

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

3/90

وزارة التعليم العالي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

2Ex

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : *GENIE CIVIL*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*ANALYSE DES STRUCTURES COMPLEXES
PAR L'ELEMENT FINI
ISOPARAMETRIQUE*

Proposé par :

*Pr. B.TILIOUINE
Mr. M.DEMIDEM*

Etudié par :

*A.AREZKI
M.ABADA*

Dirigé par :

*Pr. B.TILIOUINE
Mr. M.DEMIDEM*

PROMOTION : *juin 1990*

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : *GENIE CIVIL*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*ANALYSE DES STRUCTURES COMPLEXES
PAR L'ELEMENT FINI
ISOPARAMETRIQUE*

Proposé par :

*Pr. B.TILIOUINE
Mr. M.DEMIDEM*

Etudié par :

*A.AREZKI
M.ABADA*

Dirigé par :

*Pr. B.TILIOUINE
Mr. M.DEMIDEM*

PROMOTION : *juin 1990*

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT GENIE CIVIL

PROMOTEURS : Pr. B.TILIOUINE
Mr. M.DIMIDEM

ELEVES INGENIEURS : Abdelhamid AREZKI
Malik ABADA

SUJET:

ANALYSE DES STRUCTURES COMPLEXES PAR L'ELEMENT FINI
ISOPARAMETRIQUE

RESUME :

Ce projet a pour but l'analyse approfondie pour des structures complexes.

Différentes formulations sont présentées dont celle de l'élément fini isoparamétrique .

Un programme de calcul automatique des problèmes d'élasticité plane est élaboré et diverses applications de grande utilité pratique sont considérées .

SUBJECT:

ANALYSIS OF COMPOUND STRUCTURES BY ISOPARAMETRIQUE
FINITE ELEMENT

ABSTRACT:

The project consists for detailed analysis of compound structures .

Various formulation of finites elements are presented

DEDICACES

C'est avec une grande joie que je dédie ce modeste travail à

Ma mère ,

Mon père ,

Mes frères et soeurs ,

Toute ma grande famille .

A. AREZKI

C'est avec une joie immense que je dédie ce modeste travail à

Ma mère ,

Mon père ,

Mon frère et ma soeur ,

Toute ma famille .

M. ABADA

REMERCIEMENTS

Nous sommes particulièrement reconnaissant à monsieur TILIOUINE notre promoteur, qui avec ses conseils éclairés, nous a fait surmonter bien des obstacles .

Nous remercions également Mr.DEMIDEM pour son aide précieuse et sa disponibilité .

Notre gratitude va tout spécialement à Mr.ZOURDANI ainsi qu'à Mr.BIOUD sans oublier Mr. et Mme. ATIF pour leurs soutien moral et matériel .

Nos remerciements s'adressent également au personnel du centre de calcul de l'école National Polytechnique, dont la compréhension nous fut précieuse, ainsi qu'à tous les professeurs qui ont contribué à notre formation .

INTRODUCTION

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères.

Pour dominer ces projets l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physique complexes .

Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système .

Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement de système physiques grâce à des équations aux dérivées partielles .

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations .Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur.

C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique . De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes .

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

* Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles .

* Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques .

* Programation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur .

Pour notre projet nous traiterons des applications qu'on rencontre fréquemment dans le domaine du génie civil , à savoir les structures travaillant en contraintes ou déformations, on peut citer les bâtiments dont le contreventement est assuré par des voiles ,les barrages ... etc .

Dans cette étude ,nous nous proposons de mettre au point des outils de calcul qui nous permettraient d'apprécier de meilleure manière le comportement des structures .

S O M M A I R E

INTRODUCTION

CHAPITRE I . THEORIE DE L'ELASTICITE

- I-1 Introduction
- I-2 Les équations différentielles d'équilibre
- I-3 Les équations déformations - déplacements
- I-4 Les équations intrinsèques du matériau
 - I-4-1 problèmes en contraintes planes
 - I-4-2 problèmes en déformation planes
- I-5 Elasticité à deux dimensions
- I-6 Résolution du problème

CHAPITRE II. GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

- II-1 Introduction
- II-2 Quelques notions de base
 - II-2-1 Le concept d'élément fini
 - II-2-2 Les différentes formulations de la méthode des éléments finis
- II-3 La méthode des éléments finis considérée comme une minimisation de l'énergie potentielle totale
- II-4 Les critères de convergence
- II-5 Notion d'erreur de discrétisation et taux de convergence

CHAPITRE III LA PRESENTATION DES ELEMENTS POUR L'ETUDE DE L'ELASTICITE PLANE

- III-1 Calcul de la rigidité de L'élément rectangulaire en élasticité plane
- III-2 Calcul de la rigidité de L'élément triangulaire en élasticité plane
- III-3 Calcul de la rigidité de L'élément isoparamétrique à huit nœuds
 - III-3-1 Introduction
 - III-3-2 Construction des fonctions de forme N_4

CHAPITRE APPLICATIONS

- IV Poutre cloison
- V Voile
- VI Barrage

CONCLUSION

ANNEXE

CHAPITRE 1

THEORIE DE L'ELASTICITE PLANE

I-1 INTRODUCTION

Tous les matériaux possèdent, à un certain degré, la propriété d'être élastique. c'est à dire que si les forces extérieures qui provoquent la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que la force qui lui donnent naissance.

Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite " théorie de l'élasticité " qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces.

On doit avant d'entamer notre exposé de la théorie, poser certaines hypothèses :

-Pour l'établissement des lois mathématiques, on suppose que les solides sont homogènes, isotropes à l'état neutre, c'est à dire que les propriétés physiques et mécaniques sont les même en chaque points et dans toutes les directions.

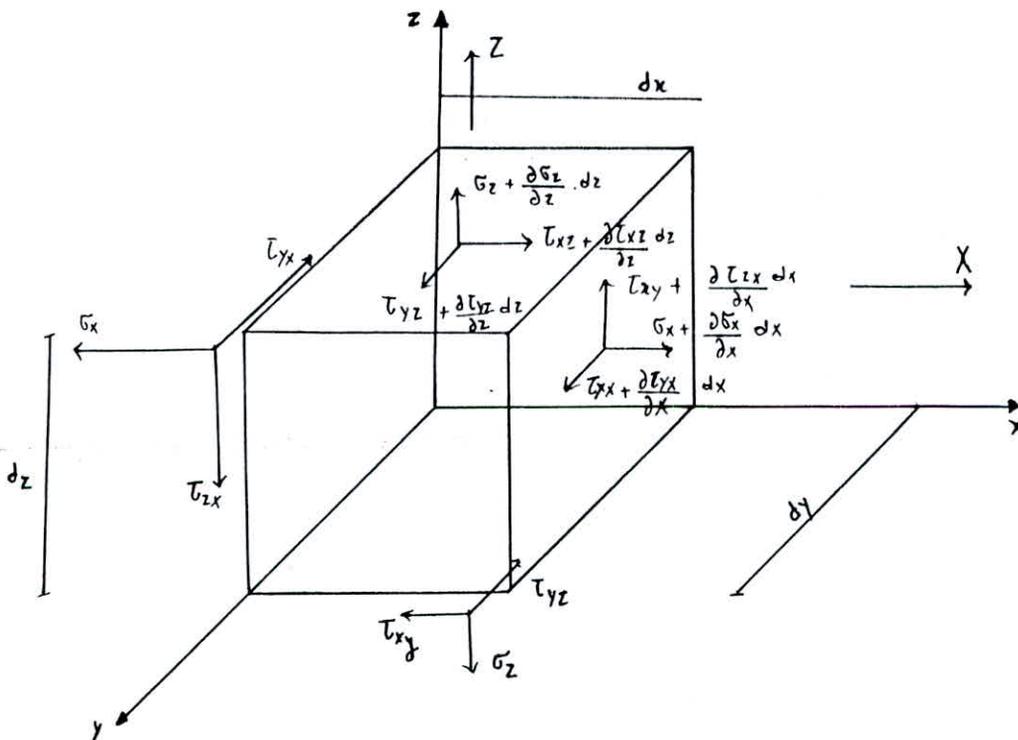
-Ces solides ne doivent pas être le siège d'aucune tension interne en l'absence de forces extérieures, gradient thermique ou autre.

La théorie de l'élasticité consiste à formuler trois types d'équations à savoir :

- * Les équations différentielles d'équilibre.
- * Les équations différentielles déformations-déplacements
- * Les lois intrinsèque du matériau

I-2 LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'EQUILIBRE

On considère un cube élémentaire dx, dy et dz



X, Y, Z sont les forces de volume, considérons maintenant l'équilibre de ce cube on a :

$$\Sigma X_i = 0 \implies \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + X = 0$$

Par analogie, on obtient les deux autres équations :

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + X = 0$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + Y = 0$$

$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + Z = 0$$

I-3 LES EQUATIONS DEFORMATIONS - DEPLACEMENTS .

On traite le problème en deux dimensions puis on a généralisera à trois dimensions .

On a :

$$\text{epsi } x = (A'B' - AB) / AB$$

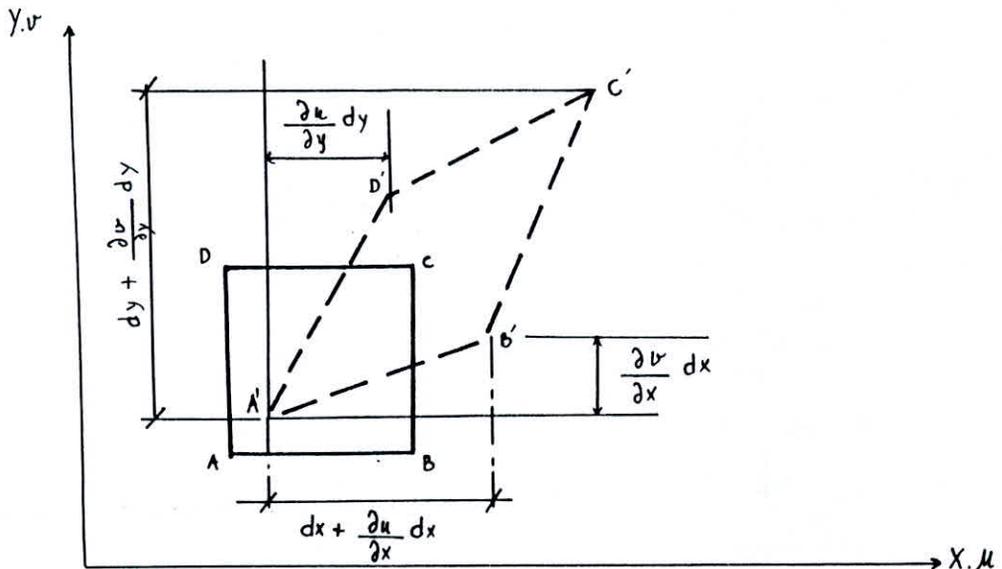
$$AB = dx \quad , \quad A'B' = dx (1 + u_{,x})$$

Donc on aura :

$$\text{epsi } x = u_{,x}$$

$$\text{epsi } y = v_{,y}$$

$$\text{gama } xy = v_{,x} + u_{,y}$$



epsi x : Déformation longitudinale

epsi y : Déformation transversale

gama xy : Déformation tangentielle (Etant la déformation d'un angle qui était droit avant déplacement)

On rappelle que ceci n'est valable que pour les déplacements faibles .

En tridimensionnel on a :

$$\begin{aligned} \text{epsi } x &= u_{,x} \quad , \quad \text{epsi } y = v_{,y} \quad , \quad \text{epsi } z = w_{,z} \\ \text{gama } xy &= \text{gama } yx = v_{,x} + u_{,y} \\ \text{gama } xz &= \text{gama } zx = u_{,z} + w_{,x} \\ \text{gama } yz &= \text{gama } zy = w_{,y} + v_{,z} \end{aligned}$$

I-4 LES EQUATIONS INTRINSEQUES DU MATERIAU

Ces équations caractérisent les propriétés mécanique du matériau .

Soit un cube élémentaire soumis à des contraintes normales σ_x , σ_y et σ_z .

La contrainte (σ_x) provoque une déformation suivant l'axe (X) qui est égale à (σ_x/E) ; mais les contraintes (σ_y) et (σ_z) provoquent , chacune d'elles une déformation dans l'axe (X) , donnée en fonction du coefficient de poisson (ν) et qui est égale à ($-\nu.\sigma_y/E$) et ($-\nu.\sigma_z/E$) , ce qui fait au total :

$$\text{epsi } x = [\sigma_x - \nu.(\sigma_y + \sigma_z)] / E$$

puis par analogie

$$\text{epsi } y = [\sigma_y - \nu.(\sigma_x + \sigma_z)] / E$$

(I- 4-1)

$$\text{epsi } z = [\sigma_z - \nu.(\sigma_y + \sigma_x)] / E$$

Pour ce qui est des déformations angulaires , celles-ci sont causées par les contraintes tangentielles (τ) telles que :

$$\text{gama } xy = \tau_{xy}/G$$

$$\text{gama } yz = \tau_{yz}/G$$

(I-4-2)

$$\text{gama } zx = \tau_{zx}/G$$

$$G = E / (2(1 + \nu))$$

G: le module d'élasticité en cisaillement

Les expressions I-4-1 et I-4-2 constituent les équations de la loi de HOOK généralisée.

Les contraintes σ_x , σ_y et σ_z provoquent les déformations $\text{epsi } x$, $\text{epsi } y$ et $\text{epsi } z$ qui causent eux même une variation de volume (dv).

$$dv = dx.(1 + \text{epsi } x) + dy(1 + \text{epsi } y) + dz(1 + \text{epsi } z)$$

$dv = dx dy dz (\text{epsi } x + \text{epsi } y + \text{epsi } z)$ en négligeant les termes d'ordre supérieure .

$$dv/v = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

En additionnant les termes des équations (I-1) on a :

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/G$$

En considérant toujours ces mêmes équations généralisées, on peut exprimer les contraintes σ_x , σ_y et σ_z en fonction des déformations.

On obtient la relation, sous forme matricielle, suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & & & & & \\ & \lambda + 2\mu & & & & \\ & & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad \text{sym.}$$

avec $\lambda = \nu \cdot E / (1 - 2\nu)(1 + \nu)$ et $\mu = E / 2(1 + \nu)$

Maintenant après avoir traité le problème en trois dimensions, on va le ramener à un problème dans le plan.

Pour ce cas on considère les deux types de problèmes de l'élasticité plane.

I-4-1- PROBLEME EN CONTRAINTES PLANES

$$\sigma_z = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{xz} = 0$$

Ce sont les problèmes concernant les structures où la dimension suivant Z est très négligeable devant les dimensions dans le plan.

Dans ce cas on a :

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xz} = \tau_{xy} / G$$

$$\epsilon_z = (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \nu / E$$

ce qui implique :

$$\sigma_x = E (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) / (1 - \nu^2)$$

$$\sigma_y = E (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) / (1 - \nu^2)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

On obtient la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E / (1 - \nu^2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) / 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\}$$

[D] la matricé d'élasticité en contraintes planes

I-4-2 PROBLEME DE DEFORMATION PLANES

$$\epsilon_z = 0, \quad \epsilon_{xy} = 0, \quad \epsilon_{yz} = 0$$

On trouve :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E / (1 - \nu) \cdot (1 - 2\nu) \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu) / 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\}$$

Remarque :

l'état de déformation plan est obtenu à partir de l'état de contrainte plan, en remplaçant dans la matrice [D] de cet état ν par $\nu / (1 - \nu)$.

I-5 ELASTICITE A DEUX DIMENSIONS EN COORDONNES RECTANGULAIRES

En théorie de l'élasticité les inconnues de base sont :

Les contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} qui sont déterminées à partir des deux équations d'équilibres suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + X &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (I-5-1)$$

avec X, Y sont les composantes de forces de volumes .

Ces deux équations ne suffisent pas pour résoudre le problème qui comporte trois inconnues .

On a donc un problème de degré d'hyperstaticité égale a un, afin de résoudre le problème, on a recours à une troisième équation qui est prise des déformations .

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad , \quad \epsilon_y = v_{,y} \quad , \quad \gamma_{xy} = v_{,x} + u_{,y} \quad (I-5-2)$$

Ces trois composantes sont exprimées par deux fonctions continues (U) et (V), elles ne peuvent donc être choisies arbitrairement car il existe entre ces déformations une relation qui se déduit facilement des équations (I-5-2) et qui est :

$$\epsilon_{x,yy} + \epsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy}$$

Cette équation différentielle est appelée équation de compatibilité des déformations .

Mais cette équation n'est pas en terme de contraintes , pour ce faire , il faut écrire les déformations en fonction des contraintes par le biais des équations de HOOK généralisées

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E$$

$$\epsilon_y = (\sigma_y - \nu \sigma_x) / E$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

$$\epsilon_z = (\sigma_x + \sigma_y) \nu / E$$

$$(\sigma_x - \nu \sigma_y)_{,yy} + (\sigma_y - \nu \sigma_x)_{,xx} = 2(1 + \nu) \tau_{xy,xy}$$

En dérivant les équations d'équilibre (I-4-1) puis en les additionnant terme à terme on obtient par substitution dans l'équation précédente .

$$(\sigma_x + \sigma_y)_{,yy} + (\sigma_y + \sigma_x)_{,xx} = -(1 + \nu) (x_{,x} + y_{,y}) \quad (I-5-3)$$

Dans le cas où la seule force de volume est le poids on alors :

$$(\sigma_x + \sigma_y)_{,yy} + (\sigma_y + \sigma_x)_{,xx} = 0$$

$$\text{ou bien} \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (I-5-4)$$

avec ∇^2 est l'opérateur laplacien .

L'équation (I-5-4) est l'équation de compatibilité en terme de contraintes .

Une fois qu'on a obtenu la troisième équation , le problème est théoriquement résolu .

Remarque :

1- Les équations (I-4-1) traduisent l'équilibre de la variation (dérivées) des contraintes , mais n'implique en aucun cas l'équilibre des contraintes .

2- Dans le cas très pratique où les forces massiques sont constantes , l'équation différentielle de compatibilité (I-5-4) est valable aussi bien pour le cas des contraintes planes que celui des déformations planes .

I-6 RESOLUTION DU PROBLEME

En ce qui concerne les méthodes de résolution du problème ainsi formulé, il existe divers techniques :

* Les méthodes analytiques

* Les méthodes numériques

-La méthode des éléments finis

-La méthode des différences finies

-La théorie des équivalences ...

* Méthode analytique (méthode de la fonction contrainte)

Dans ce cas la solution du problème à deux dimensions se réduit à l'intégration des équations différentielles de l'équilibre, de l'équation de compatibilité et ceci en respectant les équations aux limites suivantes

$$\bar{X} = l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy}$$

$$\bar{Y} = m \cdot \sigma_x + l \cdot \tau_{xy}$$

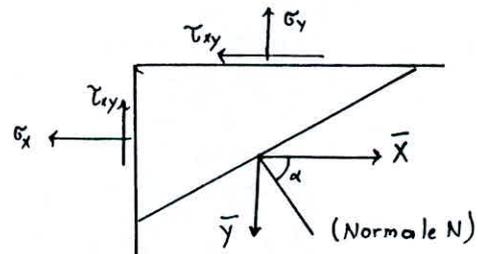
$$\text{avec } l = \cos(N, x) ; m = \cos(N, y)$$

Ces équations aux limites permettent de s'assurer de l'unicité de la solution obtenue.

Dans le cas général où les forces de volumes dérivent d'un potentiel (V) tel que :

$$X = - V_{,x}$$

$$Y = - V_{,y}$$



Alors, on peut trouver une fonction $\theta(x, y)$ qui vérifie les équations d'équilibre telle que :

$$\sigma_x = - \theta_{,yy} + V$$

$$\sigma_y = - \theta_{,xx} + V$$

$$\tau_{xy} = - \theta_{,xy}$$

Mais pour résoudre ce problème, il faut encore vérifier l'équation de compatibilité (I-5-4)

On a alors :

$$\theta_{,xxxx} + 2 \cdot \theta_{,xxyy} + \theta_{,yyyy} = (1 - \nu) \nabla^2 V$$

$$\nabla^4 \varnothing (x, y) = (1 - \nu) \frac{2V}{h^3}$$

dans le cas où $X=0$ et $Y=-g$ alors

$$\nabla^4 \varnothing (x, y) = 0 \quad (I-6-1)$$

La fonction $\varnothing(x, y)$ généralement polynomiale, vérifiant l'équation (I-5-2), satisfait simultanément les équations d'équilibre et l'équation de compatibilité, ce qui fait la solution du problème se réduit à déterminer une fonction $\varnothing(x, y)$ en vérifiant l'équation (I-6-1) puis en déduire σ_x, σ_y et τ_{xy} .

Afin de s'assurer de l'unicité de la solution (champ de contrainte) on doit vérifier les équations aux limites.

En conclusion, on peut dire que cette méthode n'est applicable qu'aux problèmes simples et c'est dans cet objectif qu'il est préférable d'utiliser les méthodes numériques qui sont plus pratiquées en particulier dans le cas où on possède un calculateur numérique, parmi ces méthodes numériques, la plus utilisée et qui a donné des résultats satisfaisants et en concordance avec les résultats des méthodes analytiques (considérées comme méthodes exactes): la **METHODE DES ELEMENT FINIS**.

CHAPITRE 2

GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II-1 INTRODUCTION

On a vu que la méthode des éléments finis est l'une des méthodes permettant de décrire le comportement des systèmes physiques par des équations aux dérivées partielles. Donc la méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques qu'on résoud par des méthodes numériques en utilisant les calculateurs pour former et résoudre ces équations.

II-2 QUELQUE NOTIONS DE BASE

II-2-1 Le concept d'élément fini

La méthode des éléments finis permet d'étudier le comportement approche d'un milieu continu en le traitant comme un assemblage d'éléments indépendants reliés entre eux par des points nodaux (noeuds). Toute fois on ne doit pas tolérer les recouvrements et les vides le long des interfaces inter-élément.

C'est par le biais de ce concept que la méthode des éléments finis diffère des autres méthodes matricielles.

II-2-2 Les différentes formulations de la méthode des éléments finis

Pour traiter un problème par éléments finis, il existe en tout trois formulations possibles.

- * La formulation en déplacements (méthode des déplacements)
- * La formulation en contraintes ou forces
- * La formulation Mixte

Pour la première formulation, on définit un champ de déplacement en supposant qu'il satisfait la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément. ceci en choisissant une fonction déplacement permettant de définir l'état de déplacement d'une façon unique.

Cette formulation suppose que les conditions de compatibilité des déplacements sont satisfaites, ce qui nous amènera à poser les équations d'équilibre puis les résoudre afin de déterminer les déplacements nodaux (uniques), c'est la solution en déplacements.

La deuxième formulation consiste à définir un champ de contraintes de façon à assurer l'équilibre de l'élément, puis poser les équations de compatibilité des déplacements et les résoudre pour obtenir les forces (Solution en contraintes).

La troisième formulation est un mélange des deux autres, ce qui a donné naissance au concept d'élément fini Hybride.

Pour ce qui nous concerne , on a opté pour la première formulation qui présente certaines facilités par rapport aux autres . On peut citer par exemple le fait qu'il est plus facile d'approcher des déplacements que des contraintes.

Les déplacements sont donc les inconnus de base , on approchera le champ de déplacement réel, dans un élément, par des fonctions d'interpolation ou fonction de forme (généralement polynomiales) assurant la continuité des déplacements à l'interface de l'élément et aux noeuds .

Les fonctions de forme définissent maintenant l'état de déformation à l'intérieur de l'élément en fonction des déplacements nodaux . ces déformations , jointes à d'éventuelles déformations initiales et compte tenu des propriétés élastiques du matériau , définissent l'état de contraintes en tout point de l'élément et par conséquent sur ces frontières .

Il n'est pas toujours facile de faire en sorte que les fonctions de forme choisies satisfassent aux conditions de continuité des déplacements le long des interfaces des éléments bien qu'à l'intérieur de l'élément ces conditions doivent être satisfaites, en raison de l'unicité des déplacements qui découle de leur présentation par une fonction .

On doit noter également que du moment où l'on a opté pour la formulation déplacement , le champ de contraintes ne sera pas continu et donc incompatibilité des valeurs nodales des contraintes car en concentrant aux noeuds les forces nodales équivalentes , les conditions d'équilibre ne sont satisfaites que globalement vu qu'on applique le théorème des travaux virtuels d'une manière globale sur toute la structure et non pas à chacun des éléments séparément .

Après avoir présenté brièvement la formulation en déplacement de la méthode des éléments finis , on doit voir en fait que l'approche de cette formulation est une approche variationnelle qui consiste à minimiser l'énergie potentielle totale du système par rapport à un champ de déplacements de forme donnée. Si un tel champ est défini de manière convenable , alors la convergence vers la solution exacte est réalisée . On constate donc une certaine équivalence avec la méthode variationnelle de RAYLEIGH-RITZ .

Un tel élargissement , des bases sur lesquelles repose la méthode des éléments finis, permet d'étendre son domaine d'application à d'autres problèmes de milieux continus dès qu'il est possible de les formuler de manière variationnelle .

II-3 LA METHODE DES ELEMENTS FINIS CONSIDEREE COMME UNE MINIMISATION DE L'ENSEMBLE POTENTIELLE TOTALE

Le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale constitue un fondement variationnel de la formulation directe des équations de rigidité des éléments .

On a $\pi = U+W$

avec

π : L'énergie potentielle totale .

U : L'énergie de déformation du système .

W : L'énergie potentielle des charges extérieures .

Le principe s'énonce comme suit :

Parmi tous les déplacements de forme admissibles qui vérifient les conditions de compatibilité, ceux qui satisfont aux conditions d'équilibre donnent à π une valeur stationnaire, c'est à dire qu'on a :

$$\delta\pi = \delta U + \delta W = \delta(U+W) = 0$$

Il faut noter que dans le domaine élastique π n'est pas seulement stationnaire mais passe par un minimum qui correspond à un équilibre stable car on aura :

$$\delta^2\pi = \delta^2U + \delta^2W > 0$$

Pour démontrer ce principe on utilise le théorème des travaux virtuels

$$\text{On a } \delta U = \int_V \delta \epsilon^T \cdot \sigma \cdot dv - \int_V \delta a^T(x,y) \cdot f_v \cdot dv$$

(la variation de l'énergie de déformation ou travail des forces internes).

$$-\delta W = \delta (a_e)^T \cdot (q_e)$$

$$U = 1/2 \int_V \epsilon^T \cdot \sigma \cdot dv - 1/2 \int_V a_e^T \cdot N(x,y) \cdot f_v \cdot dv$$

$$W = -1/2 \Sigma (a_e^T \cdot q_e)$$

les équations d'équilibre seront satisfaites en chaque noeud, de manière globale si :

$$q_e = \int_V B^T \cdot \sigma \cdot dv - \int_V N^T(x,y) \cdot f_v \cdot dv$$

donc on aura $\delta(U+W) = \delta\pi = 0$

(π) est donc stationnaire

Sachant que π est non seulement stationnaire mais minimale dans le cas où on travaille dans le domaine élastique, on peut dire que le processus des éléments finis consiste à chercher un tel minimum dans la limite d'un type de champ de déplacement imposé.

Ceci fait intervenir la notion de convergence vers la solution exacte qui est celle qui réalise l'équilibre complet (minimum de π) à condition que les déplacements tendent à la limite vers les valeurs réelles.

Et comme la solution exacte correspond à un minimum de π , on peut dire que toute solution approchée, obtenue par éléments finis à partir de la formulation en déplacements, fournira toujours une valeur approchée de π ; supérieure à la valeur exacte. on parle alors de convergence par le haut (borne supérieure de la valeur de l'énergie π).

Puisque la fonctionnelle (π) est minimale pour un certain nombre de paramètre (u) (des déplacements), alors on peut traduire ce minimum par les équations suivantes.

$$\pi_{,u} = \begin{Bmatrix} \pi_{,u_1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{système d'équation})$$

+ +

Parmi les processus d'approximation de la fonctionnelle π , on a la méthode RAYLEIGH-RITZ, Moindres carrés, Galerkin, Collocation par points et par intervalles.

La méthode de RAYLEIGH-RITZ consiste à discrétiser la fonctionnelle π , en utilisant une approximation du champ de déplacement en fonction d'un nombre fini de paramètre indéterminés. On forme ensuite un système d'équations simultanées exprimant la minimisation de π par rapport à ces paramètres.

Jusqu'ici tout est identique au processus d'approximation par éléments finis. La différence réside dans le fait que, dans la méthode de RITZ, les déplacements sont définis sur tout le domaine considéré. On est par conséquent conduit à un système où la notion de bande n'intervient pas, et la matrice des coefficients est donc pleine.

Mais dans la méthode des éléments finis la détermination de π se fait en premier lieu par morceau, ce qui fait que chaque paramètre nodale (u_i) n'a d'influence que sur les éléments qui lui sont adjacents, on obtient ainsi une matrice des coefficients non pleine ayant la structure d'une matrice bande.

Cela est d'une part, d'autre part la méthode de RITZ est limitée à des formes géométriques relativement simple, par contre la méthode des éléments finis se limite au niveau du choix de l'élément uniquement, puis par assemblage d'élément de forme simple on peut représenter des configurations complexes et proches de la réalité. En plus de ces différences, il faut noter que pour la méthode éléments finis les paramètres indéterminés sont pris comme étant les déplacements nodaux, ce qui est simple à interpréter physiquement.

II-4 CRITERES DE CONVERGENCE

Le fait de limiter le nombre de degrés de liberté, qui est en réalité infini, ne permet en aucun cas d'atteindre le vrai minimum de l'énergie quelque soit la finesse du maillage. On se contente souvent d'une convergence vers la solution exacte, cette convergence est réalisée que si certains critères sont satisfaits.

On a les critères de convergences suivants :

Critère 1

La fonction doit être choisie de telle façon qu'elle ne permet pas les déformations d'un élément quand les déplacements de ces noeuds sont la conséquence d'un mouvement de corps rigide.

Critere 2

La fonction de déplacement doit être choisie de telle façon que si on a des déplacements compatibles avec un état de déformations constants, on puisse réellement obtenir ces déformations constantes dans tout l'élément .

Ce critère stipule que lorsque les éléments deviennent de plus en plus petits , il règne à l'intérieur d'eux des conditions de déformation à peu près constantes . Si telles conditions existent réellement , il est plus souhaitable , pour obtenir une bonne précision , qu'un élément de taille finie soit en mesure de reproduire ces conditions .

Si ce critère n'est pas respecté lors du choix de la fonction de forme. On ne pourra pas, même en diminuant indéfiniment la taille des éléments , représenter la répartition exacte des déformations.

REMARQUES

1. Les deux critères précédents sont regroupés de part leur contexte sous le nom de critère de COMPLETEUDE

2. Le critère (2), englobe en fait les conditions requises par le critère (1), puisque les déplacements de corps rigides constituent un cas particulier de l'état de déformation constant , la déformation étant alors nulle .

Critere 3

Les fonctions de déplacements doivent être choisies de telle sorte que les déformations aux interfaces des éléments soient finies .

Ce critère de COMPATIBILITE , stipule la continuité ; inter-élément ; des déplacements . Cette continuité peut être C_0 (Elasticité plane), C_1 (Flexion des plaques et coques)...etc

II-5 NOTION D'ERREUR DE DISCRETION ET TAUX DE CONVERGENCE.

On sait que la solution, obtenue par éléments finis pour une taille (h) des éléments, converge vers la solution exacte lorsque (h) diminue . Donc on peut dire qu'on pourra tendre vers la solution exacte, lorsque $(h \rightarrow 0)$.

Il existe des cas où la solution exacte est obtenue à l'issue d'un nombre fini de subdivisions , c'est ainsi que lorsque les fonctions de formes comprennent l'ensemble des termes du polynôme du même degré , l'approximation conduira obligatoirement à la solution exacte.

Dans le cas où l'on peut toujours écrire la solution exacte au voisinage d'un noeud (i) sous la forme d'un développement polynomial .

$$u = u_I + [u_{,x}]_I \cdot x + [u_{,y}]_I \cdot y + \dots$$

Et si ce développement est de l'ordre (p), alors l'erreur commise sur (u) sera de l'ordre du polynôme $O(h)$ qui est (p+1).

Par exemple pour l'élasticité plane, on utilise un développement linéaire d'ordre (p=1), alors l'erreur du taux de convergence est de l'ordre du polynôme $O(h^2)$. Ce qui revient à dire que l'erreur commise sur les déplacements serait réduite au quart pour une diminution de moitié de la taille (h) de l'élément.

Pour ce qui est des déformations et contraintes qui sont supposées correspondre aux dérivées d'ordre (m) déplacements, l'erreur de convergence est de l'ordre (p+1-m). Celle de l'énergie de déformation, qui fait intervenir les carrées contraintes, sera de l'ordre $2(p+1-m)$.

Le fait de connaître l'ordre de convergence à un intérêt considérable pour la détermination de la solution exacte. Par exemple, si l'on sait que les déplacements convergent à l'ordre 2 et si on a obtenu deux solutions approchées u_1 et u_2 correspondant respectivement à h et h/2, on peut obtenir la solution exacte par extrapolation de RICHARDSON telle que :

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^2)}{O(h/2)^2} = 4$$

Cette solution "Exacte" est en fait très proche de la solution réelle.

L'extrapolation ci-dessus ne s'applique que si la convergence est monotone.

CHAPITRE 3

PRESENTATION DES ELEMENTS FOUR

L'ETUDE DE L'ELASTICITE PLANE

INTRODUCTION

Les problèmes d'élasticité plane concernent les structures continues chargées dans leurs plans. Ces problèmes peuvent être séparées en deux classes distinctes.

* Les problèmes en contraintes planes .

Ces problèmes permettent d'étudier les structures continues (plaques, coque...) qui ont une dimension suivant l'axe (z) très petite par rapport à ses dimensions dans le plan, ce qui fait, les contraintes normales au plan de la structure seront négligées (on peut citer l'exemple des plaques minces, les structures cellulaires les plaques perforées en traction et l'âme des poutres cloisons).

* Les problèmes en déformations planes

Dans ces problèmes, on suppose que la déformation normale au plan du chargement est nulle. Ceci est dû à la dimension de la structure suivant (Z) qui est très grande devant les dimensions dans le plan, ces problèmes traitent par exemple le cas des murs de retenue ou de soutènement.

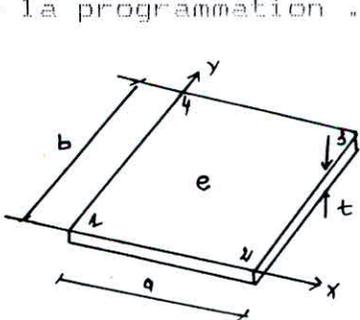
III-1 CALCUL DE LA RIGIDITE DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE EN ELASTICITE PLANE .

L'un des éléments, utilisé pour l'étude de l'élasticité plane, est l'élément rectangulaire à quatre nœuds avec deux degrés de libertés pour chaque nœud à savoir deux translations u et v .

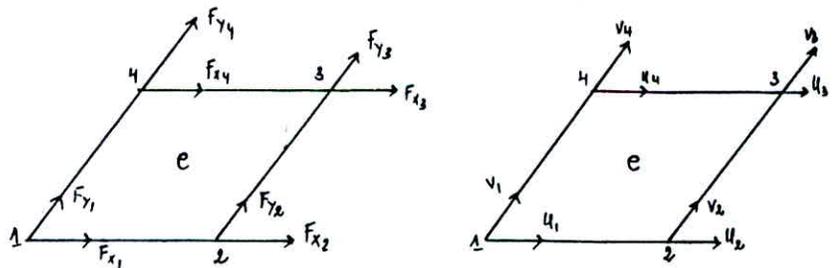
L'élaboration de la matrice des raideurs de l'élément passe par sept étapes de base.

Etape 1

Cette étape consiste en un choix du système de coordonnées convenable et la numérotation de l'élément de référence. sachant que l'élément rectangulaire est de dimensions (a) suivant l'axe (X) et (d) suivant l'axe (Y), on opte pour la numérotation suivante (fig III-1) qui présente une facilité considérable lors de la programmation.



(fig.III-1)



forces et déplacements nodaux

On note $\{a(x,y)\} = \{u(x,y), v(x,y)\}^T$

Le vecteur déplacement en un point de coordonnées (x,y)

On note aussi le vecteur déplacement nodaux d'un élément de référence comme suit :

$$\{a^e\} = \{ \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\} \}^T$$

avec $\{a_i\} = \{ u_i, v_i \}^T$

Etape 2

Elle concerne le choix de la fonction de déplacement. Pour les problèmes d'élasticité plane les déplacements peuvent être représentés par deux polynômes en x et y tels que :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot xy \\ v(x,y) &= \alpha_5 + \alpha_6 \cdot x + \alpha_7 \cdot y + \alpha_8 \cdot xy \end{aligned} \quad \text{(III-1-1)}$$

Le nombre de degrés de liberté de l'élément de référence est de 8, de ce fait on a choisi deux polynômes à quatre coefficients inconnus chacun.

on a
$$\{u,v\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\}$$

$$\{a(x,y)\} = [f(x,y)] \cdot \{\alpha\}$$

Etape 3

On substitue (x,y) par les coordonnées des quatre noeuds de l'élément de référence on obtient alors :

$$\{a^e\} = \{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), f(x_4, y_4)\}^T \cdot \{\alpha\}$$

$$\{a^e\} = [A] \cdot \{\alpha\}$$

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{a^e\}$$

$$\{a(x,y)\} = [f(x,y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{a^e\}$$

(III-1-2)

Soit :
$$\{a(x,y)\} = [N(x,y)] \cdot \{a^e\}$$

Pour le système de numérotation adopté précédemment on a :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 & N_4(x,y) & 0 \\ 0 & N_5(x,y) & 0 & N_6(x,y) & 0 & N_7(x,y) & 0 & N_8(x,y) \end{bmatrix}$$

Après avoir effectué le produit matriciel $[f(x,y)]$ par $[A]^{-1}$ on obtient la matrice $N(x,y)$

$$N_1 = N_5 = 1 - x/a - y/b + x.y/a.b$$

$$N_2 = N_6 = x/a - x.y/a.b$$

$$N_3 = N_7 = x.y/a.b$$

$$N_4 = N_8 = y/b - x.y/a.b$$

Les propriétés de la fonction d'interpolation $[N(x,y)]$

1. on a :

$$\begin{aligned} N_i(x,y) &= 0 & \text{si } x \neq x_i & \text{ ou } y \neq y_i \\ N_i(x,y) &= 1 & \text{si } x = x_i & \text{ ou } y = y_i \end{aligned} \quad i=1, \dots, 4$$

2. La fonction de déplacement $f(x,y)$ est continue sur la frontière des éléments et dérivable (mais ses dérivées ne sont pas forcément continues) ceci implique que $N(x,y)$ l'est aussi.

3. On a

$$\sum_{i=1}^4 N_i(x,y) = 1$$

Etape 4

Une fois qu'on a exprimé les déplacements généralisés en fonction des déplacements nodaux, on va exprimer maintenant les déformations de la théorie de l'élasticité on a :

$$\text{epsi } x = u_{,x}$$

$$\text{epsi } y = v_{,y}$$

$$\text{gama } xy = v_{,x} + u_{,y}$$

qui peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \{\text{epsi}(x,y)\} &= \begin{bmatrix} \text{epsi } x \\ \text{epsi } y \\ \text{gama } xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} & 0 \\ 0 & v_{,y} \\ v_{,x} & u_{,y} \end{bmatrix} \cdot \{u, v\}^T \\ \{\text{epsi}(x,y)\} &= [L] \cdot \{a(x,y)\} \end{aligned}$$

De l'équation (III-1-2) on a

$$\{\epsilon(x,y)\} = [L] \cdot [N] \cdot \{a^e\}$$

$$\{\epsilon(x,y)\} = [B] \cdot \{a^e\} \quad \text{(III-1-3)}$$

[B] est appelée matrice des déformations
(ϵ, θ)

$$E_{11} = E_{32} = -E_{13} = -E_{34} = y/a.b - 1/a$$

$$E_{22} = E_{31} = -E_{37} = -E_{28} = x/a.b - 1/b$$

$$E_{24} = E_{33} = -E_{26} = -E_{35} = -x/a.b$$

$$E_{15} = E_{37} = -E_{17} = -E_{38} = y/a.b$$

Les autres termes de [B] sont nuls

Etape 5

Après avoir déterminé les déformations, on en déduit les contraintes par le biais de la loi de HOOK généralisée.

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] \cdot \{\epsilon(x,y)\} \quad \text{(III-1-4)}$$

[D] est la matrice d'élasticité donnée par :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

avec:

$$d_{11} = d_{22} = E(1 - \alpha \cdot \nu) / ((1 + \nu)(1 - \nu - \alpha \cdot \nu))$$

$$d_{12} = d_{21} = \nu d_{11} / (1 - \alpha \cdot \nu)$$

$$d_{33} = E / 2(1 + \nu)$$

E : le module de YOUNG

ν : le coefficients de poisson

$\alpha = 0$ en contraintes planes

$\alpha = 1$ en déformations planes

des équations (III-3) et (III-4) on a :

$$\{ \sigma(x,y) \} = [D] \cdot [B] \cdot \{ a^e \}$$

$$\{ \sigma(x,y) \} = [H] \cdot \{ a^e \} \quad \text{(III-1-5)}$$

[H] est appelée Matrice contraintes et donnée ci-dessous

$$H_{11} = - H_{13} = d_{11} \cdot a_1$$

$$H_{21} = - H_{23} = d_{12} \cdot a_1$$

$$H_{32} = H_{34} = d_{33} \cdot a_1$$

$$H_{12} = - H_{16} = d_{12} \cdot b_1$$

$$H_{22} = - H_{26} = d_{22} \cdot b_1$$

$$H_{31} = - H_{37} = d_{33} \cdot b_1$$

$$H_{15} = - H_{17} = d_{11} \cdot c_1$$

$$H_{14} = - H_{16} = -d_{12} \cdot e_1$$

$$H_{24} = - H_{26} = d_{22} \cdot e_1$$

$$H_{25} = - H_{27} = d_{12} \cdot c_1$$

$$H_{36} = - H_{38} = d_{33} \cdot c_1$$

$$H_{35} = - H_{33} = d_{33} \cdot e_1$$

avec :

$$a_1 = y/a \cdot b - 1/a$$

$$b_1 = x/a \cdot b - 1/a$$

$$c_1 = y/a \cdot b$$

$$e_1 = x/a \cdot b$$

Etape 6

Cette étape permet de trouver une relation entre les forces nodales et les déplacements. En appliquant le théorème des travaux virtuels

on a :

$$\{ a_{*}^e \}^T \cdot \{ F^e \} = \int \{ \epsilon_{*}^e \}^T \cdot \{ \sigma \} dv$$

le travail des forces = le travail interne total
extérieures

Compte tenu de ce qui précède on peut écrire

$$\{a_{*e}\}^T \{F^e\} = \int_V \{a_{*e}\}^T [B]^T [D] [B] dv \{a^e\}$$

==>

$$\{F^e\} = \int_V [B]^T [D] [B] dv \{a^e\}$$

Elle est du type

$$\{F^e\} = [K^e] \{a^e\}$$

on a alors

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dv \quad (III-1-6)$$

$[K^e]$ est appelée Matrice de rigidité ou des raideurs.

Pour notre cas où $(dv) = t \cdot dx \cdot dy$
avec (t) épaisseur de l'élément, supposée constante. On a alors

$$[K^e] = \int_0^1 \int_0^1 [B]^T [D] [B] \cdot dx dy \quad (III-1-7)$$

Les expressions de $[B]$ et $[D]$ sont connues, d'où on tire la matrice des raideurs élémentaires suivants la numérotation adoptée.

Voir tableau N°1

Etape 7

Lors de cette étape, on doit exprimer le vecteur élémentaire des forces nodales et ceci à partir des charges cohérentes qui s'applique à l'élément considéré.

On a d'après le théorème des travaux virtuels :

$$\{f^e\} = \int_V [N]^T \{Q\} \cdot dv$$

où $\{Q\}$ est le chargement cohérent

Remarque :

Si le chargement est surfacique ou linéaire, on remplace dans ce cas le terme (dv) par (ds) ou respectivement (dl)

$$\{f\} = \int_{\Omega} [N]^T \{0\} \cdot dV$$

donc on aura finalement

$$\{q\} = [K] \{a\} - \{f\}$$

$$\{q\} = [K] \{a\} - \int_{\Omega} [N]^T \{0\} \cdot dV$$

$$\{a\}^T \{q\} = \{a\}^T [K] \{a\} - \int_{\Omega} \{a\}^T [N]^T \{0\} \cdot dV$$

$$\{a\}^T \{q\} = \int_{\Omega} \{a\}^T \{ \epsilon \} \cdot dV$$

C'est le travail des forces internes.

$$\delta(W_{int}) = \int_{\Omega} \{a\}^T \{ \epsilon \} \cdot dV$$

Le travail effectué par les forces nodales $\{q\}$ directement appliquées aux nœuds, lors du déplacement virtuel $\delta\{a\}$.

$$\delta(W_{int}) = \delta\{a\}^T \{q\}$$

avec

$$\delta(W_{int}) = \delta(W_{ext})$$

Pour démontrer ceci on a :

MATRICE DE REGIDITE ELEMENTAIRE

$4 d_{11} p^{-1}$ + $4 d_{33} p$	$3 d_{21}$ + $3 d_{33}$	$-4 d_{11} p^{-1}$ + $2 d_{33} p$	$3 d_{21}$ - $3 d_{33}$	$-2 d_{11} p^{-1}$ $2 d_{33} p$	$-3 d_{21}$ - $3 d_{33}$	$2 d_{11} p^{-1}$ $4 d_{33} p$	$-3 d_{21}$ + $3 d_{33}$	
	$4 d_{22} p$ + $4 d_{33} p^{-1}$	$-3 d_{21}$ + $3 d_{33}$	$2 d_{22} p$ - $4 d_{33} p^{-1}$	$-3 d_{21}$ $3 d_{33}$	$-2 d_{22} p$ $-2 d_{33} p$	$3 d_{21}$ $3 d_{33}$	$-4 d_{22} p$ + $2 d_{33} p^{-1}$	
		$4 d_{11} p^{-1}$ + $4 d_{33} p$	$-3 d_{21}$ $-3 d_{33}$	$2 d_{11} p^{-1}$ - $4 d_{33} p$	$3 d_{21}$ $-3 d_{33}$	$-2 d_{11} p^{-1}$ - $2 d_{33} p$	$3 d_{21}$ + $3 d_{33}$	
			$4 d_{22} p$ + $4 d_{33} p^{-1}$	$-3 d_{21}$ + $3 d_{33}$	$-4 d_{22} p$ + $2 d_{33} p^{-1}$	$3 d_{21}$ + $3 d_{33}$	$-2 d_{22} p$ + $2 d_{33} p^{-1}$	
				$4 d_{11} p^{-1}$ + $4 d_{33} p$	$3 d_{21}$ + $3 d_{33}$	$-4 d_{11} p^{-1}$ + $2 d_{33} p$	$3 d_{21}$ - $3 d_{33}$	
	<i>SYMETRIQUE</i>					$4 d_{22} p$ + $4 d_{33} p^{-1}$	$-3 d_{21}$ + $3 d_{33}$	$2 d_{22} p$ + $4 d_{33} p^{-1}$
						$4 d_{11} p^{-1}$ + $4 d_{33} p$	$-3 d_{21}$ $-3 d_{33}$	
							$4 d_{22} p$ + .	

$$[K^e] = \frac{t}{12}$$

$$p = a/b$$

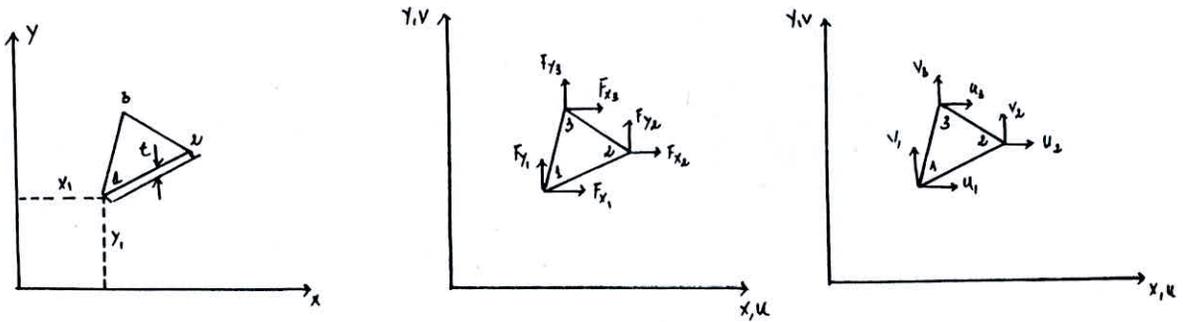
III-2 CALCUL DE LA RIGIDITE DE L'ELEMENT TRIANGULAIRE EN ELASTICITE PLANE

L'élaboration de la matrice des raideurs de l'élément triangulaire passe également par sept étapes.

Nous ne donnerons que trois premières étapes et les résultats finaux des étapes qui suivent vu que leurs développements sont identiques à ceux de l'élément rectangulaire.

Etape 1

On utilise le système de coordonnées de la fig (III-2-1) et les noeuds sont numérotés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



On note $\{a(x, y)\} = \{u(x, y), v(x, y)\}^T$

le vecteur déplacement en un point de coordonnées (x, y) .

On note aussi le vecteur déplacement nodaux d'un élément de référence comme suit :

$$\{a^e\} = \{ \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\} \}^T$$

avec: $\{a_i\} = \{ u_i, v_i \}^T$

Etape 2

La représentation la plus simple est donnée par les deux expressions linéaires suivantes :

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y$$

(III-2-1)

$$v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x + \alpha_6 \cdot y$$

Le nombre de degrés de liberté de l'élément de référence est de 6, de ce fait on a choisi deux polynômes à trois coefficients inconnus chacun.

$$\text{on a } \{u, v\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\}$$

$$\{a(x, y)\} = [f(x, y)] \cdot \{\alpha\}$$

Etape 3:

On substitue (x,y) par les coordonnées des trois noeuds de l'élément de référence on obtient alors :

$$\{a^e\} = \{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)\}^T \cdot \{\alpha\}$$

$$\{a^e\} = [A] \cdot \{\alpha\}$$

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{a^e\}$$

$$\{a(x,y)\} = [f(x,y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{a^e\}$$

Soit : $\{a(x,y)\} = [N(x,y)] \cdot \{a^e\}$

Pour le système de numérotation adopté précédemment on a :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_4(x,y) & 0 & N_5(x,y) & 0 & N_6(x,y) \end{bmatrix}$$

Après avoir effectué le produit matriciel $[f(x,y)]$ par $[A]^{-1}$ on a :

$$N_1 = N_4 = [x_2 y_3 - x_3 y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)] / \text{delta}$$

$$N_2 = N_5 = [-x_1 y_3 + x_3 y_1 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)] / \text{delta}$$

$$N_3 = N_6 = [x_1 y_2 - x_2 y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)] / \text{delta}$$

$$\text{delta} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$\text{delta} = 2 * \text{l'aire du triangle}$$

Les propriétés de la fonction d'interpolation $[N(x,y)]$

1. On a :

$$N_i(x,y) = 0 \quad \text{si } x \neq x_i \quad \text{ou } y \neq y_i$$

$$N_i(x,y) = 1 \quad \text{si } x = x_i \quad \text{ou } y = y_i \quad i=1, \dots, 3$$

2. La fonction de déplacements $f(x,y)$ est continue sur la frontière des éléments ceci implique que $N(x,y)$ l'est aussi.

3. On a

$$\sum_{i=1}^3 N_i(x,y) = 1$$

Etape 4

$[B]$ est de dimension $(6,3)$

$$B_{11}=B_{32}=(y_2-y_3)/\text{delta}$$

$$B_{31}=B_{22}=(x_3-x_2)/\text{delta}$$

$$B_{13}=B_{34}=(y_3-y_1)/\text{delta}$$

$$B_{33}=B_{24}=(x_1-x_3)/\text{delta}$$

$$B_{15}=B_{36}=(y_1-y_2)/\text{delta}$$

$$B_{35}=B_{26}=(x_2-x_1)/\text{delta}$$

Les autres termes sont nuls.

Etape 5

Pour la matrice [H] (3,6) :

$$\begin{array}{lll} H_{11}=d_{11} \cdot y_{23} & H_{12}=d_{12} \cdot x_{32} & H_{13}=d_{11} \cdot y_{31} \\ H_{14}=d_{12} \cdot x_{13} & H_{15}=d_{11} \cdot y_{12} & H_{16}=d_{12} \cdot x_{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} H_{21}=d_{21} \cdot y_{23} & H_{22}=d_{22} \cdot x_{32} & H_{23}=d_{21} \cdot y_{31} \\ H_{24}=d_{22} \cdot x_{13} & H_{25}=d_{21} \cdot y_{12} & H_{26}=d_{22} \cdot x_{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} H_{31}=d_{33} \cdot x_{32} & H_{32}=d_{33} \cdot y_{23} & H_{33}=d_{33} \cdot x_{13} \\ H_{34}=d_{33} \cdot y_{31} & H_{35}=d_{33} \cdot x_{21} & H_{36}=d_{33} \cdot y_{12} \end{array}$$

Avec :

$$y_{23}=(y_2-y_3)/\text{delta} ; \quad x_{32}=(x_3-x_2)/\text{delta} ; \quad y_{31}=(y_1-y_3)/\text{delta}$$

$$y_{12}=(y_1-y_2)/\text{delta} ; \quad x_{13}=(x_1-x_3)/\text{delta} ; \quad x_{21}=(x_2-x_1)/\text{delta}$$

Etape 6

• Pour la matrice [K] voir tableau N° 2

Etape 7

$$\{f^e\} = \int_V \cdot [N]^T \cdot \{Q\} \cdot dv$$

III-3 CALCUL DE LA RIGIDITE DE L'ELEMENT ISOPARAMETRIQUE A HUIT NOEUDS

III-3-1 INTRODUCTION

Une des procédures élémentaire dans la formulation des éléments finis isoparamétrique est d'interpolée les déplacements et les coordonnées de l'élément en utilisant les coordonnées normalisées d'un élément de référence .

Les fonctions de forme servant à interpoler les déplacements et celles utilisées pour l'interpolation des coordonnées sont identiques, de ce fait l'élément est dit isoparamétrique .

Les coordonnées de l'élément s'expriment de la manière suivante :

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i$$

(III-3-1)

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i$$

où
* x, y sont les coordonnées de n'importe quel point de l'élément.
* $x_i, y_i, i=1, \dots, 8$ sont les coordonnées des 8 noeuds de l'élément de référence .

Les fonctions de forme N_i sont définies uniquement en fonction des coordonnées normalisées qui sont r et s comprises entre $+1$ et -1 .

Une des propriétés fondamentale des fonctions de d'interpolation N_i est qu'elle prennent dans le repère normé (ou de référence) la valeur unité au noeud i , et zéro aux autres noeuds .

III-3-2 CONSTRUCTION DES FONCTIONS DE FORME N_i

1- APPROXIMATION NODALE

Comme pour les autres éléments, la fonction de déplacement est approximée de la manière suivante .

$$u(r,s) = P_1(r,s) \cdot a_1 + P_2(r,s) \cdot a_2 + \dots + P_8(r,s) \cdot a_8$$

$$u(r,s) = \{ P_1, P_2, \dots, P_8 \} \cdot \{ a_1, a_2, \dots, a_8 \}^T$$

Posons :

$$r = (r, s)$$

d'où :

$$u(r) = \{ P \} \cdot \{ a \} \quad \text{(III-3-2)}$$

$\{ P \}$ est appelée Base polynômiale :

$$\{ P \} = \{ 1, r, s, r^2, rs, s^2, r^2s, rs^2 \}$$

a_i : sont les paramètres généraux de l'approximation

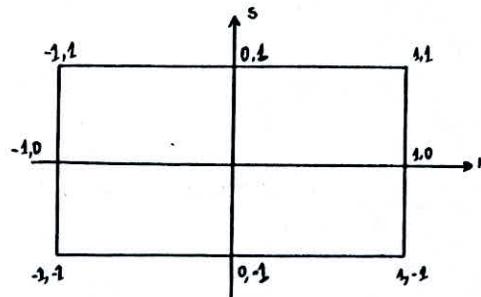
On passe ensuite à l'approximation nodale

$$\begin{aligned} u_1 = u(r_1) &= \{ P_1(r_1), P_2(r_1), \dots, P_8(r_1) \} \cdot \{ a \} \\ u_2 = u(r_2) &= \{ P_1(r_2), P_2(r_2), \dots, P_8(r_2) \} \cdot \{ a \} \\ &\vdots \\ u_8 = u(r_8) &= \{ P_1(r_8), P_2(r_8), \dots, P_8(r_8) \} \cdot \{ a \} \end{aligned} \quad \text{(III-3-3)}$$

où

$u_i = u(r_i) = u(r_i, s_i)$: déplacement au noeud i ,

Les r_i, s_i sont les coordonnées normalisées de l'élément de référence voir fig. ci dessous .



En reprenant (III-3-3) sous forme matricielle

$$\begin{aligned} \{ u_n \} &= [P_n] \cdot \{ a \} \\ \text{d'où} \quad \{ u_n \} &= [P_n]^{-1} \cdot \{ a \} \end{aligned} \quad \text{(III-3-4)}$$

On a alors à partir de (III-3-2)

$$\begin{aligned} u(r) &= \{ P \} \cdot \{ a \} \\ u(r) &= \{ P \} \cdot [P_n]^{-1} \cdot \{ u_n \} \\ u(r) &= \{ N \} \cdot \{ u_n \} \end{aligned} \quad \text{(III-3-5)}$$

$$\{ N \} = \{ N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8 \}$$

$$N_1 = - (1 - r) \cdot (1 - s) \cdot (1 + r + s) / 4$$

$$N_2 = (1 - r^2) \cdot (1 - s) / 2$$

$$N_3 = - (1 - r) \cdot (1 - s) \cdot (1 - r + s) / 4$$

$$N_4 = (1 + r) \cdot (1 - s^2) / 2$$

$$N_5 = -(1+r) \cdot (1+s) \cdot (1-r-s)/4$$

$$N_6 = -(1-r^2) \cdot (1+s)/2$$

$$N_7 = -(1-r) \cdot (1+s) \cdot (1+r-s)/4$$

$$N_8 = (1-r) \cdot (1-s^2)/2$$

En résumé nous avons

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 + N_5 y_5 + N_6 y_6 + N_7 y_7 + N_8 y_8$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 y_1 \dots x_8 y_8 \end{bmatrix}$$

(III-3-6)

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 + N_6 u_6 + N_7 u_7 + N_8 u_8$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 + N_5 v_5 + N_6 v_6 + N_7 v_7 + N_8 v_8$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 v_1 \dots u_8 v_8 \end{bmatrix}^T$$

(III-3-7)

2- CONSTRUCTION DE LA MATRICE [B]

Les déformations de l'élément sont données par :

$$\epsilon_x = u_{,x}$$

$$\epsilon_y = v_{,y}$$

(III-3-8)

$$\gamma_{xy} = v_{,x} + u_{,y}$$

Pour évaluer les dérivées $(\cdot)_{,x}$ et $(\cdot)_{,y}$, il semble logique d'utiliser le développement suivant :

$$(\cdot)_{,x} = (\cdot)_{,r} \cdot (r_{,x}) + (\cdot)_{,s} \cdot (s_{,x}) \quad \text{(III-3-9)}$$

La dérivée $(\cdot)_{,y}$ est développée de la même manière. Cependant pour évaluer $(\cdot)_{,x}$ dans la relation (III-3-9) nous avons besoin de la relation inverse de (III-3-6). Cette dernière est généralement difficile à établir explicitement, pour cela nous évaluons les dérivées en r et s tel que :

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^T = \begin{bmatrix} \bar{x}_r & \bar{y}_r \\ \bar{x}_s & \bar{y}_s \end{bmatrix} \cdot (\underline{x}, \underline{y})^T$$

Soit:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = [J] \cdot (\underline{x})$$

J est l'opérateur jacobien de la transformation

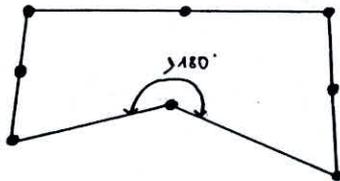
On a alors :

$$(\underline{x}) = [J^{-1}] \cdot (\bar{x})$$

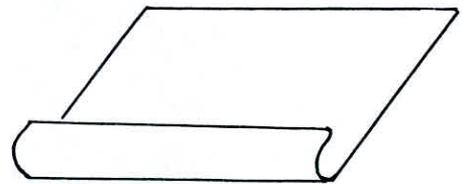
$$J^{-1} = 1/\det(J) \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}$$

Il est à remarquer que l'inverse de J existe, cela prouve que la correspondance entre les coordonnées réelles et ceux de l'élément de référence est une relation bijective.

Cependant, dans certains cas où l'on a une distorsion ou un débordement de l'élément (voir fig. ci-dessous), la relation n'est plus bijective.



distorsion



débordement

On a :

$$x_r = N_{1,r}x_1 + N_{2,r}x_2 + N_{3,r}x_3 + N_{4,r}x_4 + N_{5,r}x_5 + N_{6,r}x_6 + N_{7,r}x_7 + N_{8,r}x_8$$

$$x_s = N_{1,s}x_1 + N_{2,s}x_2 + N_{3,s}x_3 + N_{4,s}x_4 + N_{5,s}x_5 + N_{6,s}x_6 + N_{7,s}x_7 + N_{8,s}x_8$$

$$y_r = N_{1,r}y_1 + N_{2,r}y_2 + N_{3,r}y_3 + N_{4,r}y_4 + N_{5,r}y_5 + N_{6,r}y_6 + N_{7,r}y_7 + N_{8,r}y_8$$

$$y_s = N_{1,s}y_1 + N_{2,s}y_2 + N_{3,s}y_3 + N_{4,s}y_4 + N_{5,s}y_5 + N_{6,s}y_6 + N_{7,s}y_7 + N_{8,s}y_8$$

$$u_r = N_{1,r}u_1 + N_{2,r}u_2 + N_{3,r}u_3 + N_{4,r}u_4 + N_{5,r}u_5 + N_{6,r}u_6 + N_{7,r}u_7 + N_{8,r}u_8$$

$$u_s = N_{1,s}u_1 + N_{2,s}u_2 + N_{3,s}u_3 + N_{4,s}u_4 + N_{5,s}u_5 + N_{6,s}u_6 + N_{7,s}u_7 + N_{8,s}u_8$$

$$v_r = N_{1,r}v_1 + N_{2,r}v_2 + N_{3,r}v_3 + N_{4,r}v_4 + N_{5,r}v_5 + N_{6,r}v_6 + N_{7,r}v_7 + N_{8,r}v_8$$

$$v_s = N_{1,s}v_1 + N_{2,s}v_2 + N_{3,s}v_3 + N_{4,s}v_4 + N_{5,s}v_5 + N_{6,s}v_6 + N_{7,s}v_7 + N_{8,s}v_8$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{,x} \\ \bar{u}_{,y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \bar{N}_{1,r} & 0 & \bar{N}_{2,r} & \dots & \bar{N}_{e,r} & 0 \\ \bar{N}_{1,s} & 0 & \bar{N}_{2,s} & \dots & \bar{N}_{e,s} & 0 \end{bmatrix} \cdot \{u_n\}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{,x} \\ \bar{v}_{,y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \bar{N}_{1,r} & 0 & \bar{N}_{2,r} & \dots & \bar{N}_{e,r} \\ 0 & \bar{N}_{1,s} & 0 & \bar{N}_{2,s} & \dots & \bar{N}_{e,s} \end{bmatrix} \cdot \{v_n\}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{,x} \\ \bar{v}_{,y} \\ \bar{v}_{,x} + \bar{u}_{,y} \end{bmatrix} = [B] \cdot \{U_n\}$$

$$\{U_n\}^T = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_e \ v_e \}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \bar{N}_{1,x} & 0 & \dots & \bar{N}_{e,x} & 0 \\ 0 & \bar{N}_{1,y} & \dots & 0 & \bar{N}_{e,y} \\ \bar{N}_{1,y} & \bar{N}_{1,x} & \dots & \bar{N}_{e,y} & \bar{N}_{e,x} \end{bmatrix}$$

$$\bar{N}_{i,x} = j_{11} \cdot \bar{N}_{i,r} + j_{12} \cdot \bar{N}_{i,s} \quad i=1,2,\dots,8.$$

$$\bar{N}_{i,y} = j_{21} \cdot \bar{N}_{i,r} + j_{22} \cdot \bar{N}_{i,s}$$

3- EXPRESSION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

Comme pour les éléments précédant, on a l'expression suivante :

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dv$$

En passant au repère normé :

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \det[J] \cdot dr \cdot ds$$

Vu l'expression complexe de [K], il est pratiquement impossible d'intégrer manuellement, c'est pour cela que l'on a recours à l'intégration numérique.

Pour l'intégration, nous avons utilisé la "NEWTON-COTE"; dite méthode produit, à trois fois trois points d'intégration.

4-EXPRESSIONS DES VECTEURS CHARGEMENTS

1-Chargement volumique :

$$[f_v] = \int_v [N]^T \cdot Q \, dv$$

où $Q = \{ Q_x, Q_y \}^T$

Pour le poids propre, nous avons :

$Q_x = 0$ et $Q_y = -f$ (masse volumique)

En passant au repère normé :

$$[F_v] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \cdot Q \cdot \det[J] \cdot dr \cdot ds$$

2-Chargement surfacique

$$[f_s] = \int_s [N]^T \cdot P \, ds$$

où

$P = \{ P_x, P_y \}^T$

P_x : équation du chargement suivant x

P_y : équation du chargement suivant y

En passant au repère normé :

$$[F_s] = \int_{-1}^1 [N]^T \cdot P \cdot J_s \cdot dr \cdot (ou \, ds)$$

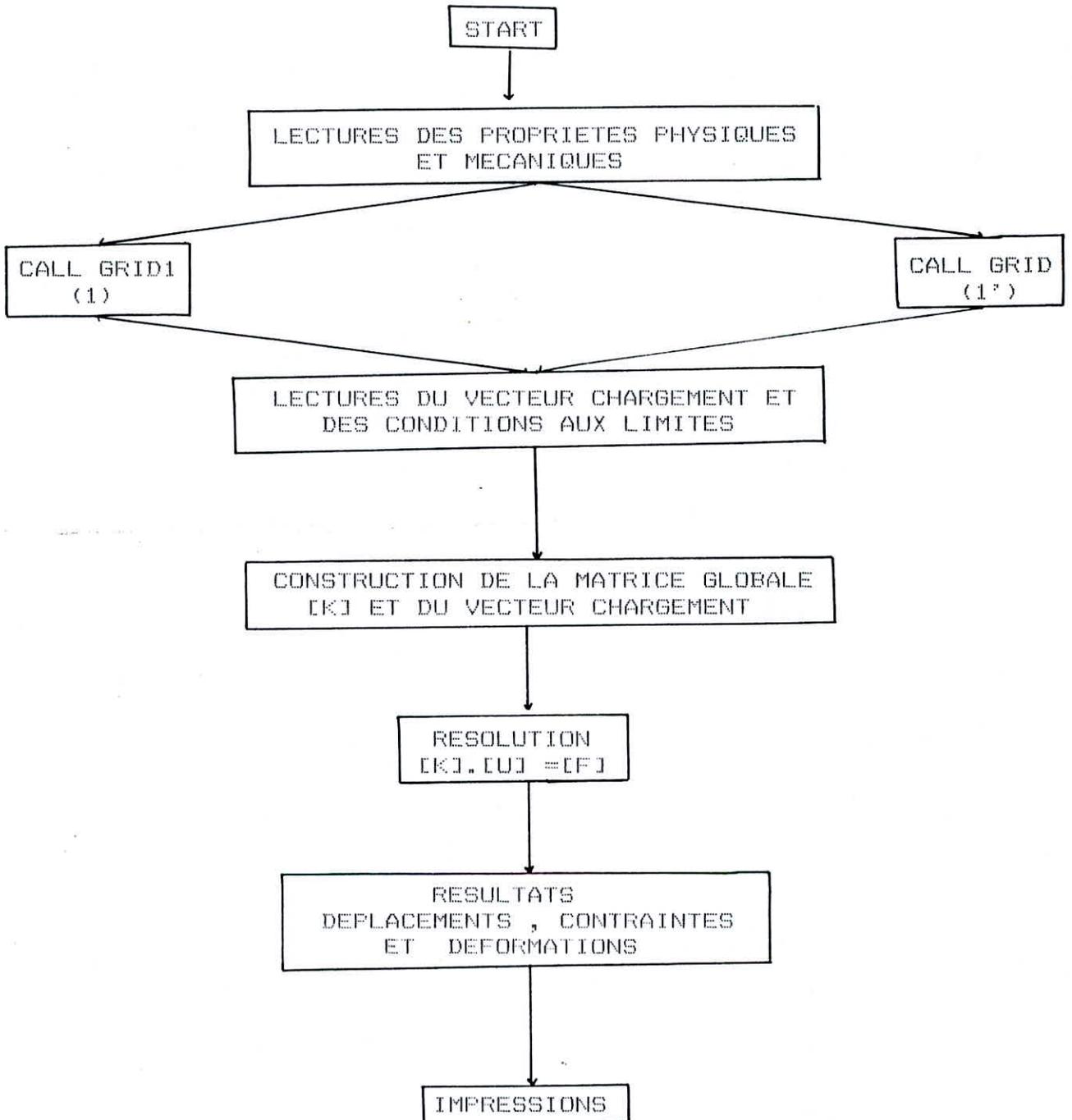
On prendra dr ou ds selon que le côté chargé est parallèle à l'axe r ou à l'axe s

Avec $J_s = \sqrt{(x_s)^2 + (y_s)^2}$

$x = \{ N_1, \dots, N_e \} \cdot \{ x_1, \dots, x_e \}^T$

$y = \{ N_1, \dots, N_e \} \cdot \{ y_1, \dots, y_e \}^T$

ORGANIGRAME



(1): La génération automatique d'un maillage uniforme pour des éléments rectangulaires ou triangulaires .

(1'): La génération semi-automatique d'un maillage q.c.q pour n'importe quels types d'éléments .

APPLICATIONS

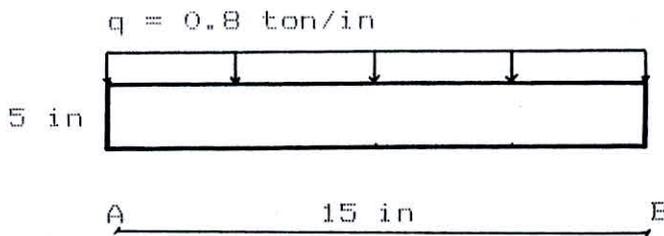
APPLICATIONS

INTRODUCTION

Il est à noter qu'en pratique, il existe divers applications de structures ou d'éléments de structure sollicités en contrainte ou en déformation plane, ce qui nous a amené à étudier en premier lieu des exemples simples puis à passer à d'autres relativement plus complexes.

IV-1 POUTRE CLOISON

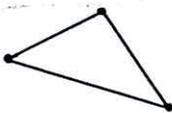
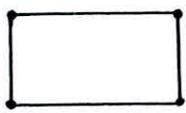
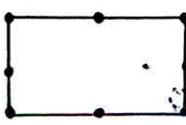
Il s'agit d'une poutre sur appui simple chargée uniformément



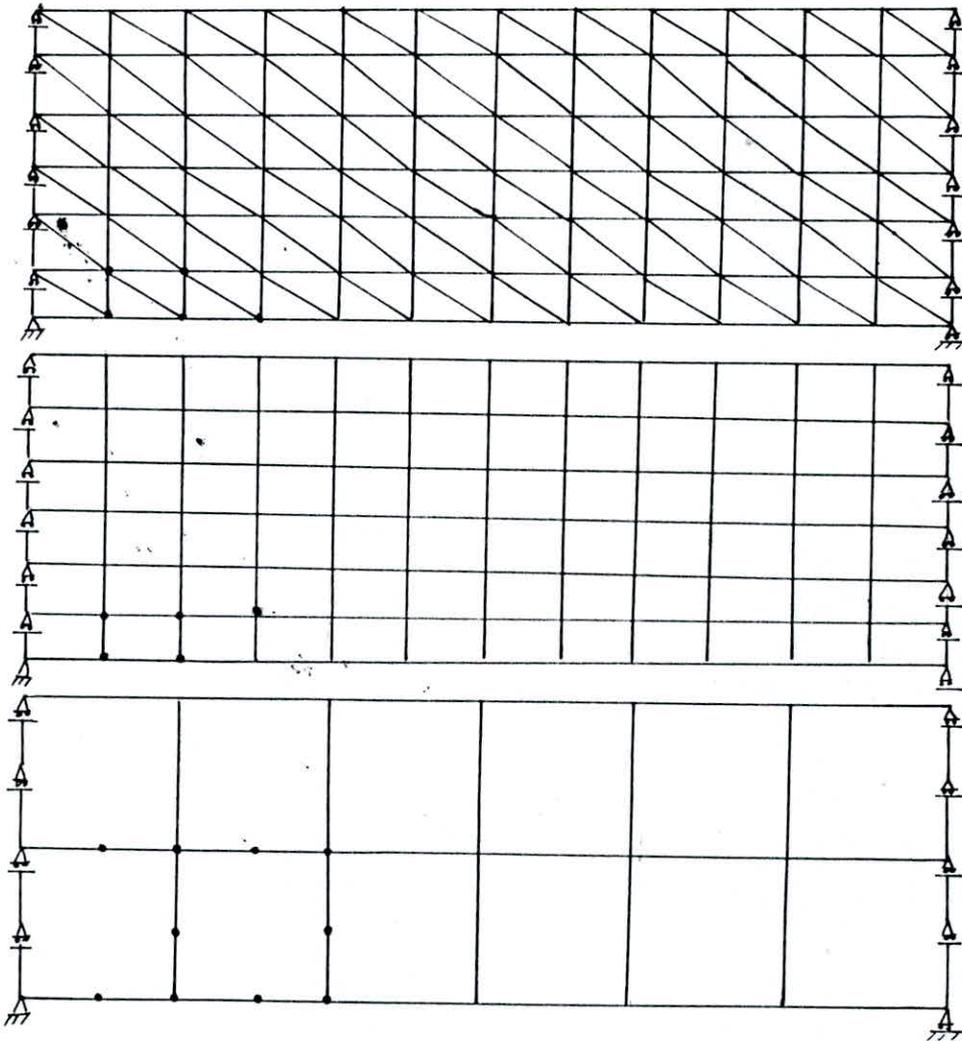
$$E = 13400 \text{ ton/in}^2$$

$$\nu = 0.3$$

Pour le calcul des déplacements (flèches) , nous avons pris les trois types d'éléments ce qui nous permettra d'avoir une comparaison .

ELTS.	Nbre Noeuds	Nbre d.d.l	fleche (x=1/2)
	66	132	$0.402 \cdot 10^{-2}$
	66	132	$0.450 \cdot 10^{-2}$
	53	106	$0.472 \cdot 10^{-2}$
solution exacte			$0.48 \cdot 10^{-2} \text{ in}$

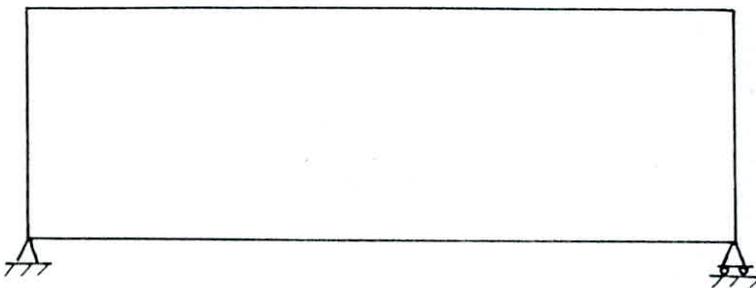
Pour les trois éléments nous avons les maillages suivants :



(fig.1)

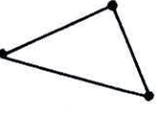
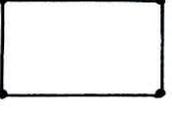
Il est à rappeler que la modélisation tenant compte des conditions d'appuis consiste à bloquer les déplacements verticaux le long des bords de la poutre (fig 1)

Il est à noter qu'on prenant une modélisation autre (fig.2)

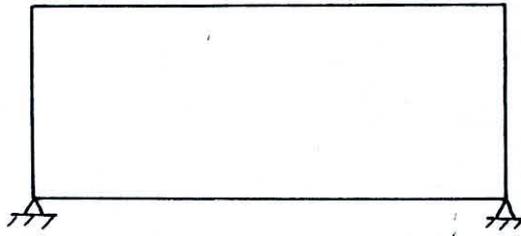


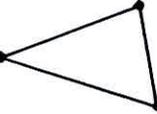
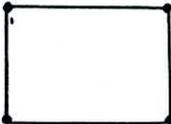
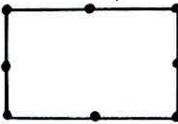
(fig.2)

nous obtenons les résultats suivants :

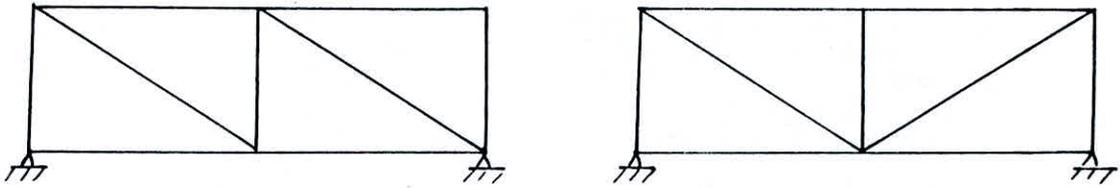
ELTS.	Nbre Noeuds	Nbre d.d.l	fleche (x=1/2) (in)
	66	132	$0.49 \cdot 10^{-2}$
	66	132	$0.58 \cdot 10^{-2}$
	53	106	$0.63 \cdot 10^{-2}$

Pour ce qui est de la modélisation suivante nous avons :



ELTS.	Nbre Noeuds	Nbre d.d.l	fleche (x=1/2) (in)
	66	132	$0.28 \cdot 10^{-2}$
	66	132	$0.32 \cdot 10^{-2}$
	53	106	$0.33 \cdot 10^{-2}$

Il a paru intéressant pour ce dernier cas de le reprendre avec un maillage symétrique (fig.4) pour l'élément triangulaire vu la symétrie de chargement et de fixation .



(fig.4)

	Nbre Noeuds	Nbre d.d.l	flèche (x=1/2)
Maillage Symétrique	66	132	0.273 10^{-2}
Maillage non Symétrique	66	132	0.285 10^{-2}

On obtient des résultats prévisibles vu que pour le maillage symétrique la largeur de bande a augmenté .

En conclusion , nous pouvons dire que l'élément isoparamétrique est le plus précis vu les résultats du premier tableau .

IV-1-1 DISTRIBUTIONS DES CONTRAINTES

Les contraintes seront calculées avec l'élément isoparamétrique .

Pour les contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} voir respectivement les fig (IV-1), (IV-2) et (IV-3) .

Distribution de la Contrainte Sigma X-X
au niveau de la section mediane

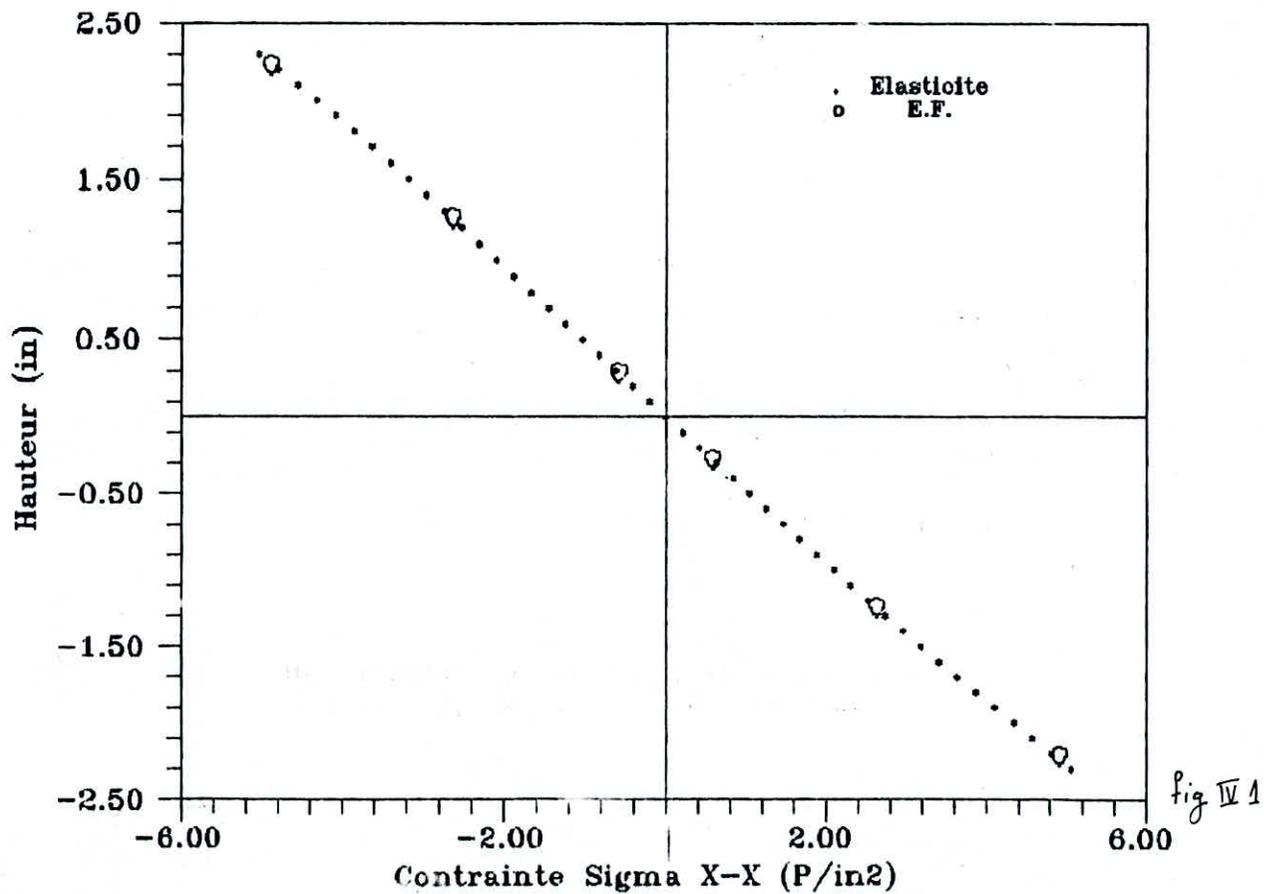
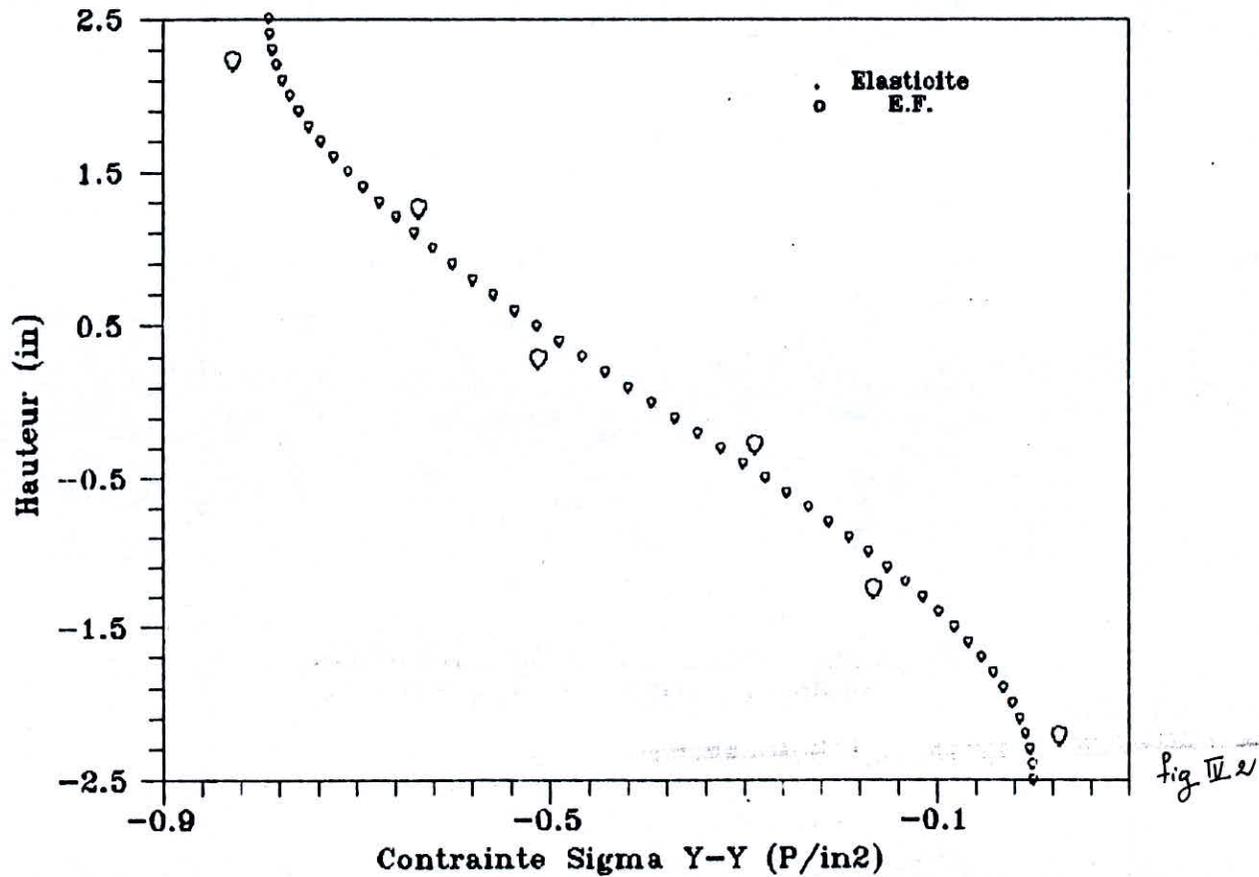


Fig IV 1

Distribution de la Contrainte Sigma Y-Y
au niveau de la section mediane



Distribution de la Contrainte Tau X-Y
au niveau de la section X=5.28 in

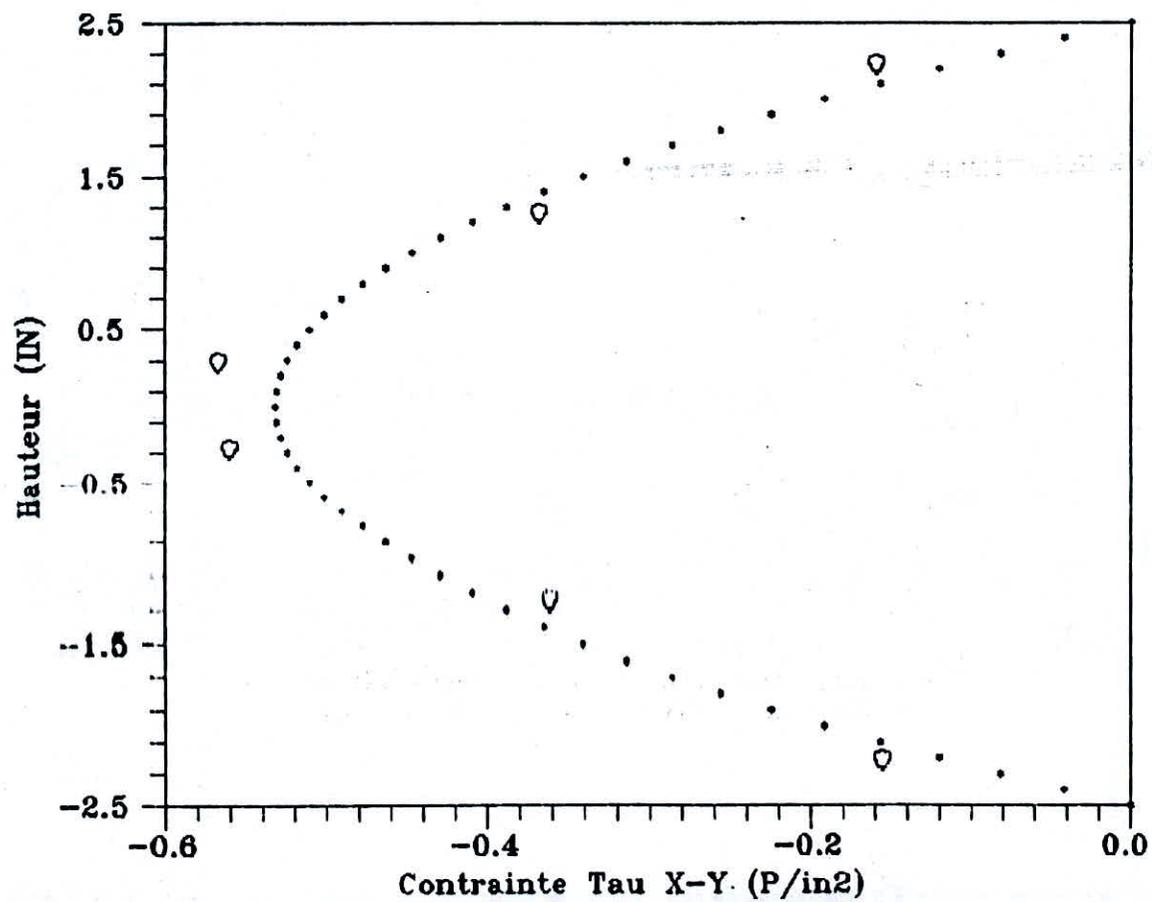


fig IV 3

V- ETUDE D'UN VOILE

Il s'agit d'un voile (R+5) à deux files d'ouvertures, encastré à sa base, soumis à un chargement triangulaire (fig V-1)

$$H= 19.2 \text{ m} , h= 3.2 \text{ m} , h_1= 0.8 \text{ m} , E= 3.78 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

seisme à la base $V = 36 \text{ t}$

Pour l'étude en M.E.F, le refend a été discretisé en 264 éléments totalisant 979 noeuds soit 2×979 degré de liberté (fig V-2).

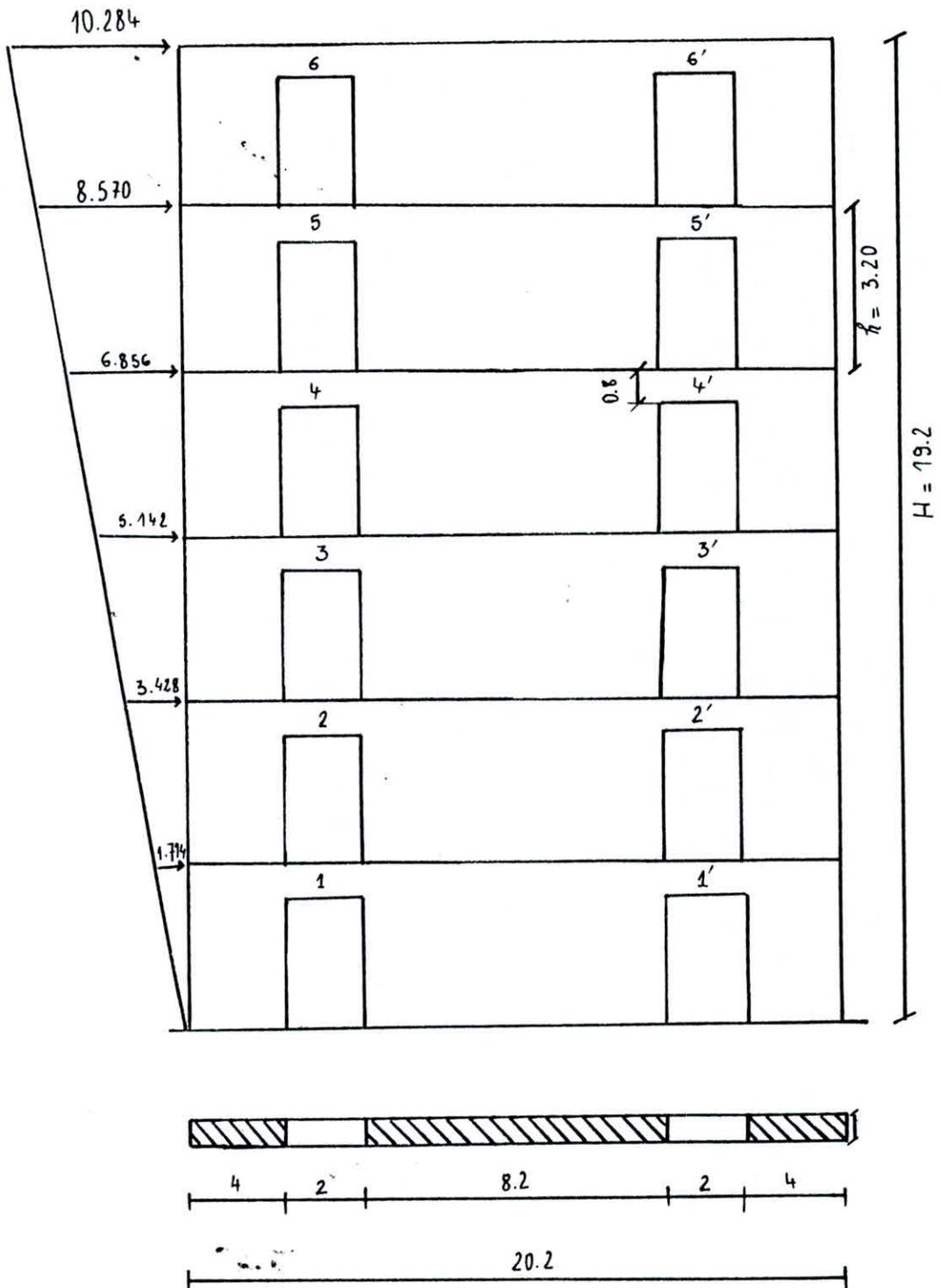
Il est à souligner la difficulté d'établissement de tels fichiers d'entrée vu le nombre important de noeuds et de connectivités à générer ainsi que les erreurs qui s'y rattachent . Pour remédier en partie à cela , nous avons procédé à une visualisation graphique du maillage afin de détecter d'éventuelles erreurs .

Ce genre de procédure s'avère d'une très grande efficacité et de ce fait devient indispensable pour la vérification de maillage raffiné pour des formes complexes

Pour faciliter la lecture des résultats, nous avons tracé des courbes de variation des différentes contraintes et cela le long des linteaux de même niveau selon trois fibres (sup,moy,inf) ainsi que le long de certains trumeaux .

côtes(m)	niveaux	fibres	linteaux
19.2 18.8 18.4	6	sup moy inf	6 et 6'
9.6 9.2 8.8	3	sup moy inf	3 et 3'
6.4 6.0 5.6	2	sup moy inf	2 et 2'
3.2 2.8 2.4	1	sup moy inf	1 et 1'

Le tableau ci-dessus permettra une meilleure compréhension des graphes .



(Fig.V1)

Commentaires :

Nous commencerons par les linteaux (3 et 3') du niveau 3 où l'on voit la contrainte σ_x pour les fibres extrêmes (fig V-5, V-3) correspondant l'état de déformation ci-dessous .

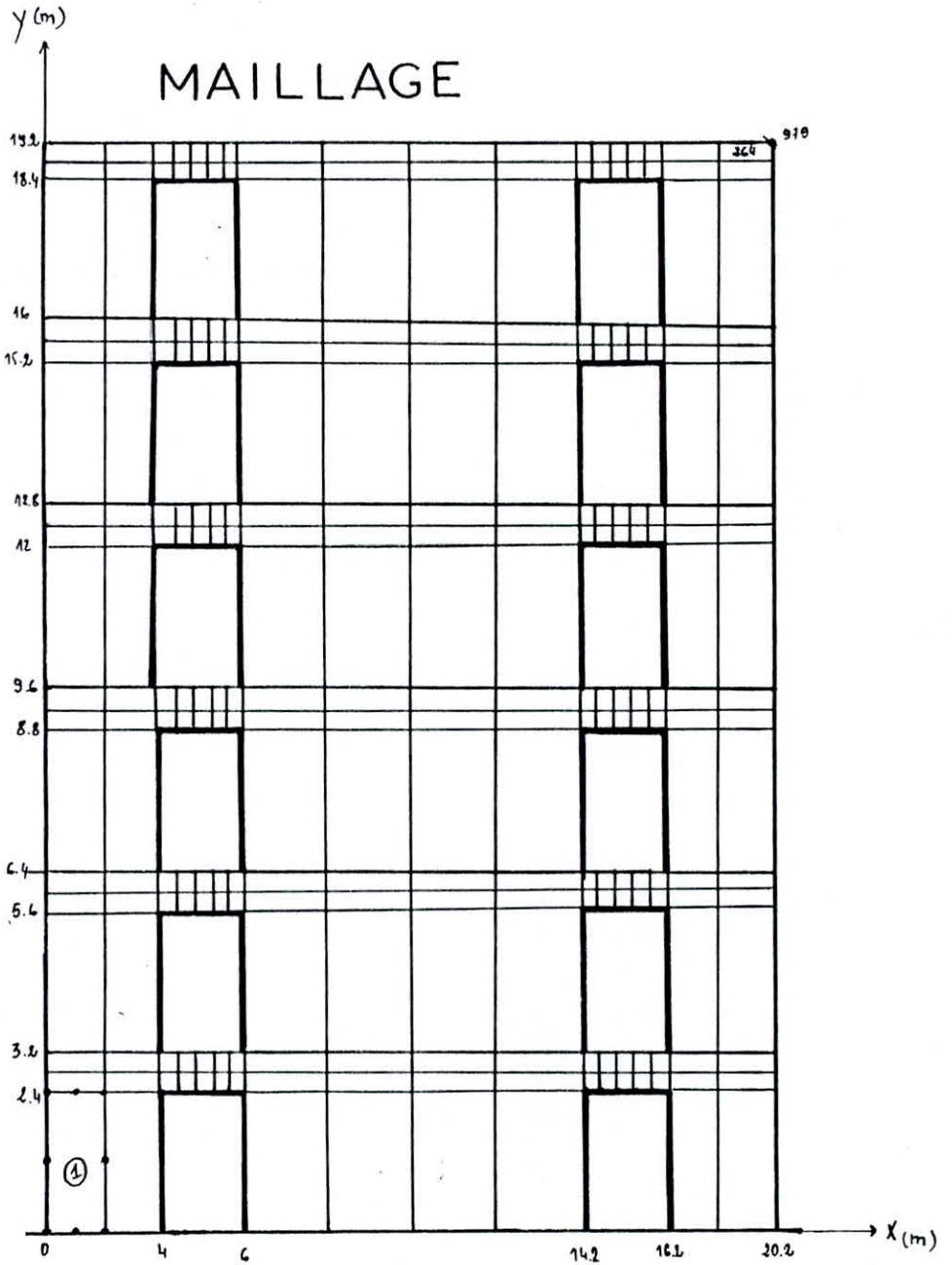


Il est à noter un effet de concentration de la contrainte au niveau des encastremets des linteaux; et cet effet est amplifié au niveau du linteau (3').

Pour la fibre moy. (fig V-4), la contrainte est presque nulle au linteau (3') contrairement à (3), cela s'explique que la fibre moy. s'est décalée du fait, du non alignement de la des points d'inflexion des fibres extrêmes .

Pour ce qui est de l'évolution en hauteur, en remarque que les fibres extrêmes du linteau (1) (fig V-6 et V-8) sont tendues (gonflement) par contre ceux du linteau (6) (fig V-9 et V-11) sont comprimés et cela revient à un fait que le trumeau soit comprimé à ce niveau .

Pour les linteaux (1') et (6') il n'y a pas de chargement à part la disparition de l'effet d'amplification observé au linteau (3') .



(Fig.V2)

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=8.8$ m
(niveau 3)

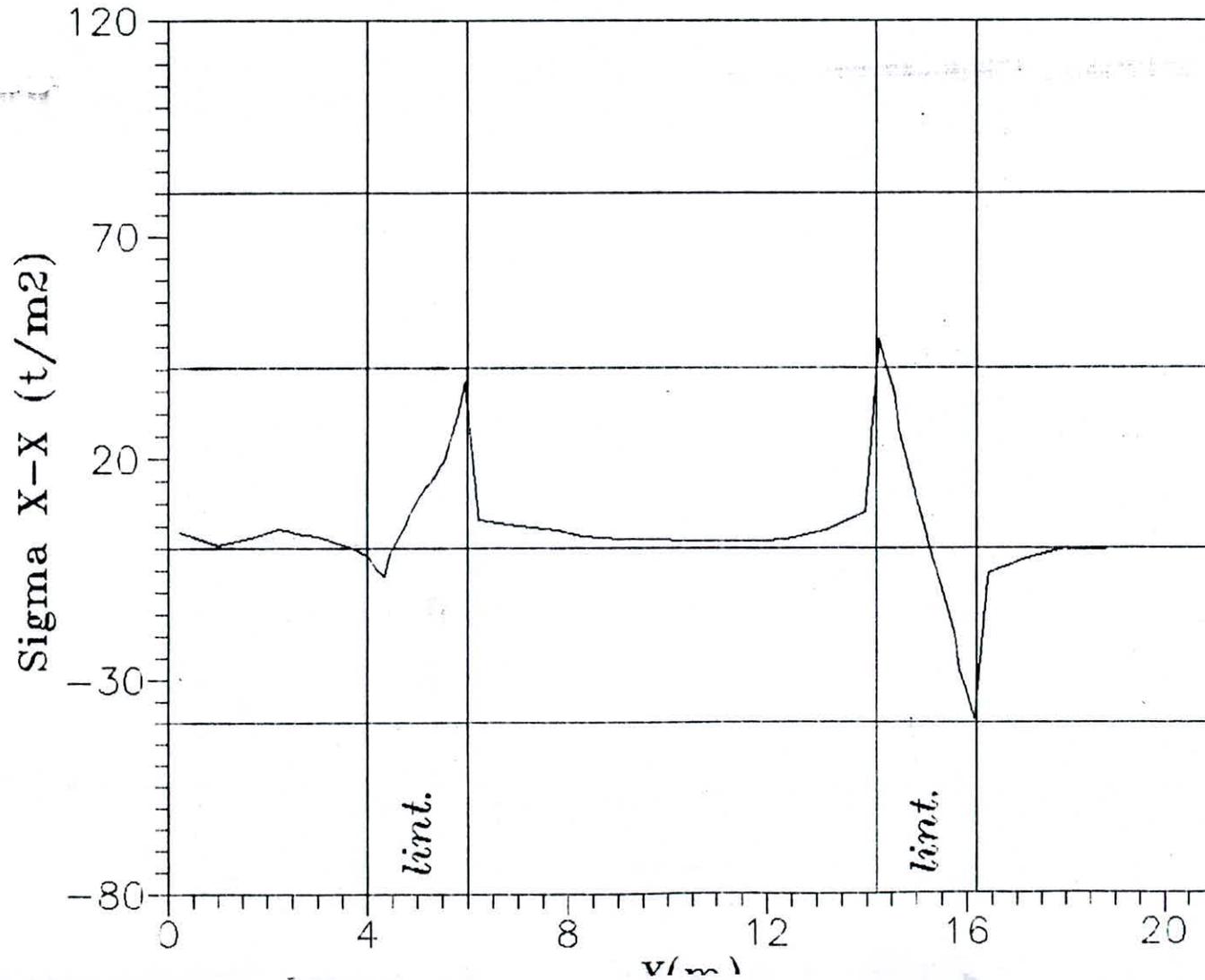


Fig V-3

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=9.2$ m
(niveau 3)

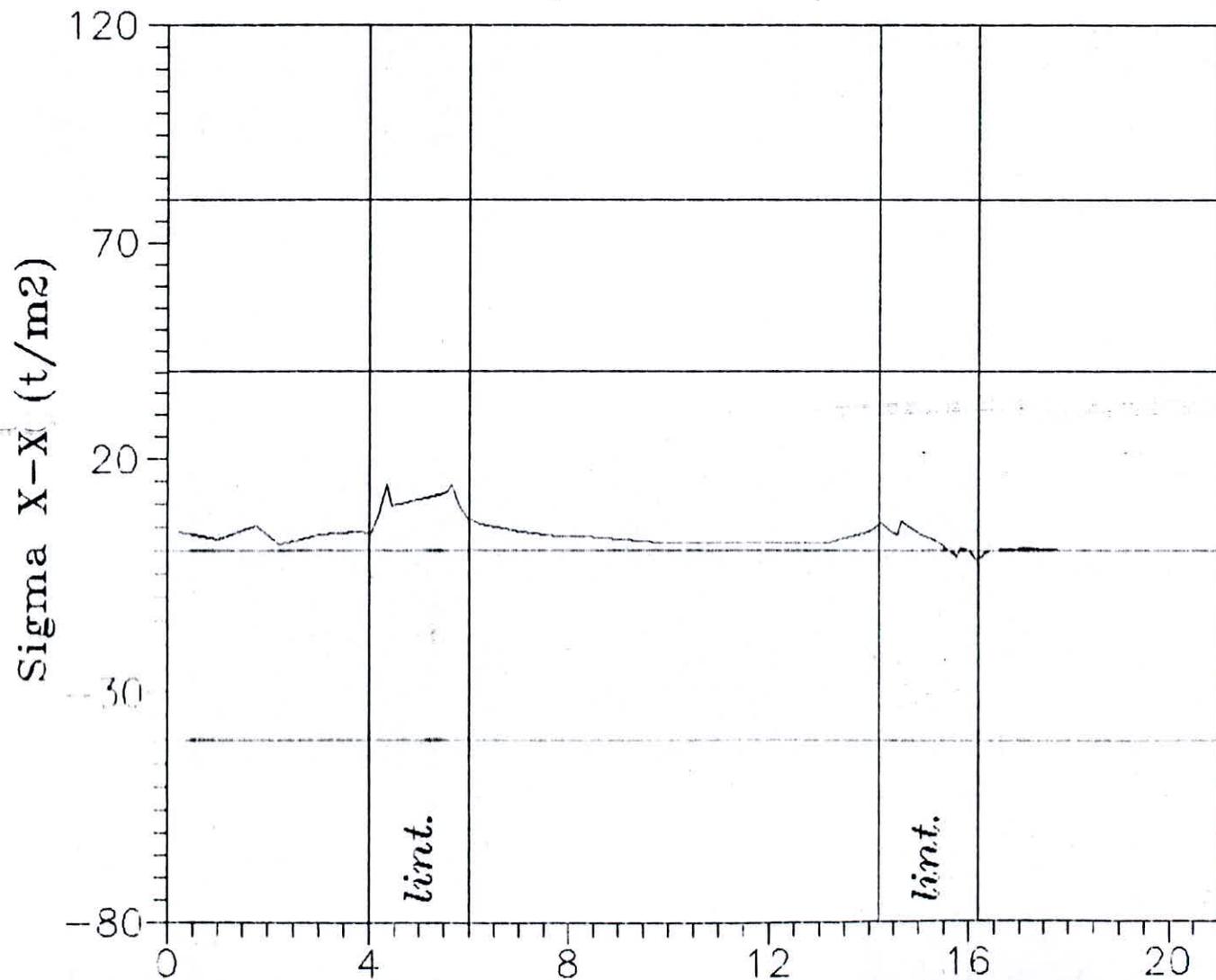


Fig V-4

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=9.6$ m
(niveau 3)

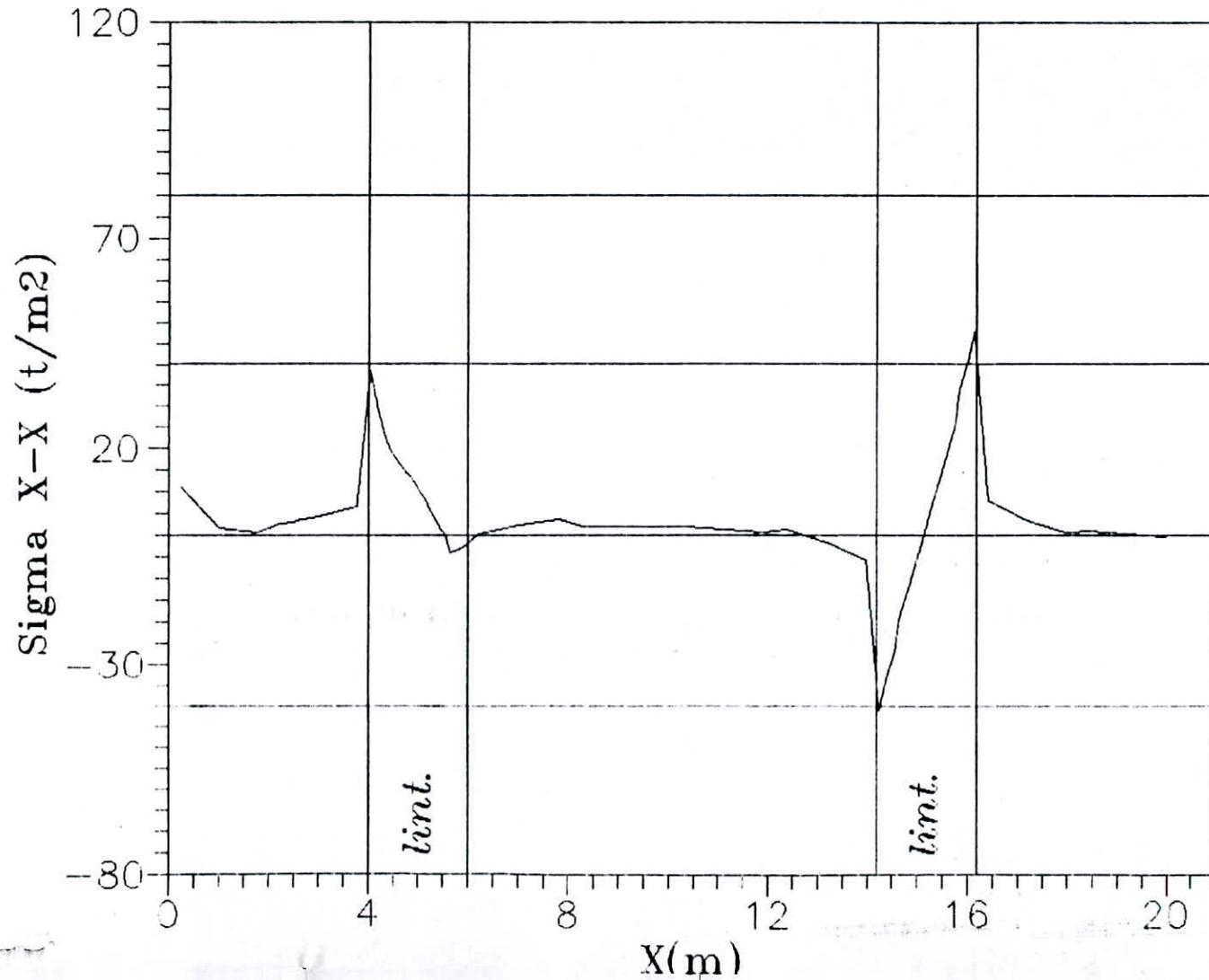


Fig V5

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=2.4$ m
(niveau 1)

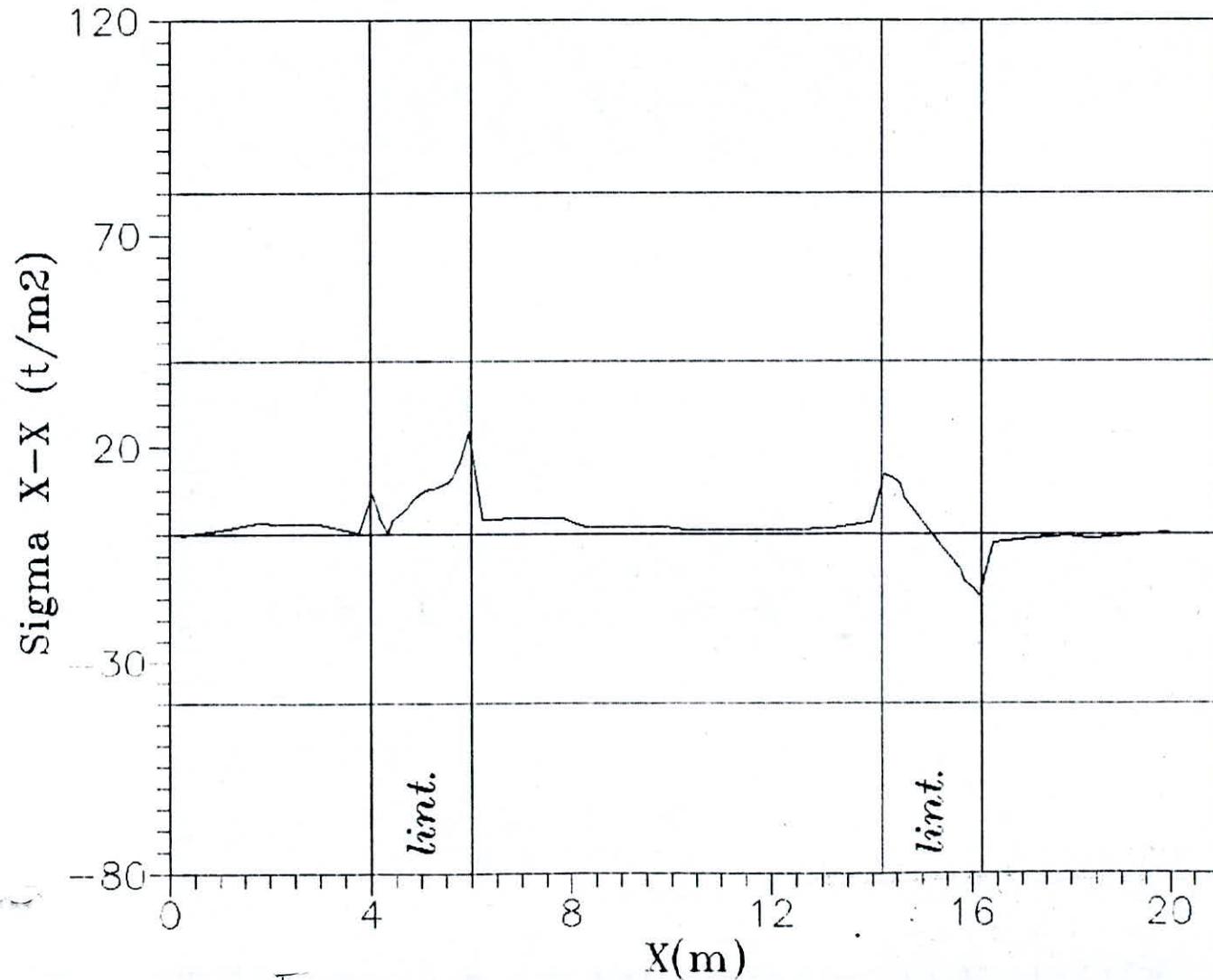


Fig EC

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=2.8$ m
(niveau 1)

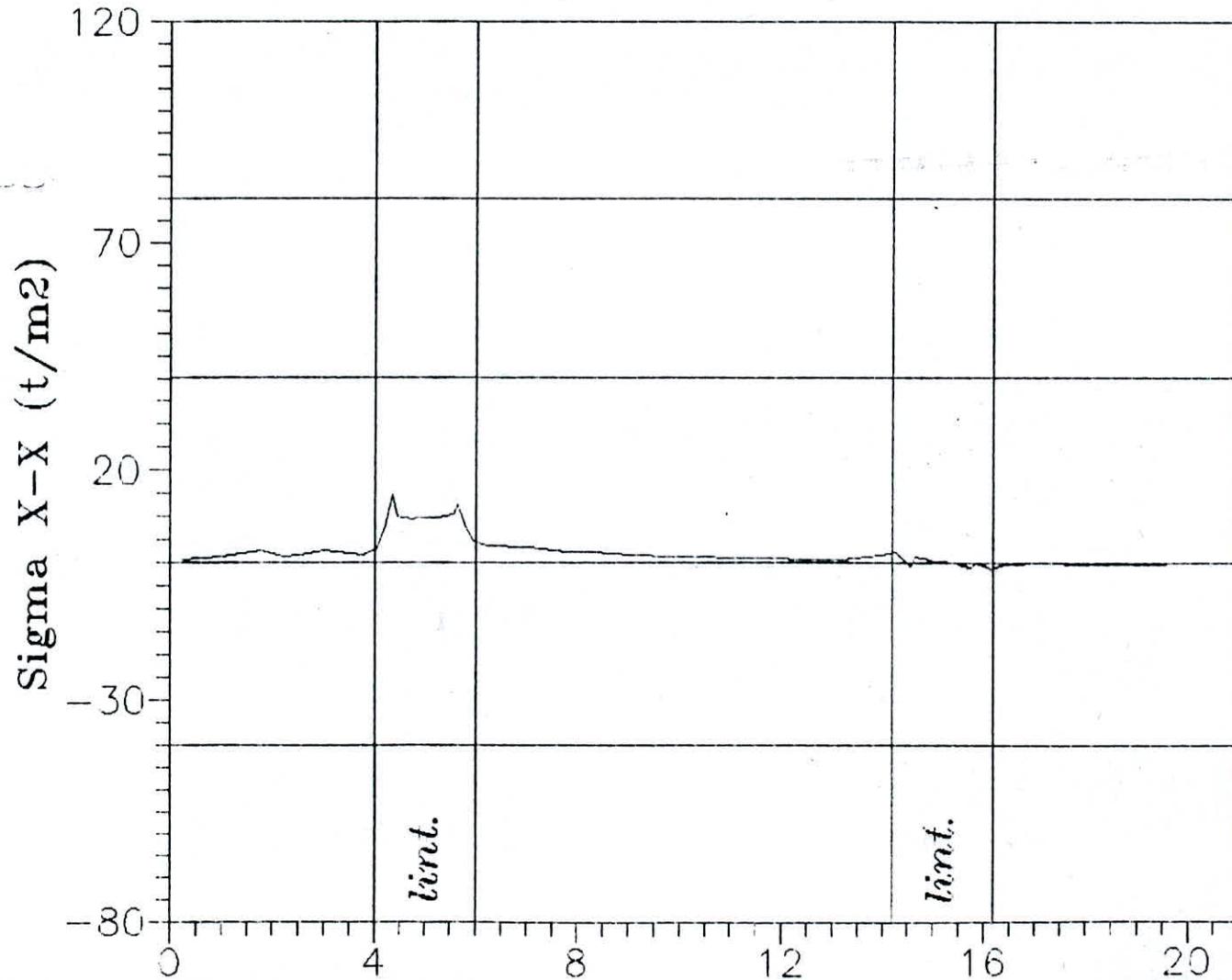


fig E7

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=3.2$ m
(niveau 1)

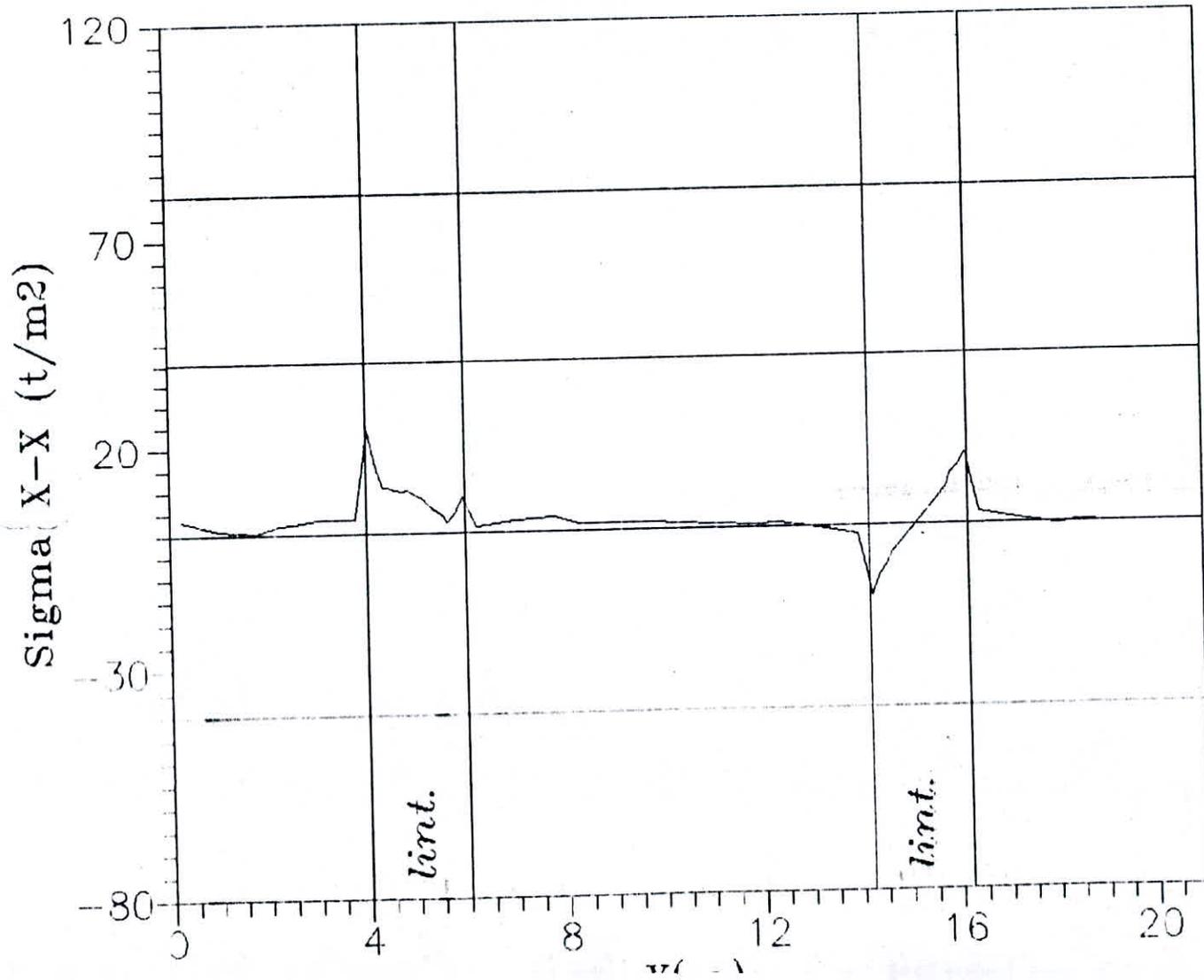


Fig E-8

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=18.4$ m
(niveau 6)

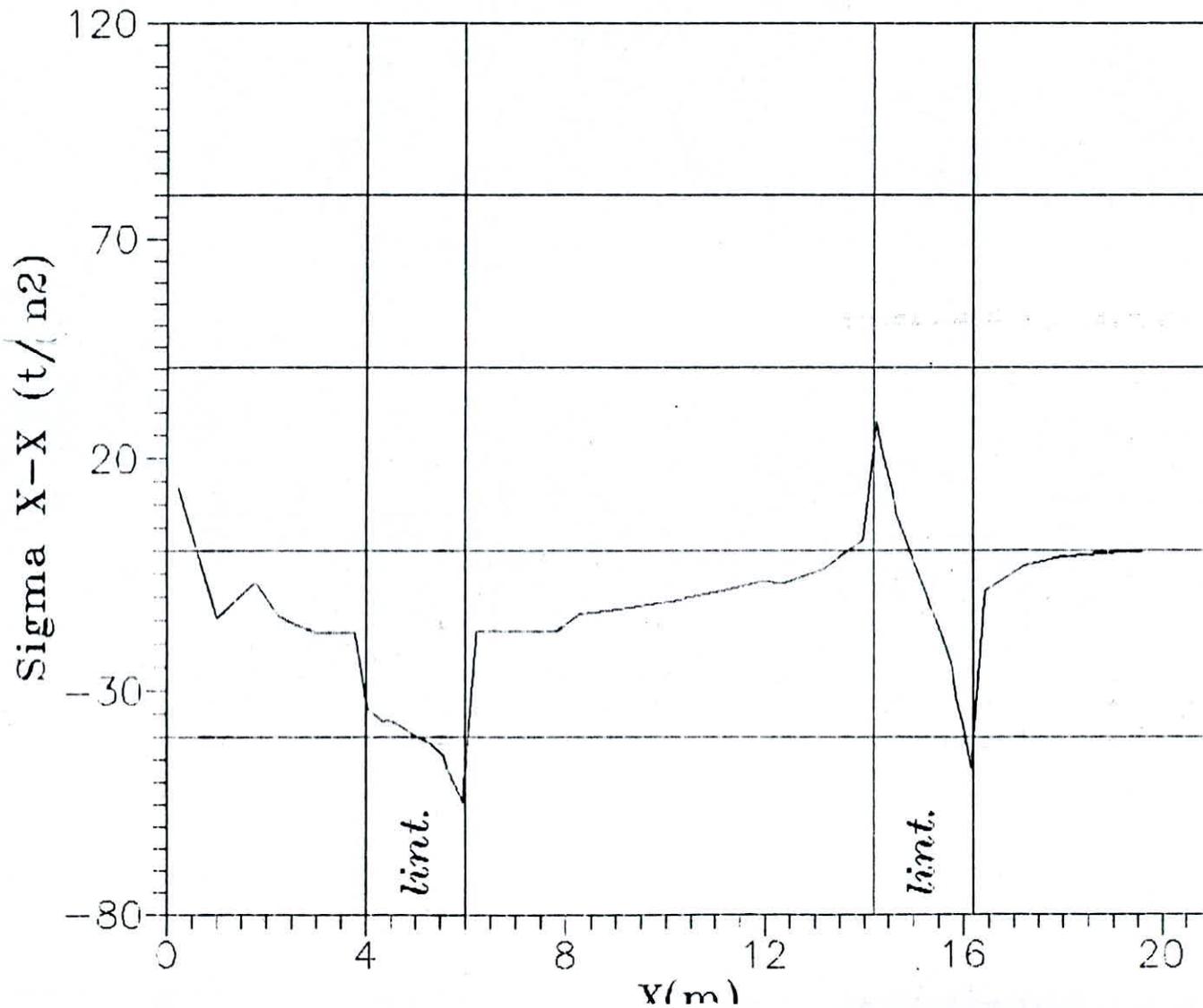


fig V-9

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=18.8$ m
(niveau 6)

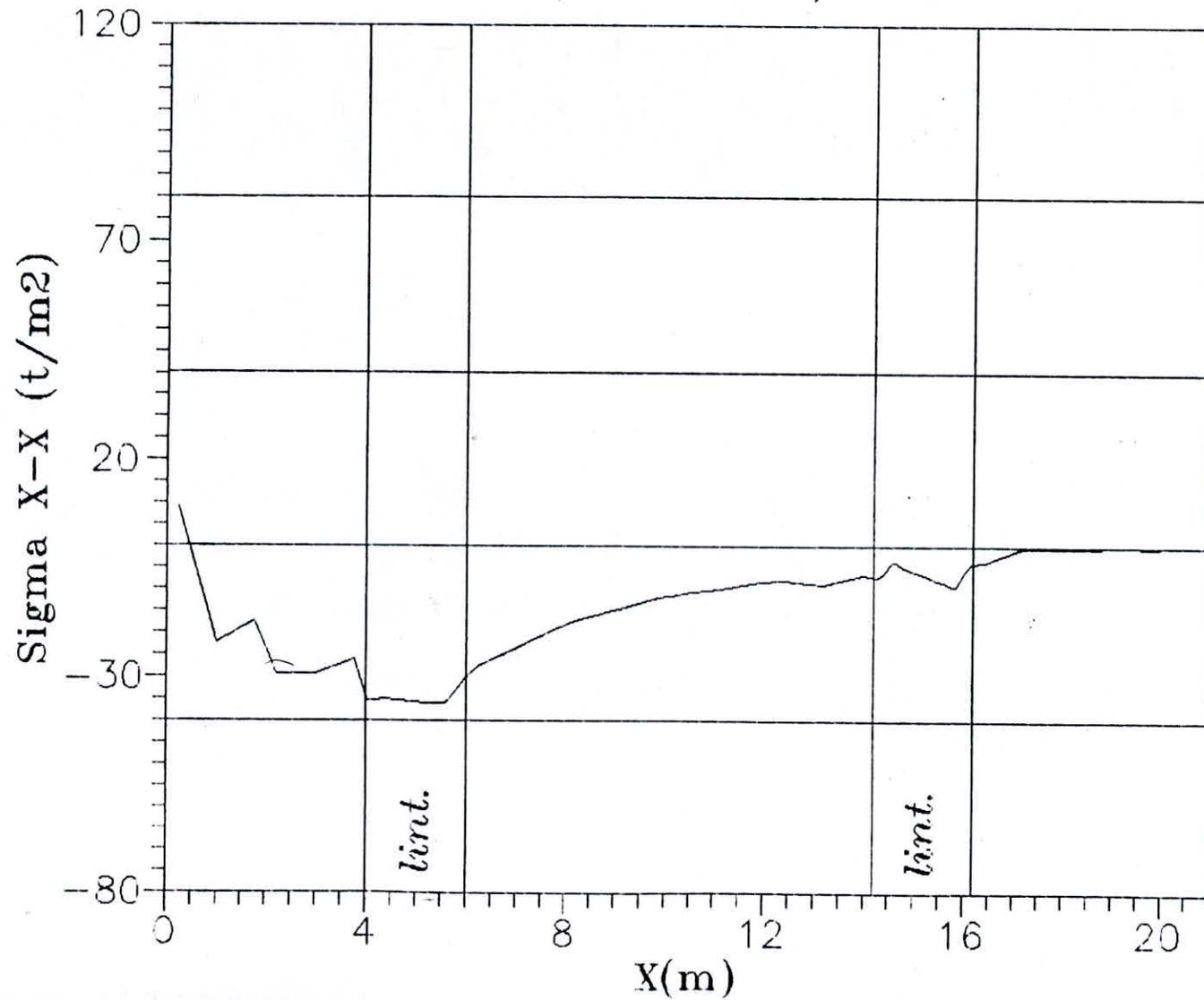


Fig V 10

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=19.2$ m
(niveau 6)

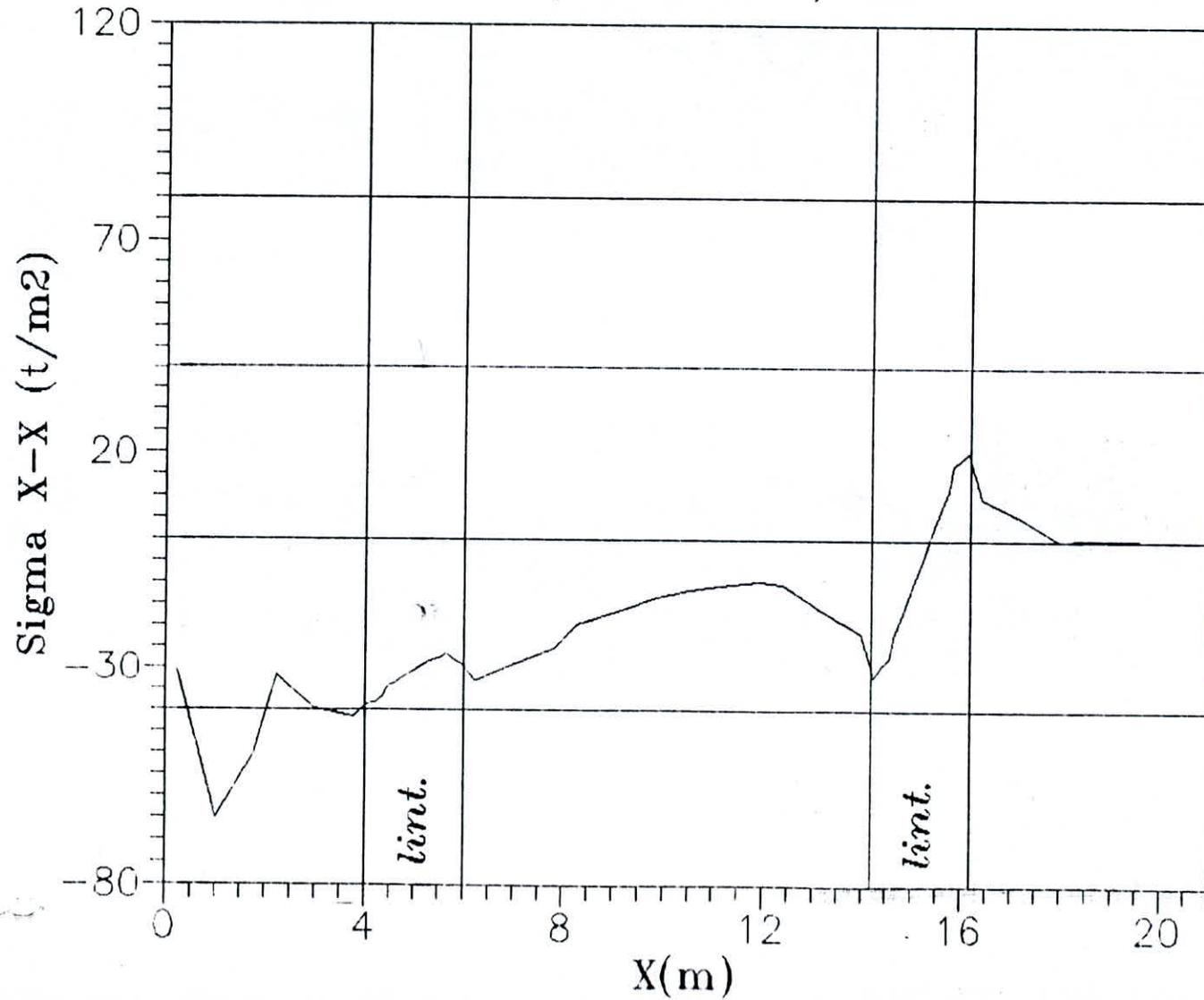
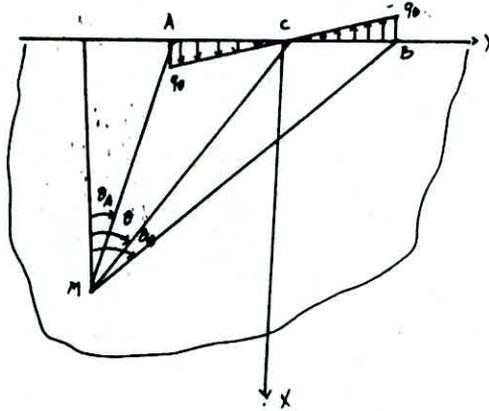


Fig. V M

Il nous a parut intéressant de comparer les distributions de la contrainte le long du linteau (3 , fibre sup) et du linteau (3' , fibre inf) avec la distribution donnée par le problème de **FLAMANT** qui suppose un milieu élastique semi-infini chargé linéairement (fig ci-dessous) .



$$\sigma_x = -2/\pi \int_{\theta_A}^{\theta_B} q_e \cos^2 \theta \, d\theta$$

Pour la comparaison , nous prenons $\theta_A = 0$ et $\theta_B = \text{Arctg}(h/l)$

AB = h : hauteur du linteau

l : longueur du linteau (portée)

Après intégration, nous obtenons :

$$\sigma_x = q_e/\pi [-\theta_B + \cos\theta_B \cdot \sin\theta_B]$$

Avec $\pi/2 \leq \theta_B \leq \text{Arctg}(h/l)$

$$\sigma_x = q_e/\pi (-\text{Arctg}(h/x) + h \cdot x / (x^2 + h^2))$$

Avec $0 \leq x \leq h/l$

Les fig (V-12) et (V-13) donnent respectivement la comparaison de la distribution de **FLAMANT** avec celles du linteau (3) et (3') .

Contraint Sigma X-X (t/m²)

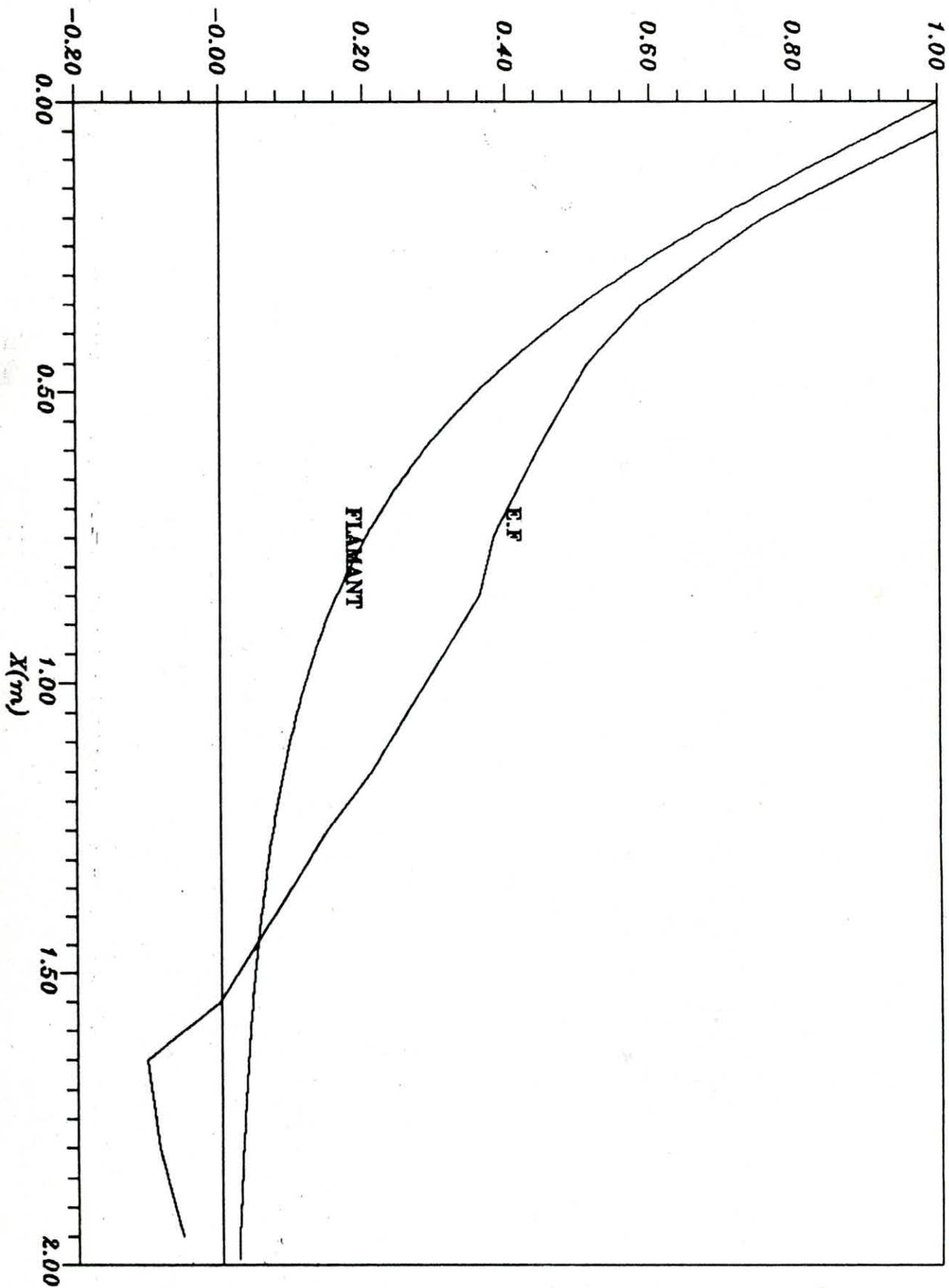


Fig V 12

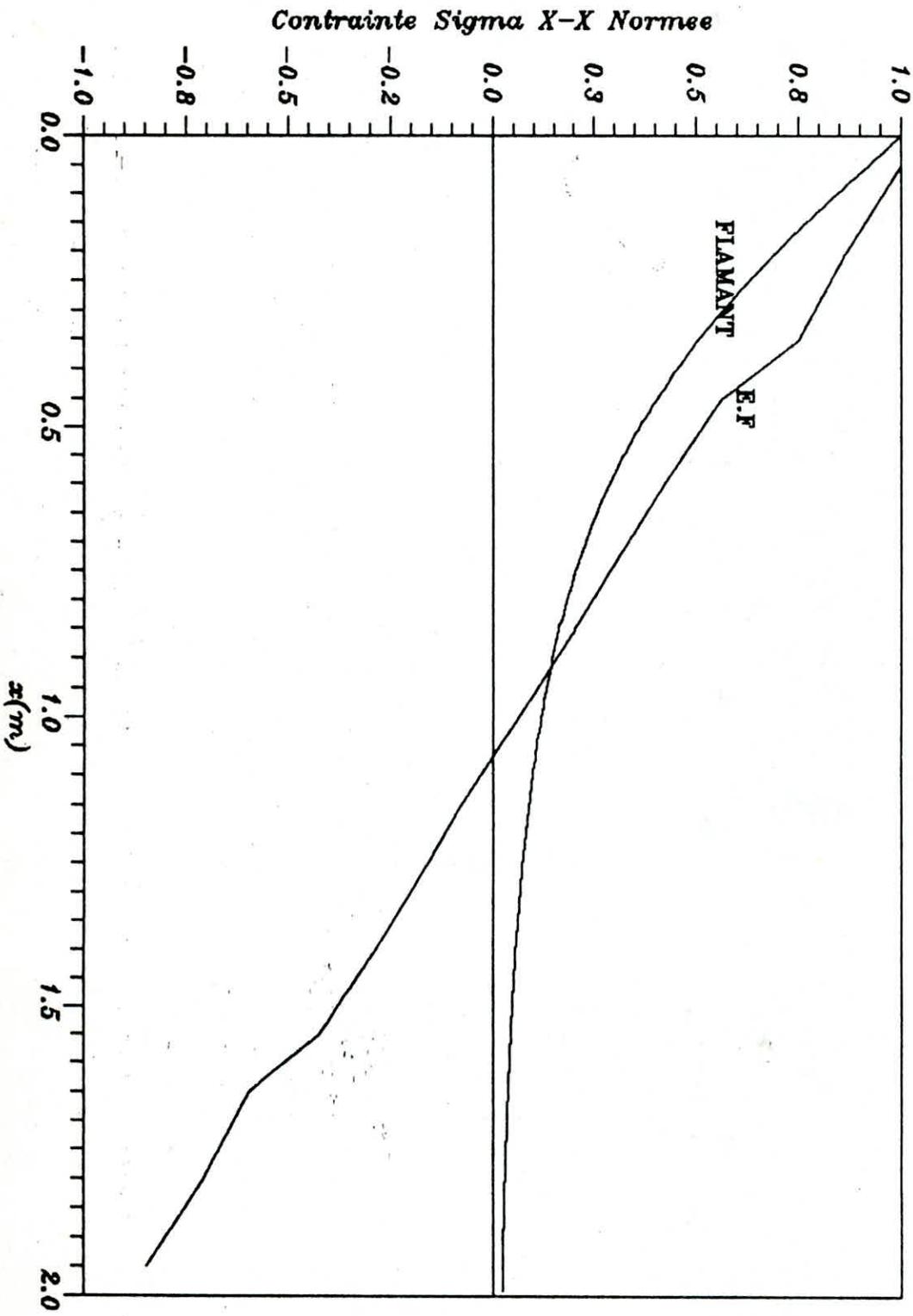


Fig I 13

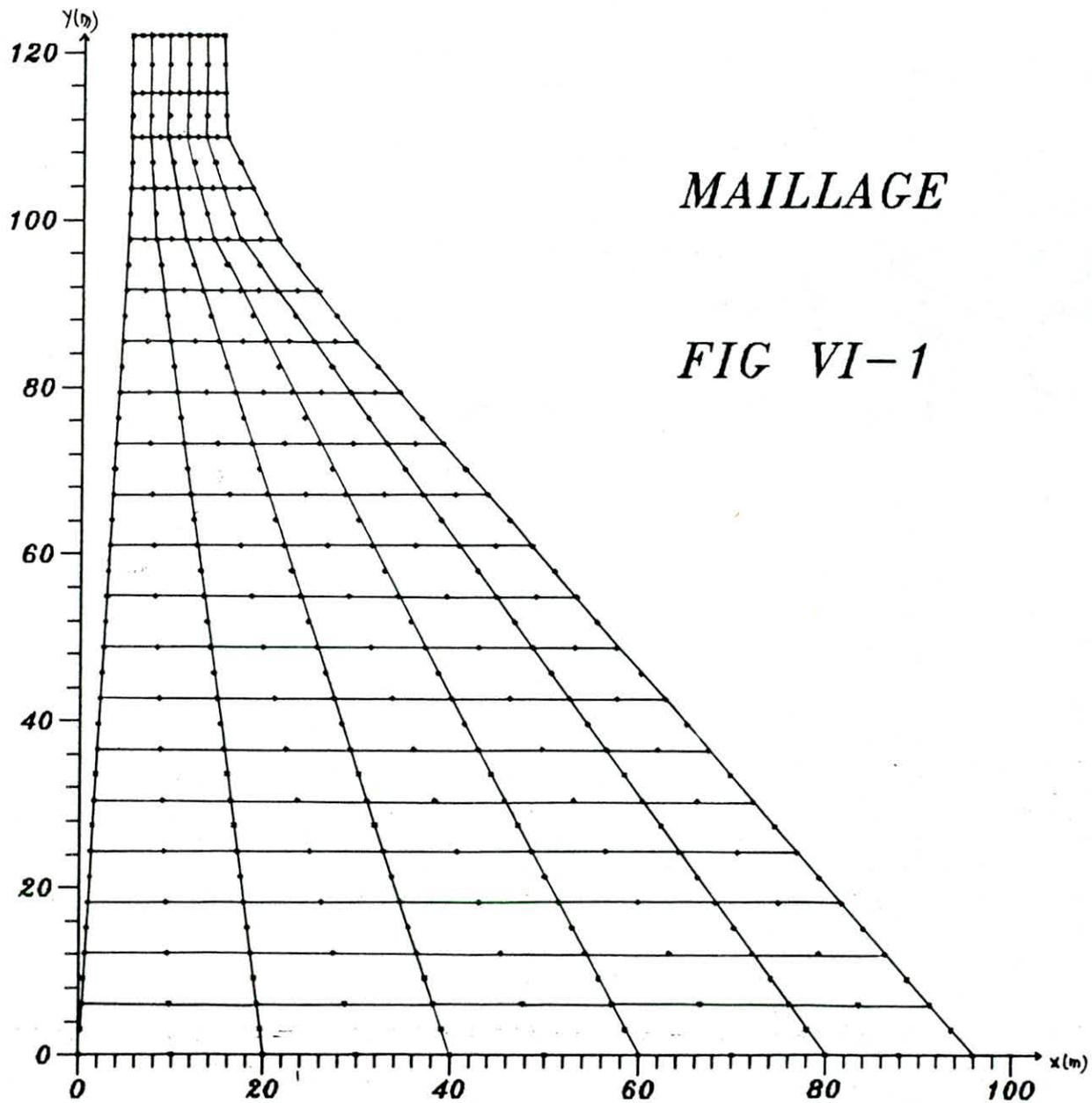
Il est à noter que pour le problème de **FLAMANT**, les valeurs ont même signe et chutent rapidement pour tendre vers zéro, par contre pour les courbes obtenues en **E.F** changent de signe avant d'atteindre l'encastrement (3') et avec des valeurs assez importantes.

En conclusion, nous pouvons dire que le problème de **FLAMANT** met en évidence un effet de concentration, mais ne tient pas compte de la discontinuité ainsi que l'effet du trumeau voisin.

Pour la contrainte σ_y , on remarque que globalement que la moitié du portique est en traction tandis que l'autre partie travaille en compression et que le long des linteaux ces dernières sont nulles voir fig(V-14,15,16)des linteau (3) et(3').

Enfin pour les contraintes τ_{xy} , on observe l'effet de concentration de la contrainte au niveau des encastrement du linteau voir fig (V-17,18 et 19).

En conclusion, les contraintes σ_y sont plus importantes que les contraintes σ_x qui sont à leurs tours plus importantes que les contraintes de cisaillement τ_{xy} .



MAILLAGE

FIG VI-1

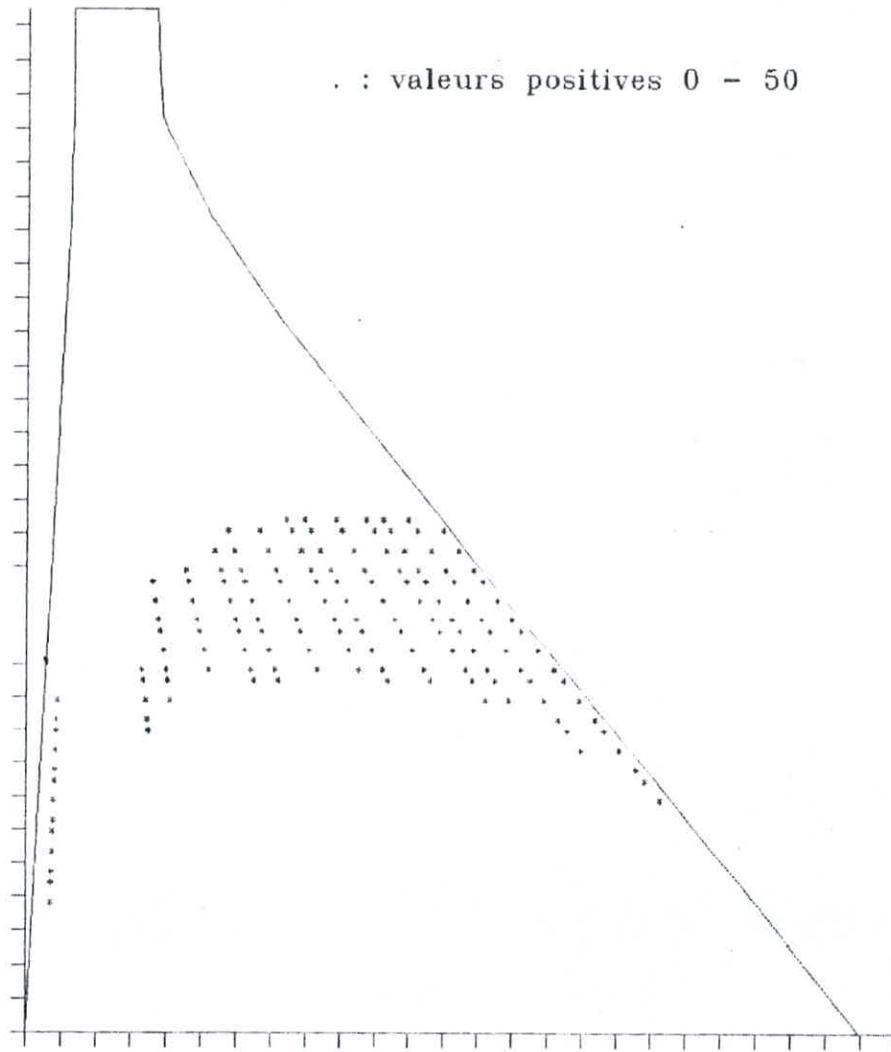


fig VI-2

Cet exemple montre la nécessité de l'utilisation des éléments isoparamétriques et l'augmentation du prix dans le cas du calcul tridimensionnel .

Il semble d'après le bulletin N° 30 cité ci-dessus, que l'action tridimensionnel modifie les contraintes dans le plan du profil, il en résulte généralement une réduction de la valeur de celle-ci, dont les erreurs de la représentation bidimensionnelle vont dans le sens pessimiste et donc de la sécurité .

L'analyse est donc en général rapportée à un calcul en déformation plane (la déformation suivant la longueur est nulle).

VI-2 MAILLAGE

Le barrage a été discrétisé en 100 éléments totalisant 351 noeuds soit 2×351 d.d.l (fig VI-1).

1-Barrage sous l'effet du poids propre (fig.VI-2)

A l'état initial on se retrouve avec des plans principaux en traction , cela est dû à la forme du barrage .

Pour ce qui est des contraintes principales positives elles ne dépassent pas 50 kN/m^2 .

2-Barrage sous l'effet des forces d'inerties en incluant le poids propre :

Vu que le seisme peut agir dans n'importe quel direction , nous avons considéré un premier cas (fig.VI- 3) où la direction du seisme est d'aval en amont , on peut observer une zone de concentration sur le parement aval .

Par contre pour le deuxième cas où le seisme agit d'amont en aval (fig.VI-3'), on note que la zone de concentration s'est déplacée au parement amont .

Il est à souligner que le premier cas est plus défavorable.

Pour plus d'information nous avons tracés l'évolution des trois contraintes principales σ_1 , σ_2 et τ_{max} (voir respectivement fig. VI-4, VI-5, et VI-6) selon différentes côtes.

Pour la fig(VI-6), nous remarquons une variation de courbure qui doit être due à l'effet de parement, cette variation vont en diminuant de haut en bas du barrage .

3-Barrage plein sous la combinaison des forces d'inerties, en incluant le poids propre :

Pour obtenir les forces latérales pour le troisième cas , nous avons fait la superposition des forces d'inertie et les forces hydrodynamiques.

On remarque (fig.VI-7) que la zone de concentration de

Contraintes principales max.(kN/m²)
d'un barrage non plein sous l'action d'un
chargement sismique
(p.p. inclus)

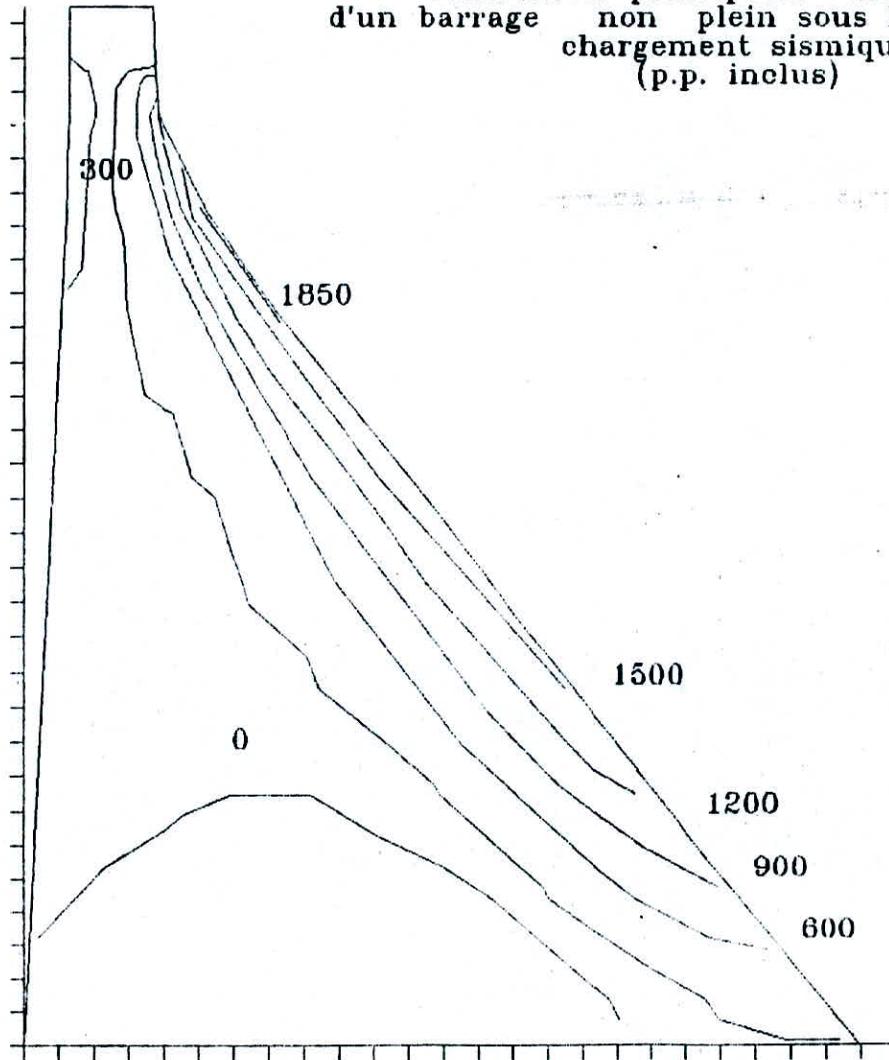


fig VI-3

Variation de la contrainte selon
differentes cotes

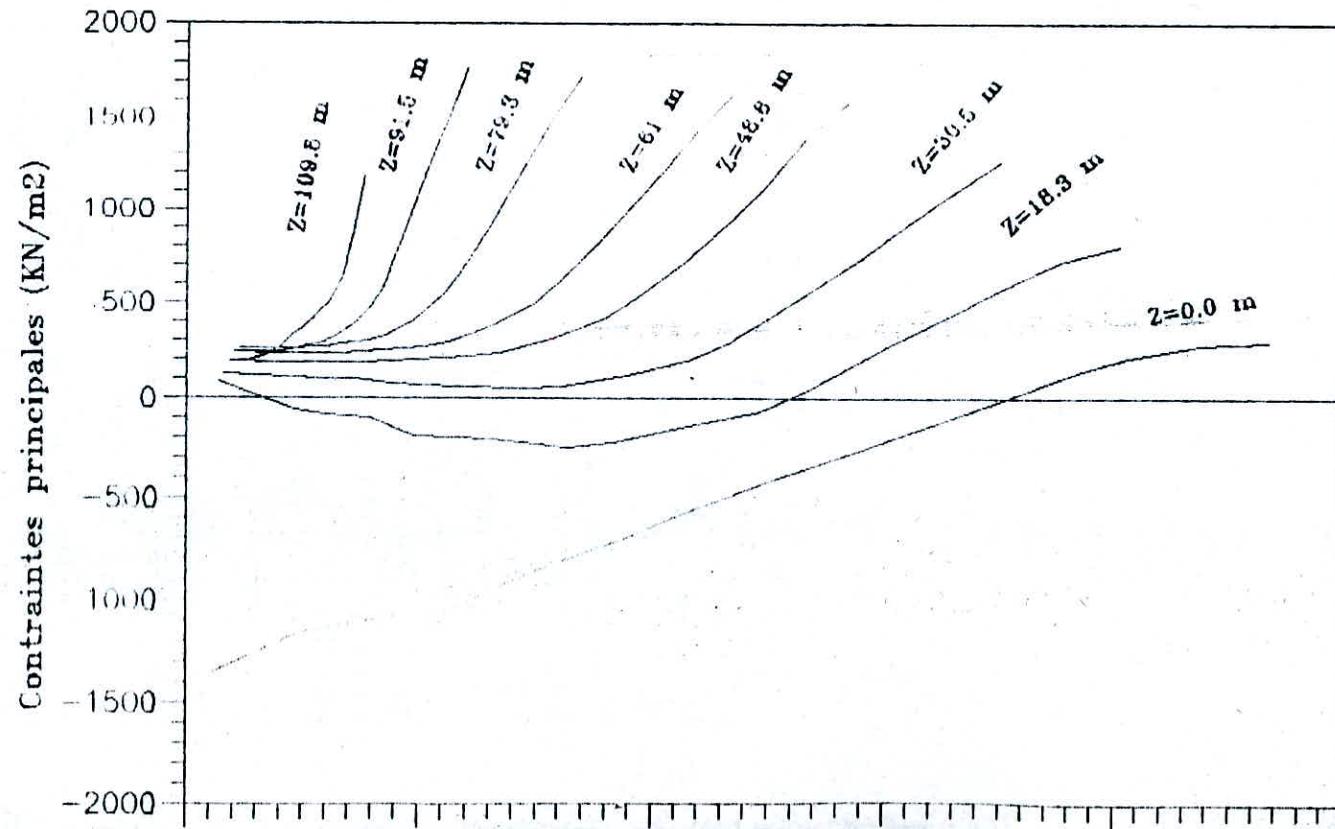


Fig VI-4

Variation de la contrainte selon
differentes cotes

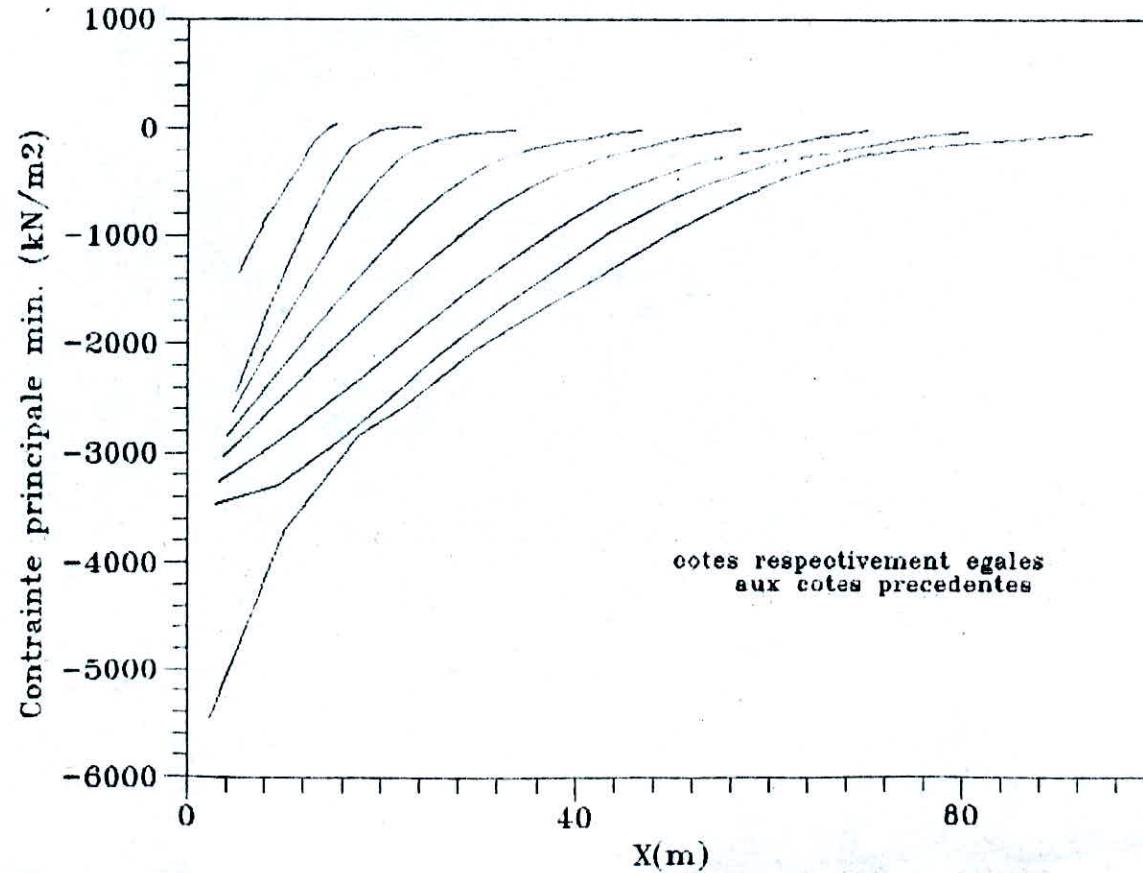


Fig VI.5

Variation de la contrainte selon
differentes cotes

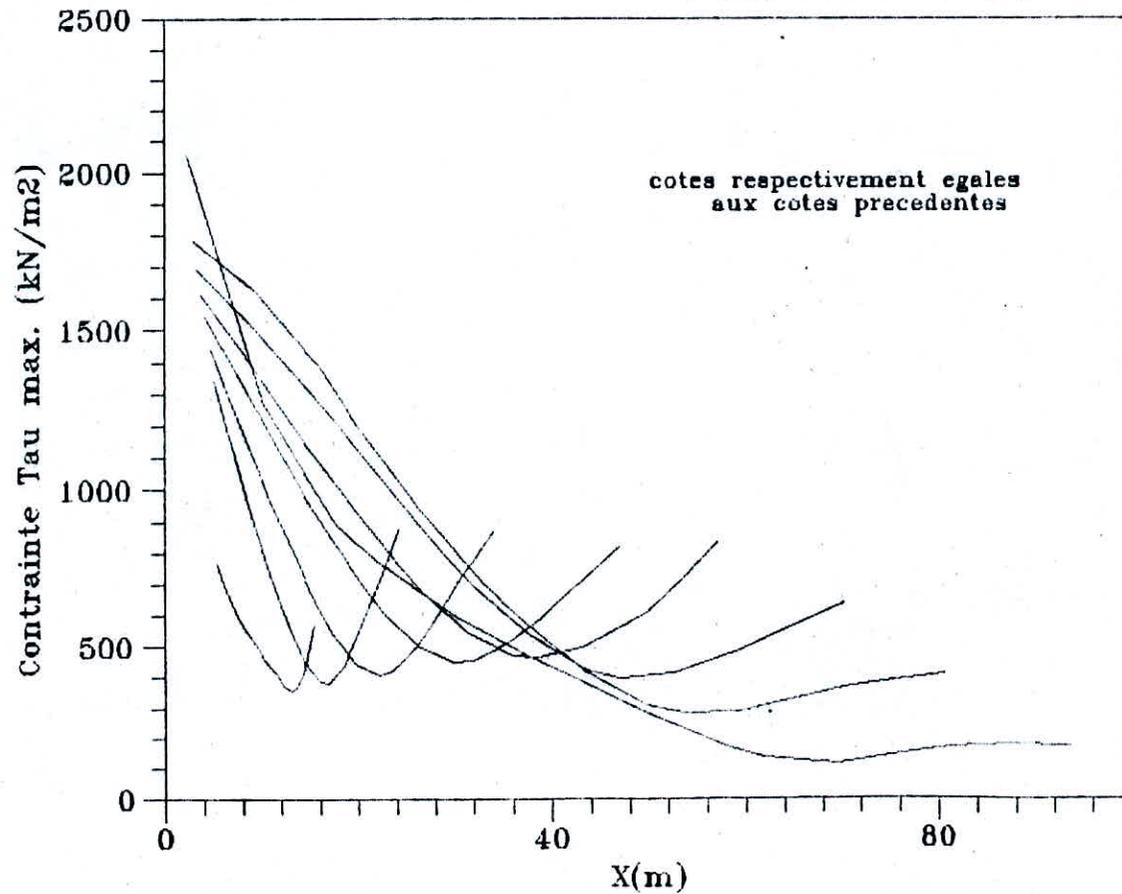


Fig VI-6

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=8.8$ m
(niveau 3)

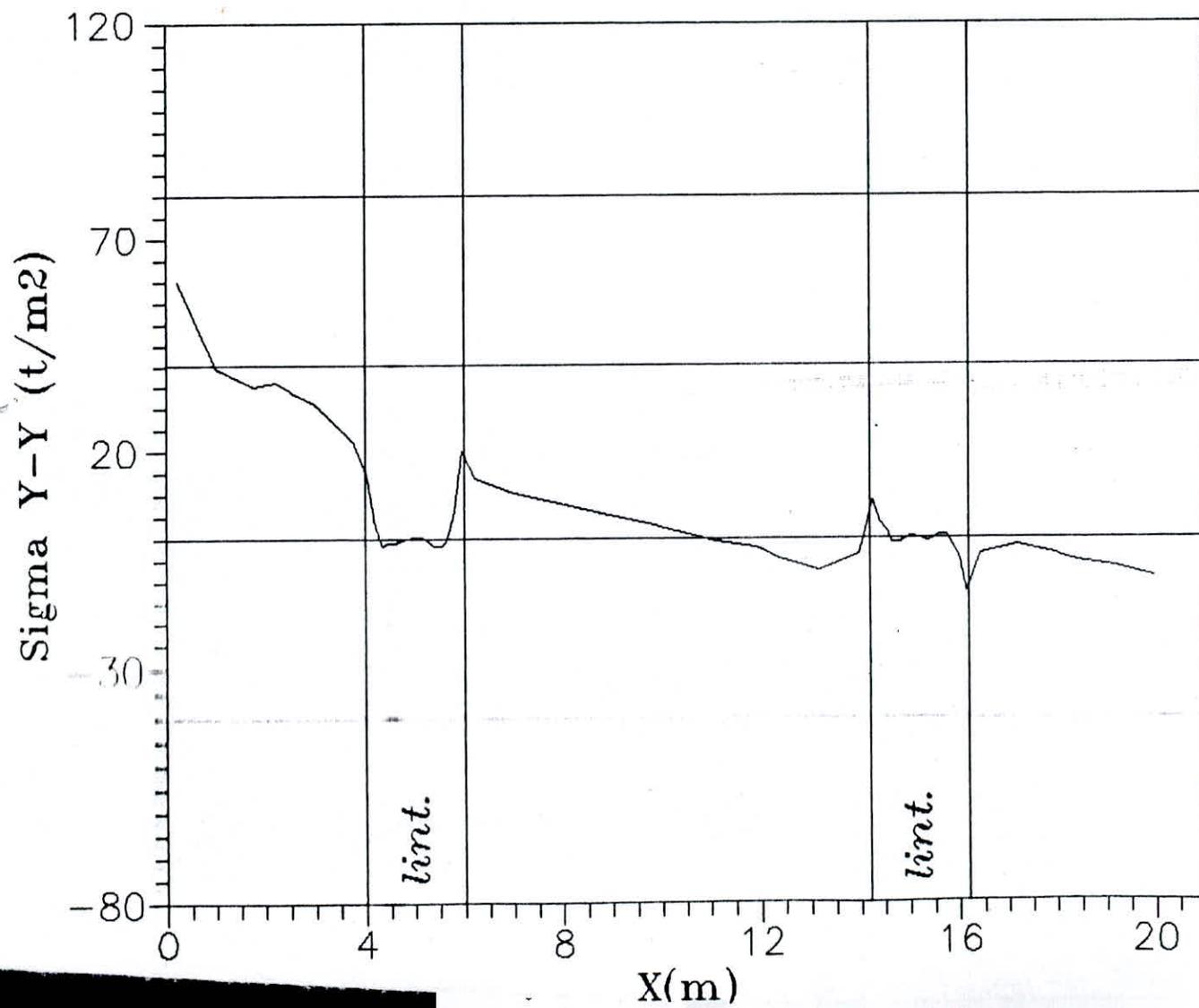


Fig II-14

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=9.2$ m
(niveau 3)

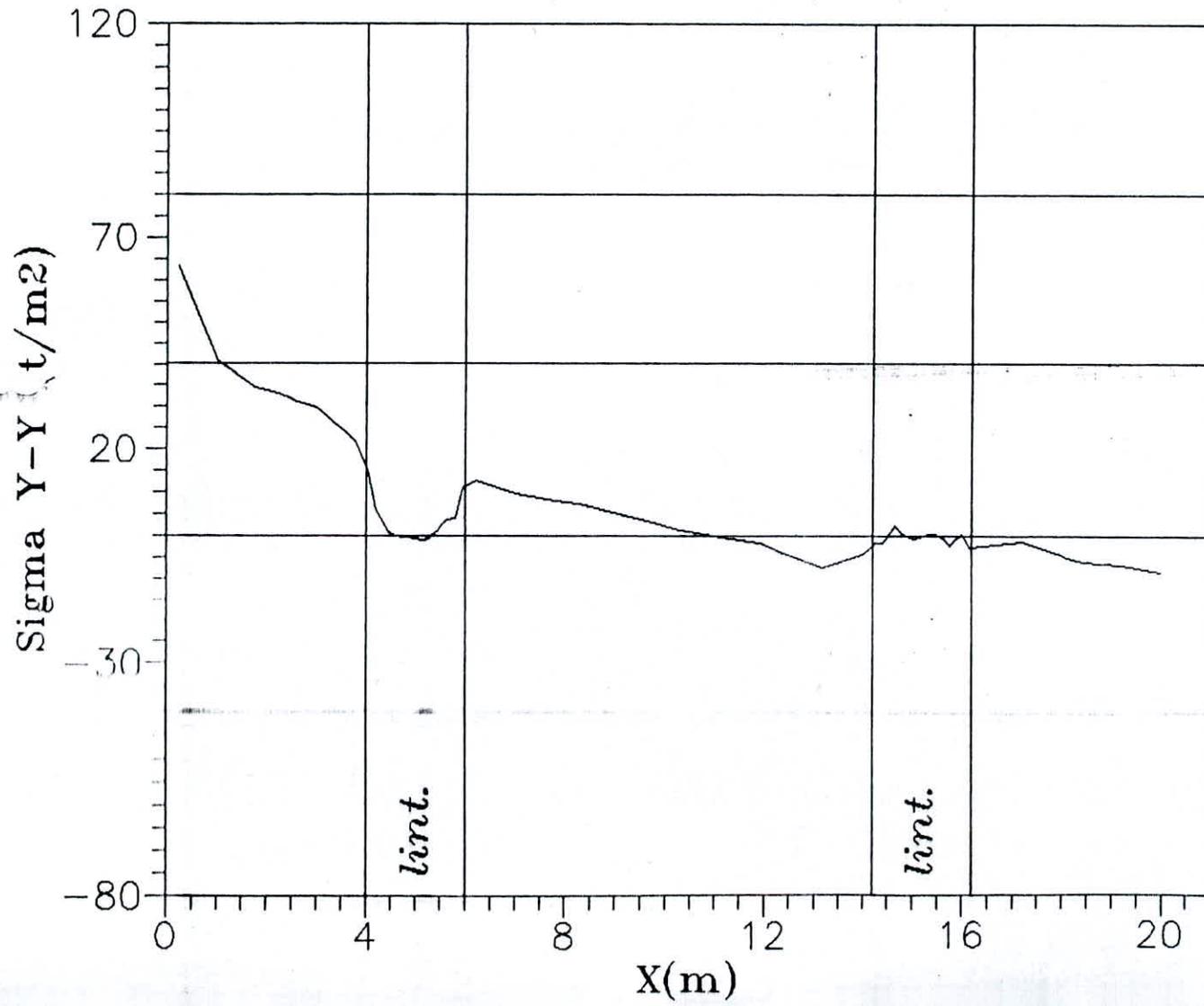


Fig E-15

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=9.6$ m
(niveau 3)

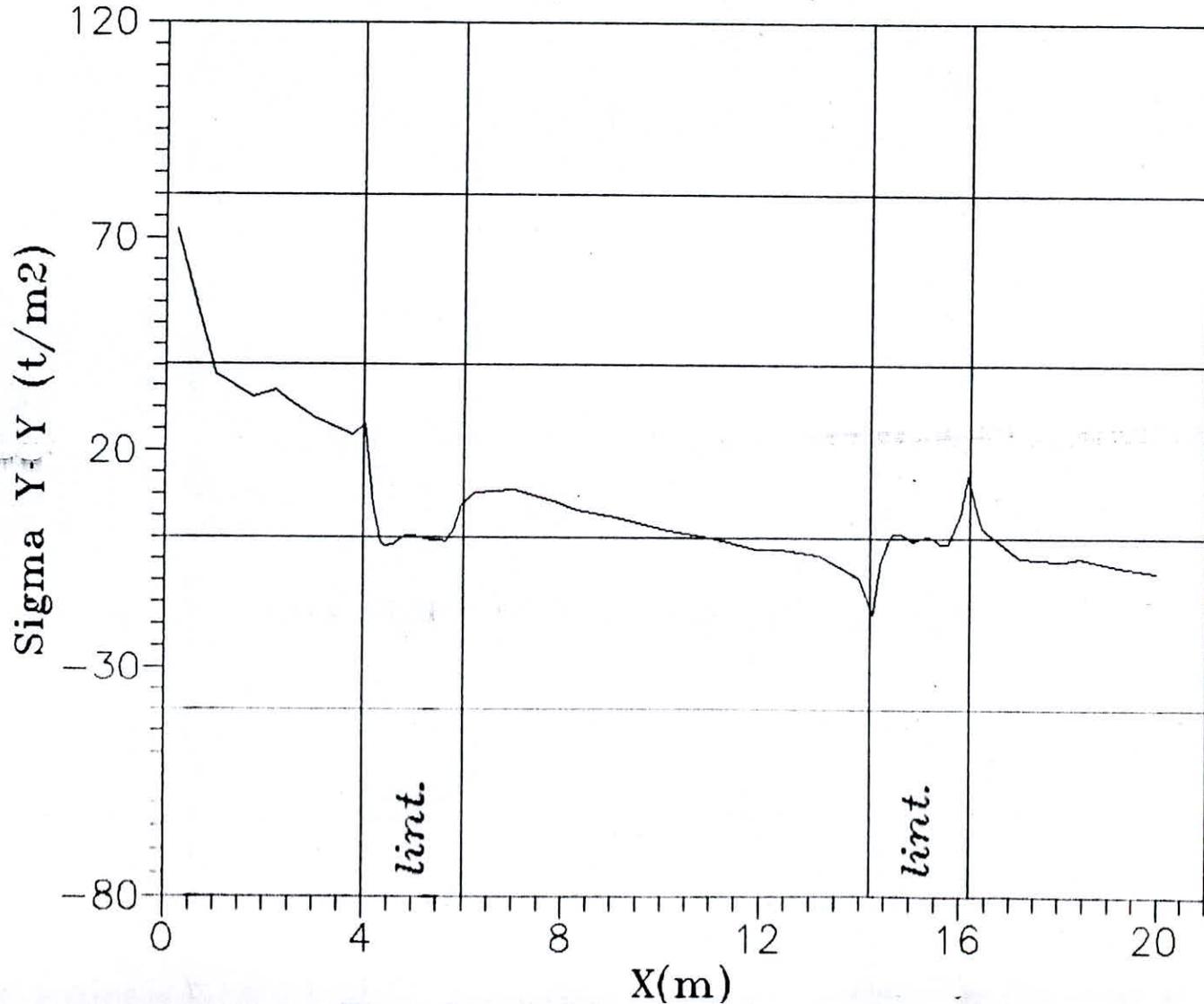


Fig E-16

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=8.8$ m
(niveau 3)

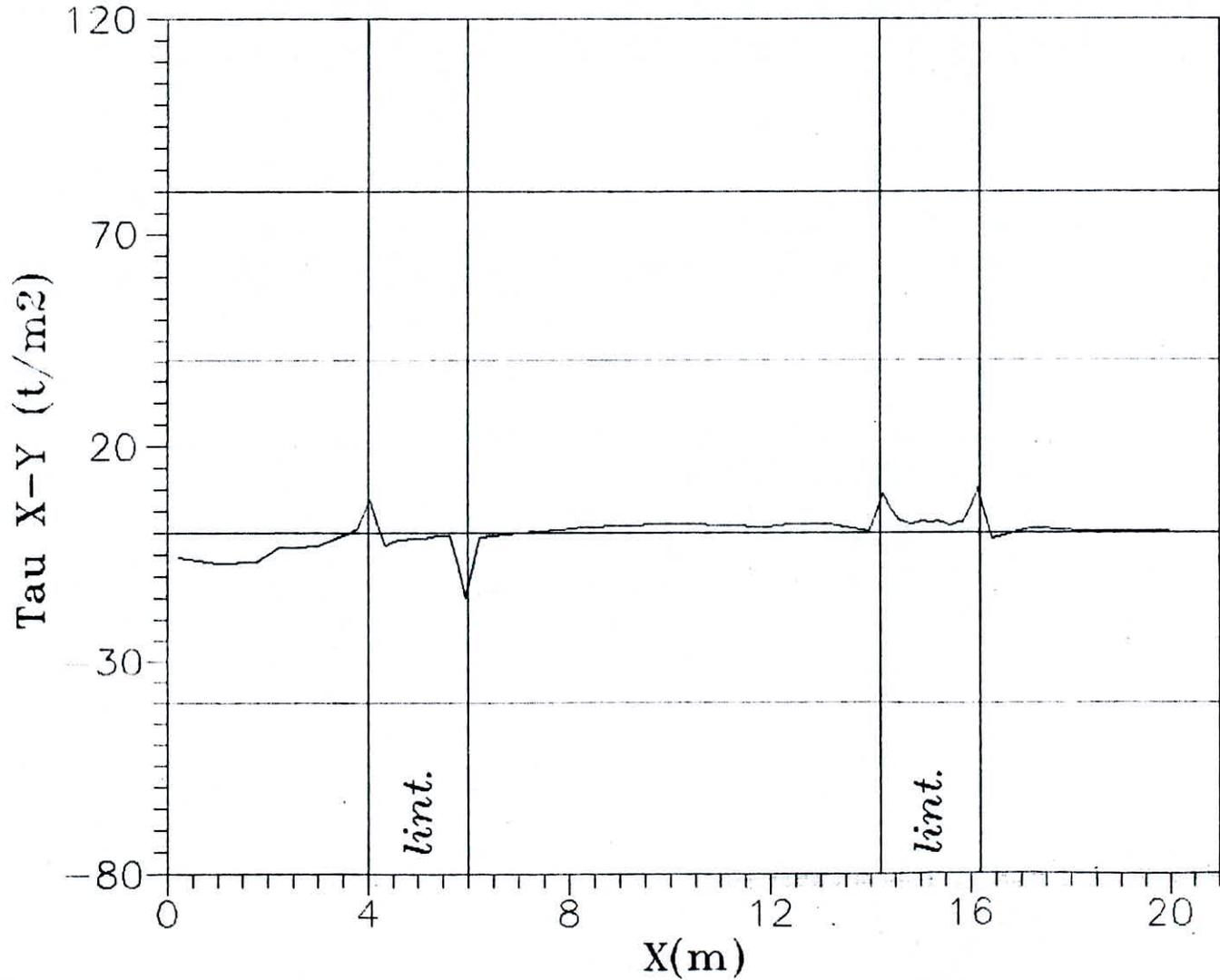


Fig. 17

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=9.2$ m
(niveau 3)

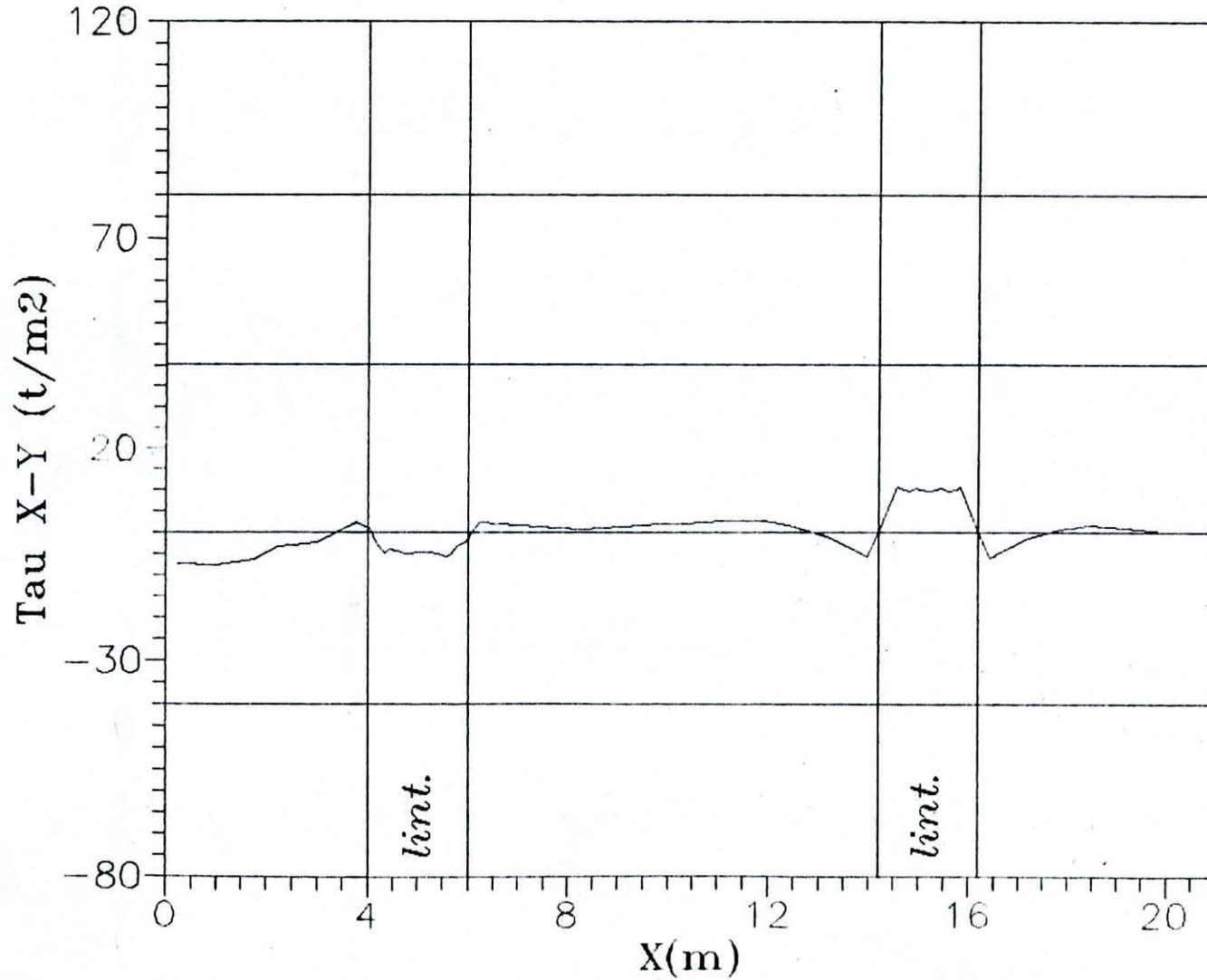


Fig I 18

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=9.6$ m
(niveau 3)

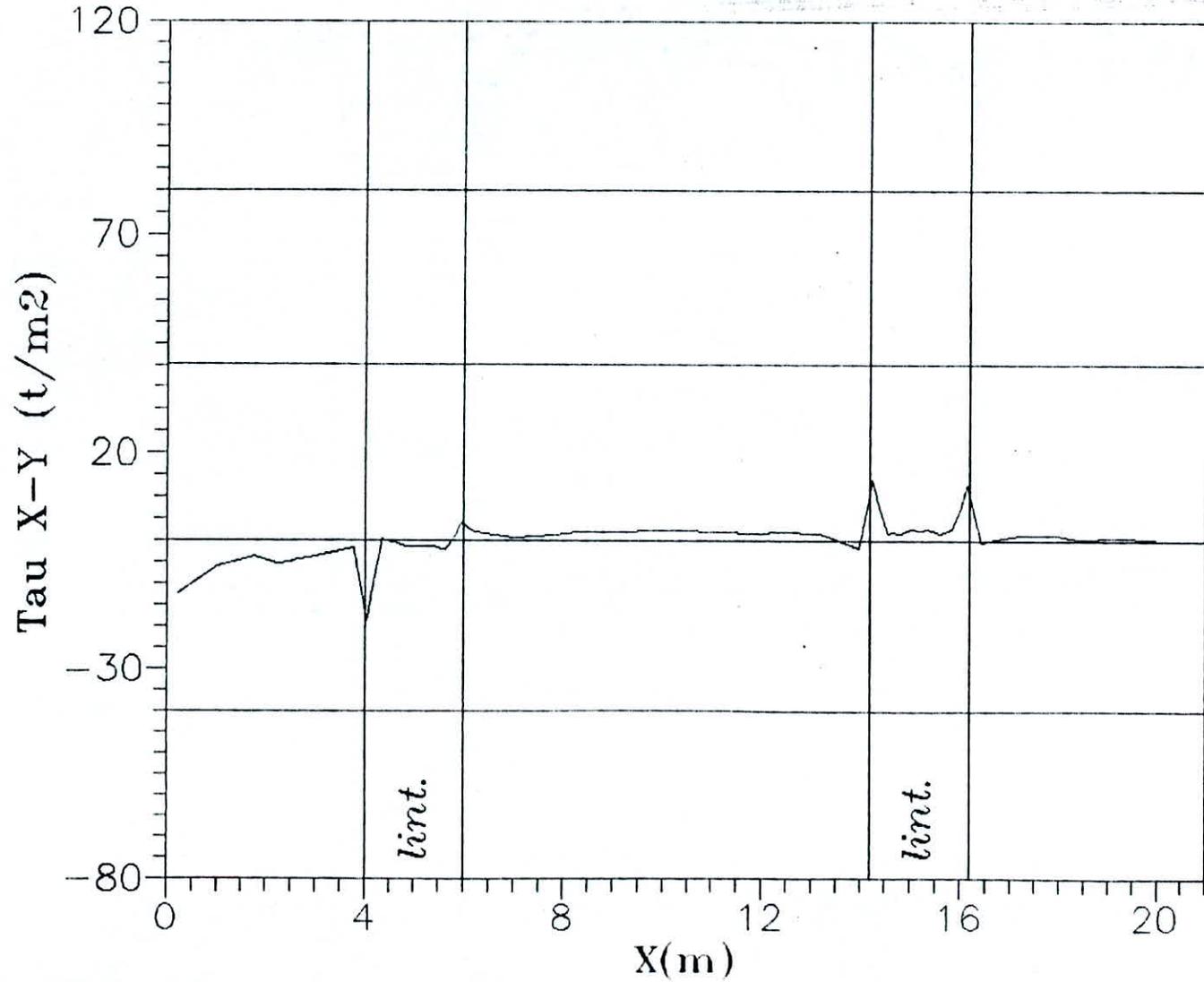
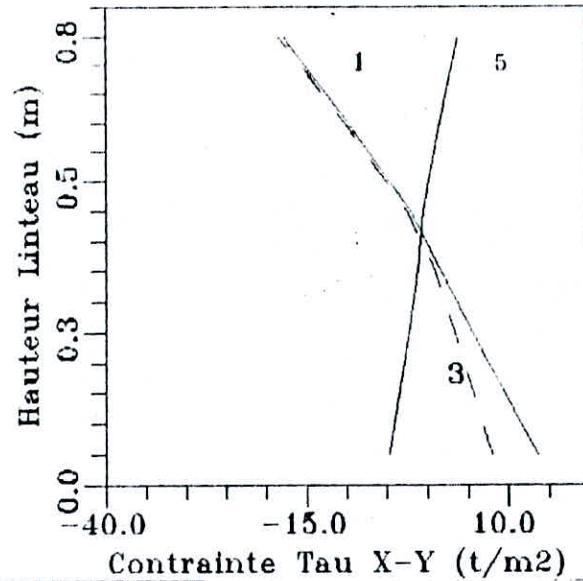


Fig V-19

Variation de la contrainte
le long des encastrement
des linteaux



1 : linteau niveau 1
3 : // // 3
5 : // // 5
(encastrement gauche)
 $x = 4m$

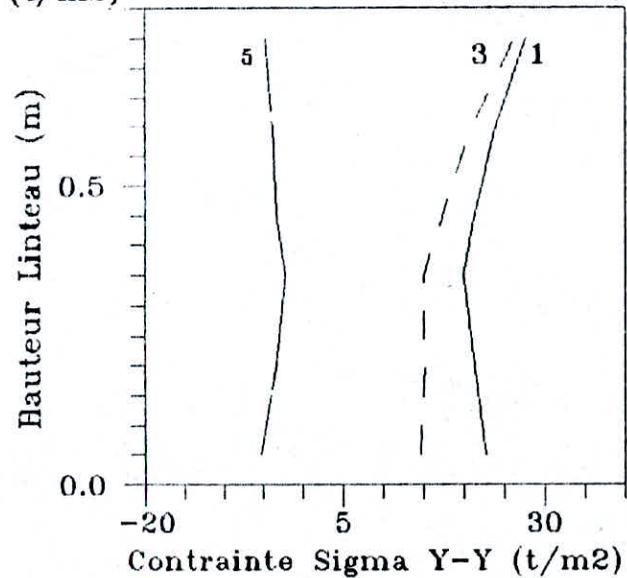
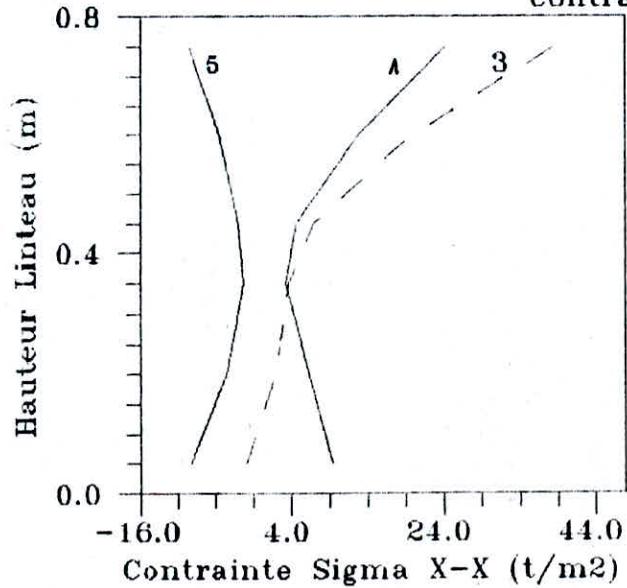


Fig I 20

VI ETUDE D'UN BARRAGE

Il s'agit d'un barrage poids en béton armé soumis à différents chargements .

Le barrage a les caractéristiques suivantes :

H_B = hauteur totale : 122 m

w_m = poids volumique du béton : 24.30 kN/m³

E_m = module d'élasticité : 20.5 10⁶ kN/m²

ν = coefficient de poisson : 0.3

VI-1 HYPOTHESES GEOMETRIQUES

* CALCUL BI OU TRIDIMENSIONNEL :

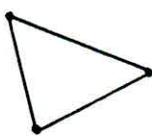
Il est évident que le barrage avec sa fondation est un objet tridimensionnel.

Théoriquement , un calcul tridimensionnel est toujours préférable, mais le prix d'un tel calcul étant 5 à 15 fois supérieur (ou plus) à celui du calcul approché bidimensionnel .

Le bulletin N°30 de la commission internationale des grands barrages illustre ce problème par l'exemple suivant où l'on compare deux types de maillage en bi et tridimensionnel.

-calcul 1 correspond aux simples éléments triangulaires linéaires.

-calcul 2 correspond aux éléments paraboliques isoparamétriques conduisant a une précision presque identique.

			
2 dim	Nbre des noeuds	500	100
	Nbre de d.d.l	2x500	2x100
3 dim	Nbre des noeuds	20x500	6x100
	Nbre de d.d.l	3x20x500	3x6x100

contrainte est toujours sur le parement en amont et que la zone des plans principaux a augmentée .

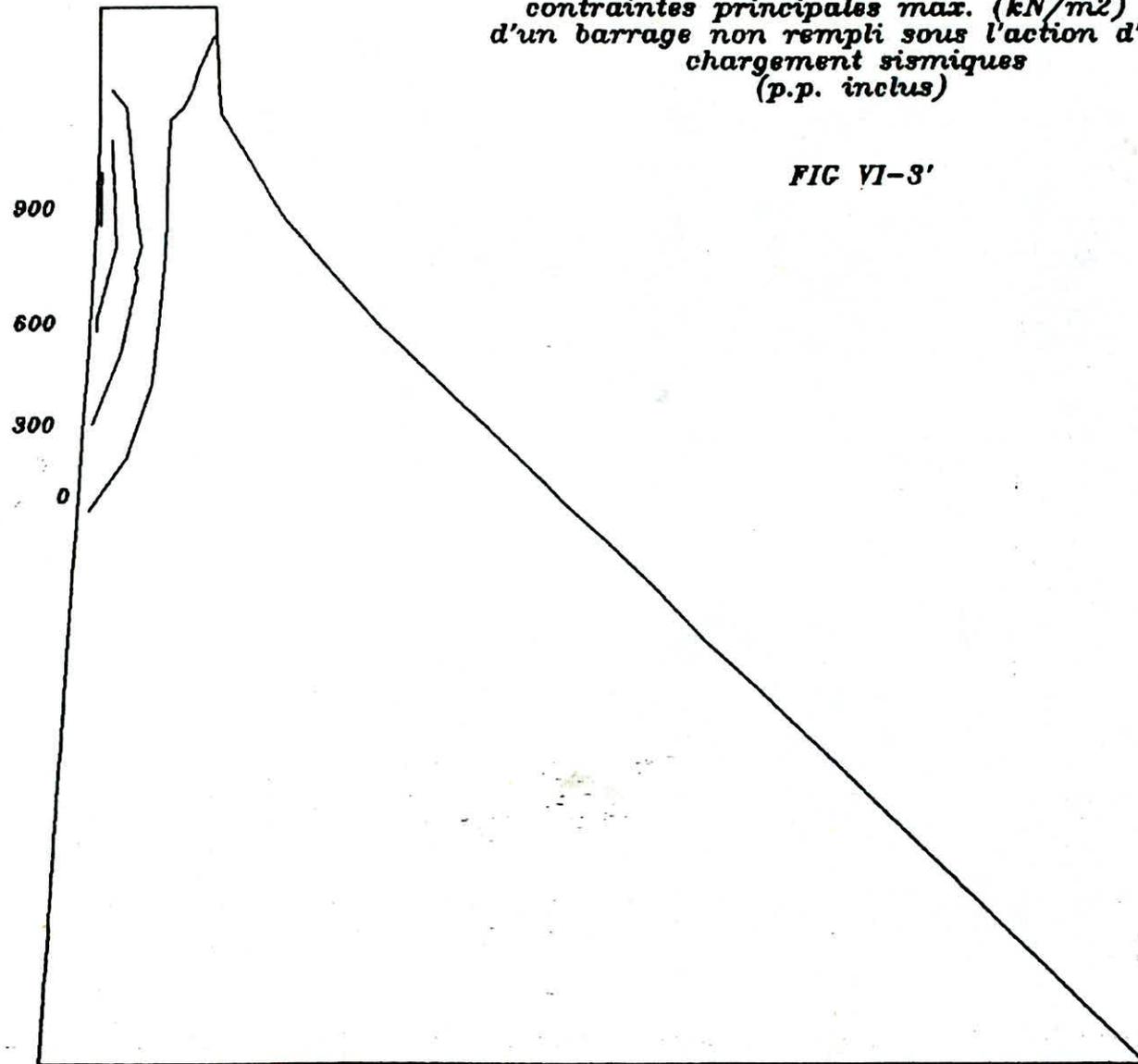
Nous avons tracé également l'évolution de σ_y le long de différentes côtes (fig.VI-8) vu qu'elle sert à connaître le taux de travail du béton .

On remarque une contrainte presque nul au pied amont , par contre au pied aval on observe une compression .

En conclusion , nous pourrions dire que le barrage du fait de sa forme ainsi que de son poids assez important , possède un comportement assez complexe .

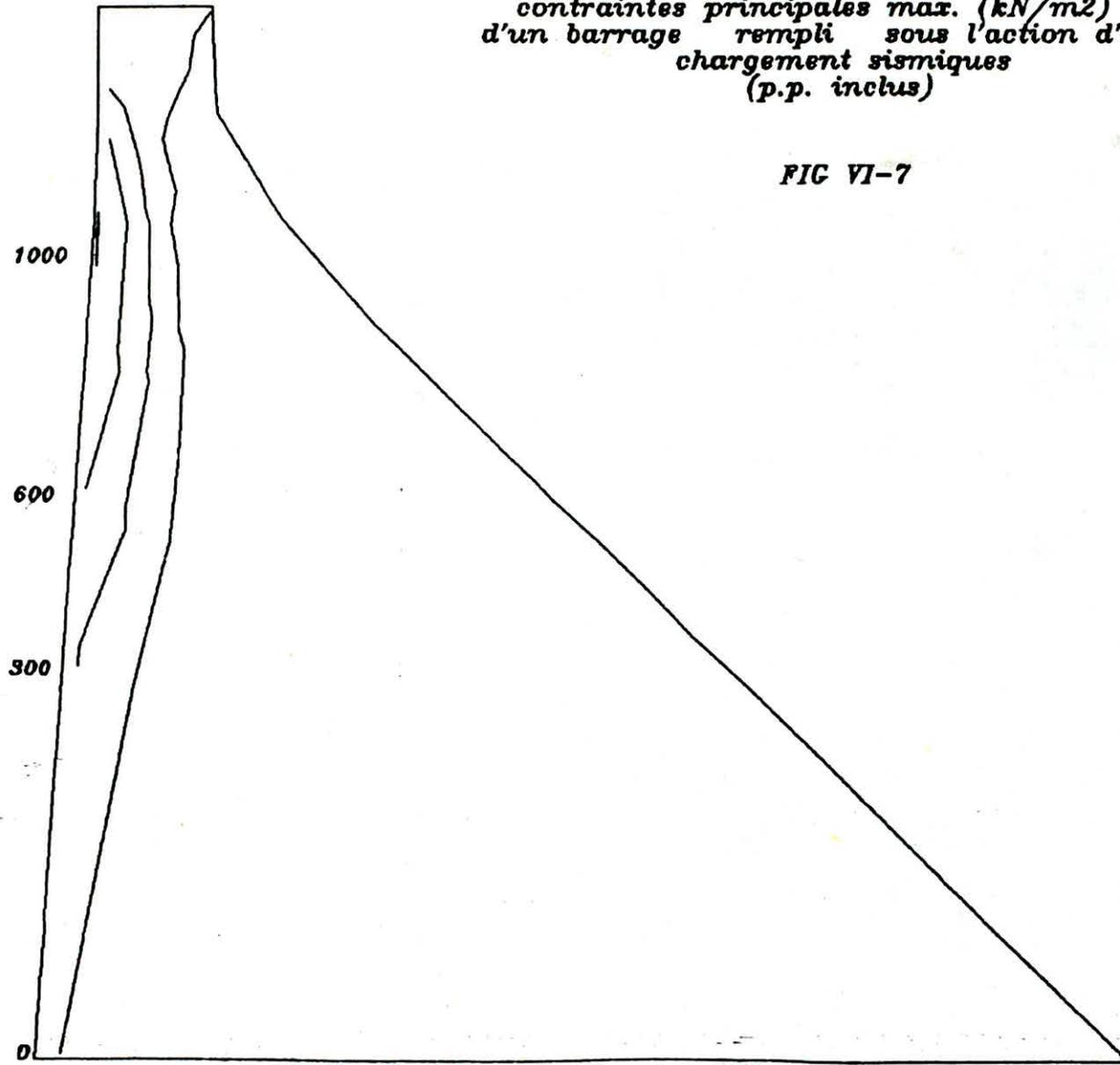
*contraintes principales max. (kN/m²)
d'un barrage non rempli sous l'action d'un
chargement sismiques
(p.p. inclus)*

FIG VI-3'

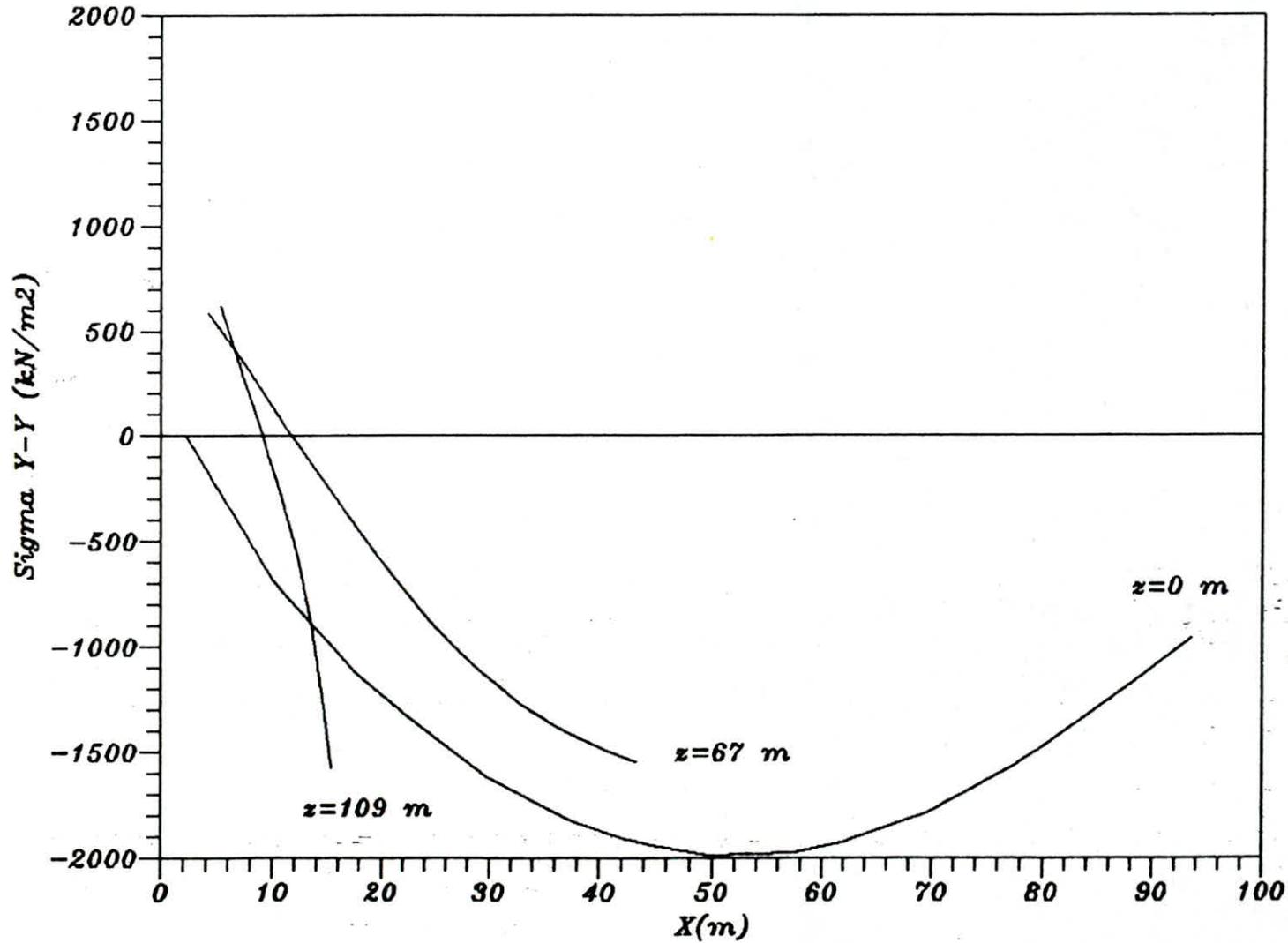


contraintes principales max. (kN/m²)
d'un barrage rempli sous l'action d'un
chargement sismiques
(p.p. inclus)

FIG VI-7



variation de la contrainte $\Sigma Y-Y$ (kN/m^2)
selon différentes cotes
FIG VI-8



CONCLUSION

L'étude qui a été fait dans ce projet nous a permis de constater l'avantage de l'utilisation de l'éléments isoparamétriques vu sa précision ainsi que son aptitude de s'adapter à n'importe quel contour .

Comme il est à noter la possibilité de traiter diverses applications qui n'auraient pas pu être étudiier par les méthodes classiques ou bien deviendraient trop laborieuses par la théorie de l'Elasticité ,de ce fait la méthode des éléments finis s'avère un outil très puissant .

A travers les applications considérées, on pu constater le comportement complexe de structures tels les voiles et les barrages .

ANNEXE

Vu le nombre assez important de graphes, il nous parut préférable d'en joindre certains d'entre eux en Annexe .

Nous avons donc :

voile:

-fig.A-1 ,A-2,A-3 Evolution de σ_x le long des linteaux (2) et (2') .

-fig.A-4,A-5 : Problème de FLAMANT (θ (rd) en abscisse)

-fig.A-6 à A-14 : Evolution de σ_y du voile.

-fig.A-15 : Evolution de τ_{xy} le long du premier encastrement ($x=4$ m).

barrage:

-fig.7' : 4^{cas} cas, forces d'inerties et hydrodynamique de sens opposé .

-fig.8 et 9 : variations des contraintes σ_x et τ_{xy} du 3^{cas} cas .

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=5.6$ m
(niveau 2)

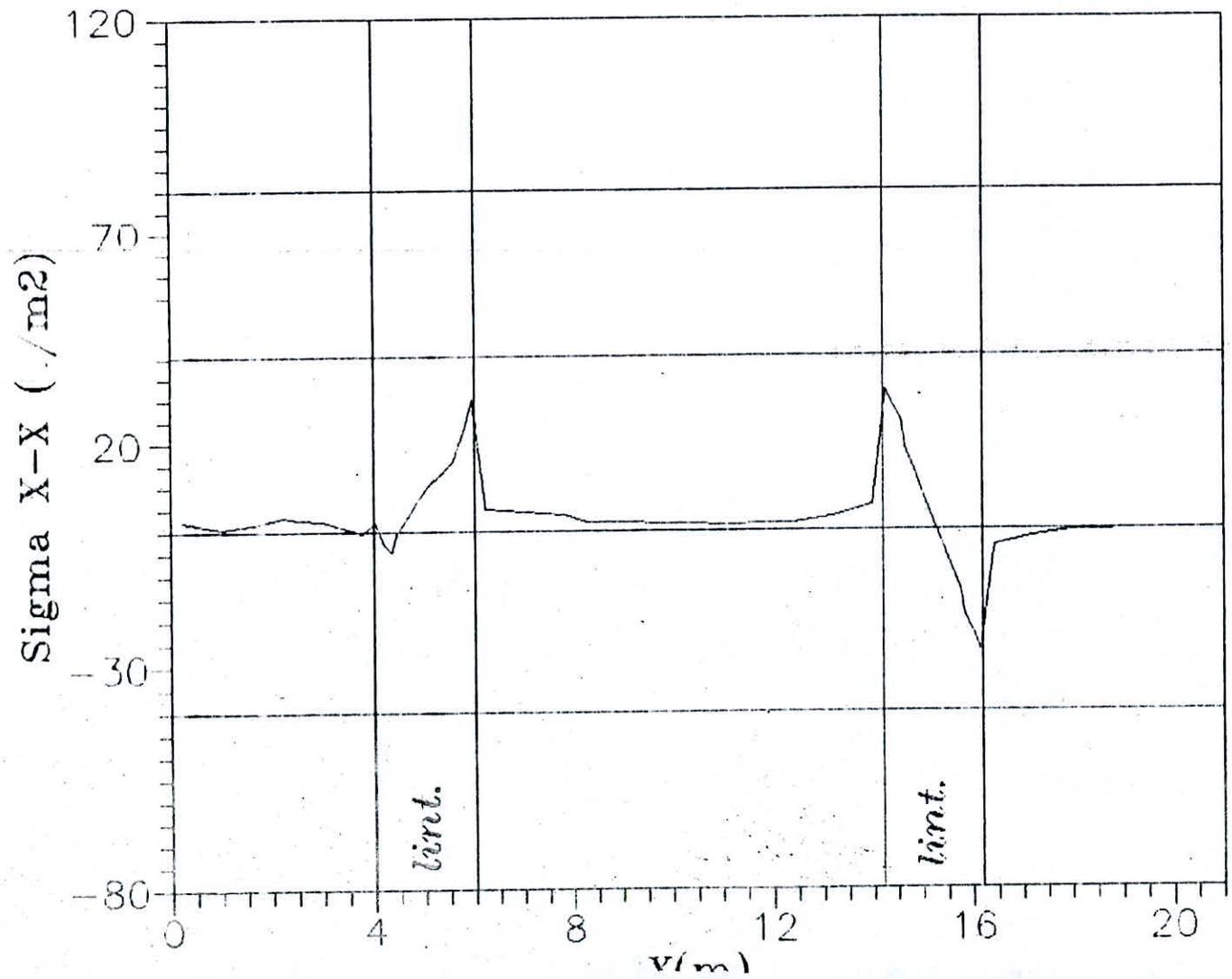


Fig A4

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=6.0$ m
(niveau 2)

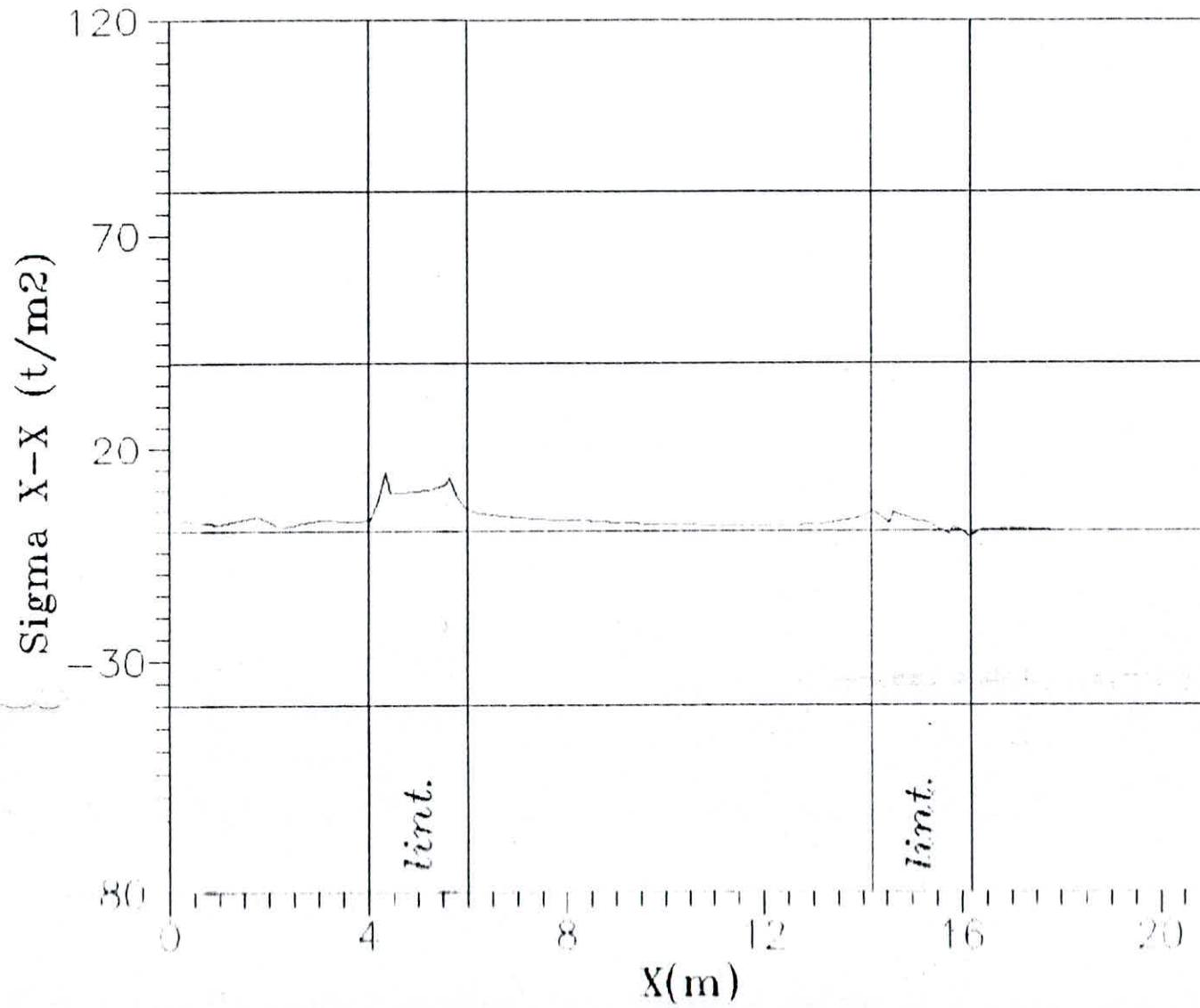


Fig A2

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=6.4$ m
(niveau 2)

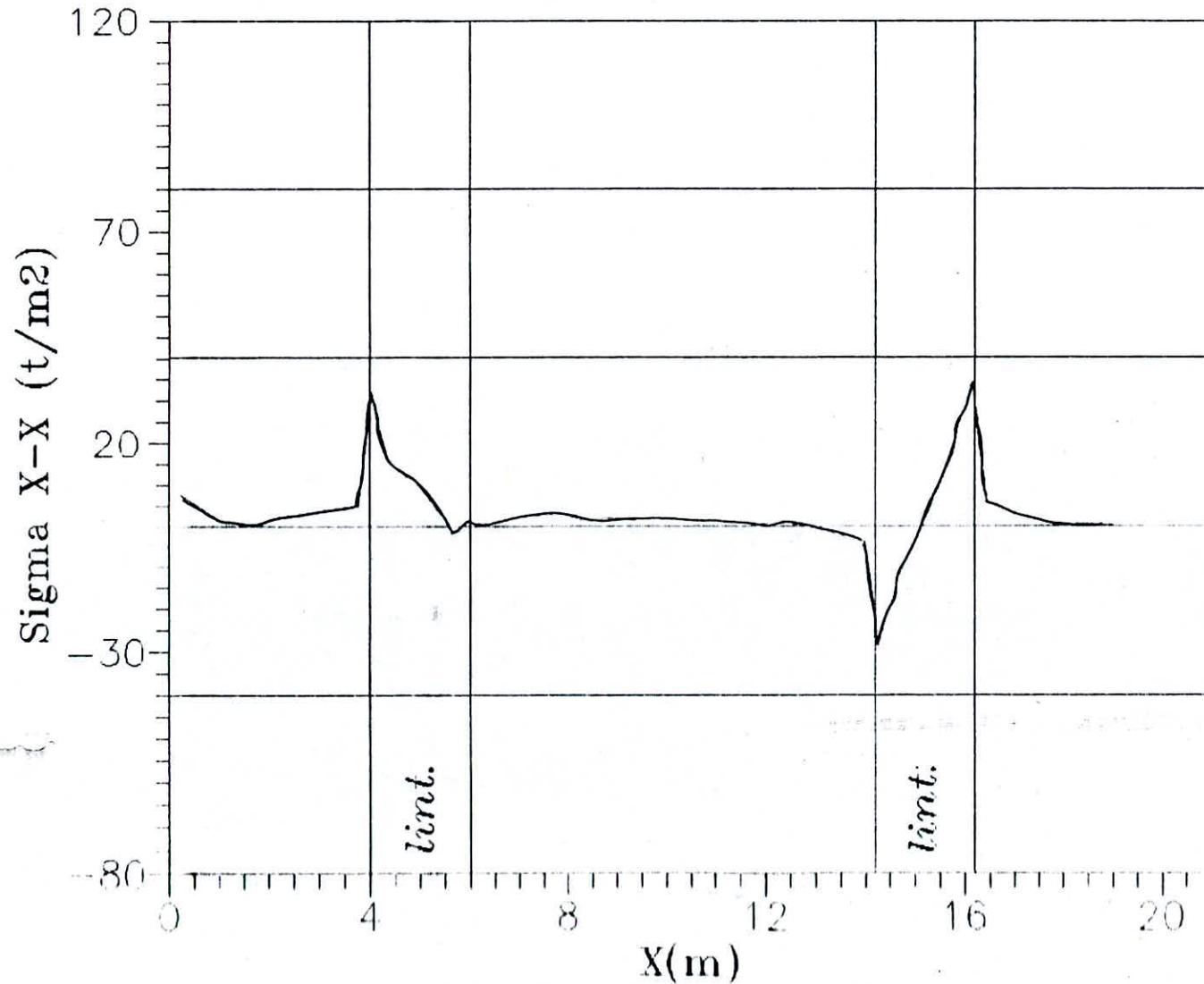


Fig A3

Contrainte Sigma X-X Normee

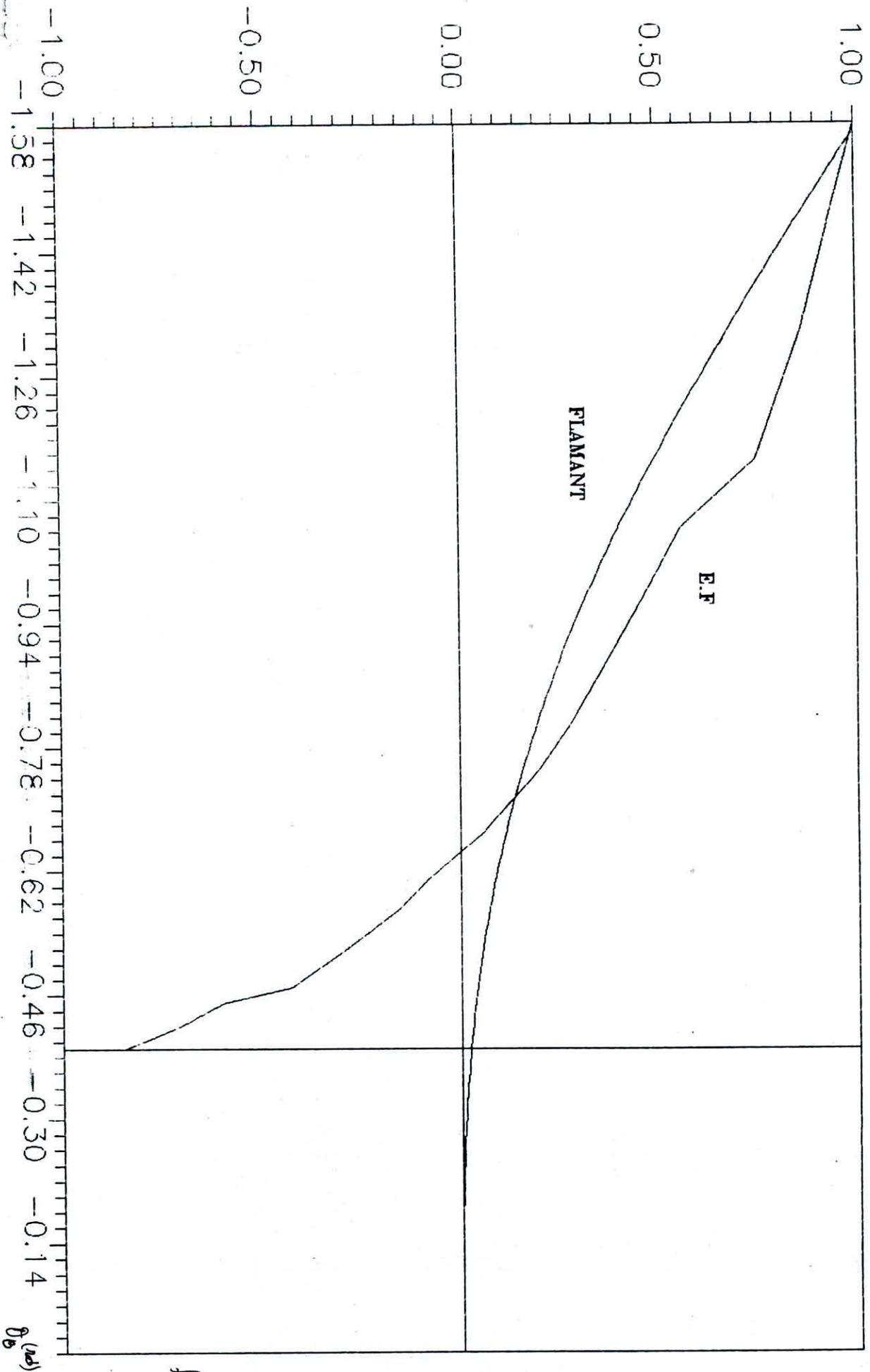


Fig A4

Contrainte Sigma X-X Normee

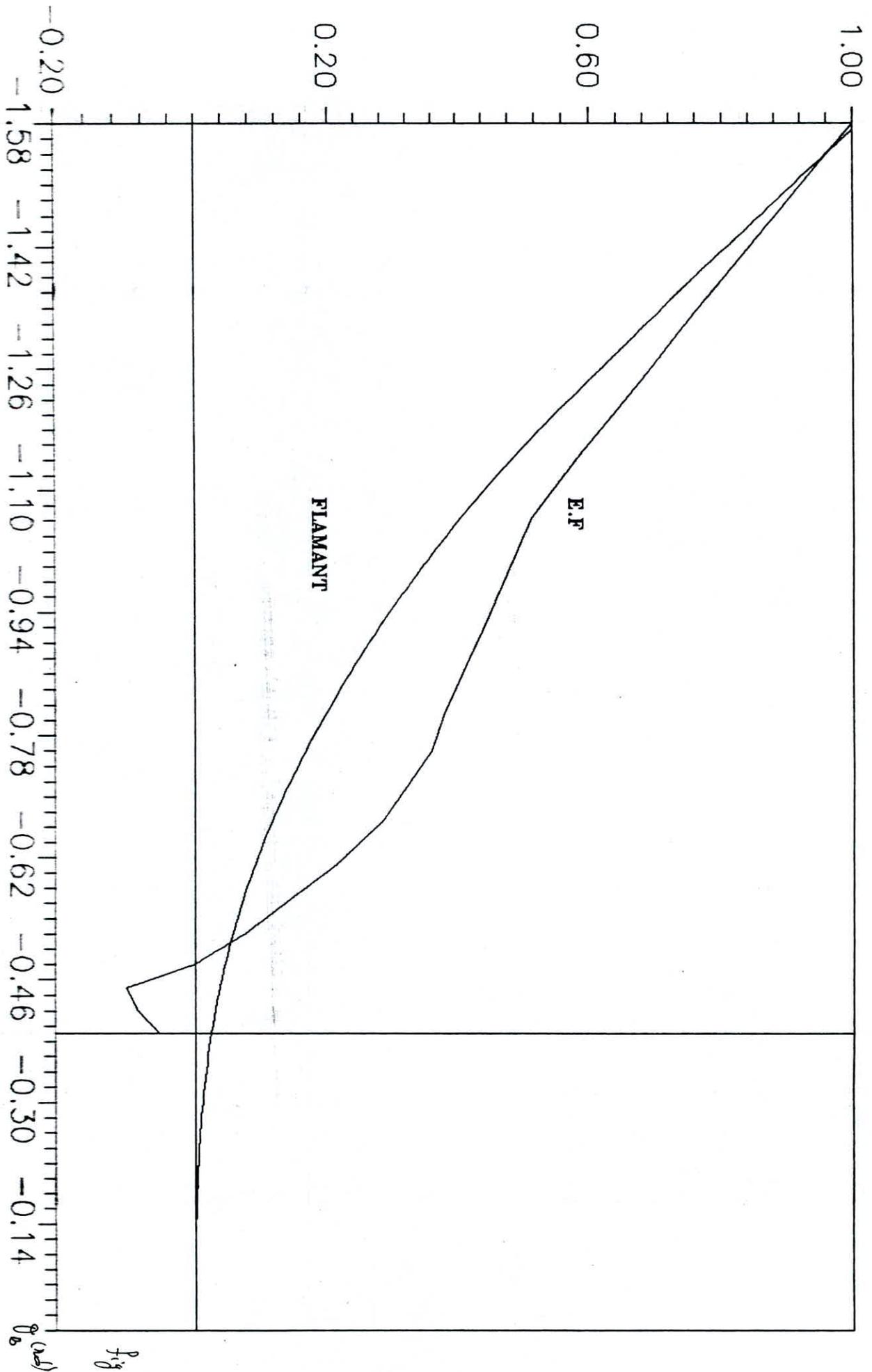


fig A5

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=2.4$ m
(niveau 1)

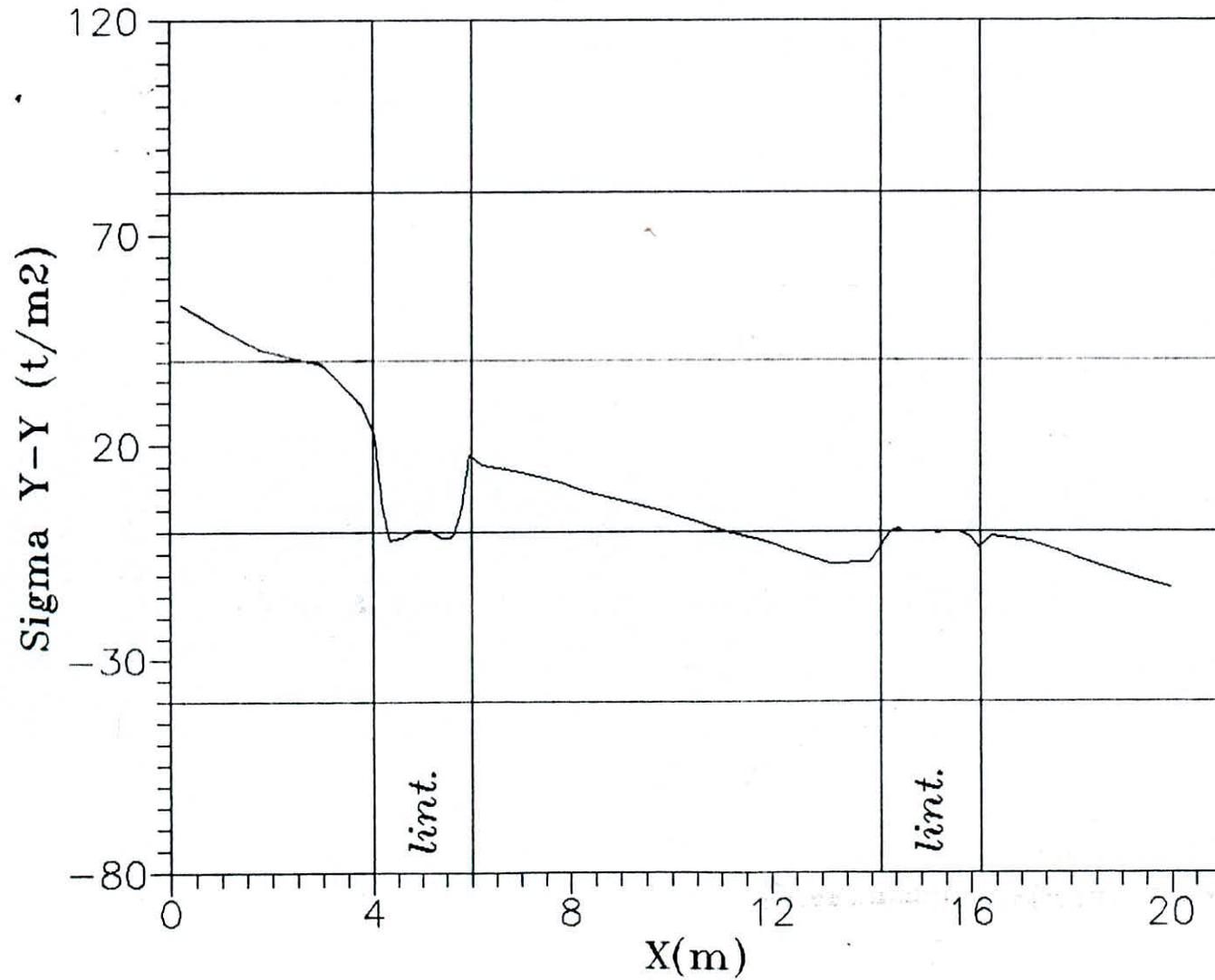


Fig A6

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=2.8$ m
(niveau 1)

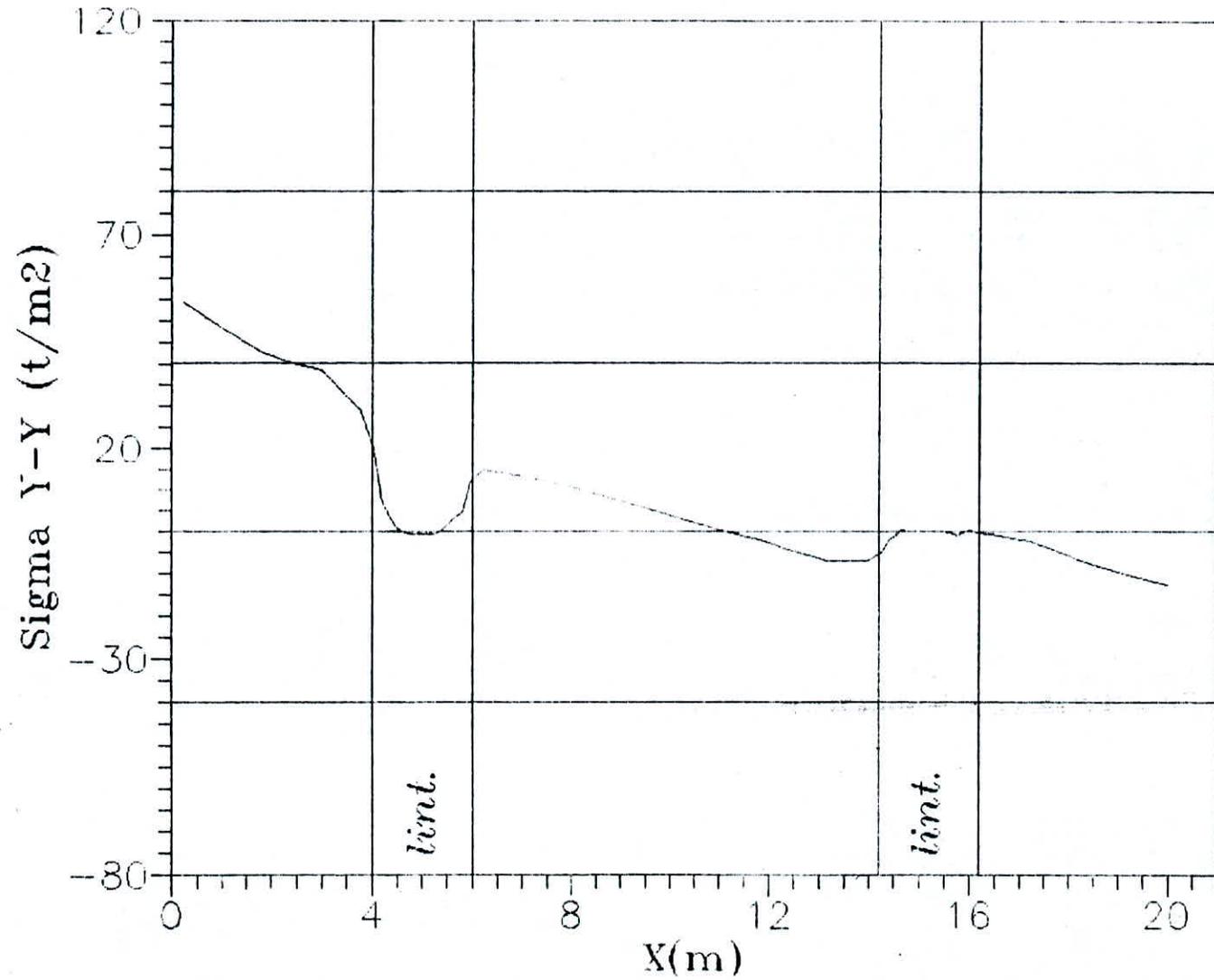
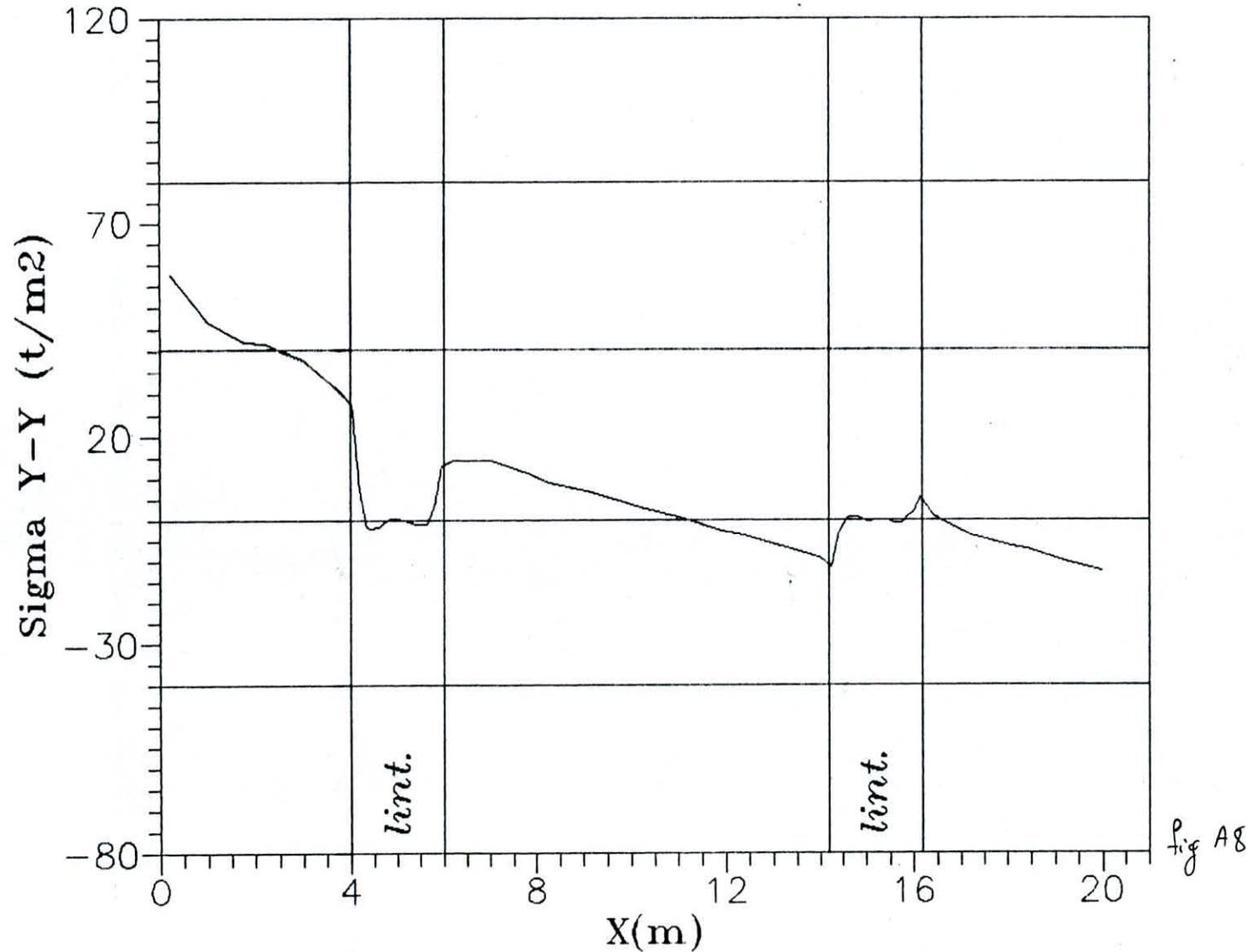


Fig A4

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=3.2$ m
(niveau 1)



Variation de la contrainte suivant
la cote $z=5.6$ m
(niveau 2)

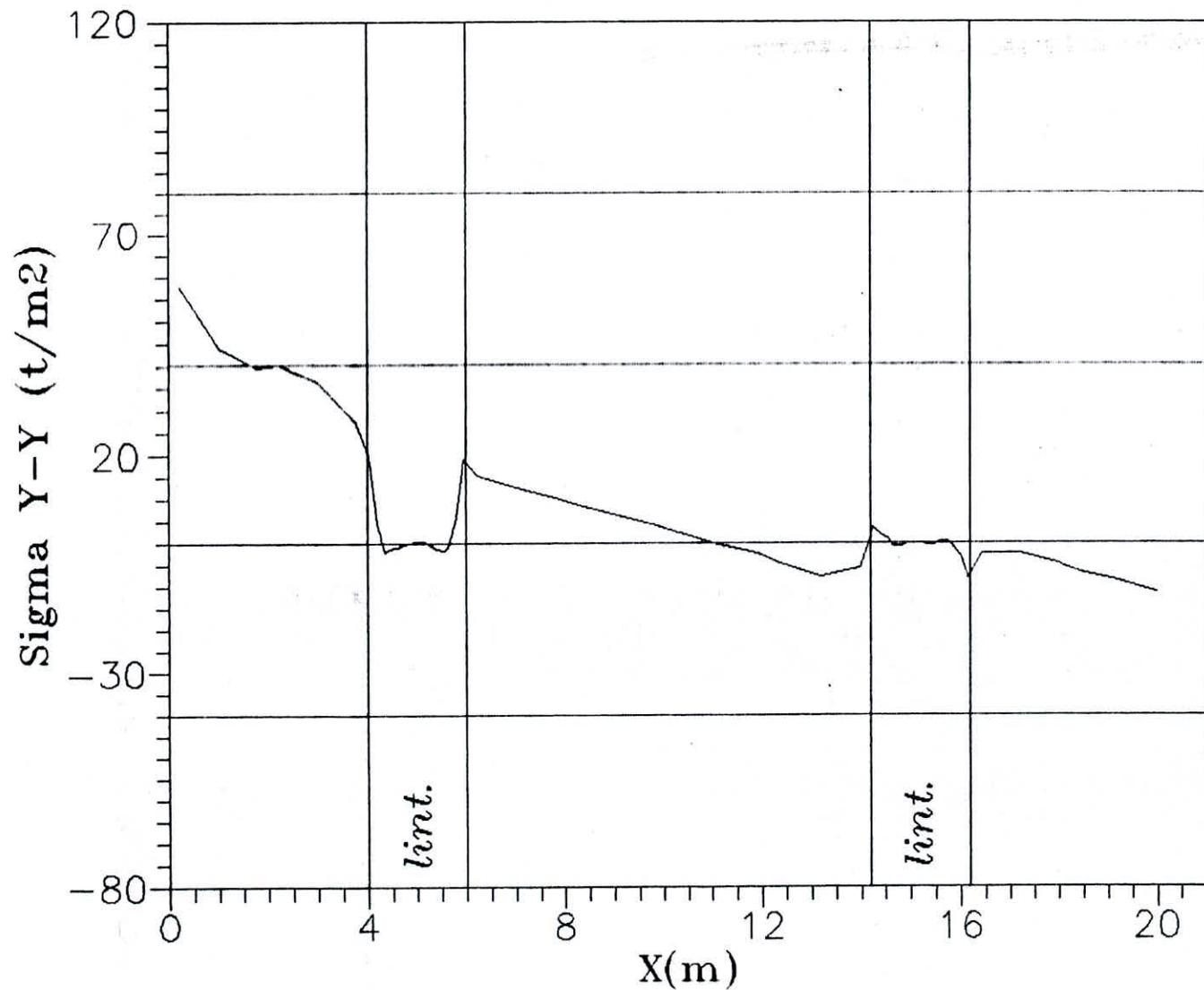


Fig A9

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=6.0$ m
(niveau 2)

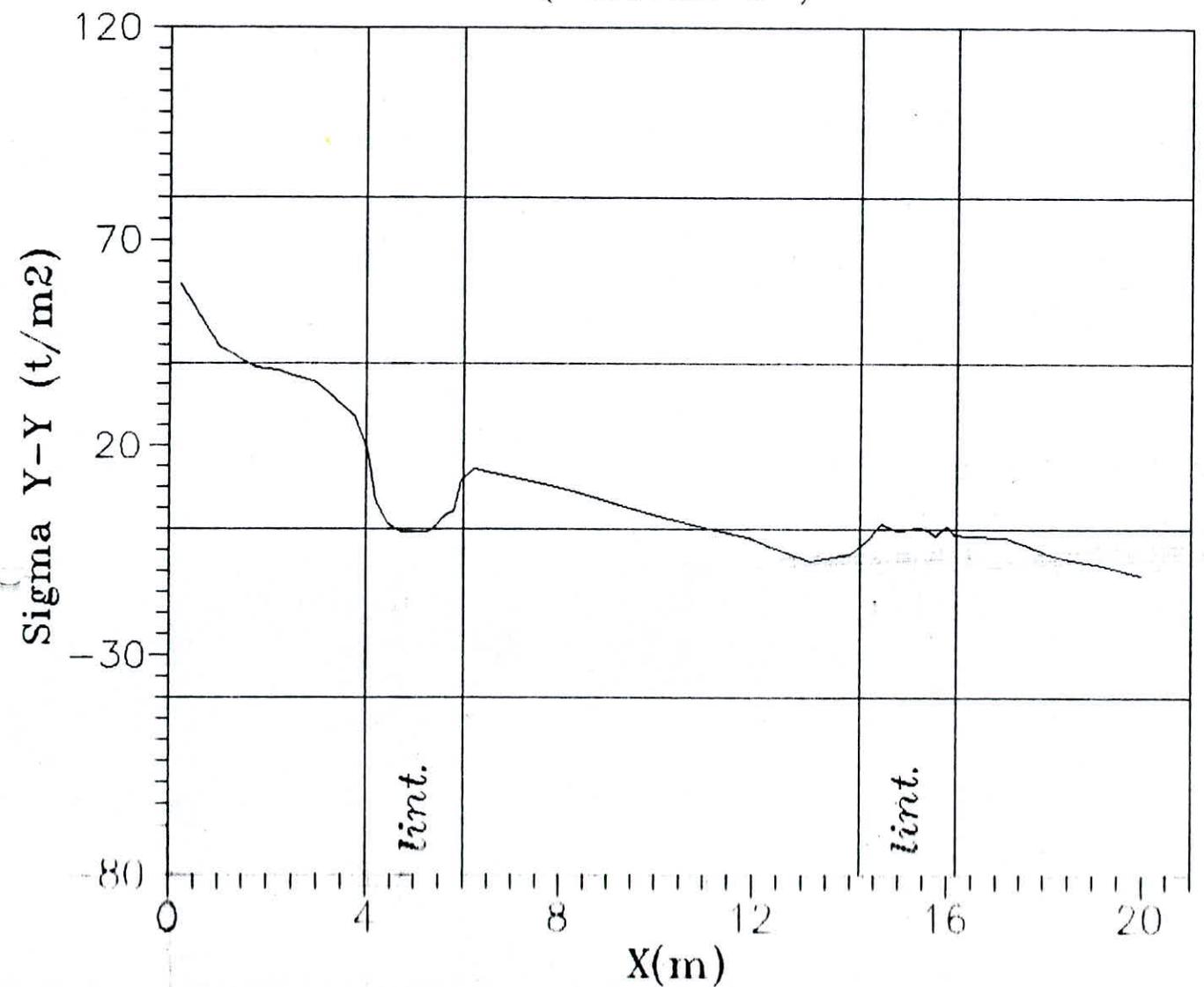


Fig A10

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=6.4$ m
(niveau 2)

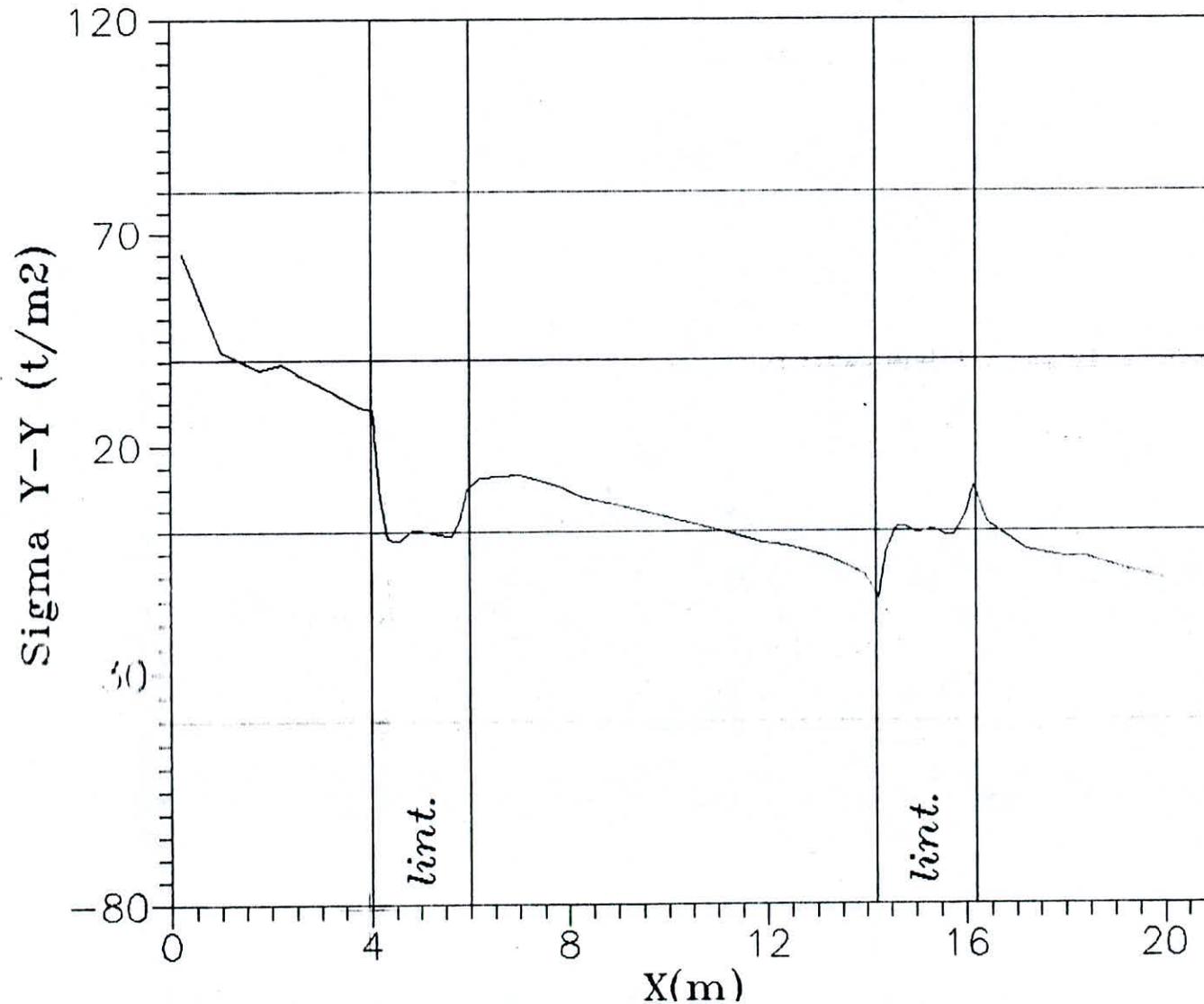


Fig A11

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=18.4$ m
(niveau 6)

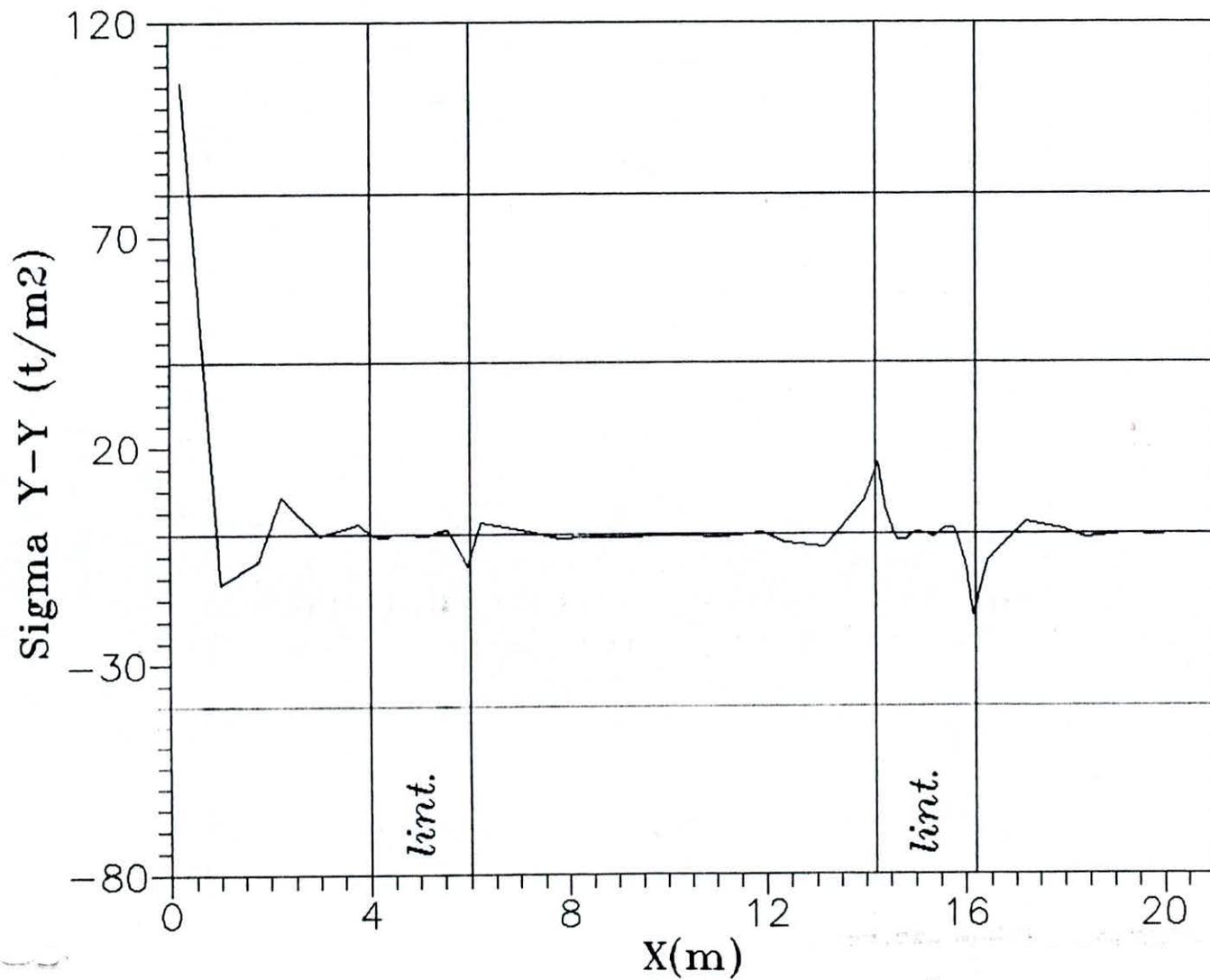


Fig A-13

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=18.8$ m
(niveau 6)

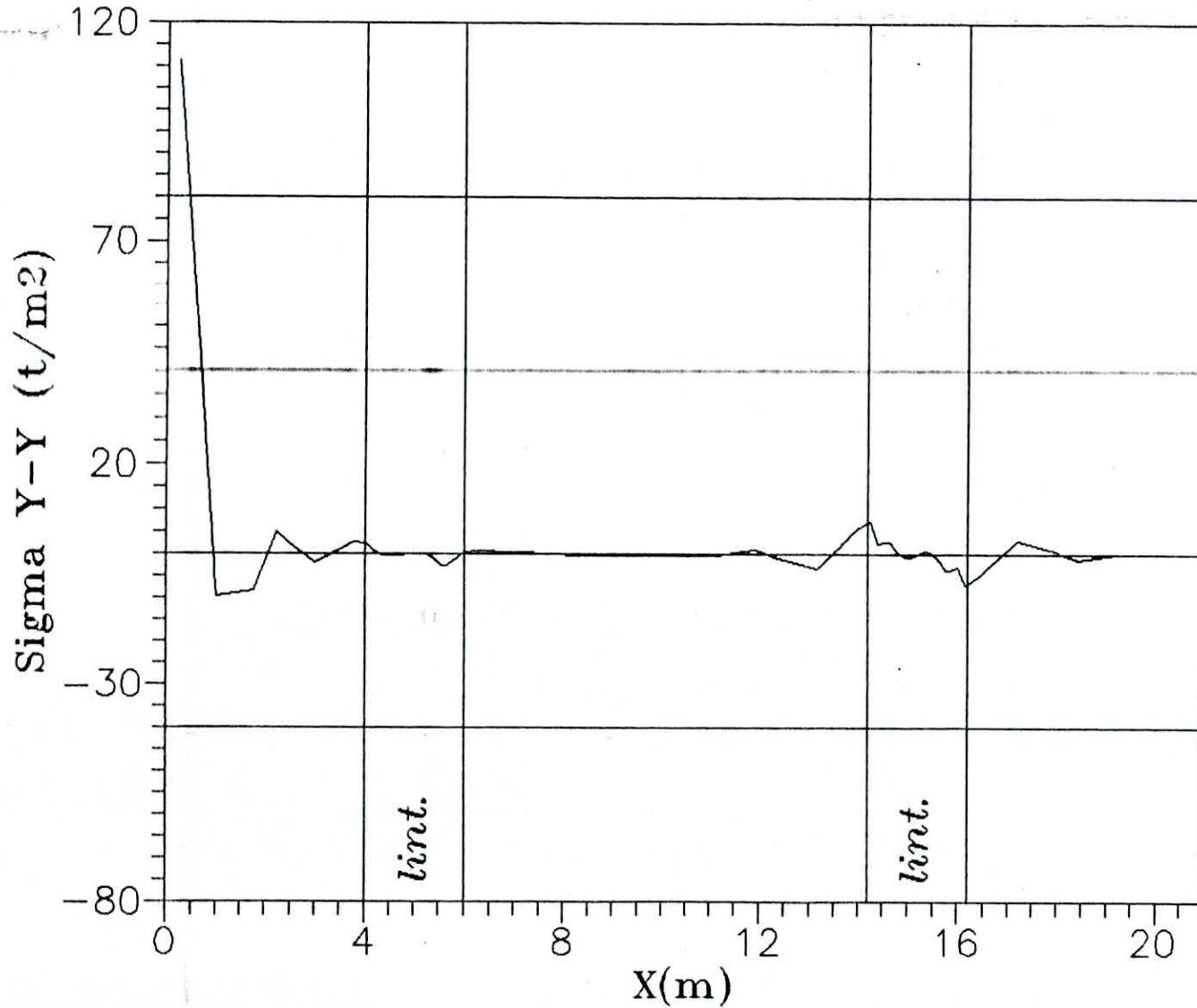


Fig A141

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=19.2$ m
(niveau 6)

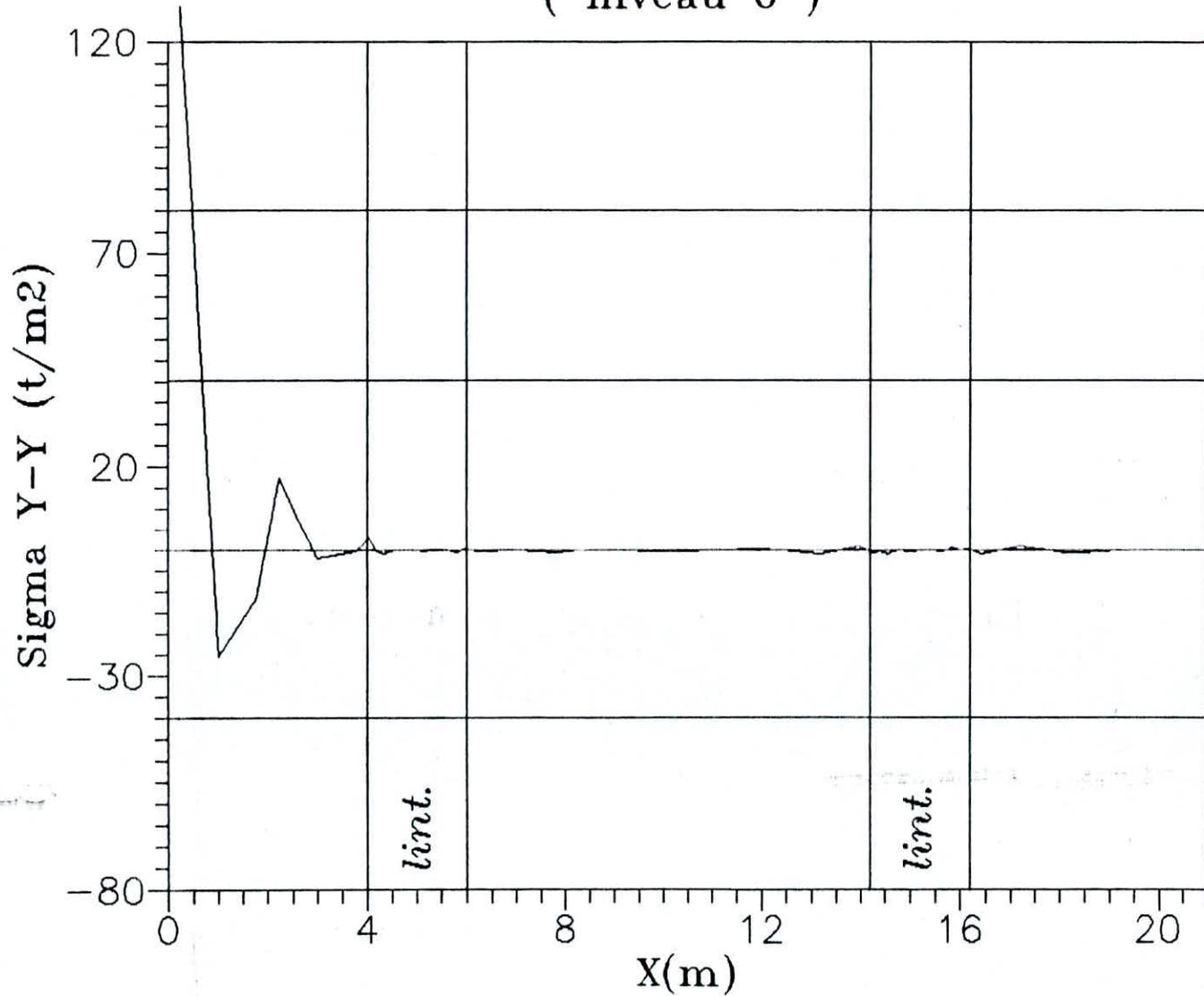


Fig A15

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=2.4$ m
(niveau 1)

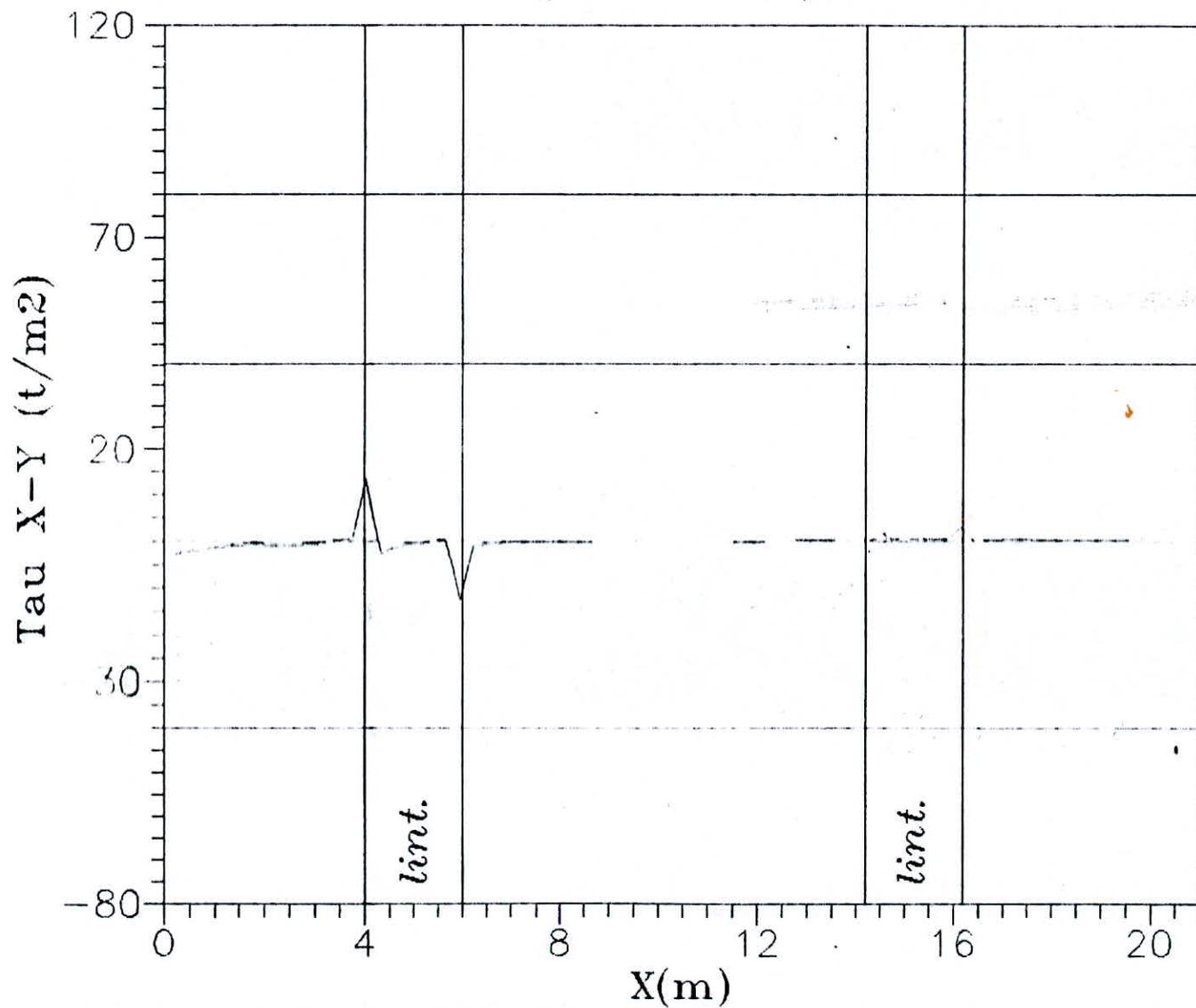


Fig A 16

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=2.8$ m
(niveau 1)

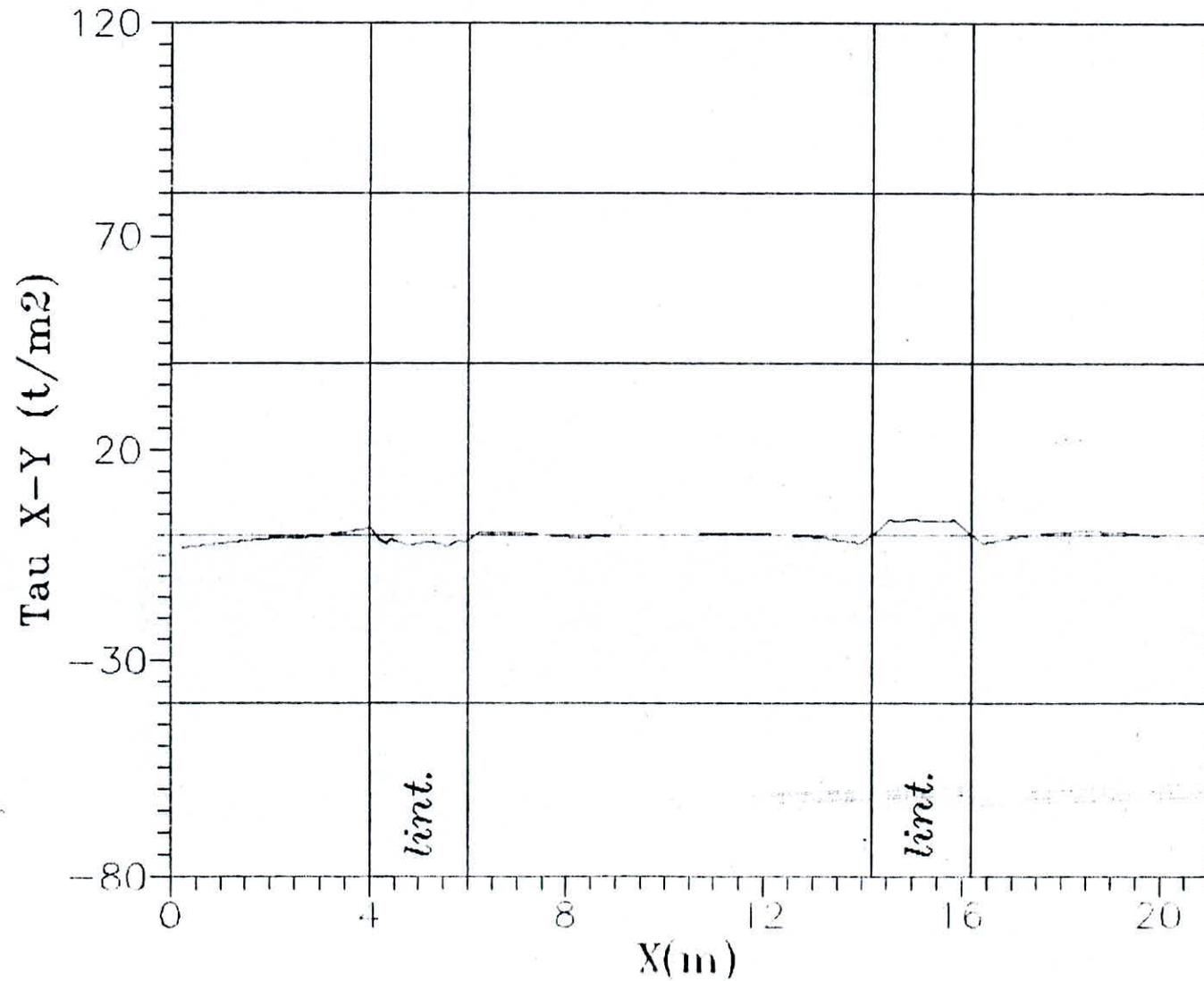


Fig A7

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=3.2$ m
(niveau 1)

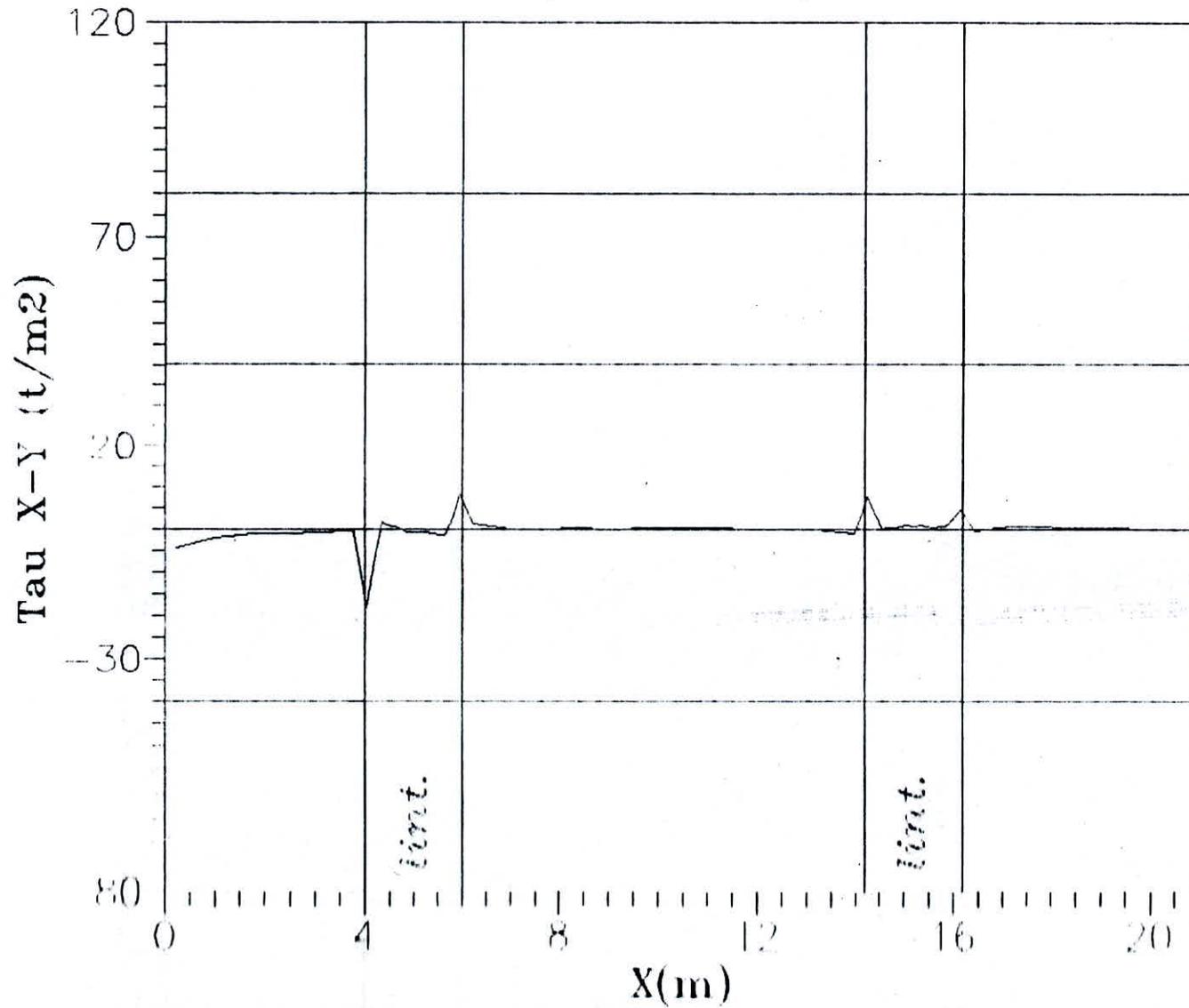


Fig A18

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=5.6$ m
(niveau 2)

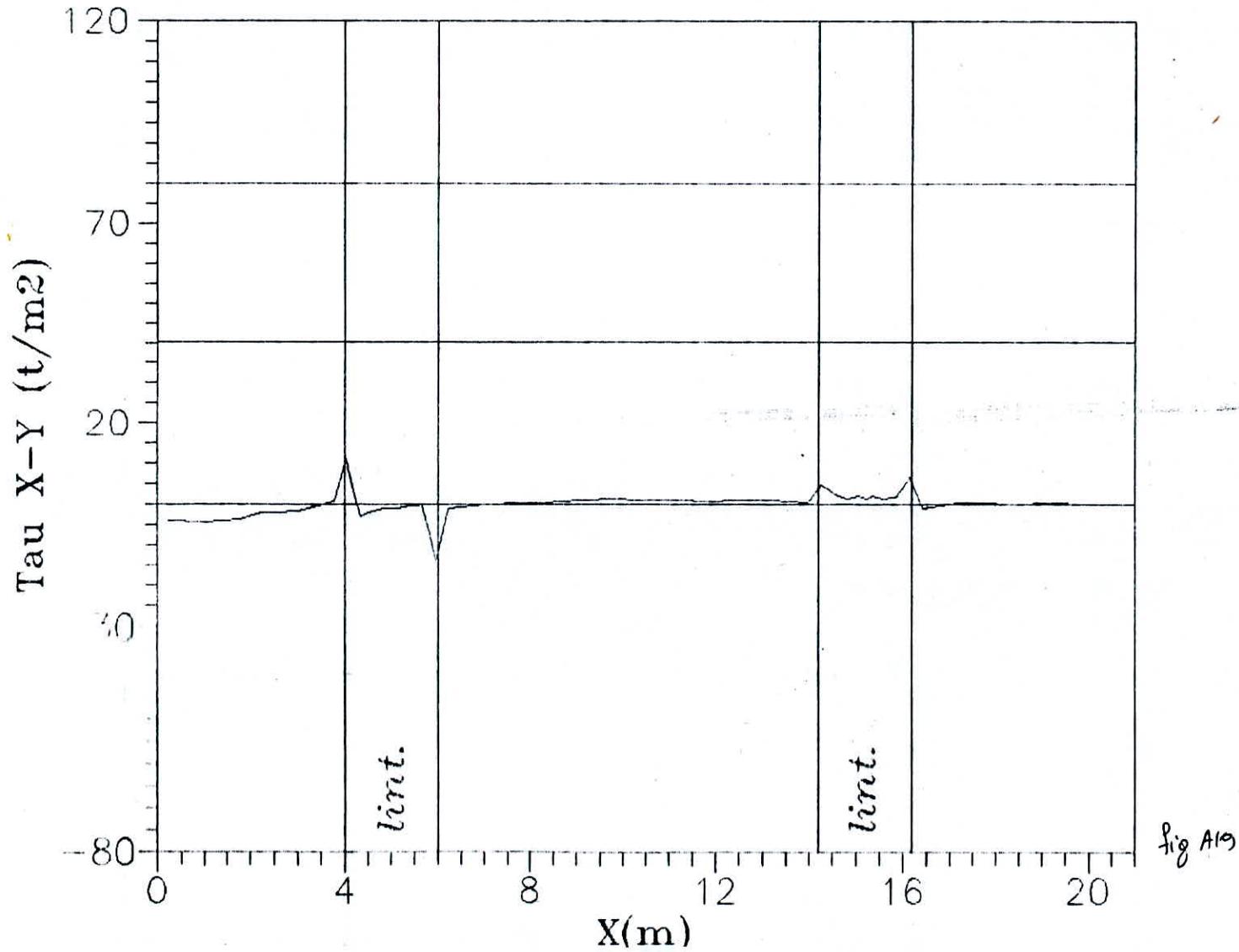


Fig A19

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=6.0$ m
(niveau 2)

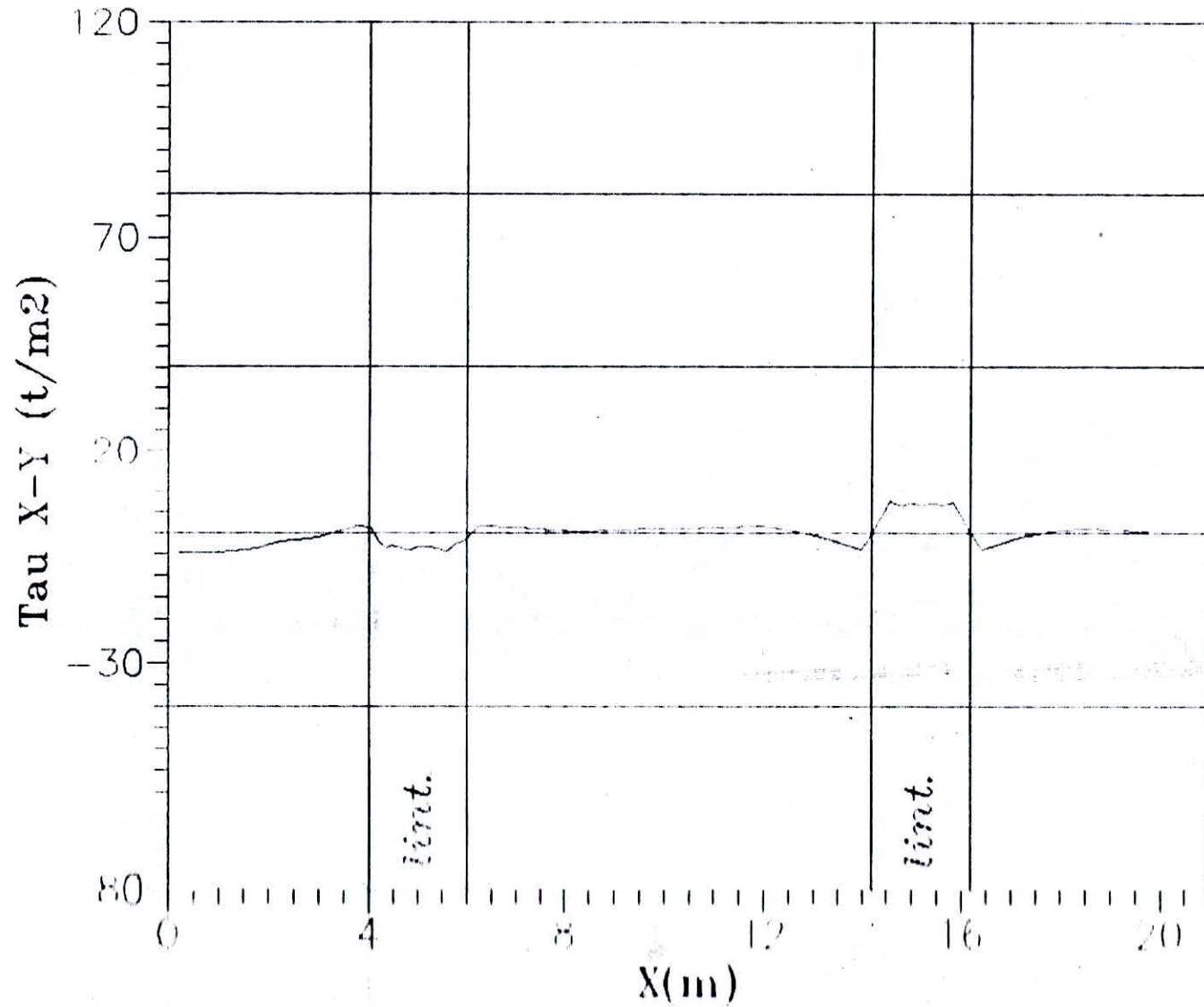


Fig A20

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=6.4$ m
(niveau 2)

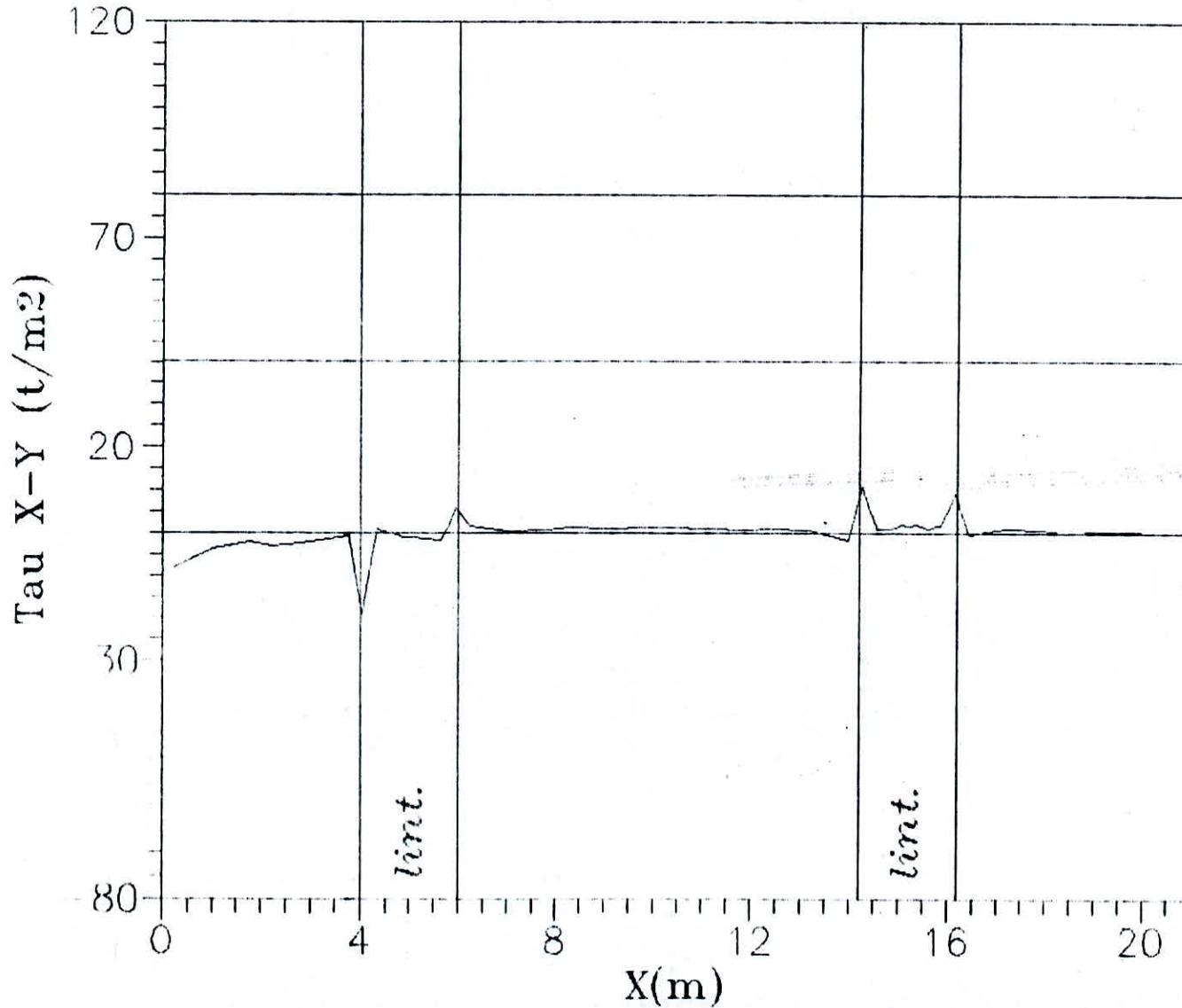
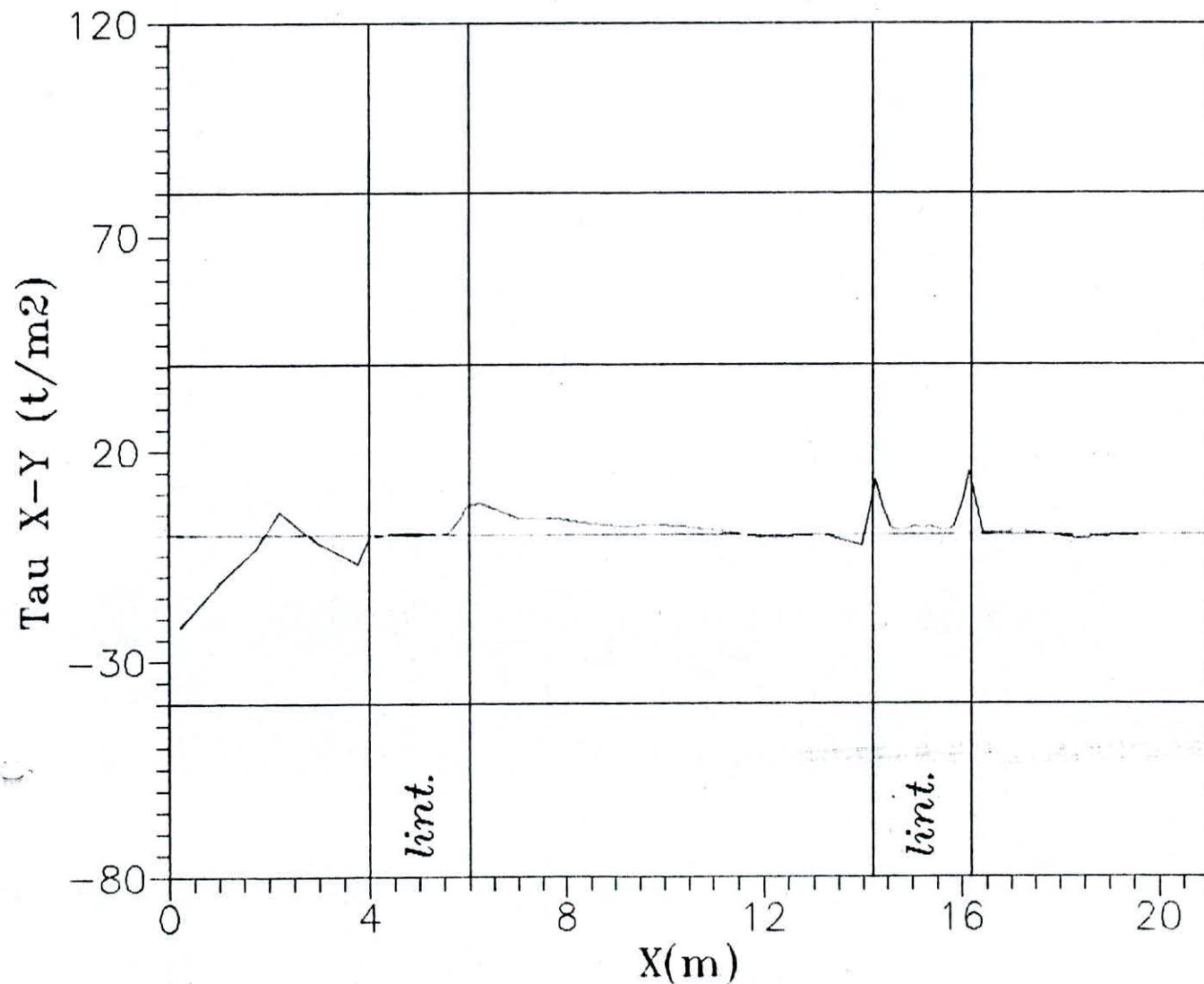


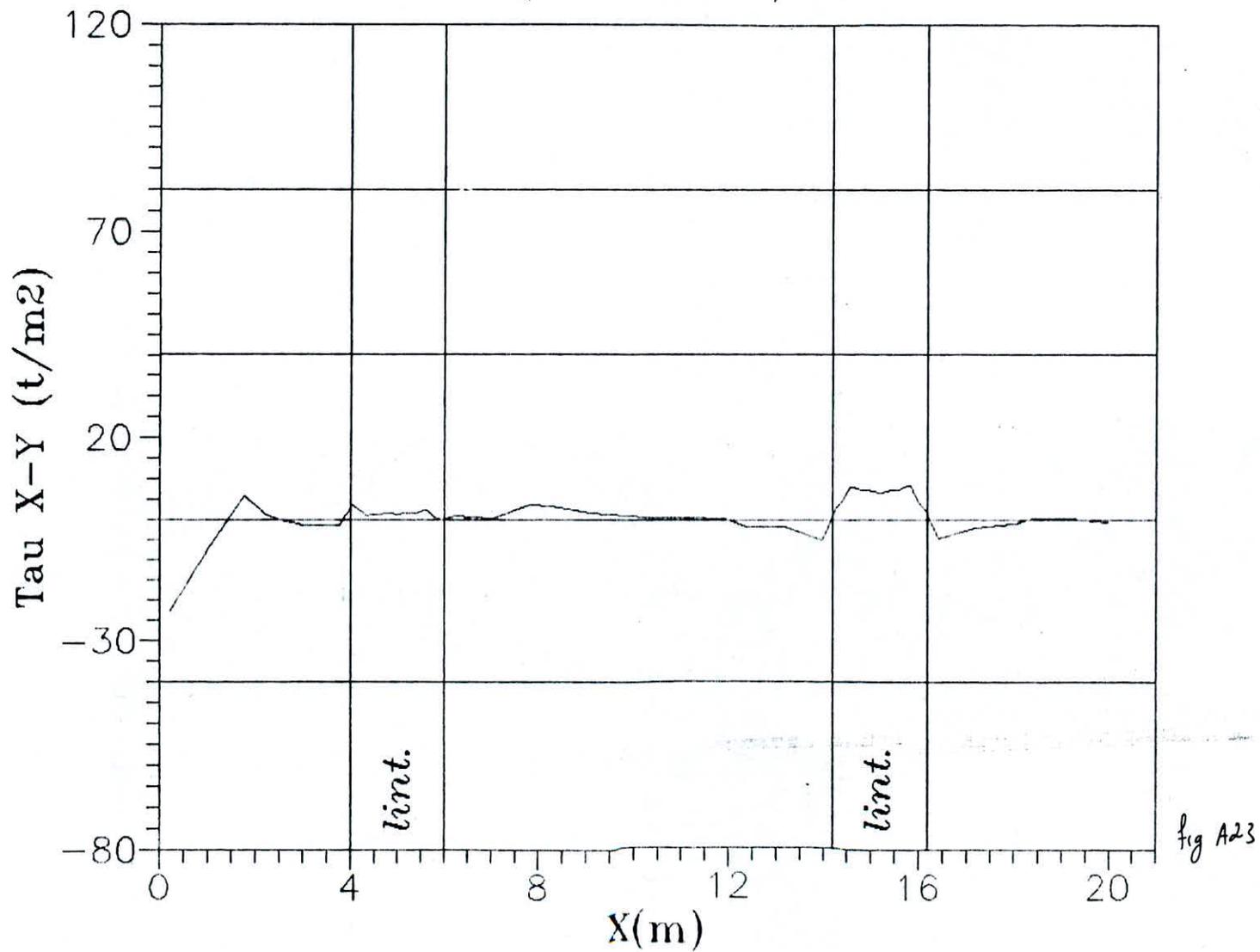
Fig A&I

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=18.4$ m
(niveau 6)



Ly A22

Variation de la contrainte suivant
la cote $z=18.8$ m
(niveau 6)



Variation de la contrainte suivant
la cote $z=19.2$ m
(niveau 6)

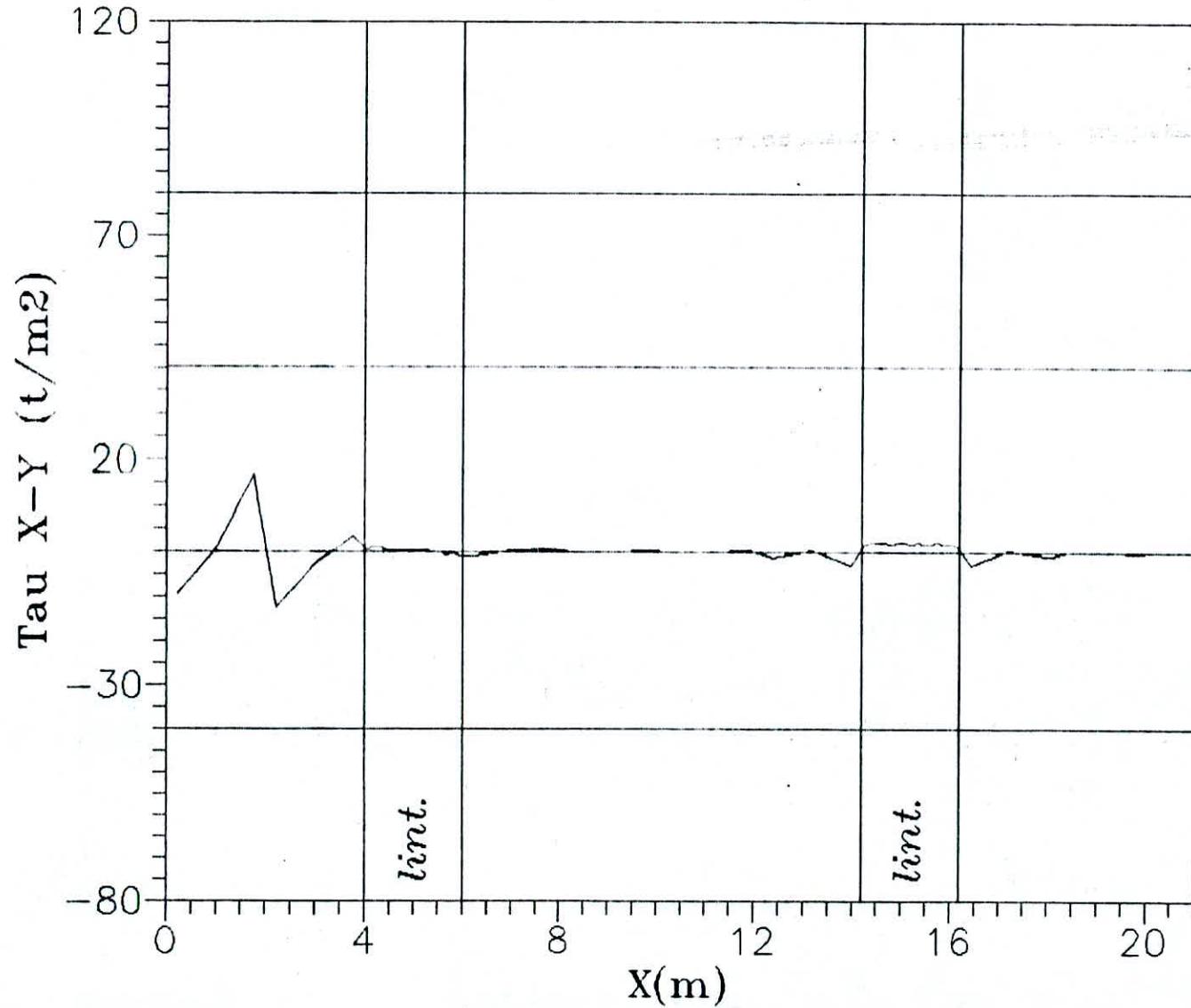
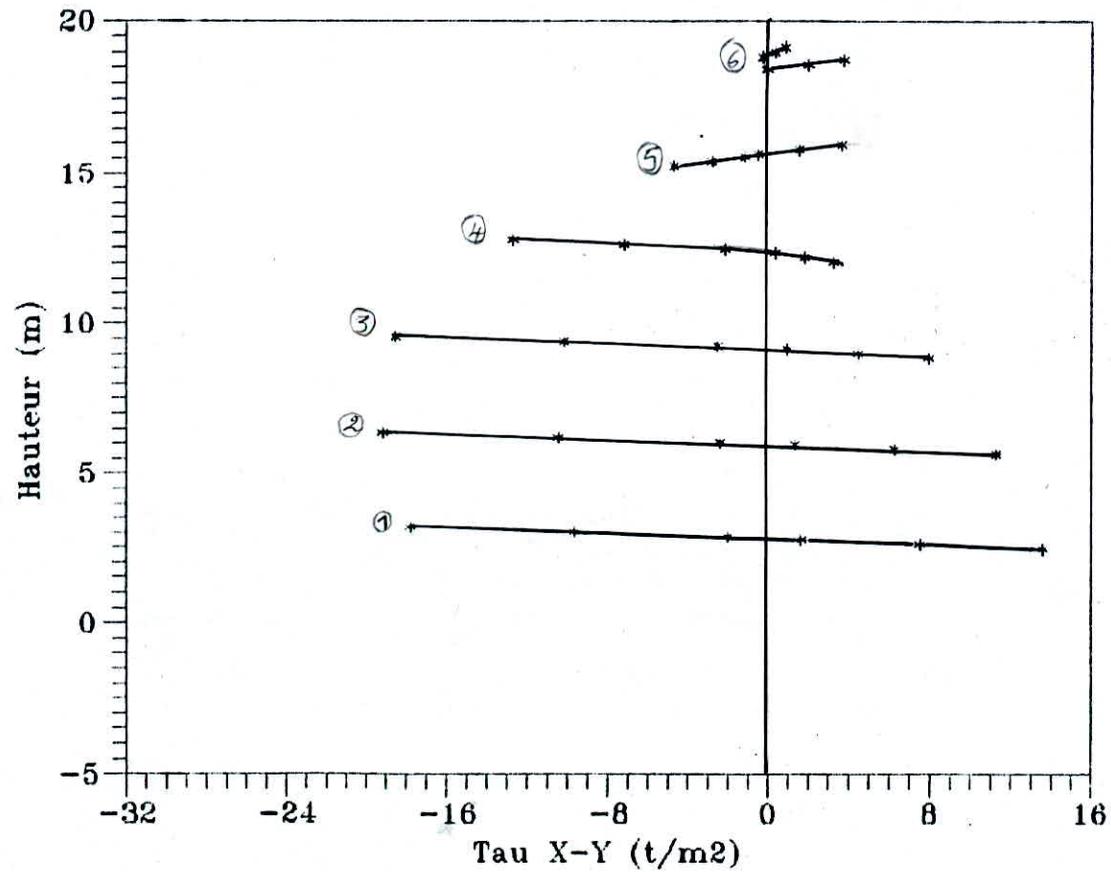


Fig A24

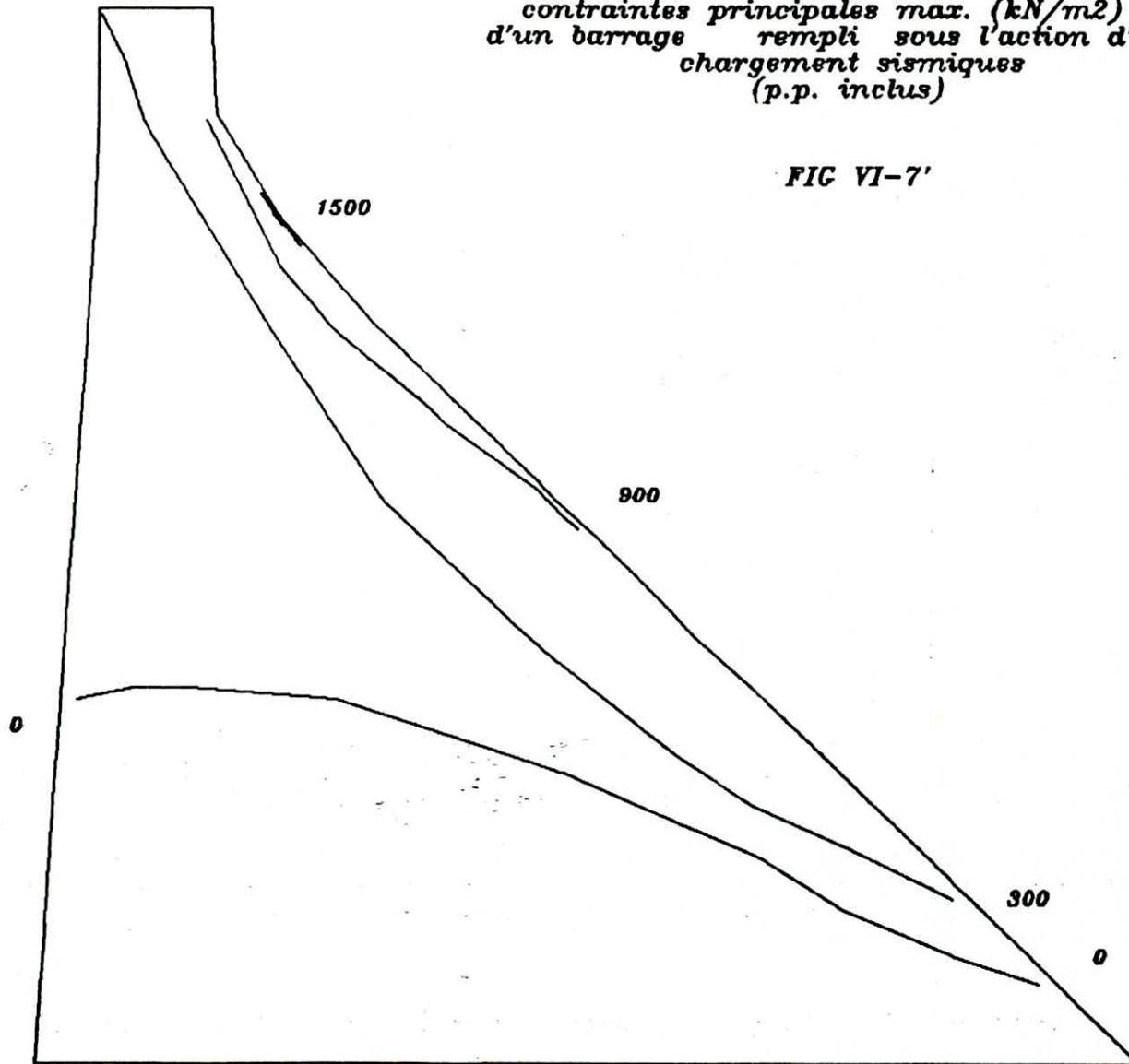
Variation de Tau X-Y le long
des encastrements
(x=4 m)



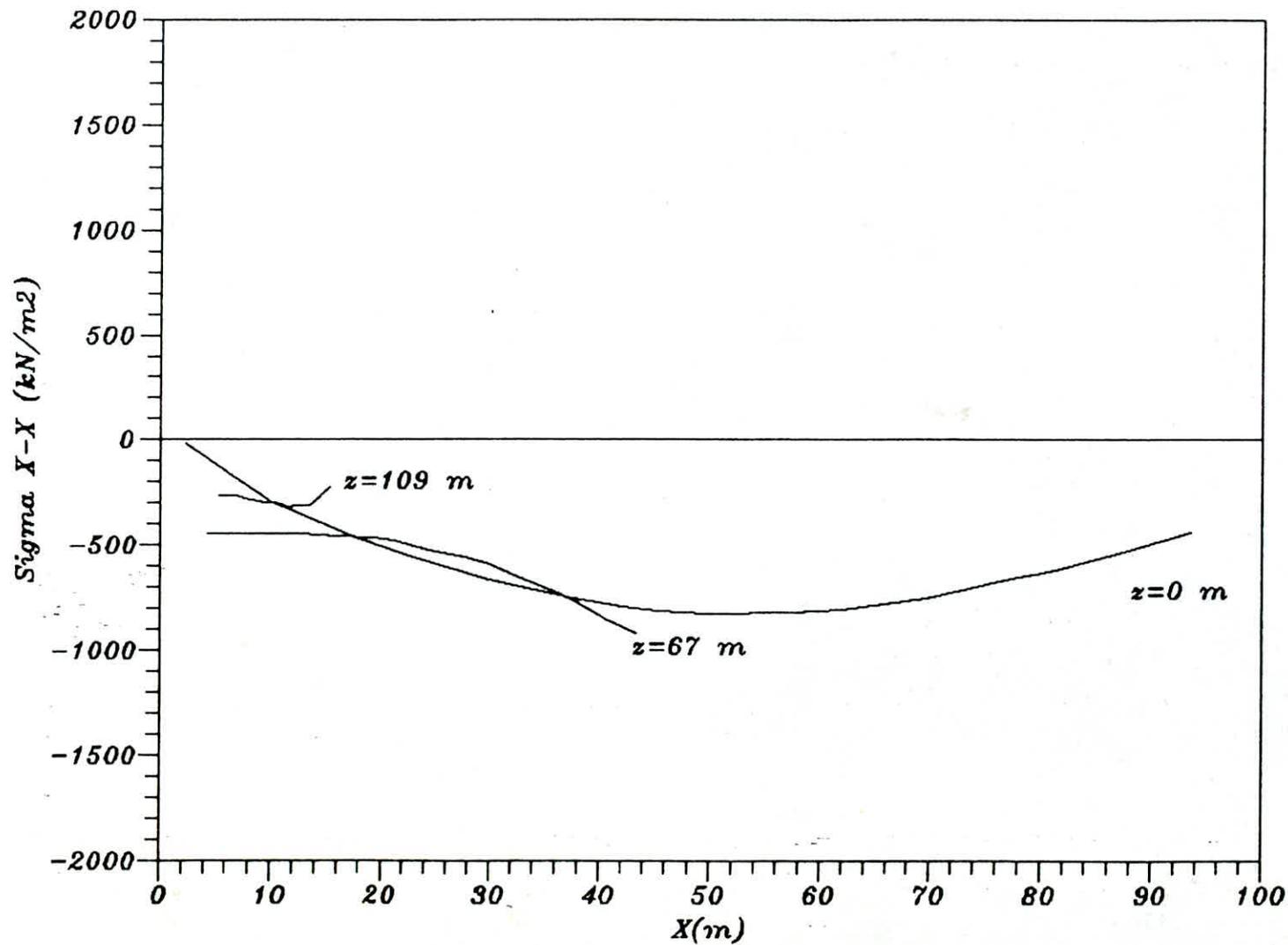
Lig A25

contraintes principales max. (kN/m²)
d'un barrage rempli sous l'action d'un
chargement sismiques
(p.p. inclus)

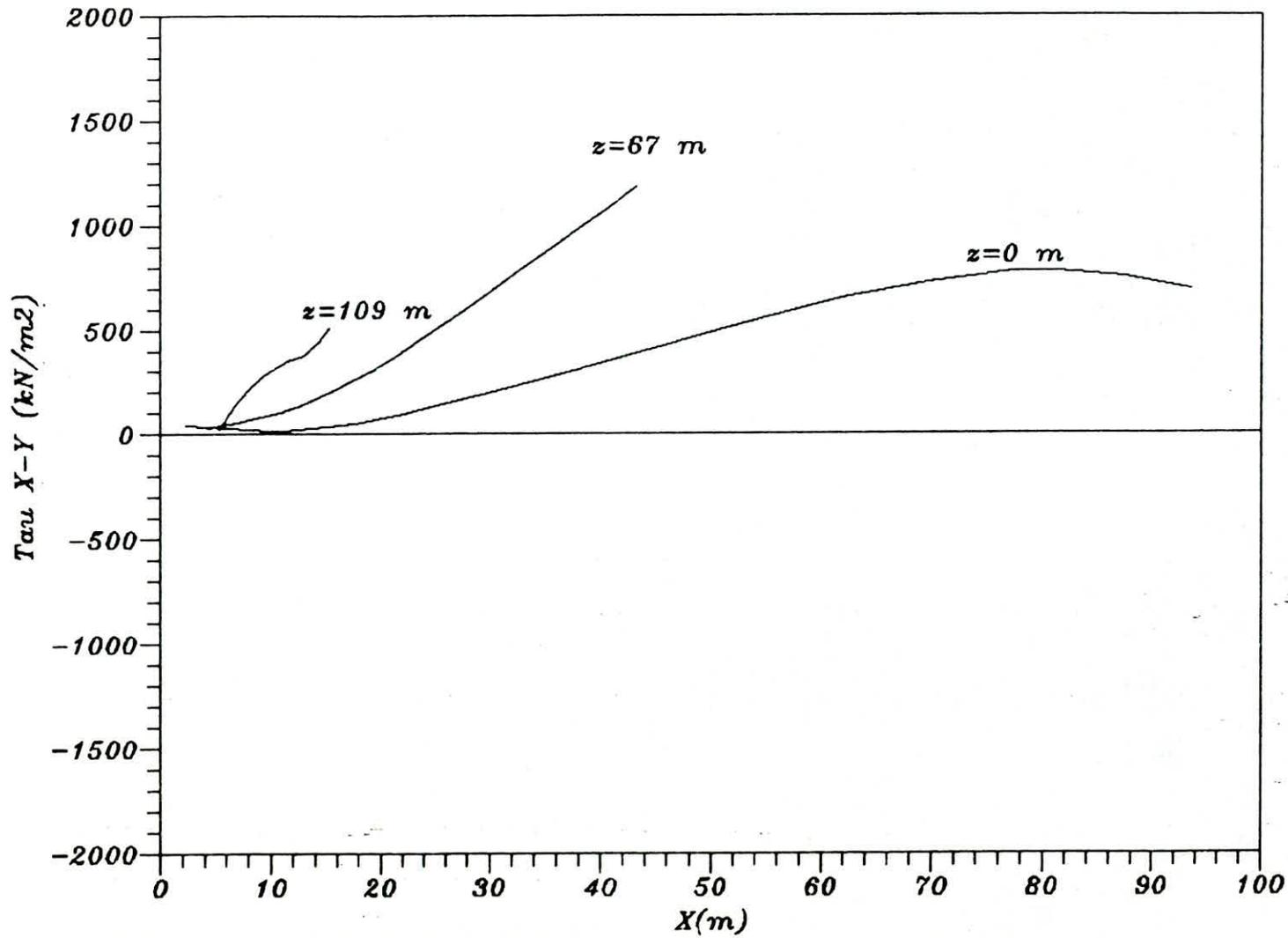
FIG VI-7'

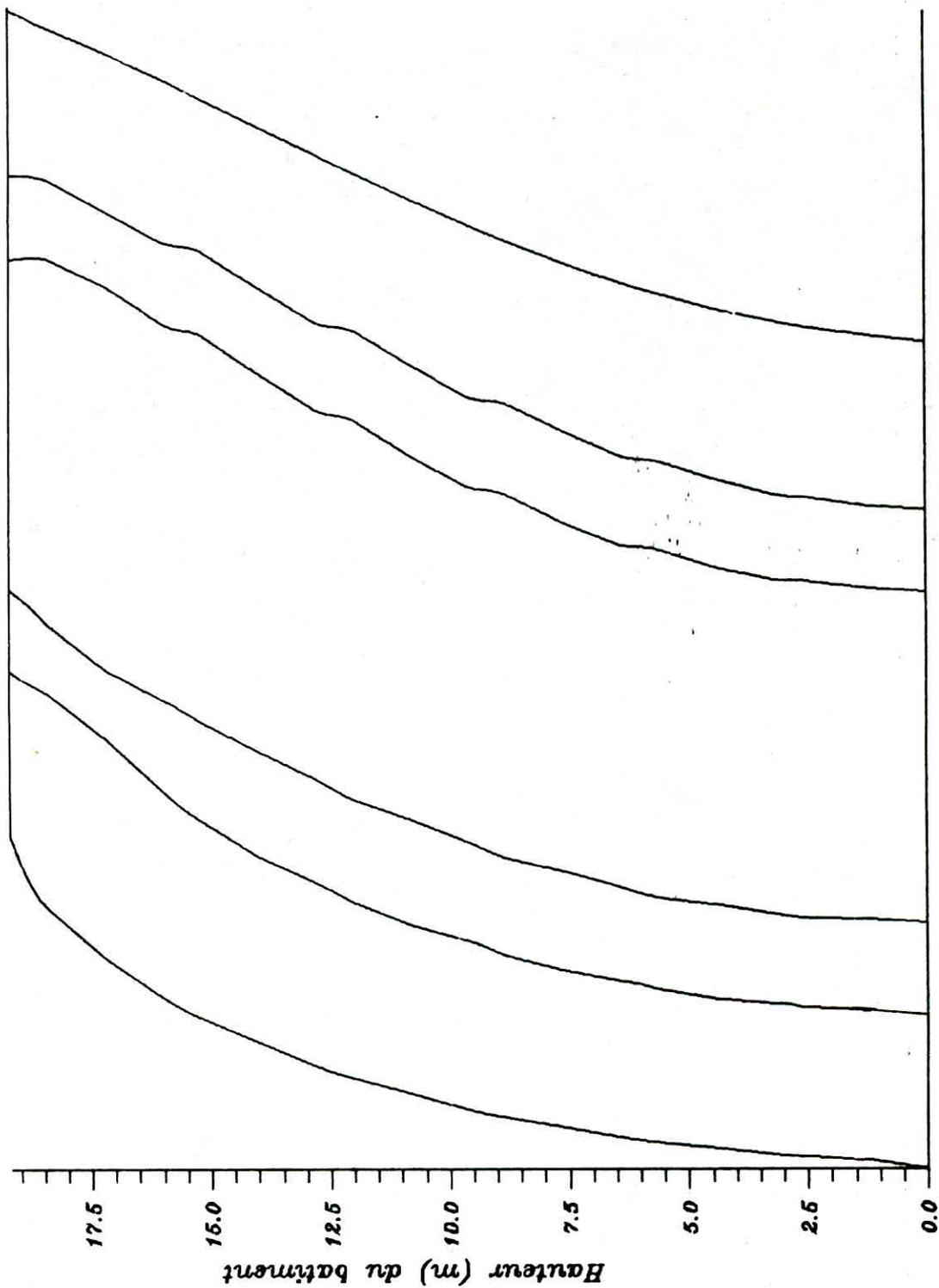


variation de la contrainte Sigma X-X (kN/m^2)
selon différentes cotes
FIG VI-9



variation de la contrainte τ_{X-Y} (kN/m^2)
selon différentes cotes
FIG VI-9





X : u(m)

BIBLIOGRAPHIE

O.C. ZIENKIEWICZ- La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur . Paris, EDISCIENCE 1973 .

G.DHATT et G.TOUZOUT- Une présentation de la méthode des éléments finis. Editions MALOINE

K.C. ROCKEY- Introduction à la méthode des éléments finis Editions EYROLLES 1979.

S. TIMOSHENKO et GODIER- Théorie d'élasticité .

K.J. BATHE-FINITE ELEMENT PROCEDURES IN ENGINEERING ANALYSIS
J 1982 by Prentice-Hall .

M. DIVER - CALCUL PRATIQUE DES TOURS EN BETON ARME
DUNOD Paris-1972

A. BOURGIN- COURS DE CALCUL DE BARRAGES
Editions EYROLLES 1955.

H.VARLET- BARRAGES-RESERVOIRS
Editions EYROLLES 1966.

