

10/89

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

105

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

*GENIE CIVIL*

## PROJET DE FIN D'ETUDES

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

### SUJET

**ANALYSE DES PLAQUES MINCES  
PLIEES PAR LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS**

Proposé par :  
Pr. B. TILIOUINE  
Mr. M. DEMIDEM

Etudié par :  
F. MERAGHNI

Dirigé par :  
Pr. B. TILIOUINE  
Mr. M. DEMIDEM

PROMOTION : JUIN 1989

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**DEPARTEMENT GENIE CIVIL**

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

**SUJET**

**ANALYSE DES PLAQUES MINCES  
PLIEES PAR LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS**

Proposé par :  
Pr. B. TILIOUINE  
Mr. M. DEMIDEM

Etudié par :  
F. MERAGHNI

Dirigé par :  
Pr. B. TILIOUINE  
Mr. M. DEMIDEM

**PROMOTION : JUIN 1989**

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR <sup>MTA</sup> وزارة التعليم العالي  
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
DÉPARTEMENT GENIE CIVIL دائرة الهندسة المدنية

Promoteurs : Pr. B. TILIOUINE  
Mr. M. DEMIDEM

Elève Ingénieur : Fodil MERAGHNI

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**الموضوع: تحليل الصفائح الرقيقة المطوية باستعمال طريقة العناصر المحدودة**

**المختص:** المحور العام للمشروع يتمثل في إعداد برامج للكمبيوتر لتحليل الصفائح الرقيقة المطوية باستعمال طريقة العناصر المحدودة المنهجية المتبعة هي دراسة الحالتين (الإنحنائية والمستوية) عدة أمثلة عددية تبين مدى تطبيق هذه الطريقة لحساب مختلف الهياكل.

Sujet : ANALYSE DES PLAQUES MINCES PLIEES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Resumé : Le présent projet consiste essentiellement en l'élaboration d'un logiciel en vue de l'analyse des plaques minces pliées par la méthode des éléments finis.  
La méthodologie adoptée est basée sur l'analyse des comportements membranaire et fléxionnel .

Quelques exemples numériques sont présentés pour illustrer l'application de la méthode à différents types de structures.

Subject : ANALYSIS OF FOLDED THIN PLATES BY FINITE ELEMENT METHOD

Abstract : The present project consists essentially in the development of computer programmes for the analysis of thin folded plates by finite elements method  
The methodology developed is based on the combination of in-plane and bending deformation.

A few numerical examples are presented to demonstrate the application of the method to various types of structures.

# Dedicates

A la mémoire de mes parents qui ont tant aimé me voir ainsi.

A mon frère Abderrahmane à qui je serai toujours reconnaissant pour son soutien moral et matériel, et qui demeure pour moi l'exemple de bonté et de sagesse.

A mes frères et sœurs.

A toute ma grande famille.

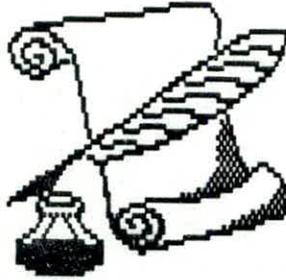
A tous ceux qui croient en dieu et le craignent.

A tous ceux qui me sont chers.

F. MERAGHNI



# Remerciements



Je remercie mon promoteur, le professeur Boualem TILIOUINE qui m'a aidé, conseillé et dirigé au cours de mon projet, ainsi que pour son apport moral et scientifique.

Je remercie également Mr. Mustapha DEMIDEM pour son aide précieuse, sa disponibilité ainsi que ses conseils fructueux.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à MM. Said RECHAK et Youcef DJERBIB pour leur soutien moral et matériel.

Mes remerciements, à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'au personnel du centre de calcul de l'E.N.P et notamment mon ami Hocine pour sa courtoisie, son aide et sa serviabilité.

F. MERAGHNI

# SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## INTRODUCTION.

## PARTIE 1

### CHAPITRE I . THEORIE DE L'ELASTICITE PLANE

- I-1 . Introduction
- I-2 . Les équations différentielles d'équilibre.
- I-3 . Les équations déformations-déplacements.
- I-4 . Les équations intrinsèques du matériau.
  - I-4-1 problèmes en contraintes planes.
  - I-4-2 problèmes en déformations planes.
- I-5 . Elasticité à deux dimensions
- I.6 . Résolution du problème .

### CHAPITRE II. GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

- II-1 . Introduction
- II-2 . Quelques notions de base.
  - II-2-1 Le concept d'élément fini
  - II-2-2 Les différentes formulations de la méthode des éléments finis.
- II-3 . La méthode des éléments finis considérée comme une minimisation de l'énergie potentielle totale.
- II-4 . Les critères de convergence.
- II-5 . Notion d'erreur de discrétisation et taux de convergence

### CHAPITRE III. LA PRESENTATION DE L'ELEMENT RECTANGULAIRES POUR L'ETUDE DE L'ELASTICITE PLANE.

- III-1 . Introduction
- III-2. Calcul de la rigidité d'un élément rectangulaire en élasticité plane
- III-3 . Elaboration du vecteur forces nodales

### CHAPITRE IV. PRESENTATION DU PROGRAMME ' ELAST '.

- IV-1 . Introduction
- IV-2 . Organisation du programme ELAST.
  - IV-2-1 Entrée des données
  - IV-2-2 Evaluation des matrices de rigidité élémentaires
  - IV-2-3 Assemblage des matrices et vecteurs élémentaires.
  - IV-2-4 Le principe d'assemblage.
  - IV-2-5 Les étapes d'assemblage.
  - IV-2-6 La prise en compte des conditions aux limites.
    - 1. Technique du terme diagonal dominant.
    - 2. Technique du terme unité sur la diagonale
    - 3. Technique du réarrangement du système.

- IV-2-7 La résolution du système d'équations.
- IV-2-8 Evaluation des contraintes et déformations
- IV-2-9 Impression des résultats.
- IV-3 . Exemple d'application et commentaires.
- IV-4 Conclusion de la première partie.

## PARTIE 2

### CHAPITRE V . THEORIE DES PLAQUES MINCES EN FLEXION.

- V-1 . Introduction
- V-2 . Définitions.
- V-3 . Hypothèses fondamentales.
- V-4 . Limites d'applications des formules des plaques minces.
- V-5 . Théorie de LOVE-KIRCHOFF pour les plaques minces en petites déformations.
  - V-5-1 Les relations Déformation-Courbures.
  - V-5-2 Les relations contraintes-courbures.
  - V-5-3 Les efforts internes.
  - V-5-4 Equation de LAGRANGE pour les plaques isotropes.
  - V-5-5 L'énergie de déformation d'une plaques.
  - V-5-6 Les conditions aux limites.
- V-6 Les méthodes de résolution de l'équation de LAGRANGE.
  - V-6-1 Méthode des séries doubles de fourier.
  - V-6-2 Les méthodes variationnelles.
  - V-6-3 Les méthodes par différences.
  - V-6-4 Les méthodes directes d'intégration.
- V-7 Equation de LAGRANGE pour les plaques anisotropes.
- V-8 Equation de LAGRANGE pour les plaques orthotropes.

Resolution du problème.

### CHAPITRE VI. LA PRESENTATION DE L'ELEMENT RECTANGULAIRES POUR L'ETUDE DES PLAQUES MINCES EN FLEXION

- VI-1 . Introduction
- VI-2 . Flexion des plaques- problème de continuité  $C_1$ .
- VI-3. Calcul de rigidité d'un élément rectangulaire en Flexion
  - VI-3-1 Critères de choix du polynôme d'interpolation
- VI-4 . Elaboration du vecteur forces nodales

### CHAPITRE VII. PRESENTATION DU PROGRAMME ' FLEX ' .

- VII-1. Introduction
- VII-2. Organisation du programme FLEX.
- VII-3 . Exemples d'application et commentaires.
- VII-4 Conclusion de la deuxième partie.

## PARTIE 3

### CHAPITRE VIII . ETUDE DES PLAQUES PLIEES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

- VIII-1 . Introduction
- VIII-2 . La méthode de calcul.
- VIII-3 . Elaboration de la matrice de rigidité élémentaire.
- VIII-4 . Passage aux coordonnées globales et assemblage des éléments
- VIII-5 . Détermination des cosinus directeurs.
- VIII-6 . Problèmes de modélisation pratiques et leurs solutions
- VIII-7 . Inconvénients des solutions proposées.

### CHAPITRE IX. PRESENTATION DU PROGRAMME ' SUPER '.

- IX-1. Introduction
- IX-2. Organisation du programme SUPER
- IX-3 . Exemples d'application et commentaires.
- IX-4 Conclusion de la troisième partie.

CONCLUSION.

## INTRODUCTION

Le terme de " Structure " désigne un système mécanique, ayant les propriétés de rigidité et de résistance suffisantes, permettant d'assurer les fonctions de conservation, de stabilité et de mouvement d'un élément soumis à des actions mécaniques et thermiques.

Le calcul de structures et en particulier les milieux continus, couvre une grande variété d'applications dans les secteurs industriels de la construction mécanique, aéronautique, spatiale, génie civil ... ect. Ce domaine a pour objet la modélisation théorique au stade de la conception d'une structure ou d'un système mécanique; ce qui permet de faire la simulation du comportement et d'entraîner ainsi une procédure d'optimisation des formes et des dimensions, compte tenu des fonctions de la structure et du choix du matériau.

Parmi les étapes de la conception d'une structure ( et notamment les structures complexes ) on a deux étapes très importantes à savoir :

- La modélisation de la structure ( Modèle mathématique )
- La simulation du modèle de calcul ( Numérique )

Pour la modélisation, il existe plusieurs méthodes qui permettent de décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. Parmi ces méthodes on a :

La METHODE DES ELEMENTS FINIS. C'est une méthode très générale, qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique; problèmes stationnaires ,non stationnaires, linéaires, non linéaires, à une ,deux ou trois dimensions et même les milieux hétérogènes.

Elle a permis d'obtenir des solutions satisfaisantes pour un grand nombre de problèmes jusque là considérés comme insolubles. Les efforts intenses et prometteurs des recherches, qui sont consacrés à cette méthode, ont permis un élargissement rapide de son champ d'application et ceci est dû principalement à l'outil numérique et informatique qui ont contribué considérablement dans la simulation de ces modèles et donc à leur valorisation, ce qui a permis le développement de programmes standards pour la modélisation des structures et la simulation de leurs comportements on peut citer : *SAP 80, MEF MOZAIC, MODULEF, ABAQUS, ANSYS, SUPER SAP...* ect ).

Pour ce qui est de notre travail, il consiste à l'élaboration de programmes pour la modélisation des coques et plaques pliées par les facettes planes car on suppose que le comportement d'une surface dont la courbure est continue peut être représentée par une surface composée d'éléments plans en procédant par superposition de deux comportements, que l'on considère découplés (pour les petites déformations), et qui sont le comportement membranaire et le comportement fléxionnel.

Ce thème a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches et notamment les travaux de MM J.L. BATOZ et S.JAAMEI ( Janvier 87 ) au sein de la division modèles numériques en mécanique de l'Université de Technologie de Compiègne (FRANCE), qui ont étudié la simulation numérique du plissement des tôles minces en prenant des applications pratiques ( le plissement de l'éprouvette carrée sous traction diagonale " Essai YOSHIDA " ainsi que l'essai dit de coupelles coniques ).

Pour notre projet nous traiterons des applications qui relèvent du domaine du génie civil, on peut citer les couvertures des grandes surfaces, les voûtes en berceau, les structures en plaques pliées type, les poutres en caisson fréquemment utilisées dans les ponts, les réservoirs, les barrages en forme cylindrique ... ect.

# **PARTIE 1**

## **COMPORTEMENT MEMBRANAIRE**

# THEORIE DE L'ELASTICITE PLANE

## I-1. INTRODUCTION

Tous les matériaux possèdent, à un certain degré, la propriété d'être élastique. c'est à dire que si les forces extérieurs qui provoquent la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que la forces qui lui donnent naissance.

Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite "théorie de l'élasticité" qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces.

On doit avant d'entamer notre exposé de la théorie, poser certaines hypothèses et qui sont :

. Pour l'établissement des lois mathématiques, on suppose que les solides sont homogènes, isotropes à l'état neutre, c'est à dire que les propriétés physiques et mécaniques sont les même en chaque points et dans toutes les directions

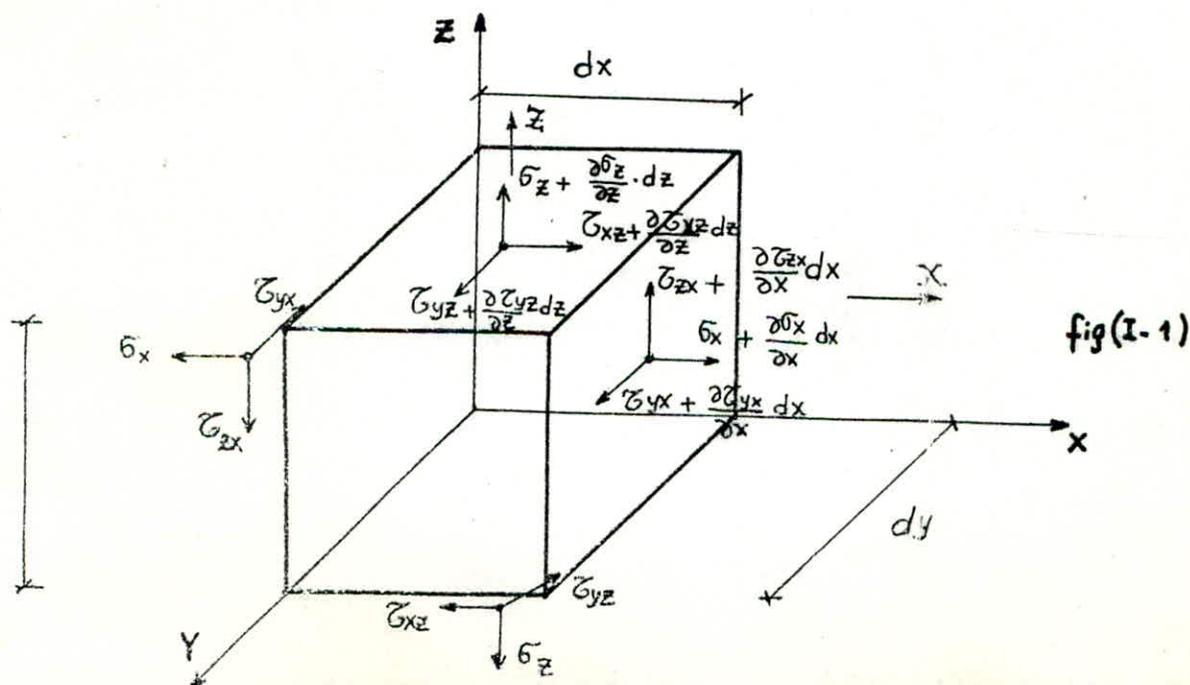
. Ces solides ne doivent pas être le siège d'aucune tension interne en l'absence de forces extérieurs, gradient thermique ou autres.

La théorie de l'élasticité consiste à formuler trois types d'équations à savoir :

- \* Les équations différentielles d'équilibre
- \* Les équations différentielles déformations-déplacements
- \* Les lois intrinsèques du matériau.

## I-2. LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'EQUILIBRE

On considère un cube élémentaire  $dx, dy$  et  $dz$



X, Y, Z sont les forces de volume, considérons maintenant l'équilibre de ce cube on a :

$$\sum X_i = 0 \implies \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Par analogie, on obtient les deux autres équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}$$

### I-3. LES EQUATIONS DEFORMATIONS -DEPLACEMENTS.

On traite le problème en deux dimensions puis on généralisera a trois dimensions.

on a :

$$\epsilon_x = (A'B' - AB) / AB$$

$$AB = dx, \quad A'B' = dx \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Donc on aura :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

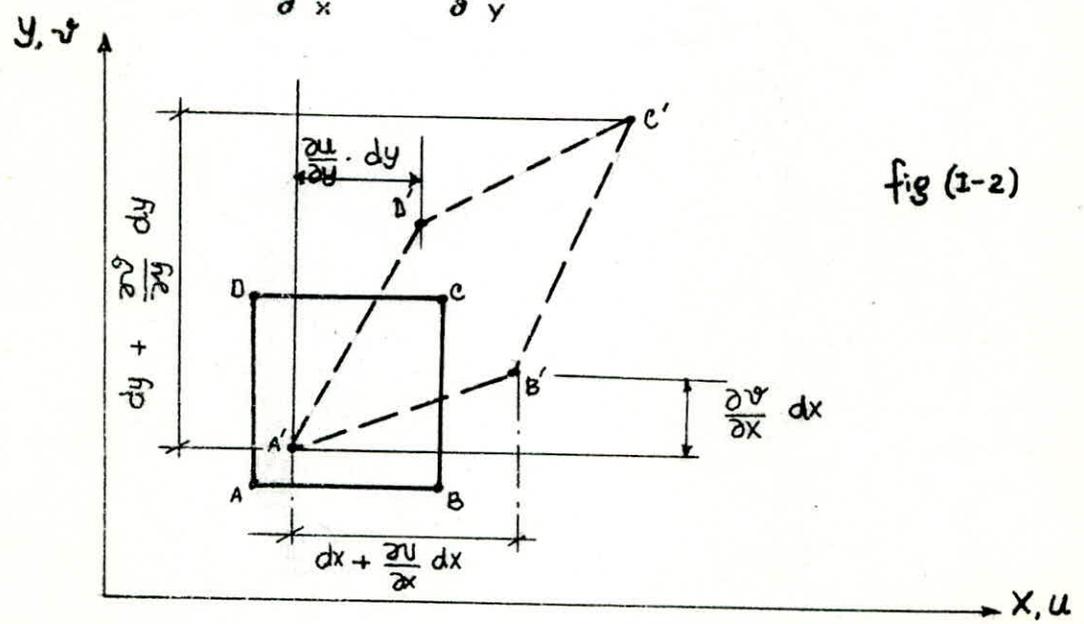


fig (1-2)

$\epsilon_x$  : Déformation longitudinale

$\epsilon_y$  : Déformation transversale

$\gamma_{xy}$  : Déformation tangentielle (Etant la déformation d'un angle qui était droit avant déplacement)

On rappelle que ceci n'est valable que pour les déplacements faibles

En tridimensionnel on a:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

#### I-4. LES EQUATIONS INTRINSEQUES DU MATERIAU

Ces équations caractérisent les propriétés mécanique du matériau. Soit un cube élémentaire soumis à des contraintes normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$

La contrainte ( $\sigma_x$ ) provoque une déformation suivant l'axe (X) qui est égale à ( $\sigma_x/E$ ); mais les contraintes ( $\sigma_y$ ) et ( $\sigma_z$ ) provoquent, chacune d'elles une déformation dans l'axe (X), donnée en fonction du coefficient de poisson ( $\nu$ ) et qui est égale à ( $-\nu \cdot \sigma_y/E$ ) et ( $-\nu \cdot \sigma_z/E$ ), ce qui fait au total :

$$\epsilon_x = 1/E \cdot \left[ \sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

puis par analogie

$$\epsilon_y = 1/E \cdot \left[ \sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z) \right] \quad ( I-1 )$$

$$\epsilon_z = 1/E \cdot \left[ \sigma_z - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_x) \right]$$

Pour ce qui est des déformations angulaires, celles-ci sont causées par les contraintes tangentielles ( $\tau$ ) telle que :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G \\ \gamma_{yz} &= \tau_{yz} / G \\ \gamma_{zx} &= \tau_{zx} / G \end{aligned} \quad ( I-2 )$$

$G = E / (2 * (1 + \nu))$        $G$  : le module d'élasticité en cisaillement

Les expressions I-1 et I-2 constituent les équations de la loi de HOOK généralisée.

Les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  provoquent les déformations  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  qui causent eux-même une variation de volume ( $dv$ )

$$dv = dx \cdot (1 + \epsilon_x) + dy \cdot (1 + \epsilon_y) + dz \cdot (1 + \epsilon_z)$$

$dv = dx dy dz (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$  en négligeant les termes d'ordre supérieur

$$dv/v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

En additionnant les termes des équations (I-1) on a :

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (1 - 2\nu) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / E$$

En considérant toujours ces même équations généralisées. On peut exprimer les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  en fonction des déformations. On obtient la relation, sous forme matricielle, suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

avec  $\lambda = \nu E / (1 - 2\nu)(1 + \nu)$  et  $\mu = E / 2(1 + \nu)$ .

Maintenant après avoir traité le problème en trois dimension, on va le ramener à un problème dans le plan.

Pour ce cas on considère les deux types de problèmes de l'élasticité plane.

## 1 PROBLEME EN CONTRAINTES PLANES

$$\sigma_z = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{xz} = 0$$

Ce sont les problèmes concernant les structures où la dimension suivant Z est très négligeable devant les dimensions dans le plan. Dans ce cas on a

$$\epsilon_x = 1/E \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = 1/E \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

$$\epsilon_z = \nu/E \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

ce qui implique

$$\sigma_x = E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) / (1 - \nu^2)$$

$$\sigma_y = E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) / (1 - \nu^2)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

on obtient la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E/(1 - \nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \}$$

[D] la matrice d'élasticité en contrainte plane.

## 2 PROBLEME DE DEFORMATION PLANES

$$\epsilon_z = 0, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \sigma_z = 0$$

On trouve à la fin

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E/(1 - \nu)(1 - 2\nu) \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \}$$

Remarque:

L'état de déformation plan est obtenu à partir de l'état de contrainte plan, en remplaçant dans la matrice  $[D]$  de cet état  $\nu$  par  $\nu/(1-\nu)$ .

### I-5 .ELASTICITE A DEUX DIMENSIONS EN COORDONNEES RECTANGULAIRES

En théorie de l'élasticité les inconnus de base sont :  
Les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ , pour les déterminer on a les deux équations d'équilibre et qui sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (I-3)$$

avec  $X, Y$  sont les composantes de forces de volumes.  
Ces deux équations ne suffisent pas pour résoudre le problème qui comporte trois inconnus. On a donc un problème de degré d'hyperstaticité égale à un. donc pour résoudre le problème il nous faut une troisième équation, celle-ci est prise des déformations

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (I-4)$$

Ces trois composantes sont exprimées par deux fonctions continues ( $U$ ) et ( $V$ ), elles ne peuvent donc être choisies arbitrairement car il existe entre ces déformations une relation qui se déduit facilement des équations (I-4) et qui est

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}$$

Cette équation différentielle est appelée " équation de compatibilité des déformations ".  
Mais cette équation n'est pas en terme de contrainte, pour ce faire, il faut écrire les déformations en fonction des contraintes par le biais des équations de HOOK généralisées

$$\epsilon_x = 1/E \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = 1/E \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

$$\epsilon_z = \nu/E \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

En dérivant les équations d'équilibre (I-1) puis en les additionnant terme à terme on obtient par substitution dans l'équation précédente

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) = - (1+\nu) \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

Dans le cas où la seule force de volume est le poids, on a alors:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

ou bien 
$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (I-6)$$

avec  $\nabla^2$  est l'opérateur laplacien.

L'équation (I-6) est l'équation de compatibilité en terme de contraintes.

Une fois qu'on a obtenu la troisième équation, le problème est théoriquement résolu.

#### Remarques :

1-Les équations (I-1) traduisent l'équilibre de la variation (dérivée) des contraintes, mais n'implique en aucun cas l'équilibre des contraintes.

2-dans le cas très pratique où les forces massiques sont constantes, l'équation différentielle de compatibilité (I-5) est valable aussi bien pour le cas des contraintes planes que celui des déformations planes

## I-6 RESOLUTION DU PROBLEME

En ce qui concerne les méthodes de résolution du problème ainsi formulé, il existe diverses techniques :

Les méthodes analytiques

Les méthodes numériques

- La méthode des éléments finis
- La méthode des différences finies
- La théorie des équivalences...

\* Méthode analytique (méthode de la fonction contrainte)

Dans ce cas la solution du problème à deux dimensions se réduit à l'intégration des équations différentielles de l'équilibre, de l'équation de compatibilité et ceci en respectant les équations aux limites suivantes:

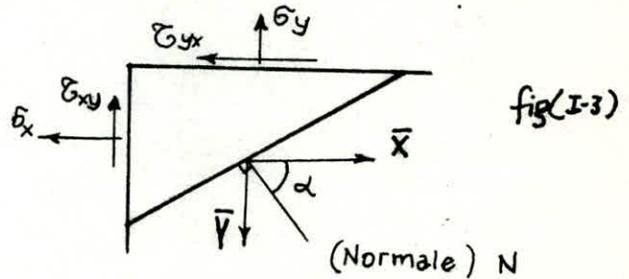
$$\begin{aligned}\bar{X} &= l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} \\ \bar{Y} &= m \cdot \sigma_x + l \cdot \tau_{xy} \\ \text{avec } l &= \cos(N, x) ; \quad m = \cos(N, y)\end{aligned}$$

Ces équations aux limites permettent de s'assurer de l'unicité de la solution obtenue.

Dans le cas général ou les forces de volume dérivent d'un potentiel (V) tel que

$$X = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$Y = - \frac{\partial V}{\partial y}$$



Alors, on peut trouver une fonction  $\phi(x, y)$  qui vérifie les équations d'équilibre telle que:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Mais pour résoudre ce problème, il faut encore vérifier l'équation de compatibilité (I-6).

On aura alors

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = (1-\nu) \nabla^2 V$$

$$\nabla^4 \phi(x, y) = (1-\nu) \nabla^2 V$$

dans le cas ou  $X=0$  et  $Y=-g$  alors

$$\nabla^4 \phi(x, y) = 0 \quad (I-7)$$

Donc toute fonction  $\phi(x,y)$  généralement polynomiale, vérifiant l'équation (I-4), satisfait simultanément les équations d'équilibre et l'équation de compatibilité, ce qui fait la solution du problème se réduit à déterminer une fonction  $\phi(x,y)$  en vérifiant l'équation (I-7) puis en déduire  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ .

Afin de s'assurer de l'unicité de la solution (champ de contrainte) on doit vérifier les équations aux limites.

En conclusion, on peut dire que cette méthode n'est applicable qu'aux problèmes simples et c'est dans cet objectif qu'il est préférable d'utiliser les méthodes numériques qui sont plus pratiques en particulier dans le cas où on possède un calculateur numérique. Parmi ces méthodes numériques, la plus utilisée et qui a donné des résultats satisfaisants et en concordance avec les résultats des méthodes analytiques (considérées comme méthodes exactes): la METHODE DES ELEMENTS FINIS.

# GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

## II-1 INTRODUCTION

On a vu que la méthode des éléments finis est l'une des méthodes permettant de décrire le comportement des systèmes physiques par des équations aux dérivées partielles. Donc la méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques qu'on résout par des méthodes numériques en utilisant les calculateurs pour former et résoudre ces équations.

## II-2 QUELQUES NOTIONS DE BASE

### II-2-1 Le concept d'élément fini

La méthode des éléments finis permet d'étudier le comportement approché d'un milieu continu en le traitant comme un assemblage d'éléments indépendants reliés entre eux par des points nodaux (nœuds). Toute fois on ne doit pas tolérer les recouvrements et les vides le long des interfaces inter-élément. C'est par le biais de ce concept que la méthode des éléments finis diffère des autres méthodes matricielles.

### II-2-2 Les différentes formulations de la méthode des éléments finis

Pour traiter un problème par éléments finis, il existe en tout trois formulations possibles.

- \* La formulation en déplacement (méthode des déplacements)
- \* La formulation en contraintes ou forces
- \* La formulation Mixte

Pour la première formulation, on définit un champ de déplacement en supposant qu'il satisfait la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément. Ceci en choisissant une fonction déplacement permettant de définir l'état de déplacement d'une façon unique.

Donc, cette formulation suppose que les conditions de compatibilité des déplacements sont satisfaites, ce qui nous amènera à poser les équations d'équilibre puis les résoudre afin de déterminer les déplacements nodaux (unique), c'est la solution en déplacements.

1

La deuxième formulation consiste à définir un champ de contrainte de façon à assurer l'équilibre de l'élément, puis poser les équations de compatibilité des déplacements et les résoudre pour obtenir les forces ( Solution en contraintes ).

La troisième formulation est un mélange des deux autres, ce qui a donné naissance au concept d'élément fini Hybride.

Pour notre cas, on a opté pour la première formulation ( très courante ) qui présente certaines facilités par rapport aux autres on peut citer par exemple le fait qu'il est plus facile d'approcher des déplacements que des contraintes.

Les déplacements sont donc les inconnus de base, on approchera le champ de déplacements réel; dans un élément; par des fonctions d'interpolation ou fonction de forme (généralement polynomiales) assurant la continuité des déplacements à l'interface de l'élément et aux noeuds.

Les fonctions de forme définissent maintenant l'état de déformation à l'intérieur de l'élément en fonction des déplacements nodaux. ces déformations, jointes à d'éventuelles déformations initiales et compte tenu des propriétés élastiques du matériau, définissent l'état de contraintes en tout point de l'élément et par conséquent sur ces frontières.

Il n'est pas toujours facile de faire en sorte que les fonctions de forme choisies satisfassent aux conditions de continuité des déplacements le long des interfaces des éléments bien qu'à l'intérieur de l'élément ces conditions doivent être satisfaites, en raison de l'unicité des déplacements qui découle de leur présentation par une fonction.

On doit noter également que du moment où on a opté pour la formulation déplacement, le champ de contraintes ne sera pas continu et donc incompatibilité des valeurs nodales des contraintes car en concentrant aux noeuds les forces nodales équivalentes, les conditions d'équilibre ne sont pas satisfaites que globalement vu qu'on applique le théorème des travaux virtuels d'une manière globale sur toute la structure et non pas à chacun des éléments séparément.

Après avoir présenté brièvement la formulation en déplacements de la méthode des éléments finis, on doit voir en fait que l'approche de cette formulation est une approche variationnelle qui consiste à minimiser l'énergie potentielle totale du système par rapport à un champ de déplacements de forme donnée. Si un tel champ est défini de manière convenable, alors la convergence vers la solution exacte est réalisée. On constate donc une certaine équivalence avec la méthode variationnelle de RAYLEIGH-RITZ.

Un tel élargissement, des bases sur les quelles repose la méthode des éléments finis, permet d'étendre son domaine d'application à d'autres problèmes de milieux continus dès qu'il est possible de les formuler de manière variationnelle.

## II-3 LA METHODE ELEMENTS FINIS CONSIDEREE COMME UNE MINIMISATION DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE

Le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale constitue un fondement variationnel de la formulation directe des équations de rigidité des éléments.

on a  $\Pi = U + W$

avec  $\Pi$  : L'énergie potentielle totale.  
 $U$  : L'énergie de déformation du système  
 $W$  : L'énergie potentielle des charges extérieures.

Le principe s'énonce comme suit :

Farmi tous les déplacements de forme admissible qui vérifient les conditions de compatibilité, ceux qui satisfont aux conditions d'équilibre donnent à  $\Pi$  une valeur stationnaire, c'est à dire qu'on a :

$$\delta \Pi = \delta U + \delta W = \delta (U+W) = 0$$

il faut noter que dans le domaine élastique  $\Pi$  n'est pas seulement stationnaire mais passe par un minimum qui correspond à un équilibre stable car on aura :

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U + \delta^2 W > 0$$

pour démontrer ce principe on utilise le théorème des travaux virtuels

on a 
$$\delta U = \int_V \delta \epsilon^T \cdot \sigma \cdot dv - \int_V \delta a^T(x,y) f_v \cdot dv$$

(la variation de l'énergie de déformation ou travail des forces internes).

$$- \delta W = \delta \{ a_e^T \} \cdot \{ q_e \}$$

$$U = 1/2 \int_V \epsilon^T \cdot \sigma \cdot dv - 1/2 \int_V a_e^T \cdot N^T(x,y) f_v \cdot dv$$

$$W = -1/2 \sum ( a_e^T \cdot q_e )$$

les équations d'équilibre seront satisfaites en chaque noeud, de manière globale si :

$$q_e = \int_V B^T \cdot \sigma \cdot dv - \int_V N^T(x,y) f_V \cdot dv$$

donc on aura  $\delta (U+W) = \delta \Pi = 0$

( $\Pi$ ) est donc stationnaire

Sachant que  $\Pi$  est non seulement stationnaire mais minimale dans le cas où on travaille dans le domaine élastique, on peut dire que le processus des éléments finis consiste à chercher un tel minimum dans la limite d'un type de champ de déplacement imposé. Ceci fait intervenir la notion de convergence vers la solution exacte qui est celle qui réalise l'équilibre complet (minimum de  $\Pi$ ) à condition que les déplacements tendent à la limite vers les valeurs réelles.

Et comme la solution exacte correspond à un minimum de  $\Pi$ , on peut dire que toute solution approchée, obtenue par éléments finis à partir de la formulation en déplacements, fournira toujours une valeur approchée de  $\Pi$  ; supérieure à la valeur exacte. On parle alors de convergence par le haut (borne supérieure de la valeur de l'énergie  $\Pi$ ).

Puisque la fonctionnelle ( $\Pi$ ) est minimale pour un certain nombre de paramètres ( $u$ ) (des déplacements), alors on peut traduire ce minimum par les équations suivantes .

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} = 0 \quad (\text{ système d'équation } )$$

Parmi les processus d'approximation de la fonctionnelle  $\Pi$ , on a la méthode RAYLEIGH-RITZ, Moindres carrées, Galerkin, Collocation par points et par intervalles.

La méthode de RAYLEIGH-RITZ consiste à discrétiser la fonctionnelle  $\Pi$ , en utilisant une approximation du champ de déplacement en fonction d'un nombre fini de paramètres indéterminés. On forme ensuite un système d'équations simultanées exprimant la minimisation de  $\Pi$  par rapport à ces paramètres. Jusqu'ici tout est identique au processus d'approximation par éléments finis. La différence réside dans le fait que, dans la méthode de RITZ, les déplacements sont définis sur tout le domaine considéré. On est par conséquent conduit à un système où la notion de bande n'intervient pas, et la matrice des coefficients est donc pleine.

Mais dans la méthode des éléments finis la détermination de  $\Pi$  se fait en premier lieu par morceau, ce qui fait que chaque paramètre nodale ( $u_i$ ) n'a d'influence que sur les éléments qui lui sont adjacents, on obtient ainsi une matrice des coefficients non pleine ayant la structure d'une matrice bande.

Cela est d'une part, d'autre part la méthode de RITZ est limitée à des formes géométriques relativement simple, par contre la méthode des éléments finis se limite au niveau du choix de l'élément uniquement, puis par assemblage d'éléments de forme simple on peut représenter des configurations complexes et proches de la réalité. En plus de ces différences, il faut noter que pour la méthode éléments finis les paramètres indéterminés sont pris comme étant les déplacements nodaux, ce qui est simple à interpréter physiquement.

#### II-4 CRITERES CONVERGENCE

Le fait de limiter le nombre de degrés de liberté, qui est en réalité infini, ne permet en aucun cas d'atteindre le vrai minimum de l'énergie quelque soit la finesse du maillage. On se contente souvent d'une convergence vers la solution exacte, cette convergence est réalisée que si certains critères sont satisfaits. on a les critères de convergence suivants :

##### Critère 1

La fonction doit être choisie de telle façon qu'elle ne permet pas les déformations d'un élément quand les déplacements de ces noeuds sont la conséquence d'un mouvement de corps rigide.

##### Critère 2

La fonction de déplacement doit être choisie de telle façon que si on a des déplacements compatibles avec un état de déformation constant, on puisse réellement obtenir ces déformations constantes dans tout l'élément.

Ce critère stipule que lorsque les éléments deviennent de plus en plus petits, il règne à l'intérieur d'eux des conditions de déformation à peu près constantes. Si de telles conditions existent réellement, il est plus souhaitable, pour obtenir une bonne précision, qu'un élément de taille finie soit en mesure de reproduire ces conditions.

Si ce critère n'est pas respecté lors du choix de la fonction de forme, on ne pourra pas, même en diminuant indéfiniment la taille des éléments, représenter la répartition exacte des déformations.

##### REMARQUES

1. Les deux critères précédents sont regroupés de part leur contexte sous le nom de critère de COMPLETEUDE.

2. Le critère (2), englobe en fait les conditions requises par le critère (1), puisque les déplacements de corps rigide constituent un cas particulier de l'état de déformation constant, la déformation étant alors nulle.

### Critère 3

Les fonctions de déplacement doivent être choisies de telle sorte que les déformations aux interfaces des éléments soient finies. Ce critère de COMPATIBILITE, stipule la continuité; inter-élément; des déplacements. Cette continuité peut être  $C_0$  (Elasticité plane),  $C_1$  (flexion des plaques et coques) ...etc.

### II-5 NOTION D'ERREUR DE DISCRETISATION ET TAUX DE CONVERGENCE.

On sait que la solution, obtenue par éléments finis pour une taille (h) des éléments, converge vers la solution exacte lorsque (h) diminue. Donc on peut dire qu'on pourra tendre vers la solution exacte, lorsque (h  $\rightarrow$  0 ) .

Il existe des cas où la solution exacte est obtenue à l'issue d'un nombre fini de subdivisions, c'est ainsi que lorsque les fonctions de formes comprennent l'ensemble des termes du polynôme du même degré, l'approximation conduira obligatoirement à la solution exacte.

Dans le cas où l'on peut toujours écrire la solution exacte au voisinage d'un noeud (i) sous la forme d'un développement polynomial

$$u = u_i + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_i .x + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_i .y + \dots$$

Et si ce développement est de l'ordre (p), alors l'erreur commise sur (u) sera de l'ordre du polynôme  $O(h)$  qui est (p+1). Par exemple pour l'élasticité plane, on utilise un développement linéaire d'ordre (p=1), alors l'erreur du taux de convergence est de l'ordre du polynôme  $O(h^2)$ . ce qui revient à dire que l'erreur commise sur les déplacements serait réduite au quart pour une diminution de moitié de la taille (h) de l'élément.

Pour ce qui est des déformations et contraintes qui sont supposées correspondre aux dérivées d'ordre (m) des déplacements, l'erreur de convergence est de l'ordre (p+1-m). Celle de l'énergie de déformation, qui fait intervenir les carrés des contraintes, sera de l'ordre  $2(p+1-m)$

Le fait de connaître l'ordre de convergence à un intérêt considérable pour la détermination de la solution exacte. Par exemple, si l'on sait que les déplacements convergent à l'ordre 2 et si on a obtenu deux solutions approchées  $u_1$  et  $u_2$  correspondant respectivement à h et h/2, on peut obtenir la solution exacte par extrapolation de RICHARDSON telle que :

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^2)}{O(h/2)^2} = 4$$

Cette solution " Exacte " est en fait très proche de la solution réelle.

L'extrapolation ci-dessus ne s'applique que si la convergence est monotone.

## PRESENTATION DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE POUR L'ETUDE DE L'ELASTICITE PLANE.

### III-1 INTRODUCTION

Les problèmes d'élasticité plane concernent les structures continues chargées dans leurs plans. Ces problèmes peuvent être séparés en deux classes distinctes.

#### \* Les problèmes en contraintes planes.

Ces problèmes permettent d'étudier les structures continues (plaques, coques ...) qui ont une dimension suivant l'axe (Z) très petite par rapport à ses dimensions dans le plan, ce qui fait, les contraintes normales au plan de la structure seront négligées (on peut citer l'exemple des plaques minces, les structures cellulaires les plaques perforées en traction et l'ame des poutres cloisons).

#### \* Les problèmes en déformation planes.

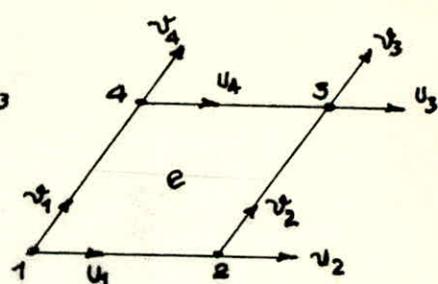
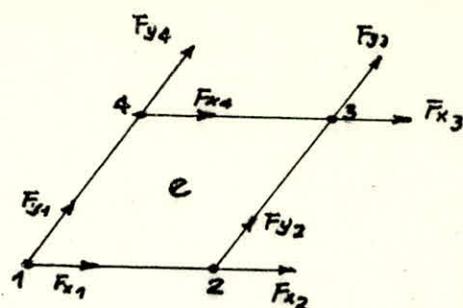
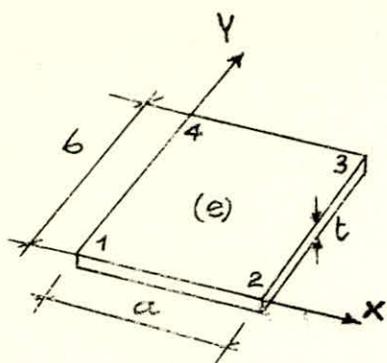
Dans ces problèmes, on suppose que la déformation normale au plan du chargement est nulle. Ceci est dû à la dimension de la structure suivant (Z) qui est très grande devant les dimensions dans le plan; ces problèmes traitent par exemple le cas des mur de retenue ou de soutènement.

### III-2 CALCUL DE LA RIGIDITE DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE EN ELASTICITE PLANE.

L'élément, utilisé pour l'étude de l'élasticité plane, est l'élément rectangulaire à quatre noeuds avec deux degrés de liberté pour chaque noeud à savoir deux translations  $u$  et  $v$ . L'élaboration de la matrice des raideurs de l'élément utilisé passe par sept étapes de base.

#### Etape 1

Cette étape consiste en un choix du système de coordonnées convenable et la numérotation de l'élément de référence. Sachant que l'élément rectangulaire est de dimension (a) suivant l'axe (X) et (b) suivant l'axe (Y), on opte pour la numérotation suivante (fig III-1) qui présente une facilité considérable lors de la programmation



Forces Nodales

Déplacements Nodaux.

fig (III-1)

On note par

$$\{ a(x,y) \} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

le vecteur déplacement en un point de coordonnées  $(x,y)$   
on note aussi le vecteur déplacement nodaux d'un élément de référence comme suit :

$$\{ a^e \} = \begin{Bmatrix} \{ a_1 \} \\ \{ a_2 \} \\ \{ a_3 \} \\ \{ a_4 \} \end{Bmatrix}$$

avec  $\{ a_i \} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$

Etape 2

elle concerne le choix de la fonction de déplacement. Pour les problèmes d'élasticité plane les déplacements peuvent être représentés par deux polynômes en  $x$  et  $y$  tels que

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot xy \\ v(x,y) &= \alpha_5 + \alpha_6 \cdot x + \alpha_7 \cdot y + \alpha_8 \cdot xy \end{aligned} \quad \text{(III-1)}$$

Le nombre de degrés de liberté de l'élément de référence est 8 de ce fait on a choisi deux polynômes à quatre coefficients inconnus chacun.

on a 
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \cdot \{ \alpha \}$$

$$\{ a(x,y) \} = \begin{bmatrix} f(x,y) \end{bmatrix} \cdot \{ \alpha \}$$

### Etape 3

on substitue  $(x,y)$  par les coordonnées des quatre noeuds de l'élément de référence on obtient alors :

$$\left\{ a^e \right\} = \begin{Bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \\ f(x_4, y_4) \end{Bmatrix} \cdot \left\{ \alpha \right\}$$

$$\left\{ a^e \right\} = [A] \cdot \left\{ \alpha \right\}$$

$$\left\{ \alpha \right\} = [A]^{-1} \left\{ a^e \right\}$$

$$\left\{ a(x,y) \right\} = [f(x,y)] \cdot [A]^{-1} \left\{ a^e \right\}$$

soit 
$$\left\{ a(x,y) \right\} = [N(x,y)] \cdot \left\{ a^e \right\} \quad (\text{III-2})$$

Pour le système de numérotation adopté précédemment on a :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 & N_4(x,y) & 0 \\ 0 & N_5(x,y) & 0 & N_6(x,y) & 0 & N_7(x,y) & 0 & N_8(x,y) \end{bmatrix}$$

Après avoir effectué le produit matriciel  $[f(x,y)]$  par  $[A]^{-1}$  on a

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \end{bmatrix}$$

les propriétés de la fonction d'interpolation  $[N(x,y)]$

1. on a

$$\begin{aligned} N_i(x,y) &= 0 & \text{si } x \neq x_i & \text{ou } y \neq y_i \\ N_i(x,y) &= 1 & \text{si } x = x_i & \text{et } y = y_i \end{aligned} \quad i=1,2,3,4$$

2. La fonction de déplacements  $f(x,y)$  est continue sur la frontière des éléments et dérivable (mais ses dérivées ne sont pas forcément continues) ceci implique que  $N(x,y)$  l'est aussi.

3. On a 
$$\sum_{i=1}^4 N_i(x,y) = 1$$

Etape 4

Une fois qu'on a exprimé les déplacements généralisés en fonction des déplacements nodaux, on va exprimer maintenant les déformations en fonction des déplacements.

De la théorie de l'élasticité on a

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

qui peut s'écrire comme suit

$$\left\{ \epsilon(x,y) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \epsilon(x,y) \right\} = [L] \cdot \left\{ a(x,y) \right\}$$

De l'équation (II-2) on a

$$\left\{ \epsilon(x,y) \right\} = [L][N] \cdot \left\{ a^e \right\}$$

$$\left\{ \epsilon(x,y) \right\} = [B] \cdot \left\{ a^e \right\} \quad (\text{III-3})$$

[B] est appelée matrice des déformations.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \\ \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} & \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix}$$

### Etape 5

Après avoir déterminé les déformations, on en déduit les contraintes par le biais de la loi de HOOKE généralisée.

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] \cdot \{\varepsilon(x,y)\} \quad (\text{III-4})$$

[D] est la matrice d'élasticité donnée par

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

Avec

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = E(1-\alpha)/((1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)) \\ d_{12} &= d_{21} = \nu d_{11}/(1-\alpha\nu) \\ d_{33} &= E/2(1+\nu) \end{aligned}$$

E : le module de YOUNG

$\nu$  : Le coefficient de poisson

$\alpha = 0$  en contraintes planes

$\alpha = 1$  en déformations planes

des équations (III-3) et (III-4) on a :

$$\begin{aligned} \{\sigma(x,y)\} &= [D] \cdot [B] \{a^e\} \\ \{\sigma(x,y)\} &= [H(x,y)] \{a^e\} \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

[H] est appelée Matrice contraintes et donnée par: (fig III-2)

### Etape 6

Cette étape permet de trouver une relation entre les forces nodales

et les déplacements. En appliquant le théorème des travaux virtuels on a :

$$\left\{ a_*^e \right\}^T \cdot \left\{ F^e \right\} = \int_V \left\{ \varepsilon_*^e \right\}^T \left\{ \sigma \right\} dv$$

le travail des forces extérieures = le travail interne total  
compte tenu de ce qui précède on peut écrire

$$\left\{ a_*^e \right\}^T \left\{ F^e \right\} = \left[ \int_V \left\{ a_*^e \right\}^T \left( \left[ B \right]^T \cdot \left[ D \right] \cdot \left[ B \right] dv \right) \cdot \left\{ a^e \right\} \right]$$

$$\Rightarrow \left\{ F^e \right\} = \left[ \int_V \left[ B \right]^T \cdot \left[ D \right] \cdot \left[ B \right] dv \right] \cdot \left\{ a^e \right\}$$

Elle est du type

$$\left\{ F^e \right\} = \left[ K^e \right] \cdot \left\{ a^e \right\}$$

on a alors :

$$\left[ K^e \right] = \left[ \int_V \left[ B \right]^T \cdot \left[ D \right] \cdot \left[ B \right] dv \right] \quad (\text{III-6})$$

$\left[ K^e \right]$  est appelée Matrice de rigidité ou des raideurs

pour notre cas où  $(dv) = t \cdot dx \cdot dy$   
avec  $(t)$  épaisseur de la 1<sup>er</sup> élément, supposée constante. On a alors

$$\left[ K^e \right] = t \cdot \int_0^a \int_0^b \left[ B \right]^T \cdot \left[ D \right] \cdot \left[ B \right] dx dy \quad (\text{III-7})$$

Les expressions de  $\left[ B \right]$  et  $\left[ D \right]$  sont connues, d'où on tire la matrice des raideurs élémentaire suivant la numérotation adoptée. (fig III-3).

#### Etape 7

Lors de cette étape, on doit exprimer le vecteur élémentaire des forces nodales et ceci à partir des charges cohérentes qui s'applique à l'élément considéré.

On a d'après le théorème des travaux virtuels

$$\left\{ f^e \right\} = \int_V \left[ N \right]^T \cdot \left\{ Q \right\} dv$$

où  $\{ Q \}$  est le chargement cohérent

Remarque : Si le chargement est surfacique ou linéaire, on remplace dans ce cas le terme  $( dv )$  par  $( ds )$  ou respectivement  $( dl )$ .

Pour démontrer ceci on a :

$$\delta( W^{*int} ) = \delta( W^{*ext} )$$

avec

$$\delta( W^{*ext} ) = \delta( \{ a^{e*} \}^T \{ q^e \} )$$

le travail effectué par les forces nodales  $\{ q^e \}$  directement appliquées aux noeuds, lors du déplacement virtuel  $\delta\{ \hat{q}^* \}$ .

$$\delta( W^{*int} ) = \delta \left[ \{ \varepsilon^* \}^T \cdot \sigma - \{ a(x,y) \}^T \cdot Q \right]$$

c'est le travail des forces internes.

$$\delta( \{ a^{e*} \}^T \{ q^e \} ) = \int_V \left[ \{ \varepsilon^* \}^T \cdot \sigma - \{ a(x,y) \}^T \cdot Q \right] \cdot dv$$

$$\delta( \{ a_e^* \}^T \{ q^e \} ) = \delta( \{ a_e^* \}^T \left[ \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dv \right] \{ a^e \} - \{ a_e \}^* \cdot \int_V N^T \cdot Q \cdot dv )$$

$$\{ q^e \} = \left[ K^e \right] \cdot \{ a^e \} - \int_V N^T \cdot Q \cdot dv$$

$$\{ q^e \} = \left[ K^e \right] \cdot \{ a^e \} - \{ f^e \}$$

donc on aura finalement

$$\{ f^e \} = \int_V \left[ N \right]^T \cdot \{ Q \} \cdot dv$$

Maintenant, on considère les différents cas de charge au quels sera soumis l'élément

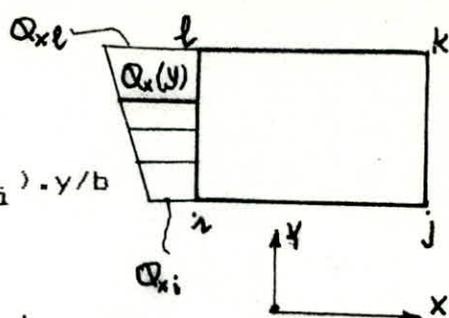
1<sup>er</sup> Cas . le chargement agit suivant x ( le coté charge est i,l )

$$\text{On a alors } \{ Q \} = \begin{Bmatrix} Q_x(y) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec } Q_x(y) = Q_{xi} + (Q_{xl} - Q_{xi}) \cdot y/b$$

dans ce cas on aura :

$$\{ f^e \} = \int_{y_i}^{y_l} [N]^T \cdot \{ Q \} dy$$



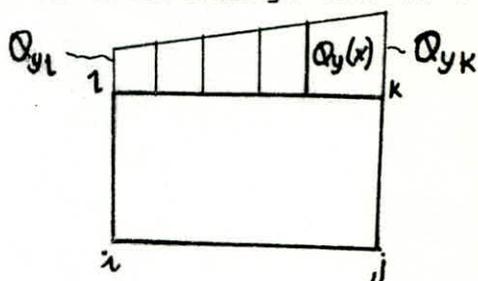
Dans le cas où c'est le coté jk qui est chargé, il faut donc substituer l'indice ( i ) par l'indice ( j ) et ( l ) par ( k ).

2<sup>eme</sup> Cas . le chargement agit suivant y ( le coté chargé est kl )

$$\text{on aura dans ce cas } \{ Q \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_y(x) \end{Bmatrix}$$

avec

$$Q_y(x) = Q_{yl} + (Q_{yk} - Q_{yl}) \cdot x/a$$



De même que pour le premier cas. Si c'est le coté (ij) qui est chargé, alors dans ce cas on remplace l'indice (k) par l'indice (j) et (l) par (i).

#### REMARQUE

Si les quatre cotés de l'élément sont chargés, on peut superposer les cas de charges précédents.

#### 3. Cas: L'effet du poids propre (masse)

Dans ce cas on est en présence d'un chargement en densité volumique qui s'écrit comme suit :

$$\{ Q \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho \cdot x \cdot y \cdot t \end{Bmatrix}$$

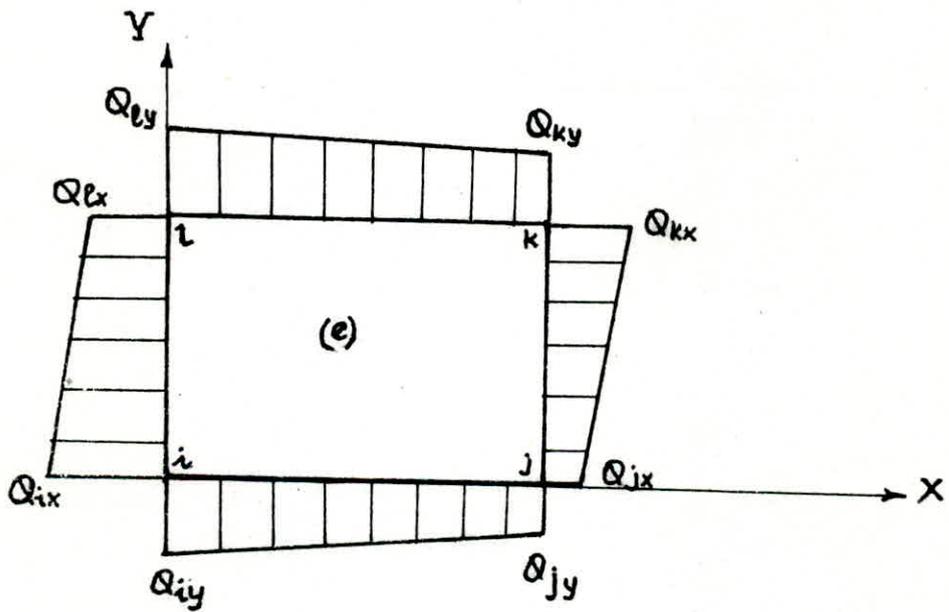
#### REMARQUE

ce chargement n'intervient que pour les structures dont le poids propre (ou une de ses composantes) agit dans leurs plans.

Après les opérations du produit matriciel et intégration on aura l'expression du vecteur forces nodales élémentaire.

$\{f^e\}$

$$= \begin{bmatrix} Q_{ix} \cdot b/3 + Q_{lx} \cdot b/6 \\ Q_{iy} \cdot a/3 + Q_{jy} \cdot b/6 + abpt/4 \\ Q_{jx} \cdot b/3 + Q_{kx} \cdot b/6 \\ Q_{jy} \cdot a/3 + Q_{iy} \cdot b/6 + abpt/4 \\ Q_{kx} \cdot b/3 + Q_{jx} \cdot b/6 \\ Q_{ky} \cdot a/3 + Q_{ly} \cdot b/6 + abpt/4 \\ Q_{lx} \cdot b/3 + Q_{ix} \cdot b/6 \\ Q_{ly} \cdot a/3 + Q_{ky} \cdot b/6 + abpt/4 \end{bmatrix}$$



# Matrice de rigidité élémentaire

$$p = \frac{a}{b}$$

$4 d_{11} p^{-1}$ +	$3 d_{21}$ +	$-4 d_{11} p^{-1}$ +	$3 d_{21}$ -	$-2 d_{11} p^{-1}$ -	$-3 d_{21}$ -	$2 d_{11} p^{-1}$ -	$-3 d_{21}$ +
$4 d_{33} p$	$3 d_{33}$ +	$2 d_{33} p$ +	$3 d_{33}$ -	$2 d_{33} p$ -	$3 d_{33}$ -	$4 d_{33} p$ -	$3 d_{33}$ +
	$4 d_{22} p$ +	$-3 d_{21}$ +	$2 d_{22} p$ -	$-3 d_{21}$ -	$-2 d_{22} p$ -	$3 d_{21}$ -	$-4 d_{22} p$ +
	$4 d_{33} p^{-1}$ +	$3 d_{33}$ +	$4 d_{33} p^{-1}$ -	$3 d_{33}$ -	$2 d_{33} p^{-1}$ -	$3 d_{33}$ -	$2 d_{33} p^{-1}$ +
		$4 d_{11} p^{-1}$ +	$-3 d_{21}$ -	$2 d_{11} p^{-1}$ -	$3 d_{21}$ -	$-2 d_{11} p^{-1}$ -	$3 d_{21}$ +
		$4 d_{33} p$ +	$3 d_{33}$ -	$4 d_{33} p$ -	$3 d_{33}$ -	$2 d_{33} p$ -	$3 d_{33}$ +
			$4 d_{22} p$ +	$-3 d_{21}$ -	$-4 d_{22} p$ -	$3 d_{21}$ -	$-2 d_{22} p$ +
			$4 d_{33} p^{-1}$ +	$3 d_{33}$ -	$2 d_{33} p^{-1}$ -	$3 d_{33}$ -	$2 d_{33} p^{-1}$ +
				$4 d_{11} p^{-1}$ +	$3 d_{21}$ -	$-4 d_{11} p^{-1}$ -	$3 d_{21}$ -
				$4 d_{33} p$ +	$3 d_{33}$ -	$2 d_{33} p$ -	$3 d_{33}$ -
<b>Symétrique</b>					$4 d_{22} p$ +	$-3 d_{21}$ -	$2 d_{22} p$ -
					$4 d_{33} p^{-1}$ +	$3 d_{33}$ -	$4 d_{33} p^{-1}$ -
						$4 d_{11} p^{-1}$ +	$-3 d_{21}$ -
						$4 d_{33} p$ +	$3 d_{33}$ -
							$4 d_{22} p$ +
							$4 d_{33} p^{-1}$ +

$$[k^e] = \frac{t}{12}$$

$(x, y) ] =$

$d_{11} \left( \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} \right)$	$d_{12} \left( \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} \right)$	$-d_{11} \left( \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} \right)$	$-d_{12} \cdot \frac{x}{ab}$	$d_{11} \cdot \frac{y}{ab}$	$d_{12} \cdot \frac{x}{ab}$	$-d_{11} \cdot \frac{y}{ab}$	$-d_{12} \left( \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} \right)$
$d_{21} \left( \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} \right)$	$d_{22} \left( \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} \right)$	$-d_{21} \left( \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} \right)$	$-d_{22} \cdot \frac{x}{ab}$	$d_{21} \cdot \frac{y}{ab}$	$d_{22} \cdot \frac{x}{ab}$	$-d_{21} \cdot \frac{y}{ab}$	$-d_{22} \left( \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} \right)$
$d_{33} \left( \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} \right)$	$d_{33} \left( \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} \right)$	$-d_{33} \cdot \frac{x}{ab}$	$d_{33} \left( \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} \right)$	$d_{33} \cdot \frac{x}{ab}$	$d_{33} \cdot \frac{y}{ab}$	$-d_{33} \left( \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} \right)$	$-d_{33} \cdot \frac{y}{ab}$

Matrice de Contrainte.

$+e] = \frac{1}{a \cdot b}$

$-d_{11} \cdot b$	$-d_{12} \cdot a$	$d_{11} \cdot b$	0	0	0	0	$d_{12} \cdot a$
$-d_{21} \cdot b$	$-d_{22} \cdot a$	$d_{21} \cdot b$	0	0	0	0	$d_{22} \cdot a$
$-d_{33} \cdot a$	$-d_{33} \cdot b$	0	$d_{33} \cdot b$	0	0	$d_{33} \cdot a$	0
$-d_{11} \cdot b$	0	$d_{11} \cdot b$	$-d_{12} \cdot a$	0	$d_{12} \cdot a$	0	0
$-d_{21} \cdot b$	0	$d_{21} \cdot b$	$-d_{22} \cdot a$	0	$d_{22} \cdot a$	0	0
0	$-d_{33} \cdot b$	$-d_{33} \cdot a$	$d_{33} \cdot b$	$d_{33} \cdot a$	0	0	0
0	0	0	$-d_{21} \cdot a$	$d_{21} \cdot b$	$d_{22} \cdot a$	$-d_{11} \cdot b$	0
0	0	0	$-d_{22} \cdot a$	$d_{21} \cdot b$	$d_{22} \cdot a$	$-d_{21} \cdot b$	0
0	0	$-d_{33} \cdot a$	0	$d_{33} \cdot a$	$d_{33} \cdot b$	0	$-d_{33} \cdot b$
0	$-d_{21} \cdot a$	0	0	$d_{11} \cdot b$	0	$-d_{11} \cdot b$	$d_{12} \cdot a$
0	$-d_{22} \cdot a$	0	0	$d_{21} \cdot b$	0	$-d_{21} \cdot b$	$d_{22} \cdot a$
$-d_{33} \cdot a$	0	0	0	0	$d_{33} \cdot b$	$d_{33} \cdot a$	$-d_{33} \cdot b$

Matrice de Contrainte Elementaire.

# PRESENTATION DU PROGRAMME ' E L A S T '

## POUR L'ETUDE DE L'ELASTICITE PLANE

### IV-1 INTRODUCTION

La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis, nécessite la manipulation de matrices et vecteurs de grande taille (matrices des raideurs, matrices de rotation, vecteur forces, vecteur des codes d'appuis ... etc.) ainsi que différentes techniques numériques ( Assemblage, résolution, ...). Ceci rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle à l'application de la méthode.

On commence par voir, en premier lieu, l'organisation d'un programme éléments finis en se basant sur celui qui a été élaboré en première partie, les deux autres auront une structure analogue à l'exception de quelques modifications.

### IV-2 PRESENTATION DU PROGRAMME ' E L A S T '.

Ce programme constitue la première partie de notre travail. Il permet la modélisation des éléments structuraux en ELASTicité plane. ELAST a été élaboré d'une manière structurée, il est constitué de plusieurs sous-programmes où le passage des paramètres ne s'effectue pas lors de l'appel du sous-programme, mais par le biais de blocs communs ( COMMON ) étiquetés, ce qui facilite la programmation et la rend très souple car on ne sera pas contraint à chercher les paramètres qui doivent passer d'une routine à l'autre. Comme tout programme éléments finis, ELAST est constitué des parties suivantes (disposées en un ou plusieurs sous-programmes).

#### IV-2-1 ENTREE DES DONNEES

Cette partie est disposée en une routine appelée ' LCTFCH ' qui permet de saisir puis imprimer les données concernant la structure à modéliser, les propriétés de sa matière ainsi que la façon dont elle est chargée et fixée dans l'espace, ceci outre les données de base comme le nombre total de noeuds et d'éléments, le cas d'analyse (contraintes planes ou déformations planes).

Ce sous-programme peut accéder à plusieurs blocs communs, où il stocke les données lues afin qu'elles puissent être exploitées par d'autres routines. Ces blocs sont les suivants :

COMMON / DONND /	Pour les données concernant les noeuds.
COMMON / PARAM /	Pour les paramètres physiques $E, \nu, t$ ...
COMMON / DONEL /	Pour les données concernant les éléments
COMMON / GLOBL /	Pour les tableaux et variables globales.

Lors de son exécution, le sous-programme 'LCTFCH', forme les tables suivantes

\* LCOD(ND,2)

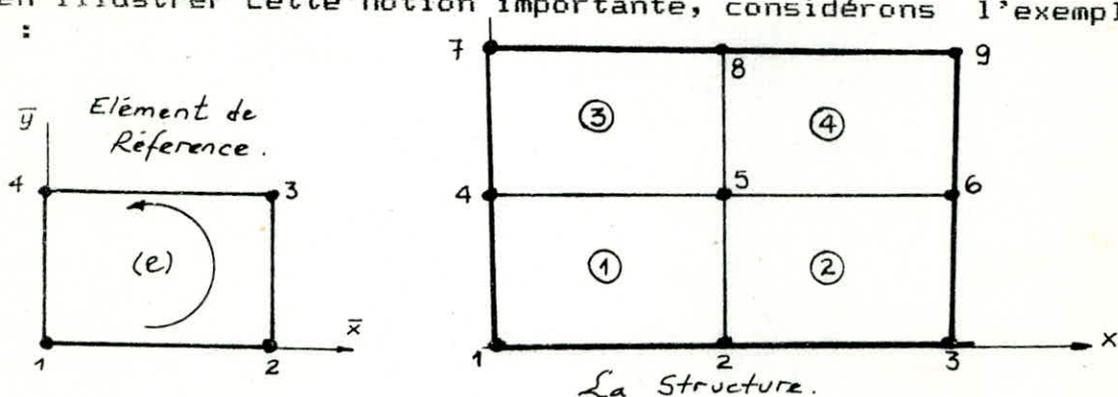
qui définit le code d'appui du noeud suivant les deux directions X et Y. Par exemple si on a le noeud 3 qui est bloqué suivant x ( $u = u$ ) et libre suivant y, alors ce noeud aura comme code :

$$LCOD(3,2) = 1 \ 0$$

\* KONEC(IEL,4) qui est la table des connectivités.

Si on a une structure continue (plaque, coque ...) composée de plusieurs éléments, reliés entre eux par des noeuds. Ces noeuds, qui sont déjà numérotés séquentiellement de 1 à ND pour toute la structure (Numérotation dans le repère global), doivent avoir des numéros qui permettent de les définir localement (dans le repère local).

Pour bien illustrer cette notion importante, considérons l'exemple suivant :



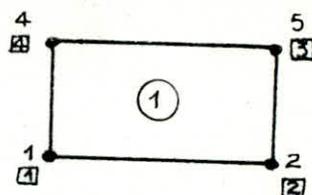
1<sup>er</sup> On doit numéroté les noeuds de toute la structure, pour cela on commence toujours la numérotation suivant le sens qui présente le moins de noeuds ( par conséquent moins d'éléments )

2<sup>e</sup> . Prendre une convention pour le sens de parcours lors de la numérotation locale, dans le programme 'ELAST', on a choisi le sens trigonométrique (fig IV-1)

3<sup>e</sup> . Isoler chaque élément et mettre les numéros de cet élément dans la liste des connectivités.

Elément N <sup>o</sup>	son noeud N <sup>o</sup>			
	1	2	3	4
1	1	2	5	4
2	2	3	6	5
3	4	5	8	7
4	5	6	9	8

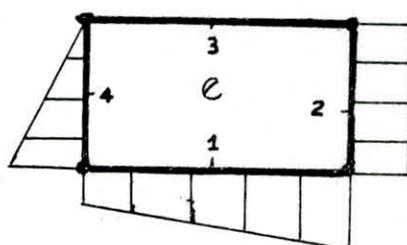
Pour le tableau des connectivités, on prend par exemple l'élément 1  
 son premier noeud est le noeud 1  
 son deuxième noeud est le noeud 2  
 son troisième noeud est le noeud 5  
 son quatrième noeud est le noeud 4



\* ICOD( IEL,4)

Cette table est spécifique au programme ELAST, car elle permet de définir pour chaque élément les cotés chargés dans son plan, on donne à chacun des cotés un numéro ( Fig IV-3 ). Dans cet exemple l'élément aura le code de chargement suivant

ICOD	=	1	1	0	1
		coté 1	coté 2	coté 3	coté 4
		chargé	chargé	non chargé	chargé



fig(IV-3)

#### IV-2-2 EVALUATION DES MATRICES DE RIGIDITES ELEMENTAIRES

Après avoir lu les données et formé toute les tables nécessaires à la modélisation, on procède maintenant à l'élaboration des matrices et vecteurs élémentaires par le biais du sous-programme ' FRLM ' qui permet de former la matrice de rigidité et le vecteur force nodales équivalentes élémentaires. Pour ceci on a besoin de définir une table dite " table de localisation " ( LOCEF ) qui caractérisera les numéros des degrés de liberté de la structure, elle est formée en se basant sur la relation qui relie un noeud à ses degrés de liberté. Dans ce premier cas les numéros des degrés de liberté sont :  $2i-1$  et  $2i$ .

#### IV-2-3 ASSEMBLAGE DES MATRICES ET VECTEUR ELEMENTAIRES

L'assemblage est effectué par le sous-programme 'ASSEMB' qui récupère ses variables dans les blocs communs aux sous-programmes LCTFCH et FRLM.

Parmi les méthodes de stockage de la matrice des raideurs globale, on a opté pour le stockage en matrice bande symétrique et ceci pour les différents avantages qu'elle présente (elle diminue la dimension de la matrice de rigidité pour qu'on puisse calculer de grandes structures en utilisant un grand nombre d'éléments).

On peut, néanmoins, citer les autres méthodes de stockage à titre indicatif, on a donc :

Méthode de stockage en ligne de ciel ( SKY-LINE )

Stockage en vecteur

Stockage en ligne de ciel segmentée sur disque ... ect.

Dès qu'on établit les matrices de rigidité et les vecteurs élémentaires, on doit procéder à l'assemblage de celles-ci en une matrice globale de toute la structure.

#### IV-2-4 LE PRINCIPE D'ASSEMBLAGE.

On note par (  $w^e$  ) l'énergie de déformation d'un élément et s'écrit comme suit :

$$w^e = 1/2 \left\{ a^e \right\}^T \cdot \left( \left[ K^e \right] \cdot \left\{ a \right\} \right)$$

avec

$\left[ K^e \right]$  : la Matrice de rigidité élémentaire ETENDUE.

Pour obtenir la matrice de rigidité globale, on utilise le fait que l'énergie de déformation totale de la structure est la somme des énergies de déformations élémentaires.

$$w = \sum w^e = 1/2 \left\{ a^e \right\}^T \sum_{nel} \left( \left[ K^e \right] \cdot \left\{ a \right\} \right).$$

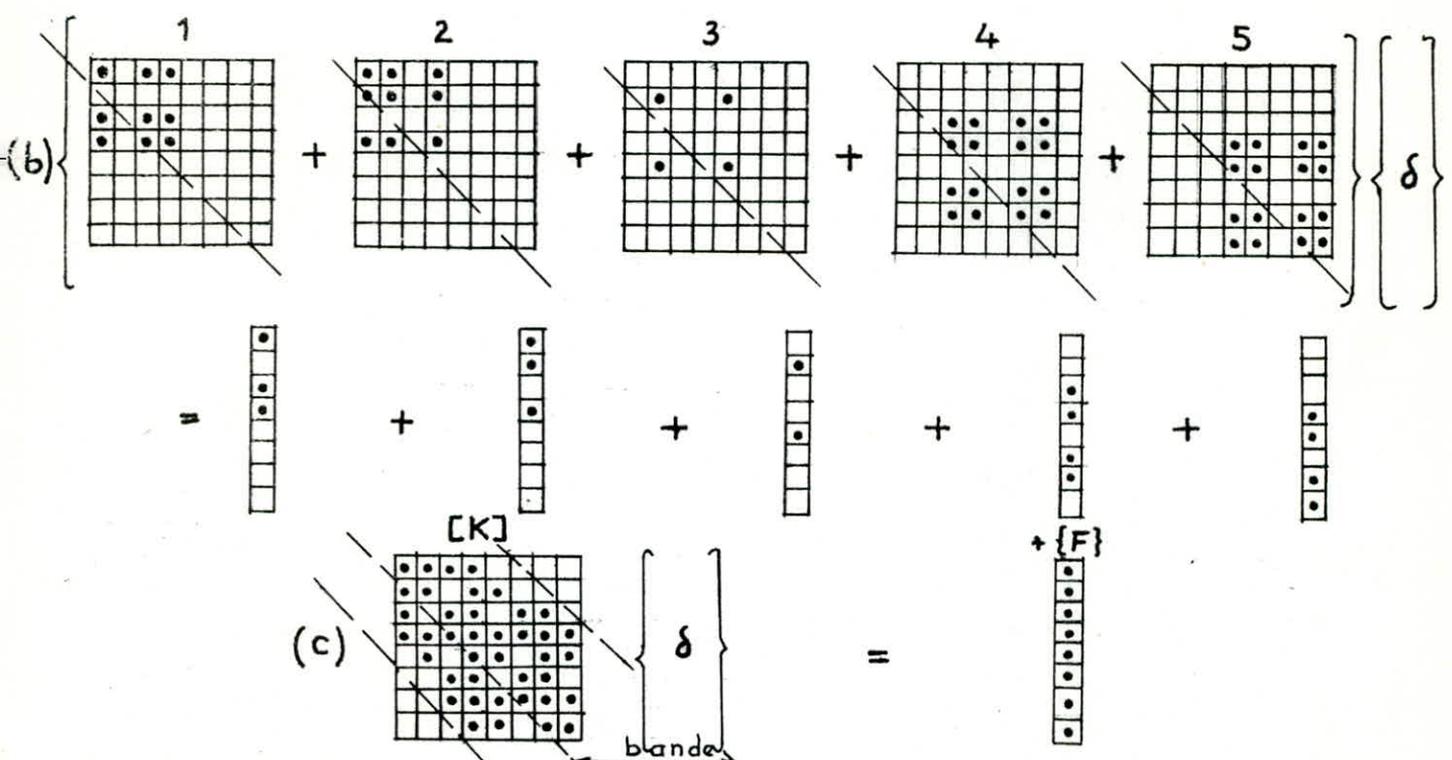
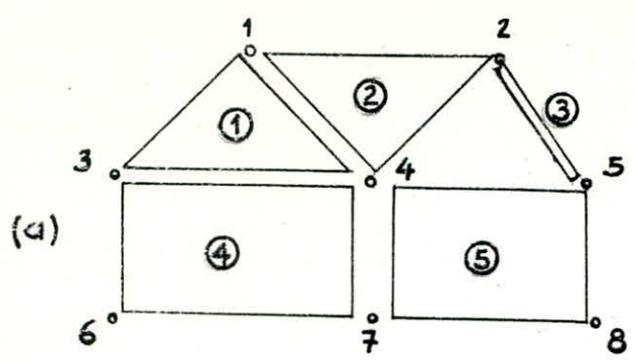
$$\longrightarrow \left[ K \right] = \sum_{e=1} \left[ K^e \right]$$

Avec  $\left[ K^e \right]$  sont les matrices de rigidité élémentaire ETENDUES au nombre de degrés de liberté total de la structure.

#### EXEMPLE 1.

Soit la structure suivante, ayant huit noeuds avec ( par exemple ) trois degrés de liberté par noeuds . Ce qui fait que la matrice de rigidité globale sera d'ordre 24, de même que pour le vecteur de force globale qui sera lui aussi d'ordre 24

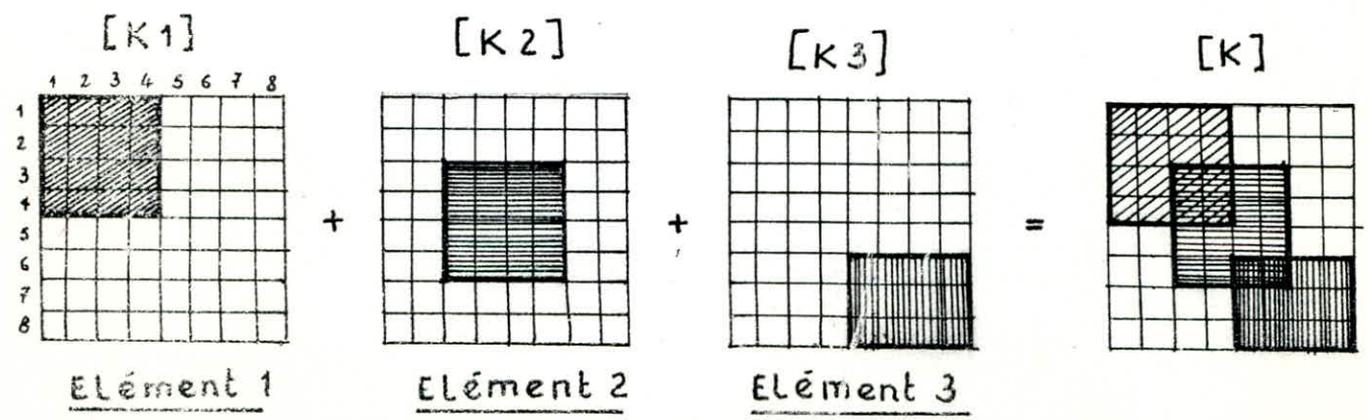
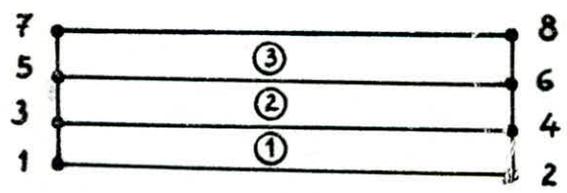
L'assemblage se fait alors par expansion des matrices élémentaire Puis leur addition une à une.



On constate que toutes les matrices élémentaires qui étaient au début de l'ordre 9, 6 ou 12 sont maintenant étendue chacune à l'ordre 24, afin de pouvoir effectuer la somme matricielle.

EXEMPLE 2.

Soit la structure suivante composée de 3 éléments et 8 noeuds.



#### IV-2-5 LES ETAPES D'ASSEMBLAGE.

De ce qui précède, on peut dire que l'assemblage se fait en deux étapes .

1. La construction de la matrice et vecteur étendus de chaque élément.
2. Sommation des matrices et vecteurs étendus.

#### REMARQUE .

Ces deux étapes sont, lors de la programmation, effectuées simultanément.

L'algorithme générale de l'assemblage est comme suit.

1. INITIALISER les matrices et vecteurs à zéro.
2. Faire pour chaque élément ( e )

a.-----

$$K_{IJ} = K_{IJ} + K_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, ND \\ j = 1, 2, \dots, ND \end{array}$$

$$I = \text{LOCEF}(i)$$

$$J = \text{LOCEF}(j)$$

I, J sont les numéros du degré de liberté dans le système global et qui correspondent au degré de liberté (i) respectivement (j) dans le système local. Ce passage est effectué par l'intermédiaire de la table de localisation LOCEF

b.-----

$$F_I = F_I + f_i \quad i = 1, 2, \dots, ND$$

$$I = \text{LOCEF}(i)$$

3. Fin de faire et aller au prochaine élément.

#### IV-2-6 LA PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS AUX LIMITES

Il est très important de s'assurer que la structure a bien des conditions d'appuis adéquats avant de procéder à la résolution, sous peine de rendre le problème insoluble. Il faut donc ramener la structure, après assemblage, à un repère fixe (absolu) sinon la structure n'aura aucun sens physique et le système ainsi obtenu sera à matrice singulière, ce qui nous amène à éliminer certaines équations pour soulever cette singularité et pouvoir ainsi effectuer la résolution.

Il existe diverses techniques pour la prise en compte des conditions aux limites on a :

### 1. La technique du terme diagonal dominant .

C'est la technique utilisé pour le sous-programme ' BOUND ' du programme ' ELAST '. C'est une technique qui permet de respecter les conditions aux limites en opérant comme suit :

\* Repérer les degrés de liberté imposés ( nuls ou connus étant connus et non nuls ). Supposons que le degré de liberté ( i ) soit imposé (  $u_i = \bar{u}_i$  ), dans ce cas on repère le terme diagonal (  $K_{ii}$  )

dans la matrice de rigidité globale et on le remplace par le terme (  $K_{ii} + \alpha$  ) ( où  $\alpha$  est un nombre très grand ), dans la routine

' BOUND ' ce terme (  $\alpha$  ) est pris égal à  $10^{30}$  (  $\alpha = 1 \text{ E30}$  ); Après ceci on doit remplacer, dans le vecteur forces nodales, le terme (  $F_i$  ) par (  $\bar{u}_i * \alpha$  ) et on résoud alors le système qui

devient à matrice non singulière.

On schématise ce qui précède par :

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\
 K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2i} & \dots & K_{2n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 K_{i1} & \dots & & K_{ii} + \alpha & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 K_{n1} & \dots & & K_{ni} & \dots & K_{nn}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_i \alpha \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

L'équation (i) sera alors

$$K_{i1} \cdot u_1 + K_{i2} \cdot u_2 + \dots + (K_{ii} \cdot u_i) + K_{in} \cdot u_n = \bar{u}_i * \alpha$$

$$\longrightarrow \alpha \cdot u_i + \sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot u_j = \bar{u}_i \cdot \alpha \quad (\text{IV-1})$$

et comme (  $\alpha \approx 10^{30}$  ) ( Très grand ) on aura

$$\alpha \cdot u_i \gg \sum K_{ij} \cdot u_j$$

de l'équation ( IV-1 ) on aura

$$u_i = \bar{u}_i$$

et finalement on a pu rendre une des équations, du système, Evidente.

## 2. La technique du terme Unitaire sur la diagonal.

Cette technique est un cas particulier de la première technique, elle consiste à repérer le degré de liberté imposé, de mettre un ( 1 ) à la place de l'élément diagonal (  $K_{ii}$  ) puis mettre un zéro sur toute la ligne et la colonne (  $i$  ). A la place du terme (  $f_i$  ) on met la valeur imposée au degré de liberté (  $i$  )

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & 0 & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ K_{n1} & \dots & 0 & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

L'équation (  $i$  ) devient alors

$$0 \cdot \sum_j u_j + 1 \cdot u_i = \bar{u}_i \quad j=1, N \quad (j \neq i)$$

## 3 La technique de la suppression des lignes et colonnes correspondant aux degrés de liberté imposés.

Cette technique consiste à repérer les degrés de liberté imposés, puis réarranger le système de façon à avoir deux sous-systèmes, un qui correspond aux déplacements inconnus dans ce cas le second membre est connu, le deuxième système correspond aux degrés de liberté connus et dans ce cas le second membre est inconnu, qui sont les réactions à ces déplacements imposés

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ R \end{bmatrix}$$

on va résoudre le système

$$K_{11} \cdot U_1 + K_{12} \bar{U}_2 = F_1$$

### REMARQUES

1. La technique utilisée par le sous-programme BOUND a été adaptée pour les matrices bandes symétriques, dans ce cas, on opère uniquement sur la première colonne de la matrice globale.

2. La première méthode nous permet de prendre en considération les appuis élastiques, dans ce cas au lieu de prendre  $\alpha = 1E30$ , on le prend égal à la rigidité réelle de l'appui.

## IV-2-7 LA RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS .

Dans le programme ' ELAST ' , c'est le sous-programme ' RESOL ' qui effectue cette résolution en procédant par la méthode de Gauss adaptée pour les matrices bandes symétriques.

### 1. La Methode de Gauss pour les matrices carrées

Cette méthode est appliquée en deux étapes, à savoir la triangularisation du système puis la résolution du système triangulaire ainsi obtenu

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \diagdown \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B' \end{Bmatrix}$$

1-1 la triangularisation :

Elle s'effectue selon l'algorithme suivant.

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \left[ a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right] \cdot a_{kj}^{(k-1)}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \left[ a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right] \cdot b_k^{(k-1)}$$

avec

$$\begin{aligned} i &= k+1, n \\ j &= k+1, n \\ k &= 1, n+1 \end{aligned}$$

1-2 La résolution du système triangulaire supérieur

Cette étape est relativement facile et son algorithme est le suivant.

$$x_n = b_n / a_{nn}$$

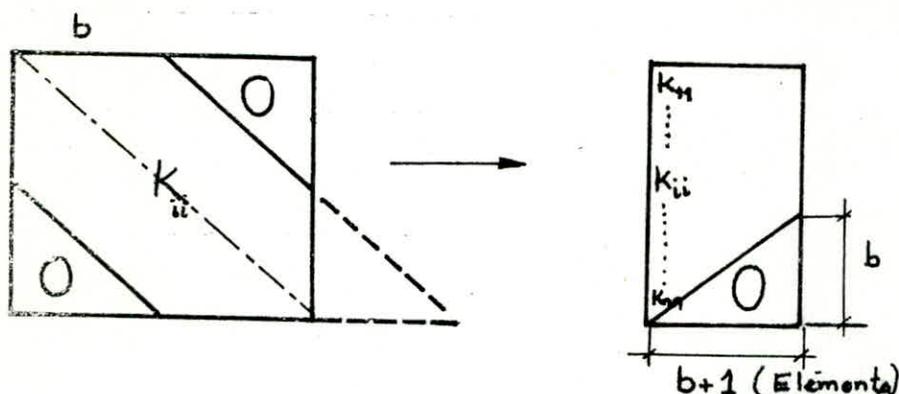
$$x_i = 1 / a_{ii} \left[ b_i - \sum_{j=i+1} a_{ij} \cdot x_j \right]$$

avec  $i = n-1, n-2, \dots, 1$

## 2. La Méthode de Gauss pour les matrices bandes symétriques.

Dans ce cas la matrice de rigidité n'est plus carrée mais elle est de dimension  $ND \times LB$ . La triangularisation n'affecte pas toute la matrice de rigidité, on n'opérera que sur une demi bande qui est formée lors de l'assemblage et les éléments qui devaient être dans la matrice carrée sont à présent dans la matrice bande tels que.

$A(I,J)$   $\longrightarrow$   $A(I, J-I+1)$   $J \geq I$   
Matrice Carrée Matrice BANDE SYMETRIQUE



### REMARQUE

Plusieurs auteurs disent que la méthode de GAUSS, pour les matrices à diagonale fortement dominante (comme notre cas), est très stable et ne nécessitant pas une pivotation (partielle ou totale)

### TABLEAU COMPARATIF DE QUELQUES METHODES DE RESOLUTION

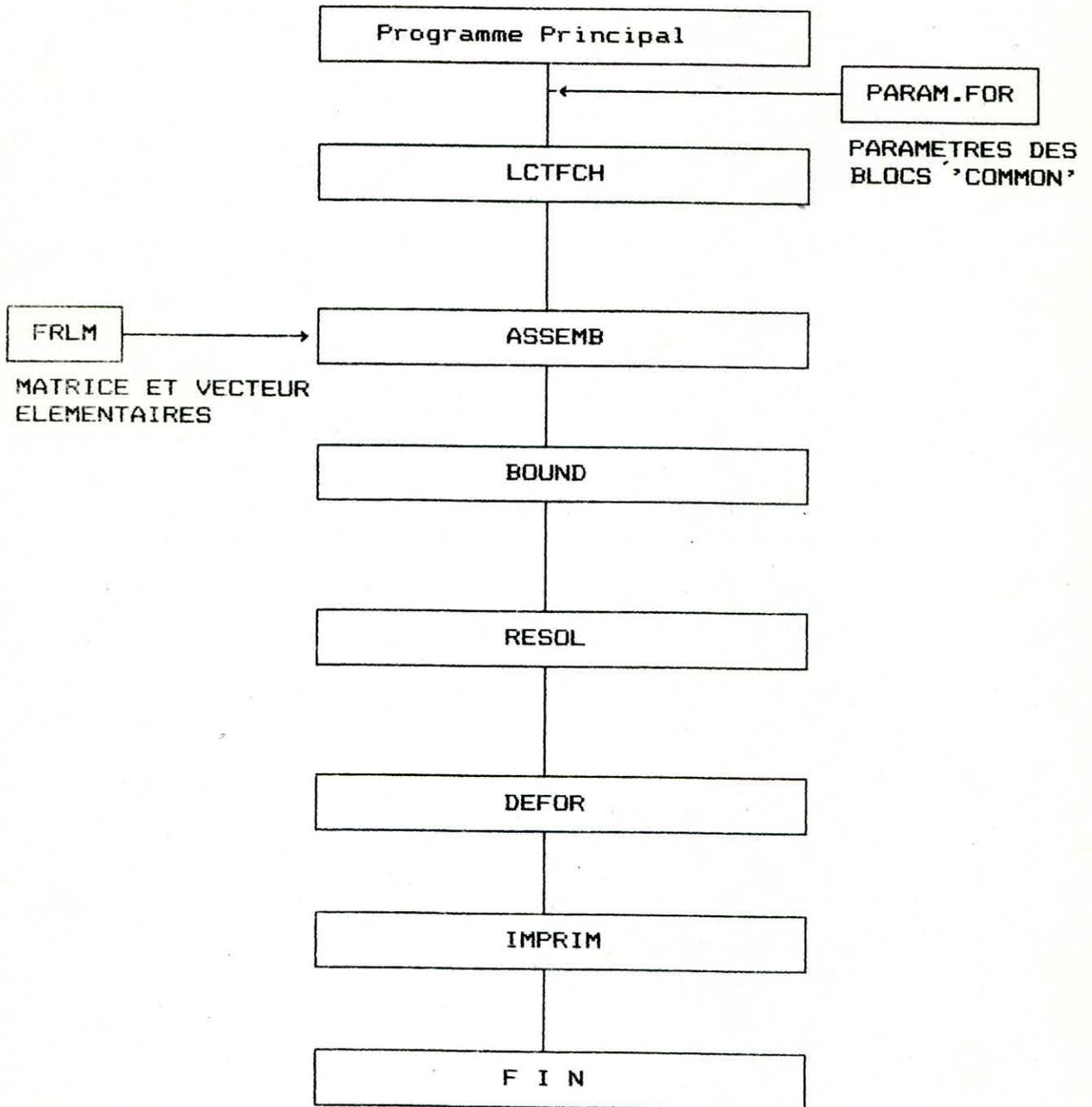
Pour un système de (n) équations linéaires et une largeur de bande (b) on a

LA METHODE	GAUSS	GAUSS (BANDE)	CHOLYSKY	CHOLYSKY
LE NOMBRE D'OPERATIONS	$\approx n^3/3$	$\approx n \cdot b^2/2$	$\approx n^3/6$	$\approx nb^2/2$

Pour un système de 10 équations et une largeur de bande  $b=4$  on a temps d'exécution suivants

LA METHODE	GAUSS	GAUSS (BANDE)	CHOLYSKY
LE TEMPS EN SEC	0.00.03	0.00.00	0.00.02

## STRUCTURE DU PROGRAMME ELAST



#### IV-2-8 EVALUATION DES CONTRAINTES .

Pour évaluer la matrice des contraintes  $H$ , on a le sous-programme 'DEFDR', qui permet de calculer les déformations puis après multiplication on obtient les contraintes pour chaque élément.

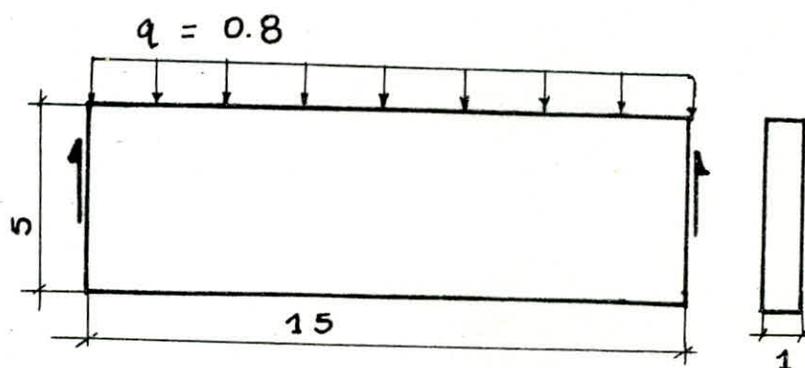
#### IV-2-9 IMPRESSION DES RESULTATS .

C'est le sous-programme 'IMPRIM' qui effectue cette opération, il imprime les résultats dans un fichier préalablement défini.

#### IV-3 EXEMPLES D'APPLICATION

EXEMPLE 1. Une poutre cloison chargée uniformément, reposant sur deux appuis simples à ses extrémités.

$q = 0.8$   
 $l = 15$   
 $E = 13400$   
 $t = 1$   
 $\nu = 0.3$



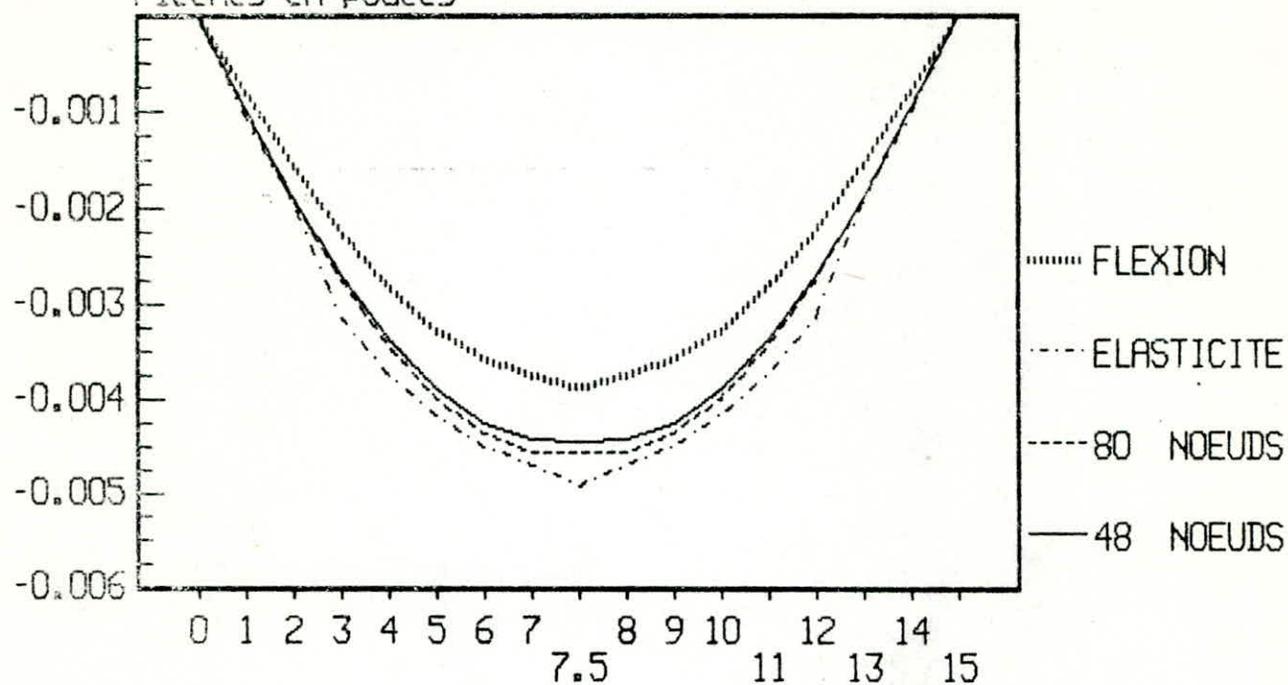
REMARQUE : La solution dite 'exacte' pour ce problème est obtenue par la théorie de l'élasticité, pour cela on se propose une fonction contrainte  $\phi(x, y)$  ( FONCTION D'AIRY ). Cette fonction doit vérifier l'équation bi-harmonique ( Chapitre II ), puis satisfaire les conditions aux limites (unicité de la solution)

#### Les déplacements Verticaux ( $v_y$ )

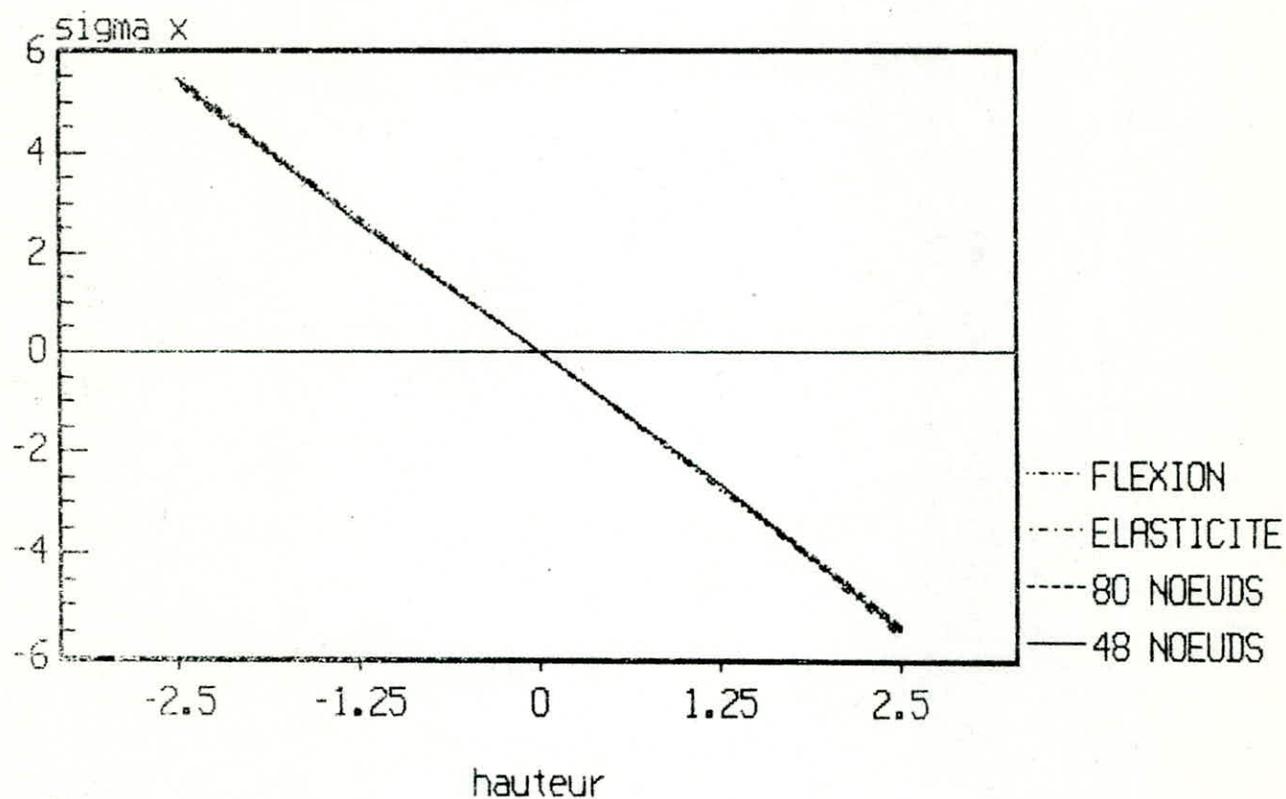
x	48 NOEUD	80 NOEUDS	ELASTICITE	FLEXION
1	-.9608E-3	-.9905E-3	-1.0373E-3	-7.9902E-4
2	-2.870E-3	-1.924E-3	-1.9376E-3	-1.5584E-3
3	-2.680E-3	-2.755E-3	-3.1465E-3	-2.2438E-3
4	-3.889E-3	-3.454E-3	-3.7506E-3	-2.8264E-3
5	-3.889E-3	-3.997E-3	-4.1728E-3	-3.2838E-3
6	-4.252E-3	-4.369E-3	-4.5166E-3	-3.5977E-3
7	-4.435E-3	-4.557E-3	-4.7106E-3	-3.7577E-3

Flèche d'une poutre Cloison en appui simple et uniformément chargée

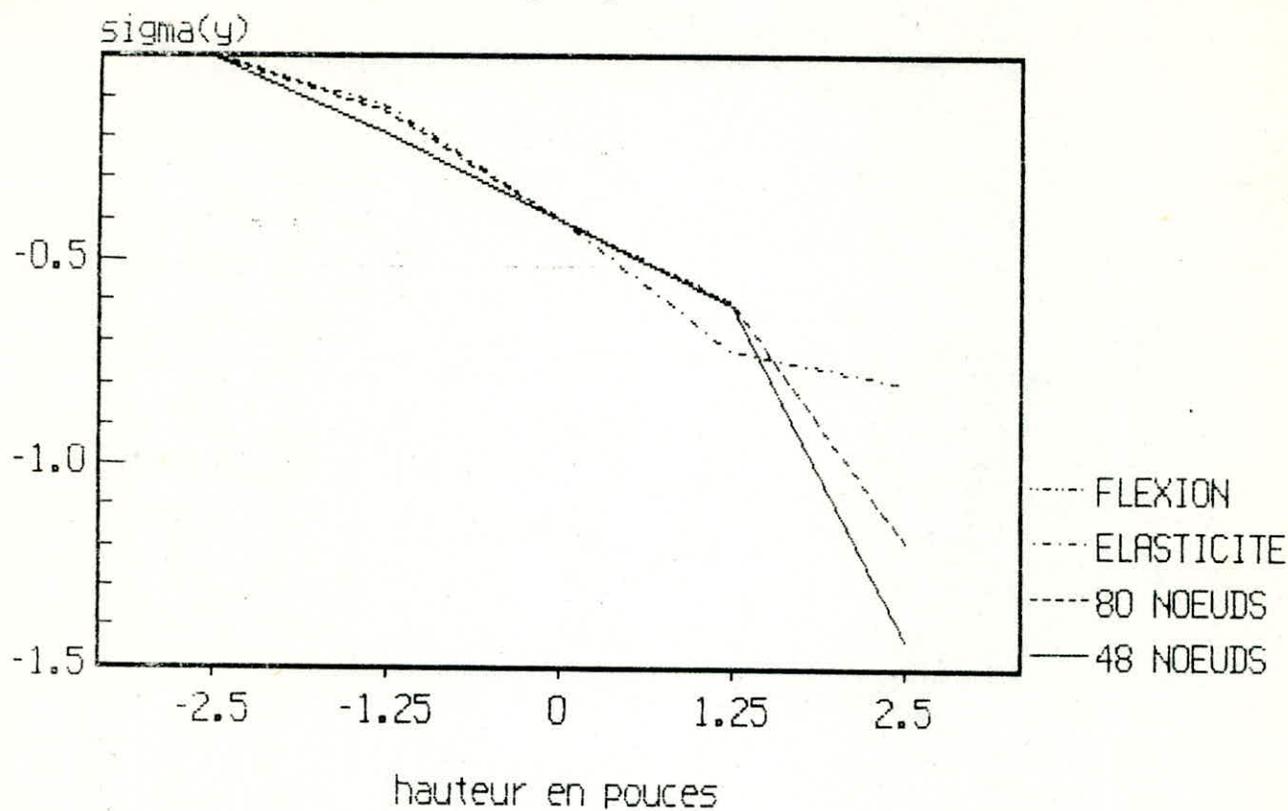
Flèches en pouces



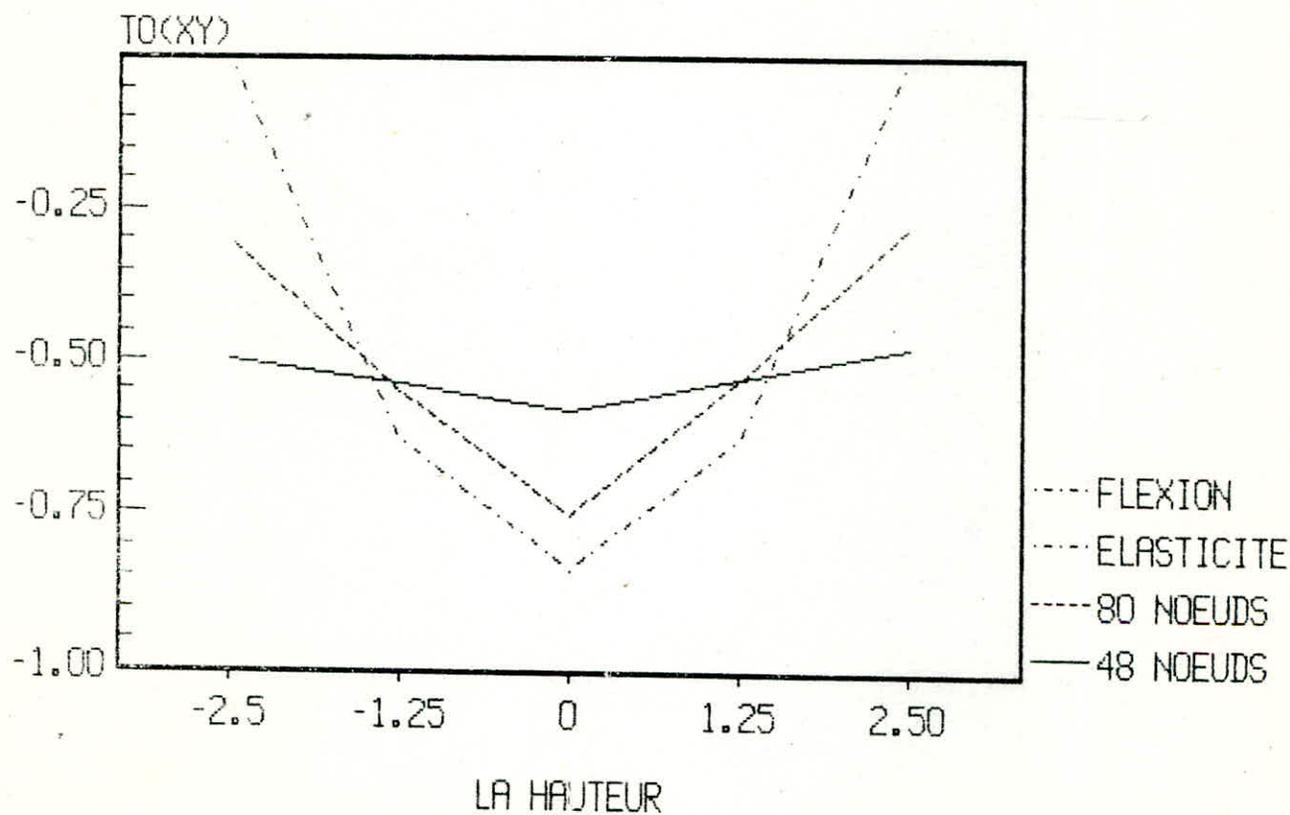
distribution des contraintes normales  
sigma x



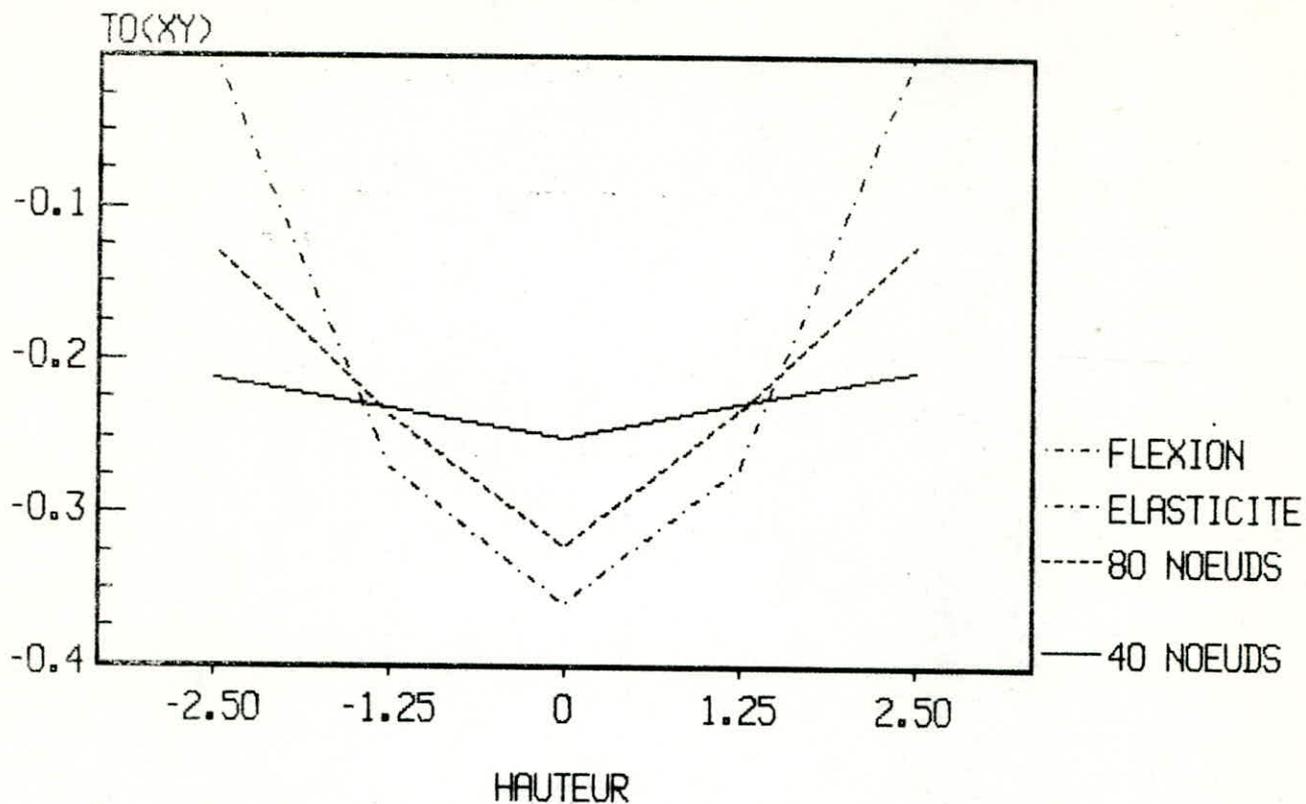
la distribution de la contrainte  
 $\sigma(y)$



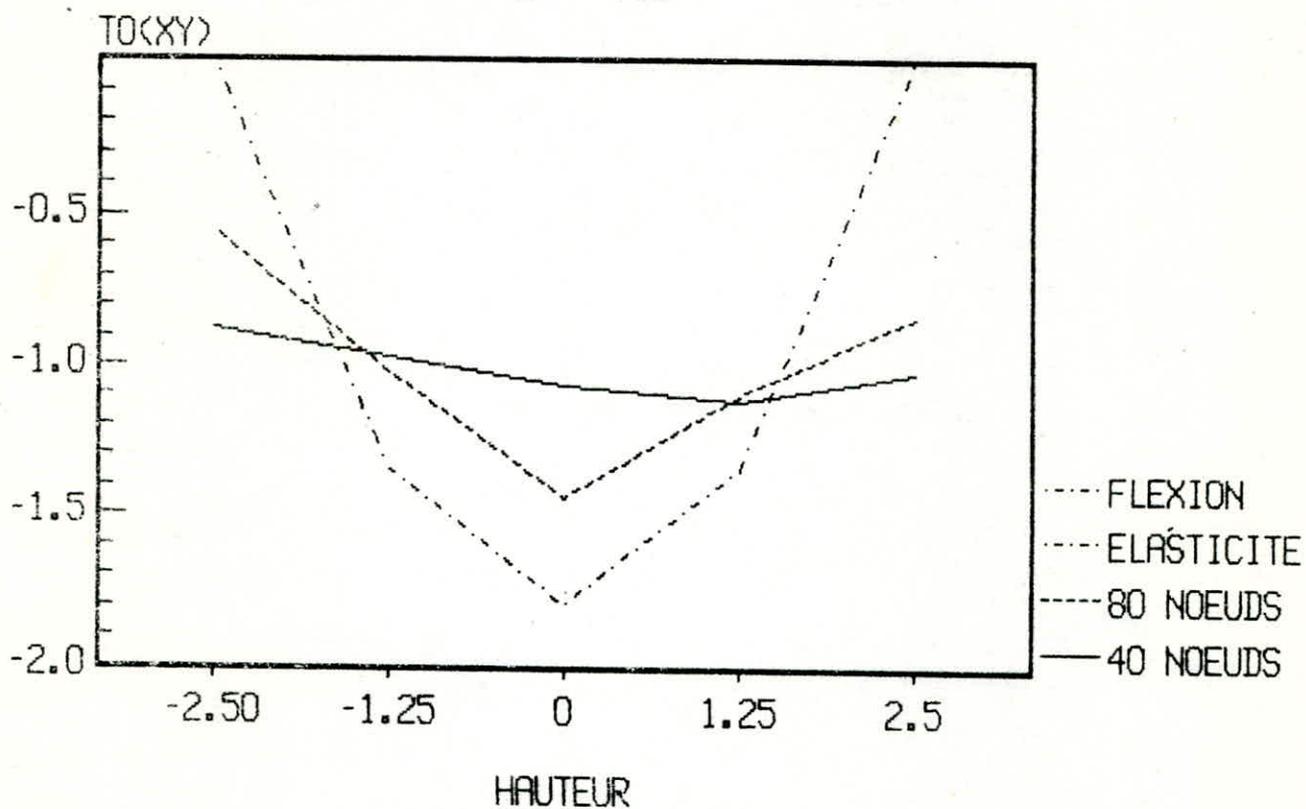
LA CONTRAINTE TANGENTIELLE  $T_0(XY)$   
 $X = -3.5$



LA CONTRAINTE TANGENTIELLE  $T_{O(XY)}$   
 $X = -1.5$



LA CONTRAINTE TANGENTIELLE  $T_{O(XY)}$   
 $X = -7.5$



Pour les contraintes (  $\sigma_x$  ), (  $\sigma_y$  ) et (  $\tau_{xy}$  ) sont représentées sous forme de courbe ( fig IV-4 ).

#### COMMENTAIRES.

Après avoir traité cet exemple, on constate que les valeurs des déplacements verticaux, ainsi que les contraintes (  $\sigma_x$  ) et (  $\sigma_y$  ), obtenues par le programme ELAST coïncident avec les valeurs théoriques. Cependant on constate que les valeurs de (  $\tau_{xy}$  ), pour les régions d'extrémité, ne sont pas du même ordre que les valeurs données par la théorie de l'élasticité ou la flexion. En particulier pour (  $y = \pm 2.50$  ), cela est dû en premier lieu au gradient de contrainte car en cette section d'appui, on a une valeur maximum de l'effort tranchant ce qui fait qu'on est dans une région très proche du point d'application du système de force, d'où une distribution, de contraintes et de déformations, non uniforme ( c'est le principe de Saint Venant ).

Donc la méthode des éléments finis, présentent des difficultés dans les régions limites en particulier les zones où regne un gradient de contraintes ou déformations( les points d'application du système de force ou autres ). Pour remédier légèrement à ce problème, on doit affiner le maillage près de ces zones.

#### IV-4 CONCLUSION ( Concernant la première partie )

Il est claire, d'après les exemples précédents, que la précision de la solution obtenue par éléments finis s'améliore avec l'accroissement du nombre d'éléments utilisés pour la discrétisation .

Les discontinuités aux noeuds, pour les valeurs des contraintes et des déformations, constatées dans les résultats sont dues en premier lieu au choix de la fonction de déplacements, car celle choisie est continue sur l'élément et ses frontières, mais ses dérivées premières (qui sont en fait les déformations ) ne sont pas continues sur la frontière de l'élément, sauf à l'intérieur où les déformations sont définies d'une façon unique

La même remarque concernant les contraintes, car en fait on ne s'est pas imposé un champ de contraintes uniforme, mais un champ de déplacements continu.

Pour remédier à cette discontinuité, on prend la moyenne des valeurs des déformations ou des contraintes calculées aux noeuds.

Concernant l'élément rectangulaire utilisé pour l'étude de l'élasticité plane, après comparaison avec les valeurs données par l'élément triangulaire, on peut dire qu'il est légèrement plus précis que l'élément triangulaire, car il suppose une distribution linéaire des déformations à travers l'élément et représente ainsi mieux les régions ayant un gradient de contraintes important.

Cependant l'élément triangulaire a l'avantage de pouvoir être utilisé pour les structures aux frontières de forme irrégulières ou comportant des trous et sont ainsi plus pratiques pour l'obtention de maillages graduels.

# **PARTIE 2**

## **COMPORTEMENT FLEXIONNEL**

# THEORIE DES PLAQUES MINCES EN FLEXION

## V-1 INTRODUCTION :

Les plaques en général sont des éléments plans, ayant une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions. Il y a plusieurs types de plaques, qui diffèrent par le comportement de leur matériau ( plaques isotropes, orthotropes, anisotropes ... etc ).  
Suivant le chargement, une plaque peut être soumise à un état de contraintes planes si ce chargement est appliqué dans son plan moyen, et peut avoir un comportement fléchionnel si ce chargement est appliqué perpendiculairement à son plan moyen. Dans le cas d'une action simultanée, on parle alors de flexion composée des plaques.

On distingue deux type de plaques suivant leur épaisseur, on a alors les plaques minces et les plaques épaisses.  
Pour les plaques minces, on a encore deux classes à savoir les plaques minces en faibles déplacements dans les quelles les contraintes de membrane, dues au chargement transversal, sont négligées devant les contraintes dues à la flexion. Ces plaques sont caractérisées par le fait que leur déplacement vertical est lié à l'épaisseur par l'inégalité suivante :

$$W / h < 1/5$$

On a aussi les plaques minces en grandes déformations, dans ce cas les contraintes de membranes ne sont plus négligeables devant celles dues à la flexion.

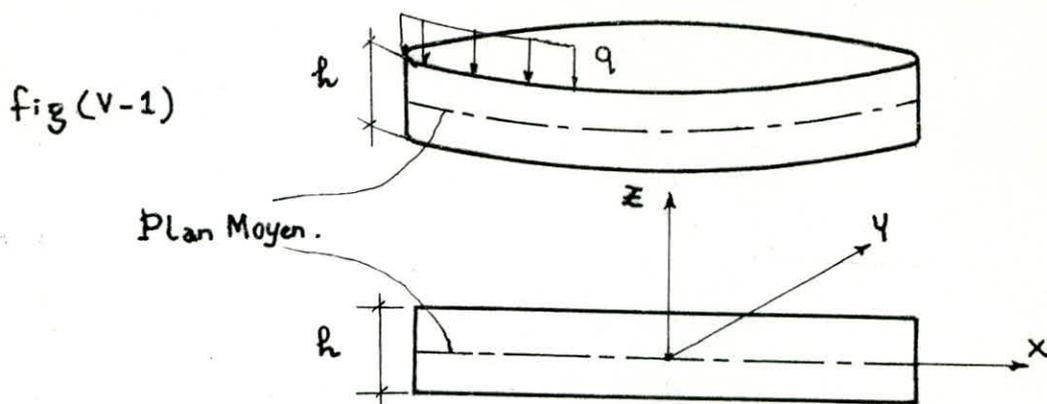
Pour ce qui des plaques épaisses, vu leur épaisseur qui est relativement élevée

$$( h / \min ( a, b ) > 1/5 )$$

on aura un état de contraintes triaxial et la théorie de l'élasticité plane cèdera sa place à l'élasticité en trois dimensions.

## V-2 DEFINITIONS

Une plaque mince est un solide limitée par deux plans parallèles entre eux, d'équations  $Z = \pm h/2$  et par une surface en contour fermé ( cylindrique ) dont les génératrices sont suivant l'axe de Z  
Le plan moyen d'une plaque est pris comme étant son plan de symétrie d'équation  $Z = 0$ .



### V-3 HYPOTHESES FONDAMENTALES

Ce sont des hypothèses sur lesquelles se base la théorie classique des plaques minces (théorie de Poisson-Kirchoff). Ces hypothèses sont justifiées du fait de la minceur de la plaque.

- Les forces extérieures, y compris le poids propre, sont considérées comme étant appliquées au plan moyen.
- On néglige la contrainte normale sur tout élément parallèle au plan moyen. ( $\sigma_z = 0$ ).
- Le déplacement d'un point du plan moyen se réduit à la composante normale au plan de la plaque. ( $u_0 = v_0 = 0$ ). Ce plan ne doit subir aucune extension, ni contraction.
- Les fibres de la plaque, perpendiculaires au plan médian, avant la flexion, restent perpendiculaires à celui-ci après la flexion. ( $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$ )
- La déformée ( $w$ ) du plan moyen est négligeable devant l'épaisseur ( $h$ ).

### V-4 LIMITES D'APPLICATION DES FORMULES DES PLAQUES MINCES

L'hypothèse (c) ne peut être rigoureusement satisfaite que si le plan moyen déformé est une surface développable autrement dit applicable sur un plan. Dans ce cas les formules des plaques minces sont correctes pourvu que l'épaisseur soit petite devant les dimensions dans le plan.

Dans le cas où la plaque fléchit de telle sorte que le plan moyen déformé soit une surface non développable, alors il subira nécessairement des extensions ou des contractions et donc les formules ne sont correctes que si les contraintes dues aux déformations du plan moyen sont négligeables devant celles provoquées par la flexion, ou, ce qui revient à dire que les dilatations du plan moyen sont petites devant les dilatations maximales produites par la flexion. Pour que cette condition soit vérifiée, il faut que ( $w \ll h$ ).

L'hypothèse (d) implique que l'effort tranchant n'a pas d'influence sur la flèche verticale, ce qui n'est pas toujours valable car dans le cas des plaques contenant des trous, le cisaillement doit être pris en considération.

Dans le cas où la plaque est soumise à la fois à des charges transversales et des forces agissant dans son plan, on procédera par superposition des deux effets pourvu que les déformations soient petites. Si les déformations sont considérables on doit alors modifier l'équation fondamentale de la flexion des plaques afin de tenir compte de ses forces.

## V-5 THEORIE DE LOVE-KIRCHOFF ( EQUATIONS GENERALES )

### V-5-1 RELATION DEFORMATIONS - COURBURES.

On voit d'après le Chapitre I que l'état de déformation, en général, est donnée par les relations suivantes

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

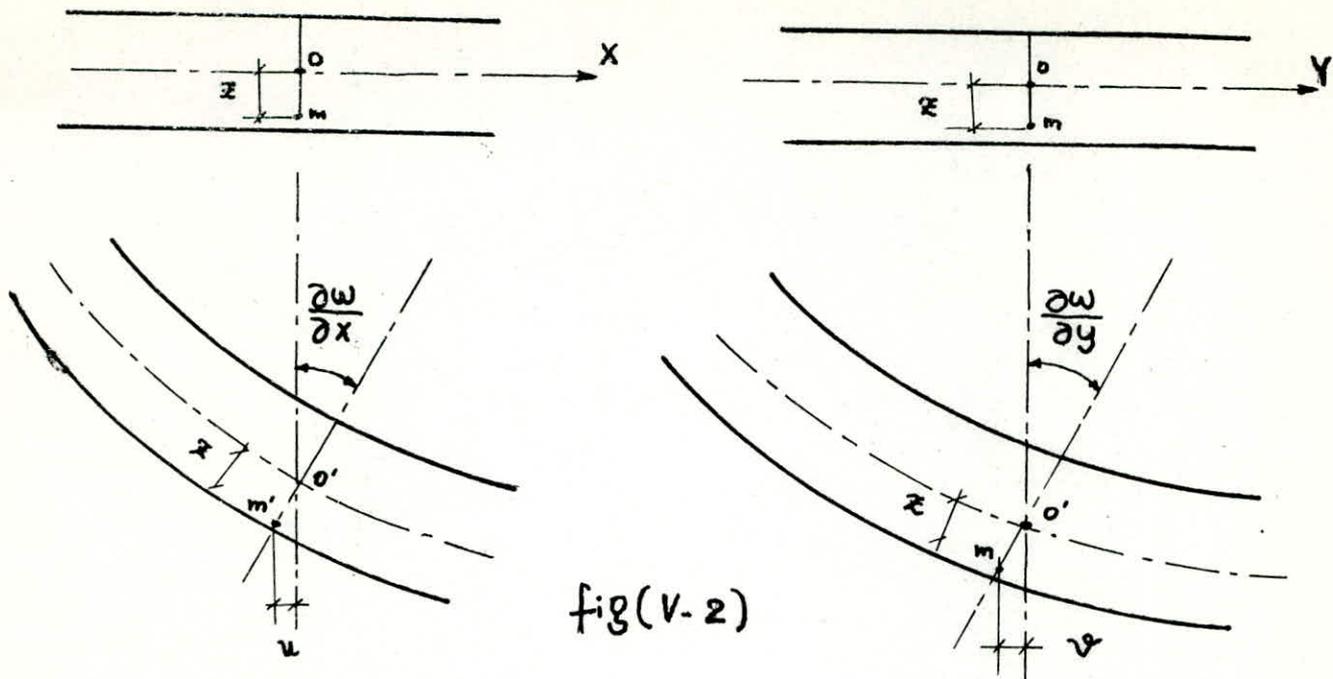
$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

En intégrant, on obtient après avoir considéré les conditions aux limites

$$w = w(x, y)$$

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$



fig(V-2)

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \longrightarrow \epsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \epsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \longrightarrow \gamma_{xy} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \quad (V-1)$$

D'autres part on a les courbures dans les plans parallèles aux plans moyens XZ, YZ, XY, qui s'écrivent comme suit :

$$\frac{1}{r_x} = - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{r_y} = - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (V-2)$$

$$\frac{1}{r_{xy}} = - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Des équations ( V-1 ) et ( V-2 ) on peut écrire :

$$\varepsilon_x = -\frac{z}{r_x}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{z}{r_y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2z}{r_x}$$

Ce sont les relations  
courbures-déformations

( V-3 )

#### V-5-2 RELATION CONTRAINTES - COURBURES.

D'après la loi de HOOKE généralisée pour les matériaux isotropes homogènes, on a

$$\varepsilon_x = 1/E \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = 1/E \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

ce qui implique

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) / (1-\nu^2)$$

$$\sigma_y = E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) / (1-\nu^2)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

ou en fonction des courbures on a d'après l'équation ( V-3 )

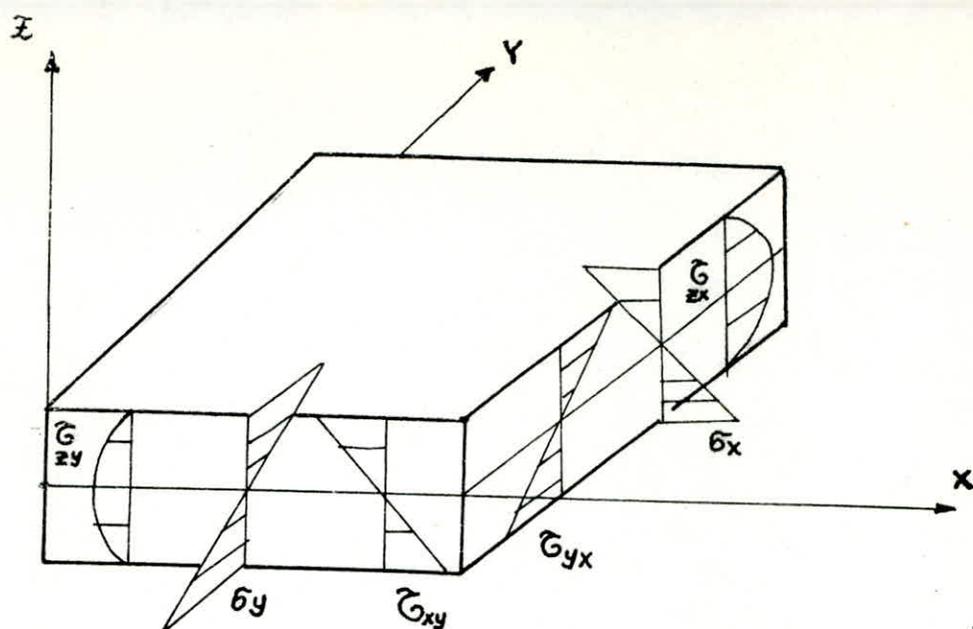
$$\sigma_x = -\frac{E \cdot z}{1-\nu} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$\sigma_y = -\frac{E \cdot z}{1-\nu} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad ( V-4 )$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E \cdot z}{1+\nu} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

On constate d'après ces relations que les contraintes sont nulles dans le plan moyen (  $z = 0$  ), et ont une variation linéaire avec la cote (  $z$  )

fig (V-3)



### V-5-3 LES EFFORTS INTERNES

Les contraintes ( $\sigma_x, \sigma_y, \gamma_{xy}$ ) produisent des efforts internes par unité de longueur ( $M_x, M_y, M_{xy}$ ) qui peuvent représenter l'état de contraintes dans la plaque.

Pour un point du plan moyen on a :

$$M_x \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \sigma_x \cdot dy \cdot dz$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \sigma_x \cdot dz$$

Le moment de flexion autour de l'axe (OY)

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \sigma_y \cdot dz$$

Le moment de flexion autour de l'axe (OX)

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \tau_{xy} \cdot dz$$

Le moment de torsion

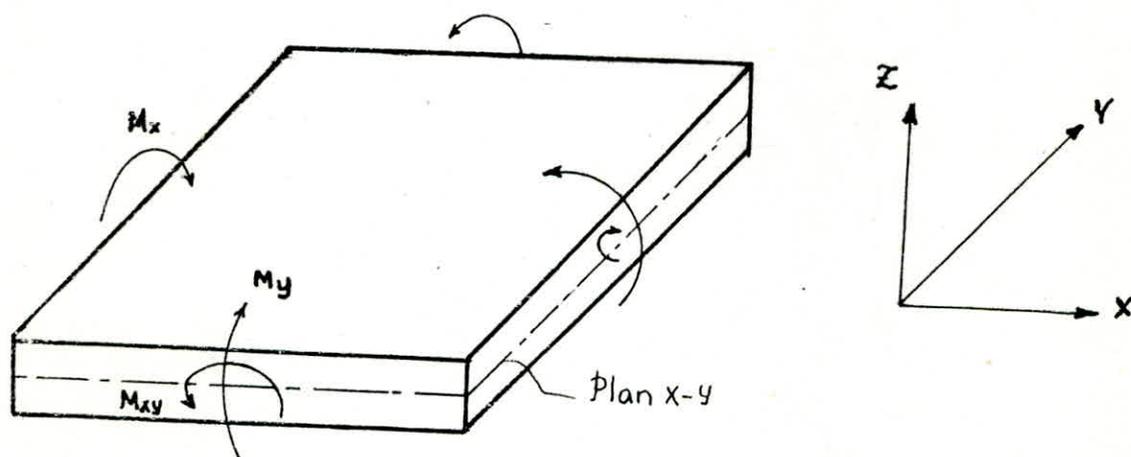


fig (V-4)

On a aussi

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \cdot dz$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} \cdot dz$$

De l'équation ( V-4 ) de ce qui précède on a

$$M_x = D \cdot \left[ \frac{1}{r_x} + \nu \cdot \frac{1}{r_y} \right] = - D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = D \cdot \left[ \frac{1}{r_y} + \nu \cdot \frac{1}{r_x} \right] = - D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = D \cdot (1 - \nu) \frac{1}{r_{xy}} = - D \cdot (1 - \nu) \cdot \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

où ( D ) représente la rigidité en flexion de la plaque

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$$

h : Epaisseur de la plaque

E : Le module d'élasticité longitudinal

$\nu$  : Le coefficient de poisson.

Ces équations peuvent être écrites sous la forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

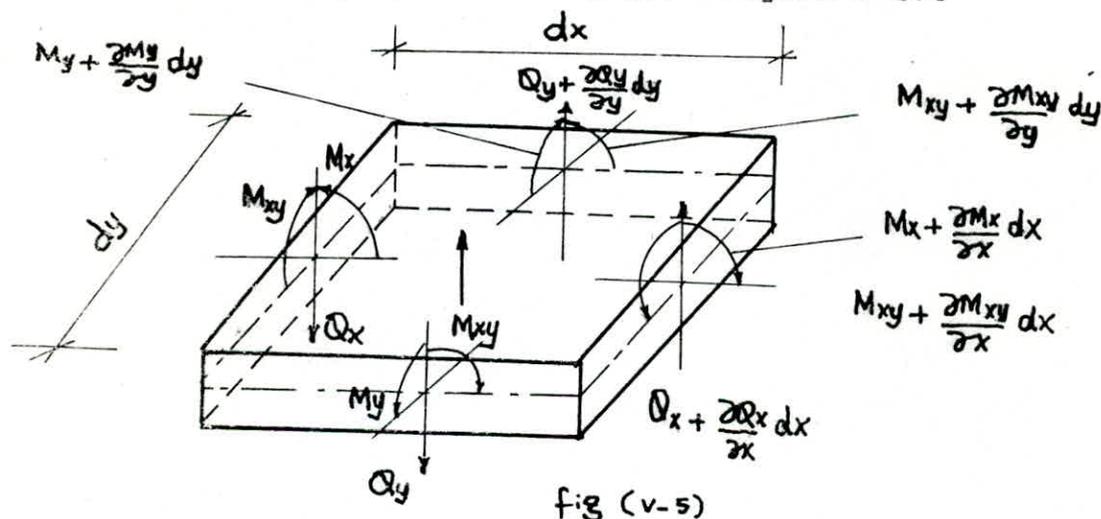
Cette relation n'est valable que si la plaque est considérée comme étant isotrope et homogène. (On traitera plus loin le cas des plaques orthotropes et anisotropes).

On exprime maintenant les contraintes  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  en fonction des efforts internes, en se basant sur la relation précédente et les équations (V-4)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left[ 12 \frac{z}{h^3} \right] \cdot M_x \\ \sigma_y &= \left[ 12 \frac{z}{h^3} \right] \cdot M_y \quad (V-5) \\ \tau_{xy} &= \left[ 12 \frac{z}{h^3} \right] \cdot M_{xy}\end{aligned}$$

#### V-5-4 LES EQUATIONS D'EQUILIBRE, EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA SURFACE FLECHIE (EQUATION DE LAGRANGE).

Considérons une plaque soumise à une densité superficielle  $P(x,y)$ . prenons dans cette plaque un élément rectangulaire de côté  $(dx)$  parallèle à OX et  $(dy)$  parallèle à OY. (figure V-5).



Considérons l'équilibre de cet élément

$$\begin{aligned}1. \quad \sum F_z = 0 &\longrightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot dx \cdot dy + P \cdot dx \cdot dy = 0 \\ &\longrightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = 0 \quad (V-6)\end{aligned}$$

$$2. \sum M_{/ox} = 0 \longrightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q dx dy = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (V-7)$$

$$3. \sum M_{/oy} = 0 \longrightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (V-8)$$

et finalement on aura :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (V-8)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0$$

Ce sont donc les trois équations qui définissent l'équilibre de l'élément en flexion ( pas de forces suivant X et Y, ni de couple suivant Z ).

Des équations (V-6) et (V-7) on a :

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (V-9)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (V-10)$$

en remplaçant les équations (V-9) et (V-10) dans (V-1) on a :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + P = 0$$

Remplaçons  $M_x$ ,  $M_y$ , et  $M_{xy}$  par les valeurs en fonction de  $w, D$ , et  $\nu$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D}$$

C'est l'équation Gouvernante pour la flexion des plaques ( Appelée Equation de LAGRANGE ), elle peut être écrite comme suit :

$$\nabla^4 w = \frac{P}{D}$$

Avec  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  ( L'opérateur LAPLACIEN )

#### V-5-5 ENERGIE DE DEFORMATION D'UNE PLAQUE.

Le travail élémentaire, effectué par les moments internes  $M_x \cdot dy$  et  $M_y \cdot dx$ , est donné par :

$$dW_1 = -\frac{1}{2} \left[ M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \cdot dx dy$$

$$\rightarrow dW_1 = -\frac{D}{2} \left[ \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \cdot \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx \cdot dy$$

Le travail élémentaire, effectué par le couple  $M_{xy} \cdot dy$  est :

$$dW_2 = \frac{1}{2} \left[ M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \cdot dx dy = \frac{D}{2} (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

Et comme  $M_{xy} \cdot dy$  produit le même travail que  $M_{yx} \cdot dx$ , alors on aura :

$$dW_2 = dW_2' + dW_2'' = D \cdot (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

L'énergie de déformation dans un élément de surface  $S$  est donc donnée par :

$$W_0 = \int_x \int_y ( dW_1 + dW_2 ) dx dy$$

$$W_0 = \frac{D}{2} \left[ \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \cdot \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \int \int$$

### V-5-6 LES CONDITIONS AUX LIMITES

Dans ce paragraphe, on traite les diverses conditions de fixation des plaques existant dans la pratique, en écrivant les équations particulières pour chaque cas.

1.<sup>er</sup> Cas : Le long d'un bord ENCASTRE.

Dans ce cas le déplacement vertical  $w(x,y)$  doit vérifier les conditions suivantes :

$$w = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{le long du bord encastéré}$$

2.<sup>er</sup> Cas : Le long d'un bord Simplement appuyé.

Dans ce cas on a :  $w = 0$  ,  $M_n = 0$  .

Si le BORD appuyé est parallèle à l'axe (Y) (  $x = \text{cte}$  ), on a alors :

$$w = 0 \quad , \quad M_x = 0 \quad ( \theta_x \neq 0 \text{ la plaque peut tourner autour de X } )$$

$$M_x = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Et comme ce BORD est parallèle à (Y), on a  $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$

$$M_x = 0 \longrightarrow \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = 0$$

3.<sup>er</sup> Cas : Le long d'un bord Libre.

Le long d'un bord libre (par exemple celui qui est parallèle a (X) ) on aura  $M_x = 0$  ,  $M_{xy} = 0$  ,  $Q_x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} M_{xy} = 0 \\ Q_x = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 0$$

$$M_x = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

## V-6 LES METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAGRANGE.

Il existe deux classes de méthodes pour résoudre l'équation de LAGRANGE.

1. La première classe comporte les méthodes dans lesquelles, on part d'une fonction générale qui satisfait l'équation de LAGRANGE et qui comporte des coefficients qui seront déterminés par le biais des conditions aux limites, ce qui nous donnera un solution qui sera unique si elle existe.

2. La deuxième classe comporte les méthodes dans lesquelles, part d'une fonction vérifiant les conditions aux limites uniquement puis on cherche une fonction complémentaire, telle que la fonction obtenue puisse satisfaire à la fois les conditions aux limites et l'équation de LAGRANGE.

On peut citer les méthodes suivantes :

### V-6-1 METHODE DES SERIES DOUBLES DE FOURIER.

Elle est appelée aussi solution de NAVIER. Dans cette méthode la charge  $P(x,y)$  est développée en série double de Fourier telle que :

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$$

Avec

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x,y) \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot dx dy$$

Considérons par exemple une plaque rectangulaire simplement appuyée (fig V-6)

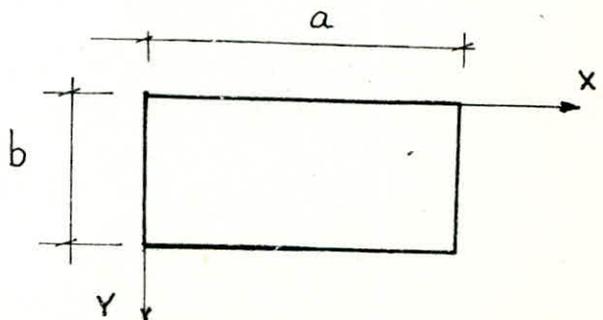
On a pour  $x = 0$  et  $x = a$  :  $w = 0$ ,  $M_x = 0$   
 pour  $y = 0$  et  $y = b$  on a :  $w = 0$ ,  $M_y = 0$

Après cela, on exprime  $w(x,y)$  par la fonction suivante :

$$w(x,y) = - \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$$

pour déterminer les coefficients ( $C_{mn}$ ), on remplace l'expression de  $w(x,y)$  dans l'équation de LAGRANGE, on trouve :

$$C_{mn} = \frac{a_{mn}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$



Pour  $P(x,y) = P_0 = \text{cst}$  on obtient :

$$w(x,y) = \frac{16 P_0}{\pi^2 \cdot D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} + \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$$

#### V-6-2      METHODES VARIATIONNELLES .

Dans ces méthodes, on développe  $w(x,y)$  sous la forme suivante :

$$w(x,y) = \sum a_n \cdot f(x,y)$$

Puis on détermine ces fonction (  $f(x,y)$  ), tout en vérifiant les conditions aux limites, pour ceci on utilise la méthode des moindres carres, RITZ, GALERKINE, ... etc.

#### V-6-3      LES METHODES PAR DIFFERENCES .

Ces méthodes consistent à substituer l'équation différentielle aux dérivées partielles, par une équation aux différences. Pour cela on remplace la plaque par un réseau fictif où les valeurs statiques cherchées sont données aux points d'intersection des éléments du réseau et ceci en les exprimant par des différences de la déformée. Dans cette méthode les dérivées sont exprimées par des valeurs approchées telles que :

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{\Delta x}$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{\Delta y}$$

En portant ces dérivées dans l'équation de LAGRANGE en considérant (  $n$  ) points du réseau, on obtient un système de (  $n$  ) équations à (  $n$  ) déplacements inconnus.

V-6-4      LES METHODES DIRECTES D'INTEGRATION .

Ces méthodes permettent d'intégrer directement l'équation de LAGRANGE .

MAURICE LEVY a proposé de prendre comme solution une série simple telle que :

$$w(x,y) = \sum Y_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Avec  $Y_m = Y_m (y)$

Dans l'équation de LAGRANGE, on exprime le second membre sous forme d'une série analogue à  $w(x,y)$

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Après substitution, dans l'équation fondamentale, des valeurs de  $w$  et  $P$ , on obtient une équation différentielle linéaire, dont l'équation caractéristique est de la forme suivante :

$$r^4 + 2 \cdot a \cdot r^2 + a^2 = 0$$

Ce qui fait qu'on aura une équation générale de la forme :

$$Y_m (y) = Y_{m0} (y) + \bar{Y}_m (y)$$

$Y_{m0}$  : La solution de l'équation Homogène

$\bar{Y}_m$  : La solution particulière.

On déterminera les constantes d'intégrations par le biais des conditions aux limites. Après avoir exprimé  $Y_m(y)$ , on en déduit l'expression de  $w(x,y)$  et ainsi  $M_x, M_y, M_{xy} \dots$  etc.

Prenons un exemple d'une plaque appuyée sur deux cotés et libre aux autres cotés.

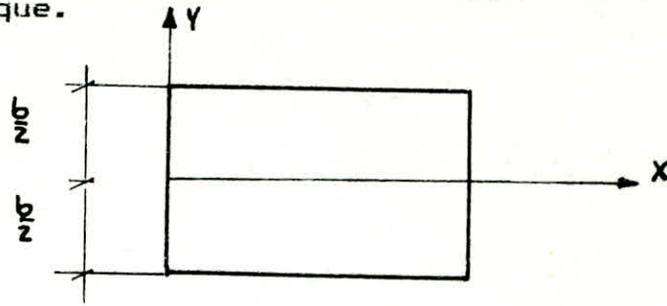
On pose au début

$$w(x,y) = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Ces solutions vérifiant les conditions aux limites suivantes

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{array}$$

Par raison de symétrie des conditions d'appui, on prend l'axe  $ox$  au milieu de la plaque.



On développe maintenant  $P(x,y)$  en série de sinus.

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

En remplaçant  $w$  et  $P$  par leurs expressions dans l'équation de LAGRANGE on aura :

$$\frac{d^4 F_m}{dy^4} - 2 \cdot (m\pi/a)^2 \cdot \frac{d^2 F_m}{dy^2} + (m\pi/a)^4 \cdot F_m = P_m(y)$$

Et l'équation caractéristique est alors :

$$r^4 - 2 \cdot (m\pi/a)^2 \cdot r^2 + (m\pi/a)^4 = 0$$

d'où on a

$$r = \pm m\pi/a$$

On prend

$$Y_m = \frac{m\pi}{a} \cdot y$$

$$\rightarrow F_m(y) = f(y) + A_m \cdot \text{Ch}(y) + B_m \cdot y \cdot \text{Sh}(y) + C_m \cdot \text{Sh}(y) + D_m \cdot y \cdot \text{Ch}(y)$$

$f(y)$  est l'intégrale particulière déterminée par variation des constantes.

$A_m, B_m, C_m$  et  $D_m$  sont déterminés en se basant sur les conditions aux limites.

### V-7 L'EQUATION FONDAMENTALE DE LA FLEXION DES PLAQUES ANISOTROPES.

Dans ce cas de plaques, la matrice d'élasticité est définie par le fait que le module d'élasticité a six composantes à savoir

$$E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}, \dots \text{ etc. .}$$

tels que

$$\sigma_x = E_{11} \cdot \varepsilon_x + E_{12} \cdot \varepsilon_y + E_{13} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = E_{21} \cdot \varepsilon_x + E_{22} \cdot \varepsilon_y + E_{23} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xy} = E_{31} \cdot \varepsilon_x + E_{32} \cdot \varepsilon_y + E_{33} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\text{Avec } E_{ij} = E_{ji}$$

En remplaçant les déformations par les courbures correspondantes puis les contraintes par les efforts internes, on obtient :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

$$D_{ij} = \frac{E_{ij} \cdot h^3}{12}$$

Après avoir considéré les équations d'équilibre, on obtient l'équation fondamentale de la flexion des plaques anisotropes :

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 \cdot D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + 4 D_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\ & + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P(x, y) \end{aligned}$$

### V-8 L'EQUATION FONDAMENTALE DE LA FLEXION DES PLAQUES ORTHOTROPES.

C'est un cas particulier des plaques anisotropes car dans ce cas la plaque possède trois plans de symétrie par rapport à ces caractéristiques élastiques on a alors :

$$E_{11} = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \qquad E_{12} = \frac{\nu_x \cdot E_y}{1 - \nu_x \nu_y}$$

$$E_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \qquad E_{21} = \frac{\nu_y \cdot E_x}{1 - \nu_x \nu_y}$$

$$E_{12} = E_{21}$$

$$E_{13} = E_{31} = E_{23} = E_{32} = 0$$

$$E_{33} = G$$

avec  $E_x, E_y$  les modules d'élasticité longitudinaux dans les directions X et Y.

Et ( $G$ ) est le module de cisaillement

$\nu_x, \nu_y$  sont les coefficients de poisson dans les directions X et Y

on obtient alors :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_x & D & 0 \\ D & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Avec

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_{xy} = \frac{G h^3}{12} \quad , \quad D = \nu \cdot D_x \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

En écrivant les équations d'équilibre, on obtient :

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot H \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P(x,y)$$

$$H = 2 \cdot D_{xy} + \frac{\nu_y D_x + \nu_x \cdot D_y}{2}$$

c'est l'équation de LAGRANGE pour les plaques orthotropes.

L'ELEMENT RECTANGULAIRE POUR L'ETUDE  
DES PLAQUES MINCES EN FLEXION  
( PROBLEME DE CONTINUITE  $C_1$  )

VI-1 INTRODUCTION

Pour le calcul des plaques en flexion, il est nécessaire de poser certaines hypothèses qui nous permettent de traiter le problème, de la flexion des plaques minces, à deux dimensions et qui sont :

\*. L'épaisseur de la plaque doit être petite devant ses dimensions dans le plan, car si elle est trop grande, on doit faire le calcul de la plaque en trois dimensions.

\*. La flèche est petite devant l'épaisseur de la plaque, car si la flèche; due à la charge transversale; est très importante on aura des forces internes qui seront engendrées dans le plan de la plaque (forces de membranes) et dans ce cas on doit reformuler le problème.

Ces hypothèses portent surtout sur une variation linéaire des déformations et des contraintes, selon la normale au plan de la plaque .

VI-2 LA FLEXION DES PLAQUES EST UN PROBLEME DE CONTINUITE  $C^1$

L'état de déformation d'une plaque est parfaitement décrit par le déplacement latéral ( $w$ ) du plan. Seulement que les conditions de continuité ne sont pas imposées uniquement sur le déplacement vertical ( $w$ ), mais également sur ses dérivées premières et du moment que  $w = w(x,y)$  ( fonction à deux variables ), on doit imposer trois conditions de continuité en chaque noeud.

- \*. une condition concernant  $w(x,y)$
- \*. une autre concernant sa dérivée par rapport à  $x$  ( $-\frac{\partial w}{\partial x}$ )
- \*. une dernière concernant sa dérivée par rapport à  $y$  ( $-\frac{\partial w}{\partial y}$ )

Ce problème nécessite donc la continuité de la fonction de déplacements ainsi que ses dérivées premières, on parle dans ce cas de problème de continuité  $C_1$ .

### VI-3 ELABORATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE POR L'ELEMENT RECTANGULAIRE EN FLEXION.

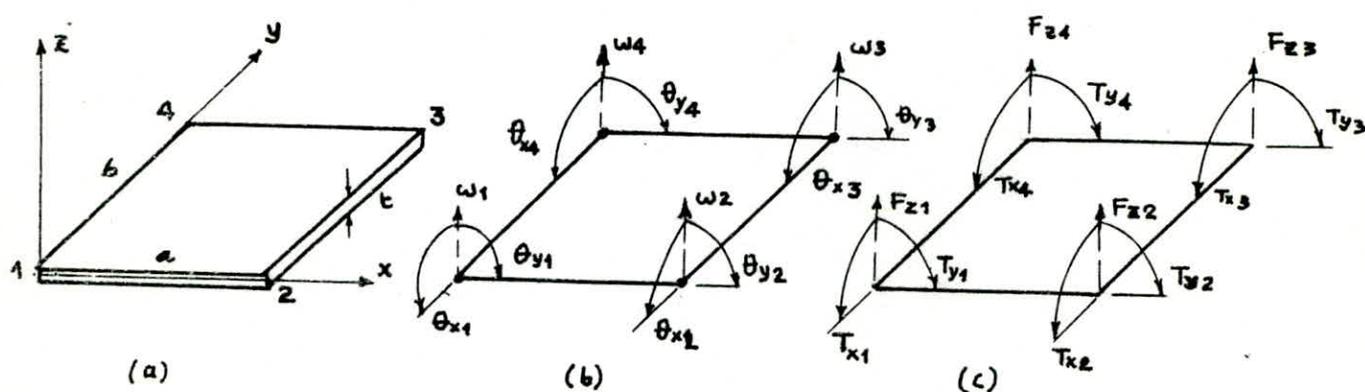
L'élément, utilisé pour l'étude de la flexion des plaques minces, est l'élément rectangulaire à quatre noeuds avec trois degrés par noeud, à savoir le déplacement verticale ( $w$ ) et les deux rotations ( $\theta_x$ ) et ( $\theta_y$ ).

L'élaboration de la matrice des raideurs de l'élément utilisé passe par les sept étapes de base.

#### Etape 1 .

Cette étape consiste en un choix de système de référence ainsi que la numérotation des noeuds de cet élément.

Le système de coordonnées et la numérotation adoptée sont montrés dans la figure ( VI-1 ).



fig(VI-1) (a) Système de Coordonnées, (b) Déplacements Nodaux, (c) Forces Nodales.

Les degrés de liberté que possèdent chaque noeud sont :

- $w$  le déplacement suivant l'axe  $Z$
- $\theta_x$  la rotation autour de l'axe  $X$
- $\theta_y$  la rotation autour de l'axe  $y$

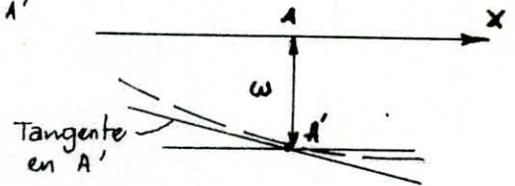
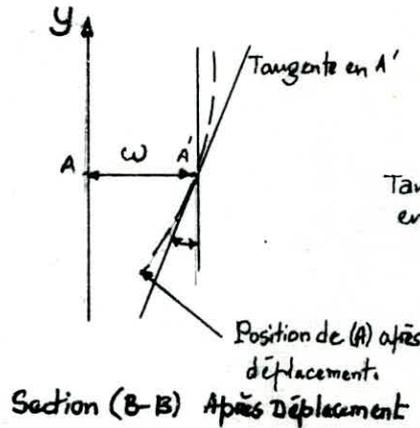
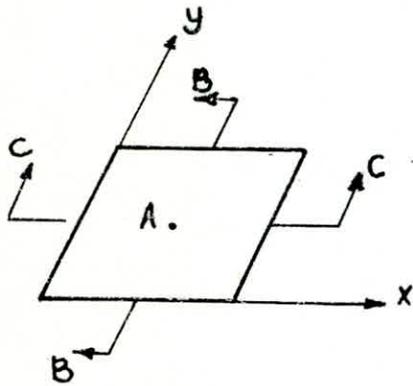
Ces rotations sont considérées comme étant les pentes normales, et sont données par les expressions suivantes :

$$\theta_x = - \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\theta_y = - \frac{\partial w}{\partial x}$$

Pour un noeud (i) on aura donc le vecteur déplacement suivant :

$$\{ a_i \} = \left\{ \begin{array}{l} w(x,y) \\ \theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (VI-1)$$



Section (C-C) Après déplacement.

De même on aura les forces et moments au noeud (i)

$$\{ f_i \} = \left\{ \begin{array}{l} F_z \\ T_x \\ T_y \end{array} \right\}$$

Ce qui fait que l'élément possède à présent en tout douze degrés de liberté et ainsi on aura une matrice de raideurs, carrée d'ordre douze. Pour tout l'élément on aura les vecteurs déplacement et force, suivants :

$$\{ a^e \} = \left\{ \begin{array}{l} \{ a_1 \} \\ \{ a_2 \} \\ \{ a_3 \} \\ \{ a_4 \} \end{array} \right\}$$

avec  $\{ a_i \}$  est donné par l'équation (VI-1).

$$\{ F^e \} = \left\{ \begin{array}{l} \{ f_1 \} \\ \{ f_2 \} \\ \{ f_3 \} \\ \{ f_4 \} \end{array} \right\}$$

## Etape 2.

Cette étape consiste en un choix de la fonction de déplacement qui permet de définir le déplacement en chaque point de l'élément.

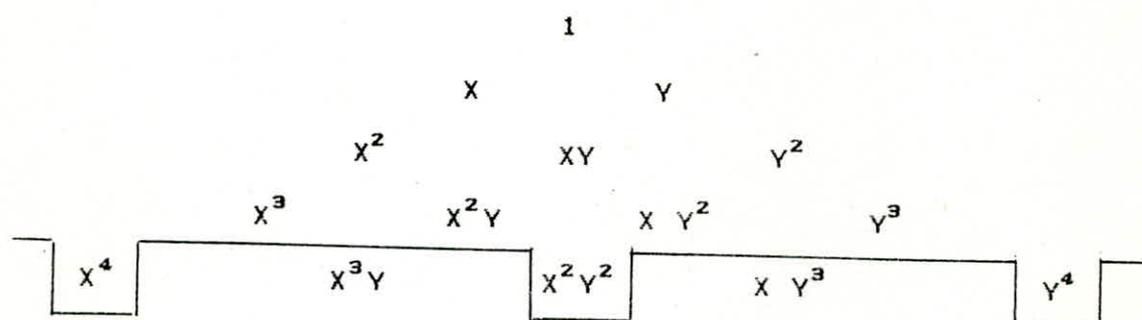
Comme la formulation choisie pour cet élément est une formulation en déplacements, on doit donc imposer un champ de déplacements continue et uniforme à l'intérieur de l'élément.

Ce champ de déplacements est représenté par la fonction à deux variables  $w(x,y)$  qui doit être choisie selon plusieurs critères dont on peut citer :

1. l'élément rectangulaire ( à quatre noeuds ) a douze degrés de liberté , ce qui fait qu'on doit choisir une fonction de déplacement sous forme polynômiale et contenant douze coefficients.

2. Dans le problème des plaques minces en flexion, on a des dérivées secondes des fonctions inconnues qui interviennent dans la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale, ce qui correspond à des équations différentielles du quatrième ordre. Donc on doit choisir un polynôme d'ordre quatre.

Le polynôme d'interpolation sera donné par le triangle de PASCAL



$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x y + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 x y^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x y^3$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 x y + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} x y^2$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 x y + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3)$$

Le polynôme choisi, pour représenter ( $w$ ) est incomplet et d'ordre quatre en  $x$  et  $y$  avec omission des termes

$$x^4, x^2 y^2 \text{ et } y^4$$

Les raisons pour les quelles on a opté pour ce choix sont les suivantes :

\* Les termes  $x^3y$  et  $yx^3$  maintiennent l'isotropie géométriques (Compatibilité inter-éléments des déplacements) et satisfont à l'équation différentielle pour une plaque non chargée

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$$

\* Le terme  $x^2y^2$  n'est pas approprié et ne convient pas, car on n'a pas un autre terme qui lui équivaut.

\* Les termes  $x^4$  et  $y^4$  ne conviennent pas non plus, car ils ne satisfont pas la condition de compatibilité des déplacements.

(chose que les termes  $x^3y$  et  $yx^3$  assurent facilement)

Outre ces critères on a d'autres qui sont en fait déduits des critères généraux pour le choix des fonctions de forme. (Capitre II).

#### A. LE CRITERE DE DEPLACEMENT DE CORPS RIGIDE

L'élément de plaque mince a trois déplacements, de corps rigide, possibles par noeud et comme on a trois déformations possibles qui sont en fait les courbures (chap V). On aura besoin alors des termes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2 x$ ,  $\alpha_3 y$ , ce qui implique l'existence des coefficients,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ .

#### B. LE CRITERE DE L'ETAT DE DEFORMATION CONSTANTES.

la fonction de déplacement doit être choisie de telle façon qu'elle permet d'obtenir des déformations constantes si les déplacements qui les engendrent, sont compatibles avec un état de déformations constant. Pour respecter ce critère, on constate que les termes

$$\alpha_4 x^2, \alpha_5 xy, \alpha_6 y^2$$

doivent exister, ce qui impliquera l'existence des coefficients  $\alpha_4$ ,  $\alpha_5$  et  $\alpha_6$ .

#### \* LA VERIFICATION DE LA CONTINUITE INTER-ELEMENTS, DES DEPLACEMENTS

Considérons l'élément de la figure (VI-3). Le bord (1-4) est caractérisé par le fait que  $x = \text{cst}$  ( $x=0$ ), on a donc

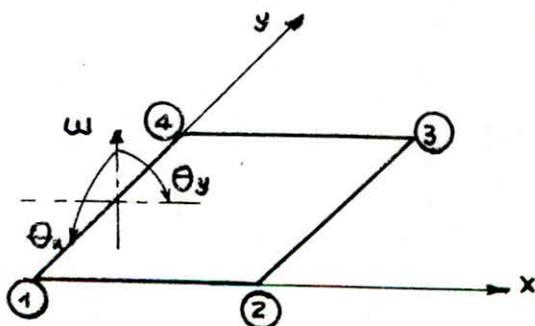


fig (VI-3)

$$w(0,y) = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3$$

$$\theta_x(0,y) = \alpha_3 + 2 \alpha_6 y + 3 \alpha_{10} y^2$$

$$\theta_y(0,y) = - (\alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3 )$$

Aux noeuds de ce bord on a :

\* Au noeud (1) ( x = 0 et y = 0 )

$$w_1(0,0) = \alpha_1$$

$$\theta_{x_1}(0,y) = \alpha_3$$

$$\theta_{y_1}(0,y) = - \alpha_2$$

\* Au noeud (4) ( x = 0 et y = b )

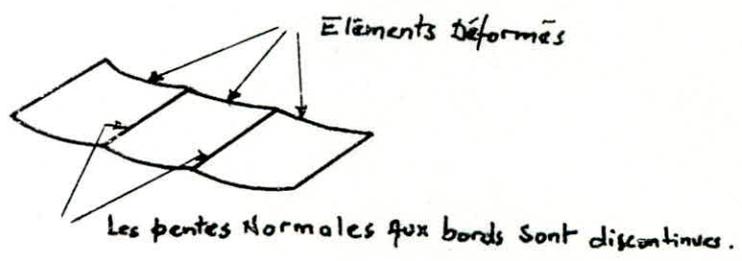
$$w_4(0,b) = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3$$

$$\theta_{x_4}(0,y) = \alpha_3 + 2 \alpha_6 b + 3 \alpha_{10} b^2$$

$$\theta_{y_4}(0,y) = - (\alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{12} b^3 )$$

On a ainsi six équations pour déterminer huit coefficients ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}$  et  $\alpha_{12}$ ) (ce qui est impossible !). Mais on constate que ( $w$ ) et ( $\theta_x$ ) contiennent les même coefficients à savoir ( $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6$  et  $\alpha_{10}$ ) puis ( $\theta_y$ ) contient les quatre autres coefficients, et comme sur chaque coté on a six équations qui définissent les déplacements dont quatre d'entres elles se rapportent à ( $w$ ) et ( $\theta_x$ ) ( ou  $\theta_y$ , suivant que le coté est parallèle à X ou Y ), alors on peut donc déterminer les coefficients reliés à ces quantités. Ce qui fait que dans ce cas ( $w$ ) et ( $\theta_x$ ) sont exprimés d'une façon unique sur le coté (1-4).

Il nous reste à ce moment que deux équations qui ne suffisent pas pour déterminer les quatre coefficients restants, donc la rotation  $\theta_y$  ne peut être définie d'une façon unique sur le coté (1-4). On parle alors d'une discontinuité de la pente normale.



A cause de cela, la fonction choisie n'est pas idéale et elle est dite alors " Fonction de forme non conforme ". Cependant la fonction de forme non conforme choisie, si elle vérifie le critère des déformations constantes et satisfait le test de rapiéçage " Patch test ", alors on aura toujours convergence ( qui peut être dans ce cas par le haut ou par le bas )

Remarque :

La continuité de (w) et  $\theta_x$  ainsi que  $\theta_y$ , doit être respectée aux noeuds et à l'intérieur de l'élément, mais peut être transgressée le long des interfaces.

On a seulement considéré (ci-dessus) le cas du bord (1-4) (x=0), cependant, la conclusion est vraie et une discontinuité de la pente normale peut exister le long de n'importe quel bord.

Après avoir choisi la fonction de forme, on peut écrire le vecteur de déplacement en un point ( x,y ) en fonction des coefficients de la manière suivante :

$$\{ a(x,y) \} = [ f(x,y) ] \{ \alpha \}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^3y & -y^2 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

Etape 3

lors de cette étape, on doit exprimer l'état de déplacement en un point donné en fonction des déplacements nodaux.

On remplace, dans la matrice [ f(x,y) ] x et y par les coordonnées des noeuds 1,2,3 et 4 on aura à la fin une équation sous la forme

$$\{ a^e \} = \begin{Bmatrix} \{ a_1 \} \\ \{ a_2 \} \\ \{ a_3 \} \\ \{ a_4 \} \end{Bmatrix} = [ A ] \{ \alpha \}$$

où [ A ] est donnée par la figure ( VI-4)

$$\{ a^e \} = [ A ] \{ \alpha \} \longrightarrow \{ \alpha \} = [ A ]^{-1} \cdot \{ a^e \}$$



sachant que

$$\left\{ a(x,y) \right\} = \left[ f(x,y) \right] \left\{ \alpha \right\} \quad \text{on aura alors}$$

$$\left\{ a(x,y) \right\} = \left[ f(x,y) \right] \cdot \left[ A \right]^{-1} \left\{ a^e \right\}$$

$$\text{soit} \quad \left\{ a(x,y) \right\} = \left[ N(x,y) \right] \cdot \left\{ a^e \right\} \quad (\text{VI-1})$$

[ N ] est la Matrice d'interpolation des déplacements

#### Etape 4

Cette étape consiste à relier les déformations  $\left\{ \varepsilon_x(x,y) \right\}$  en chaque point, aux déplacements nodaux.

L'état de déformations en un points  $(x,y)$  est défini par trois composantes qui sont :

1. La Courbure dans la direction des  $(x)$  et qui est la variation de la dérivée par rapport à  $(x)$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

2. La courbure dans la direction des  $(y)$  et qui est la variation de la dérivée par rapport à  $(y)$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

3. La torsion qui correspond à la variation par rapport à  $(x)$  de la dérivée par rapport à  $(y)$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Les moments internes  $M_x$ ,  $M_y$  agissent, chacun, sur deux cotés de l'élément. Il en est de même pour  $M_{xy}$  et  $M_{yx}$ , mais puisque  $M_{xy} \equiv M_{yx}$

alors on peut considérer que  $M_{xy}$  ou  $M_{yx}$  agit sur les quatre cotés, en doublant son effet, à savoir le terme de la torsion et on obtient finalement :

$$\left\{ \varepsilon(x,y) \right\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ -2\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \varepsilon(x,y) \right\} = [L] \cdot \left\{ a(x,y) \right\}$$

$$\left\{ \varepsilon(x,y) \right\} = [L] \cdot [N(x,y)] \left\{ a^e \right\}$$

$$\left\{ \varepsilon(x,y) \right\} = [B(x,y)] \cdot \left\{ a^e \right\} \quad (\text{VI-2})$$

### Etape 5

Dans cette étape on doit relier les efforts internes  $\{ \sigma(x,y) \}$  aux déformations puis aux déplacements généralisés et enfin aux déplacements nodaux.

L'état de contrainte en flexion est défini par les trois composantes et qui sont en fait des moments de flexion et de torsion par unité de longueur.

$M_x$  : Le moment de flexion interne par unité de longueur, autour de X

$M_y$  : Le moment de flexion interne par unité de longueur, autour de Y

$M_{xy}$  : Le moment de torsion interne par unité de longueur

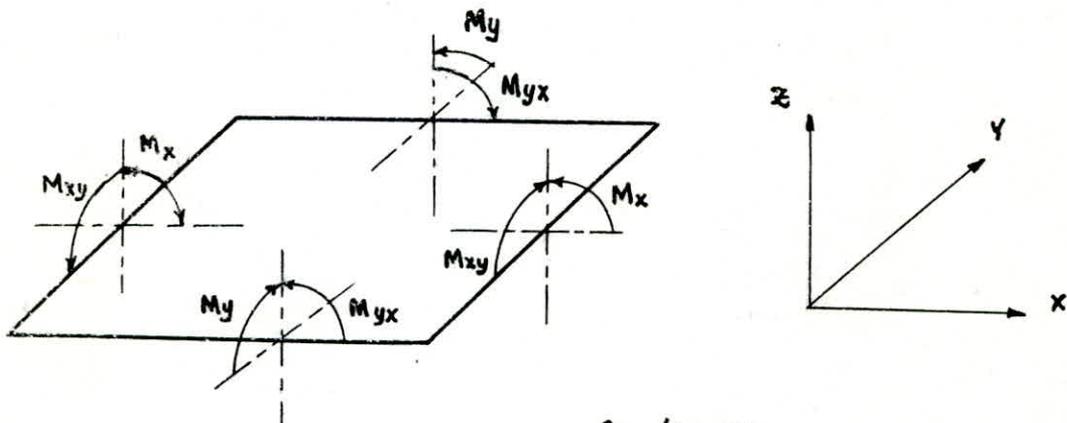


fig (VI-5)

Forces Internes dans  
les Éléments.

Dans le domaine élastique linéaire on a :

$$\left\{ \sigma(x,y) \right\} = [D] \cdot \left\{ \varepsilon(x,y) \right\} \quad (\text{VI-3})$$

où [D] est la matrice d'élasticité

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_{xy} = \frac{G h^3}{12} \quad , \quad D_1 = \nu \cdot D_x \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$M_x = - \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = - \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{VI-4})$$

$$M_{xy} = - 2 D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Dans le cas d'une plaque isotrope on a

$$D_x = D_y = E \frac{h^3}{12(1 - \nu^2)} = D$$

$$D_1 = \nu \cdot D$$

$$D_{xy} = 1/2 (1 - \nu) \cdot D$$

D'après les équations (VI-2) et (VI-3) on a :

$$\left\{ \sigma(x,y) \right\} = [D] \cdot [B] \left\{ a^e \right\}$$

soit

$$\left\{ \sigma(x,y) \right\} = [H(x,y)] \left\{ a^e \right\} \quad (VI-7)$$

où [H] est matrice contrainte et donnée par la figure (VI-5)

On étudie maintenant la façon dont varient les moments internes dans l'élément. D'après l'équation (VI-4) on remarque que :

$$M_x, M_y = F \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{xy} = F \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)$$

on peut écrire autrement :

$$M_x, M_y = F \left( 2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} x y, \right. \\ \left. 2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy \right)$$

$$M_{xy} = F \left( \alpha_5 + 2\alpha_8 x + 2\alpha_9 y + 3\alpha_{11} x^2 + 3\alpha_{12} y^2 \right)$$

On remarque que pour n'importe quel point P(x,y) les moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$  ont une variation linéaire à travers l'élément (comme c'est le cas pour la distribution des contraintes dans les problèmes de l'élasticité plane).

D'autre part, le moment de torsion  $M_{xy}$  n'est pas linéairement distribué et varie donc selon une expression quadratique en x lorsque (y = cst) et en y si (x = cst).

#### Etape 6.

Cette étape consiste à relier les contraintes aux forces nodales statiquement équivalentes

En appliquant le théorème des travaux virtuels on a :

$$W_{int} = W_{ext}$$

$$W_{ext} = \left\{ a_*^e \right\}^T \cdot \left\{ F^e \right\}$$

$$W_{int} = \int_V \left\{ \varepsilon_*^e \right\}^T \left\{ \sigma \right\} dv$$

$$\left\{ a_*^e \right\}^T \cdot \left\{ F^e \right\} = \int_V \left\{ \varepsilon_*^e \right\}^T \left\{ \sigma \right\} dv$$

le travail des forces extérieures = le travail interne total

compte tenu de ce qui précède on peut écrire

$$\left\{ a_*^e \right\}^T \left\{ F^e \right\} = \left[ \int_V \left\{ a_*^e \right\}^T \left( \left[ B \right]^T \cdot \left[ D \right] \cdot \left[ B \right] dv \right) \cdot \left\{ a^e \right\} \right]$$

$$\Rightarrow \left\{ F^e \right\} = \left[ \int_V \left[ B \right]^T \cdot \left[ D \right] \cdot \left[ B \right] dv \right] \cdot \left\{ a^e \right\}$$

Elle est du type

$$\left\{ F^e \right\} = \left[ K^e \right] \cdot \left\{ a^e \right\}$$

on a alors :

$$\left[ K^e \right] = \left[ \int_V \left[ B \right]^T \cdot \left[ D \right] \cdot \left[ B \right] dv \right] \quad (\text{VI-8})$$

$\left[ K^e \right]$  est appelée Matrice de rigidité ou des raideurs

pour le cas particulier de la flexion des plaques, travail total effectué par les moments et les torsions internes pour un déplacement virtuel de l'élément, est obtenu en intégrant, le produit de ces moments et ces torsions ainsi que leur courbures associées, sur la surface de l'élément. Ce qui fait qu'on peut écrire l'expression de  $\left[ K \right]$  comme suit.

$$\left[ K^e \right] = \int_0^a \int_0^b \left[ B \right]^T \cdot \left[ D \right] \cdot \left[ B \right] dx dy \quad (\text{VI-9})$$

#### Etape 7.

Lors de cette étape, on doit évaluer le vecteur forces nodales pour l'élément rectangulaire utilisé.

En appliquant le théorème de la conservation de l'énergie potentielle totale.

$$\delta ( W_{int}^* ) = \delta ( W_{ext}^* )$$

avec

$$\delta ( W_{ext}^* ) = \delta ( \left\{ a^{e*} \right\}^T \cdot \left\{ q^e \right\} )$$

le travail effectué par les forces nodales  $\{ q_e \}$  directement appliquée aux noeuds, lors du déplacement virtuel  $\delta\{ u^* \}$ .

$$\delta( W^{*int} ) = \delta \left[ \left\{ \varepsilon^* \right\}^T \cdot \sigma - \left\{ a^*(x,y) \right\}^T \cdot Q \right]$$

c'est le travail des forces internes.

$$\left( \left\{ a^{e*} \right\}^T \cdot \left\{ q^e \right\} \right) = \int_V \left[ \left\{ \varepsilon^* \right\}^T \cdot \sigma - \left\{ a^*(x,y) \right\}^T \cdot Q \right] \cdot dv$$

$$\left( \left\{ a_e^* \right\}^T \cdot \left\{ q^e \right\} \right) = \left\{ a_e^* \right\}^T \cdot \left[ \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dv \right] \cdot \left\{ a^e \right\} - \left\{ a_e^* \right\}^T \cdot \int_V N^T \cdot Q \cdot dv$$

$$\left\{ q^e \right\} = \left[ K^e \right] \cdot \left\{ a^e \right\} - \int_V N^T \cdot Q \cdot dv$$

$$\left\{ q^e \right\} = \left[ K^e \right] \cdot \left\{ a^e \right\} - \left\{ f^e \right\}$$

donc on aura finalement

$$\left\{ f^e \right\} = \int_V \left[ N \right]^T \cdot \left\{ Q \right\} \cdot dv$$

$\{ Q \}$  est le chargement cohérent.

Si on a un chargement surfacique réparti et agissant sur l'élément, suivant la direction du déplacement  $(w)$ , alors cette charge va engendrer aux noeuds, de l'élément considéré, les forces suivantes :

$$\left\{ f^e \right\} = \int_x \int_y \left[ N \right]^T \cdot \left\{ Q \right\} \cdot dx dy$$

avec

$$\left\{ Q \right\} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

on aura finalement après intégration :



$$[H] = \frac{1}{a \cdot b}$$

$6p^{-1}D_x + 6pD_1$	$4aD_1$	$-4bD_x$	$-6p^{-1}D_x$	0	$-2bD_x$	0	0	0	$-6pD_1$	$2aD_1$	0
$6pD_y + 6p^{-1}D_1$	$4aD_y$	$-4bD_1$	$-6p^{-1}D_1$	0	$-2bD_1$	0	0	0	$-6pD_y$	$2aD_y$	0
$-2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$	$2aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$2bD_{xy}$	0	$-2D_{xy}$	0	0	$2D_{xy}$	0	$-2aD_{xy}$
$-6p^{-1}D_x$	0	$2bD_x$	$6p^{-1}D_x + 6pD_1$	$4aD_1$	$4bD_x$	$-6pD_1$	$2aD_1$	0	0	0	0
$-6p^{-1}D_1$	0	$2bD_1$	$6pD_y + 6p^{-1}D_1$	$4aD_y$	$4bD_1$	$-6pD_y$	$2aD_y$	0	0	0	0
$-2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$	0	$2D_{xy}$	$2bD_{xy}$	$2aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	0	$-2aD_{xy}$	$2D_{xy}$	0	0
0	0	0	$-6pD_1$	$-2aD_1$	0	$6p^{-1}D_x + 6pD_1$	$-4aD_1$	$4bD_x$	$-6p^{-1}D_x$	0	$2bD_x$
0	0	0	$-6pD_y$	$-2aD_y$	0	$6pD_y + 6p^{-1}D_1$	$-4aD_y$	$4bD_1$	$-6p^{-1}D_1$	0	$2bD_1$
$-2D_{xy}$	0	0	$2D_{xy}$	0	$2aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	$2bD_{xy}$	$2aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$2bD_{xy}$	0
$-6pD_1$	$-2aD_1$	0	0	0	0	$-6p^{-1}D_x$	0	$-2bD_x$	$6p^{-1}D_x + 6pD_1$	$-4aD_1$	$-4bD_x$
$-6pD_y$	$-2aD_y$	0	0	0	0	$-6p^{-1}D_1$	0	$2bD_1$	$6pD_y + 6p^{-1}D_1$	$-4aD_y$	$-4bD_1$
$-2D_{xy}$	0	$2aD_{xy}$	$2D_{xy}$	0	0	$-2D_{xy}$	$2bD_{xy}$	0	$2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$	$-2aD_{xy}$

# PRESENTATION DU PROGRAMME " F L E X "

## POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES

### VII-1 L'ORGANISATION DU PROGRAMME " F L E X "

Après avoir donné un aperçu général sur l'organisation d'un programme par éléments finis et le programme " ELAST " en particulier au chapitre IV, on aborde maintenant la seconde partie de la programmation à savoir le programme " F L E X ".

Ce programme, qui permet de modéliser les plaques minces en flexion a une structure identique au programme " ELAST " de la première partie, il est donc constitué de sept sous-programmes qui ont en commun des blocs ' COMMON ' étiquetés permettant le passage des paramètres entre eux avec une très bonne rapidité lors de l'exécution .

Le programme " FLEX " fait l'analyse d'un élément dont les noeuds ont à présent trois degrés de liberté chacun. Ce qui nous amène à effectuer certaines modifications par rapport à " ELAST".

Dans "FLEX " la table des codes des noeuds ( LCOD ) est à présent à trois colonnes. La table des codes de chargement (ICOD) disparaît car l'élément n'est chargé que perpendiculairement à son plan.

Pour ce qui de la deuxième étape, qui consiste à évaluer les matrices de rigidité et vecteurs élémentaires en considérant le nombre de degrés de liberté adéquat, il faut noter que dans ce cas les degrés de liberté sont localisés par  $3i-2$  ,  $3i-1$  et  $3i$  (  $i$  étant le numéro du noeud considéré ), le reste est identique au sous-programme " FRLM " .

Les techniques d'assemblage, de la prise en compte des conditions aux limites ainsi que la résolution sont identiques à celles utilisées dans le programme " ELAST " car ce sont des techniques numériques générales qui s'adaptent à tous les problèmes, reste la question de l'efficacité et des résultats qu'elle peut nous donner. Pour le sous-programme " EFFOR " ( évaluation des efforts internes ) et le sous-programme " IMPRIM " ( pour l'impression des résultats ), ils ne sont pas beaucoup modifiés à part quelques petites adaptations concernant le nombre de degrés de liberté et les différentes matrices utilisées ( matrice d'élasticité [ D ] , matrice des contraintes [ H ] , ... etc) .

### VII-2 EXEMPLES D'APPLICATION

Pour différents maillages, on a traité l'exemple d'une plaque carrée soumise à deux types de chargement qui sont : la charge répartie et celle qui est ponctuelle agissant au centre de la plaque.

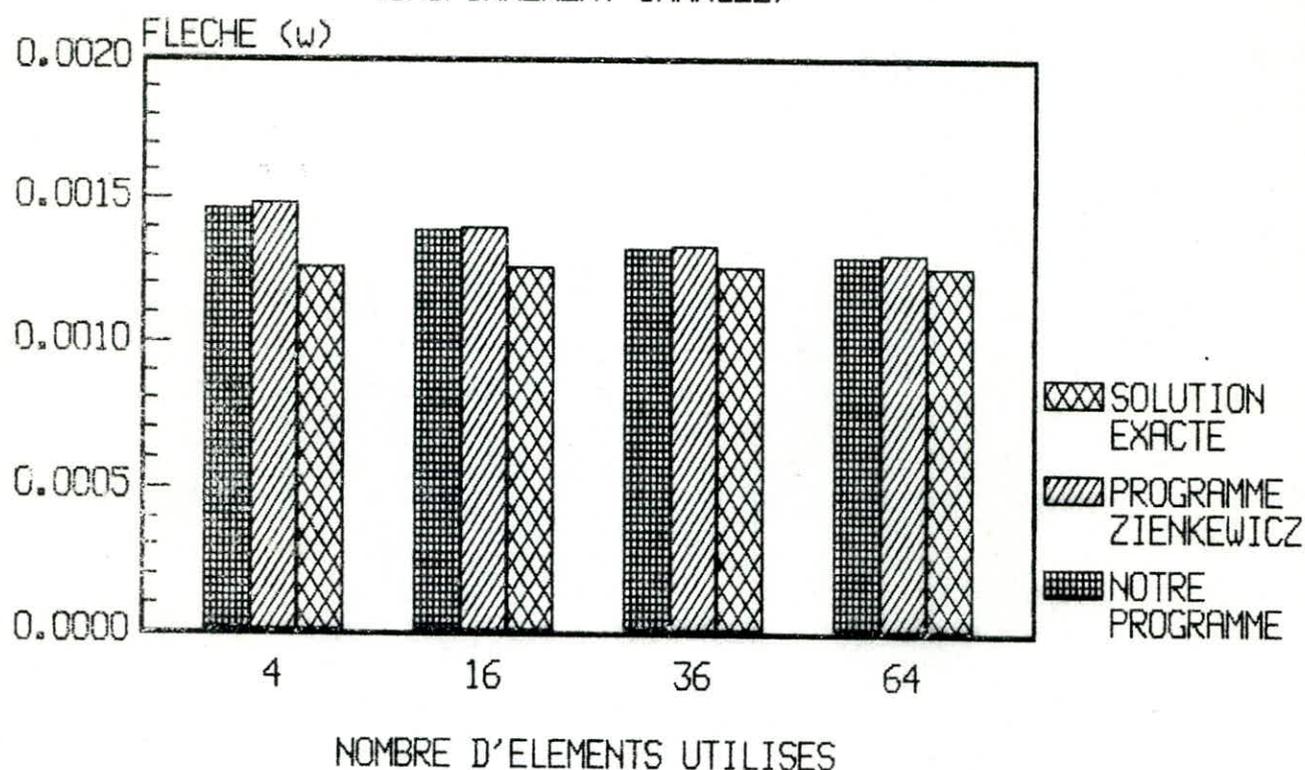
FLECHES CALCULEES AU CENTRE D'UNE PLAQUE CARREE  
ENCASTREE LE LONG DE SON POURTOUR.

MAILLAGE	NOMBRE TOTAL DE NOEUDS	CHARGE UNIFORME ( $\alpha$ )	CHARGE PONCTUELLE ( $\beta$ )
RESULTATS OBTENUS PAR LE PROGRAMME ' F L E X '			
2X2	9	0.001463	0.005852
4X2	15	0.001423	0.005918
4X4	25	0.001388	0.006064
6X4	35	0.001355	0.005958
6X6	49	0.001325	0.005872
8X8	81	0.001297	0.005801
SOLUTION EXACTE		0.001260	0.005600
RESULTATS OBTENUS PAR Mr ZIENKIEWICZ			
2X2	9	0.001480	0.005919
4X4	25	0.001430	0.006134
8X8	81	0.001304	0.005710

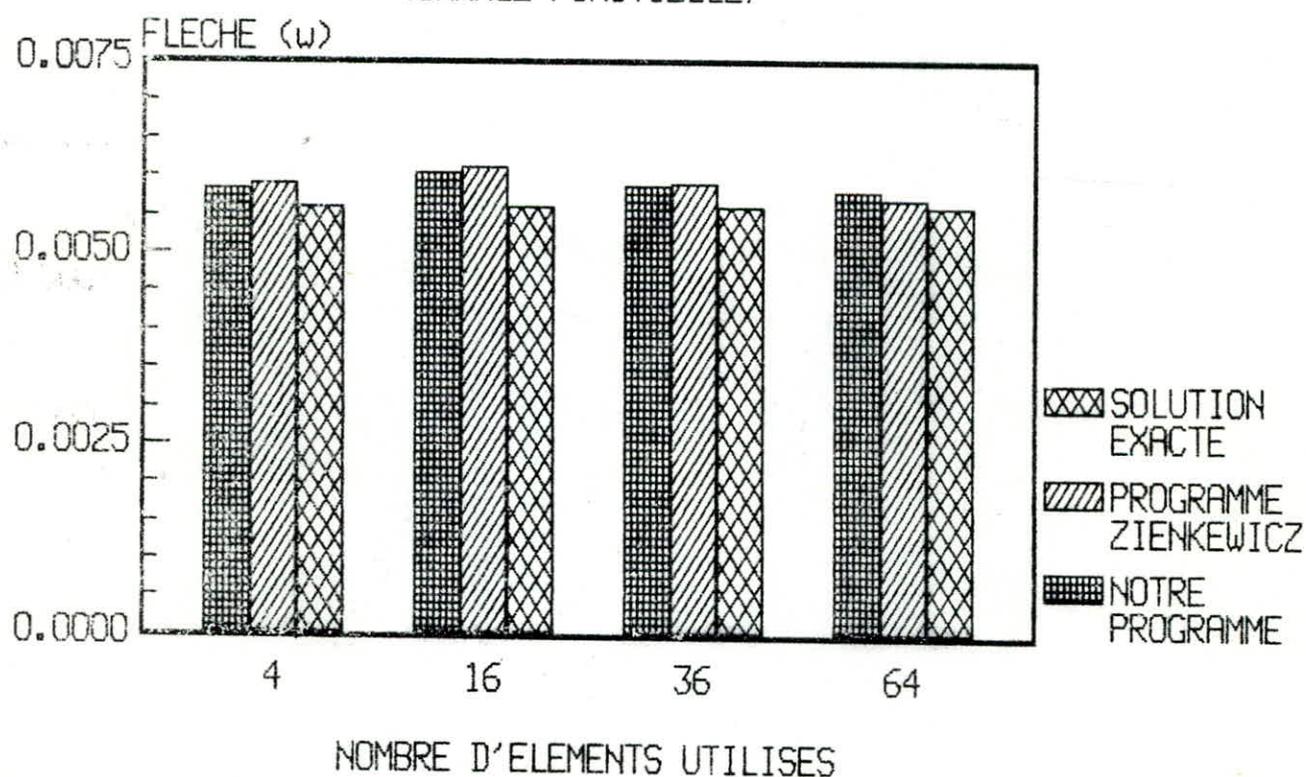
$$(w)_{\max} = \alpha \cdot q \frac{a^4}{D} \quad \text{Pour une charge répartie uniforme ( q )}$$

$$(w)_{\max} = \beta \cdot q \frac{a^2}{D} \quad \text{Pour une charge ponctuelle ( P ).}$$

COMPARAISON DES FLECHES POUR UNE PLAQUE  
ENCASTREE AUX BORDS  
(UNIFORMEMENT CHARGEE)



COMPARAISON DES FLECHES POUR UNE PLAQUE  
ENCASTREE AUX BORDS  
(CHARGE PONCTUELLE)



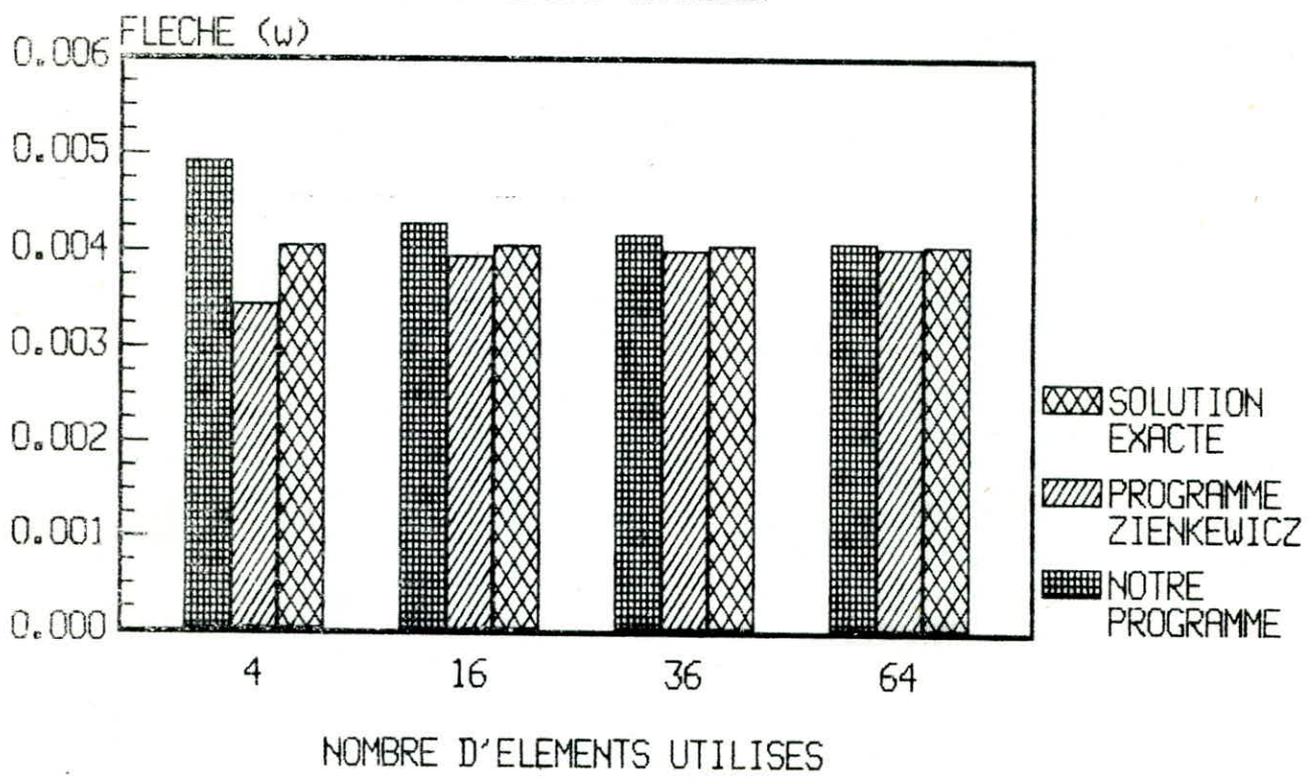
FLECHES CALCULEES AU CENTRE D'UNE PLAQUE CARREE  
SIMPLEMENT APUYEE LE LONG DE SON POURTOUR.

MAILLAGE	NOMBRE TOTAL DE NOEUDS	CHARGE UNIFORME ( $\alpha$ )	CHARGE PONCTUELLE ( $\beta$ )
RESULTATS OBTENUS PAR LE PROGRAMME " F L E X "			
2X2	9	0.004926	0.013460
4X2	15	0.004615	0.012720
4X4	25	0.004297	0.012240
6X4	35	0.004232	0.012070
6X6	49	0.004167	0.011924
8X8	81	0.004092	0.011819
SOULUTION EXACTE		0.004062	0.011600
RESULTATS OBTENUS PAR Mr ZIENKIEWICZ			
2X2	9	0.003446	0.013784
4X4	25	0.003939	0.012327
8X8	81	0.004033	0.011829

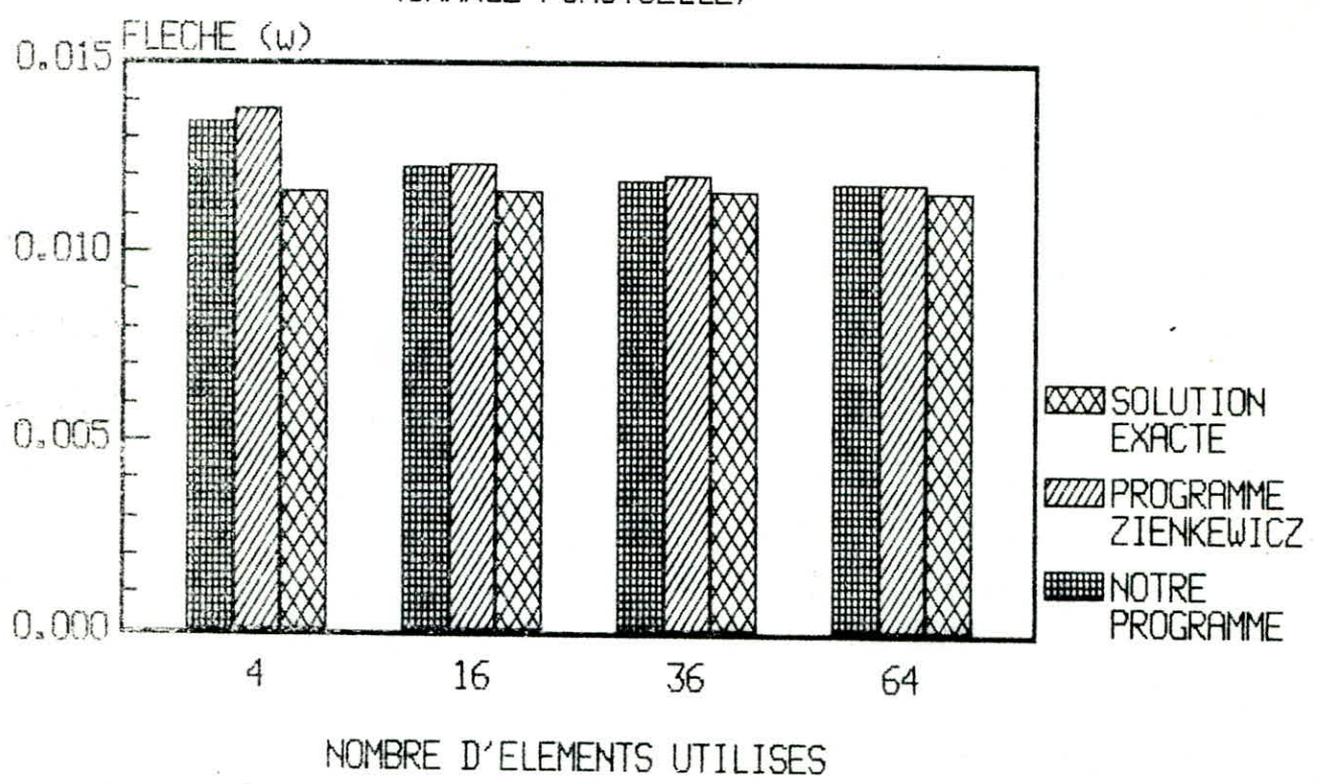
$$(w)_{\max} = \alpha \cdot q \frac{a^4}{D} \quad \text{Pour une charge repartie uniforme ( q )}$$

$$(w)_{\max} = \beta \cdot q \frac{a^2}{D} \quad \text{Pour une charge ponctuelle ( P ).}$$

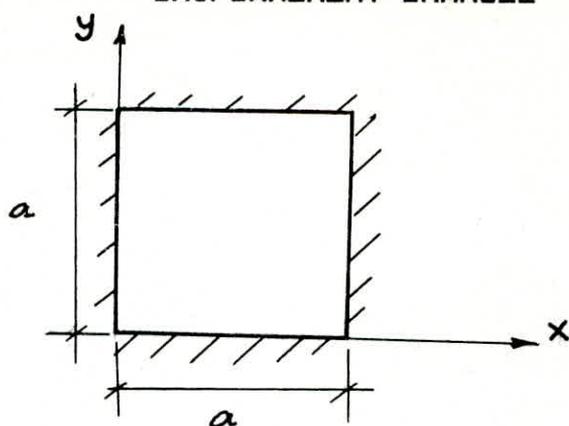
COMPARAISON DES FLECHES POUR UNE PLAQUE  
SIMPLEMENT APPUYEE AUX BORDS  
(UNIFORMEMENT CHARGEE)



COMPARAISON DES FLECHES POUR UNE PLAQUE  
SIMPLEMENT APPUYEE AUX BORDS  
(CHARGE PONCTUELLE)



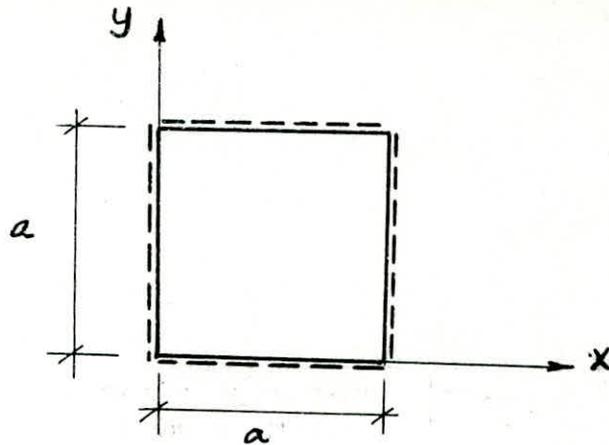
PLAQUE CARREE ENCASTREE LE LONG DE SON POUTOUR  
UNIFORMEMENT CHARGEE



MAILLAGE	DEPLACEMENT LATERAL ( $w_A$ )	MOMENT DE FLEXION ( $M_x = M_y$ ) Au point ( A )	MOMENT DE FLEXION AU POINT B et C ( $M_{yB}$ ) = ( $M_{xC}$ )
2X2	0.001463	0.040379	- 0.035112
4X4	0.001388	0.024351	- 0.047350
6X6	0.001325	0.023970	- 0.049403
8X8	0.001297	0.023889	- 0.049976
SOL. EXT	0.001260	0.02310	- 0.0513
	$q / a^4 \cdot D$	$q \cdot a^2$	$q \cdot a^2$

$$( D ) = \frac{E \cdot h^3}{12 ( 1 - \nu )}$$

PLAQUE CARREE SIMPLEMENT APPUYEE LE LONG DE SON POUTOUR  
UNIFORMEMENT CHARGEE



MAILLAGE	DEPLACEMENT LATERAL ( w max ) Au point ( A )	MOMENT DE FLEXION MAXIMUM ( AU point A )
2 x 2	0.004926	0.057556
4 x 2	0.004615	0.054697
4 x 4	0.004297	0.049796
6 x 4	0.004232	0.048687
6 x 6	0.004167	0.048592
8 x 8	0.004092	0.048538
SOL. EXCT	0.004062	0.04790
	$q / a^4 . D$	$q . a^2$

$$( D ) = \frac{E . h^3}{12 ( 1 - \nu )}$$

## VII-3 CONCLUSION ( CONCERNANT LA DEUXIEME PARTIE )

L'élément utilisé, pour l'analyse des plaques en flexion, bien que sa fonction de forme soit non conforme, nous a donné des résultats satisfaisants et qui concordent avec les valeurs " exactes " données par Mr. TIMOSHENKO en utilisant la théorie des plaques minces en flexion et qui consiste à donner la solution sous forme d'une fonction développée en série.

Plusieurs auteurs, notamment Mr. ZIENKIEWICZ, ont affirmé qu'après avoir étudié les différentes formulations des éléments conformes et non conformes, ils ont trouvé que pour les éléments non conformes on pouvait obtenir des résultats meilleurs que ceux obtenus par les éléments conformes. Ceci est valable particulièrement pour l'élément triangulaire.

Donc on peut dire d'après les résultats obtenus que l'élément rectangulaire non conforme se prête bien à l'analyse des plaques minces où la continuité  $C_1$  est requise.

Cet élément est très important pour l'ingénieur car il permet de traiter non seulement le problème de la flexion des plaques mais également applicable aux problèmes où la fonctionnelle comprend des dérivées secondes ( citons l'exemple des problèmes d'écoulement des fluides visqueux ).

Toute fois, lors de l'étude des plaques en flexion, on a négligé l'effet de l'effort tranchant ce qui n'est pas toujours sans conséquences car pour les plaques épaisses cet effet devient important et on doit alors le prendre en considération.

On suggère alors de reformuler l'élément de plaque en flexion en prenant en compte l'effort tranchant .

# **PARTIE 3**

## **SUPERPOSITION DES DEUX COMPORTEMENTS**

## ETUDE DES PLAQUES PLIEES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### VIII-1 INTRODUCTION

Une plaque pliée est considérée comme étant une coque assemblée par plusieurs éléments plans. De telle structures sont fréquemment utilisées dans la pratique ( Couvertures des grandes surfaces, poutres en caisson des ponts ... ect.), ainsi que pour modéliser les coques à courbures continues (tours de refroidissement, les voûtes en berceau, les barrages cylindriques, les réservoirs...etc). Les plaques pliées permettent donc de modéliser les coques courbes, en supposant que le comportement d'une surface dont la courbure est continue, peut être fidèlement représentée par le comportement d'une surface composée de plusieurs éléments plans, la précision est alors de plus en plus accrue que le nombre d'éléments plans augmente ( affinité du maillage ), on peut à ce moment obtenir des résultats satisfaisants.

Bien que de nombreux spécialistes des coques diront que la comparaison, des solutions obtenues en modélisant la coque avec et sans facettes planes, donne lieu à des écarts considérables dans la distribution des moments de flexion. On constate que pour les éléments simples l'erreur de discrétisation est du même ordre dans les deux cas.

### VIII-2 LA METHODE DE CALCUL

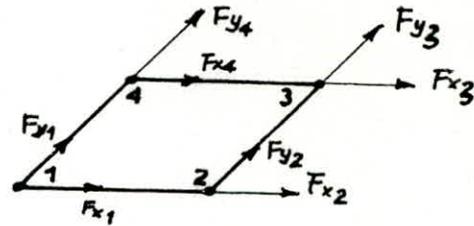
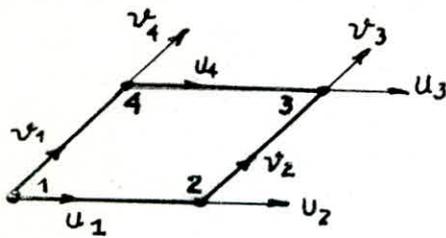
Les éléments d'une coque plane sont soumis à la fois à des efforts de flexion ( chargement transversal ) et des efforts plans, ce qui donne à la fois une action dans le plan (comportement membranaire ) et une action de flexion ( comportement flexionnel ) et si les déformations sont faibles, les deux actions seront complètement indépendantes l'une de l'autre. Onge suppose donc que l'action de flexion et les rotations sont rapportées uniquement aux chargements perpendiculaires au plan de la plaque et que les déplacements plans sont rapportés aux systèmes de forces plans.

En respectant ces hypothèses, on peut alors faire l'étude des plaques pliées en superposant les deux comportement à savoir :

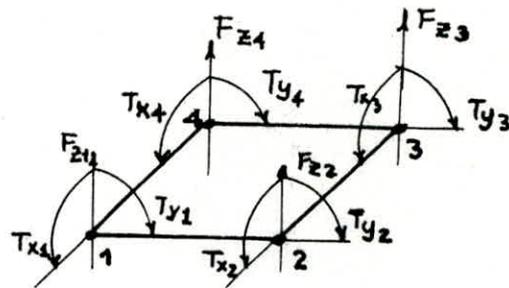
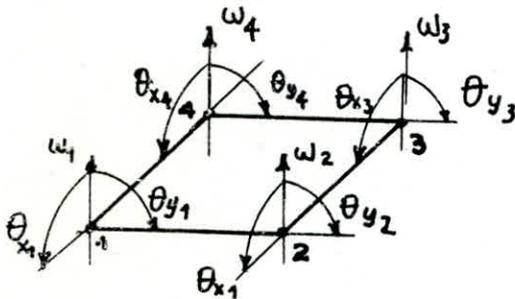
\* Le comportement membranaire (en élasticité plane) qui est un problème de continuité  $C_0$ .

\* Le comportement flexionnel des plaques minces qui nécessite une continuité  $C_1$ .

Le premier comportement a été étudié au chapitre III tandis que le deuxième comportement a fait l'objet du chapitre VI



Déplacements et forces "plans"



Déplacements et forces de "flexion"

### VIII-3 ELABORATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE.

Considérons d'abord, les effets " plans " (en contraintes planes), nous savons que l'état de déformation est défini par le champ de déplacements uniforme dont les composantes sont les deux translations (  $u$  et  $v$  ). La minimisation de l'énergie potentielle totale du système nous a conduit aux matrices de rigidité reliant les efforts, aux noeuds, aux paramètres de déplacements nodaux. Donc, pour le comportement plan on a :

$$\left\{ F_e^p \right\} = \left[ K_e^p \right] \cdot \left\{ a_e^p \right\} \quad (\text{VIII-1})$$

(  $p$  ) : indique le comportement dans le Plan.

$$\left\{ F_e^p \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \{f_1\}^p \\ \{f_2\}^p \\ \{f_3\}^p \\ \{f_4\}^p \end{array} \right\}$$

$$\text{avec } \{f_i\}^p = \left\{ \begin{array}{l} f_{x_i} \\ f_{y_i} \end{array} \right\}$$

et le vecteur déplacements est donné par :

$$\left\{ a_e^p \right\} = \begin{Bmatrix} \{a_1\}^p \\ \{a_2\}^p \\ \{a_3\}^p \\ \{a_4\}^p \end{Bmatrix}$$

Avec  $\left\{ a_i \right\}^p = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$

on peut écrire alors pour un noeud (i)

$$\left\{ f_i^p \right\} = \left[ K_{ii}^p \right] \cdot \left\{ a_i^p \right\}$$

$\left[ K_{ii}^p \right]$  est la sous-matrice qui relie les forces du noeud (i) aux déplacements de ce même noeud

Pour tout l'élément on peut écrire l'équation (VIII-1) sous la forme matricielle suivante.

$K_{11}^p$	$K_{12}^p$	$K_{13}^p$	$K_{14}^p$
$K_{21}^p$	$K_{22}^p$	$K_{23}^p$	$K_{24}^p$
$K_{31}^p$	$K_{32}^p$	$K_{33}^p$	$K_{34}^p$
$K_{41}^p$	$K_{42}^p$	$K_{43}^p$	$K_{44}^p$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix}$$

$$\left[ K_e^p \right] \left\{ a_e^p \right\} = \left\{ F_e^p \right\}$$

De même quand on considère le comportement flexionnel on aboutit à une relation matricielle analogue à la précédente et qui est :

$K_{11}^f$	$K_{12}^f$	$K_{13}^f$	$K_{14}^f$
$K_{21}^f$	$K_{22}^f$	$K_{23}^f$	$K_{24}^f$
$K_{31}^f$	$K_{32}^f$	$K_{33}^f$	$K_{34}^f$
$K_{41}^f$	$K_{42}^f$	$K_{43}^f$	$K_{44}^f$

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ T_{x1} \\ T_{y1} \\ F_{z2} \\ T_{x2} \\ T_{y2} \\ F_{z3} \\ T_{x3} \\ T_{y3} \\ F_{z4} \end{Bmatrix}$$

$$\left[ K_e^f \right] \left\{ a_e^f \right\} = \left\{ F_e^f \right\}$$

(f) indique le comportement flexionnel.

Avant d'effectuer la superposition des deux comportements, on doit faire deux remarques importantes :

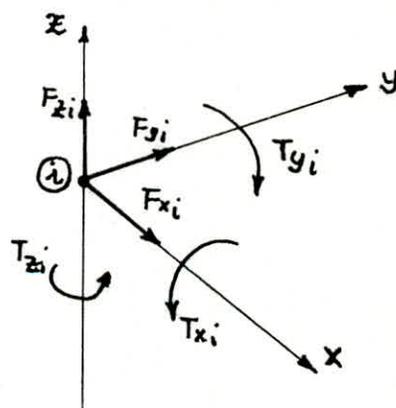
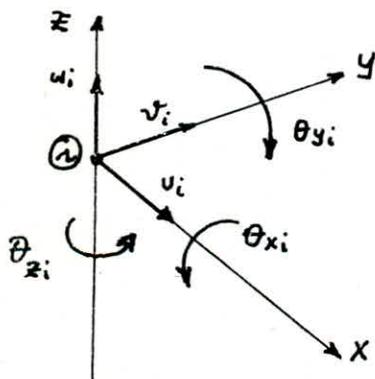
1. Le principe d'obtention d'un élément de coque plane, par superposition d'un élément de membrane et d'un élément de plaque en flexion, suppose que les deux actions soient parfaitement découplées, c'est à dire que les déplacements correspondant aux efforts " plans " n'affectent pas ceux dus à la flexion, et vice versa. Ceci est valable pour les petites déformations.

2. Outre les deux déplacements dans le plan ( $u, v$ ) et les trois degrés de liberté dus à la flexion ( $w, \theta_x$  et  $\theta_y$ ), l'élément peut être sujet à des rotations dans son plan ( $\theta_z$ ) autour de l'axe Z. Bien que la plaque soit très rigide dans son plan de telle sorte que ces rotations soient très petites et donc négligeable devant les autres degrés de liberté, il est commode, pour des raisons qui apparaîtront plus loin ( au niveau de l'assemblage ), de prendre en compte cette rotation dès à présent en l'associant à un couple fictif ( $T_z$ ).

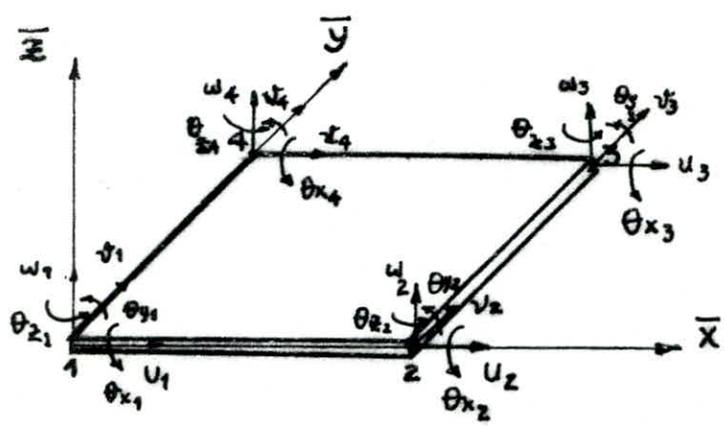
Pour inclure cette rotation ( $\theta_z$ ), qu'on considère négligeable et n'affectant pas les autres termes dans la matrice de rigidité de l'élément, on peut simplement lui faire correspondre des zéros dans cette matrice, c'est à dire poser la pseudo-équation suivante :

$$(T_z)_i = 0 \cdot (\theta_z)_i$$

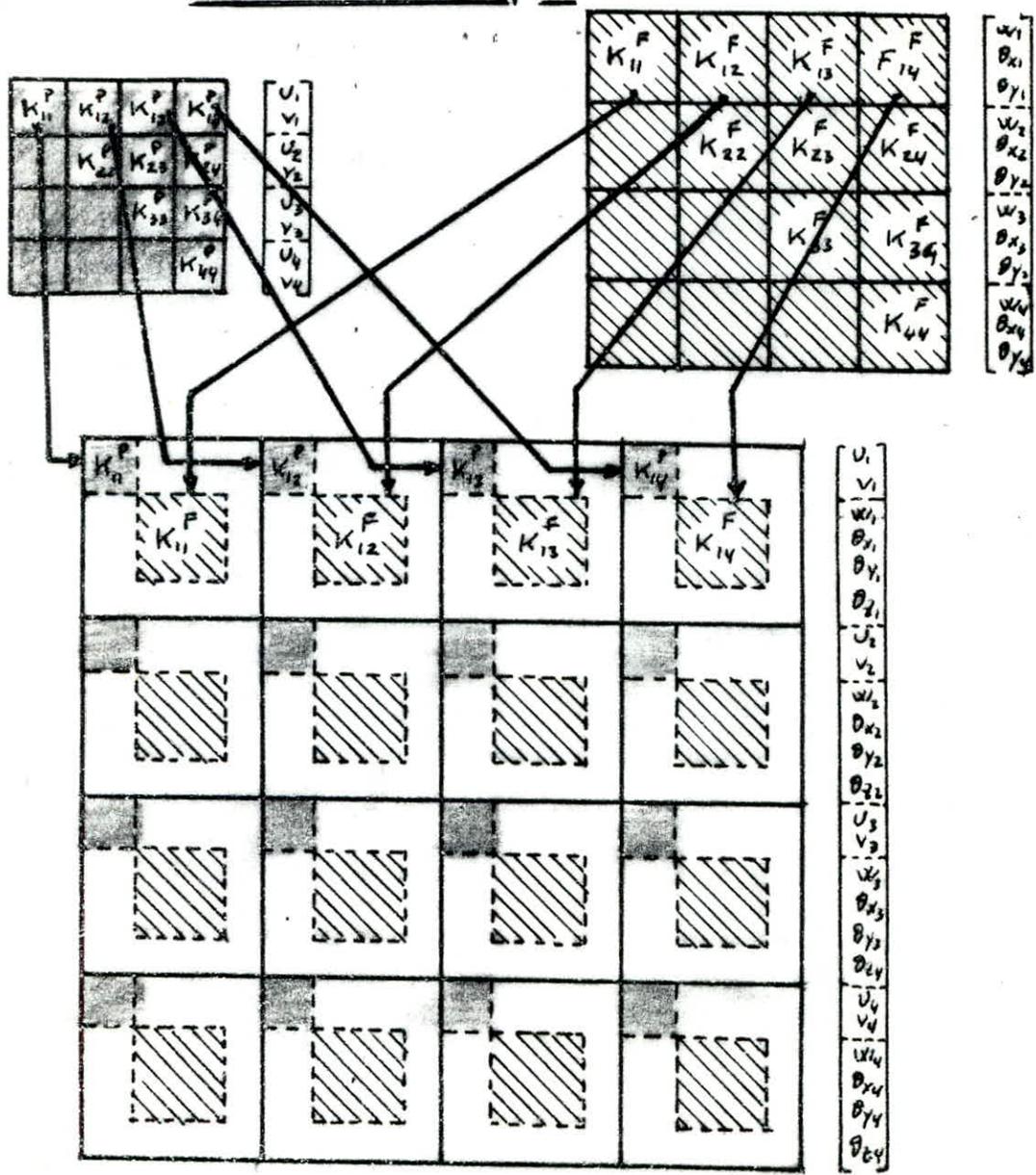
donc on obtient finalement en chaque noeud les vecteurs déplacements et forces suivants



$$\{ a_i \} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{bmatrix} ; \quad \{ F_i \} = \begin{bmatrix} f_{x_i} \\ f_{y_i} \\ f_{z_i} \\ T_{x_i} \\ T_{y_i} \\ T_{z_i} \end{bmatrix}$$



Construction de la matrice de rigidité de l'élément Complet.



Pour le noeud (i) on a :

$$\{ F_i \} = \begin{bmatrix} K_{ii}^p & 0 & 0 \\ 0 & K_{ii}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{ a_i^p \} \\ \{ a_i^f \} \\ \theta z_i \end{bmatrix} \quad (\text{VIII-2})$$

REMARQUE :

Les zéros dans l'équation (VIII-2), exprime la " non-interaction " entre les deux actions ( MEMBRANAIRE et FLEXIONNELLE ).

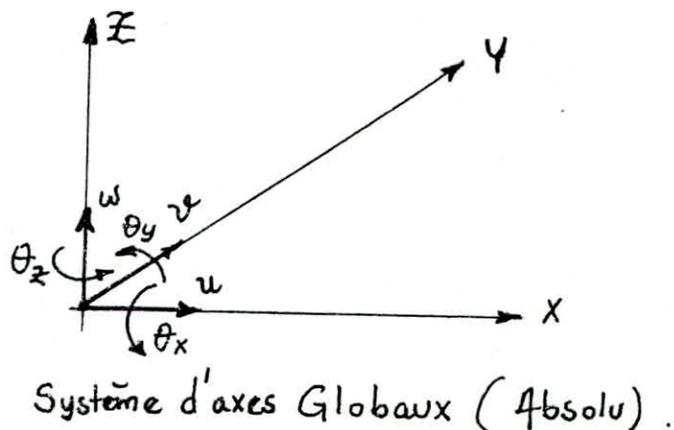
On peut maintenant généraliser, ces équations afin d'obtenir la matrice de rigidité [ K ] de l'élément de plaque pliée, en procédant comme montré sur la figure (VIII-4)

On remarque maintenant que la matrice de rigidité, d'un élément de plaque pliée est carrée d'ordre 24, dont les termes ont été calculés au préalable dans les chapitres (III et VI).

#### VIII-4 PASSAGE AUX COORDONNEES GLOBALES ET ASSEMBLAGE DES ELEMENTS

Dans les problèmes d'élasticité plane et de flexion des plaques, tous les éléments étaient coplanaires. Cependant, pour les plaques pliées et les coques " planes ", les éléments adjacents sont inclinés les uns par rapport aux autres. Par conséquent avant d'effectuer l'assemblage des éléments et de former ainsi la matrice des raideurs globale, on doit exprimer les matrices et vecteurs élémentaires dans le système de coordonnées global (ou absolu) noté ( X , Y et Z ).

Ce changement de repère a un intérêt important, car les déplacements qu'on calculera par la suite seront rapportés au système global, c'est à dire qu'il n'auront une signification QUE dans ce système de coordonnées





Les raisons d'inclure le sixième degré de liberté ( $\theta_z$ ), dans les équations d'équilibre ( dans le repère local), sont maintenant apparentes. Car ceci permet d'avoir une matrice  $[ T ]$  symétrique, carrée et qui peut s'écrire comme dans l'équation (VIII-3). Ce qui va rendre les opérations d'assemblage plus faciles.

Sachant que les inclinaisons entre le repère local et le repère global sont exactement les mêmes au noeud (i) qu'aux autres noeuds de l'élément, on peut écrire :

$$\left\{ \bar{a}^e \right\} = [ R ] \cdot \left\{ a^e \right\}$$

$$\left\{ \bar{F}^e \right\} = [ R ] \cdot \left\{ F^e \right\}$$

$$\longrightarrow \left\{ F^e \right\} = [ R ]^{-1} \cdot \left\{ \bar{F}^e \right\}$$

En vertu des règles de transformations orthogonales on a

$$[ R ]^{-1} = [ R ]^T$$

où  $[ R ]$  est la matrice symétrique, carrée d'ordre 24 et qui s'écrit comme suit :

$$[ R ] = \begin{bmatrix} [ T ] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [ T ] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [ T ] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [ T ] \end{bmatrix}$$

On exprime maintenant la matrice de rigidité d'un élément dans le repère global.

$$\text{on a} \quad \left\{ \bar{F}^e \right\} = [ \bar{K}^e ] \cdot \left\{ \bar{a}^e \right\}$$

$$\text{soit} \quad [ R ] \cdot \left\{ F^e \right\} = [ \bar{K}^e ] [ R ] \cdot \left\{ a^e \right\}$$

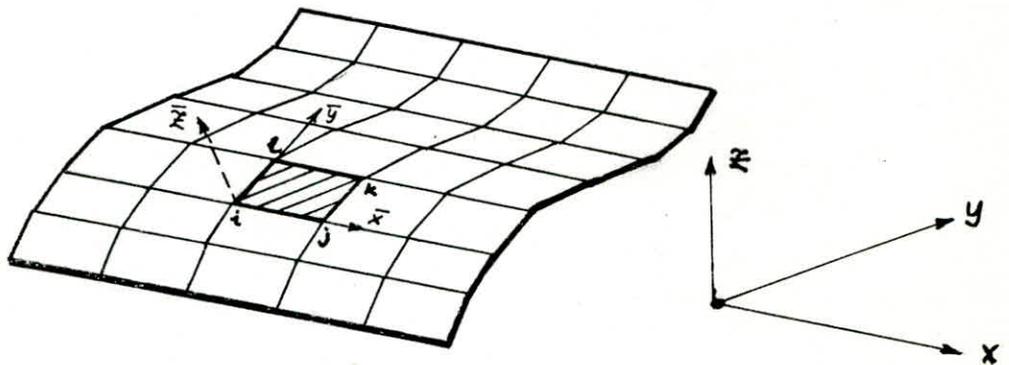
D'où

$$[ K^e ] = [ R ]^T [ \bar{K}^e ] [ R ]$$

Une fois les matrices de rigidité de tous les éléments sont exprimées dans le repère global, l'assemblage et la prise en compte des conditions aux limites ainsi que la résolution du système d'équations final, suivront les mêmes démarches standards. On obtient alors les déplacements exprimés dans le repère absolu, ce qui fait qu'on doit repasser au repère local afin de calculer les contraintes en utilisant pour cela la matrice de contrainte préalablement déterminée pour chaque comportement.

VIII-5 DETERMINATION DES COSINUS DIRECTEURS DANS LE CAS D'UN ELEMENT RECTANGULAIRE A QUATRE NOEUDS.

L'étude des coques en utilisant les éléments plans est caractéristiques des surfaces cylindriques ou en caisson. de ce fait, il est commode de prendre l'un des cotés de l'élément et l'axe  $\bar{x}$  correspondant, parallèles à l'axe global X .

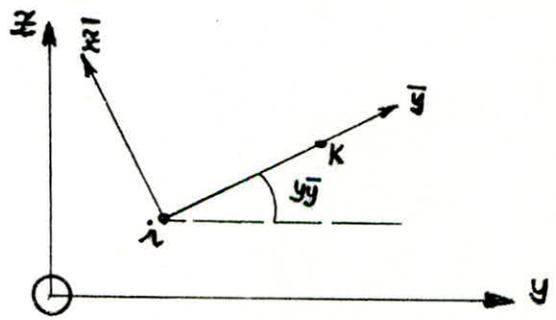


Coques cylindrique par assemblage d'éléments rectangulaires.

Pour l'élément (ijkl) on a

$$\begin{aligned} \lambda_{\bar{x}x} &= 1 \\ \lambda_{\bar{x}y} &= 0 \\ \lambda_{\bar{x}z} &= 0 \end{aligned}$$

Cosinus directeurs de l'axe  
(  $\bar{x}$  )



Pour les cosinus directeurs de l'axe Y, on les exprime en fonction des coordonnées des noeuds.

$$\lambda_{yx}^- = 0$$

$$\lambda_{yy}^- = \frac{y_k - y_i}{\sqrt{(z_k - z_i)^2 + (y_k - y_i)^2}}$$

$$\lambda_{yz}^- = \frac{z_k - z_i}{\sqrt{(z_k - z_i)^2 + (y_k - y_i)^2}}$$

Pour l'axe  $\bar{z}$  on aura :

$$\lambda_{zx}^z = 0$$

$$\lambda_{zy}^z = - \frac{z_k - z_i}{\sqrt{(z_k - z_i)^2 + (y_k - y_i)^2}}$$

$$\lambda_{zz}^z = \frac{y_k - y_i}{\sqrt{(z_k - z_i)^2 + (y_k - y_i)^2}}$$

On remarque que les règles des transformations orthogonales sont toujours satisfaites :

$$\lambda_{xx}^z \lambda_{xy}^z + \lambda_{xz}^z = 1$$

$$\lambda_{yx}^z \lambda_{yy}^z + \lambda_{yz}^z = 1$$

$$\lambda_{zx}^z \lambda_{zy}^z + \lambda_{zz}^z = 1$$

$$\lambda_{xx}^- \lambda_{xy}^- + \lambda_{yx}^- \lambda_{yy}^- + \lambda_{zx}^- \lambda_{zy}^- = 0$$

$$\lambda_{xx}^- \lambda_{xz}^- + \lambda_{yx}^- \lambda_{yz}^- + \lambda_{zx}^- \lambda_{zz}^- = 0$$

$$\lambda_{xy}^- \lambda_{xz}^- + \lambda_{yy}^- \lambda_{yz}^- + \lambda_{zy}^- \lambda_{zz}^- = 0$$

Le fait, d'exprimer les cosinus directeurs en fonction des coordonnées des noeuds, a plusieurs avantages dont on peut citer :

1. On n'est plus contraint à déterminer les angles que font les axes locaux par rapport aux axes globaux.
2. Le fait que ces angles sont définis dans l'espace, on constate que ce n'est pas toujours évident de les déterminer facilement pour chaque élément ( Ça nécessite plusieurs coupes et sections dans les figures représentant la structure à analyser ).

#### VIII-6 PROBLEMES PRATIQUE DE MODELISATION

Jusqu'ici, on a supposé que tous les éléments, pris à travers une section, d'une structure en plaques pliées, étaient inclinés entre eux, cela est valable que si on se contente d'étudier une coque courbe comme une plaque pliées équivalente. Cependant la formulation que nous venons de décrire conduit à des difficultés dans la modélisation si tous les éléments qui concourent en un même noeud sont COPLANAIRES, ceci est en effet causé par l'absence de rigidité correspondant à la rotation ( $\theta_z$ ), qui nous donnera une singularité du type ( $0 \equiv 0$  !).

Cette équation ( $0 \equiv 0$ ), ne présente pas de difficultés particulières avant l'assemblage ( bien que pour certains ordinateurs elle entraîne un message d'erreur ). Néanmoins dans le cas où les directions des axes globaux diffèrent de celles des axes locaux, on aboutit après le changement de repère à six équations qui sont linéairement dépendantes et donc à un système où la matrice est singulière.

Ce type de singularité disparaît quand les éléments adjacents ne sont pas coplanaires ou quand les éléments de plaques sont bordés par des poutres-raideurs.

Les solutions envisageables pour surmonter cette difficulté sont les suivantes :

1. Supprimer les degrés de liberté ( $\theta_z$ ) correspondant à ces singularités et *EUX SEULS* .
2. Introduire des rigidités fictives faibles correspondant à ces degrés de liberté .
3. Utiliser des éléments de poutres fictifs en flexion sur les bords présentant des rigidités faibles.
4. Définir des relations, de contraintes, linéaires entre les rotations ( $\theta_z$ ) d'une part et les deux translations dans le plan d'autre part, telle que :

$$\theta_z = \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

## VIII-7 INCONVENIENTS DES SOLUTIONS ENVISAGEABLES.

Dans ce paragraphe, nous allons mentionner les inconvénients des solutions qui ont été proposées afin de surmonter la singularité causée par le sixième degré de liberté.

La première solution proposée et qui consiste à supprimer les rotations ( $\theta_z$ ) correspondant aux singularités lors de l'écriture des équations d'équilibre en coordonnées locales. Cette solution présente des difficultés au niveau de la programmation, car il faut déterminer au préalable les points où les éléments sont coplanaires, en faisant un test sur chacun des bords de l'élément en question.

Ceci outre le fait que, dans le cas d'un élément dont les axes locaux sont :

$$\bar{X} // X \quad \text{et} \quad \bar{Y} \perp Y$$

c'est à dire des éléments qui sont contenus dans le plan XZ (éléments verticaux). Dans ce cas on a toute une ligne de la matrice de rotation ( $T$ ) qui devient nulle et donc on retombe sur une seconde singularité mais qui sera alors au niveau des équations globales.

Certains auteurs proposent des astuces afin de contourner cette difficulté, on peut citer celle de la référence [3] et qui consiste à permuter les axes locaux pour ces éléments et eux seuls.

$$\bar{Y} \quad \text{et} \quad \bar{Z} \quad (\text{par exemple})$$

La seconde solution, dans laquelle on doit introduire une rigidité fictive faible ( $K\theta_z$ ) correspondant à ces degrés de liberté. Bien que cette solution soit plus apte à être utilisée, à cause de sa formulation et programmation faciles, on doit noter qu'elle nécessite un grand espace mémoire car lors de l'assemblage, on considère que chaque noeud possède six degrés de liberté, soit 24 pour tout l'élément. Ce qui nous limitera à traiter que des structures qui ne comportent pas beaucoup d'éléments, et c'est à ce niveau qu'apparaît l'importance du stockage en matrice bande symétrique.

La troisième solution envisagée présente quant à elle des problèmes pour la modélisation de l'interaction plaque-poutre. Dans le cas de plaques ou coques raidies (figure VIII-8).

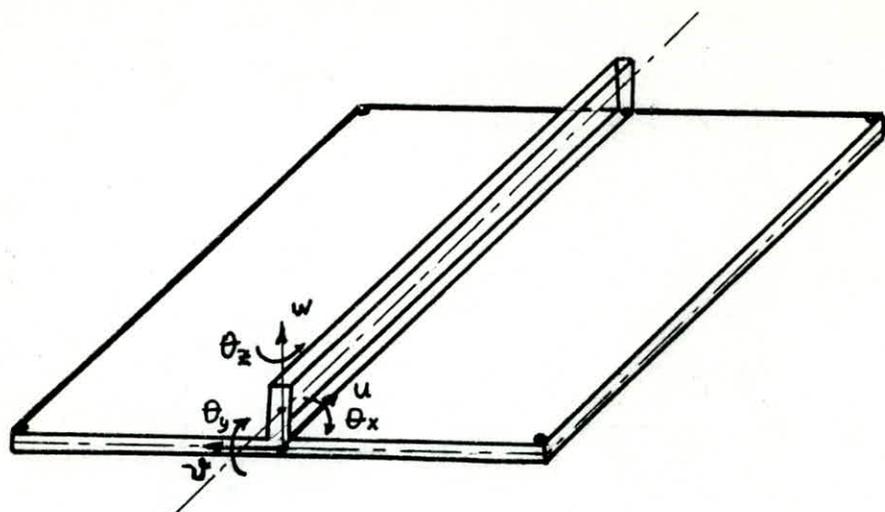


fig (VIII-8) Plaques Ou Coques Raidies.

On remarque dans ce cas, que la compatibilité des déplacements n'est pas toujours facile à assurer, par exemple entre la flèche ( $v$ ) de la poutre et le déplacement de membrane correspondant, de la plaque, en plus dans le cas de suppression des rotations ( $\theta_z$ ) de la plaque il n'y a aucune transmission du moment ( $T_z$ ) de la poutre à la plaque. Enfin il est également nécessaire de prendre en compte l'excentrement de la fibre neutre de la poutre par rapport à la surface moyenne de la plaque.

## PRESENTATION DU PROGRAMME 'SUPER'

## IX-1 L'ORGANISATION DU PROGRAMME 'SUPER'

La dernière partie de notre travail, consiste à la superposition des deux comportements étudiés précédemment. Le programme 'SUPER' (SUPERposition) permet de modéliser les plaques minces non planes (plaques pliées) et les coques cylindriques, en utilisant le même élément que pour les deux comportements précédent, à savoir l'élément rectangulaire à quatre noeuds, mais cette fois-ci en considérant six degrés de liberté pour chacun des noeuds.

La structure du programme 'SUPER' est donc identique à celle des deux programmes élaborés au cours de la première et deuxième partie. Seulement qu'on doit mentionner les modifications qui s'imposent.

A cause du nombre de degrés de liberté élevé (24), que possède l'élément utilisé et la nécessité d'effectuer un changement de repère, les tables et vecteurs dans ce programme sont, à présent, très importants en nombre et dimensions, comme c'est le cas de la table (LCOD) qui devient à six colonnes, ou la table des coordonnées (COORD) qui aura trois colonnes, car on doit définir le noeud dans l'espace (à trois dimensions). Ceci outre le fait qu'on a besoin de la matrice de rotation ROT(24,24) qui permet d'effectuer le changement de repère. Dans le programme 'SUPER', cette matrice est donnée, en premier lieu, comme une matrice d'ordre six puis les autres blocs seront régénérés pour être assemblés en une matrice carrée d'ordre 24.

Pour les techniques d'assemblage, de la prise en compte des conditions aux limites ainsi que la résolution du système d'équations linéaires, sont identiques à celles adoptées dans les programmes 'ELAST' et 'FLEX' seulement que dans le sous-programme 'ASSEMB' on doit ajouter le module qui permet effectuer les opérations concernant le changement de repère (multiplication, transposition ... etc)

Le programme 'SUPER' permet d'utiliser un nombre éléments relativement élevé, vu que le stockage de la matrice de rigidité globale s'effectue par bande rectangulaire, car si on stocke cette matrice sous sa forme carrée, on sera contraint à ne modéliser que les structures ayant un nombre de noeuds ne dépassant pas (20) noeuds, du moment que le VAX 11/750 ne peut adresser les tableaux dont les dimensions dépassent (120 x 120)

## IX-2 EXEMPLES D'APPLICATIONS

## EXEMPLE 1.

Dans cet exemple on va modéliser une voûte en berceau ( toitures cylindriques ) puis comparer les résultats avec ceux obtenus par Mr. ZIENKIEWICZ qui a utilisé des éléments triangulaires a déformations constantes (CST) et l'élément de flexion à neuf degrés de liberté , ceci d'une part, d'autre part on comparera ces résultats avec ceux donnés par la solution analytique obtenue par la théorie des coques.

$$t = 76 \text{ mm}$$

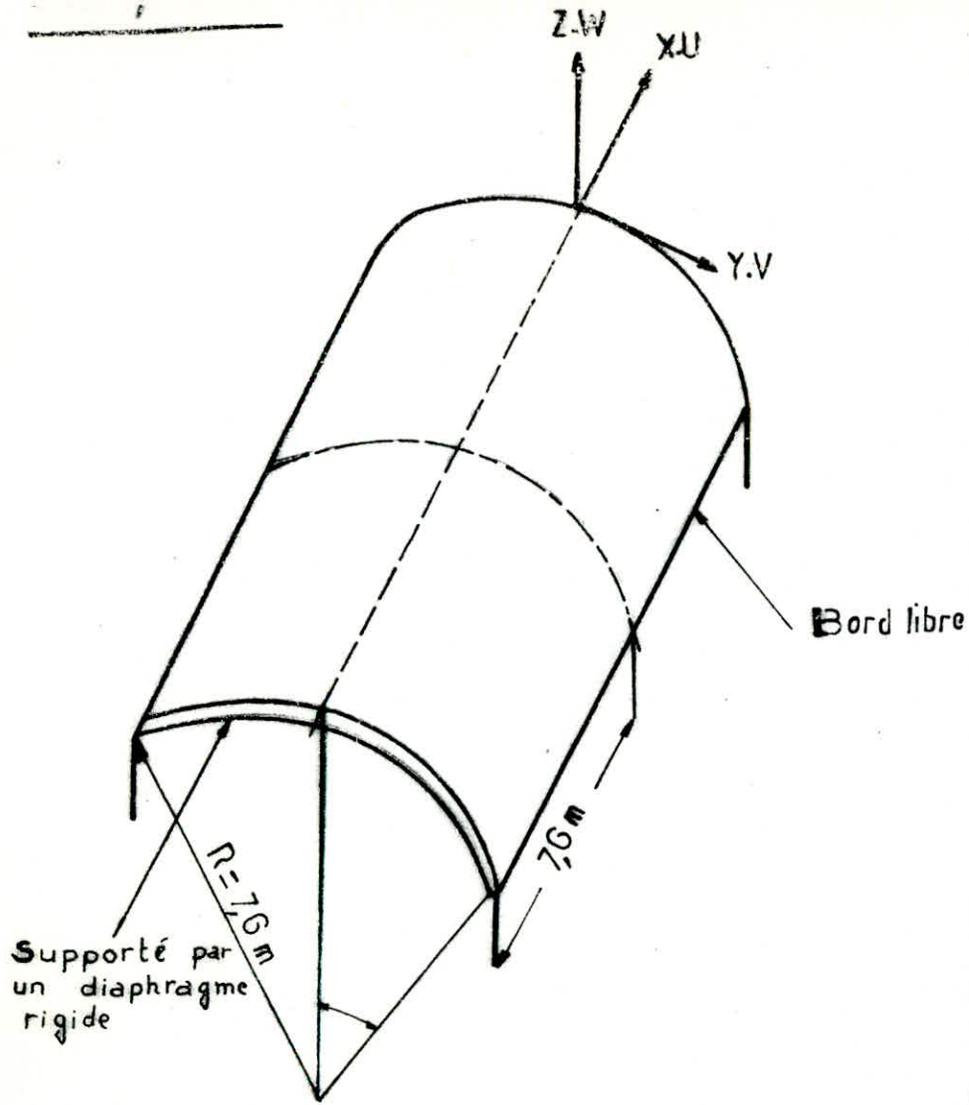
$$E = 2.1 \text{ E } 7 \text{ KN/m}^2$$

$$\nu = 0$$

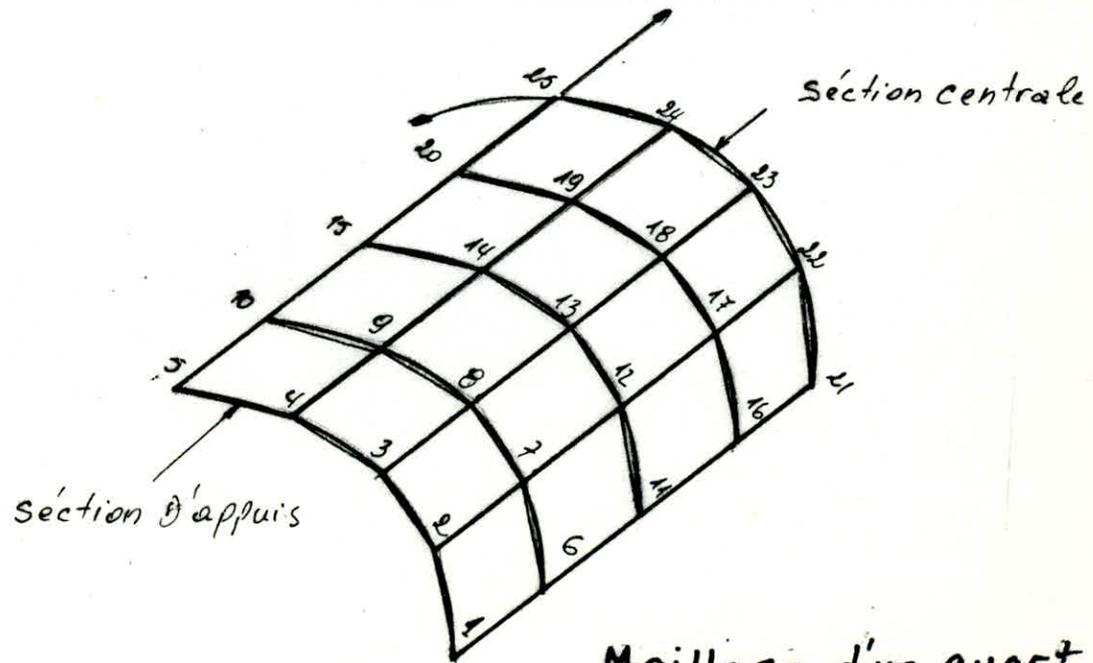
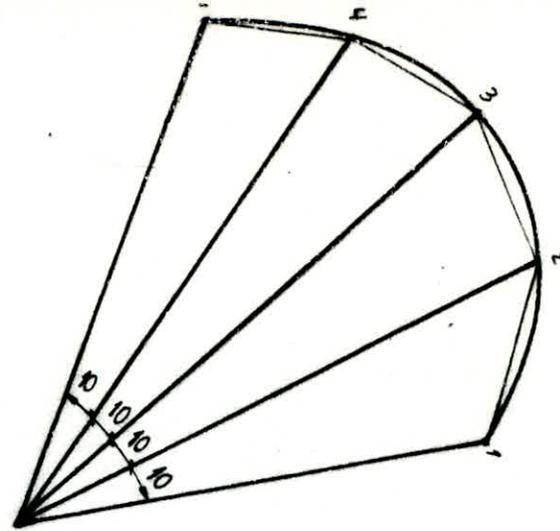
$$q = 4.310 \text{ KN/m}^2 \text{ ( le poids propre )}$$

LES DEPLACEMENTS VERTICAUX DE LA SECTION CENTRALE (mm)				
$\varphi$ °	Programme SUPER	ZIENKIEWICZ	Solution Analytique	Taux d'erreur en (%)\
0	17.020	15.00	15.08	12.865
10	1.357	1.200	1.200	13.083
20	- 29.870	- 27.500	- 27.500	- 8.6182
30	- 62.750	- 60.000	- 60.000	- 4.5833
40	- 96.060	- 93.000	- 93.000	- 3.2900

LE DEPLACEMENT LONGITUDINAL DE L'APPUI (mm)				
$\varphi$ °	Programme SUPER	ZIENKIEWICZ	Solution Analytique	Taux d'erreur en (%)\
0	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1.357	1.200	1.200	13.083
20	- 29.870	- 27.500	- 27.500	- 8.6182
30	- 62.750	- 60.000	- 60.000	- 4.5833
40	- 96.060	- 93.000	- 93.000	- 3.2900



VOUTE EN BERCEAU  
CYLINDRIQUE



Maillage d'un quart de la structure. 103

**EXEMPLE 2.**

Dans cet exemple on va traiter une structure en plaques pliées type, soumise à des charges réparties agissant normalement au plan de chaque plaque.

$$E = 2.5 \text{ E } 6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\nu = 0.43$$

$$q_1 = 0.0062 \text{ Kg/cm}^2$$

$$q_2 = 0.0062 \text{ Kg/cm}^2$$

$$q_2 = 0.0890 \text{ Kg/cm}^2$$

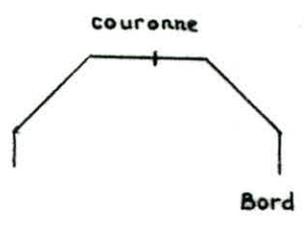
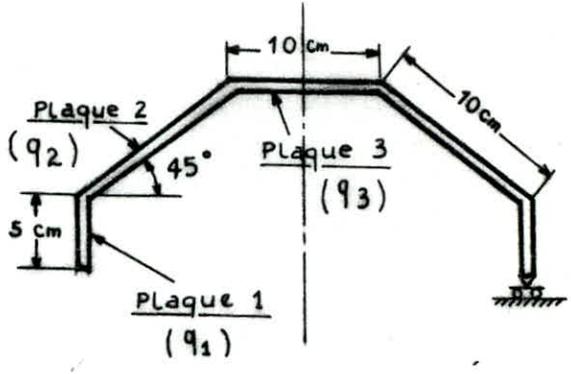
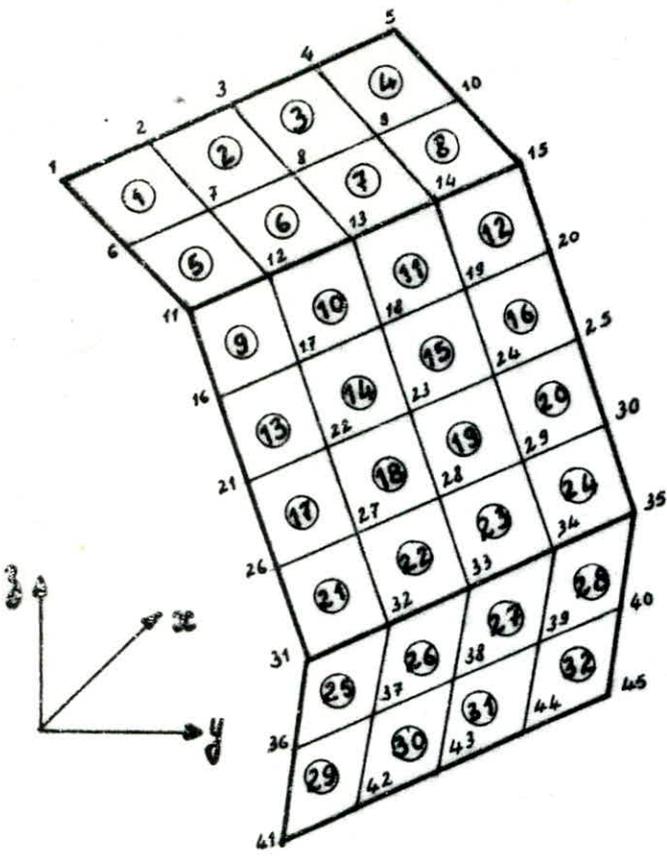
$$t = 0.005 \text{ m} = 0.5 \text{ cm}$$

LE DEPLACEMENT VERTICAL LE LONG DE LA COURONNE ( w )				
X (cm)	Programme S U P E R	ZIENKIEWICZ	EXPERIMENTAL	Taux d'erreur en ( % ) \
0	2.665	2.100	2.150	23.950
5	2.263	2.490	2.510	- 9.117
10	1.740	2.550	2.590	- 32.819
15	0.9760	2.100	2.11	- 53.744
20	0	0	0	0

LE DEPLACEMENT HORIZONTAL (u) LE LONG DU BORD (mm)				
X (cm)	Programme S U P E R	ZIENKIEWICZ	EXPERIMENTAL	Taux d'erreur en ( % ) \
0	2.652	2.480	2.480	6.9234
5	2.572	2.400	2.400	7.1792
10	1.357	1,200	1.250	8.560
15	0.8751	0.650	0.70	25.014
20	0.000	0.000	0.000	0.000

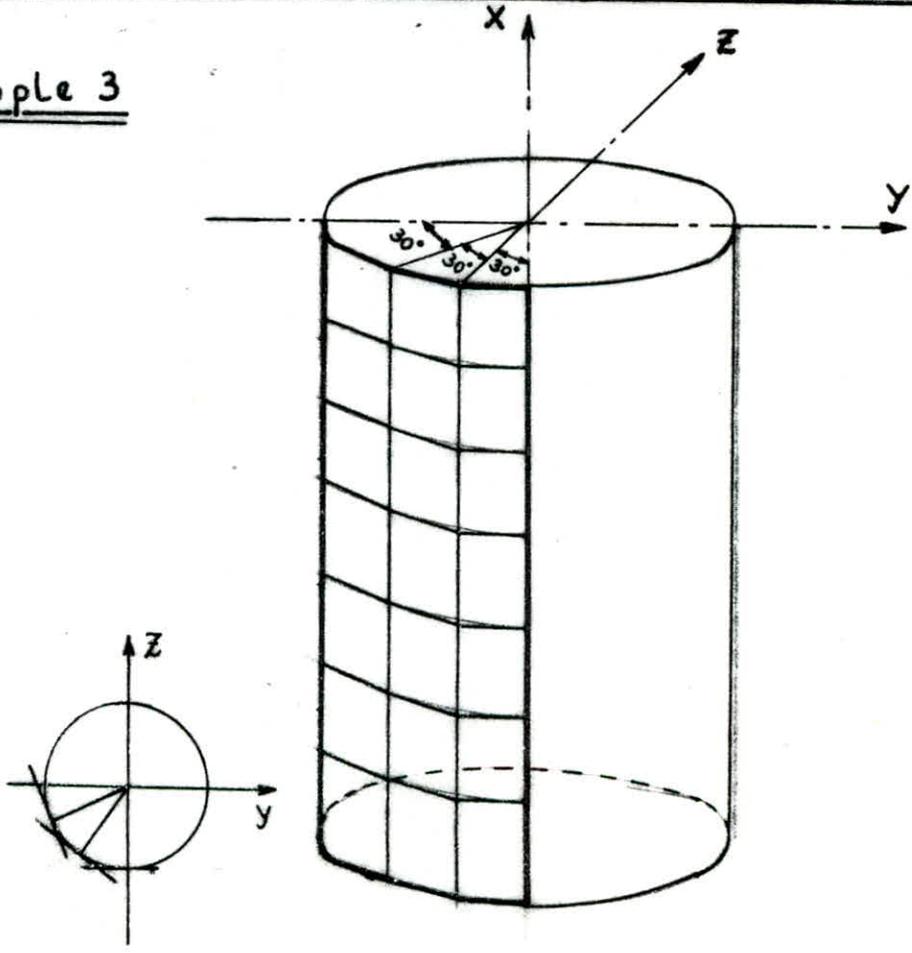
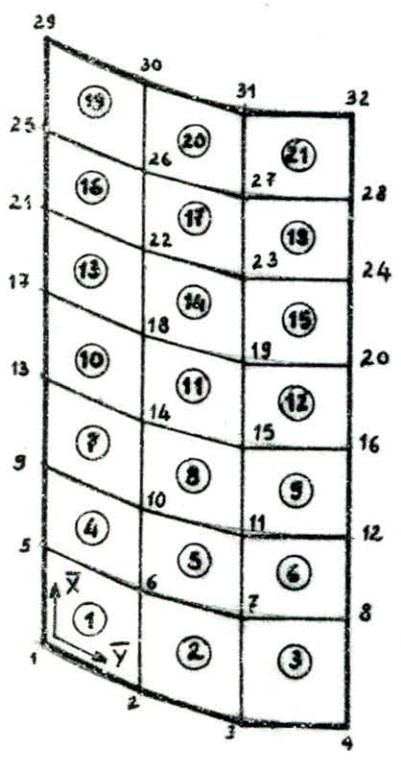
Comme la solution analytique de ce problème n'existe pas, on se contente des valeurs expérimentales obtenues dans le cas où la structure comporte des raidisseurs. On constate que les résultats obtenus par le programme 'SUPER' sont légèrement différents de ceux obtenus expérimentalement car dans le modèle qu'on a étudié, on a pas considéré le cas de plaques pliées avec des raidisseurs.

Exemple 2



Structure en plaques  
pliées type

Exemple 3



Cylindre sous pression

## EXEMPLE 3.

On traite l'exemple d'un cylindre soumis à une pression hydrostatique.

$$R = 20 \text{ m} \quad , \quad t = 0.45 \text{ m} \quad , \quad H = 9 \text{ m}$$

$$\gamma = 1 \text{ t/m}^3 \quad , \quad \nu = 0.2 \quad , \quad E = 1 \text{ E } 7$$

(  $Z = -R$  et  $Y = 0$  ) ou (  $Z = 0$  et  $Y = -R$  )

LE DEPLACEMENT RADIAL SUIVANT L'AXE (Z) OU (Y)	
X (m)	Programme S U P E R
0	0
1.2857	0.2170 E -3
2.5714	0.3192 E -3
3.8571	0.4378 E -3
5.1428	0.4164 E -3
6.4285	0.3872 E -3
7.7142	0.3079 E -3
9.0000	0.3923 E -3

Le déplacement radial maximum obtenu par l'élément non conforme utilisé est

$$w = 0.4378 \text{ E } -3$$

En utilisant l'élément de coques axisymétriques, on obtient la valeur suivante du déplacement radial

$$w^* = 0.365990 \text{ E } -3$$

ce qui nous donne un taux d'erreur égal à :

$$\epsilon = 19.62075 \quad \%$$

## EXEMPLE 4.

La structure est en plaques pliées type, sujette à une charge uniformément distribuée agissant normalement au plan de chacune des plaques inclinées. Elle repose à ses extrémités sur des diaphragmes rigides dans leurs propre plans ( $w = 0$ ) et parfaitement flexibles dans les directions normales à ces plans.

$$E = 1.4 \text{ E } 6 \text{ KN/m}^2$$

$$\nu = 0.15$$

$$q = 1.0 \text{ KN/m}^2$$

$$t = 20 \text{ cm}$$

Pour les points appartenant à l'axe de symétrie. ( $z = y = 0$ )

LE DEPLACEMENT VERTICAL ( w )	
X (m)	Programme ' SUPER '
0	0.1744 E -2
12.000	- 0.1838 E -2
24.000	0.1637 E -2

Pour les points de l'extrémité ( $z = -3$ . et  $y = 6.3640$ )

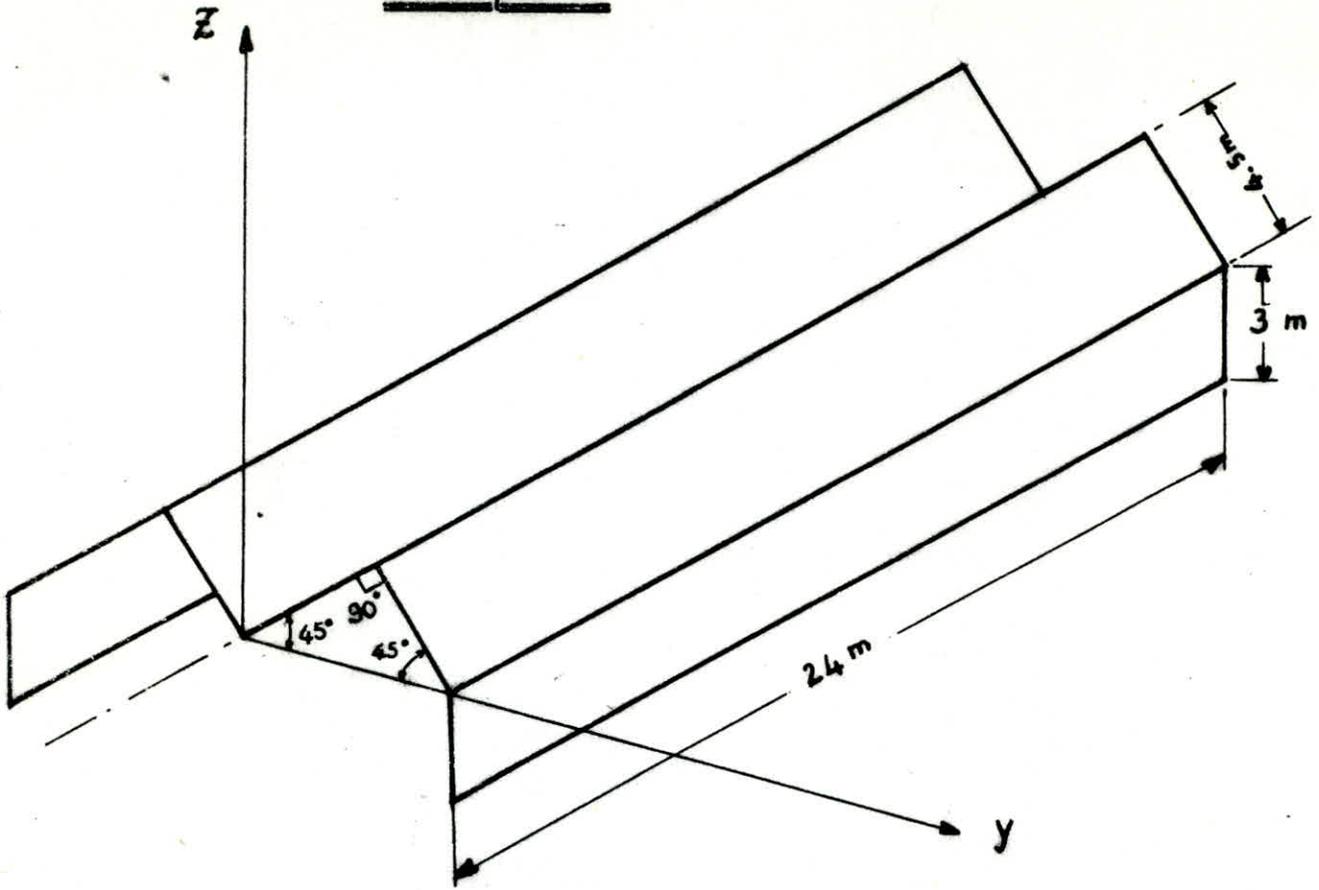
LES DEPLACEMENTS PLANS ( u ) et ( v )		
X (m)	( u <sub>x</sub> )	( v <sub>y</sub> )
0	0.3087 E -3	0.1248 E -2
12.000	0.1190 E -3	0.1946 E -3
24.000	- 0.2874 E- 3	- 0.7132 E -3

### XI-3 CONCLUSION ( CONCERNANT LA TROISIEME PARTIE )

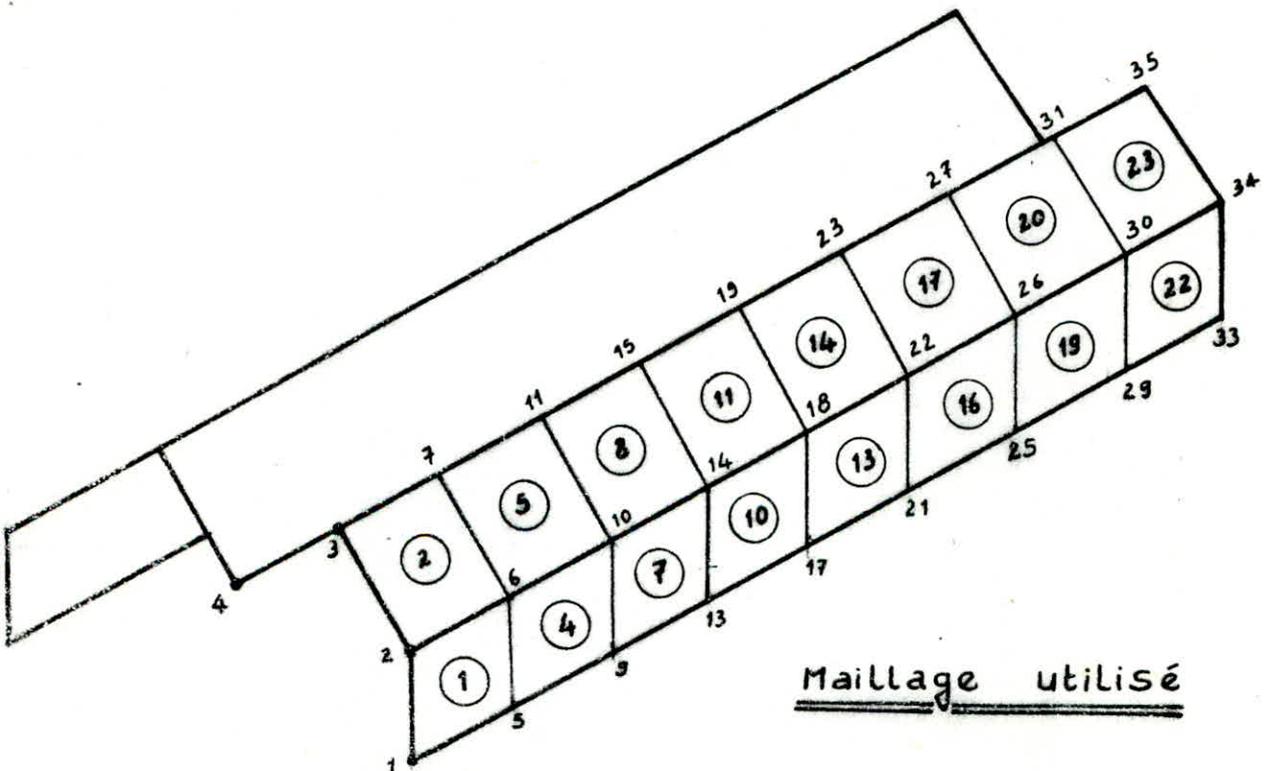
Après avoir formulé l'élément de plaque pliée, il est nécessaire de justifier le choix de cet élément. On vu que l'élément utilisé donne des résultats relativement bons pour les structures en plaques pliées type, cependant pour les structures en coques ( courbure continue ) l'erreur n'est trop grande.

L'élément triangulaire le plus simple qui a été utilisé par DAWE a donné de mauvais résultats bien qu'ils soient convergents, car cet élément a un champ de déplacements plans linéaire et un champ de flexion quadratique. De ce fait plusieurs auteurs affirment que l'éléments rectangulaire non conforme est l'élément qui présente le meilleur compromis simplicité-précision.

Exemple 4



Toiture en plaques pliées



Maillage utilisé

### CONCLUSION

Après avoir formulé le problème des plaques pliées et coques ( considérées comme un assemblage d'éléments plans ), on doit conclure en mentionnant les points suivants :

\*. L'élément choisi donne de bons résultats pour les problèmes d'élasticité plane ainsi que pour la flexion des plaques minces, cependant après superposition, les résultats sont particulièrement

bons pour les structures cylindriques à faibles courbures et les structures composées de plaques n'appartenant pas au même plan ( plaques pliées ) mais on juge qu'il serait mieux d'utiliser les éléments courbes pour la modélisation des structures à symétrie axiale ( Axi-symétrie), bien que l'élément qu'on a utilisé permet de mieux représenter le comportement de la structure du fait qu'il dispose de six degrés de liberté par noeud.

\*. Lors de la formulation de l'élément pour la modélisation des plaques pliées et en particulier au cours de la troisième partie, on a rencontré une difficulté concernant la singularité causée par la rotation autour de l'axe ( Z ), et Comme solution on a opté pour celle qui consiste à introduire une rigidité fictive faible correspondant à ces degrés de liberté. Alors on suggère de reformuler le problème mais en optant, cette fois, pour la solution qui paraît plus adéquate et qui consiste à définir une relation linéaire, entre les rotations ( $\theta_z$ ) et les déplacements de membrane (plans) qui sont (u et v), telle :

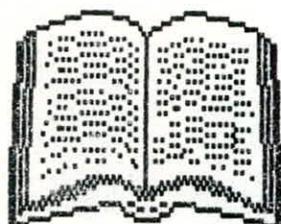
$$\theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

puis voir quelle est la solution qui peut présenter le plus d'avantages.

\*. On suggère, outre ceci, de reformuler le problème des plaques pliées en utilisant d'autres éléments ( triangulaire à sept noeuds, par exemple) et notamment l'élément récemment développé qui est l'élément bande ( Finit strip element), et cela modifiant légèrement le programme élaboré.

\*. On souhaite poursuivre l'analyse de ce problème en faisant l'étude dynamique sous charges sismiques verticales et horizontales, afin de compléter ce modeste travail.

# Bibliographie



- [1] G.C. ZIENKIEWICZ- La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur. Paris, EDISCIENCE 1973.
- [2] G.DHATT et G.TOUZOUT- Une présentation de la méthode des éléments finis. Editions MALOINE
- [3] K.C. ROCKEY- Introduction à la méthode des éléments finis Editons EYROLLES 1979.
- [4] J.F. IMBERT. Analyse des structures par éléments finis.
- [5] T.Y. YANG. Finite Element Structural Analysis.
- [6] R.H. GALLAGHER Introduction à la méthode des éléments finis
- [7] S. TIMOSHENKO Théorie des plaques et coques.
- [8] J. COURBON Plaques minces élastiques
- [9] E. ABSI Méthodes de calcul numériques en élasticité
- [10] S. TIMOSHENKO et GODIER Théorie de l'élasticité

