

وزارة التعليم العالي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Lex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : *GENIE - CIVIL*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

Logiciel de Calcul
Statique et Dynamique
des Treillis Spaciaux

Proposé par :

Sonelgaz

Etudié par :

N Laouami

B Mezazigh

Dirigé par :

H Charif

R Boutemeur

PROMOTION : *Juin 1990*

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

وَقُلْ مَرْغِیْ زِیْنِیْ سَالمِا

- دعاء -

// 0 M M A I R E

P A G E S

PREMIERE PARTIE

ANALYSE STATIQUE

CHAPITRE 1 :	01	INTRODUCTION
CHAPITRE 2 :	02	BASES THEORIQUES
CHAPITRE 3 :	16	METHODE MATRICIELLE DES DEPLACEMENTS
CHAPITRE 4 :	22	PROGRAMMATION

DEUXIEME PARTIE

ANALYSE DYNAMIQUE

CHAPITRE 1 :	35	GENERALITES
CHAPITRE 2 :	37	SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE
CHAPITRE 3 :	40	SYSTEME A PLUSIEURS DEGRE DE LIBERTE METHODE DE SUPERPOSITION MODALE
CHAPITRE 4 :	48	METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES
CHAPITRE 5 :	61	PROGRAMMATION

A N N E X E :

69

A P P L I C A T I O N

CONCLUSION

104

BIBLIOGRAPHIE

105

R E M E R C I E M E N T S

Nous voulons exprimer ici notre reconnaissance à nos deux promoteurs "**MM. CHARIF et BOUTEMEUR**", pour leur précieux soutien, et pour l'intérêt qu'ils ont suscité en nous pour notre travail.

Que l'ensemble des professeurs de l'école trouvent dans ce projet le témoignage de notre gratitude pour la formation qu'ils nous ont donnée.

Nous remercions également l'ensemble du personnel de la bibliothèque et du centre de calcul pour leur collaboration.

Enfin, une marque d'appréciation toute spéciale s'adresse à la soeur de **NASSER, NADJIA** ainsi qu'à son frère **MUSTAPHA** pour avoir assuré l'écriture et l'impression de cette thèse.

D E D I C A T I O N S

A MES CHERS PARENTS
A MES FRERES ET SOEURS
A MES ONCLES
A MES TANTES
A LA MEMOIRE DE MES GRANDS PARENTS
A TOUS GEUX QUI ME SONT CHERS

BRAHIM MEZAZIGH

A MA CHERE MERE A MON GRAND FRERE MUSTAPHA QUI ONT
TOUJOURS SUS M'ORIENTER DANS MES ETUDES.

A MES FRERES ET SOEURS ET BELLES SOEURS
A MES NIECES ET NEVEUX
A TOUS MES AMIS (ES)

NASSER LAOUAMI

//) REMIERE

//) ARTIE

//-) NALYSE

// TATIQUE

=====

() H A P I T R E - I -

I N T R O D U C T I O N

I N T R O D U C T I O N

Le développement de l'informatique associé au besoin de construire toujours plus hardiment a amené une véritable révolution en calcul des structures.

Les méthodes utilisées jusque là par les bureaux d'études, abaques, hardy-cross qui sont des méthodes manuelles qui permettaient d'obtenir des ordres de grandeurs raisonnables, se trouvent supplantées grâce à l'outil puissant qui est l'ordinateur.

OBJET DU TRAVAIL

L'objet du présent travail consiste en l'analyse statique et dynamique des structures tridimensionnelles en treillis, dans une perspective d'étudier le comportement dynamique des grands pylônes électriques qui, jusqu'à présent ne sont pas soumis aux règlements parasismiques actuels.

Signalons que la SONELGAZ utilise plusieurs types de pylônes atteignant 50 m de hauteur et pouvant transporter des tensions de 220 KV.

Le logiciel élaboré se compose donc de deux grandes parties :

- L'ETUDE STATIQUE SE BASANT SUR LA METHODE DE DEPLACEMENTS (OU DES DEFORMATIONS)
- ETUDE DYNAMIQUE SE BASANT SUR LA METHODE DE SUPERPOSITION MODALE

A - ELEMENTS DE STRUCTURE RETICULES

DEFINITION:

Un système réticulé est un réseau de barres droites réunies à leurs extrémités en des points appelés noeuds.

Les barres sont réunies, soit par des articulations soit par des organes d'assemblage rigides assurant dans la déformation de l'ensemble l'invariabilité des angles.

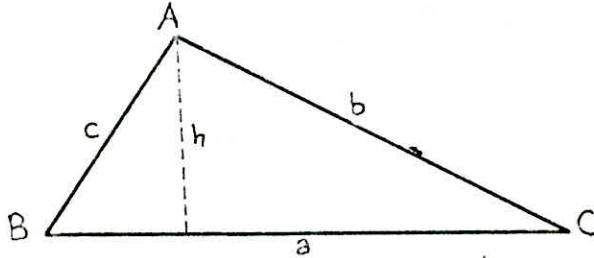
HYPOTHESES SUR LES SYSTEMES RETICULES

Les systèmes réticulés sont dans la plupart des cas, construits avec assemblages semi-rigides, on les calculera en supposant les barres articulées à leurs extrémités selon les hypothèses suivantes :

a) La déformation d'une poutre par l'application d'un système de charges est indépendante des attaches :

1- Variation de l'angle deux barres :

Soit A.B.C, une maille du réseau, et a, b, c les longueurs des trois barres qui la constituent, h la hauteur issue de A. Cherchons une limite supérieure de la variation de l'angle A.



Nous aurons, en différentiant les deux termes de la relation $a = c \cos B + b \cos C$

$$da = dc \cos B + db \cos C - c \sin B dB - b \sin C dC$$

ou, puisque :

$$c \sin B = b \sin C = h \text{ et } dB + dC = -dA$$

d'où :

$$dA = \frac{da - dc \cos B - db \cos C}{h}$$

La variation dA sera maximum lorsque la barre a subira l'allongement maximum et les barres c et b le raccourcissement maximum. Si la poutre est en acier doux, on aura dans ces conditions :

.../...

(((H A P I T R E - II -
=====

///))
///))

A S E S

=====
//

H E O R I Q U E S

$$da = -\frac{6}{E} \times a \ll = -\frac{12}{20000} \times a = 6 \cdot 10^{-4} \times a$$

$$db = -6 \cdot 10^{-4} \times b \quad \text{et} \quad dc = -6 \cdot 10^{-4} \times c$$

la plus grande valeur de dA sera :

$$dA = 6 \cdot 10^{-4} \frac{a + c \cos B + b \cos C}{h} = 12 \cdot 10^{-4} \times a/h$$

Or a/h n'est jamais supérieur à 2, dA sera donc au plus égale à 0,0024, c'est un angle d'environ 7 minutes.

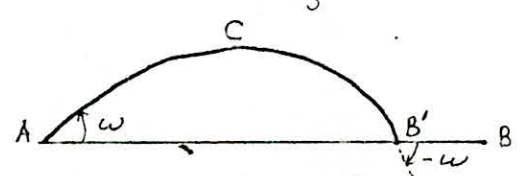
2) Variation de la distance de deux noeuds résultant de la courbure de la barre qui les joints:

Soit une barre AB qui, par suite de la rigidité des attaches, à dû subir des rotations w et $-\hat{w}$ a ses deux extrémités et pris la forme ACB'. On pourra obtenir un ordre de grandeur de la variation BB' en assimilant ACB' à un arc de cercle de rayon R. On aura alors :

$$AB = ACB' = 2 \times R \times w \quad \text{et} \quad BB' = 2 \times R \times w - 2 \cdot R \cdot \sin w$$

$$= R \frac{w^3}{3}$$

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{w^2}{6}$$



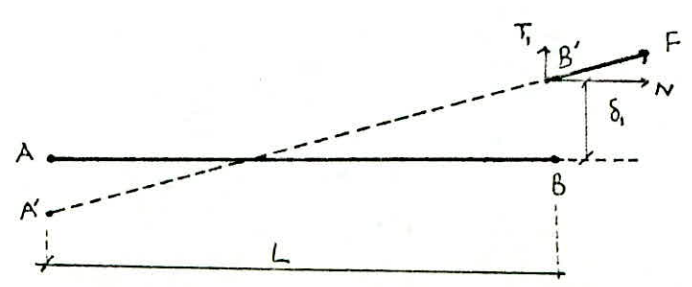
Si l'angle w est égale à 0,0024, la variation relative de la distance AB sera :

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{24^2}{6} \times 10^{-8} = 96 \cdot 10^{-8} \quad \text{soit} \approx 10^{-6}$$

Cette variation est négligeable à côté du raccourcissement élastique qui peut être 600 fois plus grand.

L'hypothèse des petites déformations est donc justifiée.

b) Pour un réseau à assemblages rigides, la force transmise par une barre est pratiquement parallèle à l'axe de la barre :



.../...

Une barre AB joignant deux noeuds à assemblages rigides transmet un effort F suivant la direction A'B' différente de AB. On peut déduire des évaluations précédentes une limite supérieure du rapport T_1/N de ses projections sur la normale à la barre et sur son axe, rapport qui donne une mesure de l'angle entre deux directions AB et A'B', ainsi qu'une valeur limite de l'excentricité δ_1 de la force F dans la section d'encastrement B.

On sait que si l'on impose aux extrémités de la barre AB de moment d'inertie I et de longueur l, des rotations w_0 en A et w_1 en B, on crée en A une réaction d'appui R_0 normale à la barre et qui a pour valeur :

$$R_0 = \frac{6 E I}{l^2} (w_0 + w_1)$$

Le moment fléchissant résultant de cette déformation vaut, dans la section B,

$$M_1 = \frac{2 E I}{l} (w_0 + 2 w_1)$$

La composante transversale T_1 est égale à R_0 et l'excentricité δ_1 est égale au quotient du moment M_1 par la composante longitudinale N.

Si l'on donne aux rotations w_0 et w_1 les valeurs maximas calculées ci-dessus ($24 \cdot 10^{-4}$) on trouve en posant $E = 2 \times 10^4 \text{ Kg/mm}^2$.

$$T_1 = 576 \times I / L^2 \quad M_1 = 288 I / L$$

Soit S la section transversale de la barre et h la hauteur de la section, on obtiendra les plus grandes valeurs de T_1 et de M_1 en supposant toute la matière de la barre concentrée sur les fibres extrêmes de la section, ce qui donne :

$$I = S \times h^2 / 4$$

$$\text{d'ou } T_1 = 144 \times S \times h^2 / L^2$$

$$M_1 = 72 \times S \times h^2 / L$$

Si la barre AB a été calculée pour une contrainte 12 kg/mm^2 , on a $N = 12 \times S$ et par suite :

$$T_1/N = 12 \times h^2 / L^2 \quad \delta_1 = M_1/N = 6 \times h^2 / L$$

en général l'élanement L/h est supérieur ou égal à 20 :

$$T_1/N = 0,03 \quad \delta_1 < H / 33$$

avec H la hauteur de la poutre .

Il en résulte: que la valeur maximum de la composante transversale T de la force extérieure relative à la section d'encastrement d'une barre peut être estimée à 3 % de l'effort longitudinal transmis par cette barre, que l'excentricité de la force extérieure dans la section d'encastrement ne dépasse pas 3% de la hauteur de la poutre, on en conclut que les barres travaillent à l'effort normal seulement.

EXEMPLE COMPARATIF ENTRE SYSTEME RETICULE ARTICULE ET SYSTEME RETICULE RIGIDE

1) systeme reticule articule

DONNEES DE CONTROLE *****

NOMBRE DE NOEUDS TOTAL (NUMNF) = 8

NOEUD NUMERO	CODE D"APPUI CONDITION D"APPUI			NOEUD COORDONNEES		
	X	Y	Z	X	Y	Z
1	1	1	1	.000	.000	.000
2	1	1	1	4000.000	.000	.000
3	0	0	1	.000	3000.000	.000
4	0	0	1	4000.000	3000.000	.000
5	0	0	1	.000	6000.000	.000
6	0	0	1	4000.000	6000.000	.000
7	0	0	1	.000	9000.000	.000
8	0	0	1	4000.000	9000.000	.000

DONNEES SUR LES CHARGES

NO. DE CAS DE CHARGE 1
NOMBRE DE CHARGES CONCENTREES 2

NOEUD NUMERO	DIRECTION	CHARGE INTENSITE
7	1	.20000E+03
8	2	-.10000E+03

NOMBRE D' ELEMENTS (NPAR(2)) . . . = 12

NOMBRE DE PROPRIETES MECANQUES ET GEOMETRIQUES DES ELEMENTS ; (NPAR(3)) . . . = 1

NO. NUMERO	MODULE DE YOUNG E	PROP-GEOMETRIQ SECT A	CHARGE INTENSITE	
1	.20000E+05	.250000E+04	.520833E+06	.100000E+01

ELEMENT NUMERO-N	NOEUD I	NOEUD J	MATERIAU SET NUMERO
1	1	3	1
2	1	4	1
3	2	4	1
4	3	4	1
5	3	5	1
6	3	6	1
7	4	6	1
8	5	6	1
9	5	7	1

10	5	8	1
11	6	8	1
12	7	8	1

D E P L A C E M E N T S

NOEUD	X-DEPLACEMENT	Y-DEPLACEMENT	Z-DEPLACEMENT
1	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
2	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
3	.720001E-01	.180000E-01	.000000E+00
4	.560001E-01	-.330000E-01	.000000E+00
5	.175500E+00	.270000E-01	.000000E+00
6	.159500E+00	-.570001E-01	.000000E+00
7	.297000E+00	.270000E-01	.000000E+00
8	.281000E+00	-.720001E-01	.000000E+00

C A L C U L D E S C O N T R A I N T E S

ELEMENT NUMERO	FORCE	CONTRAINTE	FLAMBEMENT	CONTRAINTE ADMISSIBLE
1	.300000E+03	.120000E+00	.129876E+00	.100000E+01
2	.250000E+03	.100000E+00	.133489E+00	.100000E+01
3	-.550000E+03	-.220000E+00	-.238106E+00	.100000E+01
4	-.200000E+03	-.800001E-01	-.939633E-01	.100000E+01
5	.150000E+03	.600000E-01	.649379E-01	.100000E+01
6	.250000E+03	.100000E+00	.133489E+00	.100000E+01
7	-.400000E+03	-.160000E+00	-.173168E+00	.100000E+01
8	-.200000E+03	-.800001E-01	-.939632E-01	.100000E+01
9	.168879E-05	.675515E-09	.731108E-09	.100000E+01
10	.250000E+03	.100000E+00	.133489E+00	.100000E+01
11	-.250000E+03	-.100000E+00	-.108230E+00	.100000E+01
12	-.200000E+03	-.800000E-01	-.939631E-01	.100000E+01

2)systeme reticule rigide

D I S P L A C E M E N T S

NODE	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT
1	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
2	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
3	.719355E-01	.180023E-01	-.260793E-04
4	.559548E-01	-.329912E-01	-.235457E-04
5	.175391E+00	.270037E-01	-.327581E-04
6	.159406E+00	-.569879E-01	-.323620E-04
7	.296843E+00	.270077E-01	-.343837E-04
8	.280851E+00	-.719838E-01	-.320448E-04

S T R E S S C A L C U L A T I O N S F O R E L E M E N T G R O U P

ELEMENT NUMBER	FORCE N	FORCE T	MOMENT M
1	-.3000E+03 .3000E+03	.1519E+00 -.1519E+00	.3184E+03 .1373E+03
2	-.2497E+03 .2497E+03	.1102E-02 -.1102E-02	.5181E+02 -.4630E+02
3	.5499E+03 -.5499E+03	.9554E-01 -.9554E-01	.2251E+03 .6155E+02
4	.1998E+03 -.1998E+03	-.9425E-01 .9425E-01	-.1951E+03 -.1819E+03
5	-.1500E+03 .1500E+03	.7037E-01 -.7037E-01	.1287E+03 .8236E+02
6	-.2498E+03 .2498E+03	-.3363E-01 .3363E-01	-.7098E+02 -.9716E+02
7	.3999E+03 -.3999E+03	.9069E-01 -.9069E-01	.1667E+03 .1054E+03
8	.1998E+03 -.1998E+03	-.9033E-01 .9033E-01	-.1817E+03 -.1796E+03
9	-.6610E-01 .6610E-01	.9601E-01 -.9601E-01	.1497E+03 .1384E+03
10	-.2498E+03 .2498E+03	-.1954E-01 .1954E-01	-.5034E+02 -.4737E+02
11	.2499E+03 -.2499E+03	.1150E+00 -.1150E+00	.1714E+03 .1736E+03
12	.1999E+03 -.1999E+03	-.6614E-01 .6614E-01	-.1384E+03 -.1262E+03

$\delta_{max} = 3 \%$

$\delta_{max} = H/33 = 50 / 33 = 1,52$

	SYSTEME TREILLIS	SYSTEME RETICULE		RIGIDE	
	CONTRAINTÉ NOR- MALE 10^{-3} Kg/mm ²	CONTRAINTÉ	NORMALE	$\delta = \frac{M}{N}$	$\gamma = \frac{T}{N}$
		DUE A N	DUE A M		
1	120	120	6,57	1,06	0,05 %
2	100	99,6	2,22	0,21	$4,41 \cdot 10^{-4}$ %
3	220	219,96	2,95	0,41	$17,10^{-3}$ %
4	80	19,6	8,68	0,98	$5,10^{-4}$ %
5	60	60	3,95	0,85	$46,9 \cdot 10^{-3}$ %
6	100	99,92	3,41	0,39	$1,10^{-4}$ %
7	160	158,6	5,04	0,42	$2,10^{-4}$ %
8	80	79,92	8,62	0,91	$45,4 \cdot 10^{-3}$ %
9	0	0	6,64	"	"
10	100	99,92	2,2,	0,20	$1,8 \cdot 10^{-3}$ %
11	100	99,92	8,20	0,69	$46,2 \cdot 10^{-3}$ %
12	80	19,92	6,05	0,69	$33,2 \cdot 10^{-3}$ %

Par référence aux résultats donnés par la **théorie**, les valeurs mentionnées dans le tableau ci-dessus nous mène à relever les points suivants.

- Les contraintes dûes aux moments, dans le cas du système reticulé rigide sont d'un ordre secondaire par rapport aux contraintes dûes à l'effort normal, on relève que ces dernières sont équivalentes aux contraintes normales calculées par le système reticulé articulé.

- Le rapport de l'effort tranchant et de l'effort normal est inférieur à la limite supérieure donnée par δ_{max} égale à 3 %, on en déduit que l'effort tranchant est négligeable, par conséquent la direction de l'effort normal est parallèle à l'axe de la barre.

- L'excentricité de la force extérieure est très inférieure à la valeur théorique qui est de l'ordre de 3 % de la hauteur de la poutre ce qui confirme le résultat précédent.

- On en conclut que le fait de considérer un système reticulé rigide comme articulé pendant le calcul n'induit pas d'erreur.

B - RAPPELS DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX

Pour exprimer la condition d'équilibre dans la position déformée, on peut procéder de deux manières :

- Appliquer le principe de la conservation de l'énergie :
METHODE ENERGETIQUES .
- Appliquer le principe des déplacements virtuels :
METHODE CINEMATIQUE.

en appliquant le premier ou le second principe, on supposera que les hypothèses suivantes de la R.D.M sont toutes respectées.

- a) Milieu continu
- b) Milieu isotrope
- c) Milieu parfaitement élastique
- d) Déformations petites
- e) Linéarité entre les efforts et les déformations
- f) Hypothèses de BERNOLLI
- g) Distribution identique des efforts pour les systèmes de forces équivalentes .

1) - METHODES ENERGETIQUES

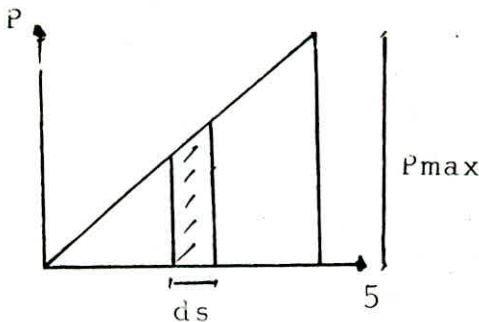
- a) travail mécanique des forces extérieures

Le travail mécanique élémentaire d'une force est égale au produit du module de la force et du déplacement élémentaire de son point d'application suivant la direction de son support.

$$dT_e^P = P \cdot dS.$$

le corps est supposés élastique

$$dS = K \cdot dP$$



$$T_e^P = \int Pk \, dP = 1/2 (KP^2) = PS/2$$

Pour plusieurs forces appliquées en même temps, en utilisant le principe de la superposition des effets on obtient :

$$T_e^P = 1/2 (P_1 S_1 + P_2 S_2 + \dots) = 1/2 \left(\sum_{i=1}^n P_i S_i \right)$$

.../...

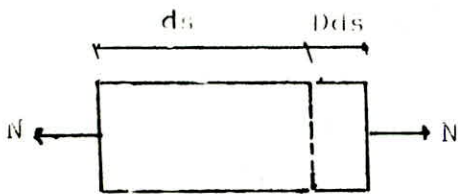
b) Énergie de déformation U

L'Action des forces extérieures, produit dans les sections de la structure une sollicitation caractérisée par l'apparition des efforts et des déformations dans tous les points du matériaux.

Les structures élastiques sont des systèmes conservatifs, c.a.d le travail mécanique des forces extérieures se transforme complètement en énergie potentielle de déformation.

A chaque moment il existe un équilibre entre le travail mécanique extérieure et l'énergie potentielle de déformation.

L'Énergie potentielle de déformation produite par l'effort axial s'écrit :



$$dT_i^N = dw = 1/2 \cdot N \cdot \Delta ds$$

$$\text{or } \Delta ds = \frac{N \cdot ds}{E \cdot A} \quad (\text{loi de HOOK})$$

$$\text{donc } dT_i^N = dw^N = 1/2 \cdot \frac{N^2 \cdot ds}{E \cdot A}$$

$$T_i^N = w^N = \int_l 1/2 \cdot \frac{N^2 \cdot dS}{E \cdot A}$$

Théorèmes de CASTIGLIANO :

Les théorèmes de CASTIGLIANO permettent de calculer les forces ou les déplacements en des points particuliers des barres.

1er THEOREME

" Si en un point P est appliquée une force F_p , alors la force F_p en ce point, est donné par :

$$F_p = \frac{dw}{du_i}$$

2 eme THEOREME :

" Si en un point est appliquée une force F_p , alors le déplacement U en ce point, et suivant la direction de F_p cette force est donné par :

$$U = \frac{dW}{dF_p}$$

où, W : c'est le potentiel élastique total, il est donné par la formule suivante :

.../...

$$W = \int_1 (N_x^2 \cdot dx / 2 \cdot E \cdot A) + \int_1 (K_y \cdot T_y^2 \cdot dx / 2 \cdot G \cdot A) + \int_1 (K_z \cdot T_z^2 \cdot dx / 2 \cdot G \cdot A) \\ + \int_1 (M_x^2 \cdot dx / 2 \cdot G \cdot I_p) + \int_1 (M_y^2 \cdot dy / 2 \cdot E \cdot I_y) + \int_1 (M_z^2 \cdot dy / 2 \cdot E \cdot I_z)$$

on se limite dans le cadre de notre étude aux treillis, on ne conserve que le premier terme, on aura donc :

$$W = \int_1 N_x^2 \cdot dx / 2 \cdot E \cdot A$$

Théorème de BETTI

Le travail fourni par le système (F⁽¹⁾) dans les déplacements (U⁽²⁾) est égal au travail fourni par le système des forces (F⁽²⁾) dans les déplacements (U⁽¹⁾).

$$(F^{(1)})^T (U^{(2)}) = (F^{(2)})^T (U^{(1)})$$

dans le cas particulier où $F_1 = F_2 = 1$
d'après le théorème de BETTI $U_2^{(1)} = U_1^{(2)}$
d'où le théorème de MAXWELL.

" Le déplacement d'un point 1 dû à la force unitaire appliquée au point 2 est égal au déplacement du point 2 provoqué par une force unitaire au point 1.

Donc : $U_i(j) = U_j(i)$
de même on peut écrire :

$$P_i(j) = P_j(i)$$

cette dernière relation établit la symétrie de la matrice de rigidité qu'on verra par la suite.

2) - F L A M B E M E N T

Dés qu'on soumet une barre élançée à un effort de compression N, celle ci s'infléchit, il s'ensuit l'apparition d'un moment fléchissant égale à Nxy (y est le désaxement du centre de gravité de la section considérée) donc la vérification consiste en la détermination de la contrainte sous l'effet du moment $M = Nxy$ et de l'effort de compression N et sa comparaison avec la limite élastique du métal employé.

La vérification de la stabilité des éléments comprimés est ainsi ramenée à un problème de flexion composée.

La vérification courante vis-à-vis de la sécurité des pièces à paroi pleine est donnée par la formule suivante :

$$K \cdot \sigma \leq \sigma_e$$

σ : Contrainte normale = N/S

σ_e : Contrainte élastique du matériau

K : Coefficient d'amplification de contrainte en compression simple.

$$K = \left(0,5 + 0,65 \frac{\sigma_e}{\sigma_K} \right) + \sqrt{\left(0,5 + 0,65 \frac{\sigma_e}{\sigma_K} \right)^2 - \frac{\sigma_e}{\sigma_K}}$$

σ_K = Contrainte critique d'EULER.

$$\sigma_K = \pi^2 E / \lambda^2$$

λ = appelée élancement est donné par :

$$\lambda = \frac{V \cdot L}{i_{\min}}, \quad i_{\min} = I_{\min} / S$$

i_{\min} étant le rayon de giration minimum .

V : Coefficient prenant en considération le mode de fixation d'une barre :

V = 1 pour une barre articulée

V = 0,5 pour une barre bi-encastree

V = 0,2 pour une barre avec une extrémité encastree et l'autre étant libre.

V = 0,7 Pour une barre avec extrémité encastree et l'autre étant articulée.

3) METHODES DES FORCES ET DEPLACEMENTS CLASSIQUES

1) METHODES DES FORCES CLASSIQUES:

Cette méthode consiste à prendre comme inconnues les forces de liaisons surabondantes. La structure hyperstatique donnée et remplacée par une structure isostatique équivalente qui provient de la première en supprimant les liaisons surabondantes et en les remplaçant par des forces inconnues, la structure isostatique s'appelle système de base.

L'équation de condition qui permette de déterminer les forces inconnues, est telle que le système de base isostatique a les mêmes déplacements que la structure hyperstatique initiale. Il en découle de cela, le système de n équations avec n inconnues $\sum S_{ij} X_j + D_{ip} = 0$, avec: S_{ij} est le déplacement en i , causé par une force unitaire agissant en j .

D_{ip} et le déplacement en i , causé par la force extérieure P .

Les coefficients S_{ij} et D_{ip} sont généralement calculés à l'aide de la méthode Vereschéaguine d'intégration.

Sous forme matricielle, le système précédent s'écrit:

$$(F) (X) + (U_0) = 0$$

(F) est appelée alors, matrice de flexibilité on note, que (F) est symétrique, C.A.D $S_{ij} = S_{ji}$ et que les éléments diagonaux $S_{ii} > 0$.

La résolution du système linéaire obtenu se fait par les méthodes connues de l'analyse numériques.

- Calcul des efforts et des déplacements;

Une fois les forces des liaisons surabondantes connues, les méthodes de la RDM permettent de tracer les diagrammes des efforts M, N, T du système isostatique équivalent chargé simultanément par le système de forces extérieures et le système de forces calculées, et par suite appliquer les méthodes énergétiques pour le calcul des déplacements.

.../...

2) METHODE DES DEPLACEMENTS CLASSIQUE

Dans cette méthode on prends comme inconnues les déplacements subis par les noeuds de la structure- rotations et translations-. La structure initiale est remplacée par un système statique de base qui a la caractéristique de permettre le calcul des efforts engendrés dans ses barres pour n'importe quel déplacement donné à un noeud quelconque . Cette dernière est obtenue en introduisant dans la structure initiale des liaisons supplémentaires pour empêcher toute possibilité de déplacement des noeuds - rotations et translations.

En écrivant les conditions d'équilibre pour chaque déplacement des noeuds, on obtient les équations de conditions nécessaires pour déterminer les valeurs inconnues des déplacements.

- Equations de conditions:

Du fait que la structure initiale n'a pas de liaisons supplémentaires, il en découle que les résultantes des réactions qu'ont été engendrées dans ces liaisons par les forces extérieures et par l'empêchement des déplacements doivent être nulles.

En appliquant le principe de la superposition des effets, on obtient le système d'équations suivant:

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j + R_{ip} = 0 \quad \text{avec :}$$

X_j : déplacement généralisé de l'appui j- rotation ou translation

R_{ij} : Réaction - force ou moment- à l'appui i du au déplacement unitaire de l'appui j dans la direction du déplacement de celui-ci.

R_{ip} : Réaction de l'appui i due aux charges extérieures P/

Sous forme matricielle, le système précédent s'écrit: $(K) (X) + (R) = 0$

(K) est alors appelée matrice de rigidité du système.

D'après le théorème de BETTI-MAXWELL, la matrice de rigidité (K) est symétrique C.A.D $k_{ij} = k_{ji}$ et les termes diagonaux k_{ii} sont réels positifs.

- Calcul des efforts:

Après avoir trouvé les valeurs des déplacements inconnus, on obtient les efforts généralisés par la superposition des effets soit : $E_i = e_{ij} x_j + e_{ip} = 0$

e_{ij} = effort généralisé en i du au déplacement généralisé unitaire $x_j=1$

e_{ip} = effort généralisé en i du au charges extérieures P.

(H A P I T R E III

/)/)ETHODE MATRICIELLE DES DEPLACEMENTS

1/- PRINCIPE DE LA METHODE DES DEPLACEMENTS

La méthode de déplacements est caractérisée par le fait que les déplacements indépendants des noeuds sont pris comme inconnus.

La condition de compatibilité est satisfaite en premier lieu en faisant correspondre le déplacement du noeud avec les déformations des barres le composant.

Les forces dans les barres sont ensuite reliées aux déplacements du point nodal par une matrice définie positive comme la rigidité de chaque barre désignée par la lettre k . Les forces nodales, sont reliées aux déplacements des noeuds par une matrice définie comme la matrice de rigidité de la structure K .

Enfin, finalement, selon les conditions d'équilibre, les forces nodales obtenues à partir des déplacements inconnus des noeuds et de la raideur K doivent contrebalancer les charges extérieures appliquées aux noeuds.

Si les charges extérieures sont données, on peut trouver les déplacements inconnus des noeuds, et ainsi les forces dans les barres, et les déformations de la structure toute entière.

L'avantage remarquable de la méthode de déplacement est qu'elle s'applique avec autant de facilités à toutes les structures qu'elle soient statiquement indéterminées ou statiquement déterminées.

2/- DISCRETISATION D'UNE STRUCTURE :

Un corps déformable possède un nombre infini de points, en chacun de ceci on peut définir les forces extérieures, les contraintes, les déformations et les déplacements.

Les méthodes de calcul des structures s'appliquent à un nombre fini de grandeurs que l'on traite matriciellement ; dès lors il est indispensable de substituer à la structure étudiée un modèle mathématique composé d'un certain nombre d'éléments appelés éléments finis ou discrets reliés entre eux en un nombre fini de points appelés noeuds.

Ainsi une membrure en treillis est idéalisée par une série d'éléments discrets, constitués par les barres treillis supposées articulées à leurs extrémités et pour lesquelles les forces et déplacements généralisés sont respectivement les efforts et déplacements axiaux aux extrémités.

.../...

Le comportement des composants élémentaires aussi bien que celui de l'ensemble de la structure est régi par les deux principes fondamentaux suivants :

- Conditions d'équilibre: les forces agissant sur toute la structure ou sur chacun des composants considérés comme un corps libre doivent être en équilibre. Pour l'ensemble de la structure, les forces sont les charges extérieures et les forces internes appliquées à chaque extrémité de l'élément.

- Condition de compatibilité: les déplacements de l'ensemble de la structure ou de chacun de ses éléments doivent être compatibles.

3/ - MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT DE STRUCTURE :

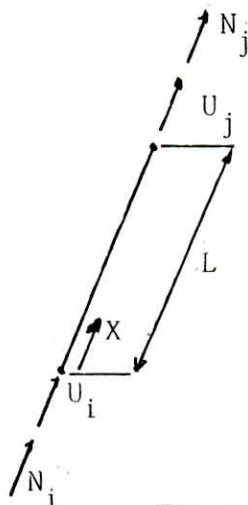
Après avoir idéalisé la structure réelle en une structure composée d'éléments discrets, il s'agit de calculer la matrice de rigidité de ses éléments.

Les forces nodales et déplacements généralisés, sont considérés comme des forces et déplacements extérieurs pour l'élément envisagé et induisent dans celui-ci une distribution de contraintes σ et de déformations ϵ_0 .

Une barre de treillis et un élément uniaxial bi-articulé non chargé entre ses extrémités, de sorte qu'il est soumis exclusivement à des efforts axiaux N_i et N_j .

L'Equilibre de la barre fournit immédiatement

$$N_i = -N_j$$



avec le système d'axes choisi (voir figure) un déplacement axial en un point quelconque de la barre :

$$U = U_j \cdot x/L + U_i \cdot (1-x/L)$$

La déformation correspondante

$$(\epsilon) = du/dx = (U_j - U_i)/L$$

et les contraintes :

$$(\sigma) = (D)(\epsilon) = E/L \cdot (U_j - U_i)$$

En utilisant le 1er théorème de CASTIGLIANO on a :

$$dU / du_i = P$$

.. / ...

Or, l'énergie potentielle interne s'écrit :

$$U = E.A/2 \int_0^l (u_j - u_i)^2 dx = (E.A/2.l)(u_j - u_i)^2$$

$$N_j = dU/du_j = (E.A/l)(u_j - u_i)$$

$$N_i = dU/du_i = -(E.A/l)(u_j - u_i)$$

d'où la matrice de rigidité élémentaire déduite de la relation $K.U=F$.

$$\underline{\underline{K}} = E.A/l \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4/ - PREPARATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE EN VUE D'ASSEMBLAGE :

Etant donné qu'une barre s'intègre généralement dans une structure plane ou spatiale et afin de traduire correctement le comportement de la barre dans un espace de dimensions adéquates, on définit une nouvelle matrice de rigidité dans un repère global lié à la structure toute entière.

Pour passer du repère local au repère global, la matrice de rigidité dans le repère local (\bar{K}) subit les transformations suivantes :

- a - Une expansion de (\bar{K}) destinée à exprimer celles-ci dans un espace de mêmes dimensions que celui contenant la structure étudiée.
- b - Une transformation de la matrice expansée pour la rapporter aux systèmes d'axes global par l'utilisation d'une matrice de rotation notée (R).

Si un système d'axes orthogonaux $oxyz$ subit une rotation autour de son origine O de manière à occuper une position $ox'y'z'$, la relation liant les composantes d'un vecteur donné, défini respectivement dans les deux systèmes d'axes est :

$$(V_1) = (R_0) (V)$$

avec

$$(R_0) = \begin{bmatrix} 1 & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

où l_i, m_i, n_i , sont les cosinus directeurs des axes $ox'y'z'$ dans les axes $oxyz$.

En vertu des propriétés des cosinus directeurs, on montre que : $(R_0)(R_0)^T = (R_0)(R_0)^{-1} = (I)$

donc $(R_0)^{-1} = (R_0)^T$

On peut exprimer la relation force-déplacement dans n'importe quel système d'axes global par la relation:

$$(Q) = (K) (q)$$

si on l'exprime dans le système d'axes locaux, elle s'écrit:

$$(\bar{Q}) = (\bar{K}) (\bar{q}) \quad (1)$$

or $(\bar{Q}) = (R) (Q)$
 $(\bar{q}) = (R)(q) \quad (*)$

en substituant les relations (*) dans la relation (1) on obtient:

$$(R).(Q) = (\bar{K})(R)(q)$$

et après prémultiplication par $(R)^T$, on obtient :

$$(Q) = (R)^T (\bar{K}) (R) (q)$$

par comparaison avec $(Q) = (K)(q)$ on tire :

$$\underline{(K) = (R)^T (\bar{K}) (R)}$$

5/ - MATRICE DE RIGIDITE SPACIALE D'UN ELEMENT DE TREILLIS :

Dans le calcul des structures on rencontre des vecteurs formés de plusieurs vecteurs groupant les efforts nodaux agissant sur un élément. Pour une barre de noeuds i et j , on a deux vecteurs contenant des efforts nodaux \bar{V}_1 et \bar{V}_2 . Dans le système d'axes globaux, on obtient :

$$(V_1) = (R) \times (\bar{V}_1) , \quad (V_2) = (R) \times (\bar{V}_2)$$

en les rassemblant sous forme d'un vecteur unique :

$$\begin{Bmatrix} (V_1) \\ (V_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_0) \\ (R_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\bar{V}_1) \\ (\bar{V}_2) \end{Bmatrix} = (R) \begin{Bmatrix} (\bar{V}_1) \\ (\bar{V}_2) \end{Bmatrix}$$

La matrice de rigidité spatiale de l'élément de treillis s'obtient en tenant compte de son expansion dans l'espace tridimensionnel de la façon suivante :

.../...

$$(K) = \begin{bmatrix} l_x l_y l_z & 0 & 0 & 0 \\ m_x m_y m_z & 0 & 0 & 0 \\ n_x n_y n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x m_x n_x & 0 & 0 & 0 \\ l_y m_y n_y & 0 & 0 & 0 \\ l_z m_z n_z & 0 & 0 & 0 \\ L_x m_x n_x \\ l_y m_y n_y \\ l_z m_z n_z \end{bmatrix}$$

en developpant, on obtient :

$$(K) = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l_x^2 & & & & & \\ l_x m_x & m_x^2 & & & & \\ l_x n_x & m_x n_x & n_x^2 & & & \\ -l_x^2 & -l_x m_x & -l_x n_x & l_x^2 & & \\ -l_x m_x & -m_x^2 & m_x n_x & l_x m_x & m_x^2 & \\ -l_x n_x & -m_x n_x & -n_x^2 & l_x n_x & m_x n_x & n_x^2 \end{bmatrix} \text{ SYMETRIQUE}$$

avec :

$$L = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}$$

$$l_x = x_j - x_i ; \quad l_y = y_j - y_i ; \quad l_z = z_j - z_i$$

les cosinus directeurs se calculent à l'aide des formules suivantes:

$$l = l_x / L ; \quad m = l_y / L ; \quad n = l_z / L$$

ces derniers ont la propriété suivante : $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

6)- CALCUL DE L'EFFORT NORMAL :

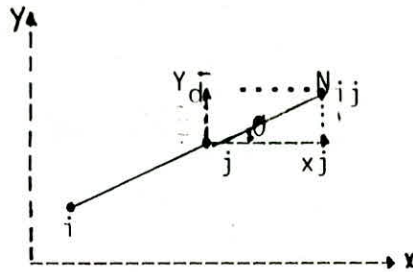
Soit une barre de noeuds i et j, l'équation liant les forces aux déplacements dans le repère global est :
(F) = (K) (U)

soit :

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{pmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{pmatrix}$$

$\lambda = \cos \theta$

$\mu = \sin \theta$



L'effort ascial en i ou en j est le même, on prends :

N)0 : TRACTION

N(0 : COMPRESSION

$N_{ij} = X_j \cos \theta + Y_j \sin \theta = \lambda X_j + \mu Y_j$

L'équation matricielle précédente nous donne :

$X_j = \frac{E \cdot A}{L} (\lambda^2 (u_j - u_i) + \lambda\mu(v_j - v_i))$

$Y_j = \frac{E \cdot A}{L} (\lambda\mu(u_j - u_i) + \mu^2 (v_j - v_i))$

sous forme matricielle N_{ij} s'écrit : $N_{ij} = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix}$

En remplaçant X_j et Y_j par leurs valeurs, on trouve :

$$N_{ij} = \frac{E \cdot A}{L} (\lambda(u_j - u_i) + \mu(v_j - v_i))$$

(() H A P I T R E - IV -

=====

///

R O G R A M M A T I O N

=====

INTRODUCTION

L'étude des structures par la méthode matricielle des déplacements revient à poser le problème en terme de résolution d'un système d'équations linéaire, écrit sous la forme :

$$(K) (U) = (F)$$

(K): Matrice de rigidité globale

(U): Vecteur déplacement inconnu

(F): Vecteur force global

A)- ENTREE DES DONNEES

Pour qu'on puisse résoudre le problème, on doit transmettre toutes les informations nécessaires aux différentes parties constituant le programme.

Les données sont construites principalement d'informations sur les noeuds (nombre de noeuds total, numéros des noeuds, conditions d'appuis, conditions de chargement....), et sur les éléments (nombre d'éléments, noeud début, noeud fin, propriétés mécaniques et géométriques).

Cette partie du programme utilise trois subroutines : INPUT - LOADS - RUSS , dont les fonctions respectives sont:

INPUT : Introduction des codes d'appuis et les coordonnées des noeuds dans un repère tridimensionnel.

Les codes d'appuis sont introduits selon la codification suivante:

1 : pour un noeud bloqué

0 : pour un noeud libre

REMARQUE

Pour le calcul des structures planes , il suffit de bloquer le degré de liberté perpendiculaire au plan de la structure.

LOADS : Introduction des charges concentrées au niveau des noeuds d'après le schéma suivant :

- Le noeud chargé
- La direction du chargement
- L'intensité de la charge

.../...

La subroutine LOADS assure la localisation des charges selon la direction de celles-ci dans un vecteur pour être ensuite stockées dans un fichier pour utilisation ultérieure .

RUSS : Ce sous-programme se compose des étapes suivantes :

* Pour chaque élément :

- Lecture des connectivités (noeud début, noeud fin), des propriétés mécanique et géométriques.
- Cré la table de localisation .

** Calcul de la largeur de bande N B.W

Pour chaque élément, il calcule la valeur absolue de la différence entre le numéro du noeud début et celui du noeud fin.

$$IDEF = | J - I |$$

Soit IMAX la valeur maximal des IDEF calculées, la largeur de bande NBW est calculée par la formule ci-après :

$$NBW = (IMAX + 1) \times ND$$

ND: nombre de degré de liberté par noeud (3 pour une structure spatiale en treillis).

*** Dimension du vecteur contenant la partie supérieure de la matrice de rigidité(NWK)

En chaque ligne "i" et à tout moment de la résolution, le terme (i+NBW) sera nul. On peut donc conserver la matrice de rigidité sous-forme d'un tableau de dimension :

$$NWK = NEQ \times NBW \quad (NEQ: \text{nombre d'équation})$$

il apparait de ce qui précède que la dimension du problème dépend de la largeur de bande calculer, ainsi, le gain en capacité du programme revient à minimiser la largeur de bande qui, elle, est étroitement liée avec la numérotation des noeuds choisis.

B)- ASSEMBLAGE :

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale (K) et le vecteur global des sollicitations (F) à partir des matrices élémentaires (k) et des vecteurs élémentaires de sollicitations (f).

.../...

De manière à standardiser les opérations d'assemblage, nous avons défini pour chaque élément la table de localisation élémentaire LM qui donne la position de chaque terme des matrices de rigidité élémentaires (k_e) dans la matrice de rigidité globale (K), donc également la position de chaque terme de vecteur s élémentaires des sollicitations (f) dans le vecteur global (F).

- Initialiser les termes de (K) et (F) à zéro
- Pour chaque élément e:

ajouter chaque terme k_{ij} de sa matrice élémentaire au terme

K_{IJ} de la matrice globale:

$$\text{où : } \begin{aligned} I &= \text{LM}(i) \\ J &= \text{LM}(j) \end{aligned}$$

ajouter chaque terme f_i du vecteur élémentaire des sollicitations au terme F_I du vecteur global :

$$F_I = F_I + f_i \quad i = 1, 2, \dots, n: \text{ nombre de degré de liberté par élément}$$

$$\text{où : } I = \text{LM}(i)$$

Par soucis de réduire et compacté l'espace mémoire utilisé pour le stockage de la matrice de rigidité globale ainsi que le nombre d'opérations lors de la résolution du système, nous présentons ci-dessous l'algorithme d'assemblage adapté pour le stockage en bande:

```

pour ID = 1, NDLE
  I = LM(ID)

pour JD = 1, NDLE
  J = LM(JD)
  si J > I alors faire
    JJ = J - I + 1
    II = I
    K (II, JJ) = K(II, JJ) + Ke(ID, JD)
  sinon continuer fin faire
  
```

où : NDLE : nombre de degré de liberté par élément

C) - INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites peuvent être introduites dans le système $(K)(U) = (F)$ de plusieurs manières:

1) METHODE DU TERME DIAGONAL DOMINANT

La matrice (K) est assemblée sans tenir compte des conditions aux limites; puis chaque relation $U_i = \bar{U}_i$ est introduite en remplaçant :

.../...

- K_{ii} par $K_{ii} + X$, X étant un nombre très grand par rapport à tous les termes K_{ij}
 - F_i par $X \bar{U}_i$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & & & \\ K_{i1} & & K_{ii} + X & & K_{in} \\ \vdots & & & & \\ K_{n1} & & K_{ni} & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ X \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

l'équation j s'écrit :

$$XU_i + \left(\sum_{j \neq i} K_{ij} U_j \right) = X\bar{U}_i$$

elle admet la solution approchée $U_i = \bar{U}_i$

et

$$X \bar{U}_i \gg \sum_{j \neq i} K_{ij} U_j$$

cette méthode est très simple à mettre en oeuvre car il suffit de changer les deux termes K_{ij} et F_i , mais elle peut poser des problèmes lorsque la matrice (K) est mal conditionnée et lorsque certaines composantes de (U_n) sont grandes.

2) METHODE DU TERME UNITE SUR LA DIAGONALE

Elle consiste à modifier, pour chaque déplacement imposé $U_i = \bar{U}_i$, le vecteur (F) et la matrice de rigidité (K) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F_j &= F_j - K_{ji} \bar{U}_i & j = 1, \dots, n & \quad j \neq i \\ F_i &= X \bar{U}_i \\ K_{ij} &= K_{ji} = 0 & j = 1, \dots, n & \quad j \neq i \\ K_{ii} &= 1 \end{aligned}$$

le système devient donc :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1,i-1} & 0 & K_{1,i+1} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ K_{i-1,1} & \dots & K_{i-1,i-1} & 0 & K_{i-1,i+1} & \dots & K_{i-1,n} \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ K_{i+1,1} & \dots & K_{i+1,i-1} & 0 & K_{i+1,i+1} & \dots & K_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \\ K_{n1} & \dots & K_{n,i-1} & 0 & K_{n,i+1} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - K_{1,i} \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_{i-1} - K_{i-1,i} \bar{U}_i \\ X \bar{U}_i \\ F_{i+1} - K_{i+1,i} \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_n - K_{ni} \bar{U}_i \end{bmatrix}$$

.../...

Cette méthode ne pose pas de problèmes numériques de la précédente, par contre elle est plus complexe à programmer.

3) METHODE DE SUPPRESSION DES EQUATIONS:

Elle consiste à restructurer la matrice (K) de manière à supprimer les équations correspondants aux degrés de liberté imposés \bar{U}_i .

D) METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION DE CHOLESKY

Le but de la résolution numérique est certes de résoudre le système linéaire (K) (U) = (F), mais encore d'assurer une meilleure précision et une économie sur les opérations qui assure un minimum de temps de résolution.

Pour arriver à cette finalité, notre choix s'est porté sur la méthode de CHOLESKY qui s'applique particulièrement pour les systèmes matriciels à matrices symétriques définies positives, comme c'est le cas de la matrice de rigidité globale (K).

Le principe général de cette méthode est de décomposer une matrice (A) en un produit d'une matrice triangulaire inférieure (L_i), une matrice diagonale (D) et une matrice supérieure (L_s) soit, (A) = (L_i)(D)(L_s)^T; de plus on a (L_i) = (L_s)^T et les éléments diagonaux de (L) sont égaux à 1:

$$(A) = (L)^T(D)(L).$$

L'algorithme de décomposition de CHOLESKY appliqué au triangle supérieur de la matrice de rigidité globale (K) est le suivant :

$$\begin{aligned}
l_{ii} &\Rightarrow 1 \\
d_{ii} &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{ki})^2 \times d_{kk} & i = 1, m \\
l_{ij} &= 1/d_{ii} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} \cdot d_{kk} \cdot l_{kj}) & j = i+1, m
\end{aligned}$$

Le système d'équations linéaires (K) (U) = (F) devient alors : (L)^T(D)(L)(U) = (F).

On remarque de ce qui précède que la décomposition de CHOLESKY ne fait pas intervenir le second membre du système d'équations ; ainsi la décomposition peut être faite une fois pour toute et la résolution appliquée successivement au différents cas de charges.

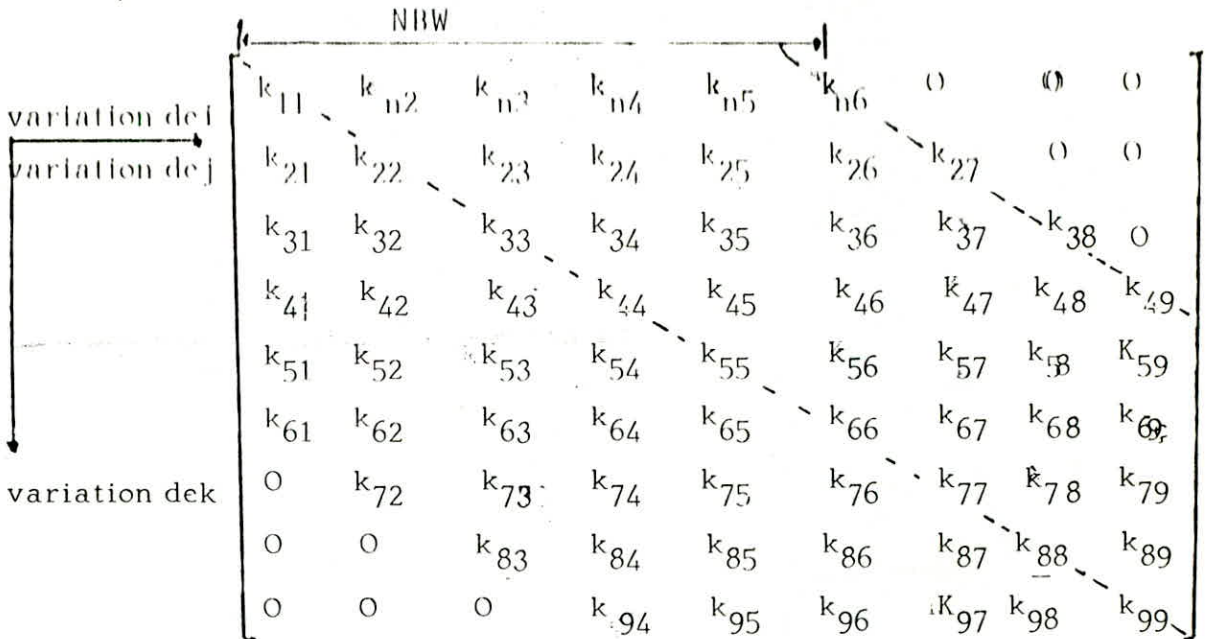
METHODE DE CHOLESKY MODIFIEE:

Cette phase de calcul présente un grand intérêt pour l'aspect numérique du problème, intérêt qui porte principalement sur la réduction appréciable de l'espace mémoire qu'on doit utiliser pour la résolution du système, en introduisant la notion de stockage en bande, ainsi que la réduction du nombre

d'opération en éliminant celles qui sont faites sur des éléments nuls, c.a.d, se trouvant en dehors de la largeur de bande.

Avant de présenter l'algorithme de décomposition adopté au système stocké en bande, nous avons juger utile d'exposer les étapes de son élaboration.

Soit K une matrice symétrique, définie positive et soit NBW sa largeur de bande comme montré sur l'exemple suivant:



Afin d'utiliser la notion de bande, il était nécessaire de penser à une nouvelle variation des indices introduits dans l'algorithme de décomposition, qui dans leur état initial, prenait en considération tous les éléments de la matrice même ceux qui sont nuls.

La décomposition faite sur des matrices supérieures de largeur de bande NBW, a montré que le calcul des termes suivants:

$$d_{ii} = a_{ii} - \left(\sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} \right)^2 \cdot d_{kk} \quad i=1, n$$

$$l_{ij} = 1/d_{ii} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} \cdot d_{kk} \cdot l_{kj} \right) \quad j=i+1, n$$

nécessitait une variation de l'indice ligne k de (i-NBW+1) jusqu'à (i-1) sans que (i-NBW+1) soit inférieur à 1, une variation de l'indice colonne j de (i+1) jusqu'à (i+NBW-1) sans toute fois dépasser n (n étant le nombre d'équations du système).

Cette nouvelle variation d'indice nous permet d'éliminer toutes les opérations de décomposition faites sur des éléments nuls situés en dehors de la largeur de bande.

Revenons à l'exemple précédent, l'ordre de la matrice K est (9x9), la largeur de bande NBW=6;

Si l'indice colonne $i = 8$, l'indice k varie de $(i-NBW+1)=3$ jusqu'à $(i-1)=7$.

si $i = 4, (i-NBW+1) = -1$ implique k varie de 1 jusqu'à $(i-1)=3$.

De la même façon, si on prends $i = 8$, l'indice colonne j varie de $(i+1) = 9$ jusqu'à $(i+NBW-1)=13$ $\} n = 9$ implique j varie de 9 jusqu'à 9.

si $i = 4, i + NBW - 1 = 9$ implique j varie de 5 jusqu'à 9.

Dans tous les cas, les opérations de décomposition sont faites sur des éléments non nuls situés à l'intérieur de la largeur de bande.

l'algorithme de décomposition devient :

$$\left| \begin{array}{l} L_{i,1} = 1 \\ d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=i-NBW+1}^{i-1} (L_{ki})^2 d_{kk} \\ L_{ij} = \frac{1}{d_{ij}} \left(a_{ij} - \sum_{k=i-NBW+1}^{i-1} L_{ki} d_{kk} l_{kj} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} i = 1, n \\ j = i+1, i+NBW-1 \end{array}$$

- Transformation en matrice bande :

Soient i et j respectivement les indices ligne et colonne de la matrice globale d'ordre $(n \times n)$, et soit K_b une matrice bande d'ordre $(n \times NBW)$; la formule qui permet de placer un élément de K dans K_b

est la suivante :

$$\left[\begin{array}{l} I = i \\ J = j - i + 1 \\ \text{pour } j > i \end{array} \right.$$

I et J sont les indices ligne et colonne de K_b

d'après l'exemple précédent, K_b a la forme suivante:

.../...

$$\begin{array}{cccccc}
 k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\
 k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} \\
 k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\
 k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} & k_{49} \\
 k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & k_{59} & 0 \\
 k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} & 0 & 0 \\
 k_{77} & k_{78} & k_{79} & 0 & 0 & 0 \\
 k_{88} & k_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

On en déduit l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 L_{i,1} = 1 \\
 d_{i,1} = a_{i,1} - \sum_{k=i-nbw+1}^{i-1} L_{k,1} d_{k,1} \\
 L_{i,j} = \frac{1}{d_{i,1}} \left[a_{i,j} - \sum_{k=i-nbw+1}^{i-1} L_{k,II} d_{k,1} L_{k,jj} \right]
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 I=i-K+1 \\
 J=j-i+1 \\
 II= i - K + 1 \\
 JJ= j - K + 1
 \end{array}$$

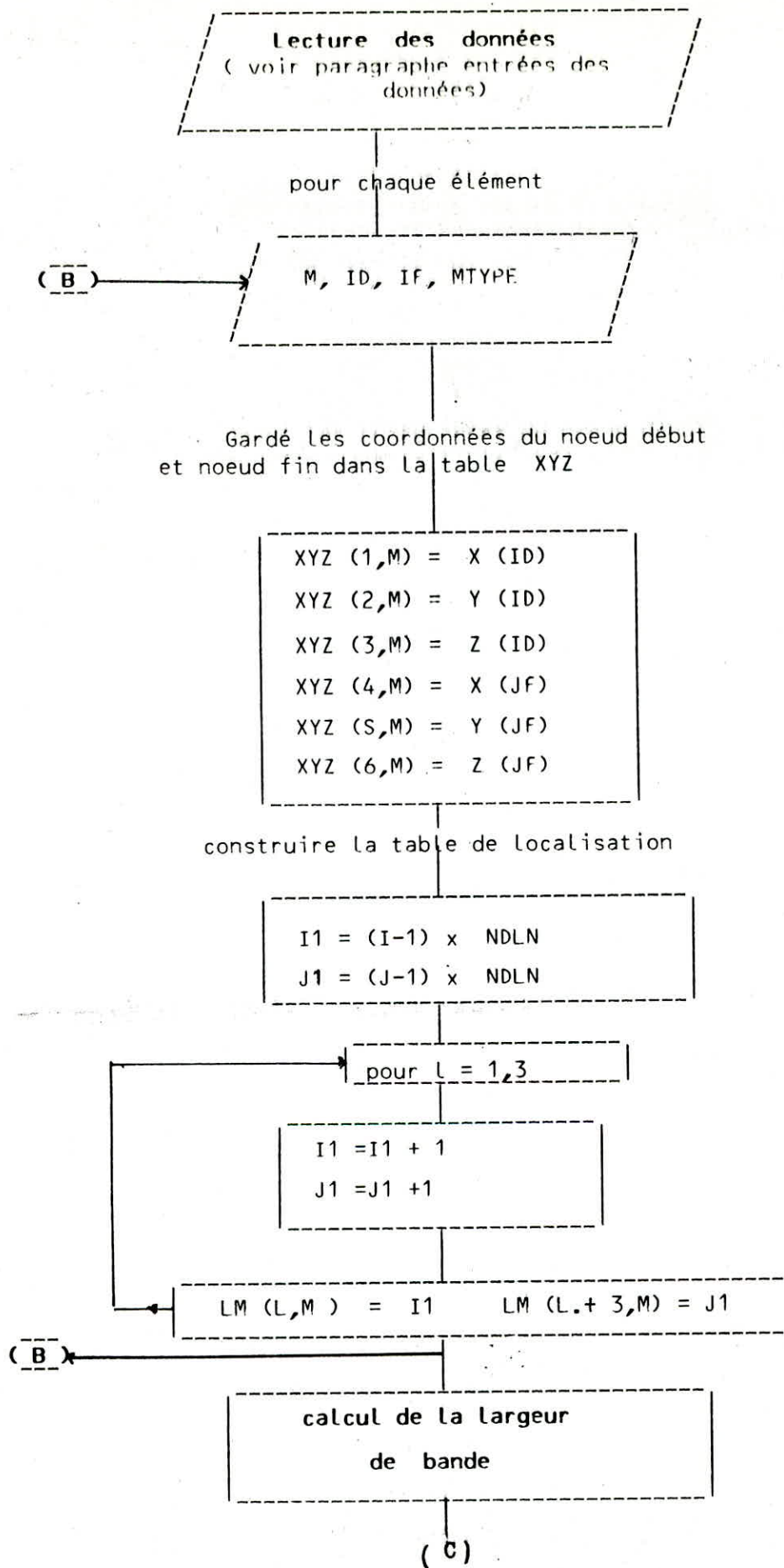
-Stockage de la matrice bande en vecteur:

Ceci est possible en employant la formule suivante dans l'algorithme précédent : $K = NEQ(J-1)+1$

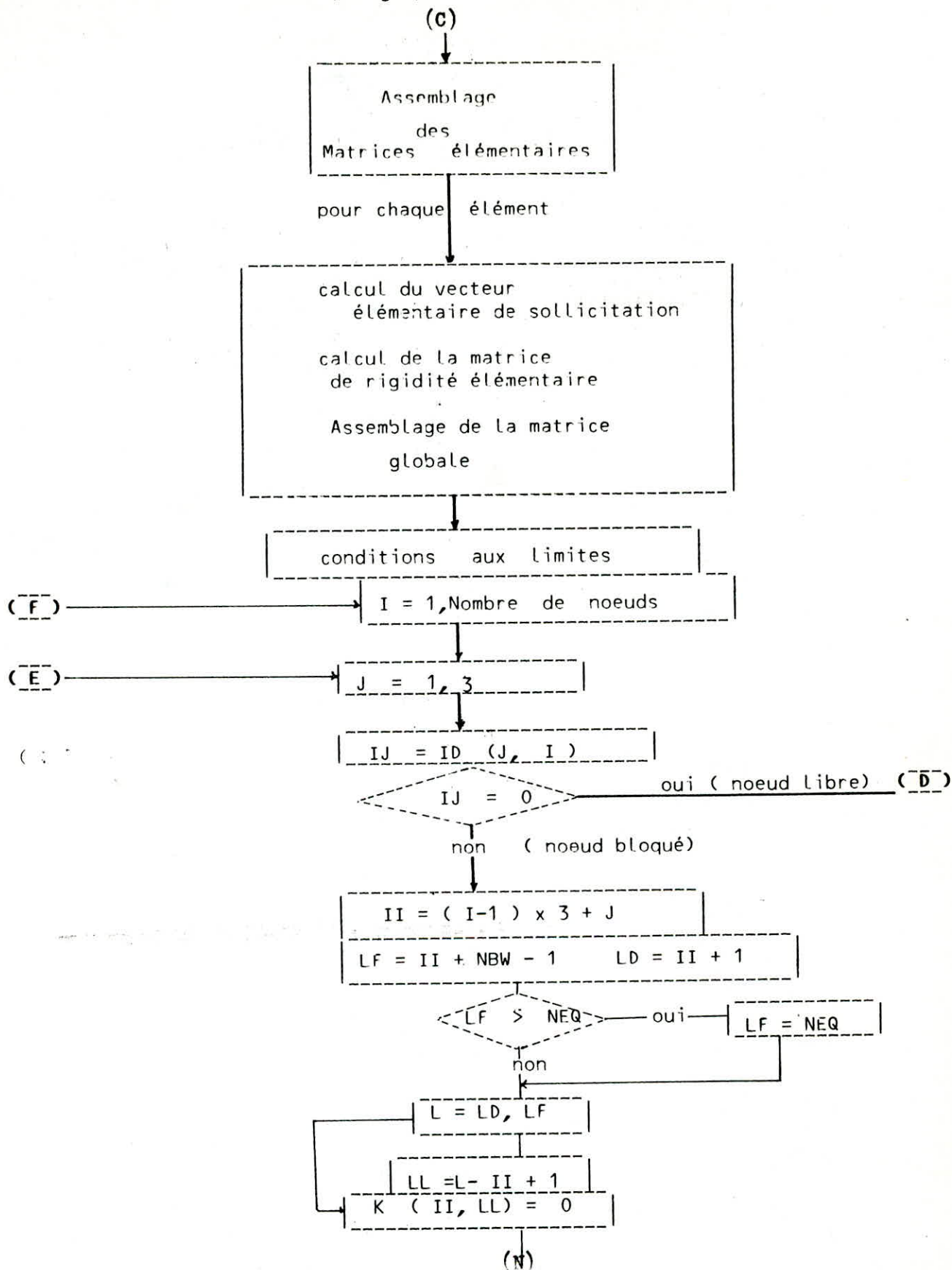
Le nouveau algorithme est le suivant:

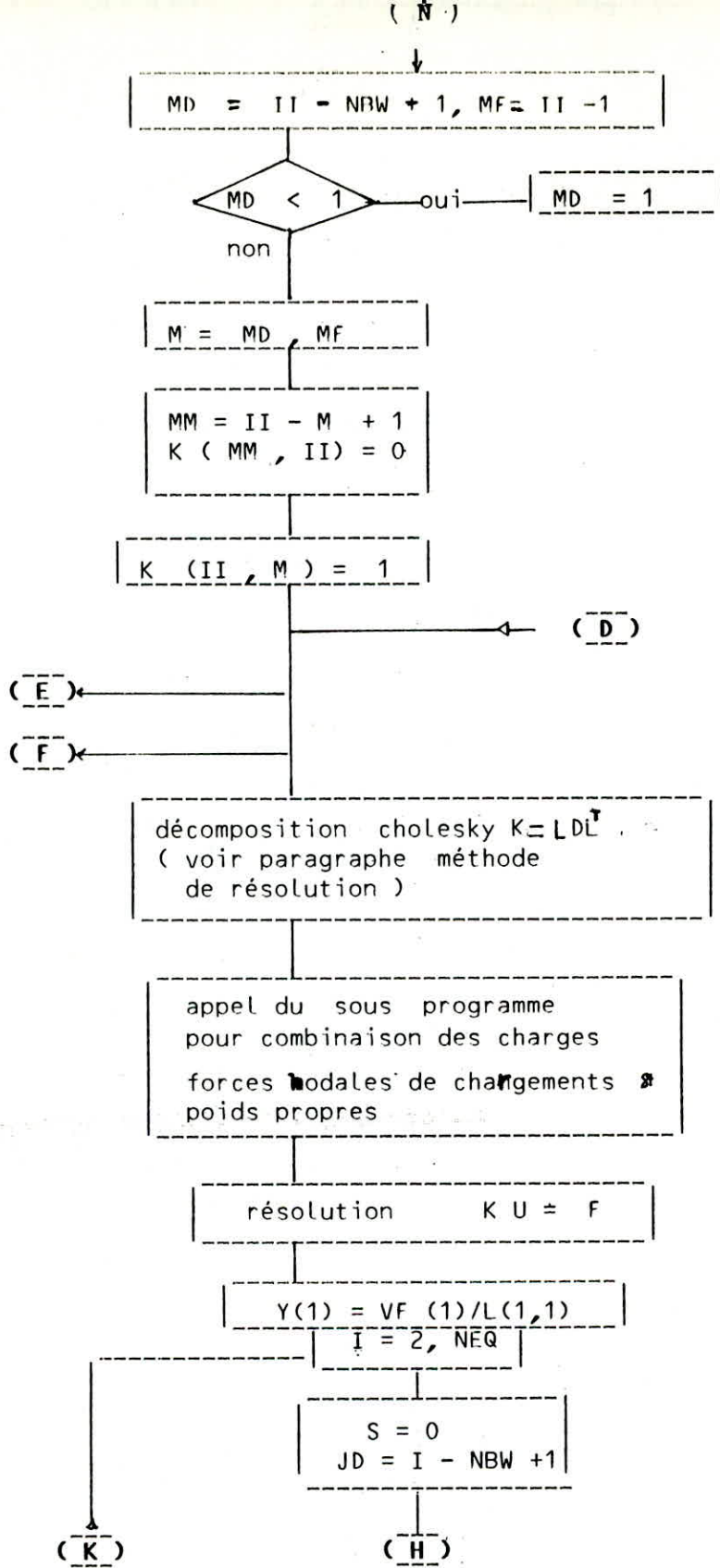
$$\left\{ \begin{array}{l}
 K1 = NEQ (1-1)+1 = 1 \\
 L_{k1} = 1 \\
 K2 = NEQ (I-1)+K \quad , \quad K3 = NEQ(1-1)+K=K \\
 d_{k1} = a_{k1} - L_{k2} \cdot d_{k3} \\
 K4 = NEQ (3-1)+1 \quad , \quad K5=NEQ(II-1)+K \quad , \quad K6=NEQ(JJ-1)+K \\
 L_{K4} = \frac{1}{d_{k1}} \left| a_{k4} - \sum L_{k5} d_{k3} L_{k6} \right|
 \end{array} \right.$$

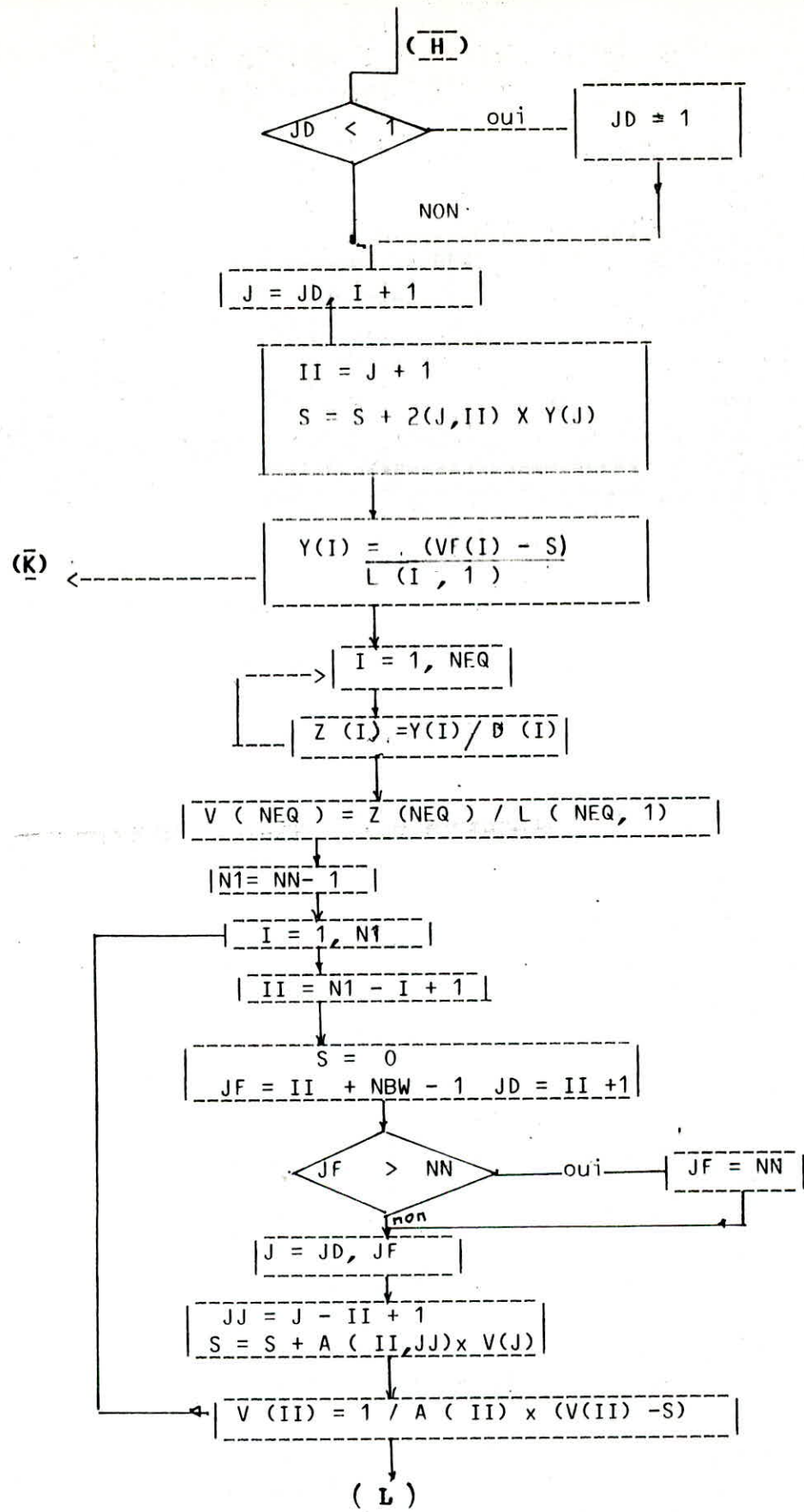
.../...



(voir paragraphe (entrée des données)







(H)

JD < 1

oui

JD = 1

NON

J = JD, I + 1

II = J + 1
S = S + 2(J, II) x Y(J)

Y(I) = (VF(I) - S) / L(I, 1)

(K)

I = 1, NEQ

Z(I) = Y(I) / B(I)

V(NEQ) = Z(NEQ) / L(NEQ, 1)

N1 = NN - 1

I = 1, N1

II = N1 - I + 1

S = 0
JF = II + NBW - 1 JD = II + 1

JF > NN

oui

JF = NN

non

J = JD, JF

JJ = J - II + 1
S = S + A(II, JJ) x V(J)

V(II) = 1 / A(II) x (V(II) - S)

(L)

(L)

Impression des déplacements

calcul des contraintes

$$\bar{F}_i = (\lambda (U_i - U_j) + \beta (V_i - V_j) + \gamma (W_i - W_j)] \frac{EA}{L}$$

impression des contraintes

) EUXIEME

) ARTIE

 / -) NALYSE

) YNAMIQUE

=====

(H A P I T R E - I -

G E N E R A L I T E S

=====

1) INTRODUCTION

Si on trouve aujourd'hui naturel de profiter du progrès de la technologies, on a pris également conscience des dangers qui les accompagnent :

c'est pourquoi l'ingénieur se voit exigé des réalisations toujours moins couteuses et toujours plus fiables, contradiction apparente que seule une conception mieux comprise permet de dépasser. C'est ainsi que la plupart des structures exigent à présent la détermination de leurs réponse aux sollicitations de nature dynamique qu'elle sont amenées à rencontrer au cours de leurs existence.

Généralement on comprend par "action dynamique" la sollicitation produite par des charges qui varient avec le temps et qui contribuent à l'apparition des forces d'inerties.

La signification du terme dynamique peut se définir simplement comme: variable dans le temps; une charge dynamique est donc une charge dont l'intensité, la direction, ou le point d'application varient avec le temps. De même, la réponse de la structure à une charge dynamique, C.A.D les déplacements et les contraintes qui en résultent, est également variable dans le temps, donc dynamique elle aussi.

2)- TYPES DE CHARGEMENTS DYNAMIQUES

On peut subdiviser les chargements donnés en deux grandes catégories : périodiques et non périodiques.

- Chargements périodiques :

Ils sont constitués par des charges répétitives qui conservent la même évolution dans le temps sur un grand nombre de cycles.

Exemples : machines tournantes

- Chargements non périodiques:

Ils sont soit des impulsions de courtes durées, soit des chargements de longues durées et de forme quelconque.

Exemples : les chocs, les explosions, les secousses sismiques.

3)- CARACTERISTIQUES D'UN PROBLEME DYNAMIQUE

La nature évolutive du problème dynamique dans le temps, nous contraint de déterminer une succession de de solutions correspondant à tous les instants qui présentent un intérêt dans l'histoire de la réponse.

.../...

1)- INTRODUCTION

Si on trouve aujourd'hui naturel de profiter du progrès de la technologies, on a pris également conscience des dangers qui les accompagnent:

c'est pourquoi l'ingénieur se voit exigé des réalisations toujours moins couteuses et toujours plus fiables, contradiction apparente que seule une conception mieux comprise permet de dépasser. C'est ainsi que la plupart des structures exigent à présent la détermination de leurs réponse aux sollicitations de nature dynamique qu'elle sont amenées à rencontrer au cours de leurs existence.

Généralement on comprend par "action dynamique" la sollicitation produite par des charges qui varient avec le temps et qui contribuent à l'apparition des forces d'inerties.

La signification du terme dynamique peut se définir simplement comme: variable dans le temps; une charge dynamique est donc une charge dont l'intensité, la direction, ou le point d'application varient avec le temps. De même, la réponse de la structure à une charge dynamique, C.A.D les déplacements et les contraintes qui en résultent, est également variable dans le temps, donc dynamique elle aussi.

2)- TYPES DE CHARGEMENTS DYNAMIQUES

On peut subdiviser les chargements donnés en deux grandes catégories : périodiques et non périodiques.

- Chargements périodiques :

Ils sont constitués par des charges répétitives qui conservent la même évolution dans le temps sur un grand nombre de cycles.

Exemples : machines tournantes

- Chargements non périodiques:

Ils sont soit des impulsions de courtes durées, soit des chargements de longues durées et de forme quelconque.

Exemples : les chocs, les explosions, les secousses sismiques.

3)- CARACTERISTIQUES D'UN PROBLEME DYNAMIQUE

La nature évolutive du problème dynamique dans le temps, nous contraint de déterminer une succession de solutions correspondant à tous les instants qui présentent un intérêt dans l'histoire de la réponse.

.../...

La caractéristique fondamentale d'un problème dynamique est telle que les déplacements correspondants à des accélérations engendrées par des forces dynamiques produisent des forces d'inerties opposées à ces mêmes accélérations.

4)- METHODE DE DISCRETISATION

L'étude dynamique d'un système est liée avec l'état de continuité des masses de ce système. Si la masse est répartie de manière continue, les accélérations et les déplacements doivent être définies en chaque point de la structure.

Il est dans ce cas nécessaire de formuler le problème à l'aide d'équation aux dérivées partielles à deux variables: le temps et la position le long de la structure, mais si la masse de la structure peut être considérée comme concentrée en un certain nombre de points discrets, le problème se trouve grandement simplifié et le nombre de degrés de liberté sera limité, car les forces d'inerties ne peuvent alors apparaître en aucun autre point. Dans ce cas, il n'est nécessaire de définir les déplacements et les accélérations qu'en ces points.

5)- FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

Les équations mathématiques qui définissent le déplacement dynamique sont appelées équations du mouvement de la structure : La résolution de ces équations donne les histoires de déplacement recherchés.

L'écriture directe de l'équilibre dynamique par le principe de d'Alembert s'appuyant sur la variation de la quantité de mouvement est :

$$P(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dv}{dt} \right)$$

((_____ H A P I T R E -II -

=====

// _____ YSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE

=====

SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE

L'étude d'un système à un degré de liberté revient à l'étude d'un oscillateur simple constitué d'une masse m reliée à un point fixe par un ressort de rigidité K et un amortisseur C , et pouvant se déplacer dans une seule direction. La masse est soumise à une force $P(t)$ variable avec le temps.

1)- FORMULATION DE L'EQUATION DE MOUVEMENT

a) cas général :

Lors du mouvement, la masse est soumise aux forces suivantes:

- La force de rappel du ressort, supposée proportionnelle au déplacement : $F_1 = -K_2 U$.

- La force due à l'amortisseur, supposée proportionnelle à la vitesse : $F_2 = -C\dot{U}$.

- La force imposée $P(t)$.

la loi fondamentale de la dynamique s'écrit:

$$F_1 + F_2 + p(t) = m\ddot{u}$$

soit :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

on en déduit l'équation du mouvement :

$$\ddot{u} + \frac{c\dot{u}}{m} + w^2 u = \frac{1}{m} p(t)$$

avec $w^2 = \frac{k}{m}$.

Le coefficient w est appelé pulsation;

b) cas du séisme :

Soit x_s le déplacement du sol dû au séisme, x_t le déplacement total^s de la masse, et x le déplacement relatif dynamique, en l'absence des forces extérieures l'équation dynamique s'écrit:

$$m\ddot{x} + a\dot{x} + kx = m\ddot{x}_s = p(t)$$

on revient donc à la formulation du cas général.

.../...

2) VIBRATION LIBRE D'UN SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE

Il a été montré précédemment que les équations du mouvement de tout système à un seul degré de liberté pouvaient se réduire à la forme :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t)$$

en l'absence au chargement, les mouvements du système sont appelés oscillations libres et l'équation s'écrit :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1)$$

la solution de cette équation est :

$$x(t) = D e^{st}$$

en substituant cette expression dans l'équation (1) on obtient après simplification :

$$s^2 + \frac{c}{m}s + w^2 = 0$$

selon la valeur de C on peut considérer plusieurs cas :

- Vibration libre non amortie $c = 0$: l'équation d'équilibre dynamique devient :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

la solution de cette équation est alors :

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{w} \sin(wt) + x(0) \cos(wt)$$

où

$\dot{x}(0)$ et $x(0)$ sont les conditions initiales.

- Vibration libre amortie $c \neq 0$

suivant la valeur de c trois cas peuvent se présenter :

a) Amortissement critique ($C = C_{cr}$)

on montre que la valeur critique de l'amortissement est $C_{cr} = 2m.w$, par suite la solution de l'équation dynamique s'écrit :

$$x(t) = x(0) (1 + wt) + \dot{x}(0) t e^{-wt}$$

qui décrit un mouvement amorti non oscillatoire

b) Amortissement sous-critique $C < C_{cr}$

on définit le facteur d'amortissement et la fréquence de vibration amortie par les expressions suivantes :

$$\xi = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{C}{2m.w} = \frac{\text{amort; réel}}{\text{amort; critique}}$$

$$w_a = w \sqrt{1 - \xi^2}$$

.../...

la solution du système sous-amorti est alors :

$$x(t) = e^{-\zeta \omega t} \left[\frac{\dot{x}(0) + x(0) \zeta \omega}{\omega_a} \sin \omega_a t + x(0) \cos \omega_a t \right]$$

qui décrit un mouvement harmonique amorti exponentiellement.

En général, les structures sont sous-amorties d'où l'intérêt particulier de l'expression précédente.

3)- VIBRATION FORCÉE QUELCONQUE: (CAS DU SEISME)

Un changement quelconque est considéré comme une suite d'impulsions. Considérons les différents cas d'amortissements.

- Système non amorti $C = 0$

L'équation du mouvement est donnée par l'intégrale du DUHAMEL, comme suite :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(z) \sin \omega (t-z) dz$$

- Système amorti :

Etant donnée que la vibration forcée est une suite d'impulsion et que la réponse de vibration libre à chaque impulsion est amortie exponentiellement on a :

$$x(t) = \int_0^t \frac{e^{-\zeta \omega (t-z)}}{e} \left[\frac{(p(z) \sin \omega_a (t-z))}{m \cdot \omega_a} \right] dt$$

que représente l'intégrale de DUHAMEL avec :

$p(t) = m\ddot{s}$, \ddot{s} accélération en fonction du temps donnée par l'accélérogramme, l'intégrale de DUHAMEL donne la réponse instantanée de la structure pendant toute la durée de l'excitation (SEISME); après la fin de l'excitation, la structure aura une vibration libre qui sera vite amortie.

La résolution de l'intégral de DUHAMEL se fait d'une façon numérique pas à pas;

(H A P I T R E - III -

=====

// SYSTEME A PLUSIEUR DEGRES DE LIBERTES

//////) ETHODE DE SUPERPOSITION MODALE

1)- MODELISATION DES STRUCTURES:

La détermination d'un modèle tenant compte le plus correctement possible de la masse et de la raideur de tous les éléments d'une structure est une phase essentielle de la réponse à une secousse sismique.

On considèrera que les masses sont concentrés au niveau des noeuds principaux? Une masse peut avoir un ou plusieurs degrés de libertés, en pratique on considère souvent les degrés de libertés correspondant à la direction du seisme?

2)- FORMULATION MATRICIELLE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

Les propriétés d'une structure à plusieurs degrés de libertés sont définies par un certain nombre de coefficient que l'on met sous forme de matrice. Pour chaque degré de liberté l'équation dynamique s'écrit :

$$F_{in}^e + F_{am}^e + F_{el}^e = \text{Excitation}$$

pour l'ensemble des degrés de libertés du système on a :-

$$\begin{array}{cccc} F_{in,1} + F_{am,1} + F_{el,1} & = & F_{1,t} & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ F_{in,n} + F_{am,n} + F_{el,n} & = & F_{nt} & \end{array}$$

sous forme matricielle l'équation dynamique s'écrit :

$$(F_{IN}) + (F_{am}) + (F_{el}) = (F_t)$$

a) Forces élastiques

Sous forme matricielle, la force élastique s'obtient par la relation suivante:

$$(F_{el}) = (K) (X)$$

Avec (K): matrice de rigidité symétrique définie positive correspondant aux degrés de libertés du système:

$$(X) = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T : \text{vecteur déplacement.}$$

.../...

b)- Forces d'amortissements :

Elles sont données par la relation suivante:

$$(F_{am}) = (A) (\dot{X})$$

avec (A): matrice d'amortissement:

on définit l'amortissement a_{ij} comme étant la force d'amortissement au noeud i due à une vitesse \dot{x}_{ij} unitaire appliquée au point j ($\dot{x}_j = 1$)

c) Forces d'inertie :

Sous forme générale, les forces d'inertie ont pour valeurs :

$$(F_{IN}) = (M) (\ddot{X})$$

avec (M) = matrice réelle d'inertie? Le terme m_{ij} est défini comme étant la force d'inertie au noeud i due à une accélération unitaire appliquée au point j ($\ddot{x}_j = 1$)

pour une modélisation en masses concentrées, les éléments non diagonaux (éléments de couplages) de la matrice M sont nuls, car une accélération d'un point masse ne produit de force d'inertie qu'en ce point, $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On en déduit ainsi que la matrice masse est diagonale.

d)- Cas de l'excitation sismique:

Dans ce cas l'équation d'équilibre dynamique s'écrit pour l'ensemble des degrés de liberté du système:

$$(M) (\ddot{X}) + (A) (\dot{X}) + (K) (X) = - (M) (\ddot{X}_s)$$

(\ddot{X}_s): Accelérogramme du sol donné selon la direction du seisme. En introduisant le vecteur de direction D l'équation précédente devient:

$$(M) (\ddot{X}) + (A) (\dot{X}) + (K) (X) = - (\ddot{X}_s) (M)(D)$$

3)- ANALYSE DYNAMIQUE PAR SUPERPOSITION MODALE

Nous avons vu précédemment comment l'analyse dynamique d'une structure peut se ramener à la résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre. Deux approches fondamentales sont envisageables pour cette résolution: L'une d'entre elles consiste à résoudre ce système différentiel par intégration directe, cette méthode est utilisée pour les problèmes non linéaires ou si le contenu fréquentiel de l'excitation est susceptible d'exciter un grand nombre de modes de la structure, l'autre méthode consiste à définir la solution de mode propres de vibration de la structure. Cette méthode qui est appelée méthode de superposition modale est la plus largement utilisée en analyse dynamique linéaire lorsque le contenu fréquentiel de l'excitation correspond au spectre basse fréquence de la structure.

.../...

1)- Détermination des fréquences et modes propres de vibration:

La résolution du système d'équation du mouvement en considérant l'amortissement, nécessite comme base de solution les modes complexes, opération longue et coûteuse. Heureusement, dans de nombreux problèmes les structures étudiées sont faiblement amorties. On utilise donc comme base de la solution les modes propres réels, solutions du système homogène sans amortissement.

$$KX = \lambda MX \quad (K - \lambda M) X = 0$$

une solution non triviale n'est donc possible que si :

$$\| K - \lambda M \| = 0 \quad \text{avec } \lambda = \omega^2$$

La détermination des fréquences ω_i et modes vibratoires x_i d'une structure se réduit au problème de calcul des valeurs et vecteurs propres. Le chapitre suivant considèrera les différentes méthodes de calcul de valeurs et vecteurs propres.

2)- Orthogonalité des modes:

Les modes propres sont orthogonaux par rapport à K et M

$$(V)^T (K) (V) = (\lambda)$$

$$(V)^T (M) (V) = (1)$$

on démontre ces relations de la manière suivantes:

soit le i^{eme} mode $V^{(i)}$ de pulsation ω_i , on a :

$$(i): K V^{(i)} - \omega_i^2 M V^{(i)} = 0$$

soit le j^{eme} mode de $V^{(j)}$ de pulsation ω_j , on a :

$$(j): K V^{(j)} - \omega_j^2 M V^{(j)} = 0$$

prémultiplions l'équation (i) par $V^{(j)T}$ et l'équation (j) par $V^{(i)T}$:

$$V^{(j)T} K V^{(i)} - \omega_i^2 V^{(j)T} M V^{(i)} = 0$$

$$V^{(i)T} K V^{(j)} - \omega_j^2 V^{(i)T} M V^{(j)} = 0$$

mais à cause de la symétrie de K et M :

$$V^{(i)T} K V^{(j)} = V^{(j)T} K V^{(i)}$$

$$\text{d'où } (\omega_j^2 - \omega_i^2) V^{(i)T} M V^{(j)} = 0$$

$$\text{d'où } V^{(i)T} M V^{(j)} = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

$$V^{(i)T} M V^{(j)} = m_i \neq 0 \quad \text{pour } i = j$$

m_i est appelée masse généralisée du mode i . On en déduit immédiatement :

$$V^{(i)T} K V^{(j)} = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

$$V^{(i)T} K V^{(j)} = K_i \neq 0 \quad \text{pour } i = j$$

K_i est appelée rigidité généralisée du mode i , on a évidemment la relation $K_i = \omega_i^2 m_i$

3)- NORMALISATION

Généralement la résolution du système $(K - \lambda M) X = 0$, nous procure des allures de déformé uniques ayant des amplitudes arbitraires, pour ajuster ces amplitudes 3 modes de normalisation sont couramment utilisés :

- Les modes sont normalisés par rapport à la valeur initiale du vecteur - en posant l'amplitude correspondante égale à 1.

- Les modes sont normalisés par rapport à la valeur maximum du déplacement dans chaque mode, en posant cette dernière égale à 1.

- Les modes sont normalisés par rapport à la masse généralisée, cela consiste à ajuster chaque amplitude à l'amplitude V_n qui satisfait à la condition :

$$V_n^T M V_n = 1$$

4)- EQUATIONS DECOUPLEES DU MOUVEMENT NON AMORTI.

Les modes propres de vibration libre non amorties grâce à leurs relations d'orthogonalité, peuvent servir comme une base permettant de développer n'importe quel vecteur de déplacement.

La réponse à une vibration forcée non amortie peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$X = \sum_k^n \Phi_k (V_k)$$

Φ_k = coordonnée généralisée.

Le problème consiste à déterminer les fonctions Φ_k représentant les coordonnées généralisées.

l'équation du mouvement forcé non amorti :

$$(M) (\ddot{X}) + (K) (X) = - \gamma_s (M) (D)$$

devient donc en lui substituant l'expression précédente :

$$\sum_k \left[\ddot{\Phi}_k (M) + \Phi_k (K) (V_k) \right] = - \gamma_s (M) (D)$$

$$\text{or: } (K)(V_k) = w_k^2 (M) (V_k)$$

on obtient alors:

$$\sum_k \left[(\ddot{\phi}_k (M) + w_k^2 \phi_k (M)) (V_k) \right] = -\gamma_s (M)(D)$$

prémultiplions par $(V_1)^T$ ($1 \neq k$) on trouve :

$$\sum_k \left[(\ddot{\phi}_k (V_k)^T (M) (V_k) + w_k^2 \phi_k (V_1)^T (M) (V_k)) \right] = -\gamma_s (V_1)^T (M)(D)$$

Les propriétés d'orthogonalité par rapport à la matrice masse des vecteurs propres montre que les termes de cette somme s'annulent, sauf celui qui correspond au mode 1 C.A.D ϕ_1 , ce qui donne l'équation découplée suivante:

$$\ddot{\phi}_1 (V_1)^T (M) (V_1) + w_1^2 \phi_1 (V_1)^T (M) (V_1) = -\gamma_s (V_1)^T (M)(D)$$

l'équation obtenue montre qu'on aboutit donc à des équations découplées pour chaque mode 1 semblable à l'équation trouvée précédemment pour un système à un degré de liberté, dont la solution est donnée par l'intégrale de DUHAMEL.

La méthode de superposition modale permet donc de passer d'un système à n équations couplées par les éléments non diagonaux de (K) et (M) à un système formé de n équations découplées indépendantes.

5)- EQUATIONS DECOUPLEES DU MOUVEMENT AMORTI:

L'équation du mouvement est :

$$(M)(\ddot{X}) + (A)(\dot{X}) + (K)(X) = -\gamma_s (M)(D)$$

en faisant les mêmes transformations que précédemment et en prenant les propriétés d'orthogonalité par rapport aux matrices M et K on aboutit à l'expression suivante:

$$\ddot{\phi}_1 (V_1)^T (M) (V_1) + \sum_{k \neq 1} \left[\dot{\phi}_k (V_1)^T (A) (V_k) + w_k^2 \phi_k (V_1)^T (M) (V_k) \right] = -\gamma_s (V_1)^T (M)(D)$$

Les équations trouvées sont couplées par les éléments non diagonaux de la matrice d'amortissement inconnue (A).

Pour que ces équations soient découplées, il faut que les vecteurs propres soit orthogonaux par rapport à cette matrice C.A.D. $(V_1)^T (A) (V_k) = 0 \quad k \neq 1$

on démontre que la condition d'orthogonalité est vérifiée si (A) est une combinaison de (K) et (M) de la forme:

$$(A) = (M) \sum_{m=0}^n \alpha_m \left[(M)^{-1} (K) \right]^m \quad \text{relation de Caughey.}$$

La relation devient alors découplée et en divisant par $(V_1)^T (M) (V_1)$ on trouve :

.../....

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{(V_1)^T (A) (V_1)}{(V_1)^T (M) (V_1)} \dot{\phi}_1 + w_1^2 \phi_1 = - \gamma_s \frac{(V_1)^T (M) (D)}{(V_1)^T (M) (V_1)}$$

en posant :

$$\xi_1 = \frac{1}{2w_1} \cdot \frac{(V_1)^T (A) (V_1)}{(V_1)^T (M) (V_1)}$$

et

$$\eta_1 = \frac{(V_1)^T (M) (D)}{(V_1)^T (M) (V_1)}$$

ξ_1 : Coefficient d'amortissement réduit au mode 1 :

η_1 : Coefficient de participation du mode 1 :
l'équation découplée devient :

$$\ddot{\phi}_1 + 2 w_1 \xi_1 \dot{\phi}_1 + w_1^2 \phi_1 = - \eta_1 \gamma_s$$

qui ressemble à l'équation d'un système à 1 degré de liberté dont la solution est l'intégrale de DUHAMEL.

La méthode superposition modale nous permet alors de calculer le vecteur de déplacement par la relation suivante:

$$(X) = \sum_{k=1}^n \phi_k (V_k)$$

6)- TRONCATURE MODALE:

- Le facteur de participation η_1 représente l'importance de contribution du mode 1 à la réponse de la structure.

- La masse modale est une notion importante pour apprécier la contribution de chaque mode à la réponse globale de la structure.

$$m_1 = \eta_1^2 \cdot (V_1)^T (M) (V_1)$$

la masse totale de la structure est :

$$M_t = (D)^T (M) (D)$$

on définit alors le facteur de contribution pour chaque mode par la relation suivante :

$$F.c = \frac{m_1}{M_t}$$

.../...

- TRONCATURE MODALE :

Généralement pour des structures de nombre de degrés de liberté très élevé, la détermination de tous les modes propres ne présente pas un intérêt, on applique donc la superposition modale pour un nombre limité de modes n_0 .

Les critères de troncature modale utilisés sont :

a) critère de masse modale cumulée :

$$\sum_{l=1}^{n_0} F.C_l \gg 0.90 \text{ à } 0.95$$

b) critère de l'énergie modale cumulée :

On choisit les n_0 modes dont l'énergie cumulée est de l'ordre de 90 à 95 % de l'énergie totale.

On démontre qu'on peut associer à chaque mode l'une énergie modale :

$$E_p = \frac{1}{2} m_p w_p^2 \quad s_d^2 = \frac{1}{2} m_p \frac{A^2(w_p)}{w_p^2}$$

avec : S_d : spectre de déplacement

A : Pseudo Accélération, $A = S_d \cdot W^2$

Ainsi, pour les n modes retenus :

$$E_n = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n m_l \frac{A^2(w_l)}{w_l^2}$$

et pour les $(N-n)$ modes négligés; N : nombre de degrés de liberté. Si on note l le mode l et n le mode n tel que : $l > n$, alors :

$$w_l > w_n \implies A(w_l) < A(w_n)$$

L'énergie des modes négligés s'écrit donc :

$$E_{N-n} < \frac{1}{2} \frac{A^2(w_n)}{w_n^2} \left\{ \sum_{l=n+1}^N m_l \right\}$$

or :

$$\sum_{l=n+1}^N m_l = M_t - \sum_{l=1}^n m_l$$

.../...

L'énergie des modes négligés devient alors :

$$E_{N-n} < \frac{1}{2} \frac{A^2 (w_n)}{w_n^2} \left(M_t - \sum_{l=1}^n m_l \right)$$

L'énergie des modes négligés a une borne supérieure. Le critère suppose que cette borne soit inférieure ou égale à 10% de l'énergie de n modes retenus.

$$\frac{A^2 (w_n)}{w_n^2} \left(M_t - \sum_{l=1}^n m_l \right) \ll 0,1 \times \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n m_l \frac{A^2 (w_l)}{w_l^2}$$

.)- ANALYSE SPECTRALE DE LA REPOSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES:

Pour un système à plusieurs degrés de Libertés chaque mode propre l est caractérisé par les spectres suivant :

- Spectre de déplacement S_{dl}
- Spectre de vitesse S_{vl}
- Spectre d'accélération S_{al}

cés spectres sont liés par les formules suivantes :

$$S_{al} = w^2 S_{dl}$$

$$S_{vl} = w S_{dl}$$

en fonction de ces spectres, le vecteur déplacement peut s'écrire :

$$(X) = \sum_l \gamma_l (v_l) S_{dl}$$

S_{dl} : lu sur le spectre de déplacement pour le mode l :

or :

$$S_{dl} = \frac{S_{al}}{w_l^2} \quad \text{donc } (X) = \sum_l \gamma_l (v_l) \frac{S_{al}}{w_l^2}$$

La force résultante de ce déplacement est obtenue en multipliant le vecteur déplacement (X), par la matrice de rigidité (K).

$$(F) = (K) (X)$$

..../....

(H A P I T R E - IV -

=====

///) ETHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES

AUX VALEURS PROPRES

=====

1)- I N T R O D U C T I O N

Comme nous l'avons vu à propos de la méthode de superposition des modes, on peut déterminer la réponse dynamique d'une structure linéaire, si ses modes et ses fréquences propres sont connus. Généralement, on s'intéresse aux premiers modes propres correspondants à la partie basse fréquence du spectre, ainsi à titre d'illustration pour un problème type on s'intéressera aux 50 premiers modes d'un modèle comportant 5000 degrés de liberté, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour la résolution des problèmes aux valeurs propres, on cite:

- Méthode de l'itération inverse qui convient pour la résolution des problèmes aux valeurs propres sous forme générale $KX = \omega^2 MX$, lorsqu'on s'intéresse à un petit nombre de valeurs propres.

- Méthode de transformation de JACOBI qui consiste à transformer la matrice concernée, en une matrice diagonale, lorsqu'on désire calculer tous les modes d'un système limité généralement à 100.

- Méthode de sous-espace, très largement utilisée pour des systèmes de grandes dimensions.

2)- RAPPELS DES PROPRIETES DES PROBLEMES DE VALEURS PROPRES

1- Théorèmes

- Théorème 1: Si une matrice A a des valeurs propres et des vecteurs caractéristiques X_i , alors sa transposée A^T a les mêmes valeurs propres mais avec des vecteurs caractéristiques Y_i orthogonaux à X_i , c'est à dire:

$$X_j^T X_i = 1 \quad \text{Si } i = j$$

$$X_j^T X_i = 0 \quad \text{Si } i \neq j$$

où les vecteurs X et Y sont normés.

--Théorème 2: Si une matrice A est symétrique et si tous ses éléments sont des nombres réels, toutes ses valeurs propres et ses vecteurs caractéristiques sont réels, de plus les vecteurs caractéristiques sont orthogonaux entre eux, c'est à dire:

$$X_i^T X_j = 1 \quad \text{si } i = j$$

$$X_i^T X_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

la matrice des modes \bar{X} formée des vecteurs modaux est une matrice de transformation orthogonale.

Théorème 3: Une matrice symétrique A peut être transformée en matrice diagonale, avec comme éléments ses valeurs propres, par la transformation orthogonale $X^T A X$, où X est la matrice des modes de A .

Théorème 4: Si les valeurs propres et les vecteurs caractéristiques de la matrice A sont λ_i et X_i , alors une matrice $B = T A T^{-1}$ a les mêmes valeurs propres λ_i mais des vecteurs caractéristiques égaux à $T X_i$, T étant une matrice carré non singulière.

2) Formulation simplifiée

Il peut être utile de ramener la résolution du problème aux valeurs propres sous sa forme générale, soit :

$$KX = w^2 MX$$

à celle d'un problème aux valeurs propres sous sa forme classique, c'est à dire :

$$D\bar{X} = \lambda \bar{X}$$

Ce passage peut s'effectuer de deux façons, permettant de conserver la symétrie du problème.

- Factorisation de CHOLESKY de M

Soit la factorisation de CHOLESKY de M supposée définie positive

$$M = LL^T$$

avec L: matrice triangulaire supérieure;

en remplaçant $M = LL^T$ dans le système $KX = \lambda MX$

on obtient :

$$KX = \lambda LL^T X$$

en posant :

$$\bar{X} = L^T X$$

$$KX = \lambda L\bar{X}$$

or :

$$X = L^{T-1} \bar{X} \quad \text{d'ou}$$

$$K L^{T-1} \bar{X} = \lambda L\bar{X}$$

en prémultipliant par L^{-1} on a alors :

$$L^{-1} K L^{T-1} \bar{X} = \lambda \bar{X}$$

$$\bar{K} = L^{-1} K L^{T-1}$$

- Factorisation de CHOLESKY en K

Soit la factorisation de CHOLESKY de K supposée définie positive:

$$K = LL^T$$

$$M(K) = 1/\lambda (K) (X) = \lambda' (K)(X) \quad \lambda' = \frac{1}{\lambda}$$

$$\bar{M} \bar{X} = \lambda' \bar{X}$$

.../...

$$M(X) = \lambda'(L) (L^T)^{-1} (X)$$

en pose :

$$\bar{X} = (L^T)^{-1} (X) \quad (X) = (L^T) \bar{X}$$

$$M(X) = \lambda'(L) (\bar{X})$$

en prémultipliant par L^{-1} et explicitant (X)

$$(L)^{-1} M (L^T)^{-1} (\bar{X}) = \lambda' (\bar{X})$$

en posant :

$$\bar{M} = (L)^{-1} M (L^T)^{-1} \quad \text{on trouve le système classique}$$

$$\bar{M} \bar{X} = \lambda' \bar{X}$$

3) Quotient de RAYLEIGH :

On appelle quotient de RAYLEIGH d'un vecteur quelconque :

$$(V) \text{ le rapport } R(V) = \frac{(V)^T K (V)}{(V)^T M (V)}$$

Si K et M sont définies positives, $R(V) > 0$, de plus quelque soit le vecteur (V) la valeur de $R(V)$ est comprise entre les valeurs de la plus petite et la plus grande valeurs propres du système $KX = \lambda MX$:

$$\lambda_1 \leq R(V) \leq \lambda_n$$

on voit immédiatement que le quotient de RAYLEIGH d'un vecteur propre X est la valeur propre correspondante, en effet :

$$R(X) = \frac{X^T K X}{X^T M X} = \lambda$$

si (V) est une combinaison linéaire des premiers vecteurs propres, le coefficient de RAYLEIGH est compris entre λ_1 et λ_p

$$\lambda_1 \leq R\left(\sum_{i=1}^p C_i (X_i)\right) \leq \lambda_p$$

et la valeur maximale de R est atteinte lorsque $C_1 = C_2 = \dots = C_{p-1} = 0$
 $C_p = 1$

Le quotient de RAYLEIGH est stationnaire au voisinage de tout vecteur propre et il atteint un extremum qui est la valeur propre correspondante.

En particulier le mode fondamental de vibration rend stationnaire le quotient de RAYLEIGH qui tend vers la valeur propre la plus basse.

.../...

Supposons que (V) soit proche du vecteur propre (X_i) et s'écrive :

$$(V) = (X_i) + \epsilon (Z)$$

où ϵ : est un paramètre très petit :

(Z) un vecteur de perturbation quelconque.

Le coefficient de RAYLEIGH est alors proche de λ_i est de la forme :

$$R(U) = \lambda_i + O(\epsilon^2).$$

4) Séparation des valeurs propres :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres du système

$$KX = \lambda MX$$

et soient :

$L_1, L_2, \dots, L_{n-r-2}, \dots, L_{n-r}$ les $n-r$ valeurs propres du système $(K)^r (X) = L (M)^r (X)$.

dans lesquels $(K)^r$ et $(M)^r$ sont obtenues en supprimant les r dernières lignes et colonnes de (K) et (M) . Soit $P^r(\lambda)$ le polynôme caractéristique correspondant, les racines de $P^{r-1}(L)$ "séparent" les racines de $P^r(\lambda)$ c'est-à-dire :

$$\lambda_1 \ll L_1 \ll \lambda_2 \ll \dots \ll \lambda_{n-r-2} \ll L_{n-r-1} \ll \lambda_{n-r}$$

la suite de polynômes $P^r(\lambda)$ constitue une suite de sturm.

Propriété de la suite de sturm

Soit u un décalage spectrale donné, le nombre de pivots négatifs apparaissant dans la décomposition symétrique de $K - uM$ est égale au nombre de valeurs propres inférieure à u .

Réciproquement si $\lambda_k \ll u \ll \lambda_{k+1}$, la matrice diagonale D a k termes négatifs :

soit : $K - uM = L D L^T$, il en résulte donc que chaque terme négatif de D correspond à une valeur propre inférieure à u ainsi, le nombre total de termes négatifs de D est égale au nombre de valeur propre inférieure à u .

.../...

Sur le plan pratique, cette propriété peut être utilisée pour localiser de façon approchée les fréquences propres dans une plage de fréquences spécifiée (f_{\min} à f_{\max}).

Ceci nécessite de répéter le calcul en faisant varier le décalage suivant différentes stratégies.

Les valeurs propres approchées ainsi calculées sont alors utilisées pour obtenir les vecteurs propres correspondant à l'aide de quelques cycles d'itération inverse.

3) METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES

1- Méthode d'itération inverse

La méthode de l'itération inverse est une technique très efficace, utilisée pour le calcul du vecteur propre ainsi que la valeur propre correspondante, du système de forme générale $KX = \lambda^2 MX$.

L'équation de base utilisée pour la résolution du système itératif s'écrit :

$$K \bar{Y}_{k+1} = \lambda^2 M Y_k \quad k = 1, 2, \dots$$

Une suite d'opérations sur l'équation précédente permet le calcul d'un vecteur le plus proche du vecteur propre recherché. Assumons comme vecteur initial, le vecteur Y_1 non M -orthonormé à X_1 c.a.d $Y_1^T M X_1 \neq 0$, et comme valeur propre initiale $\lambda = 1$. Le membre de droite de l'équation devient $R_1 = (1)M Y_1$.

On revient donc à la résolution du système $K Y_2 = R_1$ dont la solution nous fournit un vecteur encore plus proche du vecteur propre recherché. Le processus d'itération continu jusqu'à ce qu'on trouve $Y_{k+1} = Y_k$ qui représente le vecteur propre du système.

On sait d'après le chapitre précédent, que le vecteur itéré ainsi calculé, présente une amplitude arbitraire quel'on doit ajuster afin qu'il converge vers le vecteur propre et non pas à un multiple de celui-ci. On utilise pour cela la formule de normalisation suivante :

$$Y_{k+1} = \frac{\bar{Y}_{k+1}}{(\bar{X}_{k+1}^T M X_{k+1})^{1/2}}$$

L'algorithme utilisé actuellement dans les programmes est le suivant :

soit X_1 le vecteur initial, choisi :

$$X_1^T = (1, \dots, 1, \dots)$$

on pose $Y_1 = M X_1$

puis on calcul pour $k = 1, 2, \dots$

$$K \bar{X}_{k+1} = Y_k$$

$$\bar{Y}_{k+1} = M \bar{X}_{k+1}$$

$$\lambda(\bar{X}_{k+1}) = \frac{\bar{X}_{k+1}^T Y_k}{\bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1}} \quad (\text{quotient de RAYLEIGH})$$

..../....

$$Y_{k+1} = \frac{\bar{Y}_{k+1}}{\left(\frac{\bar{X}_k}{\bar{Y}_k} \frac{\bar{Y}_{k+1}}{\bar{Y}_{k+1}} \right)^{1/2}} \quad (\text{normalisation du } \bar{Y}_{k+1})$$

vérifier la convergence de λ_1 : $|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| \ll \epsilon$

calculer le vecteur propre M-normalisé

$$(X_1) = \frac{\bar{X}_{k+1}}{\left(\frac{\bar{X}_k}{\bar{Y}_k} \frac{\bar{Y}_{k+1}}{\bar{Y}_{k+1}} \right)^{1/2}}$$

* Recherche successive de λ_2, λ_n

une technique systématique de recherche des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ consiste à utiliser la méthode d'itération inverse associée à une technique d'orthogonalisation (déflation orthogonale).

Supposons que nous ayons obtenu λ_1 et (X_1) , pour obtenir la valeur propre λ_2 et le vecteur propre correspondant $X^{(2)}$, il faut imposer aux itérés successifs Y d'appartenir au sous-espace des vecteurs orthogonaux à $X^{(1)}$ soit :

$$X^{(1)T} Y = 0$$

on définit alors une matrice de projection orthogonale S qui à la propriété suivante :

Si Y est un vecteur quelconque alors :

S.Y est orthogonal à X_1 .

Ainsi le processus d'itération converge vers le vecteur propre $X^{(2)}$

si on itère sur la matrice $K^{-1} M.S$ soit :

$$Z_i = K^{-1} M.S Y_{i-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} & -\frac{X_3^{(1)}}{X_1^{(1)}} & -\frac{X_4^{(1)}}{X_1^{(1)}} & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \mathbf{I}$$

De même pour construire λ_p et (X_p) . Nous contraignons les itérés successifs Y à rester M-orthogonal à $(X_1), (X_2), \dots, (X_{p-1})$

soit : $X^{(i)T} Y = 0$ avec $i = 1, \dots, p$

2- Méthode de JACOBI

- Transformation de (K) et (M).

Soit (K) et (M) respectivement les matrices de rigidité et de masse liées par la relation :

$$(K)(X) - \lambda(M)(X) = 0$$

on définit une matrice orthogonale (Q) qui transforme (K) et (M) en :

$$(\bar{K}) = (Q)^T (K) (Q) \quad ; \quad (\bar{M}) = (Q)^T (M) (Q).$$

.../...

Les valeurs propres et vecteurs propres des expressions obtenues sont définis par :

$$((\bar{K}) - \bar{\lambda}(\bar{M})) (\bar{X}) = 0$$

ou encore :

$$(Q)^T ((K) - \bar{\lambda} (M)) (Q) (\bar{X}) = 0$$

alors $\det((\bar{K}) - \bar{\lambda}(\bar{M})) = \det((Q)^T ((K) - \bar{\lambda} (M)) (Q))$
 $= \det((Q^T)) \det((Q)) \cdot \det((K) - \bar{\lambda}(M)) = 0$

donc les valeurs propres $\bar{\lambda}$ du système transformé sont identiques aux valeurs propres λ du système $((K) - \lambda(M))X=0$ si

$\det(Q) \neq 0$ ce qui est vérifié. Les vecteurs propres (\bar{X}) des 2 systèmes sont liés par :

$$(X) = (Q) (\bar{X})$$

- Méthode de JACOBI

La méthode générale de JACOBI permet de calculer les valeurs et vecteurs propres d'un système de dimensions limitées (n inférieur à 100) dont les matrices sont symétriques et définies positives :

Elle consiste à transformer les matrices K et M en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives :

$$\begin{aligned} (K^1) &= (K) & (M^1) &= (M) \\ (K^2) &= (Q^1)^T (K^1) (Q^1) & (M^2) &= (Q^1)^T (M^1) (Q^1) \\ (K^{k+1}) &= (Q^k)^T (K^k) (Q^k) & (M^{k+1}) &= (Q^k)^T (M^k) (Q^k) \end{aligned}$$

Les matrices (K^{k+1}) et (M^{k+1}) tendent vers des matrices diagonales (K^d) et (M^d) lorsque K tend vers l'infini. Les valeurs et vecteurs propres sont alors :

$$\begin{aligned} (\lambda) &= (K^d) (M^d)^{-1} \quad \text{ou} \quad \lambda_i = K_{ii}^d / M_{ii}^d \\ (X) &= (Q^1) (Q^2) \dots (Q^k) (Q^{k+1}) \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & 1 & \\ & \frac{1}{\sqrt{M_{ii}^d}} & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Matrices de transformations :

Chaque matrice (Q^k) est choisie de manière à ce qu'un terme (i, j) non diagonal et non nul de (K^k) et (M^k) soit nul après la transformation précédente. La matrice (Q^k) a la structure suivante :

.../...

$$(Q)^k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ \hline 0 & & b & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{--- ligne } i \\ \text{--- ligne } j \end{array} \end{array}$$

colonne i colonne j

Les coefficients a et b sont calculés en écrivant que $K_{ij}^{k+1} = M_{ij}^{k+1} = 0$ soit, en supprimant par simplicité l'indice k+1 sur les termes de chaque matrice:

$$a K_{ii} + (1+ab) K_{ij} + b K_{jj} = 0$$

$$a M_{ii} + (1+ab) M_{ij} + b M_{jj} = 0$$

dans le cas particulier où :

$$\frac{K_{ii}}{M_{ii}} - \frac{K_{jj}}{M_{jj}} = \frac{K_{ij}}{M_{ij}}$$

les valeurs de a et b sont :

$$a = 0 \quad b = -\frac{K_{ij}}{K_{jj}}$$

dans le cas général notons :

$$G_1 = K_{ii} M_{ij} - M_{ii} K_{ij}$$

$$G_2 = K_{jj} M_{ij} - M_{jj} K_{ij}$$

$$G_3 = K_{ii} M_{jj} - M_{ii} K_{jj}$$

$$d = \frac{G_3}{2} + \text{signe}(G_3) \sqrt{\left(\frac{G_3}{2}\right)^2 + G_1 \cdot G_2}$$

alors :

$$a = \frac{G_2}{-d} \quad b = -\frac{G_1}{d}$$

L'algorithme correspondant à la méthode de JACOBI est présenté ci-dessous :

Définir la précision de convergence requise ϵ .
pour chaque cycle S.

Définir la tolérance dynamique $F_S = 10^{-2S}$
pour chaque ligne $i = 1, 2, \dots, n$

pour chaque colonne $j = i+1, \dots, n$

calculer les facteurs de couplage

$$F_k = \frac{|K_{ij}|^2}{K_{ii} K_{jj}} \quad F_M = \frac{|M_{ij}|}{M_{ii} M_{jj}}$$

.../...

Si F_k ou $F_M > \epsilon_s$

.calculer a et b

.transformer les matrices (K) et (M)

colonne i = colonne i + b colonne j

colonne j = a colonne i + colonne j

puis ligne i = ligne i + b ligne j

ligne j = a ligne i + ligne j

. Modifier les vecteurs propres (X)

colonne i = colonne i + b colonne j

colonne j = a colonne i + colonne j

calculer les valeurs propres :

$$\lambda_i = \frac{K_{ii}}{M_{ii}} \quad \text{et} \quad F_\lambda = \max_i \frac{|\lambda_i^S - \lambda_i^{S-1}|}{|\lambda_i^{S-1}|}$$

calculer les facteurs de couplage

$$F_k = \max_{i,j} \frac{|K_{ij}|^2}{K_{ii}K_{jj}} \quad F_M = \frac{M_{ij}^2}{K_{ii}K_{jj}}$$

test de convergence $F_k < \epsilon$ et $F_M < \epsilon$ et $F_\lambda < \epsilon$

3- Méthode de RITZ

La méthode de RITZ permet de transformer un problème de valeurs propres de grande dimension en un problème de dimension plus réduite.

Le principe de base de la méthode repose sur le fait que l'on peut engendrer préalablement un sous-espace de RITZ formé de vecteurs indépendants appelés vecteurs de RITZ, qui constituent la base de ce sous-espace.

Nous contraignons chaque vecteur propre du système $KX = \lambda MX$ à s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de p vecteurs de RITZ indépendants q_j .

$$(X) = a_1 (q_1) + a_2 (q_2) + \dots + a_p (q_p)$$

$$(X) = ((q_1) (q_2) \dots (q_p)) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$$

(nx1)

(nxp)

(px1)

$$(X) = (Q) (a)$$

.../...

cherrchons les coefficients (a) tels que le vecteur (X) soit aussi proche que possible d'un vecteur propre de $KX = \lambda MX$. Pour cela cherrchons à rendre stationnaire le quotient de RAYLEIGH.

$$R((X)) = \frac{(X)^T (K)(X)}{(X)^T (M)(X)} = \frac{(a)^T (\bar{K})(a)}{(a)^T (\bar{M})(a)}$$

$$(\bar{K}) = (Q)^T (K)(Q)$$

$$(\bar{M}) = (Q)^T (M)(Q)$$

La condition de stationnarité $\delta R = 0$ pour tout $(\delta a)^T$ s'écrit :

$$((\bar{K}) - R(\bar{M}))(a) = 0$$

cette expression définit un problème de valeurs propres de dimensions p, dont les p vecteurs propres (A_i) et valeurs propres $\bar{\lambda}_i$ vérifient :

$$(\bar{K})(A) = (\bar{M})(A)(\bar{\lambda})$$

où $(A) = ((A_1)(A_2) \dots (A_p))$; $(\bar{\lambda}) = \begin{vmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_p \end{vmatrix}$

Les valeurs propres $\bar{\lambda}_i$ constituent des approximations des valeurs propres du système original $KX = \lambda MX$. Ces approximations sont d'autant meilleures que les vecteurs de RITZ génèrent un sous-espace qui contient les vecteurs propres cherrchés. Les vecteurs propres approchés de $KX = \lambda MX$ sont obtenus à partir des vecteurs (A_i) grâce à l'équation $(X) = (Q)(a)$.

De manière à obtenir rapidement les plus petites valeurs propres, nous pouvons choisir comme vecteurs de RITZ les solutions de :

$$(K)(q_i) = (F_i)$$

où (F_i) sont les vecteurs unités qui sollicitent les degrés de Liberté i, correspondant aux plus petites valeurs de K_{ij} / M_{ij}

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Ligne } i$$

4- Méthode du sous-espace :

Cette méthode est très largement utilisée pour calculer les p premières valeurs propres d'un système de grande dimension. Elle consiste à appliquer plusieurs fois la méthode de RITZ en améliorant les vecteurs de RITZ par itération inverse. La méthode de RITZ force les vecteurs (X) , à rester orthogonaux entre eux, alors que l'itération inverse ajuste la base vectorielle de RITZ de manière à assurer la convergence vers les vecteurs propres correspondant aux plus petites valeurs propres.

La méthode dusous-espace est basée sur les principes suivants :

a- generer p vecteurs initiaux en nombre supérieur à celui des modes cherchés:

$$(X) = ((X_1) (X_2) \dots (X_p))$$

b- exécuter une itération inverse pour calculer simultanément les p vecteurs de RITZ (q_i) qui forment le sous-espace en résolvant:

$$(K) (q_i) = (M) (X_i) = (F_i) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$(K) (Q) = (M) (X)$$

c- appliquer la méthode de RITZ pour extraire les p premières valeurs propres et modes propres associés dans le sous-espace de RITZ.

$$((\bar{K}) - \bar{\lambda}_i (\bar{M})) (A_i) = 0 \quad (\text{JACOBI})$$

$$(\bar{K}) = (Q)^T (K) (Q)$$

$$(\bar{M}) = (Q)^T (M) (Q)$$

$$(X_i) = (Q) (A_i)$$

d- tester la convergence de $\bar{\lambda}_i$ et répéter si nécessaire les opérations b,c,d.

La méthode converge vers les p plus petites valeurs propres, à condition que les p vecteurs initiaux (X_i) ne soient pas M-orthogonaux à l'un des p vecteurs propres cherchés;

II H A P I T R E V

II) R O G R A M M A T I O N

=====

PROGRAMMATION1)- MODIFICATION DU PROGRAMME STATIQUE POUR APPLICATION
AU PROBLEME DYNAMIQUE

La structure de la matrice globale déjà calculée, ne permet pas son application au problème dynamique, ceci est du au fait qu'elle renferme des termes correspondant à des degrés de liberté bloqués qui sont ignorés lors du calcul dynamique.

Une restructuration du programme a été donc nécessaire, et faite de la façon suivante :

a- Sous-programme Input

Ce sous-programme se charge de numéroter les degrés de liberté actifs, et d'annuler les degrés de liberté inactifs, et ce pour chaque nœud et dans chaque direction, ces données sont stockées dans une table ID de dimension:

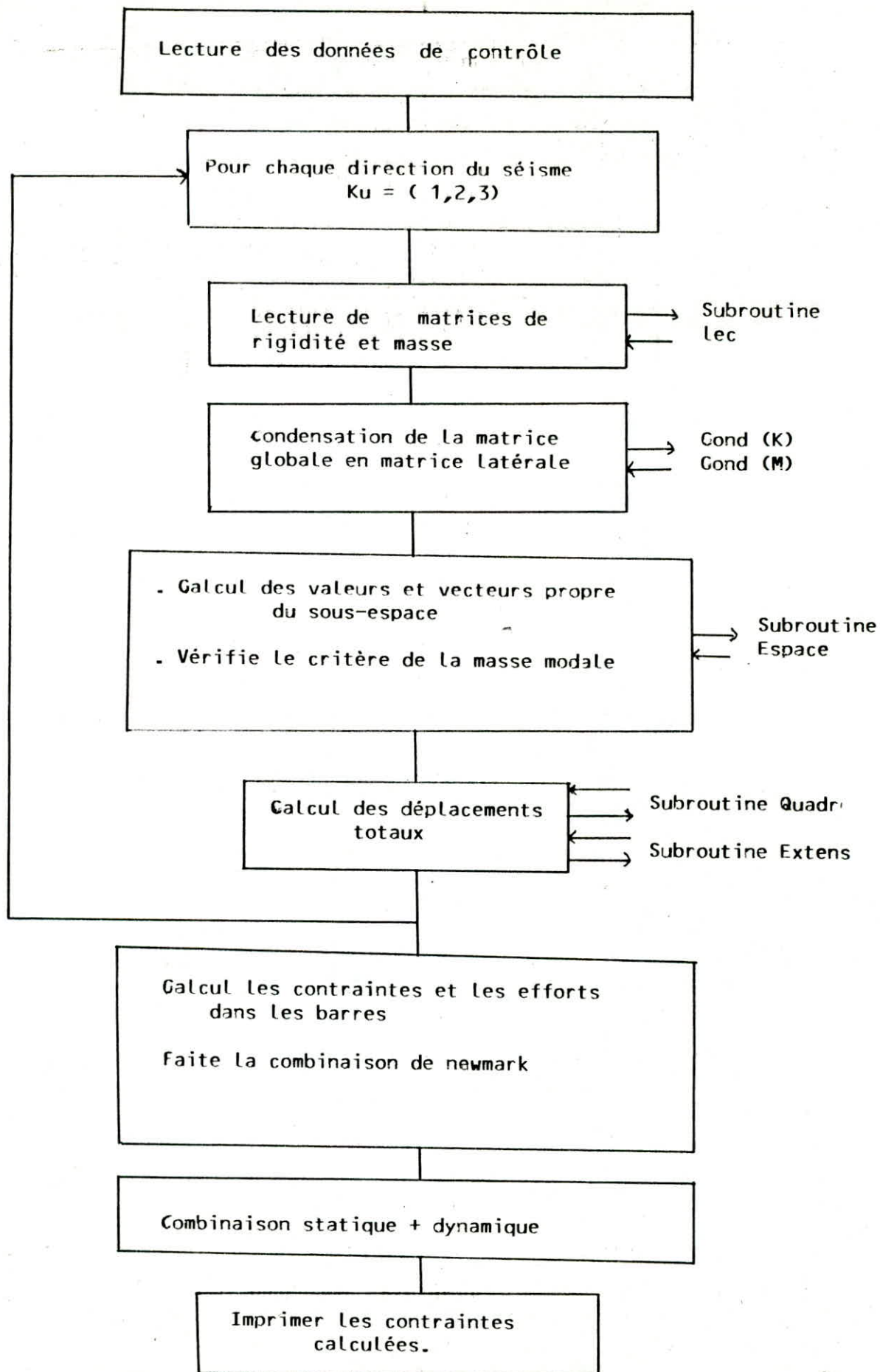
(3/NNT) , NNT = NOMBRE DE NOEUDS TOTAL

b- Sous-programme Russ

Les modifications apportées à ce sous-programme consiste à ne considérer dans la table de localisation élémentaire que les degrés de liberté actifs et de les positionnés dans le repère global.

c- Sous-programme ADBAN

Un test a été introduit afin que l'opération d'assemblage se fasse sur les degrés de liberté actifs.



SUBROUTINE ESPACE

(Début)

Entrées

(K) : matrice de rigidité stockée en bande
 (M) : matrice masse
 NSS : dimension du sous-espace
 NVALP : nombre de valeurs propres et vecteurs propres
 TOLJAG : tolérance dans JACOBI
 NITER : nombre maximum d'itération

Détermination des vecteurs d'itération initiaux correspondants
 au minimum K_{ii} / M_{ii}

nss > nombre de terme m_{ii}
 non nuls

non

erreur

(stop)

oui

décomposition GHOLESKY LDL^T
 de K

Subroutine décomp

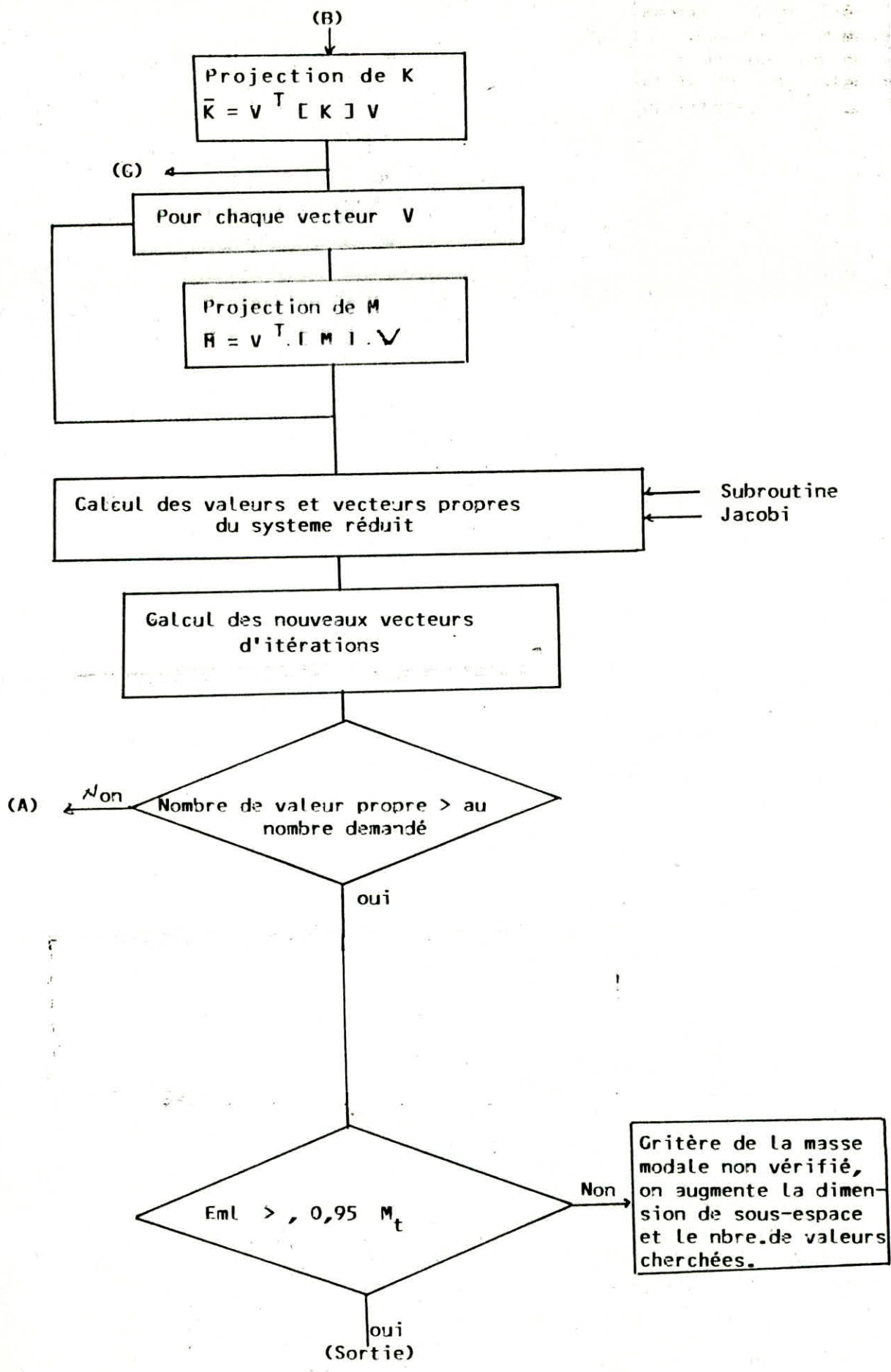
(A) → Pour chaque itération

(G) → Pour chaque vecteur d'itération

Calcul du vecteur de_RITZ V
 en résolvant $KV = F$

Subroutine resol.

(B)



SUBROUTINE LEC : ELLE ASSURE LA LECTURE DES DONNEES :

- 1) Données de contrôle : ce bloc comprend les informations nécessaires qui contrôlent le déroulement du programme et qui sont :
 - . Le nombre d'itérations maximum (NITER)
 - . Précision dynamique (eps1b)
 - . La dimension du sous-espace (NSWM)
 - . Le nombre de cycle dans JACOBI (NGYGL)
 - . Tolérance dans JACOBI (Toljac)
 - . Nombre de valeurs et vecteurs propres demandés (NVALP)
 - . La largeur de bande (NBW) (calculée dans la partie statique).
 - . Nombre d'éléments dans la matrice de rigidité, et matrice masse (NWK).

- 2) Lecture de la matrice de la rigidité et matrice masse stockées en bande.

SUBROUTINE GOND

Le modèle dynamique choisi est un modèle plan et la direction du séisme est supposée dans ce plan et parallèle à l'un des axes principaux contenu dans ce plan, de ce fait il est nécessaire de faire une transformation sur la matrice globale pour la rendre latérale

- Pour chaque noeud i
- Limiter l'exploration des éléments dans la matrice globale à ceux contenus dans la largeur de bande.

$$ii = i + nbl - 1$$

sans toutefois que ii dépasse le nombre d'équation de la matrice latérale

pour chaque colonne :

$$J = i \text{ à } ii$$

calculer la position de l'élément choisi dans la matrice globale imaginaire en fonction de KU par les formules suivantes :

$$i1 = (i - 1) \times 3 + KU$$

$$j1 = (j - 1) \times 3 + KU$$

trouver la position dans la matrice bande

$$JG = (j1 - i1 + 1)$$

la position dans la matrice bande latérale sera

$$JL = (j - i + 1)$$

$$Kr(i, JL) = K(i1, JG)$$

continue

nbl : largeur de bande de la matrice latérale.

Subroutine Quadr.

(Début)

Entrées
Vecteur de déplacement modale

(B)

Pour chaque degré de Liberté Latérale

Pour le premier mode

$|w_1 - w_2| < 10\%$

oui

$S = S + x_1(i)$
compte = compte + 1

Non

$S1 = S1 + X_1^2(i)$

(A)

Pour chaque mode: Js=2, NVALP - 1

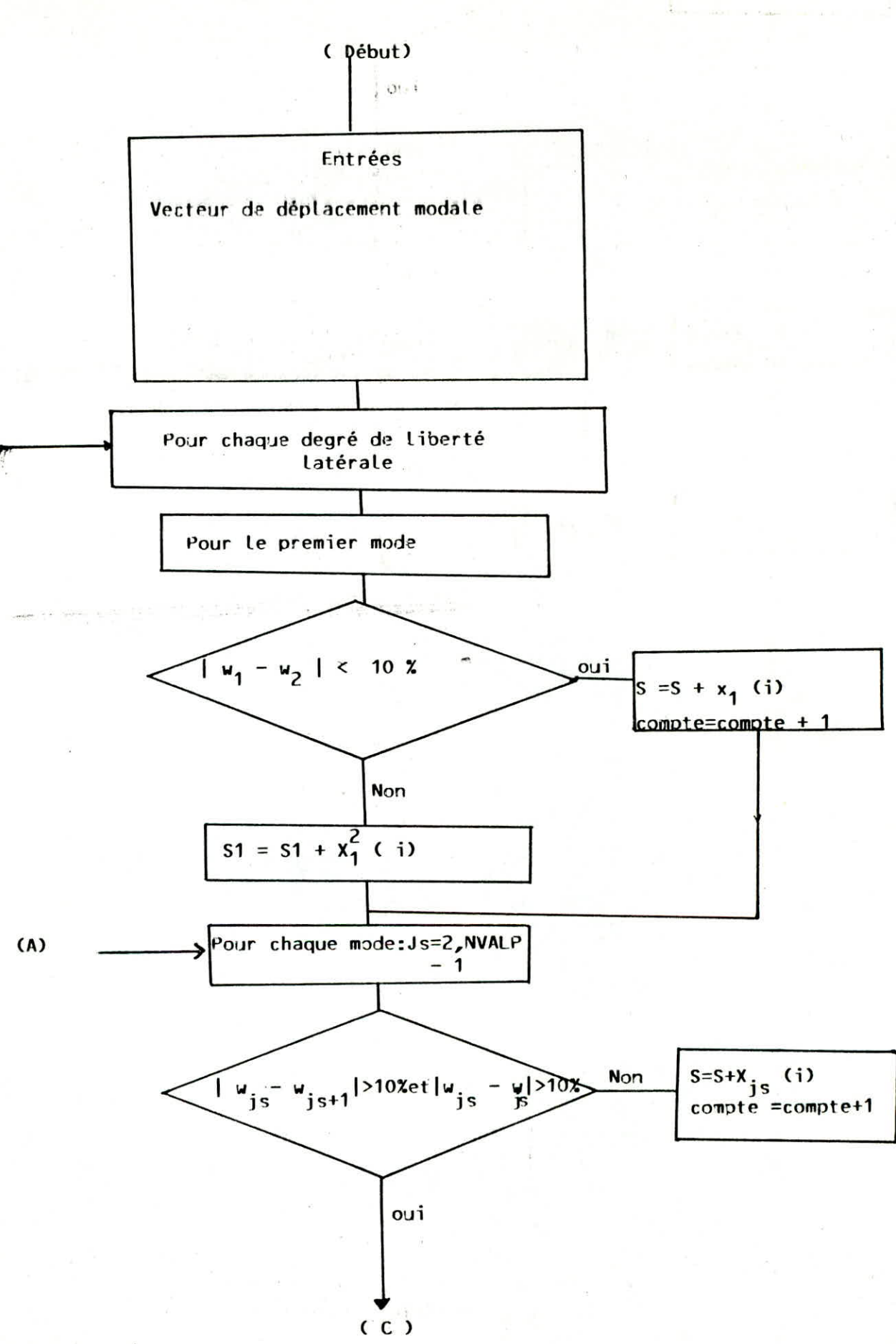
$|w_{js} - w_{js+1}| > 10\%$ et $|w_{js} - w_{js}| > 10\%$

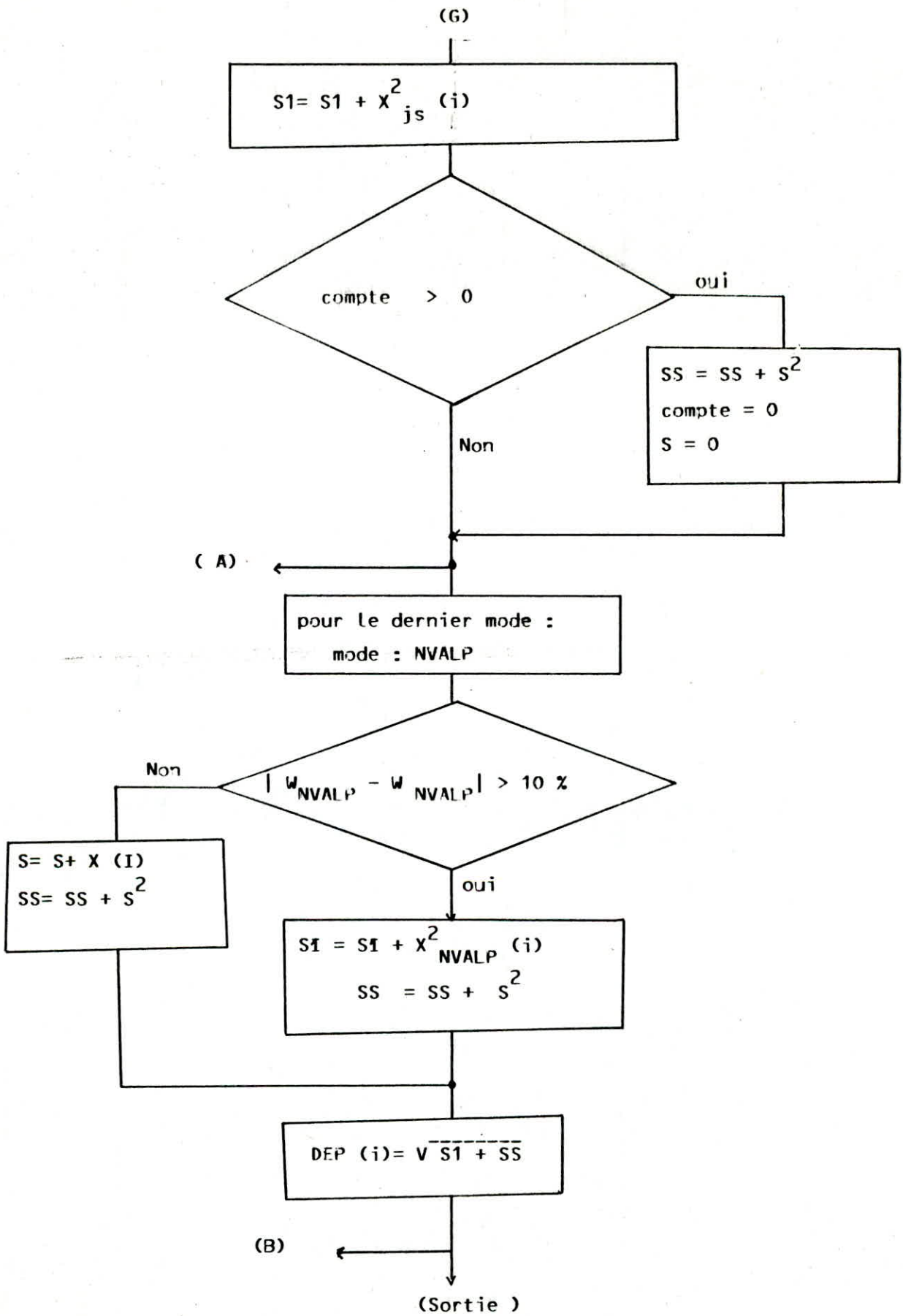
Non

$S = S + X_{js}(i)$
compte = compte + 1

oui

(C)





INDEX

APPENDIX

—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—

***** EXEMPLE D'APPLICATION ^{N° 3} *****
(sans poids propre)

D O N N E E S D E C O N T R O L E

NOMBRE DE NOEUDS TOTAL (NUMNP) = 6
NOMBRE DE CAS DE CHARGES. (NLCASE) = 1
MODE D'EXECUTION. (MODEX) = 1
=.0, VERIFICATION
=.1, EXECUTION

I D O N N E E S S U R L E S N O E U D S

NOEUD NUMERO	CODE D"APPUI CONDITION D"APPUI			NOEUD COORDONNEES		
	X	Y	Z	X	Y	Z
1	1	1	1	.000	.000	.000
2	1	1	1	25.000	.000	.000
3	1	1	1	12.500	20.000	.000
4	0	0	0	7.500	4.000	15.000
5	0	0	0	17.500	4.000	15.000
6	0	0	0	12.500	12.000	15.000

D O N N E E S S U R L E S C H A R G E S

NO. DE CAS DE CHARGE = 1
NOMBRE DE CHARGES CONCENTREES. = 2

NOEUD NUMERO	DIRECTION	CHARGE INTENSITE
5	2	-.10000E+01
5	3	.20000E+01

TYPE D'ELEMENT (NPAR(1)) . . = 1
EQ.1, ELEMENTS TREILLIS
NOMBRE D' ELEMENTS. (NPAR(2)) . . = 12
CARACTERISTIQUES MEC. et GEOMETRIQUE

N O M B R E D E P R O P R I E T E S M E C A N I Q U E S

ET GEOMETRIQUES DES ELEMENTS , (NPAR(3)) . . = 1

NO. NUMERO	MODULE DE YOUNG E	PROP-GEOMETRIQ SECT A	MOMENT D'INERTIE	CONTRAINTTE ADMISSIBLE
1	.10000E+01	.100000E+01	.100000E+01	.100000E+01

E L E M E N T N O E U D N O E U D M A T E R I A U
N U M E R O - N I J N U M E R O

1	1	2	1
2	1	3	1
3	1	4	1
4	1	6	1
5	2	3	1

6	2	4	1
7	2	5	1
8	3	5	1
9	3	6	1
10	4	5	1
11	4	6	1
12	5	6	1

NOMBRE D' EQUATIONS (NEQ) = 9
 NOMBRE D'ELEMENTS DE MATRICE (NWK) = 81
 LARGEUR DE BANDE (MK) = 9
 CAS DE CHARGE 1

D E P L A C E M E N T S

NOEUD	X-DEPLACEMENT	Y-DEPLACEMENT	Z-DEPLACEMENT
1	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
2	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
3	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
4	.119513E+01	-.746949E+00	.171053E+00
5	.161179E+01	-.281039E+02	.276609E+02
6	.232890E+02	-.145556E+02	-.776300E+01

C A L C U L D E S C O N T R A I N T E S

ELEMENT NUMERO	FORCE	CONTRAINTE	FLAMBEMENT K*sigma	CONTRAINTE ADMISSIBLE
1	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+01
2	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+01
3	.287349E-01	.287349E-01	.113182E+01	.100000E+01
4	.127667E-06	.127667E-06	.886237E-05	.100000E+01
5	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+01
6	-.389889E-01	-.389889E-01	-.281951E+01	.100000E+01
7	.976987E+00	.976987E+00	.384819E+02	.100000E+01
8	.172457E+01	.172457E+01	.115344E+03	.100000E+01
9	-.202188E-07	-.202188E-07	-.774418E-06	.100000E+01
10	.416667E-01	.416667E-01	.559024E+00	.100000E+01
11	-.120558E-06	-.120558E-06	-.144302E-05	.100000E+01
12	-.134879E-08	-.134879E-08	-.161444E-07	.100000E+01

EXEMPLE D'APPLICATION no 3

(avec poids propre)

DEPLACEMENTS

NOEUD	X-DEPLACEMENT	Y-DEPLACEMENT	Z-DEPLACEMENT
1	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
2	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
3	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
4	-.404964E+03	.846781E+03	-.704803E+03
5	-.503163E+03	-.846873E+03	-.679372E+03
6	.899065E+03	-.733100E+02	-.683714E+03

CALCUL DES CONTRAINTE S

ELEMENT NUMERO	FORCE	CONTRAINTE	FLAMBEMENT K*SIGMA	CONTRAINTE ADMISSIBLE
1	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+01
2	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+01
3	-.343891E+02	-.343891E+02	-.135453E+04	.100000E+01
4	.195881E+00	.195881E+00	.135977E+02	.100000E+01
5	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+01
6	-.179166E+00	-.179166E+00	-.129565E+02	.100000E+01
7	-.329835E+02	-.329835E+02	-.129917E+04	.100000E+01
8	.166713E+01	.166713E+01	.111502E+03	.100000E+01
9	-.334575E+02	-.334575E+02	-.128149E+04	.100000E+01
10	-.981990E+01	-.981990E+01	-.131749E+03	.100000E+01
11	-.944472E+01	-.944472E+01	-.113048E+03	.100000E+01
12	-.924315E+01	-.924315E+01	-.110636E+03	.100000E+01

EXEMPLE D'APPLICATION no 1 calcul statique
(avec poids propre)

D O N N E E S D E C O N T R O L E

NOMBRE DE NOEUDS TOTAL (NUMNP) = 51
 NOMBRE DE CAS DE CHARGES. (NLCASE) = 1
 MASSE VOLUMIQUE = 8.E-4

NO. NUMERO	MODULE DE YOUNG E	PROP-GEOMETRIQ SECT A	MOMENT D'INERTIE	CONTRAINTE ADMISSIBLE
1	.21000E+05	.675000E+03	.379688E+05	.240000E+02
2	.21000E+05	.384750E+03	.123360E+05	.240000E+02
3	.21000E+05	.931000E+03	.100000E+01	.100000E+01
4	.21000E+05	.575000E+03	.100000E+01	.100000E+01
5	.21000E+05	.169600E+04	.100000E+01	.100000E+01
6	.21000E+05	.684000E+03	.100000E+01	.100000E+01

D E P L A C E M E N T S

NOEUD	X-DEPLACEMENT	Y-DEPLACEMENT	Z-DEPLACEMENT
1	-.792271E+00	-.178290E+01	-.416158E+00
2	-.506304E+00	-.140633E+01	-.388737E+00
3	-.499177E+00	-.130724E+01	-.207899E+00
4	-.494276E+00	-.130698E+01	-.392994E+00
5	-.494007E+00	-.140656E+01	-.603815E+00
6	-.280434E+00	-.924481E+00	-.280386E+00
7	-.273712E+00	-.944061E+00	-.111701E+00
8	-.203223E+00	-.951521E+00	-.400676E+00
9	-.205120E+00	-.924343E+00	-.737639E+00
10	-.891872E-01	-.326397E+00	-.234467E+00
11	-.828287E-01	-.587727E+00	-.105082E+00
12	.188560E+00	-.615490E+00	-.362845E+00
13	-.767182E-01	-.649278E+00	-.201996E+01
14	-.897226E-03	-.279643E+00	-.160435E+00
15	.539892E-01	-.328620E+00	-.117547E+00
16	.344976E-01	-.324448E+00	-.320966E+00
17	.376511E-01	-.275915E+00	-.257359E+00
18	.832872E-01	-.949717E-01	-.152506E+00
19	.585540E-01	-.166784E+00	-.121491E+00
20	-.368784E-01	-.168215E+00	-.331341E+00
21	-.365749E-01	-.942173E-01	-.275940E+00
22	.939135E-01	-.411521E+00	-.265538E+00
23	.214266E-01	-.408902E+00	-.488854E+00
24	.393852E-01	-.235935E+00	-.271912E+00
25	-.391495E-01	-.237658E+00	-.496107E+00
26	.566058E-01	-.479952E+00	-.529868E+00
27	.134212E-01	-.479952E+00	-.609473E+00
28	.140679E-01	-.312816E+00	-.531888E+00
29	.122317E+01	-.760119E+01	-.611524E+00
30	-.729005E-01	-.688768E+00	-.121167E+01
31	-.379010E-01	-.521915E+00	-.467760E+00
32	-.656520E+00	-.525157E+00	-.145270E+01
33	.105107E+00	.132060E+00	-.475225E+00
34	-.341988E-01	.152519E+00	-.145932E+01
35	-.105664E+00	.432468E+00	-.106660E+01
36	-.218532E+00	.432145E+00	-.236864E+01

37	.837192E-01	.432093E+00	-.106871E+01
38	-.128454E+00	.449634E+00	-.237069E+01
39	-.164160E-01	.111543E+01	-.253113E+01
40	-.407728E-01	-.342309E-02	-.970993E-01
41	.509576E-01	.128180E-01	-.975796E-01
42	.956315E-01	-.159014E+00	-.201048E+00
43	-.868767E-01	-.128209E+00	-.208273E+00
44	-.112807E-01	.254344E-01	-.320895E-01
45	.147394E-01	.862081E-02	-.249203E-01
46	.465033E-01	-.388365E-01	-.603229E-01
47	-.310893E-01	-.437657E-01	-.661381E-01
48	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
49	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
50	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
51	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

C A L C U L D E S C O N T R A I N T E S

ELEMENT NUMERO	FORCE	CONTRAINTÉ	FLAMBEMENT K*sigma	CONTRAINTE ADMISSIBLE
1	-.282788E+03	-.418945E+00	-.304836E+01	.240000E+02
2	.344348E+01	.510146E-02	.371197E-01	.240000E+02
3	.344384E+01	.510198E-02	.371235E-01	.240000E+02
4	-.282787E+03	-.418944E+00	-.304836E+01	.240000E+02
5	.575820E+02	.149661E+00	.743526E+00	.240000E+02
6	-.217210E+01	-.564548E-02	-.280472E-01	.240000E+02
7	.265893E+01	.691080E-02	.181539E-01	.240000E+02
8	-.300026E+01	-.779796E-02	-.204844E-01	.240000E+02
9	-.280531E+03	-.415601E+00	-.241561E+01	.240000E+02
10	-.441605E+01	-.654230E-02	-.380260E-01	.240000E+02
11	.553811E+02	.820461E-01	.476878E+00	.240000E+02
12	-.357208E+03	-.529197E+00	-.307587E+01	.240000E+02
13	-.844354E+02	-.219455E+00	-.352804E+01	.240000E+02
14	.842875E+02	.219071E+00	.352186E+01	.240000E+02
15	-.746124E+01	-.193924E-01	-.276281E+00	.240000E+02
16	.595484E+01	.154772E-01	.220501E+00	.240000E+02
17	.417805E+02	.108591E+00	.889287E+00	.240000E+02
18	.117854E+02	.306313E-01	.250849E+00	.240000E+02
19	-.854546E+00	-.222104E-02	-.181888E-01	.240000E+02
20	.463671E+02	.120512E+00	.986911E+00	.240000E+02
21	.409419E+02	.106412E+00	.206147E+01	.240000E+02
22	-.915361E+02	-.237911E+00	-.460894E+01	.240000E+02
23	-.675637E+02	-.175604E+00	-.340190E+01	.240000E+02
24	.616791E+02	.160310E+00	.334514E+02	.240000E+02
25	-.867247E+02	-.225405E+00	-.436668E+01	.240000E+02
26	.656581E+02	.170651E+00	.487332E+02	.240000E+02
27	.106577E+03	.277003E+00	.536625E+01	.240000E+02
28	.925413E+02	.240523E+00	.465955E+01	.240000E+02
29	-.420820E+03	-.452008E+00	-.595216E+04	.100000E+01
30	.782477E+02	.840470E-01	.208954E+05	.100000E+01
31	.151147E+03	.162349E+00	.213785E+04	.100000E+01
32	-.467817E+03	-.502489E+00	-.661690E+04	.100000E+01
33	.595808E+02	.154856E+00	.320343E+01	.240000E+02
34	-.664464E+02	-.172700E+00	-.352423E+02	.240000E+02
35	-.377866E+02	-.982108E-01	-.203164E+01	.240000E+02
36	.809067E+02	.218284E+00	.435005E+01	.240000E+02
37	-.965923E+02	-.251052E+00	-.519340E+01	.240000E+02
38	-.838646E+02	-.217972E+00	-.450908E+01	.240000E+02
39	.765954E+02	.199078E+00	.411824E+01	.240000E+02

39	.765954E+02	.199078E+00	.411824E+01	.240000E+02
40	.928363E+01	.241290E-01	.706502E+01	.240000E+02
41	-.405328E+03	-.105348E+01	-.114152E+02	.240000E+02
42	-.149583E+03	-.160669E+00	-.387627E+05	.100000E+01
43	.333734E+03	.358468E+00	.472039E+04	.100000E+01
44	-.737606E+03	-.792273E+00	-.104328E+05	.100000E+01
45	.441836E+03	.768410E+00	.623563E+04	.100000E+01
46	-.253860E+02	-.441495E-01	-.358272E+03	.100000E+01
47	-.224740E+02	-.584120E-01	-.631565E+00	.240000E+02
48	-.200802E+02	-.521902E-01	-.564295E+00	.240000E+02
49	.683451E+02	.177635E+00	.392475E+01	.240000E+02
50	-.172392E+02	-.448064E-01	-.989972E+00	.240000E+02
51	.324734E+02	.844012E-01	.186480E+01	.240000E+02
52	.540030E+02	.140359E+00	.310115E+01	.240000E+02
53	.117196E+03	.304604E+00	.673006E+01	.240000E+02
54	-.195039E+03	-.506923E+00	-.112002E+02	.240000E+02
55	-.930858E+02	-.241938E+00	-.534550E+01	.240000E+02
56	.209848E+03	.545415E+00	.120506E+02	.240000E+02
57	-.595660E+02	-.639806E-01	-.842513E+03	.100000E+01
58	.195067E+03	.209524E+00	.275907E+04	.100000E+01
59	.123432E+03	.132580E+00	.174585E+04	.100000E+01
60	.362637E+02	.389513E-01	.512921E+03	.100000E+01
61	-.550562E+03	-.324624E+00	-.884045E+04	.100000E+01
62	-.675457E+01	-.398265E-02	-.108459E+03	.100000E+01
63	.128515E+02	.187888E-01	.206361E+03	.100000E+01
64	-.677246E+01	-.990126E-02	-.108748E+03	.100000E+01
65	-.146379E+03	-.254571E+00	-.413162E+04	.100000E+01
66	.851382E+02	.148066E+00	.273416E+04	.100000E+01
67	.322805E+03	.561401E+00	.911137E+04	.100000E+01
68	-.177057E+03	-.307926E+00	-.568609E+04	.100000E+01
69	.468772E+03	.815256E+00	.113496E+05	.100000E+01
70	.184908E+03	.321579E+00	.447687E+04	.100000E+01
71	-.121233E+03	-.315095E+00	-.662173E+01	.240000E+02
72	-.112629E+03	-.292732E+00	-.615178E+01	.240000E+02
73	-.332810E+03	-.196232E+00	-.714964E+04	.100000E+01
74	-.797969E+02	-.470501E-01	-.171425E+04	.100000E+01
75	.515032E+02	.133861E+00	.665034E+00	.240000E+02
76	.586078E+02	.152327E+00	.756772E+00	.240000E+02
77	.310190E+03	.539461E+00	.662001E+04	.100000E+01
78	.886684E+02	.154206E+00	.189234E+04	.100000E+01
79	-.608784E+02	-.158228E+00	-.256601E+01	.240000E+02
80	-.887466E+02	-.230660E+00	-.374064E+01	.240000E+02
81	-.239977E+03	-.141496E+00	-.474517E+04	.100000E+01
82	.772104E-01	.455250E-04	.152671E+01	.100000E+01
83	.326429E+02	.848417E-01	.136979E+00	.240000E+02
84	.331405E+02	.861353E-01	.139068E+00	.240000E+02
85	.241121E+03	.419341E+00	.939571E+04	.100000E+01
86	-.767449E-01	-.133469E-03	-.299051E+01	.100000E+01
87	-.236219E+03	-.139280E+00	-.883424E+04	.100000E+01
88	.636230E-01	.375135E-04	.237940E+01	.100000E+01
89	.700630E+03	.121849E+01	.169632E+05	.100000E+01
90	-.689502E+01	-.119913E-01	-.688061E+03	.100000E+01
91	-.127284E+03	-.330822E+00	-.695225E+01	.240000E+02
92	-.938641E+02	-.243961E+00	-.512686E+01	.240000E+02
93	-.537807E+03	-.317103E+00	-.115535E+05	.100000E+01
94	.825774E+02	.486895E-01	.177398E+04	.100000E+01
95	.603140E+02	.156761E+00	.778803E+00	.240000E+02
96	.535268E+02	.139121E+00	.691163E+00	.240000E+02
97	.467355E+03	.812792E+00	.997420E+04	.100000E+01
98	-.736531E+02	-.131571E+00	-.161457E+04	.100000E+01

99	-.402818E+02	-.104696E+00	-.169787E+01	.240000E+02
100	-.114430E+03	-.297414E+00	-.482320E+01	.240000E+02
101	-.594051E+03	-.350266E+00	-.117464E+05	.100000E+01
102	.218662E+03	.128928E+00	.617522E+04	.100000E+01
103	.340275E+02	.884404E-01	.142790E+00	.240000E+02
104	.331076E+02	.860496E-01	.138930E+00	.240000E+02
105	.409597E+03	.712342E+00	.159607E+05	.100000E+01
106	-.187286E+03	-.325715E+00	-.729794E+04	.100000E+01
107	-.401271E+03	-.236598E+00	-.150069E+05	.100000E+01
108	.183479E+03	.108184E+00	.686185E+04	.100000E+01
109	-.600811E+02	-.156156E+00	-.451662E+01	.240000E+02
110	-.141122E+02	-.366789E-01	-.396582E+00	.240000E+02
111	-.542378E+01	-.140969E-01	-.317914E+00	.240000E+02
112	.446109E-03	.115948E-05	.473907E-05	.240000E+02
113	-.159018E+03	-.413301E+00	-.119542E+02	.240000E+02
114	.174624E+02	.453864E-01	.490730E+00	.240000E+02
115	-.134243E+02	-.348910E-01	-.786862E+00	.240000E+02
116	.289799E+01	.753214E-02	.307857E-01	.240000E+02
117	.501034E+02	.130223E+00	.359233E+01	.240000E+02
118	.927974E+01	.241189E-01	.260780E+00	.240000E+02
119	.527818E+01	.137185E-01	.293283E+00	.240000E+02
120	.145386E-01	.377871E-04	.106678E-02	.240000E+02
121	.122920E+03	.319480E+00	.881316E+01	.240000E+02
122	-.110207E+03	-.286437E+00	-.309704E+01	.240000E+02
123	.231728E+03	.602281E+00	.128760E+02	.240000E+02
124	-.157472E+03	-.409285E+00	-.167285E+01	.240000E+02
125	-.524751E+02	-.136387E+00	-.725020E+01	.240000E+02
126	-.609525E+02	-.158421E+00	-.842149E+01	.240000E+02
127	.887493E+02	.230667E+00	.122620E+02	.240000E+02
128	-.198518E+03	-.294100E+00	-.894178E+01	.240000E+02
129	-.362085E+02	-.388921E-01	-.256010E+04	.100000E+01
130	-.160563E+03	-.172463E+00	-.113525E+05	.100000E+01
131	-.204169E+03	-.219301E+00	-.144356E+05	.100000E+01
132	-.501868E+02	-.539063E-01	-.354842E+04	.100000E+01
133	-.347944E+03	-.373731E+00	-.190360E+05	.100000E+01
134	-.329763E+03	-.354203E+00	-.180414E+05	.100000E+01
135	-.232155E+02	-.603392E-01	-.248523E+01	.240000E+02
136	-.591844E+03	-.876805E+00	-.206763E+02	.240000E+02
137	-.456727E+02	-.490576E-01	-.149718E+04	.100000E+01
138	.221512E+02	.237929E-01	.726132E+03	.100000E+01
139	.353194E+02	.379371E-01	.115779E+04	.100000E+01
140	.499323E+02	.536330E-01	.163682E+04	.100000E+01
141	.123853E+03	.133032E+00	.405998E+04	.100000E+01
142	.354144E+02	.920453E-01	.228047E+01	.240000E+02
143	.354911E+02	.922447E-01	.228541E+01	.240000E+02
144	.134271E+03	.348982E+00	.135198E+02	.240000E+02
145	-.350038E+03	-.909780E+00	-.984211E+01	.240000E+02
146	-.777765E+03	-.202148E+01	-.218686E+02	.240000E+02
147	-.394788E+03	-.102609E+01	-.111004E+02	.240000E+02
148	-.772785E+03	-.200854E+01	-.217286E+02	.240000E+02
149	-.415645E+02	-.108030E+00	-.273671E+01	.240000E+02
150	-.636823E+02	-.165516E+00	-.419301E+01	.240000E+02
151	-.668652E+02	-.394252E-01	-.224168E+04	.100000E+01
152	-.380094E+02	-.224112E-01	-.127428E+04	.100000E+01
153	-.142291E+03	-.838978E-01	-.477035E+04	.100000E+01
154	-.874200E+01	-.515448E-02	-.293079E+03	.100000E+01
155	-.132521E+03	-.781372E-01	-.444281E+04	.100000E+01
156	-.501907E+02	-.733782E-01	-.168267E+04	.100000E+01
157	-.329643E+03	-.481934E+00	-.435759E+04	.100000E+01
158	-.679133E+03	-.992885E+00	-.897755E+04	.100000E+01

159	-.254241E+03	-.371697E+00	-.336085E+04	.100000E+01
160	-.625236E+03	-.914088E+00	-.826508E+04	.100000E+01
161	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+01
162	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+01
163	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+01
164	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+01

calcul dynamique

mode 1	facteur de contribution	3.986779E-001
mode 2	facteur de contribution	4.600586E-001
mode 3	facteur de contribution	2.520074E-003
mode 4	facteur de contribution	2.695246E-005
mode 5	facteur de contribution	2.459363E-002
mode 6	facteur de contribution	2.324099E-002
mode 7	facteur de contribution	1.621699E-002
mode 8	facteur de contribution	4.998979E-002

MODE 1

valeurs propres no.	1=	.99030E+00
valeurs propres no.	2=	.17412E+01
valeurs propres no.	3=	.12041E+02
valeurs propres no.	4=	.28198E+02
valeurs propres no.	5=	.33200E+02
valeurs propres no.	6=	.36204E+02
valeurs propres no.	7=	.68064E+02
valeurs propres no.	8=	.73094E+02

***** VECTEUR DEPLACEMENT DES NOEUDS ACTIFS*****
 (direction X)

1	1.1613890
2	1.4095910
3	1.6131400
4	1.8223480
5	2.0185690
6	2.1566000
7	2.2760520
8	2.4396680
9	2.6005110
10	2.6945300
11	2.7836370
12	2.8827460
13	5.7535890
14	5.6184070
15	5.6548270
16	5.6891620
17	5.7286750
18	5.7736230
19	5.8122410
20	5.8510270
21	5.8898280
22	5.9233710
23	5.9606320
24	6.0013370
25	6.0390830
26	6.0744670
27	6.1116380
28	6.1497810
29	6.1866560
30	6.2230890
31	6.2561720
32	6.2950250
33	6.3311710
34	6.3666770
35	6.4017080
36	6.4381200
37	6.4736530
38	6.5090750
39	6.5441380
40	6.4978170

41	6.5042840
42	6.5066020
43	6.5047270
44	6.5069140
45	6.5045180
46	6.5046760
47	6.5083130

EXEMPLE 1 DIRECTION Y

mode 1	facteur de contribution	8.633406E-001
mode 2	facteur de contribution	1.353850E-003
mode 3	facteur de contribution	2.191840E-002
mode 4	facteur de contribution	8.084416E-005
mode 5	facteur de contribution	2.511835E-003
mode 6	facteur de contribution	3.020437E-003
mode 7	facteur de contribution	4.156116E-003
mode 8	facteur de contribution	5.172547E-003
mode 9	facteur de contribution	2.864641E-005
mode 10	facteur de contribution	4.013114E-004
mode 11	facteur de contribution	4.208117E-004
mode 12	facteur de contribution	8.518466E-003
mode 13	facteur de contribution	2.121810E-003
mode 14	facteur de contribution	9.895794E-003
mode 15	facteur de contribution	2.206394E-002
mode 16	facteur de contribution	4.805339E-003
mode 17	facteur de contribution	1.796964E-004
mode 18	facteur de contribution	1.810317E-004
valeurs propres no.	1=	.16447E+01
valeurs propres no.	2=	.63320E+01
valeurs propres no.	3=	.91490E+01
valeurs propres no.	4=	.23771E+02
valeurs propres no.	5=	.24456E+02
valeurs propres no.	6=	.26920E+02
valeurs propres no.	7=	.34261E+02
valeurs propres no.	8=	.38449E+02
valeurs propres no.	9=	.40174E+02
valeurs propres no.	10=	.45763E+02
valeurs propres no.	11=	.46565E+02
valeurs propres no.	12=	.53911E+02
valeurs propres no.	13=	.64309E+02
valeurs propres no.	14=	.68779E+02
valeurs propres no.	15=	.83574E+02
valeurs propres no.	16=	.94196E+02
valeurs propres no.	17=	.10125E+03
valeurs propres no.	18=	.10550E+03

***** VECTEUR DEPLACEMENT DES NOEUDS ACTIFS*****
(direction Y)

1	1.1763990
2	1.6558490
3	2.0139150
4	2.3163630
5	2.5924220
6	2.8331790
7	3.0437930

8	3.2394440
9	3.4318440
10	3.6039360
11	3.7582530
12	3.9068880
13	4.0585750
14	4.1875010
15	4.3056860
16	4.4208290
17	4.5436650
18	4.6899950
19	4.8290850
20	4.9675360
21	5.1048310
22	5.2384900
23	5.3767650
24	5.5596940
25	5.7469470
26	5.8986170
27	6.0482760
28	6.2346440
29	6.4380460
30	6.6342510
31	6.7469970
32	6.8636810
33	7.0130870
34	7.1619250
35	7.2893380
36	7.4157180
37	7.5615440
38	7.7032750
39	7.8543450
40	7.8730650
41	7.8786950
42	7.8939190
43	7.9218090
44	7.9216950
45	7.9228590
46	7.9235330
47	7.9258310

mode 1	facteur de contribution	4.255467E-001
mode 2	facteur de contribution	9.999095E-003
mode 3	facteur de contribution	4.197124E-002
mode 4	facteur de contribution	1.923336E-001
mode 5	facteur de contribution	5.730174E-003
mode 6	facteur de contribution	1.466831E-003
mode 7	facteur de contribution	1.962478E-003
mode 8	facteur de contribution	2.324003E-001
mode 9	facteur de contribution	2.572752E-003
mode 10	facteur de contribution	1.938219E-003
mode 11	facteur de contribution	3.584792E-003
mode 12	facteur de contribution	5.835996E-004
mode 13	facteur de contribution	1.480132E-002
mode 14	facteur de contribution	1.025665E-003
mode 15	facteur de contribution	8.173871E-004
mode 16	facteur de contribution	3.618848E-004
mode 17	facteur de contribution	4.083486E-002
mode 18	facteur de contribution	1.492916E-004

valeurs propres no.1=	.38309E+01
valeurs propres no.2=	.43354E+01
valeurs propres no.3=	.54415E+01
valeurs propres no.4=	.12093E+02
valeurs propres no.5=	.13068E+02
valeurs propres no.6=	.13619E+02
valeurs propres no.7=	.14211E+02
valeurs propres no.8=	.23957E+02
valeurs propres no.9=	.38028E+02
valeurs propres no.10=	.41912E+02
valeurs propres no.11=	.48008E+02
valeurs propres no.12=	.55944E+02
valeurs propres no.13=	.11316E+03
valeurs propres no.14=	.17099E+03
valeurs propres no.15=	.18418E+03
valeurs propres no.16=	.25487E+03
valeurs propres no.17=	.34123E+03
valeurs propres no.18=	.34943E+03

***** VECTEUR DEPLACEMENT DES NOEUDS ACTIFS*****
(direction Z)

1	1.486442E-001
2	1.729579E-001
3	1.934754E-001
4	2.136277E-001
5	2.345174E-001
6	2.481209E-001
7	2.616228E-001
8	2.763830E-001
9	2.955148E-001
10	3.030961E-001
11	3.139734E-001
12	3.255357E-001
13	4.922061E-001
14	4.296893E-001
15	4.390657E-001
16	4.461915E-001
17	4.534325E-001
18	4.642638E-001
19	4.747356E-001
20	4.833175E-001

21	4.927329E-001
22	5.516555E-001
23	6.172213E-001
24	6.657968E-001
25	7.258404E-001
26	8.336787E-001
27	9.659526E-001
28	1.0539030
29	1.1629630
30	1.4461980
31	1.4776240
32	1.5450180
33	1.5790940
34	1.6466930
35	1.7412260
36	1.8941610
37	1.9750690
38	2.1132680
39	2.4322230
40	2.4094060
41	2.4096470
42	2.4104590
43	2.4113140
44	2.4104540
45	2.4105210
46	2.4106280
47	2.4108190

calcul statique

EXEMPLE D'APPLICATION NO 2

DONNEES DE CONTROLE

NOMBRE DE NOEUDS TOTAL (NUMNP) = 95
 NOMBRE DE CAS DE CHARGES. (NLCASE) = 1

NOEUD NUMERO	DIRECTION	CHARGE INTENSITE
61	1	.10000E+04
71	3	.20000E+04

D E P L A C E M E N T S

NOEUD	X-DEPLACEMENT	Y-DEPLACEMENT	Z-DEPLACEMENT
1	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
2	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
3	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
4	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
5	.915819E+00	.508088E+00	.550800E+00
6	.849533E+00	.669520E+00	-.744928E+00
7	.770257E+00	.646817E+00	-.604154E+00
8	.743175E+00	.485354E+00	.700438E+00
9	.309322E+01	.809298E+00	.106026E+01
10	.302261E+01	.113948E+01	-.144455E+01
11	.278585E+01	.111673E+01	-.115631E+01
12	.276310E+01	.786522E+00	.135279E+01
13	.643000E+01	.921882E+00	.152409E+01
14	.635942E+01	.141559E+01	-.209457E+01
15	.596226E+01	.139159E+01	-.166076E+01
16	.593947E+01	.897854E+00	.196134E+01
17	.108291E+02	.842187E+00	.194359E+01
18	.107598E+02	.149862E+01	-.269628E+01
19	.101908E+02	.147462E+01	-.211573E+01
20	.101668E+02	.818159E+00	.252479E+01
21	.162023E+02	.574963E+00	.231951E+01
22	.161330E+02	.138181E+01	-.325094E+01
23	.154109E+02	.136114E+01	-.252093E+01
24	.153869E+02	.554254E+00	.304239E+01
25	.224490E+02	.128226E+00	.264904E+01
26	.223917E+02	.105267E+01	-.375523E+01
27	.215176E+02	.104271E+01	-.287921E+01
28	.214815E+02	.118234E+00	.351695E+01
29	.294833E+02	-.505246E+00	.293348E+01
30	.294153E+02	.525560E+00	-.420998E+01
31	.284099E+02	.526615E+00	-.318923E+01
32	.283845E+02	-.504227E+00	.394766E+01
33	.372541E+02	-.129917E+01	.315111E+01
34	.371597E+02	-.287251E+00	-.459395E+01
35	.360533E+02	-.213355E+00	-.347273E+01
36	.359533E+02	-.122531E+01	.435575E+01
37	.456442E+02	-.242123E+01	.320273E+01
38	.454770E+02	-.131517E+01	-.480792E+01
39	.445381E+02	-.126993E+01	-.372788E+01
40	.445109E+02	-.247707E+01	.494194E+01
41	.559716E+02	-.436194E+01	.314521E+01
42	.559341E+02	-.220821E+01	-.686860E+01
43	.538508E+02	-.219562E+01	-.399885E+01
44	.538009E+02	-.445042E+01	.544681E+01
45	.661479E+02	-.689599E+01	.314089E+01

46	.661430E+02	-.466995E+01	-.701858E+01
47	.638929E+02	-.471288E+01	-.422435E+01
48	.638044E+02	-.693896E+01	.580907E+01
49	.766235E+02	-.963891E+01	.317691E+01
50	.765731E+02	-.727407E+01	-.720492E+01
51	.742696E+02	-.730460E+01	-.431620E+01
52	.742266E+02	-.966948E+01	.604159E+01
53	.873319E+02	-.125640E+02	.319535E+01
54	.872692E+02	-.100676E+02	-.736971E+01
55	.848669E+02	-.100985E+02	-.433234E+01
56	.848364E+02	-.125949E+02	.620228E+01
57	.981890E+02	-.156618E+02	.318417E+01
58	.981266E+02	-.131038E+02	-.750089E+01
59	.955822E+02	-.131038E+02	-.428482E+01
60	.955513E+02	-.156618E+02	.630320E+01
61	.109161E+03	-.736480E+02	.311279E+01
62	.109088E+03	-.164054E+02	-.756791E+01
63	.519046E+02	-.164000E+02	-.420469E+01
64	.518839E+02	-.736426E+02	.637444E+01
65	.119770E+03	-.770023E+02	.305831E+01
66	.119785E+03	-.198038E+02	-.755498E+01
67	.626000E+02	-.198227E+02	-.410720E+01
68	.625846E+02	-.770212E+02	.643180E+01
69	.130363E+03	-.804429E+02	.303985E+01
70	.130373E+03	-.232989E+02	-.757476E+01
71	.731932E+02	-.232965E+02	-.403262E+01
72	.731826E+02	-.804454E+02	.644561E+01
73	.140995E+03	-.838634E+02	.304688E+01
74	.140998E+03	-.268480E+02	-.760720E+01
75	.839762E+02	-.268489E+02	-.403722E+01
76	.197989E+03	-.838687E+02	-.445368E+00
77	.151675E+03	-.873887E+02	.305996E+01
78	.151667E+03	-.303901E+02	-.762746E+01
79	.946585E+02	-.303879E+02	-.406485E+01
80	.946600E+02	-.873918E+02	.664407E+01
81	.162421E+03	-.909683E+02	.305947E+01
82	.162418E+03	-.339487E+02	-.765553E+01
83	.105411E+03	-.339526E+02	-.407560E+01
84	.105396E+03	-.909694E+02	.665179E+01
85	.151657E+03	.266335E+02	-.184296E+02
86	.946475E+02	.266339E+02	-.148550E+02
87	.151675E+03	-.144404E+03	.138036E+02
88	.946607E+02	-.144404E+03	.173836E+02
89	.162436E+03	.230573E+02	-.184354E+02
90	.105425E+03	.230553E+02	-.148574E+02
91	.151653E+03	.836429E+02	-.292252E+02
92	.946442E+02	.836439E+02	-.256470E+02
93	.162436E+03	.800656E+02	-.292269E+02
94	.105426E+03	.800659E+02	-.256485E+02
95	.123148E+03	.140663E+03	-.382231E+02

CALCUL DES CONTRAINTES

BARRE	FORCE	CONTRAINTE	FLAMBEMENT $k^2 s_1 q_m$	CONTRAINTE ADMISSIBLE
1	.100437E+04	.109836E+01	.464930E+01	.240000E+02
2	.409626E+03	.447960E+00	.189619E+01	.240000E+02
3	-.410340E+03	-.448741E+00	-.189950E+01	.240000E+02
4	.410098E+03	.448476E+00	.189838E+01	.240000E+02
5	-.656166E+02	-.717572E-01	-.303745E+00	.240000E+02
6	.106998E+04	.117011E+01	.495303E+01	.240000E+02
7	.344011E+03	.376204E+00	.159245E+01	.240000E+02

8	-.344725E+03	-.376986E+00	-.159576E+01	.240000E+02
9	.344481E+03	.376719E+00	.159463E+01	.240000E+02
10	.634535E+00	.693917E-03	.293732E-02	.240000E+02
11	.590139E+04	.115668E+02	.442936E+02	.240000E+02
12	-.798131E+04	-.156435E+02	-.599048E+02	.240000E+02
13	-.647302E+04	-.126872E+02	-.485842E+02	.240000E+02
14	.750463E+04	.147092E+02	.563270E+02	.240000E+02
15	-.710194E+03	-.139199E+01	-.533046E+01	.240000E+02
16	-.243586E+03	-.477432E+00	-.182826E+01	.240000E+02
17	.545846E+04	.106987E+02	.409692E+02	.240000E+02
18	-.243253E+03	-.476779E+00	-.182576E+01	.240000E+02
19	-.749586E+04	-.146920E+02	-.562612E+02	.240000E+02
20	.290156E+03	.568711E+00	.217781E+01	.240000E+02
21	-.591594E+04	-.115953E+02	-.444028E+02	.240000E+02
22	.698940E+04	.136993E+02	.524599E+02	.240000E+02
23	-.756587E+03	-.148292E+01	-.567867E+01	.240000E+02
24	-.244035E+03	-.478313E+00	-.183164E+01	.240000E+02
25	-.243700E+03	-.477656E+00	-.182912E+01	.240000E+02
26	.243761E+03	.477775E+00	.182958E+01	.240000E+02
27	.496958E+04	.974046E+01	.372999E+02	.240000E+02
28	-.696446E+04	-.136504E+02	-.522727E+02	.240000E+02
29	-.540479E+04	-.105935E+02	-.405664E+02	.240000E+02
30	.652012E+04	.127795E+02	.489376E+02	.240000E+02
31	-.756150E+03	-.148207E+01	-.567539E+01	.240000E+02
32	-.257100E+03	-.503919E+00	-.192970E+01	.240000E+02
33	.244202E+03	.478641E+00	.183289E+01	.240000E+02
34	-.257437E+03	-.504581E+00	-.193223E+01	.240000E+02
35	.106935E+04	.116942E+01	.495011E+01	.240000E+02
36	.344644E+03	.376897E+00	.159538E+01	.240000E+02
37	-.345357E+03	-.377676E+00	-.159868E+01	.240000E+02
38	.345119E+03	.377416E+00	.159758E+01	.240000E+02
39	.189423E+02	.207149E-01	.876852E-01	.240000E+02
40	.449455E+04	.880939E+01	.337345E+02	.240000E+02
41	-.644690E+04	-.126360E+02	-.483881E+02	.240000E+02
42	-.487463E+04	-.955435E+01	-.365872E+02	.240000E+02
43	.603698E+04	.118326E+02	.453114E+02	.240000E+02
44	.105040E+04	.114870E+01	.486238E+01	.240000E+02
45	.363596E+03	.397622E+00	.168311E+01	.240000E+02
46	-.182156E+03	-.199203E+00	-.843215E+00	.240000E+02
47	-.182156E+03	-.199203E+00	-.843215E+00	.240000E+02
48	.364070E+03	.398141E+00	.168531E+01	.240000E+02
49	-.742727E+03	-.145576E+01	-.557464E+01	.240000E+02
50	-.257099E+03	-.503918E+00	-.192969E+01	.240000E+02
51	.257603E+03	.504907E+00	.193348E+01	.240000E+02
52	-.257437E+03	-.504580E+00	-.193223E+01	.240000E+02
53	.402776E+04	.789448E+01	.302309E+02	.240000E+02
54	-.594274E+04	-.116479E+02	-.446040E+02	.240000E+02
55	-.434142E+04	-.850924E+01	-.325851E+02	.240000E+02
56	.554560E+04	.108695E+02	.416233E+02	.240000E+02
57	.105039E+04	.114869E+01	.486233E+01	.240000E+02
58	.363595E+03	.397622E+00	.168311E+01	.240000E+02
59	-.364303E+03	-.398396E+00	-.168639E+01	.240000E+02
60	.364070E+03	.398141E+00	.168531E+01	.240000E+02
61	-.742713E+03	-.145573E+01	-.557453E+01	.240000E+02
62	-.221541E+03	-.434224E+00	-.166280E+01	.240000E+02
63	.257590E+03	.504880E+00	.193337E+01	.240000E+02
64	-.221880E+03	-.434888E+00	-.166535E+01	.240000E+02
65	-.502825E+02	-.549881E-01	-.232762E+00	.240000E+02
66	.353058E+04	.692000E+01	.264993E+02	.240000E+02
67	-.540303E+04	-.105900E+02	-.405532E+02	.240000E+02

68	-.383859E+04	-.752370E+01	-.288111E+02	.240000E+02
69	.508462E+04	.996594E+01	.381633E+02	.240000E+02
70	.110066E+04	.120366E+01	.509504E+01	.240000E+02
71	.313307E+03	.342628E+00	.145032E+01	.240000E+02
72	-.314018E+03	-.343404E+00	-.145361E+01	.240000E+02
73	.313786E+03	.343151E+00	.145254E+01	.240000E
74	-.232716E+03	-.254494E+00	-.107726E+01	.240000E+02
75	-.162399E+03	-.177597E+00	-.751759E+00	.240000E+02
76	-.613741E+03	-.120294E+01	-.460651E+01	.240000E+02
77	-.106692E+03	-.209118E+00	-.800791E+00	.240000E+02
78	.386578E+03	.757698E+00	.290151E+01	.240000E+02
79	-.107051E+03	-.209822E+00	-.803486E+00	.240000E+02
80	.304756E+04	.597327E+01	.228739E+02	.240000E+02
81	-.487229E+04	-.954977E+01	-.365696E+02	.240000E+02
82	-.332165E+04	-.651048E+01	-.249310E+02	.240000E+02
83	.461468E+04	.904484E+01	.346361E+02	.240000E+02
84	.103038E+04	.112681E+01	.476972E+01	.240000E+02
85	.383582E+03	.419479E+00	.177563E+01	.240000E+02
86	-.384315E+03	-.420280E+00	-.177902E+01	.240000E+02
87	.384109E+03	.420055E+00	.177807E+01	.240000E+02
88	-.399574E+03	-.436967E+00	-.184966E+01	.240000E+02
89	-.728596E+03	-.142806E+01	-.546857E+01	.240000E+02
90	.113036E+02	.221552E-01	.848404E-01	.240000E+02
91	.271726E+03	.532587E+00	.203948E+01	.240000E+02
92	.109184E+02	.214002E-01	.819494E-01	.240000E+02
93	.233175E+04	.457026E+01	.175012E+02	.240000E+02
94	-.411390E+04	-.806332E+01	-.308775E+02	.240000E+02
95	-.303749E+04	-.595353E+01	-.227983E+02	.240000E+02
96	.437237E+04	.856991E+01	.328174E+02	.240000E+02
97	.142992E+04	.156374E+01	.661923E+01	.240000E+02
98	-.159835E+02	-.174793E-01	-.739890E-01	.240000E+02
99	.152110E+02	.166345E-01	.704128E-01	.240000E+02
100	-.154267E+02	-.168704E-01	-.714114E-01	.240000E+02
102	-.101104E+04	-.198166E+01	-.758851E+01	.240000E+02
103	.791728E+03	.155180E+01	.594242E+01	.240000E+02
104	.107180E+04	.210075E+01	.804457E+01	.240000E+02
105	.791325E+03	.155101E+01	.593939E+01	.240000E+02
106	.553055E+03	.108400E+01	.415103E+01	.240000E+02
107	-.229254E+04	-.449342E+01	-.172070E+02	.240000E+02
108	-.273372E+04	-.535813E+01	-.205183E+02	.240000E+02
109	.628052E+04	.123099E+02	.471393E+02	.240000E+02
110	.253348E+04	.277057E+01	.117277E+02	.240000E+02
111	-.111967E+04	-.122445E+01	-.518305E+01	.240000E+02
112	-.412100E+03	-.450665E+00	-.190764E+01	.240000E+02
113	.411864E+03	.450407E+00	.190655E+01	.240000E+02
114	.434303E+03	.474946E+00	.201042E+01	.240000E+02
115	-.179135E+04	-.351108E+01	-.134452E+02	.240000E+02
116	.484630E+03	.949883E+00	.363746E+01	.240000E+02
117	.291444E+03	.571236E+00	.218748E+01	.240000E+02
118	-.598316E+03	-.117271E+01	-.449074E+01	.240000E+02
119	-.616335E+03	-.120303E+01	-.462399E+01	.240000E+02
120	-.265169E+04	-.519736E+01	-.111654E+02	.240000E+02
121	-.290325E+04	-.569042E+01	-.217907E+02	.240000E+02
122	.540933E+04	.106024E+02	.406004E+02	.240000E+02
123	.209917E+04	.229561E+01	.971722E+01	.240000E+02
124	-.685370E+03	-.749510E+00	-.317264E+01	.240000E+02
125	-.846392E+03	-.925600E+00	-.391802E+01	.240000E+02
126	.846165E+03	.925352E+00	.391697E+01	.240000E+02
127	.494596E+03	.540882E+00	.228953E+01	.240000E+02
128	-.401630E+03	-.787201E+00	-.301449E+01	.240000E+02
129	.134878E+03	.264362E+00	.101234E+01	.240000E+02

130	.598498E+03	.117307E+01	.449211E+01	.240000E+02
131	-.948079E+03	-.185825E+01	-.711594E+01	.240000E+02
132	-.462426E+02	-.906363E-01	-.347080E+00	.240000E+02
133	-.160697E+04	-.314969E+01	-.120614E+02	.240000E+02
134	-.241598E+04	-.473536E+01	-.181335E+02	.240000E+02
135	.388130E+04	.760740E+01	.291316E+02	.240000E+02
136	.733626E+02	.802281E-01	.339601E+00	.240000E+02
137	.134022E+04	.146564E+01	.620397E+01	.240000E+02
138	-.134103E+04	-.146653E+01	-.620776E+01	.240000E+02
139	.134081E+04	.146629E+01	.620672E+01	.240000E+02
140	-.689831E+03	-.754388E+00	-.319328E+01	.240000E+02
141	-.517277E+02	-.101387E+00	-.388249E+00	.240000E+02
142	-.459902E+03	-.901415E+00	-.345186E+01	.240000E+02
143	.948270E+03	.185862E+01	.711736E+01	.240000E+02
144	-.460313E+03	-.902221E+00	-.345494E+01	.240000E+02
145	.385962E+03	.756492E+00	.289689E+01	.240000E+02
146	-.199648E+04	-.391313E+01	-.149848E+02	.240000E+02
147	-.984143E+03	-.192894E+01	-.738661E+01	.240000E+02
148	.249124E+04	.488286E+01	.186983E+02	.240000E+02
149	.763062E+03	.834472E+00	.353228E+01	.240000E+02
150	.650387E+03	.711253E+00	.301070E+01	.240000E+02
151	-.651195E+03	-.712137E+00	-.301444E+01	.240000E+02
152	.650971E+03	.711891E+00	.301340E+01	.240000E+02
153	-.187879E+03	-.205462E+00	-.869709E+00	.240000E+02
154	-.539600E+03	-.105762E+01	-.405004E+01	.240000E+02
155	-.327129E+03	-.641179E+00	-.245531E+01	.240000E+02
156	.460473E+03	.902534E+00	.345614E+01	.240000E+02
157	-.327521E+03	-.641947E+00	-.245825E+01	.240000E+02
158	.197541E+03	.387184E+00	.148267E+01	.240000E+02
159	-.176556E+04	-.346052E+01	-.132516E+02	.240000E+02
160	-.172949E+03	-.338983E+00	-.129809E+01	.240000E+02
161	.172171E+04	.337458E+01	.129225E+02	.240000E+02
162	.950815E+03	.103980E+01	.440140E+01	.240000E+02
163	.462636E+03	.505931E+00	.214158E+01	.240000E+02
164	-.463291E+03	-.506647E+00	-.214461E+01	.240000E+02
165	.463216E+03	.506565E+00	.214426E+01	.240000E+02
166	.518355E+01	.566864E-02	.239951E-01	.240000E+02
167	-.672273E+03	-.131767E+01	-.504583E+01	.240000E+02
168	-.330825E+03	-.648422E+00	-.248305E+01	.240000E+02
169	.327707E+03	.642311E+00	.245965E+01	.240000E+02
170	-.331238E+03	-.649231E+00	-.248615E+01	.240000E+02
171	-.119814E+03	-.234838E+00	-.899284E+00	.240000E+02
172	-.140548E+04	-.275475E+01	-.105490E+02	.240000E+02
173	.509191E+03	.998023E+00	.382180E+01	.240000E+02
174	.108124E+04	.211925E+01	.811540E+01	.240000E+02
175	.945494E+03	.103398E+01	.437677E+01	.240000E+02
176	.467844E+03	.511626E+00	.216569E+01	.240000E+02
177	-.468485E+03	-.512328E+00	-.216866E+01	.240000E+02
178	.468425E+03	.512262E+00	.216838E+01	.240000E+02
179	-.468492E+03	-.512335E+00	-.216869E+01	.240000E+02
180	-.668501E+03	-.131027E+01	-.501752E+01	.240000E+02
181	.367843E+00	.720978E-03	.276089E-02	.240000E+02
182	.331249E+03	.649254E+00	.248624E+01	.240000E+02
183	.452505E-01	.386917E-04	.339634E-03	.240000E+02
184	-.764790E+03	-.149900E+01	-.574024E+01	.240000E+02
185	-.718051E+03	-.140739E+01	-.538943E+01	.240000E+02
186	.858509E+03	.168269E+01	.644365E+01	.240000E+02
187	.763296E+03	.149607E+01	.572902E+01	.240000E+02
188	.141399E+04	.154632E+01	.654549E+01	.240000E+02
189	-.514081E+00	-.562191E-03	-.237972E-02	.240000E+02

190	-.807941E+02	-.883551E-01	-.374002E+00	.240000E+02
191	-.777752E+03	-.152441E+01	-.583752E+01	.240000E+02
192	.575713E+02	.112841E+00	.432109E+00	.240000E+02
193	-.314194E+03	-.343597E+00	-.145443E+01	.240000E+02
194	.222249E+03	.435612E+00	.166812E+01	.240000E+02
195	.571694E+02	.112053E+00	.429093E+00	.240000E+02
196	-.583698E+03	-.114406E+01	-.438102E+01	.240000E+02
197	.138535E+03	.271531E+00	.103979E+01	.240000E+02
198	.104450E+04	.204723E+01	.783962E+01	.240000E+02
199	.614596E+03	.120462E+01	.461293E+01	.240000E+02
200	-.233084E+03	-.456848E+00	-.335280E+01	.240000E+02
201	.232743E+03	.456181E+00	.334790E+01	.240000E+02
202	-.233272E+03	-.457216E+00	-.335550E+01	.240000E+02
203	.233221E+03	.457116E+00	.335477E+01	.240000E+02
204	.164661E+03	.322739E+00	.123589E+01	.240000E+02
205	-.201883E+03	-.395695E+00	-.151526E+01	.240000E+02
206	.165051E+03	.323502E+00	.123881E+01	.240000E+02
207	-.202388E+03	-.396683E+00	-.151905E+01	.240000E+02
208	.526881E+02	.103270E+00	.757894E+00	.240000E+02
209	-.197774E+03	-.387639E+00	-.148442E+01	.240000E+02
210	-.211985E+03	-.415493E+00	-.159108E+01	.240000E+02
211	.143209E+04	.156611E+01	.363441E+01	.240000E+02
212	.265165E+03	.289980E+00	.672943E+00	.240000E+02
213	-.285658E+03	-.312391E+00	-.132234E+01	.240000E+02
214	.285516E+03	.312236E+00	.132168E+01	.240000E+02
215	-.286022E+03	-.312789E+00	-.132402E+01	.240000E+02
216	.286110E+03	.312885E+00	.132442E+01	.240000E+02
217	.201858E+03	.220749E+00	.512282E+00	.240000E+02
218	.469781E+02	.513744E-01	.119222E+00	.240000E+02
219	.202458E+03	.221405E+00	.513804E+00	.240000E+02
220	-.463101E+02	-.506439E-01	-.117527E+00	.240000E+02
221	-.220466E+03	-.241097E+00	-.102055E+01	.240000E+02
222	.752973E+02	.147584E+00	.565154E+00	.240000E+02
223	-.347497E+03	-.681100E+00	-.260819E+01	.240000E+02
224	-.293144E+03	-.420694E-02	-.153063E-01	.800000E-05
225	-.948891E+02	-.185984E+00	-.333731E+01	.240000E+02
226	-.652213E+02	-.127835E+00	-.938177E+00	.240000E+02
227	-.664926E+02	-.130327E+00	-.956464E+00	.240000E+02
228	-.114013E+03	-.223467E+00	-.480072E+01	.240000E+02
229	.185462E+03	.202818E+00	.858520E+00	.240000E+02
230	.457799E+02	.500641E-01	.116181E+00	.240000E+02
231	-.165082E+02	-.180531E-01	-.418949E-01	.240000E+02
232	.104113E+03	.113857E+00	.115303E+01	.240000E+02
233	.101655E+03	.111168E+00	.257982E+00	.240000E+02
234	-.418530E+02	-.457697E-01	-.193741E+00	.240000E+02
235	.251228E+03	.274739E+00	.637573E+00	.240000E+02
236	-.389033E+03	-.425440E+00	-.987300E+00	.240000E+02
237	-.296007E+03	-.580179E+00	-.222172E+01	.240000E+02
238	.927219E+02	.181736E+00	.326109E+01	.240000E+02
239	-.231247E+02	-.252888E-01	-.107046E+00	.240000E+02
240	.232344E+02	.254087E-01	.107554E+00	.240000E+02
241	-.239935E+02	-.262389E-01	-.111068E+00	.240000E+02
242	-.140423E+03	-.153564E+00	-.650030E+00	.240000E+02
243	-.146172E+03	-.159851E+00	-.370959E+00	.240000E+02
244	.418538E+02	.457706E-01	.106218E+00	.240000E+02
245	-.156168E+02	-.306091E-01	-.117214E+00	.240000E+02
246	-.335457E+02	-.657501E-01	-.251782E+00	.240000E+02
247	-.824138E+02	-.161532E+00	-.118548E+01	.240000E+02
248	-.521865E+01	-.102286E-01	-.391693E-01	.240000E+02
249	-.300306E+03	-.589584E+00	-.225774E+01	.240000E+02

250	-.115115E+03	-.225628E+00	-.864014E+00	.240000E+02
251	.827683E+02	.162227E+00	.621229E+00	.240000E+02
252	.269670E+03	.294907E+00	.124832E+01	.240000E+02
253	-.102337E+03	-.111914E+00	-.473725E+00	.240000E+02
254	-.195009E+03	-.213259E+00	-.902714E+00	.240000E+02
255	-.434243E+02	-.851123E-01	-.624638E+00	.240000E+02
256	-.288202E+02	-.564880E-01	-.216314E+00	.240000E+02
257	-.753882E+02	-.824432E-01	-.191322E+00	.240000E+02
258	.169982E+03	.333168E+00	.127583E+01	.240000E+02
259	-.121680E+02	-.238495E-01	-.913286E-01	.240000E+02
260	.583864E+02	.638504E-01	.270275E+00	.240000E+02
261	-.193333E+03	-.211426E+00	-.490646E+00	.240000E+02
262	.433625E+02	.474205E-01	.200728E+00	.240000E+02
263	-.211549E+03	-.231346E+00	-.536874E+00	.240000E+02
264	.122664E+03	.134144E+00	.567824E+00	.240000E+02
265	.860029E+02	.940514E-01	.582169E+00	.240000E+02
266	.149091E+03	.163043E+00	.690155E+00	.240000E+02
267	.752765E+01	.823212E-02	.191039E-01	.240000E+02
268	-.648815E+01	-.709534E-02	-.164658E-01	.240000E+02
269	-.135972E+02	-.148697E-01	-.345074E-01	.240000E+02
270	.644629E+01	.704956E-02	.163596E-01	.240000E+02
271	-.262317E+02	-.286865E-01	-.121429E+00	.240000E+02
272	.170288E+02	.186224E-01	.788276E-01	.240000E+02
273	.281581E+02	.307932E-01	.130346E+00	.240000E+02
274	.217884E+01	.427055E-02	.464215E-01	.240000E+02
275	-.106182E+02	-.116119E-01	-.491527E-01	.240000E+02
276	.211057E+02	.230808E-01	.142868E+00	.240000E+02
277	.801640E+02	.157123E+00	.115312E+01	.240000E+02
278	-.362748E+02	-.396695E-01	-.167919E+00	.240000E+02
279	.106817E+03	.116814E+00	.494466E+00	.240000E+02
280	-.577620E+02	-.631676E-01	-.267385E+00	.240000E+02
281	-.375284E+02	-.410404E-01	-.952406E-01	.240000E+02
282	-.621518E+02	-.121819E+00	-.466489E+00	.240000E+02
283	-.466528E+02	-.510187E-01	-.118397E+00	.240000E+02
284	-.230643E+02	-.252228E-01	-.106767E+00	.240000E+02
285	-.177830E+02	-.348549E-01	-.255799E+00	.240000E+02
286	.186343E+02	.203781E-01	.472905E-01	.240000E+02
287	-.405445E+02	-.794678E-01	-.304312E+00	.240000E+02
288	.223596E+02	.438251E-01	.476385E+00	.240000E+02
289	-.633118E+02	-.692368E-01	-.160675E+00	.240000E+02
290	.821998E+02	.898924E-01	.380510E+00	.240000E+02
291	.652269E+02	.713310E-01	.301940E+00	.240000E+02
292	.438687E+01	.859833E-02	.631030E-01	.240000E+02
293	-.864139E+01	-.169373E-01	-.124302E+00	.240000E+02
294	-.342198E+01	-.374222E-02	-.158406E-01	.240000E+02
295	-.154992E+02	-.169497E-01	-.717470E-01	.240000E+02
296	.359988E+01	.393677E-02	.913587E-02	.240000E+02
297	-.279967E+02	-.306168E-01	-.710509E-01	.240000E+02
298	-.183610E+02	-.359879E-01	-.137811E+00	.240000E+02
299	.142739E+02	.156097E-01	.362248E-01	.240000E+02
300	.440915E+01	.482178E-02	.111897E-01	.240000E+02
301	.126445E+02	.247834E-01	.203743E+00	.240000E+02
302	-.789624E+01	-.863520E-02	-.240752E-01	.240000E+02
303	.951880E+01	.104096E-01	.491384E-01	.240000E+02
304	-.960738E+01	-.188306E-01	-.885351E-01	.240000E+02

calcul dynamique

mode 1	facteur de contribution	8.053003E-001
mode 2	facteur de contribution	1.103668E-001
mode 3	facteur de contribution	3.591180E-002
mode 4	facteur de contribution	1.479236E-002
mode 5	facteur de contribution	9.560167E-003

MODE no 1

valeurs propres no. 1= .39781E+00

vecteur propre :

- 1.942088E-003
- 1.189289E-003
- 1.944442E-003
- 1.190731E-003
- 3.872492E-003
- 3.125039E-003
- 3.884877E-003
- 3.133537E-003
- 5.767037E-003
- 5.034297E-003
- 5.829855E-003
- 5.077571E-003
- 7.535720E-003
- 6.852564E-003
- 7.230105E-003
- 6.449930E-003
- 9.277709E-003
- 8.605644E-003
- 9.222863E-003
- 8.453465E-003
- 1.107669E-002
- 1.038028E-002
- 1.107995E-002
- 1.036942E-002
- 1.283335E-002
- 1.215709E-002
- 1.288363E-002
- 1.218915E-002
- 1.445610E-002
- 1.383248E-002
- 1.453297E-002
- 1.401201E-002
- 1.589611E-002
- 1.534330E-002
- 1.595810E-002
- 1.541180E-002
- 1.735258E-002
- 1.668447E-002
- 1.742002E-002
- 1.686006E-002
- 1.891292E-002
- 1.831540E-002
- 1.892174E-002
- 1.834697E-002
- 2.038252E-002
- 1.982083E-002
- 2.036146E-002
- 1.981135E-002
- 2.180422E-002

2.126171E-002
2.168460E-002
2.118029E-002
2.333321E-002
2.274971E-002
2.272915E-002
2.233076E-002
2.543408E-002
2.482573E-002
2.562952E-002
2.532708E-002
2.721422E-002
2.676115E-002
2.716579E-002
2.677762E-002
2.816606E-002
2.792575E-002
2.789886E-002
2.771835E-002
3.009775E-002
2.979034E-002
3.034149E-002
2.976434E-002
3.073103E-002
3.067317E-002
3.075697E-002
3.068304E-002
3.078538E-002
3.078969E-002
3.079708E-002
3.077248E-002
3.076022E-002
3.078085E-002
3.074447E-002
3.072331E-002
3.084765E-002
3.084265E-002
3.081597E-002
3.080904E-002
3.085351E-002
3.085233E-002
3.083112E-002

MODE no 2

valeurs propres no.

2= .33298E+01

vecteur propre :

-5.999659E-003
-3.685482E-003
-6.006702E-003
-3.689808E-003
-1.178544E-002
-9.574958E-003
-1.182221E-002
-9.600289E-003
-1.711374E-002
-1.510016E-002
-1.729874E-002
-1.522312E-002
-2.156351E-002

-1.990762E-002
-2.079630E-002
-1.890268E-002
-2.537485E-002
-2.398094E-002
-2.523412E-002
-2.359585E-002
-2.853732E-002
-2.742063E-002
-2.852534E-002
-2.738567E-002
-3.072190E-002
-2.998010E-002
-3.073030E-002
-2.998060E-002
-3.185637E-002
-3.152733E-002
-3.187357E-002
-3.156487E-002
-3.190836E-002
-3.198840E-002
-3.190862E-002
-3.200773E-002
-3.087613E-002
-3.141118E-002
-3.086756E-002
-3.138186E-002
-2.875417E-002
-2.968174E-002
-2.877113E-002
-2.968884E-002
-2.563461E-002
-2.693948E-002
-2.573154E-002
-2.700564E-002
-2.149252E-002
-2.318077E-002
-2.198151E-002
-2.351890E-002
-1.582940E-002
-1.808970E-002
-1.831763E-002
-1.978898E-002
-6.906481E-003
-9.590324E-003
-6.114841E-003
-7.486020E-003
1.584473E-003
-6.357707E-004
1.214693E-003
-7.026882E-004
6.568403E-003
5.279739E-003
4.996298E-003
4.021866E-003
1.753535E-002
1.577656E-002
1.891656E-002
1.542226E-002
2.121816E-002

2.088337E-002
 2.136892E-002
 2.093026E-002
 2.153749E-002
 2.156476E-002
 2.160712E-002
 2.145993E-002
 2.139333E-002
 2.151240E-002
 2.129515E-002
 2.116837E-002
 2.190972E-002
 2.187984E-002
 2.172212E-002
 2.168018E-002
 2.194467E-002
 2.193758E-002
 2.181171E-002

MODE no 3

valeurs propres no. 3= .11580E+02

vecteur propre :

-1.179822E-002
 -7.311440E-003
 -1.181108E-002
 -7.319411E-003
 -2.219821E-002
 -1.838943E-002
 -2.226393E-002
 -1.843521E-002
 -2.990045E-002
 -2.724653E-002
 -3.022350E-002
 -2.747254E-002
 -3.359046E-002
 -3.255784E-002
 -3.301088E-002
 -3.181198E-002
 -3.383695E-002
 -3.415963E-002
 -3.372197E-002
 -3.386078E-002
 -3.017091E-002
 -3.207600E-002
 -3.009964E-002
 -3.202587E-002
 -2.286452E-002
 -2.601711E-002
 -2.251542E-002
 -2.577278E-002
 -1.345198E-002
 -1.731495E-002
 -1.293182E-002
 -1.611640E-002
 -3.324455E-003
 -7.332617E-003
 -2.881204E-003
 -6.863692E-003
 7.721556E-003

2.691894E-003
8.221047E-003
3.963225E-003
1.906604E-002
1.484754E-002
1.916949E-002
1.510779E-002
2.801762E-002
2.484976E-002
2.804679E-002
2.490846E-002
3.365103E-002
3.185601E-002
3.369668E-002
3.189576E-002
3.528197E-002
3.507890E-002
3.568300E-002
3.522331E-002
3.236111E-002
3.377632E-002
3.236827E-002
3.327150E-002
2.428464E-002
2.674062E-002
2.552791E-002
2.770935E-002
1.680624E-002
1.892366E-002
2.024430E-002
2.187666E-002
-4.920330E-003
-1.354995E-003
-7.618692E-003
6.018590E-004
-1.276836E-002
-1.206681E-002
-1.308857E-002
-1.209503E-002
-1.346961E-002
-1.354281E-002
-1.362857E-002
-1.328749E-002
-1.317741E-002
-1.342526E-002
-1.292461E-002
-1.262888E-002
-1.432960E-002
-1.426096E-002
-1.390780E-002
-1.380770E-002
-1.440985E-002
-1.439309E-002
-1.410822E-002

MODE no 4

valeurs propres no. 4= .22848E+02

vecteur propre :

-1.476028E-002
-9.258727E-003
-1.477552E-002
-9.268289E-003
-2.611911E-002
-2.225080E-002
-2.619470E-002
-2.230427E-002
-3.138136E-002
-3.006664E-002
-3.174103E-002
-3.032229E-002
-2.888996E-002
-3.059553E-002
-2.960215E-002
-3.149926E-002
-2.058992E-002
-2.439885E-002
-2.072144E-002
-2.476443E-002
-7.218216E-003
-1.280646E-002
-7.176947E-003
-1.282122E-002
7.977010E-003
2.134660E-003
8.283930E-003
2.343591E-003
2.085754E-002
1.625415E-002
2.132801E-002
1.730508E-002
2.832860E-002
2.598939E-002
2.864735E-002
2.644729E-002
2.962848E-002
2.944375E-002
2.992016E-002
3.015499E-002
2.469464E-002
2.726715E-002
2.481215E-002
2.745680E-002
1.392315E-002
1.854938E-002
1.421427E-002
1.877869E-002
-4.983240E-004
5.221672E-003
8.280339E-004
6.169348E-003
-1.692042E-002
-1.081180E-002
-1.070302E-002

-3.595800E-002
-3.142945E-002
-3.849690E-002
-3.652908E-002
-4.096611E-002
-4.069802E-002
-4.380494E-002
-4.364527E-002
-3.496905E-002
-3.717115E-002
-4.084247E-002
-4.258525E-002
-2.579007E-003
-8.084800E-003
1.228954E-003
-1.594368E-002
1.057185E-002
9.432696E-003
1.110152E-002
9.268624E-003
1.180178E-002
1.196806E-002
1.209711E-002
1.144808E-002
1.135835E-002
1.175383E-002
1.080947E-002
1.023947E-002
1.342840E-002
1.329971E-002
1.266243E-002
1.246422E-002
1.357878E-002
1.354611E-002
1.302375E-002

MODE no 5

valeurs propres no. 5= .37521E+02

vecteur propre :

1.916335E-002
1.221373E-002
1.918349E-002
1.222657E-002
3.117217E-002
2.760774E-002
3.126825E-002
2.767709E-002
3.143459E-002
3.262670E-002
3.187267E-002
3.294464E-002
1.930085E-002
2.500065E-002
2.230759E-002
2.870450E-002
8.292593E-004
8.326587E-003
1.436892E-003
9.927798E-003

-1.882042E-002
-1.172464E-002
-1.870895E-002
-1.154851E-002
-3.147567E-002
-2.766608E-002
-3.120398E-002
-2.744804E-002
-3.281787E-002
-3.363339E-002
-3.243831E-002
-3.276888E-002
-2.272087E-002
-2.761164E-002
-2.225538E-002
-2.728756E-002
-3.706255E-003
-1.249877E-002
-3.062943E-003
-1.093958E-002
1.804271E-002
1.000460E-002
1.826545E-002
1.040581E-002
3.272217E-002
2.814370E-002
3.314552E-002
2.850276E-002
3.456396E-002
3.524706E-002
3.636249E-002
3.656446E-002
2.071366E-002
2.716455E-002
2.945646E-002
3.308260E-002
-9.595897E-003
-9.247517E-004
-1.324014E-002
-8.768923E-003
-3.037979E-002
-2.604510E-002
-3.354476E-002
-2.960756E-002
-3.167794E-002
-3.224464E-002
-3.724133E-002
-3.768274E-002
-6.589596E-003
-1.110575E-002
-4.301562E-003
-2.701324E-002
5.951916E-003
4.937822E-003
6.434528E-003
4.379028E-003
7.213940E-003
7.452989E-003
7.545106E-003
6.787203E-003

7.216740E-003
 6.129874E-003
 5.446676E-003
 9.089111E-003
 8.942942E-003
 8.260678E-003
 8.016757E-003
 9.259977E-003
 9.220741E-003
 8.647473E-003

***** VECTEUR DEPLACEMENT DES NOEUDS ACTIFS*****
 (direction X)

1	4.003478E-001
2	4.629610E-001
3	6.104801E-001
4	6.533545E-001
5	1.0296720
6	1.2049980
7	1.4410330
8	1.5717790
9	1.9646060
10	2.2105840
11	2.5071980
12	2.7075010
13	3.1114100
14	3.4048030
15	3.7058730
16	3.9275380
17	4.3557810
18	4.6898100
19	5.0474040
20	5.3282650
21	5.7812820
22	6.1502010
23	6.5456720
24	6.8730120
25	7.3467300
26	7.7470210
27	8.1731630
28	8.5366540
29	9.0227950
30	9.4464310
31	9.8926830
32	10.2904400
33	10.7800800
34	11.2177300
35	11.6723000
36	12.0812300
37	12.5796200
38	13.0242900
39	13.4918400
40	13.9159900
41	14.4310700
42	14.8987900
43	15.3819200
44	15.8230400
45	16.3502500
46	16.8343500
47	17.3302400

49	18.3249000
50	18.8224700
51	19.3262300
52	19.7950700
53	20.3490500
54	20.8624800
55	21.3626100
56	21.8345500
57	22.4315600
58	22.9863000
59	23.5630800
60	24.1130700
61	24.7328400
62	25.3177200
63	25.9066400
64	26.4662800
65	27.0720700
66	27.6545300
67	28.2239100
68	28.7748900
69	29.4116200
70	30.0219300
71	30.6423600
72	31.2275500
73	31.8398700
74	32.4381800
75	33.0288600
76	33.6063700
77	34.1779200
78	34.7402000
79	35.2937900
80	35.8379600
81	36.3735600
82	36.9021100
83	37.4219600
84	37.9339800
85	38.4432800
86	38.9457400
87	39.4409400
88	39.9297800
89	40.4141100
90	40.8926600
91	41.3650200

EXEMPLE 2 DIRECTION Y

mode 1	facteur de contribution	8.132007E-001
mode 2	facteur de contribution	1.049982E-001
mode 3	facteur de contribution	3.528721E-002
mode 4	facteur de contribution	1.149374E-002
mode 5	facteur de contribution	8.612789E-003

valeurs propres no.	1=	.40038E+00
valeurs propres no.	2=	.35761E+01
valeurs propres no.	3=	.13042E+02
valeurs propres no.	4=	.26440E+02
valeurs propres no.	5=	.37514E+02

***** VECTEUR DEPLACEMENT DES NOEUDS ACTIFS *****

(direction Y)

1	2.468039E-001
2	4.702892E-001
3	5.260087E-001
4	6.610829E-001
5	9.234731E-001
6	1.2187970
7	1.3734850
8	1.5873530
9	1.8967720
10	2.2373030
11	2.4623370
12	2.7338600
13	3.0838860
14	3.4616300
15	3.7408690
16	4.0587960
17	4.4433100
18	4.8532900
19	5.1774810
20	5.5336000
21	5.9482140
22	6.3859880
23	6.7477580
24	7.1368870
25	7.5781400
26	8.0388820
27	8.4323770
28	8.8508570
29	9.3168030
30	9.7939400
31	10.2133600
32	10.6606000
33	11.1374300
34	11.6223800
35	12.0582800
36	12.5111900
37	12.9937000
38	13.4803700
39	13.9260000
40	14.3898000
41	14.8836400
42	15.3896000
43	15.8505500
44	16.3276600

45	16.8337200
46	17.3535300
47	17.8314600
48	18.3205600
49	18.8347100
50	19.3690700
51	19.8615000
52	20.3555900
53	20.8664000
54	21.4346300
55	21.9460400
56	22.4213300
57	23.0401900
58	23.6478900
59	24.2137600
60	24.8012400
61	25.4257900
62	26.0516300
63	26.6446700
64	27.2440400
65	27.8561600
66	28.4594000
67	29.0454200
68	29.6285000
69	30.2130300
70	30.7957200
71	31.3622800
72	31.9172800
73	32.4753800
74	33.0363500
75	33.5826200
76	34.1147400
77	34.6473500
78	35.1797400
79	35.7026500
80	36.2110900
81	36.7232500
82	37.2274300
83	37.7109000
84	38.1880100
85	38.6743200
86	39.1544900
87	39.6307300
88	40.1012000
89	40.5664700
90	41.0264700
91	41.4819400

EXEMPLE 2 DIRECTION Z

mode 1 facteur de contribution 8.158758E-001
 mode 2 facteur de contribution 8.697437E-002
 mode 3 facteur de contribution 2.934373E-002
 mode 4 facteur de contribution 2.621541E-002
 mode 5 facteur de contribution 6.348150E-003

MODE 1

valeurs propres no. 1= .32859E+01
 valeurs propres no. 2= .25916E+02
 valeurs propres no. 3= .52150E+02
 valeurs propres no. 4= .10666E+03
 valeurs propres no. 5= .18374E+03

*****VECTEUR DEPLACEMENT DES NOEUDS ACTIFS *****
 (direction Z)

1 4.804439E-002
 2 6.780597E-002
 3 8.267593E-002
 4 9.490464E-002
 5 1.340992E-001
 6 1.646759E-001
 7 1.903613E-001
 8 2.116935E-001
 9 2.539732E-001
 10 2.904948E-001
 11 3.254171E-001
 12 3.531697E-001
 13 3.985722E-001
 14 4.398409E-001
 15 4.782577E-001
 16 5.104738E-001
 17 5.591624E-001
 18 6.047505E-001
 19 6.477265E-001
 20 6.867138E-001
 21 7.385617E-001
 22 7.875764E-001
 23 8.347490E-001
 24 8.787294E-001
 25 9.331833E-001
 26 9.845635E-001
 27 1.0354510
 28 1.0840130
 29 1.1410800
 30 1.1935720
 31 1.2467620
 32 1.3007290
 33 1.3625250
 34 1.4136580
 35 1.4686080
 36 1.5235940
 37 1.5871870
 38 1.6503910
 39 1.7069410
 40 1.7632350
 41 1.8276970
 42 1.8906030
 43 1.9505950
 44 2.0084920

45	2.0739110
46	2.1372190
47	2.1985570
48	2.2582750
49	2.3249060
50	2.3888690
51	2.4505920
52	2.5114380
53	2.5794030
54	2.6446180
55	2.7060660
56	2.7668420
57	2.8368680
58	2.9030520
59	2.9669310
60	3.0311820
61	3.1007660
62	3.1681800
63	3.2345840
64	3.2993070
65	3.3676270
66	3.4342630
67	3.4999430
68	3.5622920
69	3.6299550
70	3.6971400
71	3.7596960
72	3.8264970
73	3.8922060
74	3.9575770
75	4.0212010
76	4.0833530
77	4.1460650
78	4.2102970
79	4.2748290
80	4.3345930
81	4.4025570
82	4.4709040
83	4.5289940
84	4.5863980
85	4.6535900
86	4.7193140
87	4.7877990
88	4.8551600
89	4.9224580
90	4.9885090
91	5.0546420

C O N C L U S I O N

Par ce modeste travail nous avons essayer d'expliciter les différentes étapes que nous avons entrepris .

Ainsi, le passage d'une structure réelle continue à une structure discrète doit obéir aux conditions d'équilibre et de compatibilité. Sa structure ainsi idéalisée devient définie par des matrices de rigidité élémentaires qui représentent la base de la méthode des déplacements.

Pour mieux comprendre les structures réticulées, nous avons essayé de justifier par une application pratique la théorie qui démontre qu'un système réticulé rigide, se calcul comme un système réticulé articulé.

En ce qui concerne, la partie programmation, nous avons détaillé les points que nous avons jugé importants, on pourra trouver les étapes qui permettent la compréhension et l'applicabilité de la méthode de décomposition et de résolution **GHOLESKY BANDE**; malgré les avantages de cette dernière, le grand nombre noeuds que présente la structure du pylône nous a contraint à utiliser une autre technique qui permet le stockage de la résolution du système de n'importe quel ordre en dehors de la mémoire centrale, qui est le fichier à accès direct. malheureusement, la fonction charriot qui assume le va-et-vient entre la mémoire centrale et le fichier consomme beaucoup de temps.

Dans la deuxième partie de notre travail, on a abordé l'étude dynamique, ainsi on a présenté quelques méthodes de calcul des problèmes aux valeurs et vecteurs propres, et en particulier la méthode du sous-espace qui est très performante pour les systèmes de grandes tailles.

Les résultats obtenus nous ont montré que les modes les plus sollicités ne sont pas nécessairement les premiers fondamentaux.

On en conclut que la réponse dynamique des pylônes diffère de celle des autres structures, bâtiments...

Les résultats obtenus nous permettent d'étendre cette étude par des méthodes et techniques d'analyses avancées.

- OPTIMISATION

- TECHNIQUE DE SOUS-STRUCTURE.

B I B L I O G R A P H I E

- DHAT ET TOUZOT** Une présentation de la M.E.F
AUBOIN calcul automatique des structures
MASSONNET calcul des structures sur ordinateur
WANG calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles
RN.GLOUGH et J.PENZIEW Dynamique des structures
A. CAPRA et V.DAVIDOVIGI calcul dynamique des structures en zone sismique
GERE S WEAVER Analysis of framed structures
CHARIF Notes de cours "calcul automatique"
SIBONEY et MARDON "Systèmes linéaires et non linéaires"
R.P.A 88 FORTRAN **77**
BETEILLE R.D.M " TOME 2"

