

11/89

وزارة التعليم العالي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR.

l. or

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT - GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Logiciel d'études
de Batiments en Portiques

Proposé par :

Etudié par :

Dirigé par :

Mr A.CHARIF

MM: S. MEZAZIGH

Mr A.CHARIF

A. LADJOUZI

PROMOTION : JUIN 1989

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT - GENIE CIVIL -

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

Logiciel d'études
de Batiments en Portiques

Proposé par :

Mr A.CHARIF

Etudié par :

MM: S. MEZAZIGH

A. LADJOUZI

Dirigé par :

Mr A.CHARIF

PROMOTION : JUIN 1989

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي

عِلْمًا

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

DEPARTEMENT : GENIE-CIVIL

PROMOTEUR : Mr. A. CHARIF

ELEVE INGENIEUR : Mr. S. MEZAZIGH & Mr. A. LADJOUZI

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

مصلحة :

موجه :

تلميذ مهندس :

الموضوع : برنامج آلي للدراسة الاتوماتكية لمشاريع بنيات الجذعية

الملخص :

إن هذا البرنامج الآلي ذو خاصية بحث أنه يبرمج وينفذ على الكمبيوتر، يعرض امكانيات دراسة الأبنية ذات الأروقة المستقيمة مع انفكاف سطحي وعمودي، تغيير كل من ابعاد الأعمدة و الأعرضة، الشحن الدائمة والاستغلالية من طابق إلى آخر، ومختلف نماذج أرضية البيت مع احتمال وجود بلاوط فارغة. كما أنه يسمح برؤية مختلف المناظر السطحية والعمودية للبناء ودراسة شبه ديناميكية.

النتائج المعطاة هي انتقال العقد، تفاعلات الأركان والجهود في طرفي القواظب البرنامج الآلي يعرض أخيراً توسيعاً يأخذ بعين الاعتبار الجهد القطاع.

SUJET : LOGICIEL D'ETUDES DE BATIMENTS EN PORTIQUES

RESUME :

Le logiciel à la particularité d'être programmé et exécuté sur des Micro-Ordinateurs, il offre le moyen d'étudier des Bâtiments en Portiques droits avec éventuellement des décrochements plans ou en élévation, variation des dimensions des poteaux et des poutres, des charges permanentes et des surcharges, d'un étage à un autre; différents types de planchers avec possibilité d'existence de dalles vides. Il permet de visualiser les différentes vues en plan et en élévation du Bâtiment et de faire une Pseudo-Dynamique de la structure. Les résultats fournis sont les déplacements des noeuds, les réactions des appuis et les efforts aux extrémités des barres. Le logiciel offre enfin une extension qui prend en compte l'influence de l'effort tranchant.

SUBJECT : PORTICO BUILDING SOFTWARE.

ABSTRACT :

The software has a feature to be used on a personal computer, it offers a way to study straight portico buildings with possible plane or elevation setbacks, variation of columns and beams dimensions, permanant loads and overloads from a storey to another; different types of floors with possible existance of hollow flagstones. It allow a visualization of the building and permits a pseudo-dynamic study of the structure. Results are presented in the form of displacements of the nodal points support reactions and stresses at the bar ends.

The software offers an extension taking in account the sharp stress influence as well.

* * * DEDICACES * * *

- A MA MERE
- A MOM PERE
- A LA MEMOIRE DE MES GRANDS PARENTS PATERNELS
- A LA MEMOIRE DE MON GRAND-PERE MATERNEL
- A MA GRAND-MERE MATERNELLE
- A MES SOEURS
- A MON FRERE
- A SALIM

est dédié ce modeste travail

Signé : ABDELAZIZ

* * * DEDICACES * * *

Je dédie ce humble travail

- A MA MERE
- A MON PERE
- A LA MEMOIRE DE MES GRANDS PARENTS MATERNELS
- A LA MEMOIRE DE MA GRAND-MERE PATERNELLE
- A MON GRAND-PERE PATERNEL
- A, MES ONCLES
- A MA TANTE
- A MES FRERES
- A MA SOEUR
- A ABDELAZIZ
- A TOUS MES AMIS ET EN PARTICULIER A ACHOUR ET NADIR

Signé : SALIM

* * *

REMERCIEMENTS

* *



Nous tenons à remercier tout d'abord et avant toute autre chose, DIEU, pour nous avoir permis de fournir ce modeste travail et sans lequel rien ne peut être accompli.

* * *

Qu'il nous soit permis d'exprimer à Monsieur A. CHARIF notre respectueuse gratitude et profonde reconnaissance pour le soutien constant et l'intérêt qu'il a accordé à notre travail et à nos recherches et pour les conseils qu'il nous a donné.

* * *

Nos vifs remerciements à Monsieur S. CHIKH ayant contribué matériellement à l'élaboration de ce projet.

CHAPITRE 1 . INTRODUCTION ET PRESENTATION DU LOGICIEL

- 1.1. Introduction
 - 1.1.1. Faire connaissance avec le GWBASIC
 - 1.1.2. Calcul des structures et informatique
- 1.2. Présentation du logiciel
 - 1.2.1. Rappel du fonctionnement du logiciel (version 1987)
 - 1.2.2. Inconvénient du logiciel précédent
 - 1.2.3. Objectif du nouveau logiciel
 - 1.2.4. Applications
 - 1.2.5. Organigramme

CHAPITRE 2 . ANALYSE DE L'ETUDE DU LOGICIEL ET ORGANIGRAMMES

A. INTRODUCTION DES DONNEES

- 2.1. Menu et présentation
- 2.2. Données Architecturales
 - 2.2.1. Nombre d'étages et hauteur
 - 2.2.2. Nombre et positions des files
 - 2.2.3. Dimensions du bâtiment
- 2.3. Caractéristiques de éléments du bâtiment
 - 2.3.1. Les poteaux
 - 2.3.2. Les poutres
 - 2.3.3. Les planchers
- 2.4. Caractéristiques mécaniques des matériaux
- 2.5. Impression des données
- 2.6. Données relatives à l'étude pseudo-dynamique
 - 2.6.1. Coefficient d'accélération des zones A
 - 2.6.2. Facteur de comportement de la structure B
 - 2.6.3. Facteur de qualité Q
 - 2.6.4. Facteur d'amplification dynamique moyen D
- 2.7. Organigramme

B. CALCUL DU CENTRE DE TORSION ET DU CENTRE DE MASSE

- 2.8. Centre de masse
- 2.9. Centre de torsion
- 2.10. Excentricité

C. ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUE

- 2.11. Introduction
- 2.12. Modèle mathématique
- 2.13. Caractéristiques du modèle
 - 2.13.1. Masses concentrées
 - 2.13.3. Rigidité latérale KH
 - 2.13.4. Matrice de rigidité latérale $[KH]$
- 2.14. Calcul des vecteurs propres et valeurs propres de la structure
 - 2.14.1. Méthode de STODOLA-VIANELLO
 - 2.14.2. Méthode de RAYLEIGH
 - 2.14.3. Méthode de HOLZER
 - 2.14.4. Méthode de JACOBI
- 2.15. Calcul des forces sismiques
 - 2.15.1. Forces sismiques dans chaque mode de vibration de la structure
 - 2.15.2. Résultante des forces sismiques modales
- 2.16. Organigramme
- 2.17. Répartition des forces sismiques selon les différents plans de contreventement des portiques
- 2.18. Organigramme

D. REPARTITIONS DES CHARGES ET SURCHARGES

- 2.19. Descente des charges
 - 2.19.1. Plancher Dalle
 - 2.19.2. Plancher à corps creux
 - 2.19.3. Charges permanentes revenant au portique
 - 2.19.4. Charges d'exploitation revenant au portique

E. VISUALISATION DES DIFFERENTS VUES EN PLAN

F. CHOIX ET ETUDE DU PORTIQUE

G. CALCUL DES EFFORTS INTERNES

- 2.20. Introduction
- 2.21. Rappels de R.D.M
 - 2.21.1. Rappels de méthodes énergétiques
 - 2.21.2. Énergie de déformation U
 - 2.21.3. Méthode énergétique de CASTIGLIANO

- 2.22. Méthode des déplacements (Approche adaptée à l'informatique)
- 2.23. Formation de la matrice de rigidité d'une barre dans le repère local
 - 2.23.1. Application de la méthode de CASTIGLIANO à une barre bi-encastée
 - 2.23.2. Notation matricielle
- 2.24. Formation de la matrice de rigidité d'une barre dans le repère global
- 2.25. Formation de la matrice globale de la structure
- 2.26. Méthode de calcul par les matrices de rigidité
- 2.27. Equations d'équilibre
- 2.28. Calcul du second membre
- 2.29. Conditions aux limites
- 2.30. Résolution du problème
 - 2.30.1. Méthodes directes
 - 2.30.2. Méthodes itératives
- 2.31. Calcul des efforts et réactions d'appuis
 - 2.31.1. Calcul des efforts
 - 2.31.2. Calcul des réactions d'appuis
- 2.32. Organigramme



CHAPITRE 3 . INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT

- 3.1. Introduction
- 3.2. Formation de la matrice de rigidité locale
- 3.3. Calcul du second membre
- 3.4. Conclusion

chapitre 4 . EXPERIMENTATION NUMERIQUE PAR LE LOGICIEL SUR L'INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT DANS LES POTEAUX COURTS

chapitre 5 . CONCLUSION ET BIBLIOGRAPHIE

- 5.1. Conclusion
- 5.2. bibliographie.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

~~ CHAPITRE 1 ~~

INTRODUCTION ET PRESENTATION DU LOGICIEL

1. 1. INTRODUCTION

Avec l'explosion de la micro-informatique dans les années 80, l'informatique prend plus en plus de place dans notre société. La programmation n'est plus à la portée exclusive des techniciens, elle est devenue accessible à toutes les couches socio-professionnelles. Notre logiciel est programmé sous le langage suivant : le GWBASIC, et le micro-ordinateur utilisé est le M24 (Olivetti Computer Personnel), notre choix a été unanime sur ce dernier, pour deux raisons : la première est qu'il est le plus performant des micro-ordinateurs appartenant au centre de calcul de l'E.N.P, la seconde est qu'il est le seul à utiliser la haute résolution graphique.

1. 1. 1. FAIRE CONNAISSANCE AVEC LE GWBASIC

La "puce" électronique qui constitue le coeur de l'ordinateur, ou micro-processeur, ne peut être programmé que par des instructions élémentaires très simples, permettant de manipuler des informations binaires formées de succession de 1 et de 0. Pour rendre la programmation accessible au non-technicien, des langages de programmation dits "évolués" ont été mis au point, dont les commandes et la syntaxe d'utilisation se rapprochent autant que possible du langage parlé. Le vocabulaire du GWBASIC est basé sur des mots anglais très simples qui sont "traduits" (interprétés) en code machine par un logiciel interne spécialisé au moment de l'exécution du programme. Le GWBASIC est actuellement une des versions du BASIC les plus évolués sur micro-ordinateurs.

1. 1. 2. CALCUL DES STRUCTURES ET INFORMATIQUE

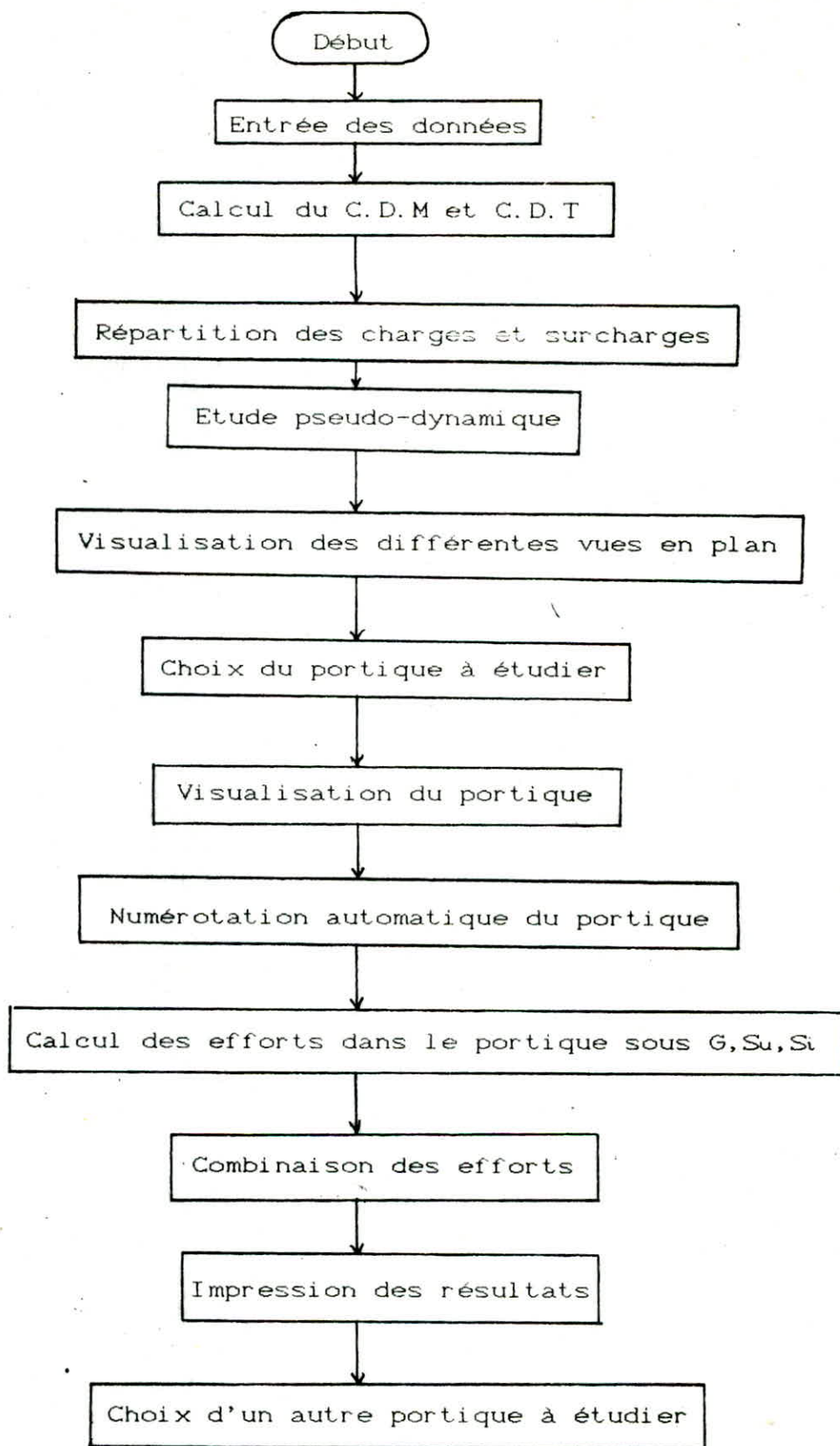
Lors de l'étude d'une structure le recours à l'ordinateur est bien souvent inévitable. Celui-ci permet en effet d'effectuer des calculs complexes difficilement réalisables par des méthodes manuelles ou bien procure un gain de temps important en évitant des opérations longues et fastidieuses. Que le projeteur fasse appel à un logiciel directement ou par l'intermédiaire d'un informaticien, il lui incombe dans tous les cas de poser le problème correctement, de modéliser la structure, et de définir

les sorties graphiques ou les tableaux des résultats qu'il compte utiliser. Le calcul sur ordinateur n'est en effet qu'une aide matérielle et ne peut en aucun cas se substituer à la réflexion de l'ingénieur.

1. 2. PRESENTATION DU LOGICIEL

1. 2. 1. RAPPEL DU FONCTIONNEMENT DU LOGICIEL (VERSION 1987)

Voici l'organigramme général :



1. 2. 2. INCONVENIENTS DU LOGICIEL PRECEDENT

a/ ENTREE DES DONNEES

Si on commet une faute dans l'introduction des données, on doit impérativement arrêter l'exécution du programme et recommencer à zéro, l'entrée des données. Imaginons pour un bâtiment élevé et ayant de nombreuses files de portiques parallèles à XX ou à YY et qui sont différentes pour chaque étage, le temps perdu pour l'utilisateur s'il commet des erreurs lors de l'introduction des données.

b/ REPARTITION DES CHARGES ET SURCHARGES (PLANCHER DALLE)

Dans ce logiciel, les charges transmises par un panneau quelconque sont de charges rectangulaires, or on sait qu'il y a seulement deux types de charges : les charges trapezoidales et triangulaires, donc les efforts calculés sont trop élevés par rapport aux valeurs réelles.

c/ ETUDE DES PORTIQUES

Le logiciel étudiait que les portiques du sens xx, par contre ceux du sens yy n'était pas executables.

d/ IMPRESSION DES RESULTATS

La visualisation du portique et le calcul des efforts sous les différentes combinaisons étaient visualisées séparément, et il serait judicieux de les visualiser ensemble avec la numérotation des noeuds.

e/ INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT

Le logiciel négligeait l'effort tranchant, or on sait que c'est très important lors de l'étude d'une structure avec des poteaux courts.

1. 2. 3. OBJECTIF DU NOUVEAU LOGICIEL

Notre premier souci était d'assouplir au maximum le logiciel précédent en premier lieu et ensuite faire une extension pour prendre en compte l'effort tranchant, et de faire une étude comparative.

α / LES CORRECTIONS FAITES

α / REPARTITION DES CHARGES ET SURCHARGES

Dans notre logiciel, on a tenu compte de la répartition des charges triangulaires et trapézoïdales dans le cas des planchers en dalle pleine.

β / ETUDE DES PORTIQUES

Ce nouveau logiciel étudie les portiques appartenant au sens xx ou au sens yy.

b/ ASSOUPPLISSEMENT

α / ENTREE DES DONNEES

On a prévu des tests de confirmation des données du genre "CONFIRMEZ-VOUS CES DONNEES (O/N)" pour rendre plus souple l'introduction des données quand l'utilisateur fait une erreur.

β / IMPRESSION DES RESULTATS

Après introduction de toutes les données définissant la structure, l'utilisateur aura à choisir le portique à étudier en précisant le sens (X ou Y). Les déplacements et les efforts aux noeuds à une combinaison quelconque des charges permanentes, surcharges d'exploitation et forces sismiques sont déterminées automatiquement. Une visualisation du portique sera donnée à la fin avec une numérotation des noeuds, et à côté les efforts internes en chacun de ces noeuds ; l'utilisateur pourra choisir

une autre combinaison ou étudier un autre portique.

1. 2. 4. APPLICATIONS

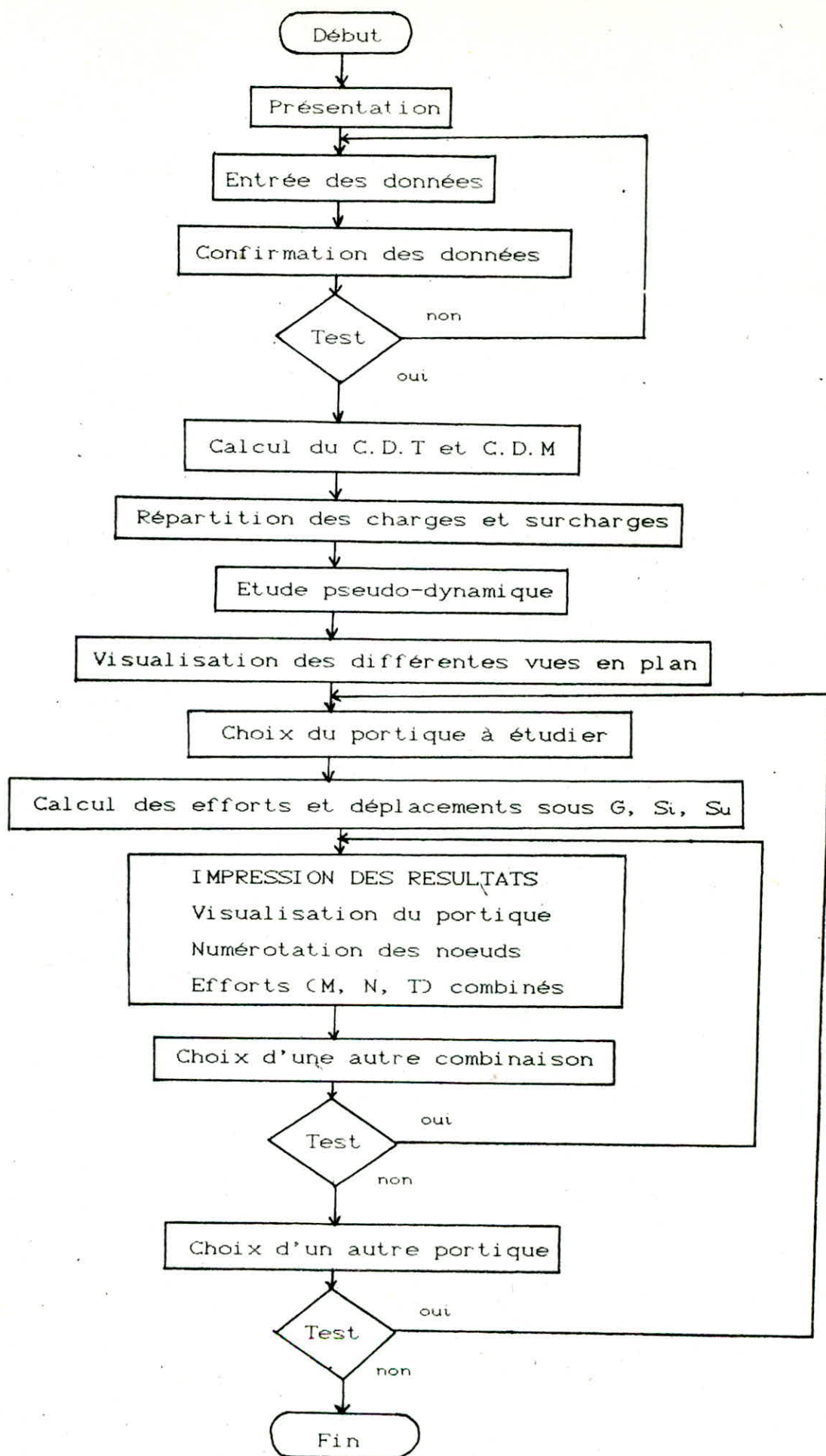
a/ DANS LE DOMAINE PROFESSIONNEL

Ce logiciel sera un outil de travail très appréciable pour les projeteurs et les bureaux d'études qui y trouveront un intérêt certain dans le gain du temps et l'exécution rapide de tous les calculs se rapportant aux structures en portiques ; par conséquent il sera très bénéfique pour less ingénieurs des bureaux d'études, de même pour les ingénieurs de control.

b/ DANS LE DOMAINE DE LA RECHERCHE

L'intérêt qu'offre ce logiciel pour les chercheurs, c'est qu'il permet d'élaborer des formules de prédimensionnement et d'optimisation des éléments du bâtiment, et cela grâce aux réanalyses successives.

1. 2. 5. ORGANIGRAMME (VERSION 1989)



~~ CHAPITRE 2 . ~~

ANALYSE DE L'ETUDE DU LOGICIEL ET
ORGANIGRAMMES

A - INTRODUCTION DES DONNEES

2.1. MENU ET PRESENTATION

Un menu apparaitra et demandera à l'utilisateur s'il voudrait étudier la structure avec influence de l'effort tranchant ou sans influence de l'effort tranchant, de la manière suivante:

1- ETUDE DE LA STRUCTURE SANS EFFET DE L'EFFORT TRANCHANT

2- ETUDE DE LA STRUCTURE AVEC EFFET DE L'EFFORT TRANCHANT

CHOISIR (1 ou 2) ?

Une fois le choix confirmé (1 ou 2), l'utilisateur aura la visualisation de l'option choisie avec les commentaires nécessaires.

2.2. DONNEES ARCHITECTURALES

Dans cette partie, nous introduisons tous les paramètres permettant le dimensionnement des tableaux indicés nécessaires à la suite des calculs.

2.2.1. NOMBRES D'ETAGES ET HAUTEUR

L'utilisateur donnera le nombre d'étages (NZ) du bâtiment à étudier, en prenant le rez-de-chaussée comme étage ; une variable indicée (Z) sera affectée à ce paramètre, on parlera alors d'un étage (Z). La dimension en élévation du bâtiment est prévue selon deux cas:

a/ TOUS LES ETAGES ONT MEME HAUTEUR

Dans ce cas, il suffit d'introduire une hauteur (H).

b/ LES HAUTEURS SONT DIFFERENTES

Dans ce cas, il faut introduire la hauteur de chaque étage (H(Z)). La hauteur totale du bâtiment sera calculée automatiquement suivant la formule suivante:

$$HT = \sum_Z H(Z)$$

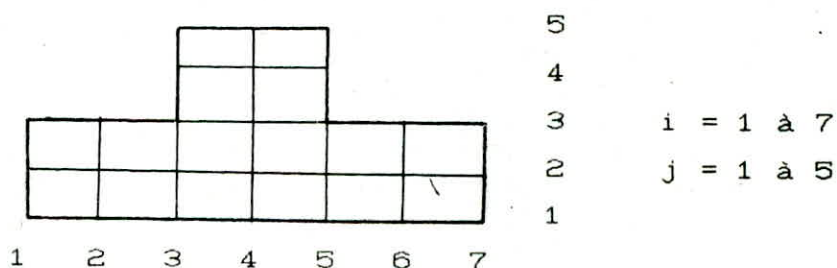
2. 2. 2. NOMBRES ET POSITIONS DES FILES

L'utilisateur mentionnera le nombre de files par sens dans l'ordre suivant:

- nombre de files parallèles à XX (NX) d'indice j
- nombre de files parallèles à YY (NY) d'indice i

Une numérotation des files sera affectée comme suit:

- le nombre de files parallèles à XX de 1 à NX
- le nombre de files parallèles à YY de 1 à NY



Nous aurons ainsi, pour chaque file, une position initiale et une position finale. Ces données seront répétées à chaque étage, mais avant de passer à l'étage suivant un assouplissement est prévu dans le cas où les positions des files seront les mêmes que l'étage précédent. Ce qui nous permet d'introduire un bâtiment avec des décrochements en plan et en élévation. Il existe des bâtiments ayant plus d'un portique par file, il est demandé donc de préciser le nombre de portiques dans la file considérée.

Nous notons par:

NPX (J,Z) : le nombre de files secondaires sur la file principale J à l'étage Z (sens XX).

NPY (I,Z) : le nombre de files secondaires sur la file principale I à l'étage Z (sens YY).

XI (J,Z,K) : position initiale de la file secondaire K, de la file principale J à l'étage Z (sens XX).

XF (J,Z,K) : position finale de la file secondaire K, de la file principale J à l'étage Z (sens XX).

YI (I,Z,K) : position initiale de la file secondaire K, de la file principale I à l'étage Z (sens YY).

YF (I,Z,K) : position finale de la file secondaire K, de la file principale I à l'étage Z (sens YY).

Remarque :

Pour prendre en compte les bords extérieurs des consoles, nous les considérerons comme des files et en précisant lors de l'introduction des données relatives aux poteaux, qu'il n'y a pas de poteaux dans ces files.

2. 2. 3. DIMENSIONS DU BATIMENT

L'utilisateur introduira la longueur et la largeur maximales du bâtiment, ceci permettra d'adopter ultérieurement une échelle conforme au graphisme. Il doit donner ensuite selon un menu les distances entre les files pour les deux sens. Cette distance est considérée entre - axes des files.

LX (I) : distance entre les files adjacentes parallèles à YY.

LY (J) : distance entre les files adjacentes parallèles à XX.

2. 3. CARACTERISTIQUES DES ELEMENTS DU BATIMENT

2. 3. 1. LES POTEAUX

Les poteaux sont des éléments porteurs d'une structure. Ils transmettent les efforts revenant des autres éléments à l'infrastructure. Les conditions d'extrémités des poteaux sont dans la plus part du temps encastres sur les poutres. En général, le poteau a une section carrée ou rectangulaire et est caractérisé par deux dimensions PX et PY ; ces dimensions doivent être en rapport avec les charges à supporter. Un menu présentera une série de cas possibles pour un étage Z donné comme suit :

- 1- TOUS LES POTEAUX ONT MEMES DIMENSIONS
- 2- LES POTEAUX ONT MEMES DIMENSIONS PAR FILES PARALLELES A YY
- 3- LES POTEAUX ONT MEMES DIMENSIONS PAR FILES PARALLELES A XX
- 4- LES POTEAUX ONT MEMES DIMENSIONS QUE L'ETAGE PRECEDANT
- 5- LES DIMENSIONS DES POTEAUX SONT DIFFERENTES

2. 3. 2. LES POUTRES

Les poutres sont des éléments horizontaux qui transmettent les charges revenant des planchers aux poteaux. Elles forment un

quadrillage de la structure, et sont disposées dans les deux sens afin de parfaire le contreventement. Une poutre est caractérisée par trois dimensions, la longueur, la largeur et la hauteur. Elle est supportée par un poteau à chaque extrémité ou suspendue comme console. Un menu présentera une série de cas possibles pour un étage Z donné comme suit :

- 1- LES POUTRES DE L'ETAGE ONT LES MEMES DIMENSIONS PAR SENS
- 2- LES POUTRES PARALLELES A XX ONT TOUTES LES MEMES DIMENSIONS
- 3- LES POUTRES PARALLELES A YY ONT TOUTES LES MEMES DIMENSIONS
- 4- LES DIMENSIONS DES POUTRES SONT LES MEMES QUE L'ETAGE PRECEDANT
- 5- LES DIMENSIONS DES POUTRES SONT DIFFERENTES DANS LES DEUX SENS

Les dimensions des poutres sont notées comme suit :

FILES // à XX : la largeur de la poutre (BY)

la hauteur de la poutre (HY)

FILES // à YY : la largeur de la poutre (BX)

la hauteur de la poutre (HX)

Remarque :

Un graphisme tridimensionnel sur l'écran aidera l'utilisateur à repérer les dimensions des poteaux et des poutres.

2.3.3. LES PLANCHERS

Un plancher est une aire plane qui détermine les différents niveaux d'une construction. Ils s'appuient sur :

- Les poutres de rive
- Les poutres intérieures
- Des points d'appuis isolés (poteaux)

Les planchers jouent le rôle :

- de plate - forme porteuse pour l'étage considéré
- de toit pour l'étage sous - jacent
- d'écran permettant le confort de l'habitant
- d'élément de stabilité

Les principales fonctions d'un plancher sont :

RESISTANCE aux charges permanentes et surcharges mobiles

CIRCULATION possible entre étages par des trémies :

- pour escalier
- pour ascenseur

ECRAN ISOLANT entre étages : acoustique et thermique

On distingue deux types de planchers : - plancher Dalle

- plancher à Corps Creux

a/ PLANCHER DALLE

C'est un plancher en dalles épaisses réalisé en béton armé s'appuyant sur des poutres longitudinales ou transversales très espacées. Les épaisseurs peuvent atteindre 25 et même 30 cm pour le cas de planchers industriels lourdement chargés. Ce type de plancher est caractérisé par :

- l'épaisseur de la dalle (m)
- poids propre du plancher (Kg/m^2)
- surcharge (cloisons comprises) (Kg/m^2)

b/ PLANCHER A CORPS CREUX

Il existe une très grande variété de planchers à corps creux, constitués d'un corps creux, d'une dalle de compression et des poutrelles.

Les corps creux sont soit en argile cuite, soit en béton (béton ordinaire ou béton léger), ils sont de différentes épaisseurs : 12, 15, 18, 20, 25 cm, étant les dimensions les plus courantes. L'espacement des poutrelles (coulées sur place avec la table de compression est très variable de 25 à 75 cm environ).

La table de compression a de 3 à 6 cm d'épaisseur, et généralement ferailée à l'aide d'un quadrillage préfabriqué sous des maillages variant de 5 à 30 cm, fils de 2 à 6 mm. Ce type de plancher est caractérisé par :

- la hauteur de l'hourdis (m)
- l'épaisseur de la table (m)
- le poids propre du plancher (Kg/m^2)
- surcharge sur le plancher (cloisons comprises) (Kg/m^2)
- sens porteur XX ou YY

L'espacement entre les poutrelles est pris égal à 0,65 m. L'utilisateur sélectionnera le type de plancher à chaque étage avant d'introduire leurs caractéristiques. Un menu précisera à l'utilisateur s'il doit conserver ou non les mêmes caractéristiques, ce qui évitera une introduction monotone des données.

c/ DALLES VIDES

Une dalle vide (Trémie) est une partie du plancher réservé au passage d'une cage d'escalier, d'ascenseurs ou autre. Pour chaque étage, il est demandé le nombre et la position, comme suit :

EST CE QU'IL YA DES DALLES VIDES (O/N) ?

COMBIEN ?

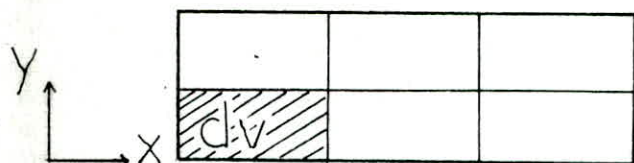
DALLE VIDE N°

POSITION INITIALE DU NOEUD SUIVANT XX ?

POSITION FINALE DU NOEUD SUIVANT XX ?

POSITION INITIALE DU NOEUD SUIVANT YY ?

POSITION FINALE DU NOEUD SUIVANT YY ?



nombre de dalles vides : 1

position initiale du noeud suivant xx : 1

position finale du noeud suivant xx : 2

position initiale du noeud suivant yy : 1

position finale du noeud suivant yy : 2

2.4. CARACTERISTIQUES MECANIKES DES MATERIAUX

La nature du matériau constituant les éléments de notre structure est complètement définie par le module d'élasticité (ou module d'YOUNG). Ce module, noté E, est défini de la manière suivante : si on applique une force F (de compression ou de traction) sur une poutre de longueur L et de section S, on obtient un déplacement U tel que : $U = F L / E S$

E est donc une caractéristique du matériau et est indépendant de la géométrie des barres ; il est exprimé en unité de forces par unité de surface. Le règlement CCBA 68 fixe les valeurs du module d'YOUNG pour le béton comme suit :

- pour les charges et surcharges permanentes : $E_v = 7000 \sqrt{\sigma'_j}$

- pour les charges rapidement variables : $E_v = 21000 \sqrt{\sigma'_j}$

σ'_j : désigne la contrainte de rupture en compression sur éprouvettes cylindriques (normalisées à l'âge de j (jours) (Kg/m^2))

L'utilisateur doit introduire la valeur de la contrainte du béton

de compression au 28^e jour.

2.5. IMPRESSION DES DONNEES

Avant que l'étude de la structure ne soit entamée ; des tableaux résumant toutes les données introduites antérieurement pouvant être visualisées sur l'écran. Ces données seront présentées en trois tableaux relatifs aux :

- Dimensions des plateaux
- Dimensions des poutres
- Caractéristiques des planchers

2.6. DONNEES RELATIVES A L'ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUES

Une grande partie de l'Algérie est susceptible d'être soumise à d'importantes secousses sismiques. L'intensité de ces secousses est suffisante pour causer d'importants dommages et / ou ruines des constructions à moins que celles - ci ne soient conçues et construites de manière adéquate pour résister à ces effets. Toute méthode d'analyse pseudo-dynamique approuvée peut être utilisée. Ce type d'analyse est obligatoire si la structure présente une dissymétrie dans son plan ou des irrégularités dans son élévation qui dépassent les tolérances fixées dans ce règlement de même que pour les sols à hauts risques sismiques. L'utilisateur doit introduire des coefficients permettant l'évaluation des forces sismiques horizontales.

2.6.1. COEFFICIENT D'ACCELERATION DES ZONES A

(Article 3.3.1.1. RPA 81 version 83)

Le coefficient d'accélération de zone A dépend du groupe d'usage de la structure défini en annexe N°1 (p 71 RPA 81 version 83) et de la zone sismique (carte de zones sismiques de l'Algérie p 29 RPA 81 version 83)

2.6.2. FACTEUR DE COMPORTEMENT DE LA STRUCTURE B

(Article 3.3.1.3. RPA 81 version 83)

Le facteur B de comportement de la structure dépend de son

type et de la nature de ses contreventements. Les valeurs de B correspondantes sont données dans le tableau 2 (p 35 RPA 81 version 83). Nous nous intéressons aux portiques autostables en béton armé ($B = 1/4$) constitués uniquement de poutres et poteaux capables de reprendre la totalité des sollicitations dues aux charges verticales et horizontales. Cette catégorie n'est pas admise en zone III. Pour cette catégorie, les éléments de remplissage ne doivent pas gêner les déformations des portiques, sinon utiliser le coefficient $B = 1/3$.

2.6.3. FACTEUR DE QUALITE Q

(Article 3.3.1.4. RPA 81 version 83)

Le facteur de qualité du système de contreventement d'une structure donnée est fonction de l'hyperstaticité et de la surabondance du système, de ses symétries en plan, de sa régularité en élévation et de la qualité du contrôle pendant la construction. La valeur Q devra être déterminée par la formule:

$$Q = 1 + \sum_{q=1}^6 P_q$$

où P_q est la pénalité qui dépend de l'observation ou non du critère de qualité q. Les critères ainsi que les valeurs P_q correspondantes sont données dans le tableau 3 (p 39 RPA 81 version 83).

2.6.4. FACTEUR D'AMPLIFICATION DYNAMIQUE MOYEN D

(Article 3.3.1.2. RPA 81 version 83)

La valeur de D sera déterminée d'après le type de sol en fonction de la période T du bâtiment, comme indiqué sur la fig 4 (p 31 RPA 81 version 83). Deux cas peuvent se présenter :

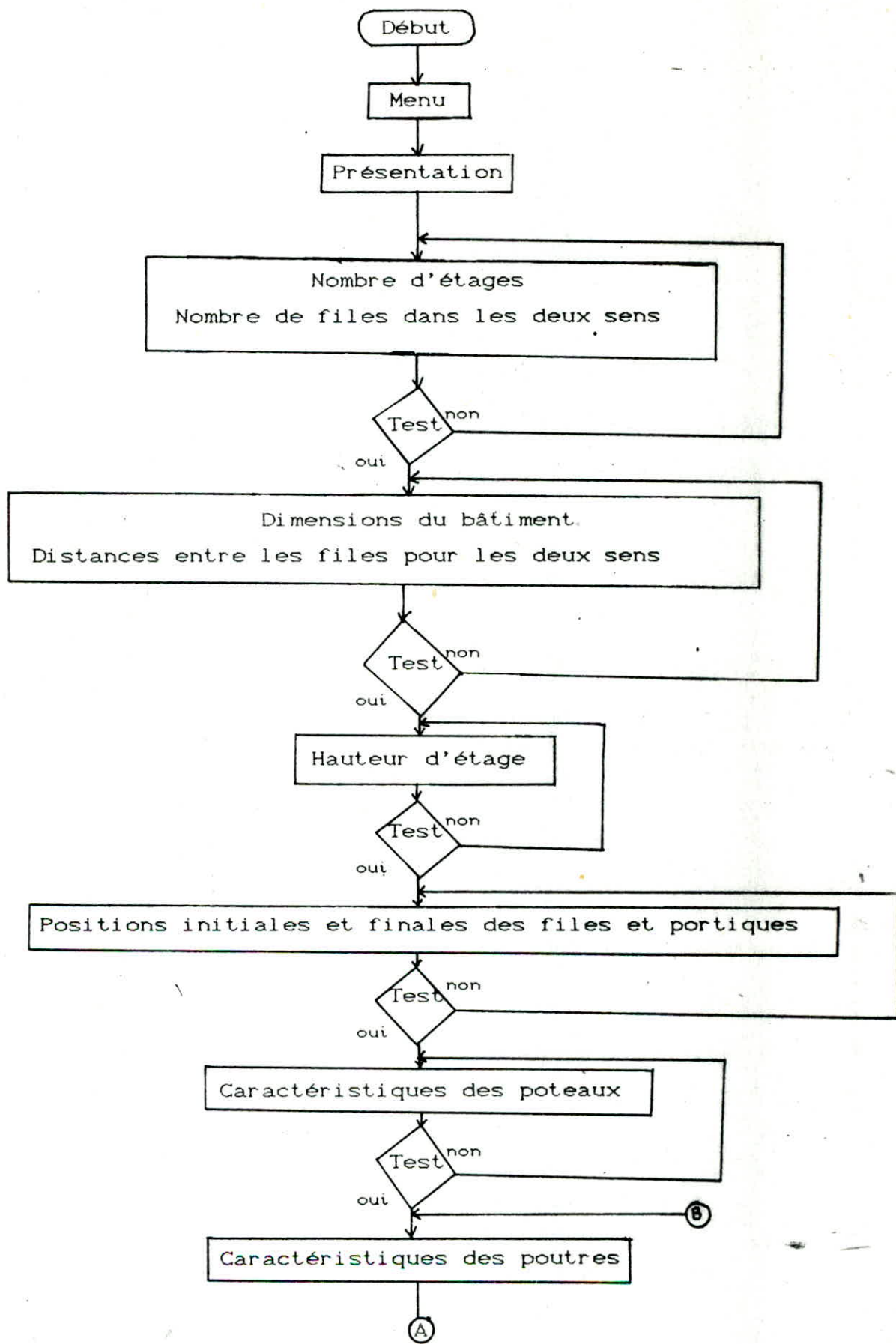
Sol meuble : 0,5 $\Rightarrow D = 2 \sqrt{0,5/T}$

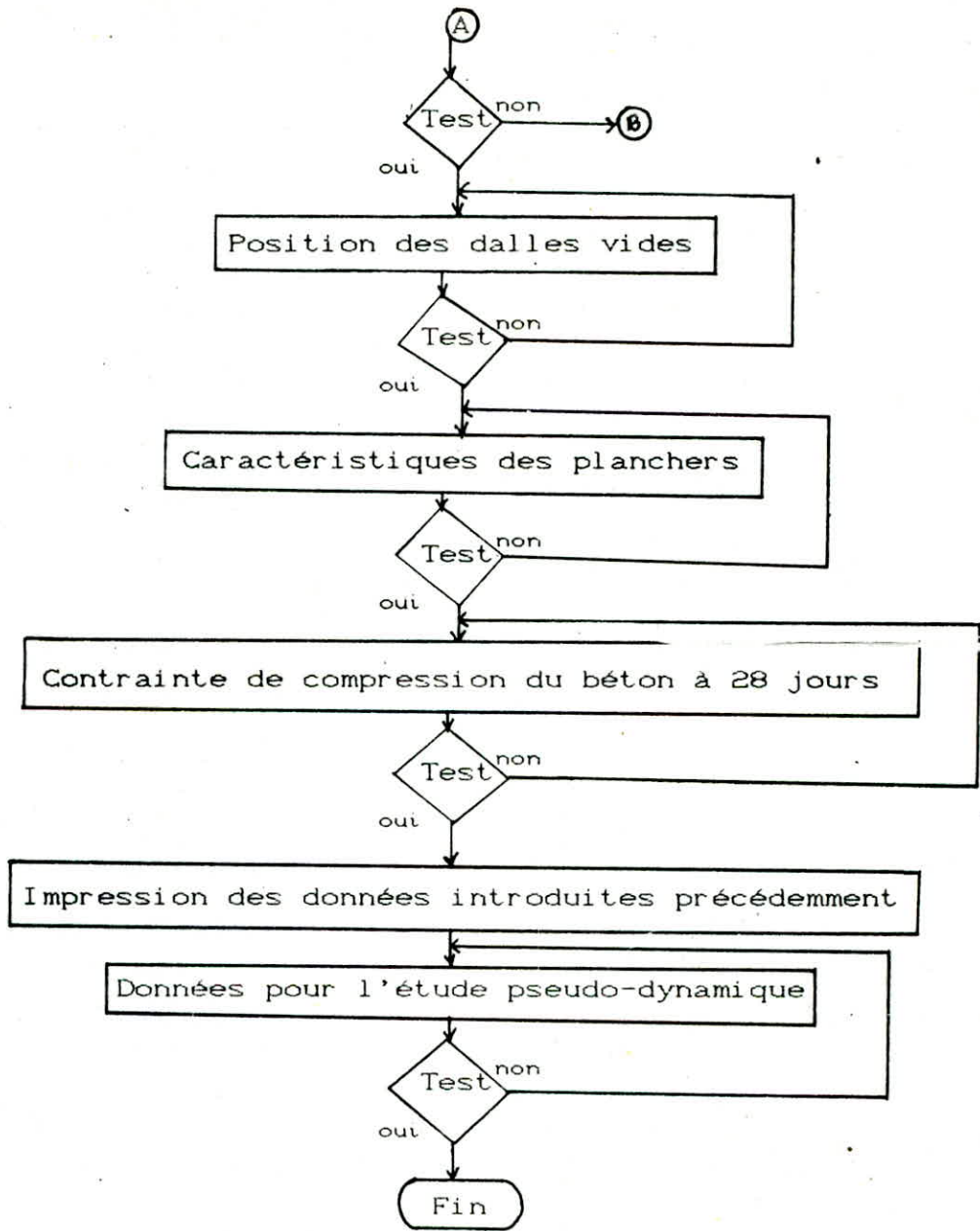
Sol fermé : 0,3 $\Rightarrow D = 2 \sqrt{0,3/T}$

La période T sera déterminée par une méthode pseudo-dynamique.

N.B : L'utilisateur peut utiliser le RPA 88.

2.7. ORGANIGRAMME





B. CALCUL DU CENTRE DE TORSION ET DU CENTRE DE MASSE

2.8. CENTRE DE MASSE

a/ INTRODUCTION

Le centre de masse est défini comme la position du centre de gravité des masses. Pour un plancher d'un étage Z quelconque, on a :

$$XG(Z) = \frac{\sum m(i) \cdot x(i)}{\sum m(i)}$$

$$YG(Z) = \frac{\sum m(i) \cdot y(i)}{\sum m(i)}$$

où $m(i)$: masse de la dalle i appartenant au plancher de l'étage Z

$x(i)$: l'abscisse du centre de gravité de la dalle i

$y(i)$: l'ordonnée du centre de gravité de la dalle i

Nous avons pris en pour le calcul du centre de masse les hypothèses suivantes :

- charge et surcharge constante pour un même étage Z
- un seul type de dalle par étage.
- épaisseur du plancher est constante par étage.

La masse du plancher est ainsi proportionnelle à sa surface et les coordonnées du centre de masse deviennent :

$$XG(Z) = \frac{\sum x(i) \cdot S(i)}{\sum S(i)}$$

$$YG(Z) = \frac{\sum y(i) \cdot S(i)}{\sum S(i)}$$

avec $S(i)$: surface de la dalle i appartenant au plancher de l'étage Z.

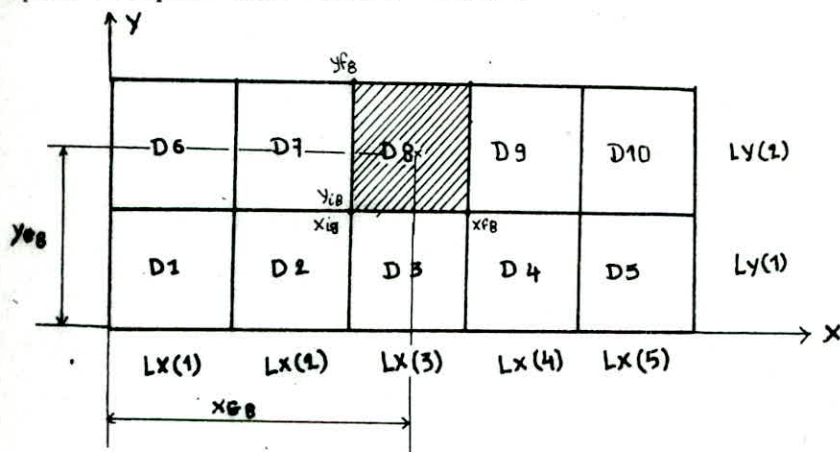
b/ PRINCIPE DE PROGRAMMATION

Le problème majeur réside dans la détermination de la surface

de chaque panneau de dalle, vu leur variation, nous avons élaboré un programme qui reconnaitra la position de chaque panneau et calculera sa surface, le principe est le suivant :

chaque panneau de dalle est défini par une position début et une position finale suivant les deux sens XX et YY.

Dans la plupart des bâtiments, les panneaux de dalle ont une forme rectangulaire ; l'illustration de la méthode de calcul sur un exemple simple est comme suit :



$$\begin{cases} X_{iB} = LX(1) + LX(2) \\ Y_{iB} = LY(1) \end{cases}$$

$$S_B = LX(3) * LY(2)$$

$$XG_B = X_{iB} + (LX(3)/2)$$

$$YG_B = Y_{iB} + (LY(2)/2)$$

ainsi pour chaque panneau de dalle, le même calcul se fait.

$$S_t = \sum_{i=1} S_i$$

d'où les coordonnées du centre de masse du plancher considéré à un étage donné XG (Z) et YG (Z).

Remarque :

Juste avant le calcul de la surface du panneau, un test permet d'annuler la surface si le panneau correspondant est une dalle vide.

2.9. CENTRE DE TORSION

Il est défini comme étant le centre de gravité des plans de

contreventement. La rigidité d'un portique J ou I à l'étage Z est définie comme la somme des rigidités brutes des poteaux appartenant à ce portique de l'étage Z. La rigidité d'un poteau à la translation se définit par :

$$r_{ij} = a \frac{12 E I_{ij}}{h^3}$$

E : module d'YOUNG

I_{ij} : moment d'inertie du poteau

h : hauteur du poteau

a : coefficient correcteur

Donc la rigidité d'un portique est égale à :

$$R = \sum r_{ij}$$

Le centre de torsion d'un plancher de l'étage Z est exprimé par les coordonnées XT et YT :

$$XT = \frac{\sum x_j r_{xi}}{\sum r_{xi}} \quad \text{et} \quad YT = \frac{\sum y_i r_{yj}}{\sum r_{yj}}$$

x_j : position du portique j // à XX

y_i : position du portique i // à YY

r_{xi} et r_{yj} : rigidités des portiques j et i respectivement parallèles à XX et YY. Comme les valeurs de E, a et h sont constantes pour un étage considéré, les formules précédentes du centre de torsion s'écrivent d'une manière simplifiée :

$$XT = \frac{\sum x_j I_{xi}}{\sum I_{xi}} \quad \text{et} \quad YT = \frac{\sum y_j I_{yj}}{\sum I_{yj}}$$

Le calcul se ramène donc au calcul de l'inertie de chaque poteau et de ses positions par rapport à l'origine des axes. Ce calcul est répété pour chaque file et pour chaque sens ; ainsi les coordonnées du centre de torsion sont calculées pour chaque étage.

2.10. EXCENTRICITE

Les forces horizontales agissantes au centre de masse d'un

plancher provoquent une translation, cependant si le centre de masse du plancher ne coïncide pas avec le centre de torsion, cette translation est accompagnée d'une rotation. Des efforts de torsion sont induits dans la structure et dépendent de la distance (excentricité) entre les centres de masse et de torsion. Le RPA 81 version 83 prévoit une excentricité "e" définie comme suit :

$$e = \max \begin{cases} e : \text{théorique} \\ 5\% \text{ de la plus grande dimension du bâtiment en plan} \end{cases}$$

On calculera donc l'excentricité théorique (qui définit les positions relatives des centres de masse et centres de torsion), qu'on comparera au 5% de la plus grande dimension en plan.

C. ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUE

2. 11. INTRODUCTION

Les tremblements de terre ont représenté depuis toujours un des plus graves désastres pour l'humanité. Leur apparition brutale et imprévue. Leur apparition brutale et imprévue, la violence des forces mises en jeu, l'énormité des pertes humaines et matérielles ont marqué la mémoire des générations. De nos jours, avec l'accélération du développement industriel, la réalisation de construction audacieuse, telles que barrages, immeubles de grande hauteur abritant des centaines de personnes, etc, la concentration d'une grande partie de la population dans les agglomérations urbaines immenses la garantie antisismique des constructions s'impose comme une absolue nécessité du point de vue social et économique.

Pour les structures à comportement élastique linéaires, deux méthodes de calcul sont utilisables, basées sur la décomposition modale. La première méthode étant exacte consiste en l'étude des efforts dans la structure en fonction du temps ; elle nécessite la donnée d'un accélérogramme et impose, en pratique l'usage de l'ordinateur. La deuxième méthode (méthode pseudo-dynamique) consiste en la recherche du maximum de réponse sur chacun des modes propres dont on déduit la valeur maximum probable des efforts, elle nécessite la connaissance du spectre de réponse de la secousse sismique.

Dans le cas de notre projet, on utilisera la deuxième méthode pour des forces sismiques horizontales, une modélisation de la structure permettra la détermination de ces forces dans chacun de ses modes propres de vibration. Une combinaison de ces forces modales donnerait alors les forces sismiques résultantes agissant sur le bâtiment selon les différents niveaux. Pour cela, on a utilisé le spectre de réponse élastique réglementaire du RPA 81 (version 83) donné par le produit (A*D) et qui représente le spectre des accélérations.

2. 12. MODELE MATHEMATIQUE

La détermination d'un modèle tenant compte le plus

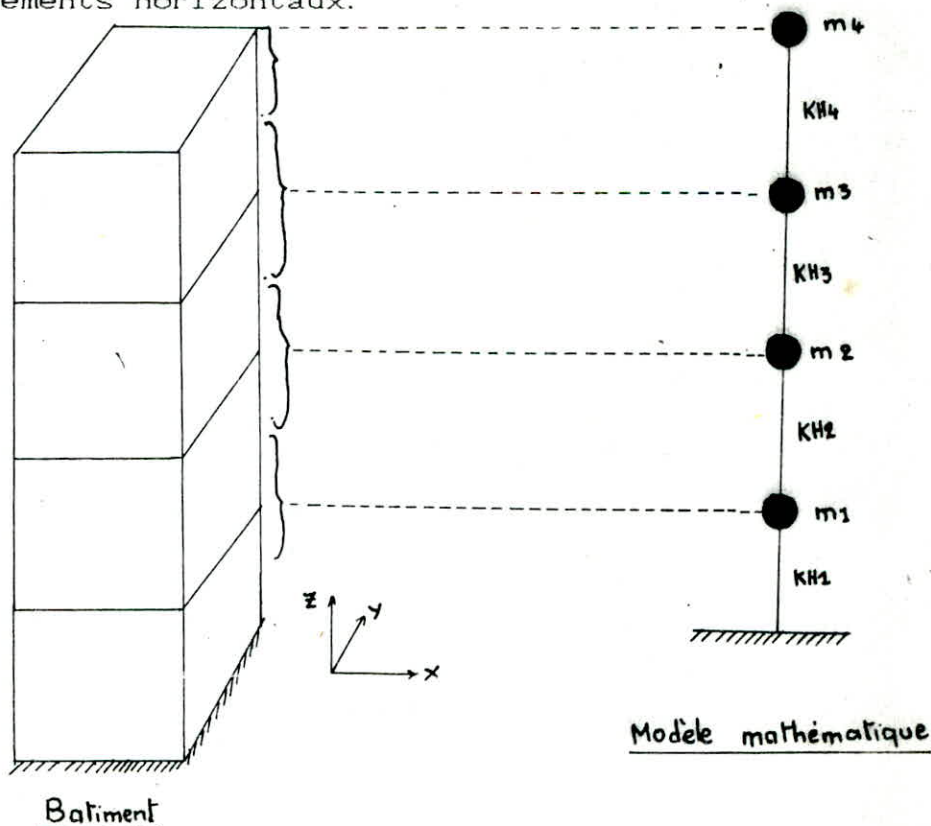
correctement possible de la masse et de la raideur de tous les éléments d'une structure est une phase essentielle pour l'étude de la réponse à des changements dynamiques en particulier le seisme. Si le calcul des masses et de leurs positions peut être effectué avec une bonne précision, par contre, celui des raideurs est souvent très approché. En effet, dans le cas des constructions en béton armé, les inerties des sections sont modifiées par la fissuration et il existe une imprécision sur la valeur des modules et des largeurs des tables de compression. Par ailleurs, quel que soit le type de structure, il faut tenir compte de l'imprécision souvent très importante des données relatives au sol de fondation. En admettant les hypothèses suivantes :

a/ les masses du bâtiment le long de sa hauteur sont supposées concentrées au niveau de ses différents planchers.

b/ ces derniers sont supposés infiniment rigides dans leur plan horizontal

c/ les déformations axiales des poteaux sous l'effet d'un déplacement latéral du bâtiment par rapport à sa base sont négligées.

Pour l'étude des efforts du seisme horizontal, on assimilera le bâtiment à une console verticale à masses concentrées par des colonnes de masses négligeables et de rigidités latérales " KH_i " (i représente la colonne considéré), en prenant en compte uniquement les déplacements horizontaux.



2. 19. CARACTERISTIQUE DU MODELE

2. 19. 1. MASSES CONCENTREES

La manière la plus simple de représenter les caractéristiques massiques consiste à supposer toute la masse m_i concentrée aux points de définition des déplacements en translation, du niveau i du modèle. Elle sera égale à la somme :

- des charges permanentes : poids du plancher i , de ses poutres, de la moitié des poteaux et celle des murs de façades qui sont au dessus et au dessous de ce dernier.

- et 50% de la valeur des surcharges d'exploitation (planchers à forte surcharge) conformément au RPA 81 (version 83) (Article 3.3.1.5)

2. 19. 2. MATRICE MASSE

Pour un système dont on ne considère que les degrés de liberté de translation (la rotation et le déplacement vertical sont supposés négligeables pour chaque masse du modèle). La matrice masse est diagonale ; le nombre de termes diagonaux de cette matrice est égale au nombre de degrés de liberté. Les termes extra-diagonaux sont nuls car une accélération appliquée à un noeud où est concentré une masse ne produit de force d'inertie qu'en ce même point. Lorsque toutes les masses sont accélérées, les forces d'inertie ont pour valeur :

$$f_1 = m_1 \ddot{U}_1$$

$$f_2 = m_2 \ddot{U}_2$$

.....
$$f_j = m_j \ddot{U}_j$$

.....

$$f_n = m_n \ddot{U}_n$$

où m_j : la masse relative au degré de liberté j

\ddot{U}_j : l'accélération dans la direction du degré de liberté j

les relations précédentes s'écrivent :

$$F = M \ddot{U}$$

\ddot{U} représente le vecteur des accélérations :

$$\ddot{U} = \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \vdots \\ \ddot{U}_j \\ \vdots \\ \ddot{U}_n \end{bmatrix}$$

M est la matrice des masses, diagonale, et de dimension $n \times n$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & m_j & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

2.13.3. RIGIDITE LATERALE KH_i

Les poteaux sont supposés encastres aux planchers ; la rigidité d'un poteau bi-encasté est égale à : $\frac{12 E I}{h^3}$

où I : inertie du poteau dans la direction considérée

h : hauteur du poteau

E : module d'YOUNG

D'après les hypothèses décrites précédemment pour le modèle mathématique, les poteaux d'un même étage auront tous le même déplacement à l'extrémité supérieure. Donc la rigidité latérale KH_i de la colonne i à l'étage i sera égale à la somme des rigidités des poteaux de cet étage.

$$KH_i = \sum_1^m \frac{12 E I_j}{h_i^3}$$

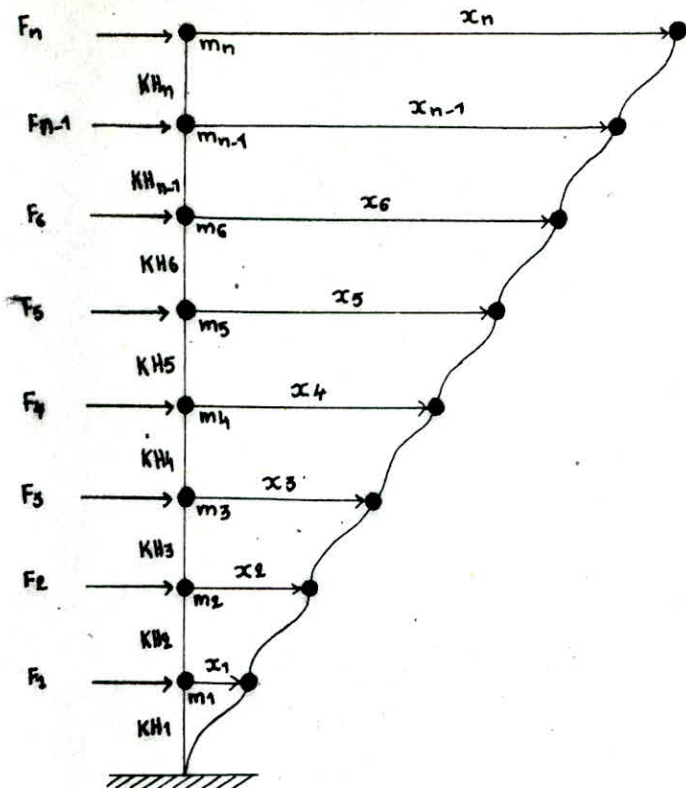
m : nombre de poteaux à l'étage i

h_i : hauteur du poteau à l'étage i

2.13.4. MATRICE DE RIGIDITE LATERALE

La matrice de rigidité $[KH]$ correspondant aux degrés de liberté horizontaux du modèle sera obtenue en considérant l'équilibre de ce dernier vis à vis des déplacements horizontaux

des masses par rapport à la base.



La force élastique (de rappel) \$F_i\$ appliquée à la masse \$i\$ est :

$$F_i = KH_i (X_i - X_{i-1}) - KH_{i+1} (X_{i+1} - X_i)$$

par conséquent :

$$F_1 = KH_1 (X_1 - X_0) - KH_2 (X_2 - X_1) \quad \text{et} \quad X_0 = 0$$

$$F_1 = (KH_1 + KH_2) X_1 - KH_2 X_2$$

$$F_2 = KH_2 (X_2 - X_1) - KH_3 (X_3 - X_2)$$

$$F_2 = -KH_2 X_1 + (KH_2 + KH_3) X_2 - KH_3 X_3$$

$$F_3 = KH_3 (X_3 - X_2) - KH_4 (X_4 - X_3)$$

$$F_3 = -KH_3 X_2 + (KH_3 + KH_4) X_3 - KH_4 X_4$$

$$F_n = KH_n (X_n - X_{n-1}) - KH_{n+1} (X_{n+1} - X_n) \quad \text{et} \quad KH_{n+1} = 0$$

$$F_n = -KH_n X_{n-1} + KH_n X_n$$

ou bien sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KH_1 + KH_2 & -KH_2 & 0 & \dots & 0 \\ -KH_2 & KH_2 + KH_3 & -KH_3 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -KH_3 & KH_3 + KH_4 & \dots & -KH_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -KH_{n-1} & KH_{n-1} + KH_n & -KH_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & -KH_n & KH_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$[F] = [KH] [X]$$

Remarque

La matrice [KH] est une matrice bande (tridiagonale) symétrique

2.14. CALCUL DES VECTEURS PROPRES ET VALEURS PROPRES DE LA STRUCTURE

Résoudre un problème de valeurs propres consiste à trouver les couples λ_k , $[\phi_k]$ qui satisfont la relation suivante :

$$[KH] [\phi_k] = \lambda_k [M] [\phi_k] \quad (1)$$

Ce type de problème dans la détermination des modes propres de vibrations d'une structure.

[KH] : matrice de rigidité latérale du modèle

[M] : matrice masse

$[\phi_k]$: est le vecteur des déplacements de la structure définissant le $k^{\text{ème}}$ mode propre de vibration

$\lambda = \omega^2$ est le carré de la pulsation correspondante.

Reécrivons la formule (1) sous la forme :

$$\left[[KH] - \omega^2 [M] \right] [\phi_k] = 0$$

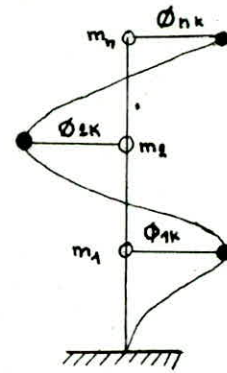
L'expression précédente représente un système de n équations à n inconnues qui sont les composantes du vecteur $[\phi_k]$. Une solution différente de 0 n'est possible que si le déterminant de la matrice $\left[[KH] - \omega^2 [M] \right]$ est nul.

$$\det \left[[KH] - \omega^2 [M] \right] = 0$$

Si on développe ce déterminant, on obtient une équation du degré n en ω^2 . La résolution de cette équation fournit les valeurs de pulsation $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, relatives aux n modes de vibrations possibles.

Le vecteur des déplacements $[\phi_K] =$
 qui correspond au mode de
 vibration K , de pulsation ω_K est
 donné par :

$$\begin{bmatrix} \phi_{1K} \\ \phi_{2K} \\ \phi_{3K} \\ \vdots \\ \phi_{nK} \end{bmatrix}$$



Mode propre de
 vibration d'une console
 (Mode K , pulsation ω_K)

$$\left[[KH] - \omega_K^2 [M] \right] [\phi_K] = 0$$

Le domaine du calcul des valeurs et vecteurs propres est très vaste, nous citerons quelques méthodes de calcul :

2.14.1. METHODE DE STODOLA - VIANELLO

Cette méthode permet d'obtenir la fréquence propre ainsi que le mode propre de vibration d'une structure. C'est une méthode itérative qui peut être employée manuellement avec un petit ordinateur de bureau pour étudier les vibrations des structures jusqu'à une dizaine de degrés de liberté. Elle est basée sur la formule de récurrence suivante :

$$\phi_{(i+1)K} = [S] [M] \omega^2 \phi_{iK}$$

où S : matrice de Souplesse (ou de flexibilité)

et la fréquence propre : $\omega^2 = \frac{\phi_{(i+1)K}}{\phi_{iK}}$

pour calculer la fréquence du mode fondamental, on se donne un vecteur initial correspondant à ce mode.

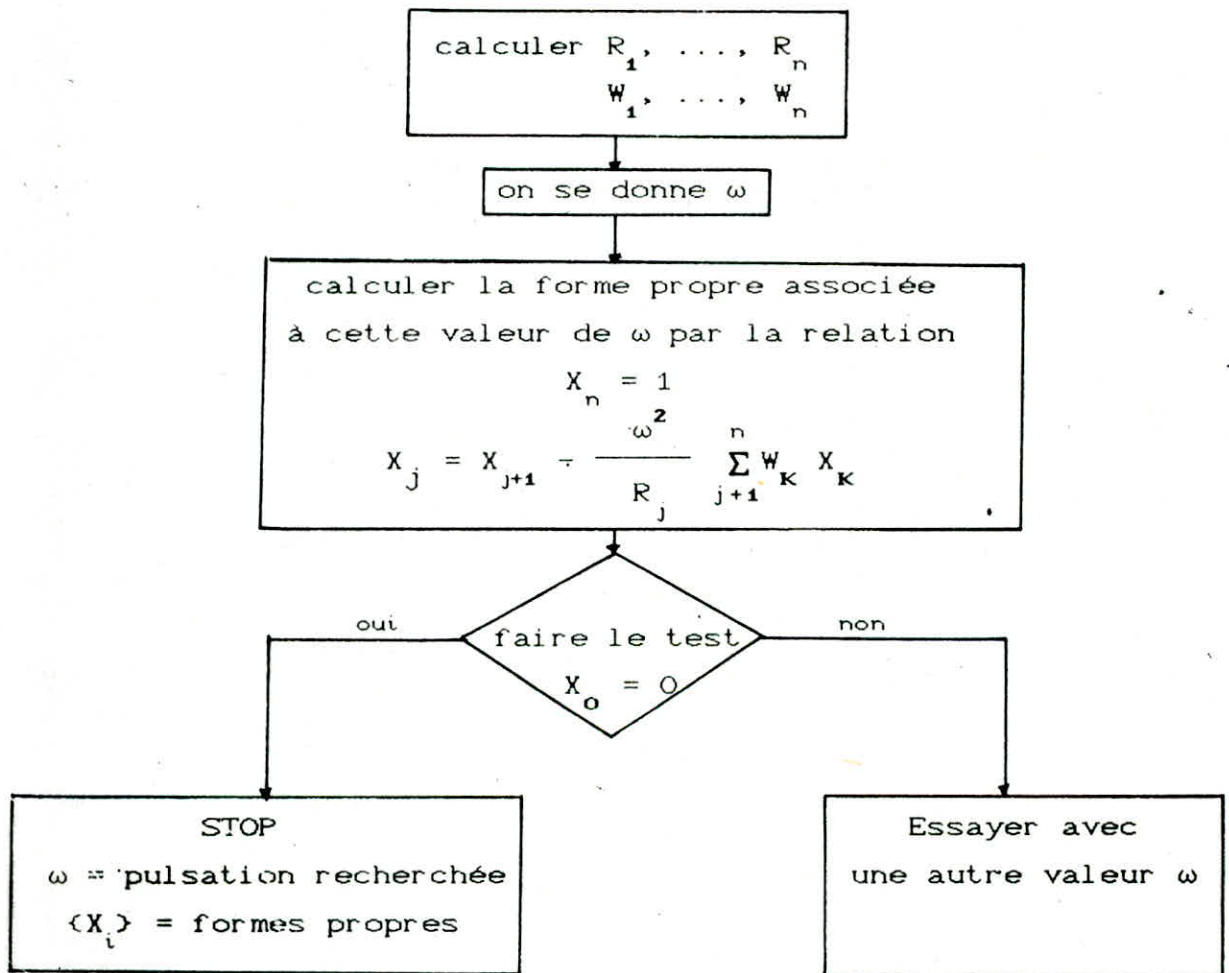
2.14.2. METHODE DE RALEIGH

Cette méthode approchée ramène l'étude de la structure réelle à une structure ne possédant qu'un seul degré de liberté. Elle

est essentiellement utilisée pour trouver la première fréquence propre. Elle repose sur le principe de la conservation de l'énergie : l'énergie totale d'un système non amorti et libre de se mouvoir est constante. Cette énergie est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

2.14.3. METHODE DE HOLZER

C'est une méthode itérative basée sur la notion de rigidité relative de niveau, elle se prête bien pour les structures en portiques. Le procédé de la méthode est donné sous forme d'organigramme.



R_k , W_k : rigidité et poids relatifs au niveau k

2.14.4. METHODE DE JACOBI

a/ GENERALITES

La méthode générale de JACOBI permet de calculer les n valeurs et vecteurs propres d'un système de dimensions limitées (n inférieur à cent) dont les matrices sont symétriques et définies positives. Elle consiste à transformer les matrices [KH] et [M] en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives :

$$\begin{aligned}
 [K^1] &= [KH] & [M^1] &= [M] \\
 [K^2] &= [Q^1]^T [K^1] [Q^1] & [M^2] &= [Q^1]^T [M^1] [Q^1] \\
 &\dots\dots\dots & & \\
 [K^{K+1}] &= [Q^K]^T [K^K] [Q^K] & [M^{K+1}] &= [Q^K]^T [M^K] [Q^K] \quad (a)
 \end{aligned}$$

Les matrices $[K^{K+1}]$ et $[M^{K+1}]$ tendent vers des matrices diagonales $[K^d]$ et $[M^d]$ lorsque K tend vers l'infini. Les valeurs et vecteurs propres sont alors :

$$[\lambda] = [K^d] [M^d]^{-1} \quad \text{ou} \quad \omega_i^2 = \frac{K_{ii}^d}{M_{ii}^d}$$

$$[X] = [Q^1] [Q^2] \dots [Q^K] [Q^{K+1}] \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & 1 & \\ & & \sqrt{M_{ii}^d} & \\ 0 & & & \dots \end{bmatrix}$$

Chaque matrice $[Q^K]$ est choisie de manière à ce qu'un terme (i,j) non diagonal et non nul de $[K^K]$ et de $[M^K]$ après la transformation (a). La matrice $[Q^K]$ a la structure suivante :

$$[Q^K] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & | & | & \\ & -1 & -a & \\ & -b & -1 & \\ 0 & | & | & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{ligne i} \\ \text{ligne j} \end{array}$$

colonne i
colonne j

Les coefficients a et b sont calculés en écrivant que

$$K_{ij}^{K+1} = M_{ij}^{K+1} = 0$$

Soit, en supprimant par simplicité l'indice k+1 sur les termes de chaque matrice :

$$a K_{ii} + (1+ab) K_{ij} + b K_{jj} = 0$$

$$a M_{ii} + (1+ab) M_{ij} + b M_{jj} = 0$$

Dans le cas général notons :

$$C_1 = K_{ii} M_{ij} - M_{ii} K_{ij}$$

$$C_2 = K_{jj} M_{ij} - M_{jj} K_{ij}$$

$$C_3 = K_{ii} M_{jj} - M_{ii} K_{jj}$$

$$d = \frac{C_3}{2} + \text{signe}(C_3) \sqrt{(C_3/2)^2 + C_1 C_2}$$

alors $a = C_2/d$; $b = -C_1/d$

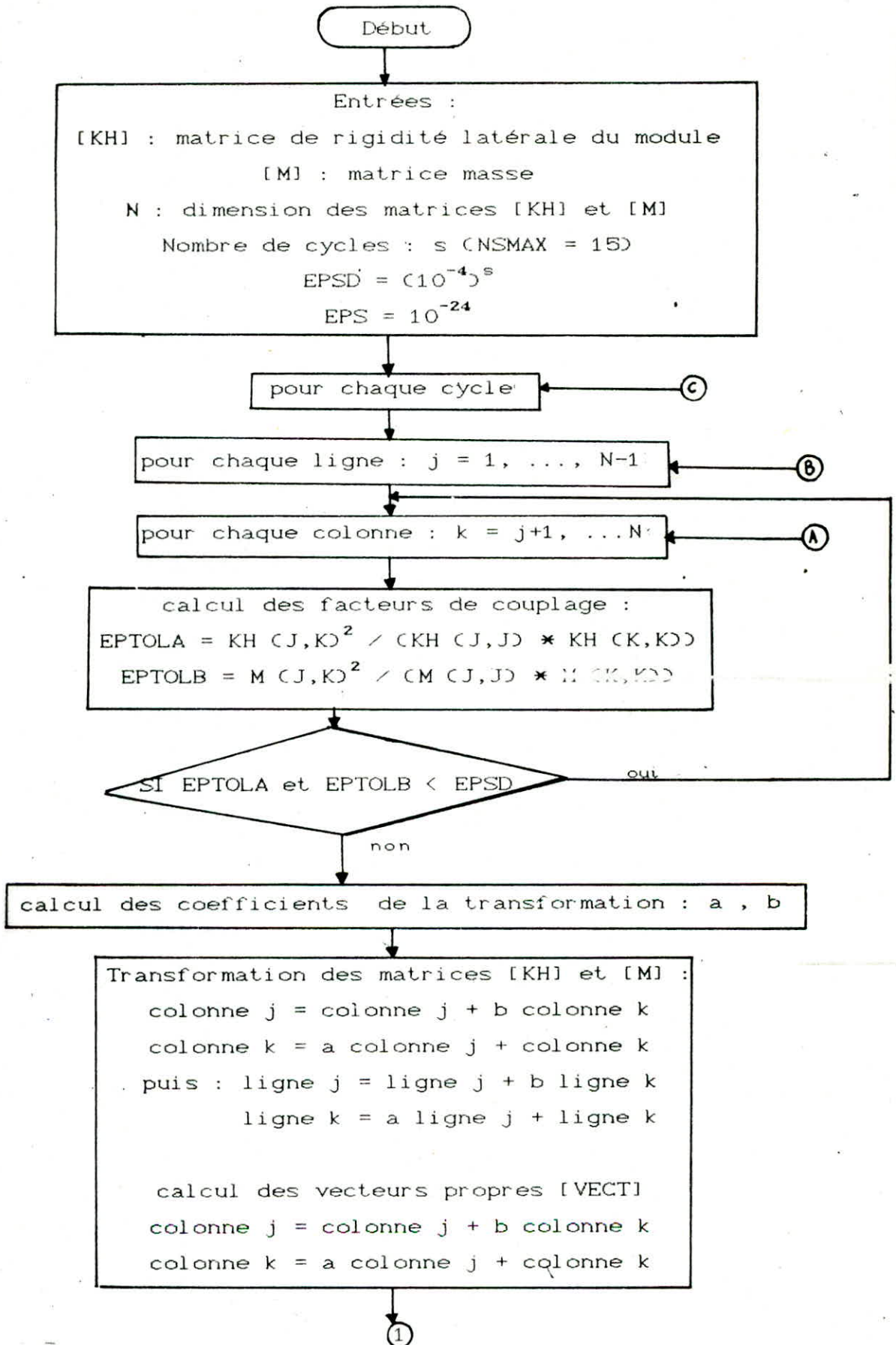
Comme [M] est définie positive le coefficient $(C_3/2)^2 + C_1 C_2$ est positif

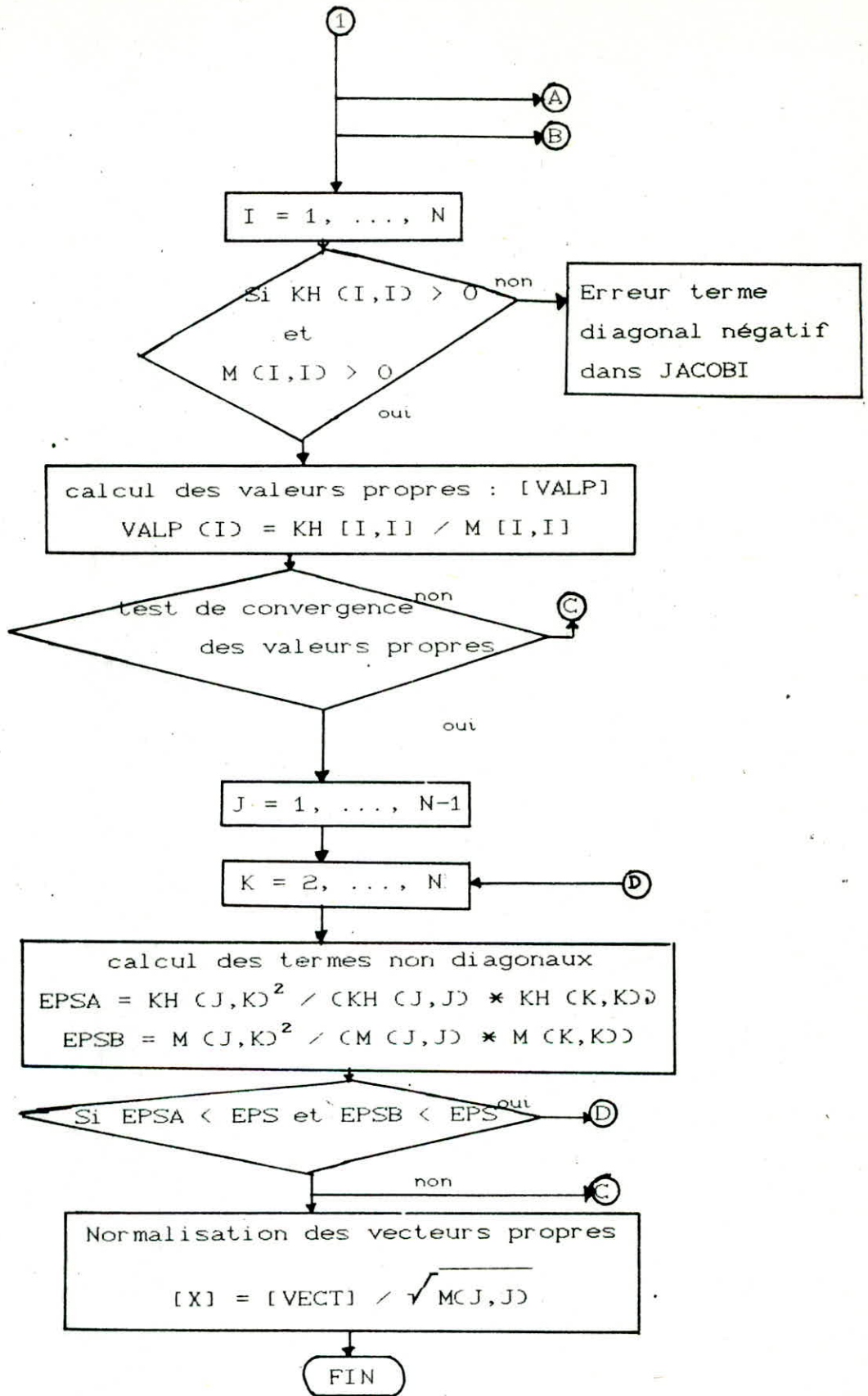
Remarque

Dans le cas de notre étude, nous utiliserons la méthode de JACOBI

b/ ORGANIGRAMME

SUBROUTINE JACOBI



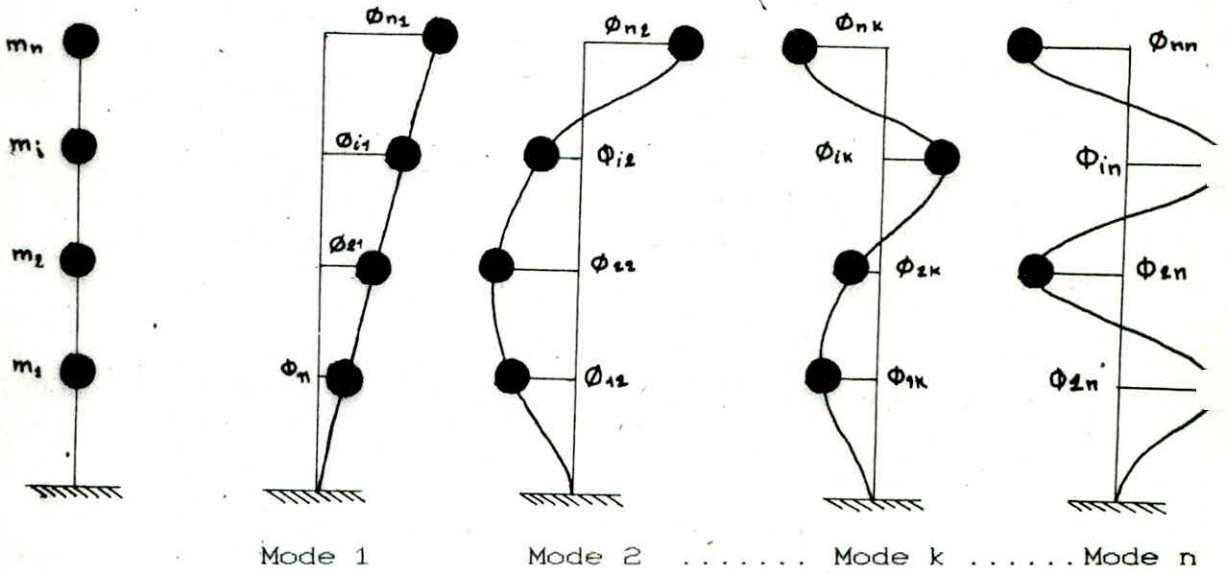


2. 15. CALCUL DES FORCES SISMQUES

2. 15. 1. FORCES SISMQUES DANS CHAQUE MODE DE VIBRATION DE LA STRUCTURE

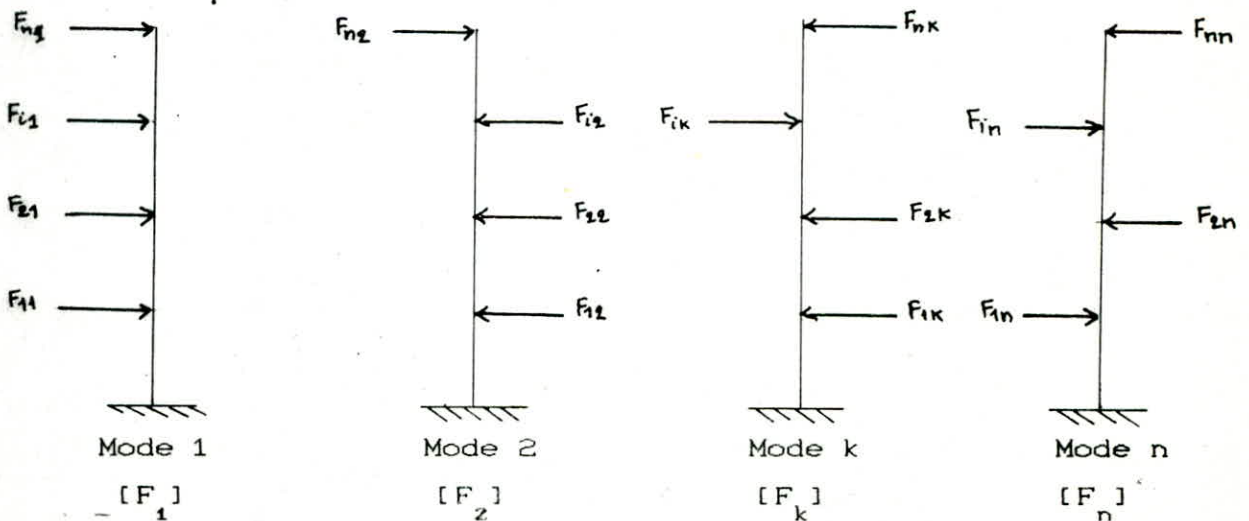
Les modes propres de vibration et les forces sismiques dans chaque mode sont schématisés comme suit :

a/ LES MODES PROPRES DE VIBRATION



pulsation propre: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_k < \omega_n$
 période propre : $T_1 > T_2 > T_k > T_n$
 vecteur propre : $[\phi_1] \quad [\phi_2] \quad [\phi_k] \quad [\phi_n]$

b/ FORCES SISMQUES DANS CHAQUE MODE



La force sismique F_{ik} , à l'étage i de la structure dans le mode k est donnée par :

$$F_{ik} = A D_k B \gamma_k \phi_{ik} W_i$$

A , B , Q : ont été définis précédemment

D_k : facteur d'amplification dynamique moyen de la structure dans le mode k

ϕ_{ik} : composante du vecteur propre ϕ_k du mode k à l'étage i

W_i : poids de la masse m_i ($W_i = m_i g$)

γ_k : facteur de contribution du mode k

$$\gamma_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{ik}}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{ik}^2}$$

En pratique, seuls les premiers modes dans un classement par valeur décroissante de périodes propres sont à retenir, car eux seuls sont excités de façon notable. De plus, les modes élevés n'ont, en général, pas de sens physique car ils peuvent provenir d'un manque de précision du modèle, dû, par exemple, à la concentration des masses au noeud. Aussi, on se contente, dans les cas courants, de calculer un nombre de modes N restreint par rapport au maximum possible. Dans notre cas, nous limiterons le calcul, au mode m ($m < N$), c'est à dire lorsque les masses modales cumulées atteignent 90 à 95% de la masse totale de la structure (troncature des modes).

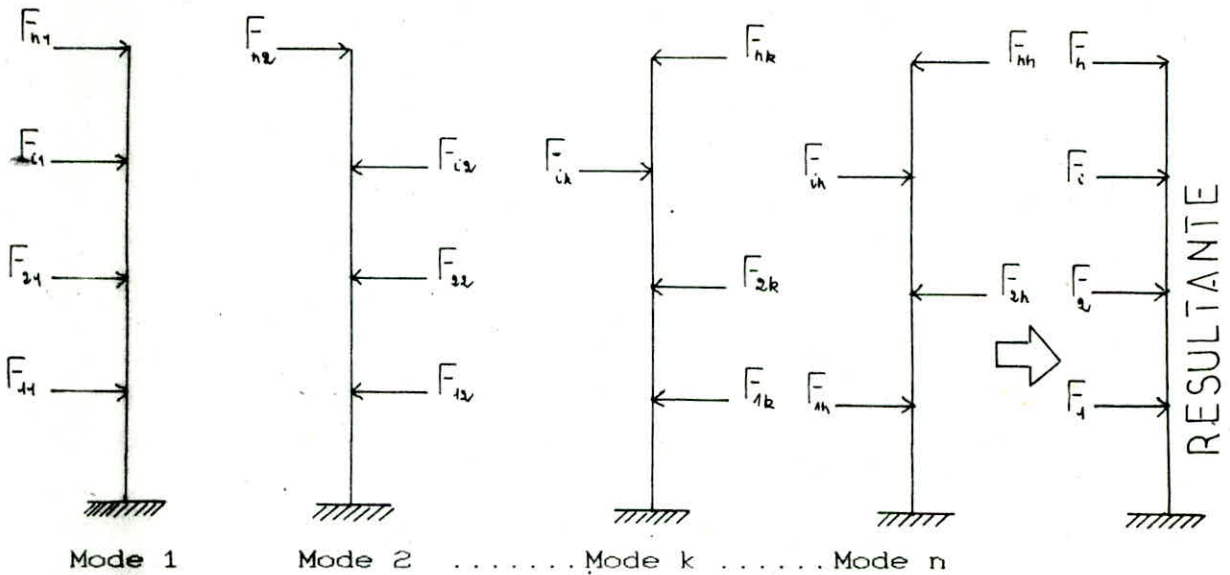
$$\text{masse modale : } m_k = \frac{\sum m_i^2 \phi_{ik}^2}{\sum m_i \phi_{ik}^2}$$

$$\text{masse totale : } M_t = \sum m_i$$

$$\text{coefficient d'équivalence du mode } k : \varepsilon_k = \frac{m_k}{M_t}$$

$$\sum_{k=1}^m \varepsilon_k > 0,9$$

2. 15. 2. RESULTANTE DES FORCES SISMIQUES MODALES



La réponse maximale totale de la structure peut être calculée par la méthode de la superposition quadratique s'appliquant comme suit :

pour le mode de vibration k , dire qu'un paramètre x a une valeur maximum x_k revient alors à affirmer que la probabilité pour que x excède x_k est inférieure à une valeur jugée négligeable, lorsque tous les modes agissant ensemble, la valeur maximum \bar{x} du paramètre x est celle qui correspond à la même probabilité de ne pas être dépassé, on démontre que la valeur de \bar{x} est donnée par la moyenne quadratique :

$$\bar{x} = \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2}$$

d'où la résultante des forces sismiques modales est :

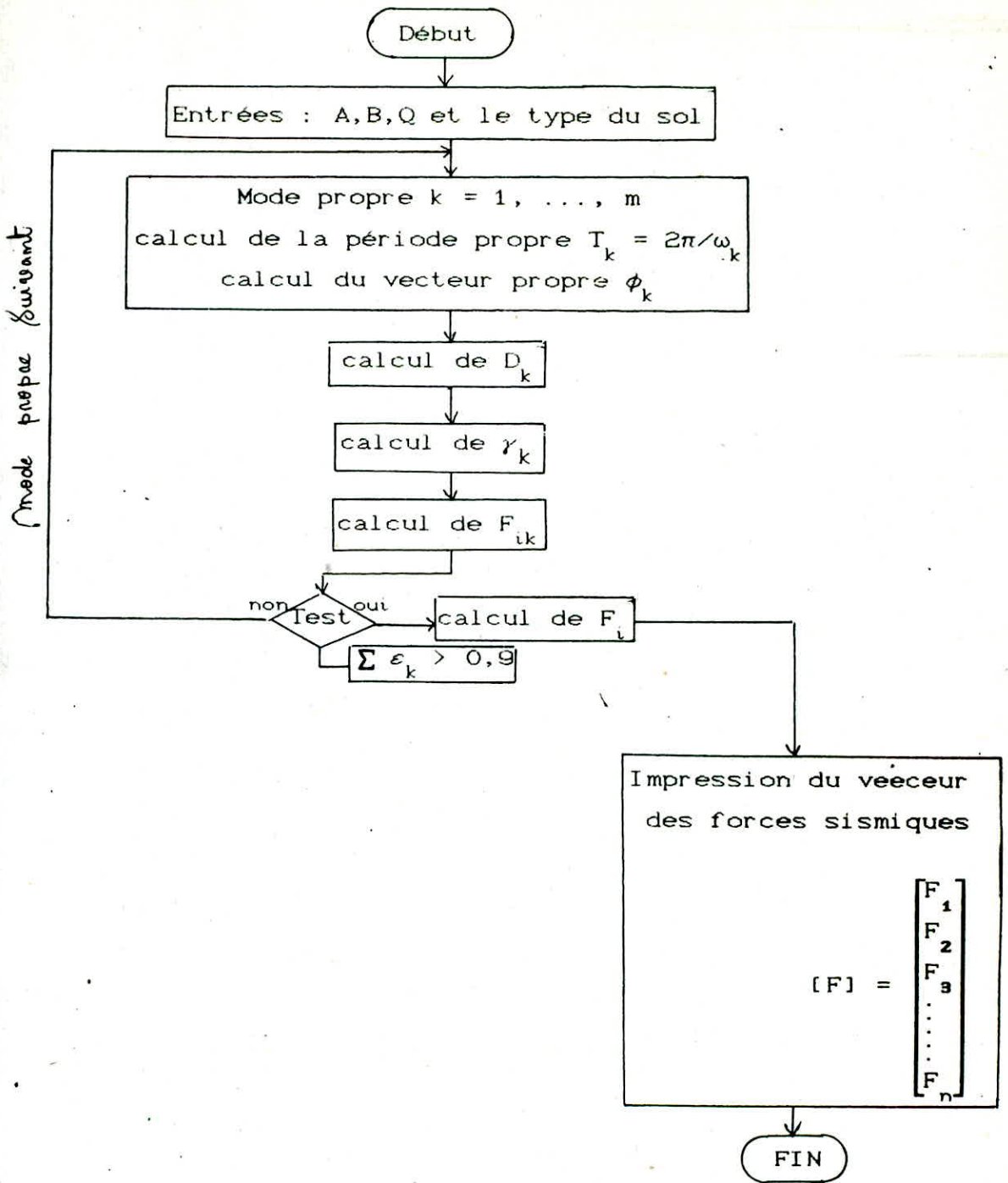
$$F_i = \sqrt{\sum_{k=1}^n F_{ik}^2} = \sqrt{F_{i1}^2 + F_{i2}^2 + \dots + F_{in}^2}$$

Remarque Il existe une autre méthode qui calcule la résultante des forces sismiques modales comme une somme des valeurs absolues des forces sismiques correspondant aux différents modes propres.

$$F_i = \sum_{k=1}^n |F_{ik}|$$

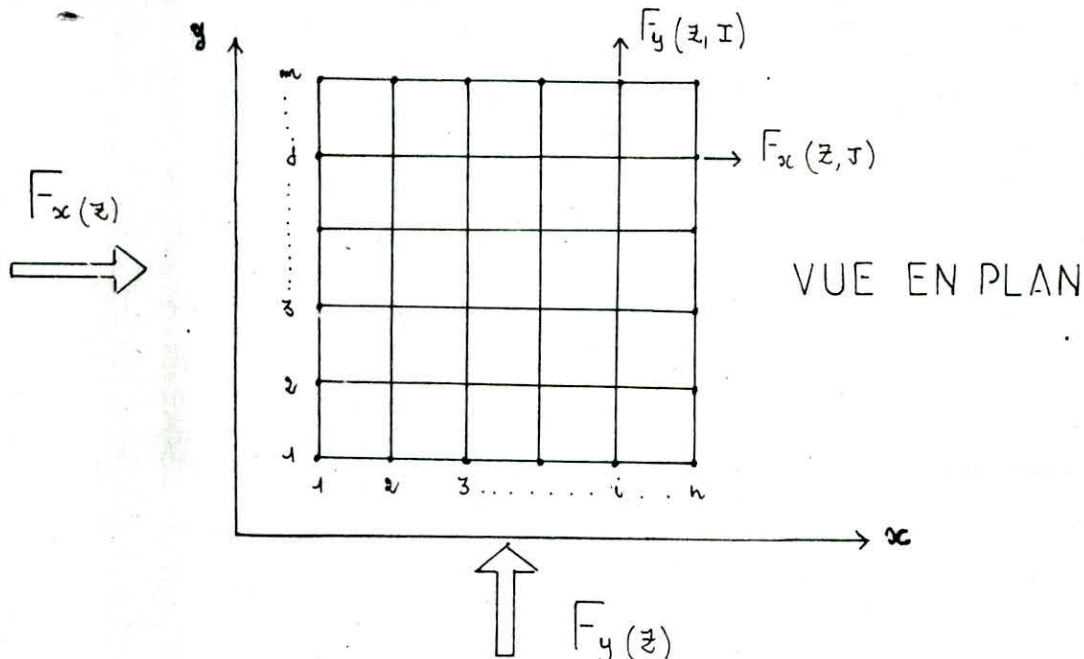
Mais cette combinaison conduit toujours à une estimation par excès de la force réelle F_i car les réponses maximales des différents modes ne se manifestant pas en même temps et avec le même signe. Dans notre étude, on a choisi la première méthode (superposition quadratique).

2. 16. ORGANIGRAMME



2.17. REPARTITION DES FORCES SISMQUES SELON LES DIFFERENTS PLANS DE CONTREVENTEMENT DES PORTIQUES

Nous admettrons lors de notre étude, l'indéformabilité des planchers, supposés infiniment rigides par rapport au plan de contreventement, donc l'effort repris pour chaque plan de contreventement et proportionnel à sa rigidité.



$F_x(Z)$: force horizontale appliquée à l'étage Z suivant la direction XX

$F_y(Z)$: force horizontale appliquée à l'étage Z suivant la direction YY

La force appliquée pour chaque portique j à l'étage (Z) suivant le sens XX :

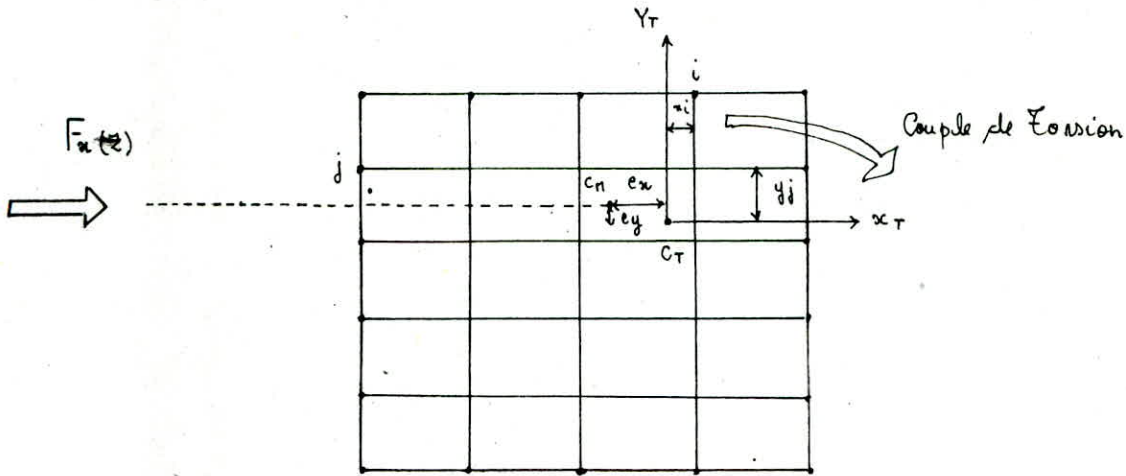
$$F_x^l(Z, J) = \frac{F_x(Z) * R_x(Z, J)}{\sum_{j=1}^m R_x(Z, J)}$$

$R_x(Z, J)$: rigidité dans le sens x du j^{ieme} plan de contreventement à l'étage Z

$$R_x(Z, J) = \sum_1^n \frac{12 E I_i}{h^3(Z)}$$

Lorsque la résultante des forces sismiques à l'étage considéré ne passe pas par le centre de torsion (Dissymétrie de charge

appliquée, ou de rigidité), la déformation due à un couple de torsion entre les planchers étant une rotation autour du centre de torsion, les déplacements subits pour chaque portique seront proportionnels à leurs distances au centre de torsion.



$RT(Z)$: rigidité à la torsion du niveau considéré

$$RT(Z) = \sum_1^m R_y(Z, i) * x_i^2 + \sum_1^n R_x(Z, j) * y_j^2$$

$R_x(Z, j)$: rigidité du portique j parallèle à XX

$R_y(Z, i)$: rigidité du portique i parallèle à YY

x_i : distance du portique i par rapport à l'axe Y_T

y_j : distance du portique j par rapport à l'axe X_T

Les forces de rotation reprisent pour chaque portique :

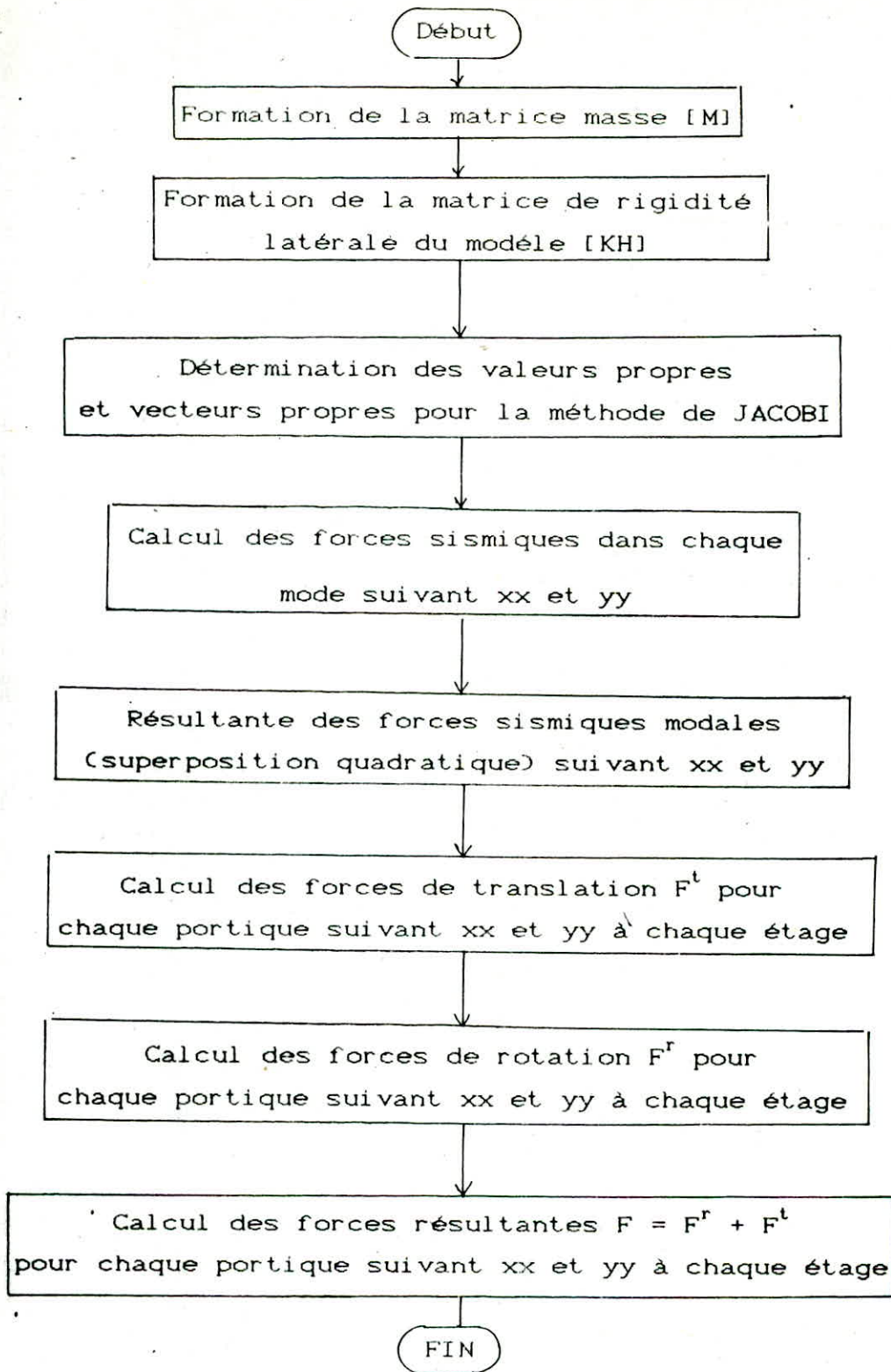
$$F_x^r(Z, J) = \frac{F_x^l(Z) * e_y * R_x(Z, J) * y_j}{RT(Z)}$$

Donc la force résultante est la somme des forces dues à la translation et la rotation.

$$F_x(Z, J) = F_x^l(Z, J) + F_x^r(Z, J)$$

- Remarque : - si la force de rotation est négative, elle est ignorée.
- la même méthode de calcul sera utilisée pour l'étude sens YY.

2. 18. ORGANIGRAMME



D. REPARTITION DES CHARGES ET SURCHARGES

2. 19. DESCENTE DES CHARGES

On appelle "descente de charge", l'opération qui consiste à calculer, pour tous les éléments porteurs de la construction (murs, poteaux et poutres), les charges qu'ils supportent au niveau de chaque étage jusqu'aux fondations. Il faut donc d'abord considérer la nature et l'importance des forces agissant sur les bâtiments. Ce sont :

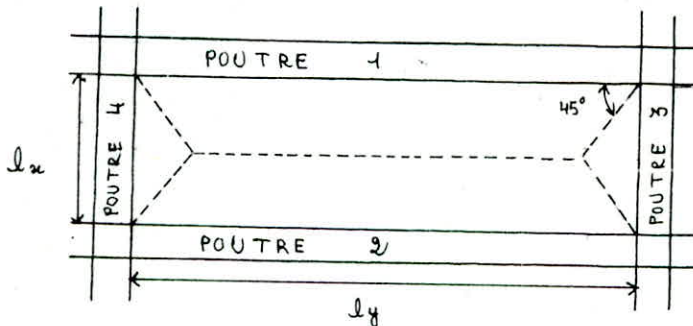
- les surcharges d'exploitation
- les surcharges climatiques

Une fois le panneau de dalle et sa surface sont connus, on peut faire la répartition des charges appliquées, sur chaque élément de la structure, nous distinguons deux cas possibles suivant le type de plancher :

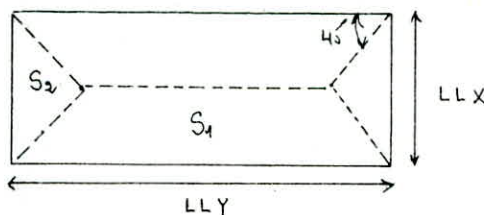
2. 19. 1. PLANCHER DALLE

a/ GENERALITES

Chaque panneau élémentaire transmet aux poutres qui le supportent une charge répartie déduite à partir des lignes de rupture des panneaux. Pour un panneau rectangulaire, les lignes de rupture sont dirigées selon des angles de 45° ; les charges triangulaires et trapezoidales sont par la suite uniformisées le long de la poutre.



b/ PRINCIPE DE PROGRAMMATION



Pour le calcul des charges revenant aux poutres, un test permettra la reconnaissance de la surface à transmettre (surface triangulaire ou trapezoidale) ; pour cela calculons ces surfaces :

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{LLX}{2} \frac{LLX}{2} \times 2 = \frac{LLX^2}{4} \Rightarrow S_2 = \frac{LLX^2}{4}$$

$$S_1 = (LLY * LLX - 2 \frac{LLX^2}{4}) / 2 = \frac{LLY * LLX}{2} - \frac{LLX^2}{4}$$

$$S_1 = \frac{LLX}{2} \left[LLY - \frac{LLX}{2} \right]$$

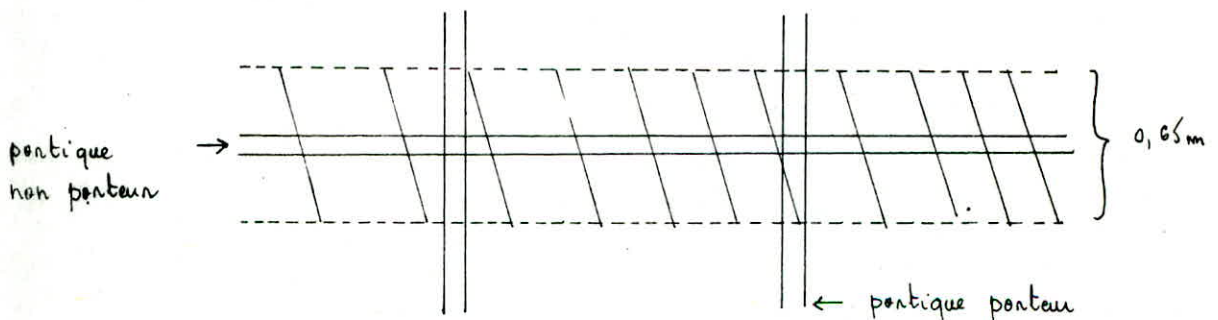
Le test en question consiste à comparer pour chaque sens XX ou YY, LLX et LLY comme suit : dans le sens XX, si LLX est inférieur à LLY, alors la poutre parallèle à XX supportera une charge trapezoidale, dans le cas contraire la poutre supportera une charge triangulaire. Le même procédé sera utilisé pour le sens YY.

Remarque

$$\text{Si } LLX = LLY \Rightarrow S_1 = S_2 = \frac{LLX^2}{4} = \frac{LLY^2}{4}$$

2. 19. 2. PLANCHERS A CORPS CREUX

L'utilisation doit donner le sens porteur du plancher. La bande qui revient au portique porteur est la moitié de la surface de la dalle adjacente, par contre le portique non porteur reprend (0,65/2) m de chaque côté.



Connaissant la bande de la dalle reprise par chaque portique, nous passerons ensuite au calcul des charges et surcharges.

2. 19. 3. CHARGES PERMANANTES REVENANT AU PORTIQUE

Le calcul est simple, il résulte d'un métré et de la connaissance des poids volumiques des matériaux et des éléments de construction. Donc la charge revenant à chaque portique est formé de :

- poids propre des poutres et poteaux du portique
- poids qui lui revient du plancher.

Dans le cas d'un portique de rive, on ajoute le poids des cloisons extérieures.

2. 19. 4. CHARGES D'EXPLOITATION REVENANT AU PORTIQUE

La surcharge d'exploitation est donnée en fonction du type d'utilisation du bâtiment ; cette surcharge est uniformément répartie sur le portique, elle est calculée en fonction de la bande revenant au portique considéré.

E. VISUALISATION DES DIFFERENTES VUES EN PLAN

Une fois l'étude pseudo-dynamique terminée, une visualisation des différentes vues en plan du bâtiment sera obtenue d'après le menu suivant :

QUELLE VUE EN PLAN VOULEZ-VOUS VOIR

DE 1 A NZ ?

L'utilisateur aura à choisir une vue en plan de 1 à NZ, qui apparaîtra sur l'écran suivant une échelle adéquate avec les cotations et la numérotation des plans de contreventement dans les deux sens XX et YY. En plus les coordonnées du centre de masse, du centre de torsion et l'excentricité seront données sur le coin supérieur à droite de la vue en plan. Après chaque choix d'une vue en plan, il apparaîtra sur l'écran :

VOULEZ-VOUS VOIR UNE AUTRE VUE EN PLAN (O/N) ?

L'utilisateur décidera soit de visualiser une autre vue en plan ou bien d'entamer l'étude d'un portique de son choix.

F. CHOIX ET ETUDE DU PORTIQUE

Après confirmation de l'étude d'un portique suivant un sens xx ou yy, le menu suivant apparait :

- 1 - CHARGES PERMANANTES
- 2 - SURCHARGES
- 3 - FORCES SISMIQUES
- 4 - NUMEROTATION AUTOMATIQUE
- 5 - COORDONNEES DES NOEUDS
- 6 - CHARGES ET DIRECTIONS
- 7 - CALCUL DES EFFORTS

Ce menu permet d'appeler au choix l'une des sept options précédentes. la dernière option entrainera le calcul des efforts internes du portique considéré, ce dernier sera visualisé, à la fin des calculs, suivant une échelle déterminée, avec une numérotation des noeuds, les hauteurs d'étages, les distances entre axes des poteaux et sur la droite de l'écran, un tableau donnant les efforts combinés (sous G, SU et SI) aux noeuds : le moment fléchissant, l'effort normal et l'effort tranchant ; le numéro du noeud et de la barre.

Remarque : N'importe quelle combinaison pourra être choisie par l'utilisateur, en donnant simplement les coefficients G, SU et SI. Ainsi, un autre portique pourra être appelé pour une étude similaire, et cela dans n'importe quel sens.

2. 20. INTRODUCTION

Depuis de nombreuses années, les ingénieurs sont capables de calculer les efforts dans les structures en portiques. Les hypothèses admises dans le cadre de la théorie, permettent d'utiliser des méthodes rigoureuses et relativement simples à mettre en oeuvre : la méthode des rotations, la méthode de CROSS sont des solutions itératives et accessibles à la main qui permettent d'obtenir des déplacements et des efforts dans des structures simples. Il est apparu assez vite que la méthode des déplacements qui consiste à prendre comme inconnues de départ, les déplacements (translations et rotations) de chacun des noeuds de la structure donneraient une solution élégante pour le calcul des efforts. L'avènement des ordinateurs, capables d'effectuer dans des délais et à des coûts raisonnables la masse de calcul nécessaire a définitivement banalisé de telles méthodes. Dans la méthode des déplacements, on considère comme dans la méthode des forces une structure comme un assemblage de composants élémentaires. Les points de jonction de ces composants sont appelés des noeuds. La différence fondamentale dans l'emploi de la méthode des déplacements réside dans le fait que les déplacements indépendants des noeuds sont pris comme inconnues. Les forces dans les barres sont reliées aux déplacements du point nodal par une matrice définie comme la rigidité de chaque barre, les forces nodales sont reliées aux déplacements des noeuds par une matrice définie comme la matrice de rigidité de la structure. Cette dernière matrice est obtenue par une de transformations matricielles à partir de la matrice de rigidité particulière à chaque barre. Finalement, selon les conditions d'équilibre des forces nodales obtenues à partir des déplacements inconnus des noeuds, et de la rigidité de la structure doivent équilibrer les charges extérieures appliquées aux noeuds.

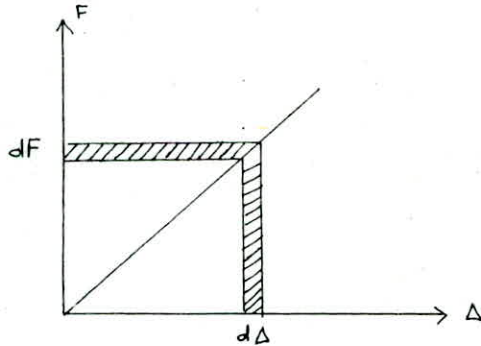
2. 21. RAPPEL DE R. D. M

Les différentes justifications théoriques ne seront pas détaillées, on donnera que les résultats qui nous serviront de base pour la suite de nos calculs.

2. 21. 1. RAPPELS DE METHODES ENERGETIQUES

a/ TRAVAIL D'UNE FORCE

Soit un corps élastique soumis à une force F extérieure et subissant un déplacement Δ proportionnel à F .



Le travail élémentaire est : $dW = F \cdot d\Delta$

donc le travail total : $W = \int dW = 1/2 F \cdot \Delta$

le travail complémentaire est : $d\bar{W} = \Delta \cdot dF$ d'où $\bar{W} = 1/2 F \cdot \Delta = W$

le travail produit par un système de forces est :

$$W = \frac{1}{2} \sum F_i \Delta_i$$

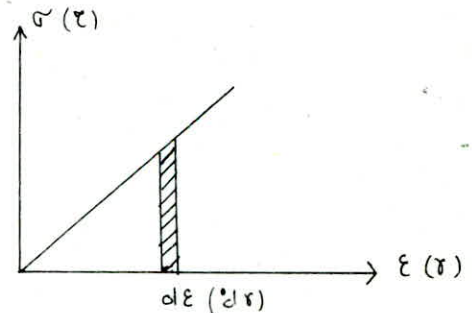
2. 21. 2. ENERGIE DE DEFORMATION U

Soit W le travail des forces extérieures et U le travail des forces intérieures. D'après le théorème de CLAPEYRON, qui est une application du principe de la conservation de l'énergie, il y a égalité entre W et U ; cette égalité ne dépend ni de l'ordre dans lequel les forces sont appliquées, ni des variations de ces forces entre l'état initial et l'état final du corps. Les efforts N et M engendrent des contraintes normales σ et des déformations normales $\varepsilon = \sigma/E$, alors que T et C engendrent des contraintes tangentielles τ et des déformations tangentielles $\gamma = \tau/G$.

$$dU_1 = \sigma \, d\varepsilon \text{ or } U_1 = \int dU_1 = 1/2 \sigma \varepsilon$$

$$dU_2 = \tau \, d\gamma \text{ or } U_2 = \int dU_2 = 1/2 \tau \gamma$$

$$U = U_1 + U_2 = (U_N + U_M) + (U_T + U_C)$$



a/ ENERGIE DE DEFORMATION DUE A L'EFFORT NORMAL

$$U_N = \frac{1}{2} \int \sigma \varepsilon dV \quad \text{avec} \quad dV = s dl ; \quad \sigma = N/S ; \quad \varepsilon = N/ES$$

$$U_N = \frac{1}{2} \int \frac{N}{S} \frac{N}{ES} S dl = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{ES} dl$$

b/ ENERGIE DE DEFORMATION DUE AU MOMENT DE FLEXION

$$U_M = \frac{1}{2} \int \sigma \varepsilon dV \quad \text{avec} \quad \sigma = (M/I)y ; \quad \varepsilon = My/EI ; \quad dV = ds dl$$

$$U_M = \frac{1}{2} \int \frac{M}{I} y \frac{My}{EI} ds dl = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI^2} dl \cdot \underbrace{\int_s y^2 ds}_I$$

$$U_M = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dl$$

c/ ENERGIE DE DEFORMATION DUE A L'EFFORT TRANCHANT

$$U_T = \frac{1}{2} \int \tau \gamma dV \quad \text{avec} \quad dV = ds \cdot dl$$

$$\tau = \frac{TS_t}{Ib} \quad S_t : \text{moment statique}$$

b : largeur de la section

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{TS_t}{IbG}$$

$$U_T = \frac{1}{2} \int \frac{TS_t}{Ib} \frac{TS_t}{IbG} ds dl$$

On définit la section cisailée (réduite) par :

$$S' = \frac{I^2}{\int_s (S_t^2/b^2) ds} \quad \text{d'où} \quad U_T = \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{G S'} dl$$

d/ ENERGIE DE DEFORMATION DUE AU MOMENT DE TORSION

$$U_c = \frac{1}{2} \int \frac{C^2}{G J} dl \quad J : \text{moment quadratique polaire}$$

(section circulaire)

Lorsque toutes les sollicitations simples sont appliquées simultanément, l'énergie de déformation totale pour une barre est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS'} + \frac{C^2}{GJ} \right] dl$$

Remarque : Lorsqu'il n'y a pas de phénomène de torsion, l'énergie de déformation se réduit à trois termes :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{N^2}{2 ES} + \frac{T^2}{2 GS'} + \frac{M^2}{2 EI} \right] dl$$

dans la plupart des calculs, il s'avère que la contribution

apportée par le terme $\frac{T^2}{2 GS'}$ est faible, pour la flexion elle est

de l'ordre de quelque % par rapport à la contribution apportée par

le terme $\frac{M^2}{2 EI}$. Dans la plupart des cas, on négligera donc

l'effet du terme $\frac{T}{2 GS'}$; on dit, dans ce cas, que l'on néglige

l'effet de l'effort tranchant.

2. 21. 3. METHODE ENERGETIQUE DE CASTIGLIANO

Le théorème de Castigliano, permet de calculer les déplacements des points particuliers des barres. Par extension on peut calculer les déplacements en tout point ainsi que résoudre les problèmes hyperstatiques.

Enoncé du théorème de CASTIGLIANO

Le déplacement du point d'application d'une force sur son support est égal à la dérivée du potentiel par rapport à cet effort:

$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}$$

Δ_i représente le déplacement dans le sens de F_i

Remarque : F_i est prise au sens large de la définition d'un effort (force ou couple), il en résulte que Δ_i constitue un déplacement au sens large (translation ou rotation).

$$\text{d'où : } U = \frac{\partial W}{\partial N} \quad (\text{translation axiale})$$

$$v = \frac{\partial W}{\partial T} \quad (\text{translation perpendiculaire à la ligne moyenne de la barre})$$

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial M} \quad (\text{rotation})$$

2. 22. METHODE DES DEPLACEMENTS

APPROCHE ADAPTEE A L'INFORMATIQUE

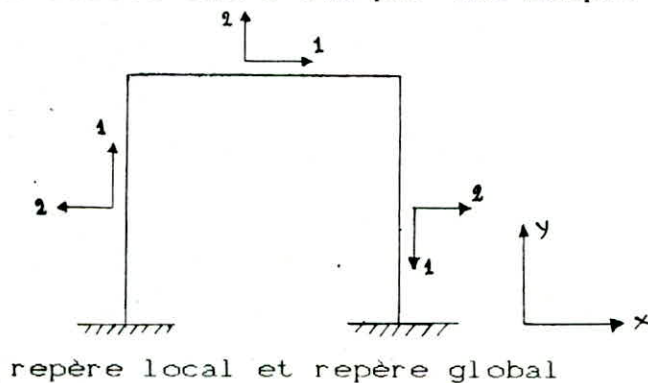
Dans cette partie nous allons construire la matrice de rigidité de la structure à partir des matrices des rigidités élémentaires de chaque barre sans tenir compte des conditions d'appuis ; ces conditions ne seront prises en compte qu'à la résolution du système. Dans le plan, chaque noeud possède trois degrés de liberté : u , v et φ . Les appuis sont des noeuds dont on supprime certains degrés de liberté. Pour une structure élastique soumise à un système de force F induisant des déplacements U on peut toujours écrire $[K] [U] = [F]$

Si les déplacements sont des déplacements au noeud, les forces doivent être des forces nodales. La définition de notre structure, et celle des efforts dans les barres, nous a conduit à

utiliser implicitement deux repères différents.

Le REPERE GLOBAL, ou repère de la structure, noté X,Y sert à définir les coordonnées des noeuds. Dans ce repère seront fournis les réactions des appuis et les déplacements des noeuds.

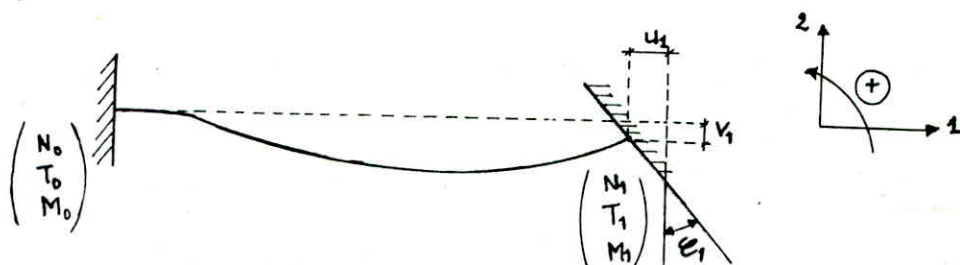
Le REPERE LOCAL, ou repère lié à la barre, noté 1,2 est un repère propre à chaque barre, défini par la fibre neutre de la barre (axe 1, orienté du noeud début au noeud fin) et par l'axe 2, directement perpendiculaire à l'axe 1. Dans ce repère propre à chaque barre, seront exprimés les efforts N, M, T. Ces différents repères seront reliés entre eux par une simple rotation.



2.29. FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE D'UNE BARRE DANS LE REPERE LOCAL

2.29.1. APPLICATION DE LA METHODE DE CASTIGLIANO A UNE BARRE BI-ENCASTREE

Prenons une barre encastrée à ces extrémités. Cette barre est soumise à des déplacements imposés à l'une de ces extrémités v_1, φ_1 (voir figure). Naturellement ces déplacements sont petits par rapport aux dimensions de la poutre.



Poutre bi-encastrée soumise à des déplacements imposés

Nous avons affaire à un système hyperstatique de degré 3. Nous prendrons comme inconnues hyperstatiques : N_1 , T_1 et M_1 .

Les équations d'équilibre donnent :

$$\begin{cases} N_0 + N_1 = 0 \\ T_0 + T_1 = 0 \\ M_0 + M_1 + T_1 L = 0 \end{cases}$$

les efforts dans la barre sont les suivants :

$$\begin{cases} N = N_1 \\ M = T_1(L-s) + M_1 \\ T = T_1 \end{cases}$$

Nous négligeons l'effet des contraintes tangentielles sur les déformation alors :

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{N_1^2}{E S} + \frac{(T_1(L-s) + M_1)^2}{E I} \right]$$

et l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$W = \frac{1}{2E} \int_0^L \left[\frac{N_1^2}{S} + \frac{T_1^2(L-s)^2}{I} + \frac{2T_1 M_1(L-s)}{I} + \frac{M_1^2}{I} \right] ds$$

compte tenu des déplacements imposés u_1 , v_1 et φ_1 de l'extrémité droite nous pouvons écrire en ce point :

$$u_1 = \frac{dW}{dN_1} = \frac{N_1}{E} \int_0^L \frac{ds}{S}$$

$$v_1 = \frac{dW}{dT_1} = \frac{1}{E} \left[T_1 \int_0^L \frac{(L-s)^2}{I} ds + M_1 \int_0^L \frac{(L-s)}{I} ds \right]$$

$$\varphi_1 = \frac{dW}{dM_1} = \frac{1}{E} \left[T_1 \int_0^L \frac{(L-s)}{I} ds + M_1 \int_0^L \frac{ds}{I} \right]$$

Si les dimensions de la barre sont constantes (la barre est dite à "inertie constante") on peut alors facilement calculer les intégrales. Si par contre la barre est à "inertie variable", ie que ses dimensions varient tout au long de la poutre, ces intégrations sont plus compliquées.

Nous considérerons que I et S sont constants. Alors :

$$u_1 = \frac{N_1 L}{E S}$$

$$v_1 = \frac{T_1 L^3}{3 EI} + \frac{M_1 L^2}{2 EI}$$

$$\varphi_1 = T_1 \frac{L^2}{2EI} + \frac{M_1 L}{EI}$$

et réciproquement

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{E S}{L} u_1 \\ T_1 = \frac{12 EI}{L^3} v_1 - \frac{6 EI}{L^2} \varphi_1 \\ M_1 = -\frac{6 EI}{L^2} v_1 + \frac{4 EI}{L} \varphi_1 \end{array} \right.$$

2. 23. 2. NOTATION MATRICIELLE

Nous venons donc de voir précédemment de la poutre bi-encastrée soumise à des déplacements imposés, qu'il existait une relation linéaire entre les efforts et les déplacements. Nous pouvons donc utiliser une notation matricielle pour exprimer cette relation, soit :

$$\begin{vmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ES/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 EI/L^3 & -6 EI/L^2 \\ 0 & -6 EI/L^2 & 4 EI/L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{vmatrix}$$

Mais nous pouvons aller plus loin encore avec ce type de notation.

Nous pouvons en effet calculer les efforts N_0 , T_0 et M_0 à partir de N_1 , T_1 et M_1 puisque (Cf relations d'équilibre) :

$$\begin{cases} N_0 = -N_1 \\ T_0 = -T_1 \\ M_0 = -T_1 L - M_1 \end{cases}$$

ce qui peut s'exprimer également par une formulation matricielle soit :

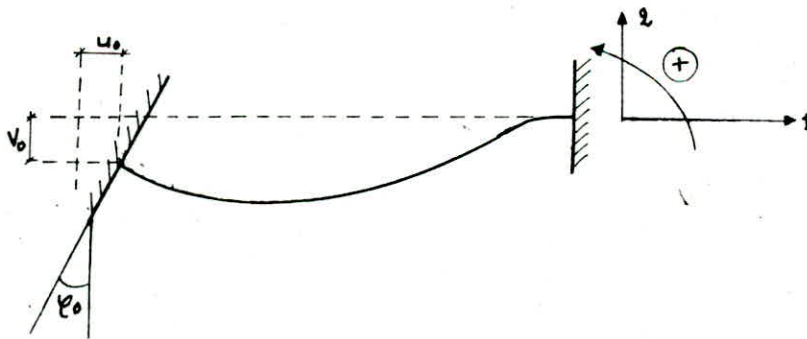
$$\begin{vmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{vmatrix}$$

ou encore en fonction des déplacements par une multiplication des deux matrices. Nous obtenons :

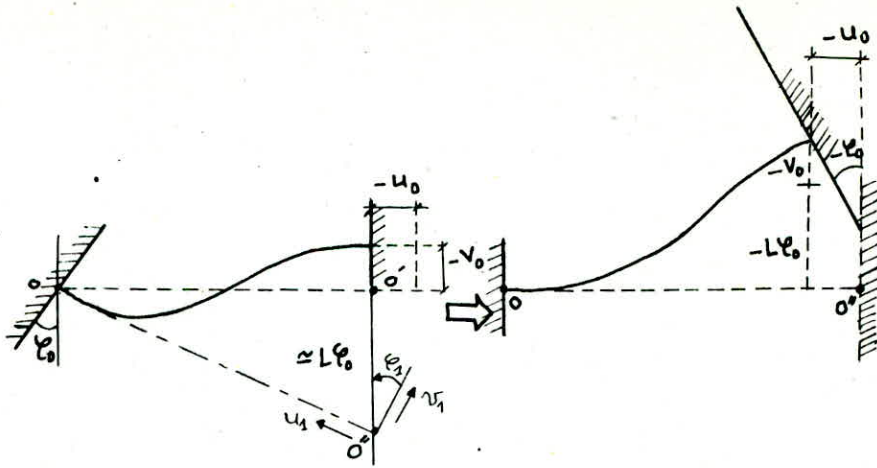
$$\begin{vmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -ES/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 EI/L^3 & 6 EI/L^2 \\ 0 & -6 EI/L^2 & 2 EI/L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{vmatrix}$$

Nous voyons donc qu'il est impossible d'utiliser la formulation matricielle pour exprimer les relations efforts - déplacements.

Nous allons terminer cette étude préalable en calculant les efforts provoqués par des déplacements (u_0, v_0, φ_0) de l'extrémité gauche.



Nous pouvons refaire un calcul identique à celui fait précédemment, mais nous pouvons aussi exprimer (u_0, v_0, φ_0) en fonction de (u_1, v_1, φ_1) pour lesquels nous avons déjà établi les relations efforts - déplacements. Pour cela une construction géométrique simple permet de trouver les résultats.



Compte tenu que nous sommes en petites déformations, nous pouvons assimiler l'angle φ_0 à sa tangente. Nous avons alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = -u_0 \\ v_1 = -v_0 - L_1 \varphi_0 \\ \varphi_1 = -\varphi_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_0 = -u_1 \\ v_0 = -v_1 + L \varphi_1 \\ \varphi_0 = -\varphi_1 \end{cases}$$

soit donc en prenant une formulation matricielle

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \end{vmatrix}$$

par simples multiplications matricielles nous obtenons alors :

$$\begin{vmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -ES/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 EI/L^3 & 6 EI/L^2 \\ 0 & -6 EI/L^2 & 2 EI/L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \end{vmatrix}$$

soit :

$$\begin{vmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ES/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 EI/L^3 & 6 EI/L^2 \\ 0 & 6 EI/L^2 & 4 EI/L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \end{vmatrix}$$

et de même :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ES/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 EI/L^3 & -6 EI/L^2 \\ 0 & 6 EI/L^2 & 2 EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons donc ainsi reconstituer toujours par une formulation matricielle une relation reliant efforts et déplacements pour la barre.

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \\ N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ES/L & 0 & 0 & -ES/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 EI/L^3 & 6 EI/L^2 & 0 & -12 EI/L^3 & 6 EI/L^2 \\ 0 & 6 EI/L^2 & 4 EI/L & 0 & -6 EI/L^2 & 2 EI/L \\ -ES/L & 0 & 0 & ES/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 EI/L^3 & -6 EI/L^2 & 0 & 12 EI/L^3 & -6 EI/L^2 \\ 0 & 6 EI/L^2 & 2 EI/L & 0 & -6 EI/L^2 & 4 EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \\ u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons également que pour déterminer cette matrice complète, il suffit de connaître une des quatre sous-matrices, les trois autres s'obtenant ensuite à l'aide de transformations géométriques simples, qui peuvent s'exprimer également sous forme matricielle. Nous remarquons ainsi que cette matrice ainsi obtenue est symétrique. Cette propriété intéressante sera exploitée ultérieurement.

Afin de simplifier, les écritures on notera cette matrice $[K_a]$ et la divisons en quatre sous-matrices telle que pour une barre a allant du noeud i au noeud j , nous aurons la notation suivante :

$$[K_a] = \begin{bmatrix} K_a^i & L_a^j \\ L_a^i & K_a^j \end{bmatrix}$$

Compte tenu des remarques que nous avons faites quant au calcul de cette matrice ; la connaissance de la matrice de rigidité inférieure droite $[K_a^j]$ nous permet d'obtenir les autres sous matrices ; pour cela nous aurons besoin de deux matrices de transformations ou matrices transferts notés $[T_d]$ et $[T_g]$

$$[T_d] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [T_g] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix}$$

Remarque : $[T_g] = [T_d]^T$

à partir de ces matrices $[K_a^j]$, $[T_d]$ et $[T_g]$ nous obtenons :

$$[l_a^j] = [T_g] [K_a^j]$$

$$[l_a^i] = [K_a^j] [T_d]$$

$$[K_a^i] = [l_a^j] [T_d]$$

ensuite ces différentes matrices seront calculées dans le repère global.

2. 24. FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE D'UNE BARRE DANS LE REPERE GLOBAL.

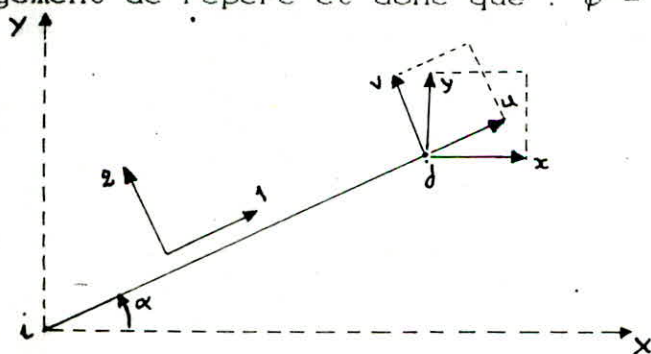
Jusqu'ici les relations trouvées ne supposaient qu'un seul système d'axe lié à la barre (repère local). Si les efforts dans les barres sont toujours exprimés par rapport à ce système d'axes, on choisit par contre pour donner les réactions des appuis et les déplacements des noeuds un système global d'axes qui ne correspond pas nécessairement avec celui de la barre.

Il nous faut donc à partir des déplacements introduits précédemment et qui concerneraient le repère local de barre, trouver leur expression dans le repère global. Pour cela il est nécessaire d'introduire l'angle α entre l'axe X du repère global et l'axe 1 du repère local. Cette relation consiste donc à exprimer une rotation d'angle α d'où on obtient en notant (u, v, φ) les déplacements dans le repère local et (x, y, θ) ceux dans le repère global.

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

on remarquera que la rotation φ n'est pas affectée par ce changement de repère et donc que : $\varphi = \theta$



passage du repère global
au repère local.

compte tenu de la formulation linéaire de cette transformation, nous pouvons également l'exprimer sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ e \end{bmatrix}$$

De même les efforts (N,T,M) exprimés dans le repère local se déduiront de la même façon des efforts (H,V,C) liés au repère global par :

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix}$$

Réciproquement il est intéressant de déterminer la relation permettant de trouver (H,V,C) connaissant (N,T,M). Il suffit pour cela de prendre la matrice inverse de la matrice de rotation écrite précédemment, ce qui se fait ici sans difficulté, on obtient alors :

$$\begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}$$

Compte tenu que la transformation est une rotation, sa matrice inverse est la transposée de la matrice précédente, c'est à dire que les termes diagonaux restent inchangés tandis que les termes extra-diagonaux sont permutés symétriquement deux à deux. Afin de simplifier les écritures, par la suite nous noterons par [R] la matrice rotation et [R]^T sa matrice transposée. Ainsi nous obtiendrons les formulations suivantes :

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix} = [R]^T \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}$$

- (1) $[F]_a = [K]_a [U]_a$ repère local
 (2) $[F] = [K] [U]$ repère global

$$\begin{aligned} [F]_a &= [R]_a [F] \\ [U]_a &= [R]_a [U] \end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow [R_a] [F] = [K_a] [R_a] [U]$$

$$(1) + (2) \Rightarrow [F] = [R_a]^{-1} [K_a] [R_a] [U] = [K] [U]$$

$$\Rightarrow [K] = [R_a]^{-1} [K_a] [R_a]$$

avec $[R_a]^{-1} = [R_a]^T$ (orthogonalité de la matrice $[R]$)

$$[K] = [R_a]^T [K_a] [R_a]$$

$[K_a]$: matrice de rigidité dans le repère local.

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_a^j] = [R_a]^T [k_a^j] [R_a] \\ [L_a^i] = [R_a]^T [l_a^i] [R_a] \\ [L_a^j] = [R_a]^T [l_a^j] [R_a] \\ [K_a^i] = [R_a]^T [k_a^i] [R_a] \end{array} \right.$$

Sur le plan informatique, cela se traduit par l'introduction des matrices $[R_a]$ et $[R_a]^T$, le programme se charge des différentes multiplications matricielles citées ci-dessus.

2. 25. FORMATION DE LA MATRICE GLOBALE DE LA STRUCTURE

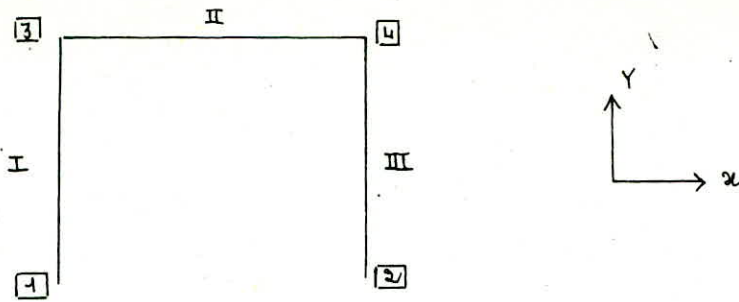
Il s'agit dans cette partie d'assembler les différentes matrices de rigidité de façon à construire la matrice de rigidité de la structure. Pour construire et assembler la matrice de rigidité de la structure il faut :

- calculer la somme des $[K_a^i]$
- connaître les différents noeuds j intervenant dans le noeud i et calculer alors le terme $[L_a^j]$ correspondant.

On peut également procéder de la façon suivante en calculant pour chacune des barres les sous-matrices $[K_a^i]$, $[K_a^j]$, $[L_a^i]$, $[L_a^j]$ et ensuite :

- additionner les termes $[K_a^i]$ et $[K_a^j]$ à ceux déjà existants.
- placer les termes $[L_a^i]$ et $[L_a^j]$ à leur position respective.

Exemple



Barre I $[K_I] = \begin{bmatrix} K_1^I & L_3^I \\ L_1^I & K_3^I \end{bmatrix}$

Barre II $[K_{II}] = \begin{bmatrix} K_3^{II} & L_4^{II} \\ L_3^{II} & K_4^{II} \end{bmatrix}$

Barre III $[K_{III}] = \begin{bmatrix} K_2^{III} & L_4^{III} \\ L_2^{III} & K_4^{III} \end{bmatrix}$

$[K_{portique}] = \sum_{\alpha=I}^{III} [K_{\alpha}]$

$$[K_{portique}] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u & v & \theta \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} & & & \\ \begin{matrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} \begin{matrix} u & v & \theta \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} K_{12} \\ K_{22} \\ K_{32} \\ K_{42} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} \begin{matrix} u & v & \theta \\ 3 & 3 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} K_{13} \\ K_{23} \\ K_{33} \\ K_{43} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} \begin{matrix} u & v & \theta \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} K_{14} \\ K_{24} \\ K_{34} \\ K_{44} \end{matrix} \end{matrix}$$

Avec :

$$\begin{array}{llll} K_{11} = K_1^I & K_{12} = 0 & K_{13} = L_3^I & K_{14} = 0 \\ K_{21} = 0 & K_{22} = K_2^{III} & K_{23} = 0 & K_{24} = L_4^{III} \\ K_{31} = L_1^I & K_{32} = 0 & K_{33} = K_3^I + K_3^{II} & K_{34} = L_4^{II} \\ K_{41} = 0 & K_{42} = L_2^{III} & K_{43} = L_3^{II} & K_{44} = K_4^{II} + K_4^{III} \end{array}$$

d'où :

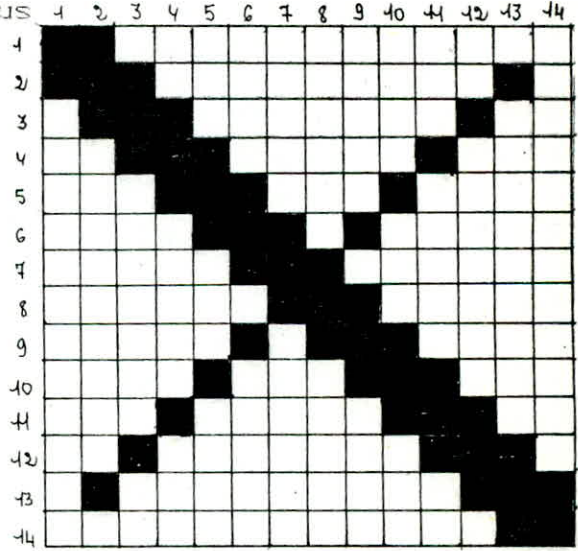
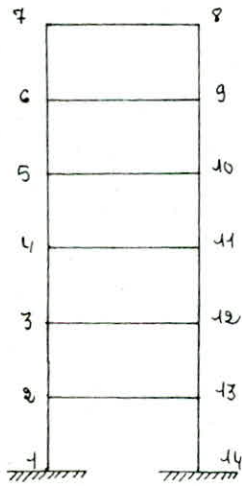
$$[K_{\text{portique}}] = \begin{bmatrix} K_1^I & 0 & L_3^I & 0 \\ 0 & K_2^{III} & 0 & L_4^{III} \\ L_1^I & 0 & K_3^I + K_3^{II} & L_1^{II} \\ 0 & L_2^{III} & L_3^{II} & K_4^{II} + K_4^{III} \end{bmatrix}$$

Remarques

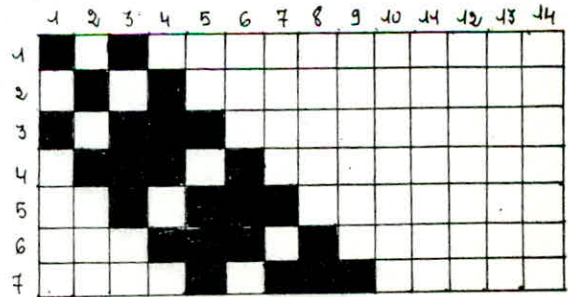
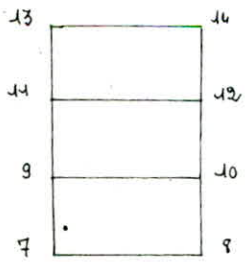
- a/ s'il n'y a pas de barres entre deux noeuds i et j $\Rightarrow k_{ij} = k_{ji}$
- b/ $k_{uu} = \sum_a k_u^l$
- c/ $i \neq j \quad K_{ij} = L_i^a \text{ (ou } L_j^a)$
- d/ influence de la numérotation des noeuds

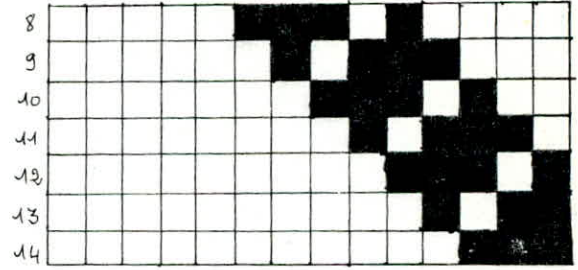
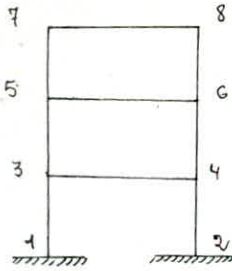
Il apparait de ce qui précède que la numérotation des noeuds et des éléments est arbitraire. Toutefois, les grands programmes de calcul de structure tiennent compte du fait que tous les noeuds ne sont pas reliés les uns aux autres : la matrice globale peut donc être une matrice bande et les gains en capacité du programme et de résolution peuvent être considérables.

Exemple : portique plan défini ci-dessous



Cette numérotation est mauvaise : les liaisons horizontales donnent des termes hors-diagonale. La numérotation ci-dessous est meilleure (c'est d'ailleurs la meilleure possible).





Les matrices $[K_a^i]$, $[K_a^j]$, $[L_a^i]$, $[L_a^j]$ calculées précédemment, seront par conséquent ajoutées à celles déjà existantes dans la matrice globale de la structure, en mettant cette dernière initialement à zéro, il suffira à chaque fois d'ajouter les termes calculés ceux déjà existant et ce qu'il s'agisse des matrices diagonales type $[K]$ ou extra-diagonales type $[L]$. Afin de simplifier l'écriture, on utilisera deux sous-programmes. L'un effectuera la multiplication de deux matrices 3×3 ; l'autre fera l'addition dans la matrice de rigidité globale de la structure (AK) de la matrice 3×3 .

Propriétés

a/ La matrice $[K_{\text{portique}}]$ établie précédemment est symétrique. Cette propriété permet également des économies importantes pour le stockage et la résolution du système d'équations.

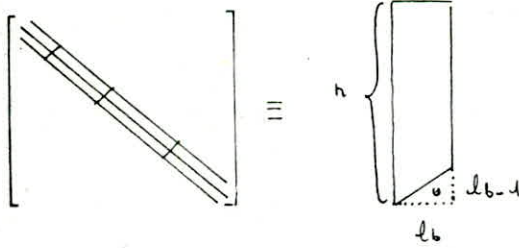
b/ La structure de bande de la matrice $[K]$ est une caractéristique importante, elle permet des économies tant au niveau du stockage de la matrice que dans la résolution du système d'équation final. Bien que le nombre de termes non nuls de $[K]$ reste constant, la largeur de bande peut varier considérablement avec l'ordre de numérotation des noeuds. Cette notion de largeur de bande maximale est facilement interpretable au niveau du calcul des structures. En effet, sa valeur l_b correspond au maximum de la différence entre les numéros de deux noeuds reliés par une barre, puisque ceci est lié à la présence d'une matrice extra-diagonale non nulle.

$l_b = \text{MAX}_a |j-i| + 1$ i et j : noeuds de la barre a
 pour avoir le nombre d'éléments de la bande, on multipliera l_b par 3 (sous-matrice 3×3).

c/ Vu l'aspect bande et la symétrie de la matrice de rigidité

[K], le stockage de la moitié de la bande nous permettra un gain considérable dans la mémoire et un temps de résolution plus court. Nous allons stocker la matrice demi-bande redressée dans une table

V_K



$$V_{K ij} = K l m \begin{cases} l = i \\ m = j+i-1 \\ m \geq l \end{cases}$$

il faut stocker $n \times l_b$ éléments, incluant $l_b(l_b-1)/2$ valeurs nulles initiales.

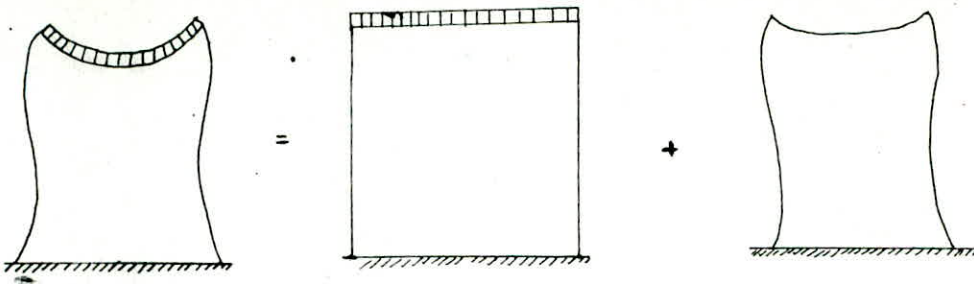
d/ Cette matrice de rigidité est définie positive, c'est à dire que toutes ses valeurs sont réelles et positives, ce que nous admettrons cette propriété provenant du fait que cette matrice a été écrite à partir de fonction d'énergie.

2.26. METHODE DE CALCUL PAR LES MATRICES DE RIGIDITE

La méthode de CASTIGLIANO consiste en fait à écrire autant d'équations qu'il y a d'inconnues hyperstatiques, puis résoudre ce système. Le gros défaut au niveau informatique est que cette méthode nécessite de nombreux calculs intégrales. Or ces dernières présentent un risque d'erreur certain et un calcul informatique long parfois relativement imprécis. Pour ces raisons la méthode énergétique de CASTIGLIANO n'est employée que pour des systèmes simples ou des cas particuliers. Néanmoins cette méthode énergétique présente un intérêt non négligeable dont nous tirerons parti dans le calcul par les matrices de rigidité. La méthode de calcul par les matrices de rigidité se base sur le principe simple de la superposition des états d'équilibre qui sont les suivants :
Chargement sans déformation + déformation sans chargements.

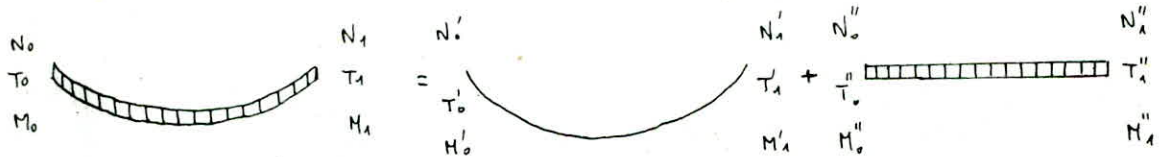
Ainsi pour chaque barre de la structure nous pourrions décomposer les efforts réels en la somme de :

- efforts dus aux changements en considérant la barre bi-encastree et chargée.
- efforts dus aux déplacements imposés réels sur cette barre.



superposition des états d'équilibre

Les efforts (N_0'' , T_0'' , M_0'' , N_1'' , T_1'' , M_1'') peuvent être facilement calculés par une méthode énergétique simple telle Castigliano qui s'applique ici parfaitement. En effet ces efforts correspondent à ceux appliqués à la poutre sous chargement pour que ces deux extrémités restent fixes (chargement sans déplacement). Il faut donc calculer cette poutre en la supposant bi-encastée et en appliquant les charges réelles.



Superposition des efforts dans une barre

Les efforts (N_0' , T_0' , M_0' , N_1' , T_1' , M_1') correspondent eux à des efforts dus à des déplacements imposés des extrémités de la poutre. Compte tenu des relations explicitées précédemment, il faut et il suffit donc de connaître ces déplacements pour pouvoir calculer les efforts correspondants.

Le but de la méthode de calcul par les matrices de rigidité sera donc de calculer les déplacements des noeuds et en appliquant le principe de superposition des états d'équilibre évoqué plus haut, nous en déduirons alors les efforts dans les barres et les réactions d'appuis.

Afin de déterminer nos déplacements, nous allons tout simplement écrire l'équilibre de chaque noeud. Plaçons nous en un noeud i , au quel arrive un certain nombre de barre.

Soit $[F_o^i] = \begin{bmatrix} H_o^i \\ V_o^i \\ C_o^i \end{bmatrix}$ les forces extérieures appliquées sur ce noeud

et $[F_a^i]$ les forces provenant des barres.

L'équilibre de ce noeud s'écrit alors (principe de l'action et de la réaction) :

$$\begin{cases} H_o^i = \sum_a H_a^i \\ V_o^i = \sum_a V_a^i \\ C_o^i = \sum_a C_a^i \end{cases}$$

soit encore : $[F_o^i] = \sum_a [F_a^i]$

Compte tenu des définitions prises plus haut nous pourrons exprimer $[F_a^i]$ en fonction de $[f_a^i]$:

$[F_a^i] = [R_a]^T [f_a^i]$ et en décomposant $[f_a^i]$ suivant le principe évoqué de la superposition des états d'équilibre en un terme $[f']$ dû aux déplacements seuls et en terme $[f'']$ dû aux charges seules nous obtenons alors :

$$[f_a^i] = [f_a^i] + [f_a^i]$$

Enfin compte tenu de sa définition nous pourrons exprimer $[f']$ en fonction des déplacements des extrémités de la barre soit :

$$[f_a^i] = [k_a^i] [u_a^i] + [l_a^j] [u_a^j]$$

et en exprimant les déplacements $[u]$ en fonction du repère global nous obtenons :

$$[u_a^i] = [R_a] [u_a^i]$$

d'où : $[f_a^i] = [k_a^i] [R_a] [u_a^i] + [l_a^j] [R_a] [u_a^j]$

L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$[F_o^i] = \sum_a ([R_a]^T [k_a^i] [R_a] [u_a^i] + [R_a]^T [l_a^j] [R_a] [u_a^j] + [R_a]^T [f_a^i])$$

A ce niveau, il faut constater que les vecteurs $[u_a^i]$ représentant les déplacements du noeud i sont identiques quelque soit la barre concernée. Nous les noterons désormais $[U^i]$. Ainsi nous pouvons

formuler notre équation de la façon suivante :

$$[F_o^i] = \sum_a [R_a]^T [f_a^{''i}] + \left(\sum_a [R_a]^T [k_a^i] [R_a] \right) [U^i] + \sum_a \left([R_a]^T [l_a^j] [R_a] \right) [U^j]$$

ce que nous pouvons exprimer encore en notant :

$$[F^i] = [F_o^i] - \sum_a [R_a]^T [f_a^{''i}] \\ = \left(\sum_a [R_a]^T [k_a^i] [R_a] \right) [U^i] + \sum_a \left([R_a]^T [l_a^j] [R_a] \right) [U^j]$$

je une relation du type : $[K] [U] = [F]$

où $[F]$ représente le vecteur force et $[U]$ représente les déplacements des noeuds, $[K]$ étant appelée la matrice de rigidité globale de la structure. Si n est nombre de noeuds de la structure nous aurons un système de $3n$ équations. De plus en chaque noeud nous connaissons soit les déplacements (dans le cas des noeuds appuis) soit le vecteur $[F_o]$ dans le cas où le noeud n'est pas appui (le plus souvent nul, sauf dans le cas où des forces extérieures sont directement appliquées au noeud, ces forces étant connues de toute façon). Dans tous les cas le vecteur $[f^{''}]$ est parfaitement déterminé. Ainsi pour les noeuds appuis, nous connaissons les déplacements (nuls le plus souvent) et nous chercherons le vecteur $[F_o]$; et pour les noeuds non appuis, nous chercherons les déplacements. En chaque noeud nous avons donc toujours 3 inconnues (déplacement ou réaction d'appui). Le système d'équations comportera donc $3n$ inconnues et ce système de $3n$ équations à $3n$ inconnues admet une solution unique que nous chercherons. La méthode de calcul par les matrices de rigidité consistera donc à calculer la matrice de rigidité $[K]$ à partir de relations évoquées précédemment, calculer le terme $[f^{''}]$ et dans la mesure du possible le terme $[F_o]$, puis on ne retenant que les inconnues relatives aux déplacements déterminer le vecteur $[U]$ tel que $[K] [U] = [F]$

A partir de ces déplacements $[U]$ et en reprenant les efforts $[f^{''}]$ on déduira alors les efforts réels $[f]$ dans les barres, ainsi que les réactions des appuis.

2.28. CALCUL DU SECOND MEMBRE

Le second membre de notre équation c'est le vecteur $[F]$ qui se décompose en fait en deux parties qui sont :

- un terme dû aux forces appliquées directement aux noeuds
- un terme dû aux forces appliquées sur les barres

Nous avons donc vu que nous pouvions calculer notre matrice $[K]$ du

système d'équation :

$$[F] = [K] [U]$$

Dans cette partie nous allons déterminer le vecteur $[F]$ qui représente l'ensemble des forces. Lors de l'équation d'équilibre des noeuds, nous avons vu que $[F^l]$ se décomposait sous la forme :

$$[F^l] = [F_o^l] - \sum_a [F_a'^l]$$

- le terme $[F_o^l]$ représentant les forces extérieures appliquées au noeud : ces forces sont soit des actions ponctuelles connues exercées sur des noeuds non appuyés, soit les réactions d'appuis. Ainsi, le terme $[F_o^l]$ est connu pour les noeuds non appuyés, et inconnu pour les noeuds appuyés.

- le terme $[F_a'^l] = [R_a]^T [F_a''^l]$ qui correspond aux forces résultant des charges appliquées sur les barres en considérant celles - ci sans déplacements ; ce terme est toujours connu. On voit donc que le terme $[F^l]$ est parfaitement déterminé pour les noeuds non appuyés, ie pour tous les noeuds dont on cherche le déplacement. Pour les noeuds appuyés, ou justement l'un des buts du problème est de déterminer ces réactions d'appuis. En ce qui concerne le terme en $[F_a''^l]$ il est donc nécessaire pour chaque barre de calculer les efforts résultant des charges qui lui sont directement appliquées, en la considérant isolée de la structure et encastrée à ses deux extrémités. Donc les charges peuvent avoir "quatre" possibilités de direction :

- pour les charges sur les noeuds :

- * direction X (force horizontale de nature sismique) \longrightarrow IDIR = 1
- * direction Y (force verticale dû au poids du poteau) \longrightarrow IDIR = 2
- * couple (moment concentré au noeud, dû aux consoles éventuelles) \longrightarrow IDIR = 3

- pour les charges sur les barres :

- * forces uniformément réparties perpendiculaires à la barre \longrightarrow IDIR = 5

Dans le cas des charges sur les barres, afin de simplifier les calculs, nous introduisons directement la formule donnant les efforts à appliquer sur les extrémités de la barre pour éviter tout déplacement en rotation.

Ainsi pour la force uniforme perpendiculaire à la barre on

trouve: $T_o = - f l/2$ et $M_o = - f l^2/12$
 $T_1 = - f l/2$ et $M_1 = f l^2/12$

2. 29. CONDITIONS AUX LIMITES

Arrivé à ce stade des calculs, où nous connaissons la matrice $[K]$ complète et le vecteur $[F]$, et avant de passer à la résolution du problème, nous allons tenir compte des conditions aux limites, ce qui signifie prendre en considération les appuis. Le vecteur force est complètement déterminé pour tous les noeuds non appuyés et encore imparfaitement connu pour les noeuds appuyés. Néanmoins, le but de notre formulation étant de rechercher les déplacements des noeuds, nous pourrions donc essayer de supprimer les équations correspondant aux noeuds qui ont des déplacements connus (dans notre cas ce sont des déplacements nuls).

1^{ère} Méthode

On divisera notre système d'équation en deux sous-systèmes :

- l'un correspondant aux noeuds non appuyés
- l'autre correspondant aux noeuds appuyés

Au niveau de la matrice, ceci peut se traduire par une permutation des lignes et des colonnes. Nous pouvons donc mettre notre système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} K_1 & \dots & K_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{21} & \dots & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$[U_1]$: vecteur déplacement de tous les noeuds non appuyés inconnus

$[U_2]$: vecteur déplacement de tous les noeuds appuyés, connus
($[U_2]=0$)

$[F_1]$: vecteur force pour les noeuds non appuyés ; ce vecteur est parfaitement déterminé.

$[F_2]$: vecteur force pour les noeuds appuyés ; ce vecteur n'étant pas complètement connu.

On se ramène donc à une résolution en deux temps :

- Tout d'abord détermination de $[U_1]$ à partir de l'équation :

$$[K_1] [U_1] = [F_1]$$

- connaissant les déplacements $[U_1]$, nous déduisons $[F_2]$ par :

$$[K_2] [U_1] = [F_2]$$

et à partir de $[F_2]$ nous pouvons retrouver les réactions d'appuis,

ie les termes $[F'_0]$ (les termes $[F'_a]$ dus aux forces sur les barres sont connus).

2^{eme} Méthode

Dans cette méthode, nous allons disposer d'un tableau qui nous permet de savoir si un noeud est un non appui, le but étant bien sûr d'éliminer la résolution des termes provenant des noeuds appuis. La première méthode envisagée précédemment étant relativement complexes au niveau informatique, pour cela nous choisirons la deuxième méthode qui conduit bien sûr au même résultat. Ceci consiste à conserver la disposition de la matrice tout en remplaçant les lignes et les colonnes correspondant aux noeuds appuis par des 0 en mettant toutefois un 1 pour le terme diagonale (afin d'éviter que la matrice ne soit singulière). De même on placera un 0 sur la ligne correspondante du vecteur force. Ainsi si u_k est l'inconnue du déplacement, nous aurons à résoudre sur cette ligne : $1 \times u_k = 0$ d'où $u_k = 0$, ce qui est bien le résultat espéré pour un appui. De plus le terme u_k n'interviendra dans aucune autre équation, compte tenu de la colonne de 0.

$$\begin{array}{c}
 \text{appui} \longrightarrow \\
 \left[\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & 0 & & & \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & & & \\
 & & & 0 & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc}
 & & & 0 \\
 \vdots & & & \\
 & 0 & & \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & & & \\
 & & &
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ 0 \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]
 \end{array}$$

[K] [F]
[K] [F]

complète
demi-bande

Cette manière de programmation a l'avantage ainsi, outre sa simplicité de ne pas bouleverser l'ordre de la matrice.

2.30. RESOLUTION DU PROBLEME

Nous avons à résoudre le système linéaire d'équations :

$$[K] [U] = [F]$$

A ce sujet on peut constater qu'il serait intéressant de connaître directement la matrice inverse de la matrice [K] (ie la matrice

$$k_{j1} u_1 + \sum_{i=2}^n k_{ji} u_i = f_j$$

nous obtenons :
$$\frac{k_{j1}}{k_{11}} \left[f_1 - \sum_{i=2}^n k_{1i} u_i \right] + \sum_{i=2}^n k_{ji} u_i = f_j$$

ou encore :
$$\sum_{i=2}^n \left(k_{ji} - \frac{k_{ji}}{k_{11}} k_{1i} \right) u_i = f_j - \frac{k_{1j}}{k_{11}} f_1$$

Cette équation étant valable par $j = 2$ jusqu'à n
on continuera ensuite pour les lignes 2, 3 jusqu'à $n-1$
où on obtiendra alors :

$k'_{nn} u_n = f'_n$ (le ' indique que les termes ont été modifiés par les calculs successifs) ce qui nous donnera un par simple dividende puis en reprenant l'équation $n-1$, ..., jusqu'à 1 nous déterminerons les valeurs u_i en utilisant la dernière équation de la ligne i

$$k'_{ii} u_i + \sum_{j=i+1}^n k'_{ij} u_j = f'_i$$

b/ METHODE DE CHOLESKY

Nous pouvons utiliser pour la résolution du système un algorithme plus efficace que la méthode de résolution de Gauss ; il s'agit de la décomposition de Cholesky, qui s'applique parfaitement aux matrices symétriques. Le principe de cet algorithme est de décomposer la matrice de rigidité globale de la structure [AK] en un produit d'une matrice triangulaire inférieure [Li], une matrice diagonale [D] et une matrice supérieure [Ls] soit donc :

$$[AK] = [Li] [D] [Ls]$$

de plus on a $[Li] = [Ls]^T$ et ces matrices triangulaires sont prises avec des "1" sur la diagonale.

L'algorithme de cette méthode est le suivant:

$$\begin{cases} a_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (a_{ki})^2 \\ a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki} \cdot a_{kj} \right] \end{cases}$$

$$[L_s]^T [D] [L_s] [X] = [F]$$

De plus $[L_s]$ étant une matrice triangulaire avec des "1" sur la diagonale alors $[L_s] [L_s]^T = [I]$

$[I]$: matrice identité

d'où on obtient :

$$[D] [L_s] [X] = [L_s]^T [F]$$

on calcule donc $[L_s]^T [F]$ et on ramène à résoudre un système triangulaire identique à celui de GAUSS, et que la précision est meilleure.

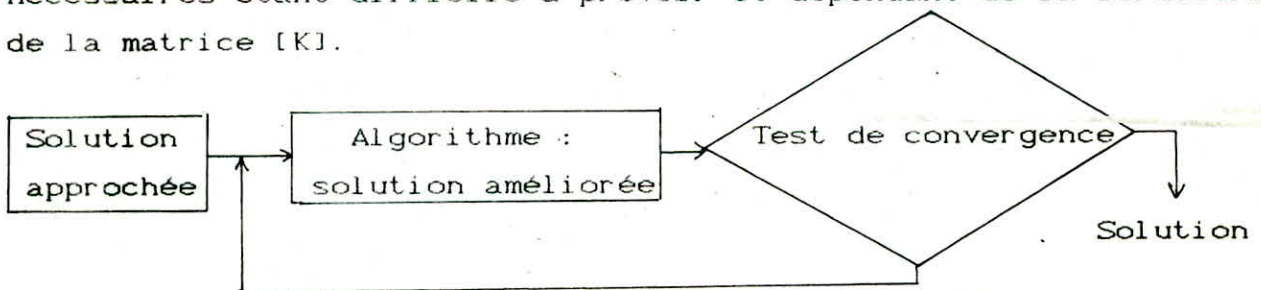
- D'autre part on peut procéder à la résolution en deux étapes:

- * décomposition de la matrice de rigidité
- * résolution du système

La première étape ne fait jamais intervenir le second membre de l'équation. Ainsi, la décomposition peut - elle être faite une fois pour toute et la résolution est appliquée successivement aux différents cas de charges (G, SU, SI).

2. 30. 2. METHODES ITERATIVES

Ces méthodes conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée, le nombre d'itérations nécessaires étant difficile à prévoir et dépendant de la structure de la matrice $[K]$.



a/ METHODE DE GAUSS-SEIDEL

A partir des valeurs approximatives initiales des inconnues :

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

on obtient d'autres valeurs approximatives successives :

$$(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(k)}) \text{ jusqu'à la } k^{\text{ieme}} \text{ itération.}$$

d'après l'algorithme suivant :

$$1- x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

$i = 1, n$

2- Arrêter si $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon_1$

ou $\underbrace{|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| / |x_i^{(k)}|}_{\varepsilon_2} < \varepsilon_2$

$K = 1, 2, \dots, K_{MAX}$

$\varepsilon_2 = 10^{-2}$

$\varepsilon_1 = 10^{-7}$

Dans le cas de notre étude, nous avons utilisé la méthode de GAUSS-SEIDEL, car elle est simple à programmer, et demande moins d'espace en mémoire que les méthodes directes. Cette méthode nous permet aussi bien que celle de CHOLESKY de faire la décomposition de la matrice [K] une seule fois. La résolution se fera par la suite pour les trois cas de chargement G, SU, SI.

Remarque : Dans notre cas la matrice utilisée est la matrice demi-bande.

2. 31. CALCUL DES EFFORTS ET DES REACTIONS D'APPUIS

2. 31. 1. CALCUL DES EFFORTS

Le calcul des efforts dans les barres se base comme a été montré précédemment sur le principe de superposition de deux états d'équilibre.

- charges sur la barre sans déplacement des extrémités
- déplacement des extrémités sans charges sur la barre.

qu'on peut formuler sous la forme : $[f_a] = [f'_a] + [f''_a]$

et ceci pour les deux extrémités "i" et "j" de notre barre.

$[f''_a]$: charges sur la barre sans déplacement des extrémités

$[f'_a]$: déplacement des extrémités sans charge sur la barre.



A ce stade du calcul nous connaissons également les déplacements des noeuds i et j , que nous pouvons exprimer dans le repère local de la barre.

$$[u_a^i] = [R_a] [U^i]$$

$$[u_a^j] = [R_a] [U^j]$$

Ainsi nous avons alors directement le terme $[f_a^i]$ qui nous est donné par la relation :

$$[f_a^i] = [k_a^i] [R_a] [U^i] + [l_a^j] [R_a] [U^j]$$

et de façon similaire pour l'autre extrémité.

Ainsi nous pouvons alors calculer complètement les efforts dans les barres aux deux extrémités (par exemple en i)

$$[f_a^i] = [k_a^i] [R_a] [U^i] + [l_a^j] [R_a] [U^j] + [f_a^{\prime\prime i}]$$

le calcul des efforts dans les barres est donc relativement simple une fois que l'on connaît les déplacements des noeuds. Enfin nous constatons qu'il est indispensable pour obtenir les efforts dans les barres de conserver intact le terme $[f_a^{\prime\prime}]$ calculé auparavant lors du calcul du second membre $[F]$.

2. 31. 2. CALCUL DES REACTIONS D'APPUI

Une fois que les efforts dans les barres ont été complètement calculés, le calcul des réactions d'appuis consiste en fait à réécrire l'équilibre du noeud (principe de l'action et de la réaction)

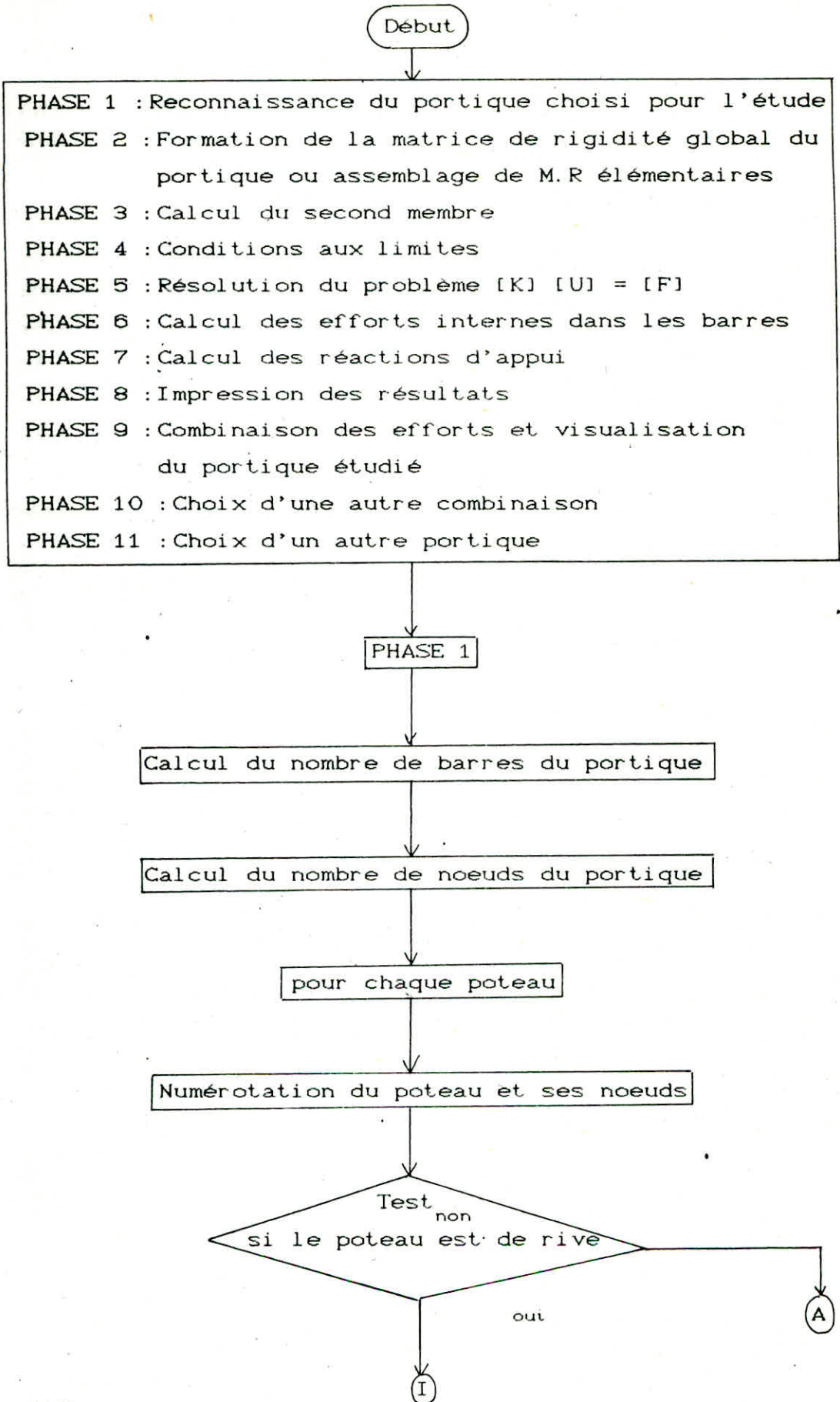
$$[F_o^i] = \sum_a [R_a] [f_a^i]$$

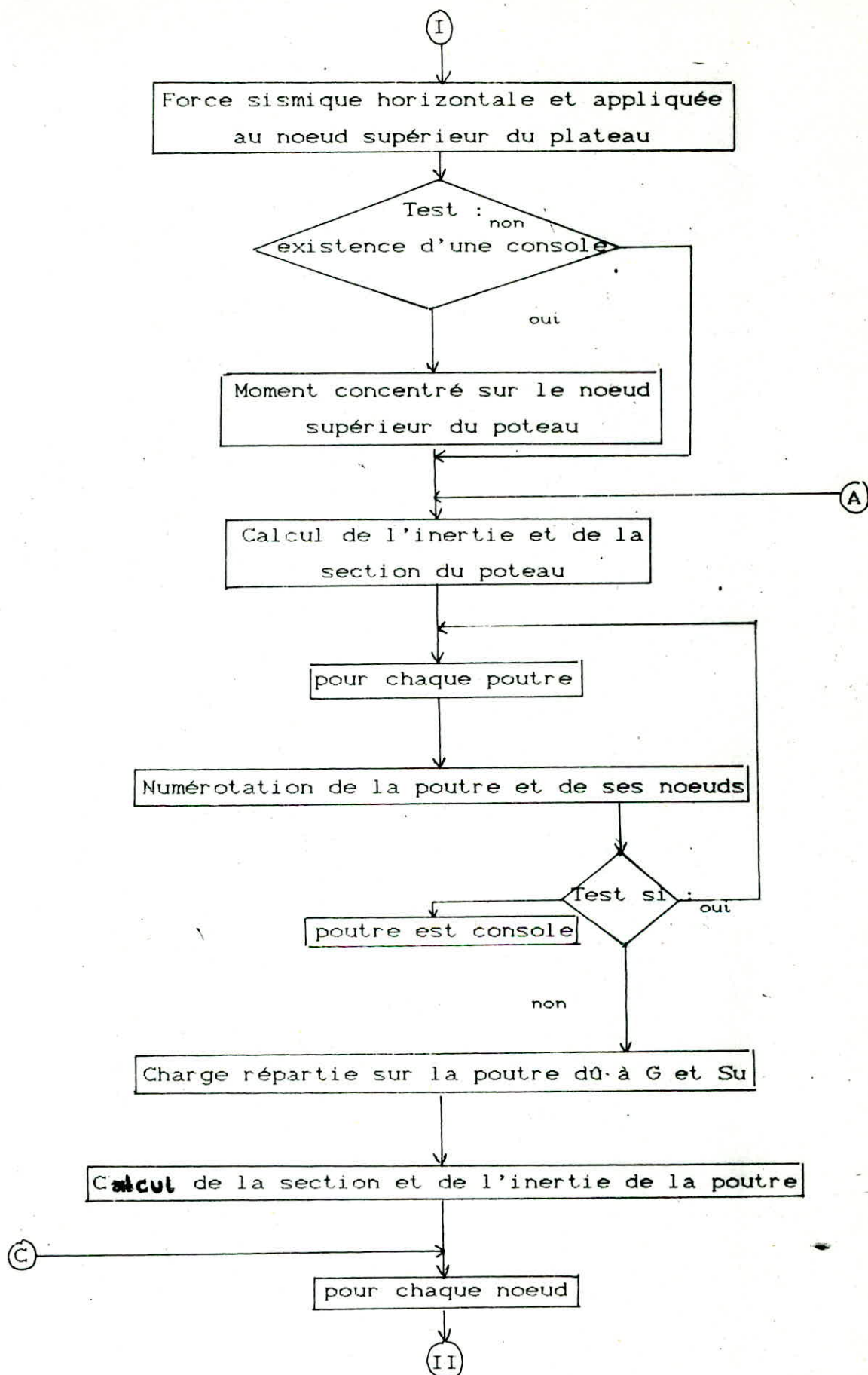
Ainsi nous pouvons retrouver nos réactions d'appuis cherchées en écrivant cette simple égalité en chaque noeud. D'autre part pour les noeuds nonappuis, nous retrouverons les forces qui leur étaient -directement appliquées. Cette méthode, outre sa

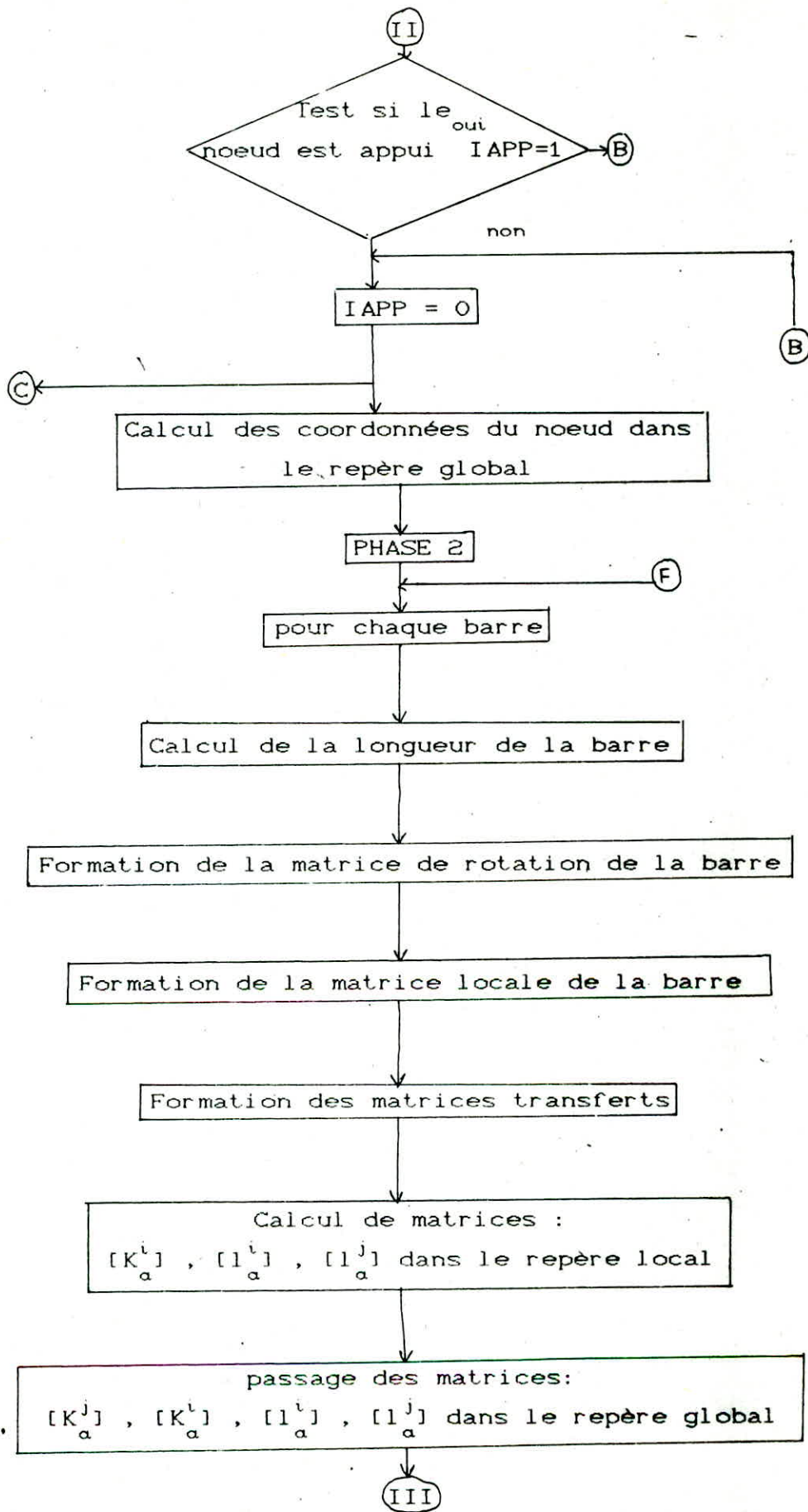
simplicité présente les avantages suivants :

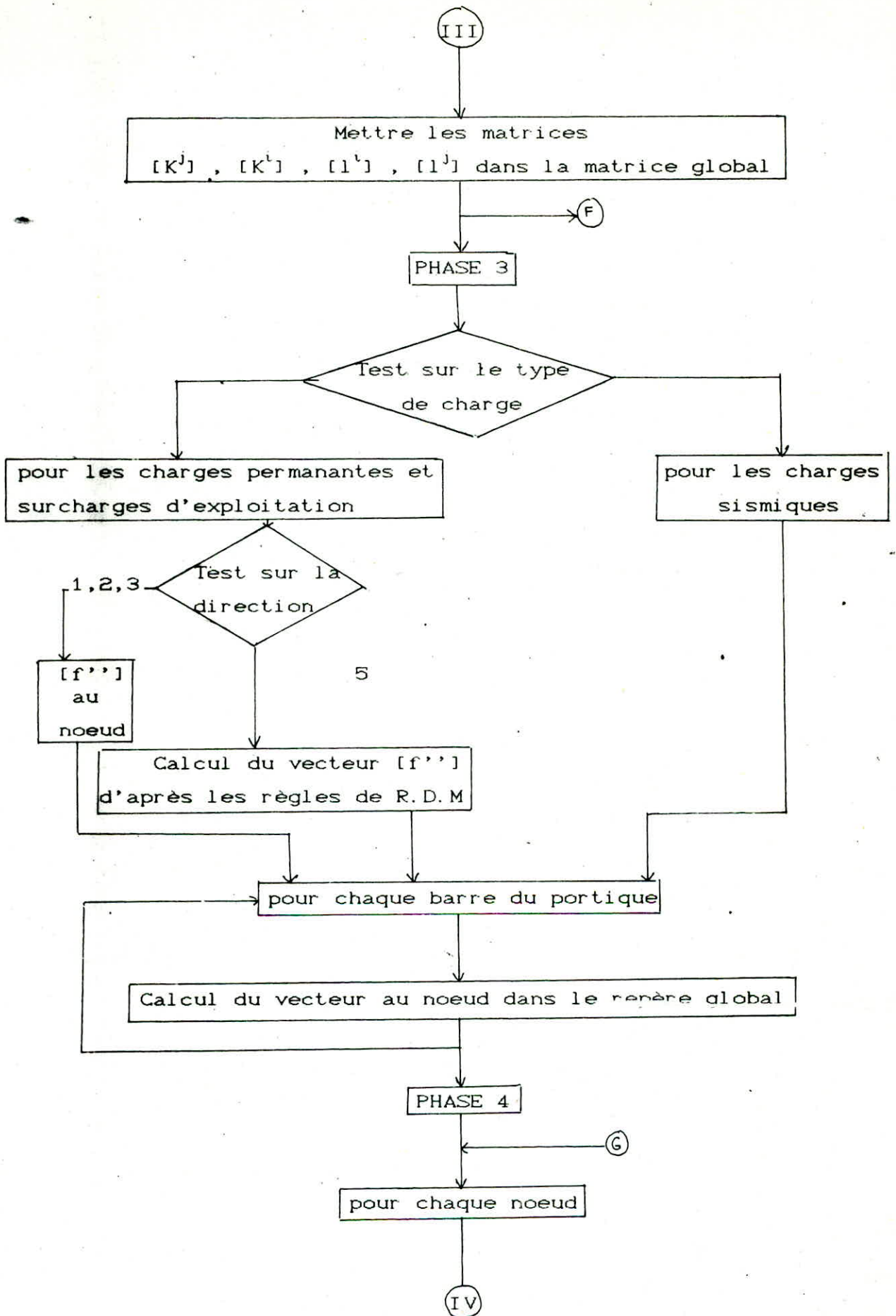
- le terme en $[f'']$ peut ne pas être conservé une fois le terme $[f]$ calculé.

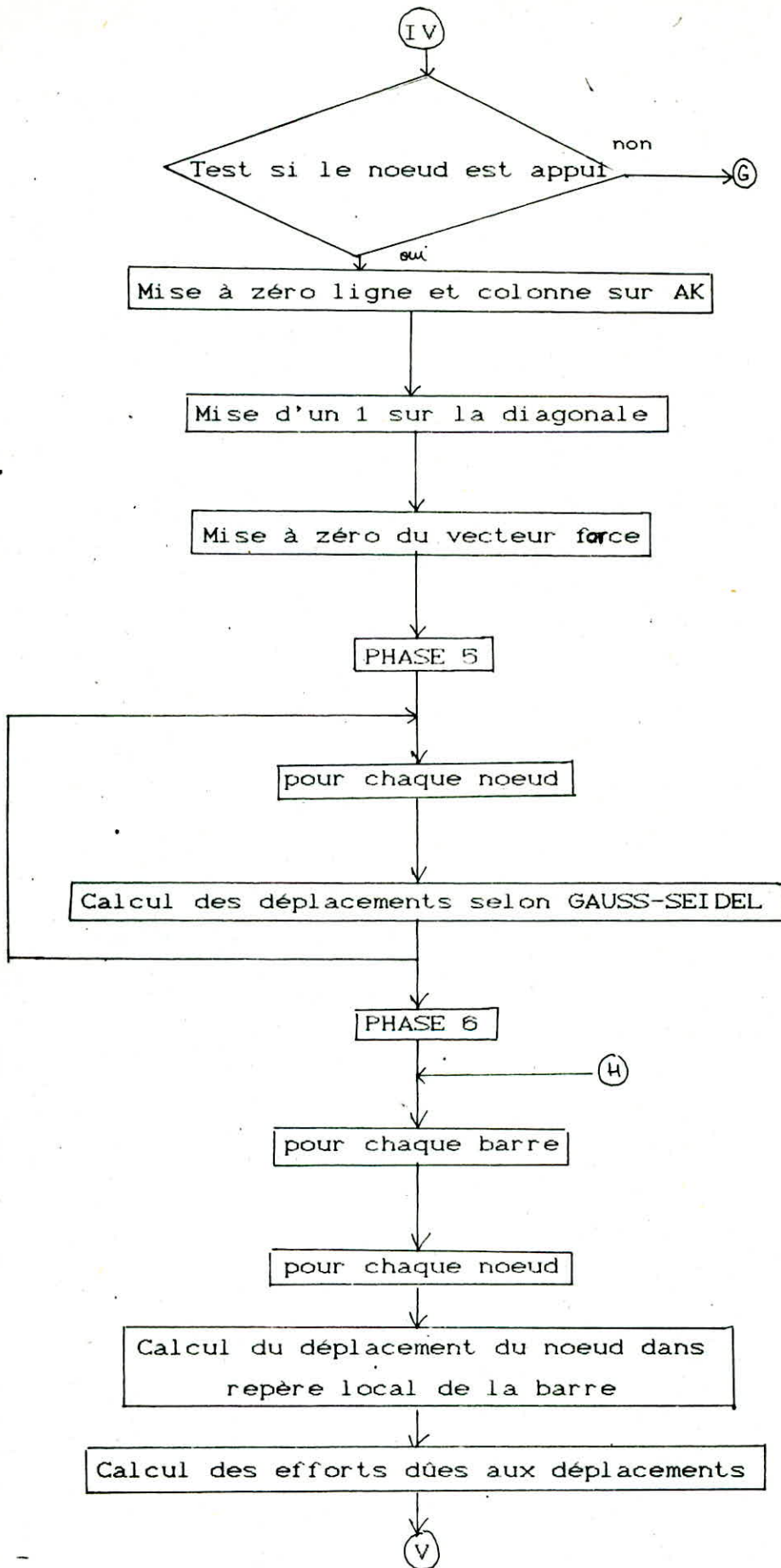
- pour les noeuds non appuis, cela permet de vérifier par un contrôle d'équilibre que le vecteur $[F_0^i]$ représente bien uniquement les forces directement appliquées au noeud et dans le cas le plus courant, où ces forces sont nulles, le calcul doit nous former un vecteur nul. Ceci n'est jamais le cas car il reste toujours des petits résidus, compte tenu des erreurs d'arrondi inévitables et cela permet ainsi de juger de l'importance de l'erreur et de la précision du calcul. Ainsi cette méthode nous permet d'apporter une bonne vérification à tous les calculs menés depuis l'assemblage de la matrice, jusqu'au calcul des déplacements, vérification d'autant plus précieuse qu'il est souvent difficile dans les structures complexes d'évaluer la nature des résultats et que cette information nous fournit une indication intéressante sur la précision de notre calcul.

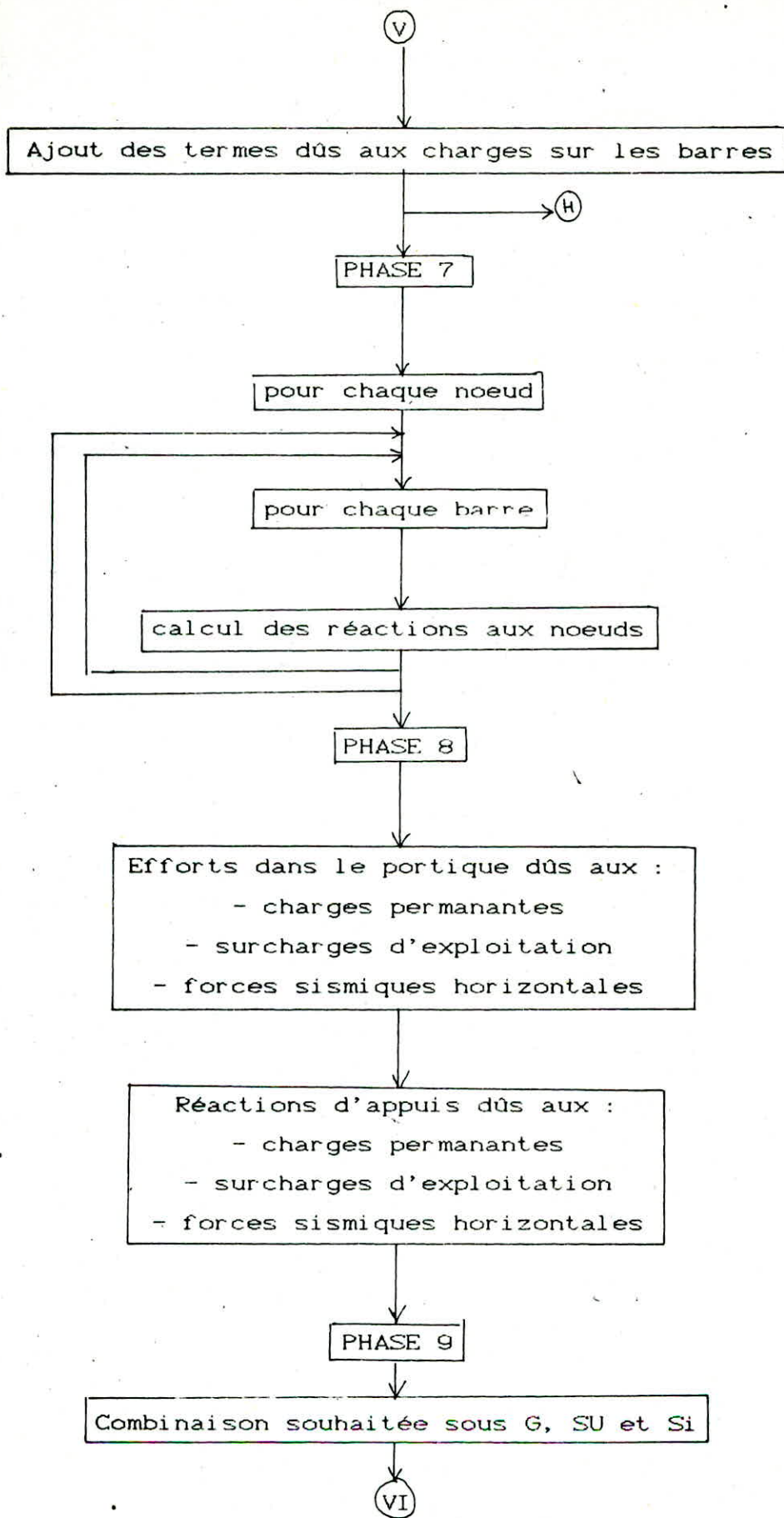


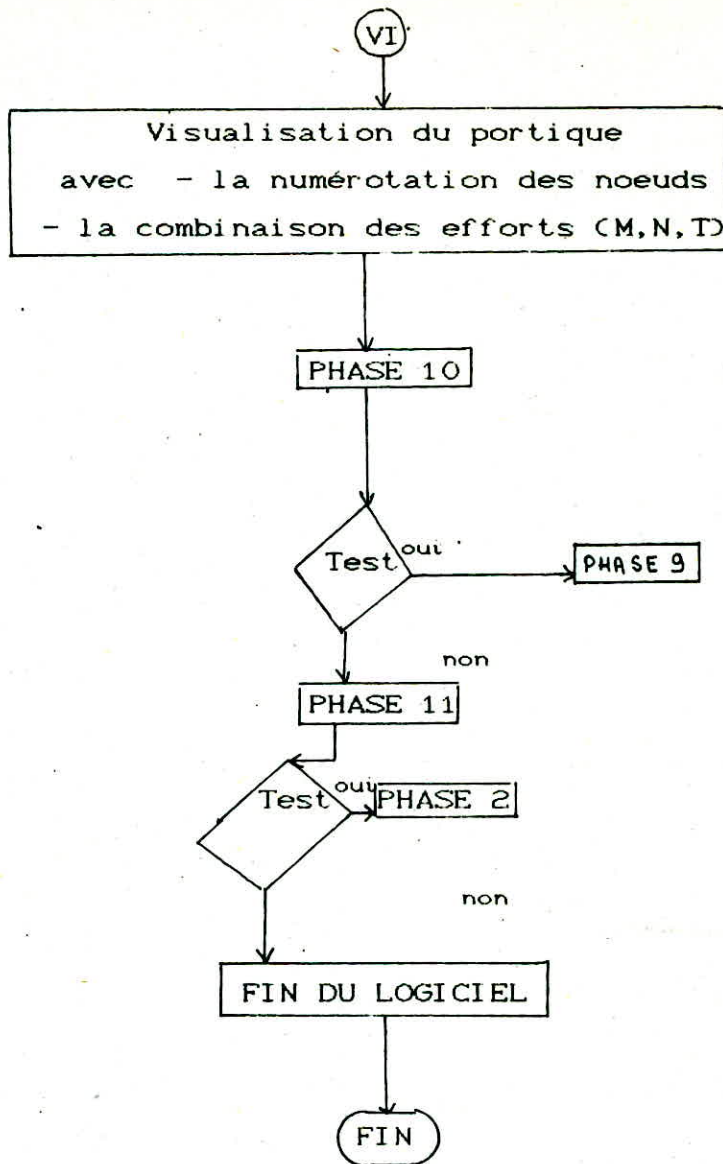












~ ~ ~ CHAPITRE 3 ~ ~ ~

INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT

3.1. INTRODUCTION

Jusqu'ici nous avons toujours négligé l'influence de l'effort tranchant sur la déformation $U = U_N + U_M + U_T + U_C$

$$U = \frac{1}{2} \int_L \frac{N^2}{ES} dl + \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EI} dl + \frac{1}{2} \int_L \frac{T^2}{GS'} dl + \frac{1}{2} \int_L \frac{C^2}{GI} dl$$

G : module de cisaillement $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

S' : section cisailée (section réduite)

$$S' = \frac{I^2}{\int_S (S_t^2/b^2) ds} \quad (\text{pour une section rectangulaire } S' = 5S/6)$$

En effet nous avons retenu uniquement le potentiel U dû à la contrainte normale. L'effet de l'effort tranchant est négligeable pour les éléments d'élanements $\lambda \geq 5$ ie dans le cas des poutres et poteaux courants ; pour les éléments d'élanements réduits tels que les poteaux courts et les voiles, l'influence de l'effort tranchant T devient très importante et ne peut pas être négligée.

$$\text{d'où } U = U_N + U_t = \frac{1}{2} \left[\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS'} \right]$$

3.2. FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE LOCALE

Si nous reprenons l'étude de la poutre bi-encastree soumise à des déplacements imposés nous aurons :

$$W = W_n + W_t = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} \right) dl + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GS'} dl$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{dW}{dT_1} = U_{1N} \quad (\text{dû à la contrainte normale seule}) \\ v_1 = \frac{dW_n}{dT_1} + \frac{dW_t}{dT_1} = v_{1n} + \frac{T_1}{G} \int_0^L \frac{dl}{S'} \\ \varphi_1 = \frac{dW}{dM_1} = \varphi_{1n} \end{array} \right.$$

Nous constatons donc que le système à résoudre est modifié par la présence du terme $T_1 L / GS'$ dans l'expression de v_1 ie :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{N_1 L}{ES} \\ v_1 = T_1 \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{GS'} \right) + M_1 \frac{L^2}{2EI} \\ \varphi_1 = T_1 \frac{L^2}{2EI} + M_1 \frac{L}{EI} \end{array} \right.$$

en posant $D = \frac{12 EI}{GS' L^2}$, nous déduisons :

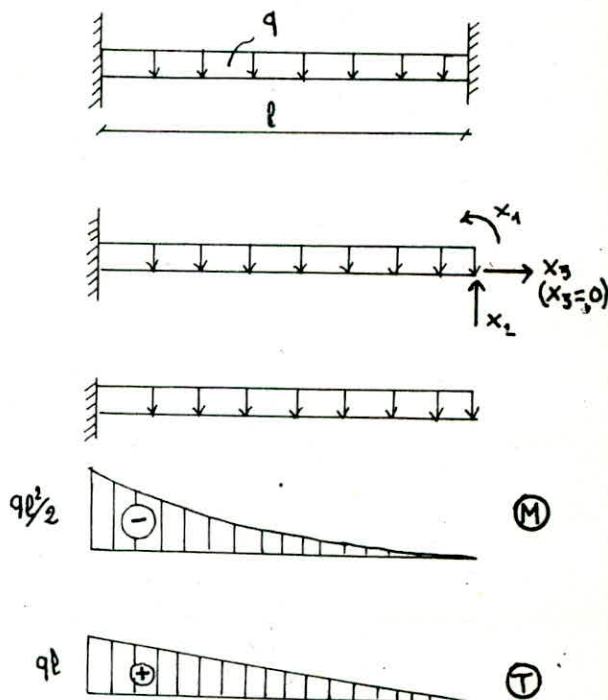
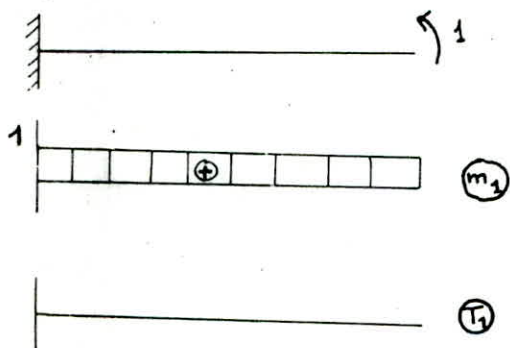
$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{ES}{L} u_1 \\ T_1 = \frac{12 EI}{L^3 (1+D)} v_1 - \frac{6 EI}{L^2 (1+D)} \varphi_1 \\ M_1 = - \frac{6 EI}{L^2 (1+D)} v_1 + \frac{EI (4+D)}{L^2 (1+D)} \varphi_1 \end{array} \right.$$

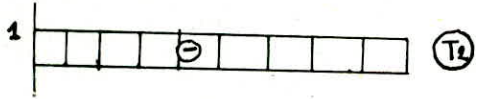
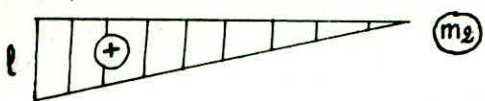
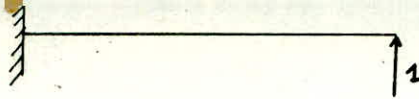
qu'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c} N_1 \\ T \\ M_1 \end{array} \right| = \frac{E S}{L} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\
 \\
 \left| \begin{array}{c} N_1 \\ T \\ M_1 \end{array} \right| = \begin{array}{c} 0 \\ \frac{12 EI}{L^3 (1+D)} \\ -\frac{6 EI}{L^2 (1+D)} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{6 EI}{L^2 (1+D)} \\ \frac{EI (4+D)}{L^2 (1+D)} \end{array} \left| \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{array} \right|
 \end{array}$$

On peut donc, voir que la matrice de rigidité locale sera sensiblement modifiée par la prise en compte de l'effort tranchant, les modifications étant facilement intégrables au programme compte tenu de la formulation trouvée le sous programme de formation de la matrice de rigidité locale d'une barre sera donc modifié, le module d'assemblage qui calcule les sous-matrices $[l_a^i]$, $[l_a^j]$. $[K_a^i]$ ne sera pas affecté, puisque les transformations permettant de passer de la sous-matrice inférieure droite $[K_a^j]$ à ces autres matrices, sont de nature géométrique uniquement, et non énergétique. La prise en compte des conditions aux limites ne sera pas modifiée non plus.

3.3. CALCUL DU SECOND MEMBRE





$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = -U_{10} \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = -U_{20} \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} + 0 = \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{6} \cdot 2 \times \frac{l^3}{EI} + \frac{1}{GS'} = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EI} + \frac{1}{GS'}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{EI} + 0 = \frac{1}{2EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

$$U_{10} = - \frac{1}{3} \frac{q l^2}{2} \frac{1}{EI} = - \frac{q l^3}{6 EI}$$

$$U_{20} = - \frac{1}{4} \frac{q l^2}{2} \frac{1}{EI} - \frac{1}{2} q l \frac{1}{GS'} = - \frac{q l^4}{8 EI} - \frac{1}{2} \frac{q l^2}{GS'}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{EI} X_1 + \frac{l^2}{2EI} X_2 = \frac{q l^3}{6 EI} \\ \frac{l^2}{2EI} X_1 + \left(\frac{l^3}{3EI} + \frac{1}{GS'} \right) X_2 = \left(\frac{l^4}{8 EI} + \frac{l^2}{2GS'} \right) \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à :

$$\begin{cases} X_2 = \frac{q l}{2} \\ X_1 = - \frac{q l^2}{12} \end{cases}$$

On remarque que le second membre n'a pas changé sous l'influence de l'effort tranchant.

3.4. CONCLUSION

La prise en compte de l'influence de l'effort tranchant revient à modifier uniquement le calcul des matrices locales, mais le programme n'est pas fondamentalement changé par ce complément de précision.

~~ CHAPITRE 4 ~~

EXPERIMENTATION NUMERIQUE PAR LE LOGICIEL
SUR L'INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT DANS LES
POTEAUX COURTS

L'expérimentation a été effectuée sur :

* Un portique ayant comme hauteur $h = 1,5$ m pour le niveau 1 (poteaux courts), un extrait des résultats observés pour les efforts (M, N, T), en donnant seulement la variation maximale et minimale de l'effort considéré, sont résumés ainsi :

$$G + Q + E \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad N_T = 1,059 \text{ N} \\ \text{Noeud 11} \quad N_T = 0,735 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 3} \quad T_T = 0,813 \text{ T} \\ \text{Noeud 8} \quad T_T = 1,441 \text{ T} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 7} \quad M_T = 0,814 \text{ M} \\ \text{Noeud 8} \quad M_T = 1,121 \text{ M} \end{array} \right.$$

$$G + Q + 1,2 E \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad N_T = 1,062 \text{ N} \\ \text{Noeud 11} \quad N_T = 0,749 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 3} \quad T_T = 1,236 \text{ T} \\ \text{Noeud 9} \quad T_T = 0,806 \text{ T} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 7} \quad M_T = 0,820 \text{ M} \\ \text{Noeud 8} \quad M_T = 1,218 \text{ M} \end{array} \right.$$

$$0,8 G + E \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad N_T = 1,065 \text{ N} \\ \text{Noeud 11} \quad N_T = 0,786 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 2} \quad T_T = 0,872 \text{ T} \\ \text{Noeud 7} \quad T_T = 1,247 \text{ T} \end{array} \right.$$

0,8 G - E

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 7} \quad M_T = 0,817 \text{ M} \\ \text{Noeud 8} \quad M_T = 3,250 \text{ M} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad N_T = 1,089 \text{ N} \\ \text{Noeud 11} \quad N_T = 0,279 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 7} \quad T_T = 0,786 \text{ T} \\ \text{Noeud 8} \quad T_T = 1,123 \text{ T} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 7} \quad M_T = 0,859 \text{ M} \\ \text{Noeud 10} \quad M_T = 1,086 \text{ M} \end{array} \right.$$

Variation de la charge permanente seule

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 9} \quad N_T = 0,600 \text{ N} \\ \text{Noeud 8} \quad N_T = 1,003 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 3} \quad T_T = 0,897 \text{ T} \\ \text{Noeud 8} \quad T_T = 1,050 \text{ T} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 8} \quad M_T = 1,019 \text{ M} \\ \text{Noeud 4} \quad M_T = 0,866 \text{ M} \end{array} \right.$$

Variation de la surcharge d'exploitation seule

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 9} \quad N_T = 0,583 \text{ N} \\ \text{Noeud 8} \quad N_T = 1,037 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 2} \quad T_T = 0,894 \text{ T} \\ \text{Noeud 7} \quad T_T = 1,200 \text{ T} \end{array} \right.$$

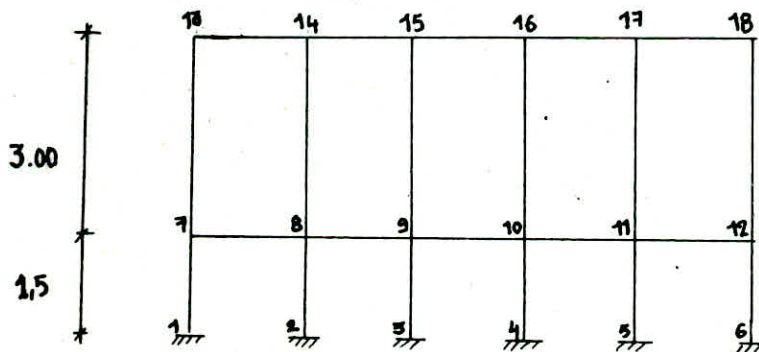
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 1} \quad M_T = 0,857 \text{ M} \\ \text{Noeud 14} \quad M_T = 1,188 \text{ M} \end{array} \right.$$

Variation de la charge sismique seule

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 9} \quad N_T = 0,333 \text{ N} \\ \text{Noeud 7} \quad N_T = 1,015 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 9} \quad T_T = 1,333 \text{ T} \\ \text{Noeud 14} \quad T_T = 0,333 \text{ T} \end{array} \right.$$

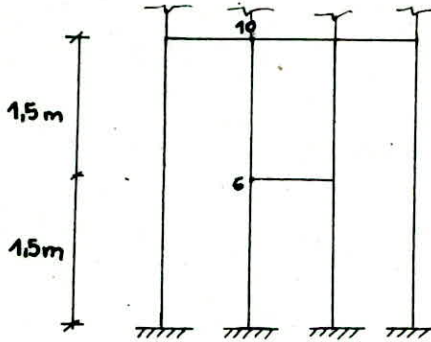
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 14} \quad M_T = 0,455 \text{ M} \\ \text{Noeud 10} \quad M_T = 1,800 \text{ N} \end{array} \right.$$



D'après les résultats obtenus, l'influence de l'effort tranchant ne peut être négligé ; la variation engendrée est :

sécuritaire dans certains cas, contrairement à cela elle peut mettre en cause la sécurité de la structure. Cependant, pour concrétiser cette variation, l'étude doit être étendue à tous les portiques de la structure considérée, et même pour d'autres structures.

** Un portique avec poutres palières régulièrement disposées à 1,5 m du niveau considéré.



G + Q + E

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad N_T = 0,7 \quad \text{N} \\ \text{Noeud 10} \quad N_T = 0,999 \quad \text{N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad T_T = T \\ \text{Noeud 10} \quad T_T = 0,943 \quad T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad M_T = 0,995 \quad \text{M} \\ \text{Noeud 10} \quad M_T = 0,957 \quad \text{M} \end{array} \right.$$

G + Q + 1,2 E

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad N_T = 1,085 \quad \text{N} \\ \text{Noeud 10} \quad N_T = 1,047 \quad \text{N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad T_T = T \\ \text{Noeud 10} \quad T_T = 0,929 \quad T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad M_T = 0,995 \quad \text{M} \end{array} \right.$$

0,8 G + E

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad M_T = 0,942 \text{ M} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad N_T = 1,029 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad N_T = 0,996 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad T_T = T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad T_T = 0,902 \text{ T} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad M_T = 0,995 \text{ M} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad M_T = 0,971 \text{ M} \end{array} \right.$$

0,8 G - E

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad N_T = 0,971 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad N_T = 1,007 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad T_T = T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad T_T = 0,870 \text{ T} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad M_T = 0,998 \text{ M} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad M_T = 0,859 \text{ M} \end{array} \right.$$

Variation de la charge permanente seule

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad N_T = 0,944 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad N_T = 1,001 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad T_T = T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad T_T = 0,869 \text{ T} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad M_T = 0,997 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 10} \quad M_T = 0,847 \text{ M} \end{array} \right.$$

Variation de la surcharge d'exploitation seule

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad N_T = 1,013 \text{ N} \\ \text{Noeud 10} \quad N_T = 1,006 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad T_T = T \\ \text{Noeud 10} \quad T_T = 0,929 T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad M_T = 0,995 \text{ M} \\ \text{Noeud 10} \quad M_T = 0,931 \text{ M} \end{array} \right.$$

Variation de la charge sismique seule

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad N_T = 0,984 \text{ N} \\ \text{Noeud 10} \quad N_T = 0,939 \text{ N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad T_T = T \\ \text{Noeud 10} \quad T_T = 0,872 T \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Noeud 6} \quad M_T = 1,500 \text{ M} \\ \text{Noeud 10} \quad M_T = 0,870 \text{ M} \end{array} \right.$$

L'étude a été limitée aux dix premiers noeuds ; la variation observée était dans le même sens que l'étude précédente. La prévision des voiles périphériques par le RPA 81 (version 83) pour tenir compte de l'influence de l'effort tranchant n'est pas toujours suffisante car dans le cas des poutres palières, cette influence est aussi non négligeable dont il faut tenir compte.

*** Un portique ayant comme hauteur $h = 3 \text{ m}$ pour le niveau 1

$$0,8 G + E \quad N_T = (0,999 \text{ à } 1,002) \text{ N}$$

$$T_T = (0,852 \text{ à } 1,031) T$$

$$m_T = (0,917 \text{ à } 0,988) M$$

0,8 G - E

$$N_T = (1,001 \text{ à } 1,003) N$$

$$T_T = (0,915 \text{ à } 0,986) T$$

$$M_T = (0,940 \text{ à } 0,990) M$$

L'étude a été limitée aux dix premiers noeuds et a reposé seulement sur deux combinaisons, juste pour savoir l'influence de l'effort tranchant pour ce type de portique, il s'est avéré que la variation était dans la plupart des cas très négligeable.

~~~ CHAPITRE 5 ~~~

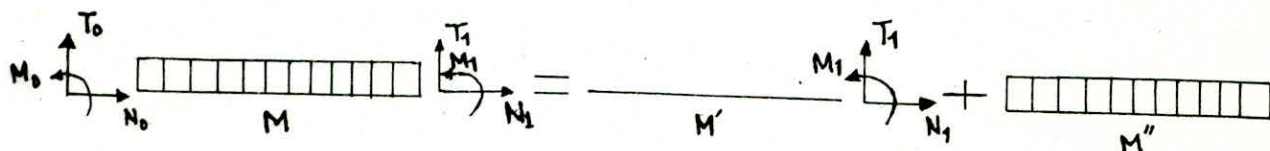
CONCLUSION ET BIBLIOGRAPHIE

## 5.1. CONCLUSION

Il existe de nombreux logiciels de calcul des structures, mais le logiciel qui a fait l'objet de notre projet de fin d'études a la particularité d'être programmé et exécuté sur des micros ordinateurs. Les caractéristiques du logiciel et son mode d'utilisation sont bien adaptés à ce type de matériel. Le logiciel offre le moyen d'étudier des bâtiments en portique droits en béton armé avec :

- Décrochement horizontal et vertical
- Variation des dimensions des poutres et poteaux / étage
- Différents types de planchers dans un même bâtiment
- Existence de dalles vides
- Variation des charges permanentes d'un étage à un autre.
- Variation des surcharges d'un étage à un autre

Toutefois par souci d'économie de mémoire, nous nous sommes limités aux cas courants des charges ou surcharges uniformes et constant pour chaque plancher. La prévision des options pour les surcharges contentrées ou variable dans un même plancher peut être faite, pour cela l'utilisateur devra décrire les différentes surcharges appliquées à la structure (charges concentrées, uniformes, linéaires, trapézoïdales) mais cela risque de surcharger le logiciel. Les résultats fournis ; sont les déplacements des noeuds, les réactions des appuis et les efforts aux extrémités des barres, les efforts dans les sections intermédiaires des barres peuvent être calculer manuellement à partir des efforts aux extrémités des barres fournis par le logiciel sans pour autant recalculer toute la structure



Décomposition des efforts dans une barre

$\left. \begin{matrix} M_0, N_0, T_0 \\ M_1, N_1, T_1 \end{matrix} \right\}$  sont calculés par le logiciel.

$$M'(S) = M_1 + T_1 (L - s)$$

$$M''(S) = \frac{q}{2} (L - s)^2$$

d'où le moment en bout point de notre barre est donc

$$M(S) = M'(S) + M''(S)$$

Le calcul de l'effort normal et tranchant étant basé sur le même principe. Le logiciel peut aussi calculer les efforts sous n'importe quelle combinaison de charges permanentes, surcharges d'exploitation et forces sismiques pour chaque portique longitudinal ou transversal du bâtiment et cela en tenant compte ou pas de l'influence de l'effort tranchant (poteaux courts Cf Chapitre 4) ; Aussi une étude sur les effets des décrochements plans et verticaux n'a pas pu être faite vu la contrainte temps. Le nombre, la numérotation et position des noeuds et des barres, section, inertie et module d'élasticité des barres, charges appliquées) sont déduites automatiquement. Le logiciel offre enfin une visualisation complète du portique étudié avec la numérotation des noeuds et la combinaison des efforts (M,N,T). Le calcul des structures est et restera la base des problèmes des concepteurs et des constructeurs. Il est en effet absolument indispensable de vérifier un ouvrage et de s'assurer de sa stabilité avant de pouvoir commencer à le construire. S'il est d'abord nécessaire d'élaborer le plan de la construction, la phase calcul amène souvent des modifications et des changements dans les plans du concepteur. De plus, la partie calcul conditionne beaucoup l'aspect "économie" de l'ouvrage. Savoir si l'on pourra construire avec tel ou tel type de barre est déjà intéressant à connaître, mais il est encore plus intéressant de savoir si l'on pourra on non réduire telle au telle section, et aussi diminuer sensiblement le poids de l'ouvrage tant en conservant sa stabilité aux efforts extérieurs. Aussi est il nécessaire que le concepteur et le constructeur disposent d'un moyen puissant de calcul pour pouvoir, dans un premier temps, vérifier les dispositions constructives envisagés et, dans un deuxième temps, optimiser la structure.



façon à obtenir un coût minimal. Il est évident que pour être efficace, ce moyen de calcul doit être souple, rapide et fournir des résultats précis. Il doit être aussi adapté, à l'environnement habituel du concepteur et du constructeur et trouver sa place parmi les outils habituels de ces professions ; c'est pourquoi le logiciel a été adapté sur Micro-Ordinateur. De plus, il fallait s'adapter à des personnes pour les quelles l'informatique devait rester un moyen et non une fin.

Enfin, le logiciel prend en compte les caractéristiques et les contraintes du micro-ordinateur : petite taille mémoire, possibilités graphiques, périphériques particuliers (cassettes, lecteurs de disques ...) et surtout utilisation en temps réel. Ce logiciel, comme bien les autres programmes n'est pas un produit figé, il bénéficiera des suggestions des utilisateurs, pour qu'il corresponde le mieux possible à leurs besoins. De plus, son organisation va lui permettre d'évoluer vers des versions toujours plus performantes :

- Liaison avec les programmes de ferrailage
- Les barres à inertie variables
- Déplacements imposés des appuis
- Charge et surcharges variables dans un même plancher

Il est évident que ces particularités impliquent un supplément programmation, que nous jugerons simple à faire mais risque d'alourdir le logiciel sans gain appréciable. L'élaboration de ce logiciel nous a permis une amélioration de nos connaissances dans le domaine de l'informatique et de l'analyse numérique (calcul matriciel).

Les principales difficultés rencontrées :

- Limitation de la mémoire du micro-ordinateur utilisé ( OLIVETTI M 24 )  
la mémoire centrale active de 64 K octets est indispensable pour traiter les calculs

- Limitation de la vitesse d'exécution.

le langage utilisé GW BASIC offre une vitesse d'exécution moindre que les langages TURBO BASIC et QUICK BASIC, mais permet une haute résolution graphique par rapport à ces derniers. Nous étions amenés à gérer la mémoire de la machine par :

- Réserver des dimensions minimales pour les différentes variables
- Utilisation des matrices bandes et largeurs de bande
- Effacement des programmes et élimination des tableaux exécutés.

Les différents programmes du logiciel ont été testés avec des résultats donnés par d'autres programmes et même manuels.

## 5.2. BIBLIOGRAPHIE

### 5.2.1. STRUCTURE ET INFORMATIQUE

- a) Calcul des structures et informatique  
J-F. AUBOIN EYROLLES (83)
- b) Modélisation des structures pour calcul sur ordinateur  
A. CAPRA et M. HAUTCOEUR EYROLLES (83)
- c) Grands bâtiments  
M. LAREDO
- d) Calcul des structures sur ordinateur Tome 1 et 2  
CH. MASSONNET, G. DEPREZ, R. MAQUOI, R. MULLER et G. FONDER  
EYROLLES et MASSON (72)
- e) Une présentation de la méthode des éléments finis  
G. TOUZOT et G. DHATI
- f) Dynamique des structures Tome 1  
R. CLOUGH et J. PENZIEN
- g) Calcul dynamique des structures en zone sismique  
A. CARRA et V. DAVIDOVICI EYROLLES (82)
- h) Dynamique des structures et sismologie de l'ingénieur Tome 1  
L ET A. DOBRESCU OPU (83)
- i) Calcul des structures parasismiques  
L. TZENOV et P. BONNEVILLE ENAL (85)
- j) Conception et calcul des structures soumises aux seismes  
M. DAOUDI, M. RILI, et A. SALHI OPU (84)

k) Calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles

P-C-WANG

DUNOD (69)

l) Annale de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics

N° 431 JANVIER 85

SERIE : INFORMATIQUE APPLIQUEE

#### 5.2.2. RESISTANCE DES MATERIAUX

a) Mécanique appliquée au génie-civil

A-F. DECELLE et D. LEGENDRE

EYROLLES (83)

b) Aide-Mémoire de résistance des matériaux

J. GOULET

DUNOD (76)

#### 5.2.3. BETON ARME

a) Traité de béton armé

R. LACROIX, A. FUNTES et H. THONIER

EYROLLES (82)

b) Ouvrages en béton armé

H. RENAUD et F. LETERTRE

FOUCHER (78)

c) Traité de béton armé Tome 4

A. GUERRIN et R.C. LAUAUR

DUNOD (71)

d) Calcul des ouvrages en béton armé

M. BELAZOUGUI

OPU (86)

#### 5.2.4. REGLEMENT ET DTU

a) Règles parasismiques Algériennes 1981 (version 83)

ENAL (84)

b) Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé (CCBA 68)

EYROLLES (75)

5. 2. 5. PROGRAMMATION BASIC

- a) Basica et GWBASIC Microsoft  
B. VANRYB et R. POLITIS EYROLLES (85)
- b) Le Basic et la gestion des fichiers  
R. KHIMA OPU (88)
- c) Guide du MS-DOS (Système d'exploitation des micro-ordinateurs)  
M. GACI BERTI (88)
- d) Guide du basic des micro-ordinateurs  
Mémento d'informatique BERTI (88)
- e) Graphismes sur IBM PC  
G. CUELLAR

