

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

2ex

Pour l'Obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat

SUJET

ELABORATION D'UN LOGICIEL POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PLAQUES
PAR LES ELEMENTS FINIS

Proposé Par :

Pr B. TILIOUINE

Etudié par :

S. MOUSSAOUI
A. BOUABDALLAH

Dirigé par :

Pr B. TILIOUINE

PROMOTION : Juin 1988

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat

SUBJECT

ELABORATION D'UN LOGICIEL POUR
L'ANALYSE FLEXIONNELLE DES PLAQUES
PAR LES ELEMENTS FINIS

Proposé Par :

Pr B. TILIOUINE

Etudié par :

S. MOUSSAOUI
A. FOUAFDAKHAH

Dirigé par :

Pr B. TILIOUINE

PROMOTION : Juin 1988

المكتبة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Département : Génie Civil

Promoteur : B.TILIOUINE

Elèves Ingénieurs : S.E.MOUSSAOUI & A.H.BOUABDALLAH

الموضوع: انجاز برنامج آلي للتحليل الانحنائي باستعمال طريقة العناصر المحدودة
الملخص: هذا المشروع يهدف الي انجاز برنامج آلي يستخدم في التحليل الانحنائي لهفائح
رقيقة باستعمال
طريقة العنصر المحدودة
طريقة الفروق المحدودة
تسمح بتعيين المجاهيل الاساسية لهفائح تحت حمولات ساكنة عمودية لها شروط
تثبيت مختلفة .

Sujet : Elaboration d'un logiciel pour l'analyse flexionnelle des
plaques par éléments finis .

Résumé : Ce present projet a pour objectif l'élaboration d'un
logiciel pour l'analyse flexionnelle des plaques
minces par :
* Méthode des éléments finis
* Méthode des différences finies
permettant la détermination des inconnus de base des
plaques sous charges statique verticales ayant des
conditions de fixation quelconques.

Subject :Development of a computer program for banding plates
analysis

Abstract :The aim of a present research is to develop a coputer
program (or software) for banding thin plates
analysis per :
* The finit element method
* the finit difference method
to permit the détermination of the plates basis unknown
under vertical static loads wich have whatever conditions
of fixation.

THÉDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

A ma mère qui a tant souffert pour moi pour me voir ainsi.

A mon père qui demeure pour moi l'exemple de sagesse et de bonté.

A mes frères et soeurs .

A tous ceux qui me sont chers.

Salah eddine

A ma mère qui a été mon soutien permanent.

A mon père qui m'a conduit sur ce chemin où je me trouve.

A mes frères et soeur qui m'ont donné l'exemple.

A tous ceux qui me sont chers.

Abdelhamid

A Tous ceux qui croient en dieu et le craignent.

A Nos amis.

Abdelhamid & Salah eddine

Remerciements

Nous remercions vivement notre professeur et promoteur Mr B.Tiliouine qui n'a ménagé aucun efforts pour nous aider , conseiller et diriger.

Nous remercions également Mr M.Demidem pour la serviabilité qu'il nous a toujours manifesté.

Nos remerciements a tous les enseignants qui ont contribué a notre formation ,ainsi au personnel du centre de calcul de l'école national polytechnique pour l'amitié et l'aide qu'il nous a toujours fournis.

Sommaire

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

CHAPITRE I : THEORIE DES PLAQUES MINCES.

- I.1 DEFINITION
- I.2 HYPOTHESES FONDAMENTALES
- I.3 LIMITATION D'APPLICATION DES FORMULES DES PLAQUES
- I.4 EQUATIONS GENERALES
- I.5 CONDITIONS AUX LIMITES
- I.6 METHODE DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTE
- I.7 SOLUTION DE MAURICE LEVY
 - I.7.1 PLAQUES SUR DIVERS CONDITIONS D'APPUI
- I.8 EQUATION GOUVERNANTE D'UNE PLAQUE ANISOTROPE
- I.9 EQUATION GOUVERNANTE D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE

CHAPITRE II : INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

- II.1 INTRODUCTION
- II.2 HISTORIQUE

CHAPITRE III : ELEMENT FINI RECTANGULAIRE POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

- III.1 INTRODUCTION
- III.2 DISCRETISATION D'UNE STRUCTURE
- III.3 LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
- III.4 PROBLEME DE CONTINUITE C1
- III.5 CONDITIONS DE CONVERGENCES
 - III.5.1 COMPLITUDE
 - III.5.2 COMPATIBILITE
- III.6 MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE
- III.7 VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE
- III.8 ASSEMBLAGE
 - III.8.1 PRINCIPE D'ASSEMBLAGE
 - III.8.2 REGLE D'ASSEMBLAGE

CHAPITRE IV : ORGANISATION DE PROGRAMME PAR ELEMENT FINI

- IV.1 INTRODUCTION
- IV.2 PROGRAMMATION
 - IV.2.1 ENTREE DES DONNEES
 - IV.2.2 FONCTION DES SUBROUTINES UTILISEES
- IV.3 EXEMPLES D'APPLICATION DU PROGRAMME SUR DES PLAQUES AVEC DIVERS CONDITIONS D'APPUI.

CHAPITRE V : METHODE DES DIFFERENCES FINIES.

V.1 INTRODUCTION.

V.2 CAS D'UNE FONCTION A UNE VARIABLE.

V.3 CAS D'UNE FONCTION A DEUX VARIABLES.

V.4 APPROXIMATION PAR DIFFERENCES FINIES DE L'OPERATEUR
DOUBLE LAPLACIEN.

V.5 SOLUTION DES EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES.

V.6 CALCUL DES EFFORTS.

V.6.1 LES MOMENTS

V.6.2 LES EFFORTS

V.7 AUTRE MANIERE DE RESOLUTION DU PROBLEME.

V.8 CONDITIONS AUX LIMITES.

CHAPITRE VI : ORGANISATION DE PROGRAMME PAR DIFFERENCE FINIE

VI.1 DISCRIPTION DU PROGRAMME

VI.1.1 ENTREE DES DONNEES

VI.1.2 DEVELOPPEMENT DE L'OPERATEUR DOUBLE LAPLACIEN

VI.1.3 RESOLUTION

VI.2 FONCTION DU PROGRAMME PRINCIPAL ET DES SOUS-PROGRAMMES

VI.3 OPPLICATION DE LA RESOLUTION PAR DIFFERENCE FINIE

VI.4 EXEMPLES D'APPLICATION DU PROGRAMME SUR DES PLAQUES AVEC
DIVERS CONDITIONS D'APPUI.

CONCLUSION

PRESENTATION

L'objet du présent travail consiste en l'analyse flexionnelle des plaques par deux méthodes numériques qui sont :

METHODE DES ELEMENTS FINIS METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Le but est la détermination des déplacements et des contraintes en n'importe quel point d' une plaque soumise à un chargement avec divers conditions d'appui, qui sont nécessaires pour l'ingenieur afin de dimensionner et de vérifier la stabilité et l'équilibre des plaques.

On a élaboré un logiciel qui sert à la détermination de ces inconnues par les méthodes précédemment énoncées ce travail est divisé en sept chapitres :

1^{er} Chapitre : Présente la théorie classiques des plaques

2^{ème} Chapitre : Consacré pour la présentation générale de la M.E.F

3^{ème} Chapitre : Présente le développement de la méthode par l'utilisation d'un élément rectangulaire à 4 noeuds et 12 degrés de liberté pour l'étude de la flexion des plaques.

4^{ème} Chapitre : Présentation générale du programme élaboré pour la M.E.F en explicitant les différentes sous-routines de ce programme, avec une application de ce dernier à des plaques avec diverses conditions d'appuis et de chargements.

5^{ème} Chapitre : Consacré pour la présentation de la méthode des différences finies et son développement pour l'étude de la flexion des plaques .

6^{ème} Chapitre : Présentation de programmes développés pour la méthode des différences finies et des applications.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction

CHAPITRE 1

Theorie des plaques minces

QUELQUES PRELIMINAIRES :

Les plaques sont initialement des éléments plan qui ont une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions .

Les plaques en matériau homogène, présentant les mêmes propriétés mécaniques dans tous les sens sont **isotropes**, par contre celles présentant des propriétés mécaniques différentes dans toutes les directions ,sont **anisotropes**.

On suppose que la charge extérieure et le poids mort agissent sur le plan médian.

Si les charges sont appliquées **dans** le plan moyen il naît l'état plan de contrainte; et si elles sont appliquées **perpendiculairement** à ce dernier une flexion transversale se produit; sous l'action simultanée des deux composantes il naît une flexion composée des plaques.

Le caractère de l'état de contrainte des plaques dépend surtout du rapport de l'épaisseur aux dimensions de plan, et selon ce caractère les plaques sont classées comme suit :

1- plaque épaisse dans laquelle naît l'état de contrainte triaxial qui est décrit par un système complet des équations différentielles de la théorie spatiale de l'élasticité.

Comme épaisse, peuvent être considérées de telles plaques dont lesquelles le rapport:

$$\frac{\text{épaisseur de la plaque}}{\text{min(des dimensions du plan)}} > 1/5$$

2- plaques minces de faible déplacement vertical, dans lesquelles les contraintes de membrane, lors d'une flexion due au chargement transversal, sont très faibles comparées aux contraintes de flexion (à 5%).

Les plaques de ce type sont celles dans lesquelles le rapport de l'épaisseur (h) à la portée (a) n'est pas supérieur à 1/5 et le déplacement vertical (W) ne dépasse pas 1/5 de l'épaisseur (h) de la plaque.

3- plaques minces de grands déplacements verticaux ($W/h > 1/5$) sont caractérisées par le fait que, grâce à leur faible épaisseur, la contrainte de flexion est accompagnée par des valeurs relativement considérables des contraintes de traction ou de compression de membrane au plan médian.

Les contraintes de membrane naissant dans une plaque de grand déplacement vertical exercent une influence considérable sur les moments fléchissants .Elles se réduisent à une valeur beaucoup plus faible et leur dépendance de la charge transversale disparaît ici.

Le calcul des plaques minces de grands déplacements verticaux fait à l'aide d'un système d'équations différentielles qui décrit la déformation simultanée par flexion et traction ou compression.

4- les membranes sont les plaques dans lesquelles naissent, lors d'un chargement transversal, des contraintes de flexion si faible que l'on peut les négliger en comparaison avec les contraintes de membranes.

CHAPITRE: I

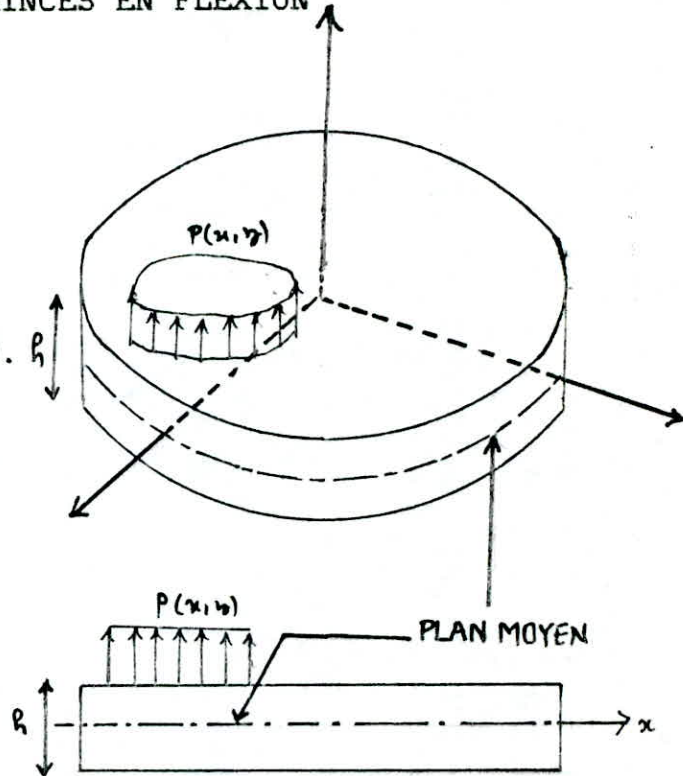
THEORIE DES PLAQUES MINCES EN FLEXION

I.1 DEFINITION :

Une plaque mince est un solide limité par deux plans parallèles, voisins d'équation $Z = + h/2, Z = - h/2$, et par une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à OZ.

Le plan OXY est le **plan moyen** (ou feuillet moyen) de la plaque.

L'épaisseur (h) de la plaque est supposée petite devant ces dimensions de la plaque mesurées dans le plan moyen (fig 1-1).



I.2 HYPOTHESES FONDAMENTALES :

La théorie classique des plaques (souvent appelée aussi théorie de Poisson-kirchhoff des plaques minces) est basée sur certaines hypothèses simplificatrices et limitations.

Ces hypothèses et limitations concernent, à part la plaque considérée et le matériau dont elle est fabriquée, même le comportement de la plaque lors de l'action d'une charge.

HYPOTHESES :

1- Les forces extérieures peuvent être considérées comme appliquées au plan moyen (y compris le poids propre de la plaque).

2- La contrainte normale sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée.

3- Le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la plaque.

Le déplacement d'un point du plan moyen se réduit donc à sa seule composante normale $W(x,y)$ appelée flèche de la plaque.

4- Les fibres de la plaque, perpendiculaires au plan médian avant la flexion, restent perpendiculaires sur celui-ci même après la flexion.

5- La déformée du plan moyen est petite comparée à son épaisseur, donc la rotation de la surface fléchie est très petite et le carré de la rotation est négligeable par rapport à l'unité.

En tenant compte de ces hypothèses, toutes les composantes de la contrainte peuvent s'exprimer par la flèche W de la plaque qui est une fonction à deux dimensions dans le plan de cette dernière.

Cette fonction doit satisfaire à une équation linéaire aux dérivées partielles, qui avec les conditions aux limites, définit complètement W .

Ainsi donc, la solution de cette équation donne toutes informations nécessaires au calcul des contraintes en n'importe quel point de la plaque.

I.3 LIMITATION D'APPLICATION DES FORMULES DES PLAQUES MINCES

1°_ L'hypothèse (3) ne peut être rigoureusement satisfaite que si le plan moyen déformé est une surface applicable sur un plan (autrement dit une surface développable) ($h \ll a, b$).

Mais si la plaque fléchit de telle sorte que le plan moyen déformé soit une surface non développable, cette surface subit nécessairement pendant la flexion des extensions ou des contractions

Dans ce cas les formules de la flexion des plaques ne sont correctes que si les contraintes dues aux déformations du plan moyen sont petites devant les contraintes maximales provoquées par la flexion (c'est-à-dire dilatations du plan moyen sont petites devant les dilatations maximales produites par la flexion, pour que cette condition soit vérifiée, il faut que $W \ll h$).

2°_ L'hypothèse (4) équivaut à négliger l'effet des efforts tranchants sur la flèche des plaques. Cette hypothèse est généralement satisfaisante, mais dans certains cas (par exemple, dans le cas de trous dans une plaque) l'influence du cisaillement doit être apporté à la théorie des plaques minces.

3°_ Si des forces externes viennent s'ajouter aux charges transversales agissant dans le plan moyen de la plaque, la troisième hypothèse ne doit plus être prise en considération, et il est nécessaire de tenir compte de l'effet des contraintes agissant dans le plan moyen de la plaque sur la flexion de celle-ci.

Il suffit pour cela d'introduire quelques termes correctifs dans l'équation aux dérivées partielles.

I.4 EQUATIONS GENERALES

I.4.1 RELATION DEFORMATIONS-COURBURES :

Selon l'hypothèse (4), la relation déformations-déplacements se réduit à :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a) \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (d)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (b) \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (e) \quad (1-1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (c) \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (f)$$

En intégrant l'équation (d) on obtient :

$$w = w(x, y)$$

En intégrant les équations (e), (f) on obtient :

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y)$$

où

$u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ représentent les valeurs de u et v dans le plan moyen.

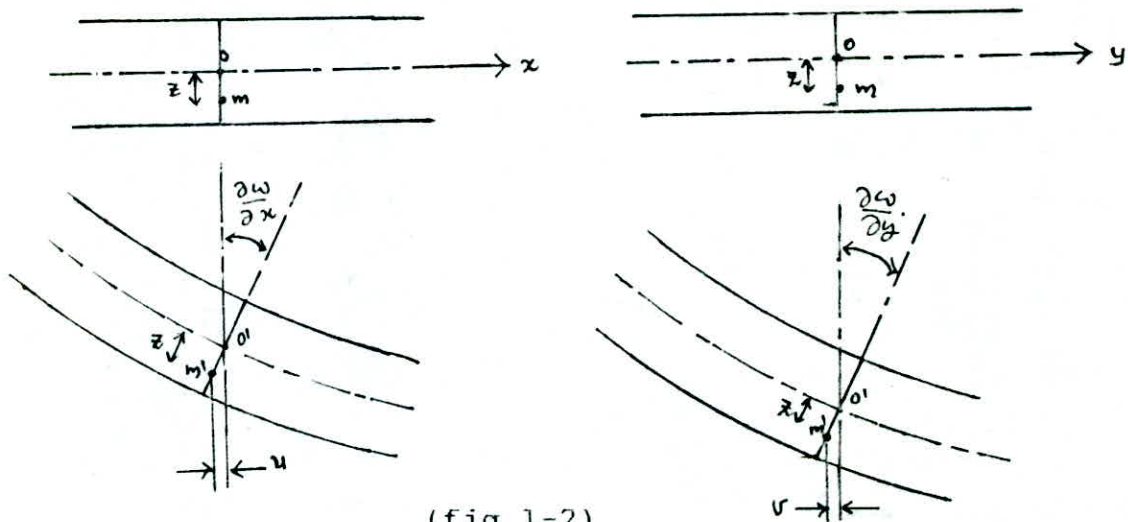
En se basant sur l'hypothèse (3) ,on conclue que :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ v_0 &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1-2)$$

Ces expressions peuvent être obtenue d'après la (fig 1-2).



(fig 1-2)

En substituant les équations (1-2) dans les trois premières équations de (1-1) on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1-3)$$

D'après l'hypothèse (5) le carré de rotation est négligeable et les dérivées partielles de W représentent les courbures de la plaque.

Les courbures du plan moyen dans un plan parallèle aux plans XZ, YZ et XZ respectivement sont :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_x} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = K_x \\ \frac{1}{r_y} &= - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = K_y \\ \frac{1}{r_{xy}} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = K_{xy} \end{aligned} \quad (1-4)$$

REMARQUE :

Une courbure est considérée comme positive si elle est convexe vers le bas.

Les équations de (1-4) sont précédées du signe moins car la flèche est convexe vers le bas et donc les dérivées secondes sont négatives.

Ainsi la relation déformations-courbures s'écrit d'après (1-3) et (1-4) comme suit :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= z \cdot K_x \\ \epsilon_y &= z \cdot K_y \\ \gamma_{xy} &= 2 \cdot z \cdot K_{xy} \end{aligned} \quad (1-5)$$

1.4.2 RELATION CONTRAINTES-COURBURES :

Dans le cas de l'état de contraintes tri-dimensionnel, les contraintes et les déformations sont reliées par la loi généralisée de HOOK pour un matériau isotrope, homogène :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (1-6)$$

ou

E : module d'YOUNG

v : coefficient de POISSON

G : module d'élasticité transversal

$$G = E/(2.(1+v))$$

Selon l'hypothèse (4) :

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

L'équation (1-6) devient :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1-v)} (\epsilon_x + v \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-v)} (\epsilon_y + v \epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}\end{aligned} \quad (1-7)$$

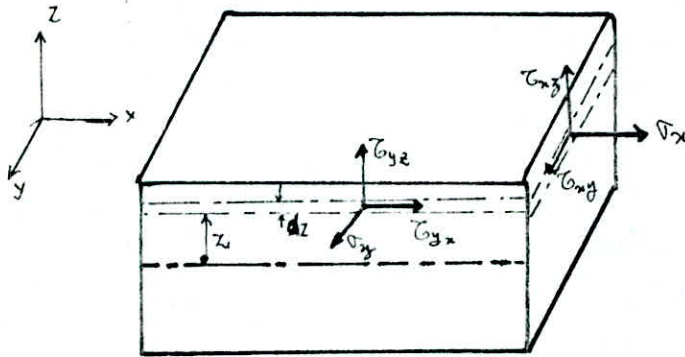
Introduisons les courbures de la plaque dans (1-7), on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E.z}{(1-v)} (K_x + v.K_y) = - \frac{E.z}{(1-v)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E.z}{(1-v)} (K_y + v.K_x) = - \frac{E.z}{(1-v)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E.z}{(1+v)} K_{xy} = - \frac{E.z}{(1+v)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned} \quad (1-8)$$

On observe à partir de ces formules que les contraintes sont nulles dans le plan moyen et varient linéairement avec l'épaisseur de la plaque.

I.4.3 LES EFFORTS INTERNES :

Les contraintes qui règnent sur l'épaisseur de la plaque produisent des moments de flexion et de torsion et des efforts tranchants par unité de longueur sont appelées contraintes généralisées.



(fig 1-3)

De la (fig 1-3) on peut exprimer la resultante des contraintes dans le sens X par :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dy dz = dy \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz = M_x dy$$

D'une manière analogue, les autres expressions :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (1-9a)$$

et

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (1-9b)$$

Les équations (1-9a) définissent les moments (de flexion et de torsion) en fonction des contraintes qu'on remplace par les expressions (1-8), il vient après integration :

$$M_x = D (K_x + \nu.K_y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = D (K_y + \nu.K_x) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1-10a)$$

$$M_{xy} = D (1-\nu) K_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

ou D : rigidité flexionnelle de la plaque

$$D = E h^3 / 12(1-\nu^2) \quad (1-10b)$$

les contraintes sont obtenues des équations (1-8) en substituant les équations (1-10a) en utilisant (1-10b) d'où :

$$\sigma_x = 12 M_x.z/h^3$$

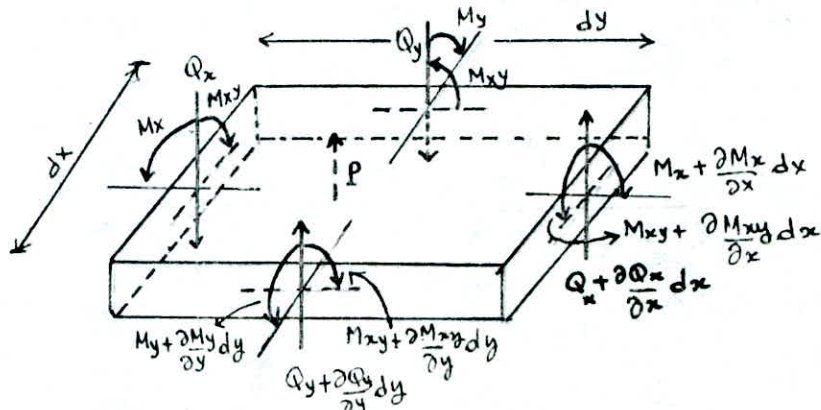
$$\sigma_y = 12 M_y.z/h^3 \quad (1-11)$$

$$\tau_{xy} = 12 M_{xy}.z/h^3$$

1.4.4 EQUATIONS D'EQUILIBRE :

On considère un élément de la plaque limité par deux paires de plans parallèles au plan XZ, YZ (fig 1-4), sur lequel agit une charge répartie par unité de surface (d'intensité $P = P(x,y)$).

Projetons sur l'axe OZ toutes les forces agissant sur l'élément, on obtient l'équation d'équilibre suivante :



(fig 1-4)

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + P dx dy = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = 0 \quad (a)$$

L'équilibre des moments par rapport à l'axe des X :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0 \quad (b)$$

Dans cette équation, le moment de la charge P et celui dû à la variation de Q_y sont considérés comme étant infiniment petits d'ordre supérieur et donc négligeable .

Après simplification, l'équation (b) devient :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (c)$$

Agissant de même en considérant les moments par rapport à l'axe Y ,on obtient :

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (d)$$

Les trois équations (a),(c)et (d) définissent complètement l'équilibre de l'élément, puisqu'il n'y a pas de forces parallèles à X et à Y et pas de moments par rapport à Z.

Éliminons les forces de cisaillement Q_x et Q_y de ces équations en tirant leur valeurs de (c) et (d) que nous remplaçons dans (a) ,on tire :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = - P \quad (1-12)$$

1.4.5 EQUATION GOUVERNANTE POUR LA FLEXION DES PLAQUES :

En remplaçant M_x , M_y et M_{xy} donnés par les équations (1-10) dans (1-12) on obtient :

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (1-13)$$

Cette équation a été dérivée en premier lieu par Mr LAGRANGE en 1811.

Elle peut être écrite sous forme du double Laplacien :

$$\nabla^4 W = P/D$$

cette équation est dite équation différentielle gouvernante pour la déformée des plaques minces.

1.5 CONDITIONS AUX LIMITES

1.5.1 BORD ENCASTRE :

Le long d'un bord encasté :

- Le déplacement latéral est nul
- Le plan tangent à la surface moyenne fléchie coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque.

EXEMPLE : Si le bord ($x=a$) est encasté, alors les conditions le long de ce bord sont :

$$W(x=a) = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}(x=a) = 0$$

1.5.2 BORD SIMPLEMENT APPUYEE :

Le long d'un bord simplement appuyé (par exp. $x=a$) :

- Le déplacement latéral nul
- Le moment de flexion M_x est nul, ce qui signifie que la plaque peut tourner librement autour de l'axe X.

Analytiquement ces conditions peuvent être traduit par :

$$W(x=a)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

Puisque ($w=0$) le long du bord $x=a$ on peut simplifier la deuxième équation à :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

1.5.3 Bord libre :

Un bord entièrement libre (exp: $x=a$) alors il ne subit ni moment de torsion ni moment de flexion ni effort tranchant

Poisson a traduit ces conditions par les expressions suivantes

pour $x = a$: (bord libre)

$$M_x = 0 \quad M_{xy} = 0 \quad Q_x = 0$$

Plus tard Kirchoff trouva que ces conditions étaient de trop et que deux suffisaient pour déterminer complètement les flèches w satisfaisant à l'équation au dérivés partielles.

Il démontra que les deux conditions de poisson relatives à l'effort tranchant et au moment de torsion pouvaient être remplacés par une seule condition

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{pour } x = a$$

La condition pour que le moment de flexion soit nul se traduit par :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

I.6 METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTE :

Il y'a plusieurs méthodes de calcul de l'équation différentielle de la plaque qu'on peut les classer en deux groupes :

* 1er groupe :

Dans la première étape on part de la fonction satisfaisant à l'équation fondamentale de la plaque, mais qui ne remplit que quelques unes ou aucune des conditions aux limites, puis dans l'étape suivante on cherche une fonction complémentaire qui satisferait, en commun avec la première, tant à l'équation générale de la plaque qu'à toutes les conditions aux limites.

* 2ème groupe :

On procède de manière inverse. Partant de la fonction qui satisfait aux conditions aux limites mais pas à l'équation fondamentale, on cherche ensuite une fonction complémentaire telle que la fonction résultante $W(x,y)$ remplit aussi l'équation fondamentale.

Parmi ces méthodes il y'a :

I.6.1 METHODE DE SERIES DOUBLES DE FOURIER :

Une des solutions connues depuis très longtemps est celle de NAVIER, qui se sert des séries doubles de FOURIER. On développe la charge $P(x,y)$ appliquée à la plaque en série double trigonométrique

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1-14)$$

Les coefficients A_{mn} dépendent de la charge et sont de la forme

$$A_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^b P(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (1-15)$$

Par exemple pour une plaque simplement appuyée sur toute la périphérie les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned}
 x = 0, x = a : \quad W = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \\
 y = 0, y = b : \quad W = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1-16}$$

Si les coordonnées ont leur origine au milieu de la largeur, l'expression du déplacement vertical peut être pris sous la forme

$$W(x,y) = -1/2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{1-17}$$

Il suffit de reporter les développements de $W(x,y)$ et de $F(x,y)$ dans l'équation de LAGRANGE généralisée (1-13) pour trouver les coefficients W_{mn} .

1.6.2 METHODES VARIATIONNELLES

On prend la fonction fondamentale sous la forme :

$$w(x,y) = \sum_n a_n f_n(x,y) \tag{1-18}$$

en choisissant les fonctions $f_n(x,y)$ de façon qu'elles satisfassent rigoureusement aux conditions aux limites de la plaque.

Les calculs se réduisent ainsi à la détermination des constantes dans l'équation (1-18) de manière que l'équation générale de la plaque soit satisfaite au mieux.

On déterminera les constantes inconnues par exemple à l'aide de la méthode des moindres carrés, la méthode de Ritz du minimum d'énergie potentielle, celle de Goursat des variables complexes, la méthode de Galerkin ...etc.

1.6.3 METHODES PAR DIFFERENCES :

Le principe des méthodes par différences consiste à transformer l'équation différentielle de la plaque en une équation aux différences.

Sur la plaque on adopte un réseau aux intersections duquel les valeurs statiques cherchées s'expriment comme combinaison des différences de la déformée W .

Nous exprimerons de manière approchée, les dérivées de la fonction $W(x,y)$:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_n = \frac{1}{2} \frac{W_{n+1} + W_{n-1}}{\Delta x} \quad (1-19)$$

Ce qui signifie qu'au lieu de l'inclinaison de la ligne élastique au point étudié, nous définissons l'inclinaison de différences.

D'une manière analogue, nous obtiendrons les autres dérivées par rapport à x et, de même, à y .

En portant les dérivées ainsi exprimées dans l'équation fondamentale de la plaque pour n points du réseau, nous trouverons un système de n équations à n déplacements W inconnus (voir chap).

I.6.4 METHODES DIRECTES DE SOLUTION :

Ces méthodes sont fondées sur l'intégration directe de l'équation fondamentale de la plaque.

On cherche l'intégrale générale de l'équation fondamentale de la plaque en forme de série de Maurice Lévy

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (1-20)$$

ou Y_m n'est qu'une fonction de y .

Chaque terme de la série satisfait aux conditions aux limites

$$W = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

sur les bords appuyés $x = 0$ et $x = a$.

Il nous reste seulement à déterminer $Y_m(y)$ sous une forme qui satisfasse tant aux conditions aux limites sur les bords non appuyés ($y = +b$, $y = -b$) qu'à l'équation de la plaque.

On exprime également le second membre de l'équation fondamentale de la plaque sous forme d'une série analogue

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(y) \sin \frac{m \pi x}{a} \quad (1-21)$$

En remplaçant w et p dans l'équation fondamentale de la plaque par les expressions ci-dessus, on trouve une équation différentielle linéaire ordinaire de laquelle découle une équation caractéristique de la forme :

$$r^4 + 2.a_1.r^2 + a_2 = 0.$$

La solution générale est de la forme :

$$Y_m(y) = Y_{m_0}(y) + Y_{m_1}(y), \quad (1-22)$$

ou

$Y_{m_0}(y)$: la solution homogène de l'équation

$Y_{m_1}(y)$: la solution particulière.

Les constantes d'intégration se calculent ensuite à partir des conditions aux limites.

En remplaçant $Y_m(y)$ dans l'équation (1-20) on obtient la déformée W et, en dérivant cette expression, les valeurs des moments et efforts tranchants.

1.7 SOLUTIONS DE MAURICE LEVY : FORMULATION GENERALE

Maurice Levy a étudié les solutions de l'équation de LAGRANGE

$$\nabla^4 W = \frac{1}{D} P(x,y)$$

qui sont représentées par une série trigonométrique simple

$$W(x,y) = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \sin \frac{m \pi x}{a} \quad (1-23)$$

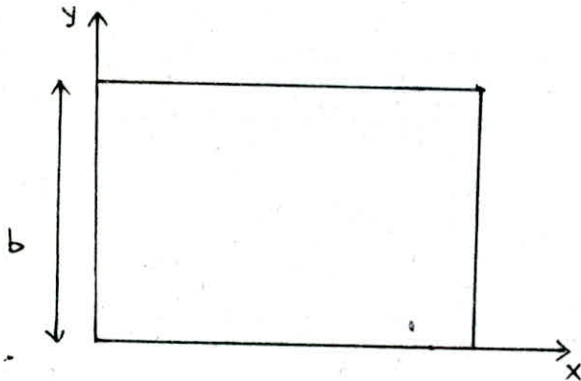
Ces solutions vérifient les conditions aux limites :

$$W = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad \text{pour } x = 0 \quad \text{et } x = a$$

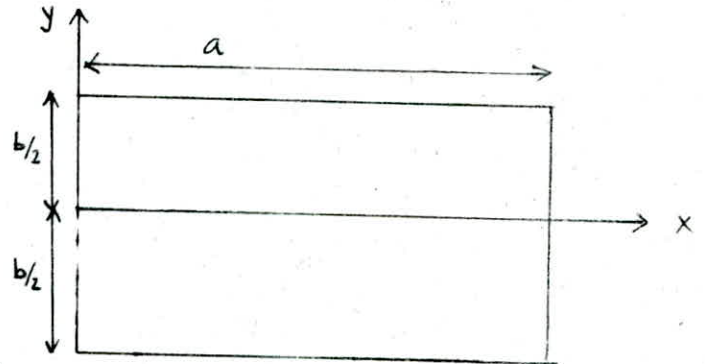
conviennent donc pour une plaque rectangulaire simplement appuyée le long des deux bords opposés d'équations :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = a$$

On détermine $F_m(y)$ de manière à vérifier les deux autres bords .



(fig 1-6)



(fig 1-7)

L'axe OX en général choisi de façon que : $b_1=0$ et $b_2=b$ (fig 1-6), mais il est souvent indiqué pour des raisons de symétrie (en particulier lorsque les conditions d'appui le long des deux côtés parallèles à OX sont identiques) de choisir l'axe OX de façon que $b_1=-b/2$ et $b_2=b/2$ (fig 1-7).

Développons la densité de charge $p(x,y)$ en une série de sinus

$$P(x,y) = \sum_m P_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (1-24)$$

Substituons les équations (1-23) et (1-24) dans l'équation gouvernante on obtient :

$$\frac{d^4 F_m}{d y^4} - 2(m\pi/a)^2 \frac{d^2 F_m}{d y^2} + (m\pi/a)^4 F_m = P_m(y) \quad (1-25)$$

L'équation caractéristique de (1-25)

$$r^4 - 2(m\pi/a)^2 r^2 + (m\pi/a)^4 = 0,$$

donne deux racines doubles : $r = m\pi/a$ $r = -m\pi/a$

on pose $Y = m\pi y/a$

L'intégrale général de (1-25) a pour expression :

$$F_m(Y) = f(Y) + (A_m \cdot \text{ch}(Y) + B_m \cdot Y \cdot \text{sh}(Y)) + (C_m \cdot \text{sh}(Y) + D_m \cdot Y \cdot \text{ch}(Y))$$

avec :

$f(Y)$: intégrale particulière (à déterminer par la méthode de la variation de constante)

A_m, B_m, C_m et D_m : sont des constantes arbitraires, déterminées de manière que W satisfait les conditions aux limites .

Il suffit d'écrire chaque solution particulière :

$$W_m(x, y) = - \frac{1}{D} F_m(y) \sin(m\pi x/a)$$

en vérifiant les conditions aux limites envisagées le long des cotés : $y = b_1$ et $y = b_2$.

CONDITIONS AUX LIMITES: (par exp. bord $y = b_1$)

1°) bord simplement appuyé :

$$\begin{aligned} & \text{et} \quad M_y(x, b_1) = 0 \\ & \quad \quad W_m(x, b_1) = 0 \end{aligned}$$

$$F_m(y) \text{ doit vérifier : } \begin{cases} F_m(b_1) = 0 \\ F''_m(b_1) = 0 \end{cases}$$

2°) bord encastéré :

$$\begin{aligned} W_m(x, b_1) &= 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial W_m(x, y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

$$F_m(y) \text{ doit vérifier : } \begin{cases} F_m(b_1) = 0 \\ F'_m(b_1) = 0 \end{cases}$$

3°) bord libre :

$$\begin{aligned} M(x, b_1) &= 0 \\ M_{xy}(x, b_1) &= 0 \\ Q_x(x, b_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$F_m(y) \text{ doit vérifier : } \begin{cases} F''(b_1) - v(m\pi/a)^2 F_m(b_1) = 0 \\ F'''(b_1) - (2-v)(m\pi/a)^2 F'_m(b_1) = 0 \end{cases}$$

Il suffit de remplacer b_1 par b_2 pour trouver les conditions aux limites de $y = b_2$.

Les fonctions $F_m(y)$ doivent donc vérifier quatre conditions deux le long de chacun des côtés $y = b_1$ et $y = b_2$, d'où on peut déterminer les constantes d'intégrations A_m , B_m , C_m et D_m .

Ayant ainsi déterminé $W(x, y)$ sous la forme (1-23), les équations (1-10a) donnent les moments flechissants et le moment de torsion :

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_m \left[(m\pi/a)^2 F_m(y) - v \cdot F''_m(y) \right] \sin(m\pi x/a) \\ M_y &= \sum_m \left[v \cdot (m\pi/a)^2 F_m(y) - F''_m(y) \right] \sin(m\pi x/a) \quad (1-26) \\ M_{xy} &= -(1-v) \sum_m \left[(m\pi/a) F'_m(y) \right] \cos(m\pi x/a) \end{aligned}$$

PLAQUES RECTANGULAIRES SUR DIVERS CONDITIONS D'APPUI

I.7.1 PLAQUE RECTANGULAIRE SIMPLEMENT APPUYEE SUR CES COTES ET UNIFORMEMENT CHARGEES :

A cause de la symetrie des conditions d'appui on choisie un système d'axe de façon que $b_1 = b/2$ et $b_2 = -b/2$ (fig 1-6)

Cette plaque est soumise à une densité de charge répartie :

$$P_m = \begin{cases} \frac{4 \cdot p}{m \pi} & \text{si } m \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases} \quad (1-27)$$

Dans ce cas la fonction $F_m(y)$ est une fonction paire que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$F_m(y) = P_m(a/m\pi)(1 + A_m \cdot \text{ch}Y + B_m \cdot Y \cdot \text{sh}Y)$$

En tenant compte des conditions aux limites :

$$F_m(b/2) = 0 \quad \text{et} \quad F_m''(b/2) = 0$$

on obtient les constantes A_m et B_m :

$$A_m = - \frac{2 + \lambda \text{th} \lambda}{2 \cdot \text{ch} \lambda}$$

avec :

$$\lambda = (m\pi b/2a)$$

nous obtenons ainsi la solution

$$W(x,y) = W_0(x) - \frac{1}{D} \sum_m P_m(a/m\pi)^4 (A_m \cdot \text{ch}(Y) + B_m \cdot Y \cdot \text{sh}(Y)) \sin(m\pi x/a)$$

ou

$W_0(x)$: correspond à la flèche d'une plaque infiniment longue de largeur (a) :

$$W_0(x) = -(1/D) \sum_m p_m \cdot (a/m\pi)^4 \sin(m\pi x/a) \quad (1-28)$$

De plus on peut déterminer les moments de flexion et de torsion selon les équation (1-26).

I.7.2 PLAQUE RECTANGULAIRE

* SIMPLEMENT APPUYEE POUR : $x=0$ $x=a$

* LIBRE POUR : $y=b/2$ $y=-b/2$

A cause de la symetrie des conditions d'appui on choisi un système d'axe de façon que $b_1=b/2$ et $b_2=-b/2$ (fig 1-6), dans ce cas la fonction $F_m(y)$ est une fonction paire que l'on peut écrire sous la forme :

$$F_m(y) = P_m(a/m\pi)^4 (1 + A_m \operatorname{ch}(Y) + B_m Y \operatorname{sh}(Y))$$

Les conditions aux limites :

$$F''_m(b/2) - \nu(m\pi/a)^2 F_m(b/2) = 0$$

$$F''_m(b/2) - (2-\nu)(m\pi/a)^2 F'_m(b/2) = 0$$

permettant de calculer les constantes A_m et B_m ; nous trouvons:

$$A_m = (\nu/(1-\nu)) \frac{(1+\nu)\operatorname{sh}\lambda - (1-\nu)\lambda \operatorname{ch}\lambda}{(3+\nu)\operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda - (1-\nu)\lambda}$$

$$B_m = (\nu/(1-\nu)) \frac{(1-\nu)\operatorname{sh}\lambda}{(3+\nu)\operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda - (1-\nu)\lambda}$$

ou

$$\lambda = (m\pi b/2.a)$$

Nous obtenons ainsi la solution :

$$W(x,y) = W_0(x) - 1/D \sum_m P_m(a/m\pi)^4 (A_m \operatorname{ch}(Y) + B_m Y \operatorname{sh}(y)) \sin(m\pi x/a)$$

$W_0(x)$ étant la fonction définie par (1-28).

De plus on peut déterminer les moments flichissants et le moment de torsion selon les équations (1-26).

I.7.3 PLAQUE RECTANGULAIRE SIMPLEMENT APPUYEE SUR TROIS COTES:

Considerons une plaque uniformément chargée, ayant les conditions de contours suivantes :

simplement appuyée pour $x=0$, $x=a$, $y=0$
libre pour $y=b$

la fonction $F_m(y)$ peut être écrite sous la forme :

$$F_m(y) = P_m(a/m\pi)^4 (1 + A_m \cdot \text{ch}(Y) + B_m \cdot Y \cdot \text{sh}(Y) + C_m \cdot \text{sh}(Y) + D_m \cdot y \cdot \text{ch}(Y))$$

les conditions aux limites le long du côté $y=0$:

$$F_m(0) = 0 \quad \text{et} \quad F_m''(0) = 0$$

montrent que A_m et B_m ont pour valeurs :

$$A_m = 1 \quad \text{et} \quad B_m = 1/2$$

Les conditions aux limites le long du côté $y = b$:

$$F_m''(b) - v(m\pi/a)^2 F_m(b) = 0$$

$$F_m'''(b) - (2-v)(m\pi/a)^2 F_m'(b) = 0$$

montrent que C_m et D_m ont pour valeurs :

$$C_m = \frac{(3+v)(1-v)\text{sh}^2\lambda - v(1-v)\lambda \text{sh}\lambda + v(1+v)(\text{ch}\lambda - 1) - 1/2(1-v)^2\lambda^2}{(1-v)[(3+v)\text{sh}\lambda \text{ch}\lambda + (1-v)\lambda]}$$

$$D_m = \frac{-1/2(3+v)\text{sh}^2\lambda + v(\text{ch}\lambda - 1)}{(3+v)\text{sh}\lambda \text{ch}\lambda + (1-v)\lambda}$$

avec $\lambda = (m b/a)$

nous obtenons ainsi la solution :

$$W(x,y) = W_0(x) - 1/D \sum_m P_m(a/m\pi) \left[-\text{ch}(Y) + Y/2 \text{sh}(Y) + C_m \text{sh}(Y) + D_m Y \text{ch}(Y) \right] \sin(m x/a)$$

avec $W_0(x)$ désignant la fonction définie par (1-28).

De plus on peut déterminer les moments flechissants et le moment de torsion comme définie dans les fonctions (1-26).

I.8 L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA LIGNE ELASTIQUE D'UNE PLAQUE ANISOTROPE

Procédons de la même manière que dans le cas d'une plaque isotrope, seulement dans ce cas, le module d'élasticité a six composantes car la plaque présente des propriétés élastiques différents dans toutes les directions.

La relation contrainte-déformation peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_{11} \epsilon_x + E_{12} \epsilon_y + E_{14} \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= E_{21} \epsilon_x + E_{22} \epsilon_y + E_{24} \gamma_{xy} \\ \tau_{xy} &= E_{41} \epsilon_x + E_{42} \epsilon_y + E_{44} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1-29)$$

où : $E_{ij} = E_{ji}$

en substituant les déformations par leurs expressions (1-3) dans les équations (1-29), puis en intégrant selon (1-9a) on obtient :

$$\begin{aligned} M_x &= - \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{24} \\ D_{41} & D_{42} & D_{44} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \partial^2 W / \partial x^2 \\ \partial^2 W / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 W / \partial x \partial y \end{array} \right\} \\ M_y &= - \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{24} \\ D_{41} & D_{42} & D_{44} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \partial^2 W / \partial x^2 \\ \partial^2 W / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 W / \partial x \partial y \end{array} \right\} \\ M_{xy} &= - \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{24} \\ D_{41} & D_{42} & D_{44} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \partial^2 W / \partial x^2 \\ \partial^2 W / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 W / \partial x \partial y \end{array} \right\} \end{aligned}$$

ou :

D_{ij} : rigidité de la plaque anisotrope.

$$D_{ij} = E_{ij} \cdot h^3 / 12$$

D'après les équations d'équilibre on obtient l'équation différentielle de la ligne élastique pendant la flexion :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 \cdot D_{14} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2 \cdot D_{44}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 \cdot D_{24} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\ + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \end{aligned}$$

1.9 L'EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA LIGNE ELASTIQUE D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE

Dans ce cas le matériau de la plaque possède trois plans de symétries par rapport à ses propriétés élastiques :

$$\begin{aligned} E_{11} &= E_x / (1 - \nu_x \nu_y) & E_{22} &= E_y / (1 - \nu_x \nu_y) \\ E_{12} &= \nu_x E_y / (1 - \nu_x \nu_y) & E_{21} &= \nu_y E_x / (1 - \nu_x \nu_y) \\ E_{44} &= G \end{aligned}$$

et :

$$E_{14} = E_{41} = E_{24} = E_{42} = 0$$

où :

E_x, E_y : modules d'élasticité longitudinales (dans les sens X et Y respectivement).

G : module de cisaillement.

ν_x, ν_y : coefficients de poisson dans les deux directions.

La contrainte généralisée exprimée en fonction de la déformation généralisée peut se présenter sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_x & D & 0 \\ D & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial^2 W / \partial x^2 \\ \partial^2 W / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 W / \partial x \partial y \end{Bmatrix}$$

ou :

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{E_x \cdot h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} & D_y &= \frac{E_y \cdot h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \\ D_{xy} &= \frac{G \cdot h^3}{12} \end{aligned}$$

A partir des conditions d'équilibre $\begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$

on aura :

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (1-30)$$

ou :

$$H = 2.D_{xy} + \frac{V_y.D_x + V_x.D_y}{2}$$

l'équation (1-30) représente l'équation différentielle de la ligne élastique d'une plaque orthotrope pendant la flexion.

CHAPITRE 2

Introduction a la M.E.F

CHAPITRE II :

INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

II.1 INTRODUCTION

Les techniques de calcul des structures ont connu ces vingt dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries de pointe et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs.

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique,.....) permettant de décrire le comportement de système physique grâce à des équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis (M.E.F) est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations.

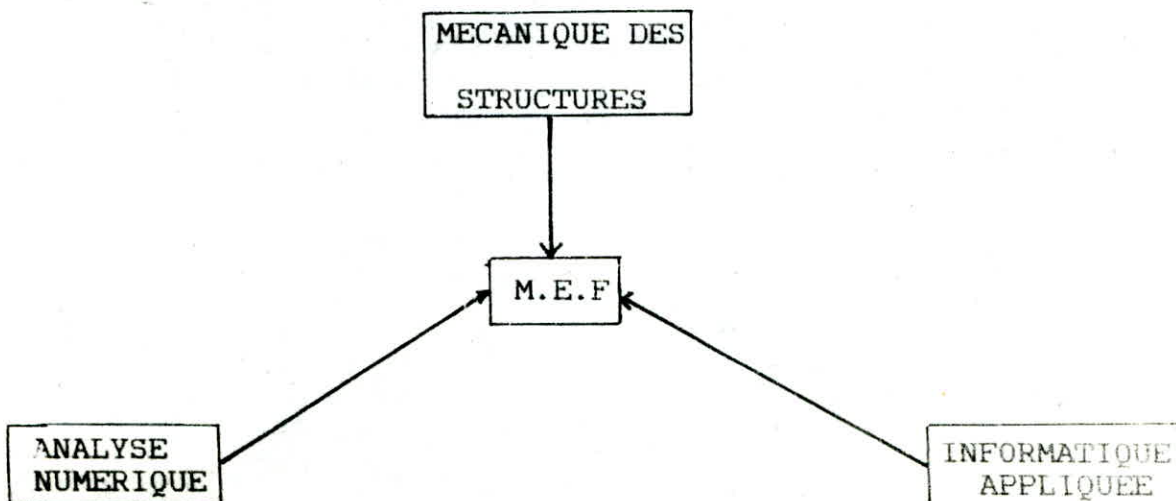
Elle est utilisée par l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : en construction aéronautique, aérospatiale, génie civil, construction navale, mécanique,.....

Par ailleurs la M.E.F a un caractère pluridisciplinaire car elle met en oeuvre les connaissances de trois disciplines de base :

* Mécanique des structures : élasticité, R.D.M, dynamique, plasticité,...

* Analyse numérique : méthode d'approximation, résolution des systèmes linéaires, des problèmes aux valeurs propres,...

* Informatique appliquée : techniques de développement et de maintenance des grands logiciels.



II. 2HISTORIQUE :

Depuis une cinquantaine d'années la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et poutres . Le comportement de chaque élément de barre ou de poutre est représenté par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la R.D.M .

A partir des matrices élémentaires, nous construisons un système d'équations algébriques en utilisant des conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonction des éléments ou noeuds.

La résolution du système d'équations correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements de tous les noeuds de la structure.

L'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie aéronautique ont provoqués un développement rapide de la mécanique des structures entre 1950 et 1960.

Turner, Clough, Martin et topp introduisent en 1956 le concept d'élément fini :

ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires sur lesquels les déplacements sont supposés varier linéairement . Le comportement de chaque panneau est caractérisé par une matrice de rigidité élémentaire .

A partir de ces matrices, la technique classique de la mécanique des structures conduit à la solution , c'est-à-dire aux déplacements en tous points du milieu continu.

Soulignons également le travail de Argyris et Kelsey qui systématisent l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures .

Dès 1960 la méthode des éléments finis subit un développement rapide dans plusieurs directions :

- reformulation, à partir de considérations énergétiques et variationnelles, sous la forme générale des résidus pondérés.

- création des éléments de haute précision et des éléments à cotés curvilignes ou isoparamétriques.

- utilisation de la méthode des éléments finis dans la résolution des problèmes non linéaires et non stationnaire dans le domaine des structures ainsi que dans autre domaine : mécanique des roches, mécanique des fluides, thermiques,...

- Construction d'une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle.

C'est ainsi que vers 1965 on assiste en EUROPE et aux U.S.A au développement intensif de tels programmes sous l'impulsion d'universités, d'agence gouvernementales et de groupes industriels .

Parmi les codes actuels les plus importants, citons :
 NASTRAN, ASKA, MARC, STAROYNE, ANSYS, SAMCEF, SESAM, ASAS, SAP/NONSAP,

1800	Structures hyperstatiques	NAVIER	1819
	Théorème de l'énergie	MAXWELL	1864
		CASTIGLIANO	1878
1900	Méthode d'approximation	RITZ	1908
		GALERKIN	1915
	Approximation par "élément fini"	COURANT	1940
	Méthode matricielles		
1955	Concept d'"élément fini"		
	.methode des forces	ARGYRIS-DENKE	1955
	.methode des déplacements	ARGYRIS-TURNER	1956

[SYNOPTIQUE DES PRINCIPAUX DEVELOPPEMENTS JUSQU'EN 1956]

CHAPITRE 3

**Element fini pour
l'etude de la
flexion des
plaques**

ELEMENT FINI POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

III.1 INTRODUCTION:

Il est souvent nécessaire à l'ingénieur de connaître les répartitions des contraintes et des déformations dans des milieux continus élastiques. Le nombre de jonctions entre "élément fini" "quelconque, supposé isolé par des frontières imaginaires et les éléments qui l'entourent", est infini. On peut obtenir l'approximation cherchée de la manière suivante.

- * Le milieu continu est divisé par des lignes ou des surfaces imaginaires en un certain nombre d'éléments finis.
- * Les éléments sont supposés reliés entre eux en un nombre fini de points nodaux situés sur leur frontières. Les déplacements de ces points seront les inconnus de base du problème, exactement comme en simple calcul des structures.
- * On choisie une (ou des) fonctions permettant de définir de manière unique le champ des déplacements à l'intérieur de chaque "élément fini" en fonction des déplacements de ces noeuds.
- * Les fonctions de déplacements définissent maintenant sans ambiguïté l'état des déformations à l'intérieur d'un élément en fonction des déplacements nodaux. Et compte tenu des propriétés élastiques du matériau, définissent l'état de contraintes en tout points de l'élément et par voie de conséquence sur ses frontières.
- * On détermine un système de forces concentrées aux noeuds qui équilibrent les contraintes s'exerçant aux frontières et d'éventuelles forces réparties, il en résulte une relation rigidité.

III.2 DISCRETISATION D'UNE STRUCTURE:

Un corps déformable possède un nombre infini de points, en chacun de ceux-ci, on peut définir les forces extérieures, les contraintes, les déformations et les déplacements.

Dés lors, il est indispensable de substituer à la structure étudiée un modèle mathématique composé d'un certain nombre d'éléments appelés éléments finis, reliés entre eux en un nombre fini de points appelés noeuds.

L'énergie de déformation devra approcher au mieux possible celle de la structure continue. Les interactions entre éléments sont introduits sous forme de forces et de déplacements généralisés.

Certaines structures notamment les plaques et les coques sont idéalisées par des éléments discrets dont les liaisons mutuelles sont continues le long des interfaces.

L'idéalisation consiste à ne considérer que les liaisons nodales c'est à dire en un nombre fini de points situés sur les bords des éléments,

Les forces qui assureront ainsi l'interaction des éléments aux noeuds, sont dites généralisées.

Suivant que pour définir les relations entre forces et déplacements aux noeuds on fait des hypothèses sur le champ de déplacement tel que la compatibilité intérieure soit satisfaite, ou sur le champ de contraintes, tel que l'équilibre intérieur soit observé. On obtient respectivement une solution déplacement ou une solution équilibre.

Lorsque le champ déplacement (respectivement contraintes) assure en outre la continuité des déplacements (respectivement contraintes) aux interfaces, l'élément constitue un modèle déplacement pur ou conforme (respectivement équilibre pur).

III.3 LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis est une méthode numérique simple, de résolution, par approximation d'équations (ou système d'équations différentiels) et permet de déterminer l'équilibre élastique du milieu continu.

Les bases mathématiques de la méthode sont solides et en

font une méthode précise contrairement à la méthode plus vague des différences finies

Les principaux avantages de la M.E.F sont que l'on peut traiter beaucoup plus simplement les particularités suivantes.

- forme du domaine quelconque.
- matériau peut être non homogène.
- prise en compte des non linéarités (géométriques ou de comportement) possible.

La méthode des éléments finis peut être abordée de deux façons différentes, qui témoignent effectivement des deux axes selon lesquels elle a été développée.

(1) Une approche mécanique, basée sur le principe des travaux virtuels, l'obtention des équations élémentaires peut être exprimé directement d'un point de vue mécanique pour les éléments simples.

(2) Une approche mathématique, qui est beaucoup plus claire et générale. Cette approche fait également apparaître diverses possibilités de résolution qui diffèrent soit de part la formulation des équations élémentaires soit de part l'interpolation géométriques.

III.4 PROBLEME DE CONTINUITÉ C^1 FLEXION DES PLAQUES

Le déplacement latérale w du "plan median" décrit parfaitement l'état de déformation d'une plaque.

Il faut cependant imposer des conditions sur w et ses dérivées afin de garantir que la plaque reste continue et ne plie pas.

Si on exige une stricte continuité de $\partial w / \partial n$ aux frontières entre les éléments difficultés mathématiques et de calcul s'accroissent. Il est facile de trouver des fonctions de formes qui tout en préservant la continuité de $\partial w / \partial n$ sur ses frontières sauf aux noeuds où la condition reste imposée.

- Si les fonctions choisies satisfont aux critères de "déformations uniformes" et au "test de rapieçage" il y a convergence.

La recherche des fonctions de déplacements compatibles présente des difficultés d'où l'abondance de la continuité complète de la pente en maintenant les autres conditions.

L'élément réussi quand on impose la continuité des pentes aux noeuds qui conduirait à la continuité complète.

III.5 CONDITIONS DE CONVERGENCE :

III.5.1 - COMPLETEUDE :

Un élément fini est dit complet quand il permet la définition d'un champ de déplacement réel aussi fidèlement que possible, c'est à dire quand l'approximation de la solution dans l'élément permet de représenter à la limite n'importe quelle valeur des définitions quand on diminue la taille de l'élément. Ce critère s'applique d'une part aux états de déformations nulles, c'est à dire aux modes rigides, et d'autre part aux états de déformation élastique; on peut donc en déduire les deux critères suivants :

CRITERE 1 :

modes rigides :

La fonction de déplacement choisie doit être telle qu'elle ne permet pas la déformation d'un élément lorsque les déplacements de ces noeuds sont la conséquence d'un mouvement de corps rigide.

CRITERE 2 :

Représentation des états de déformations constantes :

La forme de la fonction de déplacement doit être choisie de telle manière que si ses déplacements nodaux sont compatibles avec un état de déformation constante, on puisse réellement obtenir ces déformations constantes dans tout l'élément

III.5.2 - COMPATIBILITE:

Un élément fini est dit compatible quand il permet la définition d'un champ compatible c'est à dire assure une continuité C^1 (déplacements et leurs dérivées premières continues) pour les problèmes de flexion.

Cette condition de continuité s'applique à l'intérieur des éléments ne pose pas de problèmes particuliers.

Il n'en n'est pas de même pour la compatibilité inter-éléments qui requière une attention particulière pour le choix de l'approximation et des déplacements nodaux.

Dans le cas de flexion de plaques en flexion, ce critère se traduit par la continuité des déplacements latéraux W et de la pente normale le long des interfaces.

III.6 MATRICE DE RIGIDITE ELEMETAIRE POUR L'ELEMENT RECTANGULAIRE

Les étapes à suivre pour la détermination de la matrice de rigidité élémentaire sont:

* ETAPE 1:

Choix d'un système de coordonnées convenable et numérotation des noeuds dans le sens trigonometrique

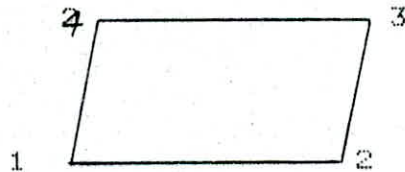


fig 3.1

Trois Degrés De Liberte (d.d.l) pour chaque noeud qui sont :

- DEPLACEMENT LATERAL : W
- ROTATION AUTOUR DE x : θ_x
- ROTATION AUTOUR DE y : θ_y

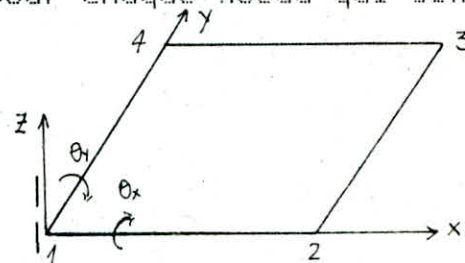


fig 3.2

Le sens positif adopté est :

- DEPLACEMENT VERS LE HAUT
- ROTATION DANS LE SENS TRIGONOMETRIQUE

LE VECTEUR DEPLACEMENT POUR CHAQUE NOEUD EST ALORS

$$\delta_i = \begin{cases} w = w(x, y) \\ \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

Les forces correspondantes en chaque noeud

- Deux moments f_x, f_y .
- Une force latérale transversal t_x

$$f_i = \begin{cases} t_x \\ F_x \\ F_y \end{cases}$$

Donc pour un élément on a 12 degrés de liberté, par conséquent la matrice de rigidité élémentaire est carrée et d'ordre 12.

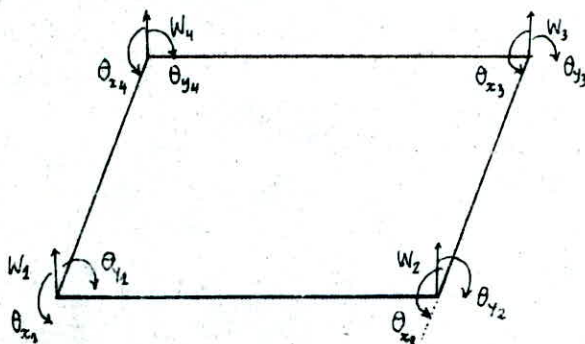


fig-3.3

Et le vecteur déplacement pour chaque élément est :

$$\langle \delta \rangle = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} \quad (3-1)$$

Et le vecteur force pour chaque élément est :

$$\langle F \rangle = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{z1} \\ f_{x1} \\ f_{y1} \\ t_{z2} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ t_{z3} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ t_{z4} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} \quad (3-2)$$

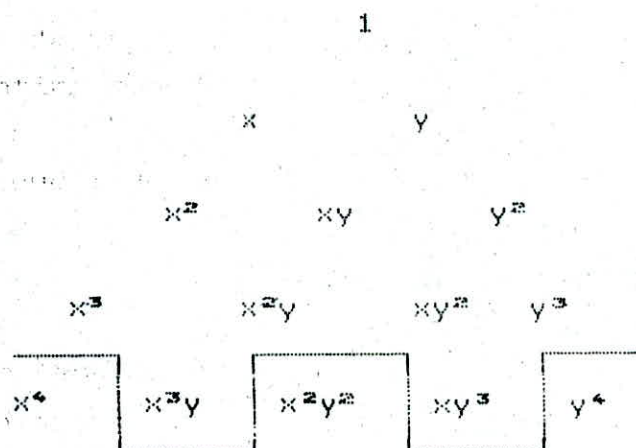
Puisque chacun de ces vecteurs contient douze termes, la matrice de rigidité est carrée de l'ordre 12.

ETAPE 2 :

Choix d'une fonction de déplacement

Il est avantageux d'utiliser un polynome pour définir la fonction de forme sur la base de ces douze paramètres. Il faut

omettre certains termes d'un polynome complet du quatrièm. ordre.



Le polynome :

$$W = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3 + \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}xy^3 \quad (3-3)$$

présente certains avantages.

Le long de toute droite $x=\text{constante}$ ou $y=\text{constante}$, le déplacement w aura une variation cubique. Et en particulier le long des cotés de l'élément.

Ainsi pour le noeud i de coordonnées (x,y)

Au 4^{ème} ordre on a : x^3y , x^2y^2 , xy^3 , y^4

Les raisons pour lesquelles on a pris les deux termes du 4^{ème} ordre (x^3y , xy^3) parmi les autres sont :

- 1) Ces deux termes maintiennent l'isotropie géométrique et satisfont les équations différentielles dans le cas de non chargement de la plaque. $\nabla^4 w = 0$

2) Le terme x^2y^2 ne convient pas car on ne peut pas trouver son couple.

Le couple x^4 et y^4 ne convient pas car ils ne satisfont pas à la compatibilité inter-éléments des déplacements au moment où le couple x^3y et xy^3 l'est.

Dans la fonction d'interpolation les trois termes α_1 , α_2x , α_3y stipulent le besoin des constantes α_1 , α_2 et α_3 pour les trois modes de corps rigide respectivement.

Puisque l'élément plaque a trois termes de déformation:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

Les termes α_4x^2 , α_6y^2 et α_5xy stipulent le besoin des constantes α_4 , α_6 et α_5 pour respecter les trois déformations constantes respectivement.

Pour contrôler la compatibilité inter-élément, vérifions que cette fonction choisie assure la continuité des déplacements et des pentes.

Considérons par exemple le bord (1-4) où $x = C_{te} = 0$ pour l'élément. Les déplacements latéraux et les pentes en chaque point de ce bord sont données à partir de l'équation (3-3) par:

$$\text{Bord 1-4 (pour } x=0): W(0, y) = \alpha_1 + \alpha_2y + \alpha_3y^2 + \alpha_4y^3$$

$$\theta_x(0, y) = \alpha_3 + 2\alpha_6y + 3\alpha_1\alpha y^2$$

$$\theta_y(0, y) = -(\alpha_2 + \alpha_5y + \alpha_7y^2 + \alpha_{12}y^3)$$

Aux extrémités de ce bord :

$$\text{Noeud 1 : (y = 0)}$$

$$W_1(0, 0) = \alpha_1$$

$$\theta_{u1}(0,0) = \alpha_3$$

$$\theta_{v1}(0,0) = -\alpha_2$$

Noeud 4 : (y = b)

$$W_4(0,b) = \alpha_1 + \alpha_2 b + \alpha_3 b^2 + \alpha_4 b^3$$

$$\theta_{u4}(0,b) = \alpha_3 + 2\alpha_4 b + 3\alpha_{10} b^2$$

$$\theta_{v4}(0,b) = -(\alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{12} b^3)$$

Ainsi on dispose seulement de six équations pour obtenir les huit coefficients inconnus ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12}$) qui ne peuvent donc être déterminés.

W et θ_u contiennent les mêmes quatre coefficients ($\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_{10}$) et puisqu'on a un nombre suffisant d'équations pour calculer ces quatre coefficients donc on peut exprimer W et θ_u en fonction des déplacements nodaux.

Tandis que les rotations normales θ_v contiennent les quatre autres coefficients ($\alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_{12}$) et les deux équations restantes ne suffisent pas pour déterminer les quatre coefficients inconnus dans θ_v .

Il est clair que le déplacement latéral W et la rotation θ_u sont complètement définies et la rotation normale au bord n'est pas définie d'une manière unique, ainsi la fonction choisie n'est pas idéale et est appelée une "FONCTION NON CONFORME".

Le déplacement d'un noeud de coordonnées (x,y) est lié aux douze coefficients par la matrice suivante.

1	x	y	x ²	xy	y ²	x ³	x ² y	xy ²	y ³	x ³ y	xy ³
0	0	1	0	x	2y	0	x ²	2xy	3y ²	x ³	3xy ²
0	-1	0	-2x	-y	0	-3x ²	-2xy	-y ²	0	-3x ² y	-y ³

À partir de cette matrice on construit une matrice [A] qui lie les déplacements nodaux aux coefficients inconnus en remplaçant chaque noeud par ses coordonnées et en plaçant les blocs selon la

numérotation adoptée.

ETAPE 3 :

Exprimer l'état de déplacements en chaque point fonction de déplacement nodaux.

Le déplacement en n'importe quel point peut s'exprimer sous la forme

$$\langle \delta \rangle = [f(x,y)] \langle \alpha \rangle \quad (3.4)$$

* $[f(x,y)]$ fonction de forme

* $\langle \alpha \rangle$ vecteur colonne des coefficients inconnu

Pour obtenir les déplacements nodaux en fonction du vecteur colonne inconnu on reporte dans la fonction d'interpolation les coordonnées des divers noeuds.

$$\text{On obtient } \langle \delta^* \rangle = [A] \langle \alpha \rangle \quad (3.5)$$

LA MATRICE [A] :

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	a	0	a ²	0	0	a ³	0	0	0	0	0
0	0	1	0	a	0	0	a ²	0	0	a ³	0
0	-1	0	-2a	0	0	-3a ²	0	0	0	0	0
1	a	b	a ²	ab	b ²	a ³	a ² b	ab ²	b ³	a ³ b	ab ³
0	0	1	0	a	2b	0	a ²	2ab	3b ²	a ³	3ab ²
0	-1	0	-2a	-b	0	-3a ²	-2ab	-b ²	0	3a ² b	-b ³
1	0	b	0	0	b ²	0	0	0	b ³	0	0
0	0	1	0	0	2b	0	0	0	3b ²	0	0
0	-1	0	0	-b	0	0	0	-b ²	0	0	-b ³

De ce système d'équations on peut exprimer le vecteur colonne des coefficients inconnus en fonction des déplacements nodaux.

$$\langle \alpha \rangle = [A^{-1}] \langle \delta^* \rangle \quad (3-6)$$

D'où on peut exprimer le déplacement en n'importe quel point en fonction des déplacements nodaux.

$$\langle \delta \rangle = [f(x,y)] [A^{-1}] \langle \delta^* \rangle \quad (3-7)$$

On peut effectuer cet inversion par l'ordinateur, pour avoir une expression littérale explicite pour les rigidités et d'autres matrices, nous avons fait le calcul littérale à la main.

ETAPE 4:

Relier les déformations en chaque points aux déplacements en ce point d'où aux déplacements nodaux.

L'état de déformation en chaque point peut être représenté par trois composantes:

1- La courbure dans la direction des x : Qui correspond à la variation de la dérivée par rapport à x:

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

2- La courbure dans la direction des y : Qui correspond à la variation de la dérivée par rapport à y:

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

3- La torsion : Qui correspond à la variation par rapport à la dérivée par rapport à y:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

Puisque $M_{xy} = M_{yx}$ donc on peut considérer qu'un des moments (par exemple M_{xy}) agit sur la section de torsion dans le vecteur de déformation.

Donc l'état de déformation des sections est représentée par :

$$\epsilon(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{matrix} \quad (3-8)$$

En remplaçant W par son expression (3-3) dans (3-8) on obtient une équation qui peut être écrite sous la forme

$$\epsilon(x, y) = [Q] \{ \alpha \} \quad (3-9)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

En remplaçant l'équation (3-6) dans (3-9) on obtient la relation déformations-déplacements nodaux :

$$\langle \epsilon(x,y) \rangle = [Q] [A]^{-1} \langle \delta^e \rangle = [B] \langle \delta^e \rangle \quad (3.10)$$

avec $[B] = [Q] [A]^{-1}$ (3.11)

ETAPE 5:

Relier les contraintes en chaque point à $\epsilon(x,y)$ donc à $\langle \delta^e \rangle$:

En tenant compte de la loi de comportement du matériau on peut exprimer les contraintes en n'importe quel point en fonction des déformations internes par conséquent en fonction des déplacements nodaux.

L'état de contraintes est représenté par les trois composantes M_x , M_y , M_{xy}

$$\langle \sigma \rangle = [D] \langle \epsilon(x,y) \rangle \quad (3.12)$$

$$\text{où } [D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

[D] : Matrice d'élasticité, contient les propriétés élastiques de l'élément.

Pour une plaque isotrope:

$$D_x = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

$$D_y = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

$$D_1 = \nu D_x$$

$$D_{xy} = (1-\nu)D/2$$

Pour une plaque orthotrope:

$$D_x = E_x h^3/12(1-\nu_x \nu_y)$$

$$D_y = E_y h^3/12(1-\nu_x \nu_y)$$

$$D_1 = \nu D_x$$

$$D_{xy} = G h^3/12$$

On peut relier contraintes en n'importe quel point aux déplacements nodaux, en remplaçant l'équation (3.10) dans (3.12) par :

$$\langle \sigma \rangle = [D] [B] \langle \delta^* \rangle = [H] \langle \delta^* \rangle \quad (3.13)$$

avec : $[H] = [D] [B]$ (3.14)

ETAPE 6 :

Relier les contraintes internes aux forces nodales

$$\langle F \rangle = \int \langle \sigma(x, y) \rangle d(\text{vol})$$

Utilisons le principe des travaux virtuels :

Imposons un déplacement virtuel δ^* au noeud arbitraire, le principe est d'égaliser le travail extérieur et l'énergie de déformation interne.

Le travail extérieur produit lors du déplacement δ^* :

$$W_{ext} = \delta^{*T} F^* \quad (3.15)$$

Energie de déformation interne :

$$W_{int} = \iiint E^{*T} \sigma d(\text{vol}) \quad (3.16)$$

D'après la relation déformations-déplacements nodaux (3-10), on peut écrire :

$$\langle E^{*T} \rangle = \langle \delta^{*T} \rangle [B]^T \quad (3.17)$$

Par suite

$$W_{int} = \iiint \langle \delta^{*T} \rangle [B]^T [D] [B] \langle \delta^* \rangle d(\text{vol}) \quad (3.18)$$

En égalisant (3-15) et (3-18) : $W_{ext} = W^{int}$

$$\delta^{*t} F^* = \langle \delta^{*t} \rangle \iiint [B]^t [D] [B] d(vol) \langle \delta^* \rangle$$

δ^* est arbitraire

$$\langle F^* \rangle = \iiint [B]^t [D] [B] d(vol) \langle \delta^* \rangle$$

Ainsi on a obtenu une relation du type

$$\langle F \rangle = [K] \langle \delta \rangle$$

Par identification :

$$[K] = \iiint [B]^t [D] [B] d(vol) \quad (3.19)$$

D'après l'équation (3-11) on peut écrire :

$$[B]^t = [A^{-1}]^t [Q]^t \quad (3-20)$$

Substituons (3-20) dans (3-19) on obtient :

$$[K] = \iiint [A^{-1}]^t [Q]^t [D] [Q] [A^{-1}] d(vol) \quad (3-21)$$

$[A^{-1}]$ contient que des constantes, donc on peut sortir $[A^{-1}]$ et $[A^{-1}]^t$ de l'intégrale on aura donc :

$$[K_w] = [A^{-1}]^T \left(\iiint [Q]^T [D] [Q] d(\text{vol}) \right) [A^{-1}]$$

En posant:

$$[R] = \iiint [Q]^T [D] [Q] d(\text{vol})$$

$[K^*]$ devient comme produit de trois matrices

$$[K^*] = [A^{-1}]^T [R] [A^{-1}] \quad (3.22)$$

III.7 VECTEUR CHARGE POUR L'ELEMENT RECTANGULAIRE

Le moyen le plus simple de rendre les forces nodales statiquement équivalentes aux contraintes exercées aux frontières et au chargement réparti appliqué effectif, consiste à imposer un déplacement virtuel (arbitraire) des noeuds et évaluer les expressions des travaux extérieurs et intérieurs effectués par les diverses forces et contraintes au cours d'un tel déplacement.

Soit δu^* déplacement virtuel des noeuds qui provoque

- Des déplacements: $\delta u = [N] \delta u^*$

- Des déformations: $\delta \epsilon = [B] \delta u^*$

où: $[B] = [L][N]$

Travail effectué par les forces nodales:

Il s'obtient par la somme des produits de chaque composante de forces par le déplacement correspondant:

$$\delta u^{*T} q^* \quad (3.23)$$

Travail interieur :

Le travail interieur par unité de volume effectué par les contraintes et les chargements repartis s'écrit :

$$\delta \epsilon^* \sigma - \delta u^* b \quad (3.24)$$

$$\epsilon = B \delta u^* \implies \epsilon^* = (\delta u^*)^* B^*$$

D'où :

$$(\delta u^*)^* B^* \sigma - (\delta u^*)^* N^* b = (\delta u^*)^* (P^* \sigma - N^* b)$$

Egalisons le travail interieur et le travail extérieur

$$\int (\delta u^*)^* (P^* \sigma - N^* b) d(\text{vol}) = (\delta u^*)^* q^*$$

Cette expression est celle du travail virtuel

On a donc

$$q^* = \int B^* \sigma d(\text{vol}) - \int N^* b d(\text{vol}) \quad (3.25)$$

Si l'on spécifie un comportement linéaire qui se traduit par la loi $\sigma = D \epsilon$

On peut écrire $q^* = K^* u^* + f^*$

$$\text{On obtient ainsi } f^* = \int N^* b d(\text{vol}) \quad (3.26)$$

Si un chargement surfacique repartit agit sur un élément selon la direction de w en vertu de (3.26) la contribution en chacun des noeuds s'écrit :

$$f_a = \iint_{N^T} q \, dx \, dy \quad (3.27)$$

$$N = P A^{-1} \longrightarrow N^T = A^{-1T} P^T$$

P étant la base

$$P = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3)$$

D'où :

$$f_a = [A^{-1T}] \iint P^T q \, dX \, dY \quad (3.28)$$

Si q est uniformément réparti alors:

$$f_a = [A^{-1T}] q \iint P^T \, dX \, dY \quad (3.29)$$

Après intégration on obtient le vecteur de forces nodales :

$$\{ F_n \} = (q \cdot a \cdot b / 4) \times \begin{matrix} 1 \\ -b/6 \\ a/6 \\ 1 \\ b/6 \\ a/6 \\ 1 \\ -b/6 \\ -a/6 \\ 1 \\ b/6 \\ -a/6 \end{matrix} \quad (3-30)$$

III.8 ASSEMBLAGE:

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale $[K]$ et le vecteur global des sollicitations $\{ F \}$ à partir des matrices élémentaires $[K^e]$ et des vecteurs élémentaires des sollicitations $\{ f^e \}$, et ceci afin de construire le système d'équations global.

$$[K] \{ \delta \} = \{ F \}$$

Historiquement, la notion d'assemblage a été d'abord utilisée pour des problèmes de mécanique des structures, dans lesquels l'élément est en fait un ressort, une barre ou une poutre. Pour chaque élément e , considéré comme isolé, nous disposons de la relation liant les déplacements et les forces appliquées.

$$k \delta - f = p$$

où

f : forces internes dues à l'action des autres éléments sur l'élément e .

p : force extérieure appliquée à l'élément.

k : matrice de rigidité élémentaire.

En utilisant :

-La continuité des déplacements aux noeuds;

-L'équilibre des forces qui se traduit en chaque noeud i , par $p = 0$.

PRINCIPE D'ASSEMBLAGE:

Soit (W_e) l'énergie de déformation pour l'élément ayant i, j, k et l les numéros de ses noeuds dans la structure.

(We) s'écrit: $W_e = 1/2 \delta^T [K^e] \delta$

δ : Le vecteur des déplacements nodaux de la structure.

δ^e : Le vecteur des déplacements nodaux de l'élément.

avec:

$$\delta = (u_1, \dots, u_1, \dots, u_j, \dots, u_k, \dots, u_1, \dots, u_n)$$

$$\delta^e = (u_1, u_j, u_k, u_1)$$

On peut écrire (We) sous une autre forme :

$$W_e = 1/2 \delta^T [K_e] \delta$$

où:

La matrice $[K_e]$ est construite par expansion de la matrice $[K]$ grace à des insertions de lignes et de colonnes de zéros.

$[K_e]$ a pour dimension le nombre de degrés de liberté de l'élément.

$[K]$ a pour dimension le nombre de degrés de liberté total.

De même δ^e est construit par insertion de zéros dans δ .

Pour obtenir la matrice de rigidité assemblée globale, on utilise le fait que l'énergie de déformation totale de la structure est la somme des énergies de déformation élémentaires.

$$W = \sum W^e = 1/2 \delta^T \sum [K_e] \delta = 1/2 \delta^T [K] \delta$$

On peut tirer la matrice de rigidité de la structure complète comme suit:

$$[K] = \sum [K^e]$$

ETAPES DE L'ASSEMBLAGE:

D'après ce qu'il vient d'être décrit on peut prévoir que l'assemblage comporte deux étapes:

- Construction de la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ et du vecteur force élémentaire $[f_e]$ de chaque élément.
- Addition des matrices et des vecteurs élémentaires étendus.

REGLE D'ASSEMBLAGE:

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous matrices de rigidité nodale de chaque élément, les indices des lignes et colonnes correspondant à la numérotation des noeuds de cet élément. Cette règle est illustrée en (fig. 3.4)

L'assemblage des forces équivalentes s'effectue de façon similaire.

D'après l'exemple précédent, on remarque que l'assemblage se fait par blocs, noeud par noeud; d'ailleurs, cette opération ne revient qu'à adresser correctement les termes de chacune des matrices $[k^e]$ dans la matrice $[K]$.

Or il suffit pour avoir l'adresse de chacun des coefficients des $[k^e]$, d'établir la correspondance entre les deux numérotations utilisées pour l'élément isolé et pour la structure générale respectivement.

Si par définition, la numérotation local reprend l'ordre dans lequel sont rangées les variables pour la matrice de raideur $[k^e]$, un moyen de réaliser cette correspondance est de conserver les numéros des déplacements correspondants dans la structure totale rangée dans le même ordre.

On peut réaliser cette opération à l'aide d'une table dite table de localisation pour chaque élément (voir III-), qui donne la position de chaque terme de vecteur ou matrice élémentaire dans un

vecteur ou matrice après expansion (rendu à la même dimension globale).

Précisons l'opération d'expansion d'une matrice élémentaire $[k^*]$ quelconque en une matrice $[K]$, en utilisant la table de localisation (Loc):

Chaque terme k_{ij} de $[k]$ est transféré en $K_{I,J}$ de $[K]$ de manière à ce que:

$$I = \text{Loc}(i) \quad i = 1, \dots, \text{ndel.}$$

$$J = \text{Loc}(j) \quad j = 1, \dots, \text{ndel.}$$

ou encore:

$$K_{I,J} = K_{\text{Loc}(i), \text{Loc}(j)} = k_{ij}$$

De même, chaque terme f_{ij} de $[f]$ est transféré en $F_{I,J}$ de $[F]$ de manière à ce que:

$$F_{I,J} = F_{\text{Loc}(i), \text{Loc}(j)} = f_{ij}$$

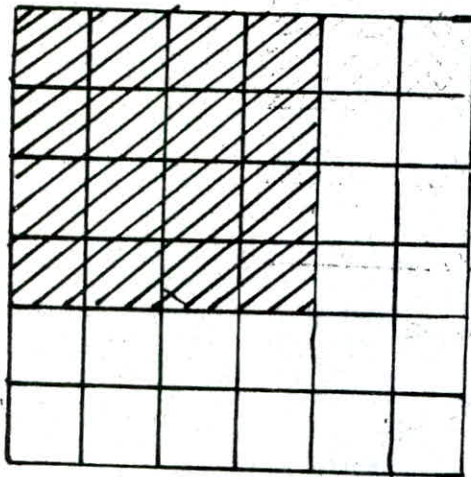
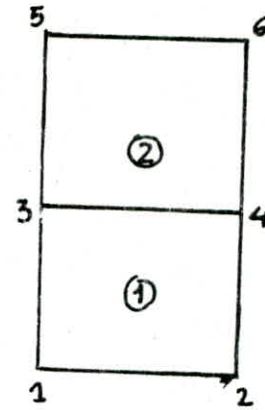
(voir § I ~~VI~~, Assemb.).

EXEMPLE D'ASSEMBLAGE :

Considérons la plaque (fig) composée de deux éléments et de six noeuds.

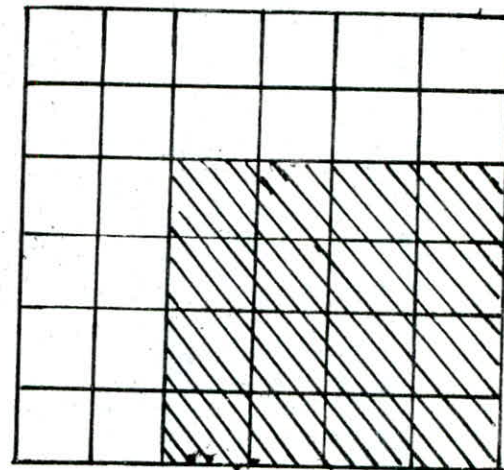
Comme il y a trois deg° de liberté par noeud, la matrice de rigidité globale sera de dimension 18x18.

les matrices des différents éléments sont exprimées dans le repère global comme suit :



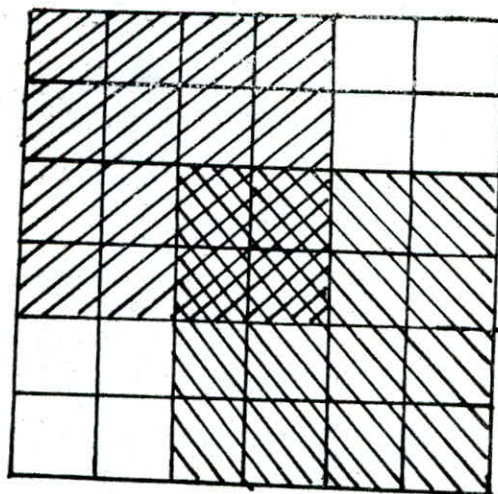
ELEMENT 1

(+)



ELEMENT 2

(=)



ASSEMBLÉ

fig 3-4

CHAPITRE 4

Organisation de programme par element fini

ORGANISATION DE PROGRAMMES PAR ELEMENT FINI

INTRODUCTION:

La résolution par élément fini entraîne le calcul des matrices de rigidité de tous les éléments de la structure modélisée puis l'assemblage de la matrice de rigidité $[K]$ de toute la structure. On a vu que le vecteur charge $\{f\}$ était relié au vecteur déplacement $\{\delta\}$ par la relation:

$$\{ F \} = [K] \{ \delta \}$$

$[K]$ MATRICE DE RIGIDITE GLOBAL

$\{ F \}$ VECTEUR FORCE GLOBAL

$\{ \delta \}$ VECTEUR DEPLACEMENT GLOBAL

PROGRAMATION:

On peut distinguer deux parties essentielles:

MODULE DE GENERATION DE DONNEES ET LES PRE-PROCESSEURS

MODULE DE RESOLUTION ET D'EXPLOITATION DES RESULTATS

Les données sont construites principalement d'informations sur les noeuds (coordonnées, conditions aux frontières, conditions de chargement etc...) et sur les éléments (points de connection, caractéristiques des matériaux...)

1-ENTREE DES DONNEES

Pour qu'on puisse résoudre le problème, le module d'entrée de données doit transmettre suffisamment d'informations aux autres modules. Dans le programme ce module sert à lire les données indispensables concernant la géométrie, les matériaux, les conditions de chargements de façon à permettre la constitution de tous les tableaux qui sont utilisés par la suite. Pour notre cas c'est le sous-programme `lec` qui est concerné

SUBROUTINE LEC:

Ce sous-programme, permet l'introduction des caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque et calcul la matrice d'élasticité [D] suivant le cas d'isotropie ou d'orthotropie, le nombre d'éléments qu'on veut discretiser selon x et y.

Les paramètres:

- h épaisseur de la plaque.
- Lx, Ly dimensions de la plaque dans le plan

* Un code :

- code=1 plaque isotrope

on introduit E, ν

- code=2 plaque orthotrope

on introduit $E_x, E_y, \nu_x, \nu_y, G$

SUBROUTINE PMESH:

Lors de notre détermination de $[k^e]$ on a choisi un sens bien déterminé.

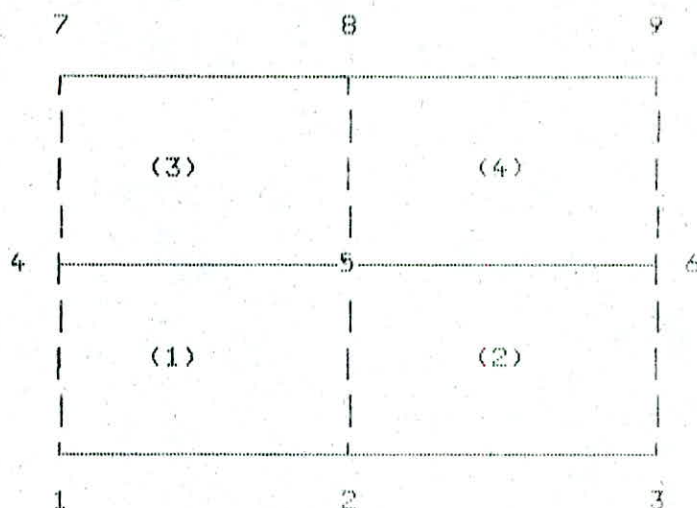
Il est important de spécifier pour chaque élément ijkl son premier noeud le deuxième, troisième et quatrième (dans le sens trigonométrique) qui seront déduit automatiquement. C'est en ce moment là qu'on définit un Tableau IX.

$$IX(k, n) = h$$

h: représentera un numéro de noeud global

k=1,2,3,4 (nombre de noeud par élément)

n=1,2,...,i,... (nombre d'élément total)



On adoptera la numérotation par étage et de gauche à droite et ceci afin d'avoir l'aspect bande de la matrice de rigidité global.

$$IX(1,3) = 4$$

$$IX(2,3) = 5$$

$$IX(3,3) = 8$$

$$IX(4,3) = 7$$

On a généré automatiquement la lecture des connectivités.

Dès que le nombre d'éléments selon x et selon y sont donnés, les coordonnées de chaque noeud auxquelles on fera l'extraction pour déduire les dimensions de chaque élément dont dépend justement $[K^{-1}]$, seront facilement déduits.

SUBROUTINE LOC:

Lors de notre étude de l'élément plaque on a considéré trois degrés de liberté (ndf) par noeud.

L'élément ayant quatre noeuds soit un total de 12 degrés de liberté, la matrice de rigidité globale sera d'ordre 12.

Dès lors il est indispensable d'introduire un vecteur loc (localisation) afin de localiser les degrés de libertés pour chaque noeud, d'où création d'un vecteur loc.

TABLEAU :

couplage des deux sous-routines PRESH et LOC pour la détermination des coordonnées globales des nœuds, ainsi que la localisation des degrés de liberté (fig. 1.10).

TABLE DES COORDONNEES ET CONNECTIVITES

élément : 1						
nœud n°	Coordonnées		Localisation des deg° de liberté			
	X	Y	W	θ_x	θ_y	
1	0.000	0.000	1	2	3	
2	0.500	0.000	4	5	6	
5	0.500	0.500	13	14	15	
4	0.000	0.500	10	11	12	
élément : 2						
2	0.500	0.000	4	5	6	
3	1.000	0.000	7	8	9	
6	1.000	0.500	16	17	18	
5	0.500	0.500	13	14	15	
élément : 3						
4	0.000	0.500	10	11	12	
5	0.500	0.500	13	14	15	
8	0.500	1.000	22	23	24	
7	0.000	1.000	19	20	21	

élément : 4						
5	0.500	0.500	13	14	15	
6	1.000	0.500	16	17	18	
9	1.000	1.000	25	26	27	
8	0.500	1.000	22	23	24	

SUBROUTINE ELEM :

Ce sous-programme contient la matrice de rigidité élémentaire explicite et le vecteur charge élémentaire. En tenant compte de la symétrie de la matrice, l'autre moitié est déduite automatiquement.

La matrice de rigidité dépend des caractéristiques E, ν, h, a, b et le vecteur force dépend de q, a, b .

SUBROUTINE ASSEMB :

Est utilisé pour l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires donnant ainsi à la matrice de rigidité globale $[K]$ et le vecteur force global $[F]$.

SUBROUTINE BOUND :

Il est très important de s'assurer que la structure a des appuis adéquats avant de mettre en oeuvre la résolution sous peine de rendre le problème insoluble.

En général, la structure s'appuie sur plusieurs noeuds, lesquels, certains déplacements sont interdits. Dans certaines situations il est nécessaire d'enlever les lignes et les colonnes appropriées de la matrice $[K]$.

La convention utilisée est:

CODE=0 ==> PAS DE CONDITIONS IMPOSEES (LIBRE)

CODE=1 ==> CONDITION IMPOSEE UN DEPLACEMENT SERA SPECIFIE

1^{ère} METHODE : methode du terme diagonal dominant.

On multiplie les termes diagonaux de [K] correspondant aux déplacements fixes, soit k_{11} , par un grand nombre tel que 10^{30}

Exemple:

D'après la condition d'appui de la plaque il existe des nœuds ayant des déplacements imposés:

Imposons par exemple au déplacement δ_1 une valeur nul, $\delta_1^* = 0$.

L'équation de la ligne i

$$f_i^* = k_{i1} \delta_1 + k_{i2} \delta_2 + \dots + k_{i1} \delta_1 + \dots + k_{in} \delta_n$$

On multiplie k_{i1} par un terme très grand soit par exemple 10^{30} , on introduit au vecteur force le déplacement imposé multiplié par ce grand.

$$f_i^* = k_{i1} \delta_1 + k_{i2} \delta_2 + \dots + 10^{30} k_{i1} \delta_1 + \dots + k_{in} \delta_n$$

$$\text{Ainsi } \delta_1 = (u_1 \times 10^{30} - (k_{i1} \delta_1 + \dots + k_{in} \delta_n)) / 10^{30} k_{i1}$$

Puisque le terme diagonal est beaucoup plus grand que les termes non diagonaux, la valeur du deuxième terme est très proche de ZERO, ce qui donne $\delta_1 = u_1$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{11} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & \dots & k_{21} + 10^{30} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

2EME METHODE : méthode du terme diagonal unitaire

Remplacer les termes diagonaux de [k] correspondant aux déplacements fixes par l'unité et remplacer le reste des lignes et colonnes correspondantes par des zero.

$$\begin{vmatrix} k_{11} & . & . & . & . & 0 & . & . & . & . & k_{1n} \\ . & & & & & & & & & & \\ . & & & & & 0 & & & & & \\ . & & & & & & & & & & \\ 0 & . & . & 0 & . & 1 & . & . & 0 & . & 0 \\ . & & & & & & & & & & \\ . & & & & & 0 & & & & & \\ . & & & & & & & & & & \\ k_{n1} & . & . & . & . & 0 & . & . & . & . & k_{nn} \end{vmatrix}$$

3EME METHODE :

Eliminer les lignes et les colonnes correspondant aux déplacements fixes.

REMARQUE :

La première méthode et la deuxième sont les mêmes car elles utilisent un terme diagonal relativement grand à d'autres termes de la même colonne ou de la même ligne mais alors la troisième demande une certaine manipulation de la matrice.

Dans notre cas nous avons utilisé la deuxième méthode.

CAS D'APPUI ELASTIQUE:

Si certains déplacements doivent avoir des valeurs connues non nul, on peut utiliser pour les prendre en compte la première ou la deuxième méthode.

SUBROUTINE FORC:

Il sert pour définir les forces imposées aux noeuds libre.

SUBROUTINE SOLV:

Permet la résolution du système $\{ f \} = [K] \{ \delta \}$ $\{ f \}$ et $[K]$ étant obtenu après l'assemblage et l'application des conditions aux limites.

Pour notre cas on a utilisé l'algorithme de résolution de gauss pour les système symétriques.

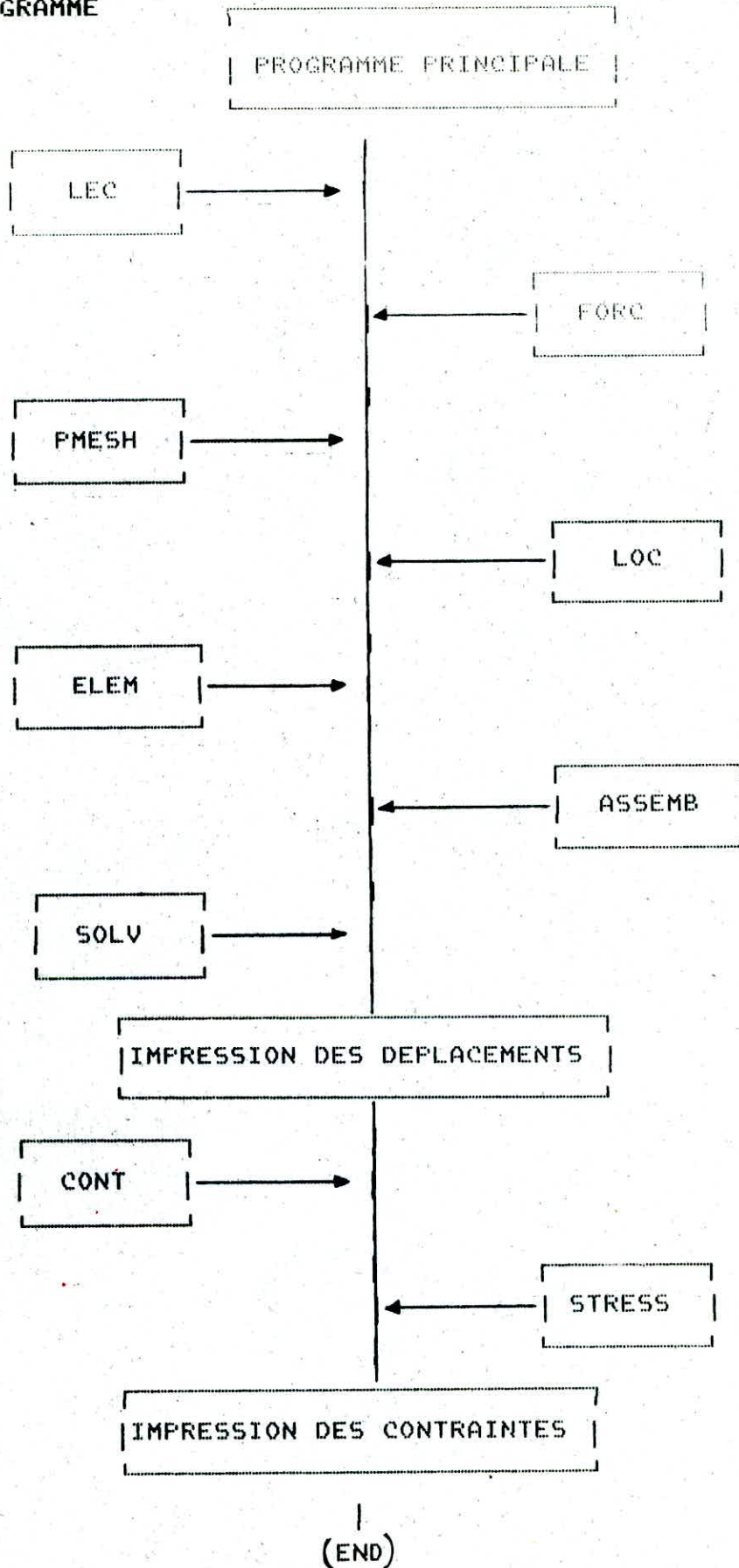
SUBROUTINE CONT:

Ce sous-programme est utilisé pour le calcul de la matrice de contraintes élémentaire $[H^e]$ donnée explicitement en fonction des caractéristiques géométriques de la plaque.

SUBROUTINE STRESS:

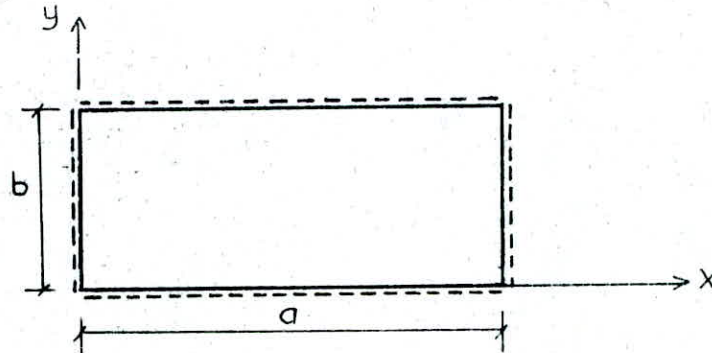
Une fois que les déplacements sont déterminés et la matrice $[H^e]$ calculée, ce sous programme permet de calculer les contraintes (M_x, M_y, M_{xy}) pour chaque élément.

ORGANIGRAMME



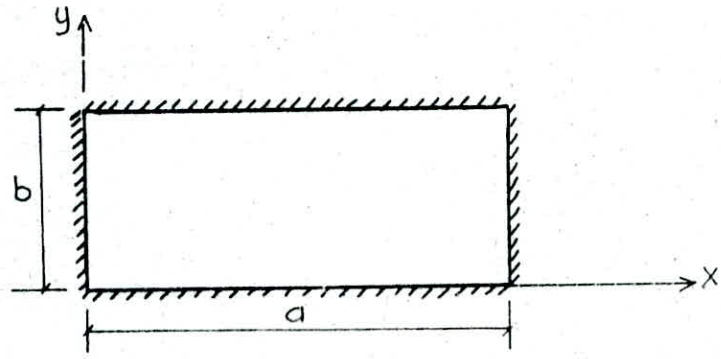
IV.3 EXEMPLES D'APPLICATION

 * Plaque simplement appuyée sur le pourtour *



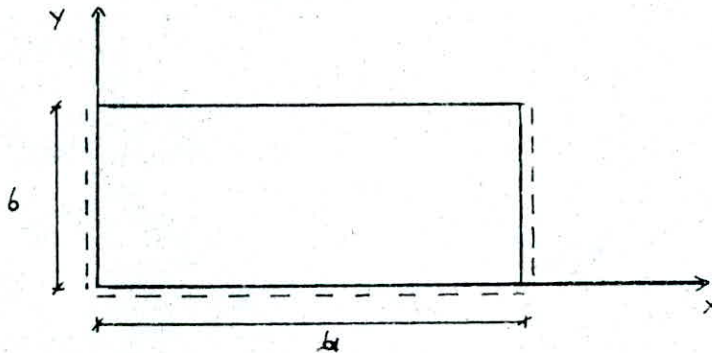
a/b=1.0		deplacement		contraintes	
maillage	$W(q \cdot a^4/D)$ $x=a/2, y=b/2$	$MX(q \cdot b^2)$ $x=a/2, y=b/2$	$MY(q \cdot b^2)$ $x=a/2, y=b/2$		
2x 2	0.0044568	0.060089	0.060089		
4x 4	0.0041842	0.051466	0.051466		
8x 8	0.0040932	0.048629	0.048629		
10x10	0.0040821	0.048356	0.048356		
12x12	0.0040761	0.048146	0.048146		
SOL EXACT	0.0040620	0.047900	0.047900		

 * Plaque encastree sur le pourtour *



a/b=1	deplacement	contraintes		
maillage	$W(q \cdot a^4/D)$	$(MY=MX)(q \cdot a^2)$	$MY(q \cdot a^2)$	
	$X=a/2, Y=b/2$	$X=a/2, Y=b/2$	$Y=0, X=a/2$	
2x 2	0.0014796	0.046165	-0.035511	
4x 4	0.0014033	0.027783	-0.046446	
8x 8	0.0013038	0.023896	-0.047965	
10x10	0.0012903	0.023632	-0.050542	
12x12	0.0012828	0.023408	-0.050766	
SOL. EXACT	0.00126	0.0231	-0.0513	

 * Plaque avec 3 bords appuyés/1 bord libre *

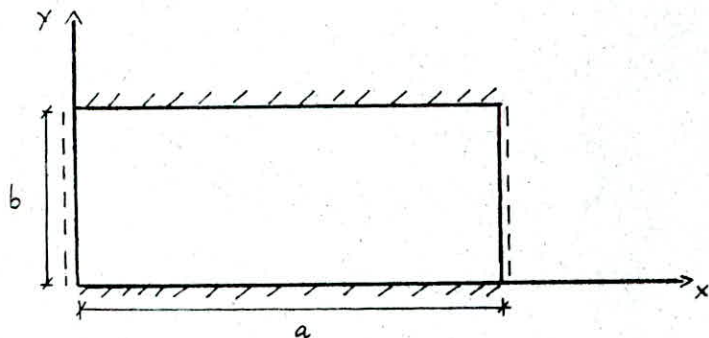


	a/b=1.2	deplacement	contraintes		
maillage	W(q.a ⁴ /D)	MX(q*a ²)	MY(q*a ²)	MX(q*a ²)	
	(X=a/2;Y=b)	(X=a/2;Y=b/2)	(X=a/2;Y=b/2)	(X=a/2;Y=b)	
2x 2	0.0119790	0.079609	0.051087	0.124430	
4x 4	0.0116800	0.071072	0.038811	0.105520	
8x 8	0.0115970	0.069698	0.036374	0.101560	
10x10	0.0115860	0.069404	0.036103	0.101040	
12x12	0.0115800	0.069235	0.036007	0.100760	
SOL EXACT	0.0115800	0.069000	0.036000	0.100000	

```

*****
* Plaque avec 2 bords encast/2 bordslibres *
*                               y=0 y=b/x=0 x=a *
*****

```

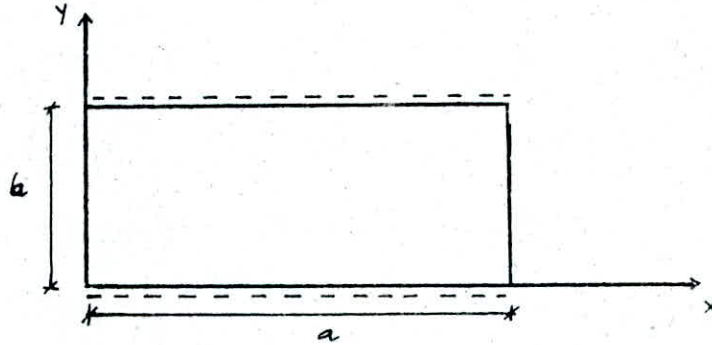


a/b=1.0		deplacement		contraintes	
maillage	$W(q \cdot a^4/D)$	$MY(q \cdot a^2)$	$MX(q \cdot a^2)$	$MY(q \cdot a^2)$	$MY(q \cdot a^2)$
	$X=a/2, Y=b/2$	$X=a/2, Y=b/2$	$X=a/2, Y=b/2$	$X=a/2, Y=0$	$X=a/2, Y=0$
2x 2	0.0029862	0.019270	0.068791	-0.071669	
4x 4	0.0026152	0.014330	0.047034	-0.078610	
8x 8	0.0025698	0.011819	0.042161	-0.080714	
10x10	0.0025658	0.011506	0.041536	-0.081013	
12x12	0.0025638	0.011189	0.041251	-0.081174	
SOL EXACT	0.0025920	0.011000	0.041000		


```

*****
* Plaque avec 2 bords appuyés/2 bord libres *
*           y=0 y=b/x=0 x=a           *
*****

```

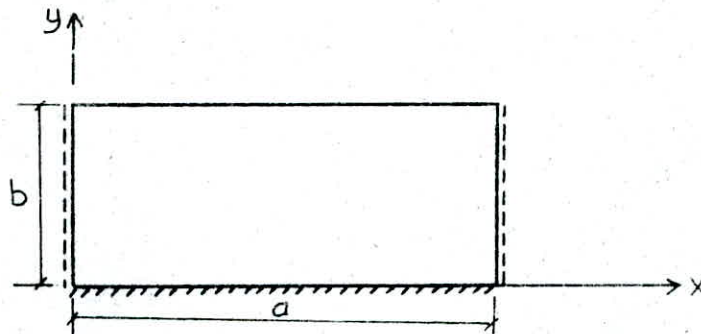


a/b=1.0	deplacement	contraintes		
maillage	W(q.a ⁴ /D)	MX(q*b ²)	MY(q*b ²)	
	(X=a/2,Y=b/2)	(X=a/2,Y=b/2)	(X=a/2,Y=b/2)	
2x 2	0.0104170	0.037500	0.125000	
4x 4	0.0123380	0.030970	0.122720	
8x 8	0.0128990	0.028090	0.122449	
10x10	0.0129680	0.027520	0.122480	
12x12	0.0130060	0.027531	0.122540	
SOL EXACT	0.0130950	0.027100	0.122500	

```

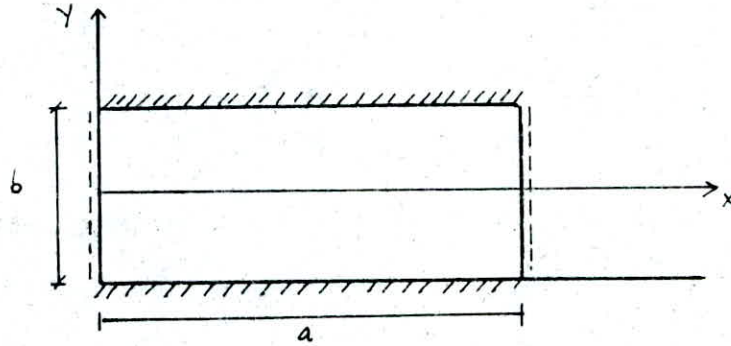
*****
* Plaque avec 2 bords appuyés/1 bord encast. et 1 libr.*
*           x=0 x=a /y=0 et y=b                       *
*****

```



a/b=1.0	deplacements	contraintes	
maillage	$W(q \cdot a^4/D)$	$MX(q \cdot b^2) L$	$MY(q \cdot b^2) E$
2x 2	0.0123740	0.128700	-0.099999
4x 4	0.0115740	0.104450	-0.113410
8x 8	0.0113280	0.098952	-0.116930
10x10	0.0112960	0.098312	-0.117430
12x12	0.0112780	0.097966	-0.117710
SOL EXACT	0.0113	0.0972	0.1190

 * Plaque avec 2 bords appuyés/2 bords encastrés *



a/b=1.5		déplacements		contraintes	
maillage	$W(q \cdot a^4/D)$	$MX(q \cdot b^2)$	$MY(q \cdot b^2)$	$MY(q \cdot b^2)$	$MY(q \cdot b^2)$
2x 2	0.0053416	0.063402	0.079059	-0.050293	
4x 4	0.0055300	0.047745	0.063561	-0.089343	
8x 8	0.0053922	0.046301	0.059740	-0.100410	
10x10	0.0053697	0.046171	0.059288	-0.101100	
12x12	0.0053569	0.046102	0.059042	-0.102780	
SOL EXACT	0.0053300	0.046000	0.059000	-0.149000	

CHARGES CONCENTREES

 * Plaque simplement appuyée sur le pourtour *
 * sous charge ponctuelle au centre *

a/b=1.0	deplacement	contraintes
maillage	W(q.a ⁴ /D)	MX=MY
2x 2	0.0137840	1.141200
4x 4	0.0123310	1.476300
8x 8	0.0118290	1.832100
10x10	0.0117560	1.947100
12x12	0.0117140	2.041200
SOL EXACT	0.0116000	

 * Plaque encastree sur le pourtour *
 * sous charge concentree au milieu *

a/b=1.0	deplacement	contraintes
maillage	W(q.a ⁴ /D)	MX(q*b ²)
2x 2	0.0059186	0.923300
4x 4	0.0061345	1.219800
8x 8	0.0058026	1.566000
10x10	0.0057446	1.680100
12x12	0.0057099	1.773700
SOL EXACT	0.0056000	

**MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE POUR L'ELEMENT
RECTANGULAIRE**

KA												
KD	KB											
KE	KF	KC										
KJ	-KH	-KO	KA									
KH	KS	0	KD	KB								
KO	0	KI	-KE	-KF	KC							
KL	-KM	-KN	KX	-KY	-KZ	KA						
KM	KP	0	KY	KW	0	-KD	KB					
KN	0	KK	-KZ	0	KQ	-KE	KF	KC				
KX	-KY	KZ	KL	-KM	KN	KJ	-KH	KO	KA			
KY	KW	0	KM	KP	0	-KH	KS	0	-KD	KB		
KZ	0	KQ	-KN	0	KK	-KO	0	KI	KE	-KF	KC	

SYMETRIQUE

$$\begin{aligned}
 KA &= 60 Dx/p^2 + 60 Dy p^2 + 84 Dxy + 30 D1 \\
 KB &= 20 Dy a^2 + 8 Dxy b \\
 KC &= 20 Dy b^2 + 8 Dxy a^2 \\
 KD &= 6 b Dxy + 15 D1 b + 30 apDy \\
 KE &= -(6a Dxy + 15 aD1 + 30 b/p Dx) \\
 KJ &= -(60 Dx/p^2 - 30 Dy p^2 + 84 Dxy + 30 D1) \\
 KH &= 15apDy - 15 bD1 - 6bDxy \\
 KO &= -(30 b/p Dx + 6a Dxy) \\
 KL &= -30 Dx/p^2 - 30 Dy p^2 + 84 Dxy + 30 D1 \\
 KM &= -(6 b Dxy - 15 ap Dy) \\
 KN &= -15 b Dx/p + 6a Dxy \\
 KY &= 30 ap/p^2 + 60Dy b^2 - 84 Dxy - 30 D1 \\
 KZ &= 15 a D1 - 15 b Dx/p + 6a Dxy \\
 KF &= -15 ab D1 \\
 KS &= 10 a^2 Dy - 8 Dxy^2 \\
 KP &= 5 a^2 Dy + 2 b^2 Dxy \\
 KW &= 10 a^2 Dy - 2 b^2 Dxy \\
 KI &= 10 b^2 Dx - 2 a^2 Dxy \\
 KK &= 5 b^2 Dx + 2 a^2 Dxy \\
 KQ &= 10 b^2 Dx - 8 a^2 Dxy
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 5

Methode des differences finies

LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

V.1 INTRODUCTION :

La méthode des différences finies est une méthode approchée de résolution d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, très utilisée dans les problèmes de mécanique des fluides, elle l'est moins en mécanique des solides, en raison probablement des difficultés dues aux conditions aux limites. Cette méthode n'est pas nouvelle, elle a été utilisée avec succès dans la théorie des plaques planes ainsi que dans plusieurs autres domaines de la mécanique des constructions, elle constitue un instrument de calcul rapide et efficace lorsque la solution analytique n'est pas assez simple ou bien qu'elle n'est même pas connue

V.2 CAS D'UNE FONCTION A UNE VARIABLE :

Les expressions des différences finies peuvent être obtenues d'après la définition de la première dérivée en respectant la continuité de la fonction $y = f(x)$

Par définition la première dérivée est :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_n = \lim_{x \rightarrow 0} (y_{n+1} - y_n) / x$$

Ceci on peut le voir sur la figure 5-1, quand x ne tend pas vers zéro, mais à une valeur finie "h" les dérivées au points x_n sont représentées par des expressions dépendant des

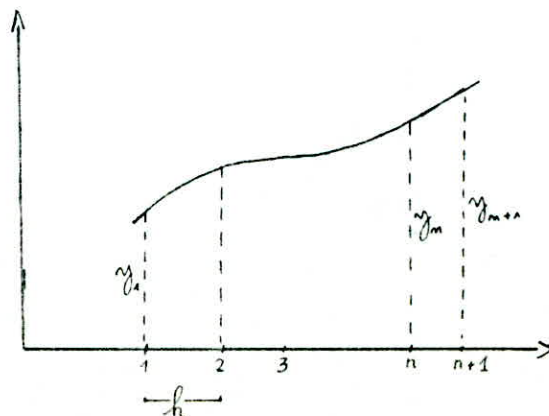


fig 5.1

En utilisant différents groupes de points, nous pouvons exprimer les différences finies en un point de trois manières différentes :

V.2.1- DIFFERENCES EN AVANT :

Elle utilise les points situés dans l'ordre croissant par rapport au point considéré .

La première différence en avant de Y en X_n est :

$$Y_n = Y_{n+1} - Y_n \sim h \left(\frac{dy}{dx} \right)_n \quad (5.1)$$

V.2.2 DIFFERENCES EN ARRIERE :

Elle utilise les points situés dans l'ordre décroissant par rapport au point considéré.

$$Y_n = Y_n - Y_{n-1} \sim h \left(\frac{dy}{dx} \right)_{n-1} \quad (5.2)$$

V.2.3 DIFFERENCES AU CENTRE :

Elle utilise les points situés symétriquement par rapport au point considéré.

$$Y_n = - \frac{1}{2} (Y_{n+1} - Y_{n-1}) \sim h \left(\frac{dy}{dx} \right)_n \quad (5.3)$$

Avec la même procédure on peut produire des dérivées d'ordre supérieures

$$\text{de (5.1)} \quad h^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_n \sim \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = \nabla(\Delta y_n),$$

$$\text{de (5.2)} \quad h^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_n \sim \nabla y_{n+1} - \nabla y_n = \Delta(\nabla y_n)$$

$$\text{de (5.2)} \quad h^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_n \sim \nabla y_{n+1} - \nabla y_n = \Delta(\nabla y_n)$$

$$\text{de (5.3)} \quad h^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_n \sim \frac{1}{2} (\delta y_{n+1} - \delta y_{n-1}) = \delta^2 y_n$$

Donc la dérivée seconde peut être écrite:

$$h^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_n = (y_n) = \delta^2 y_n. \quad (5.4)$$

Considérons maintenant la différence au centre:

La 2^{ème} différence au centre en X_n

$$\begin{aligned} \text{de (5.6)} \quad \delta^2 y_n &= \Delta(\nabla y_n) = \Delta(y_n - y_{n-1}) = \Delta y_n - \Delta y_{n-1} \\ &= (y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1}) \\ &= y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_n. \quad (5.5) \end{aligned}$$

* La 3^{ème} différence au centre en x_n :

$$\begin{aligned} \delta^3 y_n &= \delta(\delta^2 y_n) = \delta(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) \\ &= \delta y_{n+1} - 2\delta y_n + \delta y_{n-1} \\ &= [(y_{n+2} - y_n) - 2(y_{n+1} - y_{n-1}) + (y_n - y_{n-2})] \frac{1}{2} \\ &= [y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_{n-1} - y_{n-2}] \frac{1}{2} \sim h^3 \frac{d^3 y}{dx^3} \end{aligned}$$

* La 4^{ème} différence au centre en x_n :

$$\delta^4 y_n = \delta^2 (\delta^2 y_n) = \delta^2 (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})$$

$$= \delta^2 y_{n+1} - 2\delta^2 y_n + \delta^2 y_{n-1}$$

$$= [(y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n) - 2(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + (y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2})]$$

$$= y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}$$

$$= h^4 \frac{d^4 y}{dx^4}$$

V.3- CAS D'UNE FONCTION A DEUX VARIABLES :

Les différences partielles finis d'une fonction $W(x,y)$ par rapport à une seule des variables x ou y s'exprime comme les différences finis ordinaires (vu précédemment)

** MAILLAGE CARREE

Dans le cas des différences au centre on peut exprimer les dérivées partielles comme suit :

$$\frac{\partial W}{\partial x} \sim \frac{1}{h} \delta_x W$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \sim \frac{1}{h} \delta_y W$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sim \frac{1}{h^2} \delta_x^2 W$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \sim \frac{1}{h^2} \delta_x \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)$$

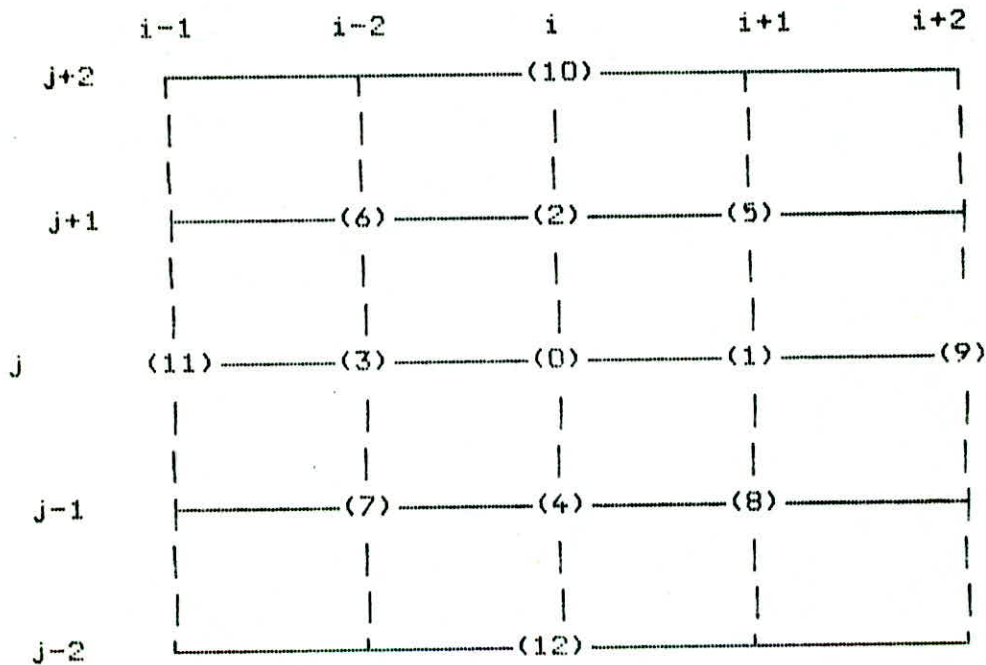
En utilisant les expressions (5.3), (5.4), (5.5) il découle

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{W_{i+1,j} - W_{i-1,j}}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{W_{i+1,j} - 2W_{i,j} + W_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{W_{1,j+1} - W_{1,j-1}}{2h} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{W_{1,j+1} - 2W_{1,j} + W_{1,j-1}}{h^2}$$

Les indices i, j designent la position des points pivots comme on peut le voir sur la figure (5-2)



(fig. 5.2)

APPROXIMATION PAR DIFFERENCES FINIES DE L'OPERATEUR LAPLACIEN :

On appelle opérateur laplacien l'opérateur harmonique suivant

$$\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} (W_1 + W_2 + W_3 + W_4 - 4W_0) \quad (5.9)$$

Les formules d'approximations d'ordre superieures des derivees partielles sont developpees en utilisant les

expressions (5.6) et (5.7) pour les deux directions x et y.

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \sim \frac{1}{2h^3} [W(x+2h, y) - 2W(x+h, y) + 2W(x-h, y) - W(x-2h, y)]$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \sim \frac{1}{h^4} [W(x+2h, y) - 4W(x+h, y) + 6W(x, y) - 4W(x-h, y) + W(x-2h, y)]$$

D'après cette notation on peut écrire (cf fig.5-2):

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \sim \frac{1}{2h^3} (W_0 - 2W_1 + 2W_3 - W_{11})$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \sim \frac{1}{h^4} (W_0 - 4W_1 + 6W_0 - 4W_3 + W_{11})$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \sim \frac{1}{2h^3} (W_{10} - 2W_2 + 2W_4 - W_{12})$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \sim \frac{1}{h^4} (W_{10} - 4W_2 + 6W_0 - 4W_4 + W_{12})$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} \sim \frac{1}{h^3} \delta_y (\delta_x^2 W) = \frac{1}{2h^3} (W_3 + W_0 - 2W_2 + 2W_4 - W - W_7)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^2 \partial x^2} \sim \frac{1}{h^4} \delta_{xy} (\delta_y^2 W) = \frac{1}{h^4} [W_3 + W_0 + W_7 + W_0 + 4W_0 - 2(W_1 + W_2 + W_3 + W_4)]$$

$$y^2 \quad x^2 \quad h^4$$

$$h^4$$

Ainsi on peut resumer le développement des différentes dérivées d'ordre supérieurs dans un tableau.

$$2h \left(\frac{d}{dx} \right) \quad (-1) \text{-----} (0) \text{-----} (1)$$

$$h^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) \quad (1) \text{-----} (-2) \text{-----} (1)$$

$$h^2 \nabla^2 \quad \begin{array}{c} (1) \\ | \\ (1) \text{-----} (-4) \text{-----} (1) \\ | \\ (1) \end{array}$$

$$h^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \begin{array}{c} (-1) \text{-----} (0) \text{-----} (1) \\ | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \\ (2) \text{-----} (0) \text{-----} (-2) \\ | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \\ (-1) \text{-----} (0) \text{-----} (1) \end{array}$$

$$h^4 \left(\frac{\nabla^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \sim \begin{array}{c} (1) \text{-----} (-2) \text{-----} (1) \\ | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \\ (-2) \text{-----} (4) \text{-----} (-2) \\ | \qquad \qquad | \qquad \qquad | \\ (1) \text{-----} (-2) \text{-----} (1) \end{array}$$

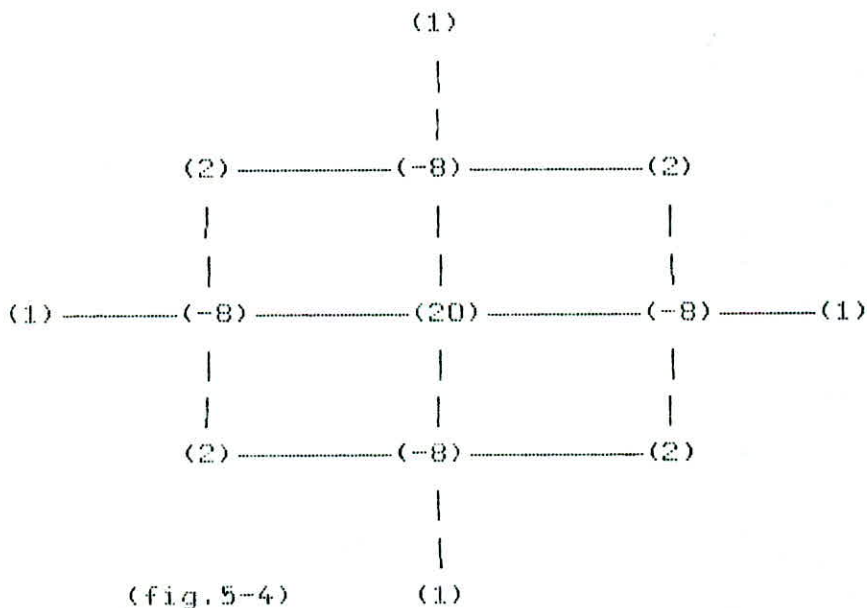
** Maillage rectangulaire:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} (W_1 - 2W_0 + W_3) ; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \approx \frac{1}{k^2} (W_2 - 2W_0 + W_4)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{2hk} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{4kh} (\delta_y W) \approx \frac{1}{4kh} \delta_x (\delta_y W)$$

V.5 SOLUTION DES EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES:

Transformons l'équation différentielle de la ligne élastique de la plaque en une équation algébrique. Les coefficients de l'opérateur seront représentés comme suit:



$$\nabla^4 W = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{P_0}{D}$$

$$\nabla^4 W = \frac{1}{h^4} [(W_9 + W_{10} + W_{11} + W_{12}) + 2(W_5 + W_6 + W_7 + W_8) - 8(W_1 + W_2 + W_3 + W_4) + 20W_0]$$

Une expression similaire sera écrite pour chaque noeud de la plaque en tenant compte des conditions aux frontières, on obtient un système d'équation où les inconnues sont les déplacements.

On verra dans la partie programmation comment on peut generer la matrice des coefficients automatiquement.

V.6 CALCUL DES EFFORTS:

Une fois que les déplacements sont trouvés, les efforts (moments, efforts tranchants) seront facilement calculés en développant les expressions (I.1)

V.6.1 LES MOMENTS:

$$M_x = \frac{D}{h^2} [(2W_0 - W_1 - W_3) + \nu(2W_0 - W_2 - W_4)]$$

$$M_y = \frac{D}{h^2} [(2W_0 - W_2 - W_4) + \nu(2W_0 - W_1 - W_3)]$$

$$M_{xy} = \frac{D}{h^2} (1-\nu) (W_6 - W_5 + W_8 - W_7)$$

V.6.1 LES EFFORTS TRANCHANTS :

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M}{D} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (M) = \frac{M_1 - M_2}{2h}$$

$$Q_y = \frac{\partial}{\partial y} (M) = \frac{M_2 - M_4}{2h}$$

V.7 AUTRE MANIERE DE RESOLUTION DU PROBLEME :

On peut résoudre le problème d'une autre manière

Dans le chapitre 1 nous avons déterminé une relation entre les moments M_x et M_y définis par :

$$M = \frac{M_x + M_y}{(1 + \nu)} = -D \nabla^2 W$$

On résoud d'abord :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \quad (10)$$

qui donne les moments

En suite on résoud :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \quad (5.11)$$

La solution du problème permet de déterminer les valeurs de M et W qui satisfont le système d'équations algébriques.

V.8 CONDITIONS AUX LIMITES

Les noeuds qui se trouvent sur le pourtour de la plaque, font appels à des points fictifs qu'on peut connaître en faisant développer la condition d'appui :

V.8.1 BORD SIMPLEMENT APPUYE

D'après ce qui précède les conditions d'appuis sont :

$$W = 0 \quad \text{et} \quad M = 0$$

En développant l'opérateur

$$W = -M/D = 0$$

$$W_{i-1} + W_{i+1} + W_{i+n} + W_{i-n} - 4.W_i = 0$$

avec : $W_i = W_{i+n} = W_{i-n} = 0$

$$W_{i+1} = -W_{i-1}$$

Ainsi en général, quand les bords sont simplement appuyés, le déplacement d'un point d'une division au delà de la limite est égal et de signe opposé au déplacement du point de la division à l'intérieur de la limite et symétriquement par rapport à celle-ci.

V.8.2 BORD ENCASTRE

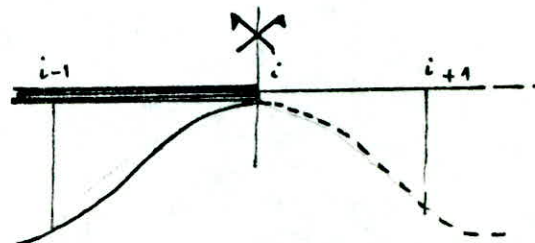
Le bord encasté doit vérifier les deux conditions :

$$W = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0$$

Puisque la pente normale au bord est nulle, on peut démontrer que les déplacements des points opposés et situés sur une division de part et d'autre des bords sont égaux.

$$\frac{\partial W}{\partial n} = W_{i+1} - W_{i-1} = 0$$

$$W_{i+1} = W_{i-1}$$



Donc un encastrement correspond à une symétrie par

rapport à un plan.

V.8.3 BORD LIBRE

Le long de ce bord les moments et les efforts tranchants sont nuls.

En développant l'équation (5.11) pour :

$$\text{Le noeud } i+1 : M_{i+1} = -D(W_{i+1+n} + W_{i+1-n} + W_i + W_{i+2} - 4W_{i+1})$$

$$\text{Le noeud } i-1 : M_{i-1} = -D(W_{i-1+n} + W_{i-1-n} + W_i + W_{i-2} - 4W_{i-1})$$

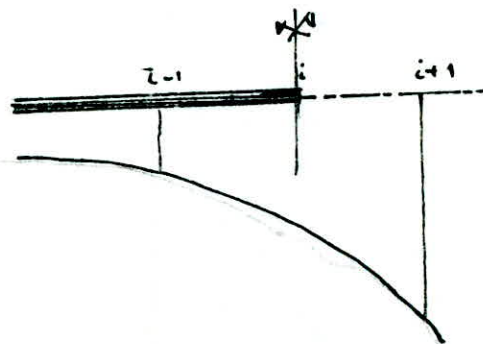
$$W_{i-1} + W_{i+1} + W_{i+n} + W_{i-n} - 4.W_i = 0$$

Les déplacements du bord libre sont identiques:

$$W_{i+n} = W_{i-n} = W_i$$

$$W_{i+1} = 2 W_i - W_{i-1}$$

Donc un bord libre correspond à une symétrie par rapport au point caractérisé par $W = 0$.



* Exemple:

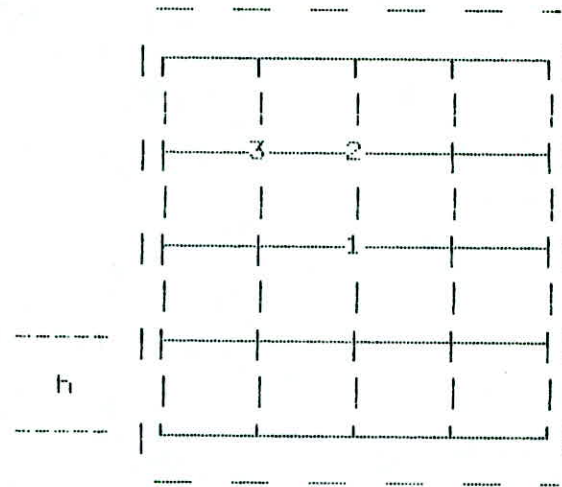
Utilisons la technique des différences finies pour analyser la flexion d'une plaque carrée ($a \times a$) simplement appuyée et uniformément chargée (P_0).

* On résout le 1^{er} système d'équations qui est indépendant du 2^{ème} système pour déterminer les valeurs de M à l'intérieur de l'élément.

** Puis on résout le 2nd système pour déterminer W .

Avec les valeurs de M et W évaluées pour chaque noeud on peut tirer les expressions des moments et des efforts tranchants.

1- On divise le domaine en 16 éléments.



$$h = a / 4$$

fig.5-3

En tenant compte de la symétrie, on ne détermine M et W que pour les noeuds 1, 2, 3 (voir fig.5-3), aux frontières M et W sont nuls.

Dans une première étape on développe l'équation (5.11) aux noeuds 1, 2 et 3, il en résulte:

$$\begin{array}{lcl} \text{Noeud 1} & -4 M_1 + 2 M_2 & = P_0 h^2 \\ \text{Noeud 2} & 2 M_1 - 4 M_2 + M_3 & = P_0 h^2 \\ \text{Noeud 3} & 4 M_2 - 4 M_3 & = P_0 h^2 \end{array}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = -P_0 h^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \frac{P_0 a^2}{128} \begin{bmatrix} 11/2 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Dans une seconde étape on développe l'équation (5.11) aux noeuds 1,2,3 les moments étant trouvés dans la première étape.

$$\begin{aligned} -4 W_1 + 2 W_2 &= (M_1 h^2 / D) & (\text{pt.1}) \\ 2 W_1 - 4 W_2 + W_3 &= (M_2 h^2 / D) & (\text{pt.2}) \\ 4 W_2 - 4 W_3 &= (M_3 h^2 / D) & (\text{pt.3}) \end{aligned}$$

Le système d'équations linéaires qui résulte est :

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = (-P_0 h^4 / D) \begin{bmatrix} -11/16 \\ -7/8 \\ -9/8 \end{bmatrix}$$

Après résolution du système

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \frac{P_0 a^4}{D} \begin{bmatrix} 0.00214 \\ 0.00293 \\ 0.00403 \end{bmatrix}$$

La flèche au centre (W_3) est 0,79% moins que la solution exacte.

Le moment au centre:

$$M_x = M_y = (1 + \nu) M_3 / 2 = 0.00457 P_0 a^2$$

CHAPITRE 6

Organisation de programme par difference finie

Avec l'emploi de la méthode des différences finies, on aboutit généralement à un système d'équations linéaires simultanées. Aussi, il est indispensable de disposer d'un procédé automatique pour un tel système. Ce procédé doit pouvoir s'adapter aux calculateurs numériques et fournir en outre, des résultats aussi exacts que possibles.

Deux variantes de programmes ont été élaborées. La première développe l'opérateur double laplacien et résout le système dont lequel les inconnues sont les déplacements.

La deuxième développe l'opérateur laplacien qui donne lieu à un premier système dont les inconnues sont les moments et le vecteur second membre dépend uniquement du chargement puis à un second système dont les inconnus sont les déplacements et le vecteur second membre dépend des moments qui sont fournis justement par le premier système.

VI.1 DESCRIPTION DU PROGRAMME

VI.1.2 - ENTREE DES DONNEES:

Les données sont constituées principalement d'informations sur les propriétés géométriques, mécaniques de la plaque, le nombre d'éléments à discrétiser selon une direction et le chargement. Suivant le cas de symétrie de la plaque on réduit l'étude de celle-ci soit au quart soit à la moitié.

- On forme la matrice du système selon le cas des noeuds. Pour des noeuds qui se trouvent à l'intérieur de la plaque les coefficients sont générés automatiquement selon le tableau des coefficients.

Pour des noeuds se trouvant aux frontières une modification des coefficients s'opère selon le cas d'appui du bord considéré.

- On forme le vecteur second membre qui dépend uniquement du chargement.

En utilisant le sous-programme de résolution on obtient les moments.

Une fois que les moments sont obtenus on forme le vecteur second membre la matrice étant déjà prête et la résolution donne les déplacements.

V.1.2.2 DEVELOPEMENT DE L'OPERATEUR DOUBLE LAPLACIEN:

Dans ce développement on génère la matrice des coefficients à l'aide du tableau des coefficients, suivant la position des noeuds à l'intérieur ou à la limite de la plaque, et la résolution donne directement les déplacements.

VI.1.3 -RESOLUTION:

Les systèmes auxquels on aboutit ne sont pas symétriques on utilise alors l'algorithme de résolution de Gauss pour les systèmes non symétriques.

VI.2 FONCTION DU PROGRAMME PRINCIPAL ET DES SOUS-PROGRAMMES:

VI.2.1 PROGRAMME PRINCIPAL :

Fait appel aux divers sous-programmes et imprime les résultats.

VI.2.2 SOUS-PROGRAMMES:

SOUS PROGRAMMES:	FONCTIONS
LEC	: sert pour la lecture des caractéristiques géométriques et mécaniques
PMAT	: Génère la matrice des coefficients selon le cas d'appui
	PMAT1: 1-Pour plaque simplement appuyée sur le pourtour 2-Pour plaque à trois bord simplement appuyés et un bord libre. 3-Pour plaque à deux bords simplement appuyés et deux bords libres.
	PMAT4: Pour plaque encastree sur le pourtour
	PMAT5: Pour plaque deux bords simplement appuyés et
	PMAT6: Pour plaque à deux bords simplement un bord encastree et un libre.
	PMAT7: Pour plaque deux bords simplement appuyés et deux bords encastrés.
RESOL	: Pour la résolution du système d'équations.

VI.6 APPLICATION DE LA RESOLUTION PAR DIFFERECCE FINIE :

Illustrons le déroulement du programme dans le cas d'une plaque simplement appuyée et uniformément chargée (P_0).

Pour tenir compte de la symétrie de la plaque, l'étude se fait sur le quart de cette dernière (fig 3) et ceci afin de réduire le nombre d'équation du système formé, ce qui diminue la capacité mémoire de l'ordinateur.

D'abord la plaque à étudier est divisée en un nombre finis d'éléments carrés (la numérotation des noeuds se fait par étage)

L'équation différentielle de la ligne élastique d'ordre quatre est remplacée par deux équations du second ordre.

VI.3.1-Conditions aux limites :

Les noeuds de la ligne supérieure ont une rotation nulle:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{---->} \quad \begin{aligned} W_{1+n} &= W_{1-n} \\ M_{1+n} &= M_{1-n} \end{aligned}$$

Les noeuds de la n^{ème} colonne ont une rotation nulle :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{---->} \quad \begin{aligned} W_{1+1} &= W_{1-1} \\ M_{1+1} &= M_{1-1} \end{aligned}$$

Les noeuds de la 1^{ère} ligne et de la 1^{ère} colonne ont des déplacements et des moments nuls .

L'opérateur ∇^2 est développé pour les noeuds de la plaque ayant des moments (respectivement déplacements) non nuls.

VI.3.2 FORMATION DE LA MATRICE DES COEFFICIENTS:

1- Du noeud $j = n+2$ jusqu'au noeud $j = 2n$

$$M_{j+n} + M_{j+1} - 4 M_j$$

si $j = n+2$

$$W_{j+n} + W_{j+1} - 4 W_j$$

$$M_{j+n} + 2 M_{j-1} - 4 M_j$$

si $j = 2n$

$$W_{j+n} + 2 W_{j-1} - 4 W_j$$

$$M_{j+n} + M_{j+1} + M_{j-1} - 4 M_j$$

si $n+2 < j < 2n$

$$W_{j+n} + W_{j+1} + W_{j-1} - 4 W_j$$

2- Du noeud $j = m-n+1$ jusqu'au noeud $j = \text{NEQ}-n$

$$M_{j+n} + M_{j-n} + M_{j+1} - 4 M_j$$

si $j = m-n+1$

$$W_{j+n} + W_{j-n} + W_{j+1} - 4 W_j$$

$$M_{j+n} + M_{j-n} + 2 M_{j+1} - 4 M_j$$

si $j = \text{NEQ}-n$

$$W_{j+n} + W_{j-n} + 2 W_{j+1} - 4 W_j$$

$$M_{j+n} + M_{j-n} + M_{j+1} - M_{j-1} - 4 M_j$$

si $m-n+1 < j < \text{NEQ}-n$

$$W_{j+n} + W_{j-n} + W_{j+1} - W_{j-1} - 4 W_j$$

3- Du noeud $j = m+1$ jusqu'au noeud $j = \text{NEQ}$

$$M_{j-n} + M_{j+1} - 4 M_j$$

si $j = m+1$

$$W_{j-n} + W_{j+1} - 4 W_j$$

$$2 M_{j-n} + 2 M_{j-1} - 4 M_j$$

si $j = \text{NEQ}$

$$2 W_{j-n} + 2 W_{j-1} - 4 W_j$$

$$2 M_{j-n} + M_{j+1} + M_{j-1} - 4 M_j$$

si $m-n+1 < j < \text{NEQ}$

$$2 W_{j-n} + W_{j+1} + W_{j-1} - 4 W_j$$

4- Du noeud $j=2n+2$ jusqu'au noeud $j=m-2n+1$ (sur la colonne 2)

$$M_{j+n} + M_{j-n} + M_{j+1} - 4 M_j$$

$$W_{j+n} + W_{j-n} + W_{j+1} - 4 W_j$$

5 - Du noeud $j=3n$ jusqu'au noeud $j=\text{NEQ}-2n$ (sur la colonne n)

$$M_{j+n} + M_{j-n} + M_{j-1} - 4 M_j$$

$$W_{j+n} + W_{j-n} + W_{j-1} - 4 W_j$$

6- Les noeuds à l'intérieur du rectangle dont les sommets:

$$2n+3, 3n-1, m-2(n-1), \text{NEQ}-2n-1$$

$$M_{j+n} + M_{j-n} + M_{j+1} + M_{j-1} - 4 M_j$$

$$W_{j+n} + W_{j-n} + W_{j+1} + W_{j-1} - 4 W_j$$

Finalement la matrice obtenue est d'ordre $\text{NEQ} \times \text{NEQ}$

où : NEQ = nombre de noeud total

EXEMPLE :

Soit une plaque carrée (axa), simplement appuyée et uniformément chargée, divisée en 64 éléments (8x8): le pas est $h=a/8$.

Vue la symetrie du problème, l'étude de cette plaque se reduit au quart de cette dernière qui sera divisée en 16 éléments (4x4).

L'operateur Δ est developpé pour chaque noeud par le sous-programme PMAT pour aboutir à :

Plaque simplement appuyée sur le pourtour

NBRE D'ELTS DU QUART DE LA PLAQUE :

SELON OX ==> 4

SELON OY ==> 4

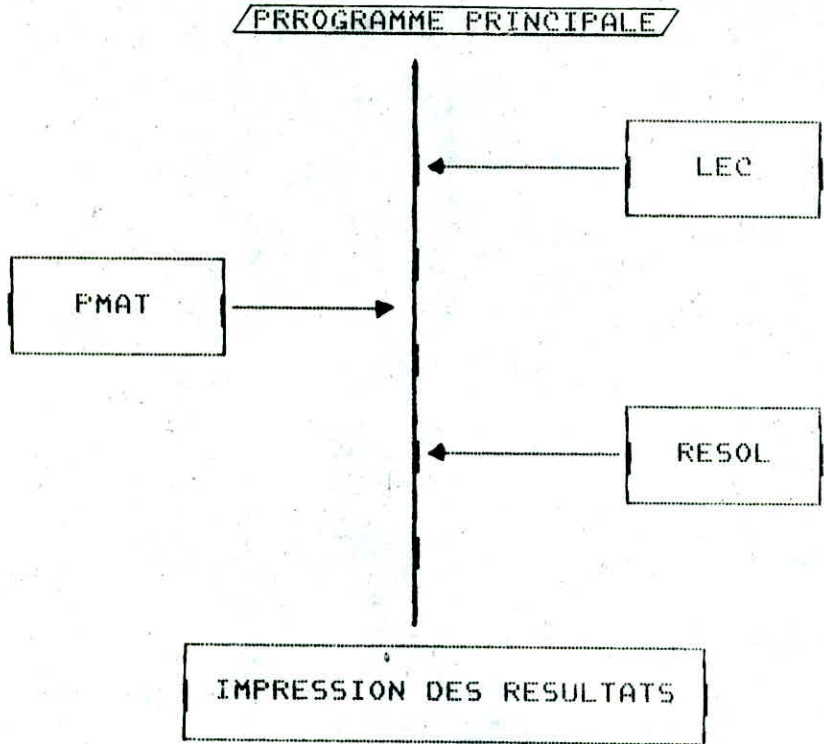
```
-4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1-4 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1-4 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1-4 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 2-4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0-4 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 1-4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 1-4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 1-4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 2-4 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0-4 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1-4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1-4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2-4 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0-4 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1-4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1-4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2-4 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2 0 0 0 0-4 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 1-4 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0-4 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 1-4 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 2-4
```

Ensuite la résolution du système

$$[A] [M] = -h^2/D [M]$$

! NOEUD !	! DEPLACEMENT !
! 1 !	! 0.000000 !
! 2 !	! 0.000000 !
! 3 !	! 0.000000 !
! 4 !	! 0.000000 !
! 5 !	! 0.000000 !
! 6 !	! 0.000000 !
! 7 !	! 0.000663 !
! 8 !	! 0.001186 !
! 9 !	! 0.001515 !
! 10 !	! 0.001627 !
! 11 !	! 0.000000 !
! 12 !	! 0.001186 !
! 13 !	! 0.002134 !
! 14 !	! 0.002733 !
! 15 !	! 0.002937 !
! 16 !	! 0.000000 !
! 17 !	! 0.001515 !
! 18 !	! 0.002733 !
! 19 !	! 0.003507 !
! 20 !	! 0.003770 !
! 21 !	! 0.000000 !
! 22 !	! 0.001627 !
! 23 !	! 0.002937 !
! 24 !	! 0.003770 !
! 25 !	! 0.004055 !

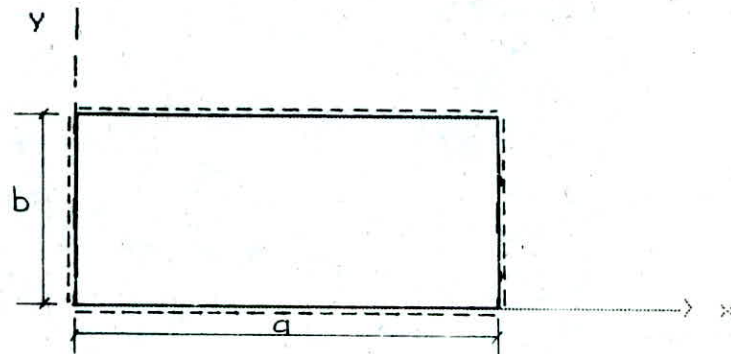
ORGANIGRAMME DU PROGRAMME



VI.4 RESULTATS DES PROGRAMMES:

EXEMPLE 1:

 * Plaque simplement appuyée sur le pourtour *



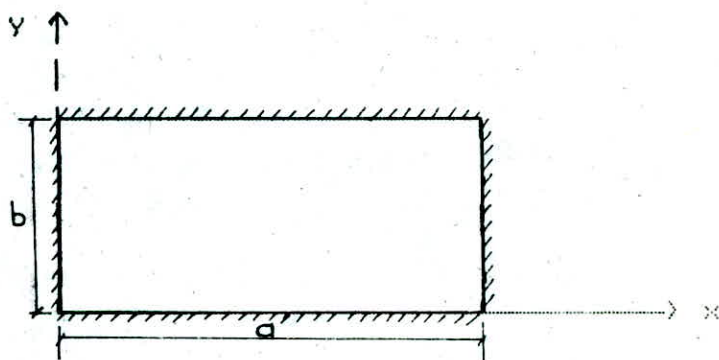
$$a/b = 1$$

!- MAILLAGE !	NOEUD !	MOMENTS !	DEPLACEMENT ! (qa^4/D)
! 2x2 !	! 4 !	! 0.062500 !	! 0.003906 !
! 4x4 !	! 9 !	! 0.070313 !	! 0.004028 !
! 8x8 !	! 25 !	! 0.072783 !	! 0.004055 !
! 10x10 !	! 36 !	! 0.073098 !	! 0.004058 !
! 12x12 !	! 49 !	! 0.073272 !	! 0.004059 !
! 18x18 !	! 100 !	! 0.073493 !	! 0.004061 !
SOL. EXACTE			0.004062

EXEMPLE 2:

@@
 @ Plaque encastree sur le pourtour @
 @@

$a/b = 1$

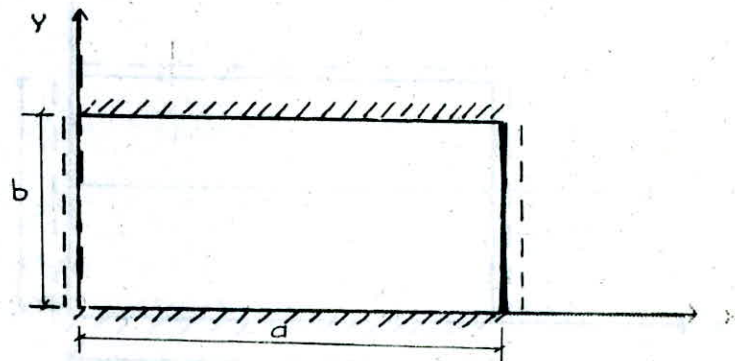


! MAILLAGE !	! NOUED !	! DEPLACEMENT !
! (qa^4/D) !		
! 2x2 !	! 4 !	! 0.002604 !
! 4x4 !	! 9 !	! 0.001800 !
! 8x8 !	! 25 !	! 0.001424 !
! 10x10 !	! 36 !	! 0.001370 !
! 12x12 !	! 49 !	! 0.001339 !
! 18x18 !	! 100 !	! 0.001297 !
SOL. EXACTE		0.00126

EXEMPLE 3:

 * Plaque avec 2 bords appuyes/2 bord libres *
 * $y=0$ $y=b/x=0$ $x=a$ *

$a/b = 1$

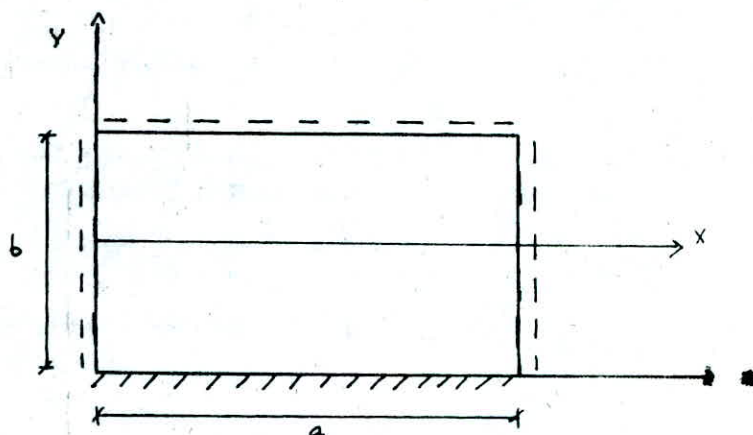


! MAILLAGE !	! NOUÉ !	! MOMENTS !	! DEPLACEMENT !
			(10^{-4})
! 2x2 !	! 4 !	! 0.156250 !	! 0.023438 !
! 4x4 !	! 9 !	! 0.132813 !	! 0.015198 !
! 8x8 !	! 25 !	! 0.126953 !	! 0.013537 !
! 10x10 !	! 36 !	! 0.126250 !	! 0.013349 !
! 12x12 !	! 49 !	! 0.125868 !	! 0.013248 !
! 18x18 !	! 100 !	! 0.125386 !	! 0.013121 !

SOL. EXACTÉ

EXEMPLE 4:

 * Plaque avec 3 bords appuyés/1 bord libre *

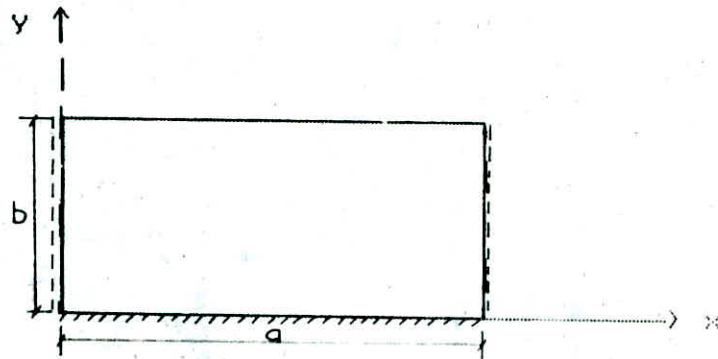


$a/b = 1$

! MAILLAGE !	! NOEUD !	! MOMENTS !	! DEPLACEMENT !
			(qa^4/D)
! 2x2 !	! 6 !	! 0.125000 !	! 0.015625 !
! 4x4 !	! 15 !	! 0.125000 !	! 0.013672 !
! 8x8 !	! 45 !	! 0.125000 !	! 0.013184 !
! 10x10 !	! 66 !	! 0.125000 !	! 0.013125 !
! 12x12 !	! 91 !	! 0.125000 !	! 0.013093 !
! 18x18 !	! 190 !	! 0.125000 !	! 0.013053 !

EXEMPLE 7:

 Plaque avec 2 bords appuyés/1 bord encastré et 1 libre
 * x=0 x=a /y=0 et y=b *



$a/b = 1$

! maillage !	NOEUD	!	DEPLACEMENT	!
			(qa^4/D)	
! 2X2 !	6	!	0.031250	!
! 4X4 !	15	!	0.013672	!
! 8X8 !	45	!	0.013184	!
! 10X10 !	66	!	0.013125	!
! 12X12 !	91	!	0.013093	!
! 18X18 !	190	!	0.013053	!

1
2.

Conclusion

CONCLUSION

Dans cette étude il ressort que :

Les deux méthodes ont une technique de discrétisation, ou dont le milieu continu est représenté par un certain nombre de noeuds.

Cependant elles diffèrent dans les points suivants :

- L'élément fini est entièrement déterminé par les déplacements nodaux à l'intérieur et aux frontières de l'élément, par contre dans le maillage de la méthode des différences finies il y a des noeuds à l'extérieur des frontières.

- L'approche de la méthode des éléments finis est basée sur une minimisation d'une fonctionnelle sans qu'elle se réfère aux équations différentielles tandis que l'appro-

che de la méthode des différences finies est représentée par l'approximation de l'équation différentielle gouvernante sans se référer à une fonctionnelle.

On peut dire que les deux méthodes se diffèrent uniquement dans le choix des coordonnées généralisées et la localisation des degrés de liberté.

- Il est également à remarquer que la méthode des éléments finis peut être vue comme une généralisation de systèmes d'équations aux différences finies.

Bibliographie

- 1 - S.TIMOSHENKO :
Théorie des plaques et coques.
- 2 - J.COURBON :
Plaque mince.
- 3 - O.C.ZEINKEWICZ :
The finite element method in engineering science .
- 4 - L.ROKEY :
Introduction a la methode des éléments finis
- 5 - G.DHATT et G.TOUWOT :
Une presentation de la methode des éléments finis
- 6 - J.F.Imbert :
Analyse des structures par éléments finis.
- 7 - SHAMES :
Energy and finit element method in structural mechanics.
- 8 - MASSONNET :
Calcul des grillages de poutre selon la méthode de GYON-MASSONNET.

