail des contraintes sur les deux autres couples de face s'expriment de la même façon.

L'énergie élémentaire emmagasinée dans l'élément du solide est :

$$dW_e = -\frac{1}{2} (\epsilon_{11} \epsilon_{11} + \epsilon_{22} \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \epsilon_{33} + \epsilon_{12} \epsilon_{12} + \epsilon_{13} \epsilon_{13} + \epsilon_{23} \epsilon_{23}) dx dy dz \quad (8-8)$$

L'énergie de déformation du solide est donc :

$$W_e = \int_V dW_e$$

V : étant le volume total du solide.

2. ELASTICITE PLANE EN COORDONNEES CARTESIENNES :

2.1. Etat plan de déformation :

* Définition

On dit qu'il y a déformation plane parallèlement au plan oxy si :

$$\begin{cases} U = U(x, y) \\ V = V(x, y) \\ W = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Dans chaque plan à côté $z = \text{constante}$, la déformation est la même d'où 3 composantes du tenseur de déformation nulles :

$$\begin{cases} \epsilon_{33} = \partial W / \partial z = 0. \\ \epsilon_{13} = \partial W / \partial x + \partial U / \partial z = 0 \\ \epsilon_{23} = \partial W / \partial y + \partial V / \partial z = 0. \end{cases}$$

et 3 composantes du tenseur de déformation en fonction de x et y

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \partial U / \partial x \\ \epsilon_{22} = \partial V / \partial y \\ \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \partial V / \partial x + \partial U / \partial y \end{cases}$$

La matrice du tenseur de déformation dans un repère orthonormé est donc :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

* Tenseur des contraintes :

La matrice du tenseur des contraintes dans un repère orthonormé est :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

* Relations contraintes-déformations :

Pour un matériau homogène, on a

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu \cdot \epsilon_{11} + \lambda \theta \\ \sigma_{12} = 2 \cdot \mu \epsilon_{12} \\ \sigma_{22} = 2 \cdot \mu \epsilon_{22} + \lambda \theta \\ \sigma_{33} = \lambda \theta \end{cases} \quad (5.12)$$

avec $\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}$ dilatation cubique

Les déformations s'expriment en fonction des contraintes.

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = -\frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{11} - \nu \cdot \sigma_{22}] \\ \epsilon_{22} = -\frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{22} - \nu \cdot \sigma_{11}] \\ \epsilon_{12} = -\frac{\nu \cdot (1+\nu)}{E} \sigma_{12} \end{cases} \quad (5.13)$$

avec :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{Coefficient de POISSON}$$

$$E = \mu \cdot \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{module de YOUNG}$$

* Equations d'équilibre statique

** Les forces de volume (x, y)

$$\begin{cases} \partial \sigma_{11} / \partial x + \partial \sigma_{12} / \partial y = X \\ \partial \sigma_{21} / \partial x + \partial \sigma_{22} / \partial y = Y \end{cases} \quad (5.14)$$

** Conditions aux limites

$$\begin{cases} \bar{X} + \sigma_{11} \cdot l + \sigma_{12} \cdot m = 0 \\ \bar{Y} + \sigma_{12} \cdot l + \sigma_{22} \cdot m = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

(\bar{x}, \bar{y}) forces appliquées sur un élément de surface ds d'orientation \vec{q} (l, m)

* Equations de compatibilité :

Les équations (5-7) se réduisent à une seule :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x \partial y} \quad (5.16)$$

Cette équation peut s'exprimer de façon simple en fonction des contraintes.

Dérivons à cet effet, la première condition d'équilibre par rapport à x , la seconde équation par rapport à y , la seconde équation par rapport à y et faisons la somme :

$$2. \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial y^2}$$

La relation ci-dessus ainsi que les expressions des composantes de la déformation permettent de transformer la condition (5-16) qui devient :

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} = (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial y^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial y^2}$$

$$\Delta (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = \frac{1}{1-\nu} \text{div. } \vec{F} \quad (5-17)$$

Δ étant l'opérateur Laplacien

Dans le cas où χ et γ sont nuls ou constants, cette condition se réduit à :

$$\Delta (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = 0 \quad (5-18)$$

* Exemples de déformation plane :

Cas du mur d'un barrage de section constante soumis à son poids propre et à la pression de l'eau :

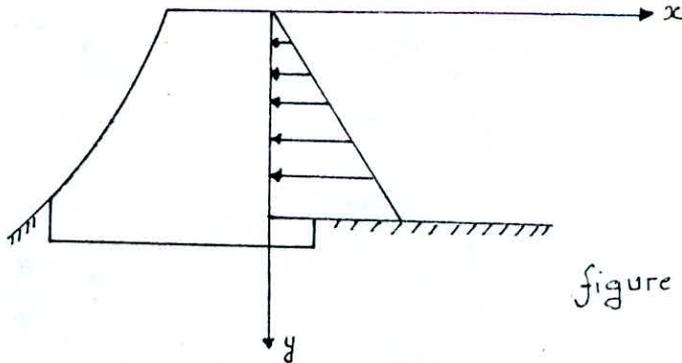


figure 5-5

Remarque :

Une déformation plane n'entraîne pas une contrainte plane car

$$\epsilon_{33} \neq 0$$

Résumé :

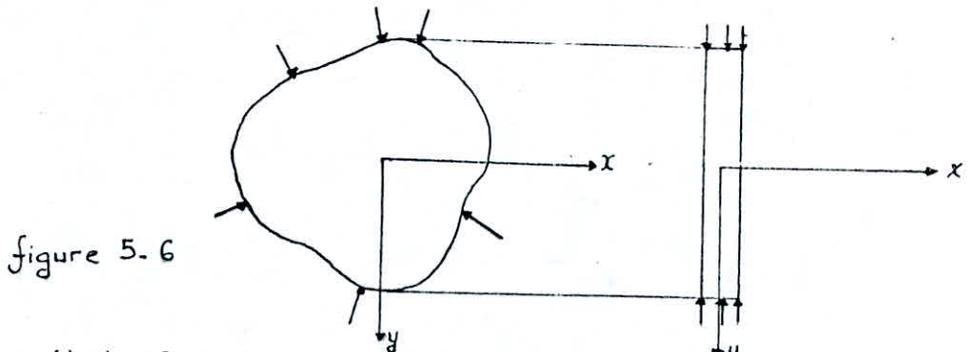
Les fonctions ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{12} doivent satisfaire :

- aux conditions d'équilibre
- aux conditions aux limites
- à la condition de compatibilité
- ϵ_{33} se déduit immédiatement de la connaissance de

2.2. Etat plan de contrainte :

* Définition :

Il y a contrainte plane lorsque les forces de volume sont parallèles au plan de la plaque et distribuées uniformément suivant l'épaisseur de la plaque et lorsque les forces de surface sont appliquées sur le contour de la plaque et distribuées uniformément sur l'épaisseur, les faces latérales de la plaque demeurant libres.



Il y a état plan de contrainte par rapport au plan oxy si :

$$\epsilon_{33} = 0 \quad \epsilon_{13} = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon_{23} = 0$$

matrice du tenseur des contraintes :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

et :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(x, y)$$

* Tenseur des déformations :

La matrice du tenseur des déformations est :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

avec pour le cas d'un matériau homogène et isotrope :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \cdot \sigma_{22}) \\ \epsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \cdot \sigma_{11}) \\ \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{12} \end{cases} \quad (5.21)$$

* Equations d'équilibre statiques :

** Forces de volume (x,y)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \epsilon_{11} / \partial x + \partial \epsilon_{12} / \partial y + X = 0 \\ \partial \epsilon_{21} / \partial x + \partial \epsilon_{22} / \partial y + Y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \quad (5-22)$$

Les forces de volume doivent être parallèles au plan oxy

** Conditions aux limites :

Quelle que soit l'orientation de l'élément dS considéré défini par $\vec{q} (l, m)$

$$\left\{ \begin{array}{l} l \cdot \epsilon_{11} + m \cdot \epsilon_{12} = \bar{X} \\ l \cdot \epsilon_{12} + m \cdot \epsilon_{22} = \bar{Y} \\ 0 = \bar{z} \end{array} \right. \quad (5-23)$$

Les forces extérieures doivent être parallèles au plan oxy.

* Equations de compatibilité :

Les équations (5-7) se réduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x \partial y} = 0 \\ 2. \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad (5-24)$$

Si on exprime cette dernière condition de compatibilité en fonction des composantes du tenseur des contraintes et en tenant compte des équations d'équilibre (5-22) on aboutit à :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = - (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

ou

$$\Delta (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = - (1 + \nu) \operatorname{div} \cdot \vec{F} \quad (5-25)$$

Dans le cas où X et Y sont nuls ou constants, cette condition se réduit à :

$$\Delta (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = 0. \quad (5-26)$$

Remarques :

- En général ϵ_{33} est donnée par la relation

$$\epsilon_{33} = \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

n'est pas une fonction linéaire en x et y ce qui entraîne que les trois premières conditions de compatibilité ne sont pas satisfaites.

Ceci vient du fait que dans la déformation les faces latérales ne restent plus planes ni parallèles.

- En général les conditions aux limites, les conditions d'équilibre et la condition de compatibilité : $\Delta(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = (1+\nu) \cdot \text{div} \cdot \vec{F}$ suffisent pour déterminer complètement un problème de contraintes planes ; on a alors une solution très proche de la réalité même si les trois autres conditions de compatibilité ne sont pas rigoureusement satisfaites.

Lorsque $\text{div} \cdot \vec{F} = 0$ la répartition des contraintes est la même que l'on ait à faire à une déformation plane ou à une contrainte plane (ce n'est pas le cas pour)

Lorsque $\text{div} \vec{F} = 0$, on peut passer aisément des formules relatives aux contraintes planes aux formules relatives aux déformations planes de la manière suivante :

On assume le module de Young à $\frac{E}{1-\nu^2}$
et le coefficient de Poisson à $\frac{\nu}{1-\nu}$

2.3. Fonction de contrainte (fonction d'AIRY)

La solution d'un problème à deux dimensions se ramène à l'intégration :

- des équations de l'équilibre
- de l'équation de compatibilité
- des équations aux limites

Examinons le cas le plus fréquent où le poids du corps constitue la seule force de volume.

Les équations à satisfaire sont :

* Equations d'équilibre

$$\begin{cases} \partial \epsilon_{11} / \partial x + \partial \epsilon_{12} / \partial y = 0 \\ \partial \epsilon_{12} / \partial y + \partial \epsilon_{22} / \partial x + \rho \cdot g = 0 \end{cases}$$

* Equation de compatibilité

$$\Delta (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = 0.$$

La solution trouvée à ces équations doit vérifier les conditions aux limites.

La méthode habituelle, employée pour résoudre ces équations consiste à chercher une fonction unique (x,y) dite fonction de contrainte ou fonction d'AIRY.

Cette fonction étant telle que

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho g y \quad ; \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho g y \quad ; \quad \epsilon_{12} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (5.27)$$

Les deux équations d'équilibre sont alors vérifiées.

La vraie solution du problème est celle qui satisfait également à l'équation de compatibilité.

En introduisant dans l'équation de compatibilité les valeurs des composantes de contraintes données, on trouve que la fonction doit satisfaire l'équation :

$$\Delta \Delta \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (5.28)$$

Par conséquent, la solution d'un problème à 2 dimensions lorsque le poids du corps est la seule force de volume, se réduit à la recherche des solutions à l'équation (5.28) et qui satisfait également aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \bar{X} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - m \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \rho g \cdot l \cdot y \\ \bar{Y} = -\rho \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + m \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho g \cdot m \cdot y \end{cases} \quad (5.29)$$

* Cas plus général où \vec{F} dérive d'un potentiel

Ou alors

$$\begin{cases} X = -\partial V / \partial x \\ Y = -\partial V / \partial y \end{cases} \quad (5.30)$$

Si on pose :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - V \\ \epsilon_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - V \\ \epsilon_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (5.31)$$

Les équations d'équilibre qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_{11} - V) + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_{22} - V) + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

sont alors vérifiées.

L'équation de compatibilité s'écrit :

pour une déformation plane

$$\Delta \Delta \phi = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta V \quad (5.33)$$

pour une contrainte plane

$$\Delta \Delta \phi = (1-\nu) \Delta V$$

Les conditions aux limites à vérifier sont :

$$\begin{cases} p \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - V \right) - m \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \bar{X} = 0 \\ p \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + m \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - V \right) + \bar{Y} = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

* Solutions en prenant un polynôme comme fonction d'AIRY

On suppose X et Y nuls donc :

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} ; \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} ; \quad \epsilon_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

et

$$\Delta \Delta \phi = 0$$

Soit ϕ un polynôme homogène de degré n dépendant de n+1 constantes arbitraires.

$\Delta \Delta \phi$ entraîne (n-3) relations linéaires entre ces constantes.

Il reste quatre constantes indépendantes à déterminer.

Cette détermination s'effectuera à l'aide des conditions aux limites.

Par superposition de polynômes de degré différents on arrivera à la solution générale du problème.

Remarque :

Tous les polynomes de degré 1, 2, et 3 vérifient $\Delta\Delta\phi = 0$.

a) Polynôme du premier degré

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \quad \text{ne mène à rien.}$$

b) Polynôme du second degré

$$\phi_2 = \frac{a_2}{3} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2$$

$$\text{soit } \sigma_{11} = c_2, \quad \sigma_{22} = a_2, \quad \sigma_{12} = -b_2$$

c) Polynôme du troisième degré

$$\phi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} x y^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3$$

$$\text{soit : } \begin{aligned} \sigma_{11} &= c_3 x + d_3 y \\ \sigma_{22} &= a_3 x + b_3 y \\ \sigma_{12} &= -b_3 x - c_3 y \end{aligned}$$

d) Polynôme du quatrième degré :

$$\phi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4$$

$\Delta\Delta\phi = 0$ entraîne la relation

$$c_4 + a_4 + 2 \cdot e_4 = 0$$

soit

$$\sigma_{11} = c_4 x^2 + d_4 y x - (2c_4 + a_4) y^2$$

$$\sigma_{22} = a_4 x^2 + b_4 y x + c_4 y^2$$

$$\sigma_{12} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 y x - \frac{d_4}{2} y^2$$

e) Polynôme du cinquième degré

$$\phi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5$$

$\Delta\Delta\phi = 0$ entraîne 2 relations

$$e_5 + 2c_5 + 3a_5 = 0$$

$$b_5 + 2d_5 + 3f_5 = 0$$

soit :

$$\sigma_{11} = \frac{c_5}{3} x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5) x y^2 - \frac{1}{3} (b_5 + 2d_5) y^3$$

$$\sigma_{22} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 x y^2 + \frac{d_5}{3} y^3$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{3} b_5 x^3 - c_5 x^2 y - d_5 x y^2 + \frac{1}{3} (2c_5 + 3a_5) y^3$$

Conclusion :

La méthode analytique de la fonction d'Airy n'est applicable qu'aux problèmes simples de géométrie et conditions limites régulières.

Il est alors nécessaire d'utiliser les méthodes numériques qui sont plus pratiques et universelles.

Parmi ces méthodes on peut citer :

- méthode des différences finies
- méthode des éléments finis
- méthode des bandes finies
- méthode des éléments frontières.

Nous développerons la méthode des bandes finies.

CHAPITRE VI : APPLICATION DE LA METHODE DES
BANDES FINIES DANS L'ANALYSE
DES PROBLEMES D'ELASTICITE PLANE
EN COORDONNEES RECTANGULAIRES.

APPLICATION DE LA METHODE DES BANDES FINIES DANS L'ANALYSE

DES PROBLEMES D'ELASTICITE PLANE EN COORDONNEES RECTANGULAIRES

I. INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous allons traiter le problème de l'élasticité bidimensionnelle. La méthode des bandes finies consistant à subdiviser la structure par des lignes imaginaires parallèles en un certain nombre d'éléments connectés les uns aux autres par des lignes nodales, permet d'approcher les déplacements U et V respectivement à l'intérieur de chaque bande par des fonctions $U(x,y)$ et $V(x,y)$ telles que :

$$U(x,y) = \sum_m f_m^u(x) \cdot Y_m(y)$$

$$V(x,y) = \sum_m f_m^v(x) \cdot Y_m'(y)$$

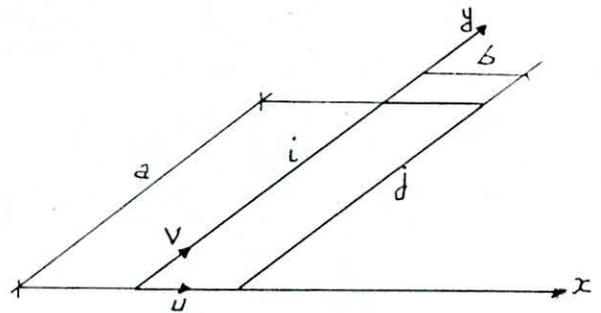


fig. 6.1

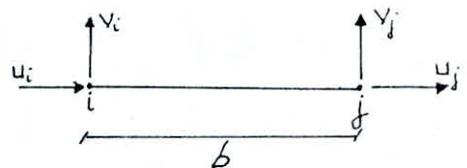
avec :

- m : un paramètre entier positif
- $Y_m(y)$: une fonction de y (fonction de base) satisfaisant aux conditions aux limites suivant y
- $Y_m'(y)$: la dérivée première de $Y_m(y)$
- $F_m^u(x)$: un polynôme en x reliant les paramètres de déplacement nodaux U_{im} et U_{jm} .
- $F_m^v(x)$: un polynôme en x reliant les paramètres de déplacement nodaux V_{im} et V_{jm} .

On ramène donc un problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel analogue à celui d'une barre à deux degrés de liberté par noeud

- . un déplacement longitudinal U
- . un déplacement transversal V

fig 6.2



Cette formulation étant basée sur la relation communément utilisée dans la théorie des barres en petites déformations, qui relie le déplacement longitudinal U au déplacement transversal V par la formule :

$$V = cte \times \frac{dU}{dy}$$

Dans notre étude nous utiliserons deux formes de déplacement :

- Bande simplement appuyée suivant y : $U=0$ et $E_y=0$ à $y=0$ et à $y=a$

$$\begin{cases} U = \sum_{m=1}^r \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot U_{im} + \left(\frac{x}{b}\right) \cdot U_{jm} \right] \cdot \sin k_m \cdot y \\ V = \sum_{m=1}^r \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot V_{im} + \left(\frac{x}{b}\right) \cdot V_{jm} \right] \cdot \cos k_m \cdot y \end{cases} \quad (6-2)$$

avec : $k_m = m \cdot \pi / a$.

- Bande encastrée suivant y :

$$\begin{cases} U = \sum_{m=1}^r \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot U_{im} + \left(\frac{x}{b}\right) \cdot U_{jm} \right] \cdot \sin k_m \cdot y \\ V = \sum_{m=1}^r \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot V_{im} + \left(\frac{x}{b}\right) \cdot V_{jm} \right] \cdot \sin k_{m+1} \cdot y \end{cases} \quad (6-3)$$

avec : $k_m = m \cdot \pi / a$ et $k_{m+1} = (m+1) \cdot \pi / a$

Remarques :

- L'équation (6-3) ne vérifie pas la forme (6-1). En effet si l'on adoptait la relation (6-1) pour le cas d'une bande encastrée à ces deux extrémités, la contrainte de cisaillement :

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

serait alors nulle. Ce qui est impossible dans le cas d'une poutre car cela signifie qu'il n'y a pas de réaction résistante aux chargements verticaux ($R = \int \tau_{xy} \cdot dA$)

- Dans la formulation générale du problème on adoptera les fonctions de déplacement suivantes :

$$\begin{cases} U = \sum_{m=1}^r \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot U_{im} + \left(\frac{x}{b}\right) \cdot U_{jm} \right] \cdot Y_{1m} \\ V = \sum_{m=1}^r \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot V_{im} + \left(\frac{x}{b}\right) \cdot V_{jm} \right] \cdot Y_{2m} \end{cases} \quad (6-4)$$

- L'application directe de la méthode reste limitée et peut comprendre par exemple les poutres cloisons, les poutres multicouches, les fondations multicouches etc...

Mais ces bandes d'élasticité plane, deviennent d'une importance considérable lorsqu'elles sont combinées à celles de la flexion pour l'analyse des plaques raidies, plaques pliées, poutres caisson de ponts.

- (U_{im} , U_{jm} , V_{im} , V_{jm}) sont des inconnues dont la signification physique est l'amplitude du même harmonique des fonctions de translation des lignes adjacentes à la bande (lignes nodales).

2. ETUDE D'UNE BANDE EN CONTRAINTES PLANES :

FORMULES FONDAMENTALES:

2.1. Fonctions de déplacement :

Mettons l'équation (6-4) sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r [C_m] \cdot \{\delta\}_m = [C] \cdot \{\delta^e\} \quad (6-5)$$

avec :

$$\{\delta\}_m = \begin{Bmatrix} U_{im} \\ V_{im} \\ U_{jm} \\ V_{jm} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad [C_m] = \begin{bmatrix} (1-\frac{x}{b}) \cdot \gamma_{1m} & 0 & \frac{x}{b} \cdot \gamma_{1m} & 0 \\ 0 & (1-\frac{x}{b}) \cdot \gamma_{2m} & 0 & \frac{x}{b} \cdot \gamma_{2m} \end{bmatrix}$$

2.2. Déformations :

Ayant les fonctions de déplacement exprimons les déformations en fonction des paramètres de déplacement nodaux.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r [B]_m \cdot \{\delta\}_m = [B] \cdot \{\delta^e\}$$

avec

$$[B]_m = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} \gamma_{1m} & 0 & \frac{1}{b} \gamma_{1m} & 0 \\ 0 & (1-\frac{x}{b}) \gamma'_{2m} & 0 & \frac{x}{b} \gamma'_{2m} \\ (1-\frac{x}{b}) \gamma'_{1m} & -\frac{1}{b} \gamma_{2m} & \frac{x}{b} \gamma'_{1m} & \frac{1}{b} \gamma_{2m} \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

2.3. Contraintes :

L'état de contrainte en chaque point est représenté par le vecteur $\{\sigma\}$ tel que :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\epsilon\}$$

avec $[D]$ matrice d'élasticité donnée par :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

- Pour les matériaux orthotropes :

$$d_{11} = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \quad ; \quad d_{12} = d_{21} = \frac{\nu_x E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \quad ; \quad d_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \quad ; \quad d_{33} = G_{xy}$$

où : (E_x, E_y) modules de Young suivant x et y respectivement.
 (ν_x, ν_y) coefficients de Poisson suivant x et y respectivement.

G_{xy} : module d'élasticité transversal

- Pour les matériaux isotropes :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad d_{12} = d_{21} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad d_{33} = G$$

ν : coefficient de Poisson

E : module de Young

G : module d'élasticité transversal

Donc :

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \sum_{m=1}^r [B]_m \cdot \{\delta\}_m = \sum_{m=1}^r [H]_m \cdot \{\delta\}_m \quad (6-7)$$

$(H)_m$ est la matrice contrainte donnée par :

$$[H]_m = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} D_{11} Y_{1m} & D_{12} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot Y_{2m} & \frac{1}{b} D_{33} Y_{1m} & \frac{x}{b} D_{12} Y'_{2m} \\ -\frac{1}{b} D_{12} Y_{1m} & D_{21} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot Y'_{2m} & \frac{1}{b} D_{12} Y_{1m} & \frac{x}{b} D_{22} Y'_{2m} \\ \left(1 - \frac{x}{b}\right) D_{33} Y'_{1m} & -\frac{1}{b} D_{33} Y_{2m} & \frac{x}{b} D_{33} Y'_{1m} & \frac{1}{b} D_{33} Y_{2m} \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

2.4. Matrice de rigidité et vecteur chargement élémentaire :

2.4.1. Matrice de rigidité :

L'épaisseur de la bande étant constante, la relation (1-16) prendra la forme suivante :

$$[S]_{mn} = t \cdot \int_0^a \int_0^b [B]_m^T \cdot [D] \cdot [B]_n \cdot dx \cdot dy$$

t : étant l'épaisseur de la bande

En intégrant l'expression (6-8) nous obtenons la forme générale de la sous matrice $(S)_{mn}$

$$]_{mn} = t. \left[\begin{array}{c|c|c|c} \frac{1}{b} E_1 D_{11} + \frac{b}{3} F_1 D_{33} & -\frac{1}{2} (D_{12} C_2 + D_{33} B_1) & -\frac{1}{b} E_1 D_{11} + \frac{b}{6} D_{33} F_1 & \frac{1}{2} (-C_2 D_{12} + B_1 D_{33}) \\ \hline -\frac{1}{2} (D_{12} B_2 + D_{33} C_1) & \frac{b}{3} D_{12} F_2 + \frac{1}{b} E_2 D_{33} & \frac{1}{2} (D_{12} B_2 - D_{33} C_1) & \frac{b}{6} D_{12} F_2 - \frac{1}{b} D_{33} E_2 \\ \hline -\frac{1}{b} D_{11} E_1 + \frac{b}{6} D_{33} F_1 & \frac{1}{2} (D_{12} C_2 - D_{33} B_1) & \frac{1}{b} D_{11} E_1 + \frac{b}{3} D_{33} F_1 & \frac{1}{2} (D_{12} C_2 + D_{33} B_1) \\ \hline \frac{1}{2} (-D_{12} B_2 + D_{33} C_1) & \frac{b}{6} D_{12} F_2 - \frac{1}{b} D_{33} E_2 & \frac{1}{2} (D_{12} B_2 + D_{33} C_1) & \frac{b}{3} D_{12} F_2 + \frac{1}{b} D_{33} E_2 \end{array} \right] \quad (G-9)$$

ou

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^a Y_{1m} Y_{2n} dy & ; & & A_2 &= \int_0^a Y_{1n} Y_{2m} dy \\ B_1 &= \int_0^a Y'_{1m} Y_{2n} dy & ; & & B_2 &= \int_0^a Y'_{2m} Y_{1n} dy \\ C_1 &= \int_0^a Y'_{1n} Y_{2m} dy & ; & & C_2 &= \int_0^a Y_{1m} Y'_{2n} dy \\ E_1 &= \int_0^a Y_{1m} Y_{1n} dy & ; & & E_2 &= \int_0^a Y_{2m} Y_{2n} dy \\ F_1 &= \int_0^a Y'_{1m} Y'_{1n} dy & ; & & F_2 &= \int_0^a Y'_{2m} Y'_{2n} dy \end{aligned}$$

Remarque :

Vu la propriété d'orthogonalité des fonctions de base Y_{1m} et Y_{2m} , les intégrales :

$$A_1, A_2, E_1 \text{ et } E_2$$

s'annulent pour $m \neq n$.

Type de chargement	Uniformément réparti de composantes qx : suivant x qy : suivant y	q linéique uniforme suivant la droite x = x1	Concentrée au point P (xc,yc) de composantes Pcx : suivant x Pcy : suivant y
Expression du chargement	$\frac{b}{2} \left\{ \begin{array}{l} q_x \int_0^a \gamma_{1m} dy \\ q_y \int_0^a \gamma_{2m} dy \\ q_x \int_0^a \gamma_{1m} dy \\ q_y \int_0^a \gamma_{2m} dy \end{array} \right\}$	$q \left(1 - \frac{x_1}{b}\right) \int_0^a \gamma_{1m} dy \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} P_{cx} \left(1 - \frac{x_c}{b}\right) \cdot \gamma_{1m}(y_c) \\ P_{cy} \left(1 - \frac{x_c}{b}\right) \cdot \gamma_{2m}(y_c) \\ P_{cx} \frac{x_c}{b} \gamma_{1m}(y_c) \\ P_{cy} \frac{x_c}{b} \gamma_{2m}(y_c) \end{array} \right\}$

3. CAS PARTICULIER :

En pratique, les appuis les plus fréquemment rencontrés étant :

- . Appuis simples
- . Encastrements

Dans ce qui suit nous traitons en détail le cas des bandes :

- . simplement appuyées aux deux extrémités

3.1. Bande simplement appuyée suivant y :

* Fonction de déplacement :

Les déplacements U et V dans les directions x et y respectivement de tous les points de la bande, s'expriment par la relation (6-2)

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{b}) \sin k_m y & 0 & \frac{x}{b} \sin k_m y & 0 \\ 0 & (1 - \frac{x}{b}) \cos k_m y & 0 & \frac{x}{b} \cos k_m y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{im} \\ V_{im} \\ U_{jm} \\ V_{jm} \end{Bmatrix} \quad (6-10)$$

Ou plus simplement :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r [C]_m \{ \delta \}_m = [C] \cdot \{ \delta \}$$

Remarque :

Pour pouvoir tenir compte des déformations initiales, il faut prendre en considération le zéro ième terme des séries de Fourier en cosinus, c'est à dire :

$$V = \sum_{m=0}^r \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) V_{im} + \left(\frac{x}{b}\right) V_{jm} \right] \cdot \cos k_m y$$

* Déformations :

Pour les problèmes de contraintes et déformations planes le vecteur déformation est donné par :

$$\{ \epsilon \} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix}$$

où : ϵ_x et ϵ_y représentent les déformations directes ;
 γ_{xy} la déformation de cisaillement.

En remplaçant U et V par leurs valeurs données par l'équation (6-2), on obtient :

$$\{\epsilon\} = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m = [B] \cdot \{\delta\} \quad (6-11)$$

avec :

$$[B]_m = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} \sin k_m y & 0 & \frac{1}{b} \sin k_m y & 0 \\ 0 & -k_m \left(1 - \frac{x}{b}\right) \sin k_m y & 0 & -\frac{k_m}{b} x \sin k_m y \\ k_m \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cos k_m y & -\frac{1}{b} \cos k_m y & \frac{1}{b} k_m x \cos k_m y & \frac{1}{b} \cos k_m y \end{bmatrix} \quad (6-12)$$

* Contraintes :

L'état de contrainte en chaque point de la bande est représenté par le vecteur $\{\sigma\}$ tel que :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\epsilon\}$$

avec (D) matrice d'élasticité donnée par la relation (6-7)

La matrice contrainte prend alors la forme :

$$[H]_m = \begin{bmatrix} -\frac{d_{11}}{b} \sin k_m y & -d_{12} k_m \left(1 - \frac{x}{b}\right) \sin k_m y & \frac{d_{11}}{b} \sin k_m y & -\frac{d_{12}}{b} x k_m \sin k_m y \\ -\frac{d_{21}}{b} \sin k_m y & -d_{22} k_m \left(1 - \frac{x}{b}\right) \sin k_m y & \frac{d_{21}}{b} \sin k_m y & -\frac{d_{22}}{b} x k_m \sin k_m y \\ d_{33} k_m \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cos k_m y & -\frac{d_{33}}{b} \cos k_m y & \frac{d_{33}}{b} k_m x \cos k_m y & \frac{d_{33}}{b} \cos k_m y \end{bmatrix} \quad (6-13)$$

* Matrice de rigidité élémentaire :

Dans le cas particulier d'une bande simplement appuyée à ses deux extrémités, la matrice de rigidité est découplée, c'est à dire que $(S)_{mn} = 0$ pour $m \neq n$

L'expression (6-9) prend donc la forme :

$$[S]_{mn} = t \cdot \begin{bmatrix} \frac{a \cdot D_{11}}{2b} + \frac{a \cdot b \cdot k_m^2 D_{22}}{6} & & & \\ \frac{a \cdot k_m \cdot D_{12}}{4} - \frac{a \cdot k_m \cdot D_{31}}{4} & \frac{a \cdot b \cdot k_m^2 \cdot D_{22}}{6} + \frac{a \cdot D_{33}}{2 \cdot b} & & \\ -\frac{a \cdot D_{11}}{2 \cdot b} + \frac{a \cdot b \cdot k_m^2 \cdot D_{33}}{12} & -\frac{a \cdot k_m \cdot D_{12}}{4} - \frac{a \cdot k_m \cdot D_{33}}{4} & \frac{a \cdot D_{31}}{2b} + \frac{a \cdot b \cdot k_m^2 \cdot G}{6} & \\ \frac{a \cdot k_m \cdot D_{12}}{4} + \frac{a \cdot k_m \cdot D_{33}}{4} & \frac{a \cdot b \cdot k_m^2 \cdot D_{22}}{12} - \frac{a \cdot D_{33}}{2 \cdot b} & -\frac{a \cdot k_m \cdot D_{11}}{4} + \frac{a \cdot k_m \cdot D_{33}}{4} & \frac{a \cdot b \cdot k_m^2 \cdot D_{22}}{6} + \frac{a \cdot D_{33}}{2 \cdot b} \end{bmatrix} \quad \text{symétrique} \quad (6-14)$$

Type de chargement	Uniformément réparti de composantes : qx suivant x qy suivant y	Linéique uniforme q suivant la droite $x = x_1$	Concentrée au point $P(x_c, y_c)$ P_{cx} : suivant x P_{cy} : suivant y
Expression du vecteur chargement élément.	$q b \frac{1 - (-1)^m}{2 \cdot k_m} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$q \cdot \frac{1 - (-1)^m}{k_m} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x_1}{b} \\ 0 \\ \frac{x_1}{b} \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} P_{cx} \left(1 - \frac{x_c}{b}\right) \sin k_m y_c \\ P_{cy} \left(1 - \frac{x_c}{b}\right) \cos k_m y_c \\ P_{cx} \frac{x_c}{b} \sin k_m y_c \\ P_{cy} \frac{x_c}{b} \cos k_m y_c \end{Bmatrix}$

CHAPITRE VII : PRESENTATION DU PROGRAMME PLBANDE

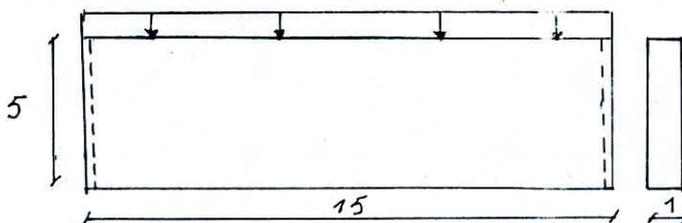
PRESENTATION DU PROGRAMME PL BANDE

Ce programme est exactement identique au programme FL BANDE dans toutes ses structures, on a seulement changé les matrices de rigidité et vecteur de chargement élémentaires. PL BANDE est conçu pour résoudre les problèmes de plaques simplement appuyées sur deux cotés opposés chargées dans leur plan de manière quelconque.

EXEMPLE

Pour illustrer l'application de la méthode des bandes finies à l'analyse des plaques en contraintes planes, on étudie une poutre cloison chargée uniformément, appuyée simplement sur deux cotés opposés, on fera la comparaison avec les résultats de l'élasticité et de la flexion pour une poutre simplement appuyée sur ses extrémités.

- q = 0,8
- l = 15
- E = 13400
- t = 1
- V : 0,3



La solution exacte est déterminée par la fonction d'Airy. La plaque est divisée en 10 bandes avec 10 harmoniques. Dans cet exemple, nous n'avons pas à introduire de conditions aux limites, vu que les deux bords sont libres.

Déplacements verticaux

X	M.B.F (10^{-3})	ELASTICITE (10^3)	FLEXION
0	0	0	0
3,75	3,41	3,50	2,62
7,5	4,72	4,80	3,80

Temps d'exécution du Programme, pour cet exemple :

42 ms

Contrainte σ_y dans la section centrale

Y	0	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	3,25	3,75	4,25	4,75
MBF	1,03	0,831	0,77	0,68	0,57	0,46	0,32	0,12	0,53	0,011
Exact	0,8	0,78	0,65	0,60	0,51	0,37	0,23	0,14	0,07	0,020

Contrainte σ_x dans la section centrale

Y	0	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,5
MBF	5,64	4,95	3,74	2,62	1,55	0,51	0,03
Exact	5,50	4,41	3,92	2,65	1,60	0,50	0

Contrainte τ_{xy} à l'appui

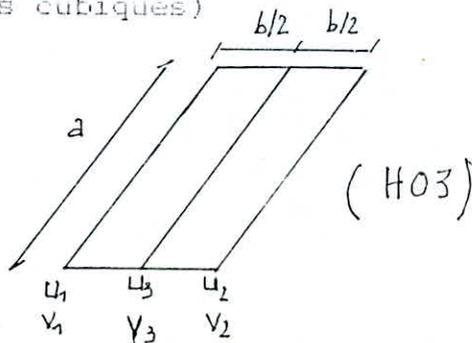
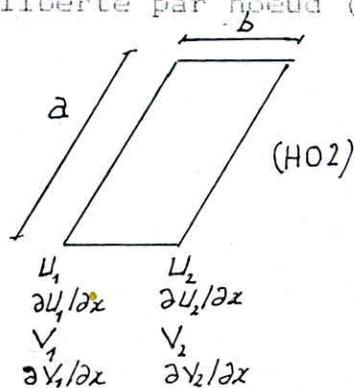
Y	0,25	0,75	1,25	1,75	2,50	3	3,75	4,25	4,75
MBF	0,43	1,03	1,38	1,57	1,64	1,49	1,20	0,82	0,31
Exact	0,30	0,83	1,35	1,55	1,78	1,65	1,35	0,83	0,3

Les légères différences entre les valeurs exactes et celles données par la MBF sont dues au fait que la solution exacte correspond au cas d'une poutre simplement appuyée (sur 2 appuis ponctuels) à ses extrémités, alors que la poutre étudiée par la MBF est appuyée le long de ses bords.

CONCLUSION

Les résultats obtenus sont satisfaisants étant donné le nombre réduit de bandes utilisées.

Il existe des discontinuités des contraintes, au niveau des lignes nodales, dues au choix des fonctions de formes (linéaires). Pour éviter ces sauts on calcule les contraintes à mi bande, ou mieux utiliser des bandes d'ordre plus élevé H02 à 4 degrés de liberté par ligne nodale ($U, \partial U/\partial x, V, \partial V/\partial x$), avec des polynômes cubiques, assurant ainsi la continuité des déplacements et leurs dérivées premières. On peut aussi utiliser des bandes d'ordre plus élevé (H03) à trois lignes nodales et deux degrés de liberté par noeud (polynômes cubiques)



Les noeuds internes ne sont pas assemblés et sont éliminés par la technique de condensation statique.

Ces bandes d'ordre élevé donnent des valeurs plus précises pour un nombre de bandes inférieures, nous suggérons alors leur formulation.

PARTIE D : SUPERPOSITION DES DEUX COMPORTEMENTS
(PLAQUES PLIEES)

**CHAPITRE VIII : ANALYSE DES PLAQUES PLIEES PAR
LA METHODE DES BANDES FINIES
SUPERPOSITION DES DEUX COMPOR-
TEMENTS.**

ANALYSE DES PLAQUES PLIEES PAR LA METHODE DES BANDES FINIES

SUPERPOSITION DES DEUX COMPORTEMENTS

1. INTRODUCTION

L'analyse des structures en plaques pliées à fait l'objet de plusieurs recherches à cause de la grande envergure de ses applications pratiques :

- Poutres caissons des ponts
- Toitures des ouvrages industriels
- Coques axisymétriques.

L'une des premières méthodes de résolution des problèmes de plaques pliées fut la méthode générale d'élasticité, développée par Goldberg et Leve, programmée et appliquée par De Fries, Skene et Scordelis comme une approche par la méthode des rigidités. Cette méthode s'est avérée très complexe et difficile à appliquer aux plaques pliées orthotropes et en analyse dynamique.

La méthode des éléments finis a traité avec succès les problèmes des plaques pliées, mais nécessite une grande capacité mémoire et pour le cas des éléments coplanaires, plusieurs solutions ont été apportées.

La méthode des bandes finies trouve aussi son application dans le calcul des plaques pliées et ce fut toujours CHEUNG qui en 1969, l'introduisit pour la première fois pour l'analyse des plaques pliées prismatiques, en combinant des bandes LO2 de flexion et planaires, pour formuler ainsi un élément de coque.

Cette méthode a eu un grand succès surtout dans le calcul des ponts vu sa simplicité de programmation, son nombre réduit de paramètres, le peu d'espace mémoire demandé, et le temps d'exécution.

2. ETUDE DES PLAQUES PLIEES PRISMATIQUES :

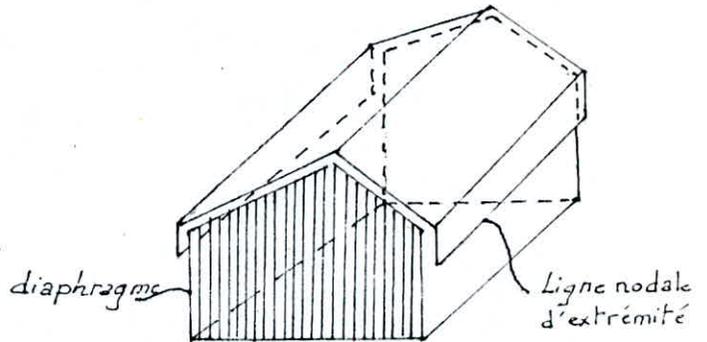
Dans cette analyse on émet les hypothèses suivantes :

- les panneaux de plaques sont constitués de matériaux isotropes ou orthotropes.
- la structure en plaques pliées est limitée par deux lignes droites (lignes nodales d'extrémité) et par deux plans aux supports.

- Les plaques sont supportées à chaque extrémité par des diaphragmes infiniment rigides dans leur plan et infiniment flexibles en dehors.
On réalise ainsi les conditions idéales d'un appui simple de plaque pour les cas membranaires et flexionnels.
- On s'intéressera particulièrement au cas simplement appuyé (termes de la série découplés) et par conséquent chaque terme de la série pourra être calculé séparément.

Toutes les discussions seront relatives au même terme.

fig 8.1.



2.1. Formulation de la matrice de rigidité :

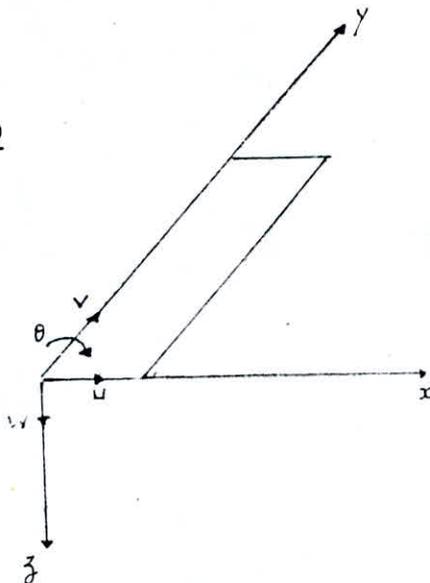
Pour une bande de coque ou de plaque pliée on suppose qu'il n'y a aucune interaction entre les comportements membranaires et flexionnels (les 02 comportements sont indépendants).

Par conséquent une bande de plaque pliée ou de coque peut être simplement formée à partir de la combinaison d'une bande de flexion et d'une bande de contrainte plane de la manière suivante :

Les déplacements de flexion et membranaires agissent simultanément.

Dans notre étude nous considérons des bandes L02 c'est à dire que chaque ligne nodale a 4 composantes de déplacement et 4 composantes de forces correspondantes.

fig 8-2



Ces déplacements étant reliés aux forces par la matrice de rigidité, on peut ainsi écrire :

$$[S]_{mm} \{\delta\}_m = \{F\}_m \quad (8-1)$$

où

$$\{\delta\}_m = [u_1, v_1, w_1, \theta_1, u_2, v_2, w_2, \theta_2]_m^t = \left\{ \begin{matrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{matrix} \right\}_m \quad (8-2)$$

$$\{F\}_m = [F_{x1}, F_{y1}, T_{z1}, M_{x1}, F_{x2}, F_{y2}, T_{z2}, M_{x2}]_m^t = \left\{ \begin{matrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{matrix} \right\} \quad (8-3)$$

$$[S]_{mm} = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{bmatrix}_{mm} \quad (8-4)$$

est une matrice d'ordre (8 x 8)

La sous matrice $[S_{ij}]_{mm}$ de la matrice $[S]_{mm}$ est formée de sous matrices appropriées de la matrice de rigidité de flexion $[S_{ij}]_{mm}^F$ et planaire $[S_{ij}]_{mm}^P$ d'où

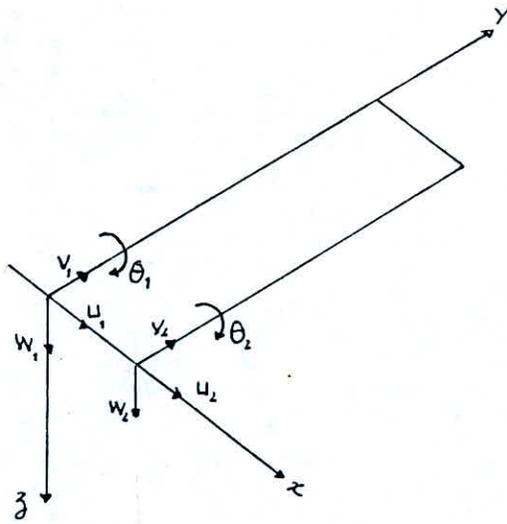
$$[S_{ij}]_{mm} = \begin{bmatrix} [S_{ij}]_{mm}^P & [0] \\ [0] & [S_{ij}]_{mm}^F \end{bmatrix} \quad (8-5)$$

$\begin{matrix} P \\ 2 \times 2 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} F \\ 2 \times 2 \end{matrix}$

Voir fig 8.3

Remarque :

Cette procédure reste aussi valable pour les bandes d'ordre supérieur



Construction de La Matrice de Rigidité d'une Bande

$$\begin{bmatrix} S_{11}^P & S_{12}^P & S_{13}^P & S_{14}^P \\ & S_{22}^P & S_{23}^P & S_{24}^P \\ & & S_{33}^P & S_{34}^P \\ & & & S_{44}^P \end{bmatrix}$$

symétrique

$$\begin{bmatrix} S_{11}^F & S_{12}^F & S_{13}^F & S_{14}^F \\ & S_{22}^F & S_{23}^F & S_{24}^F \\ & & S_{33}^F & S_{34}^F \\ & & & S_{44}^F \end{bmatrix}$$

symétrique

$$\begin{bmatrix} S_{11}^P & S_{12}^P & 0 & 0 & S_{13}^P & S_{14}^P & 0 & 0 \\ & S_{22}^P & 0 & 0 & S_{23}^P & S_{24}^P & 0 & 0 \\ & & S_{11}^F & S_{12}^F & 0 & 0 & S_{13}^F & S_{14}^F \\ & & & S_{22}^F & 0 & 0 & S_{23}^F & S_{24}^F \\ & & & & S_{33}^P & S_{34}^P & 0 & 0 \\ & & & & & S_{44}^P & 0 & 0 \\ & & & & & & S_{33}^F & S_{34}^F \\ & & & & & & & S_{44}^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Symétrique

fig. 8.3.

2.2. Transformation de coordonnées :

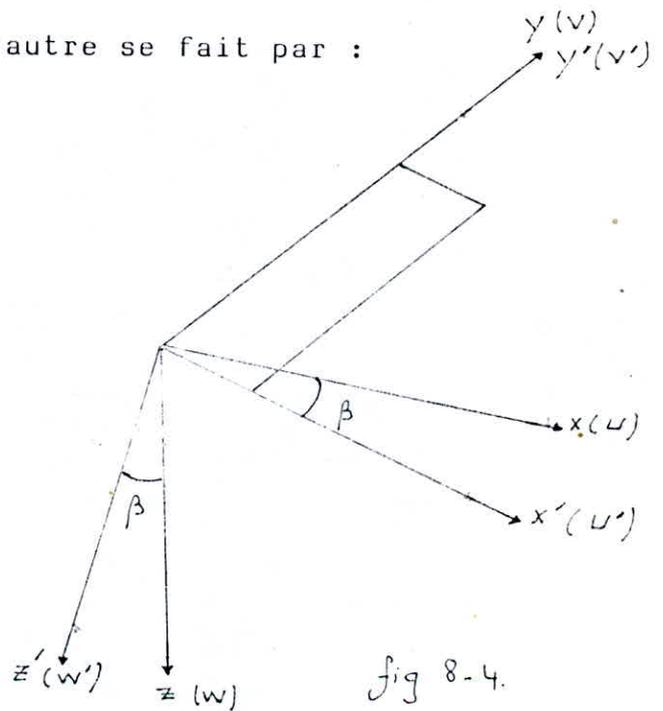
(Matrice de transformation)

La matrice de rigidité formulée précédemment a été calculée dans un système d'axes locales.

Dans les structures en plaques pliées, les panneaux de plaques font en général, entre eux un angle θ (c'est à dire que les panneaux ne sont pas forcément coplanaires), et pour pouvoir établir, l'équilibre des forces nodales aux interfaces des bandes non coplanaires, on se ramène à un système d'axes globales soient : (X', Y', Z') et (X, Y, Z) les repères local et global respectivement les axes Y et Y' coïncident entre eux et avec l'interface.

Le passage d'un repère à l'autre se fait par :

$$\begin{cases} X = X' \cos \beta - Z' \sin \beta \\ Y = Y' \\ Z = Z' \cos \beta + X' \sin \beta \\ \theta = \theta' \end{cases}$$



C'est à dire

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ \theta' \end{Bmatrix}$$

Donc la transformation d'un repère à l'autre se fait de la manière suivante :

$$\begin{cases} \{F\}_m = [R] \cdot \{F'\}_m \\ \{\delta_m\} = [R] \cdot \{\delta'\}_m \end{cases} \quad (8-6)$$

avec :

$$[R] = \begin{bmatrix} [r] & [0] \\ [0] & [r] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [r] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-7)$$

β étant l'angle entre les axes X et X' dans le sens des aiguilles d'une montre.

Remarques :

- La matrice de transformation (R) est une matrice orthogonale, c'est à dire

$$[R]^{-1} = [R]^T$$

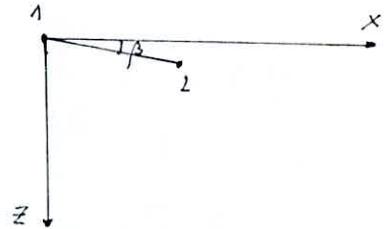
- Les termes de la matrice de rigidité sont déterminés de la manière suivante

$$\cos \beta = \frac{x(2) - x(1)}{b_1}$$

$$\sin \beta = \frac{z(2) - z(1)}{b_1}$$

avec :

$$b_1 = \sqrt{(x(2) - x(1))^2 + (z(2) - z(1))^2}$$



En remplaçant $\{F'\}_m$ par la valeur (8.1) on obtient

$$\begin{aligned} \{F\}_m &= [R] \cdot [S']_{mm} \{\delta'\}_m \\ &= [R] \cdot [S']_{mm} [R]^T \cdot \{\delta\}_m \\ &= [S]_{mm} \cdot \{\delta\}_m \end{aligned} \quad (8-8)$$

avec :

$$[S]_{mm} = [R] [S']_{mm} [R]^t \quad (8-9)$$

$[S]_{mm}$ matrice de rigidité dans le repère global
 $[S']_{mm}$ matrice de rigidité dans le repère local
 $[R]$ matrice de transformation

Une fois que les matrices de rigidité sont ramenées au repère global, elles peuvent être assemblées pour former la matrice de rigidité globale de toute la structure de la manière couramment utilisée.

Il apparait ainsi deux points remarquables de cette méthode au cours du processus de transformation :

- concernant la compatibilité des déplacements après transformation :

- . Dans la méthode des bandes finies, seuls U et W sont touchés par la transformation et les fonctions de déplacements ont été choisies de façon que les déplacements U et W aient la même variation dans le sens

longitudinal Y ($\sin(k_y y)$) par conséquent la rotation des axes X' et Z' ne va pas affecter la compatibilité des déplacements aux lignes nodales, en plus les déplacements θ et V ne sont pas du tout affectés par la rotation car l'axe Y est commun aux 2 repères.

Par contre dans la méthode des bandes finies, les déplacements U et W ont des fonctions de déplacement polynomiales d'ordre différent et qui même s'ils assurent la compatibilité quand chaque déplacement est examiné individuellement (dans le repère local), après transformation, ils vont être combinés d'une manière dépendant des cosinus directeurs de l'élément considéré et la compatibilité est généralement perdue.

En résumé :

En bandes finies, U et W sont affectés par le même terme de rotation : $(\cos\beta)$ c'est à dire qu'après transformation, ils seront seulement multipliés par la même constante donc si la compatibilité existait avant transformation, elle existerait après transformation, alors qu'en éléments finis les coefficients de transformation sont différents donc si la compatibilité existait avant transformation il risque très fort de ne pas l'être après transformation.

- . Pour les structures analysées par éléments finis au moins 5 degrés de liberté existent par noeud (U' , V' , W' , $\theta'x$, $\theta'y$), et on a souvent besoin de rajouter un sixième degré de liberté pour faciliter l'assemblage (comme déjà vu dans le paragraphe précédent) et des compatibilités apparaissent lors du passage du repère local au repère global.

On a donc besoin d'ajouter soit un 6ème degré de liberté où d'introduire des rigidités artificielles ou bien en opérant avec des systèmes d'axes de coordonnées surfaciques changeant d'orientation d'un noeud à un autre pour garder les cinq degrés de liberté.

Alors que la Méthode des bandes finies garde les 4 degrés de liberté pour la ligne nodale de la bande et seulement la transformation standard utilisée pour les portiques plans est nécessaire.

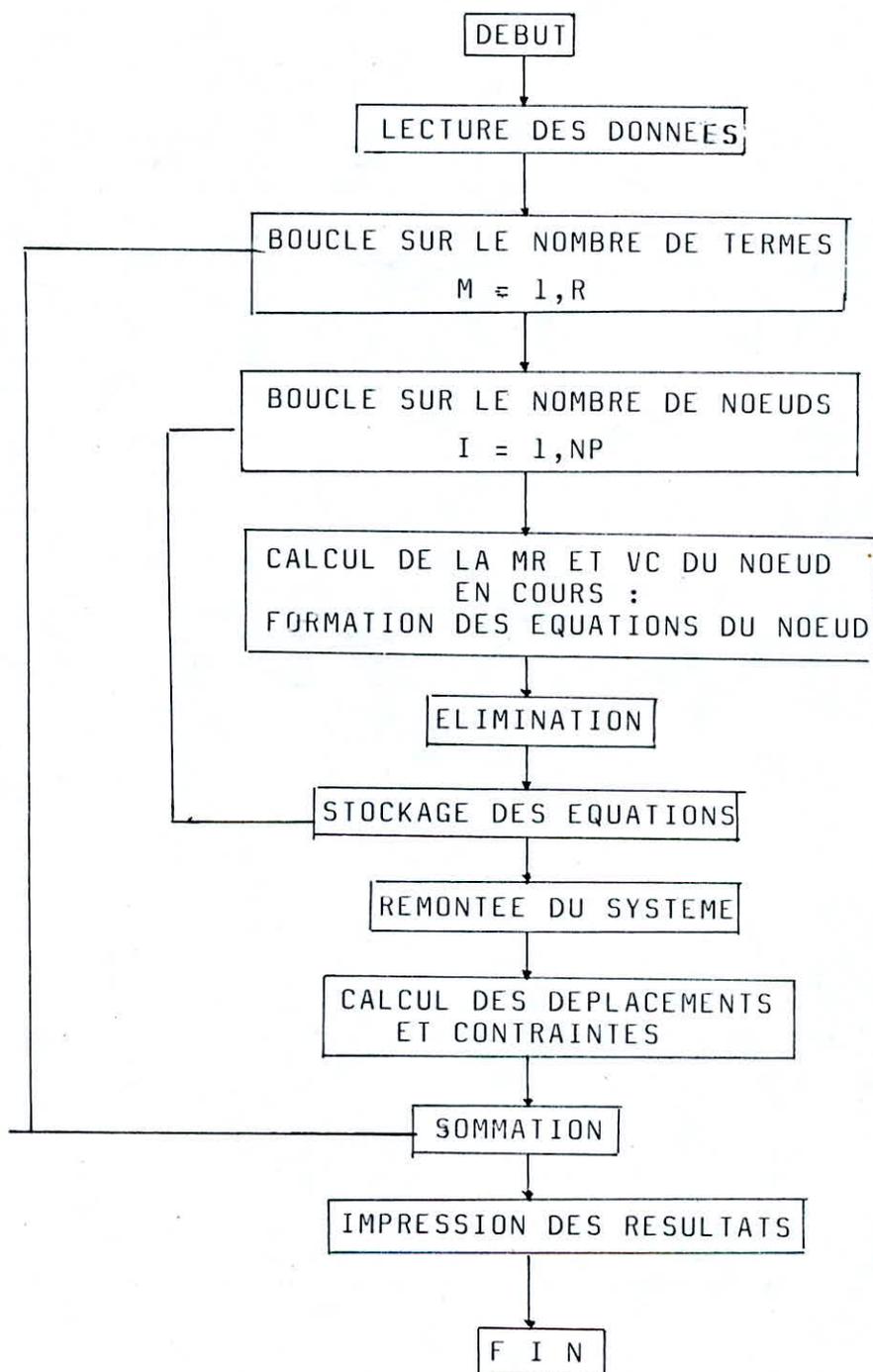
- . Dans le même contexte la largeur de bande en éléments finis est au moins de 30 alors qu'en bandes finies elle est au moins de 8.

CHAPITRE IX : PRESENTATION DU PROGRAMME PPLBANDE

PRESENTATION DU PROGRAMME PPLBANDE

Pour l'étude des plaques pliées nous avons utilisé une méthode d'assemblage et de résolution différentes de celles précédemment citées, et qui est l'élimination noeud par noeud.

L'organigramme du programme est le suivant :



INTRODUCTION DES DONNES :

Les données à introduire sont :

le nombre d'harmoniques, le nombre de bandes et de lignes nodales, le nombre de points de sorties par lignes nodales, les conditions aux limites, les coordonnées des noeuds, les connectivités le chargement et les propriétés mécaniques.

EVALUATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ET DU VECTEUR

Chargement élémentaires :

Pour chaque bande, on forme la matrice et le vecteur chargement élémentaires dans le repère local puis la partie revenant à chaque noeud est renvoyée pour être transformée au repère global, puis assemblée.

Comme les structures en plaques pliées sont le plus souvent simplement appuyées l'assemblage est relativement simple car les termes de la série sont découplés et la matrice de rigidité globale pour chaque terme peut être formée, assemblée et résolue séparément.

Par conséquent, si les noeuds 1 et 2 de la bande i sont associées aux noeuds I et J de la structure respectivement alors pour le même terme de la série, les quatre sous matrices de la matrice de rigidité $S_{mm}(i)$ vont être assemblées pour former la matrice de rigidité globale comme suit :

NOEUD	I-1	I	J	J+1
I-1					
I		$[S_{11}^{(i)}]_{mm}$		$[S_{12}^{(i)}]_{mn}$	
⋮					
J		$[S_{21}^{(i)}]_{mn}$		$[S_{22}^{(i)}]_{mm}$	
J+1					

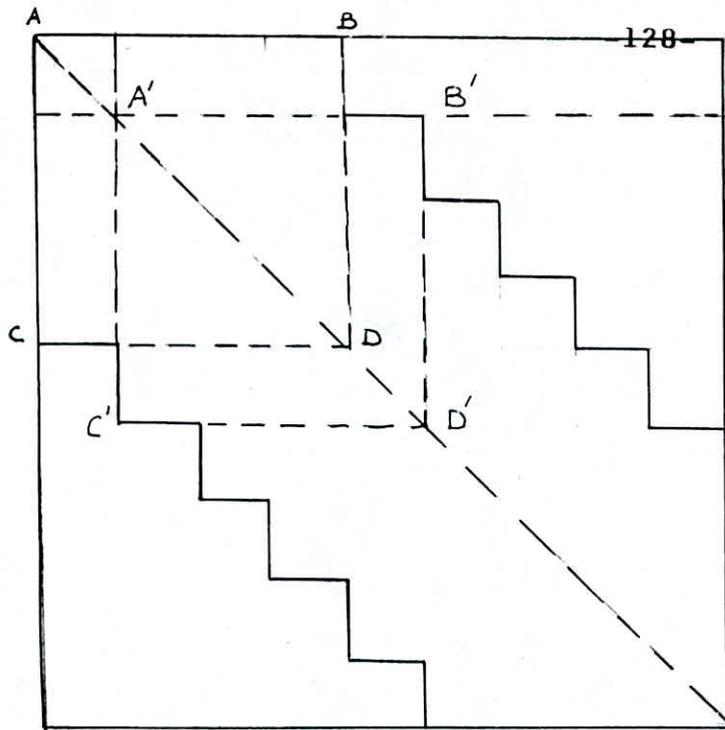
ASSEMBLAGE - ELIMINATION

La résolution du système se faisant par élimination de GAUSS noeud par noeud, alors pour une efficacité maximale, l'assemblage et la procédure de solution doivent être effectués de telle manière que les équations de rigidités d'un noeud soient éliminées tout de suite après qu'elles soient fermées et par conséquent on évite le stockage intermédiaire des sous matrices.

Une telle procédure de résolution peut être obtenue, simplement, en ayant toujours le plus petit numéro de noeud de la bande comme premier numéro nodal et en arrangeant l'ordre des bandes de manière que leurs premiers numéros nodaux apparaissent dans un ordre croissant. De cette manière l'assemblage de la matrice de rigidité de n'importe quelle bande va s'arrêter automatiquement quand le numéro du noeud d'une bande est supérieur au numéro du noeud qui est en cours d'élimination.

RESOLUTION

La résolution est très simplifiée vu les propriétés de symétrie et d'aspect bande de la matrice de rigidité globale.



$$\begin{bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \{\delta_n\} \\ \vdots \\ \{\delta_N\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \vdots \\ \{F_n\} \\ \vdots \\ \{F_N\} \end{bmatrix}$$

Dans la matrice de rigidité de la figure (-3) chaque partie en forme de "marche" représente les équations associées à un noeud.

Le 1er ensemble d'équations nodales peut être divisé en une matrice diagonale $[K_{11}]$ et une sous matrice hors diagonale $[K_{1H}] = \begin{bmatrix} [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] & \dots & [K_{1n}] \end{bmatrix}$

Si l'ensemble des paramètres de déplacements nodaux $\{\delta_i\}$ doit être éliminé alors l'aire ABCD de la matrice globale va être affectée et va avoir les matrices modifiées suivantes :

$$[K_{HH}]^* = [K_{HH}] - [K_{1H}]^T [K_{11}]^{-1} [K_{1H}]$$

$$[F_H]^* = [F_H] - [K_{1H}]^T [K_{11}]^{-1} [F_1]$$

$$[K_{HH}] = \begin{bmatrix} [K_{22}] & \dots & [K_{2n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [K_{n2}] & \dots & [K_{nn}] \end{bmatrix}$$

et

$$[F_H] = \begin{bmatrix} \{F_2\} \\ \vdots \\ \{F_n\} \end{bmatrix}$$

Après que le 1er ensemble d'équations nodales ait été éliminé le 2ème ensemble d'équation est en voie d'assemblage et l'aire A' B' C' D' est alors affectée. L'opération est ainsi répétée jusqu'au dernier ensemble d'équation qui est de la forme :

$$[K_{NN}]^* \{\delta_N\} = \{F_N\}^*$$

Toutes les équations nodales modifiées sont stockées pour la remontée du système ultérieurement.

Seulement une matrice de la taille de la largeur de demi bande (surface A B C D) est nécessaire pour accomplir le processus d'élimination.

Après l'élimination de $[K_{MM}]$, $[K_{HH}]^*$ est remplacée par $[K_{22}]^*$ qui va occuper le coin nord ouest de la matrice.

Après que la procédure d'assemblage pour le noeud 2 ait été accomplie, la prochaine élimination prend place.

Le dernier ensemble de paramètre de déplacements nodaux peut être calculé.

$$\{\delta_N\} = [K_{NN}]^{*-1} \{F_N\}^*$$

une fois calculé il est possible de résoudre les équations modifiées, une par une, en remontant le système.

Dans cette procédure on n'inverse que des matrices (4 x 4) ce qui est une opération très peu coûteuse et très facile quand à comparer avec la résolution du système 4x NL où NL est le nombre de lignes nodales.

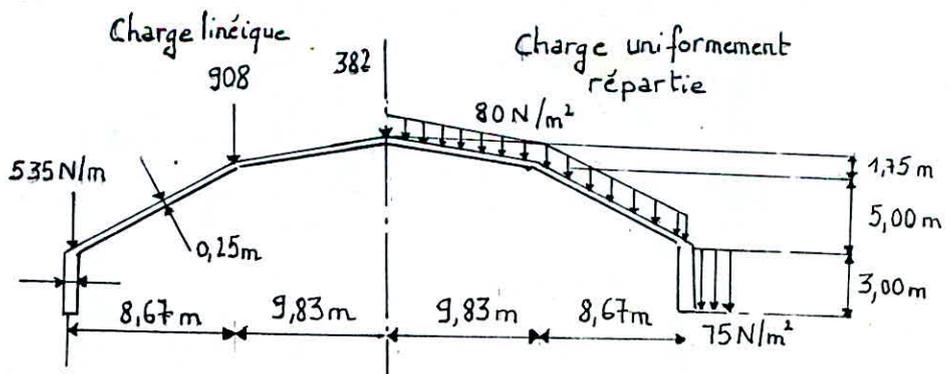
CALCUL DES EFFORTS INTERNES

Les matrices de contraintes sont normalement calculées en même temps que les matrices de rigidité et sont stockées. Une fois les déplacements calculés, les matrices de contraintes sont lues pour le calcul des efforts internes.

Pour des raisons de conception, les efforts internes d'une bande sont généralement calculés dans le système local de la bande, par conséquent les paramètres de déplacement respectifs doivent être d'abord ramenés au système local.

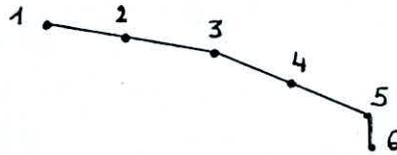
Exemple

Nous allons étudier une structure en plaques pliées type afin de faire valoir la performance de la méthode dans ce cas de structure.



La structure est soumise à des charges réparties (80 et 75) et à des charges linéiques sur toute sa longueur.

A cause de la symétrie nous étudions seulement la moitié de la structure que nous divisons en 5 bandes



Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la méthode directe des rigidités de Scordellis et De Fries-Skin.

1/ Structure sous charges linéiques seulement

Les contraintes et les déplacements sont calculés à la section médiane :

LIGNE NODALE	1	3	5	6
$M_x \cdot 10^3$ MBF MN/m	-0,970	0,175	0,204	0,000
Méthode des rigidités (MR) $M_x \cdot 10^3$ MN/m	-0,980	0,170	0,220	0,000
$\sigma_y \cdot 10^5$ MBF Pas	-0,390	-0,540	0,049	2,100
$\sigma_y \cdot 10^5$ Pas MR	-0,310	-0,480	0,052	2,200
$U \cdot 10^7$ MBF	-0,000	-0,400	-1,50	-2,000

2/ Structure sous charges linéiques et uniformes

LN	1	3	5	6
$M_x \cdot 10^4$	-2,350	-0,350	0,330	0,000
$\sigma_y \cdot 10^5$	-0,550	-1,100	0,070	4,260
$U \cdot 10^7$	0,000	-0,796	-3,198	-3,862

Temps d'exécution du Programme PPLBANDE Pour cet exemple est.de :

144 ms.

CONCLUSION

Les résultats obtenus sont cohérents, avec ceux de la méthode des rigidités, et présentent plus d'avantages vu le nombre réduit de bandes 5, une analyse par éléments finis aurait nécessité quelques 128 éléments triangulaires (Zienkiewicz)

Nous suggérons enfin l'utilisation de bandes d'ordre supérieur HO3 (à ligne nodale interne) afin d'avoir plus de précision en n'utilisant que peu d'éléments.

PARTIE E : PRESENTATION GENERALE DE LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS

CHAPITRE X : PRESENTATION DE LA METHODE DES
ELEMENTS FINIS

PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

I. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis est une méthode de calcul numérique permettant de déterminer l'état d'équilibre d'un milieu continu à deux ou trois dimensions.

La méthode des éléments finis consiste à déterminer de manière approximative les déplacements d'un certain nombre de points A_i ($i = 1, \dots, n$) du milieu appelés noeuds. Ces déplacements sont définis par des vecteurs dont les éléments sont les inconnues du problème.

Pour cela, le milieu continu est divisé au moyen de lignes ou de surfaces imaginaires passant par les noeuds, en un nombre fini d'éléments et on suppose que ces éléments ne sont mécaniquement assemblés qu'aux noeuds A_i .

Ainsi le milieu continu à étudier est remplacé par une structure idéalisée composée d'un nombre fini d'éléments.

L'élément (e) étant lié aux autres éléments ou aux appuis A_j, \dots , le déplacement d'un point M de (e) est représenté par une fonction d'interpolation $U(M)$ prenant les valeurs $\{\delta_i^e\}, \{\delta_j^e\}, \dots$, lorsque le point M vient aux noeuds A_i, A_j, \dots ,

De la fonction $U(M)$ nous déduisons la fonction matricielle $\mathbf{E}(M)$ qui définit la déformation en tout point M de l'élément (e). La connaissance des propriétés mécaniques du matériau permet alors de déterminer la fonction matricielle $\mathbf{C}(M)$ qui définit la contrainte au point M.

Nous devons ensuite écrire l'équilibre de l'élément (e) : puisque l'élément (e) n'est lié aux autres éléments ou aux appuis que par les noeuds A_i, A_j, \dots , il suffit de déterminer qu'elles forces il faut appliquer aux noeuds A_i, A_j, \dots pour assurer l'équilibre des forces appliquées à l'élément (forces concentrées, densité de force, forces d'inertie) et éventuellement des déformations imposées à l'élément par des phénomènes extérieurs tels que la température ou le retrait.

Nous obtenons ainsi les matrices de rigidité généralisées des éléments.

La méthode des éléments finis est donc fondée sur les deux hypothèses simplificatrices suivantes :

- les éléments ne sont assemblés entre eux qu'aux noeuds,
- connaissant les déplacements des noeuds d'un élément, le déplacement d'un point quelconque de l'élément peut être représenté par une formule d'interpolation.

La première hypothèse conduit à n'écrire que l'équilibre d'ensemble des éléments. Localement, les lois d'équilibre vérifiées, puisqu'on néglige les réactions mutuelles qui s'exercent le long de la frontière commune à deux éléments voisins.

La deuxième hypothèse peut donner lieu à des discontinuités du déplacement (ou de ses dérivées) interpolé à partir des valeurs aux noeuds, lorsqu'on traverse la frontière commune à deux éléments voisins. Il est évidemment souhaitable de choisir des fonctions d'interpolation ne conduisant pas à des discontinuités des déplacements.

2. FORMULATION DIRECTE DES CARACTERISTIQUES D'UN ELEMENT

2.1. FONCTION DE DEPLACEMENT

Considérons l'élément (e) lié aux autres éléments ou aux appuis par les noeuds A_i, A_j, \dots

Un repère orthonormé étant choisi, le déplacement $U(M)$ d'un point M de l'élément (e) est représenté par

$$U(M) = [N_i^e(M), N_j^e(M), \dots] \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta_i^e\} \\ \{\delta_j^e\} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \sum N_i^e(M) \cdot \{\delta_i^e\} = N^e(M) \cdot \{\delta^e\} \quad (10-1)$$

la sommation étant étendue aux noeuds de l'élément (e)

Puisque

$$U(A_i) = \{\delta_i^e\} \quad ; \quad U(A_j) = \{\delta_j^e\} \quad , \dots$$

Nous avons quelques soient les noeuds A_i et A_j ($i \neq j$) de l'élément (e) :

$$N_i^e(A_i) = I \quad \text{et} \quad N_i^e(A_j) = 0$$

I : désignant la matrice unité

N_i^e : sont fonction des positions, on les appelle fonctions de formes.

2.2. DEFORMATIONS :

Il est possible de calculer la déformation $\epsilon(M)$ au point M au moyen d'un opérateur linéaire L :

$$\epsilon(M) = L \cdot U(M)$$

Ainsi dans le cas d'un milieu plan, le déplacement est défini par le vecteur U dont les éléments sont les composantes U et V, la déformation est définie par le vecteur :

$$\epsilon(M) = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

En posant :

$$B^e(M) = L \cdot N^e(M) \quad (10-2)$$

nous obtenons la formule qui donne la déformation $\epsilon(M)$ en fonction des déplacements des noeuds de l'élément sous la forme condensée :

$$\epsilon(M) = B^e(M) \{ \delta^e \} \quad (10-3)$$

ou sous la forme développée :

$$\epsilon(M) = [B_i^e(M), B_j^e(M), \dots] \begin{Bmatrix} \delta_i^e \\ \delta_j^e \\ \vdots \end{Bmatrix} = \sum_i B_i^e(M) \cdot \delta_i^e$$

la sommation étant étendue aux noeuds de l'élément (e)

2.3. CONTRAINTES

Si D désigne la matrice d'élasticité du matériau qui peut éventuellement être fonction de M, la contrainte au point M est définie par le vecteur

$$\sigma(M) = D \cdot \epsilon(M)$$

Plus généralement, si l'élément est soumis du fait de la température ou du retrait, à une déformation imposée $\epsilon_0(M)$ (M), la contrainte, au point M est donnée par la relation.

$$\sigma(M) = D \cdot [\epsilon(M) - \epsilon_0(M)] \quad (10-4)$$

2.4. FORCES NODALES EQUIVALENTES :

Proposons nous de déterminer quelles forces, définies par le vecteur F^e formé par la juxtaposition des vecteurs F_i, F_j, \dots , il faut appliquer aux noeuds A_i, A_j, \dots , pour assurer l'équilibre de l'élément (e) sous l'effet :

- des déplacements des noeuds supposés connus et définis par le vecteur $\{\delta^e\}$
- d'une densité volumique de force $f(M)$ appliquée à l'élément
- de la déformation imposée $\epsilon_0(M)$

Nous appliquons le théorème des travaux virtuels :
Un déplacement virtuel $\delta\{\delta^e\}$ des noeuds entraîne en un point M, de l'élément un déplacement virtuel $\delta U(M)$ et une déformation virtuelle $\delta \epsilon(M)$ donnés par les relations :

$$\begin{cases} \delta U(M) = N^e(M) \cdot \delta\{\delta^e\} \\ \delta \epsilon(M) = B^e(M) \cdot \delta\{\delta^e\} \end{cases} \quad (10-5)$$

Les forces F^e et la densité $f(M)$ étant en équilibre avec l'état de contrainte défini par $\sigma(M)$ le théorème des travaux virtuels se traduit par la relation dans laquelle V_e désigne le volume de l'élément (e)

$$\delta\{\delta^e\}^t \cdot F^e + \int_{V_e} [\delta U(M)]^t \cdot f(M) \, dV = \int_{V_e} [\delta \epsilon^e(M)]^t \cdot \sigma(M) \cdot dV$$

soit compte tenu des relations (10-4) et (10-5)

$$\delta\{\delta^e\}^t \cdot F^e + \delta\{\delta^e\}^t \int_{V_e} [N^e(M)]^t \cdot f(M) \, dV = \delta\{\delta^e\}^t \int_{V_e} [B^e(M)]^t \cdot D \cdot [\epsilon(M) - \epsilon_0(M)] \, dV$$

Remplaçons dans l'expression précédente (M) par sa valeur (10-3) et posons :

$$K^e = \int_{V_e} [B^e(M)]^t \cdot D \cdot B^e(M) \cdot dV$$

$$F'^e = \int_{V_e} [N^e(M)]^t \cdot f(M) \cdot dV$$

$$F''^e = \int_{V_e} [B^e(M)]^t \cdot D \cdot \epsilon_0(M) \cdot dV$$

Nous obtenons :

$$\delta\{\delta^e\}^t [K^e \cdot \{\delta^e\} - F^e + F'^e + F''^e] = 0.$$

Nous déduisons de la relation précédente, exacte quelque que soit la variation virtuelle $\delta\{\delta^e\}$, la formule fondamentale

$$F^e = K^e \cdot \{\delta^e\} + F_i'^e + F_i''^e \quad (10-6)$$

dans laquelle :

K^e : est la matrice de rigidité généralisée de l'élément (e)

$F_i'^e$: est la matrice qui définit les forces qu'il faut appliquer aux noeuds de l'élément pour équilibrer la densité de force $f(M)$ lorsque les déplacements des noeuds sont empêchés ($\{\delta^e\} = 0$)

$F_i''^e$: est la matrice qui définit les forces qu'il faut appliquer aux noeuds de l'élément pour que la déformation imposée $\epsilon_0(M)$ n'entraîne aucun déplacement des noeuds ($\{\delta^e\} = 0$)

Il serait facile de tenir compte, en plus de la densité volumique $f(M)$, d'une densité superficielle de force $g(M)$ s'exerçant sur la frontière S_e de l'élément (ou sur toute autre surface liée à l'élément) ; il suffit de remplacer la seconde formule (10-6) par la formule

$$F_i'^e = - \int_{V_e} [N^e(M)]^T f(M) \cdot dV - \int_{S_e} [N^e(M)]^T g(M) \cdot ds$$

Remarques :

On pourrait aussi tenir compte des forces concentrées appliquées à l'élément, mais on supposera toujours que les points d'application des forces concentrées ont été choisis comme noeuds de la structure idéalisée.

Il est parfois intéressant, pour obtenir des simplifications de calcul, de déterminer la matrice de rigidité généralisée

K de l'élément (e) en choisissant un repère orthonormé particulier lié à l'élément. Nous obtenons alors la matrice de rigidité généralisée K dans le repère global choisi pour le calcul de la structure idéalisée au moyen de la formule :

$$K = R \cdot K \cdot R^T$$

R étant la matrice orthogonale déduite de la matrice orthogonale qui définit le changement de repère.

3. CALCUL DES DEPLACEMENTS DES NOEUDS

On suppose que les transformations de coordonnées adéquates ont déjà été effectuées de sorte que les degrés de liberté qui interviennent ici correspondent au repère global.

Le vecteur force définissant les forces qu'il faut appliquer au noeud de l'élément (e) pour assurer l'équilibre est donné par :

$$F_i^e = \sum_j k_{ij}^e \{\delta_j^e\} + F_i'^e + F_i''^e \quad (10-7)$$

La sommation étant étendue aux noeuds de l'élément (e) et les matrices k_{ij}^e , $F_i^{\prime e}$, $F_i^{\prime\prime e}$ ont les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} k_{ij}^e = \int_{V_e} [B_i^e]^t \cdot D \cdot B_j^e \cdot dy \\ F_i^{\prime e} = - \int_{V_e} [N_i^e]^t \cdot p \cdot dy \\ F_i^{\prime\prime e} = - \int_{V_e} [B_i^e]^t \cdot D \cdot \epsilon_0 \cdot dy \end{cases} \quad (10-8)$$

On notera que

$$k_{ij}^e = [k_{ij}^e]^t \quad \text{et} \quad k_{ii}^e = [k_{ii}^e]^t$$

Ecrivons l'équation d'équilibre du noeud Ai :

$$F_i = \sum_e F_i^e$$

La sommation étant étendue à l'ensemble des éléments (e) ayant en commun le noeud Ai

Compte tenu de la relation (10-7) l'équation d'équilibre du noeud Ai devient

$$F_i = \sum_e \left(\sum_j k_{ij}^e \{ \delta_j^e \} \right) + \sum_e F_i^{\prime e} + \sum_e F_i^{\prime\prime e}$$

soit en intervertissant l'ordre des sommations

$$F_i = \sum_j \left(\sum_e k_{ij}^e \right) \cdot \{ \delta_j^e \} + \sum_e F_i^{\prime e} + \sum_e F_i^{\prime\prime e}$$

En posant :

$$K_{ij} = \sum_e k_{ij}^e \quad ; \quad F_i^{\prime} = \sum_e F_i^{\prime e} \quad ; \quad F_i^{\prime\prime} = \sum_e F_i^{\prime\prime e}$$

la première sommation étant étendue à l'ensemble des éléments ayant en commun les noeuds Ai et Aj, et les deux dernières à l'ensemble des éléments ayant en commun le noeud Ai l'équation d'équilibre du noeud Ai s'écrit :

$$F_i = \sum_j K_{ij} \{ \delta_j \} + F_i^{\prime} + F_i^{\prime\prime} \quad (10-9)$$

Introduisons la matrice de rigidité de l'ensemble de la structure qui est une matrice régulière symétrique K

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

et définissons les vecteurs :

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \vdots \end{Bmatrix} ; F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} ; F' = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} ; F'' = \begin{Bmatrix} F''_1 \\ F''_2 \\ F''_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

L'ensemble des équations d'équilibre des noeuds équivaut à l'unique équation matricielle

$$F = K\{\delta\} + F' + F'' \quad (10-10)$$

Après introduction des conditions d'appui dans la relation (10-10), la résolution de l'équation ainsi obtenue donne les déplacements nodaux.

Remarque :

- si l'on numérote convenablement les noeuds et les éléments la matrice K est une matrice bande puisque $K_{ij} = 0$ lorsque les noeuds A_i et A_j n'appartiennent pas à un même élément au moins.

LA METHODE DES DEPLACEMENTS CONSIDEREE COMME UNE MINIMISATION

DE L'ENERGIE POTENTIELLE

Le principe des travaux virtuels concerne des variations de l'énergie de déformation U et du potentiel des charges appliquées V. Il stipule que :

$$\delta(U + V) = \delta(\phi) = 0$$

ϕ étant l'énergie potentielle totale.

Pour que l'équilibre soit réalisé, il faut que ϕ soit stationnaire par rapport à l'ensemble des variations admissibles des déplacements aux noeuds.

On démontre que ϕ est minimale.

Remarques :

- L'obtention de l'équilibre vrai nécessite un minimum absolu de l'énergie potentielle totale ϕ , une solution approchée obtenue par la méthode des déplacements fournira toujours une valeur approchée de ϕ supérieur à la valeur exacte.
- Plus le nombre de degrés de liberté augmente et plus la solution obtenue sera proche de la solution exacte à condition que les déplacements tendent vers les déplacements réels.

CRITERES DE CONVERGENCE

Le fait de limiter le nombre de degrés de liberté, qui est en réalité infini, ne permet en aucun cas d'atteindre le vrai minimum de l'énergie quelque soit la finesse du maillage (subdivision).

Pour que soit garantie la convergence vers la solution exacte, certaines conditions doivent être remplies par la fonction de déplacement.

Critère 1 :

La fonction de déplacement choisie doit être telle qu'elle ne permette pas la déformation d'un élément lorsque les déplacements de ses noeuds sont la conséquence d'un mouvement de corps rigide.

Critère 2 :

La forme de la fonction de déplacement doit être choisie de telle manière que ces déplacements nodaux sont compatibles avec un état de déformation constante, on puisse réellement obtenir ces déformations constantes dans tout l'élément.

Critère 3 :

La fonction de déplacement doit être choisie de telle manière que les déformations aux interfaces des éléments soient finies. Ce critère de compatibilité suppose une certaine continuité des déplacements lorsqu'on passe d'un élément à un autre et éventuellement de leurs dérivées.

6. ERREUR DUE A LA DISCRETISATION ET TAUX DE CONVERGENCE

Plus la taille h des éléments tend vers 0, plus on s'approche de la solution exacte.

Il existe des cas où la solution exacte est obtenue à l'issue d'un nombre seulement fini de subdivisions, ou même dans le cas extrême avec un seul élément, du moment que le développement polynomial utilisé dans cet élément peut s'adapter exactement à la solution cherchée (cas des éléments de poutre).

La simple détermination de l'ordre de convergence suffit bien souvent à obtenir le résultat exact par extrapolation de la solution.

Par exemple, si on sait que les déplacements convergent à l'ordre $O(h^2)$ et si nous obtenons deux solutions approchées

U1 et U2 correspondant à des maillages de tailles respectives h et h/2, on peut écrire la relation suivante dans laquelle U désigne la solution exacte :

$$\frac{U_1 - U}{U_2 - U} = \frac{O(h^2)}{O(h/2)^2} = 4$$

On déduit de cette égalité une solution U très proche de la solution exacte.

On peut avoir d'autres erreurs telles que les erreurs dues au calcul sur ordinateur.

7. ELEMENTS NON CONFORMES : TEST DE RAPIECAGE (patch test)

Dans certains cas, on éprouve des difficultés considérables à trouver pour un élément des fonctions de déplacement qui soient automatiquement continues en tout point de l'interface entre éléments adjacents.

En effet, la discontinuité des déplacements entraînera des déformations infinies aux interfaces.

Cependant si à la limite, en même temps que la taille des éléments décroît la continuité est rétablie, alors les formules obtenues précédemment conduiront encore aux résultats corrects. Cette condition est toujours remplie si :

- une condition de déformation constante assure automatiquement la continuité des déplacements,
- le critère de déformation constante est vérifié.

Afin de s'assurer qu'une telle continuité est obtenue dans n'importe quelle configuration du maillage lorsqu'on utilise des éléments non conformes, il est nécessaire d'imposer, à un regroupement (rapiécage, men anglais "patch") arbitraire d'éléments, des déplacements nodaux qui correspondent à un état quelconque de déformation constante. Si l'équilibre de tous les noeuds est simultanément réalisé en l'absence de forces nodales extérieures, et si l'on obtient un état de contraintes constantes, il est alors clair qu'aucun travail extérieur n'a pu se perdre au travers des discontinuités entre éléments.

Les éléments qui satisfont à un tel test de rapiécage assureront la convergence de la solution :

d'ailleurs, il arrive souvent que des éléments non conformes s'avèrent supérieures à des éléments conformes.

Le patch test est un simple test numérique qui a pour but d'évaluer la capacité de certains éléments finis, basé sur un assemblage de tels éléments.

L'assemblage doit contenir au moins un noeud interne complètement entouré d'éléments. Dans un patch test les noeuds des bords de l'assemblage sont sujets à des déplacements ou des forces qui dans une analyse exacte donnerai un état de déformation constante.

Si l'analyse par éléments finis montre que, quand le maillage de l'assemblage devient infiniment petit. La solution, qui est les déplacements, donne lieu à un état de déformation en tout point de n'importe quel élément, alors le patch test est positif. Dans un patch test les noeuds internes ne doivent être ni fixés ni chargés.

Bien que le patch test ne doit être passé que quand la taille des éléments devient très petite, il est très souvent commun de le passer pour n'importe quelle taille. Cependant pour beaucoup de cas, comme les éléments de coque curvilignes utilisant des coordonnées curvilignes, le test reste toujours recommandé pour des tailles infinitésimales d'éléments.

En réalité le patch test vérifie les critères de convergence entre autre le déplacement de corps rigides, l'état de déformation constante et la compatibilité interéléments. Le déplacement de corps rigides est en fait un cas particulier de déformations constantes avec des valeurs nulles.

Quand le maillage est infiniment raffiné, l'état de déformations constantes et compatibilité inter-éléments, apparaissent simultanément. Alors sur des bases physiques uniquement, le passage du patch test pour des tailles très petites des éléments, apparait comme une condition nécessaire et suffisante de convergence.

Il est possible que certains éléments peuvent passer avec succès certains patch tests spécifiques mais pas d'autres. Par exemple certains éléments quadrilatéraux peuvent passer le test positivement quand ils sont considérés comme rectangles ou parallélogrammes, mais "échouent" au test quand ils sont considérés comme des quadrilatères généraux.

Certains éléments triangulaires réussissent au test seulement pour des maillages et géométrie réguliers. Il est donc conseillé * pour un élément donné, que le patch test soit mené pour plusieurs configurations de l'assemblage, de la distribution du maillage (régulier ou non), et du type de déformation.

Il est très souvent admis que si un élément échoue au patch test, alors cet élément n'assure pas de convergence. (Alors on ne peut faire confiance à cet élément).

↳ d'un autre côté, le fait qu'un élément passe le test positivement n'est pas une garantie de satisfaction, car la vitesse de convergence peut être trop lente. Le concept original du patch test ne donne donc pas d'information sur la vitesse de convergence. Cependant, le concept a été généralisé pour donner, en plus d'une condition suffisante de convergence, une indication sur le degré de convergence espéré.

C O N C L U S I O N

C O N C L U S I O N

Après avoir appliqué la méthode des bandes finies aux plaques minces en flexion et en **contrainte** plane, ainsi qu'aux plaques pliées, et après avoir comparé les résultats avec les solutions exactes, il apparaît que la méthode des bandes finies est un outil très puissant d'analyse des structures vu le peu de données à introduire, le nombre réduit d'inconnues à trouver et le court temps d'exécution.

Pour des structures à géométrie régulières et à conditions aux limites simples, la méthode des bandes finies est préférable à la méthode des éléments finis, nous donnons ci-après quelques points de comparaison entre les deux méthodes.

COMPARAISON DE LA METHODE DES BANDES FINIES ET LA METHODE DES

ELEMENTS FINIS

Méthode des éléments finis

- a) Applicable pour des structures de formes diverses, avec des conditions très variées et pouvant avoir des variations de matériaux : c'est une méthode universelle et puissante.
- b) La condition d'équilibre des noeuds se traduit par un système linéaire dont le nombre d'équations est extrêmement grand, très coûteux et parfois même impossible à résoudre par des machines ordinaires.
- c) La matrice de rigidité de la structure est une matrice bande avec une grande largeur de bande du fait qu'un noeud peut être commun à plusieurs éléments.
- d) Nécessité des fichiers d'entrée importants d'où risques d'erreurs. Pour éviter cela on a recours à une génération automatique des noeuds et des éléments.
- e) Fichiers de sortie importants du fait que l'on doit imprimer les déplacements et les contraintes de tous les noeuds. De plus plusieurs éléments d'ordre inférieur (non conformes tels que rectangulaires à trois degrés de liberté par noeud) ne donnent pas les contraintes exactes aux noeuds. On a alors recours aux techniques de la moyenne, ou de l'interprétation des résultats.
- f) Nécessite une capacité mémoire très importante et plus difficile à programmer. On a recours à des techniques avancées pour diminuer l'espace mémoire nécessaire (stockage en ligne de ciel, itération par sous espaces, surtout pour les problèmes dynamiques).
- g) Il faut coder tous les degrés de liberté des noeuds d'où la nécessité d'une table de codification.

Méthode des bandes finies

- a) En statique, elle est très utilisée pour le cas des structures à deux extrémités opposées simplement appuyées avec ou sans supports intermédiaires (spécialement pour les ponts). En dynamique, utilisée pour des structures avec n'importe quelle condition aux limites mais sans supports élastiques.

- b) La condition d'équilibre des lignes nodales se traduit par un système linéaire dont le nombre d'équations est largement inférieur à celui des systèmes obtenus par la méthode des éléments finis. Particulièrement pour les structures avec deux extrémités opposées simplement appuyées, un choix avantageux de la fonction de déplacement simplifie considérablement le système d'équations qui peut être décomposé en plusieurs sous systèmes simples, par conséquent moindre temps d'exécution et capacité mémoire requise.
- c) La largeur de bande de la matrice de rigidité globale est largement réduite vu que chaque ligne nodale peut être commune à deux bandes au plus.
- d) Très peu de paramètres d'entrée dûs au nombre restreint de lignes nodales, résultant de la réduction du problème bidimensionnel en un problème unidimensionnel. On minimise ainsi le temps de préparation des données.
- e) Il est très facile de choisir la position des points pour lesquels on veut connaître les déplacements et les contraintes.
- f) Ne nécessite qu'une petite capacité mémoire et très facile à programmer car en général, les premiers termes des séries suffisent largement pour obtenir des résultats avec la précision voulue.
- g) Seules les informations sur les degrés de liberté de la première et dernière bande doivent être connues.

Afin de garantir une meilleure précision en n'utilisant qu'un nombre très réduit de bandes ou d'éléments, nous suggérons l'utilisation des bandes d'ordre supérieur H02 et H03 en bandes finies et des éléments isoparamétriques en éléments finis.

B I B L I O G R A P H I E



B I B L I O G R A P H I E

- Y.K. CHEUNG **Finite Strip Method Analysis of Slabs**
ASCE Vol 94 No EM6 DEC 1968
- Y.K. CHEUNG **Folded Plate Structures by the Finite Strip Method**
ASCE Vol 95 No ST12 DEC 1969
- Y.K. CHEUNG **Orthotropic Right Bridges by the Finite Strip Method**
ACI SP26
- Y.K. CHEUNG **Analysis of Slabs and Girder Bridges by the**
M.S. CHEUNG **Finite Strip Method**
A. GHALI **Building Science Vol 5 pp 95-104**
- Y.K. CHEUNG **Finite Strip Method in Structural Analysis**
- Y.K. CHEUNG **The Finite Strip Method in the Analysis of elastic**
plates with two opposite supported ends
Proceedings, ICE Vol 40 pp 17. 1968
- GHALI **Structural Analysis**
NEVILLE
- Y. LOO **Folded Plate Structures by Finite Strip Method**
ASCE No ST8 August 1970
- GY. SZILAOYI **Quelques applications de la Methode des Bandes Finies**
Publ Int. Ass Bri Str Eng 34II. 149-168 (1974)
- Y.K. CHEUNG **Static and Dynamic Behavior of Rectangular**
M.S. CHEUNG **Plates using Higher Order Finite Strips**
Buil. Sci. Vol 7 pp 151-158 (1972)
- A. DEFRIES SKENE **Direct Stiffness Solution for Folded Plates**
A.C. SCORDELUS ASCE August 1964 pp 15-47
- E.L. WILSON **The static Condensation Algorithm**
Int. Jou Num Meth Ehgnv Vol 8 1974 pp199-203
- O.C. ZIENKIEWICZ **La Méthode des Eléments Finis**
3ème édition 1979

R.H GALLAGHER	Introduction aux éléments finis
G. DHATT et G. TOUZOUT	Une présentation de la Méthode des Eléments Finis
K.C ROCKEY	Introduction a la Méthode des Eléments Finis
T.Y YANG	Limit Element Structural Analysis
E. ABSI	Méthodes de calcul numérique en élasticité
J. COURBON	Calcul des Structures
S.TIMOSHEWJO	Théorie des Plaques et Coques
J. COURBON	Plaques minces élastiques
S. TIMOSHEWKO et GODIER	Théorie de l'Elasticité
PAULMIER	Elasticité
BENHASSINE	Théorie de l'Etat de Contrainte
KJ BATHE	Finite Element Procedures in Engineering Analysis.
P. CHILLON et M. KERGUINAS	Resistance des matériaux.

