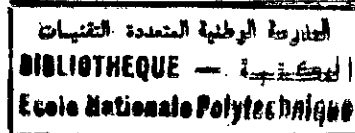


ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

SYNTHESE
D'UNE COMMANDE ROBUSTE
PAR PLACEMENT DE POLES

Proposé par :

Mr M.S. Boucherit

Etudié par :

Mr T. Belmehdi

Dirigé par :

Mr M.S. Boucherit

PROMOTION

JUIN 1992

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

SYNTHESE
D'UNE COMMANDE ROBUSTE
PAR PLACEMENT DE POLES

Proposé par :
Mr M.S Boucherit

Étudié par :
Mr T. Belmehdi

Dirigé par :
Mr M.S Boucherit

PROMOTION
JUIN 1992

Dédicaces

A ma très chère mère à qui je dois tant
A mon cher père
A mes frères et à ma soeur Samiha
A mes deux grand mères
A mes tantes et à mes oncles
A toute ma famille
A tout ami fidèle
A Nadia

Je dédie ce modeste travail.
Touffik

REMERCIEMENTS



Ce travail a été effectué sous la direction de Monsieur M.S. Boucherit à qui je présente l'expression de ma profonde gratitude pour toutes nos entrevues fructueuses que nous avons eues et pour tous ses encouragements continus.

Pour tous les encouragements et les conseils qu'il m'a constamment prodigué, j'exprime mes profonds remerciements à mon oncle, Monsieur A. Belmehdi, chargé de cours à l'INH-Boumerdès.

Je tiens aussi à exprimer ma très vive reconnaissance à Monsieur A.K. Moussaoui, dont les précieux conseils, l'aide et les encouragements m'ont été d'un apport considérable pour la réalisation de ce travail.

Que Mademoiselle F. Benmiloud trouve ici ma profonde reconnaissance pour l'aide qu'elle a su apporter tout au long de ce travail sans ménager ni son temps ni ses précieux conseils.

Je ne peux manquer de remercier sincèrement et chaleureusement tous les collègues et amis du département de Genie électrique pour l'ambiance amicale qu'ils ont su créer et les idées fructueuses que nous avons échangées.

Et que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail, trouvent ici l'expression de ma très vive reconnaissance.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0. Introduction.

0.1. Introduction.....	1
0.2. Enoncé du problème et son importance.....	1
0.3. Présentation des chapitres.....	2

CHAPITRE I. Robustesse, et théorie de la commande robuste.

I.1. Définitions sur la robustesse.....	3
I.2. Approches de base pour la synthèse de régulateurs robustes à placement de pôles.....	4
I.3. Théorie de la commande robuste.....	6
I.3.1. Incertitudes et performances.....	6
I.3.2. Erreurs structurées.....	8
I.3.3. Approche fréquentielle.....	10
I.3.3.1. Incertitudes non structurées.....	13
I.3.3.2. L'apport de la norme H_{∞}	15
I.3.4. Méthodes modernes et robustesse.....	16
I.3.4.1. Le placement de pôles robuste.....	17
I.3.5. Conclusion.....	18

CHAPITRE II. Description de l'approche de Santos-Mendès
 Régulateurs robustes à placement de pôles

II.1. Structure générale.....	19
II.1.1. Modèle du processus.....	19
II.1.2. Structure du régulateur.....	20
II.1.3. Equations du système en boucle fermée.....	21

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Introduction

0.1 Introduction.

A l'origine du fameux fossé entre la théorie de l'automatique et la pratique industrielle se trouve peut-être la difficulté d'intégrer le facteur "robustesse" dans les méthodes dites modernes de l'automatique, alors que les méthodes classiques (à base de fréquentiel, de PID, d'analogique, ...) débouchaient presque naturellement sur des commandes robustes. Le terme robustesse est d'ailleurs souvent utilisé d'une façon imprécise, et parfois même confondu avec la notion de faible sensibilité aux erreurs du modèle. Par contre, certaines approches sont solidement fondées (H_∞ (Francis, 1987), Kharitonov, 1978, ...) mais sur des bases tellement disparates qu'il est difficile de faire une liaison entre les différentes théories.

Dans ce travail, on s'atèlera essentiellement à étudier une approche récente concernant les régulateurs robustes à placement de pôles proposée par Santos-Mendès (1988).

0.2 Enoncé du problème et son importance.

L'utilisation du principe de contre-réaction permet la stabilisation des systèmes instables en boucle ouverte ainsi que la conception de schémas de commande susceptibles d'assurer la stabilité ou la qualité des performances du système et ce en présence de différents types de perturbations. Ces performances sont optimales lorsque le modèle linéaire est parfaitement connu et l'effet des perturbations complètement éliminé.

Ainsi, de nombreuses études ont été faites en vue d'établir des méthodes de synthèse de régulateurs exploitant au mieux les propriétés des schémas en boucle fermée.

L'intérêt est particulièrement accordé à la robustesse par rapport aux imprécisions du modèle mathématique du processus. On considère que le modèle est de type entrée-sortie linéaire et

monovariante. Ce problème a fait l'objet d'un vif intérêt depuis l'avènement de l'automatique (Bode, 1945) et par les nombreuses études qu'elle suscite jusqu'à nos jours. On citera, Keel et al. (1987), Soh et Evans (1987), Laughlin et al. (1986), Ackermann et Muench (1987) et plus particulièrement l'intéressante approche fréquentielle proposée par Horowitz et Sidi (1971) et Horowitz (1975). D'autres approches ont fait également l'objet de recherches très récentes, entre autres Chang et Peng (1972), Yedavali (1987) et Barmish qui adoptent le modèle d'état pour le processus ainsi que Doyle et Stein (1981), et Doyle (1982) qui traitent le cas multivariable.

0.3 Présentation des chapitres.

Dans le premier chapitre, on présente l'importance du problème de la robustesse et ses principales définitions. On présente également les approches de base de la synthèse des régulateurs robustes à placement de pôles suivies d'un survol des principaux aspects de la théorie de la commande robuste.

Le second chapitre est consacré à la description de la méthode de synthèse des régulateurs robustes à placement de pôles proposée par R. Santos-Mendès (1988).

Le dernier chapitre, concerne l'application de cette stratégie de commande à un système, suivie d'une simulation. En fin de ce travail, et à partir des résultats obtenus, nous faisons une évaluation des performances réalisées. Des suggestions pour d'éventuelles améliorations sont également proposées.

CHAPITRE I

***ROBUSTESSE,
ET THEORIE DE
LA COMMANDE
ROBUSTE***

Robustesse
et théorie de la
commande robusteI.1 Définitions sur la robustesse.

Dans ce paragraphe, on donne les définitions les plus retenues concernant la robustesse qui est en fait un concept très vague pour qu'il soit totalement cerné :

Définition 1.

- Un système est dit robuste s'il garantit un certain niveau de performances malgré des incertitudes par rapport à son modèle nominal.

Définition 2.

- La robustesse est un concept d'ensemble: les incertitudes sont décrites par leur appartenance à un domaine éventuellement grand.

Définition 3.

- La sensibilité, qui est un concept local, est en fait une notion voisine de la robustesse: elle décrit la variation des performances pour de petites variations du processus.

- Le terme "robustesse" reste néanmoins flou tant qu'on n'a pas précisé:

- i) Le mode de description des incertitudes;
- ii) Le type de performances considéré.

Définition 4.

- La robustesse d'un régulateur est quant à elle définie comme étant sa capacité d'assurer la stabilité ou la performance du système face à un type considéré de perturbation agissant sur le processus (soit au niveau des signaux mesurés ou modèle mathématique considéré; soit déterministe ou stochastique) .

I.2 Approches de base pour la synthèse de régulateurs robustes:

Trois axes de recherches assez récents ont été retenus. Ces approches se basent sur l'analyse dans l'espace des paramètres du processus et du régulateur.

a). Approche de Kharitonov (1978):

Le théorème de Kharitonov établit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de polynômes définie par une région dans l'espace de ses coefficients soit stable. Les régions considérées sont des polyèdres, définis par les bornes supérieures et inférieures de chaque coefficient. L'idée dans ce cas est de calculer au préalable un polyèdre dans l'espace des coefficients du polynôme caractéristique de façon à assurer la stabilité du système. Puis, le régulateur est calculé tel que les contraintes en présence d'incertitudes sur les paramètres du processus soient satisfaites. Des approches similaires sont présentées par Berger (1984), Keel et al. (1985), et Keel et Bhattacharyya (1985).

b). Approche d'Ackermann (1980, 1985):

Elle est basée sur l'obtention de la région de l'espace paramétrique du régulateur correspondant à tous les régulateurs capables d'assurer la performance du système en boucle fermée pour une valeur précise des paramètres du processus. Ce calcul est refait de manière à couvrir les variations significatives en pratique. Le choix du régulateur est obtenu à l'intersection de toutes les régions obtenues et ce suivant un critère quelconque. Cependant cette méthode est confrontée à certains obstacles ; d'où l'impossibilité d'obtenir les expressions analytiques des régions dans l'espace des régulateurs. Ceci est dû essentiellement à l'utilisation de l'informatique graphique qui exige une certaine expertise géométrique et un matériel très développé. Il est à noter, toutefois que les résultats obtenus avec cette approche sont plus exacts et ne sont pas conservatifs, contrairement à ceux de l'approche précédente.

c). Approche de Biernacki et al. (1987):

Elle consiste à calculer pour un régulateur donné le rayon de la plus grande hypersphère de l'espace des paramètres du processus de façon à garantir la stabilité du système en boucle fermée. Ce rayon est considéré comme une mesure de la robustesse du régulateur donné. Le problème de synthèse est résolu de manière itérative à partir d'un régulateur initial, et à chaque pas le régulateur est modifié suivant une direction qui fait accroître la mesure de robustesse. L'approche présente néanmoins, deux handicaps majeurs. D'une part, il n'est pas possible d'analyser des régions du plan complexe différentes du demi-plan gauche, et d'autre part la direction de modification du régulateur utilisée dans l'algorithme itératif de synthèse, est calculée à partir de la valeur de la mesure de robustesse aux alentours du point courant. Il s'avère que ce dispositif est très onéreux pour le calcul demandé.

Une différence fondamentale entre les deux dernières approches citées est le concept de mesure de robustesse. Ackermann la définit comme étant associée à la région du plan complexe où peuvent se trouver les pôles du système en boucle fermée, lorsque les paramètres du processus varient dans une région déterminée. Par contre, Biernacki associe le degré de stabilité à la plus grande plage de variation des paramètres du processus de façon à ne pas instabiliser le système en boucle fermée. On peut noter la correspondance entre ces deux définitions puisqu'une plage de variation paramétrique plus grande implique une plus grande variation des pôles en boucle fermée.

Dans ce travail, on va étudier une méthode de synthèse similaire à celle proposée par Biernacki et al.. Elle a été proposée par Santos-Mendès (1988). Une approche conique a été introduite, pour la description des incertitudes paramétriques du processus ce qui rend la définition de mesure de robustesse beaucoup plus simple et plus facile à calculer. Le problème de limitation de l'analyse au demi-plan gauche du plan complexe est également surmonté. La définition des marges de performances acceptables est meilleure et plus générale autant pour les systèmes en temps discret qu'en temps continu.

I.3. Théorie de la commande robuste.I.3.1. Incertitudes et performances.

D'après la définition, un système est dit robuste, s'il assure certaines performances et ce en présence d'incertitudes par rapport à son modèle nominal. En plus, la notion "robustesse" est elle même liée au mode de description des incertitudes et le type de performances escompté. D'où l'intérêt pour les connaissances des rapports mutuels entre, d'une part, les propriétés dont l'automaticien peut souhaiter la robustesse (stabilité, erreur statique, ...) et les représentations d'incertitudes d'autre part. On distingue deux types d'incertitudes :

a). Les incertitudes structurées :

Elles sont relatives aux paramètres d'un modèle dans une structure donnée et permettent une description plus concrète relative à des constantes physiques (masses, raideurs, ...). Elles sont décrites par un domaine dans l'espace paramétrique.

b). Les incertitudes non structurées :

Elles concernent exclusivement les réponses fréquentielles et sont définies par des écarts de réponse fréquentielle du système par rapport à une réponse nominale.

On a :

$$G'(j\omega) = G(j\omega) + \Delta G(j\omega)$$

$$\left| \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| \leq \ell(\omega)$$

Un majorant de ce type engendre des disques d'incertitudes sur le lieu de Nyquist :

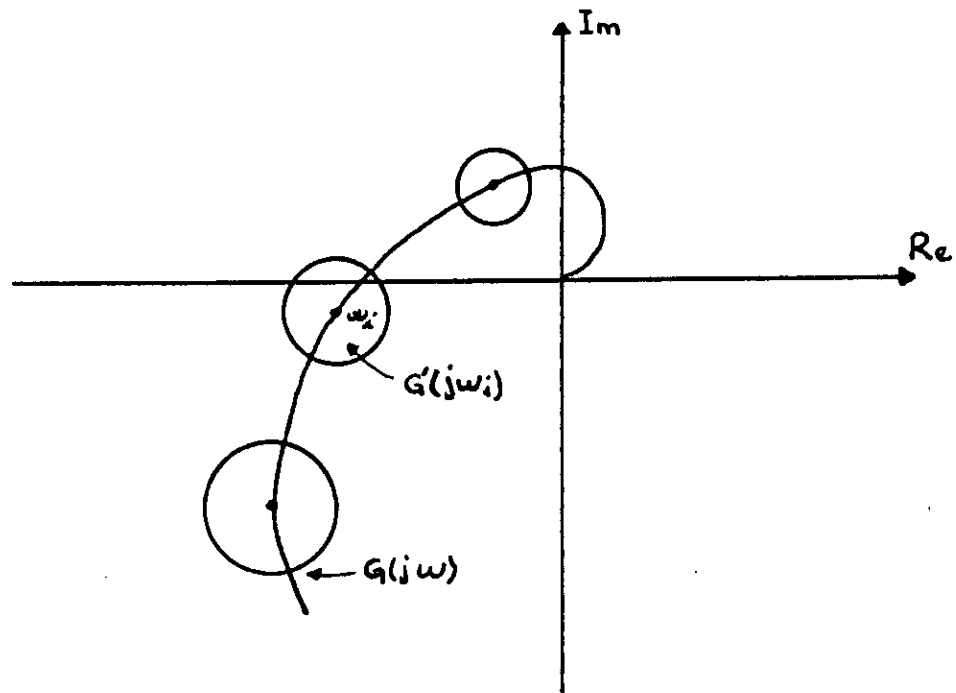


figure 1.1 Incertitudes non structurées dans le plan de Nyquist.

La traduction fréquentielle des incertitudes paramétriques peut être beaucoup plus précise sous forme de gabarits (templates).

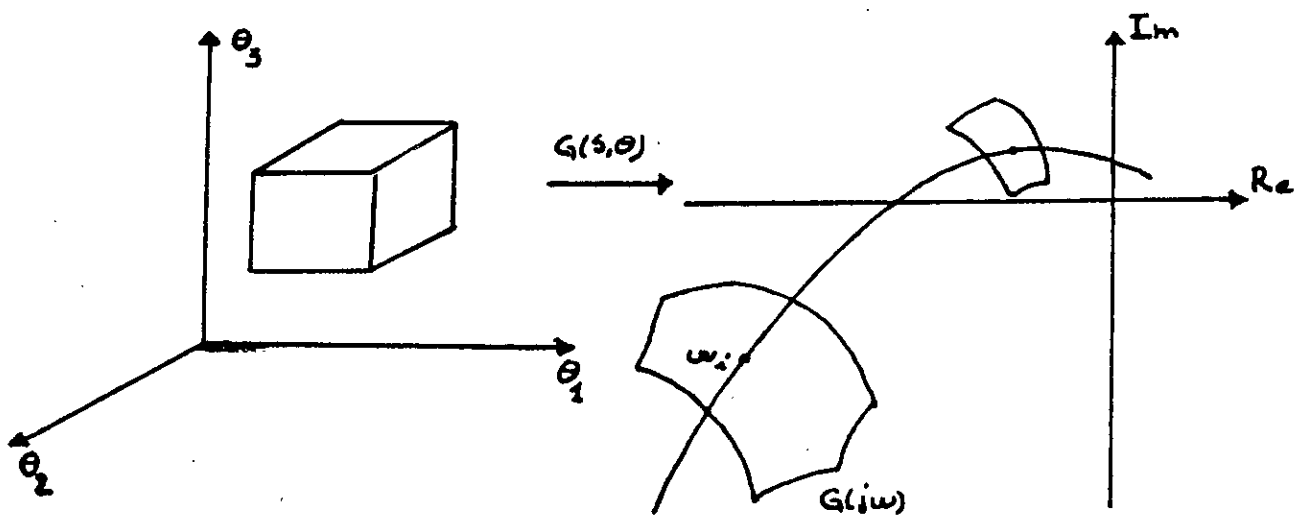


figure 1.2 Incertitudes structurées : Traduction fréquentielle.

Le deuxième facteur qui intervient dans la robustesse est celui du "niveau de performance" à obtenir. La description de ces ladites performances doit être, toutefois, féconde sur le plan mathématique.

En général la majorité des théories de la robustesse s'intéresse à la stabilité dont le seuil d'acceptation est universel et sans ambiguïté. Mais, il n'y a pas de description pratique universelle et privilégiée des incertitudes. Pour les systèmes compacts (aéronautique par exemple), on préférera la description structurée, alors que pour les systèmes industriels (puissance, chimie, ...) on optera pour les incertitudes non structurées. Dans certains cas, la combinaison peut s'imposer: erreurs structurées en basses fréquences et erreurs non structurées en hautes fréquences.

1.3.2. Erreurs structurées.

On considère un système stable (ou stabilisé) indifféremment en boucle ouverte ou en boucle fermée, représenté par une équation d'état :

$$\dot{x} = (A + \Delta A) x$$

Où A :Modèle nominal (stable)

ΔA :Ecart ou incertitudes.

Il existe une multitude de théorèmes qui donnent des conditions suffisantes (rarement nécessaires) de stabilité, et ce selon la forme de A et la description des écarts ΔA . On citera les exemples les plus signifiants de ces théorèmes.

Le théorème de base De Larminat (1989) donne la condition suffisante suivante :

$$\| \Delta A \| \leq \frac{2a}{n^2} \left(\| A \| \right)^{2n}$$

où $n = \dim (A)$

$a = \inf | \operatorname{Re} (\lambda_i) |$

$\lambda_i =$ valeurs propres de A.

Ce résultat a un grand intérêt d'ordre qualitatif :

- La complexité (n) nuit à la robustesse;
- La robustesse est perdue lorsque les coefficients de gain tendent vers l'infini

Le théorème de Kharitnov (1978) quant à lui, est l'un des rares théorèmes se traduisant par une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Il suppose que A se présente sous forme canonique compagne :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & 0 \\ -a_2 & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ -a_n & 0 & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} x$$

avec $0 < \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, i = 1, \dots, n$

Le polynôme caractéristique $A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$ est de racines à partie réelle négative si et seulement si les quatre polynômes suivants sont stables :

$$\begin{aligned} & \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} s + \bar{a}_{n-2} s^2 + \bar{a}_{n-3} s^3 + \bar{a}_{n-4} s^4 + \bar{a}_{n-5} s^5 + \dots \\ & \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1} s + \underline{a}_{n-2} s^2 + \underline{a}_{n-3} s^3 + \underline{a}_{n-4} s^4 + \underline{a}_{n-5} s^5 + \dots \\ & \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1} s + \bar{a}_{n-2} s^2 + \underline{a}_{n-3} s^3 + \bar{a}_{n-4} s^4 + \underline{a}_{n-5} s^5 + \dots \\ & \underline{a}_n + \bar{a}_{n-1} s + \underline{a}_{n-2} s^2 + \bar{a}_{n-3} s^3 + \underline{a}_{n-4} s^4 + \bar{a}_{n-5} s^5 + \dots \end{aligned}$$

Ce théorème présente, néanmoins, un handicap ; il ne fait pas intervenir la dépendance entre les paramètres a_i

Synthèse de commandes robustes.

Les méthodes de synthèse ont pour but de déduire la loi de la commande du modèle nominal et des données relatives aux incertitudes. Les problèmes types sont les suivants :

a). Retour d'état.

$$\text{Soit } \dot{x} = (A + \Delta A) \cdot x + (B + \Delta B) \cdot u$$

Trouver k_c : $u = -k_c \cdot x$ tel que le système en boucle fermée soit stable pour l'ensemble des variations possibles sur ΔA et ΔB .

b). Retour de sortie.

$$\text{Soit } y = [G(s) + \Delta G(s)] \cdot u$$

Trouver $k(s)$: $u = -k(s) \cdot y$ tel que le système en boucle fermée soit stable pour toutes les variations structurées possibles sur ΔG .

I.3.3. Approche fréquentielle.

Soit le schéma de base suivant :

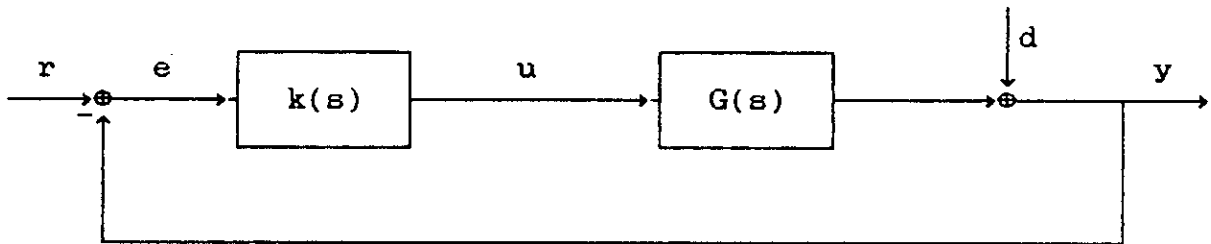


figure 1.3

où r : consigne; u : commande; y : sortie;
 d : perturbation; e : écart.

Le théorème de Nyquist joue un rôle crucial dans la robustesse. Considérons un processus nominal $G(s)$ et des variations $\Delta G(s)$;

$$G'(s) = G(s) + \Delta G(s) \quad \text{sous les contraintes suivantes :}$$

- Le régulateur $k(s)$ stabilise $G(s)$;
- Les variations $\Delta G(s)$ ne modifient pas le nombre de pôles à partie réelle positive de $G'(s)$.

Les variations ΔG transforment le lieu de Nyquist en un serpent.

La stabilité est robuste si le serpent
n'atteint pas le point (-1) .

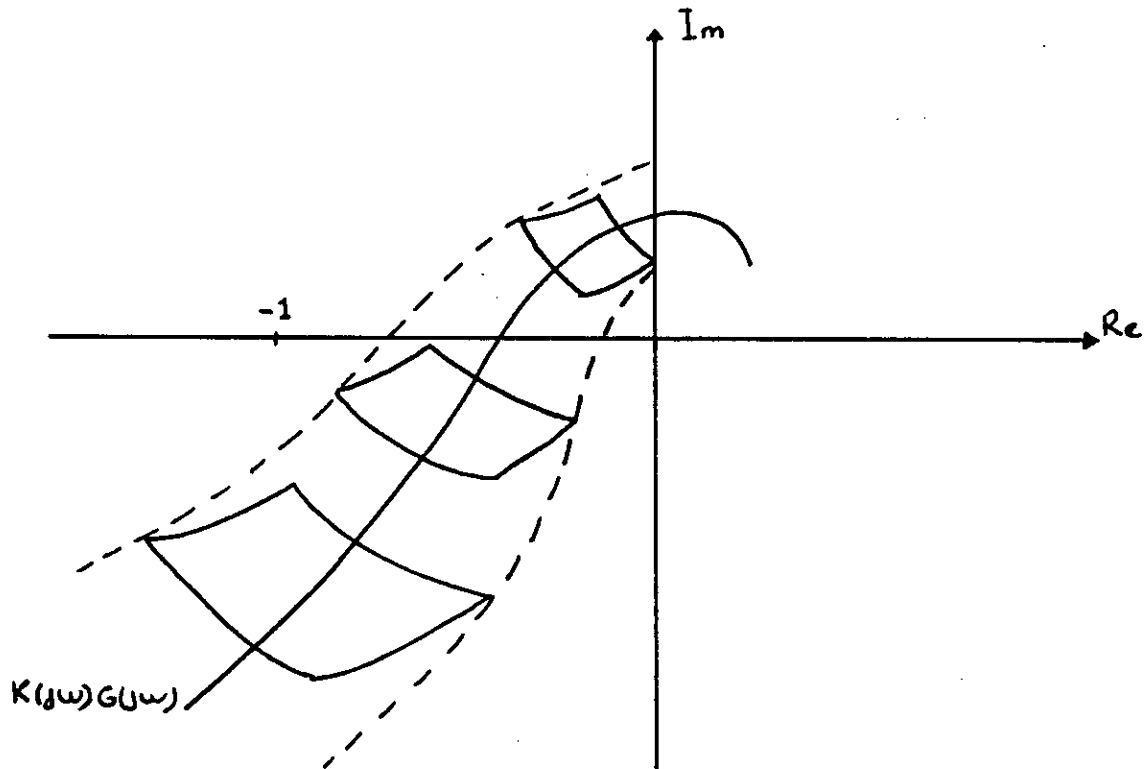


figure 1.4 Robustesse: Analyse graphique
dans le plan de Nyquist.

La forme et la dimension des gabarits d'incertitudes dépendent dans ce lieu du régulateur $k(s)$, c'est pourquoi on préfère le lieu de Black dans lequel $k(s)$ translate les gabarits sans en modifier ni la forme ni encore moins l'orientation. Le point (-1) devient alors le point $(-180^\circ, \log(1)=0)$.

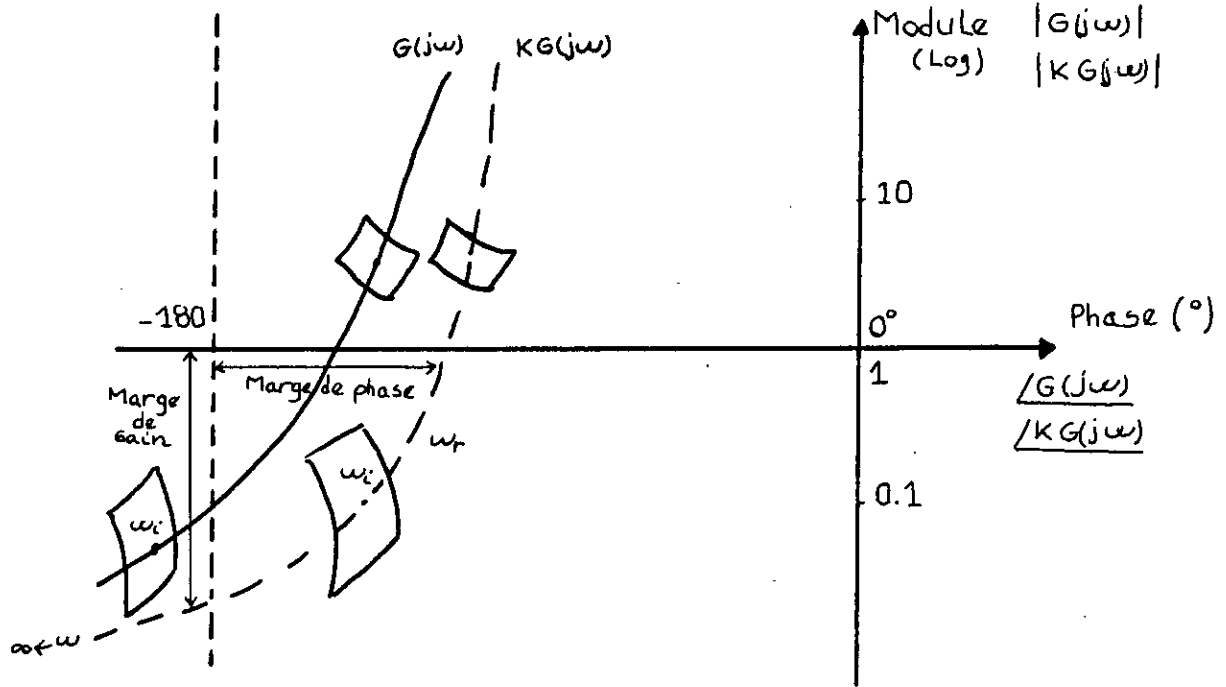


figure 1.5 Le plan de Black.

En vue d'améliorer les performances, on cherchera à modifier le lieu, grâce à $k(j\omega)$ de façon à transférer les hautes fréquences au voisinage du point (-1) . Cependant, l'incertitude en hautes fréquences (de phase) peut croître sans limite jusqu'à des centaines de degrés, ce qui est incompatible avec la stabilité robuste. Le transfert des fréquences HF n'est pas à envisager dans ce cas.

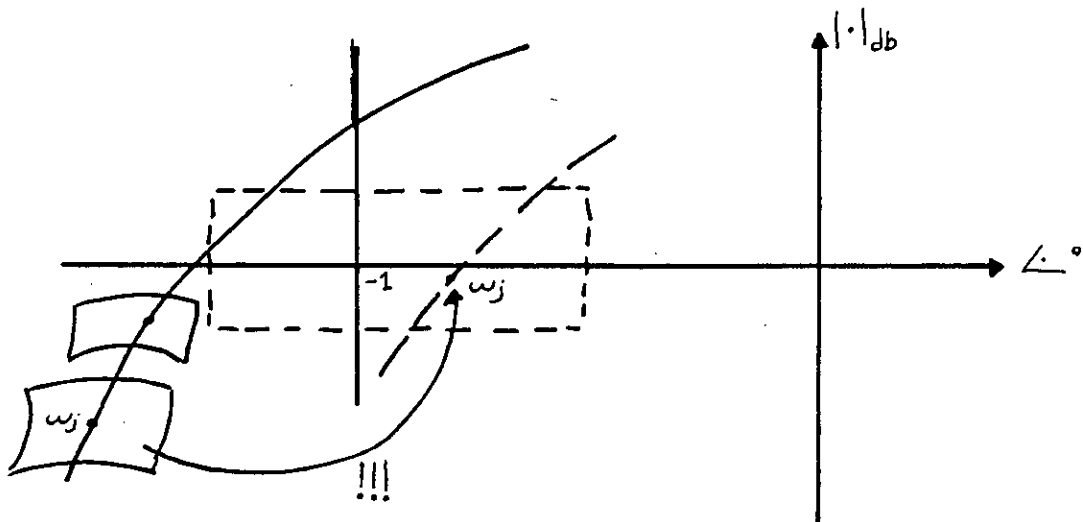


figure 1.6 Incompatibilité performance-robustesse.

On peut constater que les méthodes basées sur la prise en compte des gabarits d'incertitudes (dans le plan de Black ou de Nyquist) doivent être les plus fines possibles pour une bonne optimisation performances-robustesse.

I.3.3.1. Incertitudes non structurées.

Les gabarits décrivant les incertitudes $\Delta G(s)$ sont maintenant remplacés par un majorant circulaire dans le plan de Nyquist (fig.1.1) et on se donne le majorant $l(\omega)$.

$$\left| \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| \leq l(\omega)$$

N.B En général $l(\omega)$ sera petit en basses fréquences et grand en hautes fréquences, d'où le diagramme de Bode suivant :

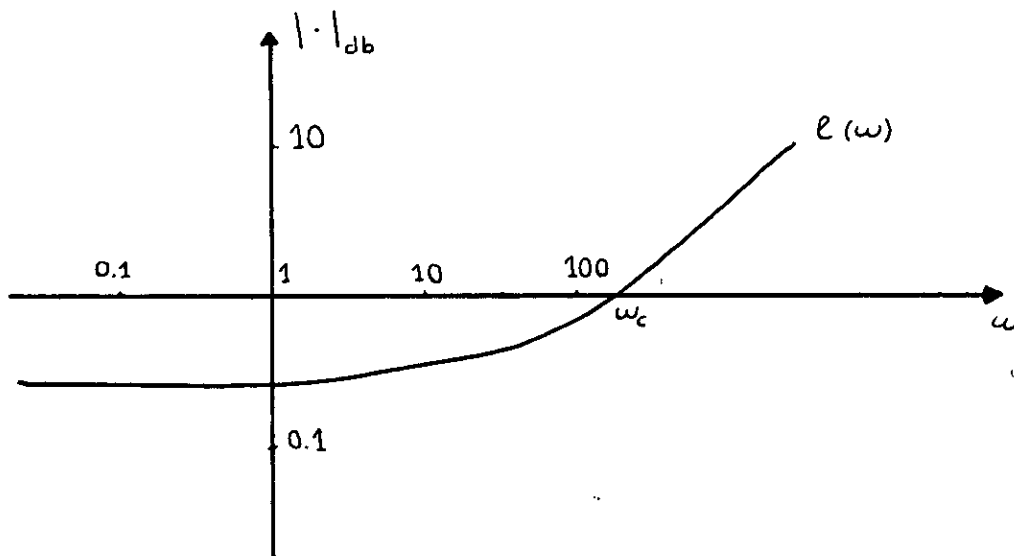


figure 1.7 Diagramme de Bode.

Selon le théorème de De Larminat (1989), un régulateur $k(s)$ stabilisant le processus $G(s)$ stabilisera toute la famille de processus $G'(s) = G(s) + \Delta G(s)$ si et seulement si :

- a). ΔG ne modifie pas le nombre de pôles instables de $G'(s)$.

$$b). \left| \frac{kG}{1+kG} \right|_{s=j\omega} \leq \frac{1}{\ell(\omega)}$$

On peut également spécifier les performances nominales en imposant une contrainte :

$$c). \left| \frac{1}{1+kG} \right| \leq m(\omega)$$

Pour faire une synthèse, il est préférable de traduire b) et c) en conditions portant directement sur $|kG|$. On aura alors les equivalences suivantes :

- Lorsque $m(\omega) \ll 1$, c) $\Leftrightarrow |kG| < \frac{1}{m(\omega)}$
- Lorsque $\ell(\omega) \ll 1$, b) $\Leftrightarrow |kG| < \frac{1}{\ell(\omega)}$

La satisfaction simultanée de ces deux conditions ne pourra se faire que si elles interviennent sur des gammes de fréquences bien disjointes. On obtient alors un gabarit performances-robustesse à satisfaire par $kG(j\omega)$ (fig 1.10).

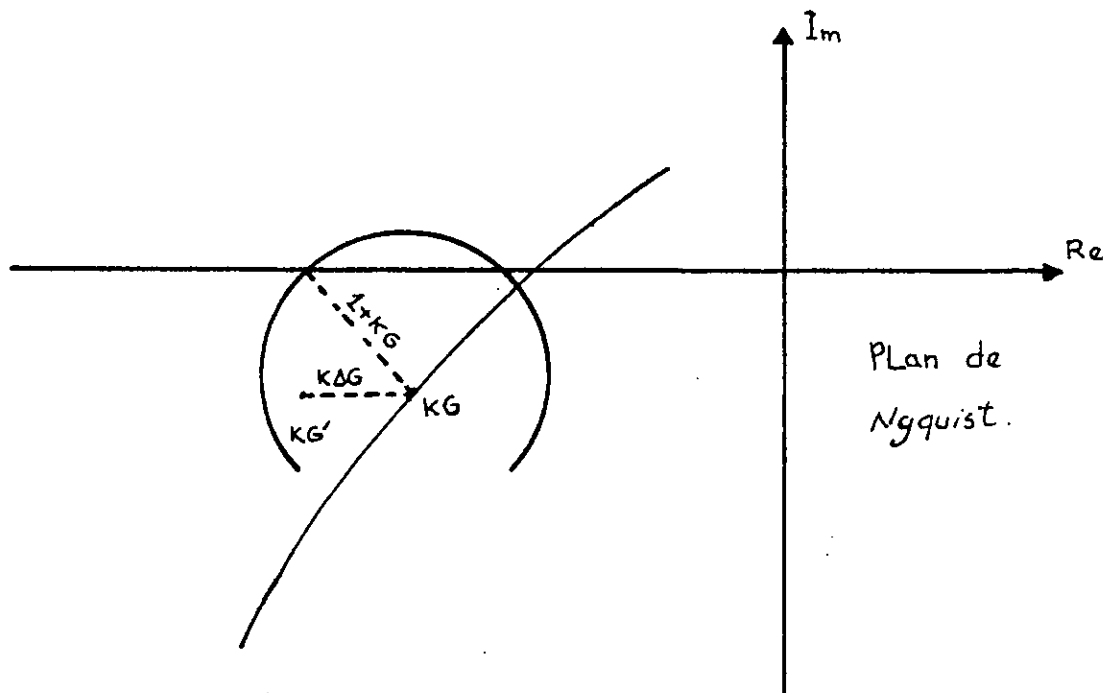


figure 1.8 Condition de stabilité.

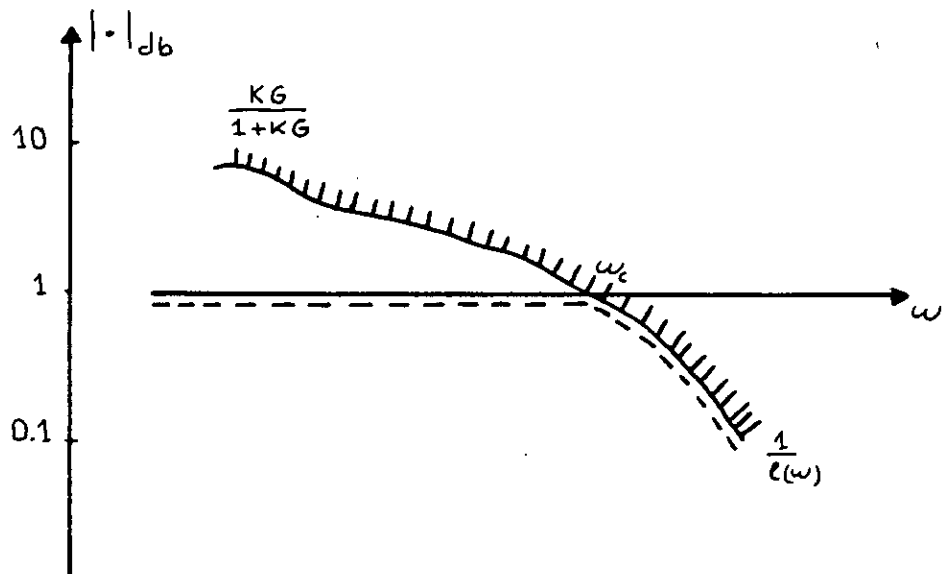


figure 1.9 Limitation de la bande passante par la robustesse.

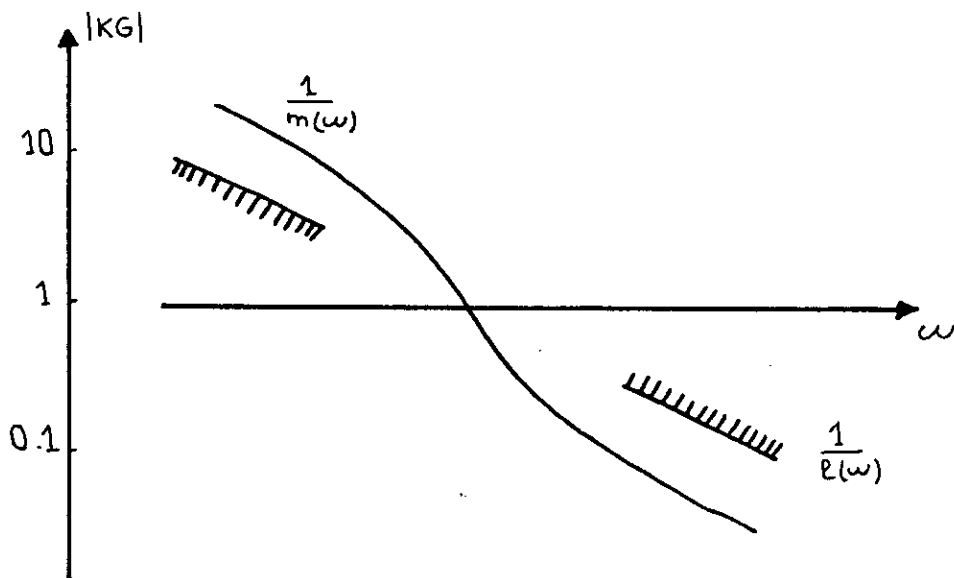


figure 1.10 Gabarit performance-robustesse.

I.3.3.2. L'apport de la norme H_{∞} .

Actuellement, le terme H_{∞} est devenu, dans le jargon de l'automatique, indissociable avec la notion de robustesse. Mais que signifie au juste H_{∞} et quelle est sa relation avec la robustesse.

Définition de la norme H_{∞} .

Définition de la norme H_∞ .

Soit une transmittance stable $X(s)$ scalaire. La norme H_∞ de $X(s)$ est la valeur maximum de la réponse fréquentielle :

$$\| X \|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} | X(j\omega) |$$

L'utilisation de cette contrainte permet l'écriture de la contrainte de stabilité robuste comme suit :

$$\left\| \frac{LkG}{1+kG} \right\|_\infty \leq 1$$

où $L(s)$ est un transfert tel que $| L(j\omega) | = l(\omega)$.

Le problème standard résolu par les théories H_∞ est celui de la synthèse d'un régulateur $k(s)$ qui stabilise un processus $G(s)$, tout en minimisant la norme $\left\| \frac{W}{1+kG} \right\|_\infty$ où W est une pondération fréquentielle, qui est d'ailleurs en relation directe avec $m(\omega)$.

Ce problème à résoudre , où intervient la robustesse, est posé comme suit :

<p>Minimiser $\left\ \frac{LkG}{1+kG} \right\ _\infty$</p> <p>sous la contrainte :</p> <p>$\left\ \frac{LkG}{1+kG} \right\ _\infty \leq 1$</p>
--

1.3.4. Méthodes modernes et robustesse.

Les méthodes dites modernes, en automatique, désignent essentiellement les approches d'état développées à partir de 1959 sous l'impulsion de Kalman, mais dont la pénétration dans le milieu industriel reste encore relativement faible faute d'une connaissance des modalités élémentaires d'application.

I.3.4.1 Le placement de pôles robuste.

Dans la commande par placement de pôles robustes, à l'état brut, les pôles sont spécifiés arbitrairement, à partir des seules considérations de performances, et les commandes qui en résultent sont généralement très peu robustes. Dans le pire des cas, on spécifie des performances assez élevées en régulation et on prévoit un pré-compensateur pour obtenir l'ajustement de la boucle fermée à un modèle de référence qui traduit les performances en poursuite. La stratégie adoptée pour le placement de pôles est la suivante :

1. Les pôles instables en boucle ouverte sont réfléchis par rapport à l'axe imaginaire.
2. Les pôles peu stables sont déplacés encore vers la gauche mais moins on les déplacera, plus la commande sera robuste.
3. On comptera deux (02) fois chacun des pôles de façon à placer $2n$ pôles.

On pourra alors déterminer $k(s)$ par résolution de l'équation de Diophantine. Dans le cas continu, si l'on veut maîtriser tous les pôles en boucle fermée, sous la contrainte d'un régulateur strictement propre, on s'aperçoit qu'il faut obligatoirement en placer alors un nombre égal au moins à $2n$. Par contre dans le cas discret, et si on utilise des polynômes en z^{-1} , on aura l'impression d'être libre de placer un nombre arbitraire de pôles, alors qu'en réalité on en place toujours $2n$, les autres inapparents étant en fait placés à zéro. Si on place uniquement n pôles, selon un usage quasi-universel, il en résulte fatalement un régulateur à gain très élevé non robuste et beaucoup trop sensible au bruit, à moins d'avoir adopté un pas d'échantillonnage relativement grand, ce qui ralentit indirectement les dynamiques de commandes ou de filtrage. On se retrouve alors dans un cas de sur-échantillonnage.

I.3.4.1 Le placement de pôles robuste.

Dans la commande par placement de pôles robustes, à l'état brut, les pôles sont spécifiés arbitrairement, à partir des seules considérations de performances, et les commandes qui en résultent sont généralement très peu robustes. Dans le pire des cas, on spécifie des performances assez élevées en régulation et on prévoit un pré-compensateur pour obtenir l'ajustement de la boucle fermée à un modèle de référence qui traduit les performances en poursuite. La stratégie adoptée pour le placement de pôles est la suivante :

1. Les pôles instables en boucle ouverte sont réfléchis par rapport à l'axe imaginaire.
2. Les pôles peu stables sont déplacés encore vers la gauche mais moins on les déplacera, plus la commande sera robuste.
3. On comptera deux (02) fois chacun des pôles de façon à placer $2n$ pôles.

On pourra alors déterminer $k(s)$ par résolution de l'équation de Diophantine. Dans le cas continu, si l'on veut maîtriser tous les pôles en boucle fermée, sous la contrainte d'un régulateur strictement propre, on s'aperçoit qu'il faut obligatoirement en placer alors un nombre égal au moins à $2n$. Par contre dans le cas discret, et si on utilise des polynômes en z^{-1} , on aura l'impression d'être libre de placer un nombre arbitraire de pôles, alors qu'en réalité on en place toujours $2n$, les autres inapparents étant en fait placés à zéro. Si on place uniquement n pôles, selon un usage quasi-universel, il en résulte fatalement un régulateur à gain très élevé non robuste et beaucoup trop sensible au bruit, à moins d'avoir adopté un pas d'échantillonnage relativement grand, ce qui ralentit indirectement les dynamiques de commandes ou de filtrage. On se retrouve alors dans un cas de sur-échantillonnage.

I.4. Conclusion.

La robustesse est sans doute aucun un critère majeur dans l'industrie, mais la multitude de développements théoriques ne s'en est jamais soucié. On devra surtout s'intéresser aux commandes réputées qualitativement robustes (approches fréquentielles, commande par modèle interne, commande prédictive à long terme, placement de pôles, LQG,...) et également aux facteurs qui engendrent la robustesse (gain raisonnable, pondérations sur les commandes,...). L'objectif le plus ambitieux est de savoir faire la synthèse des commandes performantes et robustes à partir des données relatives aux incertitudes. C'est là un problème épineux pour lequel il n'existe encore que des solutions partielles.

CHAPITRE II

***REGULATEURS
ROBUSTES
A PLACEMENT
DE POLES***

Régulateurs robustes
à placement de pôles
Description de l'approche
de Santos Mendès

II.1 Structure générale:II.1.1 Modèle du processus:

Le processus est modélisé par une équation aux différences linéaire et monovariante décrite par:

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{na} a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^{nb} b_i u(t-d-i) \quad (2.1)$$

où $y(t)$ est la variable de sortie du processus;
 $u(t)$ est la variable de commande du processus;
 $a_i, i \in \{1, \dots, na\}; b_i, i \in \{0, \dots, nb\}$ sont les paramètres du processus;
 na, nb définissent les horizons de récurrence;
 d est le retard pur du processus.

L'utilisation du modèle à temps discret a été privilégiée vu l'utilisation très répandue de l'informatique pour la commande des processus industriels. Cependant, les mêmes résultats peuvent être étendus au cas continu en raison de la similitude entre les équations caractéristiques en boucle fermée des deux représentations. Idem pour la limitation au processus mono-entrée multi-sortie et multi-entrée mono-sortie.

Dans les études classiques de synthèse de régulateurs; na, nb, d et les paramètres a_i et b_i sont considérés connus et constants au long du temps, ce qui est en fait peu réaliste et ce pour deux raisons:

a) En général, un système réel est non linéaire, donc l'approcher par un système linéaire est une simplification qui entraîne des incertitudes sur les paramètres du modèle.

b) En pratique, certaines caractéristiques physiques ou chimiques des composants du processus peuvent varier après un long temps de fonctionnement, ce qui amène des variations des paramètres sur le modèle.

L'approche proposée par Santos-Mendès consiste à calculer un régulateur capable d'assurer une performance convenable pour la plus grande plage possible des variations paramétriques. Par ailleurs, les hypothèses suivantes sont considérées:

i) Les paramètres peuvent changer d'une valeur à une autre brusquement mais avec une fréquence négligeable par rapport aux dynamiques du système.

ii) Les paramètres peuvent varier de façon continue mais assez lentement pour que la dynamique prépondérante puisse être approchée par un système à paramètres constants.

II.1.2 Structure du régulateur:

La loi de la commande est considérée linéaire par rapport aux mesures et à la consigne; c'est à dire qu'à chaque instant $u(t)$ est calculée selon l'équation :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^{nh} h_i u(t-i) - \sum_{i=0}^{ng} g_i y(t-i) - \sum_{i=0}^{ne} e_i w(t-i) \quad (2.2)$$

où $u(t), y(t)$ sont les variables de commande et de sortie du processus;

$w(t)$ est la variable de consigne ;

$h_i, i \in \{1, \dots, nh\}$; $g_i, i \in \{0, \dots, ng\}$; $e_i, i \in \{0, \dots, ne\}$ sont les paramètres du régulateur ;

nh, ng et ne définissent les horizons de récurrence.

Le problème devient alors, celui de calculer les paramètres h_i, g_i et e_i du régulateur tel que les performances du système en boucle fermée soient acceptables malgré les incertitudes paramétriques du processus.

II.1.3 Equations du système en boucle fermée:

En faisant appel à l'opérateur retard z^{-1} , les équations (2.1) et (2.2) peuvent être réécrites sous forme polynomiale. On aura:

$$y(t) = z^{-d} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) \tag{2.3}$$

$$u(t) = - \frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})} y(t) - \frac{E(z^{-1})}{H(z^{-1})} w(t) \tag{2.4}$$

où:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_{n_a} \cdot z^{-n_a} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_{n_b} \cdot z^{-n_b} \\ H(z^{-1}) &= 1 + h_1 \cdot z^{-1} + \dots + h_{n_h} \cdot z^{-n_h} \\ G(z^{-1}) &= g_0 + g_1 \cdot z^{-1} + \dots + g_{n_g} \cdot z^{-n_g} \\ E(z^{-1}) &= e_0 + e_1 \cdot z^{-1} + \dots + e_{n_e} \cdot z^{-n_e} \end{aligned}$$

En substituant (2.4) dans (2.3), on obtient l'équation du système en boucle fermée:

$$y(t) = - \frac{z^{-d} \cdot B \cdot G}{A \cdot H + z^{-d} \cdot B \cdot G} \cdot w(t) \tag{2.5}$$

Les pôles du système en boucle fermée sont définis comme étant les racines du polynôme: $A \cdot H + z^{-d} \cdot B \cdot G$; c'est à dire les valeurs complexes qui vérifient l'équation :

$$A(z^{-1}) \cdot H(z^{-1}) + z^{-d} \cdot B(z^{-1}) \cdot G(z^{-1}) = 0 \tag{2.6}$$

La performance du système est étroitement liée à la localisation de ses pôles. Si les polynômes $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ sont connus, on peut alors calculer $H(z^{-1})$ et $G(z^{-1})$ de manière à

placer les pôles sur des points désirés. Le problème consiste alors à résoudre l'équation suivante dite de Diophantine.

$$A(z^{-1}).H(z^{-1}) + z^{-d}.B(z^{-1}).G(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (2.7)$$

où $T(z^{-1})$ est le polynôme dont les racines sont les pôles désirés et dont le degré est donné par n_t tel que: $n_t = \max \{n_a+n_h, n_b+n_g+d\}$

L'équation (2.7) est réécrite sous forme matricielle de deux manières différentes:

$$M(p') \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ t' \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$X(x') \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ t' \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

où $p' = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_0, \dots, b_{n_b}]^T \in \mathbb{R}^{n_a+n_b+1}$ est le vecteur dont les composantes sont les coefficients des polynômes $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$.

$x' = [h_1, \dots, h_{n_h}, g_0, \dots, g_{n_g}]^T \in \mathbb{R}^{n_h+n_g+1}$, vecteur des coefficients des polynômes $H(z^{-1})$ et $G(z^{-1})$.

$t' = [t_1, \dots, t_{n_t}]^T \in \mathbb{R}^{n_t}$ est le vecteur des coefficients du polynôme $T(z^{-1})$ de degré n_t .

La forme matricielle de $M(p')$ et $X(x')$ est donnée par les représentations suivantes :

$$M(p') = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \text{nh+1} \\ 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 \\ a_{na} & \dots & a_1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{na} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{ng+1} \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 & & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{nb} & \dots & b_0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & b_{nb} \end{matrix} \\ \hline \end{bmatrix}^d$$

$$M(p') \in \mathbb{R}^{(nl+1) \times (nh+ng+2)}$$

$$X(x') = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \text{na+1} \\ 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 \\ h_{nh} & \dots & h_1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{nh} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{nb+1} \\ 0 \\ \vdots \\ g_0 & & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ g_{ng} & \dots & g_0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & g_{ng} \end{matrix} \\ \hline \end{bmatrix}^d$$

$$X(x') \in \mathbb{R}^{(nl+1) \times (na+nb+2)}$$

On peut constater la dualité existante entre les équations (2.8) et (2.9). Ainsi, si le vecteur p' des paramètres du système est connu avec certitude, l'équation (2.8) peut être directement utilisée pour le calcul des paramètres du régulateur.

II.2 Description de la méthode:

II.2.1 Connaissances préliminaires:

Dans la méthode proposée, on suppose connus:

- i) Les degrés des polynômes $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ définis par na , nb et son retard d .
- ii) Une région E dans l'espace euclidéen $\mathbb{R}^{na+nb+1}$ où se trouve

avec certitude le vecteur p' défini par l'équation (2.9). Cet espace est appelé espace paramétrique du vecteur p' .

La région E doit être ellipsoïdale, c'est à dire qu'il doit exister une matrice $Q' > 0$ et un vecteur $p'_c \in \mathbb{R}^{na+nb+1}$ tel que:

$$E = \left\{ p' \in \mathbb{R}^{na+nb+1} / (p' - p'_c)^T \cdot Q' \cdot (p' - p'_c) \leq 1 \right\} \quad (2.10)$$

La description du modèle du système à l'aide d'une région d'appartenance de ses paramètres est beaucoup plus réaliste que l'exigence de la connaissance d'un point exact dans l'espace $\mathbb{R}^{na+nb+1}$.

Le régulateur qui sera calculé devra avoir un comportement acceptable pour n'importe quel point de E (robustesse par rapport aux variations paramétriques limitées à la région E).

II.2.2 Marges de performances acceptables

Selon Jury (1958) et Franklin et Powell (1980), les pôles de l'équation caractéristique du système en boucle fermée définissent la vitesse et la fréquence d'oscillation des transitoires du système. D'autre part, les critères de performances dans l'industrie sont souvent exprimés en termes de stabilité, amortissement, temps de réponse, erreur statique, dépassement, ..., qui sont liés directement à la localisation des pôles du système en boucle fermée. Une région du plan complexe est alors considérée comme connaissance disponible concernant les marges acceptables. Les racines de $T(z^{-1})$ doivent se trouver dans cette région qui sera désignée par D et sa frontière par D^* .

En général, lorsqu'il s'agit d'un système en temps discret, la région D correspondant à une performance acceptable est prise dans le cercle unitaire (stabilité) et de préférence dans le demi-cercle droit.

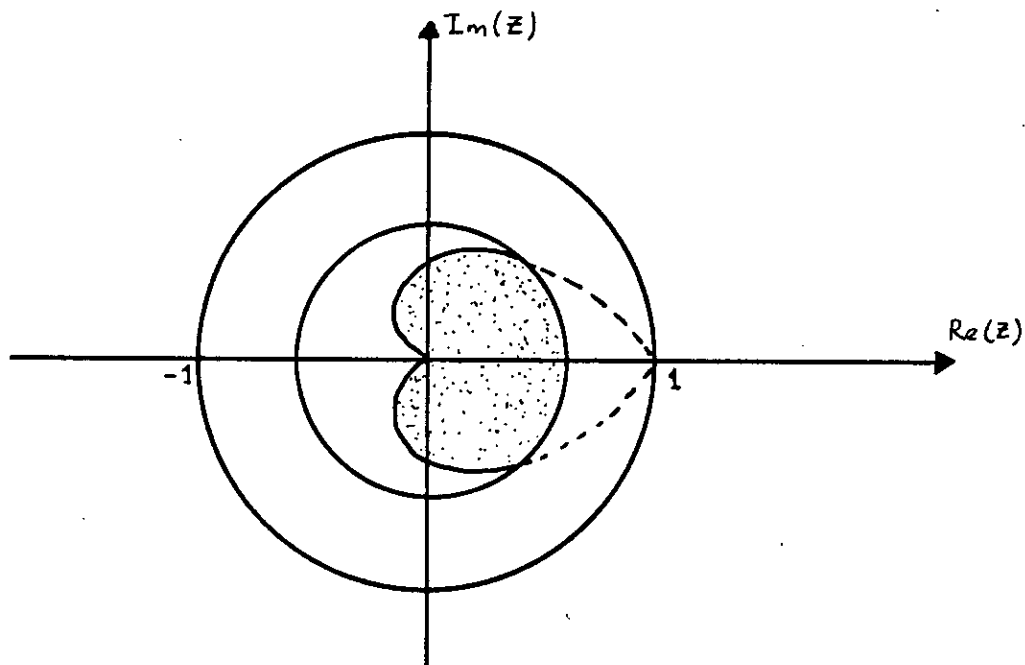


figure 2.1 Région de localisation des pôles
selon Buhler

Le problème de synthèse est de trouver un régulateur tel que, pour n'importe quel paramètre du processus $p \in E$, $T(z^{-1})$ ait ses racines dans la région D . Pour ce faire, une méthodologie a été adoptée.

i) Définir à partir des informations disponibles et pour un régulateur x' donné, la fonction mesure de robustesse associée à la robustesse du régulateur considéré; $m(x')$.

ii) Calculer le gradient de la fonction $m(x')$ par rapport à x' pour maximiser $m(x')$ par rapport à x' .

iii) L'obtention d'une solution analytique du problème de synthèse étant assez délicate, un algorithme itératif est proposé pour pallier à cet handicap. A chaque itération, le régulateur est modifié selon la direction du gradient.

II.2.3 Représentation conique des incertitudes paramétriques.

On peut réécrire les équations (2.8) et (2.9) comme suit:

$$M(p).x = t \tag{2.11}$$

$$X(x).p = t \tag{2.12}$$

avec :

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ p' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{na+nb+2}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ x' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nh+ng+2} \tag{2.13}$$

$$t = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ t' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nl+1}$$

A partir de la région décrite par l'équation (2.10) on construit la région conique définie par :

$$C = \left\{ p \in \mathbb{R}^{na+nb+2} / p^T . Q . p \leq 0 \right\} \tag{2.14}$$

avec :

$$Q = \begin{bmatrix} p_c' . Q' . p_c' - 1 & \dots & - p_c' . Q' \\ \dots & \dots & \dots \\ - Q' . p_c' & \dots & Q' \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

et où :

$$(p' - \hat{p}')^T . P^{-1} . (p' - \hat{p}') \leq a^2 \tag{2.16}$$

a étant un paramètre réel qui dépend de la probabilité β .

Le vecteur \hat{p}' et la matrice P peuvent être interprétés comme étant la moyenne et la matrice de covariance de la densité de probabilité gaussienne du vecteur p'. On définit alors :

$$p_c' = \hat{p}'$$

$$Q' = P^{-1}/a^2.$$

Dans la représentation conique, le vecteur p est exprimé comme étant le produit d'une matrice S par un vecteur q , élément d'un cône $C \in \mathbb{R}^{nq}$ avec $S \in \mathbb{R}^{(na+nb+2) \times nq}$ et $nq \leq na+nb+2$. Ce dernier est égal au nombre de paramètres réellement variants du système et il est appelé degré d'incertitude du modèle.

On aura donc :

$$p = S.q ; q \in C \quad (2.17)$$

$$C = \left\{ q \in \mathbb{R}^{nq} / q^T . Q . q \leq 0 \right\} \quad (2.18)$$

Ces deux équations traduisent les informations à priori sur le processus qui sont entièrement définis par les matrices S et Q . Elles contiennent les connaissances certaines et incertaines respectivement.

Les résultats obtenus pour l'estimation du paramètre p' ont été élargis à l'estimation d'un vecteur $q' \in \mathbb{R}^{nq-1}$.

On obtient alors :

$$E = \left\{ q' \in \mathbb{R}^{nq-1} / (q' - q_c')^T . Q' . (q' - q_c') \leq 0 \right\} \quad (2.19)$$

II.2.3.1 Normalisation des régions coniques

La définition de la mesure de robustesse est liée à la description normalisée des incertitudes paramétriques, c'est à dire qu'il faut procéder à une transformation de coordonnées tel que les incertitudes soient représentées par le cône normalisé décrit par l'équation suivante :

$$C^* = \left\{ q \in \mathbb{R}^{nq} / q^T . Q^* . q \leq 0 \right\} \quad (2.20)$$

où

$$Q^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$$

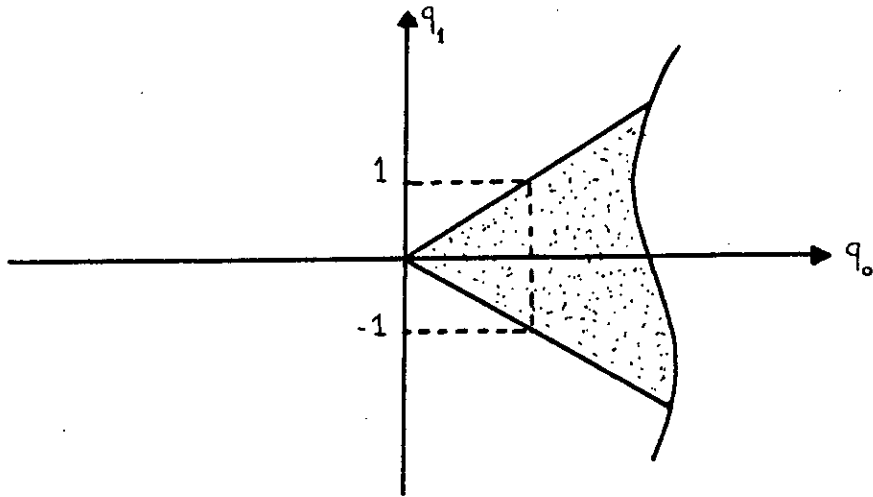


figure 1.2 Cône normalisé bi-dimensionnel.

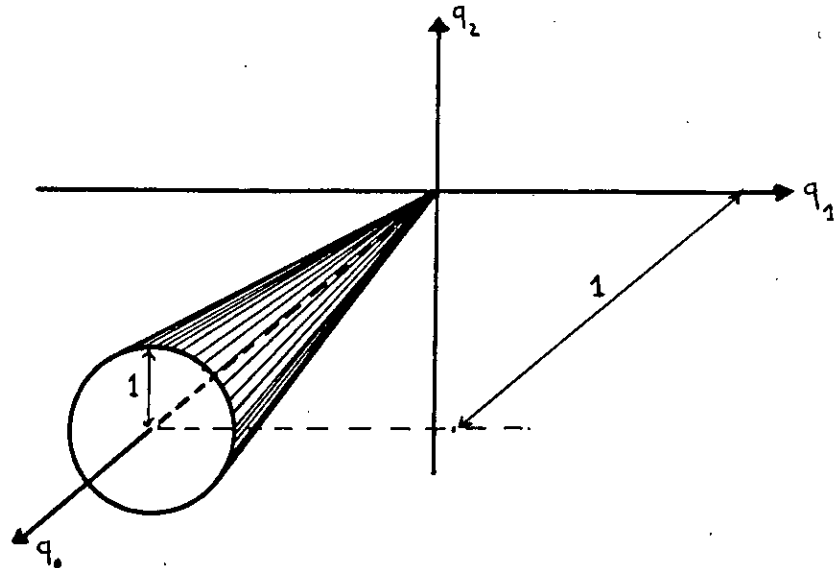


figure 1.3 Cône normalisé tri-dimensionnel.

Après la généralisation des résultats on peut réécrire la matrice Q définie par l'équation (2.15) comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} q_c'^T \cdot Q' \cdot q_c' - 1 & \vdots & -q_c'^T \cdot Q' \\ \dots & \dots & \dots \\ -Q' \cdot q_c' & \vdots & Q' \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

où $Q' \in \mathbb{R}^{(nq-1) \times (nq-1)}$ est une matrice symétrique définie positive.

Une matrice de transformation P dont les colonnes sont une base orthonormée de l'espace \mathbb{R}^{nq} a été définie telle que :

$$P^T \cdot Q \cdot P = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & 0 & \dots & \\ & & & \mu_{nq} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

avec $\mu_1 < 0, \mu_2, \dots, \mu_{nq} > 0$ et $P^T = P^{-1}$.

Les $\mu_i, i \in [1, \dots, nq]$ étant les valeurs propres de Q.

On considère ensuite, la transformation de coordonnées suivante :

$$q^* = B^{-1} \cdot q \quad (2.23)$$

où

$$P^T \cdot Q \cdot P = \begin{bmatrix} (-\mu_1)^{-1/2} & & 0 \\ & (\mu_2)^{-1/2} & \\ & 0 & \dots \\ & & & (\mu_{nq})^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$B = P \cdot \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

D'où l'équivalence ci-après:

$$q^T \cdot Q \cdot q < 0 \quad \rightarrow \quad q^{*T} \cdot Q^* \cdot q^* < 0 \quad (2.25)$$

L'équation (2.17) se réécrit donc comme suit :

$$p = S \cdot q = S \cdot B \cdot q^* = S^* \cdot q^* \quad (2.26)$$

d'où

$$p = S^* \cdot q^* \quad (2.27)$$

$$q^* \in C \quad (2.28)$$

avec $S^* = S \cdot B \quad (2.29)$

Les équations (2.27) et (2.28) représentent à elles seules les connaissances a priori sur le processus, où :

C^* est le cône normalisé défini par l'équation (2.20);

S^* définie par l'équation (2.29) et qui apporte toute l'information sur le processus

II.2.3.2 Mesure de robustesse

En considérant l'équation de placement de pôles (2.12) où le vecteur p est décrit par (2.27) on obtient :

$$X(x).p = X(x).S^*.q^* = t \quad (2.30)$$

Ainsi, à chaque valeur du vecteur régulateur x et à chaque valeur du vecteur $q^* \in C^*$ est associé le polynôme caractéristique du système en boucle fermée $T(z^{-1})$. On notera $T(z^{-1}) = T(x, q^*, z^{-1})$ pour mieux illustrer cette dépendance.

Un vecteur x est solution du problème de synthèse robuste, si quel que soit $q^* \in C^*$, on a :

$$z^{n_t}.T(x, q^*, z^{-1}) = 0 \rightarrow z \in D \quad (2.31)$$

où n_t est le degré du polynôme $T(z^{-1})$.

On considère la famille des cônes coaxiaux et semblables au cône paramétrisé par $\beta \in [0, \pi/2]$ et définie par :

$$C^*(\beta) = \left\{ q^* \in \mathbb{R}^{n_q} / q^{*T}.Q^*(\beta).q^* \leq 0 \right\} \quad (2.32)$$

où

$$Q^*(\beta) = \begin{bmatrix} -tg^2\beta & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Pour le cas bi-dimensionnel, cette famille de cônes est illustrée par la figure suivante :

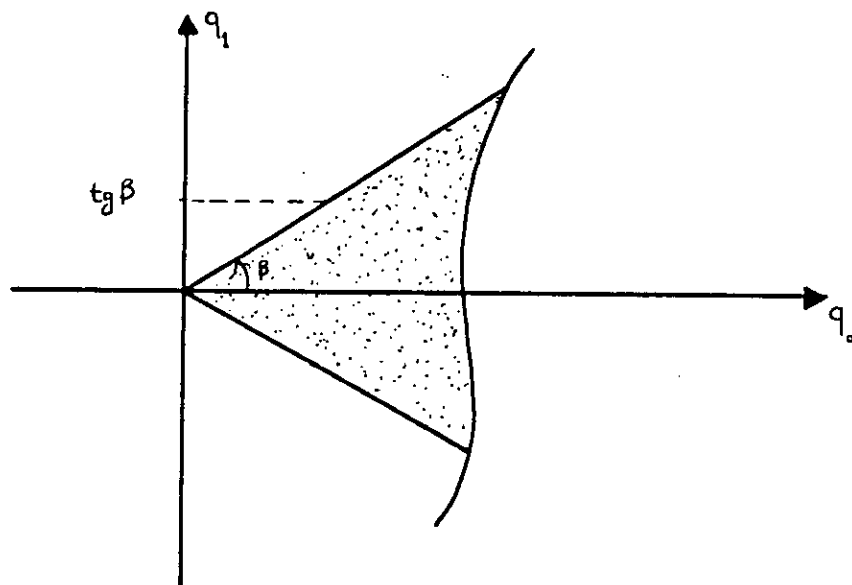


figure 2.4 Famille des cônes $C^*(\beta)$.

Le vecteur q_0^* est l'axe commun à tous les cônes de la famille $C^*(\beta)$. Il est défini par

$$q_0^* = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

Le paramètre β lui considéré comme étant une mesure de l'ouverture du cône, c'est à dire qu'il est l'angle entre q_0^* et chaque élément de la surface du cône $C^*(\beta)$. La robustesse d'un régulateur x donné est associée au paramètre β correspondant au plus grand cône de la famille $C^*(\beta)$ tel que l'équation (2.31) soit vérifiée. En d'autres termes, la robustesse d'un régulateur x est associée à la plus grande variation paramétrique du processus tel que les pôles du système en boucle fermée demeurent toujours dans la région D spécifiée dans le plan complexe.

II.2.3.2.1 Robustesse locale

Une fonction mesure de robustesse locale a été introduite telle que $m(x) = \sin^2 \beta$ (2.33)

où β est l'angle d'ouverture du plus grand cône $C^*(\beta)$. On définit également l'ensemble W de tous les régulateurs x tel que le polynôme ait ses toutes racines dans la région D .

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n_h+n_g+2} / z^n \cdot T(x, q_0^*, z^{-1}) = 0 \Rightarrow z \in D \right\} \quad (2.34)$$

La mesure de robustesse locale du régulateur $x \in W$ par rapport à un point $z \in D^*$ est définie comme étant le paramètre β associé au plus grand cône de $C^*(\beta)$ tel que :

$$z^n \cdot T(x, q^*, z^{-1}) \neq 0 \quad \forall q^* \in C^*(\beta)$$

En utilisant (2.33) on aura finalement :

$$m(x, z) = \sin^2 \beta \quad (2.35)$$

En conclusion, la plus petite mesure de robustesse locale est en fait la mesure de robustesse globale du régulateur x . En d'autres termes :

$$m(x) = \min_{z \in D^*} m(x, z) \quad (2.36)$$

II.2.3.2 Calcul de la mesure de robustesse locale et globale

Initialement, on considère la matrice $V(z)$ définie comme suit:

$$V^T(z) = \begin{bmatrix} \dots & u^T(z) & \dots \\ \dots & v^T(z) & \dots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times (nt+1)} \quad (2.37)$$

où

$$\begin{aligned} u^T(z) &= [\operatorname{Re}(z^{nt}) \quad \operatorname{Re}(z^{nt-1}) \dots \operatorname{Re}(z) \quad 1] \\ v^T(z) &= [\operatorname{Im}(z^{nt}) \quad \operatorname{Im}(z^{nt-1}) \dots \operatorname{Im}(z) \quad 0] \end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation (2.30) on obtient :

$$V^T(z) \cdot t = V^T(z) \cdot X \cdot S^* \cdot q^* = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} [z^{nt} T(x, q^*, z^{-1})] \\ \operatorname{Im} [z^{nt} T(x, q^*, z^{-1})] \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

De cette équation, on déduit que le nombre complexe z est racine du polynôme $T(z^{-1})$ si et seulement si :

$$V^T(z) \cdot X \cdot S^* \cdot q^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Une matrice U est définie telle que :

$$U^T(x, z) = V^T(z) \cdot X \cdot S^* \quad (2.40)$$

On aura alors:

$$z^{nt} \cdot T(x, q^*, z^{-1}) = 0 \iff q^* \in \ker [U^T(x, z)] \quad (2.41)$$

où $\ker [U^T(x, z)]$ est le noyau de $U^T \in \mathbb{R}^{2 \times nq}$.

L'apport de l'équation (2.41) nous permet de réécrire la définition de β tel que:

β est l'angle d'ouverture du plus grand cône de la famille $C^*(\beta)$ tel que $C^*(\beta) \cap \ker(U^T) \equiv \emptyset$.

Le calcul analytique de la mesure de robustesse globale revient donc à minimiser la mesure locale, autrement dit:

$$m(x) = \min_{z \in D^*} m(x, z)$$

où $m(x, z)$ est donnée par l'équation ci-après :

$$m(x, z) = \frac{k^T \cdot U^T \cdot q_o^* \cdot q_o^{*T} \cdot U \cdot k}{k^T \cdot U^T \cdot U \cdot k} \quad (2.42)$$

avec $q^* = U(x, z) \cdot k \quad (2.43)$

$$k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \text{ est un vecteur quelconque de } \mathbb{R}^2 .$$

Le problème de maximisation défini par (2.42), dépend uniquement de x , q_o^* , z et de S^* . Sa solution est obtenue en considérant deux cas :

1^{er} cas : La matrice $U^T \cdot U$ est singulière.

$$m(x, z) = \frac{u^T \cdot X \cdot S^* \cdot q_o^* \cdot q_o^{*T} \cdot S^{*T} \cdot X^T \cdot u}{u^T \cdot X \cdot S^* \cdot S^{*T} \cdot X^T \cdot u} \quad (2.44)$$

2^{ème} cas : La matrice $U^T \cdot U$ n'est pas singulière.

$$m(x, z) = \frac{a_1^2 \cdot b^T \cdot b - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot a^T \cdot b + b_1^2 \cdot a^T \cdot a}{a^T \cdot a \cdot b^T \cdot b - a^T \cdot b \cdot a^T \cdot b} \quad (2.45)$$

où

$$a^T = u^T(z) \cdot X \cdot S^*$$

$$b^T = v^T(z) \cdot X \cdot S^*$$

$$a_1 = a^T \cdot q_o^*$$

$$b_1 = b^T \cdot q_o^*$$

II.2.3.2.3 Algorithme de calcul de $m(x)$

En considérant l'équation (2.36), on peut paramétriser le contour D^* par une variable $\theta \in [0, 2\pi]$ tel qu'il est illustré dans la figure ci-dessous :

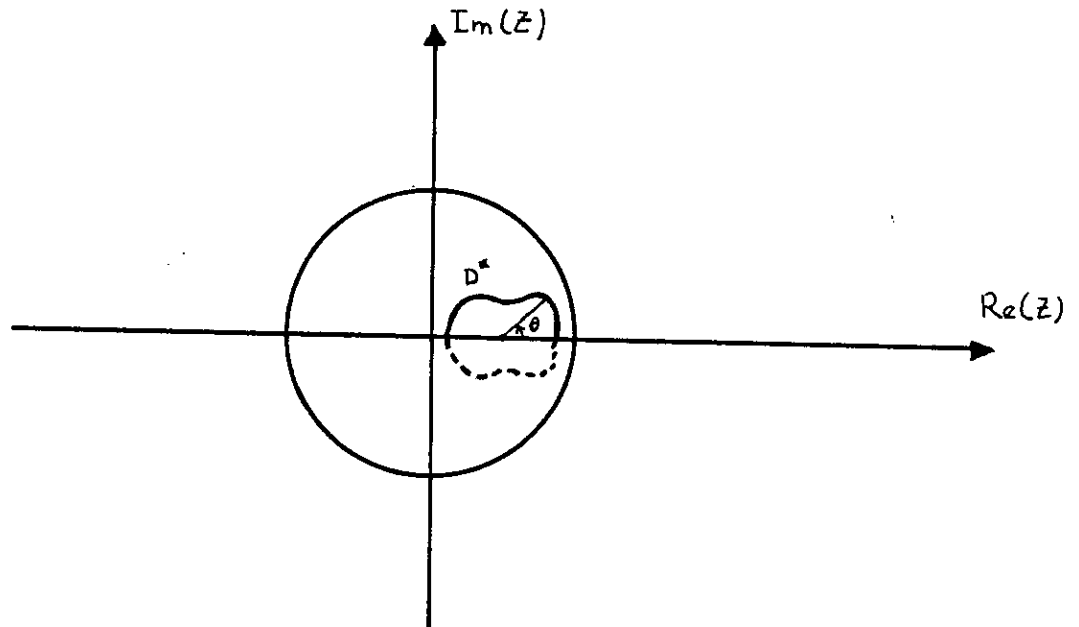


figure 2.4 Paramétrisation du contour D^* .

L'ensemble des nombres complexes D^* peut être décrit ainsi :

$$D^* = \left\{ z \in \mathbb{C} / z = z(\theta); \theta \in [0, 2\pi] \right\} \quad (2.46)$$

Sachant que la mesure de robustesse locale par rapport à un nombre complexe z ne change pas si elle est calculée par rapport à son conjugué, on se limite alors à la vérification de la moitié du contour D uniquement, d'où :

$$m(x) = \min_{0 \leq \theta \leq \pi} m(x, \theta)$$

où $m(x, \theta)$ est une écriture abrégée de $m(x, z(\theta))$.

La précision du résultat obtenu dépend du nombre de points analysés sur le contour D^* .

L'algorithme suivant est proposé pour l'évaluation de la fonction mesure de robustesse d'un régulateur donné.

Algorithme I.

i). Initialisation

$$m(x)=1; k=0;$$

ii). Générer un nombre de points fini de $z(\theta) \in D^*$.

$$\theta = \frac{\Pi.k}{N} ;$$

iii). Calcul de la valeur de la fonction $m(x, \theta_k)$;

iv). Minimisation de $m(x)$.

$$\text{si } m(x, \theta_k) < m(x, \theta_{k-1}) \quad \text{alors} \quad m(x) = m(x_k, \theta_k);$$

v). Test d'arrêt.

si $k < N$ alors $k=k+1$ et aller à ii)

sinon arrêter l'algorithme.

Conclusion.

La comparaison entre la région conique normalisée (2.20) et la famille des cônes (2.32) a permis de conclure qu'un régulateur x est solution du problème de synthèse robuste si et seulement si

$$m(x) = 1/2 \quad (2.48)$$

Lorsque la mesure de robustesse d'un régulateur est différente de cette valeur, on peut dire qu'il est associé à une région de l'espace paramétrique du système pour laquelle les marges de performances acceptables sont assurées. En d'autres termes, la mesure $m(x)$ est associée à la plus grande variation paramétrique du processus telle qu'on peut garantir l'inexistence de pôles en boucle fermée en dehors de la région spécifiée D .

II.2.4. Synthèse de régulateurs robustes.

Conformément aux résultats du paragraphe précédent, un régulateur est solution du problème si sa mesure de robustesse est supérieure à $1/2$. Et plus la mesure est grande plus le régulateur est robuste.

Le problème devient alors celui d'optimiser l'expression suivante:

$$\max_{x \in W} m(x)$$

ou encore:

$$\max_{x \in W} \min_{0 \leq \theta \leq \pi} m(x, \theta) \quad (2.49)$$

Pour résoudre ce problème, la méthode itérative du gradient a été utilisée. Elle doit être initialisée par un régulateur $x_0 \in W$, puis à chaque pas gradient de la fonction $m(x)$ est calculé et le vecteur x est modifié suivant la direction du gradient. Dans certains cas le gradient peut ne pas exister pour certaines valeurs du vecteur x . Une autre direction de modification est alors calculée.

II.4.2.1. Calcul du gradient de la fonction $m(x)$.

L'expression de la fonction mesure de robustesse donnée par l'équation (2.47) peut être exprimée comme suit :

$$m(x) = \min_{0 \leq \theta \leq \pi} \max_k f(x, \theta, k) \quad (2.50)$$

où la fonction $f(x, \theta, k)$ est donnée par l'expression suivante :

$$f(x, \theta, k) = \frac{x^T [M_1^T \cdot (k_1 u^T + k_2 v^T) \cdot (k_1 u + k_2 v) \cdot M_2] \cdot x}{x^T [\sum_{i=1}^{nq} M_i^T \cdot (k_1 u^T + k_2 v^T) \cdot (k_1 u + k_2 v) \cdot M_i] \cdot x} \quad (2.51)$$

où $M_i, i \in [1, \dots, nq]$ est la matrice $M(p_i)$ obtenue conformément aux équations (2.8) et (2.9) à partir de la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice S^* .

La fonction $m(x)$ peut être réécrite comme suit :

$$m(x) = f(x, \theta(x), k(x, \theta(x))) \quad (2.52)$$

où :

$k(x, \theta)$ est la valeur du vecteur k qui maximise la fonction $f(x, \theta, k)$ pour x et θ donnés.

$\theta(x)$ étant la valeur de θ qui minimise la fonction $m(x, \theta)$ pour une valeur de x donnée.

En dérivant l'équation (2.52) par rapport à x , on a :

$$\frac{dm}{dx} = \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta \theta} \frac{\delta \theta}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta k} \left[\frac{\delta k}{\delta \theta} \frac{\delta \theta}{\delta x} + \frac{\delta k}{\delta x} \right] \quad (2.53)$$

L'existence du gradient est conditionnée par celle de toutes les dérivées apparaissant dans cette équation. Soit x^* un point pour lequel le gradient existe. On a alors :

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{\substack{x = x^* \\ \theta = \theta(x^*) \\ k = k(x^*, \theta(x^*))}} = \left. \frac{\delta f}{\delta k} \right|_{\substack{x = x^* \\ \theta = \theta(x^*) \\ k = k(x^*, \theta(x^*))}} \quad (2.54)$$

Et ce en raison du fait que $f(x^*, \theta, k)$ est maximisée d'abord par rapport à k puis minimisée par rapport à θ .

On obtient finalement :

$$\left. \frac{\delta m}{\delta x} \right|_{x = x^*} = \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{\substack{x = x^* \\ \theta = \theta(x^*) \\ k = k(x^*, \theta(x^*))}} \quad (2.55)$$

La dérivée partielle de $f(x, \theta, k)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{2 [R.x - m(x).Y.x]}{x^T . Y . x} \quad (2.56)$$

où :

$$f(x, \theta, k) = \frac{x^T . R(\theta, k) . x}{x^T . Y(\theta, k) . x} \quad (2.57)$$

avec :

$$R(\theta, k) = M_1^T \cdot (k_1 u^T + k_2 v^T) \cdot (k_1 u + k_2 v) \cdot M_1 \quad (2.58)$$

$$Y(\theta, k) = \sum_{i=1}^{nq} M_i^T (k_1 u^T + k_2 v^T) \cdot (k_1 u + k_2 v) \cdot M_i \quad (2.59)$$

A partir de l'équation (2.56), on définit un vecteur Q_1 de module unitaire qui sera utilisé dans l'algorithme de synthèse robuste comme direction de modification du vecteur x en cas d'existence du gradient.

$$Q_1 = \frac{[R.x - m(x).Y.x]}{\| [R.x - m(x).Y.x] \|} \quad (2.60)$$

Dans le cas où le gradient n'existe pas, une autre direction de modification est proposée. Elle est donnée par le vecteur Γ exprimé comme suit :

$$\Gamma = N^T \cdot (N \cdot N^T)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

où :

$$N = \begin{bmatrix} Q_1^T \\ \vdots \\ Q_n^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(nh+ng+2) \times n} \quad (2.62)$$

Il est à noter que la direction de modification définie par Γ coïncide avec celle du gradient lorsqu'il existe.

II.4.2.2. Algorithme de synthèse des régulateurs robustes.

L'algorithme proposé est de type itératif. A chaque pas, le vecteur x (paramètres du régulateur) est modifié suivant la direction de Γ définie par l'équation (2.61).

Algorithme II.

i). Initialiser avec un vecteur quelconque $x_0 \in W$;

Pour le x actuel ;

ii). Calculer la mesure de robustesse du régulateur x_k , donnée par $m(x_k)$, en utilisant l'algorithme I.

iii). Calculer le vecteur Γ_k , défini par l'équation (2.61).

iv). $x_{k+1} = x_k + \text{gain} \cdot \Gamma_k$, où gain est un scalaire positif et suffisamment petit pour que $m(x_{k+1}) > m(x_k)$;

v). $k = k+1$ et aller l'étape ii).

Test d'arrêt.

L'algorithme s'arrêtera dans l'un des deux cas suivants :

- a). Le vecteur (gain $\cdot \Gamma_k$) est nul .
- b). Le calcul du vecteur Γ_k est impossible.

Le gain de l'algorithme est pris constant. Néanmoins, il peut être calculé à chaque pas de façon à accélérer la convergence de l'algorithme (Powell, 1986).

Dans le cas où on n'aboutit pas à une solution acceptable, on peut envisager les cas suivants :

- Relancer l'algorithme avec une nouvelle valeur initiale x_0
- Modifier la structure du régulateur ;
- Modifier les données initiales.

CHAPITRE III

***APPLICATION
ET SIMULATION
DE L'APPROCHE
ETUDIEE***

Application de l'approche de Santos-Mendès

La stratégie du placement de pôles permet de calculer un régulateur numérique de type G-H-E (Landau, 1988) pour des systèmes stables ou instables. Il n'y a de restriction ni sur les degrés des polynômes $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ de la fonction de transfert du procédé ni encore moins sur le retard du même procédé.

III.1 Structure.

Le schéma fonctionnel traduisant l'équation (2.1) est illustré par la figure suivante :

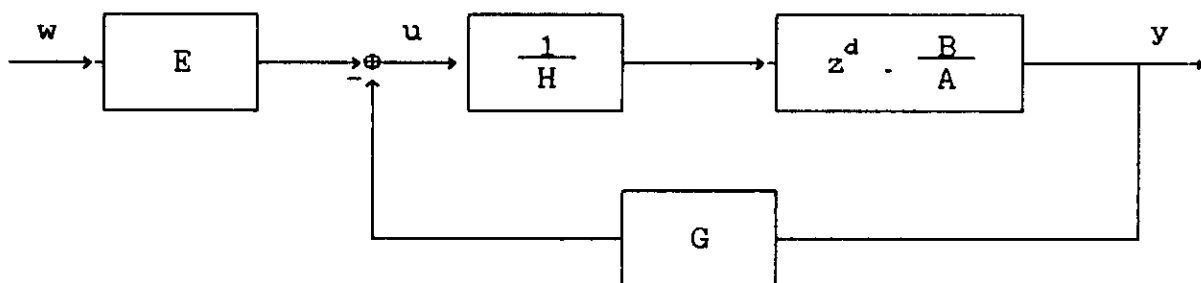


Figure 3.1

Le choix étant porté sur un PID numérique, on se retrouve alors dans le cas de l'asservissement d'un système en boucle fermée avec retour unitaire, ce qui nous donne le diagramme suivant:

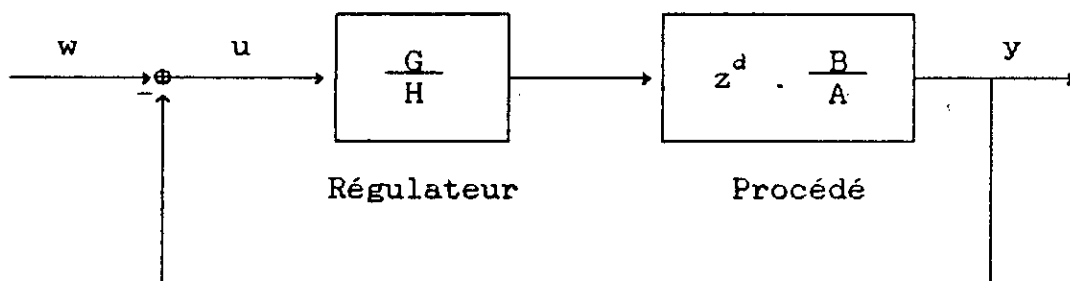


figure 3.2

D'où on tire la fonction de transfert du système en boucle fermée:

$$F^*(z^{-1}) = y/w = \frac{\frac{G}{H} \cdot z^{-d} \cdot \frac{B}{A}}{1 + \frac{G}{H} \cdot z^{-d} \cdot \frac{A}{B}} \quad (3.1)$$

$$F^*(z^{-1}) = \frac{z^{-d} \cdot B \cdot G}{A \cdot H + z^{-d} \cdot B \cdot G} \quad (3.2)$$

A partir de cette fonction, on tire l'équation caractéristique :

$$T(z^{-1}) = 1 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \dots \quad (3.3)$$

Elle définit respectivement les pôles en boucle fermée et le comportement en régulation. On peut également spécifier $T(z^{-1})$ à partir des performances désirées.

Présentation du modèle.

On considère le système échantillonné décrit par l'équation suivante :

$$y(t) = \frac{z^{-1} \cdot b}{1 + a \cdot z^{-1}} \quad (3.4)$$

Le paramètre b est constant alors que a est connu avec imprécision. Ce dernier peut varier sur la plage suivante :

$$\begin{aligned} -0.75 \leq a \leq -0.25 \\ b = 0.5 \end{aligned} \quad (3.2)$$

III.2 Régulation.

Calcul de $H(z^{-1})$ et $G(z^{-1})$:

$T(z^{-1})$ étant spécifié, pour calculer H et G , il faut résoudre l'équation :

$$A \cdot H + z^{-d} \cdot B \cdot G = T \quad (3.5)$$

Pour que cette équation polynomiale admette une solution unique, il faut que :

$$\text{deg } G \geq \text{deg } (A) - 1$$

$$\text{deg } H \geq \text{deg } (B) - 1$$

Pour une réalisation minimale, on prend la limite de l'égalité. La solution effective de l'équation (3.5) revient à résoudre l'équation matricielle donnée par (2.9).

$$M \cdot x = t \implies x = M^{-1} t \quad (3.6)$$

Structure du régulateur.

La structure choisie est celle d'un régulateur PI donnée par l'équation ci-après (Buhler, 1982) :

$$u(t) = \frac{g_0 + g_1 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} y(t) + \frac{g_0 + g_1 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} w(t) \quad (3.7)$$

Ce choix est justifié par le fait qu'il faut choisir le régulateur de telle sorte à placer les pôles désirés dans la région D spécifiée en vue d'atteindre les performances voulues et acceptables. Cette région est illustrée par la figure suivante :

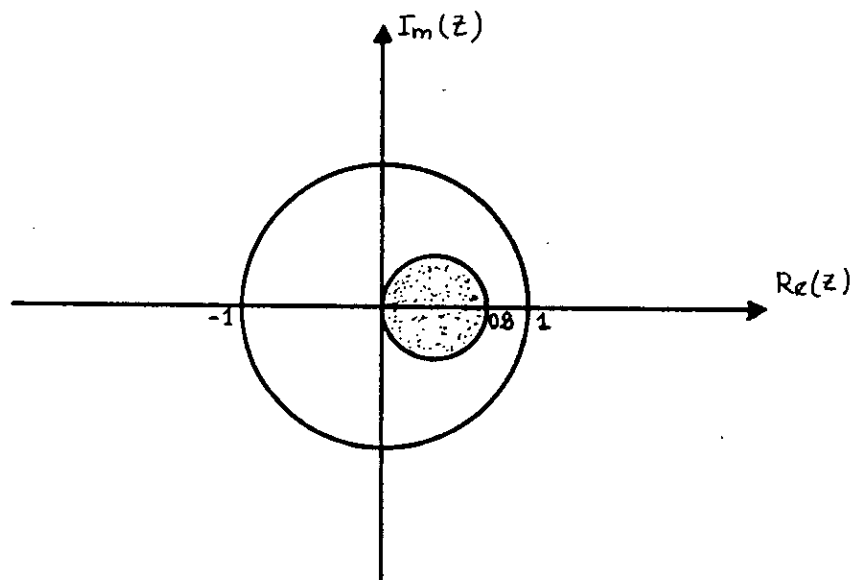


Figure 3.3

La présence d'une erreur statique exige forcément l'introduction d'une action intégrale. Ainsi, pour avoir une erreur statique nulle à une entrée ou à une perturbation échelon, la voie directe (H) doit contenir un integrateur.

L'introduction de cet integrateur affecte directement la fonction de transfert du système en boucle fermée. On aura :

$$F_{BF}^* (z^{-1}) = \frac{R.P}{1+R.P} \quad (3.8)$$

où

$$P(z^{-1}) = \frac{b.z^{-1}}{1+a.z^{-1}} \quad (3.9)$$

$$R(z^{-1}) = \frac{g_0 + g_1.z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (3.10)$$

$$F^* (z^{-1}) = \frac{b.z^{-1}(g_0 + g_1.z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+z^{-1}) + b.z^{-1}(g_0 + g_1.z^{-1})}$$

$$F^* (z^{-1}) = \frac{b.z^{-1}(g_0 + g_1.z^{-1})}{1 + (a-1+bg_0)z^{-1} + bz^{-1}(g_0 + g_1.z^{-1})} \quad (3.11)$$

Le polynôme $A(z^{-1})$ devient $A'(z^{-1})$ dont l'ordre a augmenté d'un degré :

$$A'(z^{-1}) = 1 + (a-1)z^{-1} + a.z^{-2}$$

L'équation caractéristique résultante est :

$$T'(z^{-1}) = 1 + (a-1+bg_0)z^{-1} + (bg_1-a).z^{-2} \quad (3.12)$$

En faisant une analogie entre le polynôme imposé $T(z^{-1})$ et l'équation (3.12), on obtient les équivalences suivantes :

$$t_1 = (a - 1) + b.g_0$$

$$t_2 = b.g_1 - a_1$$

Ces changements tant au niveau des paramètres du processus qu'au niveau du régulateur doivent nécessairement être pris en considération lors de la résolution de la forme matricielle de l'équation de Diophantine.

Imposition des pôles.

On choisit les pôles du système en boucle fermée de façon à ce qu'ils se localisent dans la région D décrite précédemment. Soit :

$$t = [1 \quad -0.525 \quad 0.085 \quad 0]^T$$

Résolution de l'équation de Diophantine.

La résolution de l'équation de Diophantine sous forme matricielle donnée par l'équation (2.8) nous donne

$$G(z^{-1}) = 1.95 - 0.83 z^{-1}$$

Ce vecteur peut être considéré comme le régulateur initial puisqu'il appartient à l'ensemble W décrit par l'équation (2.34).

III.3. Connaissances sur le processus.

Le vecteur p contenant les paramètres du processus s'écrit comme suit :

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

Et puisque b est connu avec certitude, on peut donc réécrire le vecteur p ainsi :

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

En tenant compte de l'existence d'une action intégrale dans le régulateur et de son influence sur le vecteur des paramètres du système, on peut réécrire p de la façon suivante :

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+a \\ -a \\ b \end{bmatrix}$$

ou encore

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

Sachant que $p = S \cdot q$ on déduit que $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$.

Cette matrice contient en fait toute l'information incertaine sur le procesus.

III.4 Description de la région conique.

L'inéquation (3.2) peut être réécrite de la façon suivante :

$$(a + 0.5)^2 \leq 16 + (0.25)^2$$

ou encore :

$$(a + 0.5) \cdot 16 \cdot (a + 0.5) \leq 1$$

Cette inéquation qui est de type ellipsoïdal décrit en fait la région ellipsoïdale décrite par l'équation (2.19). On obtient alors :

$$\begin{aligned} q' &= a \\ q'_c &= -0.5 \\ Q' &= 16 \end{aligned}$$

La région associée à cette ellipsoïde est donnée par l'équation suivante :

$$C = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 / q^T \cdot Q \cdot q \leq 0 \right\}$$

avec :

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$$

Ainsi donc, toutes les connaissances à priori sur le processus sont portées par les matrices S^* et Q .

La matrice S^* qui contient, elle, toute l'information sur le système est obtenue après transformation des coordonnées citées dans le paragraphe II.2.3.1. On obtient alors :

$$S^* = \begin{bmatrix} 1.0047 & 0.0966 \\ -1.4828 & 0.1063 \\ 0.4782 & -0.2029 \\ 0.5023 & 0.0483 \end{bmatrix}$$

A partir de cette matrice on peut obtenir le vecteur nominal des paramètres du système : $p_o = S^* \cdot q_o$

On aura :

$$p_o = \begin{bmatrix} 1.0047 \\ -1.4828 \\ 0.4782 \\ 0.5023 \end{bmatrix}$$

L'obtention de ce vecteur nous permet de statuer sur sur l'appartenance du régulateur choisi au domaine W décrit par l'équation (2.34).

III.5. Simulation

Le régulateur considéré appartient en effet à ce domaine puisque les pôles en boucle fermées sont localisés dans la région D prescrite.

La réponse indicielle du système en boucle fermée avec le régulateur initial est illustrée par la figure ci-après :

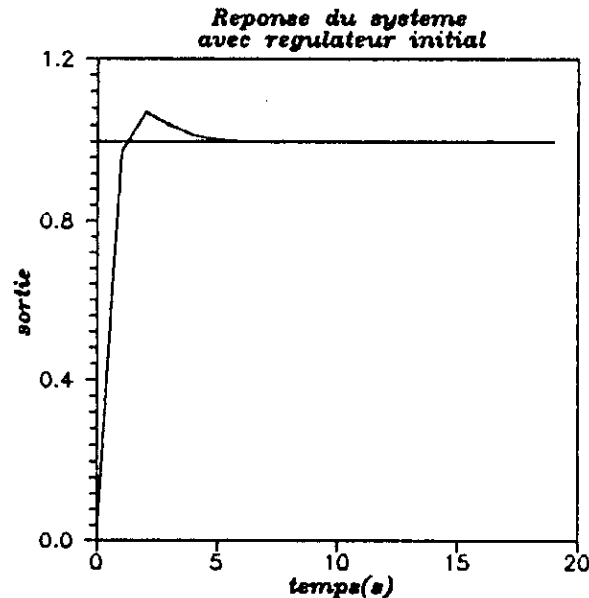


figure 3.4

On constate que la réponse est assez rapide mais elle présente néanmoins un dépassement de l'ordre de 7.2 % qu'on essayera d'éliminer.

L'apport d'une action intégrale s'impose, alors, dans ce cas. Le choix du régulateur fait auparavant n'est donc pas fortuit.

Le régulateur initial est maintenant injecté dans l'algorithme II. Le régulateur final obtenu est le suivant :

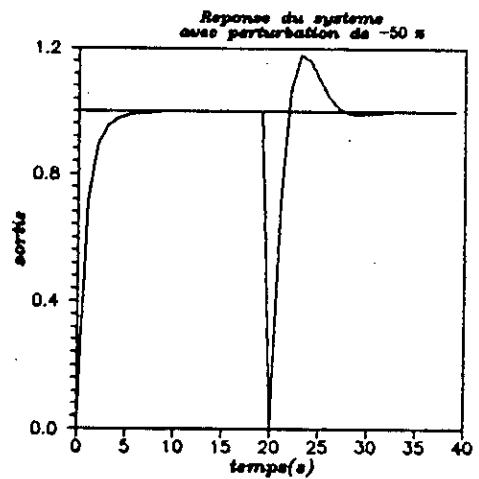
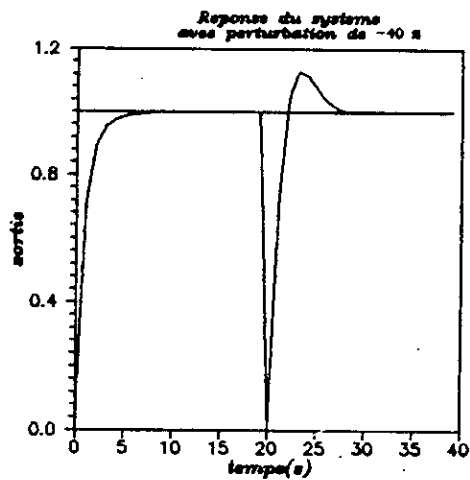
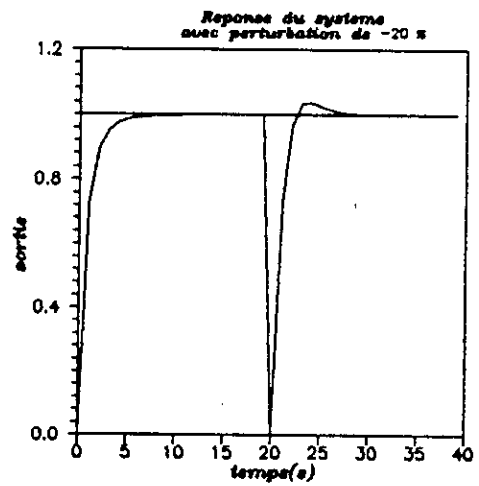
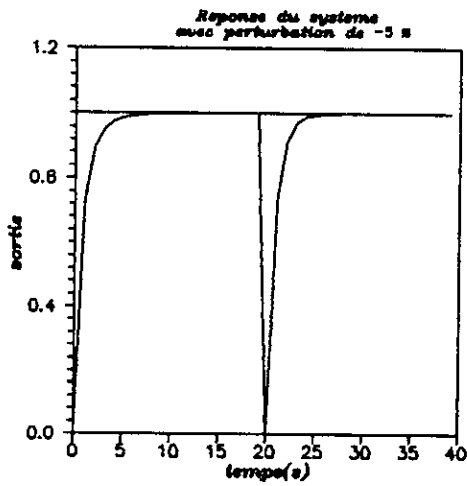
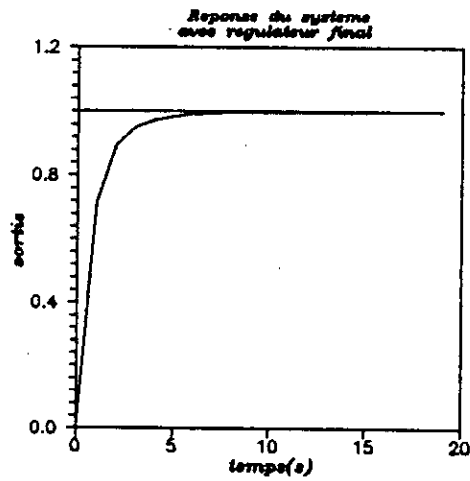
$$G(z^{-1}) = 1.4281 - 0.7611 z^{-1}$$

Sa mesure de robustesse est donnée par :

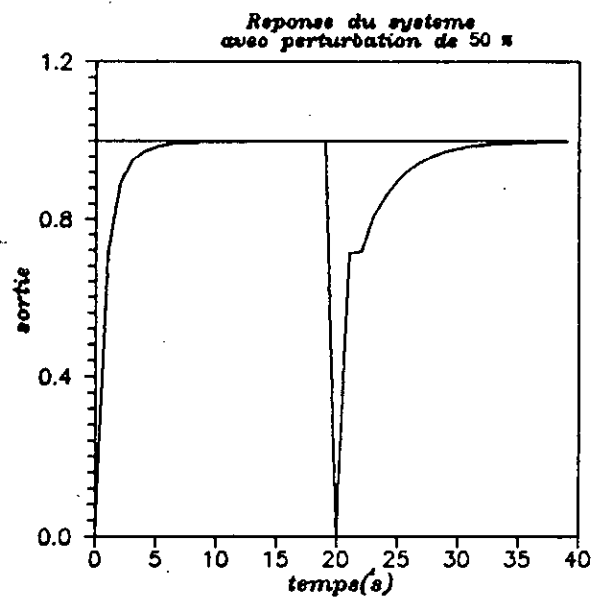
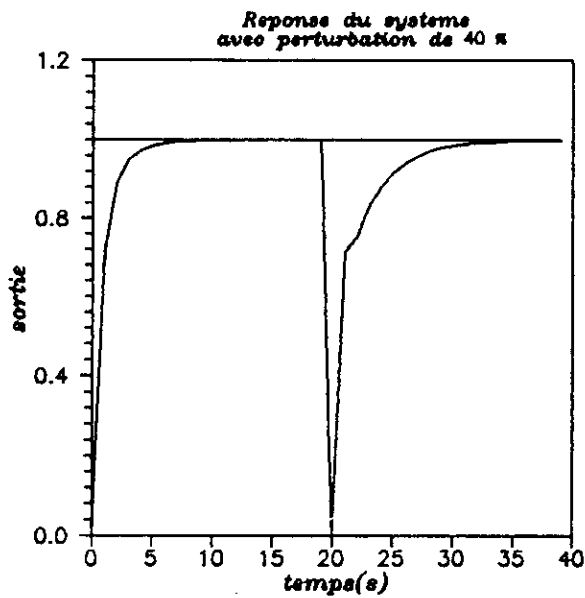
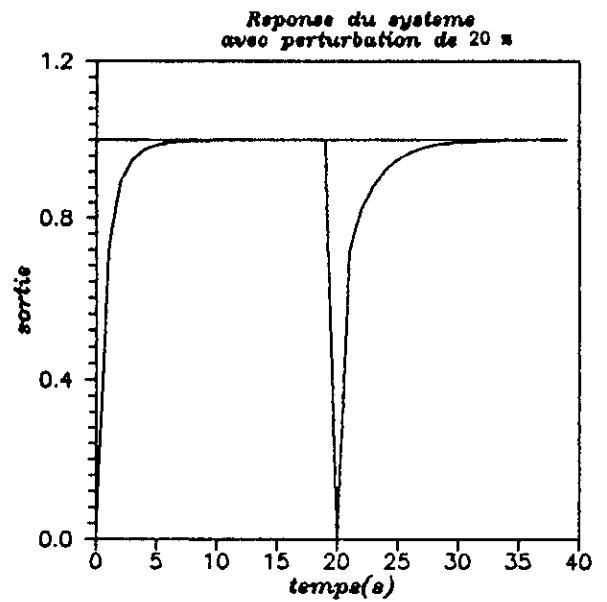
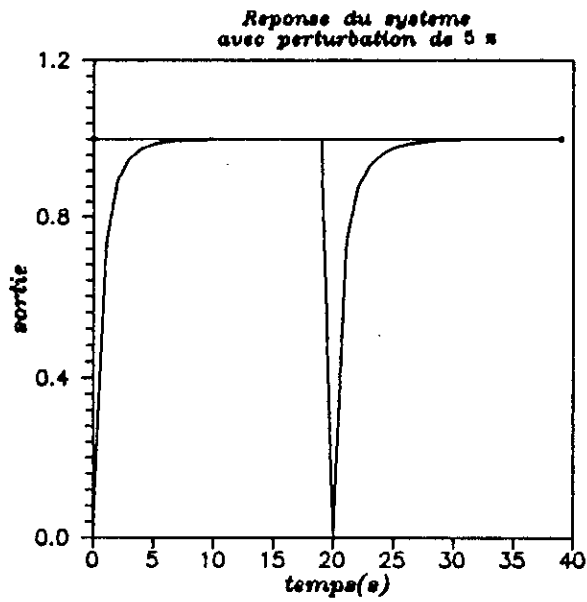
$$m(x) = 0.546$$

Conformément aux résultats du paragraphe II.2.3 et vu que sa mesure est supérieure à 0.5, on peut dire que ce régulateur est robuste et est solution du problème de synthèse robuste.

La simulation du système en boucle fermée avec le nouveau régulateur (réponse indicielle) avec et sans introduction des perturbations structurelles au cours de l'évolution du processus nous donne les résultats qui sont illustrés sur les figures ci-après :



Simulation du systeme considers



Simulation du systeme considere

III.6 Résultats et commentaires.

Les bons résultats obtenus en simulation nous permettent de statuer sur la fiabilité de la méthode utilisée. En effet, et à travers les figures présentées, on constate que la réponse du système boucle fermée, régulé par le régulateur trouvé, reste insensible aux variations paramétriques et ce au cours de l'évolution de la simulation. Le dépassement qu'on a relevé auparavant est également éliminé.

On remarque, toutefois, que le sens de variation des paramètres par rapport à la valeur nominale (jusqu'à $\pm 50\%$) influe sur la réponse du système. On distingue deux cas possibles :

1. Pour des variations dans le sens négatif, on constate que le régulateur tarde à corriger la perturbation introduite. Ceci s'explique par le fait que le pôle tend à se retrouver dans la région d'instabilité d'où l'apparition d'une oscillation entretenue. Mais, on voit que le régulateur se ressaisit par la suite pour corriger cette perturbation.

2. Dans le cas des variations dans le sens positif, la correction de la perturbation est immédiate et on se retrouve constamment dans la région de stabilité. Mais, pour de grandes variations, la perturbation s'apparente à un integrateur car le paramètre variable tend de plus en plus vers zéro.

Influence du choix des pôles.

Le choix des pôles agit directement sur le choix du régulateur initial lequel est obtenu à partir de la résolution de l'équation de Diophantine. L'imposition doit, toutefois, respecter la localisation de ces derniers dans la région spécifiée.

Influence du choix des pôles.

Le gain constant utilisé dans l'algorithme de synthèse doit être choisi de manière à ce qu'il y ait une convergence rapide (dans la limite du possible) et à ce que les résultats soient compatibles avec les prévisions théoriques.

Pour notre cas, on a opté pour un gain de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$, et un élargissement de la plage du choix du gain autour de cette valeur permet d'obtenir des résultats plus ou moins satisfaisants.

CONCLUSION
ET
PERSPECTIVES

Conclusion
et perspectives

Nôtre travail a porté sur l'étude de la commande robuste par placement de pôles où l'on fait ressortir l'intérêt de la synthèse des régulateurs robustes de ladite commande.

L'approche étudiée et qui a été proposée par Santos-Mendès en 1988 est d'un apport considérable pour une telle régulation. Elle est basée essentiellement sur les connaissances a priori sur les marges de performance à atteindre. Pour calculer la fonction mesure de robustesse, une approche conique a été introduite pour la description des variations paramétriques. Un algorithme itératif, utilisant la méthode du gradient, est proposé en vue de maximiser cette fonction.

Nôtre contribution apparait dans la simulation d'un exemple d'application en utilisant la méthode étudiée où les différents aspects pouvant influencer sur la régulation considérée ont été mis en évidence. L'obtention de résultats fort satisfaisants nous permet de conclure sur la fiabilité de cette approche.

Il est à noter que lors de la simulation, les résultats obtenus sont loin d'être pleinement fiables à cause de la contrainte du temps alloué à l'exécution du programme de simulation. La levée de cette contrainte permettrait, sans doute aucun, de relever la fiabilité des résultats.

D'autres aspects peuvent également faire l'objet d'une amélioration en vue de rendre plus performante cette étude tel que l'utilisation d'un gain adaptatif dans l'algorithme itératif pour une convergence meilleure et rapide de la méthode. Il en est de même pour le choix de la région D qu'on spécifie pour l'imposition des pôles. Le contour pourrait être, éventuellement, quelconque et le balayage se ferait alors avec un module variable.

BIBLIOGRAPHIE

Références bibliographiques.

Ackermann, J. (1980)

"Parameter space design of robust control systems"

IEEE Trans. Autom. Control. vol. AC-25 n°5. pp. 1058-1072

Ackermann, J. (1985)

"Sampled data control systems. Analysis & Synthesis, Robust System Design."

Springer-Verlag. Berlin.

Belmehdi, T. & Boucherit, M.S. (1992)

"Synthèse de la commande robuste".

Rapport interne du LEPC. ENP Alger, Avril 1992.

Buhler, H (1982)

"Réglages échantillonnés". Vol.1

Ed. Presses Polytechniques Romandes. Lausanne.

Buhler, H (1982)

"Réglages par mode de glissement".

Ed. Presses Polytechniques Romandes. Lausanne.

De Larminat, Ph (1991)

"La commande robuste: Un tour d'horizons".

APII. Vol. 25 pp 267-296

Evans, R.J & Xie Xiana (1985)

"Robust regulator design".

Int. J. Control. vol. 41 n°2. pp. 461-476

Landau, I.D (1988)

"Identification et commande des systèmes".

Traité des nouvelles technologies. Ed. Hermès. Paris.

Morari, M & Garcia, C.E (1985)

"Internal model control".

I & EC Process Design & Development. Vol. 21 n°2. pp. 308-323

M'sirdi, N.K (1992)

"Commande de processus. Commande robuste pour systèmes dynamiques incertains".

Conférence au laboratoire d'automatique, ENP Alger, Juin 1992.

Santos-Mendès, R & Aguilar Martin, J (1988)

"Robust pole placement design".

Rapport interne du LAAS, CNRS. Toulouse.

Santos-Mendès, R (1988)

"Synthèse de régulateurs robustes à placement de pôles".

Thèse de doctorat ingénieur. Université Paul Sabatier, Toulouse.

Soh, Y.C , Evans, R.J , Petersen, I.R & Betz, R.E (1987)

"Robust pole assignment".

Automatica. Vol. 23 n°5. pp 601-610

Xu, C.Z & Barraud, A (1986)

"Conception des systèmes multivariables robustes par l'approche fréquentielle".

Rapport interne du LAG, INP Grenoble.