

12/89

وزارة التعليم العالي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

105c

## ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : génie civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

### S U J E T

CALCUL DES OUVRAGES  
EN FORME DE COQUE SOUMIS  
A DE CHARGES SISMIQUES DONNEES

Proposé par :

M<sup>r</sup> DAN VIET  
Cuong

Etudié par :

M<sup>r</sup> RAKOTOARINDRIANA  
Haritiana

Dirigé par :

M<sup>r</sup> DAN VIET  
Cuong

PROMOTION : juin 1989

CALCUL DES OUVRAGES  
EN FORME DE COQUE SOUMIS  
A DES CHARGES SISMIQUES DONNEES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

je dédie ce modeste travail

à

Ma chère mère

à tous les membres

de la famille

et à toutes les personnes

qui me sont chères ,

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

« J'adresse mes vifs remerciements  
à Monsieur Dang Viet Cuong pour ses précieux  
conseils et sa constante disponibilité à l'établissement  
de ce projet ainsi qu'à toutes les personnes ayant  
apporté leur concours à l'élaboration de ce fascicule. »

# SOMMAIRE



## Chapitre - I

- 1 - Présentation du Projet
- 2 - Caractéristiques des matériaux

## Chapitre - II : BASES DE LA THEORIE DES COQUES MINCES ELASTIQUES DE FORME GENERALE DANS LE CAS DYNAMIQUE

- 1 - Notions et Définitions
- 2 - Etude géométrique de la déformation locale
- 3 - Efforts et Moments
- 4 - Equations différentielles d'équilibres dynamiques d'une coque
- 5 - Conditions aux limites
- 6 - Théorie technique des coques en pente douce

## Chapitre - III : PRINCIPE DE LA DETERMINATION DES CHARGES SISMQUES SUR UNE TOITURE EN FORME DE COQUE

- 1 - Cas d'un séisme vertical
- 2 - Cas d'un séisme horizontal

## Chapitre - IV : CALCUL STATIQUE DES COQUES EN PENTE DOUCE SOUMISES A DES CHARGES SISMQUES

- 1 - calculs et résultats numériques d'une coque parabolico-elliptique.
- 2 - calculs et résultats numériques d'une coque sphérique
  - a - Méthode série double
  - b - Méthode de Collocation
  - c - Calcul des colonnes

## Conclusion

## INTRODUCTION



Dans la technique moderne : le Genie civil , l'industrie aéronautique , la construction de fusée , la construction navale et d'autres domaines , les coques minces sont utilisées grâce à leur structures rationnelles . En effet ses structures sont efficaces tant au point économique qu'esthétique .

Plusieurs conférences internationales de toiture en forme de coques , en béton armé , ont relevé que pour les édifices de grande portée , l'utilisation des structures en forme de poutre , fermes , portique pour maintenir les toitures est obsolète car elles exigent un système de colonnes intermédiaires , ce qui augmente considérablement le coût .

De telles structures sont très lourdes et dans plusieurs cas elles ne peuvent s'adapter aux exigences des processus technologiques modernes selon lesquels il faut avoir un grand volume sans poteaux . De plus , le calcul concernant ces structures est fait sur des schémas plans , et pour de tels schéma un calcul ne permet pas l'épuisement du pouvoir portant de la structure . Ainsi les matériaux ne sont utilisés qu'à environ 40% de leur efficacité .

A la différence de ces structures , l'utilisation des structures en forme de coque en particulier en béton armé permet une diminution significative de dépense de matériaux . On peut évaluer entre 25% et 35% cette diminution . De plus cette utilisation permet d'accomplir les processus technologiques nécessaires pour un grand espace . Plus la portée de l'ouvrage est grande , plus l'effet économique est appréciable .

Cependant on doit souligner que les calculs et l'exécution des travaux de toitures en coques posent des problèmes complexes et difficiles à résoudre, en particulier, pour les coques qui sont construites en zone sismique.

C'est pourquoi à l'heure actuelle ces problèmes constituent les sujets de préoccupation aux chercheurs et ingénieurs de Génie civil.

Ainsi, grâce à des calculs, nous nous sommes proposés, dans cette étude, de mieux comprendre ces problèmes afin de connaître un peu plus les ouvrages en forme de coque.

Pour mieux étayer nos arguments nous nous sommes placés dans un contexte défavorable : l'ouvrage est construit sur un terrain en pente et situé dans une zone à risque sismique.

Dans une première partie nous donnerons les caractéristiques de l'ouvrage et le choix des matériaux.

Nous justifierons ensuite nos options par des études théoriques à partir des données bibliographiques disponibles et des calculs adéquats.

Nous terminons ce travail par la discussion des résultats obtenus en essayant de montrer la faisabilité du projet.



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## CHAPITRE I



## 1 - Presentation du Projet

La toiture étudiée est une coque, en béton armé, d'épaisseur  $h$ , de dimension  $(a \times b)$  dans le plan, avec les conditions aux limites sur son contour arbitraire.

Pour illustrer l'idée de la méthode de calcul, nous avons choisi pour notre projet le calcul numérique pour une coque paraboloides elliptique et une coque sphérique, en pente douce, avec une charge donnée.

La coque est appuyée sur son contour par quatre arcs avec tirants, et le système coque-arcs est soutenu par quatre poteaux.

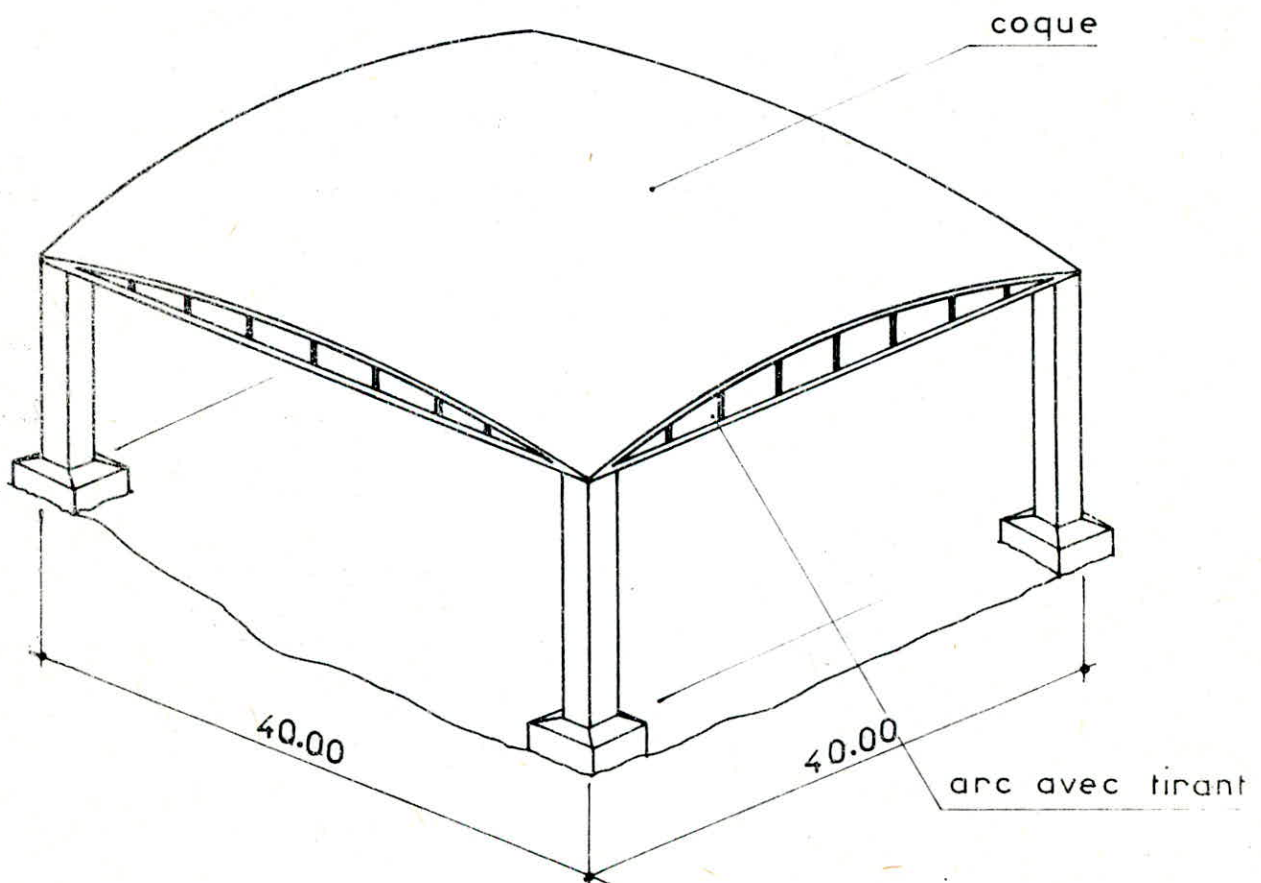


Fig N° 1-1

La charge verticale pour le calcul numérique est de  $q = 400 \text{ kg/m}^2$ , compte tenu du poids propre  $q_g = 175 \text{ kg/m}^2$  de la coque.

La charge sismique est donnée par :

$$q_z = 0,54 \cdot K_s \cdot q \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{b}$$

avec :

$K_s$  : coefficient sismique .

a et b sont les dimensions de la coque .

La dépense de matériaux est de :

Pour le béton  $185,9 \text{ m}^3$  et les aciers  $30712 \text{ Kg}$  .

Pour  $1 \text{ m}^2$  de surface :  $0,115 \text{ m}^3$  de béton ,  $19,16 \text{ Kg}$  d'acier .

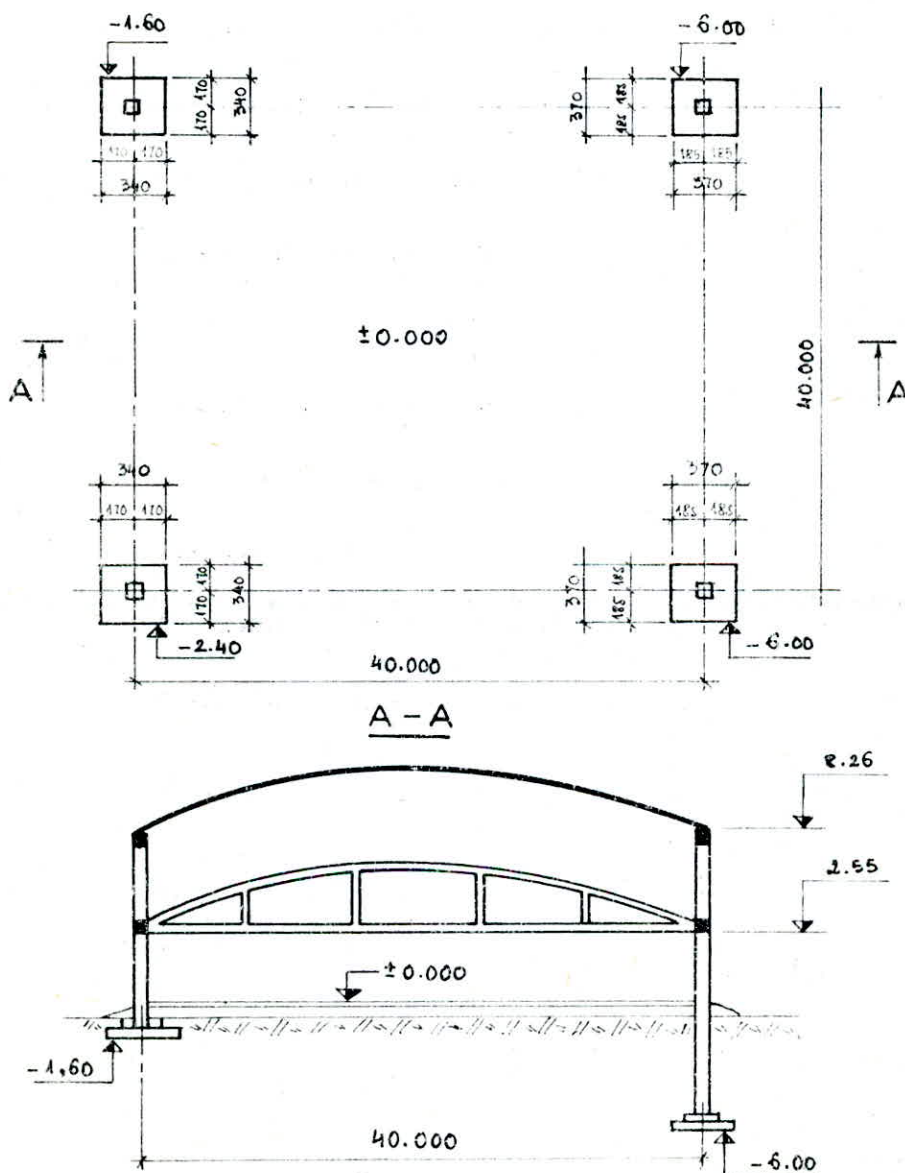


Fig N°2-1

## 2 - Caracteristiques des materiaux

Le béton utilisé est conforme aux règles techniques du CCBA 68 ainsi que toutes les réglementations en vigueur en Algérie. Il est dosé à 350 kg/m<sup>3</sup> de ciment 'CPA 325' et avec un contrôle atténué.

Le dosage d'un mètre cube de béton est de :

350 dm<sup>3</sup> de ciment  
503 dm<sup>3</sup> de sable  
691 dm<sup>3</sup> de gravier  
193 dm<sup>3</sup> d'eau.

La résistance nominale à la compression est :  $\bar{\sigma}'_{28} = 270 \text{ Kg/cm}^2$

La résistance nominale à la traction est :  $\bar{\sigma}_{28} = 23.5 \text{ Kg/cm}^2$

Contrainte de compression admissible du béton :

$\bar{\sigma}'_{b0} = 68.5 \text{ Kg/cm}^2$  en compression simple 1<sup>er</sup> genre

$\bar{\sigma}'_{b0} = 103 \text{ Kg/cm}^2$  sollicitation du 2<sup>ème</sup> genre.

$\bar{\sigma}'_b = 137 \text{ Kg/cm}^2$  en flexion simple ou composé avec traction, 1<sup>er</sup> genre, et

$\bar{\sigma}'_b = 205.5 \text{ Kg/cm}^2$  2<sup>ème</sup> genre.

Contrainte de traction de référence du béton :

$\bar{\sigma}_b = 5.9 \text{ Kg/cm}^2$  1<sup>er</sup> genre

$\bar{\sigma}_b = 8.85 \text{ Kg/cm}^2$  2<sup>ème</sup> genre.

Les aciers utilisés sont de haute adhérence FeE40.

si  $\varnothing \leq 20 \text{ mm} \rightarrow \bar{\sigma}_{en} = 4200 \text{ Kg/cm}^2$  et  $\varnothing > 20 \text{ mm} \rightarrow \bar{\sigma}_{en} = 4000 \text{ Kg/cm}^2$

Les contraintes admissibles sont :

$\rightarrow \bar{\sigma}_a = 2800 \text{ Kg/cm}^2$  : 1<sup>er</sup> genre

$\rightarrow \bar{\sigma}_a = 2666 \text{ Kg/cm}^2$

$\rightarrow \bar{\sigma}_a = 4200 \text{ Kg/cm}^2$  : 2<sup>ème</sup> genre

$\rightarrow \bar{\sigma}_a = 4000 \text{ Kg/cm}^2$

## CHAPITRE II

### THEORIE DES COQUES MINCES

#### ELASTIQUES DE FORME

#### GENERALE DANS LE CAS DYNAMIQUES

# 1 - Notions et définitions

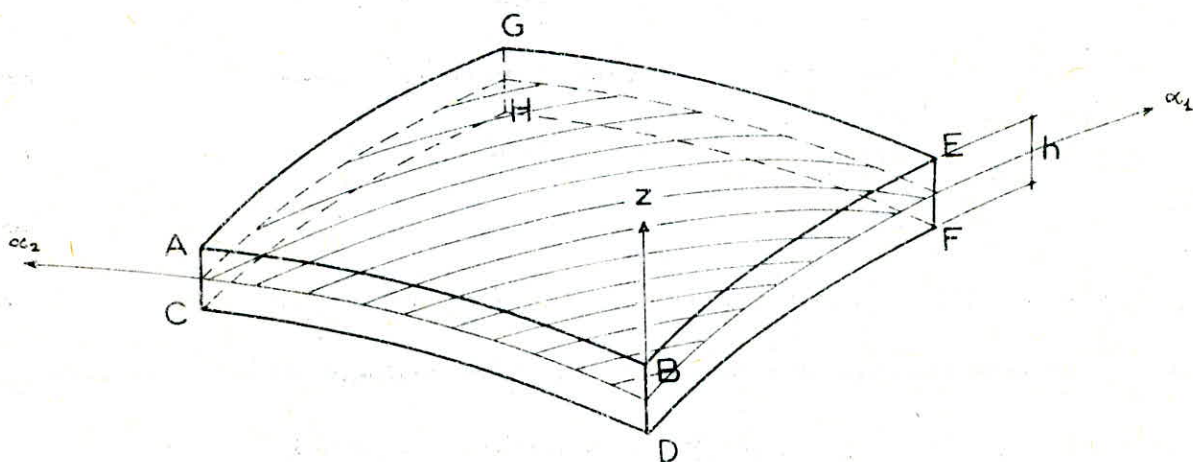
La théorie des coques repose sur l'étude de la résistance, de la rigidité et de la stabilité dans le domaine dynamique.

On appelle une coque mince, un corps solide limité par deux surfaces dont l'épaisseur  $h = h(\alpha_1, \alpha_2)$  est très faible par rapport aux autres dimensions (Fig N°1).

La surface moyenne est la surface équidistante des deux surfaces limites.

On suppose que la surface moyenne de la coque est liée à un système de coordonnées mélangés curvilignes orthogonales  $(\alpha_1, \alpha_2, z)$ , et que les lignes de coordonnées curvilignes coïncident avec les lignes de courbures.

Dans ce système de coordonnées la surface moyenne est caractérisée par les courbures principales  $K_1 = K_1(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $K_2 = K_2(\alpha_1, \alpha_2)$ , les rayons de courbures principaux  $R_1(\alpha_1, \alpha_2)$  et  $R_2(\alpha_1, \alpha_2)$  des lignes de courbures  $\alpha_1 = \text{const}$ ,  $\alpha_2 = \text{const}$ , et les coefficients de la première forme quadratique  $A_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $A_2 = A_2(\alpha_1, \alpha_2)$ .



( Fig N° 1 )

La position de tous les points appartenant à la coque est entièrement définie par les trois coordonnées  $(\alpha_1, \alpha_2, z)$ .  
 Un élément linéaire de la coque dans le système de coordonnées mélangés est déterminé par :

$$ds^2 = H_1^2 d\alpha_1^2 + H_2^2 d\alpha_2^2 + dz^2$$

avec :  $H_1 = A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)$

$$H_2 = A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)$$

$$H_3 = 1$$

$H_1, H_2, H_3$  sont appelés paramètre de Lamé.

Dans notre projet notre étude concerne seulement les coques minces d'épaisseur constante, homogène, isotrope et linéairement élastique.

## 2 - Etude géométrique de la déformation locale

Dans la théorie classique des coques minces élastiques on se base sur les hypothèses suivantes :

$$e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0$$

$e_{33}$  : déformation relative linéaire suivant  $z$ .

$e_{13}$  : déformation de glissement relatif de la facette (ABDC)

$e_{23}$  : déformation de glissement relatif de la facette (BEFD)

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

comme  $e_{33} = 0$ , alors  $u_3 = W(\alpha_1, \alpha_2)$

Donc le déplacement  $u_3$  ne dépend pas de  $z$  et tous les points de la normale rigide effectuent un même déplacement.

La déformation relative d'une coque est définie par :

$$(2-1) \begin{cases} e_{11} = \varepsilon_1 + z \cdot \chi_1 \\ e_{22} = \varepsilon_2 + z \cdot \chi_2 \\ e_{12} = \varepsilon_{12} + z \cdot \chi \end{cases}$$

où

$$(2-2) \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot v_0 + \frac{W}{R_1} \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot u_0 + \frac{W}{R_2} \\ \varepsilon_{12} = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_0}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{v_0}{A_2} \right) \end{cases}$$

et,

$$(2-3) \begin{cases} \chi_1 = - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{u_0}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \left( \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \frac{v_0}{R_2} \right) \\ \chi_2 = - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \frac{v_0}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \left( \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{u_0}{R_1} \right) \\ \chi = \left[ \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_0}{A_1 R_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{v_0}{A_2 R_2} \right) \right] \\ - 2 \cdot \left[ \frac{1}{A_2 A_1} \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \right) \right] \end{cases}$$

$u_0$  et  $v_0$  désignent les composantes de déplacements au point  $(\alpha_1, \alpha_2, z=0)$  de la surface moyenne suivant les directions tangentiels aux lignes de coordonnées  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ , caractérisent les variations de dimensions d'un petit élément de la surface moyenne.

$\chi_1, \chi_2, \chi$ , représentent les déformations de flexions engendrées par le gauchissement de la surface moyenne.

### 3 - Efforts et Moments

soit un élément de la coque limité par les coordonnées  
 $(\alpha_1 = \text{const}, \alpha_1 + d\alpha_1), (\alpha_2 = \text{const}, \alpha_2 + d\alpha_2), z = \pm \frac{h}{2}$ .

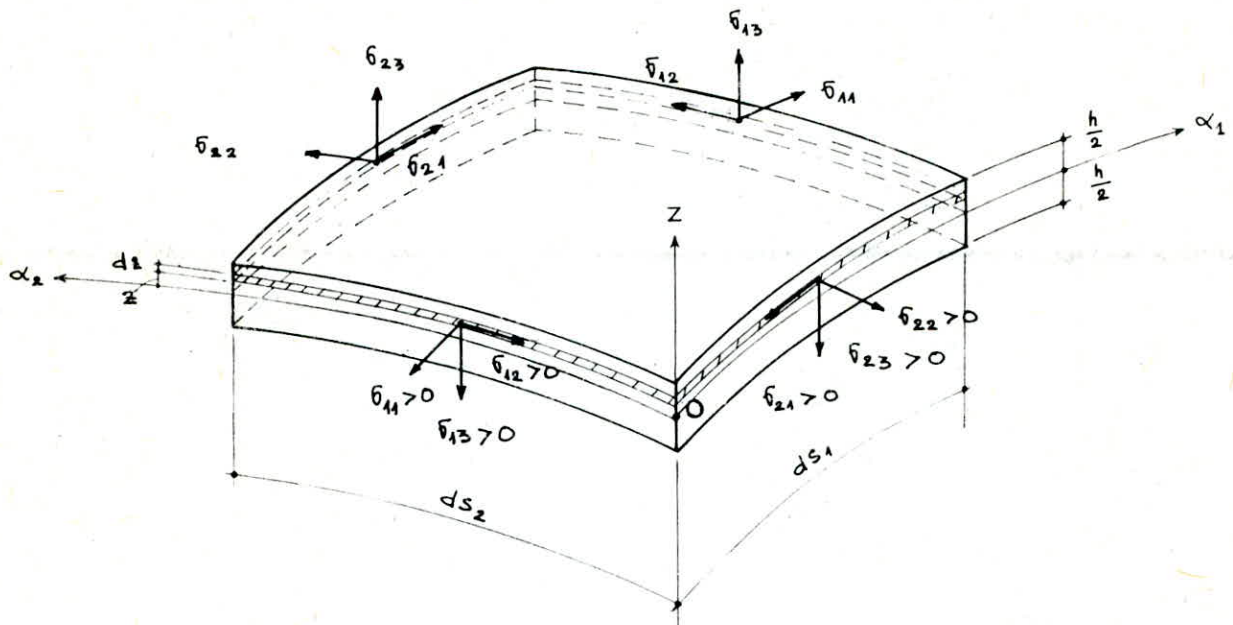


Fig N° 2

si on découpe cet élément de la coque en une couche élémentaire  $dz$ , l'état de contrainte de cette couche sera défini par les trois contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{21} = \sigma_{12}$ .

$\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  sont des contraintes normales.

$\sigma_{12}$  et  $\sigma_{21}$  sont des contraintes tangentielles.

Alors, les efforts par unité de longueur sont :

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} \cdot \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \cdot dz$$

$$N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} \cdot \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \cdot dz$$

$$T_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} \cdot \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \cdot dz$$

$$T_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{21} \cdot \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \cdot dz$$



Nous remarquons que pour  $g_{12} = g_{21}$ ,  $T_{21} \neq T_{12}$ . Ceci est due à la configuration courbée de la coque. En effet si l'épaisseur  $h$  est assez faible, les rayons  $\frac{z}{R_1}$  et  $\frac{z}{R_2}$  peuvent être négligés. Dans ce cas nous avons :

$$(2-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} g_{11} \cdot dz \\ N_2 = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} g_{22} \cdot dz \\ T_{12} = T_{21} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} g_{12} \cdot dz \end{array} \right.$$

Les moments par unité de longueur de l'élément de la coque sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} g_{11} \cdot z \cdot \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \cdot dz \\ M_2 = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} g_{22} \cdot z \cdot \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \cdot dz \\ M_{12} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} g_{12} \cdot z \cdot \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \cdot dz \\ M_{21} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} g_{21} \cdot z \cdot \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \cdot dz \end{array} \right.$$

De même pour une coque de faible épaisseur par rapport aux rayons  $R_1$  et  $R_2$ , on peut négliger  $\frac{z}{R_1}$  et  $\frac{z}{R_2}$ . Dans ce cas nous avons :

$$(2-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} g_{11} \cdot z \cdot dz \\ M_2 = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} g_{22} \cdot z \cdot dz \\ M_{12} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} g_{12} \cdot z \cdot dz \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad M_{21} = M_{12}$$

des efforts tranchants par unité de longueur sont :

$$(2-6) \quad \begin{cases} Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} \cdot dz \\ Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23} \cdot dz \end{cases}$$

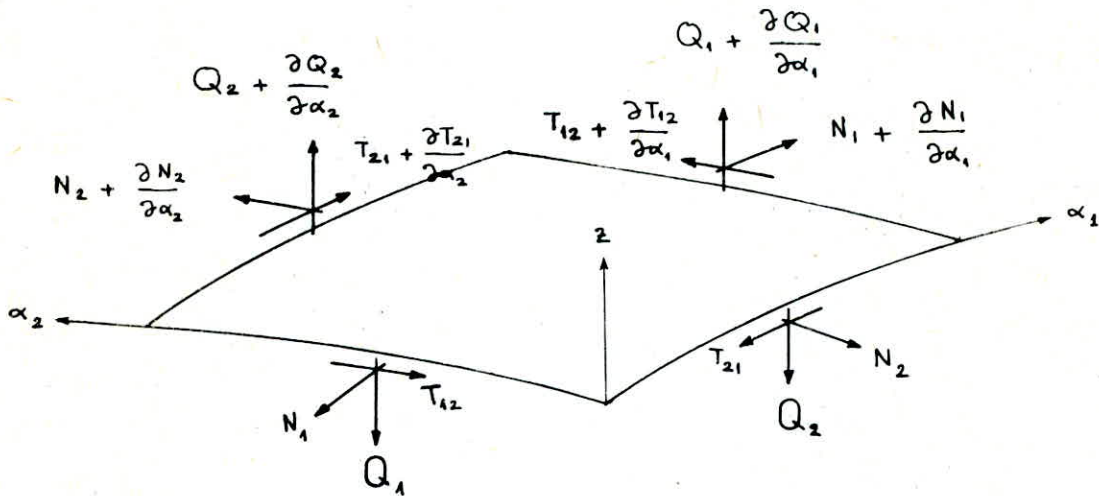


Fig N°3

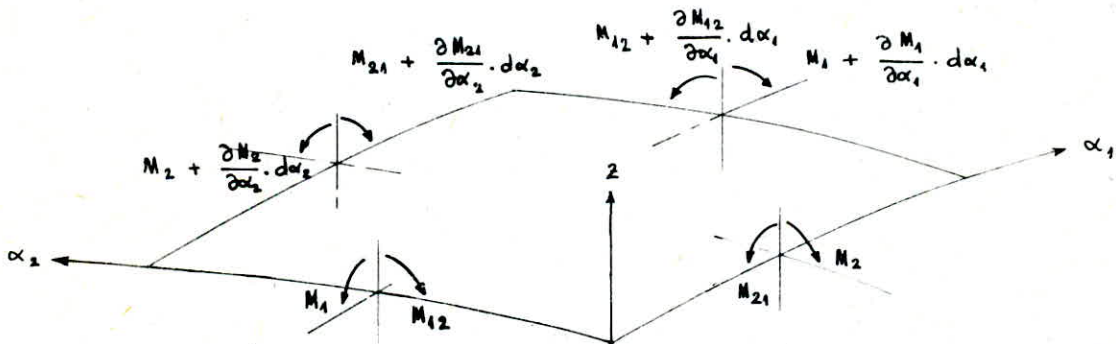


Fig N°4

d'état de contrainte d'une coque est déterminé par cinq efforts :

$N_1$ ,  $N_2$ ,  $T_{21} = T_{12}$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ , et trois moments :  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_{12} = M_{21}$ .

#### 4 - Equations différentielles d'équilibre dynamique d'une coque

Pour pouvoir établir les équations différentielles d'équilibre dans le cas dynamique, on doit d'abord écrire les formules de derivations des vecteurs unitaires dans un système de coordonnées mélangés  $(\alpha_1, \alpha_2, z)$ .

$$(2-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} \cdot \vec{R}_2 - \frac{A_1}{R_1} \cdot \vec{R}_3 \\ \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \vec{R}_2 \\ \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$$(2-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \vec{R}_1 \\ \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \alpha_2} = -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \vec{R}_1 - \frac{A_2}{R_2} \cdot \vec{R}_3 \\ \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$$(2-9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \alpha_1} = \frac{A_1}{R_1} \cdot \vec{R}_1 \\ \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \alpha_2} = \frac{A_2}{R_2} \cdot \vec{R}_2 \\ \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Pour ce système de coordonnées mélangés on a :

$$(2-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_2} \\ \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1} \end{array} \right.$$

Pour l'étude des conditions d'équilibre d'un élément, les variations de formes et de dimensions sont négligeables en supposant que les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la coque.

soit un élément de la surface moyenne limité par  $(\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1)$  et  $(\alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2)$ . A cet élément on applique des forces extérieures  $\vec{q}$  et des forces d'inerties  $\vec{F}$  outre les efforts et les moments.

soit  $\vec{q} = q_1 \cdot \vec{k}_1 + q_2 \cdot \vec{k}_2 + q_3 \cdot \vec{k}_3$  la force extérieure par unité de la surface moyenne.

$\vec{F} = F_1 \cdot \vec{k}_1 + F_2 \cdot \vec{k}_2 + F_3 \cdot \vec{k}_3$  la force d'inertie.

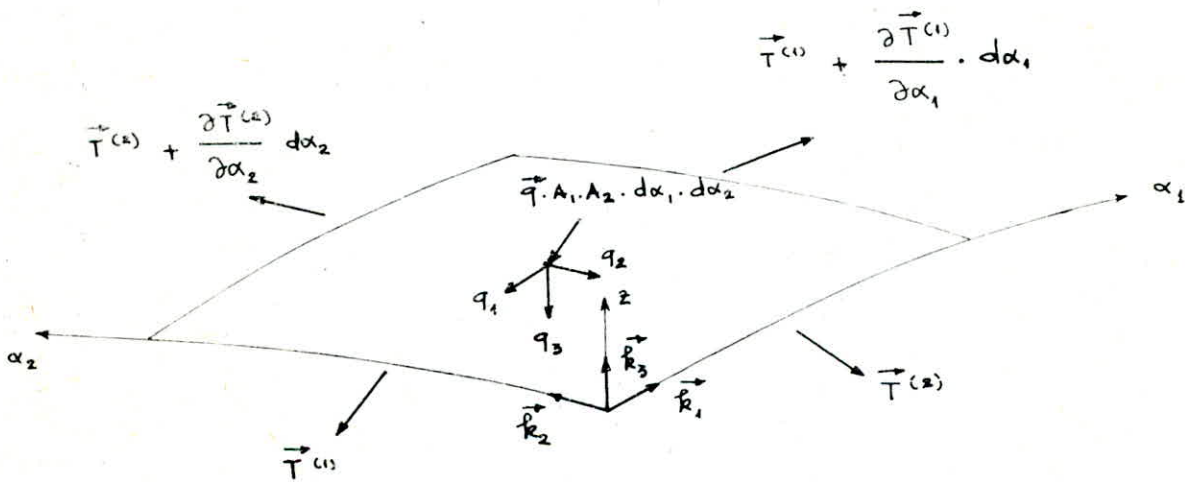


Fig. N°5

des conditions d'équilibre de cet élément (Fig N°5) peuvent être traduites sous la forme des expressions mathématiques suivantes :

### 1ère Condition

Nous avons l'équilibre de l'élément considéré si le vecteur principale de toutes les forces appliquées est nul.

$$\begin{aligned}
 & \left( \vec{T}^{(1)} + \frac{\partial \vec{T}^{(1)}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) - \vec{T}^{(1)} + \left( \vec{T}^{(2)} + \frac{\partial \vec{T}^{(2)}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) - \vec{T}^{(2)} \\
 & + \vec{q} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \vec{F} \cdot e A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{T}^{(1)}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \vec{T}^{(2)}}{\partial \alpha_2} + \vec{q} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \vec{F} \cdot e A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \vec{T}^{(1)} &= (N_1 \cdot \vec{k}_1 + T_{12} \cdot \vec{k}_2 + Q_1 \cdot \vec{k}_3) A_2 d\alpha_2 \\
 \vec{T}^{(2)} &= (T_{21} \cdot \vec{k}_1 + N_2 \cdot \vec{k}_2 + Q_2 \cdot \vec{k}_3) A_1 d\alpha_1
 \end{aligned}$$

Donc l'équation vectorielle devient :

$$(2-11) \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (N_1 A_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (T_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_2 \right] - \frac{Q_1}{R_1} \\
 & \qquad \qquad \qquad + q_1(\alpha_1, \alpha_2, t) = e \cdot h \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\
 & \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 T_{12})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (N_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + T_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{Q_2}{R_2} \\
 & \qquad \qquad \qquad + q_2(\alpha_1, \alpha_2, t) = e \cdot h \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\
 & \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 Q_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 Q_2)}{\partial \alpha_2} \right] + \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - q_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = -e \cdot h \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}
 \end{aligned} \right.$$

### 2<sup>ème</sup> Condition

Nous avons l'équilibre si le vecteur moment de toute les forces appliquées, est nul :

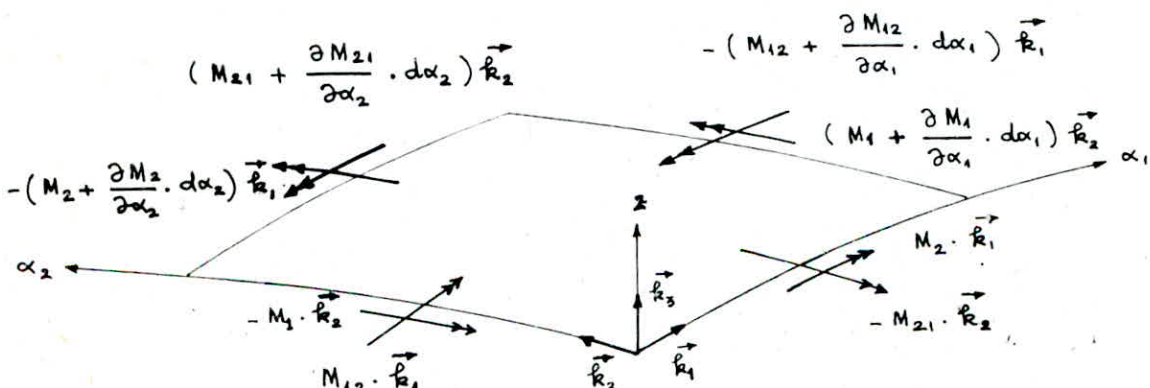


Fig N°6

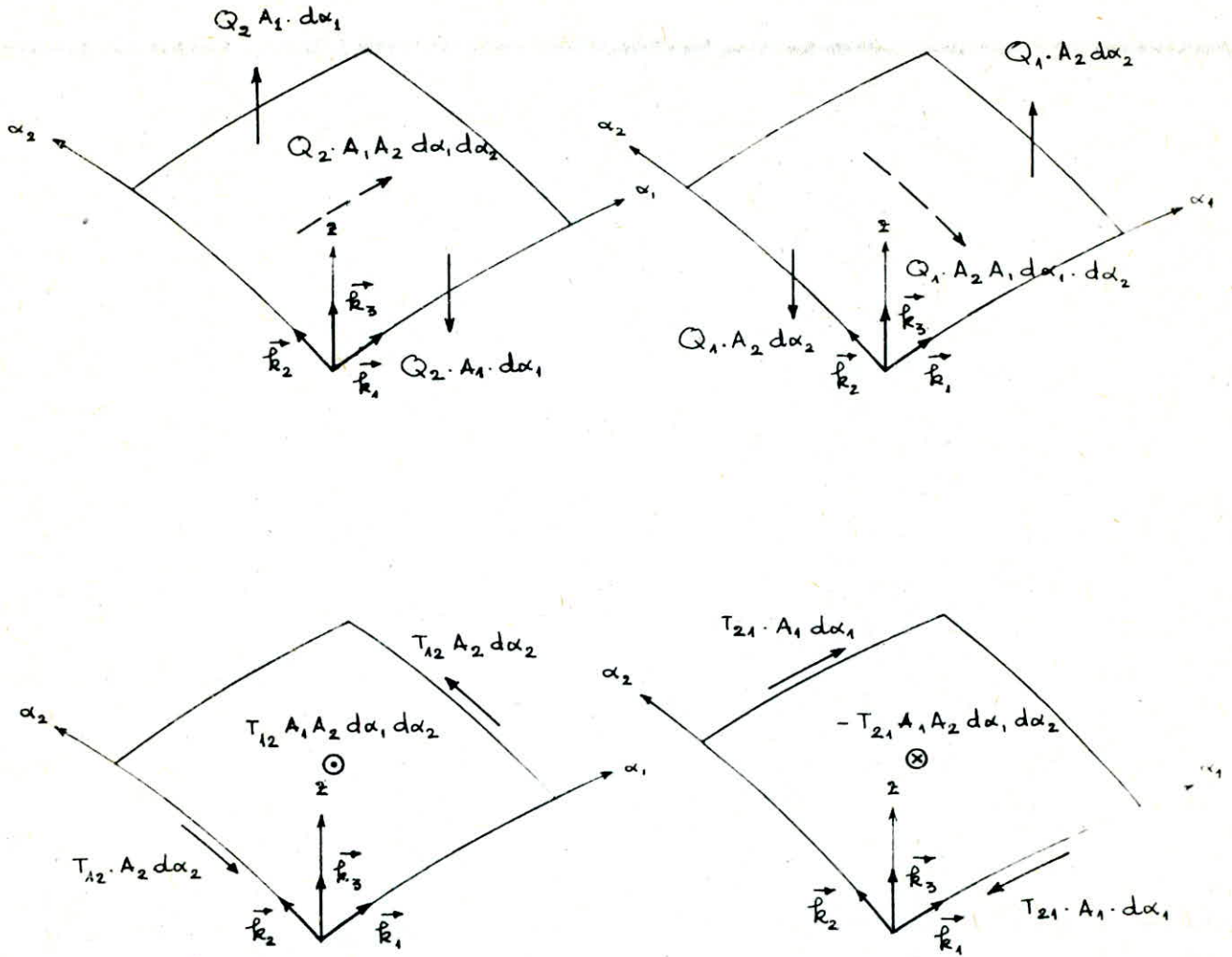


Fig N°7

Donc ,

$$\vec{M}_0 = \left( \vec{M}^{(1)} + \frac{\partial \vec{M}^{(1)}}{\partial \alpha_1} \cdot d\alpha_1 \right) - \vec{M}^{(1)} + \left( \vec{M}^{(2)} + \frac{\partial \vec{M}^{(2)}}{\partial \alpha_2} \cdot d\alpha_2 \right) - \vec{M}^{(2)}$$

$$+ \left[ Q_2 \cdot \vec{k}_1 - Q_1 \cdot \vec{k}_2 + (T_{12} - T_{21}) \vec{k}_3 \right] \cdot A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0$$

avec :

$$\vec{M}^{(1)} = (M_1 \cdot \vec{k}_2 + M_{12} \cdot \vec{k}_1) A_2 \cdot d\alpha_2$$

$$\vec{M}^{(2)} = (M_{21} \cdot \vec{k}_2 + M_2 \cdot \vec{k}_1) A_1 \cdot d\alpha_1$$

cette équation peut s' écrire sous la forme scalaire suivante :

$$(2-12) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial A_2 \cdot M_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \cdot M_2}{\partial \alpha_2} - M_1 \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + Q_2 \right] = 0 \\ & \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial A_2 \cdot M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \cdot M_{21}}{\partial \alpha_2} + M_{12} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_2 \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - Q_1 \right] = 0 \\ & T_{12} - T_{21} + \frac{M_{21}}{R_2} - \frac{M_{12}}{R_1} = 0 \end{aligned} \right.$$

Les équations d'équilibres dynamiques sont alors aux nombres de cinq : 3 équations de projections des forces (2-11) et 2 équations des moments (2-12).

Les inconnus sont aux nombres de neuf :

$$N_1, N_2, T_{21} = T_{12}, M_1, M_2, M_{21} = M_{12}, Q_1, Q_2.$$

Donc, nous avons abouti à un système de cinq équations à neuf inconnus, c'est à dire un système hyperstatique.

Dans le cas de la théorie classique des coques minces élastiques la loi de Hooke est sous la forme suivante :

$$(2-13) \left\{ \begin{aligned} N_1 &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 + \nu \cdot \epsilon_2) \\ N_2 &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} (\epsilon_2 + \nu \cdot \epsilon_1) \\ T_{12} &= \frac{E \cdot h}{1 + \nu} \left( \epsilon_{12} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\chi}{R_2} \right) \\ T_{21} &= \frac{E \cdot h}{1 + \nu} \left( \epsilon_{12} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\chi}{R_1} \right) \\ M_1 &= D \cdot (\chi_1 + \nu \cdot \chi_2) \\ M_2 &= D \cdot (\chi_2 + \nu \cdot \chi_1) \\ M_{12} &= D \cdot (1 - \nu) \cdot \chi \end{aligned} \right.$$

avec :

E : module d'élasticité du matériau .

$\nu$  : coefficient de poisson .

D : rigidité de flexion de la coque , avec  $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$

## 5 - Conditions aux limites

Soit une coque dont les bords coïncident avec les lignes de coordonnées.

Les conditions aux limites de la coque peuvent être dynamique, cinématiques ou sous forme mélangée selon les conditions de fixation des bords.

Dans le cas d'un encastrement, elles sont cinématiques. Donc, le long de la ligne de coordonnées  $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \text{const}$ , tous les points de la surface de bord et cette ligne de coordonnées, doivent être immobiles.

Quelque soit  $z$  tel que  $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$

$$(2-14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \cdot u_0 - \frac{z}{A_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = 0 \\ u_2 = \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \cdot v_0 - \frac{z}{A_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = 0 \\ u_3 = W(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \end{array} \right.$$

Nous avons donc :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad W(\alpha_1^0, \alpha_2) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ W(\alpha_1^0, \alpha_2) = 0 \end{array} \right\} \text{Immobilisation du point moyen d'un} \\ \text{élément normal à la surface moyenne.}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = 0 \quad : \quad \text{Angle de rotation nul autour de la} \\ \text{ligne de coordonnées correspondante.}$$



Dans le cas des conditions aux limites sous la forme mélangée, pour le bord  $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \text{Const}$  nous avons :

$$1- \quad u_0 = 0 \quad , \quad v_0 = 0 \quad , \quad w = 0 \quad , \quad M_1 = 0$$

cette condition correspond à la fixation d'articulation immobile.

$$2- \quad W = 0 \quad , \quad N_1 = 0 \quad , \quad T_{12} = 0 \quad , \quad M_1 = 0$$

cette condition représente le bord d'appui libre immobile.

Dans le cas des conditions aux limites sous la forme dynamique, pour un bord libre, elles sont aux nombres de cinq dont trois efforts :  $N_1$ ,  $T_{12}$ ,  $Q_1$  et deux moments :  $M_1$ ,  $M_2$ . Mais en utilisant les efforts tranchants généraux et les efforts généraux de glissement nous aurons :

$$N_1 = 0 \quad , \quad T_{12}^* = T_{12} + \frac{M_{12}}{R_2} = 0 \quad , \quad M_1 = 0 \quad , \quad Q_1^* = Q + \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} = 0$$

### Remarque

Dans plusieurs cas les conditions aux limites peuvent être hétérogènes.

Les conditions les plus diffuses sont représentées suivant le tableau - A - :

TABLEAU - A -

Notation	Condition de fixation	Conditions aux limites suivant le bord $\alpha_1 = \alpha_0 = \text{const}$
Ba1	Bord d'appui libre suivant la direction $\alpha_1$ (condition de Navier)	$W = 0$ ; $M_1 = 0$ $N_1 = 0$ ; $u_2 = 0$
Ba	Bord d'appui immobile	$W = 0$ ; $M_1 = 0$ $u_1 = 0$ ; $u_2 = 0$
Ba12	Bord d'appui libre suivant les directions tangentes	$W = 0$ ; $M_1 = 0$ $N_1 = 0$ $T_{12}^* = T_{21} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0$
Be	Bord encasté absolu	$W = 0$ ; $\theta_1 = 0$ $u_1 = 0$ ; $u_2 = 0$
Be1	Bord encasté libre suivant la direction $\alpha_1$	$W = 0$ ; $\theta_1 = 0$ $N_1 = 0$ ; $u_2 = 0$
Be12	Bord encasté libre suivant les directions tangentes	$W = 0$ ; $\theta_1 = 0$ $N_1 = 0$ $T_{12}^* = T_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0$
Be2	Bord encasté libre suivant la direction $\alpha_2$	$W = 0$ ; $\theta_1 = 0$ $u_1 = 0$ $T_{12}^* = T_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0$
B	Bord libre absolu	$M_1 = 0$ ; $N_1 = 0$ $Q_1^* = Q_1 + \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} = 0$ $T_{12}^* = T_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0$

## 6 - Théorie technique des coques en pente douce

Les systèmes d'équations d'équilibre (2-11) et (2-12) ne sont pas opérationnels pour notre étude. Par conséquent nous utiliserons la théorie technique de moment des coques pour avoir une forme plus simplifiée.

cette théorie découle des hypothèses suivantes :

1- L'influence des composantes de traction dans la surface moyenne sur les courbures et la torsion  $\chi_1, \chi_2, \chi$  peut être négligée.

2- Les termes contenant la courbure gauche  $\frac{1}{R_1 R_2}$  sont négligés pour les coques de petite flèche.

Nous introduisons la fonction de contrainte  $\Phi = \Phi(\alpha_1, \alpha_2)$  de sorte que :

$$(2-15) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{A_1^2 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \\ N_2 = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{A_1^2 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \\ T_{12} = - \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \right) \end{array} \right.$$

Et les relations entre les moments et les déplacements sont :

$$(2-16) \quad \begin{cases} M_1 = -D \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2^2} \right) \\ M_2 = -D \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1^2} \right) \\ M_{12} = - (1 - \nu) \cdot D \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \cdot \partial \alpha_2} \end{cases}$$

Nous pouvons écrire les systèmes d'équations (2-11) et (2-12) sous la forme suivante :

$$(2-17) \quad \begin{cases} D \cdot \nabla^4 W + \nabla_k^2 \Phi - z = 0 \\ \frac{1}{E \cdot h} \cdot \nabla^4 \Phi - \nabla_k^2 W = 0 \end{cases}$$

avec :  $q_1 = q_2 = 0$  ,  $z = q_3 - e \cdot h \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$

L'expression des opérateurs  $\nabla^4$  et  $\nabla_k^2$  sont :

$$\nabla_k^2 = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right]$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4}$$

L'équation (2-17) est appelée 'Equation des coques minces en pente douce' ou 'Equation de la théorie d'effet de bord'.

Dans le cas d'une coque mince en pente douce nous pouvons passer du système de coordonnées curviligne  $(0, \alpha_1, \alpha_2, z)$  au système de coordonnées cartésien  $(0, x, y, z)$  [ Fig N° 8 ] , en supposant que la projection de la surface moyenne dans le plan  $(Oxy)$  est égale à elle même . Par conséquent , les coordonnées de tous points appartenant à la coque sont entièrement définies dans le repère  $(0, x, y, z)$  ; les coefficients de la première forme Quadratique sont constants et égales à  $A_1 = A_2 = 1$  .

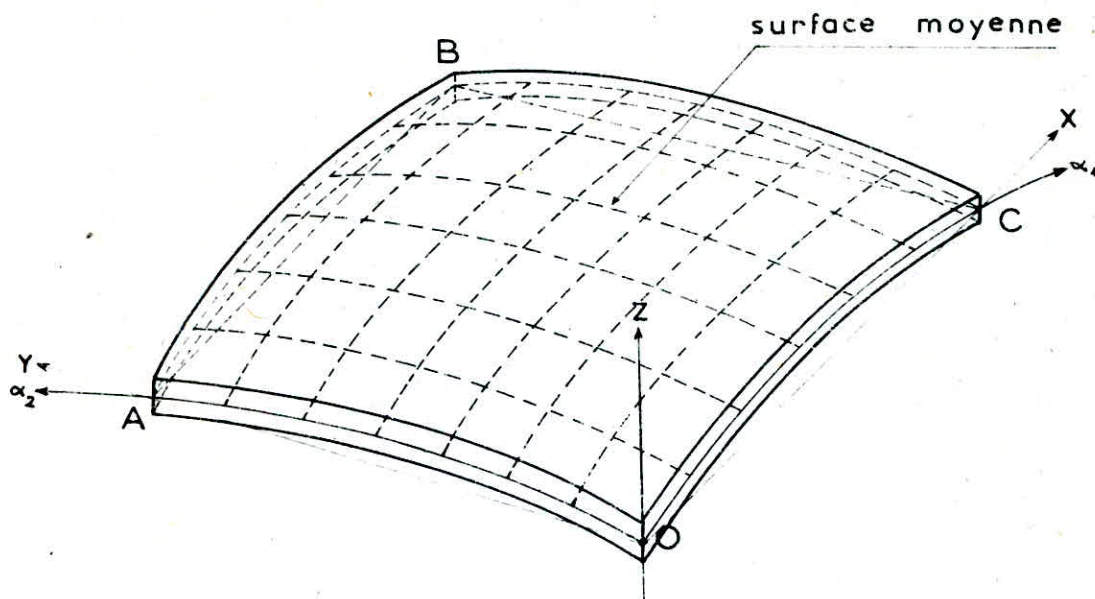


Fig N°8

les efforts  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $T_{xy}$  et les moments  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  sont alors :

$$(2-18) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ T_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial y} \end{array} \right.$$

$$(2-19) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = - (1 - \nu) \cdot D \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \cdot \partial y} \end{array} \right.$$

## CHAPITRE III

PRINCIPE DE LA DETERMINATION

DES CHARGES SISMIQUES

SUR UNE TOITURE

EN FORME DE COQUE

Trouver des méthodes permettant de déterminer les contraintes et les déformations dans l'ouvrage est l'une des tâches principales de la technique parasismique.

Lors du séisme, la secousse sismique se propage à partir du foyer sous forme d'ondes de divers types : ondes de volume (P & S) et ondes de surface (ondes de Rayleigh R, ondes Love Q).

Les ondes sismiques traversant la couche de roche solide (ou un sous sol) provoquent ainsi des oscillations des couches d'activités du sol et de l'ouvrage. Ces oscillations se propagent sous forme d'ondes longitudinales et transversales dans les couches d'activités, entraînant ainsi en chaque point M du palier de la fondation, des déplacements verticaux et horizontaux  $y_f, x_f$  ( $\dot{y}_f, \dot{x}_f, \ddot{y}_f, \ddot{x}_f$ ) et en chaque point K de l'ouvrage, des forces  $S_k(\alpha, \beta, t)$  appelées "Forces Sismiques" ou "charges Sismiques".

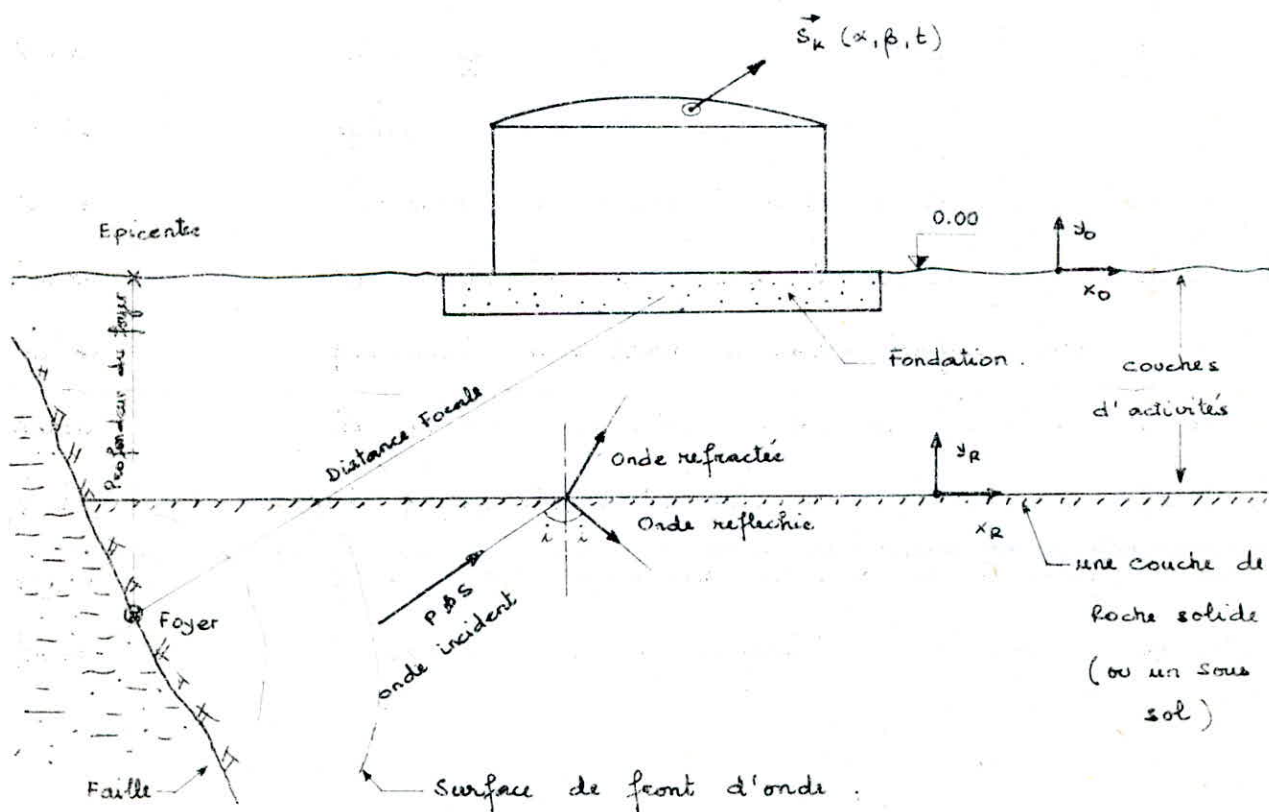


Fig N°9

Les charges sismiques appliquées sur chaque point de l'ouvrage peuvent être déterminées par la formule générale suivante :

$$(3-1) \quad S_{ik} = k_s \cdot q \cdot \beta_i(t) \cdot \eta_{ik}$$

avec :

$\eta_{ik}$  : le coefficient de la forme de vibrations libre de l'ouvrage.

$$\eta_{ik} = \frac{\int_0^a \int_0^b q(\alpha, \beta) \cdot \mathcal{C}_i(\alpha, \beta) \cdot d\alpha \cdot d\beta}{\int_0^a \int_0^b q(\alpha, \beta) \cdot \mathcal{C}_i^2(\alpha, \beta) \cdot d\alpha \cdot d\beta}$$

$\mathcal{C}_i(\alpha, \beta)$  : fonction qui décrit la forme de vibrations libre correspondante au mode  $i$ .

$\beta_i(t)$  : le coefficient dynamique dépendant du temps, des périodes de vibrations et des caractéristiques d'amortissement de vibration de l'ouvrage et du sol. Ce coefficient est déterminé suivant les réglementations sismiques de chaque pays.

$q$  :  $q = m_j \cdot g$ ,  $m_j$  étant la masse par unité de surface de la coque au point  $j$ , et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

$k_s$  : coefficient sismique

$$k_s = \frac{j}{g}$$

$S_{ik}$  : la charge sismique appliquée au point  $K$ , du système de calcul de l'ouvrage correspondant au mode  $i$  des vibrations libres.

Dans la formule (3-1) on remarque que la charge sismique appliquée sur la coque dépend des périodes et des modes de vibrations libres.

Dans le cas des coques de petite flèche, les fréquences et les modes de vibrations peuvent être déterminés par la résolution du système des équations différentielles aux dérivées partielles des vibrations libres de la théorie de moment des coques en pente douce :



$$(3-2) \quad \begin{cases} D \cdot \nabla^4 W + \nabla_k^2 \Phi + \frac{\gamma \cdot h}{g} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{1}{E \cdot h} \cdot \nabla^4 \Phi - \nabla_k^2 W = 0 \end{cases}$$

avec :  $\gamma$  : poids volumique

$g$  : accélération de pesanteur

$t$  : temps

$D$  : rigidité de flexion de la coque

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$k_1 = \frac{1}{R_1}$$

$$k_2 = \frac{1}{R_2}$$

$$\nabla_k^2 = k_2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + k_1 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}$$

### 1 - Détermination de la charge sismique verticale

Quand la fondation de l'ouvrage subit des mouvements verticaux, en chaque point de la coque est engendré l'accélération verticale  $\ddot{y}_v$ .

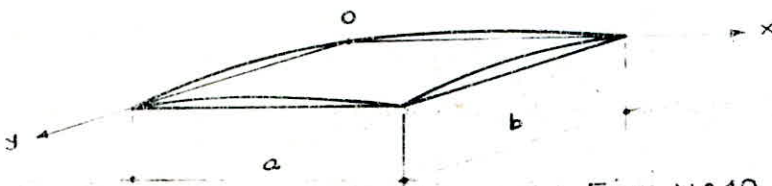
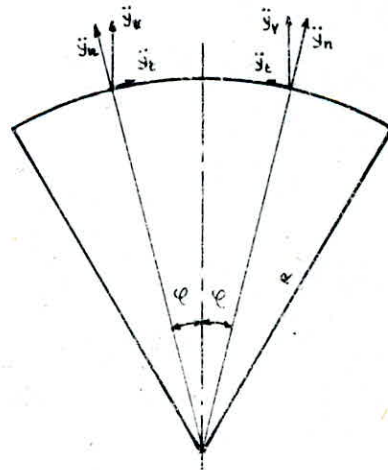
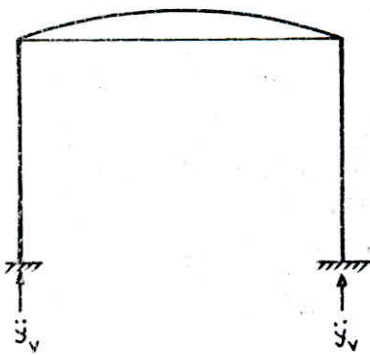


Fig N°10

Avec l'aide de la pente douce, nous pouvons écrire :  $\ddot{J}_v = \ddot{J}_n$ ,  
 c'est pourquoi, chaque point  $k$  de la surface de la coque, subit  
 une charge sismique normale à cette surface et correspondante au  
 mode  $i$ , suivante :

$$(3-3) \quad S_{ik} = K_s \cdot q \cdot \beta_i(t) \cdot r_{ik}$$

Dans notre cas :

$$r_{ik} = \frac{16 \cdot \sin \lambda_n x \cdot \sin \mu_m y}{\pi^2 \cdot m \cdot n}$$

$m, n$  est le nombre d'une demi-onde dans les directions  
 $x$  et  $y$  quand la coque vibre suivant le mode  $i$ .

Dans le cas des coques en pente douce appuyées librement sur son  
 contour les conditions aux limites sont données par la méthode suivante :

$$\text{Pour } x=0, x=a \quad v = w = M_y = N_y = 0$$

$$\text{Pour } y=0, y=b \quad u = w = M_x = N_x = 0$$

Par la méthode de série double trigonométrique, le professeur  
 O.D. Aniacharvili, a proposé à ce problème, la solution suivante :

$$(3-4) \quad \begin{cases} \Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin \lambda_n x \cdot \sin \mu_m y \cdot \sin \omega_{mn} t \\ W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cdot \sin \lambda_n x \cdot \sin \mu_m y \cdot \sin \omega_{mn} t \end{cases}$$

$$\text{avec : } \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \mu_m = \frac{m\pi}{b}$$

Dans le cas d'une coque sphérique  $R_1 = R_2 = R$ , la fréquence est  
 donnée par :

$$(3-5) \quad \omega_i^2 = \omega_{mn}^2 = \frac{g}{R^3} \cdot \left[ D(\lambda_n^2 + \mu_m^2) + \frac{Eh}{R^2} \right]$$

$$\text{et } T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$$

Ainsi nous pouvons obtenir les fréquences et les formes de vibrations libres par la résolution du système d'équation (3-2) ou par des études expérimentales, d'où la charge sismique est déterminée.

L'expérience a montré que la fréquence la plus faible de vibrations libres verticales de la coque en pente douce dont sa projection est un plan carré,  $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,15} \text{ s}^{-1}$ , correspond à  $\frac{3}{2}$  ondes dans deux sections transversales perpendiculaires, ainsi la formule (3-3) devient :

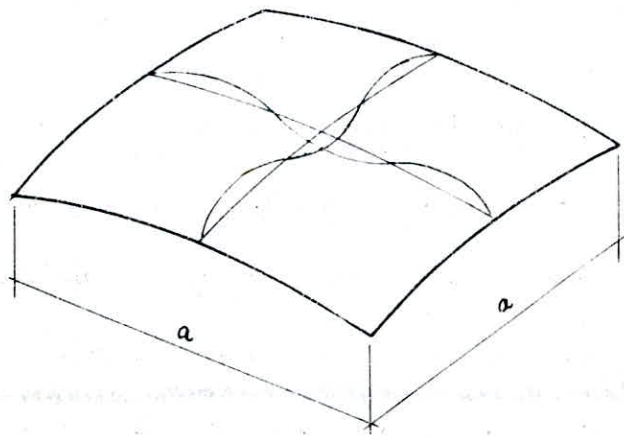
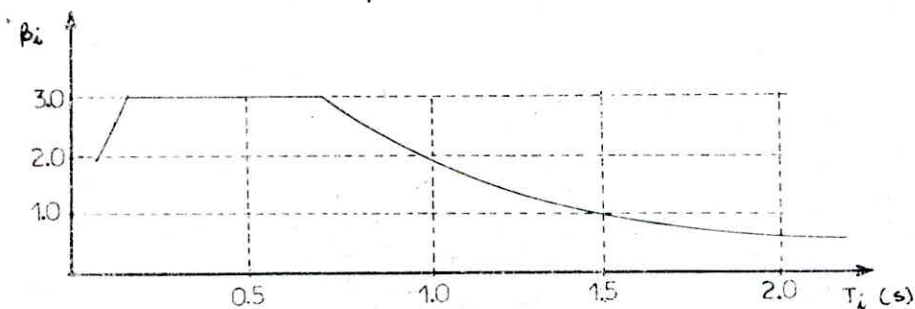


Fig N°11

Le coefficient dynamique peut être déterminé par la formule :

$$\beta = \frac{1}{T} \quad \text{avec} \quad 0,8 \leq \beta \leq 3$$



Graphé proposé par le prof. KORTCHINSKY

Dans notre cas on prend  $\beta = 3$  ( $\frac{1}{0,15} > 3$ ), d'où on a :

$$(3-6) \quad \beta \cdot \eta_{ik} = 0,54 \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{a}$$

et la charge sismique appliquée sur la surface moyenne de la coque sera :

$$(3-7) \quad S_K = 0,54 \cdot K_S \cdot q \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{a}$$

Pour le degré du séisme 9 à l'échelle M.S.K  $K_S = \frac{1}{10}$ ,

$$S_K = 5,4 \cdot 10^{-2} \cdot q \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{a}$$

Pour le degré du séisme 8 à l'échelle M.S.K  $K_S = \frac{1}{20}$ ,

$$S_K = 2,7 \cdot 10^{-2} \cdot q \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{a}$$

Pour le degré du séisme 7 à l'échelle M.S.K  $K_S = \frac{1}{40}$ ,

$$S_K = 1,35 \cdot 10^{-2} \cdot q \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{a}$$

## 2 - Détermination de la charge sismique horizontale

si la fondation de l'ouvrage subit un mouvement horizontal, l'accélération horizontale de chaque point de la coque se décompose en deux composantes :  $\ddot{y}_n$  et  $\ddot{y}_t$ .

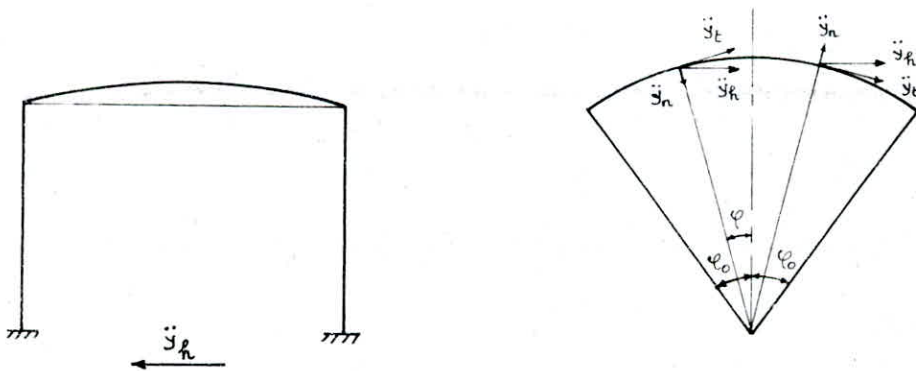


Fig N°12

Le professeur B. Z. Vlacov a démontré qu'on peut assimiler des coques de petite flèche à un corps rigide dans la surface moyenne si  $\frac{h}{R_{\min}} \leq \frac{1}{30}$ .

Dans notre cas  $h = 0,115$  m et  $R = 52,75$  m  $\left( \frac{0,115}{52,75} < \frac{1}{30} \right)$ , donc la charge sismique tangentielle  $S_t$  à la surface moyenne peut s'écrire :

$$(3-8) \quad S_t = \frac{\ddot{y}_t}{g} \cdot q \cdot \beta(t)$$

Pour les structures rigides nous pouvons prendre  $\beta = 3$ .

comme :  $\ddot{y}_t = \ddot{y}_h \cdot \cos \varphi$ , alors  $S_t$  devient

$$(3-9) \quad S_t = 3 \cdot k_s \cdot q \cdot \cos \varphi$$

avec :  $k_s = \frac{\ddot{y}_h}{g}$

Parce que la pente est douce, la variation des charges d'inertie, du bord au centre de la coque est très faible.

Pour les calculs pratiques on peut adopter que les charges sont uniformes réparties sur la surface de la coque.

CHAPITRE IV

CALCUL STATIQUE DES COQUES  
EN PENTE DOUCE SOUMISES A  
DES CHARGES DONNEES

# 1 - Calculs et résultats numériques d'une coque paraboloidé elliptique

## Methode serie double trigonométrique en cosinus

soit une coque paraboloidé elliptique en pente douce d'épaisseur constante  $h$ , de dimension sur le plan  $(a \times b)$  et appuyée sur son contour  $(ABCD)$ .

L'équation de sa surface moyenne est :  $z = 2f \cdot \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$ .

Nous prenons les axes de coordonnées  $(Oxyz)$  d'après la figure suivante:

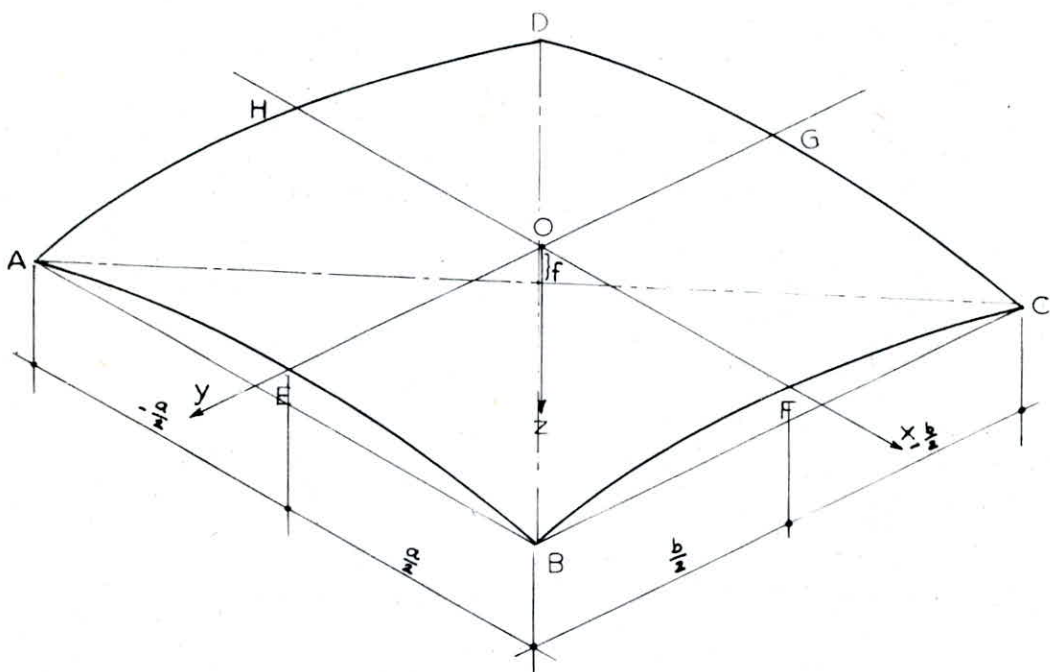


Fig N° 13

$f$  : flèche maximum entre le sommet  $O$  de la coque et le plan  $ABCD$ .

L'équation d'équilibre pour une coque en pente douce est :

$$(4-1) \quad \begin{cases} D \cdot \nabla^4 W + \nabla_k^2 \Phi = q_z \\ \frac{1}{Eh} \cdot \nabla^4 \Phi - \nabla_k^2 W = 0 \end{cases}$$

Déterminons les fonctions  $W(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  de telle sorte que ces dernières satisfassent le système d'équation (4-1) et les conditions aux limites pour une coque appuyée librement sur son contour, suivantes :

Pour  $x = -\frac{a}{2}$  et  $x = \frac{a}{2}$  :  $W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$  ,  $N_y = 0$

Pour  $y = -\frac{b}{2}$  et  $y = \frac{b}{2}$  :  $W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$  ,  $N_x = 0$

Pour cela , exprimons les fonctions  $W(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  sous la forme de serie double trigonometrique en cosinus suivante :

$$(4-2) \quad \begin{cases} W(x, y) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} A_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \Phi(x, y) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} B_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \end{cases}$$

Exprimons aussi la charge  $q_z$  sous la forme de serie double trigonometrique en cosinus :

$$(4-3) \quad q_z = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} C_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}$$

Avec les fonctions  $W(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  choisis , les conditions aux limites sont satisfaites automatiquement .

Nous remarquons que pour une coque paraboloides elliptique de petite fleche  $\nabla_k^2$  et  $\nabla^4$  sont donnees par :

$$(4-4) \quad \begin{cases} \nabla_k^2 = 4f \cdot \left( \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{cases}$$

En remplaçant les relations (4-2) , (4-3) et (4-4) dans

(4-1) nous obtenons :

$$(4-6) \quad \begin{cases} D \cdot \pi^4 \cdot \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \cdot A_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} - \frac{4f\pi^2}{a^2 b^2} \cdot \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \\ (m^2 + n^2) \cdot B_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} = \sum \sum C_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \\ E \cdot h \cdot \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \cdot B_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} + \frac{4f\pi^2}{a^2 b^2} \cdot \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \\ (m^2 + n^2) \cdot A_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} = 0 \end{cases}$$

Multiplications les deux membres de chaque equation du systeme (4-6) par

$\cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \cdot dx dy$  et integrons deux fois dans le domaine  $\left[ -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}; -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right]$



comme :

$$(4-7) \quad \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos \frac{i\pi x}{L} \cdot \cos \frac{j\pi x}{L} \cdot dx = \frac{L}{2} \quad \text{pour } i=j$$

Alors nous avons :

$$(4-8) \quad \begin{cases} D\pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \cdot A_{mn} - \frac{4f\pi^2}{a^2b^2} \cdot (m^2 + n^2) \cdot B_{mn} = C_{mn} \\ \frac{\pi^4}{E \cdot h} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \cdot B_{mn} + \frac{4f\pi^2}{a^2b^2} \cdot (m^2 + n^2) \cdot A_{mn} = 0 \end{cases}$$

La résolution du système d'équation (4-8) nous donne :

$$(4-9) \quad \begin{cases} A_{mn} = \frac{\frac{1}{Eh} \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}{\frac{D\pi^4}{E \cdot h} \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^4 + \frac{16f^2}{a^4b^4} \cdot (m^2 + n^2)^2} \cdot C_{mn} \\ B_{mn} = - \frac{\frac{4f}{a^2b^2\pi^2} \cdot (m^2 + n^2)}{\frac{D\pi^4}{Eh} \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^4 + \frac{16f^2}{a^4b^4} \cdot (m^2 + n^2)^2} \cdot C_{mn} \end{cases}$$

Le coefficient  $C_{mn}$  est déterminé par :

$$q_z = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} C_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}$$

Multiplications les deux membres de cette équation ci-dessus par

$$\cos \frac{m'\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n'\pi y}{b} \cdot dx dy \quad \text{et intégrons deux fois entre } \left[ -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} ; -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right].$$

En tenant compte la relation (4-7) nous pouvons obtenir :

$$(4-10) \quad C_{mn} = \frac{4}{ab} \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q_z \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \cdot dx dy$$

Les calculs numériques dans le cas d'une coque paraboloides elliptique vont être effectués avec une charge constante  $q_z = 400 \text{ Kg/m}^2$ .

Les caractéristiques de la coque sont :

$$a = b = 40 \text{ m} \quad ; \quad f = 8 \text{ m} \quad ; \quad h = 0,115 \text{ m} \quad ; \quad \nu = 0,2 \quad ;$$

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Kg/m}^2 \quad ; \quad D = 396061,1979 \text{ Kg.m}.$$

Nous prenons  $m = 1, 2, 3$  et  $n = 1, 2, 3$ .

Alors les coefficients  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  et  $C_{mn}$  sont :

$$\begin{array}{lll}
 A_{11} = 4,697 \cdot 10^{-3} & B_{11} = -2626945,847 & C_{11} = 648,456 \\
 A_{13} = -1,549 \cdot 10^{-3} & B_{13} = 173314,070 & C_{13} = -216,152 \\
 A_{31} = -1,549 \cdot 10^{-3} & B_{31} = 173314,070 & C_{31} = -216,152 \\
 A_{33} = 5,043 \cdot 10^{-4} & B_{33} = -31337,273 & C_{33} = 72,051
 \end{array}$$

Les fonctions  $W(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  seront obtenues par :

$$\begin{aligned}
 W(x, y) = & 4,697 \cdot 10^{-3} \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} - 1,549 \cdot 10^{-3} \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\
 & - 1,549 \cdot 10^{-3} \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 5,043 \cdot 10^{-4} \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [m]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y) = & -2626945,847 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 173314,070 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\
 & + 173314,070 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} - 31337,273 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [kg \cdot m^2]
 \end{aligned}$$

Les relations (2-18) et (2-19) du chapitre II nous permettent d'obtenir les moments et les efforts :

$$\begin{aligned}
 M_x = & 13,770 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} - 10,596 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\
 & - 34,816 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 13,306 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [kg \cdot m]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y = & 13,770 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} - 34,816 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\
 & - 10,596 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 13,306 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [kg \cdot m]
 \end{aligned}$$

$$M_{xy} = -9,180 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 9,082 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ + 9,082 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 8,871 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [ \text{Kg.m} ]$$

$$N_x = 16204,323 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} - 9621,795 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\ - 1069,088 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 1739,736 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [ \text{Kg.} ]$$

$$N_y = 16204,323 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} - 1069,088 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\ - 9621,795 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 1739,736 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [ \text{Kg.} ]$$

$$T_{xy} = 16204,323 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 3207,265 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ - 3207,265 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 1739,736 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [ \text{Kg.} ]$$

Pour mieux visualiser les variations des moments et des efforts, représentons les dans les tableaux et figures suivants :

Tableau N° 1 pour les valeurs de  $M_x$  [Kg.m]

X(m)	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
Y(m)	-20	0	0	0	0	0	0	0	0
	-15	0	29.43	28.76	4.11	-10.56	4.11	28.76	29.43
	-10	0	38.03	36.24	2.89	-16.80	2.89	36.24	38.03
	-5	0	28.33	25.27	-2.35	-18.41	-2.35	25.27	28.33
	0	0	21.09	17.45	-5.30	-18.34	-5.30	17.45	21.09
	5	0	28.33	25.27	-2.35	-18.41	-2.35	25.27	28.33
	10	0	38.03	36.24	2.89	-16.80	2.89	36.24	38.03
	15	0	29.43	28.76	4.11	-10.56	4.11	28.76	29.43
	20	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau N°2 pour les valeurs de  $M_y$  [Kg-m]

X(m)	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
Y(m)	-20	0	0	0	0	0	0	0	0
-20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-15	0	29.43	38.03	28.33	21.09	28.33	38.03	29.43	0
-10	0	28.76	36.24	25.27	17.45	25.27	36.24	28.76	0
-5	0	4.11	2.89	-2.35	-5.30	-2.35	2.89	4.11	0
0	0	-10.56	-16.80	-18.41	-18.34	-18.41	-16.80	-10.56	0
5	0	4.11	2.89	-2.35	-5.30	-2.35	2.89	4.11	0
10	0	28.76	36.24	25.27	17.45	25.27	36.24	28.76	0
15	0	29.43	38.03	28.33	21.09	28.33	38.03	29.43	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau N°3 pour les valeurs de  $M_{xy}$  [Kg-m]

X(m)	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
Y(m)	-20	-23.74	-0.22	9.60	0	-9.60	0.22	23.74	36.22
-20	-36.22	-23.74	-0.22	9.60	0	-9.60	0.22	23.74	36.22
-15	-23.74	-15.56	-0.12	6.31	0	-6.31	0.12	15.56	23.74
-10	-0.22	-0.12	0.06	0.11	0	-0.11	-0.06	0.12	0.22
-5	9.60	6.31	0.11	-2.50	0	2.50	-0.11	-6.31	-9.60
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-9.60	-6.31	-0.11	2.50	0	-2.50	0.11	6.31	9.60
10	0.22	0.12	-0.06	-0.11	0	0.11	0.06	-0.12	-0.22
15	23.74	15.56	0.12	-6.31	0	6.31	-0.12	-15.56	-23.74
20	36.22	23.74	0.22	-9.60	0	9.60	-0.22	-23.74	-36.22

Tableau N°4 pour les valeurs de  $N_x$  [Kg.]

X (m)	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
Y (m)	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
-20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-15	0	7637.82	12096.43	13170.16	13074.08	13170.16	12096.43	7637.82	0
-10	0	8823.45	14317.47	16111.66	16275.69	16111.66	14317.47	8823.45	0
-5	0	4617.45	8209.99	10306.23	10966.80	10306.23	8209.99	4617.45	0
0	0	1899.43	4180.33	6338.11	7253.18	6338.11	4180.33	1899.43	0
5	0	4617.45	8209.99	10306.23	10966.80	10306.23	8209.99	4617.45	0
10	0	8823.45	14317.47	16111.66	16275.69	16111.66	14317.47	8823.45	0
15	0	7637.82	12096.43	13170.16	13074.08	13170.16	12096.43	7637.82	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau N°5 pour les valeurs de  $N_y$  [Kg.]

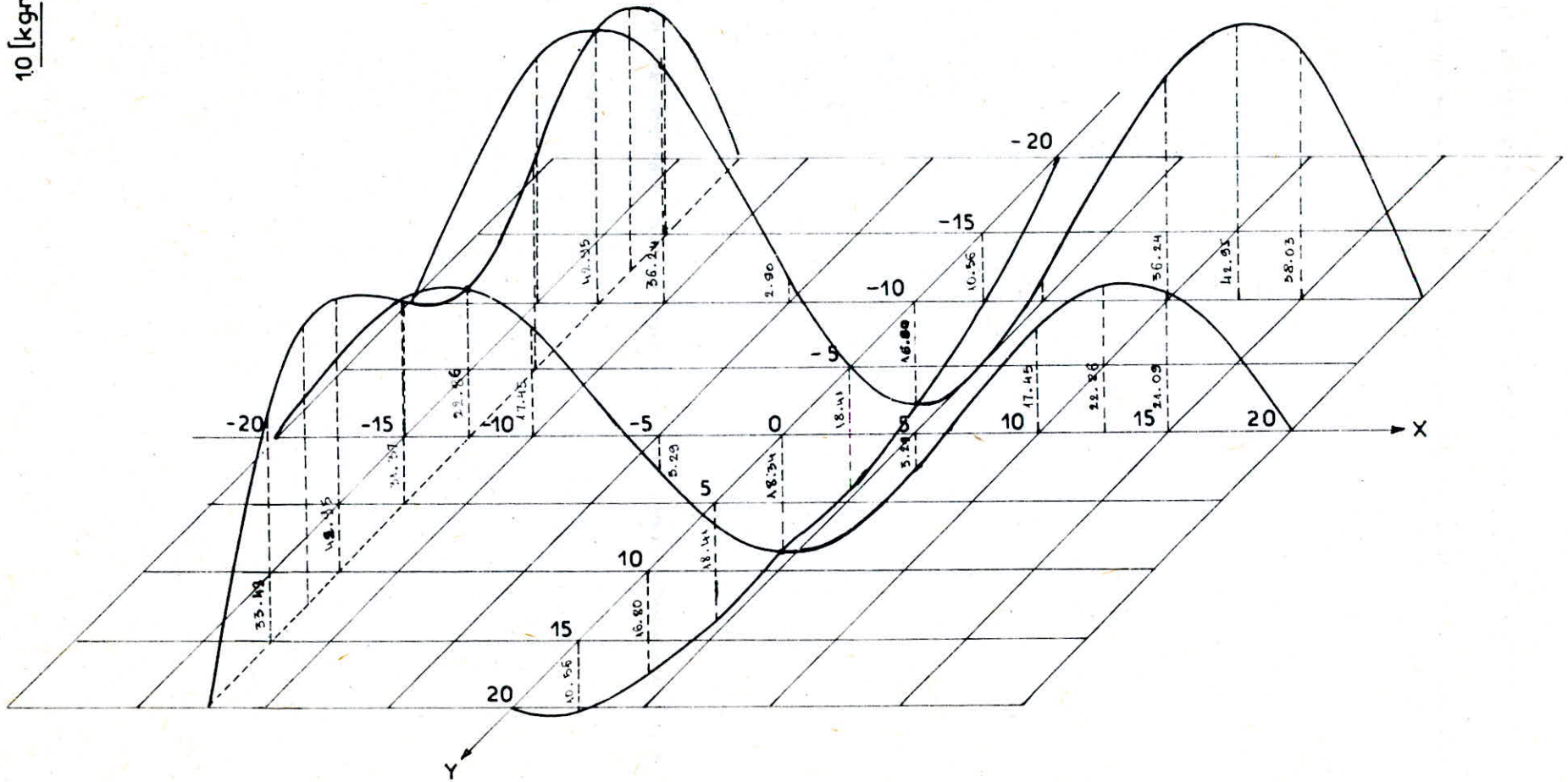
X (m)	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
Y (m)	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
-20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-15	0	7637.82	8823.45	4617.45	1899.43	4617.45	8823.45	7637.82	0
-10	0	12096.43	14317.47	8209.99	4180.33	8209.99	14317.47	12096.43	0
-5	0	13170.16	16111.66	10306.23	6338.11	10306.23	16111.66	13170.16	0
0	0	13074.08	16275.69	10966.80	7253.18	10966.80	16275.69	13074.08	0
5	0	13170.16	16111.66	10306.23	6338.11	10306.23	16111.66	13170.16	0
10	0	12096.43	14317.47	8209.99	4180.33	8209.99	14317.47	12096.43	0
15	0	7637.82	8823.45	4617.45	1899.43	4617.45	8823.45	7637.82	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau N°6 pour les valeurs de  $T_{xy}$  [Kg.]

X(m) Y(m)	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
-20	24358.59	19827.40	10228.04	2858.06	0	-2858.06	-10228.04	-19827.40	-24358.59
-15	19827.40	16353.94	8887.85	2846.12	0	-2846.12	-8887.85	-16353.94	-19827.40
-10	10228.04	8887.85	5764.76	2558.27	0	-2558.27	-5764.76	-8887.85	-10228.04
-5	2858.06	2846.12	2558.27	1590.15	0	-1590.15	-2558.27	-2846.12	-2858.06
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-2858.06	-2846.12	-2558.27	-1590.15	0	1590.15	2558.27	2846.12	2858.06
10	-10228.04	-8887.85	-5764.76	-2558.27	0	2558.27	5764.76	8887.85	10228.04
15	-19827.40	-16353.94	-8887.85	-2846.12	0	2846.12	8887.85	16353.94	19827.40
20	-24358.59	-19827.40	-10228.04	-2858.06	0	2858.06	10228.04	19827.40	24358.59

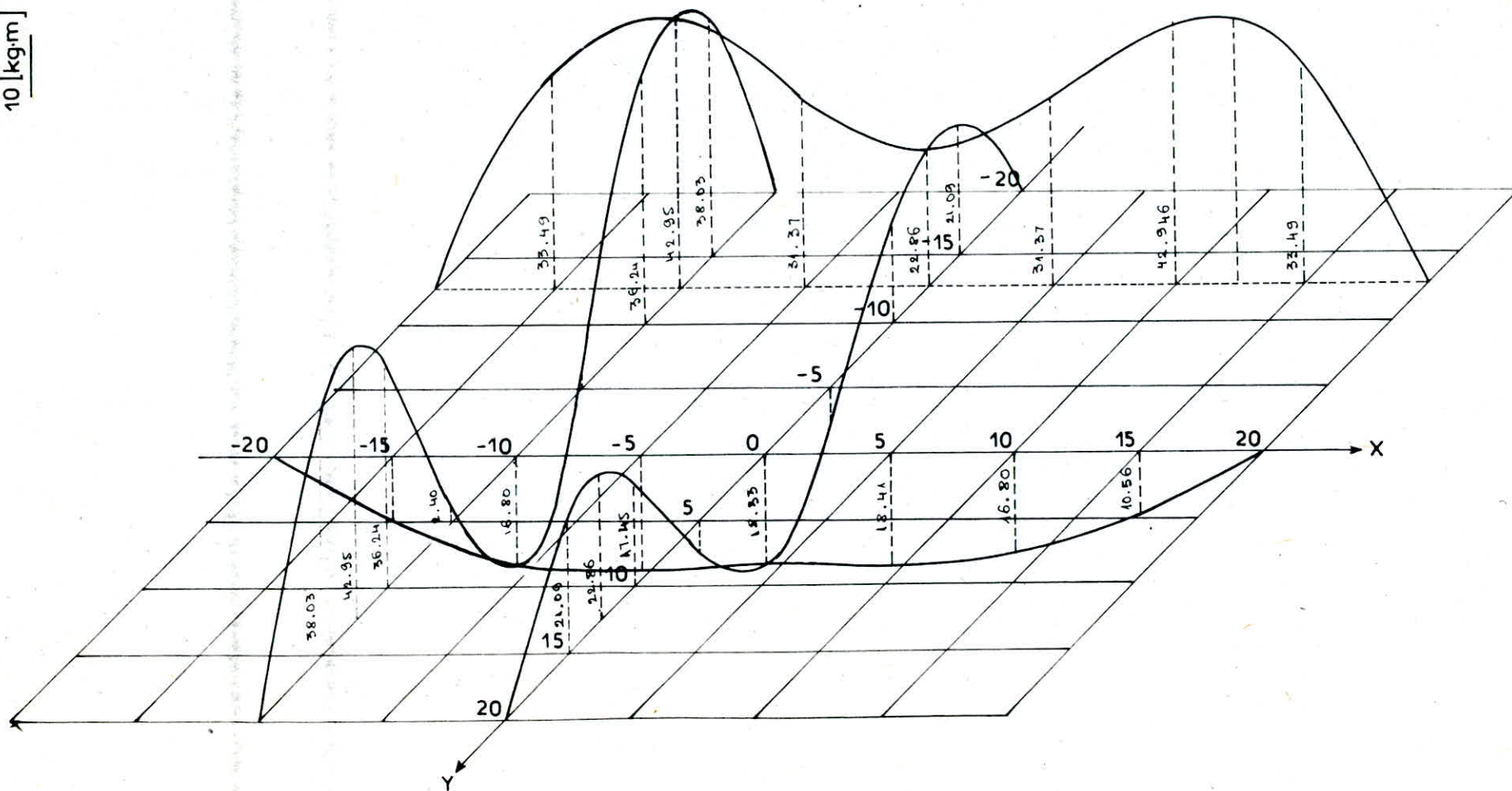
Graphe N°1 pour les valeurs de  $M_x$  [Kg.m]

10 [kgm]



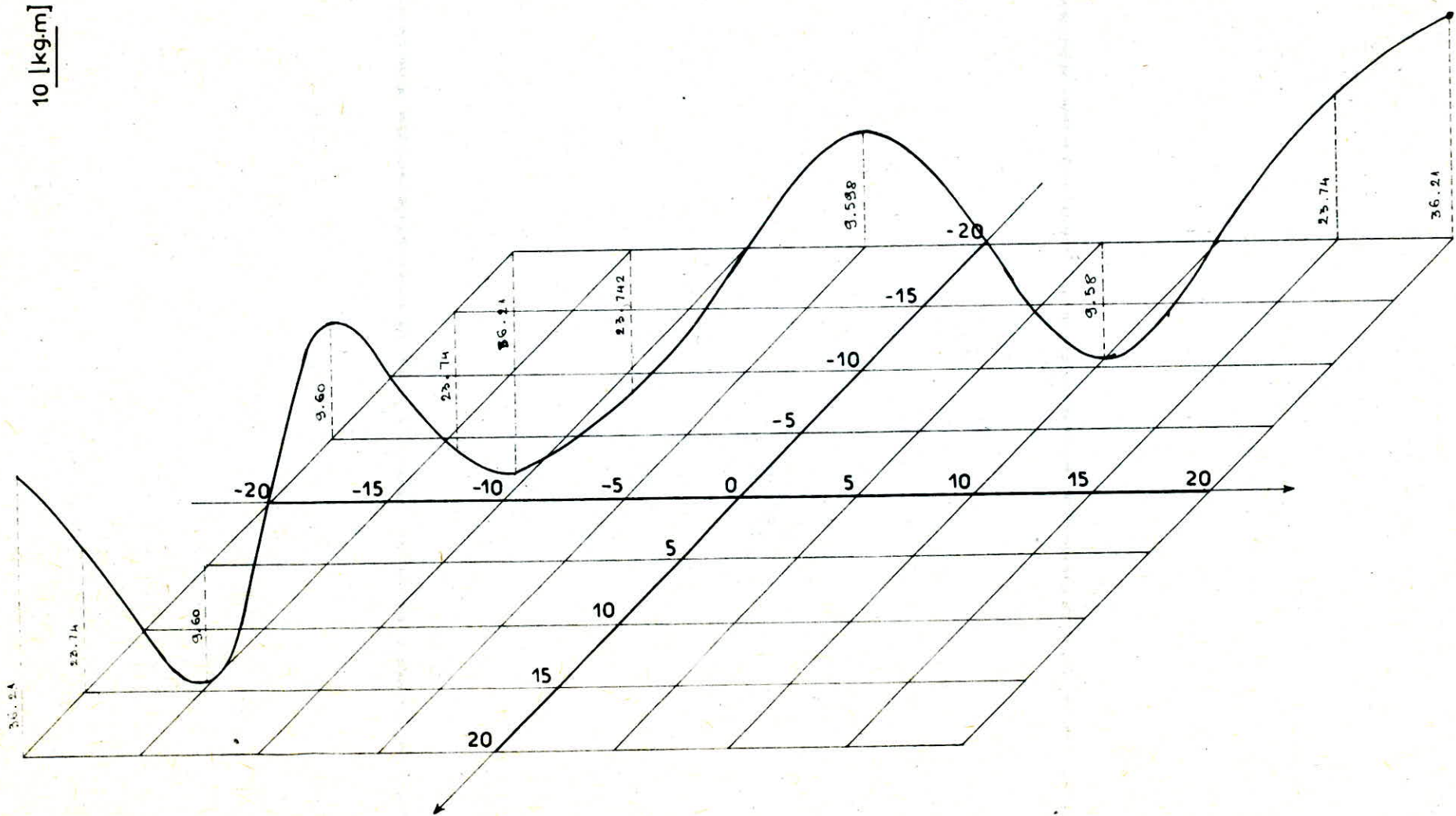
Graphe N°2 pour les valeurs de  $M_y$  [Kg.m]

10 [kg.m]



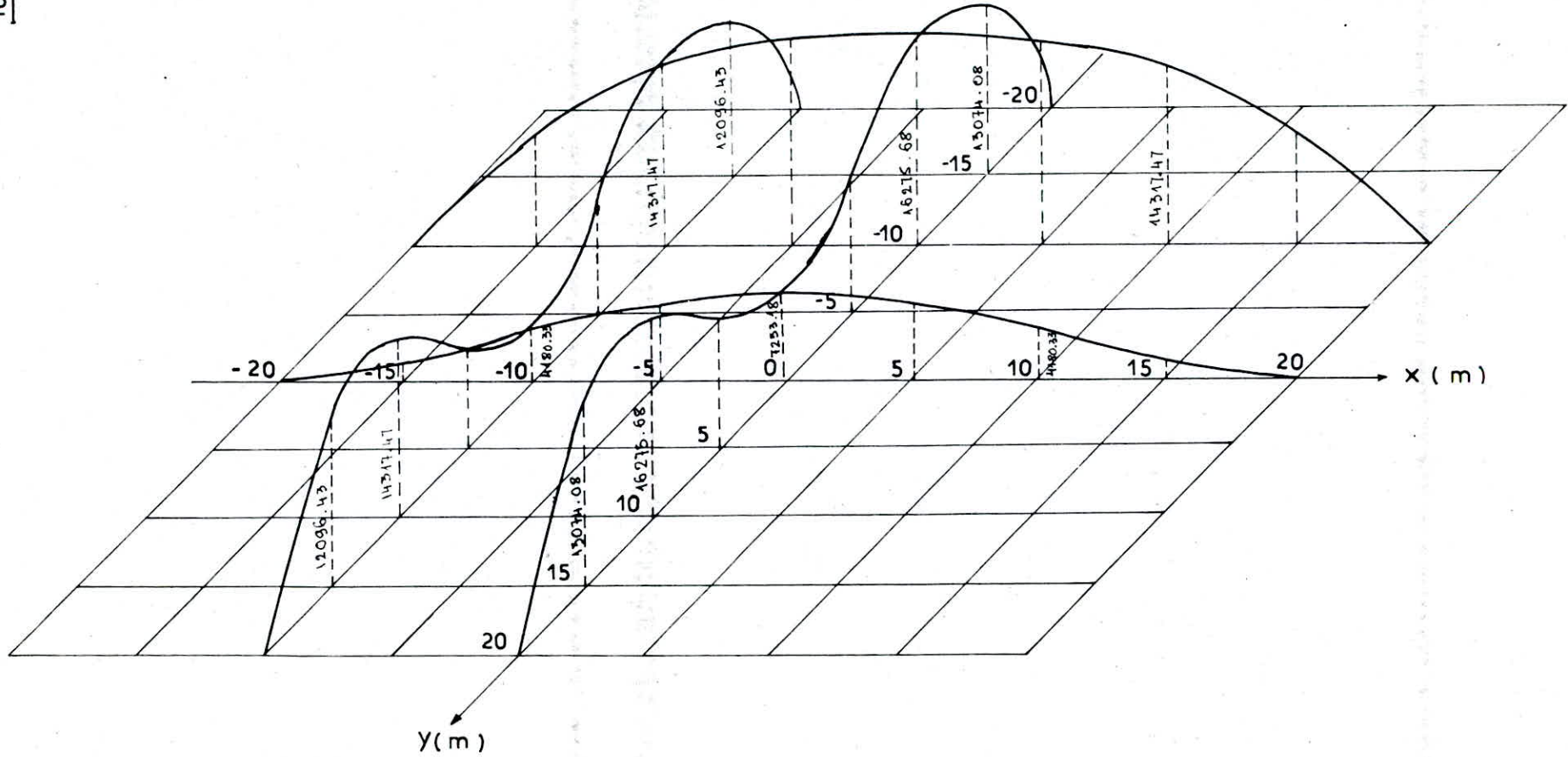


Graphe N°3 pour les valeurs de  $M_{xy}$  [Kg.m]



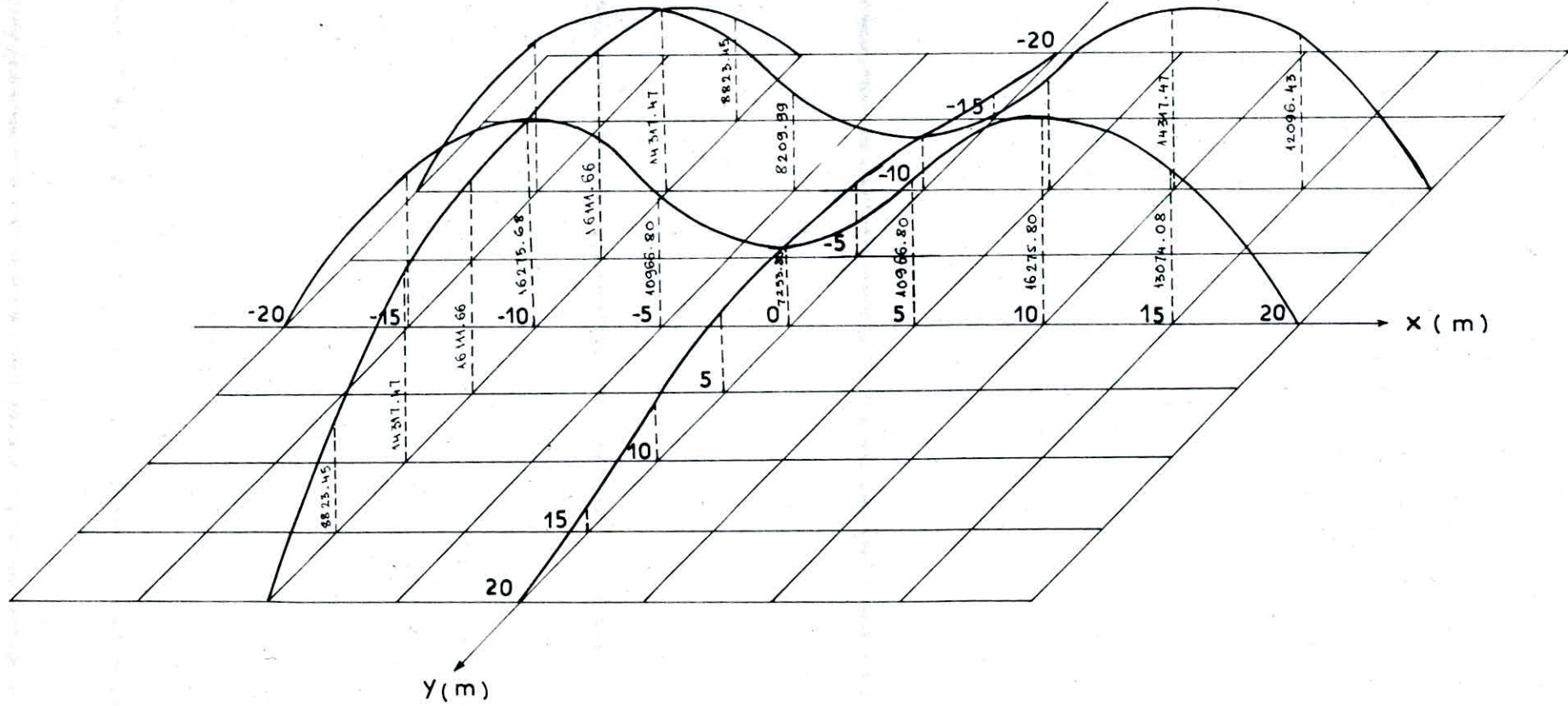
Graphe N°4 pour les valeurs de  $N_x$  [Kg]

10.000 [kg]

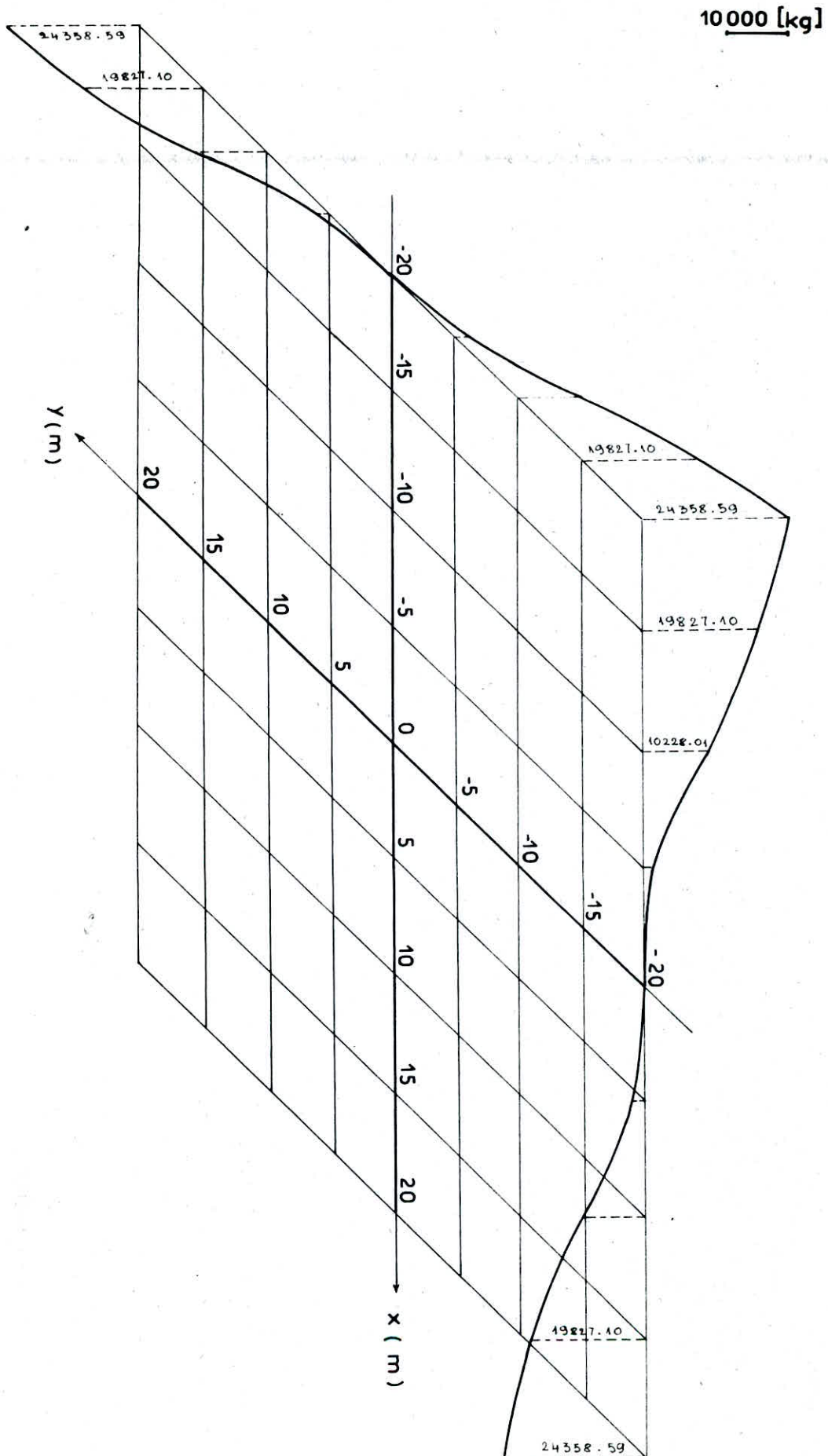


Graphe N°5 pour les valeurs de  $N_y$  [Kg]

10000 [kg]



Graphique N°6 pour les valeurs de  $T_{xy}$  [Kg]



## 2 - Calculs et résultats numériques d'une coque sphérique

### a - Méthode de série double en sinus

Soit une coque sphérique en pente douce, d'épaisseur constante  $h$ , de dimension  $(a \times b)$  sur le plan, appuyée sur son contour ABCD, et soumise à une charge uniforme  $q_z$ .

Les axes de coordonnées sont pris suivant la figure (Fig N° 14) :

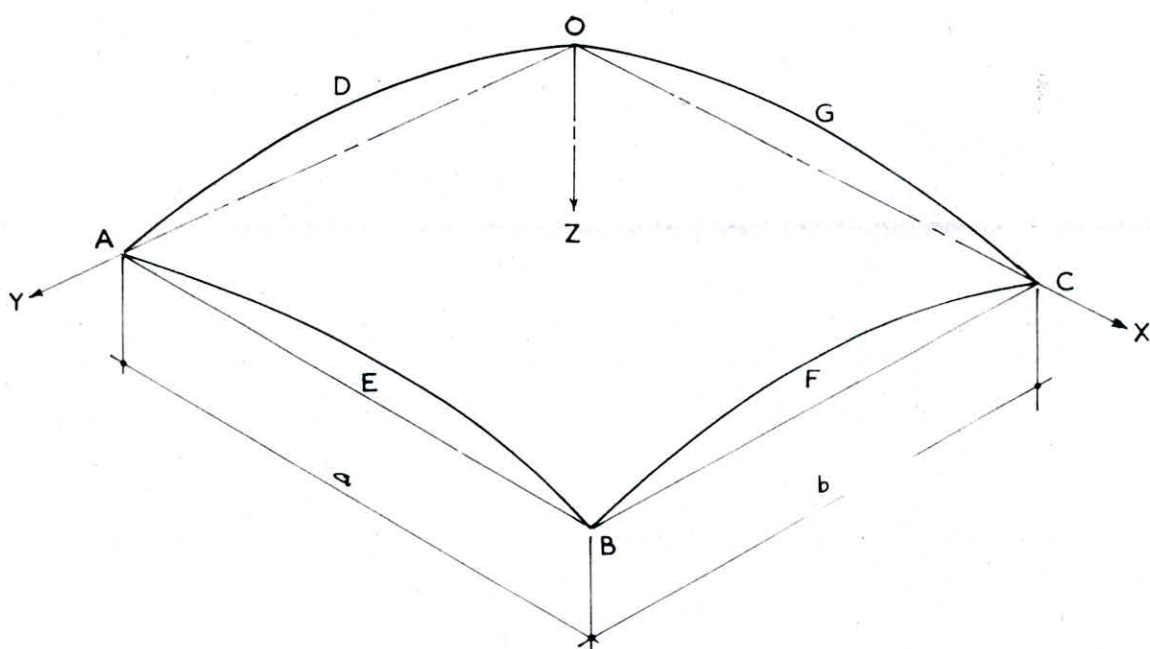


Fig N° 14

L'équation d'équilibre pour une coque en pente douce s'écrit :

$$(4-11) \quad \begin{cases} D \cdot \nabla^4 W + \nabla_k^2 \Phi = q_z \\ \frac{1}{Eh} \cdot \nabla^4 \Phi - \nabla_k^2 W = 0 \end{cases}$$

Déterminons les fonctions  $\Phi(x, y)$  et  $W(x, y)$  de telle sorte que ces dernières satisfassent le système d'équation (4-11) et les conditions aux limites pour une coque appuyée sur son contour suivantes :

Pour  $x=0$  et  $x=a$  :  $W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$  ;  $N_y = 0$

Pour  $y=0$  et  $y=b$  :  $W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$  ;  $N_x = 0$

Pour cela nous exprimons les fonctions  $W(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  sous la forme de série double trigonométrique en sinus suivante :

$$(4-12) \quad \begin{cases} W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \Phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \end{cases}$$

Nous développons aussi la charge  $q_z$  sous la forme de série double trigonométrique en sinus :

$$(4-13) \quad q_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Avec les fonctions  $W(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  choisies (4-12), les conditions aux limites sont satisfaites.

Nous remarquons que pour une coque sphérique de petite flèche  $\nabla_k^2$  et  $\nabla^4$  sont donnés par :

$$(4-14) \quad \begin{cases} \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ \nabla_k^2 = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{cases}$$

En remplaçant (4-12), (4-13) et (4-14) dans (4-11), et en tenant les données ( $a=b$ ,  $R_1=R_2=R$ ), nous obtenons :

$$(4-15) \quad \begin{cases} \frac{D \cdot \pi^4}{a^4} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + n^2)^2 \cdot A_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} - \frac{\pi^2}{a^2 R} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + n^2) \cdot B_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} \\ \frac{1}{E \cdot h} \cdot \frac{\pi^4}{a^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + n^2)^2 \cdot B_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} + \frac{\pi^2}{a^2 R} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + n^2) \cdot A_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} = 0 \end{cases}$$

Multiplications les deux membres de chaque équation du système (4-15) par  $\sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} \cdot dx \cdot dy$  et intégrons deux fois entre 0 et a.

comme :

$$(4-16) \quad \int_0^L \sin \frac{i\pi x}{L} \cdot \sin \frac{j\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \quad \text{pour } i = j$$

Alors nous obtenons :

$$(4-17) \quad \begin{cases} \frac{D \cdot \pi^4}{a^4} \cdot (m^2 + n^2)^2 \cdot A_{mn} - \frac{\pi^2 (m^2 + n^2)}{a^2 \cdot R} \cdot B_{mn} = C_{mn} \\ \frac{1}{E \cdot h} \cdot \frac{\pi^4}{a^4} \cdot (m^2 + n^2)^2 \cdot B_{mn} + \frac{\pi^2 (m^2 + n^2)}{a^2 \cdot R} \cdot A_{mn} = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équation (4-17) nous permet d'obtenir :

$$(4-18) \quad \begin{cases} A_{mn} = \frac{a^4 \cdot R^2}{D \cdot R^2 \cdot \pi^4 (m^2 + n^2)^2 + a^4 \cdot E \cdot h} \cdot C_{mn} \\ B_{mn} = - \frac{1}{\frac{R \cdot D \cdot \pi^6}{E \cdot h \cdot a^6} (m^2 + n^2)^3 + \frac{\pi^2}{R \cdot a^2} \cdot (m^2 + n^2)} \cdot C_{mn} \end{cases}$$

### détermination du coefficient $C_{mn}$

1<sup>er</sup> cas : charge constante

$$q_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a}$$

Multiplions les deux membres de cette équation par  $\sin \frac{m'\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n'\pi y}{a} \cdot dx \cdot dy$  et intégrons deux fois entre 0 et a.

En tenant compte la remarque (4-16), nous pouvons obtenir :

$$q_z \int_0^a \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} \cdot dx \cdot dy = c_{mn} \cdot \frac{a^2}{4}$$

donc ,

$$(4-19) \quad c_{mn} = \frac{4 q_z}{m \cdot n \cdot \pi^2} (\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1)$$

Les calculs numériques seront fait avec  $q_z = 400 \text{ Kg/m}^2$

Les caractéristiques numériques de la coque et les matériaux sont :

$$a = 40 \text{ m} ; R = 52,75 \text{ m} ; h = 0,115 \text{ m} ;$$

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Kg/m}^2 ; \nu = 0,2 ; D = 396061,1379 \text{ Kg} \cdot \text{m}$$

Nous prenons  $m = 1, 2, 3$  et  $n = 1, 2, 3$ .

$$C_{11} = 648,456$$

$$A_{11} = 5,227 \cdot 10^{-3}$$

$$B_{11} = -2771321,606$$

$$C_{12} = 0,000$$

$$A_{12} = 0,000$$

$$B_{12} = 0,000$$

$$C_{13} = 216,152$$

$$A_{13} = 1,722 \cdot 10^{-3}$$

$$B_{13} = -182656,459$$

$$C_{21} = 0,000$$

$$A_{21} = 0,000$$

$$B_{21} = 0,000$$

$$C_{22} = 0,000$$

$$A_{22} = 0,000$$

$$B_{22} = 0,000$$

$$C_{23} = 0,000$$

$$A_{23} = 0,000$$

$$B_{23} = 0,000$$

$$C_{31} = 216,152$$

$$A_{31} = 1,722 \cdot 10^{-3}$$

$$B_{31} = -182656,459$$

$$C_{32} = 0,000$$

$$A_{32} = 0,000$$

$$B_{32} = 0,000$$

$$C_{33} = 72,051$$

$$A_{33} = 5,591 \cdot 10^{-4}$$

$$B_{33} = -32952,182$$

Donc, les fonctions de déplacement  $W(x,y)$  et de contrainte  $\phi(x,y)$

sont :

$$W(x,y) = 5,227 \cdot 10^{-3} \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 1,722 \cdot 10^{-3} \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ + 1,722 \cdot 10^{-3} \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 5,591 \cdot 10^{-4} \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [m]$$

$$\phi(x,y) = -2771321,606 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 182656,459 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ - 182656,459 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 32952,182 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [kg \cdot m^2]$$

des relations (2-18) et (2-19) du chapitre II, nous permettent d'obtenir les

Moments et les efforts suivants :

$$M_x = 15,326 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 11,780 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ + 38,705 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 15,594 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [kg \cdot m]$$

$$M_y = 15,326 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 38,705 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ + 11,780 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 15,594 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [kg \cdot m]$$

$$M_{xy} = -10,217 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 10,097 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ - 10,097 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 9,835 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [kg \cdot m]$$



$$N_x = 17097,905 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 10140,452 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ + 1126,717 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 1829,391 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}]$$

$$N_y = 17097,905 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 1126,717 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ + 10140,452 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 1829,391 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}]$$

$$T_{xy} = 17097,905 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 3380,151 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\ + 3380,151 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 1829,391 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}]$$

Pour mieux visualiser les variations des efforts et des moments, nous représentons les tableaux et figures suivants :

Tableau N°7 pour les valeurs de  $M_x$  [Kg.m]

X (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	33.40	32.50	4.29	-12.47	4.29	32.50	33.40	0
10	0	42.81	40.70	3.02	-19.23	3.02	40.70	42.81	0
15	0	31.22	27.89	-2.48	-20.14	-2.48	27.89	31.22	0
20	0	22.71	18.85	-5.57	-19.56	-5.57	18.85	22.71	0
25	0	31.22	27.89	-2.48	-20.14	-2.48	27.89	31.22	0
30	0	42.81	40.70	3.02	-19.23	3.02	40.70	42.81	0
35	0	33.40	32.50	4.29	-12.47	4.29	32.50	33.40	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau N°8 pour les valeurs de  $M_y$  [ Kg.m ]

X( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	33.40	42.81	31.22	22.71	31.22	42.81	33.40	0
10	0	32.50	40.70	27.89	18.85	27.89	40.70	32.50	0
15	0	4.29	3.01	-2.48	-5.57	-2.48	3.01	4.29	0
20	0	-12.47	-19.23	-20.14	-19.56	-20.14	-19.23	-12.47	0
25	0	4.29	3.01	-2.48	-5.57	-2.48	3.01	4.29	0
30	0	32.50	40.70	27.89	18.85	27.89	40.70	32.50	0
35	0	33.40	42.81	31.22	22.71	31.22	42.81	33.40	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau N°9 pour les valeurs de  $M_{xy}$  [ Kg.m ]

X( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	-40.25	-26.39	-0.27	10.64	0	-10.64	0.27	26.39	40.25
5	-26.39	-17.30	-0.15	7.01	0	-7.01	0.15	17.30	26.39
10	-0.27	-0.15	0.07	0.14	0	-0.14	-0.07	0.15	0.27
15	10.64	7.01	0.14	-2.75	0	2.75	-0.14	-7.01	-10.64
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	-10.64	-7.01	-0.14	2.75	0	-2.75	0.14	7.01	10.64
30	0.27	0.15	-0.07	-0.14	0	0.14	0.07	-0.15	-0.27
35	26.39	17.30	0.15	-7.01	0	7.01	-0.15	-17.30	-26.39
40	40.25	26.39	0.27	-10.64	0	10.64	-0.27	-26.39	-40.25

Tableau N°10 pour les valeurs de  $N_x$  [Kg]

X (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0		0	0	0
5	0	8048.96	12751.22	13888.65	13790.33	13888.65	12751.22	8048.96	0
10	0	9301.82	15097.23	16994.40	17170.14	16994.40	15097.23	9301.82	0
15	0	4874.91	8666.79	10878.34	11574.95	10878.34	8666.79	4874.91	0
20	0	2013.32	4422.80	6696.75	7660.13	6696.75	4422.80	2013.32	0
25	0	4874.91	8666.79	10878.34	11574.95	10878.34	8666.79	4874.91	0
30	0	9301.82	15097.23	16994.40	17170.14	16994.40	15097.23	9301.82	0
35	0	8048.96	12751.22	13888.65	13790.33	13888.65	12751.22	8048.96	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

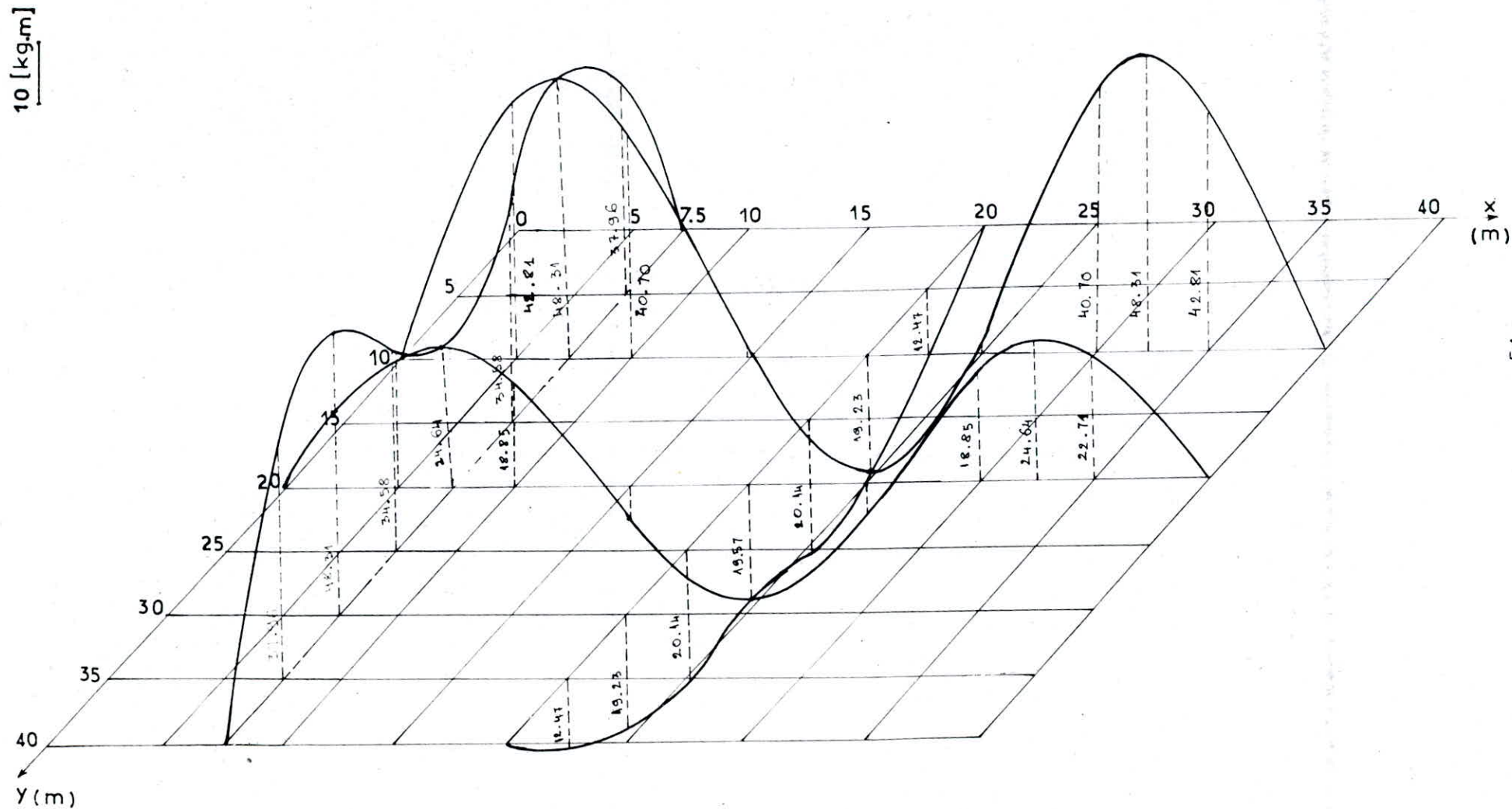
Tableau N°11 pour les valeurs de  $N_y$  [Kg]

X (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	8048.96	9301.82	4874.91	2013.32	4874.91	9301.82	8048.96	0
10	0	12751.22	15097.23	8666.79	4422.80	8666.79	15097.23	12751.22	0
15	0	13888.65	16994.40	10878.34	6696.75	10878.34	16994.40	13888.65	0
20	0	13790.33	17170.14	11574.95	7660.13	11574.95	17170.14	13790.33	0
25	0	13888.65	16994.40	10878.34	6696.75	10878.34	16994.40	13888.65	0
30	0	12751.22	15097.23	8666.79	4422.80	8666.79	15097.23	12751.22	0
35	0	8048.96	9301.82	4874.91	2013.32	4874.91	9301.82	8048.96	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

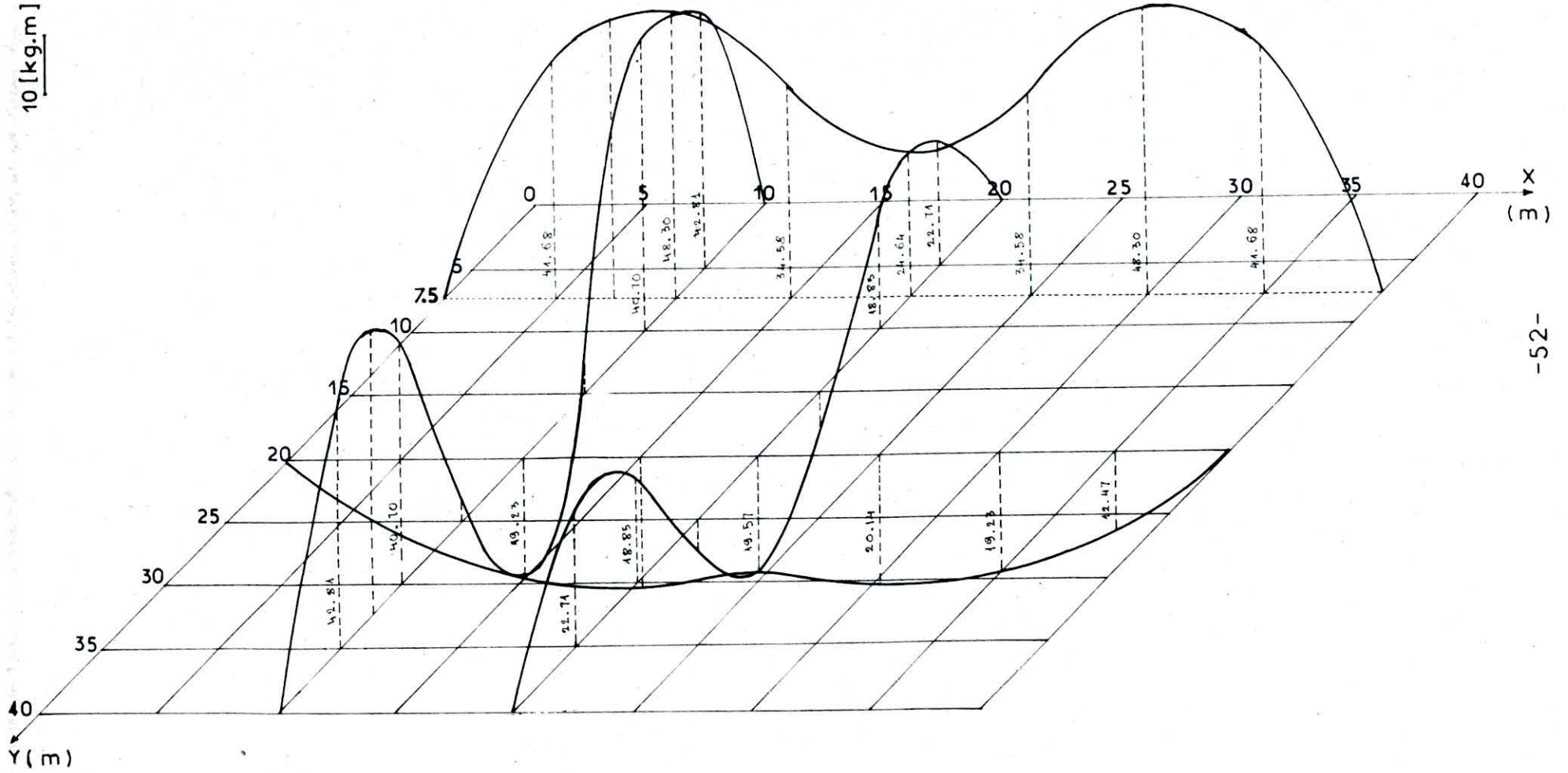
Tableau N°12 pour les valeurs de Txy [Kg]

X (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y (m)									
0	25687.60	20912.86	10796.47	3023.62	0	-3023.62	-10796.47	-20912.86	-25687.60
5	20912.86	17252.04	9381.19	3008.11	0	-3008.11	-9381.19	-17252.04	-20912.86
10	10796.47	9381.19	6083.50	2698.92	0	-2698.92	-6083.50	-9381.19	-10796.47
15	3023.62	3008.11	2698.92	1675.29	0	-1675.29	-2698.92	-3008.11	-3023.62
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	-3023.62	-3008.11	-2698.92	-1675.29	0	1675.29	2698.92	3008.11	3023.62
30	-10796.47	-9381.19	-6083.50	-2698.92	0	2698.92	6083.50	9381.19	10796.47
35	-20912.86	-17252.04	-9381.19	-3008.11	0	3008.11	9381.19	17252.04	20912.86
40	-25687.60	-20912.86	-10796.47	-3023.62	0	3023.62	10796.47	20912.86	25687.60

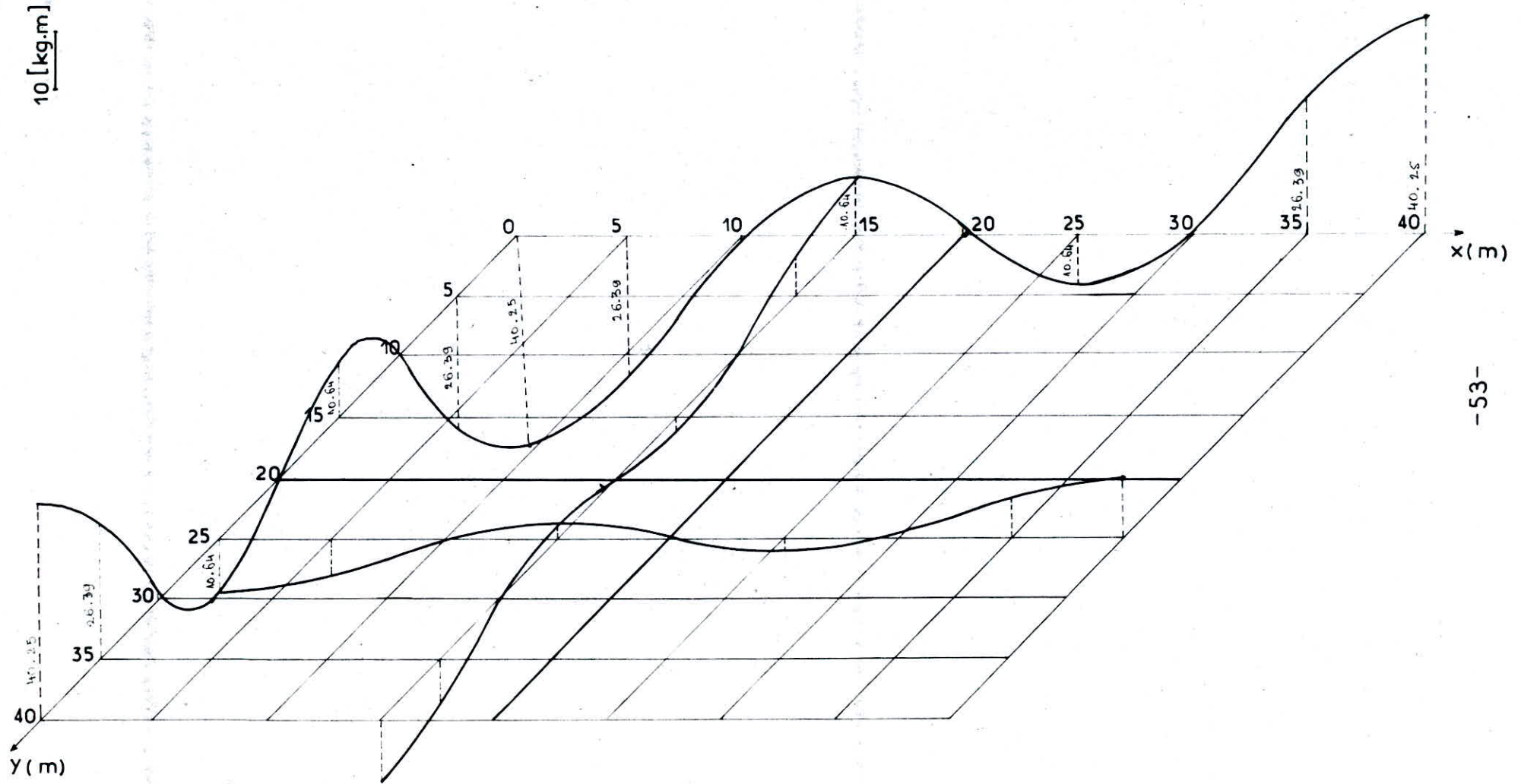
Graphe N°7 pour les valeurs de  $M_x$  [Kgm]



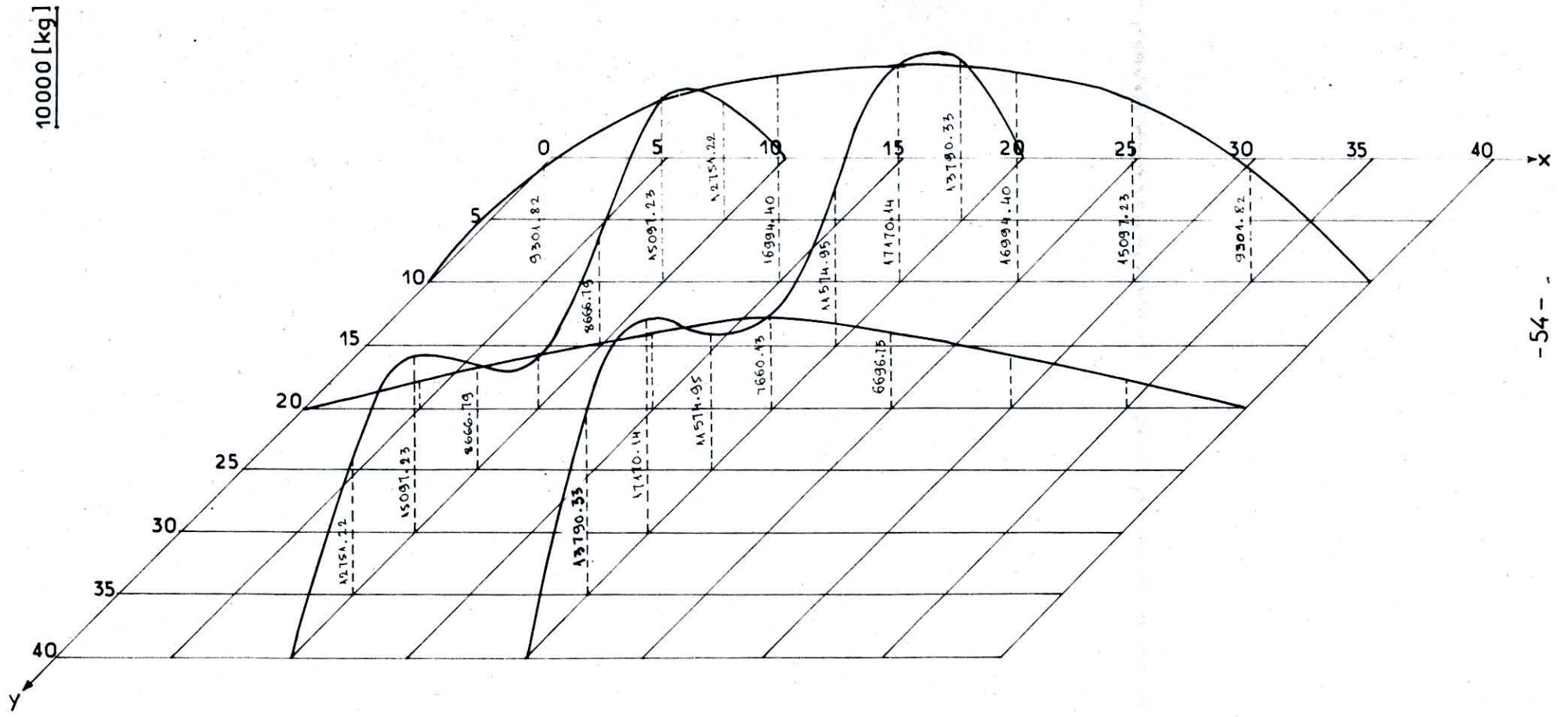
Graphe N°8 pour les valeurs de  $M_y$  [Kg.m]



Graphe N°9 pour les valeurs de  $M_{xy}$  [Kg.m]

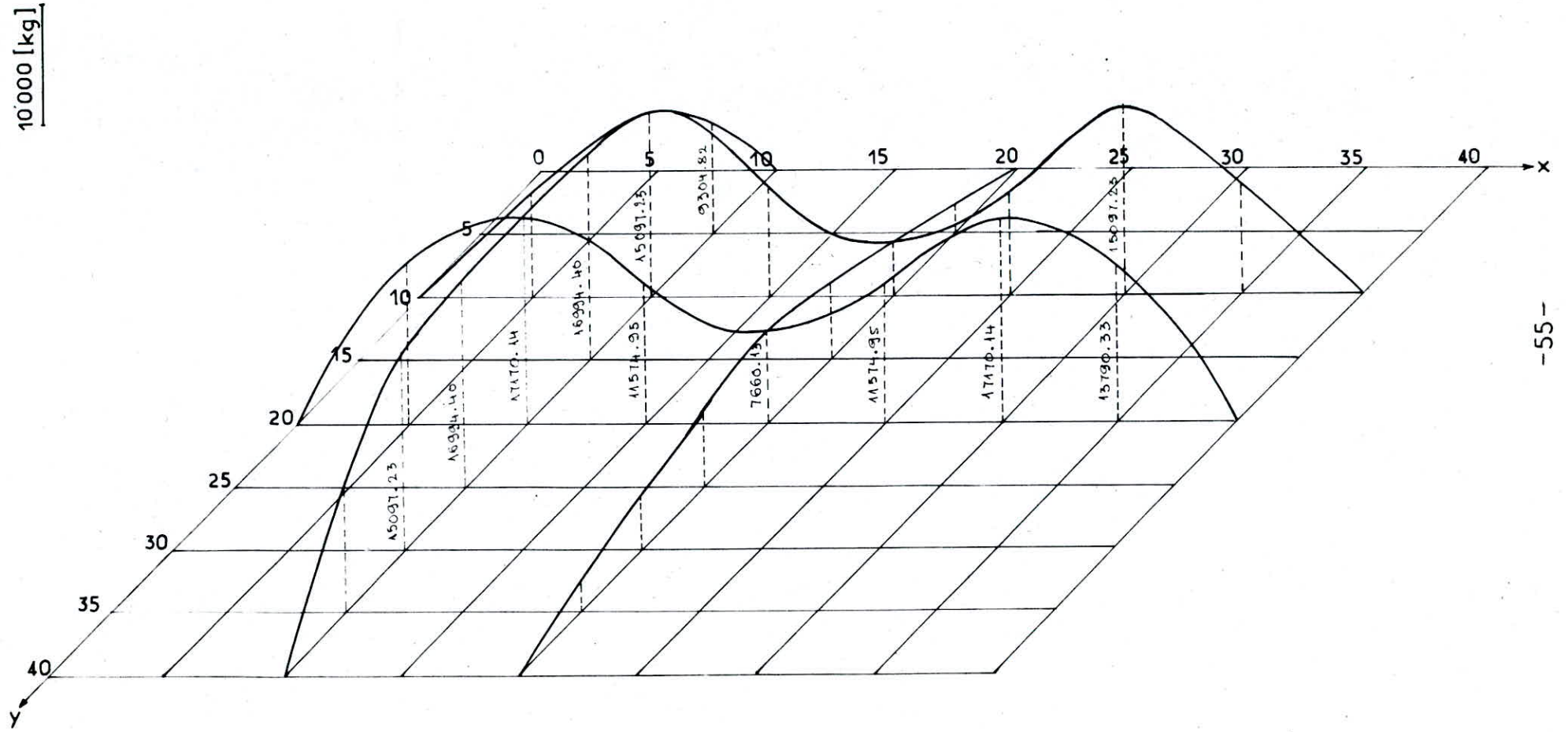


Graphe N°10 pour les valeurs de  $N_x$  [Kg]

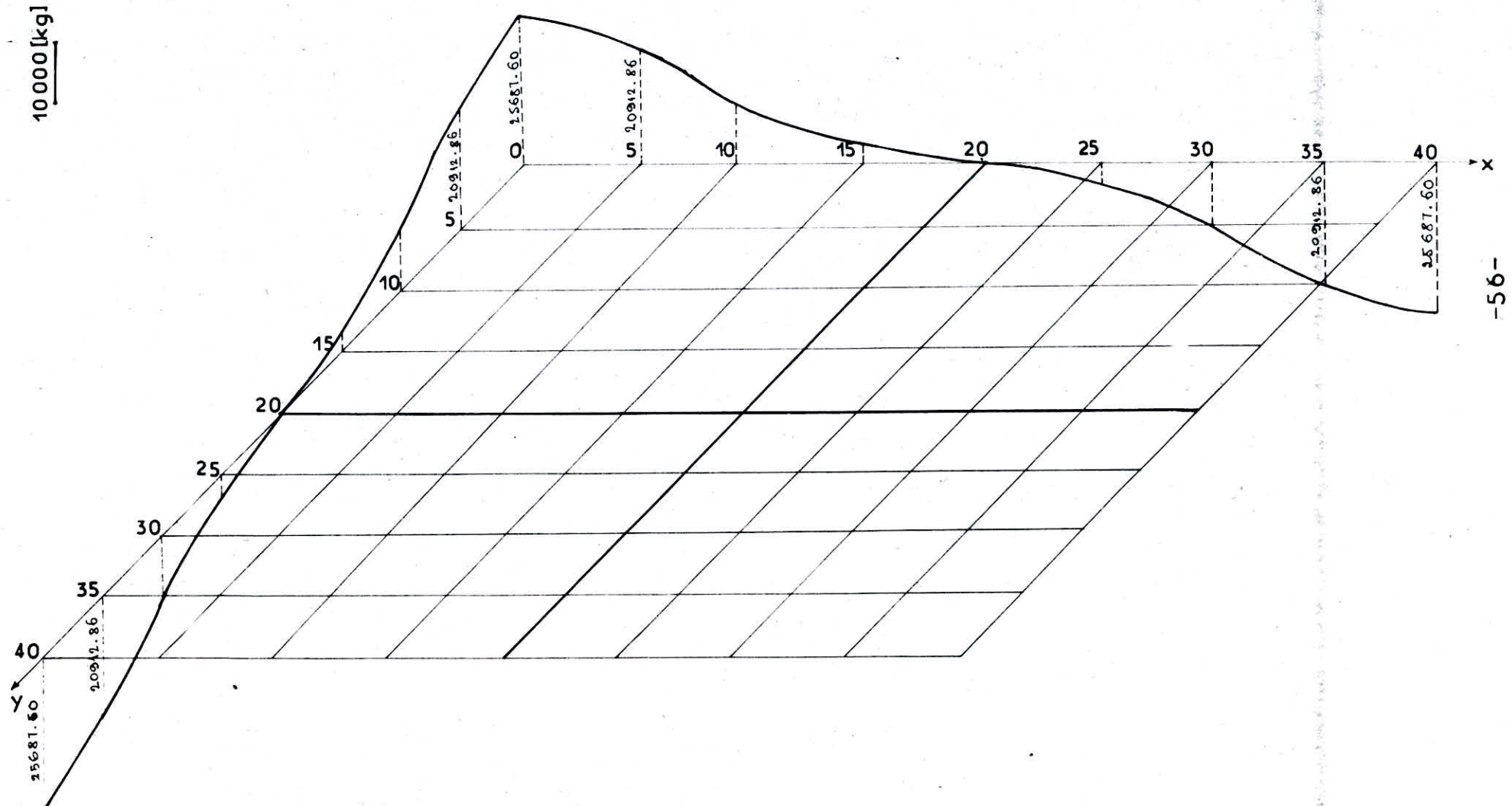




Graphe N° 11 pour les valeurs de  $N_y$  [Kg]



Graphe N°12 pour les valeurs de  $T_{xy}$  [Kg]



2<sup>ème</sup> cas charge sismique verticale (avec  $K_s = \frac{1}{10}$ )

$$q_z = 21,6 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg/m}^2]$$

Nous remarquons que dans ce cas, la charge  $q_z$  ne contient qu'un seul terme avec  $m=3$  et  $n=3$ , donc :

$$C_{33} = 21,6 \quad ; \quad A_{33} = 1,676 \cdot 10^{-4} \quad ; \quad B_{33} = -9872,996$$

Les fonctions  $W(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  deviennent :

$$W(x, y) = 1,676 \cdot 10^{-4} \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{m}]$$

$$\Phi(x, y) = -9872,996 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg} \cdot \text{m}^2]$$

Les Moments et les efforts sont alors :

$$M_x = 4,422 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg} \cdot \text{m}]$$

$$M_y = 4,422 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg} \cdot \text{m}]$$

$$M_{xy} = -2,948 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg} \cdot \text{m}]$$

$$N_x = 548,114 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}]$$

$$N_y = 548,114 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}]$$

$$T_{xy} = -548,114 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}]$$

Nous représentons les tableaux et graphes suivants pour mieux suivre les variations des moments et des efforts :

Tableau N°13 pour les valeurs de  $M_x (M_y)$  [Kg.m]

X(m) Y(m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	3.77	2.89	-1.56	-4.09	-1.56	2.89	3.77	0
10	0	2.89	2.21	-1.20	-3.13	-1.20	2.21	2.89	0
15	0	-1.56	-1.20	0.65	1.69	0.65	-1.20	-1.56	0
20	0	-4.09	-3.13	1.69	4.42	1.69	-3.13	-4.09	0
25	0	-1.56	-1.20	0.65	1.69	0.65	-1.20	-1.56	0
30	0	2.89	2.21	-1.20	-3.13	-1.20	2.21	2.89	0
35	0	3.77	2.89	-1.56	-4.09	-1.56	2.89	3.77	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau N°14 pour les valeurs de  $M_{xy}$  [Kg.m]

X(m) Y(m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	-2.95	-1.13	2.09	2.72	0	-2.72	-2.09	1.13	2.95
5	-1.13	-0.43	0.80	1.04	0	-1.04	-0.80	0.43	1.13
10	2.09	0.80	-1.47	-1.93	0	1.93	1.47	-0.80	-2.09
15	2.72	1.04	-1.93	-2.52	0	2.52	1.93	-1.04	-2.72
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	-2.72	-1.04	1.93	2.52	0	-2.52	-1.93	1.04	2.72
30	-2.09	-0.80	1.47	1.93	0	-1.93	-1.47	0.80	2.09
35	1.13	0.43	-0.80	-1.04	0	1.04	0.80	-0.43	-1.13
40	2.95	1.13	-2.09	-2.72	0	2.72	2.09	-1.13	-2.95

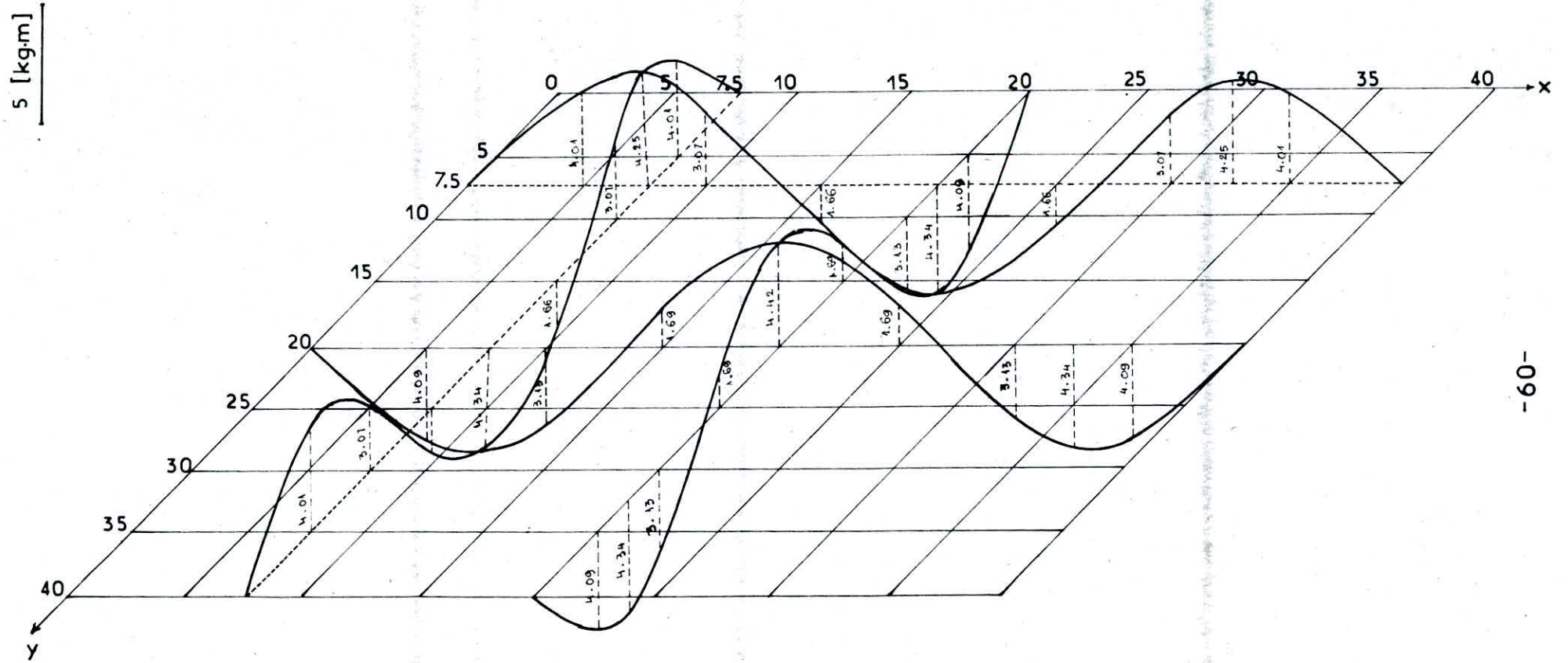
Tableau N°15 pour les valeurs de  $N_x$  ( $N_y$ ) [Kg]

X(m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y(m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	467.84	358.07	-193.79	-506.39	-193.79	358.07	467.84	0
10	0	358.07	274.06	-148.32	-387.57	-148.32	274.06	358.07	0
15	0	-193.79	-148.32	80.27	209.75	80.27	-148.32	-193.79	0
20	0	-506.39	-387.57	209.75	548.11	209.75	-387.57	-506.39	0
25	0	-193.79	-148.32	80.27	209.75	80.27	-148.32	-193.79	0
30	0	358.07	274.06	-148.32	-387.57	-148.32	274.06	358.07	0
35	0	467.84	358.07	-193.79	-506.39	-193.79	358.07	467.84	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

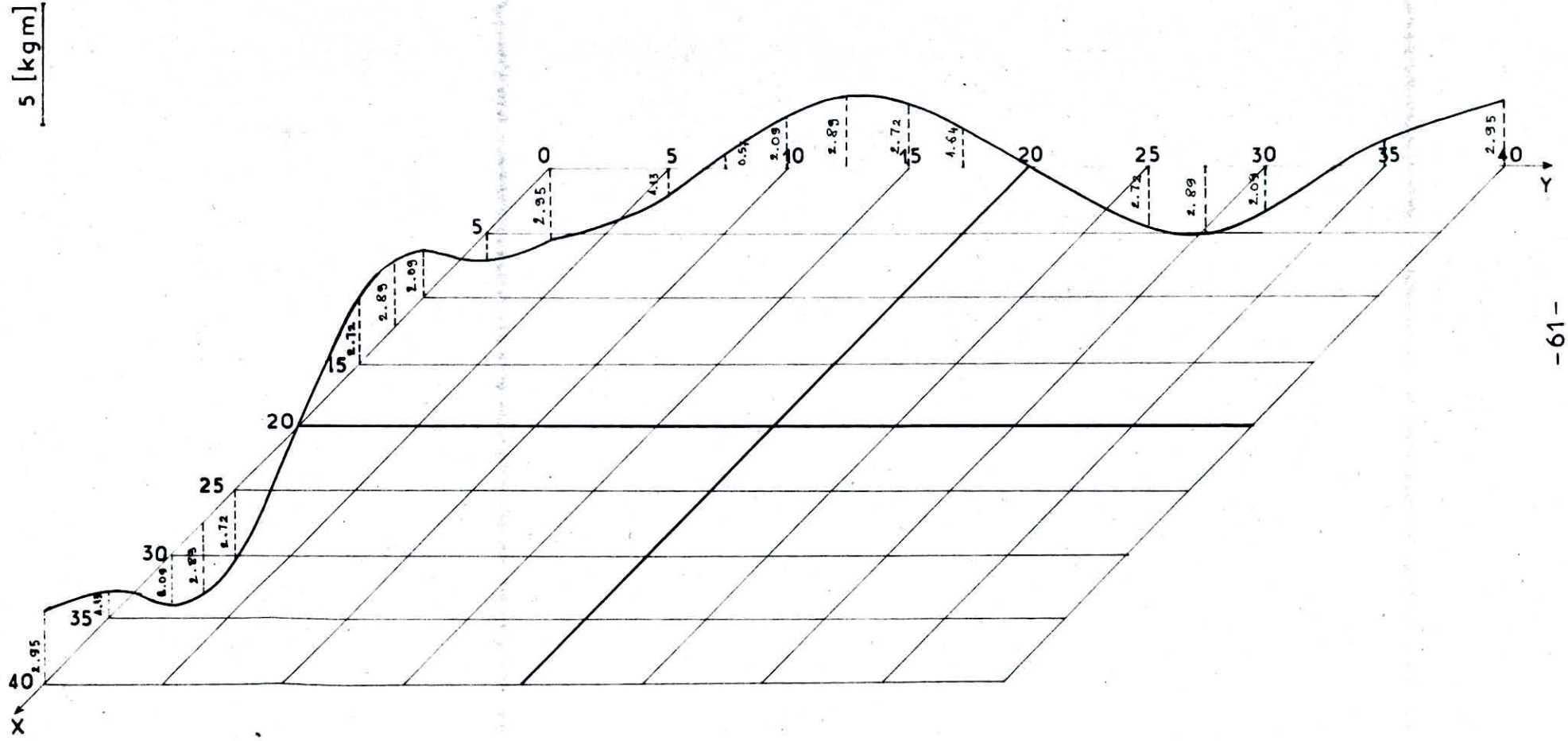
Tableau N°16 pour les valeurs de  $T_{xy}$  [Kg]

X(m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y(m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	-548.11	-209.75	387.57	506.39	0	-506.39	-387.57	209.75	548.11
5	-209.75	-80.27	148.32	193.79	0	-193.79	-148.32	80.27	209.75
10	387.57	148.32	-274.06	-358.07	0	358.07	274.06	-148.32	-387.57
15	506.39	193.79	-358.07	-467.45	0	467.45	358.07	-193.79	-506.39
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	-506.39	-193.79	358.07	467.45	0	-467.45	-358.07	193.79	506.39
30	-387.57	-148.32	274.06	358.07	0	-358.07	-274.06	148.32	387.57
35	209.75	80.27	-148.32	-193.79	0	193.79	148.32	-80.27	-209.75
40	548.11	209.75	-387.57	-506.39	0	506.39	387.57	-209.75	-548.11

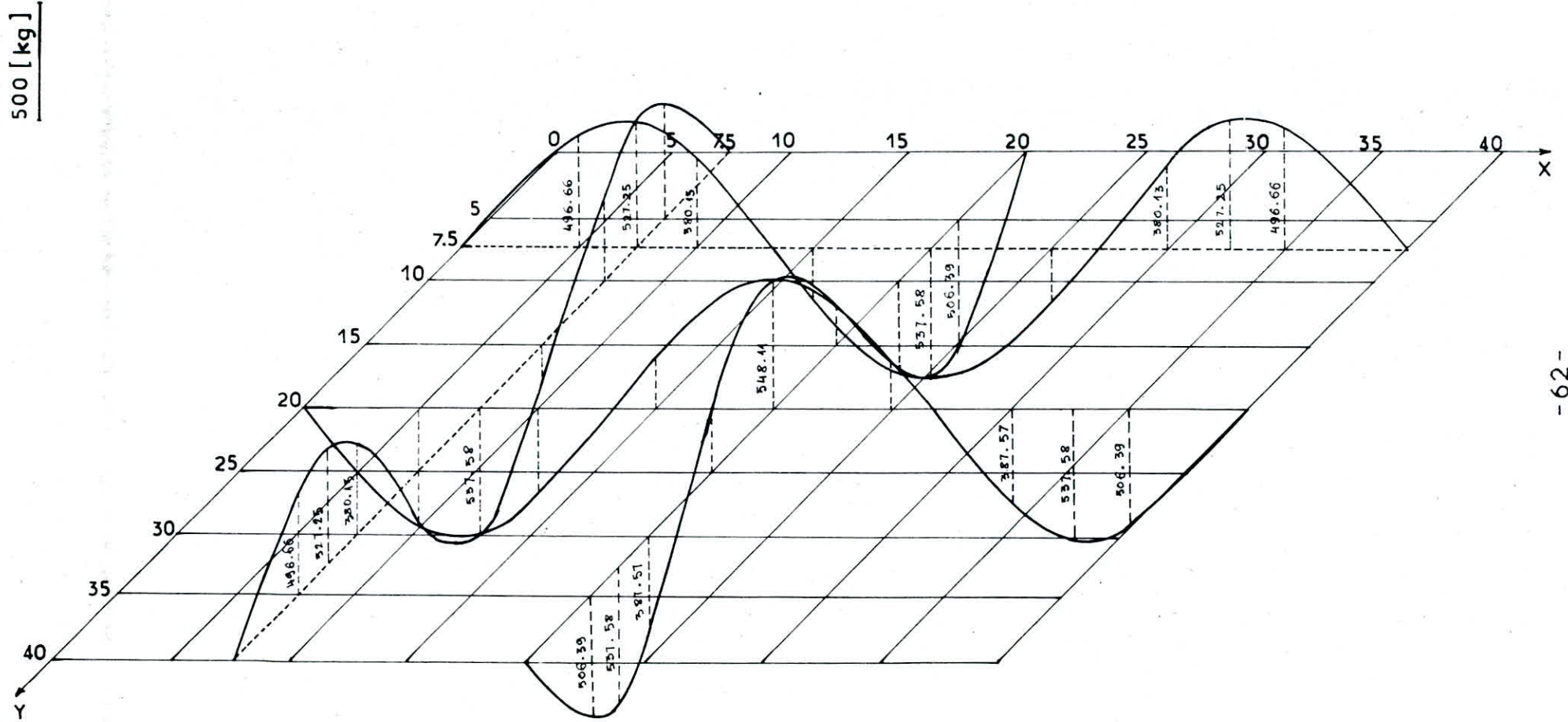
Graphe N°13 pour les valeurs de  $M_x (M_y)$  [Kg.m]



Graphe N°14 pour les valeurs de  $M_{xy}$  [Kg.m]



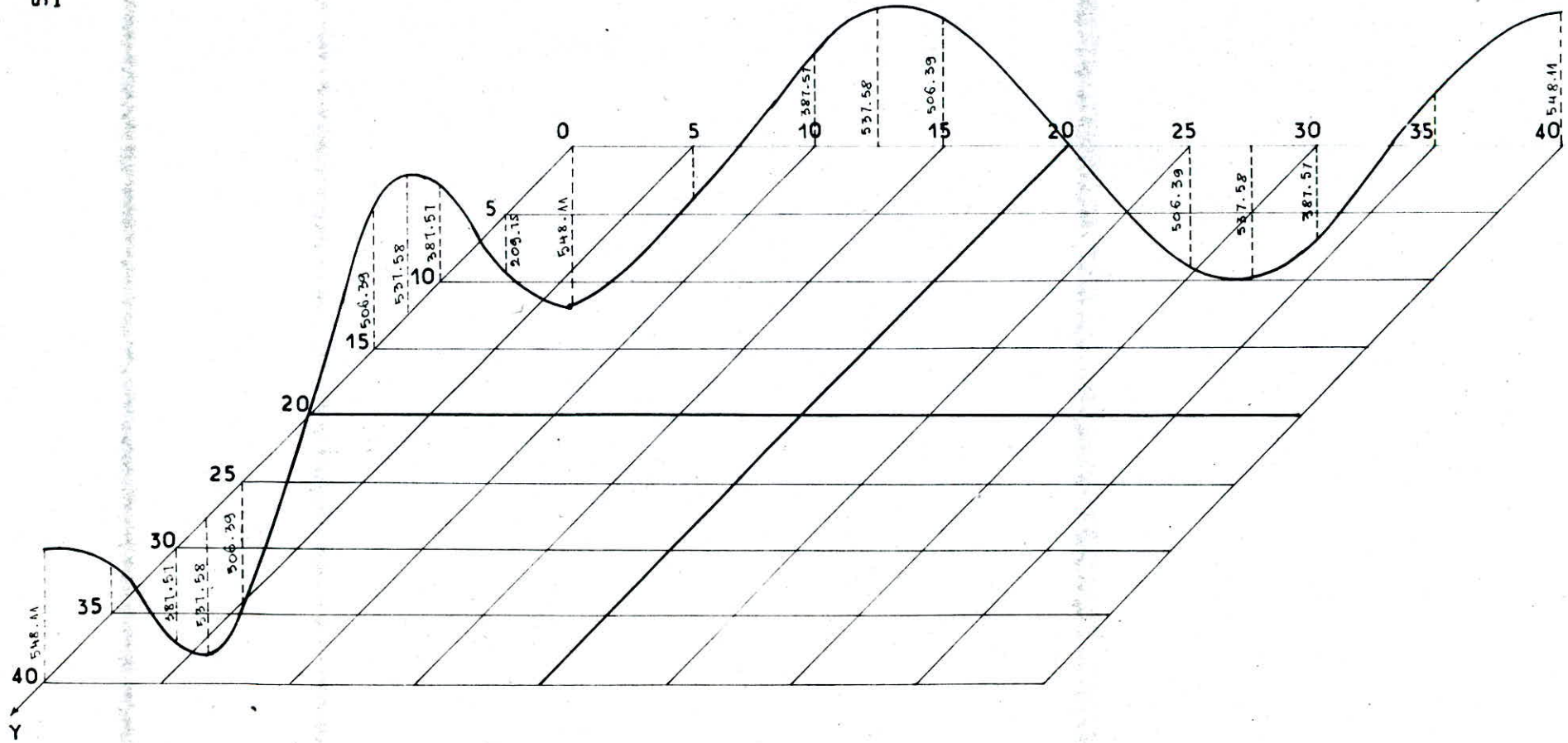
Graphe N°15 pour les valeurs de  $N_x (N_y)$  [Kg]





Graphe N°16 pour les valeurs de  $T_{xy}$  [Kg]

500 [kg]



3<sup>ème</sup> cas

charge sismique horizontale (avec  $K_s = \frac{1}{10}$ )

Détermination des efforts et moments dûs à des charges sismiques horizontales sur une coque appuyée librement quand la fondation de l'ouvrage se déplace horizontalement

Pour déterminer les efforts et moments internes produit par des charges sismiques horizontales on peut utiliser la méthode proposée par le professeur O.D. Aniachovili en considérant cette charge comme répartie uniforme .

Dans ce cas :

$$(4-20) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin \lambda_n x \cdot \sin \mu_m y \\ N_y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \cdot \sin \lambda_n x \cdot \sin \mu_m y \\ T_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \cos \lambda_n x \cdot \sin \mu_m y \end{array} \right.$$

$$(4-21) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x = D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} \cdot (\lambda_n^2 + \nu \mu_m^2)^2 \sin \lambda_n x \cdot \sin \mu_m y \\ M_y = D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} \cdot (\mu_m^2 + \nu \lambda_n^2)^2 \sin \lambda_n x \cdot \sin \mu_m y \\ M_{xy} = -D(1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} \cdot \lambda_n \cdot \mu_m \cdot \cos \lambda_n x \cdot \cos \mu_m y \end{array} \right.$$

avec :

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu)} \quad ; \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a} \quad ; \quad \mu_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$A_{mn} = \frac{\frac{b_{mn}}{\lambda_n} \left[ 1 + \frac{D \cdot R^2}{E \cdot h} \cdot (\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 \right] + c_{mn} \cdot R}{1 + \frac{\lambda_n^2}{\mu_m^2} + \frac{D (\lambda_n^2 + \mu_m^2)^3 \cdot R^3}{E \cdot h \cdot \mu_m^2}}$$

$$B_{mn} = A_{mn} \cdot \frac{\lambda_n^2}{\mu_m^2} - \frac{b_{mn}}{\mu_m^2}$$

$$C_{mn} = A_{mn}$$

$$D_{mn} = - \frac{A_{mn} + B_{mn}}{\frac{E \cdot h}{R}}$$

$$b_{mn} = \frac{4 S_t}{\pi \cdot n} \cdot \left[ \frac{\sin \left( \frac{b}{R} + m\pi \right)}{\left( \frac{b}{R} + m\pi \right)} + \frac{\sin \left( \frac{b}{R} - m\pi \right)}{\left( \frac{b}{R} - m\pi \right)} \right]$$

$$c_{mn} = \frac{4 S_t}{\pi \cdot n} \cdot \left[ \frac{\sin \left( \frac{b}{R} - m\pi \right)}{\left( \frac{b}{R} - m\pi \right)} - \frac{\sin \left( \frac{b}{R} + m\pi \right)}{\left( \frac{b}{R} + m\pi \right)} \right]$$

$S_t$  : est la charge sismique horizontale déterminée par la formule (3-9).

Dans notre cas à l'aide de la pente douce de la coque  $\cos \varphi \approx 1$ , donc :

$$(4-22) \quad S_t = 3 \cdot K_s \cdot q$$

Les calculs numériques seront fait avec  $q_t = 400 \text{ kg/m}^2$  et les caractéristiques de la coque et les matériaux sont :

$$a = b = 40 \text{ m} \quad ; \quad R = 52,75 \text{ m} \quad ; \quad h = 0,115 \text{ m}$$

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^2 \quad ; \quad \nu = 0,2 \quad ; \quad D = 396061,1979 \text{ Kg} \cdot \text{m}$$

Nous prenons  $m = 1, 2, 3$  et  $n = 1, 2, 3$ . Nous aurons donc :

$b_{11} = 17,144$	$c_{11} = 71,028$	$A_{11} = 1932,985$	$B_{11} = -846,328$	$D_{11} = -1,661 \cdot 10^{-4}$
$b_{12} = 8,572$	$c_{12} = 35,514$	$A_{12} = 382,348$	$B_{12} = -60,266$	$D_{12} = -4,160 \cdot 10^{-5}$
$b_{13} = 5,715$	$c_{13} = 23,676$	$A_{13} = 77,595$	$B_{13} = -228,085$	$D_{13} = 2,300 \cdot 10^{-5}$
$b_{21} = -4,096$	$c_{21} = -33,939$	$A_{21} = -1270,444$	$B_{21} = -151,606$	$D_{21} = 2,174 \cdot 10^{-4}$
$b_{22} = -2,048$	$c_{22} = -16,969$	$A_{22} = -322,009$	$B_{22} = -239,006$	$D_{22} = 8,578 \cdot 10^{-5}$
$b_{23} = -1,365$	$c_{23} = -11,313$	$A_{23} = -89,001$	$B_{23} = -144,917$	$D_{23} = 3,576 \cdot 10^{-5}$
$b_{31} = 1,806$	$c_{31} = 22,442$	$A_{31} = 661,951$	$B_{31} = 41,026$	$D_{31} = -1,075 \cdot 10^{-5}$
$b_{32} = 0,903$	$c_{32} = 11,221$	$A_{32} = 198,621$	$B_{32} = 72,014$	$D_{32} = -4,448 \cdot 10^{-5}$
$b_{33} = 0,602$	$c_{33} = 7,481$	$A_{33} = 64,545$	$B_{33} = 53,704$	$D_{33} = -1,800 \cdot 10^{-5}$

des efforts sont alors :

$$N_x = 1932.98 \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 332.35 \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} + 77.59 \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ - 1270.44 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 332.01 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} - 89.00 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ + 664.954 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 198.62 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} + 64.54 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}]$$

$$N_y = -846.33 \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 60.27 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} - 228.08 \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ - 151.61 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 239.01 \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} - 144.92 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ + 41.03 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 72.01 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} + 53.70 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}]$$

$$T_{xy} = 1932.98 \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 332.35 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{2\pi y}{40} + 77.59 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\ - 1270.44 \cos \frac{2\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} - 332.01 \cdot \cos \frac{2\pi x}{40} \cdot \cos \frac{2\pi y}{40} - 89.00 \cdot \cos \frac{2\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\ + 664.95 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 198.62 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{2\pi y}{40} + 64.54 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}]$$

des moments sont :

$$M_x = -0.49 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 0.43 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} + 0.52 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ + 0.96 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 1.01 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} + 0.26 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ - 0.73 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 0.59 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} - 0.48 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}\cdot\text{m}]$$

$$M_y = -0.49 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 0.18 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} + 0.16 \cdot \sin \frac{\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ + 2.23 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} + 1.01 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} + 0.51 \cdot \sin \frac{2\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \\ - 2.42 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{\pi y}{40} - 0.99 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{2\pi y}{40} - 0.48 \cdot \sin \frac{3\pi x}{40} \cdot \sin \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}\cdot\text{m}]$$

$$M_{xy} = 4.13 \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 2.07 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{2\pi y}{40} - 1.72 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\ - 10.82 \cdot \cos \frac{2\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} - 8.54 \cdot \cos \frac{2\pi x}{40} \cdot \cos \frac{2\pi y}{40} - 5.34 \cdot \cos \frac{2\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\ + 8.02 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 6.18 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{2\pi y}{40} + 4.05 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [\text{Kg}\cdot\text{m}]$$

Tableau N°17 pour les valeurs de  $M_x$  [Kg.m]

X (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0.27	1.06	1.15	1.13	-0.90	-2.63	-2.57	0
10	0	0.13	0.98	1.80	1.04	-1.44	-3.59	-3.11	0
15	0	-0.31	-0.05	0.37	-0.04	-1.42	-2.58	-2.10	0
20	0	-0.55	-0.79	-0.76	-0.15	-0.90	-0.99	-0.69	0
25	0	-0.32	-0.46	0.40	-0.26	-0.18	-0.15	-0.01	0
30	0	0.12	0.40	0.71	0.72	0.32	-0.15	-0.27	0
35	0	0.26	0.65	0.98	0.90	0.55	-0.24	-0.37	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau N°18 pour les valeurs de  $M_y$  [Kg.m]

X (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	-0.54	0.45	2.07	1.89	-0.80	-3.61	-3.41	0
10	0	-0.88	0.50	2.86	2.62	-1.30	-5.38	-5.04	0
15	0	-0.96	0.18	2.28	2.11	-1.36	-4.97	-4.61	0
20	0	-0.82	-0.10	1.37	1.29	-1.07	-3.55	-3.26	0
25	0	-0.57	-0.07	0.98	0.97	-0.65	-2.38	-2.21	0
30	0	-0.34	0.15	1.01	1.00	-0.30	-1.71	-1.65	0
35	0	-0.15	0.20	0.77	0.75	-0.10	-1.02	-1.01	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau N°19 pour les valeurs de  $M_{xy}$  [Kgm]

X ( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y ( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	-1.96	-6.35	-9.73	2.32	24.70	32.61	9.73	-28.59	-47.44
5	-0.12	-3.41	-6.15	2.24	18.08	23.33	6.15	-22.16	-36.04
10	3.07	2.16	0.94	1.73	3.88	3.75	-0.94	-7.640	-10.82
15	3.49	4.48	4.47	0.48	-6.83	-10.14	-4.77	5.18	10.16
20	0.24	1.76	2.90	-1.12	-2.54	-10.95	-2.90	10.31	16.786
25	-3.09	-1.99	-0.66	-2.06	-5.24	-5.36	0.66	9.40	13.58
30	-3.07	-2.16	-0.94	-1.73	-3.88	-3.75	0.94	7.64	10.82
35	-0.24	0.92	2.05	-0.65	-6.00	-7.84	-2.05	7.57	12.30
40	1.38	2.81	3.92	-0.08	-7.62	-10.70	-3.92	7.97	13.26

Tableau N°20 pour les valeurs de  $N_y$  [Kg]

X ( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y ( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	-368.70	-686.96	-832.45	-693.45	-322.56	34.95	141.70	0
10	0	-502.64	-930.21	-1128.03	-958.99	-493.50	-32.85	131.88	0
15	0	-398.38	-726.64	-886.57	-805.51	-527.91	-219.42	-39.72	0
20	0	-353.03	-452.82	-571.06	-605.56	-561.60	-430.44	-243.57	0
25	0	-220.85	-400.38	-529.85	-618.44	-649.20	-569.17	-340.20	0
30	0	-251.577	-468.82	-623.55	-694.43	-665.03	-527.48	-293.06	0
35	0	-191.17	-360.61	-476.24	-560.38	-443.85	-314.81	-158.78	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

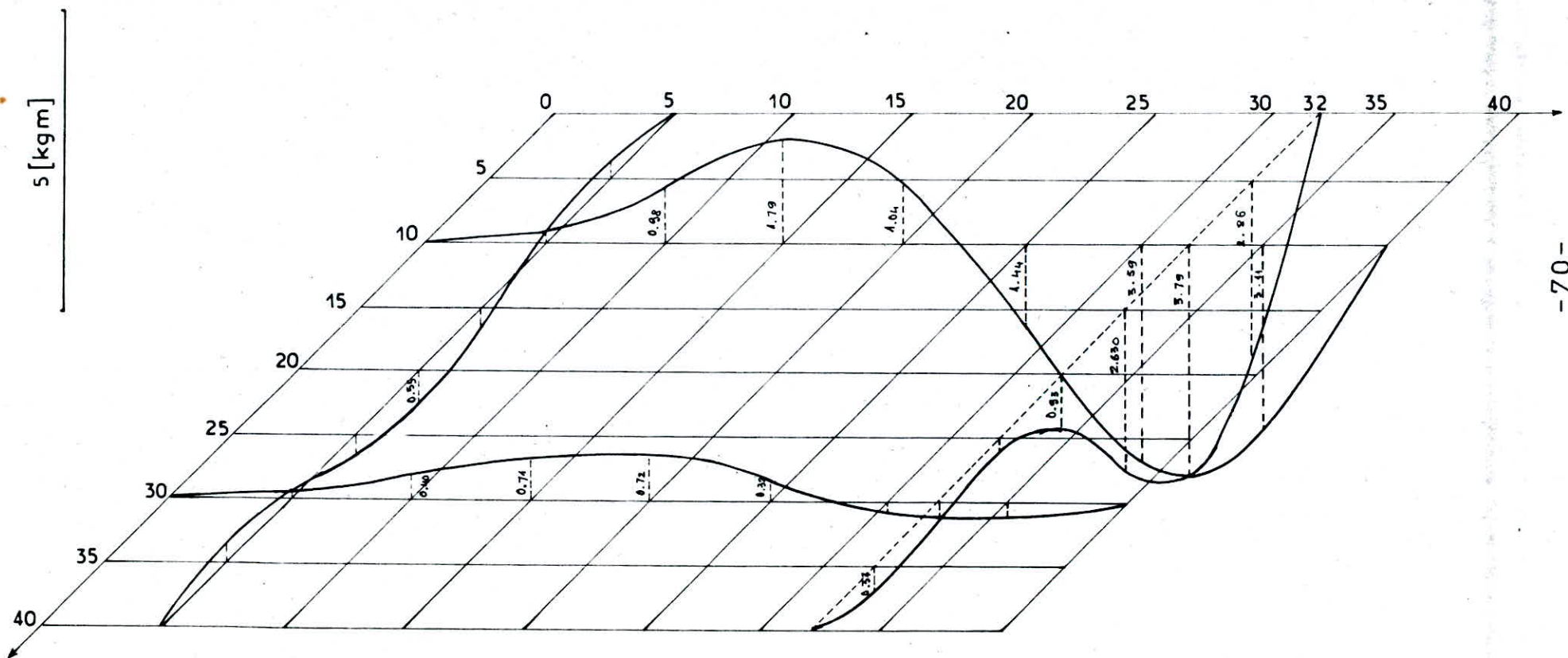
Tableau N°21 pour les valeurs de  $N_x$  [Kg]

X ( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y ( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	256.31	264.25	230.09	592.77	1355.94	1856.48	1382.16	0
10	0	421.76	460.38	440.08	1041.25	2254.91	3026.94	2236.53	0
15	0	466.818	554.44	593.82	1263.24	2527.58	3289.19	2400.57	0
20	0	426.30	552.48	649.53	1257.33	2320.34	2915.37	2097.11	0
25	0	349.45	478.86	589.09	1074.12	1878.83	2302.83	1639.19	0
30	0	255.77	353.49	433.39	773.79	1337.44	1632.02	1159.83	0
35	0	138.94	188.67	225.36	403.65	707.20	870.09	620.77	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau N°22 pour les valeurs de  $T_{xy}$  [Kg]

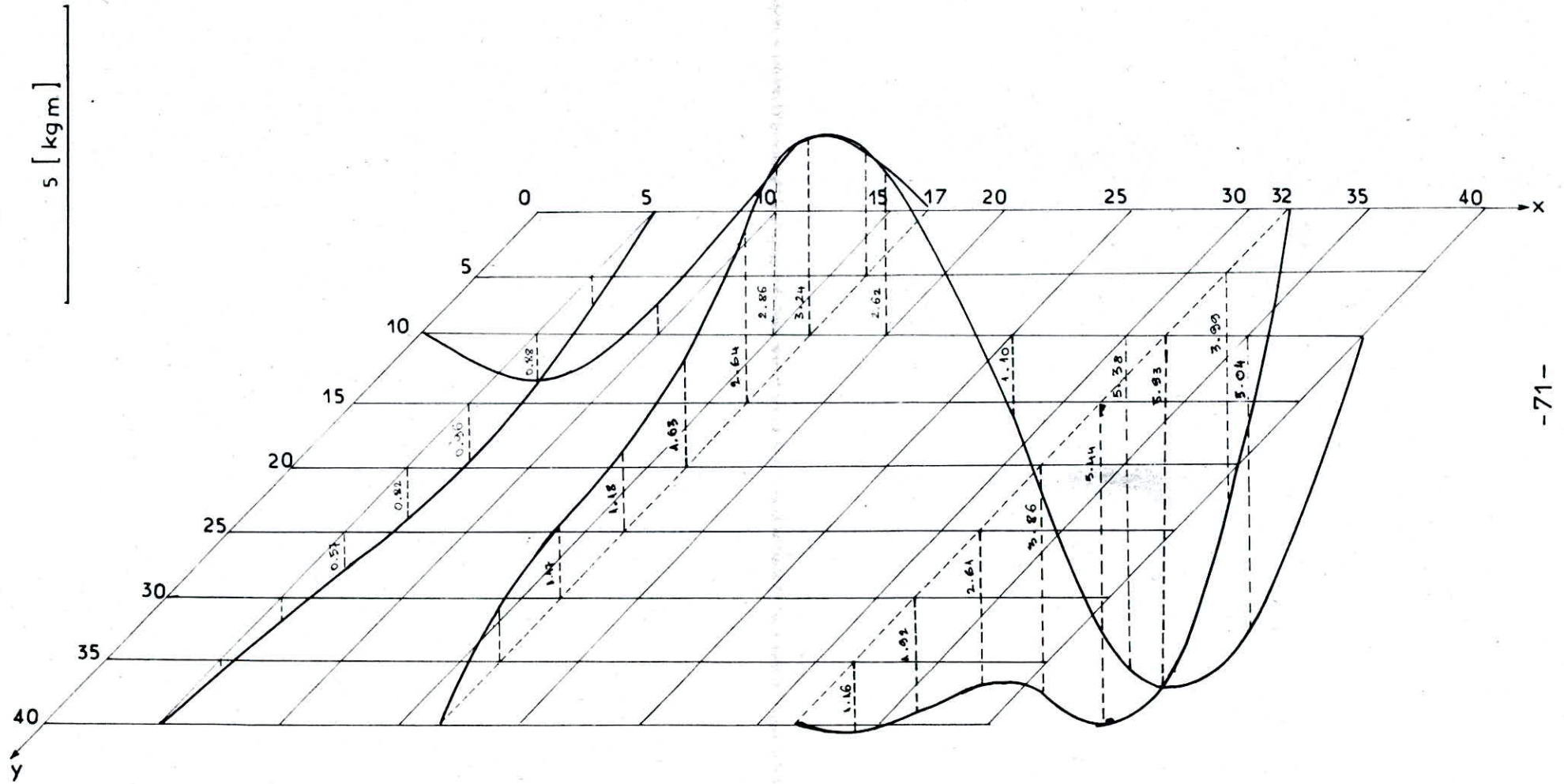
X ( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Y ( m )	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	1586.58	1329.64	1002.54	1230.87	1681.45	1147.07	-1002.54	-3707.57	-4949.49
5	1391.76	1176.64	900.73	1082.17	1435.49	947.92	-900.734	-3206.73	-4262.74
10	898.98	783.03	628.99	702.51	835.41	478.93	-628.99	-1964.47	-2569.79
15	310.01	295.81	268.55	241.16	176.26	8.105	-268.55	-545.08	-662.53
20	-208.95	-155.36	-94.55	-171.37	-322.01	-284.01	94.55	610.74	852.97
25	-605.52	-515.82	-402.27	-483.52	-631.65	-409.76	402.27	1408.80	1858.21
30	-898.98	-783.03	-628.99	-702.51	-835.41	-478.93	628.99	1964.47	2569.79
35	-1096.25	-956.93	-767.01	-839.81	-980.10	-546.27	767.01	2343.01	3056.46
40	-1168.68	-1018.92	-813.43	-888.12	-1037.44	-579.04	813.43	2486.08	3243.55

Graphe N°17 pour les valeurs de  $M_x$  [Kg.m]

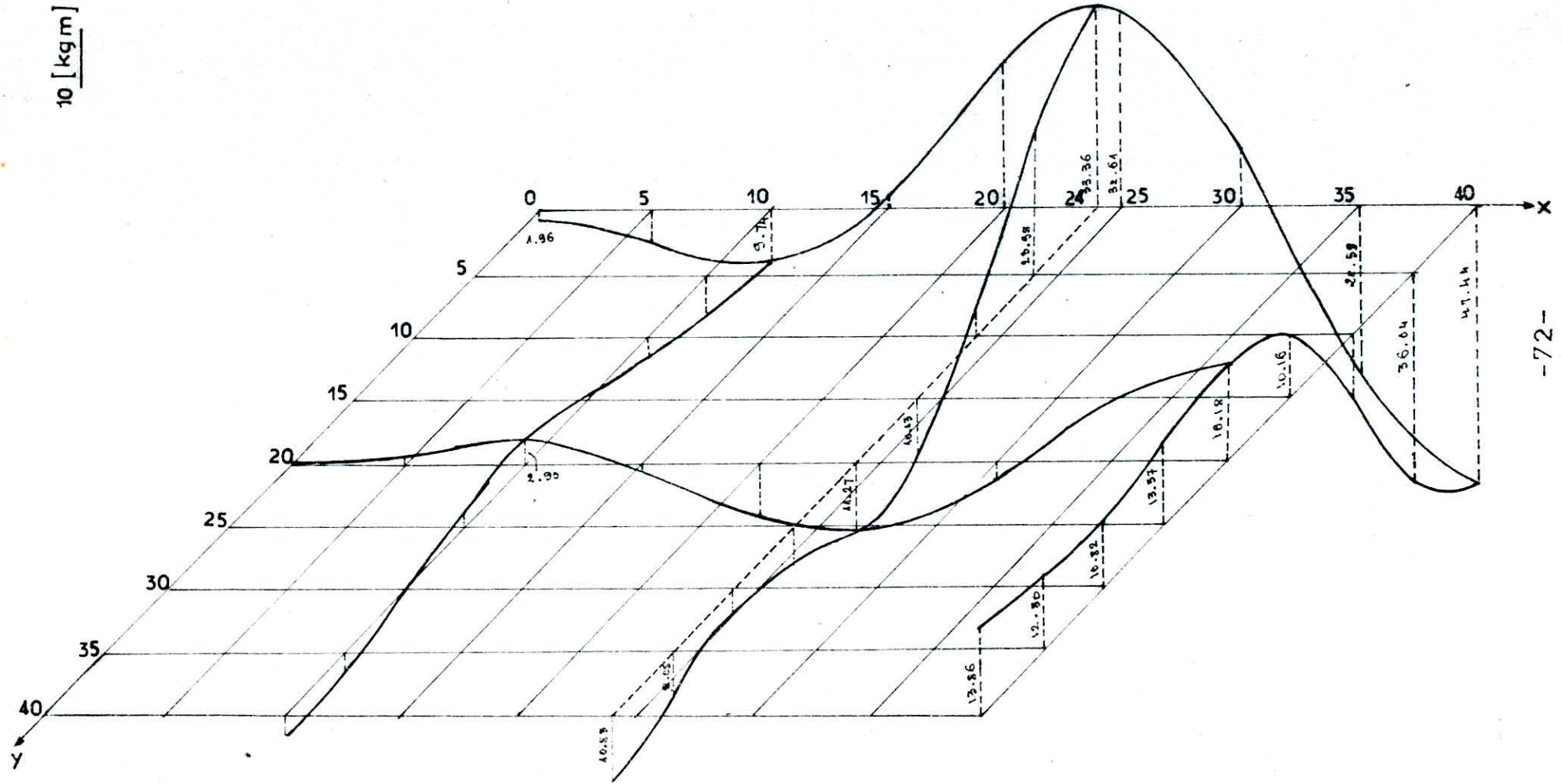




Graphe N°18 pour les valeurs de  $M_y$  [Kg.m]



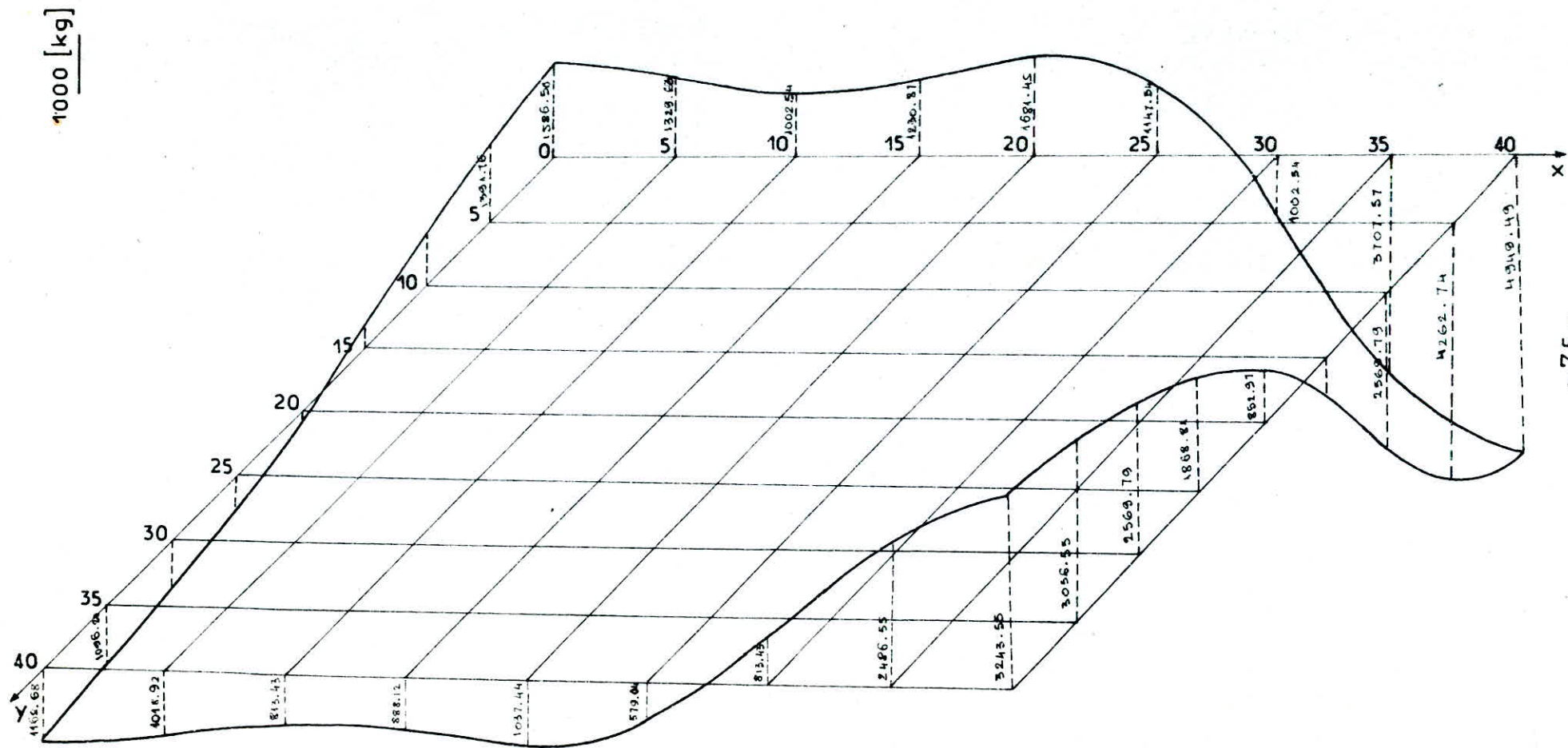
Graphe N°19 pour les valeurs de  $M_{xy}$  [Kg.m]







Graphe N°22 pour les valeurs de  $T_{xy}$  [Kg]



## b-Methode de collocation

soit l'équation différentielle définie dans l'intervalle  $[a, b]$  suivante :

$$(4-23) \quad L(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0$$

On se propose de trouver une solution approchée de cette équation

(4-23) en utilisant une fonction sous forme de série .

Pour cela nous devons :

- 1 - Donner une forme approchée de la fonction étudiée .
- 2 - Remplacer la fonction approchée dans l'équation (4-23)
- 3 - Prendre différents points appartenant dans le domaine d'étude  $[a, b]$ , et les coordonnées de ces points doivent satisfaire l'équation ainsi obtenue . Ils sont appelés "Points de Collocations" .

Pour le problème unidimensionnel , nous aurons  $n$  équations algébriques linéaires pour  $n$  points de collocations .

Donc les coefficients de la fonction approchée deviennent les inconnus du problème . Les termes de cette série doivent être du même nombre que les points de collocations .

Pour illustrer les différents étapes de cette méthode nous choisissons l'exemple suivant :

Soit une poutre console chargée uniformément , de module d'élasticité  $E$  , de moment d'inertie  $I$  et de longueur  $l$  .

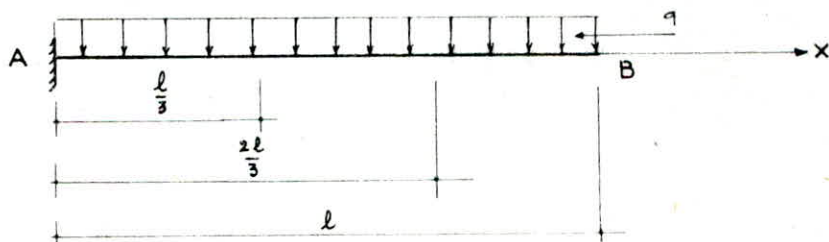


fig N° 15

L'équation différentielle de départ est :

$$(4-24) \quad E.I. y^{(4)} = q(x)$$

Choisissons la fonction approchée sous la forme de série suivante :

$$(4-25) \quad E.I. y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Les constantes  $a_i$  sont déterminées de sorte que cette fonction (4-25) satisfasse les conditions aux limites et l'équation (4-24).

Les conditions aux limites sont :

$$\text{Pour } x=0 \Rightarrow y=y'=0 \quad \text{donc } a_0 = a_1 = 0$$

$$\text{Pour } x=l \Rightarrow M = E.I. y'' = 0 \quad \text{et } Q = E.I. y''' = 0$$

avec :  $y'$  : notation

$y$  : déplacement

$M$  : moment

$Q$  : effort tranchant

Pour cinq points de collocations : deux points aux limites ( $x=l$ ), et trois points intermédiaires appartenant à  $[0, l]$  ( $x = \frac{l}{3}$ ,  $x = \frac{l}{2}$ ,  $x = \frac{2l}{3}$ ), nous devons avoir cinq termes de la fonction approchée (4-25).

$$(4-26) \quad E.I. y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + c_4 x^5 + c_5 x^6$$

De cette équation nous pouvons avoir :

$$E.I. y'' = M = 2c_1 + 6c_2 x + 12c_3 x^2 + 20c_4 x^3 + 30c_5 x^4$$

$$E.I. y''' = Q = 6c_2 + 24c_3 x + 60c_4 x^2 + 120c_5 x^3$$

$$E.I. y^{(4)} = q = 24c_3 + 120c_4 x + 360c_5 x^2$$

Nous établissons alors les équations algébriques linéaires suivantes :

$$\begin{array}{l}
 x = l \rightarrow M = 0 \\
 x = l \rightarrow Q = 0 \\
 x = \frac{l}{3} \\
 x = \frac{l}{2} \\
 x = \frac{2l}{3}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 2c_1 + 6c_2l + 12c_3l^2 + 20c_4l^3 + 30c_5l^4 = 0 \\
 2c_2 + 24c_3l + 60c_4l^2 + 120c_5l^3 = 0 \\
 24c_3 + 40c_4l + 120c_5l^2 = q \\
 24c_3 + 60c_4l + 180c_5l^2 = q \\
 24c_3 + 80c_4l + 240c_5l^2 = q
 \end{array}
 \right.$$

Donc nous pouvons écrire ces cinq équations sous la forme matricielle suivante :

$$[A] \cdot [X] = [B]$$

$$(4-27) \quad \begin{bmatrix} 2 & 6l & 12l^2 & 20l^3 & 30l^4 \\ 0 & 2 & 24l & 60l^2 & 120l^3 \\ 0 & 0 & 24 & 40l & 120l^2 \\ 0 & 0 & 24 & 60l & 180l^2 \\ 0 & 0 & 24 & 80l & 240l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \\ q \\ q \end{bmatrix}$$

[A] : Matrice des coefficients

[X] : vecteur inconnu contenant les coefficients  $c_i$  ( $i=1,5$ )

[B] : vecteur du second membre connu.

La résolution de (4-27) permet de déterminer les coefficients  $c_i$  ( $i=1,5$ ) de la série.

En remplaçant dans l'équation différentielle (4-24), la fonction (4-26) avec les coefficients que nous venons d'obtenir, nous aurons la valeur  $\bar{q}(x)$ . Pour évaluer l'erreur commise par cette opération on compare  $q(x)$  avec  $\bar{q}(x)$ .

Dans notre cas l'erreur commise est de l'ordre de 0,3% pour le déplacement, 4% pour le moment flechissant et 13% pour l'effort tranchant.



## Résolution par la méthode de collocation

soit une coque sphérique en pente douce d'épaisseur constante  $h$ , de dimension  $(a \times b)$  sur le plan, appuyée sur son contour ABCD et soumise à une charge uniforme  $q_z$ .

Les axes de coordonnées  $(Ox, Oz)$  sont pris suivant la figure suivante :

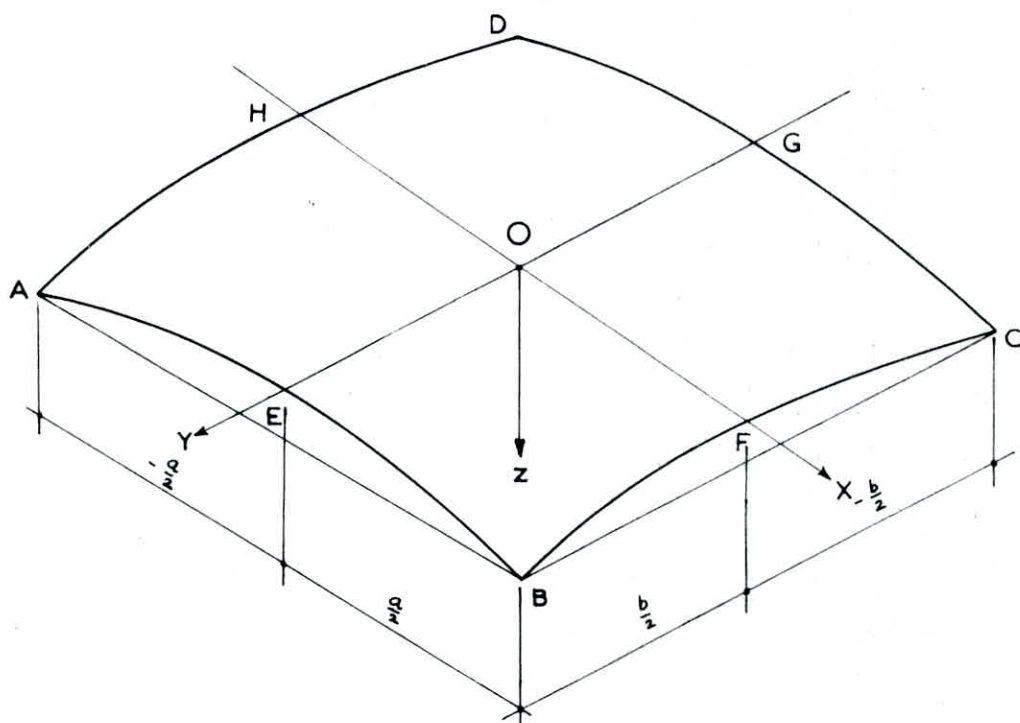


Fig N°16

L'équation d'une coque en pente douce est :

$$(4-28) \quad \begin{cases} D \cdot \nabla^4 W + \nabla_K^2 \Phi = q_z \\ \frac{1}{Eh} \cdot \nabla^4 \Phi - \nabla_K^2 W = 0 \end{cases}$$

Déterminons les fonctions  $W(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  de telle sorte que le système d'équation (4-28) soit satisfait, ainsi que les conditions aux limites, pour une coque appuyée sur son contour, suivantes :

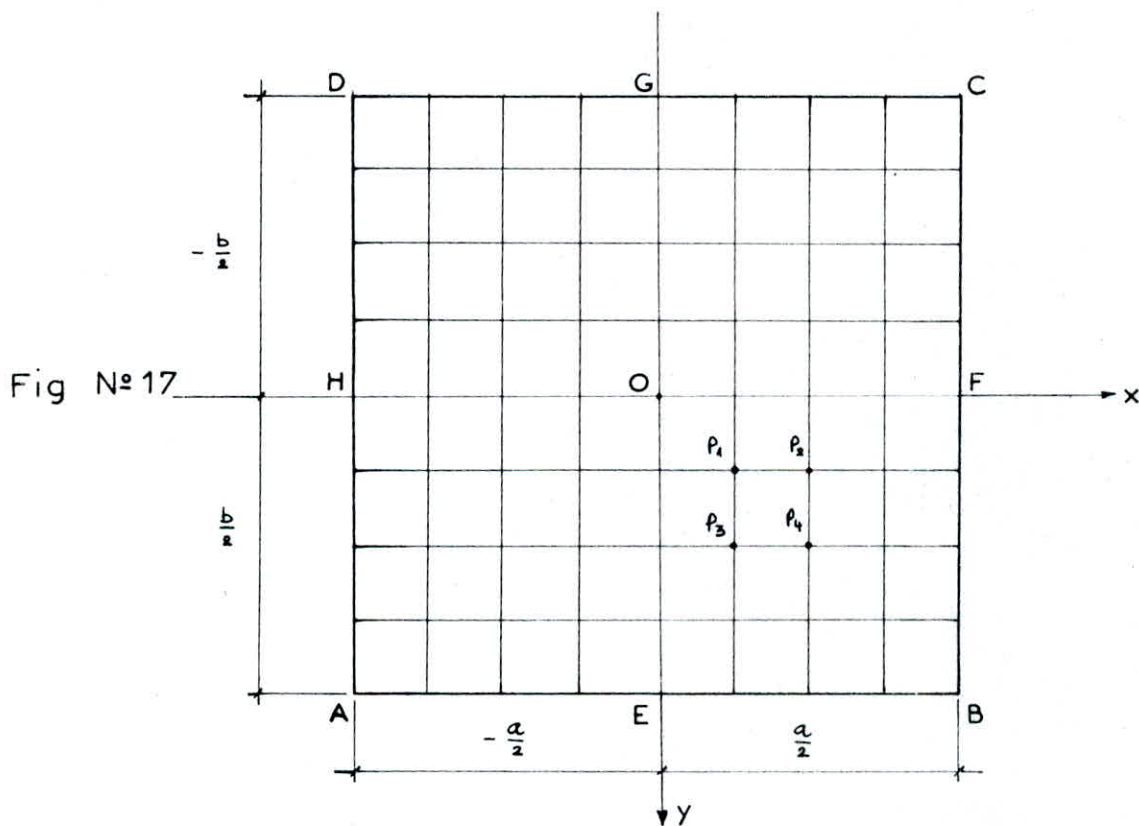
$$(4-29) \quad \begin{array}{ll} \text{Pour } x = -\frac{a}{2} \text{ et } x = \frac{a}{2} & : W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 ; N_y = 0 \\ \text{Pour } y = -\frac{b}{2} \text{ et } y = \frac{b}{2} & : W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 ; N_x = 0 \end{array}$$

Pour cela exprimons les fonctions  $W(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  sous une forme approchée en série double trigonométrique en cosinus suivante :

$$(4-30) \quad \begin{cases} W(x, y) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} A_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \Phi(x, y) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} B_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \end{cases}$$

Avec ces fonctions choisies les conditions aux limites (4-29) sont vérifiées.

Remplaçons alors les fonctions approchées (4-30) dans le système d'équation (4-28) et prenons quatre points de collocation  $P_1(5, 5)$ ,  $P_2(5, 10)$ ,  $P_3(10, 5)$  et  $P_4(10, 10)$  appartenant dans le domaine  $\mathcal{D}[a, b]$  (Fig N° 17). c'est à dire, nous aurons pour chaque fonction quatre termes inconnus de la série ( $m = 1, 3$  ;  $n = 1, 3$ ).



Avec le système d'axe  $(Ox, y)$  choisi, nous avons une symétrie dans le plan, suivant  $Ox$  et  $Oy$ . Pour cela nous pouvons réduire notre étude sur le domaine  $(OEBF)$ .

Dans le cas d'une coque sphérique de petite flèche  $\nabla_K^2$  et  $\nabla^4$  sont donnés par :

$$(4-31) \quad \begin{cases} \nabla_K^2 = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{cases}$$

Si nous remplaçons  $W(x,y)$  et  $\Phi(x,y)$  dans le système (4-28) et en tenant compte les données : ( $a=b$ ,  $R_1=R_2=R$ ), ainsi que la remarque (4-31), nous aurons :

$$\nabla^4(D.W) = \sum_{m=1,3} \sum_{n=1,3} A_{mn} \cdot \frac{D \pi^4 \cdot (m^2+n^2)^2}{a^4} \cdot \cos \frac{m\bar{u}x}{a} \cdot \cos \frac{n\bar{u}y}{a} = \bar{D}_{mn}^{P_i}$$

$$\nabla_K^2 W = - \sum_{m=1,3} \sum_{n=1,3} A_{mn} \cdot \frac{\pi^2 \cdot (m^2+n^2)}{a^2 R} \cdot \cos \frac{m\bar{u}x}{a} \cdot \cos \frac{n\bar{u}y}{a} = \bar{D}_{mn}^{P_i}$$

$$\nabla^4 \left( \frac{1}{Eh} \cdot \Phi \right) = \sum_{m=1,3} \sum_{n=1,3} B_{mn} \cdot \frac{\pi^4 \cdot (m^2+n^2)^2}{Eh \cdot a^4} \cdot \cos \frac{m\bar{u}x}{a} \cdot \cos \frac{n\bar{u}y}{a} = \bar{E}_{mn}^{P_i}$$

$$\nabla_K^2 \Phi = - \sum_{m=1,3} \sum_{n=1,3} B_{mn} \cdot \frac{\pi^2 \cdot (m^2+n^2)}{a^2 R} \cdot \cos \frac{m\bar{u}x}{a} \cdot \cos \frac{n\bar{u}y}{a} = \bar{F}_{mn}^{P_i}$$

Avec quatre points de collocations et quatre termes de la série, l'équation (4-28) nous donne un système de 8 équations algébriques linéaires, avec 8 inconnues.

$$P_1 \left[ \begin{array}{l} A_{11} \cdot \bar{C}_{11}^{P_1} + A_{13} \cdot \bar{C}_{13}^{P_1} + A_{31} \cdot \bar{C}_{31}^{P_1} + A_{33} \cdot \bar{C}_{33}^{P_1} - B_{11} \cdot \bar{F}_{11}^{P_1} - B_{13} \cdot \bar{F}_{13}^{P_1} \\ \quad - B_{31} \cdot \bar{F}_{31}^{P_1} - B_{33} \cdot \bar{F}_{33}^{P_1} = q_z \\ A_{11} \cdot \bar{D}_{11}^{P_1} + A_{13} \cdot \bar{D}_{13}^{P_1} + A_{31} \cdot \bar{D}_{31}^{P_1} + A_{33} \cdot \bar{D}_{33}^{P_1} + B_{11} \cdot \bar{E}_{11}^{P_1} + B_{13} \cdot \bar{E}_{13}^{P_1} \\ \quad + B_{31} \cdot \bar{E}_{31}^{P_1} + B_{33} \cdot \bar{E}_{33}^{P_1} = 0 \end{array} \right.$$

$$P_2 \left[ \begin{array}{l} A_{11} \cdot \bar{C}_{11}^{P_2} + A_{13} \cdot \bar{C}_{13}^{P_2} + A_{31} \cdot \bar{C}_{31}^{P_2} + A_{33} \cdot \bar{C}_{33}^{P_2} - B_{11} \cdot \bar{F}_{11}^{P_2} - B_{13} \cdot \bar{F}_{13}^{P_2} \\ \quad - B_{31} \cdot \bar{F}_{31}^{P_2} - B_{33} \cdot \bar{F}_{33}^{P_2} = q_z \\ A_{11} \cdot \bar{D}_{11}^{P_2} + A_{13} \cdot \bar{D}_{13}^{P_2} + A_{31} \cdot \bar{D}_{31}^{P_2} + A_{33} \cdot \bar{D}_{33}^{P_2} + B_{11} \cdot \bar{E}_{11}^{P_2} + B_{13} \cdot \bar{E}_{13}^{P_2} \\ \quad + B_{31} \cdot \bar{E}_{31}^{P_2} + B_{33} \cdot \bar{E}_{33}^{P_2} = 0 \end{array} \right.$$

$$P_3 \left[ \begin{array}{l} A_{11} \cdot \bar{C}_{11}^{-P_3} + A_{13} \cdot \bar{C}_{13}^{-P_3} + A_{31} \cdot \bar{C}_{31}^{-P_3} + A_{33} \cdot \bar{C}_{33}^{-P_3} - B_{11} \cdot \bar{F}_{11}^{-P_3} - B_{13} \cdot \bar{F}_{13}^{-P_3} \\ \quad - B_{31} \cdot \bar{F}_{31}^{-P_3} - B_{33} \cdot \bar{F}_{33}^{-P_3} = q_2 \\ A_{11} \cdot \bar{D}_{11}^{-P_3} + A_{13} \cdot \bar{D}_{13}^{-P_3} + A_{31} \cdot \bar{D}_{31}^{-P_3} + A_{33} \cdot \bar{D}_{33}^{-P_3} + B_{11} \cdot \bar{E}_{11}^{-P_3} + B_{13} \cdot \bar{E}_{13}^{-P_3} \\ \quad + B_{31} \cdot \bar{E}_{31}^{-P_3} + B_{33} \cdot \bar{E}_{33}^{-P_3} = 0 \end{array} \right.$$

$$P_4 \left[ \begin{array}{l} A_{11} \cdot \bar{C}_{11}^{-P_4} + A_{13} \cdot \bar{C}_{13}^{-P_4} + A_{31} \cdot \bar{C}_{31}^{-P_4} + A_{33} \cdot \bar{C}_{33}^{-P_4} - B_{11} \cdot \bar{F}_{11}^{-P_4} - B_{13} \cdot \bar{F}_{13}^{-P_4} \\ \quad - B_{31} \cdot \bar{F}_{31}^{-P_4} - B_{33} \cdot \bar{F}_{33}^{-P_4} = q_2 \\ A_{11} \cdot \bar{D}_{11}^{-P_4} + A_{13} \cdot \bar{D}_{13}^{-P_4} + A_{31} \cdot \bar{D}_{31}^{-P_4} + A_{33} \cdot \bar{D}_{33}^{-P_4} + B_{11} \cdot \bar{E}_{11}^{-P_4} + B_{13} \cdot \bar{E}_{13}^{-P_4} \\ \quad + B_{31} \cdot \bar{E}_{31}^{-P_4} + B_{33} \cdot \bar{E}_{33}^{-P_4} = 0 \end{array} \right.$$

Dans ce cas nous parvenons à obtenir la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^{-P_1} & \bar{C}_{13}^{-P_1} & \bar{C}_{31}^{-P_1} & \bar{C}_{33}^{-P_1} & -\bar{F}_{11}^{-P_1} & -\bar{F}_{13}^{-P_1} & -\bar{F}_{31}^{-P_1} & -\bar{F}_{33}^{-P_1} \\ \bar{D}_{11}^{-P_1} & \bar{D}_{13}^{-P_1} & \bar{D}_{31}^{-P_1} & \bar{D}_{33}^{-P_1} & \bar{E}_{11}^{-P_1} & \bar{E}_{13}^{-P_1} & \bar{E}_{31}^{-P_1} & \bar{E}_{33}^{-P_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{C}_{11}^{-P_4} & \bar{C}_{13}^{-P_4} & \bar{C}_{31}^{-P_4} & \bar{C}_{33}^{-P_4} & -\bar{F}_{11}^{-P_4} & -\bar{F}_{13}^{-P_4} & -\bar{F}_{31}^{-P_4} & -\bar{F}_{33}^{-P_4} \\ \bar{D}_{11}^{-P_4} & \bar{D}_{13}^{-P_4} & \bar{D}_{31}^{-P_4} & \bar{D}_{33}^{-P_4} & \bar{E}_{11}^{-P_4} & \bar{E}_{13}^{-P_4} & \bar{E}_{31}^{-P_4} & \bar{E}_{33}^{-P_4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{13} \\ \vdots \\ B_{31} \\ B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ 0 \\ \vdots \\ q_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c'est à dire :  $[A][X] = [B]$  , avec :

[A] : Matrice des coefficients de dimension  $[8 \times 8]$

[X] : Vecteur inconnu

[B] : Vecteur formé par les charges  $q_2$  données .

$$[X] = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{13} \\ \vdots \\ B_{31} \\ B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}$$

Donc le vecteur inconnu [X] sera déterminé par :

$$[X] = [A]^{-1} \cdot [B]$$

Pour les calculs numériques nous prenons la charge sismique ( $k_s = \frac{1}{10}$ )

$$q_z = 21,6 \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{40} + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{40} + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ [Kg/m}^2\text{]}$$

les caractéristiques de la coque sphérique et du béton sont :

$$a = b = 40 \text{ m} \quad ; \quad h = 0,115 \text{ m} \quad ; \quad R = 52,75 \text{ m}$$

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Kg/m}^2 \quad ; \quad \nu = 0,2 \quad ; \quad D = 396061,1979 \text{ Kg.m}$$

Donc, avec les quatre points  $P_1, P_2, P_3, P_4$  nous aurons :

$$[A] = \begin{bmatrix} 51,45 & 532,82 & 532,82 & 715,07 & -1,99 \cdot 10^{-4} & -4,13 \cdot 10^{-4} & -4,13 \cdot 10^{-4} & -3,08 \cdot 10^{-4} \\ 1,99 \cdot 10^{-4} & 4,13 \cdot 10^{-4} & 4,13 \cdot 10^{-4} & 3,08 \cdot 10^{-4} & 3,77 \cdot 10^{-13} & 3,90 \cdot 10^{-12} & 3,90 \cdot 10^{-12} & 5,23 \cdot 10^{-12} \\ 39,38 & 407,80 & -984,52 & -1321,27 & -1,53 \cdot 10^{-4} & -3,16 \cdot 10^{-4} & 7,64 \cdot 10^{-4} & 5,70 \cdot 10^{-4} \\ 1,53 \cdot 10^{-4} & 3,16 \cdot 10^{-4} & -7,64 \cdot 10^{-4} & -5,70 \cdot 10^{-4} & 2,88 \cdot 10^{-13} & 2,98 \cdot 10^{-12} & -7,20 \cdot 10^{-12} & -9,67 \cdot 10^{-12} \\ 39,38 & -984,52 & 407,80 & -1321,27 & -1,53 \cdot 10^{-4} & 7,64 \cdot 10^{-4} & -3,16 \cdot 10^{-4} & 5,70 \cdot 10^{-4} \\ 1,53 \cdot 10^{-4} & -7,64 \cdot 10^{-4} & 3,16 \cdot 10^{-4} & -5,70 \cdot 10^{-4} & 2,88 \cdot 10^{-13} & -7,20 \cdot 10^{-12} & 2,98 \cdot 10^{-12} & -9,67 \cdot 10^{-12} \\ 30,14 & -753,51 & -753,51 & 2441,39 & -1,17 \cdot 10^{-4} & 5,85 \cdot 10^{-4} & 5,85 \cdot 10^{-4} & 1,05 \cdot 10^{-3} \\ 1,17 \cdot 10^{-4} & -5,85 \cdot 10^{-4} & -5,85 \cdot 10^{-4} & 1,05 \cdot 10^{-3} & 2,21 \cdot 10^{-13} & -5,51 \cdot 10^{-12} & -5,51 \cdot 10^{-12} & 1,87 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 3,16 \\ 0 \\ -5,85 \\ 0 \\ -5,85 \\ 0 \\ 10,80 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La résolution du système linéaire par la méthode de Gauss nous donne les valeurs des coefficients  $A_{mn}, B_{mn}$  ( $m=1,3, n=1,3$ ) telles que :

$$A_{11} = 1,150 \cdot 10^{-7}$$

$$B_{11} = -4,248$$

$$A_{13} = -4,321 \cdot 10^{-8}$$

$$B_{13} = 1,405$$

$$A_{31} = -5,224 \cdot 10^{-8}$$

$$B_{31} = 1,393$$

$$A_{33} = 1,677 \cdot 10^{-4}$$

$$B_{33} = -9274,897$$

Donc les fonctions  $W(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$  sont déterminées :

$$W(x, y) = 1,150 \cdot 10^{-7} \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} - 4,321 \cdot 10^{-8} \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\ - 5,224 \cdot 10^{-8} \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 1,677 \cdot 10^{-4} \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [m]$$

$$\Phi(x, y) = -4,248 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} + 1,405 \cdot \cos \frac{\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \\ + 1,393 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{\pi y}{40} - 9274,897 \cdot \cos \frac{3\pi x}{40} \cdot \cos \frac{3\pi y}{40} \quad [kg \cdot m^2]$$

Les efforts et moments seront obtenus par la relation ( ) chap II.

## c - Calcul des colonnes

Nous admettons l'hypothèse du Professeur B.Z. Vlacov qui assimile les coques de petite flèche à un corps rigide dans sa surface moyenne dans le cas où  $\frac{h}{R} \ll \frac{1}{30}$ .

Quand la fondation subit des vibrations horizontales, le schéma de calcul de l'ouvrage peut être représenté sous la forme d'un disque rigide articulé sur des colonnes (Fig N°18). En intégrant le problème spatial au problème plan nous pouvons avoir le schéma de calcul selon une poutre rigide articulée sur les colonnes.

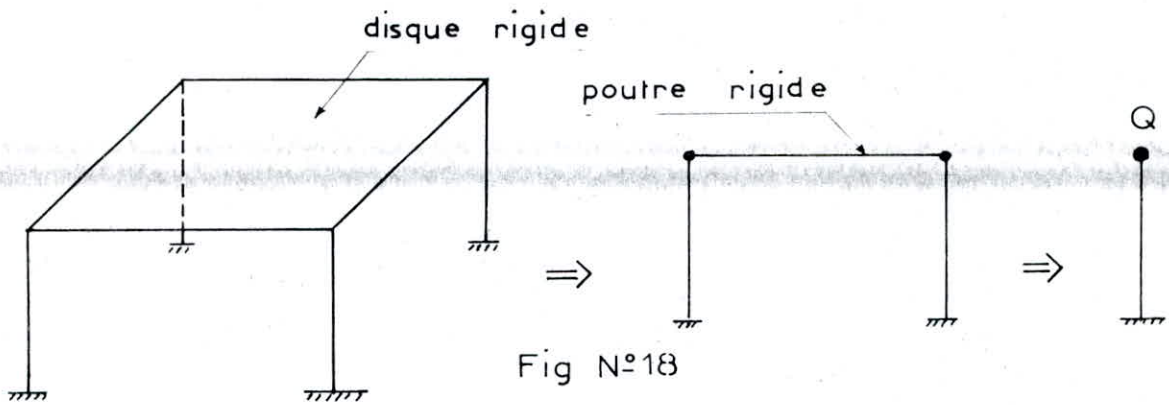


Fig N°18

En posant comme hypothèse de travail que la masse de l'ouvrage, c'est à dire la masse de la coque y compris la charge d'exploitation, et la masse des fermes, est concentrée à la poutre, nous pouvons admettre l'ensemble comme un système à 1 degré de liberté, et la charge sismique est appliquée à l'ouvrage se rapporte au niveau de la poutre. La charge sismique est déterminée par la formule :

$$(4-32) \quad S_{ik} = k_s \cdot Q_s \cdot \beta_i \cdot \eta_{ik} \quad \text{avec ,}$$

$S_{ik}$  : charge sismique appliquée sur le schéma de calcul de l'ouvrage correspondant au mode  $i$  de vibrations.

$K_s$  : coefficient sismique de calcul .

$Q_K$  : poids de la partie de l'ouvrage qui est adopté concentré au point  $K$  .

$\beta_i$  : coefficient dynamique qui depend des periodes de vibrations libre .

$\eta_{ik}$  : coefficient de la forme de vibrations libre de l'ouvrage correspondant au mode  $i$  .

Dans notre cas l'ouvrage est assimilé à un système de 1 degré de liberté , donc le coefficient de la forme de vibration  $\eta_{ik}$  est égal à 1 .

Le système à 1 degré possède une seule fréquence de vibration , alors le coefficient dynamique  $\beta_i$  devient équivalent à  $\beta$  .

La charge sismique est appliquée au point où toute la masse de l'ouvrage est concentrée . Donc ,

$$(4-33) \quad S = K_s \cdot Q \cdot \beta$$

Le coefficient dynamique  $\beta$  est déterminé par le règlement sismique de chaque pays . Dans notre cas  $\beta$  est donné par la formule :

$$\beta = \frac{1}{T} \quad \text{ou par la méthode graphique proposée par le professeur Kortchinsky .}$$

Notre coque vibre sur les appuis avec la période  $T = 0,42 \text{ s}$  , donc  $\beta = 2,38$  . Comme les vibrations de la coque sur les appuis sont déterminées principalement par déformation de flexion , il faut prévoir une majoration du coefficient  $\beta$  de 1,5 :  $\beta = 2,38 \cdot 1,5 = 3,6$

Le poids total de la coque y compris la charge d'exploitation est  $q = 400 \text{ Kg/m}^2$  , et pour les fermes  $q' = 1,03 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}$  .



$$Q = 400 \cdot 40 \cdot 40 + 1,03 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 4 = 805 \text{ t}$$

Lors du seisme de degré 9 à l'échelle MSK (Medvedev - Sponheuer - Karnik)

$$K_s = \frac{1}{10}, \text{ donc :}$$

$$S = \frac{1}{10} \cdot 805 \cdot 3,6 = 290 \text{ t}$$

La coque est appuyée par quatre colonnes de même section, mais de hauteur différentes. La charge sismique répartie sur chaque colonne est proportionnelle à leur rigidité. La section des colonnes est de (60 x 85 cm) et les longueurs  $l_1 = l_2 = 7,65 \text{ m}$ ,  $l_3 = 4,05 \text{ m}$ ,  $l_4 = 3,25 \text{ m}$ .

La charge sismique revenant à chaque colonne sera :  $S_j = \frac{S \cdot K_j}{\sum_{j=1}^4 K_j}$

$$S_1 = S_2 = \frac{290 \times 1,3}{8,2} = 46 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

$$S_3 = \frac{290 \times 2,5}{8,2} = 88 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

$$S_4 = \frac{290 \times 3,1}{8,2} = 109 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

À l'encastrement les moments flechissants sont :

$$M_1 = M_2 = 46 \times 7,65 = 350 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

$$M_3 = 88 \times 4,05 = 356 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

$$M_4 = 109 \times 3,25 = 354 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

Poids des colonnes :  $\rho_b = 2,5 \text{ t/m}^3$

$$P_1 = P_2 = 0,6 \times 0,85 \times 2500 \times 7,65 = 9,7 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

$$P_3 = 0,6 \times 0,85 \times 2500 \times 4,05 = 5,2 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

$$P_4 = 0,6 \times 0,85 \times 2500 \times 3,25 = 4,1 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

Les efforts normaux dans la section d'encastrement sont :

$$N_1 = N_2 = \frac{Q}{4} + P_1 = 210,7 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

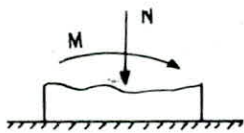
$$N_3 = \frac{Q}{4} + P_3 = 206,2 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

$$N_4 = \frac{Q}{4} + P_4 = 204,1 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

Les moments fléchissants et les efforts normaux dans toutes les colonnes sont de même grandeur, ainsi la détermination des sections d'armatures peut se faire à partir de la colonne la plus longue c'est à dire la colonne N°1.

## Détermination des Armatures

A l'encastrement nous avons :  $M = 350.10^5 \text{ Kg.cm}$  ;  $N = 240,7.10^3 \text{ Kg}$



Cas d'une flexion composée.

Nous choisissons un poteau carré ( $a \times a$ ).

$$\sigma \leq \bar{\sigma}_b \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \cdot z \leq 205,5 \text{ Kg/cm}^2$$

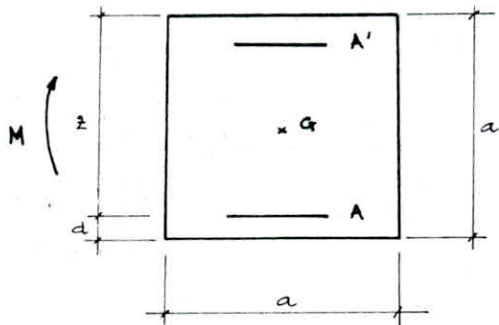
$$z = \frac{a}{2} \quad ; \quad I = \frac{a^4}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{a^2} + \frac{6 \cdot M}{a^3} \leq 205,5 \text{ Kg/cm}^2$$

donc nous prenons de ( $140 \times 140$ ).

Enrobage  $d = 10 \text{ cm}$        $h = 140 \text{ cm}$        $\frac{h}{6} = 23,33 \text{ cm}$

$$e_0 = \frac{M}{N} = 166,11 \text{ cm} \quad \frac{h}{6} < e_0 \Rightarrow \text{section partiellement}$$

comprimée.



A' : armature supérieure

A : armature inférieure.

Moment appliqué en A :

$$M_A = M_G + N \left( \frac{h}{2} - d \right) = 35042642 \text{ Kg.cm}$$

1 - Moment  $M$  rapporté au centre de gravité des aciers tendus :

$$M = N \cdot e_A \quad e_A = 166,11 + 60 = 226,11 \text{ cm}$$

$$M = 47641377 \text{ Kg.cm}$$

$$M_{rb} = \frac{1}{2} \cdot \bar{\sigma}_b' \cdot \bar{\alpha} \left( 1 - \frac{\bar{\alpha}}{3} \right) \cdot b_0 \cdot h^2 \quad \bar{\alpha} = \frac{15 \bar{\sigma}_b'}{15 \bar{\sigma}_b' + \bar{\sigma}_a}$$

nous prenons  $\bar{\sigma}_a = 2800 \text{ Kg/cm}^2$  (2ème genre)

$$\bar{\alpha} = 0,349$$

$$\bar{\beta} = 1 - \frac{\bar{\alpha}}{3} = 0,883$$

$$M_{rb} = 42312434,27 \text{ Kg.cm}$$

$M_{rb} < M$  donc existence de 2 nappes d'armatures

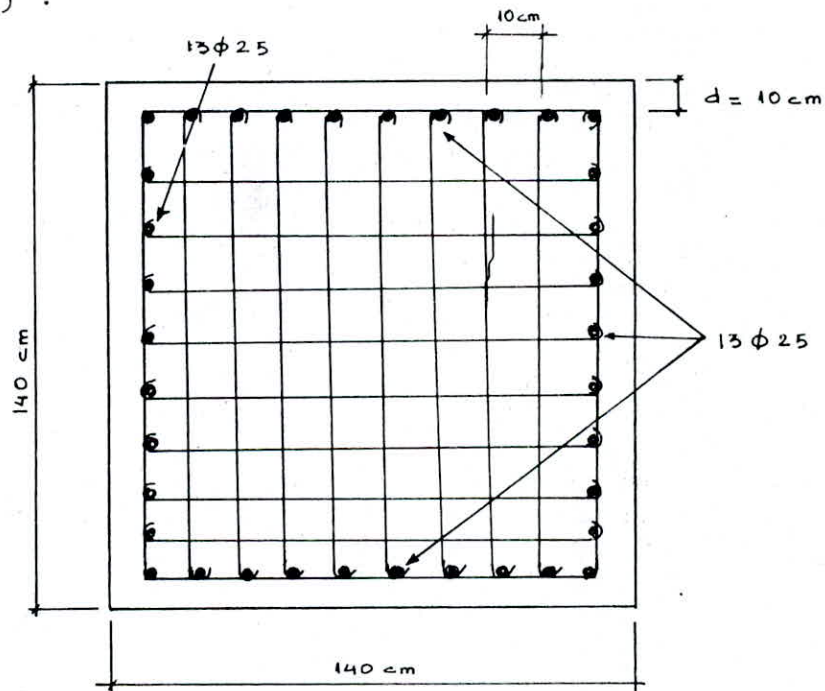
$$\bar{\beta}'_a = n \cdot \bar{\beta}'_b \cdot \frac{\bar{\alpha} - \delta'}{\bar{\alpha}} \quad \delta' = \frac{d'}{h} = 7,14 \cdot 10^{-2} \quad \bar{\alpha} = 0,349$$

$$\bar{\beta}'_a = 15 \cdot 100 \cdot \frac{0,349 - 7,14 \cdot 10^{-2}}{0,349} = 1193,123$$

$$A' = \frac{M - M_{rb}}{\bar{\beta}'_a (h - d')} = 34,35 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{M_{rb}}{\bar{\beta} \cdot h \cdot \bar{\beta}_a} + A' \cdot \frac{\bar{\beta}'_a}{\bar{\beta}_a} - \frac{N}{\bar{\beta}_a} = 51,529 \text{ cm}^2 \quad (13 \phi 25)$$

Dans le cas du seisme nous prenons des armatures symétriques  $A = A'$  (sur les 4 côtés).



## CONCLUSION

Etant donné les résultats obtenus tout au long de la partie numérique nous avons constaté que l'influence des moments à l'état de contrainte de la coque est faible devant les efforts  $N$ . Ainsi, dans les calculs pratiques des coques minces, avec les conditions de Navier, sous l'action des charges symétriques on peut négliger les moments  $M$ .

La méthode de la série trigonométrique double permet d'obtenir rapidement la solution pour les problèmes dont les conditions de Navier sont homogènes sur son contour.

La méthode de collocation est universelle. Elle peut nous permettre d'utiliser un algorithme particulièrement simple pour les calculs des coques dont les conditions aux limites sur chaque bord sont arbitraires. Une extension de cette méthode à l'étude des caractéristiques dynamiques nous aide à déterminer facilement les états de contraintes et de déformation d'une coque soumise à n'importe quelle excitation dynamique extérieure.

Vue la haute capacité de résistance en compression du béton, l'existence des grands efforts de compressions dans la coque, révèle une bonne utilisation du matériau surtout pour les édifices de grandes portées.

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 - Plaques et coques  
TIMOSHENKO
- 2 - Dynamique des structures 2<sup>ème</sup> Partie  
( Cours au post-graduation Ecole Nationale  
Polytechnique d'Alger 1985-1989 )  
DANG VIET CUONG
- 3 - Calcul des structures parasismiques ( Alger 1985 )  
TZENOV, BONNEVILLE
- 4 - Problèmes dynamiques de la théorie des coques  
O.D ANIASHVILI
- 5 - Chargement sismiques des toitures en forme de coques  
( Moscou 1974 )  
F.V BOBROV  
V.A BICOVSKI  
A.M GACANOV

