

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

31/88

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL



PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat

SUJET

Dynamique des Structures

Proposé Par :

M^r ZEGHLACHE

Etudié par :

M. S. MESBAHI

B. AYACHI

Dirigé par :

M^r ZEGHLACHE

PROMOTION : Juin 1988

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat

SUJET

Dynamique des Structures

Proposé Par :

M^r ZEGHLACHE

Etudié par :

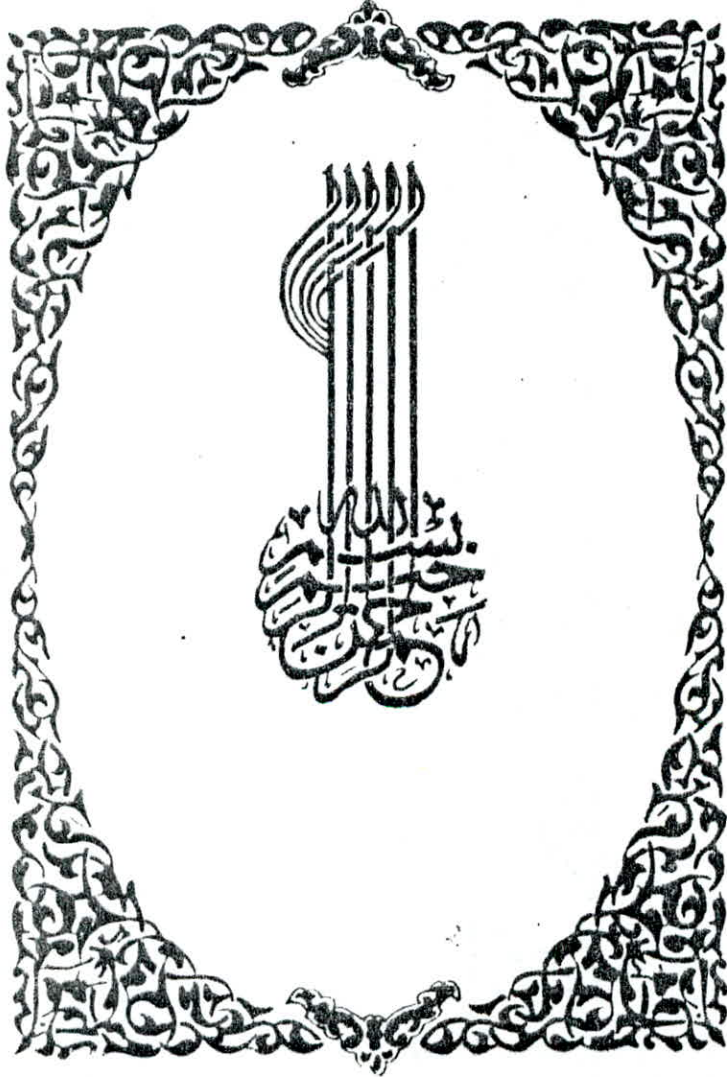
M. S. MESBAHI
B. AYACHI

Dirigé par :

M^r ZEGHLACHE

PROMOTION : Juin 1988

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique





مهندسة
موجبة
تلميذة مهندسة

Genie civil
Mr. ZEGHLACHE
M.S. MESBAHI
B. AYACHI

الموضوع : ديناميكية الهياكل

المعرض : الهدف الرئيسي من دراستنا هاته هو وضع مخطط آبي يمكننا من معرفة ردّ الهيكل المعرض لجهود ديناميكية من مصدر زلزالي وبمنا من خلال طيف جوايي أو من خلال منحني تسارع عي ثم لاستنتاج الجهود التي تظهر في الهيكل.

Titre : Dynamique des structures
L'objet de notre étude est principalement la mise au point d'un logiciel de calcul permettant de déterminer la réponse d'une structure soumise à une sollicitation dynamique d'origine sismique à partir d'un spectre de réponse ou d'un accelerogramme et d'en deduire les efforts engendrés dans la structure.

Titre : Dynamics of structures
The aim of the present research is mainly to develop a computer program (or software) to analyse the response of a structure subjected to dynamic loading due to earthquakes using a spectrum of response or accelerogram to obtain the loads in the structures.

Dedicace

. Je dedie ce modeste travail à :

- mes parents qui se sont sacrifiés pour me voir réussir.
- mes frères et sœurs.
- tous mes amis qui m'ont aimé de près ou de loin.

Bachir

. Je dedie ce modeste travail à :

- mes parents
- mon frère, sa famille et sa fille.
Oumaima.
- tous mes amis.
- tous ceux qui ont collaboré à ma formation.
- tous ceux qui croient en Dieu

M^{me} Seghir

REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Nous exprimons nos remerciements les plus grands à notre promoteur Mr. ZEGHLACHE pour ses conseils éclairés qui nous ont guidés dans notre travail.

Nous remercions également Mr. BENSLIMANE et tous les enseignants de L'É.N.P qui ont contribué à notre formation.

Nos remerciements vont aussi aux responsables de l'annexe du centre de calcul de L'É.N.P.

PRESENTATION

Ce présent projet, consiste à faire la mise au point d'un logiciel de calcul qui permet de déterminer la réponse d'une structure soumise à une sollicitation dynamique d'origine sismique.

Ce logiciel a été élaboré dans l'annexe du centre de calcul de l'ENP sur une machine de type "Micro.vax".

Le langage utilisé est le FORTRAN.

la plus grande difficulté rencontrée dans notre travail est le grand nombre de données à introduire.

Dans le souci de rendre plus souple cette étape de départ du programme, nous avons opté pour une entrée de données sous forme de fichiers, celle-ci trouve son intérêt dans le cas où la configuration de différents niveaux du bâtiment est identique.

les modifications de données, lors d'une correction éventuelle doivent être faites de manière aussi simple que possible.

Ce travail se décompose en 3 parties : Généralités, logiciel et applications.

Dans cette dernière partie, seulement les résultats nécessaires sont représentés à titre comparatif.

SOMMAIRE

1^{ere} partie : Généralités.

<u>chap I</u> : <u>INTRODUCTION</u>	2
I. Généralités.....	2
II. types de chargement donnée.....	2
III. degré de liberté dynamique.....	3
IV. Methodes de discretisation.....	3
<u>chap II</u> : <u>SYSTEMES À UN SEUL DEGRÉ DE LIBERTE DYNAMIQUE</u>	5
I. Vibrations Libres.....	5
II. Vibrations forcées.....	9
<u>chap III</u> : <u>SYSTEMES À PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTE DYNAMIQUES</u>	11
I. Vibrations Libres :.....	11
II. Vibrations forcées.....	14

2^{eme} partie : logiciel de calcul

<u>chap IV</u> : <u>CALCUL DES RIGIDITÉS</u>	17
<u>chap V</u> : <u>CALCUL DES PULSATIONS ET DES FORMES PROPRES DE VIBRATION</u>	21
I. Caractéristiques manriques.....	21
II. methodes numeriques pour le calcul des pulsations et des formes propres de vibration.....	22

<u>Chap VI</u> :	<u>DETERMINATION DES FORCES</u>	
	<u>SISMQUES</u>	28
I.	Methodes de Calcul	28
II.	Étude d'après un accélérogramme	28
III.	Étude d'après un spectre de réponse (Méthode Spectrale)	38
<u>Chap VII</u> :	<u>STRUCTURES CONTREVENTÉES</u>	
	<u>PAR PORTIQUES</u>	44
I.	Repartition des efforts	44
II.	Méthode des déplacements	45
<u>Chap VIII</u> :	<u>STRUCTURES CONTREVENTÉES</u>	
	<u>PAR VOILES</u>	59
I.	Repartition des efforts	59
II.	Détermination des efforts dans les refends et les linteaux	60
	<u>3^{ème} partie : Applications</u>	
A.	Structures à portiques	67
B.	Structures à voiles	93
	<u>CONCLUSIONS</u>	100
	<u>Bibliographie</u>	103

1^{ere} PARTIE

GENERALITES

INTRODUCTION

Chap I

I/ Généralités

La dynamique des structures représente une branche de la mécanique appliquée ayant pour objet le calcul et l'étude du comportement des structures à des vibrations ou aux chocs.

Les structures généralement caractérisées par une masse et une élasticité peuvent effectuer des mouvements relatifs, sous l'action des sollicitations dynamiques. Si le mouvement est répétitif il est appelé vibration.

Généralement on comprend par "action dynamique" la sollicitation produite par des charges qui varient rapidement pendant le temps et qui contribuent à l'apparition de forces d'inertie.

La signification du terme dynamique peut se définir simplement comme : variable dans le temps ; une charge dynamique est donc une charge dont l'intensité, la direction ou le point d'application varient avec le temps. De même, la réponse de la structure à une charge dynamique, c'est à dire les déplacements et les contraintes qui en résultent, est également variable dans le temps, donc dynamique elle aussi.

II/ Types de Chargements donnés

Pratiquement n'importe quelle structure est susceptible de subir pendant sa durée de vie un chargement dynamique sous une forme ou une autre.

D'un point de vue analytique, on peut subdiviser les chargements donnés en deux grandes catégories : périodiques et non périodiques.

II.1. Chargements périodiques

Ils sont constitués par des charges répétitives qui constituent la même évolution dans le temps sur un grand nombre de cycles.

exemple : machines tournantes.

II.2. Chargements non périodiques

Ils sont soit des impulsions de courte durée, soit des chargements de longue durée et de forme quelconque.

Exemples : les chocs, les explosions, les secousses sismiques.

Dans ce présent projet, on s'intéresse à ce dernier type de chargement et surtout le cas du séisme.

III / Degré de liberté dynamique

Dans l'étude du comportement dynamique des structures il est important de définir la position de la masse à n'importe quel instant t du mouvement.

Si cela est possible, il est évident qu'on peut déterminer, à part la position déformée, les contraintes et déformations spécifiques de n'importe quelle section de la structure.

Si à un instant t quelconque la position de la structure peut être définie par un seul paramètre, on dit que la structure a un seul degré de liberté dynamique.

En général, le nombre de degrés de liberté d'une structure est égal au nombre de paramètres indépendants qui peuvent définir entièrement la position du système quelque soit l'instant t du mouvement, il est aussi égal à celui des déplacements indépendants du système considéré.

IV / Methodes de discretisation

a) Concentration des masses

Si la masse du système est répartie de manière continue, les déplacements et les accélérations doivent être définis en chaque point de la structure. Il est dans ce cas nécessaire de formuler le problème à l'aide d'équation aux dérivées partielles à deux variables : le temps et la position le long de la structure, il est évident que son étude est rendue considérablement plus complexe.

Mais si la masse de la structure peut être considérée comme concentrée en un certain nombre de points séparés (ou discrets), le problème se trouve grandement simplifié, et le nombre de degrés de liberté sera limité.

b) Déplacement généralisé

Dans le cas où la masse du système est répartie de manière continue, on peut

alors préférer une autre méthode pour limiter le nombre de degrés de liberté. cette méthode est fondée sur l'hypothèse selon laquelle la configuration de la structure après déplacement, peut être exprimée comme une combinaison linéaire de certains motifs de déplacements; ces motifs jouent le rôle de coordonnées dans lesquelles on exprime les déplacements de la structure supposée unidimensionnelle.

$$v(x) = \sum_n z_n \psi_n(x)$$

où :

$\psi_n(x)$: fonctions de déplacement.

z_n : Coordonnées généralisées (ou amplitudes de $\psi_n(x)$)

le nombre de motifs utilisés représente le nombre de degrés de liberté.

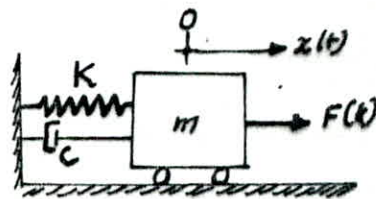
c) Notion d'élément fini

Il existe une troisième méthode d'expression des déplacements d'une structure donnée à l'aide d'un nombre fini de coordonnées discrètes de déplacements; elle combine certaines caractéristiques des procédés de concentration des masses et des coordonnées généralisées. Cette méthode est applicable à des structures de tous genres. Elle consiste à la diviser en un certain nombre de segments de tailles arbitraires.

les déplacements des extrémités (nœuds) de ces segments sont alors pris pour coordonnées généralisées de la structure, les fonctions de déplacements sont appelées fonctions d'interpolations car elles définissent la déformée par interpolation entre les déplacements connus des nœuds.

les propriétés qui caractérisent le comportement dynamique d'une structure élastique sont :

- la force $F(t)$
- la rigidité K de la structure.
- la masse m de la structure.
- l'amortissement C .



l'équation générale qui exprime le mouvement du système aura la forme :

$$m\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (1)$$

cette équation peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{1}{m} F(t) \quad (2)$$

où

$\omega = \sqrt{K/m}$ (exprimée en rad/sec) représente la pulsation du système.

$2\beta = C/m$: le facteur d'amortissement.

On étudiera les différents cas de vibrations :

I/Vibrations libres

Dans ce cas, l'équation (1) devient :

$$m\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (3)$$

L'équation (3) est une équation différentielle de second ordre dont le second terme est nul, la solution de cette équation s'écrit donc :

$$x(t) = Ge^{st} \quad (4)$$

En substituant cette expression dans l'équation (3) on obtient :

$$(ms^2 + Cs + K) Ge^{st} = 0 \quad (5)$$

En simplifiant par mGe^{st} et en posant : $\omega^2 = K/m$

l'équation (5) devient :

$$s^2 + \frac{C}{m}s + \omega^2 = 0 \quad (6)$$

Si $c = 0$, le système est libre non amorti.
 Si $c \neq 0$, le système est libre amorti.

I.1. Vibrations libres non amorties

Si $c = 0$, il est évident que la valeur de s obtenue à partir de l'équation (6) est

$$s = \pm i\omega \quad (7)$$

la solution donnée par l'équation (4) est donc

$$x(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t} \quad (7)$$

G_1 et G_2 sont les amplitudes du mouvement.

on sait que :

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t \quad (8)$$

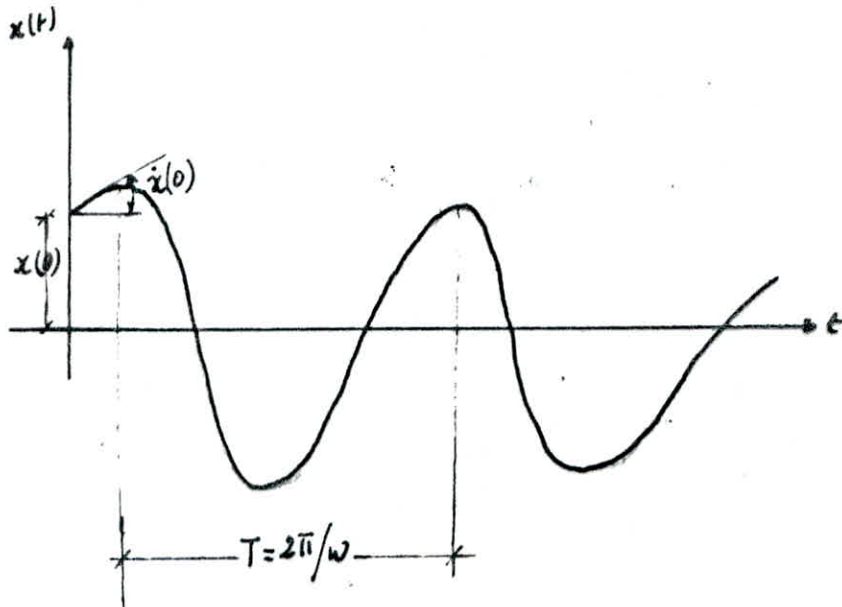
l'équation (7) devient :

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (9)$$

où les constantes A et B peuvent s'exprimer en fonction des conditions initiales, c'est à dire du déplacement $x(0)$ et de la vitesse $\dot{x}(0)$ à l'instant $t=0$ où commencent les oscillations libres du système. On voit immédiatement que $x(0) = B$ et $\dot{x}(0) = A\omega$, l'équation (9) devient :

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t + x(0) \cos \omega t \quad (10)$$

Cette solution, qui correspond à un mouvement harmonique simple, est représentée par la figure ci-dessous.



I.2. Vibrations libres amorties

Si $c \neq 0$, la solution de l'equation (6) est :

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (11)$$

trois types de mouvements sont presents dans cette expression, suivant que la quantite sous le radical est positive, negatif ou nulle.

I.2.1. Amortissement critique

Si la quantite sous le radical de l'equation (11) est nulle, il est evident que $\omega = c/2m$. La valeur de la constante d'amortissement critique est donc :

$$c_c = 2m\omega \quad (12)$$

la valeur de s devient alors :

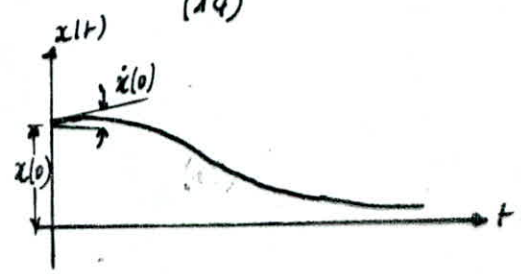
$$s = -\frac{c}{2m} = -\omega. \quad (13)$$

et la reponse donnee par l'equation (4) s'ecrit :

$$x(t) = (G_1 + G_2 t) e^{-\omega t} \quad (14)$$

la forme finale de la reponse dans le cas d'un amortissement critique est :

$$x(t) = [x(0)(1 + \omega t) + \dot{x}(0)t] e^{-\omega t} \quad (15)$$



I.2.2. Amortissement sous-critique

Si $c < c_c$, on dit que l'amortissement est sous-critique.

dans ce cas le terme sous la radicale de l'equation (11) est negatif.

on note : $\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}$ ζ est appele coefficient d'amortissement ou facteur d'amortissement.

En utilisant ce rapport dans l'equation (11) on obtient :

$$s = -\zeta\omega \pm \sqrt{(\zeta\omega)^2 - \omega^2} \quad (16)$$

en changeant le signe sous le radical :

$$s = -\zeta\omega \pm i\omega_D \quad \text{avec } \omega_D = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$$

ω_D : la pseudo-frequence angulaire en oscillations amorties.

la reponse dans ce cas d'amortissement s'ecrit :

$$x(t) = G_1 e^{-\zeta\omega t + i\omega_D t} + G_2 e^{-\zeta\omega t - i\omega_D t} = e^{-\zeta\omega t} (G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t}) \quad (17)$$

cette dernière équation peut être écrite sous la forme :

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (18)$$

En introduisant les conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$, on peut calculer les constantes de l'équation (18), ce qui donne :

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[\frac{\dot{x}(0) + x(0)\zeta\omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + x(0) \cos \omega_D t \right] \quad (19)$$

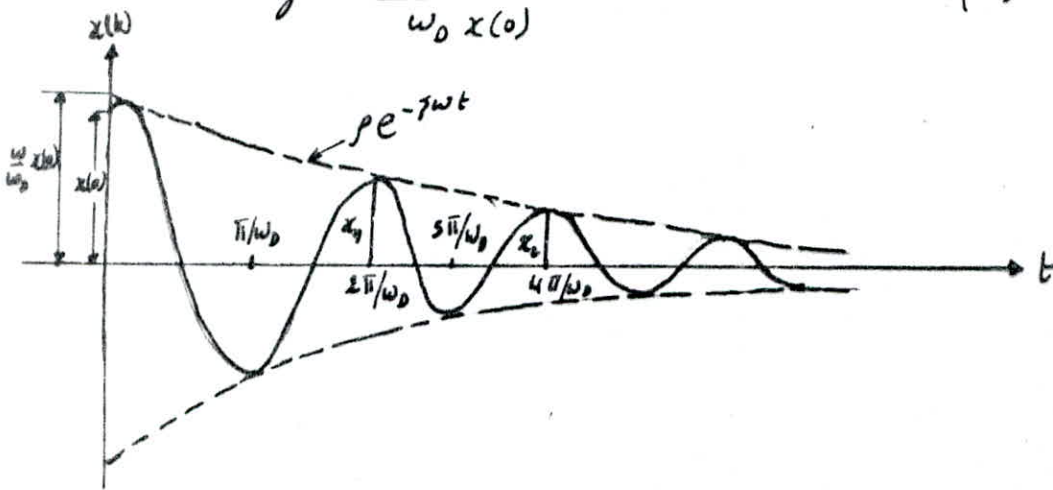
cette réponse peut s'écrire sous la forme d'un vecteur tournant :

$$x(t) = \rho e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_D t - \theta) \quad (20)$$

où

$$\rho = \left\{ \left[\frac{\dot{x}(0) + x(0)\zeta\omega}{\omega_D} \right]^2 + [x(0)]^2 \right\}^{1/2} \quad (21)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{x}(0) + x(0)\zeta\omega}{\omega_D x(0)} \quad (22)$$



I.3.3 Amortissement sur-critique

Ce cas d'amortissement est rarement rencontré dans la pratique.

Dans ce cas $\zeta > 1$:

$$s = -\zeta\omega \pm \omega \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega \pm \bar{\omega}$$

$$\text{avec } \bar{\omega} = \omega \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

la solution est sous la forme :

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \sinh \bar{\omega} t + B \cosh \bar{\omega} t) \quad (23)$$

où les constantes A et B peuvent être déterminées au moyen des conditions initiales :

II. Vibrations forcées

Si la masse m est excitée par une force perturbatrice, celle-ci ayant la forme $F(t) = F_0 \sin \omega t$ où F_0 représente la valeur d'amplitude pour la force $F(t)$ et ω , la pulsation de la force excitante, l'équation du mouvement devient

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin \omega t. \quad (24)$$

II.1. Vibrations forcées non amorties

L'équation du mouvement est :

$$m \ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin \omega t \quad (25)$$

La solution homogène (sans second membre) de cette équation donne la réponse en oscillation libre :

$$x_h(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (26)$$

La solution particulière est :

$$x_p(t) = G \sin \omega t \quad (27)$$

Pour déterminer l'amplitude G , on remplace l'équation (27) dans l'équation (25), nous obtenons :

$$G = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (28)$$

où β est le rapport de la fréquence du chargement et de la fréquence propre d'oscillations libre, ou encore rapport des fréquences : $\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$.

La solution générale est la somme des deux solutions précédentes : $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \omega t. \quad (29)$$

où A et B dépendent des conditions initiales.

$$A = -\frac{F_0 \beta}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} ; B = 0 \quad (30)$$

la réponse devient alors :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega t) \quad (31)$$

où :

$F_0/k = \Delta_{st}$: déplacement statique ; c'est le déplacement qui serait produit par la force F_0 appliquée statiquement.

II.2. Vibrations forcées amorties

L'équation du mouvement est :

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t. \quad (32)$$

La solution homogène de l'équation (32) est :

$$x_c(t) = e^{-\zeta\omega t} (A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) \quad (33)$$

avec $\zeta = c/2m\omega$.

La solution particulière est :

$$x_p(t) = G_1\sin\theta t + G_2\cos\theta t. \quad (34)$$

G_1 et G_2 sont les facteurs de réponse, ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$G_1 = \frac{F_0}{K} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \quad (35)$$

$$G_2 = \frac{F_0}{K} \frac{-2\zeta\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \quad (36)$$

La solution générale est :

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} (A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) + \frac{F_0}{K} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} [(1 - \beta^2)\sin\theta t - 2\zeta\beta\cos\theta t] \quad (37)$$

Le premier terme représente la réponse transitoire. Les constantes A et B pourraient être calculées à partir des conditions initiales, mais ce terme disparaît rapidement lorsque t croît, et ne présente donc que peu d'intérêt.

Chap III SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE DYNAMIQUES

une structure quelconque peut être considérée comme système oscillant, à plusieurs degrés de liberté dynamiques, seulement dans le cas qu'on peut supposer les masses comme concentrées dans un nombre précis de sections.

I/ Vibrations libres

le système dynamique représenté ci-dessous, ayant n degrés de liberté, peut exécuter, comme suite à une impulsion extérieure, un mouvement oscillatoire, autour de sa position d'équilibre statique.

A un moment donné les déplacements horizontaux sont: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)$

Si on considère le système non amorti, l'équation du mouvement s'écrit:

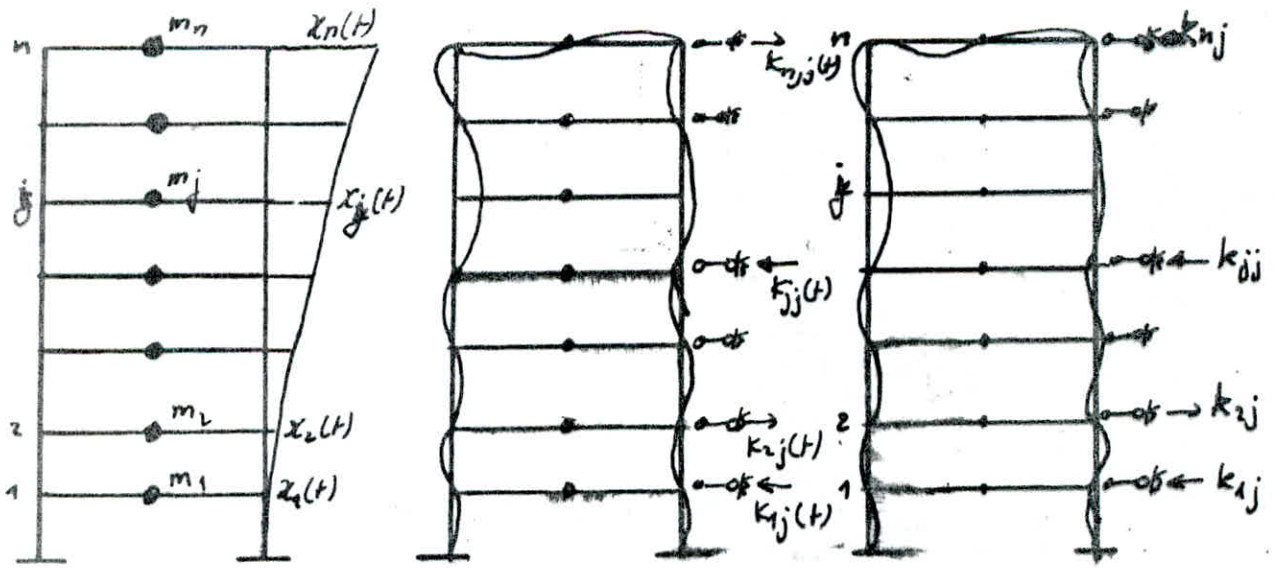
$$M \ddot{x}(t) + K x(t) = 0 \quad (1)$$

avec M : matrice de masse notée $[M]$.

K : matrice de rigidité notée $[K]$.

$\ddot{x}(t)$ et $x(t)$ représentent successivement le vecteur accélération et le vecteur déplacement.

$[M]$ est une matrice diagonale.



les équations qui expriment le mouvement auront donc la forme :

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + K_{11} x_1(t) + K_{12} x_2(t) + \dots + K_{1j} x_j(t) + \dots + K_{1n} x_n(t) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + K_{21} x_1(t) + K_{22} x_2(t) + \dots + K_{2j} x_j(t) + \dots + K_{2n} x_n(t) &= 0 \\ \vdots & \\ m_j \ddot{x}_j(t) + K_{j1} x_1(t) + K_{j2} x_2(t) + \dots + K_{jj} x_j(t) + \dots + K_{jn} x_n(t) &= 0 \\ \vdots & \\ m_n \ddot{x}_n(t) + K_{n1} x_1(t) + K_{n2} x_2(t) + \dots + K_{nj} x_j(t) + \dots + K_{nn} x_n(t) &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

le système d'équations différentielles (2) admet les solutions ayant la forme :

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ x_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots & \\ x_j(t) &= A_j \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots & \\ x_n(t) &= A_n \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} (3)$$

Après avoir déterminé les $\ddot{x}_i(t)$, les solutions remplacées dans le système (2) conduisent à :

$$\left. \begin{aligned} (K_{11} - m_1 \omega^2) A_1 + K_{12} A_2 + \dots + K_{1j} A_j + \dots + K_{1n} A_n &= 0 \\ K_{21} A_1 + (K_{22} - m_2 \omega^2) A_2 + \dots + K_{2j} A_j + \dots + K_{2n} A_n &= 0 \\ \vdots & \\ K_{j1} A_1 + K_{j2} A_2 + \dots + (K_{jj} - m_j \omega^2) A_j + \dots + K_{jn} A_n &= 0 \\ \vdots & \\ K_{n1} A_1 + K_{n2} A_2 + \dots + K_{nj} A_j + \dots + (K_{nn} - m_n \omega^2) A_n &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

où K_{ij} représente la réaction qu'on trouve dans l'appui i quand on impose un déplacement unitaire selon la direction j .

$$K_{ij} = K_{ji} \quad (\text{selon le théorème de Betti}).$$

pour que le système (4) admet des solutions différentes de zéro, il est nécessaire que le déterminant principal soit nul, le déterminant principal constituant l'équation caractéristique. Les solutions de cette équation seront les pulsations propres de la structure ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_j < \dots < \omega_n$).

II. Vibrations forcées

Supposant, maintenant, que sur le système agissent aussi des forces perturbatrices (harmonique) $F_i(t) = F_{i0} \sin \theta t$. (9)

avec $i = 1, 2, 3, \dots, n$

les forces ont les amplitudes F_{i0} et les pulsations égales.

A un moment donné les déplacements, selon les directions des degrés de liberté, seront : $x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)$.

L'équation du mouvement dans ce cas s'écrit :

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = F(t). \quad (10)$$

avec $F(t) = F_0 \sin \theta t$.

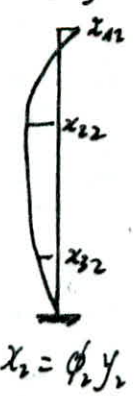
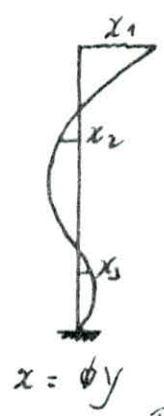
La matrice de rigidité $[K]$ n'étant pas diagonale, contrairement à celle des masses, chacune de ces équations peut faire intervenir tous les déplacements x_j .

On sait que les déplacements sont la somme des composantes modales comme le montre la figure ci-dessous.

$$x = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 + \dots + \phi_n y_n = \sum_{i=1}^n \phi_i y_i. \quad (11)$$

Soit en notation matricielle :

$$\{x\} = \langle \phi \rangle \{y\}.$$



Représentation d'une déformée par une somme de composantes modales

En calculant \dot{x} et \ddot{x} de l'équation (11) et en remplaçant x, \dot{x} et \ddot{x} dans l'équation (10) on obtient :

$$M \phi \ddot{y}(t) + C \phi \dot{y}(t) + K \phi y(t) = F(t) \quad (12)$$

En multipliant, cette équation, à gauche par la transposée du $i^{\text{ème}}$ vecteur modal ϕ_i^T on obtient :

$$\phi_i^T M \phi \ddot{y}(t) + \phi_i^T C \phi \dot{y}(t) + \phi_i^T K \phi y(t) = \phi_i^T F(t) \quad (13)$$

Remarques:

les vecteurs modaux ϕ_i possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_i^T K \phi_j &= 0 & \delta_i & \quad i \neq j \\ \phi_i^T C \phi_j &= 0 & \delta_i & \quad i \neq j \\ \phi_i^T M \phi_j &= 0 & \delta_i & \quad i \neq j. \end{aligned}$$

$$\omega_i^2 = \frac{\phi_i^T K \phi_i}{\phi_i^T M \phi_i}$$

où ϕ_i^T est le vecteur transposé du vecteur modal.

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_1^i \\ \vdots \\ \phi_k^i \\ \vdots \\ \phi_n^i \end{Bmatrix} \quad \text{soit } \phi_i^T = \{ \phi_1^i \dots \phi_k^i \dots \phi_n^i \}$$

donc d'après ces relations tous les termes de l'équation (13) sont nuls, sauf celui qui correspond à la i ème mode.

l'équation (13) deviendra donc :

$$M_i \ddot{y}_i(t) + C_i \dot{y}_i(t) + K_i y_i(t) = F_i(t) \quad (14)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_i &= \phi_i^T M \phi_i & K_i &= \phi_i^T K \phi_i = \omega_i^2 M_i \\ C_i &= \phi_i^T C \phi_i = 2\zeta_i \omega_i m_i & P_i(t) &= \phi_i^T F(t) \end{aligned}$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}}$$

L'étude d'un oscillateur multiple (plusieurs degrés de liberté) revient à l'étude d'un ensemble d'oscillateurs simples (un seul degré de liberté).

16

2^{eme}PARTIE

LOGICIEL DE CALCUL

Chap IV CALCUL DES RIGIDITÉS

On détermine la matrice de rigidité pour les structures à planchers indéformables.

Soit K_1, K_2, \dots, K_n respectivement, les rigidités des niveaux $1, 2, \dots, n$.

Ces rigidités sont données par l'expression suivante :

où :

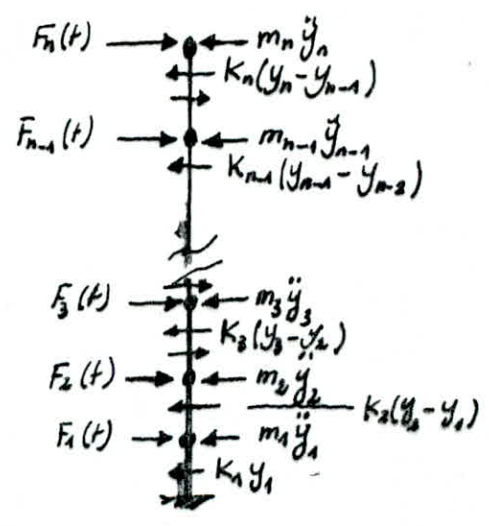
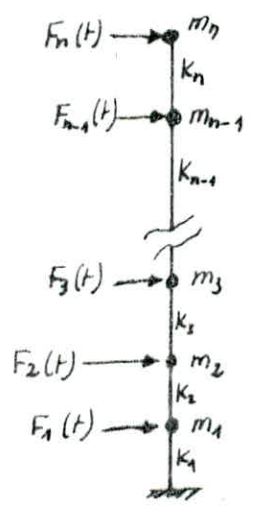
$$K_i = \frac{12EI_i}{h_i^3}$$

E : module de young.

I_i : inertie du niveau i .

h_i : hauteur de l'étage i .

pour déterminer la matrice de rigidité $[K]$, On prend une structure à n niveaux soumise à des forces perturbatrices $F(t)$.



Écrivons l'équilibre de chaque masse :

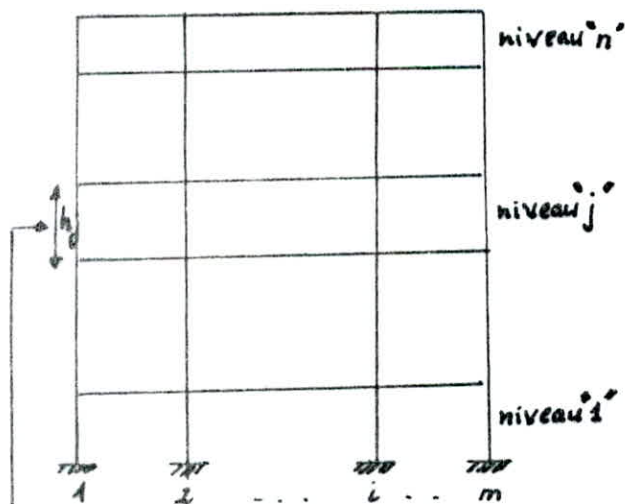
$$\begin{aligned}
 m_n \ddot{y}_n - F_n(t) + K_n (y_n - y_{n-1}) &= 0 \\
 m_{n-1} \ddot{y}_{n-1} - F_{n-1}(t) + K_{n-1} (y_{n-1} - y_{n-2}) - K_n (y_n - y_{n-1}) &= 0 \\
 &\vdots \\
 m_3 \ddot{y}_3 - F_3(t) + K_3 (y_3 - y_2) - K_4 (y_4 - y_3) &= 0 \\
 m_2 \ddot{y}_2 - F_2(t) + K_2 (y_2 - y_1) - K_3 (y_3 - y_2) &= 0 \\
 m_1 \ddot{y}_1 - F_1(t) + K_1 y_1 - K_2 (y_2 - y_1) &= 0
 \end{aligned}$$

3/ Calcul des coefficients correcteurs "a"a/ étage courant : $a = \bar{k} / (e + \bar{k})$ b/ 1^{er} niveau (R.D.C)- poteau encasturé : $a = \frac{0,5 + \bar{k}}{2 + \bar{k}}$ - poteau articulé : $a = \frac{0,5 \bar{k}}{1 + \bar{k}}$ 4/ Calcul des rigidités des poteaux suivant les deux sens.

$$K_j^i = a_j \cdot 12 \frac{E I_i}{h_j^3}$$

 I_i : inertie du poteau. h_j : la hauteur du poteau. E : module de Young longitudinal du béton.

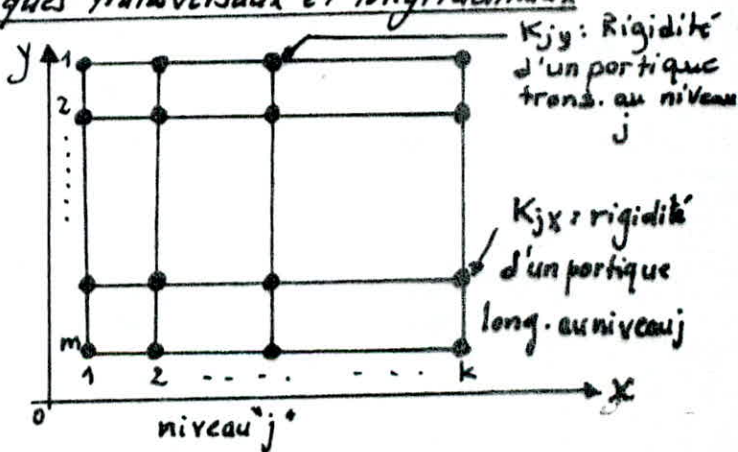
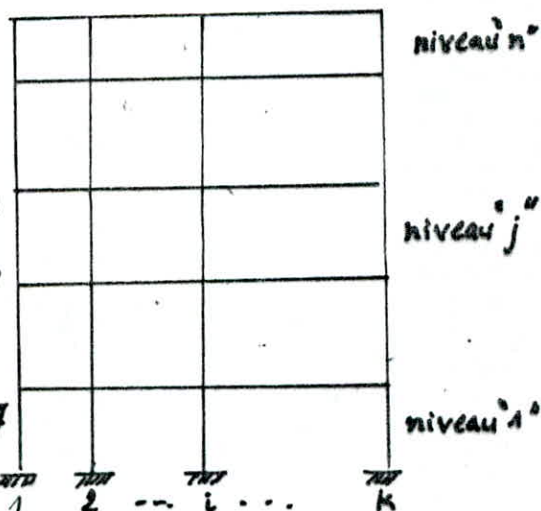
$$E = 345000 \text{ kg/cm}^2.$$

5/ Calcul des rigidités de niveau des portiques transversaux et longitudinaux

$$K_{jy} = \sum_{i=1}^m a_i \frac{12 E I_i}{h_j^3}$$

 I_i : inertie par rapport à l'axe passant par le C.d.g du poteau "i" parallèle à l'axe "x"

$$K_{jx} = \sum_{i=1}^k a_i \frac{12 E I_i}{h_j^3}$$

 I_i : inertie par rapport à l'axe passant par le C.d.g de la section du poteau "i" parallèle à l'axe "y" K_{jy} : Rigidité d'un portique trans. au niveau j K_{jx} : rigidité d'un portique long. au niveau j

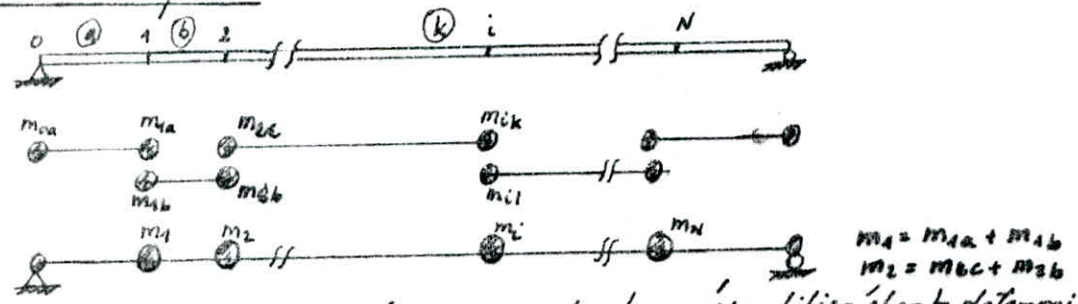
Chapitre CALCUL DES PULSATIONS ET DES FORMES PROPRES DE VIBRATION

Comme il a été vu précédemment, la matrice de rigidité $[K]$ est de dimension $n \times n$ où n est le nombre de degrés de liberté et qui correspond au nombre de masses du modèle. Il nous reste à voir les caractéristiques de la matrice masse $[M]$

I/ Caractéristiques massiques.

la manière la plus simple de représenter les caractéristiques massiques d'une structure consiste à supposer que toute la masse est concentrée aux points de définition des déplacements en translation. le calcul de ces masses ponctuelles suppose en général que la structure constituée d'un nombre fini de segments.

Exemple : Cas d'une poutre



la masse des segments est concentrée aux noeuds, leur répartition étant déterminée par les règles de la statique.

Pour un système dont on ne considère que les degrés de liberté de translation, la matrice masse est diagonale, elle s'écrit comme suit :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & & & & & \\ 0 & & m_3 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_i & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_j \end{bmatrix}$$

le nombre de termes diagonaux de cette matrice est égal au nombre de degrés de liberté.

II. Methodes numeriques pour le calcul des pulsations et des formes propres de vibration

La structure possède alors n pulsations propres qui sont déterminées par l'équation caractéristique du déterminant.

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

En développant le déterminant, nous aurons une équation polynomiale de degré $n \times n$ en ω^2 , nous obtenons donc un vecteur de pulsations:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_j \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

A chacune des pulsations propres ω_j est associé un mode propre de vibration $[\phi_j]$ défini par:

$$[\phi_j] = \begin{bmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \\ \vdots \\ \phi_{ij} \\ \vdots \\ \phi_{nj} \end{bmatrix}$$

plusieurs méthodes de calcul des valeurs et vecteurs propres d'un système existent dans la littérature, nous en citerons:

- Méthode de RAYLEIGH.
- Méthode de JACOBI.
- Méthode de HOLZER.
- Méthode de STODOLA.

Dans ce logiciel, on utilisera la dernière méthode (Méthode de Stodola).

II.1. Méthode de STODOLA

La méthode de Stodola consiste à faire une hypothèse initiale sur l'allure du mode; cette hypothèse est ensuite améliorée par itérations successives jusqu'à ce qu'une approximation satisfaisante du mode soit obtenue; la fréquence de vibration correspondante est alors déterminée à l'aide de l'équation du mouvement.

cette méthode permet donc d'obtenir la pulsation propre, ainsi que la forme propre des systèmes ayant n'importe quel degrés de liberté dynamiques.

Mode fondamental (1^{er} mode)

considérons une structure à n degrés de liberté soumise aux forces d'inerties:

$$\{F\} = \omega^2 [M] \{x\}$$

$[M]$: Matrice de masse (diagonale).

$\{x\}$: amplitude du mode fondamental.

ω : pulsation du 1^{er} mode.

les forces d'inertie $\{F\}$ et la déformée $\{x\}$ sont reliées par la matrice de souplesse $[\delta_L]$.

$$\{x\} = [\delta_L] \{F\}$$

On se donne donc a priori un vecteur de déformation $\{x_0\}$ et on déduit un chargement statique équivalent:

$$\{F_0\} = \omega^2 [M] \{x_0\}$$

d'où une déformée améliorée:

$$\{x_1\} = [\delta_L] \{F_0\} = \omega^2 [\delta_L] [M] \{x_0\}$$

le vecteur ainsi obtenu est "ajusté" en égalant les points d'amplitude maximale, d'où une première approximation de ω^2 donnée par:

$$\{x_1\} = \omega^2 [\delta_L] [M] \{x_0\}$$

cette approximation est d'autant meilleure que $\{x_0\}$ représente une déformée se rapprochant du mode fondamental. Cette relation implique:

$$\frac{x_{1,1}}{x_{1,0}} = \frac{x_{2,1}}{x_{2,0}} = \dots = \frac{x_{n,1}}{x_{n,0}} = \omega^2.$$

Ce qui sera réalisé que si $\{x\}$ est la déformée réelle.

La formule de récurrence est donc: $\{x_{i+1}\} = \omega^2 [\delta_L] [M] \{x_i\}$.

et la pulsation propre:

$$\omega^2 = \frac{x_{k,i+1}}{x_{k,i}}$$

la convergence de la méthode de Stodola vers le premier mode découle du fait que le processus met essentiellement en jeu le calcul des forces d'inertie qui correspondent à la déformée modale supposée, puis calcul les déplacements correspondant à ces forces, pour finalement recalculer les forces d'inertie correspondant à ces déplacements.

On note souvent, le produit de la matrice masse par la matrice de souplesse, par $[D]$ appelée "Matrice dynamique" $[D] = [\delta_L][M]$.

Second mode

On connaît le 1^{er} mode de vibration (mode fondamental)

On sait que les déplacements sont la somme des composantes modales :

$$x_1 = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 + \dots + \phi_n y_n = \sum_{i=1}^n \phi_i y_i = \phi y$$

le procédé itératif de Stodola permet d'écrire après s cycles :

$$X^{(s)} = \phi_1 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^{2s} y_1^{(0)} + \phi_2 \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^{2s} y_2^{(0)} + \dots + \phi_s \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^{2s} y_s^{(0)} + \dots$$

Il est clair que si $y_1^{(0)}$ est nul, le procédé doit converger vers le second mode et si $y_1^{(0)}$ et $y_2^{(0)}$ sont nuls il convergera vers le 3^{ème} mode ... etc.

Pour calculer le second mode par itération matricielle il faut éliminer les composantes du 1^{er} mode ; soit donc $\bar{X}_2^{(0)}$ le vecteur qui ne contient aucune composante du 1^{er} mode alors :

$$\bar{X}_2^{(0)} = X_2^{(0)} - \phi_1 y_1^{(0)}$$

le vecteur $\bar{X}_2^{(0)}$ est appelé vecteur d'essai épuré.

$\bar{X}_2^{(0)}$ convergera vers le second mode mais en raison des diverses erreurs d'arrondi, les calculs introduisent des imprécisions qui permettent aux composantes du 1^{er} mode de réapparaître : il sera donc nécessaire d'éliminer le 1^{er} mode.

Pour cela, il est commode d'utiliser une matrice dite "de balayage" obtenue en remplaçant dans l'équation précédente $y_1^{(0)}$ par $\frac{\phi_1^T M X_2^{(0)}}{M_1}$ on obtient alors :

$$\bar{X}_2^{(0)} = X_2^{(0)} - \frac{1}{M_1} \phi_1 \phi_1^T M X_2^{(0)} \equiv S_1 X_2^{(0)} \quad (*)$$

S_1 est appelée matrice de balayage :

$$S_1 \equiv I - \frac{1}{M_1} \phi_1 \phi_1^T M$$

$$\bar{X}_2^{(0)} = \omega_2^2 D \bar{X}_1^{(0)}$$

L'équation (*) devient :

$$\frac{1}{\omega_2^2} \ddot{X}_2^{(1)} = DS_1 X_2^{(0)} = D_2 X_2^{(0)} \Rightarrow D_2 = DS_1$$

D_2 est la nouvelle matrice dynamique.

La fréquence peut donc être calculée de façon approchée par l'équation suivante :

$$\omega_2^2 = \frac{(\bar{X}_2^{(1)})^T M X_2^{(0)}}{(\bar{X}_2^{(0)})^T M \bar{X}_2^{(1)}}$$

$$\text{ou } \bar{X}_2^{(1)} = D_2 X_2^{(0)}$$

L'itération peut alors être poursuivie jusqu'au degré de convergence voulu. On voit que dans cette méthode le 1^{er} mode doit être déterminé avant le second. De plus le 1^{er} vecteur modal ϕ_1 doit être calculé avec une très bonne précision afin de permettre le calcul d'une matrice de balayage S_1 permettant d'obtenir des résultats satisfaisants pour le second mode.

Détermination du 3^{ème} mode et des modes suivants :

Le vecteur d'essai épuré pour le 3^{ème} mode s'écrit :

$$\bar{X}_3^{(0)} = X_3^{(0)} - \phi_1 y_1^{(0)} - \phi_2 y_2^{(0)} \quad (*)$$

Si on utilise la condition d'orthogonalité de $\bar{X}_3^{(0)}$ avec ϕ_1 et ϕ_2 simultanément on a :

$$\begin{aligned} \phi_1^T M \bar{X}_3^{(0)} = 0 &= \phi_1^T M X_3^{(0)} - M_1 y_1^{(0)} \\ \phi_2^T M \bar{X}_3^{(0)} = 0 &= \phi_2^T M X_3^{(0)} - M_2 y_2^{(0)} \end{aligned}$$

d'où :

$$y_1^{(0)} = \frac{1}{M_1} \phi_1^T M X_3^{(0)} \quad \text{et} \quad y_2^{(0)} = \frac{1}{M_2} \phi_2^T M X_3^{(0)}$$

L'équation (*) devient alors :

$$\bar{X}_3^{(0)} = \left[I - \frac{1}{M_1} \phi_1 \phi_1^T M - \frac{1}{M_2} \phi_2 \phi_2^T M \right] X_3^{(0)}$$

$$\text{ou } \bar{X}_3^{(0)} = S_2 X_3^{(0)} = \left[S_1 - \frac{1}{M_1} \phi_2 \phi_2^T M \right] X_3^{(0)}$$

$$\text{avec } S_2 = S_1 - \frac{1}{M_1} \phi_2 \phi_2^T M.$$

l'équation de Stodola pour la détermination du 3^{ème} mode peut s'écrire :

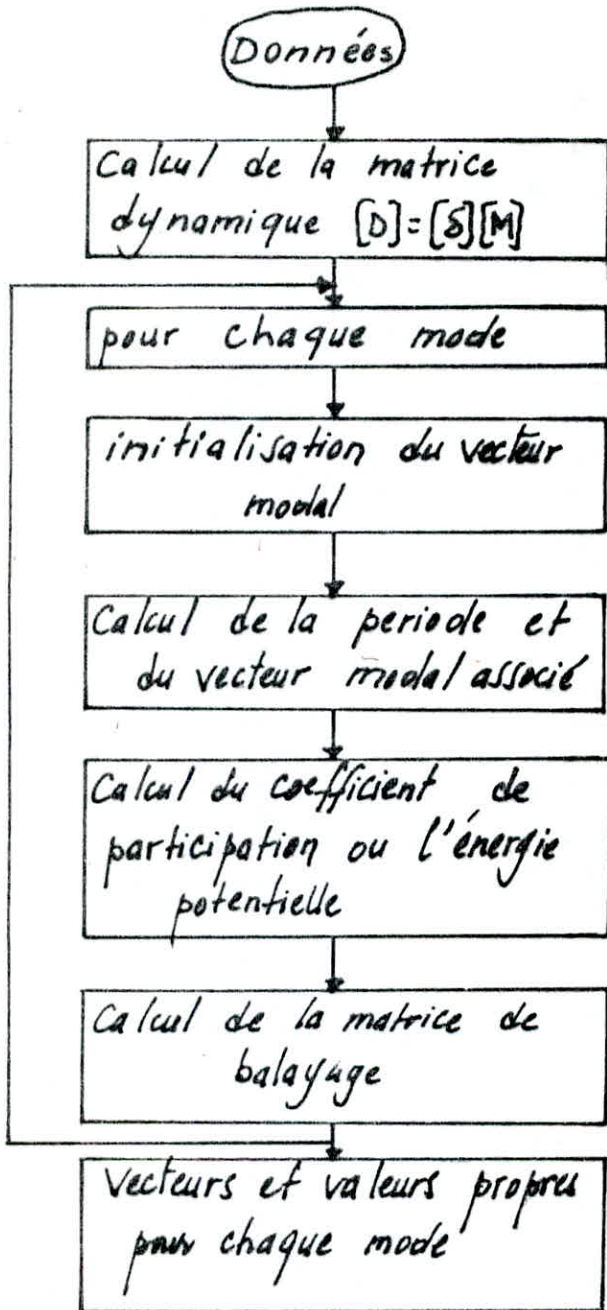
$$\frac{1}{\omega_3^2} X_3^{(1)} = D_1 \bar{X}_3^{(0)} = D S_2 X_3^{(0)} = D_3 X_3^{(0)}$$

la matrice D_3 a donc pour fonction le balayage des composantes du 1^{er} et du 2^{ème} modes du vecteur d'essai $V_3^{(0)}$, et assure ainsi la convergence vers le 3^{ème} mode.

le même procédé peut être répété pour la détermination de modes d'ordre de plus en plus élevé.

la matrice dynamique correspondante à la n ^{ième} mode est :

$$S_n = S_{n-1} - \frac{1}{M_n} \phi_n \phi_n^T M \quad D_{n+1} = D S_n.$$

Organigramme : Methode de STODOLA

Chap VII DETERMINATION DES FORCES SISMQUES

I.1 Methodes de Calcul

Pour les structures à comportement élastique linéaire, deux méthodes de calcul sont utilisables basées sur le principe de la décomposition modale.

La première méthode nécessite la donnée d'un accélérogramme; elle consiste à faire l'étude de la réponse de la structure suivant deux domaines :

- Domaine des temps.
- Domaine des fréquences.

La deuxième méthode nécessite la connaissance du spectre de réponse de la secousse sismique; elle consiste en la recherche du maximum de réponse sur chacun des modes propres, dont on déduit la valeur maximum probable des efforts.

II.1 Etude d'après un accélérogramme.

II.1.1 Etude dans le domaine des temps.

Dans cette méthode les modes sont découplés de point de vue énergétique. le système des "n" équations couplés est transformé en "n" équations découplés ce qui revient à dire que l'étude d'un oscillateur multiple revient à l'étude d'un ensemble d'oscillateurs simples. le mouvement est défini par la relation :

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = F(t) \quad (1)$$

cette équation représente un système de "n" équations différentielles de second ordre reliant les n composantes x_1, x_2, \dots, x_n du vecteur déplacement X.

a/ Détermination de $F(t)$

on appelle :

$x_{ti}(t)$: déplacement absolu de la masse m_i .

$x_i(t)$: " " relatif de la masse m_i .

$x_g(t)$: " " du support.

$$\rightarrow x_{ti} = x_i + x_g.$$

en notation vectorielle :

$$X = X + D x_g.$$

D : est un vecteur unité.

L'équation générale du mouvement s'écrit donc :

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = - M D \ddot{x}_g(t) \quad (2)$$

avec $F(t) = - M D \ddot{x}_g(t)$

M : matrice de masse.

D : vecteur unité.

$\ddot{x}_g(t)$: est l'accélération, elle est déduite de l'accélérogramme utilisé.

b/ Équations découplées du mouvement.

la matrice de rigidité K n'étant pas diagonale, contrairement à celle des masses, chacune de ces équations peut faire intervenir tous les déplacements x_j ; on ne peut donc résoudre directement.

on tourne cette difficulté en décomposant le vecteur X selon les n modes de vibration qui servent de base pour les déplacements.

$$X = \sum_{i=1}^n y_i \phi_i$$

$$\Rightarrow \dot{X} = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i \phi_i \quad \text{et} \quad \ddot{X} = \sum_{i=1}^n \ddot{y}_i \phi_i.$$

L'équation (1) devient alors :

$$M \sum_{i=1}^n \ddot{y}_i \phi_i + C \sum_{i=1}^n \dot{y}_i \phi_i + K \sum_{i=1}^n y_i \phi_i = F(t) \quad (3)$$

pour calculer le coefficient y_i on multiplie les deux membres de cette équation par le vecteur ϕ_j^t transposé du vecteur modal ϕ_j :

$$\phi_j^t M \sum_{i=1}^n \ddot{y}_i \phi_i + \phi_j^t C \sum_{i=1}^n \dot{y}_i \phi_i + \phi_j^t K \sum_{i=1}^n y_i \phi_i = \phi_j^t F(t) \quad (4)$$

D'après l'orthogonalité des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \phi_j^t M \phi_i &= 0 & \text{si } i \neq j \\ \phi_j^t K \phi_i &= 0 & \text{si } i \neq j \\ \phi_j^t C \phi_i &= 0 & \text{si } i \neq j \end{aligned}$$

Après développement et élimination des termes nuls l'équation (4) devient :

$$\phi_j^t M \phi_j \ddot{y}_j + \phi_j^t C \phi_j \dot{y}_j + \phi_j^t K \phi_j y_j = \phi_j^t F(t) \quad (5)$$

on définit de nouveaux paramètres relatifs au mode j en posant :

$$\begin{aligned} M_j &= \phi_j^t M \phi_j \\ K_j &= \phi_j^t K \phi_j = \omega_j^2 M_j \\ C_j &= \phi_j^t C \phi_j = 2\zeta_j \omega_j M_j \\ F_j^e(t) &= \phi_j^t F(t). \end{aligned}$$

M_j , K_j et $F_j^e(t)$ sont appelés respectivement masse généralisée, rigidité généralisée et chargement généralisé.

L'équation (5) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{y}_j + 2\zeta_j \omega_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = \frac{F_j^e(t)}{M_j} \quad (6)$$

le problème se ramène alors au calcul des coefficients y_j qui sont des fonctions du temps.

l'équation (6) conduit à un système de n équations de mouvement indépendantes correspondant chacune à un mode de vibration. Ces équations représentent autant de système à un degré de liberté et se résolvent par toute méthode conservant au type de chargement. L'expression générale de la réponse est donnée pour chaque mode par l'intégrale de Duhamel.

$$y_j(t) = \frac{1}{M_j \omega_{dj}} \int_0^t F_j^e(z) e^{-\xi_j \omega_j (t-z)} \sin \omega_{dj} (t-z) dz.$$

avec :

$$\omega_{dj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad : \text{ pulsation dynamique.}$$

c/ calcul numérique de l'intégrale de Duhamel

$$y_j(t) = \frac{1}{M_j \omega_{dj}} \int_0^t F_j^e(z) e^{-\xi_j \omega_j (t-z)} \sin \omega_{dj} (t-z) dz.$$

or :

$$\sin(\omega_{dj} t - \omega_{dj} z) = \sin \omega_{dj} t \cos \omega_{dj} z - \cos \omega_{dj} t \sin \omega_{dj} z.$$

cette intégrale devient :

$$y_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j (t-z)} \left[\sin \omega_{dj} t \frac{1}{M_j \omega_{dj}} \int_0^t F_j^e(z) \cos \omega_{dj} z dz - \cos \omega_{dj} t \frac{1}{M_j \omega_{dj}} \int_0^t F_j^e(z) \sin \omega_{dj} z dz \right] \quad (7)$$

ou bien :

$$y_j(t) = A(t) \sin \omega_{dj} t - B(t) \cos \omega_{dj} t. \quad (8)$$

dù dans ce cas :

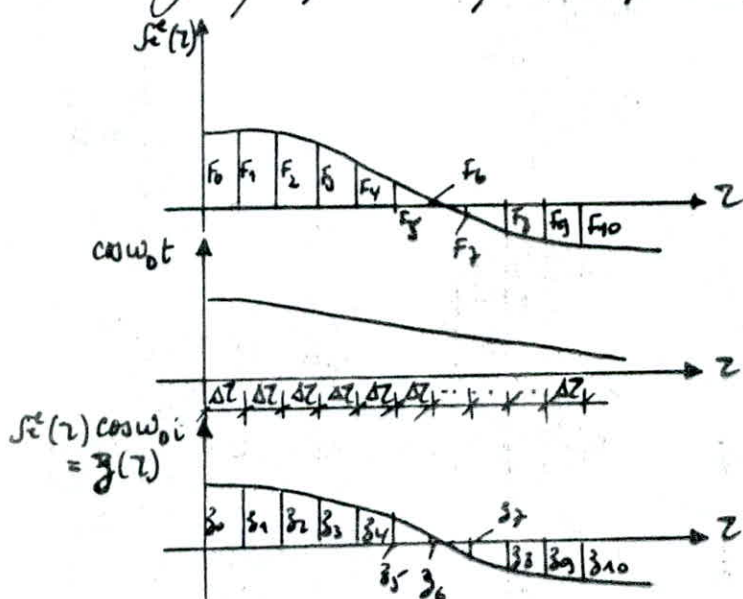
$$A(t) = \frac{1}{M_j \omega_{dj}} \int_0^t F_j^e(z) \frac{e^{\xi_j \omega_j z}}{e^{\xi_j \omega_j t}} \cos \omega_{dj} z dz$$

et

$$B(t) = \frac{1}{M_j \omega_{0j}} \int_0^t F_j^e(z) \frac{e^{\xi_j \omega_j z}}{e^{\xi_j \omega_j t}} \sin \omega_{0j} z dz.$$

le calcul numérique de l'intégrale de Duhamel revient à calculer numériquement ces deux intégrales. ($A(t)$ et $B(t)$).

on peut représenter graphiquement par exemple, la première fonction avec $\xi = 0$



Formulation du procédé numérique de sommation pour l'intégrale de Duhamel.

$$A(t) = \frac{1}{M_j \omega_{0j}} \int_0^t z_j(z) dz = \frac{\Delta z}{M_j \omega_{0j}} \cdot \frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha} z_{\alpha}(t).$$

où $z_j(z) = f_j^e(z) \cos \omega_{0j} z$.

et $\frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha} z_{\alpha}(t)$: représente le processus de sommation numérique.

Dans les 3 cas le plus élémentaires les sommations s'effectuent comme suit :

Simple sommation ($\alpha = 1$)

$$\sum_{\alpha} z_{\alpha}(t) = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}.$$

Méthode des trapèzes ($\alpha=2$)

$$\sum_2^A(t) = z_0 + 2z_1 + 2z_2 + \dots + 2z_{n-1} + z_n.$$

Méthode de Simpson ($\alpha=3$)

$$\sum_3^A(t) = z_0 + 4z_1 + 2z_2 + \dots + 4z_{n-1} + z_n.$$

$n = t/\Delta z$ doit être un nombre pair pour la méthode de Simpson.

Dans notre cas, on utilise la méthode de Simpson d'où la sommation sous forme incrémentale :

$$\sum_3^A(t) = \left[\sum_3^A(t-2\Delta z) + F_j^e(t-2\Delta z) \cos \omega_j(t-2\Delta z) \right] e^{-\zeta_j \omega_j 2\Delta z} + 4 F_j^e(t-\Delta z) \cos \omega_j(t-\Delta z) e^{-\zeta_j \omega_j \Delta z} + F_j^e(t) \cos \omega_j t.$$

Le terme $B(t)$ est donné par les expressions similaires faisant intervenir des fonctions sinus.

une fois $A(t)$ et $B(t)$ sont déterminées, on calcule $y_j(t)$ à l'aide de l'équation (8).

d/ Superposition des modes.

une fois la réponse $y_j(t)$ de chaque mode est déterminée, on procède à la superposition de tous les modes on obtient alors :

$$x(t) = \phi_1 y_1(t) + \phi_2 y_2(t) + \dots + \phi_n y_n(t).$$

sous forme matricielle :

$$[x(t)] = [\phi][y(t)].$$

e/ Détermination des forces lors de la réponse :

$$[F_s(t)] = [K][x(t)]$$

où :

$[x(t)]$ étant les vecteurs déplacements et $[K]$ la matrice de rigidité.

II.2 / Etude dans le domaine des fréquences

L'étude précédente dans le domaine des temps est complètement générale et peut servir à déterminer la réponse de tout système linéaire à un degré de liberté soumis à une excitation quelconque; mais il est parfois plus commode d'effectuer l'étude dans le domaine des fréquences qui est analogue dans sa conception à l'étude en présence de charges périodiques. Pour appliquer la technique des charges périodiques à des charges quelconques, il est nécessaire de généraliser l'application des séries de FOURIER à la représentation de fonctions non périodiques. Il est commode d'utiliser la forme exponentielle des séries de FOURIER.

a / Forme exponentielle de la solution par série de FOURIER.

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\bar{\omega}_1 t} \quad (1)$$

$$\text{où } C_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) e^{-in\bar{\omega}_1 t} dt. \quad (2)$$

T_p est appelé pseudo-période.

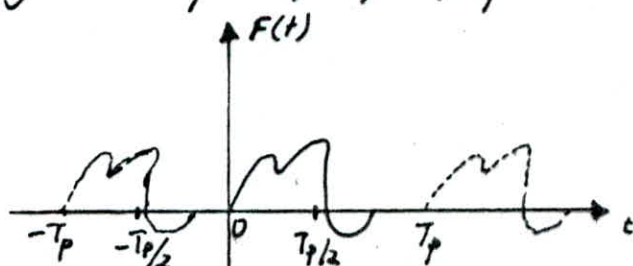
Si $T_p \rightarrow \infty$, alors les changements répétitifs fictifs peuvent être éliminés.

on a :

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\bar{\omega}_1}{2\pi} \equiv \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi}$$

$$n\bar{\omega}_1 = n\Delta\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}_n$$

$$C_n \equiv \frac{1}{T_p} c(\bar{\omega}_n) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} c(\bar{\omega}_n)$$



changement arbitraire à représenter en
Série de FOURIER

$$(1) \text{ devient } F(t) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(\bar{\omega}_n) e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (3)$$

$$(2) \text{ devient } c(\bar{\omega}_n) = T_p C_n = \int_{t=-T_p/2}^{t=T_p/2} F(t) e^{-i\bar{\omega}_n t} dt$$

Si $T_p \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta \bar{\omega} \rightarrow d\bar{\omega}$, alors les fréquences discrètes $\bar{\omega}_n$ deviennent une fonction continue $\bar{\omega}$, ainsi à la limite l'expression de la série de FOURIER (3) devient l'intégrale de FOURIER.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\omega}=-\infty}^{\infty} c(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \quad (4)$$

où la fonction amplitude harmonique est donnée par :

$$c(\bar{\omega}) = \int_{t=-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt \quad (5)$$

on suppose que le chargement a duré suffisamment longtemps pour que le transitoire soit amorti. Introduire la fonction excitation complexe unité : $e^{i\bar{\omega}t}$ dans l'équation découplée du mouvement.

$$M \ddot{y}_j(t) + 2\zeta \omega_j \dot{y}_j(t) + k y_j(t) = e^{i\bar{\omega}t} \quad (6) \quad \begin{cases} M: \text{masse généralisée} \\ \zeta: \text{amortissement} \\ k: \text{rigidité} \end{cases}$$

dont la solution en régime permanent est de la forme :

$$y_j(t) = H(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} \quad (7)$$

Si on reporte (7) dans (6) on obtient :

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 M + 2i\bar{\omega} \zeta \omega + k} \quad : \text{appelé fonction de réponse en fréquence complexe.}$$

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\zeta + 1)} \quad \text{avec } \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

La réponse sera donc :

$$y_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\omega}=-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) c(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega}$$

la réponse en fréquence complexe à une fréquence d'excitation $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1$ sera :

$$H(n\bar{\omega}_1) = \frac{1}{k(-n^2\beta_1^2 + 2in\beta_1\xi + 1)}$$

$$\beta_1 = \bar{\omega}_1/\omega$$

par le principe de superposition, on obtient la réponse suivante :

$$y_j(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\bar{\omega}_1) C_n e^{in\bar{\omega}_1 t}$$

b/ transformation de FOURIER dite rapide

ona :

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\bar{\omega}_1 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) e^{-in\bar{\omega}_1 t} dt$$

* transformation directe de FOURIER

Si on divise l'intervalle de la période T_p en intervalles élémentaires :

$$\Delta t = T_p/N_p \quad \Rightarrow \quad C_n = \frac{\Delta t}{T_p} \sum_{k=0}^{N_p-1} F(k) e^{-in\bar{\omega}_1 k \Delta t}$$

$$t = k \Delta t \quad k = 0, \dots, N_p-1.$$

$$C_n = \frac{1}{N_p} \sum_{k=0}^{N_p-1} F(k) e^{-i \frac{2\pi}{N_p} n k}$$

on peut remarquer que :

$$C_{N_p-n} = C_{-n}$$

d'où on peut déterminer les C_n ($n = 1, 2, \dots$)

* transformation inverse de FOURIER

connaissant les coefficients C_n du spectre en déduire la fonction $F(t)$

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\bar{\omega}_1 t}$$

Si on pose encore $\Delta t = T/N_p$, on $t = k \Delta t$

$$F(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2\pi}{N_p} n k}$$

En supposant que l'on connaît les coefficients C_n entre $C_{-N_p/2}$ et $C_{N_p/2}$ et que les autres peuvent être négligés, on peut écrire :

$$F(k) = \sum_{n=-N_p/2}^{N_p/2} C_n e^{i \frac{2\pi}{N_p} nk}$$

et comme : $C_{N_p-n} = C_{-n}$, $F(k)$ devient :

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N_p-1} C_n e^{i \frac{2\pi}{N_p} nk}$$

c/ Etapes de calcul

Etape 1 : transformation directe de FOURIER.

Connaissant $F(k)$, $k=0, \dots, N_p-1$

N_p points échantonnés de l'accélérogramme, on détermine les coefficients de FOURIER C_n .

Etape 2 : calcul des Coefficients de FOURIER de la réponse :

$$A_n = H(n\bar{\omega}_a) C_n$$

Etape 3 : transformation inverse de FOURIER.

à partir de A_n , $n=0, N_p-1$, on détermine la réponse $x(k)$.

$$y_j(k) = \sum_{n=0}^{N_p-1} A_n e^{i \frac{2\pi}{N_p} nk}$$

Etape 4 : Superposition des modes.

$y_j(k)$ étant déterminée pour chaque mode, on procède à la superposition de tous les modes on obtient alors :

$$[x(t)] = [\phi][y(t)]$$

Etape 5 : Détermination des forces lors de la réponse :

$$[F(t)] = [K][x(t)]$$

où :

$[x(t)]$ étant les vecteurs déplacements et $[K]$ la matrice de rigidité.

III / Etude d'après un spectre de réponse (Méthode Spectrale)

cette méthode est une simplification de la première. Dans ce cas, la structure est supposée soumise à un séisme, agissant dans une direction donnée, et défini par son spectre de réponse.

le calcul des efforts se décompose comme suit :

1^{ère} Etape : Calcul des modes propres de vibration.

on effectue la recherche des modes propres de vibration de la structure supposée libre non amortie.

En pratique, seuls les premiers modes dans un classement par valeur décroissante de périodes propres sont à retenir, car eux seuls sont excités de façon notable. De plus, les modes élevés n'ont, en général, pas de sens physique car ils peuvent provenir d'un manque de précision du modèle, dû, par exemple, à la concentration des masses aux nœuds.

2^{ème} Etape : Calcul des réponses modales.

On étudie la réponse pour chaque mode propre de vibration séparément; deux variantes sont possibles selon la nature du spectre utilisé.

1) Si on utilise un spectre de déplacements, les déplacements maxima selon le mode j sont donnés par :

$$X_j = x_j a_j \phi_j \quad \text{avec } a_j \text{ étant le coef. de répartition}$$

x_j étant la valeur lue sur le spectre. $a_j = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \phi_{kj}}{\sum_{k=1}^n m_k \phi_{kj}^2}$

ϕ_j étant le vecteur propre du mode j .

Les efforts dans chaque élément de la structure sont ensuite calculés d'après les déformations qui résultent de ces déplacements.

2) Si on utilise un spectre des accélérations, les pseudo-accelérations à appliquer aux masses sont donnés par le vecteur :

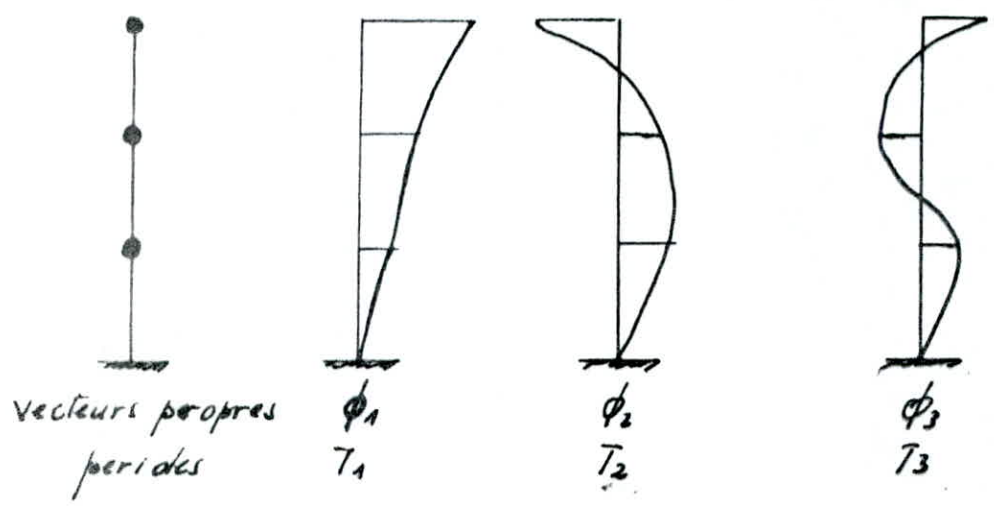
$$\Gamma_j = \gamma_j a_j \phi_j$$

γ_j étant la valeur lue sur le spectre.

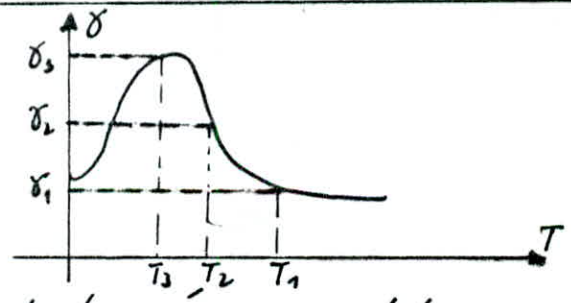
les forces statiques équivalentes sont le produit des masses par les pseudo-accelerations. Appliquées à la structure, elles engendrent des déplacements et des efforts que l'on peut calculer par la méthode usuelle de la R.D.M.

» principe de l'étude à l'aide d'un spectre de réponse :

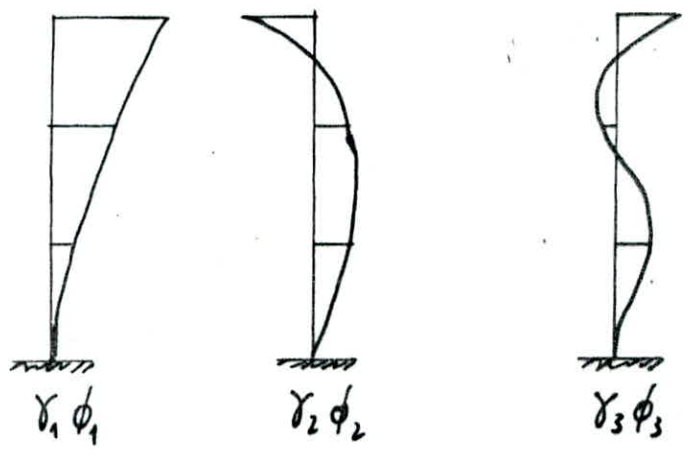
a) Calcul des modes propres de vibration.



b) lecture de la valeur de l'accélération δ_j sur le spectre.



c) Calcul des réponses modales.



3^{ème} étape : Selection des modes utiles

Pour la suite de l'étude, on ne conserve que les modes qui donnent des efforts notables, la selection s'effectuant d'après la valeur maximum de l'énergie potentielle emmagasinée dans la structure lors du mouvement.

Pour le mode j , cette énergie a pour expression :

$$\bar{E}_j = \frac{1}{2} X_j^t K X$$

X_j^t représente le vecteur transposé du vecteur u_j des déplacements relatifs maxima selon le mode j .

4^{ème} étape : choix du coefficient d'amortissement

Pour effectuer la lecture des spectres de réponse qui sont fonction du coefficient d'amortissement, il convient pour chaque mode de déterminer un coefficient d'amortissement, deux cas peuvent se présenter :

1°/ la structure est constituée de matériaux ayant le même coefficient d'amortissement.

on adopte alors pour chaque mode un coefficient identique lu sur le tableau suivant :

matériau	charpente métallique soudée	Béton Précontraint	charpente métallique boulonnées	Béton Armé
100 %	4	5	7	7

Nota : Ce tableau est donné par : U.S. Atomic Energy Commission.

Regulation Guide 1,61, octobre 1973.

2°/ la structure est constituée de matériaux ayant des coefficients d'amortissement différents.

Dans ce cas, on utilise le coefficient d'amortissement moyen.

$$\xi = \frac{\sum E_i \xi_i}{\sum E_i}$$

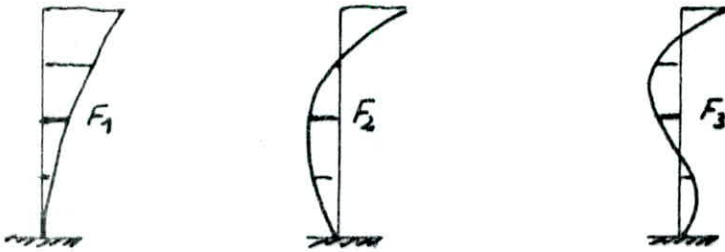
E_i : module de young du matériau i .

ξ_i : coefficient d'amortissement du matériau i .

5^e Etape : Calcul des forces sismiques.

Après avoir sélectionner les modes utiles on fait la moyenne quadratique des forces obtenues pour chacun de ces modes car tous les modes ne sont pas en phase.

Superposition quadratique :

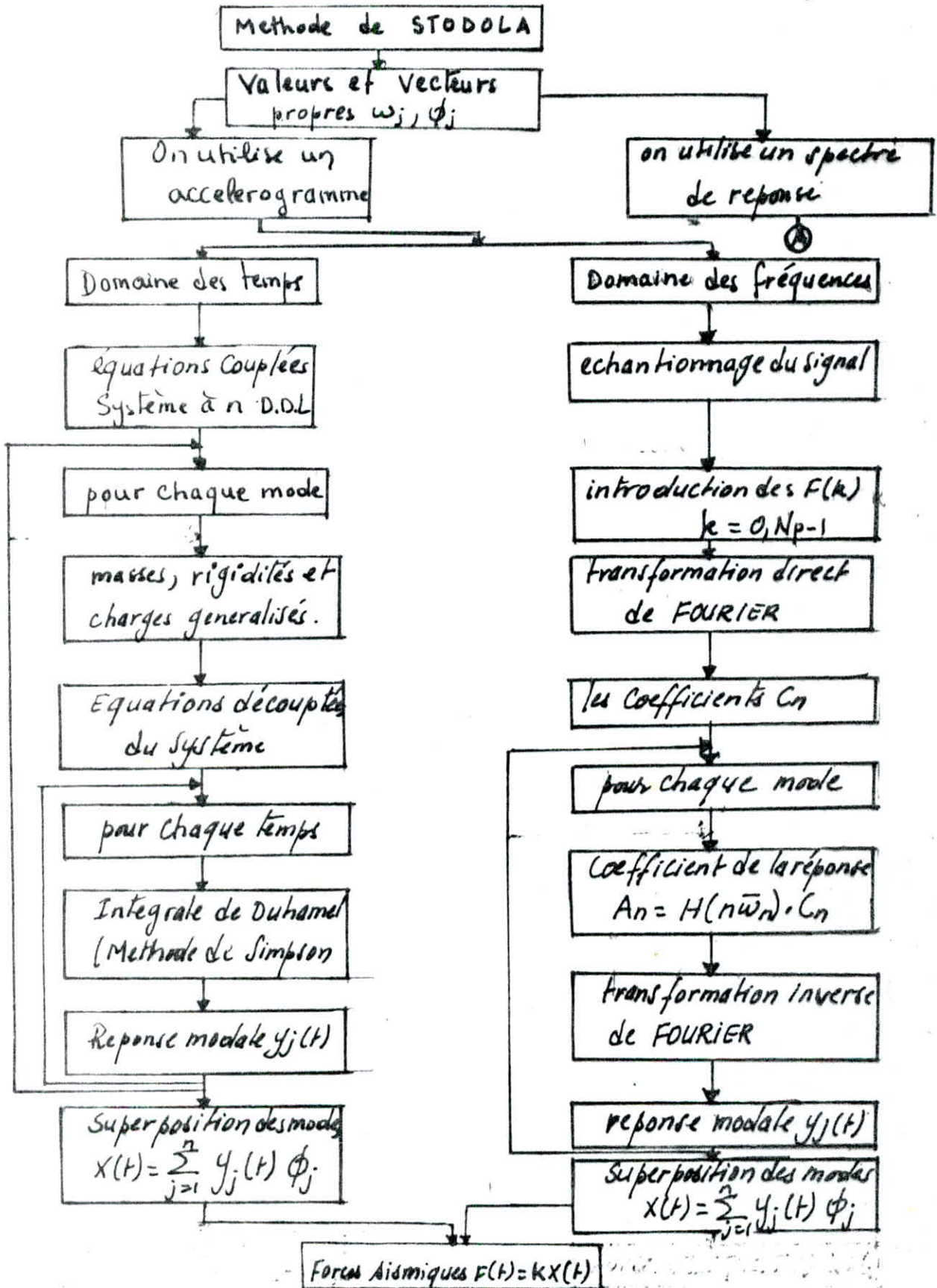


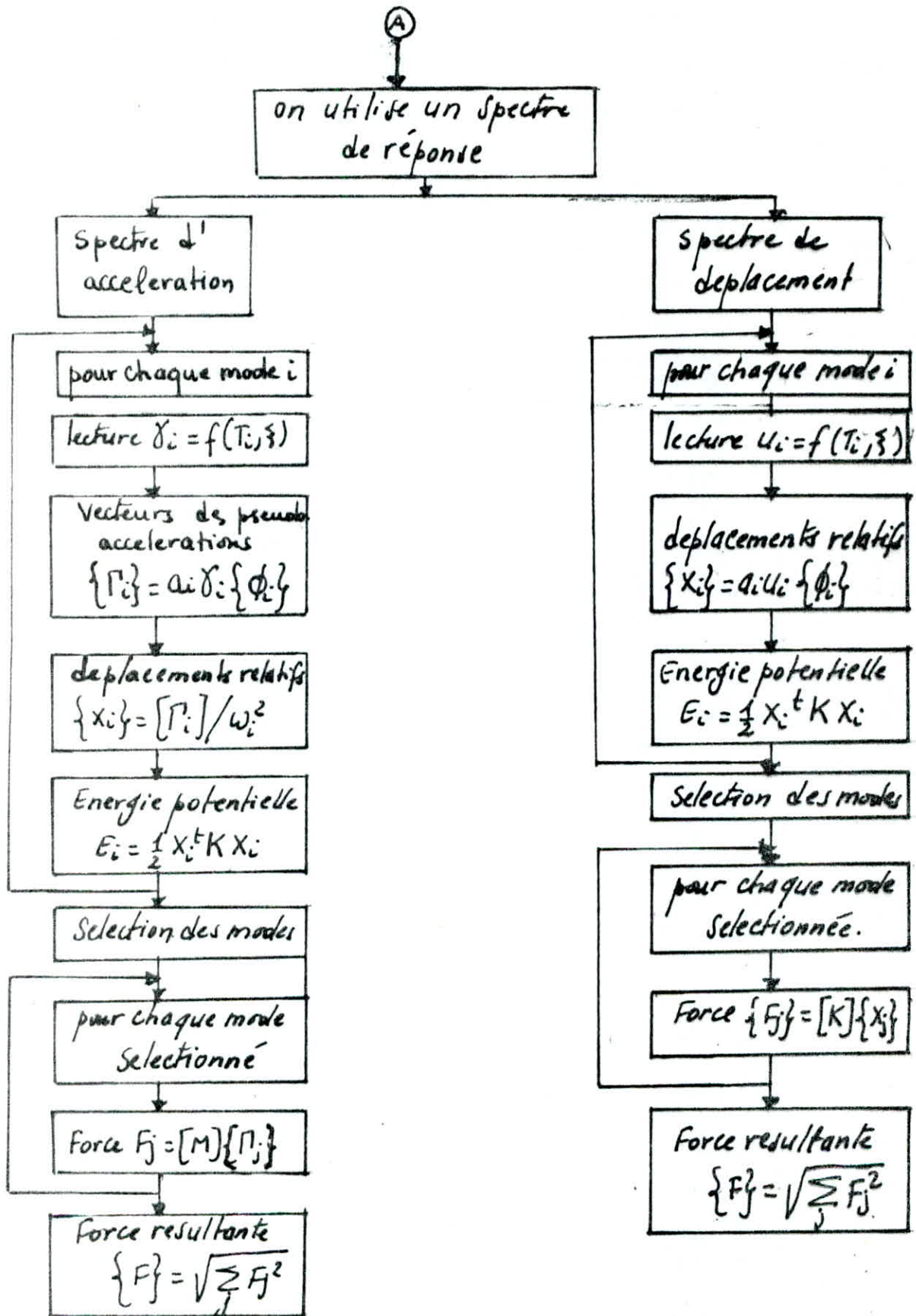
A l'étage k , la force sismique est donnée par la moyenne quadratique

$$F_k = \sqrt{\sum_j F_{kj}^2}$$

F_{kj} : Force sismique à l'étage k pour le mode j .

Organigramme pour la détermination des forces sismiques:





Chap VII STRUCTURES CONTREVENTEES PAR PORTIQUES

I/ Répartition des efforts

En admettant l'hypothèse de l'indeformabilité des planchers dans leur plan horizontal, chaque portique élémentaire subit le même déplacement donc chaque portique reprend un effort proportionnel à sa rigidité latérale.

Soient : F_1, F_2, \dots, F_n les forces sismiques calculées précédemment.

$F_{1L}, F_{2L}, \dots, F_{nL}$ Les forces dans le sens longitudinal.

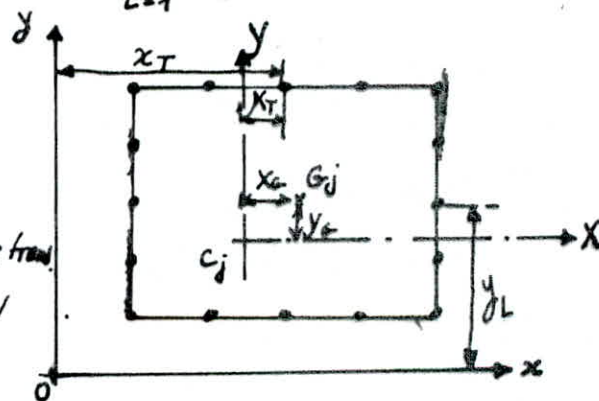
$F_{1T}, F_{2T}, \dots, F_{nT}$ Les forces dans le sens transversal.

Le centre de torsion C_j à l'étage j a les coordonnées suivantes :

$$x_c = \frac{\sum_{T=1}^k K_{JT} x_T}{\sum_{T=1}^k K_{JT}} \quad \text{et} \quad y_c = \frac{\sum_{L=1}^{L=m} K_{jL} y_L}{\sum_{L=1}^{L=m} K_{jL}}$$

où :

- K_{JT} et K_{jL} sont les rigidités du niveau j dans le sens transversal et longitudinal.
- G_j : Le centre de gravité de l'étage j .
- x_T et y_L sont les distances d'un portique transversal à l'axe oy et d'un portique longitudinal à l'axe ox .



Les rigidités à la torsion à l'étage j s'écrit comme suite :

$$K_{j0} = \sum_{T=1}^k K_{JT} (x_T)^2 + \sum_{L=1}^{L=m} K_{jL} (y_L)^2$$

où :

K_{j0} est la rigidité à la torsion à l'étage j .

x_T est la distance d'un portique transversal à l'axe oy .

y_L est la distance d'un portique longitudinal à l'axe ox .

K_{JT} et K_{jL} sont définies plus haut.

d'où les efforts repartis suivant les deux sens :

sens longitudinal :

$$F_{jL}^e = F_{jL} \frac{K_{jL}}{\sum_{L=1}^m K_{jL}} + F_{jL} y_G \frac{K_{jL} y_L}{K_{j0}}$$

F_{jL}^e est l'effort sismique du niveau j revenant au portique longitudinal e

sens transversal :

$$F_{jT}^t = F_{jT} \frac{K_{jT}}{\sum_{T=1}^k K_{jT}} + F_{jT} X_G \frac{K_{jT} X_T}{K_{j0}}$$

F_{jT}^t est l'effort sismique du niveau j revenant au portique transversal t .

II/ Methode des déplacements

Dans notre cas, on utilise la méthode des déplacements qui est à la base des grands programmes actuels et qui se prête bien à la programmation.

Cette méthode a été conçue pour le calcul des structures hyperstatiques formées de barres généralement droites encastrees aux noeuds et que l'on désigne habituellement du nom de portique ou cadre.

Cette méthode prend comme inconnues les déplacements subis par les noeuds de la structure, c'est à dire translations et rotations, qui permettent d'arriver à la position déformée. Le nombre d'inconnues est donc égal au nombre de déplacements des noeuds.

Avant de commencer le calcul proprement dit, il faut choisir le portique qu'on veut étudier, ensuite il faut faire rentrer tous les données nécessaires sous forme d'un fichier "fichier des données". Ce fichier comportera les valeurs des forces sismiques, ainsi que leurs points d'application (numéro de noeud), le code des charges, position des noeuds dans le repere global, les noeuds debut et fin de chaque de chaque barre, section et inertie de chaque barre.

II.2. Principe de la méthode

Pour les structures élastiques, la position déformée est une position d'équilibre. Cette position est définie à partir des déplacements (rotation et translation) de chaque

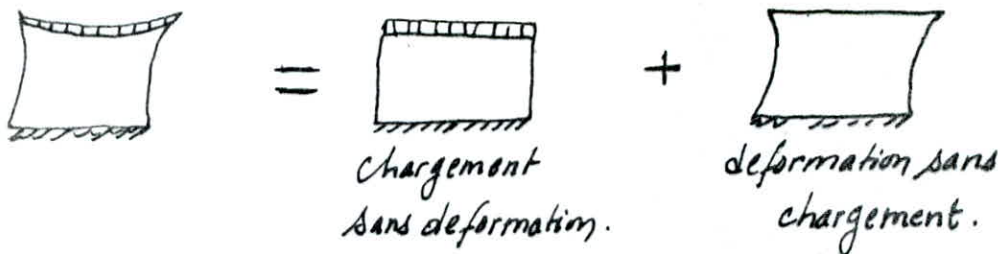
noeud, nous pouvons ainsi trouver les efforts dans chaque barre.

une étape préliminaire de la méthode des déplacements consiste à remplacer la structure initiale par une autre appelée système statique de base (provenant de la première) où sont introduites les liaisons supplémentaires pour empêcher toute possibilité de déplacement des noeuds.

La méthode des déplacements prend comme inconnues les déformations. En écrivant les conditions d'équilibre de chaque noeud vis à vis de la translation et de la rotation, on obtient les équations de conditions nécessaires pour déterminer les valeurs inconnues des déplacements.

Cette méthode se base sur le principe simple de la superposition des états d'équilibre qui sont les suivants :

Chargement sans déformation + déformation sans chargement.



En appliquant le principe de superposition, nous pouvons écrire :

$$X_1 K_{i1} + X_2 K_{i2} + \dots + X_i K_{ii} + \dots + X_n K_{in} + F_i = 0$$

avec :

n : nombre de noeuds de la structure réelle.

X_1, X_2, \dots, X_n : représentent les valeurs des déplacements inconnues.

$K_{i1}, K_{i2}, \dots, K_{in}$: réaction (force ou moment) qui apparaît dans la liaison " i " quand un déplacement unitaire se produit suivant la direction du déplacement j .

En écrivant l'équation d'équilibre pour chaque noeud, on obtient un système de " n " équations à " n " inconnues.

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} X_j = -F_i \quad i=1, 2, 3, \dots, n$$

K_{ij} étant le coefficient de rigidité.

Le système d'équation peut être écrit sous forme matricielle comme suit :

$$[K][u] = [F]$$

$[K]$: matrice de rigidité de la structure (matrice symétrique).

$[U]$: vecteur déplacement des nœuds de la structure.

$[F]$: vecteur force extérieure agissant sur la structure.

II.3. Matrice de rigidité d'une structure plane

on appelle matrice de rigidité $[K]$ d'une structure, la matrice formée par les vecteurs charges appliqués aux différents nœuds en fonction des vecteurs déplacements de ces derniers.

Elle est donc définie par la relation $[F] = [K][U]$

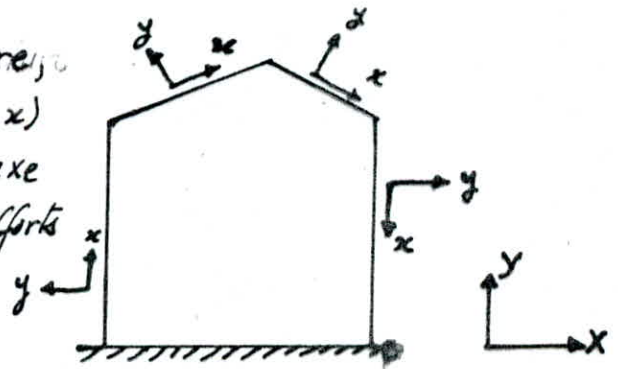
Cette matrice $[K]$ résulte directement des équations d'équilibre et de continuité.

Comme la structure est formée d'un assemblage d'éléments (barres) qui peuvent être étudiés séparément, on est donc amené à utiliser deux repères différents:

Ces deux repères sont appelés: repère global et repère local.

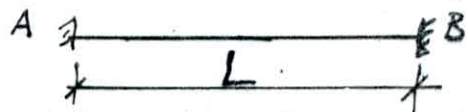
Repère global: c'est le repère x, y , de la structure. Il sert à définir les coordonnées des nœuds, les réactions des appuis et les déplacements des nœuds seront exprimés dans ce repère.

Repère local: c'est le repère x, y , de la barre, défini par la fibre neutre de la barre (axe x) orientée du nœud début au nœud fin, et l'axe y directement perpendiculaire à l'axe x . Les efforts M, N, T seront exprimés dans ce repère.



II.3.1. Détermination de la matrice de rigidité dans le repère local

Soit une barre biencastée à ses extrémités. Cette barre est soumise à des déplacements imposés à ses extrémités.



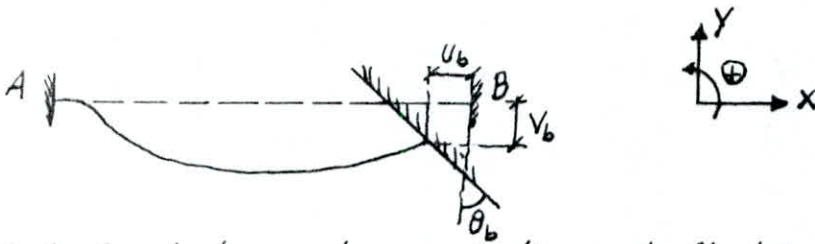
Les équations d'équilibre pour ce système hyperstatique donnent :

$$N_a + N_b = 0$$

$$T_a + T_b = 0$$

$$M_a + M_b + T_a L = 0$$

où L est la longueur de la barre.



les efforts dans la barre dans une section x de l'extrémité sont :

$$N = N_b$$

$$M = T_b(L-x) + M_b$$

$$T = T_b$$

En négligeant l'effet de cisaillement et de la torsion dans l'expression de l'énergie potentielle totale, nous aurons :

$$W = \frac{1}{2} \left[\int_0^L \frac{N_b^2}{ES} dx + \int_0^L \left(\frac{(T_b(L-x) + M_b)^2}{EI} \right) dx \right]$$

$$W = \frac{1}{2E} \int_0^L \left[\frac{N_b^2}{S} + \frac{T_b^2(L-x)^2}{I} + \frac{2T_b M_b(L-x)}{I} + \frac{M_b^2}{I} \right] dx$$

Compte tenu des déplacements imposés u_b , v_b et θ_b de l'extrémité droite nous pouvons écrire en ce point :

$$u_b = \frac{dW}{dN_b} = \frac{N_b}{E} \int_0^L \frac{dx}{x}$$

$$v_b = \frac{dW}{dT_b} = \frac{1}{E} \left[T_b \int_0^L \frac{(L-x)^2}{I} dx + M_b \int_0^L \frac{(L-x)}{I} dx \right]$$

$$\theta_b = \frac{dW}{dM_b} = \frac{1}{E} \left[T_b \int_0^L \frac{(L-x)}{I} dx + M_b \int_0^L \frac{dx}{I} \right]$$

on considère que l'inertie I et la section S sont constantes, On peut alors écrire après intégration les déplacements imposés en fonction des efforts internes. Réciproquement, les efforts peuvent être exprimés aussi en fonction des déplacements :

$$N_b = \frac{ES}{L} u_b.$$

$$T_b = \frac{12EI}{L^3} v_b - \frac{6EI}{L^2} \theta_b.$$

$$M_b = -\frac{6EI}{L^2} v_b + \frac{4EI}{L} \theta_b.$$

Sous la forme matricielle, nous aurons :

$$\begin{vmatrix} N_b \\ T_b \\ M_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ES/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_b \\ v_b \\ \theta_b \end{vmatrix}$$

Un calcul similaire permet de donner les efforts provoqués par des déplacements (u_a, v_a, θ_a) de l'extrémité gauche de la barre, nous pouvons ainsi reconstituer toujours par une formulation matricielle une relation liant les efforts aux déplacements pour la barre AB :

$$\begin{vmatrix} N_a \\ T_a \\ M_a \\ N_b \\ T_b \\ M_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ES/L & 0 & 0 & -ES/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -ES/L & 0 & 0 & ES/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_a \\ v_a \\ \theta_a \\ u_b \\ v_b \\ \theta_b \end{vmatrix}$$

Nous remarquons que la matrice $[K]$ ainsi obtenue est symétrique.

Afin de simplifier les écritures, la matrice $[K]$ peut s'écrire sous la forme :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_a] & [L_b] \\ [L_a] & [K_b] \end{bmatrix} \quad \text{où } [K_a], [K_b], [L_a] \text{ et } [L_b] \text{ sont des sous matrices de dimensions } 3 \times 3.$$

Pour déterminer la matrice $[K]$ complètement, il suffit de connaître une des 4 sous-matrices précédentes, les 3 autres s'obtiennent ensuite à l'aide de transformations matricielles simples.

On prend la matrice de rigidité inférieure droite. Pour obtenir les autres nous utiliserons deux matrices de transformations que nous noterons $[T_1]$ et $[T_2]$

avec :

$$[T_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix}$$

Nous avons alors :

$$[L_b] = [T_2][K_b]$$

$$[L_a] = [K_b][T_1]$$

$$[K_a] = [L_b][T_1]$$

Il est à remarquer que des problèmes de résistance des matériaux sont ramenés à des simples multiplications de matrices, ce qui présente des avantages sur le plan informatique.

II.3.2 Détermination de la matrice de rigidité dans le repère global

les relations trouvées jusqu'ici, ne supposaient qu'un seul système d'axes qui était celui de la barre.

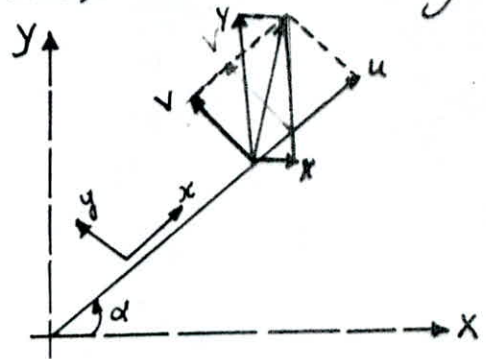
les réactions d'appuis et les déplacements des nœuds seront donnés dans le système d'axe global.

les relations liant les déplacements dans le repère local (u, v, θ) à ceux dans le repère (x, y, θ) s'exprime comme suit :

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$\theta = \theta$$



Soit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

Ainsi les efforts (N, T, M) exprimés dans le repère local se déduisent des efforts (H, V, C) liés au repère global par :

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix}$$

Soit
$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[R]$ est appelée matrice de Rotation de la barre.

$[R][R]^T = [I]$ donc $[R]^{-1} = [R]^T$ (orthogonalité de la matrice $[R]$)

Soit :

$[\bar{F}]$: vecteur-force dans le repère global.

$[\bar{u}]$: vecteur-déplacement dans le repère global.

$$[F] = [R][\bar{F}] \quad \text{et} \quad [u] = [R][\bar{u}]$$

$$\begin{aligned} [F] &= [K][u] &\rightarrow [R][\bar{F}] &= [K][R][\bar{u}] \\ & &\rightarrow [\bar{F}] &= [R]^{-1}[K][R][\bar{u}] \\ & &\rightarrow [\bar{F}] &= [R]^T[K][R][\bar{u}] \\ & &\rightarrow [\bar{F}] &= \underbrace{[R]^T[K][R]}_{[\bar{K}]}[\bar{u}] \end{aligned}$$

avec $[\bar{K}] = [R]^T[K][R]$

$[\bar{K}]$ c'est la matrice de rigidité de la barre dans le repère global.

Pour trouver donc la matrice de rigidité d'une barre dans le repère global, il suffit de transformer les sous-matrices K_a, L_a, L_b et K_b dans le repère global,

On obtient :

$$\begin{aligned} [K_a] &= [R]^T[K_a][R] & [L_a] &= [R]^T[L_a][R] \\ [L_b] &= [R]^T[L_b][R] & [K_b] &= [R]^T[K_b][R] \end{aligned}$$

Sur le plan informatique, cela se traduit par l'introduction des matrices $[R]$ et $[R]^T$, le programme se charge des différentes multiplications matricielles citées ci-dessus.

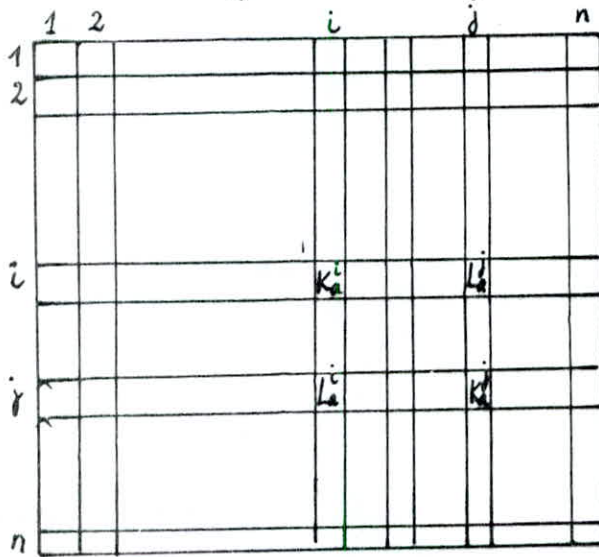
La matrice de rigidité trouvée ci-dessus est celle de la barre et non de la structure. Pour trouver la matrice de rigidité globale de la structure il faut assembler tous les matrices de rigidités constructives de chaque barre.

Pour une structure plane à n nœuds, le nombre de degrés de liberté est $3n$, la matrice de rigidité globale aura pour dimension $3n \times 3n$. Nous avons à résoudre donc un système de $3n$ équations à $3n$ inconnues.

Soit la barre "a", appartenant à la structure, allant du nœud i au nœud j.

$$[K_a] = \begin{bmatrix} [K_a^i] & [L_a^j] \\ [L_a^i] & [K_a^j] \end{bmatrix}$$

- $[K_a^i]$: matrice liant les efforts du nœud i dûs au déplacement du nœud i.
- $[K_a^j]$: matrice liant les efforts du nœud j dûs au déplacement du nœud j.
- $[L_a^i]$: matrice liant les efforts du nœud i dûs au déplacement du nœud j.
- $[L_a^j]$: matrice liant les efforts du nœud j dûs au déplacement du nœud i.



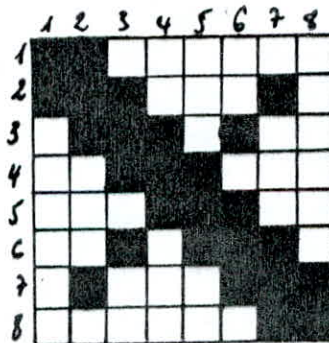
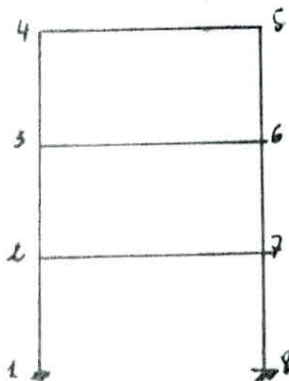
□ matrice 3x3

Nous procédons de la même manière pour les autres barres de la structure.

II.4. Influence de la numérotation des nœuds

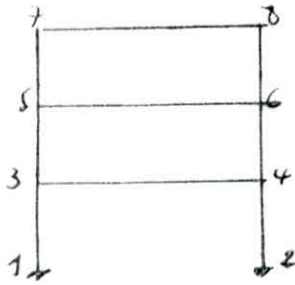
Il apparaît de ce qui précède que la numérotation est arbitraire pour la formation de la matrice de rigidité.

Exemple de l'aspect bande



Mauvaise numérotation

$$L_b = 6$$



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	■							
2		■						
3			■					
4				■				
5					■			
6						■		
7							■	
8								■

bonne numérotation $L_b = 3$

II.5. Propriétés de la matrice de rigidité globale

La matrice de rigidité présente quelques particularités, dont certaines sont intéressantes (surtout de point de vue économique de mémoire)

a) $[K]$ est une matrice symétrique.

$[K] = [K]^T$: on peut démontrer ceci d'après le théorème de Maxwell-Betti (conservation de travail)

b) $[K]$ est une matrice bande (Influence de la numérotation)

c) Stockage de la matrice demi-bande (car $[K]$ est symétrique)

d) $[K]$ est défini positif.

II.6. Vecteur-force de la structure

Le vecteur-force de la structure est formé à partir des charges extérieures, qui sont de deux types :

- Charges appliquées aux nœuds.
- Charges appliquées aux barres.

II.7. Conditions aux limites

La matrice de rigidité de la structure est l'assemblage des matrices de rigidité des barres. La méthode des déplacements conduit, à calculer les déplacements en chaque nœud il importe donc de connaître dans la matrice de rigidité, les termes relatifs aux appuis.

Les déplacements fixes de la structure sont connus, pour la résolution du système, une modification de la matrice de rigidité $[K]$ et du vecteur $[F]$ sont indispensables, il existe différentes méthodes de mener bien cette modification.

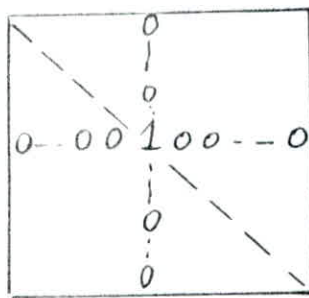
Dans notre projet, on utilise celle qui consiste à conserver la disposition de la matrice $[K]$, tout en remplaçant les lignes et les colonnes correspondant aux noeuds appuyés par des zéros "0", en mettant toute fois la valeur un "1" pour le terme diagonal (afin d'éviter que la matrice ne soit singulière). Et de même, on placera un zéro sur la ligne correspondante du vecteur-force.

Ainsi, si " x_0 " est le déplacement inconnu, nous aurons à résoudre :

$$1 \times x_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad x_0 = 0.$$

Ce qui représente le résultat escompté pour un noeud appui, et compte tenu de la colonne zéro le terme n'interviendra dans aucune autre équation.

Par analogie, ceci se traduira pour la matrice de rigidité demi-bande comme suit :



$[K]$ complète



$[F]$

\equiv



$[K]$ demi-bande

II.8. Résolution du système : $[F] = [K][u]$

$[K]$ et $[F]$ sont connus.

Après l'introduction des conditions d'appuis, nous sommes alors en mesure de résoudre le système d'équations linéaires.

$$[K][u] = [F] \quad \text{où} \quad [u] \text{ est le vecteur déplacement inconnu.}$$

Il existe plusieurs méthodes de résolution :

- Méthodes directes
 - Méthode de Gauss (ou de substitution)
 - Méthode de Cholesky.
- Méthodes itératives
 - Méthode de Gauss-Seidel.

Au niveau de notre programme on utilisera la méthode de Gauss (ou de substitution).

Elle consiste à exprimer chacune des inconnues en fonction des autres, et de la substituer dans les autres équations, afin de rendre la matrice $[K]$ triangulaire supérieure ou inférieure. la résolution sera donc simple car ayant déterminé un déplacement on trouvera le second en fonction du premier et ainsi de suite.

II.9. Calcul des efforts internes dans les barres:

le calcul par la méthode des déplacements se base sur le principe de superposition des états d'équilibre qui sont:

- chargement sans déformation + déformation sans chargement.

$$\text{d'où } [F_a] = [F_a'] + [F_a'']$$



avec :

$N_0'', T_0'', \dots, M_1''$ étant les efforts à appliquer sur la barre sans chargement
 N_0', T_0', \dots, M_1' étant les efforts dus à des déplacements imposés des extrémités de la barre.

On connaît les déplacements des nœuds i et j d'une barre "a" qui peuvent être exprimés dans son repère local comme suit :

$$[u_a^i] = [R_a][u^i] \quad \text{et} \quad [u_a^j] = [R_a][u^j]$$

le terme $[F_a']$ est donné par la relation :

$$[F_a'^i] = [K_a^i][R_a][u^i] + [L_a^j][R_a][u^j] \quad \text{au nœud } i$$

et de façon similaire pour l'autre extrémité.

Nous pourrions alors calculer complètement les efforts dans les barres aux deux extrémités.

$$\text{pour le nœud } i : [F_a^i] = [K_a^i][R_a][u^i] + [L_a^j][R_a][u^j] + [F_a''^i]$$

$[F_a''^i]$: forces dues aux charges sur les barres.

II.10. Calcul des réactions d'appuis :

les efforts dans toutes les barres sont complètement déterminés, les réactions d'appuis s'obtiennent par application du principe de l'action et la réaction. L'équilibre du nœud donne donc :

$$[F_0^i] = \sum_a [R_a][F_a^i]$$

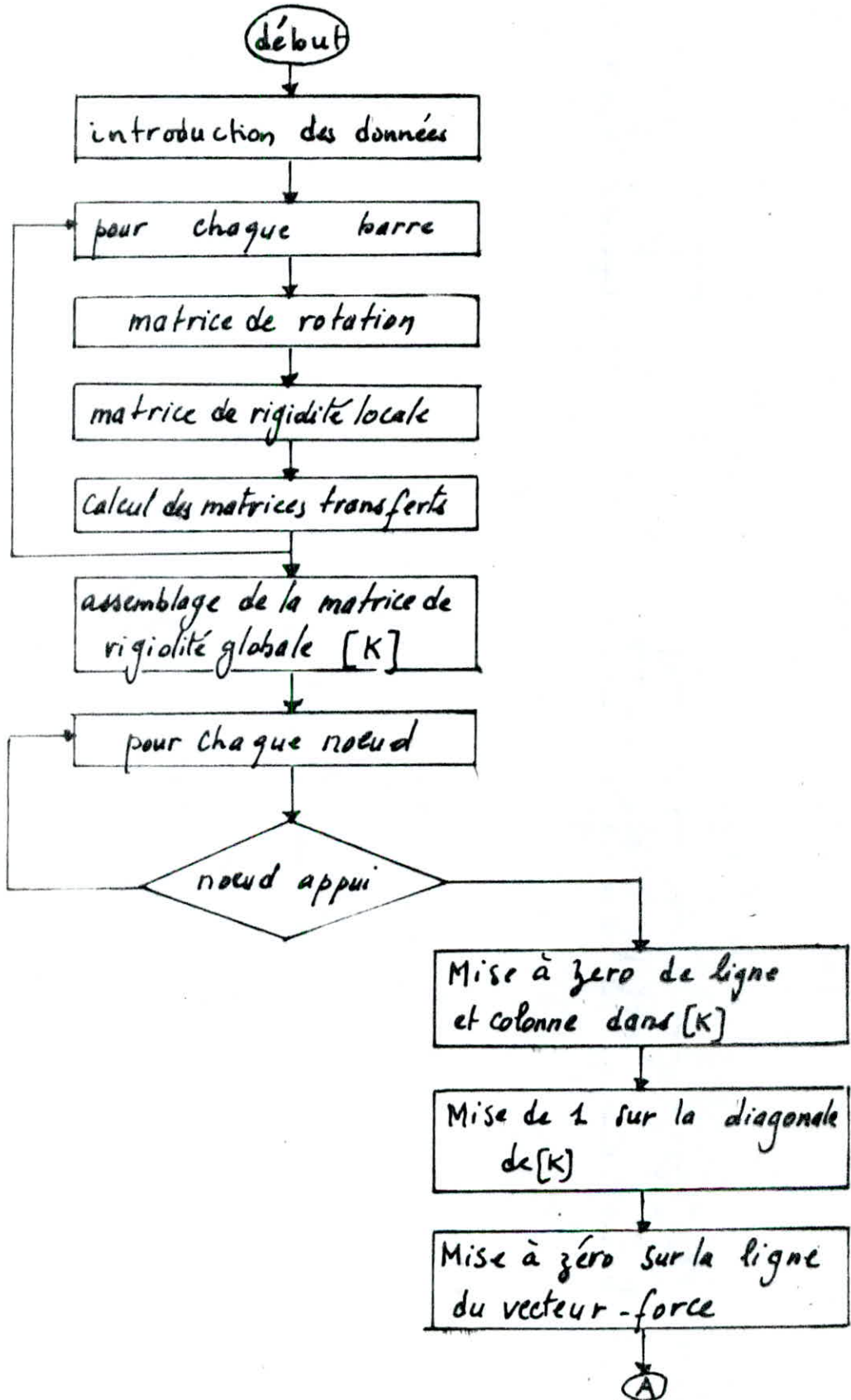
avec :

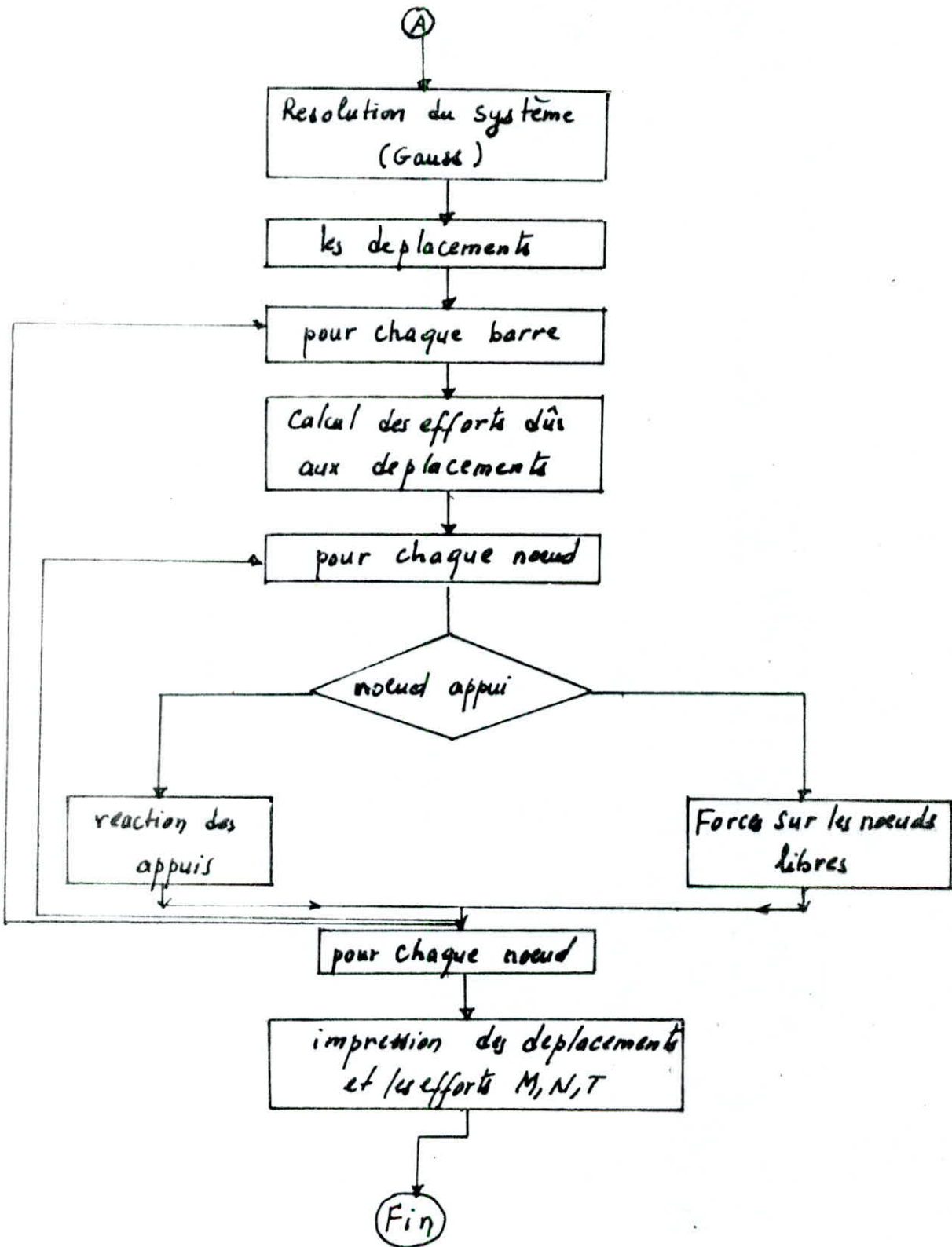
$[F_0^i]$: vecteur réaction du nœud i

$[R_a]$: matrice de rotation pour la barre a .

$[F_a^i]$: vecteur des efforts internes aux deux extrémités de la barre a .

En écrivant cette égalité pour chaque nœud, nous trouverons les réactions d'appuis. Pour les nœuds non appuis, nous retrouverons comme réactions d'appuis, les forces qui leurs étaient directement appliquées, ceci nous permet de vérifier l'équilibre des nœuds.

Organigramme de la methode des déplacements



STRUCTURES CONTREVENTEES PAR VOILES

I/ Répartition des efforts

Soient: F_1, F_2, \dots, F_n les forces sismiques calculées précédemment.

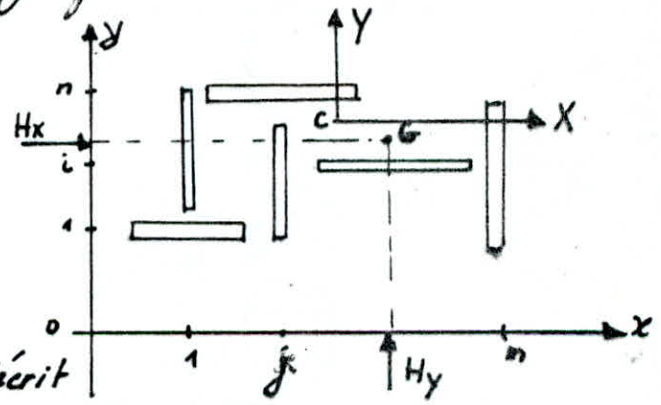
: $F_{T1}, F_{T2}, \dots, F_{Tn}$ les forces dans le sens transversal.

: $F_{L1}, F_{L2}, \dots, F_{Ln}$ " " " " longitudinal.

• le centre de torsion C_j à l'étage j a les coordonnées suivantes :

$$x_c = \frac{\sum_1^m I_{y_j} x_j}{\sum_1^m I_{y_j}}$$

et
$$y_c = \frac{\sum_1^n I_{x_i} y_i}{\sum_1^n I_{x_i}}$$



• l'inertie de torsion (polaire) s'écrit comme suit :

$$J_0 = \sum_1^n I_{x_i} y_i^2 + \sum_1^m I_{y_j} x_j^2$$

• les efforts répartis suivant les deux sens :

Réfends parallèles à oy :

$$F_{y_j} = F_y \left[\frac{I_{y_j}}{\sum_1^m I_{y_j}} + x_c \frac{I_{y_j} x_j}{J_0} \right]$$

Réfends parallèles à ox :

$$F_{x_i} = F_x \left[\frac{I_{x_i}}{\sum_1^n I_{x_i}} + y_c \frac{I_{x_i} y_i}{J_0} \right]$$

II/ Détermination des efforts dans les refends et dans les linteaux

1/ refends pleins

leur étude consiste à les considérer comme des consoles.

2/ refends à ouvertures

Pour calculer les efforts sollicitants les éléments de refends avec ouvertures, on applique la méthode proposée par MM. ALBIGES ET GOULET qui admet pour hypothèses :

a/ la liaison discontinue des linteaux est assimilée à une liaison continue.

b/ la déformation d'effort normal des linteaux est négligeable devant le déplacement horizontal des éléments de refend au même niveau.

c/ les éléments de refend sont encastres à la base.

d/ les caractéristiques mécaniques doivent être constantes sur toute la hauteur du refend ou s'ils varient, ils suivent une même variation pour tous les refends.

e/ Hauteur d'étage constante.

f/ les efforts horizontaux sont supposés uniformément répartis sur toute la hauteur.

cette méthode est rigoureuse pour le cas de bâtiments présentant des refends avec fûts d'ouvertures en utilisant la notion d'inertie équivalente I_e .

Définition : l'inertie équivalente " I_e " est égale à l'inertie du refend plein qui aurait la même flèche au sommet que le refend avec fûts d'ouvertures; soumis à une charge répartie horizontale uniforme pour le vent et triangulaire pour le séisme.

Résolution générale

effort tranchant dans les linteaux

notations :

$$2C_i = \vartheta'_i + 2a_i + \vartheta_{i+1}$$

$$I_0 = \sum I_i$$

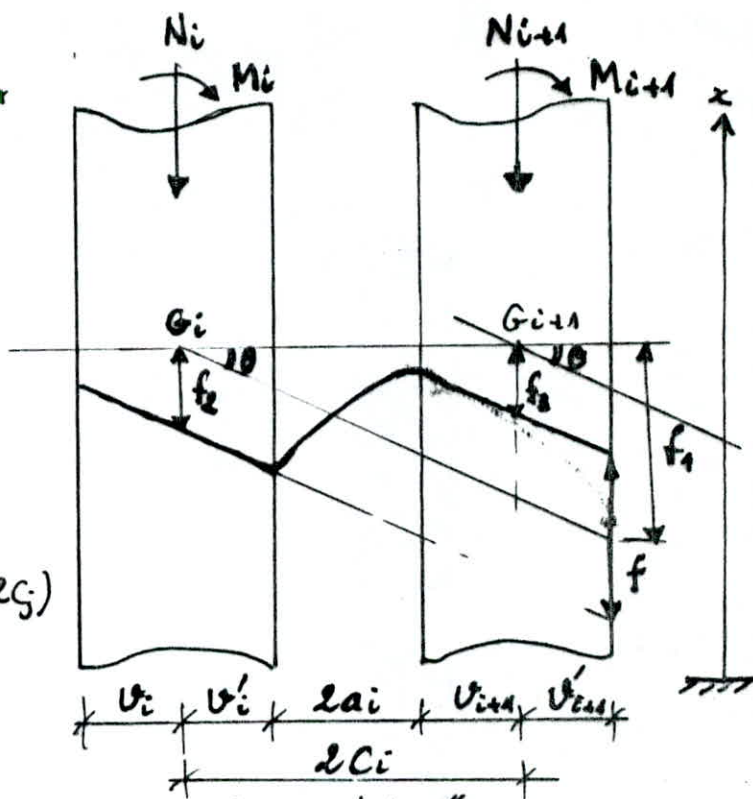
$$\Omega_0 = \sum \Omega_i$$

$$D = \frac{1}{\Omega_0} \left[\sum_i^n \Omega_i \left(\sum_1^{i-2} 2C_j \right) \right]$$

$$m_i = \begin{cases} m_1 = \Omega_1 D \\ m_i = m_{i-1} + \Omega_i \left(D - \sum_1^{i-1} 2C_j \right) \end{cases}$$

I : inertie totale du refend

$$I = I_0 + \sum 2C_i m_i$$



$$f = f_1 + f_2 - f_3 \quad (1) \quad \text{"compatibilité des flèches"}$$

$$f_1 = 2C_i \theta$$

$$f_2 = \int_0^{2a_i} \frac{N_i}{E \Omega_i} dx$$

$$f_3 = \int_0^{2a_{i+1}} \frac{N_{i+1}}{E \Omega_{i+1}} dx$$



$$f = \frac{\pi_i (2a_i)^3}{12 E' i_i} = \frac{2}{3} \frac{\pi_i a_i^3}{E' i_i}$$

avec : E' : module de young des refends.
 i_i : l'inertie du linteau i .

dérivons 2 fois (1) après avoir remplacé f_1 , f_2 et f_3 par leurs valeurs.

$$\frac{2a_i^3}{3E'i_i} \pi_i'' = 2C_i \theta'' + \frac{dN_i}{E_i \Omega_i dx} - \frac{dN_{i+1}}{E \Omega_{i+1} dx} \quad (2)$$

dN_i c'est l'accroissement de l'effort normal d'un niveau à l'autre.

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{\bar{\pi}_i - \bar{\pi}_{i+1}}{l} \quad ; \quad \frac{dN_{i+1}}{dx} = \frac{\bar{\pi}_{i+1} - \bar{\pi}_i}{l} \quad l : \text{hauteur d'étage.}$$

$$y_i''(x) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_i}{EI_i} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} EI_i = \frac{dM_i}{dx} \quad (3)$$

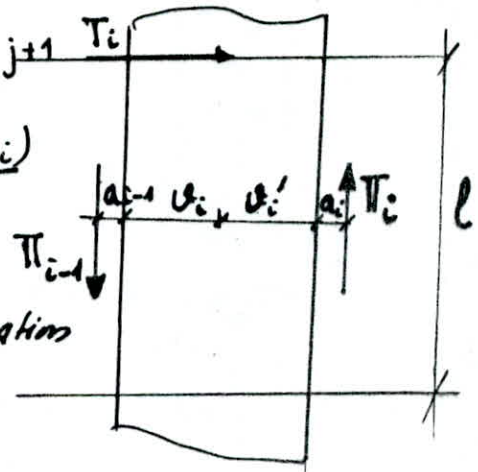
$$N_i = \sum \bar{\pi}_i$$

$$N_{i+1} = \sum \bar{\pi}_i - \sum \bar{\pi}_{i+1}$$

dM_i c'est l'accroissement du moment d'un niveau à l'autre.

$$T_i = T \left(\frac{I_i}{I_0} \right)$$

$$\frac{dM_i}{dx} = \frac{T_i l - \bar{\pi}_{i-1} (a_{i-1} + v_i) - \bar{\pi}_i (v_i + a_i)}{l} \quad (4)$$



après sommation de $i = 1, n$ de l'équation (4) on aura :

$$EI_0 \frac{d^2\theta}{dx^2} = T - \frac{1}{l} \sum_1^n 2c_j \bar{\pi}_j$$

L'équation fondamentale :

$$\frac{2a_i^3}{3i} \frac{EI}{E'} (\bar{\pi}_i'') = \frac{2c_i}{I_0} \sum_1^n 2c_j \bar{\pi}_j - \frac{\bar{\pi}_{i-1}}{S_{2i}} + \bar{\pi}_i \left(\frac{1}{S_{2i}} + \frac{1}{S_{2i+1}} \right) - \frac{\bar{\pi}_{i+1}}{S_{2i+1}} - \frac{2c_i l T}{I_0}$$

Etapes de calcul

1^{er} cas : voiles à une seule file d'ouverture

$$I_0 = I_1 + I_2$$

I : inertie totale du refend.

E : coefficient d'élasticité du matériau constituant le refend.

S_{21}, S_{22} : aire des éléments de refend 1 et 2

$$m = \frac{2c}{\frac{1}{S_{21}} + \frac{1}{S_{22}}} : \text{moment statique de}$$

chacun des éléments de refend par rapport au centre de gravité de l'ensemble.

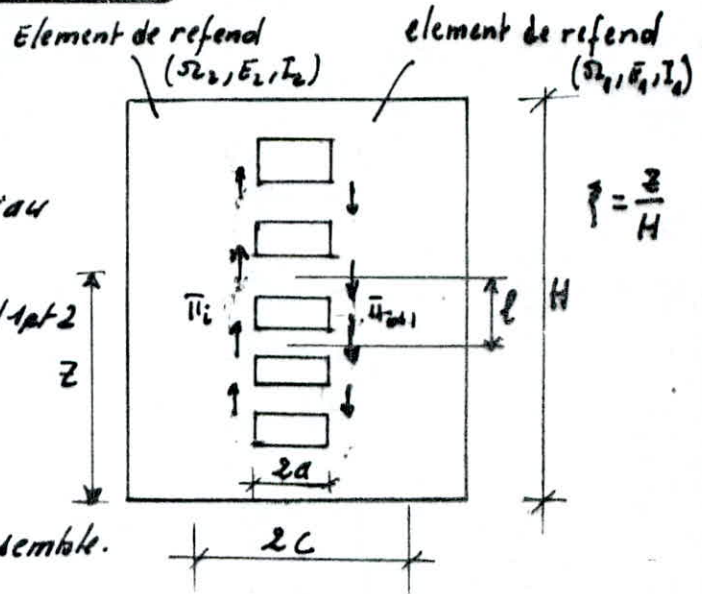
i : inertie du linteau.

E' : coefficient d'élasticité du matériau du linteau.

ℓ : hauteur d'un étage.

H : hauteur du bâtiment.

$$\xi = \ell / H$$



a) calcul de l'inertie équivalente

On désigne par α , le coefficient de monolithisme.

$$\alpha = \omega H$$

$$\text{avec } \omega^2 = \frac{3E'i}{E(I_1 + I_2)} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{c}{a^3 \ell}$$

Si $\alpha \leq 1 \rightarrow$ cas des grandes ouvertures.

$1 < \alpha < 10 \rightarrow$ cas des moyennes ouvertures.

$\alpha > 10 \rightarrow$ cas des petites ouvertures.

L'inertie équivalente I_e est donnée par :

$$I_e = \frac{a_n I}{\frac{60}{11} \cdot \frac{2mg}{I_0} \frac{\chi(\alpha, \xi)}{\alpha^2} + 1}$$

$$a_n = \frac{11}{20} + \frac{9}{20n} - \frac{1}{30n^2} - \frac{1}{30n^3}$$

$$\chi(\alpha, \xi) = \left(1 - \frac{\xi}{\alpha^2}\right) \left(1 - \frac{\text{ch}(1-\xi)}{\text{ch} \alpha}\right) + \frac{2\text{sh} \alpha \xi}{\alpha \text{ch} \alpha} - \xi^2$$

b/ Etude du linteau

On peut déterminer l'effort tranchant à la section d'encastrement du linteau par la formule :

$$\Pi = V. m. l. \frac{\chi(\alpha, \xi)}{I}$$

Viétant l'effort tranchant à la base du refend considéré.

c/ Etude des trumeaux

• les moments fléchissant au niveau z des éléments de refends (1) et (2) sont calculés par les formules :

$$M_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} V. H \left[\frac{(1-\xi)^2}{2} - \frac{2cm}{I} \Delta(\alpha, \xi) \right]$$

$$M_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} V. H \left[\frac{(1-\xi)^2}{2} - \frac{2cm}{I} \Delta(\alpha, \xi) \right]$$

$$\Delta(\alpha, \xi) = \left(1 - \frac{z}{\alpha^2} \right) \left(1 - \xi - \frac{\Delta \alpha (1-\xi)}{\alpha \text{Ch} \alpha} \right) + \frac{z}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\text{Ch} 2\xi}{\text{Ch} \alpha} \right) - \frac{1}{3} (1-\xi)^2$$

• l'effort normal dans le trumeau à un niveau z est la somme des efforts tranchants cumulés des étages supérieurs à ce niveau.

$$N_z = \sum_{i=j}^n \Pi_i$$

2^e cas : Voiles à plusieurs files d'ouvertures.

les calculs sont faits de la même façon que dans le cas de voile à une seule file d'ouverture.

avec :

$$\omega^2 = \frac{6E'}{El \sum I_i} \sum \left(\frac{i_i C_i^2}{a_i^3} \right)$$

$$I_e = \frac{a_n I}{\int_0^L \frac{I(x,0)^2}{a^2} dx + 1}$$

$$\pi_i = V l \cdot \frac{i \cdot C_i}{2 a_i^3 \left(\frac{\sum i \cdot C_i^2}{a_i^3} \right)} \chi(\alpha, \xi)$$

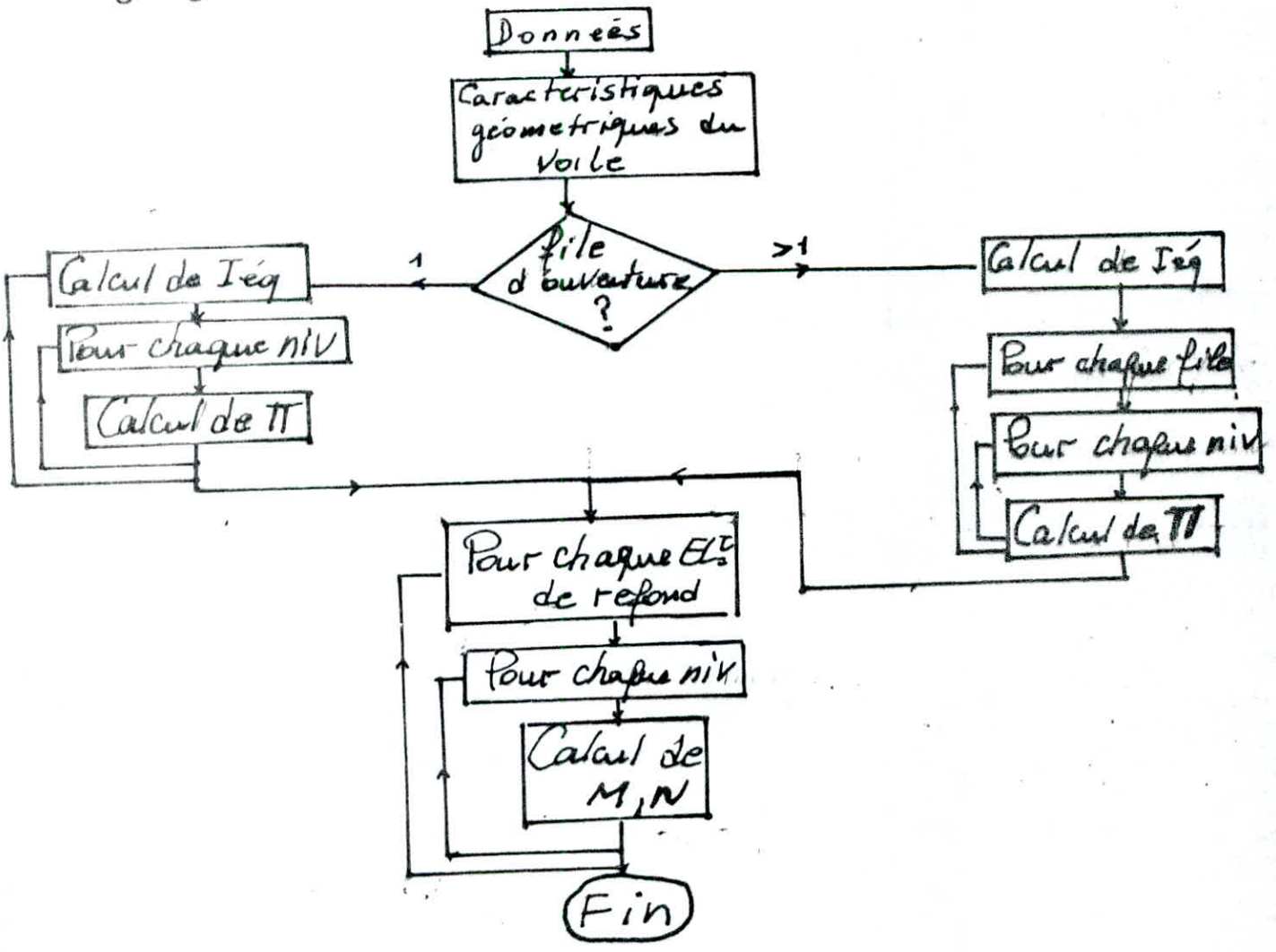
les efforts normaux deviennent :

$$N_i = \sum \pi_i - \sum \pi_{i-1}$$

et les moments dans le trumeau i est :

$$M_i = \frac{I_i}{\sum I_i} V \cdot z \left[\frac{(1-\xi)^2}{2} - \Delta(\alpha, \xi) \right]$$

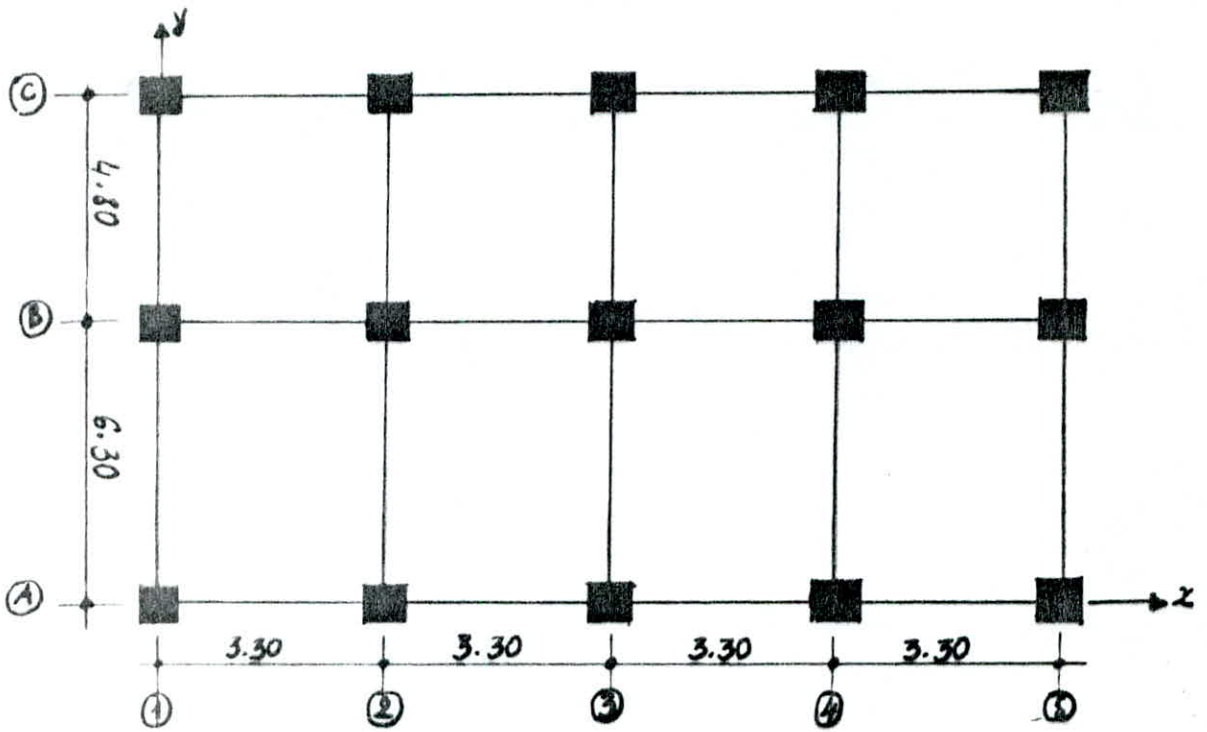
Organigramme :



3^{eme} PARTIE

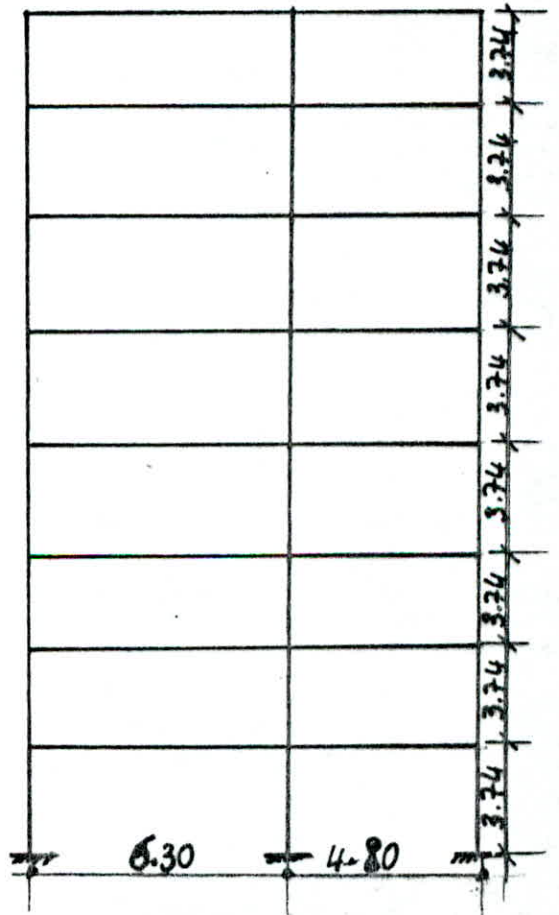
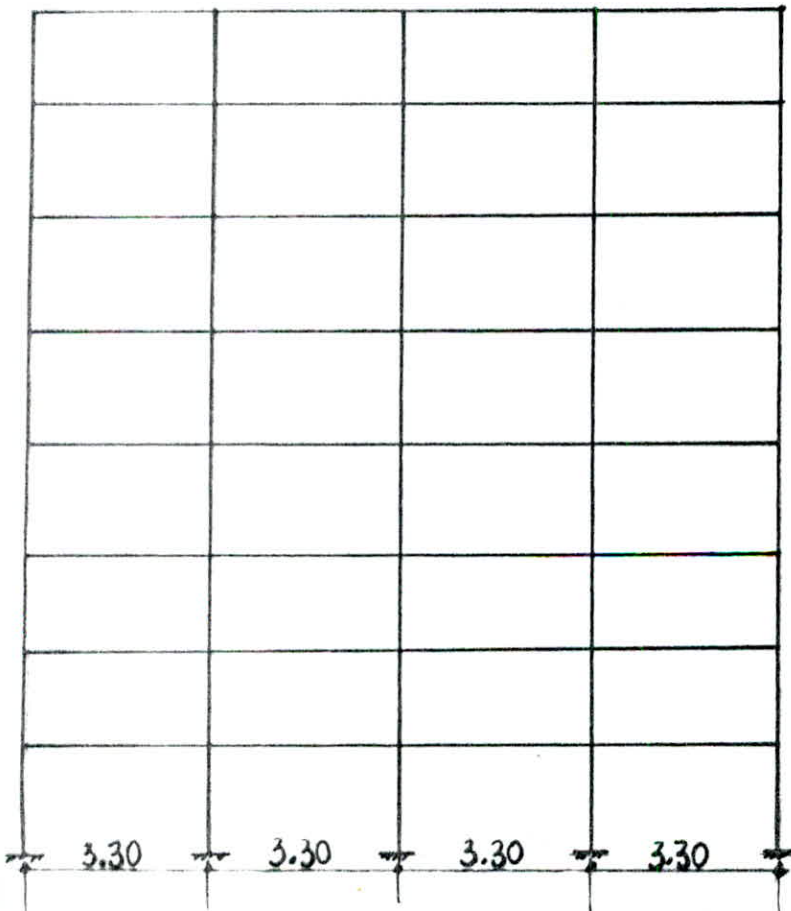
A P P L I C A T I O N S

A/ STUCTURES
A
PORTIQUES



* Portiques longitudinaux : A, B et C

* Portiques transversaux 1, 2, 3, 4, 5.



PREDIMENSIONNEMENT

les exemples pris, dans ces applications, ont pour charge permanente et surcharge d'exploitation comme suit:

- charge permanente $G = 629 \text{ kg/m}^2$
- surcharge d'exploitation $P = 175 \text{ kg/m}^2$.

le prédimensionnement a donné les valeurs représentées ci-dessous :

batiment	Poutres long. (cm)	Poutres trans. (cm)	Poteaux (cm)
4 niveaux	35 x 30	35 x 30	45 x 30
8 niveaux	45 x 35	45 x 40	45 x 45
16 niveaux	45 x 45	45 x 45	65 x 65

les masses des niveaux

batiment	dernier niveau (tonnes)	les autres niveaux (tonnes)
4 niveaux	190	200
8 niveaux	210	220
16 niveaux	295	300

CALCUL DES RIGIDITES DE NIVEAUX
=====

I/ BATIMENT DE 4 NIVEAUX
=====

***!! MATRICE DE RIGIDITE DANS LE SENS LONG (enkg/cm)!!**

```
-----
51040.82   -51040.82       0.00       0.00
-51040.82   102081.64   -51040.82       0.00
    0.00    -51040.82   102081.64   -51040.82
    0.00         0.00   -51040.82   113030.60
```

!! MATRICE DE RIGIDITE DANS LE SENS TRANS !!*

```
-----
65004.56  -65004.56       0.00       0.00
-65004.56  130009.11  -65004.56       0.00
    0.00   -65004.56  130009.11  -65004.56
    0.00         0.00  -65004.56  146028.63
```

II/ BATIMENT DE 8 NIVEAUX
=====

CES MATRICES AURONT LA MEME FORME QUE PRECEDEMENT, DONC ON
N'ECRIT QUE LES VALEURS DE K(1,1), K(1,2), K(2,2) ET K(8,8)

***!! MATRICE DE RIGIDITE DANS LE SENS LONG (en kg/cm)!!**

```
-----
K(1,1)=166036.13   K(1,2)=-166036.13   K(2,2)=332072.25
K(8,8)=393443.87
```

***!! MATRICE DE RIGIDITE DANS LE SENS TRANS (en kg/cm)!!**

```
-----
K(1,1)=130979.20   K(1,2)=-130979.20   K(2,2)=261958.40
K(8,8)=332094.24
```

III/ BATIMENT DE 16 NIVEAUX
=====

CES MATRICES AURONT LA MEME FORME QUE PRECEDEMENT, DONC ON
N'ECRIT QUE LES VALEURS DE K(1,1), K(1,2), K(2,2) ET K(16,16)

***!! MATRICE DE RIGIDITE DANS LE SENS LONG (en kg/cm)!!**

```
-----
K(1,1)=304565.40   K(1,2)=-304565.40   K(2,2)=609130.81
K(16,16)=980844.94
```

!! MATRICE DE RIGIDITE DANS LE SENS TRANS (en kg/cm)!!*

```
-----
K(1,1)=203600.15   K(1,2)=-203600.15   K(2,2)=407200.30
K(16,16)=804155.78
```


DETERMINATION DES VECTEURS PROPRES PAR

LA METHODE DE STODOLA

I/ BATIMENT DE 4 NIVEAUX

I.1/sens longitudinal

les masses M(I)

M(1)=190t

M(2)=200t

M(3)=200t

M(4)=200t

! * VECTEUR PROPRE NORMALISE * !

! NIV !10 MODE !20 MODE !30 MODE !

! 4 ! 1.000 ! -1.000 ! -1.000 !

! 3 ! 0.873 ! 0.030 ! 1.000 !

! 2 ! 0.630 ! 1.000 ! 0.282 !

! 1 ! 0.303 ! 0.885 ! -1.131 !

! * PERIODE (SECONDES) * !

! PER ! 1.0768 ! 0.3776 ! 0.2506 !

! * COEF DE PARTICIPATION (%) * !

! CDP ! 87.361 ! 9.266 ! 2.725 !

I.2/sens transversal

les masses M(I)

M(1)=190t

M(2)=200t

M(3)=200t

M(4)=200t

! * VECTEUR PROPRE NORMALISE * !

! NIV !10 MODE !20 MODE !30 MODE !

! 4 ! 1.000 ! -1.000 ! -1.000 !

! 3 ! 0.872 ! 0.038 ! 1.000 !

! 2 ! 0.627 ! 1.000 ! 0.260 !

! 1 ! 0.297 ! 0.868 ! -1.124 !

```

=====
!   * PERIODE (SECONDES) *   !
-----
! PER ! 0.9495 ! 0.3332 ! 0.2214 !
-----

=====
!   * COEF DE PARTICIPATION (%) * !
-----
! CDP ! 87.083 ! 9.372 ! 2.841 !
-----

```

11/BATIMENT DE 8 NIVEAUX

 11.1/sens longitudinal

les masses M(I)

 M(1)=210t

M(2)=M(3)=.....=M(8)=220t

```

=====
!   * VECTEUR PROPRE NORMALISE * !
=====
! NIV !10 MODE !20 MODE !30 MODE !
-----
! 8 ! 1.000 ! -1.000 ! 1.000 !
-----
! 7 ! 0.965 ! -0.669 ! 0.173 !
-----
! 6 ! 0.894 ! -0.157 ! -0.710 !
-----
! 5 ! 0.791 ! 0.406 ! -0.990 !
-----
! 4 ! 0.659 ! 0.838 ! -0.431 !
-----
! 3 ! 0.502 ! 1.000 ! 0.494 !
-----
! 2 ! 0.327 ! 0.840 ! 1.000 !
-----
! 1 ! 0.140 ! 0.410 ! 0.657 !
-----

```

```

=====
!   * PERIODE (SECONDES) *   !
-----
! PER ! 1.1937 ! 0.4031 ! 0.2483 !
-----

```

```

=====
!   * COEF DE PARTICIPATION (%) * !
-----
! CDP ! 83.486 ! 9.345 ! 3.399 !
-----

```

II.2/sens transversal

les masses M(I)

M(1)=210t M(2)=M(3)=.....M(8)=220t

```

=====
!   * VECTEUR PROPRE NORMALISE *   !
=====
! NIV !10 MODE !20 MODE !30 MODE !
-----
!  8  !  1.000 ! -1.000 !  1.000 !
-----
!  7  !  0.964 ! -0.663 !  0.158 !
-----
!  6  !  0.892 ! -0.143 ! -0.723 !
-----
!  5  !  0.787 !  0.424 ! -0.980 !
-----
!  4  !  0.653 !  0.852 ! -0.390 !
-----
!  3  !  0.493 !  1.000 !  0.537 !
-----
!  2  !  0.316 !  0.820 !  1.000 !
-----
!  1  !  0.126 !  0.372 !  0.598 !
-----

```

```

=====
!   * PERIODE (SECONDES) *         !
-----
! PER ! 1.3310 ! 0.4496 ! 0.2770 !
-----

```

```

=====
!   * COEF DE PARTICIPATION (%) *  !
-----
! CDP ! 82.779 !  9.356 !  3.478 !
-----

```

III/BATIMENT DE 16 NIVEAUX

III.1/sens longitudinal

les masses M(I)

M(1)=295t M(2)=M(3)=.....=M(16)=300t

OK>


```

=====
! * VECTEUR PROPRE NORMALISE * !
=====
! NIV !10 MODE !20 MODE !30 MODE !
-----
! 16 ! 1.000 ! -1.000 ! -1.000 !
-----
! 15 ! 0.990 ! -0.906 ! -0.745 !
-----
! 14 ! 0.971 ! -0.743 ! -0.340 !
-----
! 13 ! 0.943 ! -0.515 ! 0.146 !
-----
! 12 ! 0.905 ! -0.243 ! 0.598 !
-----
! 11 ! 0.858 ! 0.051 ! 0.907 !
-----
! 10 ! 0.804 ! 0.340 ! 1.000 !
-----
! 9 ! 0.741 ! 0.600 ! 0.855 !
-----
! 8 ! 0.671 ! 0.807 ! 0.507 !
-----
! 7 ! 0.595 ! 0.945 ! 0.038 !
-----
! 6 ! 0.512 ! 1.000 ! -0.441 !
-----
! 5 ! 0.425 ! 0.969 ! -0.814 !
-----
! 4 ! 0.334 ! 0.853 ! -0.993 !
-----
! 3 ! 0.239 ! 0.663 ! -0.936 !
-----
! 2 ! 0.143 ! 0.416 ! -0.656 !
-----
! 1 ! 0.044 ! 0.133 ! -0.220 !
-----

=====
! * PERIODE (SECONDES) * !
-----
! PER ! 2.0011 ! 0.6692 ! 0.4041 !
-----

=====
! * COEF DE PARTICIPATION (%) * !
-----
! CDP ! 80.869 ! 9.042 ! 3.296 !
=====

```

III.2/sens transversal

les masses M(I)

M(1)= 295t

M(2)=M(3)=...M(16,16)=300t

OK>

```

=====
! * VECTEUR PROPRE NORMALISE * !
=====
! NIV !10 MODE !20 MODE !30 MODE !
-----
! 16 ! 1.000 ! -1.000 ! -1.000 !
-----
! 15 ! 0.990 ! -0.904 ! -0.743 !
-----
! 14 ! 0.971 ! -0.739 ! -0.332 !
-----
! 13 ! 0.942 ! -0.508 ! 0.159 !
-----
! 12 ! 0.904 ! -0.233 ! 0.611 !
-----
! 11 ! 0.856 ! 0.062 ! 0.916 !
-----
! 10 ! 0.801 ! 0.353 ! 1.000 !
-----
! 9 ! 0.737 ! 0.612 ! 0.842 !
-----
! 8 ! 0.667 ! 0.817 ! 0.481 !
-----
! 7 ! 0.589 ! 0.950 ! 0.004 !
-----
! 6 ! 0.506 ! 1.000 ! -0.474 !
-----
! 5 ! 0.418 ! 0.962 ! -0.838 !
-----
! 4 ! 0.326 ! 0.838 ! -0.999 !
-----
! 3 ! 0.230 ! 0.642 ! -0.919 !
-----
! 2 ! 0.133 ! 0.388 ! -0.618 !
-----
! 1 ! 0.034 ! 0.101 ! -0.167 !
-----

```

```

=====
! * PERIODE (SECONDES) * !
-----
! PER ! 2.4304 ! 0.8128 ! 0.4908 !
-----

```

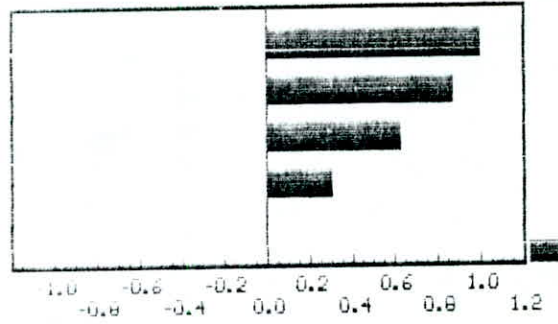
```

=====
! * COEF DE PARTICIPATION (%) !
-----
! CDP ! 80.286 ! 8.961 ! 3.255 !
-----

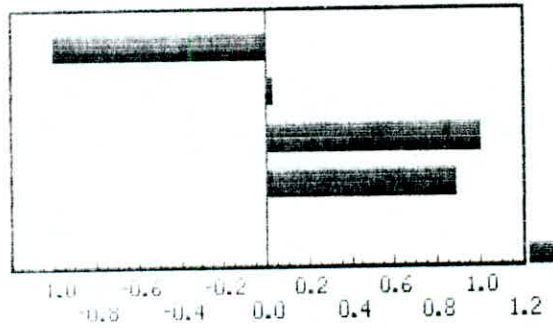
```

OK >

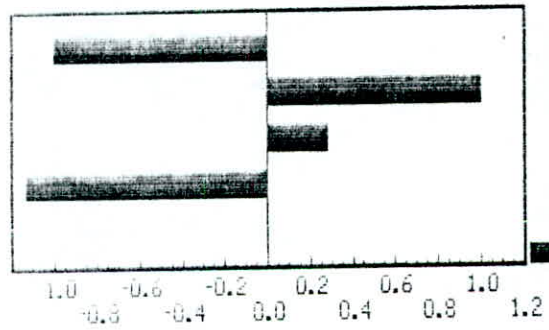
Sens Logitudinal
Batiment a 4 Niveaux (Premier Mode)



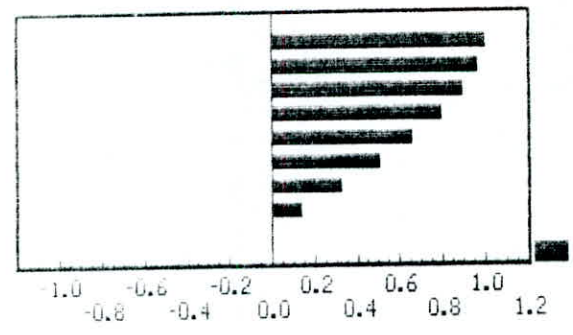
Sens Logitudinal
Batiment a 4 Niveaux (Deuxieme Mode)



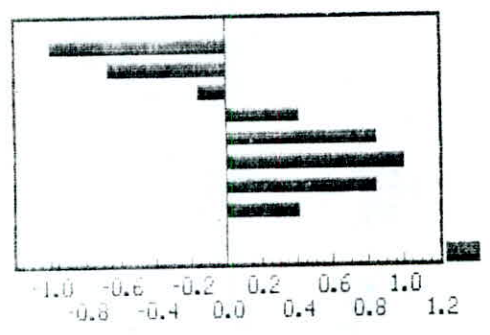
Sens Logitudinal
Batiment a 4 Niveaux (Troisieme Mode)



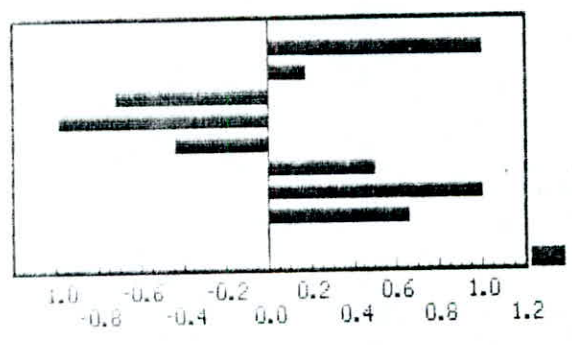
Sens Logitudinal
Batiment a 8 Niveaux (Premier Mode)



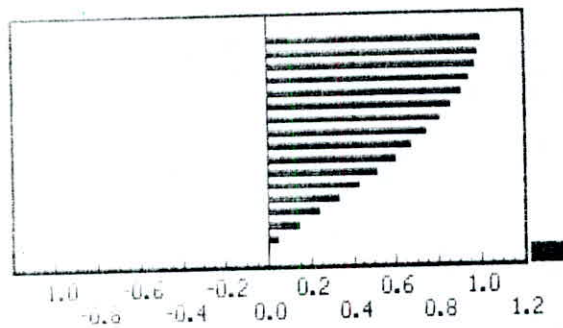
Sens Logitudinal
Batiment a 8 Niveaux (Deuxieme Mode)



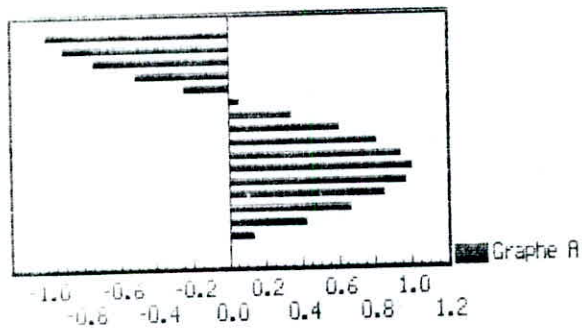
Sens Logitudinal
Batiment a 8 Niveaux (Troisieme Mode)



Sens Longitudinal
Batiment a 16 Niveaux (Premier Mode)

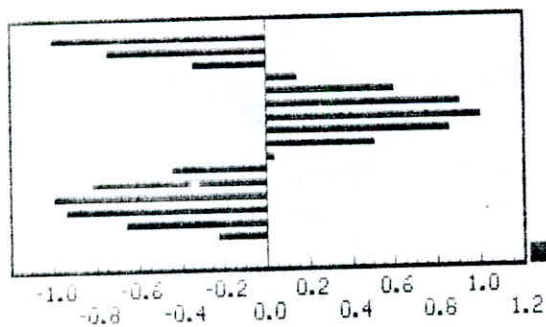


Sens Longitudinal
Batiment a 16 Niveaux (Deuxieme Mode)

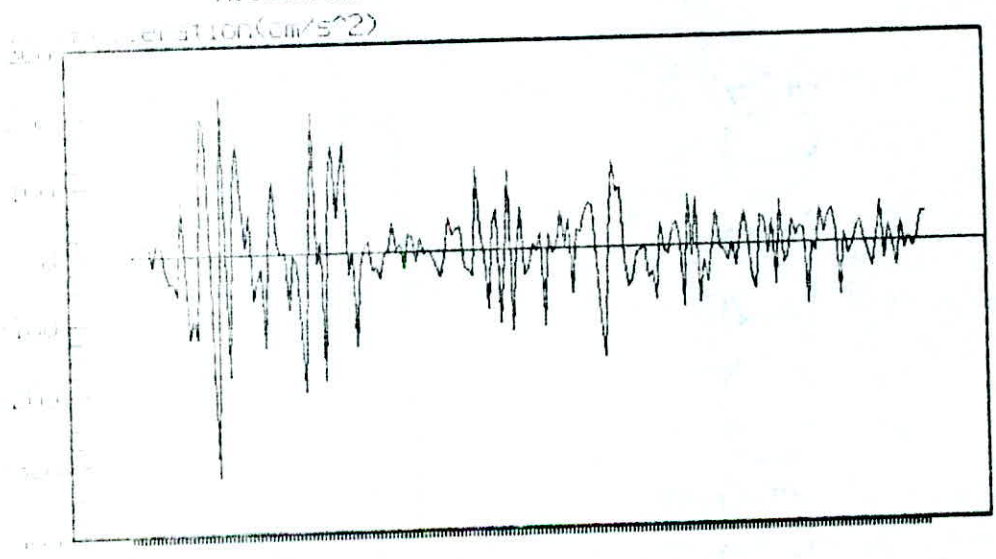


Graph A

Sens Longitudinal
Batiment a 16 Niveaux (Troisieme Mode)



Accelérogramme d'EL CENRTO 18 MAI 1940



Temps(s)

REponses ObTnues en Utilisant un AcceleroGramme
 =====
 (Accelerogramme d'El Centro 18 Mai 1940)
 =====

A/Reponse dans le domaine des frequences

 Transformation inverse de FOURIER

! Instant(sec)! Y(Reel) (cm) Y(Imaginaire) (cm) !
! 0.02 -0.31305778E+00 0.00000000E+00 !
! 0.04 -0.39624943E-01 0.10260138E-15 !
! 0.06 -0.31960377E+00 -0.18995487E-14 !
! 0.08 -0.38058501E+00 0.11158174E-14 !
! 0.10 -0.45766850E-01 0.33334237E-14 !
! 0.12 0.39467332E+00 -0.35576988E-14 !
! 0.14 -0.60831575E+00 -0.59593753E-14 !
! 0.16 -0.37642387E+00 0.15177211E-14 !
! 0.18 -0.20261692E+00 -0.21494394E-14 !
! 0.20 -0.28043171E+00 -0.21431091E-14 !
! 0.22 -0.52666252E+00 -0.23907554E-14 !
! 0.24 -0.11691537E+00 0.12248099E-15 !
! 0.26 -0.14612850E+00 -0.92520608E-14 !
! 0.28 -0.11854797E+01 -0.12199679E-13 !
! 0.30 -0.27081667E+01 -0.35972821E-14 !
! 0.32 -0.19159034E+01 0.20411715E-13 !
! 0.34 -0.25886630E+00 0.12987164E-13 !
! 0.36 -0.66298740E+00 0.12838141E-13 !
! 0.38 -0.15773019E+00 0.12804443E-13 !
! 0.40 -0.13681940E+00 0.19710046E-13 !
! 0.42 0.17443613E+01 0.16678643E-13 !
! 0.44 0.17073840E+01 0.36991881E-14 !

Instant	Y(Reel) (cm)	Y(Imaginaire) (cm)
0.46	0.23375975E+01	-0.59824507E-14
0.48	0.58828928E+00	-0.26154433E-13
0.50	-0.12869186E+01	-0.12243677E-13
0.52	-0.98814828E+00	-0.38975585E-14
0.54	-0.11456968E+01	-0.68110520E-15
0.56	-0.11856056E+01	0.74582351E-14
0.58	-0.10281070E+00	0.16086724E-13
0.60	0.14628681E+01	0.85774979E-14
0.62	0.14141869E+01	-0.11702639E-13
0.64	-0.68110449E+00	-0.11762200E-13
0.66	0.61074884E+00	0.23569326E-14
0.68	0.76591628E+00	-0.28389497E-13
0.70	-0.27901539E+01	-0.21069534E-13
0.72	-0.21476903E+01	0.31763499E-15
0.74	-0.18983034E+01	-0.16519423E-14
0.76	-0.22889926E+01	0.17615906E-14
0.78	-0.27006330E+01	0.13572436E-13
0.80	-0.10254378E+01	0.24140278E-13
0.82	-0.28632061E+00	0.88220405E-14
0.84	-0.15711258E+01	0.66471196E-14
0.86	-0.20568029E+01	0.18716113E-13
0.88	-0.12297629E+01	0.30262955E-13
0.90	-0.15250050E+00	0.29936041E-13
0.92	0.29377710E-01	0.27028447E-13
0.94	-0.17037827E+00	0.38098053E-13
0.96	0.30468480E+01	0.52487191E-13
0.98	0.55879994E+01	0.92166236E-14
1.00	0.21364932E+01	-0.79449992E-14

B/ REPONSE DANS LE DOMAINE DU TEMPS

```

=====
!INSTANT   ! REPONSE (cm) !
-----
!0.04      ! -0.03901119 !
-----
!0.08      ! -0.39183809 !
-----
!0.12      !  0.38852005 !
-----
!0.16      ! -0.38018811 !
-----
!0.20      ! -0.29082260 !
-----
!0.24      ! -0.11078845 !
-----
!0.28      ! -1.18723450 !
-----
!0.32      ! -1.90476243 !
-----
!0.36      ! -0.66961727 !
-----
!0.40      ! -0.13827859 !
-----
!0.44      !  1.72445784 !
-----
!0.48      !  0.60528217 !
-----
!0.52      ! -0.99701976 !
-----
!0.56      ! -1.19130066 !
-----
!0.60      !  1.47674474 !
-----
!0.64      ! -0.68590155 !
-----
!0.68      !  0.76751544 !
-----
!0.72      ! -2.16916720 !
-----
!0.76      ! -2.30178253 !
-----
!0.80      ! -1.02963218 !
-----
!0.84      ! -1.58481706 !
-----
!0.88      ! -1.21984533 !
-----
!0.92      !  2.15785813 !
-----
!0.96      !  0.30778272 !
-----
!1.00      !  2.23359803 !
-----

```


DETERMINATION DES FORCES SISMIQUES EN FONCTION DU TEMPS

 VALEURS DES FORCES EN FONCTION DU TEMPS (en tonnes)

 INIV ! INST ! FORCE ! INST ! FORCE ! INST ! FORCE !

4	0.02	1.5163	11.00	-10.3482	2.02	-0.9696
4	0.04	0.1919	11.02	-12.7998	2.04	-4.3848
4	0.06	1.5480	11.04	-12.6382	2.06	-9.4765
4	0.08	1.8434	11.06	-10.6250	2.08	-7.7345
4	0.10	0.2217	11.08	-1.4760	2.10	-11.1119
4	0.12	-1.9116	11.10	6.3396	2.12	-4.2156
4	0.14	2.9464	11.12	-10.7114	2.14	-2.3455
4	0.16	1.8232	11.14	0.9958	2.16	-7.6857
4	0.18	0.9814	11.16	-1.4183	2.18	-2.6594
4	0.20	1.3583	11.18	-12.0879	2.20	1.1486
4	0.22	2.5509	11.20	-23.4963	2.22	12.7434
4	0.24	0.5663	11.22	-21.5802	2.24	8.0874
4	0.26	0.7078	11.24	5.2678	2.26	2.1233
4	0.28	5.7419	11.26	3.4628	2.28	2.2313
4	0.30	13.1171	11.28	-13.1473	2.30	5.6910
4	0.32	9.2798	11.30	3.7121	2.32	10.4006
4	0.34	1.2538	11.32	8.9018
4	0.36	3.2112	11.34	-6.5976
4	0.38	0.7640	11.36	-4.6881
4	0.40	0.6627	11.38	5.0464	18.00	0.5683
4	0.42	-8.4489	11.40	-0.2721	18.02	0.7558
4	0.44	-8.2698	11.42	-11.2223	18.04	0.9175
4	0.46	-11.3223	11.44	3.2160	18.06	0.3348
4	0.48	-2.8494	11.46	7.7901	18.08	0.0129
4	0.50	6.2332	11.48	14.8352	18.10	-0.5977

3	0.02	3.4905	11.00	-23.8216	2.00	21.2600
3	0.04	0.4418	11.02	-29.4651	2.02	-2.2310
3	0.06	3.5635	11.04	-29.0931	2.04	-10.0937
3	0.08	4.2435	11.06	-24.4587	2.06	-21.8150
3	0.10	0.5103	11.08	-3.3978	2.08	-17.8049
3	0.12	-4.4005	11.10	14.5939	2.10	-25.5796
3	0.14	6.7826	11.12	-24.6577	2.12	-9.7043
3	0.16	4.1971	11.14	2.2923	2.14	-5.3993
3	0.18	2.2591	11.16	-3.2663	2.16	-17.6925
3	0.20	3.1268	11.18	-27.8264	2.18	-6.1220
3	0.22	5.9722	11.20	-54.0886	2.20	2.6441
3	0.24	1.3036	11.22	-49.6777	2.22	29.3354
3	0.26	1.6293	11.24	12.1264	2.24	18.6171
3	0.28	13.2179	11.26	7.9714	2.26	4.8878
3	0.30	30.1957	11.28	-30.2653	2.28	5.1366
3	0.32	20.4919	11.30	8.5453	2.30	13.1007
3	0.34	2.8863	11.32	7.2590	2.32	23.9422
3	0.36	7.3922	11.34	-15.1877
3	0.38	1.7587	11.36	-10.7920
3	0.40	1.5255	11.38	11.6168

 ! VALEURS DES FORCES EN FONCTION DU TEMPS (en tonnes) !

INIV	INST	FORCE	INST	FORCE	INST	FORCE
! 2	! 0.02	! 4.9150	! 1.00	! 33.5430	! 2.00	! -29.9360
! 2	! 0.04	! 0.6221	! 1.02	! 41.4896	! 2.02	! 3.1414
! 2	! 0.06	! 5.0178	! 1.04	! 40.9657	! 2.04	! 14.2129
! 2	! 0.08	! 5.9752	! 1.06	! 34.4401	! 2.06	! 30.7175
! 2	! 0.10	! 0.7185	! 1.08	! 4.7843	! 2.08	! 25.0709
! 2	! 0.12	! -6.1964	! 1.10	! -20.5495	! 2.10	! 36.0184
! 2	! 0.14	! -9.5506	! 1.12	! 34.7203	! 2.12	! 13.6646
! 2	! 0.16	! -5.9099	! 1.14	! -3.2278	! 2.14	! 7.6027
! 2	! 0.18	! -3.1811	! 1.16	! 4.5992	! 2.16	! 24.9127
! 2	! 0.20	! -4.4028	! 1.18	! 39.1822	! 2.18	! 8.6203
! 2	! 0.22	! -8.2686	! 1.20	! 76.1617	! 2.20	! -3.7232
! 2	! 0.24	! -1.8356	! 1.22	! 69.9508	! 2.22	! -41.3069
! 2	! 0.26	! -2.2942	! 1.24	! -17.0751	! 2.24	! -26.2146
! 2	! 0.28	! -18.6120	! 1.26	! -11.2244	! 2.26	! -6.8825
! 2	! 0.30	! -42.5182	! 1.28	! 42.6159	! 2.28	! -7.2328
! 2	! 0.32	! -30.0797	! 1.30	! -12.0326	! 2.30	! -18.4470
! 2	! 0.34	! -4.0642	! 1.32	! -28.8545	! 2.32	! -33.7128
! 2	! 0.36	! -10.4089	! 1.34	! 21.3856	!	!
! 2	! 0.38	! -2.4764	! 1.36	! 15.1962	!	!
! 2	! 0.40	! -2.1481	! 1.38	! -16.3576	!	!
! 2	! 0.42	! 27.3865	! 1.40	! 0.8819	! 18.00	! -1.8420
! 2	! 0.44	! 26.8059	! 1.42	! 36.3763	! 18.02	! -2.4499
! 2	! 0.46	! 36.7003	! 1.44	! -10.4245	! 18.04	! -2.9739
! 2	! 0.48	! 9.2361	! 1.46	! -25.2512	! 18.06	! -1.0853
! 2	! 0.50	! -20.2046	! 1.48	! -48.0873	! 18.08	! -0.0417

! 1	! 0.02	! 1.2728	! 1.00	! -8.6866	! 2.00	! 7.7525
! 1	! 0.06	! 1.2994	! 1.02	! -10.7445	! 2.02	! -0.8135
! 1	! 0.04	! 0.1611	! 1.04	! -10.6088	! 2.04	! -3.6807
! 1	! 0.08	! 1.5474	! 1.06	! -8.9189	! 2.06	! -7.9549
! 1	! 0.10	! 0.1861	! 1.08	! -1.2390	! 2.08	! -6.4926
! 1	! 0.12	! -1.6047	! 1.10	! 5.3217	! 2.10	! -9.3276
! 1	! 0.14	! 2.4733	! 1.12	! -8.9915	! 2.12	! -3.5387
! 1	! 0.16	! 1.5305	! 1.14	! 0.8359	! 2.14	! -1.9689
! 1	! 0.18	! 0.8238	! 1.16	! -1.1911	! 2.16	! -6.4516
! 1	! 0.20	! 1.1402	! 1.18	! -10.1470	! 2.18	! -2.2324
! 1	! 0.22	! 2.1413	! 1.20	! -19.7235	! 2.20	! 0.9642
! 1	! 0.24	! 0.4754	! 1.22	! -18.1150	! 2.22	! 10.6972
! 1	! 0.26	! 0.5941	! 1.24	! 4.4219	! 2.24	! 6.7888
! 1	! 0.28	! 4.8199	! 1.26	! 2.9068	! 2.26	! 1.7823
! 1	! 0.30	! 11.0109	! 1.28	! -11.0362	! 2.28	! 1.8731
! 1	! 0.32	! 7.7897	! 1.30	! 3.1161	! 2.30	! 4.7772
! 1	! 0.34	! 1.0525	! 1.32	! 7.4724	! 2.32	! 8.7305
! 1	! 0.36	! 2.6956	! 1.34	! -5.5382	!	!
! 1	! 0.38	! 0.6413	! 1.36	! -3.9353	!	!
! 1	! 0.40	! 0.5563	! 1.38	! 4.2361	!	!
! 1	! 0.42	! -7.0922	! 1.40	! -0.2284	! 18.00	! 0.4770
! 1	! 0.44	! -6.9419	! 1.42	! -9.4203	! 18.02	! 0.6344
! 1	! 0.46	! -9.5042	! 1.44	! 2.6996	! 18.04	! 0.7701
! 1	! 0.48	! -2.3919	! 1.46	! 6.5393	! 18.06	! 0.2810
! 1	! 0.50	! 5.2324	! 1.48	! 12.4531	! 18.08	! 0.0108

CALCUL DES FORCES SISMIQUES PAR

LA METHODE SPECTRALE

I/ BATIMENT DE 4 NIVEAUX

1.1/sens longitudinal

! FORCES SISMIQUES SELON LE SPECTRE D'EL CENTROS !
! (18 MAI 1940) (en tonnes) !

! NIV !	! 10 MODE !	! 20 MODE !	! 30 MODE !	! RESULTANTE !
! 4 !	! 17.842 !	! -8.190 !	! 3.557 !	! 19.952 !
! 3 !	! 16.401 !	! 0.264 !	! -5.020 !	! 17.154 !
! 2 !	! 11.833 !	! 8.863 !	! -1.416 !	! 14.852 !
! 1 !	! 5.686 !	! 7.847 !	! 5.677 !	! 11.230 !

1.2/sens transversal

! FORCES SISMIQUES SELON LE SPECTRE D'EL CENTROS !
! (18 MAI 1940) (en tonnes) !

! NIV !	! 10 MODE !	! 20 MODE !	! 30 MODE !	! RESULTANTE !
! 4 !	! 19.045 !	! -8.587 !	! 3.619 !	! 21.202 !
! 3 !	! 17.482 !	! 0.356 !	! -5.159 !	! 18.231 !
! 2 !	! 12.561 !	! 9.361 !	! -1.344 !	! 15.723 !
! 1 !	! 5.948 !	! 8.124 !	! 5.802 !	! 11.621 !

II/ BATIMENT DE 8 NIVEAUX

11.1/sens longitudinal

! FORCES SISMIQUES SELON LE SPECTRE D'EL CENTROS !
! (18 MAI 1940) (en tonnes) !

! NIV !	! 10 MODE !	! 20 MODE !	! 30 MODE !	! RESULTANTE !
! 8 !	! 22.649 !	! -10.358 !	! 6.322 !	! 25.695 !
! 7 !	! 22.896 !	! -7.517 !	! 1.260 !	! 24.131 !
! 6 !	! 21.224 !	! -1.763 !	! -5.173 !	! 21.916 !
! 5 !	! 18.773 !	! 4.558 !	! -7.217 !	! 20.622 !
! 4 !	! 15.632 !	! 9.412 !	! -3.139 !	! 18.515 !
! 3 !	! 11.918 !	! 11.236 !	! 3.602 !	! 16.771 !
! 2 !	! 7.766 !	! 9.444 !	! 7.287 !	! 14.234 !
! 1 !	! 3.329 !	! 4.612 !	! 4.790 !	! 7.436 !

11.2/sens transversal

! FORCES SISMIQUES SELON LE SPECTRE D'EL CENTROS !					
! (18 MAI 1940) (en tonnes) !					
! NIV !	! 10 MODE !	! 20 MODE !	! 30 MODE !	! RESULTANTE !	!
! 8 !	! 18.662 !	! -10.409 !	! 6.415 !	! 22.311 !	!
! 7 !	! 18.852 !	! -7.490 !	! 1.177 !	! 20.320 !	!
! 6 !	! 17.448 !	! -1.617 !	! -5.384 !	! 18.331 !	!
! 5 !	! 15.391 !	! 4.785 !	! -7.292 !	! 17.690 !	!
! 4 !	! 12.758 !	! 9.618 !	! -2.899 !	! 16.238 !	!
! 3 !	! 9.647 !	! 11.295 !	! 4.000 !	! 15.383 !	!
! 2 !	! 6.175 !	! 9.267 !	! 7.442 !	! 13.393 !	!
! 1 !	! 2.472 !	! 4.198 !	! 4.453 !	! 6.600 !	!

III/BATIMENT DE 16 NIVEAUX

III.1/sens longitudinal

! FORCES SISMIQUES SELON LE SPECTRE D'EL CENTROS !					
! (18 MAI 1940) (EN TONNES) !					
! NIV !	! 10 MODE !	! 20 MODE !	! 30 MODE !	! RESULTANTE !	!
! 16 !	! 28.150 !	! -9.949 !	! 8.846 !	! 31.139 !	!
! 15 !	! 28.353 !	! -9.254 !	! 6.890 !	! 30.611 !	!
! 14 !	! 27.805 !	! -7.586 !	! 3.143 !	! 28.992 !	!
! 13 !	! 26.986 !	! -5.260 !	! -1.352 !	! 27.527 !	!
! 12 !	! 25.905 !	! -2.477 !	! -5.525 !	! 26.603 !	!
! 11 !	! 24.573 !	! 0.521 !	! -8.383 !	! 25.969 !	!
! 10 !	! 23.002 !	! 3.474 !	! -9.245 !	! 25.032 !	!
! 9 !	! 21.208 !	! 6.125 !	! -7.905 !	! 23.447 !	!
! 8 !	! 19.207 !	! 8.244 !	! -4.684 !	! 21.420 !	!
! 7 !	! 17.021 !	! 9.648 !	! -0.347 !	! 19.568 !	!
! 6 !	! 14.669 !	! 10.214 !	! 4.073 !	! 18.332 !	!
! 5 !	! 12.174 !	! 9.892 !	! 7.522 !	! 17.397 !	!
! 4 !	! 9.561 !	! 8.712 !	! 9.181 !	! 15.862 !	!
! 3 !	! 6.856 !	! 6.776 !	! 8.654 !	! 12.954 !	!
! 2 !	! 4.084 !	! 4.251 !	! 6.066 !	! 8.458 !	!
! 1 !	! 1.272 !	! 1.356 !	! 2.034 !	! 2.756 !	!

OK)

III.2/sens transversal

! FORCES SISMIQUES SELON LE SPECTRE D'EL CENTROSI						
! (18 MAI 1940) (EN TONNES) !						
! NIV !	! 10 MODE !	! 20 MODE !	! 30 MODE !	! RESULTANTE !	!	
! 16 !	! 20.641 !	! -8.075 !	! 8.820 !	! 23.854 !	!	!
! 15 !	! 20.787 !	! -7.501 !	! 6.840 !	! 23.133 !	!	!
! 14 !	! 20.379 !	! -6.129 !	! 3.059 !	! 21.500 !	!	!
! 13 !	! 19.771 !	! -4.218 !	! -1.461 !	! 20.268 !	!	!
! 12 !	! 18.967 !	! -1.935 !	! -5.628 !	! 19.879 !	!	!
! 11 !	! 17.977 !	! 0.518 !	! -8.435 !	! 19.864 !	!	!
! 10 !	! 16.810 !	! 2.926 !	! -9.207 !	! 19.388 !	!	!
! 9 !	! 15.477 !	! 5.076 !	! -7.755 !	! 18.040 !	!	!
! 8 !	! 13.992 !	! 6.779 !	! -4.431 !	! 16.166 !	!	!
! 7 !	! 12.369 !	! 7.885 !	! -0.037 !	! 14.668 !	!	!
! 6 !	! 10.624 !	! 8.296 !	! 4.366 !	! 14.169 !	!	!
! 5 !	! 8.775 !	! 7.978 !	! 7.715 !	! 14.148 !	!	!
! 4 !	! 6.839 !	! 6.956 !	! 9.201 !	! 13.410 !	!	!
! 3 !	! 4.836 !	! 5.322 !	! 8.465 !	! 11.107 !	!	!
! 2 !	! 2.785 !	! 3.220 !	! 5.686 !	! 7.103 !	!	!
! 1 !	! 0.707 !	! 0.834 !	! 1.533 !	! 1.883 !	!	!

OK>

DE LA METHODE DE DEPLACEMENT (PORTIQUE LONGITUDINAL A)

MODULE D ELASTICITE

E= 350 10³ KN/cm²

NOMBRE DE NOEUDS 25

! NOEUD !	COOR.X	! COOR.Y	! APPUI !
1	11	0.00001	0.00001 01
1	21	0.00001	3.74001 11
1	31	0.00001	7.48001 11
1	41	0.00001	11.22001 11
1	51	0.00001	14.96001 11
1	61	3.30001	0.00001 01
1	71	3.30001	3.74001 11
1	81	3.30001	7.48001 11
1	91	3.30001	11.22001 11
1	101	3.30001	14.96001 11
1	111	6.60001	0.00001 01
1	121	6.60001	3.74001 11
1	131	6.60001	7.48001 11
1	141	6.60001	11.22001 11
1	151	6.60001	14.96001 11
1	161	9.90001	0.00001 01
1	171	9.90001	3.74001 11
1	181	9.90001	7.48001 11
1	191	9.90001	11.22001 11
1	201	9.90001	14.96001 11
1	211	13.20001	0.00001 01
1	221	13.20001	3.74001 11
1	231	13.20001	7.48001 11
1	241	13.20001	11.22001 11
1	251	13.20001	14.96001 11

NOMBRE DE BARRES =36

! BARRE !	! DEBUT !	! FIN !	! SECTION !	! INERTIE !
1	1	1	2	0.1350 0.00231
1	2	2	3	0.1350 0.00231
1	3	3	4	0.1350 0.00231
1	4	4	5	0.1350 0.00231
1	5	6	7	0.1350 0.00231
1	6	7	8	0.1350 0.00231
1	7	8	9	0.1350 0.00231
1	8	9	10	0.1350 0.00231
1	9	11	12	0.1350 0.00231
1	10	12	13	0.1350 0.00231
1	11	13	14	0.1350 0.00231
1	12	14	15	0.1350 0.00231
1	13	16	17	0.1350 0.00231
1	14	17	18	0.1350 0.00231

14

!	BARRE	!	DEBUT	!	FIN	!	SECTION	!	INERTIE!
!	15	!	18	!	19	!	0.1350	!	0.0023!
!	16	!	19	!	20	!	0.1350	!	0.0023!
!	17	!	21	!	22	!	0.1350	!	0.0023!
!	18	!	22	!	23	!	0.1350	!	0.0023!
!	19	!	23	!	24	!	0.1350	!	0.0023!
!	20	!	24	!	25	!	0.1350	!	0.0023!
!	21	!	2	!	7	!	0.1050	!	0.0011!
!	22	!	3	!	8	!	0.1050	!	0.0011!
!	23	!	4	!	9	!	0.1050	!	0.0011!
!	24	!	5	!	10	!	0.1050	!	0.0011!
!	25	!	7	!	12	!	0.1050	!	0.0011!
!	26	!	8	!	13	!	0.1050	!	0.0011!
!	27	!	9	!	14	!	0.1050	!	0.0011!
!	28	!	10	!	15	!	0.1050	!	0.0011!
!	29	!	12	!	17	!	0.1050	!	0.0011!
!	30	!	13	!	18	!	0.1050	!	0.0011!
!	31	!	14	!	19	!	0.1050	!	0.0011!
!	32	!	15	!	20	!	0.1050	!	0.0011!
!	33	!	17	!	22	!	0.1050	!	0.0011!
!	34	!	18	!	23	!	0.1050	!	0.0011!
!	35	!	19	!	24	!	0.1050	!	0.0011!
!	36	!	20	!	25	!	0.1050	!	0.0011!

NOMBRE DE CHARGES ELEMENTAIRES =4

!	NUMERO	!	ELE.	!	DIR.	!	CHARGE	!
!	1	!	2	!	1	!	25740.0000!	!
!	2	!	3	!	1	!	34750.0000!	!
!	3	!	4	!	1	!	40140.0000!	!
!	4	!	5	!	1	!	46690.0000!	!

```

=====
!                               *DEPLACEMENT DES NOEUDS *                               !
=====
! NOEUD  ! DEPL.X(en M) ! DEPL.Y(en M) ! ROTATION(en rd)!
=====
!   1   ! 0.000E+00   ! 0.000E+00   ! 0.000E+00   !
!   2   ! 0.312E-02   ! 0.709E-04   ! -.927E-03   !
!   3   ! 0.731E-02   ! 0.116E-03   ! -.823E-03   !
!   4   ! 0.105E-01   ! 0.138E-03   ! -.555E-03   !
!   5   ! 0.124E-01   ! 0.145E-03   ! -.302E-03   !
!   6   ! 0.000E+00   ! 0.000E+00   ! 0.000E+00   !
!   7   ! 0.311E-02   ! -.436E-05   ! -.707E-03   !
!   8   ! 0.728E-02   ! -.610E-05   ! -.659E-03   !
!   9   ! 0.105E-01   ! -.644E-05   ! -.451E-03   !
!  10   ! 0.124E-01   ! -.652E-05   ! -.209E-03   !
!  11   ! 0.000E+00   ! 0.00E+00    ! 0.000E+00   !
!  12   ! 0.309E-02   ! -.967E-07   ! -.719E-03   !
!  13   ! 0.726E-02   ! -.141E-06   ! -.661E-03   !
!  14   ! 0.105E-01   ! -.169E-06   ! -.448E-03   !
!  15   ! 0.124E-01   ! -.181E-06   ! -.202E-03   !
!  16   ! 0.000E+00   ! 0.000E+00   ! 0.000E+00   !
!  17   ! 0.309E-02   ! 0.413E-05   ! -.704E-03   !
!  18   ! 0.725E-02   ! 0.579E-05   ! -.658E-03   !
!  19   ! 0.105E-01   ! 0.607E-05   ! -.450E-03   !
!  20   ! 0.124E-01   ! 0.613E-05   ! -.209E-03   !
!  21   ! 0.000E+00   ! 0.000E+00   ! 0.000E+00   !
!  22   ! 0.308E-02   ! -.706E-04   ! -.918E-03   !
!  23   ! 0.724E-02   ! -.115E-03   ! -.821E-03   !
!  24   ! 0.105E-01   ! -.137E-03   ! -.553E-03   !
!  25   ! 0.123E-01   ! -.144E-03   ! -.300E-03   !
=====

```

```

=====
!                               **EFFORTS DANS LES BARRES**                               !
!                               les moments sont exprimes en N-M et les forces en N                               !
=====
!                               DEBUT                               II                               FIN                               !
=====
! BARRE ! N       I       T       I       M       I       N       I       T       I       M       I
=====
!   11   89616.281  25403.921  67271.731  89616.281  -25403.921  27738.931
!   21  -56775.771  16663.381  28947.391  56775.771  -16663.381  33373.671
!   31 -27666.151  11893.411  16526.801  27666.151  -11893.411  27954.571
!   41  -8675.191   5330.731   4568.341   8675.191   -5330.731  15368.581
!   51   5509.371  32644.521  76124.311  -5509.371  -32644.521  45966.181
!   61   2194.401  29594.711  54310.231  -2194.401  -29594.711  56374.011
!   71    436.021  21032.691  34895.761  -436.021  -21032.691  43766.501
!   81     99.481  11949.081  17194.671   -99.481  -11949.081  27494.871
!   91    122.201  32030.031  75215.441  -122.201  -32030.031  44576.871
!  101     56.381  29023.321  53040.981   -56.381  -29023.321  55506.221
!  111     35.071  21021.511  34771.351   -35.071  -21021.511  43849.091
!  121     15.021  12227.891  17619.951   -15.021  -12227.891  28112.351
!  131   -5221.491  32343.881  75494.681  5221.491  -32343.881  45471.441
!  141  -2090.141  29574.321  54317.911  2090.141  -29574.321  56290.051
!  151   -362.251  21011.901  34858.221   362.251  -21011.901  43726.271
!  161    -65.851  11900.691  17109.411    65.851  -11900.691  27399.171
!  171  89206.211  24897.651  66128.041 -89206.211  -24897.651  26989.171
=====

```


		DEBUT			FIN							
IBARRE	N	I	T	I	M	I	N	I	T	I	M	I
181	56615.131	16724.261	29216.531	-56615.131	-16724.261	33332.211						
191	27557.321	11870.491	16472.091	-27557.321	-11870.491	27923.551						
201	8626.541	5281.621	4482.341	-8626.541	-5281.621	15270.911						
211	16999.461	-32840.511	-56686.321	-16999.461	32840.511	-51687.361						
221	29980.031	-29109.621	-49900.471	-29980.031	29109.621	-46161.291						
231	33577.311	-18990.961	-32522.911	-33577.311	18990.961	-30147.251						
241	41359.271	-8675.191	-15368.581	-41359.271	8675.191	-13259.561						
251	13949.661	-29525.551	-48589.051	-13949.661	29525.551	-48845.251						
261	21418.011	-27351.241	-45108.481	-21418.011	27351.241	-45150.601						
271	24493.701	-18654.411	-30813.921	-24493.701	18654.411	-30745.651						
281	29410.201	-8575.721	-14235.311	-29410.201	8575.721	-14064.551						
291	10942.951	-29459.731	-48772.611	-10942.951	29459.731	-48444.491						
301	13416.201	-27329.931	-45126.971	-13416.201	27329.931	-45061.791						
311	15700.081	-18634.371	-30723.391	-15700.081	18634.371	-30770.021						
321	17182.311	-8560.701	-14047.801	-17182.311	8560.701	-14202.501						
331	8173.391	-32591.081	-51344.871	-8173.391	32591.081	-56205.701						
341	4853.771	-29057.811	-46086.491	-4853.771	29057.811	-49804.301						
351	6588.871	-18930.771	-30065.671	-6588.871	18930.771	-32405.891						
361	5281.621	-8626.541	-13196.671	-5281.621	8626.541	-15270.911						

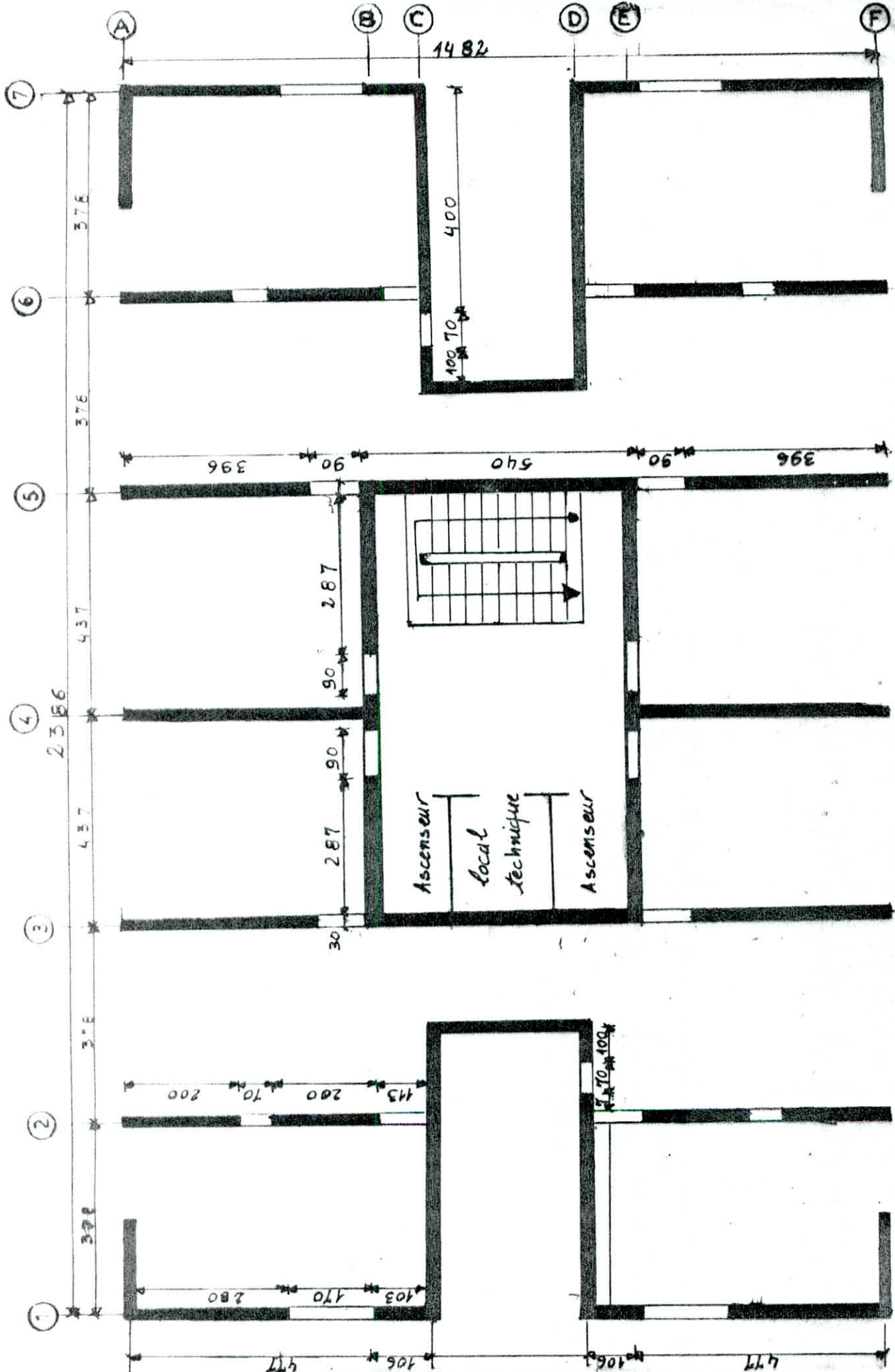
REACTION DES APPUIS

NOEUD	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	-25403.9205	-89616.2821	67271.7276
6	-32644.5160	5509.3667	76124.3066
11	-32030.0300	122.1992	75215.4394
16	-32343.8848	-5221.4931	75494.6845
21	-24897.6488	89206.2093	66128.0363

NOEUD	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
2	25740.0000	0.0000	0.0000
3	34750.0000	0.0000	0.0000
4	40140.0000	0.0000	0.0000
5	46690.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.0000	0.0000	0.0000
14	0.0000	0.0000	0.0000
15	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000	0.0000
22	0.0000	0.0000	0.0000
23	0.0000	0.0000	0.0000
24	0.0000	0.0000	0.0000
25	0.0000	0.0000	0.0000

programme déplacement termine

B/ STRUCTURES
A
VOILES



CALCUL DES RIGIDITES DE NIVEAUX

=====

DANS LE SENS LONGITUDINAL

=====

I/BATIMENT DE 4 NIVEAUX

=====

9924205.000	-9924205.000	0.000	0.000
-9924205.000	19848410.000	-9924205.000	0.000
0.000	-9924205.000	19848410.000	-9924205.000
0.000	0.000	-9924205.000	19848410.000

II/BATIMENT DE 8 NIVEAUX

=====

CES MATRICES AURONT LA MEME FORME QUE PRECEDEMENT, DONC ON
N'ECRIT QUE LES VALEURS SUIVANTES:

$K(1,1)=13232274.000$ $K(1,2)=-13232274.000$ $K(2,2)=26464548.000$
 $K(8,8)=26464548.000$

III/BATIMENT DE 16 NIVEAUX

=====

CES MATRICES AURONT LA MEME FORME QUE PRECEDEMENT, DONC ON
N'ECRIT QUE LES VALEURS SUIVANTES:

$K(1,1)=19848412.000$ $K(1,2)=-19848412.000$ $K(2,2)=39696824.000$
 $K(16,16)=39696824.000$

OK >

DETERMINATION DES VECTEURS PROPRES

PAR LA METHODE DE STODOLA

I/BATIMENT DE 4 NIVEAUX

```

=====
! * VECTEUR PROPRE NORMALISE * !
=====
!   NIV   !   10  MODE   !
-----
!     4   !     1.000   !
-----
!     3   !     0.879   !
-----
!     2   !     0.653   !
-----
!     1   !     0.347   !
=====

```

* PERIODE (SECONDES) = 0.1159

* COEF DE PARTICIPATION (%) = 89.343

II/BATIMENT DE 8 NIVEAUX

```

=====
! * VECTEUR PROPRE NORMALISE * !
=====
!   NIV  !10  MODE !   NIV  !10  MODE !
-----
!   8    ! 1.000 !   4    ! 0.677 !
-----
!   7    ! 0.966 !   3    ! 0.529 !
-----
!   6    ! 0.899 !   2    ! 0.363 !
-----
!   5    ! 0.801 !   1    ! 0.185 !
=====

```

* PERIODE (SECONDES) = 0.1888

* COEF DE PARTICIPATION (%) = 85.633

OK >

111/BATIMENT DE 16 NIVEAUX

```

=====
!                                     * VECTEUR PROPRE NORMALISE *                                     !
=====
! NIV !10 MODE ! NIV   !10 MODE ! NIV   !10 MODE ! NIV   ! 0 MODE !
-----
! 16  ! 1.000 ! 12   ! 0.911 ! 8    ! 0.691 ! 4    ! 0.372 !
-----
! 15  ! 0.991 ! 11   ! 0.867 ! 7    ! 0.619 ! 3    ! 0.282 !
-----
! 14  ! 0.973 ! 10   ! 0.815 ! 6    ! 0.541 ! 2    ! 0.189 !
-----
! 13  ! 0.946 ! 9    ! 0.757 ! 5    ! 0.459 ! 1    ! 0.095 !
-----

```

* PERIODE (SECONDES) = 0.3037

* COEF DE PARTICIPATION (%) = 83.464

OK >

CALCUL DES FORCES SISMIQUES PAR
 =====
 LA METHODE SPECTRALE
 =====

I/BATIMENT DE 4 NIVEAUX
 =====

! FORCES SISMIQUES SELON LE SPECTRE !	
! D'EL CENTRO(18 MAI 1940)(en tonnes) !	
! NIV !	! FORCES !
! 4 !	! 58.091 !
! 3 !	! 51.085 !
! 2 !	! 37.917 !
! 1 !	! 20.175 !

II/BATIMENT DE 8 NIVEAUX
 =====

! FORCES SISMIQUES SELON LE SPECTRE !			
! D'EL CENTROS(18 MAI 1940)(en tonnes) !			
! NIV !	! FORCES !	! NIV !	! FORCES !
! 8 !	! 61.743 !	! 4 !	! 41.774 !
! 7 !	! 59.641 !	! 3 !	! 32.643 !
! 6 !	! 55.507 !	! 2 !	! 22.400 !
! 5 !	! 49.483 !	! 1 !	! 11.394 !

III/BATIMENT DE 16 NIVEAUX
 =====

! FORCES SELON LE SPECTRE !			
! D'EL CENTROS(18 MAI 1940)(en tonnes)!			
! NIV !	! FORCES !	! NIV !	! FORCES !
! 16 !	! 69.388 !	! 8 !	! 47.937 !
! 15 !	! 68.759 !	! 7 !	! 42.941 !
! 14 !	! 67.508 !	! 6 !	! 37.556 !
! 13 !	! 65.646 !	! 5 !	! 31.831 !
! 12 !	! 63.189 !	! 4 !	! 25.818 !
! 11 !	! 60.160 !	! 3 !	! 19.571 !
! 10 !	! 56.586 !	! 2 !	! 13.147 !
! 9 !	! 52.499 !	! 1 !	! 6.603 !

OK

VOILE D'AXE C

EFFORT TRANCHANT DANS LE LINTEAU 1 :

NIVEAU	PI en t
0	0.00
1	25.92
2	27.58
3	25.59
4	22.34
5	18.12
6	13.00
7	7.25
8	3.29

Effort normal et moment flechissant dans l'element de refend 1 :

NIVEAU	N en t	M en tm
0	146.46	377.77
1	129.02	276.18
2	101.68	210.69
3	74.96	153.10
4	50.91	101.84
5	30.61	58.46
6	14.98	24.94
7	4.83	3.62
8	0.00	0.00

Effort normal et moment flechissant dans l'element de refend 2 :

NIVEAU	N en t	M en tm
0	146.46	5.90
1	129.02	4.32
2	101.68	3.29
3	74.96	2.39
4	50.91	1.59
5	30.61	0.91
6	14.98	0.39
7	4.83	0.06
8	0.00	0.00

CONCLUSIONS

Ce logiciel permet de calculer la réponse et les efforts engendrés dans une structure courante contreventée par portiques ou par voiles aussi bien à partir d'un spectre de réponse que d'un accélérogramme.

Ainsi, nous avons traité des différentes type de structure pour lesquelles le nombre de niveaux varie pour un type de contreventement donné (portique ou voile) et nous avons constaté :

- D'une part que pour les structures contreventées par portiques les périodes calculées sont supérieures à celles données par les RPAS et elle ne varient pas dans le rapport $T = 0,09 \frac{H}{\sqrt{L}}$ donné par les RPAS.
- D'autre part l'influence du 1^{er} mode \sqrt{L} décroît avec, le nombre d'étage mais reste cependant prépondérant.

Ce travail nous a aussi permis de constater qu'à partir de l'accélérogramme on peut à un instant obtenir des valeurs supérieures à celles données par le spectre de réponse, ceci étant dû au fait que par la méthode spectrale on fait la moyenne quadratique, c'est à dire qu'à partir d'un accélérogramme on connaît l'histoire de la réponse que l'on ne peut obtenir d'un spectre de réponse. L'analyse de l'histoire montre que les amplitudes maximales de vibration ne coïncident pas avec les efforts maximum engendrés dans la structure.

L'obtention de la réponse à partir d'un accélérogramme peut se faire à l'aide de ce logiciel dans le domaine des temps ou dans le domaine des fréquences. Nous avons constaté que les réponses obtenues par ces deux méthodes donnent des résultats identiques (au centième de cm).

De plus le temps machine requis pour effectuer un calcul dans le domaine des fréquences est plus rapide.

la formulation, la résolution et la programmation des équations est plus simpliste et de loin plus maniable dans le domaine des fréquences

que dans le domaine des temps -

L'utilisation dans le domaine des fréquences d'une forme exponentielle complexe n'est en pas gênante dans la mesure où dans les résultats finaux les imaginaires sont tous nuls (ou très proche de zéro, de l'ordre de 10^{-14}).

Ce logiciel, bien que pouvant d'ores et déjà décharger l'ingénieur d'un travail pénible, méticuleux et ardu, demande à être complété pour l'étude des différentes structures que nous n'avons pas eu malheureusement le temps de prendre en considération ici, pour lequel il ne suffit que de former les matrices des rigidités et des masses.

BIBLIOGRAPHIE

- 1/ Clough et Penzien " Dynamique des structures "
- 2/ J.F. AUBOIN " Calcul des structures et informatique "
- 3/ A. CAPRA et V. DAVIDOVICI " Calcul dynamique des Structures en zone sismique "
- 4/ L. DOBRESCU et A. DOBRESCU " Dynamique des structures et sismologie de l'ingenieur " OPU 1983.
- 5/ M. DAUDI, M. RILI, A. SALHI " Conception et calcul des Structures soumises aux seismes " OPU 1984.
- 6/ G. DHATT, G. TOUZOUT " une representation de la methode des elements finis "
- 7/ Pelletier : " Techniques numeriques appliquees au calcul scientifique "
- 8/ ALBIGES et GOULET " Contreventement des batiments "
- 9/ FUENTES " calcul pratique des ossatures de batiment en Beton Armé "
- 10/ WANG " Calcul des structures par les methodes numeriques et matricielles "
- 11/ MASSONNET et DEPREEZ " Calcul des structures sur ordinateur "

