

وزارة التعليم و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DES PLAQUES  
PAR LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS

Proposé Par :  
Mr BARAKA

Etudié par :  
B.DJERIR  
M.LOUNIS

Dirigé par :  
Mr BARAKA

PROMOTION : janvier 88



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

ETUDE DES PLAQUES  
PAR LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS

Propose Par :

Etudié par :

Dirigé par :

PROMOTION : janvier 88

## DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

A la mémoire de mes grands-parents.

A ma mère.

A mon père.

A mes frères et sœurs.

A mes tantes.

A tous ceux qui me sont chers.

BOUAZIZ

A la mémoire de mes grands-parents.

A ma mère.

A mon père.

A mes sœurs.

A tous ceux qui me sont chers.

Mokrane

A tous ceux qui croient en DIEU et Le craignent.

## REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Nous remercions vivement notre professeur Monsieur M.S. BARAKA pour nous avoir inspiré le sujet de notre travail, pour l'attention qu'il nous a témoigné et pour l'aide que nous avons toujours trouvée auprès de lui.

Qu'il trouve ici l'assurance de notre sincère reconnaissance.

Nous remercions également Monsieur I. BENSLIMANE pour la serviabilité qu'il nous a toujours manifesté.

Nos remerciements vont également à tout le personnel du centre de calcul de l'école nationale polytechnique.

Nous remercions enfin tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce modeste travail.

———— \* \* \* \* \* ————

## RESUME

L'objet de notre travail consiste en l'étude des plaques par la méthode des éléments finis, c'est à dire la détermination des déplacements et des contraintes en un point quelconque de la plaque soumise à un chargement quelconque et avec diverses conditions aux limites.

Ce travail montre en outre comment on peut résoudre un problème de plaque bien déterminé et ceci par plusieurs voies différentes aboutissant à des résultats très proches les uns des autres. Pour notre part, nous avons utilisé trois méthodes différentes afin d'étudier le problème de la flexion des plaques :

- a) éléments finis rectangulaires pour l'étude de la flexion des plaques.
- b) assimilation d'un problème de plaque à un grillage de poutres.
- c) assimilation d'un problème de plaque à un problème de champ scalaire.

Ce travail est divisé en cinq parties :

Première partie : elle résume la théorie des plaques minces.

Deuxième partie : elle est consacrée à la présentation générale de la méthode des éléments finis.

troisième partie : elle consiste en l'application de l'élément fini rectangulaire (à quatre nœuds avec trois degrés de liberté par nœud) pour l'étude de la flexion des plaques, avec application au béton armé aux états de service.

quatrième partie : elle concerne l'assimilation d'un problème de plaque à un grillage orthogonal de poutres et à l'application de la théorie des équivalences.

Cinquième partie : elle traite l'assimilation d'un problème de plaque à un problème de champ scalaire. elle montre aussi comment on peut résoudre un problème de plaque en utilisant seulement un élément triangulaire à trois nœuds et à un degré de liberté par nœud.

# SOMMAIRE



## CHAPITRE I : THEORIE DES PLAQUES .

- I.1 - Définitions .
- I.2 - Théorie de Love Kirchoff .
- I.3 - Equations d'équilibre , équations de Lagrange .

## CHAPITRE II : PRESENTATION GENERALE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .

- II.1 - Historique .
- II.2 - Généralités .
- II.3 - Principe de la méthode des éléments finis .
- II.4 - Etapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis .

## CHAPITRE III : ELEMENTS FINIS RECTANGULAIRE POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES .

- III.1 - Détermination de la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire .
- III.2 - Programmation de l'élément de plaque .
- III.3 - Exemples d'application
- III.4 - Application au béton armé

## CHAPITRE IV : CALCUL PAR ASSIMILATION A UN GRILLAGE DE POUTRES .

- IV.1 - Théorie des Equivalences
- IV.2 - Elément Fini de poutre .
- IV.3 - Exemples d'application

## CHAPITRE V : CALCUL PAR ASSIMILATION A UN PROBLEME DE CHAMP SCALAIRE .

CONCLUSION

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHÈQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

# 1. théorie des plaques

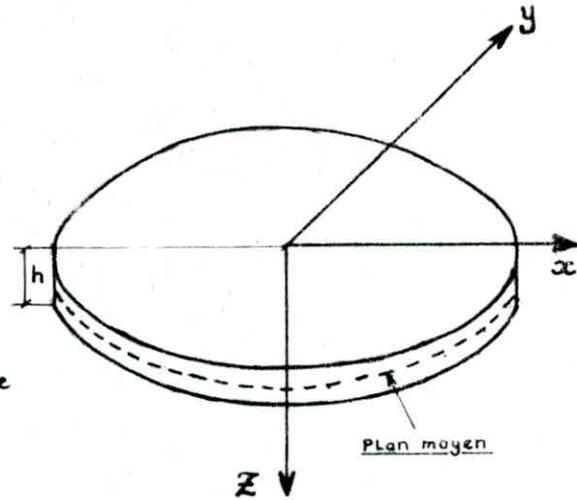
# I. THEORIE DES PLAQUES MINCES EN FLEXION

## I.1 Définitions :

Une plaque est un solide limité par deux plans parallèles et un contour fermé pour lequel existe un plan moyen.

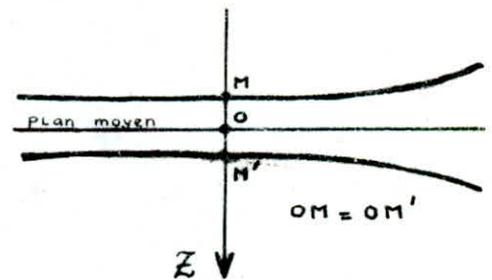
Le plan moyen représente un plan de symétrie pour la plaque.

Par convention, le plan moyen (ou surface moyenne) sera le plan  $oxy$  et l'axe  $oz$  correspondra à l'axe transversal selon l'épaisseur  $h$ .



Sous l'effet d'un chargement, il y a déplacement de chaque point du plan moyen.

Le déplacement selon l'axe  $oz$  est appelé : "flèche" et est noté : " $w$ ".



Selon le mode de déformation, les plaques peuvent être classées en trois grandes catégories :

- plaques minces à petites flèches ( $w \ll h$ ).
- plaques minces à grandes flèches ( $w \# h$ ).
- plaques épaisses.

\* hypothèses Fondamentales :

a) plaques minces à petites flèches :

1. Il n'y a pas de déformation du plan moyen sous les effets des charges transversales (il y en a éventuellement sous  $N$  dans le plan de la plaque).
2. Les points de la plaque situés sur une normale, restent sur cette normale après déformation.  
(l'effort tranchant n'a pas d'influence sur la flèche  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ ).
3. Les contraintes normales suivant une direction transversale à la plaque sont négligées ( $\sigma_{zz} \approx 0$ )

b) plaques minces à grandes flèches :

L'hypothèse (1) n'est pas vérifiée, il existe donc une déformation du plan moyen (même sans effort normal extérieur) cette déformation est due à la flexion (couplage des effets de membrane et des effets de flexion.).

c) plaques épaisses :

Il n'existe pas de théorie des plaques épaisses, le problème n'est pas simple et leur étude doit être conduite à l'aide de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

Remarque : dans tout ce qui suit, on ne s'intéressera qu'aux problèmes des plaques minces à petites flèches.

## I.2. Théorie de Love Kirchoff

### I.2.1. Relation contraintes - Déformations

dans la théorie de Kirchoff, on néglige l'effet de cisaillement transverse.

Dans ce cas, le champ des déplacements est défini uniquement par une variable : le déplacement transversal  $w$ .

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad w = w(x, y)$$

Les seules composantes non nulles du tenseur déformation son donc :

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \epsilon_{xy} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

puisque  $\sigma_{xz} = 0$ , on est dans un état de contraintes planes. Les relations de la théorie de l'élasticité se réduisent à :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad , \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad , \quad \epsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} (1-\nu^2) \epsilon_{xy} = \frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

donc en un point du plan moyen de coordonnées  $(x, y)$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

avec  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$   $D$ : étant la rigidité flexionnelle de la plaque

$h$ : épaisseur de la plaque

$E$ : module d'élasticité longitudinal du matériau constituant la plaque

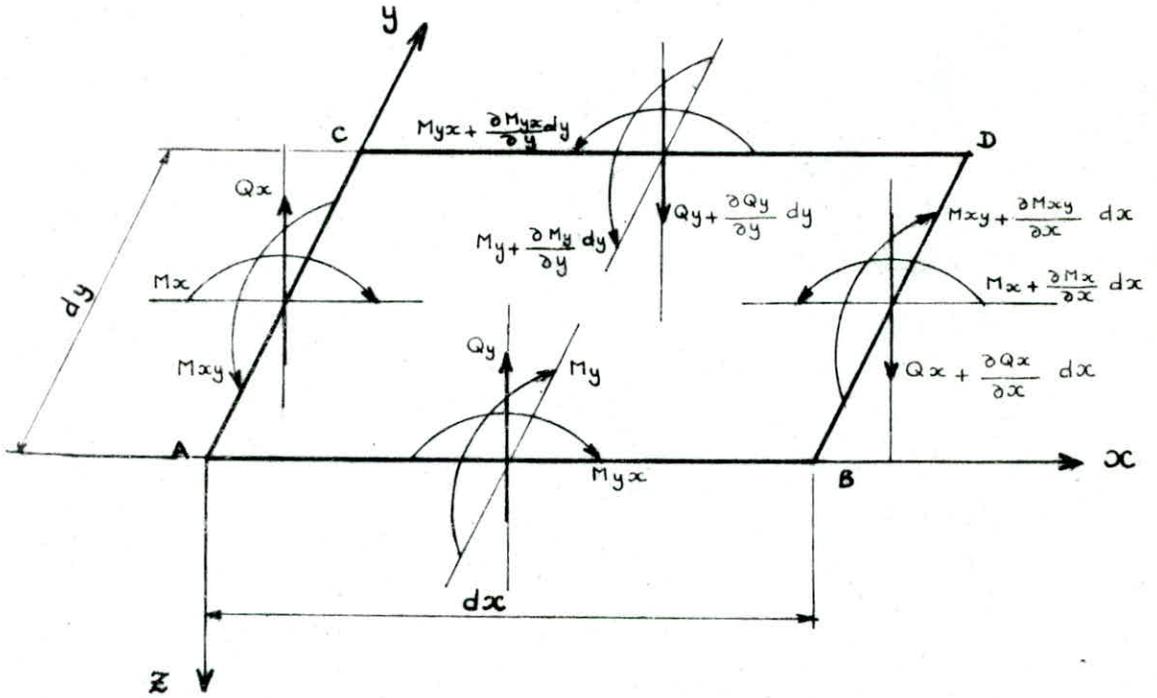
$\nu$ : coef de poisson

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

I.3 Equations d'équilibre, Equations de Lagrange.

Considérons une plaque soumise à une densité superficielle de force  $q(x, y)$  et écrivons les équations d'équilibre d'un élément rectangulaire ABCD, dont les côtés  $AB = dx$  et  $AC = dy$  sont parallèles aux axes  $ox$  et  $oy$ .



1<sup>ère</sup> équation d'équilibre : la somme des projections des forces sur l'axe  $oz$  est nulle

2<sup>e</sup> équation d'équilibre : la somme des projections des couples sur l'axe  $ox$  est nulle.

3<sup>e</sup> équation d'équilibre : la somme des projections des couples sur l'axe  $oy$  est nulle.

donc les six équations d'équilibre de l'élément se réduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (a) \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (b) \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (c) \end{array} \right.$$

en portant les valeurs de  $Q_x$  et  $Q_y$ , calculées à partir des équations (b) et (c), dans (a) on obtient :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q$$

or :  $\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q}$

remplaçons  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  par les valeurs obtenues précédemment (système III), on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D}}$$

cette équation est l'équation de Lagrange et peut être écrite sous la forme suivante :

$$\boxed{\Delta \Delta W = \frac{q}{D}}$$

où :  $\Delta$  désigne l'opérateur Laplacien :

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}$$

si on remplace dans les équations IV (b) et IV (c) les moments  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  par leurs valeurs, on aura :

$$Q_x = D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$Q_y = D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

l'effort tranchant est du 2<sup>e</sup> ordre par rapport aux déplacements

#### I.4 Energie de deformation d'une plaque.

Le travail effectué par les moments  $M_x dy$  et  $M_y dx$  est donné par :

$$du_1 = -\frac{1}{2} \left( M_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) dx dy$$

d'où :

$$du_1 = +\frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] dx dy$$

l'énergie de déformation due à  $M_{xy} dy$  est égale à :

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dx dy = \frac{1}{2} D (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

les couples  $M_{yx} dx$  produisent la même quantité d'énergie ;  
d'où l'énergie produite par  $M_{xy} dy$  et  $M_{yx} dx$  est donnée par :

$$du_2 = D (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

l'énergie de déformation dans un élément de surface A est donnée par :

$$W_0 = \iint_A (du_1 + du_2) dx dy$$

$$W_0 = \frac{1}{2} AD \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

## **2. présentation générale de la méthode des éléments finis**

**II. PRESENTATION GENERALE DE LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS**

**II.1 HISTORIQUE**

La méthode des éléments finis (en abrégé M.E.F) a connu un développement intense à partir de 1956.

Jusqu'à cette date, plusieurs travaux ont été effectués auparavant notamment des méthodes modernes d'analyse dont voici un synoptique.

1800	structures hyperstatiques	NAVIER	1819
	théorème de l'énergie	MAXWELL	1864
		CASTIGLIANO	1878
1900	méthodes d'approximation	RITZ	1908
		GALERKIN	1915
	approximation par "éléments finis"	COURANT	1940
	méthodes matricielles.		
1955	concept d'élément fini		
	. méthode des forces.	ARGYRIS - DENKE	1955
	. méthode des déplacements	ARGYRIS - TURNER	1956

A partir de cette (1956), la méthode des éléments finis va connaître un développement intense sous l'impulsion de l'industrie aérospatiale et grâce à la disponibilité des premiers ordinateurs.

TURNER, CLOUGH, MARTIN et TOPP introduisent en 1956 le concept d'élément fini dans : "Stiffness and deflection analysis of complex structures.", journal of aeronautical science 1956.

La méthode des déplacements va être choisie de façon quasi universelle comme technique de résolution matricielle de préférence

à la méthode des forces .

Dés lors , on assiste au développement de nouveaux éléments tels que membranes , plaques , coques et à l'établissement de nouvelles formulations basées sur des considérations énergétiques et variationnelles , sous la forme générale des résidus pondérés .

Par ailleurs , le domaine d'application de la M.E.F limite au début à l'analyse linéaire s'étend à la dynamique linéaire , au plambement linéarisé et à l'analyse non linéaire .

Actuellement la M.E.F est très répandue dans les industries de pointes ( constructions aéronautiques , aérospatiales , navales etc... )

Elle se développe dans les applications de la mécanique des fluides : étude de la marée , des transports de sédiments , des phénomènes de pollution thermique ou chimique et des interactions fluide - structure .

De nombreux programmes généraux de calcul sont disponibles pour utiliser industriellement la M.E.F , principalement dans le domaine de la mécanique des solides . Citons par exemple NASTRAN , ASKA , SAP , MARC , ANSYS , TITUS , ADINA .

ces programmes sont conçus pour être exécuter sur de gros ordinateurs . une nouvelle génération de programmes , plus modulaires et adaptés aux mini - ordinateurs , va permettre l'utilisation de la M-E-F par des entreprises et bureaux d'étude de taille réduite .

Parcours bibliographique :

A partir de 1967 , de nombreux livres sont publiés , en langue anglaise , sur la méthode des éléments finis .

Signalons en particulier les trois éditions très répandues du livre de Zienkiewicz .

A l'heure actuelle seules sont disponibles en français des traductions des ouvrages de Zienkiewicz ( seconde édition ) , de Gallagher , de Rokey et al . ainsi que les ouvrages de Absi et d'Imbert .

## II.2 GENERALITES

La méthode des éléments finis représente l'extension des méthodes matricielles à l'étude des structures continues.

Elle permet à l'ingénieur d'étudier le comportement approché d'un domaine continu en le traitant comme une structure composée d'éléments indépendants reliés entre eux uniquement par les nœuds.

Et c'est seulement par cette représentation que la méthode des éléments finis diffère des méthodes matricielles habituelles.

Notons que chacun de ces éléments possède ses propres fonctions pour décrire contraintes et déplacements.

Il est important que ces fonctions assurent la continuité du comportement dans l'ensemble du milieu.

Trois conditions de base doivent être vérifiées lors de l'emploi de la méthode des éléments finis :

a) équilibre des forces : les forces internes aux points nodaux doivent équilibrer les forces externes appliquées à ces nœuds.

b) Compatibilité des déplacements : après déformation sous charges les éléments doivent toujours se rencontrer aux nœuds.

la structure doit être convenablement déformée dans son ensemble

c) lois de comportement des matériaux : avant d'utiliser les conditions précédentes, il est nécessaire de connaître la relation entre charges et déformations pour chaque structure.

(dans le cas de l'élasticité linéaire, cette relation se réduit à la loi de HOOKE.)

Il existe, au sein de cette méthode, plusieurs formulations conduisant essentiellement à :

1. la méthode de rigidité ou de déplacements.
2. la méthode de souplesse ou de forces.
3. la méthode mixte.

1 méthode de déplacements : les conditions de compatibilité et des déplacements sont satisfaites et les équations d'équilibre sont posées pour obtenir les déplacements nodaux qui sont les inconnues.

2 méthode de forces : les conditions d'équilibre aux nœuds sont satisfaites, on pose les équations exprimant la compatibilité des déplacements nodaux et on résout pour obtenir les forces inconnues.

3 méthode mixte : c'est un mélange des deux méthodes précédentes.

Pour notre part, nous avons opté pour la méthode des déplacements qui présente certains avantages par rapport aux autres (plus grande souplesse, facilité d'approche des déplacements admissibles etc...).

ainsi après décomposition de notre structure en un certain nombre d'éléments suivant un maillage adéquat, nous considérerons les déplacements aux nœuds de ce maillage comme inconnues du problème et nous approcherons au sein de chaque élément le champ des déplacements par des fonctions d'interpolation aussi simple que possibles (généralement polynomiales) assurant la continuité des déplacements généralisés (rotations et courbures) à l'interface de deux éléments et aux nœuds.

## II.3 PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### II.3.1 Introduction :

La méthode des éléments finis est une méthode approchée de calcul numérique, permettant de déterminer l'équilibre élastique des structures continues à deux ou trois dimensions.

La méthode des éléments finis consiste à déterminer les déplacements en un certain nombre de points  $A_v$  ( $v = 1, 2, \dots, N$ ) de la structure.

Ces déplacements sont définis par des matrices colonnes  $\Delta_v$  qui sont les inconnues qu'il faut calculer.

La méthode repose sur deux hypothèses :

1°) la première hypothèse consiste à diviser, au moyen de lignes ou de surfaces imaginaires passant par les noeuds  $A_v$ , la structure en un nombre fini d'éléments  $E_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, M$ ) et à supposer que les éléments  $E_\mu$  ne sont mécaniquement assemblés entre eux qu'aux noeuds  $A_v$ .

2°) la seconde hypothèse consiste à représenter le déplacement en un point  $M$  de l'élément  $E_\mu$  par une fonction matricielle d'interpolation  $U(M)$  prenant les valeurs  $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \dots$ , lorsque le point  $M$  vient aux noeuds  $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, \dots$ , de l'élément.

Le théorème des travaux virtuels permet de déterminer quelles forces il faut appliquer aux noeuds  $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, \dots$ , pour assurer l'équilibre de  $E_\mu$  connaissant les déplacements  $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \dots$ , des noeuds, les forces extérieures appliquées à l'élément et les déformations éventuelles imposées à l'élément (dilatation thermique, retrait etc...).

### II.3.2 différentes étapes dans la solution d'une structure par la méthode des éléments finis

étape I : Elle consiste à choisir un système de

Coordonnées et une numérotation des nœuds appropriée pour l'élément. Les degrés de liberté de l'élément fini sont connus, on peut déterminer le vecteur de déplacement nodal  $\{S^e\}$  et le vecteur charge nodale  $\{F^e\}$ .

La matrice de rigidité  $[K^e]$  pour cet élément est alors définie comme suit :

$$\{F^e\} = [K^e] \{S^e\} \quad (I)$$

Etape II : choisir une fonction de déplacement qui définit de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

Ce modèle peut être représenté par une expression polynomiale et puisque son but est d'exprimer les déplacements  $\{S(x,y)\}$  de n'importe quel point en termes de déplacements nodaux  $\{S^e\}$ , elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément.

L'état de déplacement en chaque point  $(x,y)$  de l'élément s'écrit :

$$\{S(x,y)\} = [f(x,y)] \{\alpha\} \quad (II)$$

où  $\{\alpha\}$  est le vecteur colonne des coefficients inconnus de la fonction polynôme  $[f(x,y)]$ .

Etape III : Relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux.

On exprime les coefficients de la fonction de déplacement  $\{\alpha\}$  en fonction des déplacements nodaux  $\{S^e\}$ .

Et en se rapportant dans l'expression (II), on relie les déplacements des points de l'élément aux déplacements nodaux  $\{S^e\}$ .

Puisque  $\{S(x,y)\}$  représente le déplacement au point  $(x,y)$ , les déplacements nodaux peuvent être obtenus à partir de celui-ci en introduisant tout simplement les coordonnées nodales convenables et on aura :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^e\} \\ \{\delta_2^e\} \\ \vdots \\ \{\delta_n^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ \vdots \\ [f(x_n, y_n)] \end{Bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\{\delta^e\} = [A] \{\alpha\}$$

la matrice  $[A]$  étant connue, le vecteur des coefficients inconnus  $\{\alpha\}$  est donné par la relation suivante :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\}$$

en remplaçant  $\{\alpha\}$  dans l'équation (II), on obtient la relation entre les déplacements  $\{S(x, y)\}$  de tous les points de l'élément et les déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$ .

$$\{S(x, y)\} = [f(x, y)] [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad \text{(III)}$$

Etape IV : relation entre déplacements et déformations

on relie les déformations  $\epsilon(x, y)$  du point de coordonnées  $(x, y)$  de l'élément aux déplacements  $S(x, y)$  et donc aux déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$ .

Les déformations aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la fonction de déplacement par une différentiation dont la forme exacte dépend du type de problème traité.

$$\{\epsilon(x, y)\} = \{ \text{différentielle de } S(x, y) \}$$

en remarquant que :  $[A]^{-1}$  et  $\{\delta^e\}$  sont indépendants de  $x$  et de  $y$  on aura :

$$\{\epsilon(x, y)\} = \{ \text{différentielle de } f(x, y) \} [A]^{-1} \{\delta^e\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C] [A]^{-1} \{\delta^e\}$$

où  $[C]$  contient en général des termes en  $x$  et  $y$ .

d'où la relation entre déformation, en chaque point de l'élément et les déplacements nodaux :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B] \{\delta^e\} \quad (\text{IV})$$

avec  $[B] = [C] [A]^{-1}$

Etape V : relation entre déformations et contraintes.

Les contraintes internes de l'élément  $\{\sigma(x, y)\}$  sont reliées aux déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$  par la relation suivante :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\varepsilon(x, y)\}$$

où  $[D]$  est la matrice d'élasticité et contient les propriétés élastiques de l'élément (module d'Young, coefficient de Poisson)

or  $\varepsilon(x, y) = [B] \{\delta^e\}$  (d'après la relation IV)

donc :  $\{\sigma(x, y)\} = [D] [B] \{\delta^e\} \quad (\text{V})$

Etape VI : relier les charges nodales aux déplacements nodaux

Les contraintes internes  $\{\sigma(x, y)\}$  sont remplacées par les charges nodales  $\{F^e\}$  statiquement équivalentes, et ces dernières sont reliées aux déplacements nodaux définissant ainsi notre matrice de rigidité  $[K^e]$  de l'élément.

Pour déterminer l'ensemble des charges nodales statiquement équivalentes aux contraintes internes, on utilise le principe des travaux virtuels.

énoncé du principe :

durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes.

on choisit un ensemble arbitraire de déplacements nodaux (déplacements virtuels) représenté par le vecteur  $\{\delta^{*e}\}$  où :

$$\{\delta^{*e}\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^{*e}\} \\ \{\delta_2^{*e}\} \\ \vdots \\ \{\delta_n^{*e}\} \end{Bmatrix}$$

le travail extérieur ( $W_{ext}$ ) des forces nodales est donné par :

$$W_{ext} = \{\delta_1^{*e}\} \{F_1^e\} + \{\delta_2^{*e}\} \{F_2^e\} + \dots + \{\delta_n^{*e}\} \{F_n^e\}$$

$$\text{donc } W_{ext} = \{\delta^{*e}\}^T \{F^e\}$$

si les déplacements virtuels arbitrairement imposés produisent des déformations  $\{\epsilon(x,y)^*\}$  aux points de l'élément où les contraintes réelles sont  $\{\sigma(x,y)\}$ , alors le travail interne par unité de volume est donné par :

$$W_{int} = \{\epsilon(x,y)^*\}^T \{\sigma(x,y)\}$$

le travail interne total est obtenu en intégrant sur le volume total de l'élément, c'est à dire :

$$\int_v W_{int} d(\text{vol}) = \int_v \{\epsilon(x,y)^*\}^T \{\sigma(x,y)\} d(\text{vol})$$

d'après l'équation (IV), on sait que :  $\{\epsilon(x,y)\} = [B] \{\delta^e\}$

donc en imposant les  $\{\delta^e\}$ , les déformations correspondantes sont :

$$\{\epsilon(x,y)^*\} = [B] \{\delta^{*e}\}$$

de plus on sait par l'équation (V) que :  $\{\sigma(x,y)\} = [D] [B] \{\delta^e\}$

$$\text{d'où : } \int_v W_{int} d(\text{vol}) = \int_v \{\delta^{*e}\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} d(\text{vol})$$

$$\text{et } W_{ext} = \{\delta^{*e}\}^T \{F^e\}$$

le principe des travaux virtuels consiste à évaluer le travail interne et le travail externe produits pendant les déplacements virtuels  $\{\delta^{*e}\}$ .

Et puisque le principe de base des déplacements virtuels est valide pour n'importe quel système de déplacements appliqué, il est commode de choisir les déplacements nodaux égaux à l'unité.

on obtient alors en égalisant le travail extérieur et le travail interne total :

$$\{F^e\} = \left[ \int_v [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \right] \{S^e\} \quad (\text{VI})$$

d'après l'équation (I) on sait que :  $\{F^e\} = [K^e] \{S^e\}$

on en déduit ainsi la matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$

$$[K^e] = \int_v [B]^T [D] [B] d(\text{vol})$$

étape VII : assemblage des matrices de rigidités élémentaires et introduction des conditions aux limites

après avoir obtenu, dans l'étape précédente la matrice de rigidité élémentaire, on doit effectuer maintenant l'assemblage de ces matrices. cet assemblage se fait en chaque noeud de la structure entière.

une fois que l'assemblage soit terminé, il permet l'obtention d'une matrice de rigidité global de la structure à l'état libre :

$$[K_{\text{Global}}] \{S\} = \{F\} \quad (1)$$

en fait, la matrice de rigidité globale ainsi obtenue est singulière, mathématiquement cela signifie que son déterminant est nul et que son inverse n'existe pas. cela implique que la résolution du système (1), dans le quel les déplacements sont les inconnues, ne peut se faire. cependant une simple raison physique explique cette situation ; la structure n'a pas été fixée et aucune limitation n'a été imposée aux déplacements. donc, l'application de n'importe quelle charge extérieure agira sur le système en le déplaçant comme un corps rigide. on peut remédier à cette situation et rendre le problème résoluble en donnant des conditions aux limites suffisantes pour empêcher la structure

de se déplacer comme un corps rigide .

Par conséquent on bloque tous les appuis et on détermine ainsi la matrice de rigidité de la structure à l'état lié, qui elle permet la résolution du système (1)

étape VIII : relations entre contraintes et déplacements .

Une fois que le problème global a été résolu pour les déplacements nodaux , on se propose d'évaluer les contraintes internes .

La relation cherchée a été déjà obtenue à l'étape 'V' et est définie par l'équation (V) de la façon suivante :

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] [B] \{\delta^e\}$$

$$\text{d'où } \{\sigma(x,y)\} = [H] \{\delta^e\} \quad \text{avec } [H] = [D] [B] \quad (\text{VII})$$

[H] étant la matrice reliant les contraintes internes de l'élément  $\{\sigma(x,y)\}$  à ses déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$  .

en général la matrice [H] contient des termes en  $x$  et  $y$  et relie donc les contraintes internes en chaque point  $(x,y)$  de l'élément aux déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$  .

Il est donc commode d'utiliser la matrice  $[H^e]$  obtenue en remplaçant les diverses coordonnées nodales par leurs valeurs .

Les contraintes internes sont ainsi obtenues pour chaque élément séparément par la relation :  $\{\sigma^e\} = [H^e] \{\delta^e\}$

récapitulation : finalement , les principales étapes dans la solution d'une structure par la M.E.F sont :

- 1) identification du problème .
- 2) choix des fonction de déplacement convenable .
- 3) relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux .

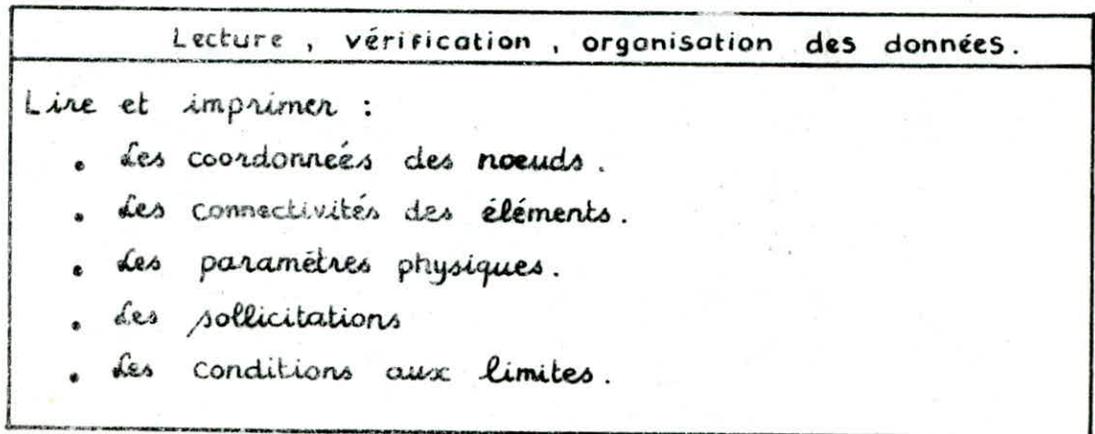
- 4) relier les déplacements aux déformations.
  - 5) relier les déformations aux contraintes.
  - 6) relier les charges nodales aux déplacements nodaux  
(obtention de la matrice de rigidité élémentaire)
  - 7) assemblage des matrices de rigidités élémentaires et introduction des conditions aux limites, puis résolution du système  $[K]\{\delta\} = \{F\}$
  - 8) relier les contraintes aux déplacements.  
(obtention des contraintes internes pour chaque élément)
-

## II.4 - étapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis.

Tout programme basé sur la méthode des éléments finis renferme quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- a) Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage, les paramètres physiques, les sollicitations et conditions aux limites.
- b) Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations.
- c) Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites.
- d) Impression des résultats après calcul de variables additionnelles (contraintes, réactions, etc.).

d'enchaînement de ces différents blocs se fait comme suit :



A

Construction de la matrice et du vecteur globaux  $[K]$  et  $\{F\}$ .

Pour chaque élément :

- extraire les informations liés à cet élément.
- construire la matrice et le vecteur élémentaires  $[k^e]$  et  $\{F^e\}$ .
- assembler  $[k^e]$  et  $\{F^e\}$  dans  $[K]$  et  $\{F\}$ .

Résolution du système d'équations  $[K] \{\delta\} = \{F\}$ .

- modifier  $[K]$  et  $\{F\}$  pour prendre en compte les conditions aux limites.
- triangulariser  $[K]$ .
- calculer la solution  $\{\delta\}$ .

Impression des Résultats

- calculer les variables additionnelles.
- Imprimer les résultats.

**3. éléments finis rectangulaires  
pour l'étude de la flexion  
des plaques**

### III - ELEMENTS FINIS RECTANGULAIRES POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

On considère dans ce chapitre l'application de la technique des éléments finis à la résolution des problèmes de flexion des plaques. Le cadre du présent chapitre a pour but l'étude des plaques minces sujettes seulement à des flèches peu importantes. Cela représente une classe extrêmement importante de problèmes qui ont un grand nombre d'applications pratiques comme les dalles plates, les tabliers de ponts et les planchers.

#### III-1 détermination de la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire.

dans notre cas, on emploie les différentes étapes citées au chapitre II (paragraphe II-3-2) pour déterminer la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire.

étape I : identification du problème.

dans cette étape on doit choisir un système de coordonnées et numérotter les nœuds.

on suppose que l'élément rectangulaire a des côtés de longueur  $a$  et  $b$  et une épaisseur  $t$ . on utilise le système de numérotation locale des nœuds de la figure III-1 (a).

on peut utiliser d'autres système, mais celui employé ici est commode pour des raisons que nous verrons plus loin.

dans le cas de la flexion des plaques l'élément a trois degrés de liberté

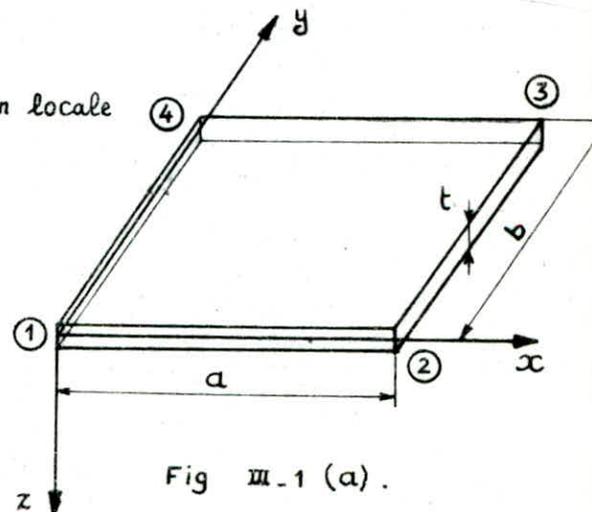


Fig III-1 (a).

en chaque nœud, c'est à dire deux rotations et une flèche transversale.

La rotation autour de l'axe des  $x$  est représentée par  $\theta_x$ , celle autour de l'axe des  $y$  par  $\theta_y$  et la déformation latérale par  $w$ .

Les directions positives de ces rotations sont définies selon la règle du tire-bouchon. L'élément a alors un total de douze degrés de liberté (fig III-1 (b)).

Les moments et les forces correspondantes consistent en deux moments  $T_x$  et  $T_y$  et une force de cisaillement  $F_z$  en chaque nœud (fig III-1 (c)).

Les déplacements de l'élément rectangulaire peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec } \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ w_i \end{Bmatrix}$$

d'où le vecteur complet des déplacements pour l'élément :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ w_1 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ w_2 \\ \theta_{x_3} \\ \theta_{y_3} \\ w_3 \\ \theta_{x_4} \\ \theta_{y_4} \\ w_4 \end{Bmatrix}$$

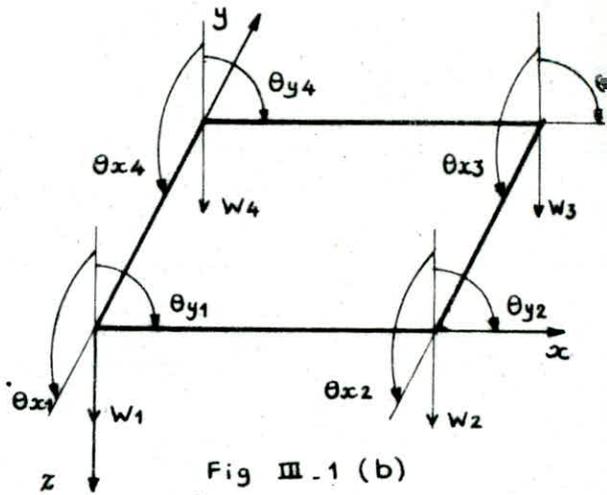


Fig III-1 (b)

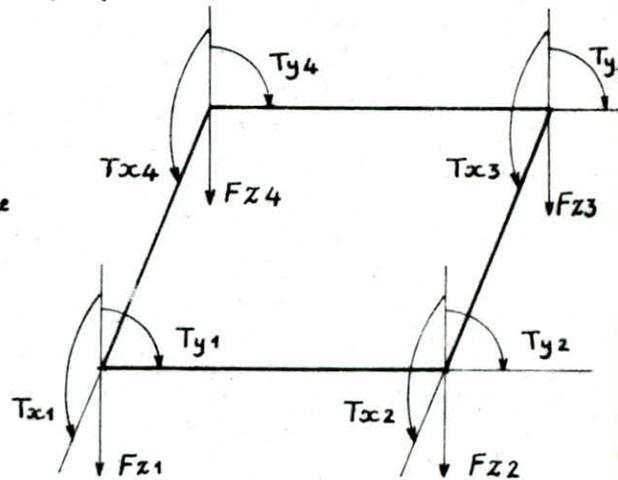


Fig III-1 (c)

de même le vecteur complet des forces pour l'élément s'écrit :

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{x1} \\ T_{y1} \\ F_{z1} \\ \hline T_{x2} \\ T_{y2} \\ F_{z2} \\ \hline T_{x3} \\ T_{y3} \\ F_{z3} \\ \hline T_{x4} \\ T_{y4} \\ F_{z4} \end{Bmatrix}$$

Puisque chacun de ces vecteurs contient douze termes, la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire  $[K^e]$  sera carrée d'ordre 12.

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (I)$$

étape II : choisir la fonction de déplacement  $[f(x,y)]$  qui définit le déplacement  $\{\delta(x,y)\}$  en chaque point de l'élément.

dans le cas de la flexion des plaques où les pèches sont petites, l'état des déplacements en chaque point de l'élément est représenté par :

$$\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix}$$

Les deux pentes  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont reliées au déplacement latéral  $w$  par :

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{et} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$$

donc une fois que la fonction de déplacement est choisie pour  $w$ , les fonctions pour  $\theta_x$  et  $\theta_y$  seront donc définies à partir de celle de  $w$ .

Puisque l'élément a douze degrés de liberté, on doit avoir douze coefficients indéterminés dans le polynôme représentant  $w$ . prenons donc un polynôme du 4<sup>e</sup> degré :

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 + \alpha_{13} x^4 + \alpha_{14} x^2 y^2 + \alpha_{15} y^4.$$

on remarque qu'on a trop de coefficients. on peut prendre un polynôme du 3<sup>e</sup> degré mais on en aura trop peu de coefficients. donc dans notre cas, on élimine les trois derniers termes :

$$\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = 0$$

d'où :

$$\theta_x = -(\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2).$$

$$\theta_y = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3.$$

• vérifions maintenant si cette fonction assure la continuité des flèches et des pentes de la solution.

considérons un bord de l'élément, par exemple le bord (1-2)

où :  $y = 0$ , ce qui nous donne

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_4 x^2 + \alpha_7 x^3$$

$$\theta_x = -(\alpha_3 + \alpha_5 x + \alpha_8 x^2 + \alpha_{11} x^3)$$

$$\theta_y = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + 3\alpha_7 x^2$$

en considérons les conditions aux extrémités de ce bord, c'est à dire aux nœuds 1 et 2 on aura :

• nœud 1 :  $x = 0$

$$W = W_1 = \alpha_1 \quad (1)$$

$$\theta_x = \theta_{x1} = -\alpha_3 \quad (2)$$

$$\theta_y = \theta_{y1} = \alpha_2 \quad (3)$$

• nœud 2 :  $x = a$

$$W = W_2 = \alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_4 a^2 + \alpha_7 a^3 \quad (4)$$

$$\theta_x = \theta_{x2} = -(\alpha_3 + \alpha_5 a + \alpha_8 a^2 + \alpha_{11} a^3) \quad (5)$$

$$\theta_y = \theta_{y2} = \alpha_2 + 2\alpha_4 a + 3\alpha_7 a^2 \quad (6)$$

ainsi on dispose de six équations pour obtenir les huit coefficients inconnus ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_{11}$ ) qui ne peuvent donc être déterminés.

si on regarde de plus près nos équations, on voit que  $W$  et  $\theta_y$  contiennent les mêmes quatre coefficients ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_7$ ). Puisque quatre des équations se rapportent à  $W$  et  $\theta_y$  (1,3,4,6) on a alors un nombre suffisant d'équations pour calculer les coefficients reliés à ces quantités et ainsi on peut exprimer  $W$  et  $\theta_y$  en fonction des déplacements nodaux.

Les deux équations restantes (2,5) ne suffisent pas pour déterminer les quatre inconnues dans  $\theta_x$ . donc la rotation  $\theta_x$  le long du bord considéré n'est pas définie de façon unique.

Cela signifie que la continuité de  $W$  et  $\theta_y$  est assurée le long des bords où  $y$  est constant mais  $\theta_x$  est discontinue le long de ces bords.

on a considéré seulement le cas du bord (1-2), cependant on peut montrer de façon similaire qu'une discontinuité de la pente normale peut exister le long de n'importe quel bord. A cause de cela, la fonction choisie n'est pas idéale et est appelée : "fonction non conforme".

donc l'élément rectangulaire utilisé dans notre cas est un "élément non conforme". comme ces éléments ne satisfont pas à une des conditions de convergence qui est la continuité des déplacements et de leurs dérivées premières, leur emploi paraît donc illégitime mais des essais et des tests ont donné de bons résultats et ont montré la convergence de tels éléments.

les équations précédentes de  $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$  peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -x & -2y & 0 & -x^2 & -2xy & -3y^2 & -x^3 & -3xy^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

qui se résume par l'équation :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)] \{\alpha\} \quad (\text{II})$$

étape III : exprimer l'état des déplacements  $\{\delta(x, y)\}$  dans l'élément en fonction des déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$ .

cette étape consiste à remplacer par leurs valeurs les coordonnées nodales dans l'équation II puis à résoudre en  $\{\alpha\}$ .

en introduisant les coordonnées des noeuds dans  $[f(x, y)]$  on obtient :

- au noeud 1 :  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$

$$[f(x_1, y_1)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- au noeud 2 :  $x_2 = a$ ,  $y_2 = 0$

$$[f(x_2, y_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- au noeud 3 :  $x_3 = a$  ,  $y_3 = b$

$$[f(x_3, y_3)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -b^3 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \end{bmatrix}$$

- au noeud 4 :  $x_4 = 0$  ,  $y_4 = b$

$$[f(x_4, y_4)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

l'équation (II) est valable pour tout point  $(x, y)$  de l'élément donc elle l'est particulièrement aux noeuds .

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta(x_1, y_1)\} \\ \{\delta(x_2, y_2)\} \\ \{\delta(x_3, y_3)\} \\ \{\delta(x_4, y_4)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{Bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -b^3 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

ce qui peut se réduire à :

$$\{\delta^e\} = [A] \{\alpha\}$$

on multiplie alors les deux membres de l'équation précédente par l'inverse de  $[A]$  pour obtenir les Coefficient  $\{\alpha\}$ .

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\}$$

en remplaçant ce resultat dans l'équation (II), on pourra ainsi exprimer  $\{\delta(x,y)\}$  en fonction des déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$

$$\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)] [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (\text{III})$$

étape IV : relier les déformations  $\{\epsilon(x,y)\}$  en chaque point aux déplacements  $\{\delta(x,y)\}$  et donc aux déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$ .

dans le cas d'un problème de flexion des plaques, l'état des déformations peut être représenté par trois composantes :

- courbure dans la direction des  $x$  :

elle est égale à la variation de la dérivée par rapport à  $x$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

- courbure dans la direction des  $y$  :

elle est égale à la variation de la dérivée par rapport à  $y$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

- torsion : elle est égale à la variation par rapport à  $x$  de la dérivée par rapport à  $y$ .

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

les moments internes  $M_x$  et  $M_y$  agissent chacun sur deux côtés de l'élément, il en est de même pour les moments de torsion  $M_{xy}$  et  $M_{yx}$ , mais puisque  $M_{xy}$  est égal à  $M_{yx}$ , on peut considérer qu'un des deux (par exemple  $M_{xy}$ ) agit sur les quatre côtés et cela en doublant le terme de torsion dans le vecteur des déformations.

L'état des déformations dans l'élément peut ainsi être représenté par :

$$\{ \varepsilon(x, y) \} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

remplaçons  $W$  par sa valeur à partir de l'équation donnée dans l'étape II, on obtient :

$$\{ \varepsilon(x, y) \} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy) \\ -(2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy) \\ 2(\alpha_5 + 2\alpha_8 x + 2\alpha_9 y + 3\alpha_{11} x^2 + 3\alpha_{12} y^2) \end{Bmatrix}$$

$$\{ \varepsilon(x, y) \} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

qui peut être écrite :

$$\{ \varepsilon(x, y) \} = [C] \{ \alpha \}$$

sachant que  $\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\}$ , résultat obtenu dans l'étape précédente

d'où 
$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C] [A]^{-1} \{\delta^e\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B] \{\delta^e\} \quad (\text{IV})$$

avec 
$$[B] = [C] [A]^{-1}$$

l'équation (IV) relie donc les déformations en chaque point de l'élément aux déplacements nodaux.

étape V : relier les contraintes internes  $\{\sigma(x, y)\}$  aux déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$  et aux déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$ .

d'après la théorie des plaques exposée au chapitre (I) on sait que les contraintes internes sont les moments de flexion et de torsion.

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

c'est à dire :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\varepsilon(x, y)\}$$

définissant ainsi la matrice  $[D]$ .

en prenant la valeur de  $\{\varepsilon(x, y)\}$  donnée dans l'équation (IV) de l'étape précédente, on obtient la relation cherchée entre les contraintes de l'élément et ses déplacements nodaux :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] [B] \{\delta^e\} \quad (\text{V})$$

étape VI : dans cette étape, on va remplacer les contraintes internes  $\{\sigma(x,y)\}$  par des forces nodales statiquement équivalentes  $\{F^e\}$ . Puis relier ces forces nodales aux déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$  et de là obtenir la matrice de rigidité de l'élément  $[K^e]$ .

on procède de la même façon que dans le chapitre II (paragraphe II-3-2, étape VI), ainsi la relation entre les charges nodales  $\{F^e\}$  et les déplacements est donné dans le cas général par:

$$\{F^e\} = \left[ \int_v [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \right] \{\delta^e\} \quad (\text{VI})$$

dans notre cas, on doit remplacer  $\int_v d(\text{vol})$  de l'équation VI par l'expression  $\int_0^b \int_0^a dx dy$  spécifique à notre élément rectangulaire pour la flexion des plaques.

l'équation (VI) s'écrit alors de la façon suivante:

$$\{F^e\} = \left[ \int_0^b \int_0^a [B]^T [D] [B] dx dy \right] \{\delta^e\}$$

or 
$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\}$$

d'où la matrice de rigidité de l'élément  $[K^e]$

$$[K^e] = \int_0^b \int_0^a [B]^T [D] [B] dx dy$$

remarque : pour obtenir  $[K^e]$  on doit calculer les matrices  $[D]$  et  $[B]$ .

- la matrice  $[D]$  a été calculée dans l'étape V.
- la matrice  $[B]$  qui a été donnée dans l'étape IV (équation (IV)) n'a pas été calculée explicitement vu la taille des matrices considérées. cette matrice a été donnée (équation IV) comme produit de deux matrices :  $[B] = [C][A]^{-1}$ . nous avons calculé explicitement les matrices  $[A]$  et  $[C]$ , pour

déterminer  $[B]$ , il suffit d'inverser  $[A]$  et calculer le produit  $[C][A]^{-1}$  ce dernier contient des termes en  $x$  et  $y$ , on doit donc intégrer le produit  $[B]^T [D] [B]$  sur la surface de l'élément.

bien entendu, ces calculs sont très longs et trop fastidieux et c'est pourquoi nous ne les avons pas envisagés explicitement.

nous avons indiqué clairement la marche à suivre pour aboutir à la matrice de rigidité élémentaire, cependant la valeur finale de cette matrice a été reprise de ZIENKIEWICZ.

Les expressions sont valables dans le cas général orthotrope.

étape VII : assemblage des matrices de rigidités élémentaires et introduction des conditions aux limites.

dans cette étape, nous devons assembler les différentes matrices élémentaires, en vue d'obtenir la matrice de rigidité globale de la structure étudiée. cet assemblage se fait en chaque noeud de la structure.

A ce stade la structure est à l'état libre, c'est à dire que nous n'avons pas introduit de conditions aux limites (ou conditions d'appuis) ce qui rend la matrice de rigidité globale singulière. ceci nous oblige donc à déterminer une matrice de rigidité de la structure à l'état lié, qui elle tient compte des conditions aux limites et permet la résolution du système :

$$[K] \{ \delta \} = \{ F \}$$

l'introduction des conditions aux limites sera détaillée dans la partie "programmation".

étape VIII : relation entre contraintes et déplacements.

dans cette étape, on doit établir la matrice  $[H]$  reliant contraintes et déplacements.

d'après l'équation (V) on a :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] [B] \{\delta^e\}$$

$$\{\sigma(x, y)\} = [H] \{\delta^e\} \quad (\text{VII})$$

avec :

$$[H] = [D] [B]$$

Les mêmes remarques que nous avons fait pour  $[K^e]$  seront faites aussi pour  $[H]$ .

l'équation VII donne les contraintes  $\{\sigma(x, y)\}$  en tout point  $(x, y)$  de l'élément. Les contraintes ainsi obtenues contiennent des termes en  $x$  et  $y$  que le calculateur ne peut prendre en considération.

Pour obtenir les contraintes en un point donné, on remplace tout simplement dans la matrice  $[H]$   $x$  et  $y$  par les coordonnées de ce point.

de cette façon, on peut déterminer les contraintes aux quatre sommets de l'élément

$$\{\sigma^e\} = \begin{Bmatrix} \sigma(x_1, y_1) \\ \sigma(x_2, y_2) \\ \sigma(x_3, y_3) \\ \sigma(x_4, y_4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H(x_1, y_1) \\ H(x_2, y_2) \\ H(x_3, y_3) \\ H(x_4, y_4) \end{Bmatrix} \{\delta^e\}$$



$$SI = 10b^2 Dx - 8a^2 Dy$$

$$SR = 10b^2 Dx - 2a^2 Dxy$$

$$SJ = 15bp^{-1} Dx - 15aD_1 - 6aDxy$$

$$SS = 30bp^{-1} Dx + 6aDxy$$

$$SM = 30p^{-2} Dx - 60p^2 Dy - 30D_1 - 84Dxy$$

$$ST = 5b^2 Dx + 2a^2 Dxy$$

$$SN = 10a^2 Dy - 8b^2 Dxy$$

$$SU = 15bp^{-1} Dx - 6aDxy$$

$$SO = -15pa Dy + 15bD_1 + 6bDxy$$

$$SX = -60p^{-2} Dx + 30p^2 Dy - 30D_1 - 84Dxy$$

$$SP = 5a^2 Dy + 2b^2 Dxy$$

$$SY = -30p^{-2} Dx - 30p^2 Dy + 30D_1 + 84Dxy$$

$$SQ = 15ap Dy - 6bDxy$$

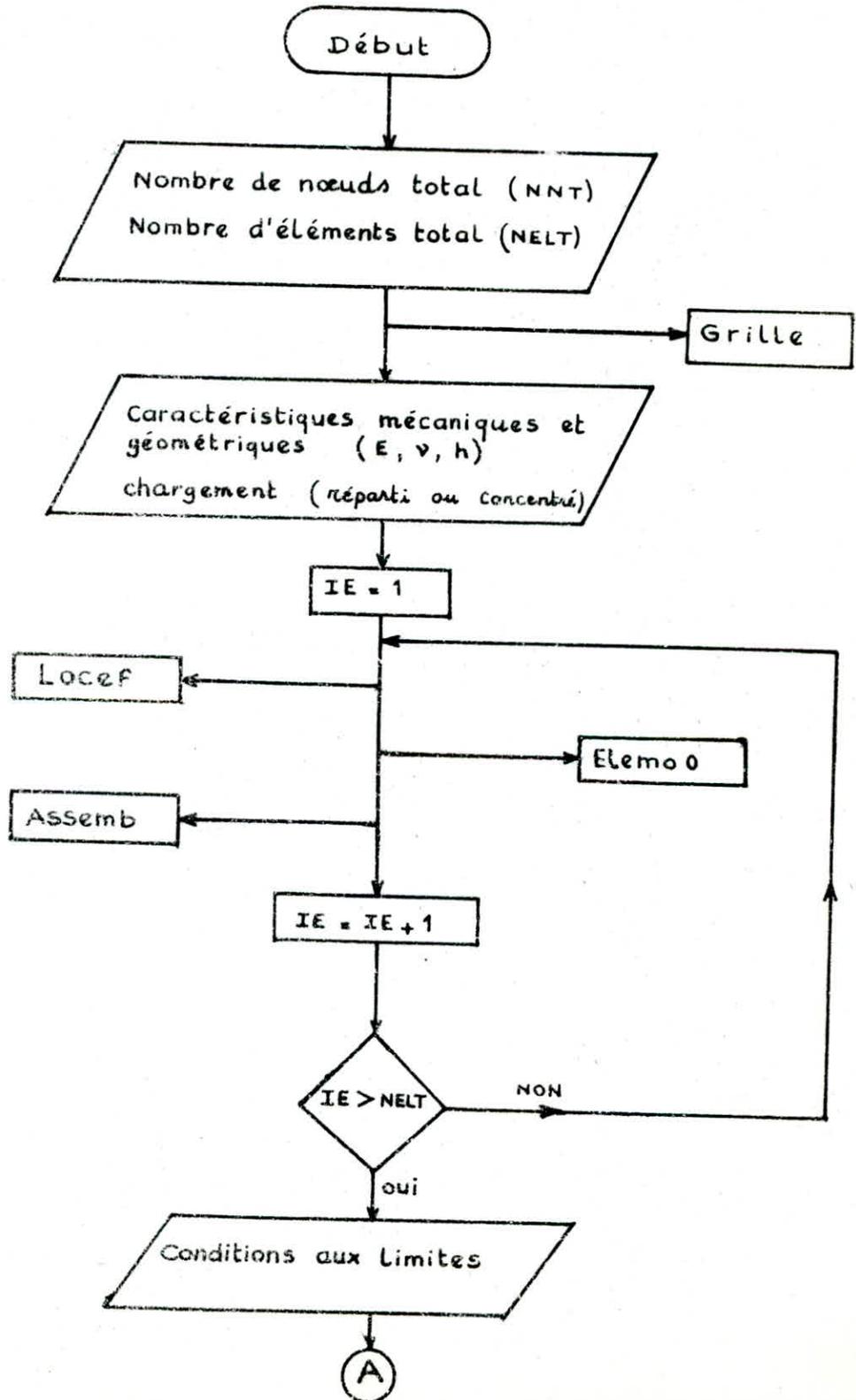
Matrice de Contrainte élémentaire.

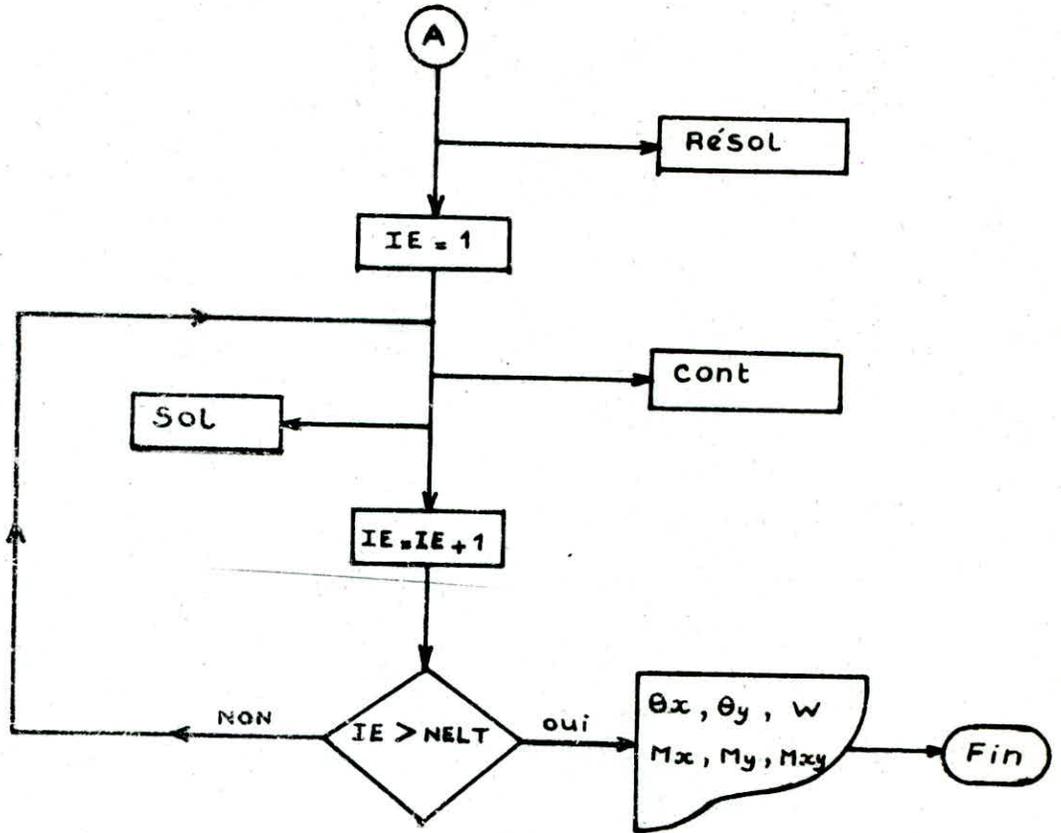
$$[N^e] = \frac{1}{ab}$$

$-4aD_1$	$4bDx$	$6p^{-1}Dx$ $+ 6pD_1$	0	$2bDx$	$-6p^{-1}Dx$	0	0	0	$-2aD_1$	0	$-6pD_1$
$-4aDy$	$4bD_1$	$6pDy$ $+ 6p^{-1}D_1$	0	$2bD_1$	$-6p^{-1}D_1$	0	0	0	$-2aDy$	0	$-6pDy$
$2bDxy$	$-2aDxy$	$-2Dxy$	$-2bDxy$	0	$2Dxy$	0	0	$-2Dxy$	0	$2aDxy$	$2Dxy$
0	$-2bDx$	$-6p^{-1}Dx$	$-4aD_1$	$-4bDx$	$6p^{-1}Dx$ $+ 6pD_1$	$-2aD_1$	0	$-6pD_1$	0	0	0
0	$-2bD_1$	$-6p^{-1}D_1$	$-4aDy$	$-4bD_1$	$6pDy$ $+ 6p^{-1}D_1$	$-2aDy$	0	$-6pDy$	0	0	0
$2bDxy$	0	$-2Dxy$	$-2bDxy$	$-2aDxy$	$2Dxy$	0	$2aDxy$	$-2Dxy$	0	0	$2Dxy$
0	0	0	$2aD_1$	0	$-6pD_1$	$4aD_1$	$-4bDx$	$6p^{-1}Dx$ $+ 6pD_1$	0	$-2bDx$	$-6p^{-1}Dx$
0	0	0	$2aDy$	0	$-6pDy$	$4aDy$	$-4bD_1$	$6pDy$ $+ 6p^{-1}D_1$	0	$-2bD_1$	$-6p^{-1}D_1$
0	0	$-2Dxy$	0	$-2aDxy$	$2Dxy$	$-2bDxy$	$2aDxy$	$-2Dxy$	$2bDxy$	0	$2Dxy$
$2aD_1$	0	$-6pD_1$	0	0	0	0	$2bDx$	$-6p^{-1}Dx$	$4aD_1$	$4bDx$	$6p^{-1}Dx$ $+ 6pD_1$
$2aDy$	0	$-6pDy$	0	0	0	0	$2bD_1$	$-6p^{-1}D_1$	$4aDy$	$4bD_1$	$6pDy$ $+ 6p^{-1}D_1$
0	$-2aDxy$	$-2Dxy$	0	0	$2Dxy$	$-2bDxy$	0	$-2Dxy$	$2bDxy$	$2aDxy$	$2Dxy$

III.2 - Programmation de l'élément de plaque.

III.2.1 - organigramme





### III.2.2 Fonctionnement du programme.

Le programme qui a été mis au point pour le calcul des plaques en utilisant l'élément rectangulaire à quatre noeuds, se compose d'un programme principal faisant appel à sept sous-programmes, l'ensemble comportant 500 instructions FORTRAN.

#### a) programme principal :

Il est utilisé pour l'introduction des données tel que :

- Les paramètres (nombre de noeuds total : NNT , nombre d'éléments total : NELT)
- Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque (cas isotrope :  $E, \nu, h$  , cas orthotrope :  $D_x, D_y, D_1, D_{xy}$ ).
- Le chargement (nodal : concentré , réparti)
- Les conditions aux limites (ou conditions d'appui) , qui sont introduites selon un code à trois chiffres .

#### code utilisé :

D. D. L	$\theta_x$	$\theta_y$	W
	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
<u>Code</u>	1	0	0
	1	0	1
	1	1	0
	1	1	1

nous avons utilisé les deux chiffres 0 et 1 :

0 : le degré de liberté est libre .

1 : le degré de liberté est imposé .

exemple : code 101

- la rotation autour de l'axe des x ( $\theta_x$ ) est imposé.
- la rotation autour de l'axe des y ( $\theta_y$ ) est libre.
- le déplacement latéral (W) est imposé.

Donc pour l'introduction des conditions aux limites, on doit donner le numéro du noeud présentant un ou des degré(s) de liberté imposé(s) ainsi que son code, puis on introduit la valeur du degré de liberté imposé.

Cette valeur est introduite dans le second membre c'est à dire comme une force nodale extérieure et on veut la retrouver comme solution et telle que nous l'avons imposé,

Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé la méthode du terme diagonal dominant :

dans ce programme on veut résoudre le système suivant :

$$[K] \{ \delta \} = \{ F \}$$

$[K]$  : matrice de rigidité globale.

$\{ \delta \}$  : vecteur des déplacements inconnus.

$\{ F \}$  : vecteur des forces extérieures (second membre).

Supposons que le degré de liberté (i) soit imposé  $\rightarrow \bar{\delta}_i$   
on fait rentrer dans notre programme  $\bar{\delta}_i$  dans le second membre c'est à dire comme sollicitation nodale que l'on multiplie par un très grand nombre (GRAND), que nous avons pris égal à  $10^{30}$ .  
on remplace le terme diagonal  $K_{ii}$  de la matrice globale  $[K]$  par  $K_{ii} + \text{GRAND}$ .

tout ceci se fait automatiquement dès qu'un degré de liberté est imposé.

on résoud alors :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} + \text{GRAND} & \dots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \bar{\delta}_i * \text{GRAND} \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

l'équation  $i$  s'écrit :

$$K_{i1} \delta_1 + K_{i2} \delta_2 + \dots + (K_{ii} + \text{GRAND}) \delta_i + \dots + K_{in} \delta_n = \bar{\delta}_i \times \text{GRAND}$$

$$(\text{GRAND} \times \delta_i) + \sum_{j=1}^n K_{ij} \delta_j = \bar{\delta}_i \times \text{GRAND} \quad (1)$$

or  $\text{GRAND} = 10^{30}$

$$\text{GRAND} \times \delta_i \gg \sum_{j=1}^n K_{ij} \delta_j$$

l'équation (1) devient :

$$\text{GRAND} \times \delta_i \approx \bar{\delta}_i \times \text{GRAND}$$

d'où  $\boxed{\delta_i \approx \bar{\delta}_i}$

Il existe d'autres méthodes (terme diagonal unitaire, suppression des équations) mais elles sont plus difficiles à programmer.

Le programme principal fait appel à plusieurs sous programmes et affiche les résultats.

### b) Sous programmes :

\* Sous programme Grille : Il est utilisé pour la discrétisation de la plaque :

- lecture des coordonnées des nœuds (création de la table VCORG des coordonnées des nœuds)
- lecture des connectivités (création de la table Kconec de connectivité).

remarque : la lecture des connectivités se fait dans le sens trigonométrique et c'est pourquoi nous avons choisi un système de numérotation locale approprié au chapitre III (paragraphe III-1).

\* Sous programme Locef : Il est utilisé pour la construction de la table de localisation d'un élément. (pour chaque

élément, il y a localisation de tous ses degrés de liberté d'où création de la table KLoce.).

- \* Sous programme Elemo 0 : Il est utilisé pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire qui est donnée explicitement en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque ( $E, \nu, h, a, b$ )
- \* Sous programme Assemb : Il est utilisé pour l'assemblage des matrices et des vecteurs élémentaires  $[K^e]$  et  $\{F^e\}$  donnant ainsi une matrice globale  $[K]$  et un vecteur global  $\{F\}$  de la plaque étudiée.
- \* Sous programme Résol : Il est utilisé pour le calcul des déplacements (inconnus) en chaque noeud ( $\theta_x, \theta_y, w$ ).  
La résolution du système d'équation linéaire :  $[K] \{\delta\} = \{F\}$  se fait par la méthode d'élimination de GAUSS.
- \* Sous programme cont : Il est utilisé pour le calcul de la matrice de contrainte élémentaire, donnée explicitement en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque.
- \* Sous programme Sol : Il est utilisé pour le calcul des contraintes ( $M_x, M_y, M_{xy}$ ) pour chaque élément.  
 $M_x$  et  $M_y$  sont les moments internes de flexion.  
 $M_{xy}$  est le moment interne de torsion.  
La détermination des contraintes se fait élément par élément.

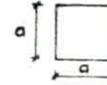
Remarques :

dans notre travail nous avons écrit certains de ces sous programmes et utilisé d'autres tirés du programme BBMEF (réf : G. DHATT et G. TOUZOT , une présentation de la méthode des éléments).

Nous avons réécrit :

- le programme principal .
- le sous programme locef dans certaines versions à cause des connectivités .
- le sous programme ELEMO 0
- le sous programme : Cont et Sol .

Flèches calculées au centre d'une plaque carrée  
POUR Divers maillages



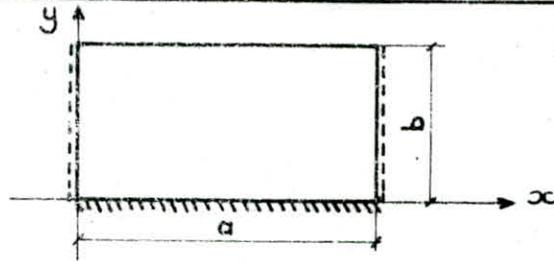
	Maillage	Nombre total de noeuds	Plaque en appui simple		Plaque encastree	
			charge uniforme $\alpha$	charge ponctuelle $\beta$	charge uniforme $\alpha$	charge ponctuelle $\beta$
Résultats obtenus par notre programme	2 x 2	9	0,005063	0,013784	0,001480	0,005919
	4 x 4	25	0,004328	0,012327	0,001403	0,006135
	6 x 4	35	0,004254	0,012140	0,001367	0,006012
	6 x 6	49	0,004181	0,011971	0,001332	0,005910
Résultats obtenus par ZIENKIEWICZ	2 x 2	9	0,003446	0,013784	0,001480	0,005919
	4 x 4	25	0,003939	0,012327	0,001403	0,006134
Solution exacte de Timoshenko			0,004062	0,011600	0,001260	0,005600

$$W_{max} = \alpha \frac{q a^4}{D} \quad \text{pour une charge répartie uniforme } q$$

$$W_{max} = \beta \frac{P a^2}{D} \quad \text{pour une charge ponctuelle au centre } P$$

III.3.1 - Cas de plaques isotropes :  
III.3 - Exemples d'Application :

\* Plaque rectangulaire uniformément chargée à deux bords en appui simple, Le troisième encastré et le dernier libre.

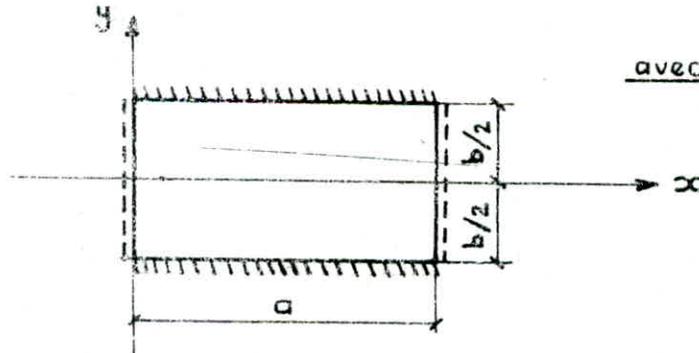


avec:  $\nu = 0,3$

$a/b = 1,5$

Maillage	Nombre de noeuds total	$W$ $x=a/2, y=b$	$M_x$ $x=a/2, y=b$	$M_y$ $x=a/2, y=0$
2 x 2	9	0,0363	0,0779	- 0,230
4 x 2	15	0,0339	0,0625	- 0,199
4 x 4	25	0,0342	0,0606	- 0,227
6 x 4	35	0,0338	0,0583	- 0,221
Solution exacte		0,0335	0,0558	- 0,227
Coeff. multiplication		$q b^4/D$	$q a^2$	$q a^2$

\* Plaque rectangulaire uniformément chargée à deux bords opposés en appui simple et les deux autres encastrés.

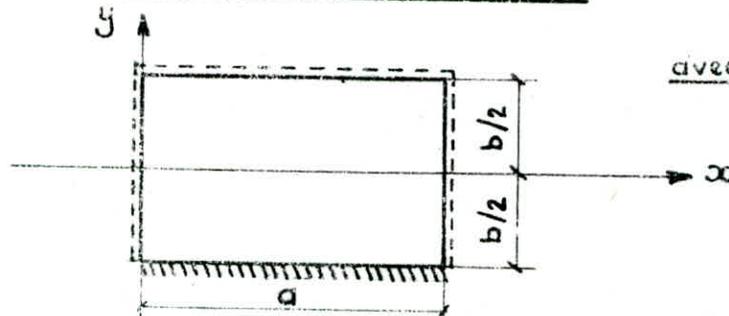


avec:  $\nu = 0,3$

$a/b = 1,5$

Maillage	Nombre de noeuds total	$W$ $x=a/2, y=0$	$M_x$ $x=a/2, y=0$	$M_y$ $x=a/2, y=0$	$M_y$ $x=a/2, y=b/2$
2 x 2	9	0,00358	0,0204	0,0843	- 0,0859
4 x 2	15	0,00270	0,0231	0,0659	- 0,0648
4 x 4	25	0,00271	0,0166	0,0493	- 0,0822
6 x 4	35	0,00259	0,0189	0,0472	- 0,0788
Solution exacte		0,00247	0,0179	0,0406	- 0,0822
Coeff. multiplication		$q b^4/D$	$q b^2$	$q b^2$	$q b^2$

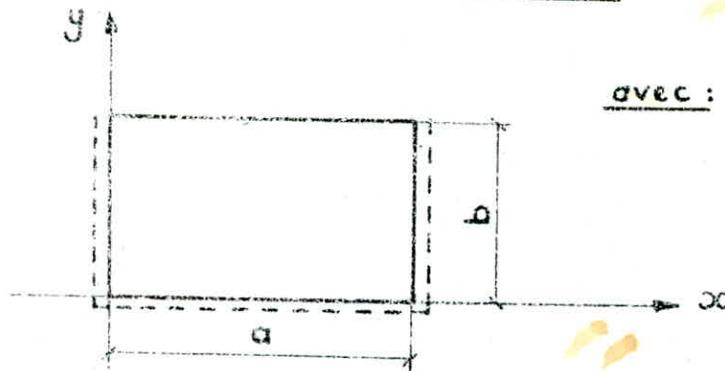
\* Plaque rectangulaire uniformément chargée à trois bords en appui simple et le dernier encastré.



avec :  $\nu = 0,3$   
 $a/b = 1,2$

maillage	nombre de noeuds total.	W $x = a/2, y = 0$	$M_x$ $x = a/2, y = 0$	$M_y$ $x = a/2, y = b/2$	$M_x$ $x = a, y = 0$
2 x 2	9	0,0046	0,045	- 0,095	0,081
4 x 4	25	0,0038	0,035	- 0,097	0,054
6 x 4	35	0,0037	0,034	- 0,094	0,052
Solution exacte		0,0035	0,032	- 0,098	0,047
Coeff. multiplicateur		$qb^4/D$	$qb^2$	$qb^2$	$qb^2$

\* Plaque rectangulaire uniformément chargée à trois bords en appui simple et le dernier Libre.

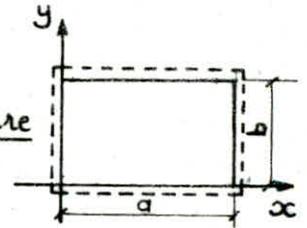


avec :  $\nu = 0,3$   
 $a/b = 1,2$

maillage	nombre de noeuds total.	W $x = a/2, y = b$	$M_x$ $x = a/2, y = b$	$M_x$ $x = a/2, y = b/2$	$M_y$ $x = a/2, y = b/2$
2 x 2	9	0,01117	0,122	0,085	0,052
4 x 4	25	0,01142	0,105	0,073	0,040
6 x 4	35	0,01144	0,103	0,071	0,039
Solution exacte		0,01158	0,100	0,069	0,036
Coeff. multiplicateur		$qa^4/D$	$qa^2$	$qa^2$	$qa^2$

III.3.2 Cas de plaques orthotropes.

Flèches calculées au centre d'une plaque rectangulaire simplement appuyée et uniformément chargée.



\* NOTA : Toutes les unités sont en mètres et en kg.

exemple 1 :

$$a = 5,4 \quad , \quad b = 3,6 \quad , \quad q = 300 \text{ (chargement réparti)}$$

$$D_x = 0,12200 \cdot 10^7 \quad , \quad D_y = 0,25298 \cdot 10^7$$

a/b	D <sub>y</sub> /D <sub>x</sub>	maillage	nombre de noeuds total	W (m) × 10 <sup>3</sup> x = a/2 , y = b/2
1,5	2	2 × 2	9	0,23660
		4 × 4	25	0,19836
		6 × 4	35	0,19186
		Solution exacte de Timoshenko		0,18564

exemple 2 :

$$a = 5,4 \quad , \quad b = 3,6 \quad , \quad q = 650 \text{ (chargement réparti)}$$

$$D_x = 0,10000 \cdot 10^5 \quad , \quad D_y = 0,16000 \cdot 10^6$$

a/b	D <sub>y</sub> /D <sub>x</sub>	maillage	nombre de noeuds total	W (m) × 10 <sup>2</sup> x = a/2 , y = b/2
1,5	16	2 × 2	9	1,16510
		4 × 4	25	0,89626
		6 × 4	35	0,86010
		Solution exacte de Timoshenko		0,83451

Remarque :

variation des moments internes dans l'élément.

de la théorie des plaques, on sait que :

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

donc on a :  $M_x = f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ ,  $M_y = f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ ,  $M_{xy} = f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$

et en utilisant les expressions des courbures et des torsions obtenues au chapitre III.1 (étape IV), on aura :

$$M_x \text{ et } M_y = f \left( 2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy, 2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy \right)$$

$$M_{xy} = f \left( \alpha_5 + 2\alpha_8 x + 2\alpha_9 y + 3\alpha_{11} x^2 + 3\alpha_{12} y^2 \right)$$

donc pour n'importe quelle valeur constante de  $x$  ou de  $y$ , les moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$  varient linéairement à travers l'élément rectangulaire d'autre part, le moment de torsion  $M_{xy}$  varie selon une expression quadratique en  $x$  quand  $y$  est constant et inversement.

Mais nous remarquons à travers les différents exemples que nous avons traités que ces distributions supposées ne sont pas strictement correctes et des discontinuités sont apparues entre les éléments. Les erreurs obtenues sont cependant petites et on peut obtenir de bonnes approximations en faisant la moyenne des valeurs des moments obtenus en chaque noeud particulier.

Conclusion :

L'élément de plaque que nous avons utilisé (élément rectangulaire à quatre noeuds avec trois degrés de liberté par noeud) nous a donné de bons résultats. Cet élément converge, mais la convergence n'est pas toujours monotone.

### III.4 - Application au béton armé

#### III.4.1 - Introduction

Le plus grand problème en béton armé est la fissuration des zones tendues d'où : des conséquences sur l'évaluation des flèches réelles .

A cet effet , les règlements préconisent dans l'article 50 des c.c.B.A 68 :

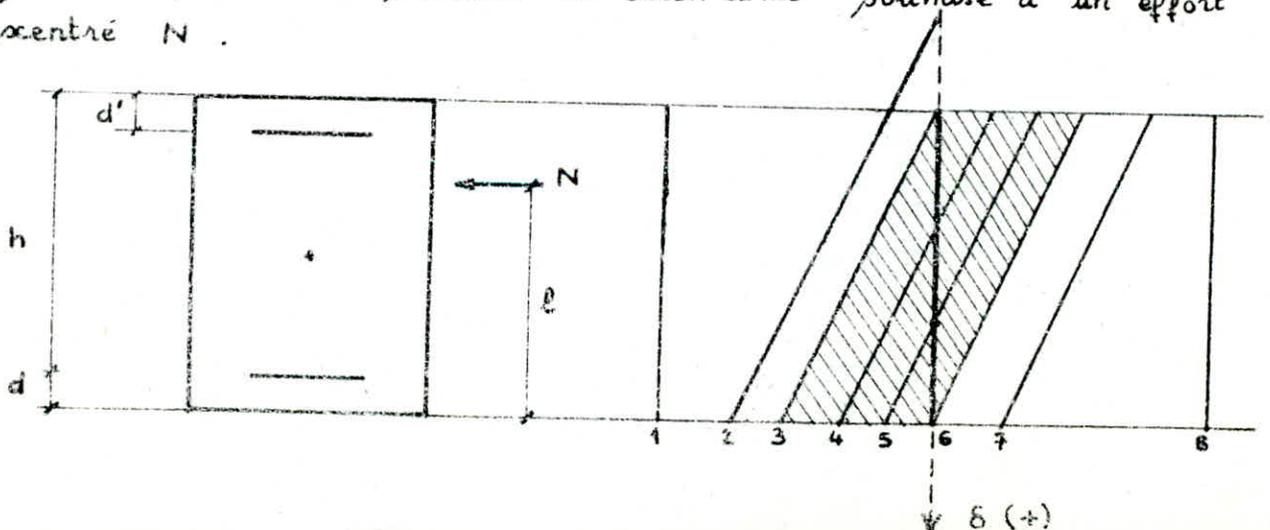
" L'évaluation des flèches sous les charges de service doit tenir compte , dans la mesure aussi exacte que possible , des lois physiques de la déformation des matériaux ainsi que de la conséquence de la fissuration du béton . "

donc pour mieux apprécier à la fois les moments et surtout les flèches , il faut calculer les rigidités, les plus proches de la réalité , de la plaque en béton armé .

Ce qui revient à faire le calcul dans le cas orthotrope et dans le cas du béton tendu fissuré .

#### III.4.2 - Rappel de béton armé .

A) Considérons une section en béton armé soumise à un effort excentré  $N$  .



Convention de signe :



on définit trois zones :

a)  $-\infty < \delta \leq 0$  zone I , position 1-3

b)  $0 \leq \delta \leq \frac{ht}{h}$  zone II , position 3-6

c)  $\frac{ht}{h} \leq \delta < +\infty$  zone III , position 6-8

Plaçons nous en zone II , qui est généralement le cas pour les plaques .

1<sup>er</sup> cas :  $A' = 0$

- équilibre des forces :  $N = A\sigma_a + B'\sigma'_{bm}$

- équilibre des moments :  $(N \times \ell) = B' \times \sigma'_{bm} (h - g \delta h)$   
 $= B' \times \sigma'_{bm} h (1 - g \delta)$

où  $g$  est un facteur dépendant de la loi du comportement du béton .

Par similitude , on a :

$$\frac{(1 - \delta) h}{\epsilon_a} = \frac{\delta h}{-\epsilon'_b} \Rightarrow \frac{1 - \delta}{\delta} = - \frac{\epsilon_a}{\epsilon'_b}$$

$$\text{d'où } \delta (\epsilon_a - \epsilon'_b) = - \epsilon'_b \Rightarrow \delta = - \frac{\epsilon'_b}{\epsilon_a - \epsilon'_b}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{1 - \frac{\epsilon_a}{\epsilon'_b}}$$

en posant :  $\gamma = -\frac{\epsilon_a}{\epsilon'_b}$

on aura :  $\delta = \frac{1}{1 + \gamma}$  et  $\gamma = \frac{1 - \delta}{\delta}$

developons les calculs pour une section rectangulaire  
on a :  $B' = \delta h b$

- équilibre des forces :  $N = A \sigma_a + \delta h b \sigma'_{bm}$

- équilibre des moments :  $N.l = \delta h^2 b \sigma'_{bm} (1 - g \delta)$

on définit  $\beta$  tel que :

$$\beta = \frac{1}{(1 - g \delta) \delta} = \frac{b h^2 \sigma'_{bm}}{N.l}$$

or :  $N - A \sigma_a = \delta h b \sigma'_{bm} = \frac{N.l}{h (1 - g \delta)}$

on définit alors  $\alpha$  tel que :

$$\alpha = \frac{1}{1 - g \delta} = \frac{(N - A \sigma_a) h}{N.l}$$

et on a aussi :  $\alpha = \beta . \delta$

\* cas élastique :  $g = \frac{1}{3}$

si de plus  $N = 0$  (flexion simple) on aura :

$$\begin{cases} \alpha = - \frac{A \sigma_a h}{M} \\ \beta = \frac{b h^2 \sigma'_{bm}}{M} \end{cases}$$

le diagramme triangulaire donne  $\sigma'_b = 2 \sigma'_{bm}$

or  $\gamma = - \frac{\epsilon_a}{\epsilon'_b} = - \frac{\sigma_a / n}{\sigma'_b} = - \frac{\sigma_a}{2 n \sigma'_{bm}}$

et  $\gamma = \frac{1}{\delta} - 1 \Rightarrow \sigma'_{bm} = - \frac{\delta}{2(1-\delta)} \cdot \frac{\sigma_a}{n}$

Posons  $\beta' = \frac{2(1-\delta)}{\delta} \beta$

en remplaçant  $\beta$ , on obtient :  $\beta' = \frac{2(1-\delta)}{\delta} \cdot \frac{b h^2 \sigma'_{bm}}{M}$

en remplaçant encore  $\sigma'_{bm}$  par sa valeur, on obtient :

$$\beta' = - \frac{b h^2 \sigma_a}{n \cdot M}$$

on sait aussi que :  $\beta' = \frac{2(1-\delta)}{\delta} \beta = \frac{2(1-\delta)}{\delta} \cdot \frac{1}{(1-g\delta)\delta}$

comme  $g = \frac{1}{3}$ , on aura :

$$\beta' = \frac{2(1-\delta)}{\delta} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{3}\delta)\delta} = \frac{2(1-\delta)}{\delta^2(1-\delta/3)}$$

$$\beta' = \frac{2(1-\delta)}{\delta^2(1-\delta/3)}$$

Ce coefficient est utile pour déterminer une section :

on fixe  $\sigma_a = \bar{\sigma}_a$ ,  $M$  étant donné,  $bh$  (prédimensionnement)

$\Rightarrow \beta' \Rightarrow \delta \Rightarrow \alpha \Rightarrow A$ .

Soit  $k$  tel que :  $k = \frac{\alpha}{\beta'}$

en flexion simple ( $N=0$ ) on a :  $k = \frac{nA}{bh}$

Ce coefficient est utile pour vérifier une section (état de service)

à partir de :  $A, b, h, M \longrightarrow$  on obtient  $k$

$$k \Rightarrow \delta \Rightarrow \beta' \Rightarrow \sigma'_{bm}$$

et on vérifie :

$$\sigma'_{bm} \leq \frac{\bar{\sigma}'_b}{2}$$

2<sup>e</sup> cas :  $A' \neq 0$

équilibre des forces :  $N = A\sigma_a + A'\sigma'_a + B'\sigma'_{bm}$

équilibre des moments :  $N \cdot l = A'\sigma'_a (h-d') + B'\sigma'_{bm} h (1-g\delta)$

$$\frac{-\epsilon'_a}{\delta h - d'} = \frac{\epsilon_a}{h - \delta h} \quad \epsilon'_a = f(\sigma'_a) \quad \text{et} \quad \epsilon_a = f(\sigma_a)$$

pour une section rectangulaire :

$$\bullet \quad N \cdot l = A'\sigma'_a (h-d') + \delta h^2 b \sigma'_{bm} (1-g\delta)$$

$$\beta = \frac{1}{\delta (1-g\delta)} = \frac{bh^2 \sigma'_{bm}}{N \cdot l - A'\sigma'_a (h-d')}$$

$$\bullet \quad N = A\sigma_a - A'\sigma'_a = \frac{N \cdot l - A'\sigma'_a (h-d')}{n (1-g\delta)}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - g\delta} = \frac{(N.l - A'\sigma'_a - A\sigma_a)h}{N.l - A'\sigma'_a(h-d')}$$

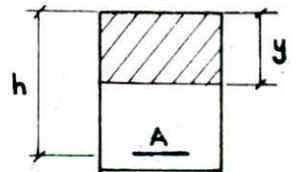
\* cas élastique :  $g = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{l} \sigma_a = E_a \varepsilon_a \\ \sigma'_b = E_b \varepsilon'_b \\ \frac{E_a}{E_b} = n \end{array} \left| \begin{array}{l} \gamma = \frac{-\varepsilon_a}{\varepsilon'_b} = -\frac{\sigma_a E_b}{\sigma'_b E_a} = -\frac{\sigma_a}{n \sigma'_b} \\ \sigma'_b = 2 \sigma'_{bm} \Rightarrow \gamma = -\frac{\sigma_a}{2n \sigma'_{bm}} \end{array} \right.$$

$$\delta = \frac{1}{1 + \gamma} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_a}{n \sigma'_b}}$$

### B) Evaluation des Rigidités.

Soit une section rectangulaire avec  $A' = 0$



son moment d'inertie est :

$$I = \frac{by^3}{3} + nA(h-y)^2$$

$$y = \delta h \Rightarrow I = \frac{bh^3}{3} \delta^3 + nA(h-\delta h)^2$$

$$k = \frac{nA}{bh} \Rightarrow nA = kbh$$

$$\text{d'où } I = \frac{bh^3}{3} \delta^3 + kbh^3(1-\delta)^2$$

$$I = bh^3 \left[ \frac{\delta^3}{3} + k(1-\delta)^2 \right]$$

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{\alpha}{\beta'} = \frac{\beta \delta}{\beta'} \\ \beta &= \beta' \frac{\delta}{2(1-\delta)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = \frac{\frac{\beta' \delta}{2(1-\delta)} \delta}{\beta'} = \frac{\delta^2}{2(1-\delta)}$$

$$I = bh^3 \left[ \frac{\delta^3}{3} + \frac{\delta^2}{2(1-\delta)} (1-\delta)^2 \right]$$

$$I = bh^3 \left[ \frac{\delta^3}{3} + \frac{\delta^2(1-\delta)}{2} \right] = bh^3 \left[ \frac{-\delta^3 + 3\delta^2}{6} \right]$$

$$I = bh^3 \left[ \frac{\delta^2(1-\delta/3)}{2} \right] \times \frac{\delta-1}{\delta-1}$$

$$I = bh^3 \left[ \frac{\delta^2(1-\delta/3)}{2(1-\delta)} \times (1-\delta) \right]$$

$$I = bh^3 \left[ \frac{1}{\beta'} (1-\delta) \right] = bh^3 \frac{1-\delta}{\beta'}$$

$$I = bh^3 \frac{(1-\delta)\delta}{\beta'\delta} = bh^3 \frac{\delta\delta}{\beta'}$$

en posant  $\lambda = \frac{\beta'}{\delta\delta} \rightarrow \boxed{I = \frac{bh^3}{\lambda}}$

de même les rigidités de la plaque seront évaluées par :

$$D_x = \frac{E_m h_x^3}{\lambda_x (1-\nu^2)} \quad ; \quad D_y = \frac{E_m h_y^3}{\lambda_y (1-\nu^2)}$$

$$D_1 = \nu \sqrt{D_x D_y} \quad ; \quad D_{xy} = \frac{1-\nu}{2} \sqrt{D_x D_y}$$

avec  $E_m = 200\,000$  bars

Les relations précédentes sont valables dans le cas où  $A' = 0$  avec :

$$\beta' = - \frac{b h^2 \sigma_a}{n \cdot M} = \frac{2 (1 - \delta)}{(1 - \delta/3) \delta^2}$$

$$\delta = - \frac{\sigma_a}{2 n \sigma'_{bm}} = \frac{1}{\delta} - 1$$

$$k = \frac{n A}{b h} = \frac{\delta^2}{2 (1 - \delta)}$$

$$\delta = - \frac{A \sigma_a}{b h \sigma'_{bm}}$$

Pour l'application au béton armé aux états de service, on a deux types de problèmes :

1°) Problème de détermination :

- on calcule les moments, en premier lieu, dans le cas isotrope homogène ( $D_x = D_y = D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$ )  $\implies M$

- en posant  $\sigma_a = \bar{\sigma}_a$ , on calcule  $\beta' = - \frac{b h^2 \bar{\sigma}_a}{n \cdot M}$

- on calcule ensuite  $\delta$  par la résolution d'une équation du 3<sup>e</sup> degré :

$$\beta' = \frac{2 (1 - \delta)}{(1 - \delta/3) \delta^2}$$

- on calcule  $A$  à partir de  $k = \frac{n A}{b h} = \frac{\delta^2}{2 (1 - \delta)}$

$$\implies \boxed{A = \frac{\delta^2 b h}{2 n (1 - \delta)}}$$

2°) Problème de vérification.

- Connaissant  $k = \frac{nA}{bh}$ , on détermine  $\delta$  par la résolution

d'une équation du 2<sup>e</sup> degré :  $k = \frac{\delta^2}{2(1-\delta)}$

- à partir de  $\delta$ , on détermine  $\beta'$  et  $\gamma$  d'où :

$$\lambda = \frac{\beta'}{\gamma \delta}$$

- on réévalue les rigidités :  $D = \frac{E h^3}{\lambda (1-\nu^2)}$

- on calcule les moments  $M$  dans le cas orthotrope et on obtient des flèches qui se rapprochent de la réalité.

- à partir de  $\beta'$  on vérifie si :  $\sigma_a \leq \bar{\sigma}_a$

à partir de  $\gamma$  ou  $\delta$  on vérifie si :  $\sigma'_{bm} \leq \frac{\bar{\sigma}'_b}{2}$

determination du module d'élasticité acier-béton ( $E_m$ ).

$$E'_b = E'_i + E'_f \quad E'_i \rightarrow \text{instantané}, E'_f \rightarrow \text{différé (fluage)}$$

$$E'_b = \frac{\sigma'_b}{E_b} + \frac{\sigma'_b}{E_b} \Psi_t = \frac{\sigma'_b}{E_b} (1 + \Psi_t) \quad \Psi_t : \text{coef. de fluage}$$

dans les règlements des c.c.B.A 68 on a :

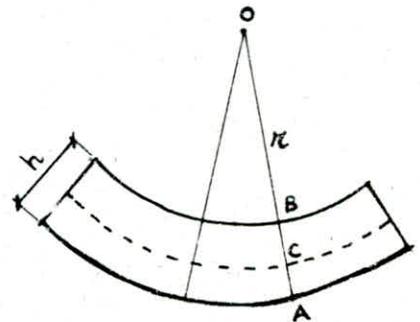
$$E_b = 21000 \sqrt{\sigma'_j} \quad (\text{en bars}) \rightarrow \text{instantané}$$

$$(E_b)_\infty = \frac{E_b}{3} = 7000 \sqrt{\sigma'_j} \quad (\text{en bars}) \rightarrow \text{de longue durée}$$

$\Rightarrow 1 + \Psi_t = 3$  on a donc  $\Psi_t = 2$  si tout est différé.

l'article 50 des c.c.BA dit :

$$\frac{E'_b}{CB} = \frac{E_a}{CA} = \frac{1}{\pi} = \frac{E'_b + E_a}{h}$$



$\pi$  : rayon de courbure.

$h$  : hauteur utile de la section.

$$\Rightarrow \frac{h}{\pi} = E'_b + E_a = 2 E_m$$

on va évaluer  $E_m$  tel que :  $E_m = \frac{\sigma'_b}{E_m}$

on a :

$$\frac{2 \sigma'_b}{E_m} = E_m + E'_b = \frac{\sigma_a}{E_a} + \frac{\sigma'_b}{E_b} (1 + \Psi_t) \frac{P_\infty}{P_i + P_\infty} + \frac{\sigma'_b}{E_b} \cdot \frac{P_i}{P_i + P_\infty}$$

$$= \frac{\sigma_a}{E_a} + \frac{\sigma'_b}{E_b} \cdot \frac{P_i + P_\infty (1 + \Psi_t)}{P_i + P_\infty}$$

$$\frac{2}{E_m} = \frac{1}{E_b} \left[ \frac{\sigma_a}{\sigma'_b} \cdot \frac{E_b}{E_a} + \frac{P_i + P_\infty (1 + \Psi_t)}{P_i + P_\infty} \right]$$

si on pose  $\frac{P_i}{P_i + P_\infty} = Q \Rightarrow \frac{P_\infty}{P_i + P_\infty} = 1 - Q$

$$\Rightarrow E_m = E_b \frac{2}{\frac{\sigma_a}{n \sigma'_b} + Q + (1 + \Psi_t)(1 - Q)}$$

dans le cas de bâtiment courant où  $\sigma_a$  et  $\sigma'_b$  sont au maximum

ona :  $Q \approx 0,3$  et  $\Psi_t = 2 \Rightarrow E_m = 345000 \frac{2}{1,38 + 0,3 + 3 \times 0,7} = 185000$  bars

- dans le cas de charge instantanée :  $Q = 1 \Rightarrow E_m = 290000$  bars

- dans le cas de charge de longue durée :  $Q = 0 \Rightarrow E_m = 160000$  bars

III.4.3 - Exemple d'application

L'exemple que nous allons exposer a été traité par Jean PERA dans sa thèse de doctorat : "Contribution au calcul aux états limites des structures en béton armé."

Monsieur Jean PERA a étudié une dalle en béton armé sur laquelle il a fait des expériences notamment pour la détermination des flèches sous les différentes charges.

Ces flèches expérimentales nous intéressent beaucoup, puisque nous allons calculer la même dalle et comparer nos résultats avec ceux obtenus expérimentalement.

Cas traité par Jean PERA :

L'étude proposée porte sur une dalle carrée de 2,5 mètres de portée simplement appuyée sur son contour. Les charges sont appliquées en quatre points.

Le ferrailage adopté est :  
deux nappes d'armatures identiques dans deux directions perpendiculaires ;  
pour chaque nappe :

$$23 \varnothing 14 \text{ FeE40 } e = 12$$

Résultats obtenus :

Q totale en KN	400
Flèche au centre, expérimentale en $10^{-3} \text{ m}$	5,01
Flèche sous une charge expérimentale en $10^{-3} \text{ m}$ .	3,59

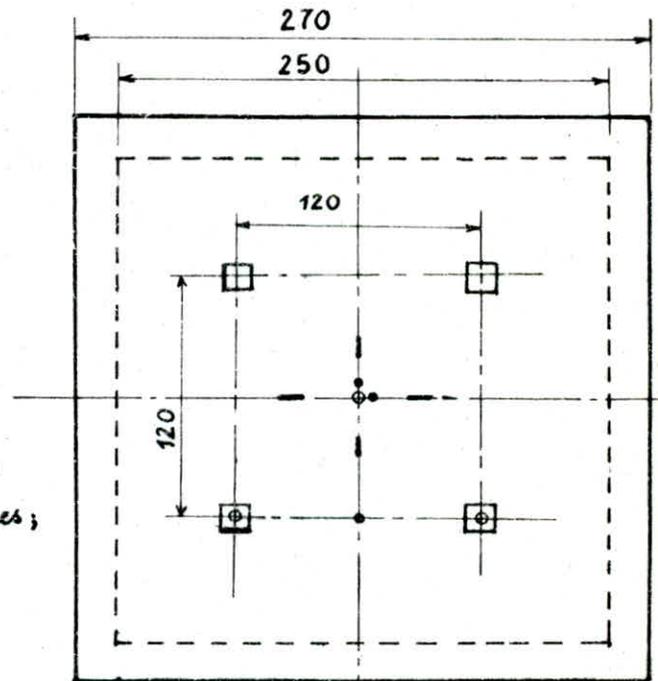


fig 1.

----- ligne d'appui

- plaque de chargement (13,5x13,5)
- jauge de béton
- jauge d'acier
- o capteur de déplacement

notre travail consiste en l'étude de la dalle précédente en béton armé aux états de service et la détermination des flèches que nous comparerons par la suite aux résultats expérimentaux.

1°) Calcul en plaque isotrope.

a) discrétisation de la plaque :

Le maillage employé est un maillage 4x4 (16 éléments, 25 noeuds).

La discrétisation a été choisie de telle sorte que les charges appliquées aux quatre points indiqués sur la figure 1 tombent sur quatre noeuds de la plaque.

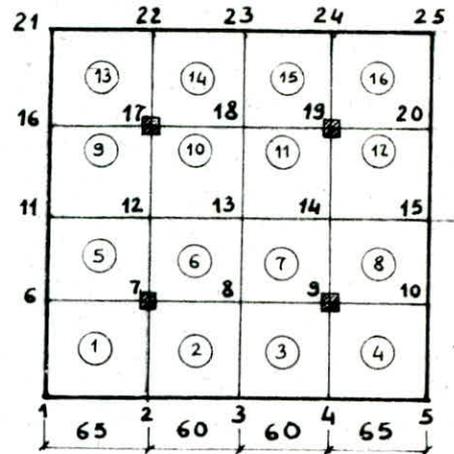


fig 2.

données nécessaire au programme :

$$D_x = D_y = 0,10880 \cdot 10^7$$

$$D_1 = 0,16310 \cdot 10^6$$

$$D_{xy} = 0,46220 \cdot 10^6$$

$$P_7 = P_9 = P_{17} = P_{19} = 10^4$$

nota : toutes les unités sont en mètre et en kg

$P_i$  : charge concentrée au noeud (i) en kg

Resultats obtenus :

	$W(m) \times 10^3$	$M_x = M_y$
Sous charge	0,77476	2692,7
au centre	1,24120	1956,6

\* détermination des armatures :

$$\beta' = \frac{b h^2 \sigma_a}{n \cdot M} \quad \text{avec} \quad \sigma_a = \bar{\sigma}_a \quad \text{et} \quad h = 12,7 \text{ cm}$$

$$\beta' = \frac{100 \cdot (12,7)^2 \cdot 2800}{15 \cdot (2692,7 \cdot 100)} = 11,18$$

$$\beta' = \frac{2(1-\delta)}{(1-\delta/3)\delta^2} \Rightarrow \delta^3 - 3\delta^2 - 0,537\delta + 0,537 = 0$$

$$\Rightarrow \delta = 0,36$$

$$A = \delta^2 \frac{bh}{2n(1-\delta)} \Rightarrow A = 8,57 \text{ cm}^2$$

on prendra les memes armatures dans les deux sens : 6  $\phi$  14, e=15  
 $A_x = A_y = 9,24 \text{ cm}^2 / \text{ml}$

évaluation des rigidités :

$$\delta = \frac{1}{\delta} - 1 = 1,78 \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{\beta'}{\delta\delta} = 17,45$$

on a :  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda = 17,45$

$$D_x = \frac{E_m \cdot h_x^3}{\lambda_x (1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^9 \cdot (0,127)^3}{17,45 (1-0,15^2)} = 2,402 \cdot 10^5$$

$$D_y = \frac{E_m \cdot h_y^3}{\lambda_y (1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^9 (0,113)^3}{17,45 (1-0,15^2)} = 1,632 \cdot 10^5$$

$$D_1 = \nu \sqrt{D_x \cdot D_y} = 3,024 \cdot 10^4$$

$$D_{xy} = \frac{1-\nu}{2} \sqrt{D_x \cdot D_y} = 8,568 \cdot 10^4$$

2°) calcul en plaque orthotrope :

données nécessaires au programme :

$$D_x = 2,402 \cdot 10^5$$

$$D_y = 1,632 \cdot 10^5$$

$$D_1 = 3,024 \cdot 10^4$$

$$D_{xy} = 8,568 \cdot 10^4$$

$$P_7 = P_9 = P_{17} = P_{19} = 10^4$$

résultats obtenus :

	W(m) $\times 10^3$	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>
sous charge	4,1544	3035,3	2375,9
au centre	6,6383	2415,6	1529,8

\* Vérification :

$$k = \frac{n A}{b h} = \frac{\text{Sens } x}{100 \cdot 12,7} = 0,109$$

$$k = \frac{\delta^2}{2(1-\delta)} \Rightarrow \delta^2 + 2k\delta - 2k = 0$$

$$\Rightarrow \delta = 0,37$$

$$\beta' = \frac{2(1-\delta)}{(1-\delta/3)\delta^2} = 10,5$$

$$\text{or } \beta' = \frac{b h^2 \sigma_a}{n \cdot M} \Rightarrow \sigma_a = \frac{\beta' \cdot n \cdot M}{b h^2} = \frac{10,5 \cdot 15 \cdot 303530}{100 \cdot (12,7)^2}$$

$$\sigma_a = 2963,98 \text{ kg/cm}^2 > \bar{\sigma}_a = 2800 \text{ kg/cm}^2$$

Il faudra donc augmenter les armatures, prenons celles qui ont été prises par Jean PERA c'est à dire :

23  $\varnothing$  14 (sur les 2,5 m) dans les deux sens.

• réévaluation des rigidités

$$\text{sens } x : k_x = \frac{n A_x}{b h_x} = \frac{15 \cdot 35,24}{250 \cdot 12,7} = 0,167$$

$$k_x = 0,167 \Rightarrow \delta_x = 0,435 \Rightarrow \gamma_x = 1,299 \Rightarrow \beta'_x = 6,384$$

$$\lambda_x = 12,35$$

sens y :

$$k_y = \frac{n A_y}{b h_y} = \frac{15 \cdot 35,24}{250 \cdot 11,3} = 0,188$$

$$k_y = 0,188 \Rightarrow \delta_y = 0,453 \Rightarrow \gamma_y = 1,208 \Rightarrow \beta'_y = 6,279$$

$$\lambda_y = 11,47$$

$$D_x = \frac{E_m \cdot h_x^3}{\lambda_x (1-\nu^2)} = 3,391 \cdot 10^5$$

$$D_y = \frac{E_m \cdot h_y^3}{\lambda_y (1-\nu^2)} = 2,398 \cdot 10^5$$

$$D_1 = \nu \sqrt{D_x \cdot D_y} = 4,269 \cdot 10^4$$

$$D_{xy} = \frac{1-\nu}{2} \sqrt{D_x \cdot D_y} = 1,210 \cdot 10^5$$

Si on introduit ces données à notre programme, nous obtenons les résultats suivants :

	$W(m) \times 10^3$	$M_x$	$M_y$
sous charge	2,94	3034,8	2375,8
au centre	4,70	2414,9	1529,6

\* vérification :

$$\sigma_a = \beta' \frac{n \cdot M}{b h^2} = 6,984 \cdot \frac{15 \cdot 303480}{100 \cdot (12,7)^2} = 1971 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_a = 1971 \text{ kg/cm}^2 < \bar{\sigma}_a = 2800 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_{bm} = \frac{\sigma_a}{2n\gamma_x} = \frac{1971}{2 \times 15 \times 1,25} = 50,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_{bm} = 50,6 \text{ kg/cm}^2 < \frac{\bar{\sigma}'_b}{2} = \frac{137}{2} = 68,5 \text{ kg/cm}^2$$

donc les résultats obtenus sont vérifiés.

\* Comparaison des résultats obtenus avec l'expérience.

pêches	$W(m) \times 10^3$			experimentales
	Cas isotrope	Cas orthotrope		
sous charge	0,77	2,94	3,06	3,59
au centre	1,24	4,70	4,91	5,01

Les résultats obtenus montrent clairement que dans le cas isotrope, les pêches réelles sont sous estimées.

alors que dans le cas orthotrope, les pêches sont proches des valeurs expérimentales.

Ces résultats peuvent être améliorés en raffinant le maillage et en tenant compte des lois de comportement réel du matériau béton armé.

---

## **4. calcul par assimilation à un grillage de poutres**

## IV - CALCUL PAR ASSIMILATION A UN GRILLAGE DE POUTRES

### IV.1 Théorie des Equivalences

#### IV.1.1 - Préliminaire

Vers les années 1960, Monsieur ABSI a examiné le problème de l'assimilation d'une dalle à un grillage de poutres.

En effet on peut être tenté de découper la dalle, droite ou biaise, en tranches disposées parallèlement aux côtés (fig. 1 et 2) et d'assimiler chaque tranche à une poutre (AB ou CD) dont les caractéristiques sont celles de la tranche considérée.

Cette manière de procéder est d'ailleurs largement utilisée pour le calcul des barrages-voûtes (fig. 3) qu'on découpe en arcs (AB) et consoles (CD).

Cet examen a amené l'auteur à définir les conditions générales d'équivalence entre une dalle et un grillage de poutres et à entreprendre un important travail de vérification numérique. ce premier travail a été le point de départ de la "théorie des équivalences".

Depuis, l'auteur a poursuivi ses recherches et a étendu son domaine d'application.

Actuellement la théorie des équivalences constitue une voie intéressante s'adaptant parfaitement aux ordinateurs.

Elle constitue une approche générale permettant

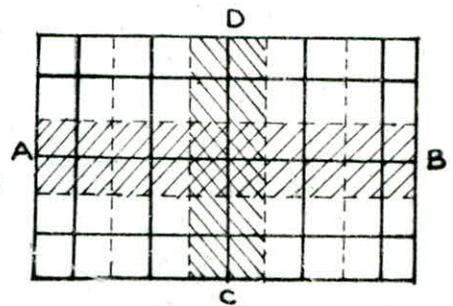


Fig. 1.

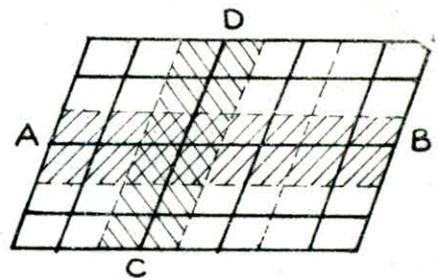


Fig. 2.

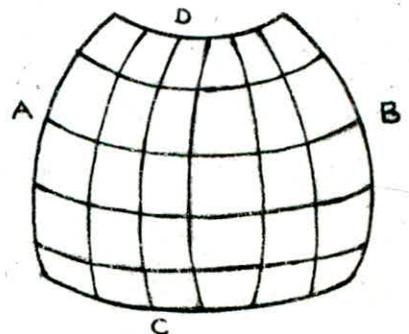


Fig. 3.

de substituer à l'étude d'un corps chargé celle d'un autre corps fictif plus accessible au calcul.

ce corps fictif peut présenter des caractéristiques et des lois de comportement n'ayant aucun sens physique.

#### IV.1.2 Etude des dalles

Considérons une dalle de plan moyen  $(x, y)$ , l'énergie de déformation par unité de surface est donnée par la relation suivante

$$U_0 = \frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] \quad (1)$$

où  $D$  est la rigidité de la dalle :

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad h \text{ étant l'épaisseur de la dalle}$$

##### a) cas d'une dalle parfaitement encastres sur son contour

considérons le terme  $u_0 = \nu D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$

on a :  $\int_S u_0 ds = 0$  où  $S$  est la surface de la dalle.

en conséquence, on peut prendre comme énergie de déformation  $U'_0$  dans le corps équivalent la quantité :

$$U'_0 = \frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

##### b) cas où le coefficient de poisson est nul.

dans le cas où  $\nu = 0$ , l'équation (1) se réduit à :

$$U_0 = \frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (2)$$

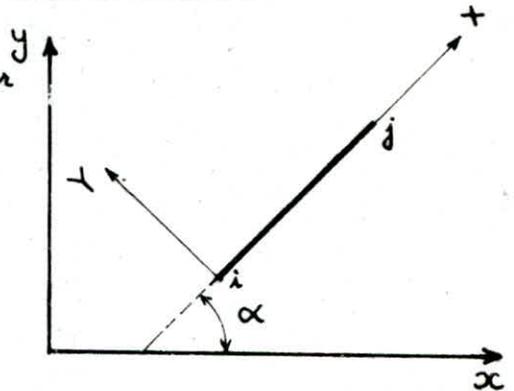
en résumé :

l'expression (2) de  $U_0$  est valable dans le cas où  $v=0$  ou si la dalle est parfaitement encadrée sur son contour.

Par contre, elle constitue une valeur dont l'approximation est très suffisante dans les autres cas.

C) Energie de flexion et de torsion dans une barre

considérons une barre (ij) de longueur  $l$ . associons-lui un système de référence propre  $(X, Y)$ .



designons par  $M_f$ , le moment de flexion

$$M_f = EI \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$$

or : 
$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cdot \sin^2 \alpha$$

l'énergie de flexion  $W_f$ , s'écrit alors :

$$W_f = \frac{1}{2} \cdot M_f \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \cdot l = \frac{1}{2} EI l \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right)^2$$

en posant  $(EI l)_{ij} = \rho'_{ij}$

l'énergie de flexion pour la barre (ij) s'écrit :

$$W_f = \frac{1}{2} \rho'_{ij} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cdot \sin^2 \alpha \right] \quad (3)$$

■ energie de torsion:

designons par  $M_t$ , le moment de torsion

$$M_t = GJ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad \text{où } GJ \text{ est la rigidité à la torsion.}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial x} (-\sin \alpha) + \frac{\partial W}{\partial y} (\cos \alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial W}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial W}{\partial y} \cos \alpha \right)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

l'énergie de torsion s'écrit alors :

$$W_t = \frac{1}{2} M_t \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} l = \frac{1}{2} GJ l \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2$$

en posant  $(GJl)_{ij} = \gamma_{ij}$

$$W_t = \frac{1}{2} GJl \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right]$$

on sait que :  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$   
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

l'énergie à la torsion de la barre (ij) s'écrit alors :

$$W_t = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right] \quad (4)$$

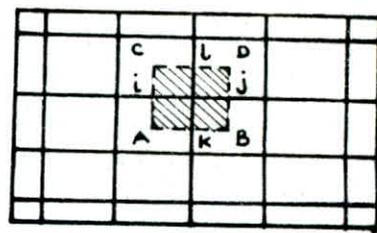
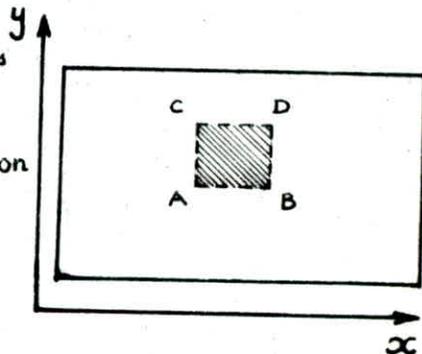
d) Modèles équivalents constitués par un grillage orthogonal de poutres.

En adoptant l'expression (2) pour  $U_0$ , on peut obtenir un modèle équivalent constitué par un grillage orthogonal de poutres dont l'utilisation est très commode dans la pratique.

Déterminons les caractéristiques des éléments  $(ij)$  et  $(kl)$ .

En désignant par  $W_0$  l'énergie de déformation emmagasinée dans un élément de surface rectangulaire  $A$  délimité par  $(i, j, k, l)$  on a :

$$W_0 = A U_0 = \frac{1}{2} AD \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$



en désignons par  $W$  l'énergie de flexion et de torsion dans les barres  $(ij)$  et  $(kl)$  on aura :

$$W = (W_f + W_t)_{ij} + (W_f + W_t)_{kl}$$

en utilisant les expressions (3) et (4), on aura :

$$W = \frac{1}{2} \left[ \rho'_{ij} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \rho'_{kl} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + (\delta_{ij} + \delta_{kl}) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

or  $W = W_0$ , on obtient par identification :

$$\rho'_{ij} = \rho'_{kl} = A \cdot D \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} (\delta_{ij} + \delta_{kl}) = A \cdot D \quad (6)$$

remarque :

On voit que les deux paramètres de flexion ( $\rho'_{ij}$  et  $\rho'_{kl}$ ) sont bien déterminés, alors que les paramètres de torsion ( $\delta_{ij}$  et  $\delta_{kl}$ ) peuvent prendre des valeurs arbitraires sous réserve que la relation (6) soit vérifiée.

e) détermination des sollicitations dans le corps réel,

designons par  $M_{ij}$  et  $M_{kl}$ , les moments de flexion le long respectivement des éléments (ij) et (kl).

d'après la résistance des matériaux, on a :

$$\left(\frac{M}{EI}\right)_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \left(\frac{M}{EI}\right)_{kl} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

la relation (5) peut s'écrire :

$$\rho'_{ij} = (EI l)_{ij} = A \cdot D = (l_{ij} \times l_{kl}) \cdot D$$

$$\text{on a : } EI l_{ij} = (l_{ij} \times l_{kl}) \cdot D$$

$$\text{d'où } (EI)_{ij} = l_{kl} \cdot D$$

$$\text{de même } (EI)_{kl} = l_{ij} \cdot D$$

d'après la théorie des plaques, on sait que :

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]$$

en remplaçant chaque terme par sa valeur, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= - \left[ \frac{M_{ij}}{l_{kl}} + \nu \frac{M_{kl}}{l_{ij}} \right] \\ M_y &= - \left[ \frac{M_{kl}}{l_{ij}} + \nu \frac{M_{ij}}{l_{kl}} \right] \end{aligned}}$$

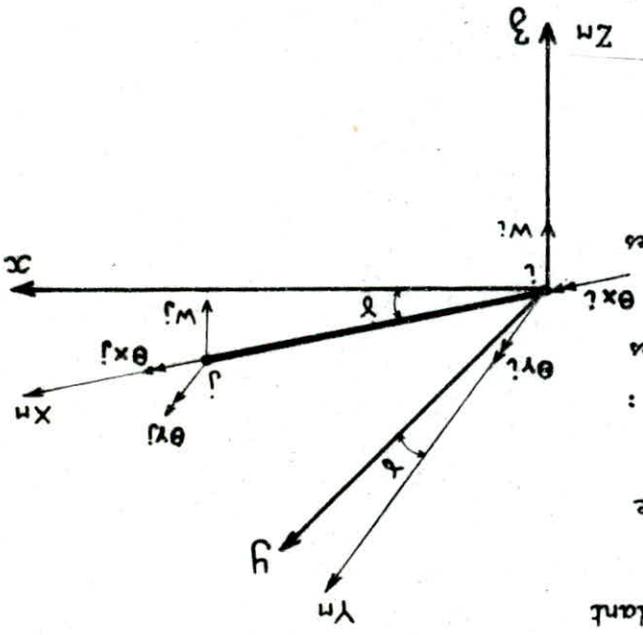
IV.2 - Element fini de poutre

IV.2.1 - matrice de rigidite elementaire

L'element fini de poutre utilise est un element a deux noeuds possedant trois degres de liberte en chaque noeud c'est a dire un total de six degres de liberte.

Les degres de liberte par noeud sont :

- une rotation autour de l'axe des  $X_M$ , notee :  $\theta_X$
- une rotation autour de l'axe des  $Y_M$ , notee :  $\theta_Y$
- un déplacement transversal le long de l'axe  $Z_M$ , note :  $w$



le systeme  $(X_M, Y_M, Z_M)$  est local. le systeme  $(X, Y, Z)$  est global.

la matrice de rigidite dans le systeme local est donnee ci dessous :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \frac{L}{GJ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{GJ} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{GJ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ} \end{bmatrix}$$

notons que cette matrice a été obtenue dans le repère local de l'élément  $(X_n, Y_n, Z_n)$ .

Les différents éléments d'une même structure n'auront pas nécessairement les mêmes repères locaux. Ce qui nous amène à définir pour une structure donnée un repère global par rapport auquel nous définirons toutes les matrices de rigidité élémentaires.

La matrice de rigidité élémentaire dans le repère global s'obtient à partir de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local d'après la relation suivante :

$$[K^e] = [T]^T [K^e_l] [T]$$

où  $[T]$  est une matrice de passage, liant les deux repères.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

notons par :

$$C_x = \cos \gamma$$
$$C_y = \sin \gamma$$

la matrice de rigidité élémentaire dans le repère global est donnée par la relation précédente et est notée  $[K^e]$ .

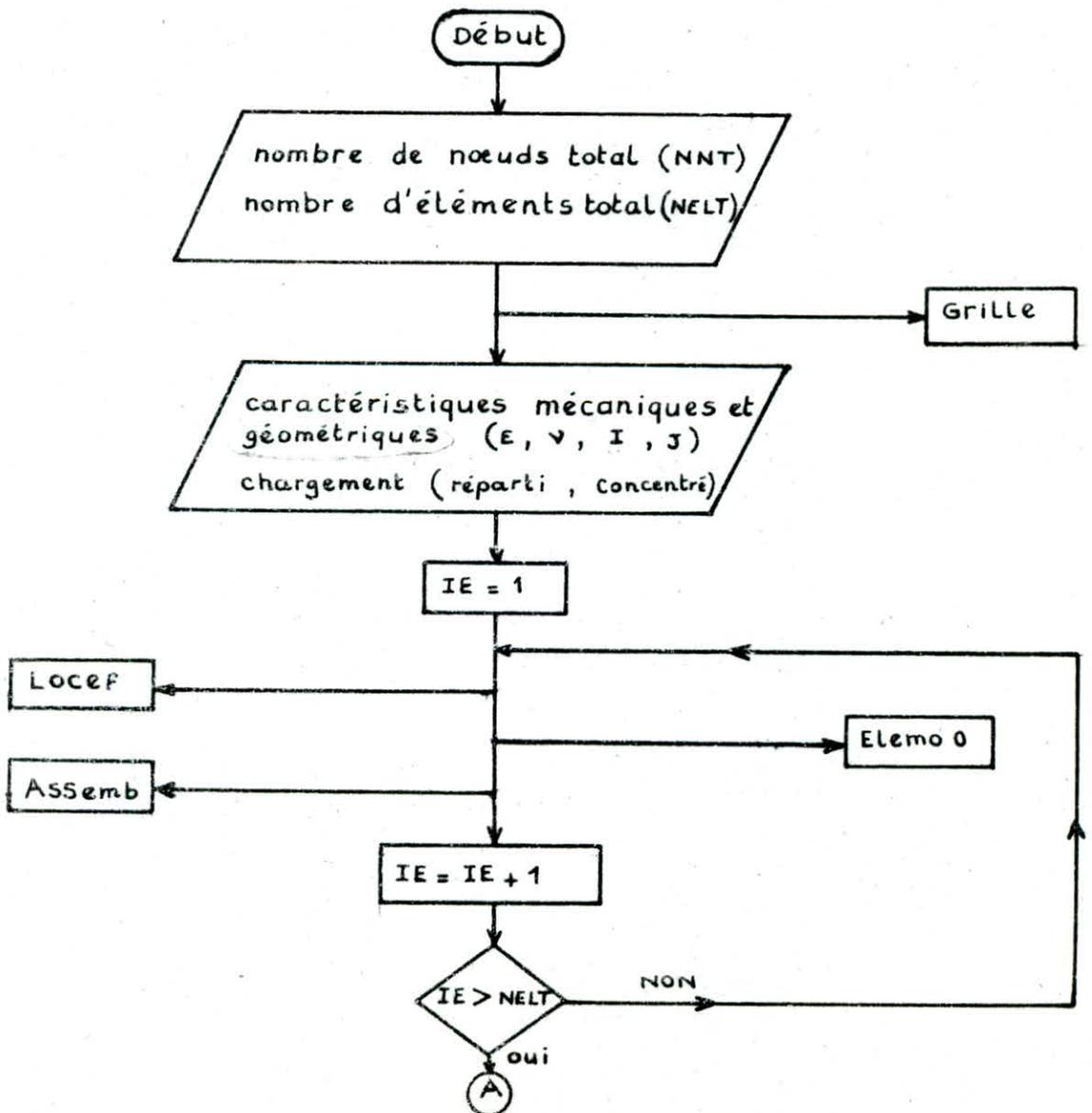
$$\begin{bmatrix}
 \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EIY}{L} C_y & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EIY}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EIY}{L^2} C_y & -\frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{2EIY}{L} C_y^2 & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EIY}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EIY}{L^2} C_y \\
 \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EIY}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EIY}{L} C_x^2 & \frac{6EIY}{L^2} C_x & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EIY}{L}\right) C_x C_y & -\frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{2EIY}{L} C_x^2 & -\frac{6EIY}{L^2} C_x \\
 -\frac{6EIY}{L^2} C_y & \frac{6EIY}{L^2} C_x & \frac{12EIY}{L^3} & -\frac{6EIY}{L^2} C_y & \frac{6EIY}{L^2} C_x & -\frac{12EIY}{L^3} \\
 -\frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{2EIY}{L} C_y^2 & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EIY}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EIY}{L^2} C_y & \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EIY}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EIY}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EIY}{L^2} C_y \\
 -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EIY}{L}\right) C_x C_y & -\frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{2EIY}{L} C_x^2 & \frac{6EIY}{L^2} C_x & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EIY}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EIY}{L} C_x^2 & -\frac{6EIY}{L^2} C_x \\
 \frac{6EIY}{L^2} C_y & -\frac{6EIY}{L^2} C_x & -\frac{12EIY}{L^3} & -\frac{6EIY}{L^2} C_y & \frac{6EIY}{L^2} C_x & \frac{12EIY}{L^3}
 \end{bmatrix}$$

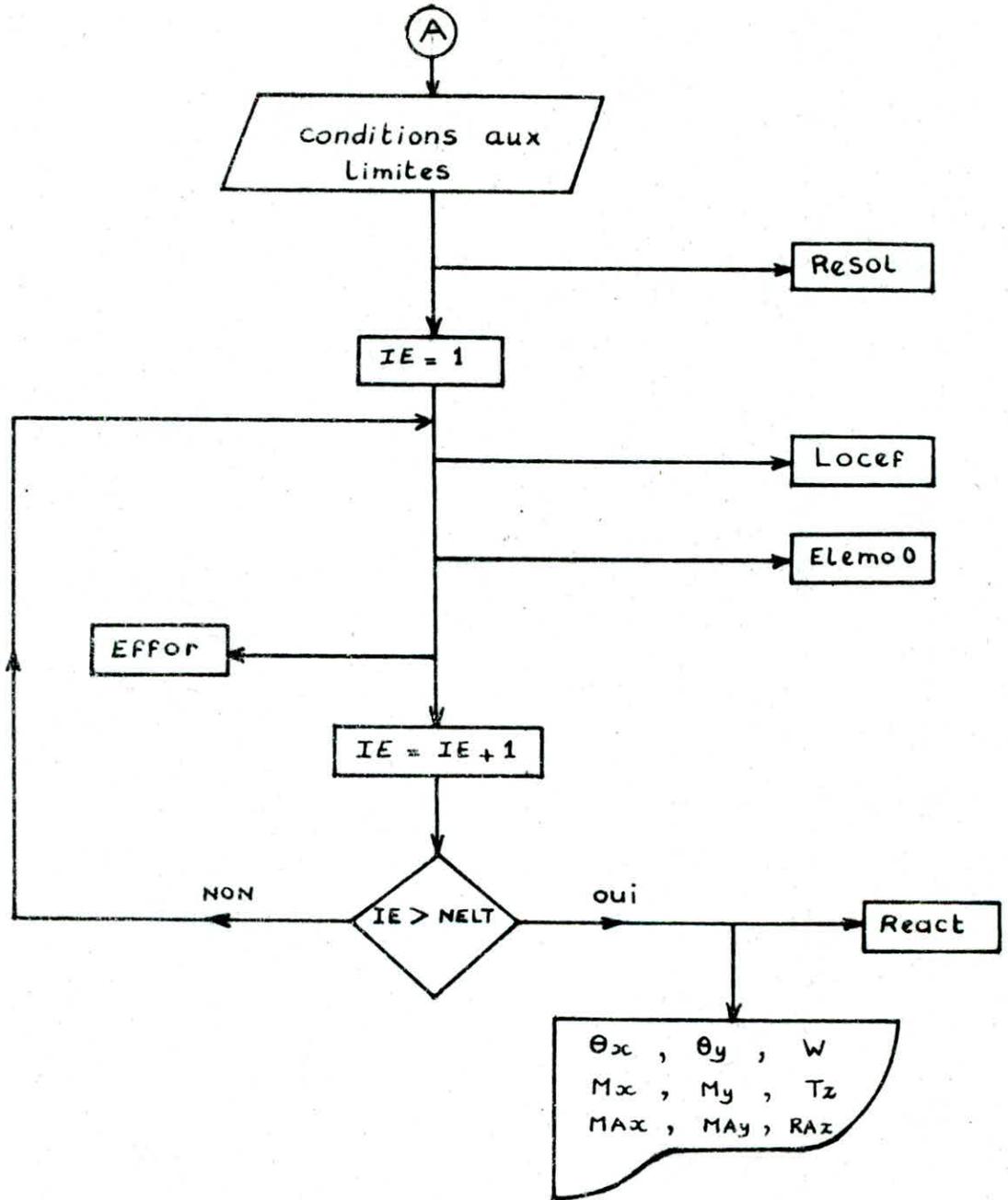
$[K^2] =$

IV.2.2 Programmation de l'élément de poutre

Pour l'élément de poutre, nous avons utilisé le programme de l'élément de plaque avec certaines modifications notamment le sous programme Elemo0 contenant la matrice de rigidité, et quelques modifications au niveau du programme principal tel que le nombre de noeuds par élément (NNEL), le nombre de degrés de liberté par noeud (NDLN), le nombre de degrés de liberté par élément (NDLE), etc...

a) Organigramme :





b) Fonctionnement du programme :

Le programme conçu pour l'élément de poutre fonctionne exactement de la même façon que celui de l'élément de la plaque. Néanmoins il existe des modifications au niveau du calcul des contraintes et des réactions.

\* calcul des contraintes :

on a utilisé la matrice élémentaire pour déterminer les contraintes dans chaque élément.

$$\{H^e\} = [K^e] \{\delta^e\}$$

$[K^e]$  : matrice de rigidité élémentaire.

$\{\delta^e\}$  : déplacements élémentaires.

$\{H^e\}$  : contraintes élémentaires.

\* calcul des réactions :

Pour le calcul des réactions d'appuis  $R$ , on doit calculer le résidu :

$$\{R\} = [K] \{\delta\} - \{F\}$$

$[K]$  : matrice de rigidité globale sans conditions aux limites.

$\{\delta\}$  : déplacements globaux.

$\{F\}$  : sollicitations extérieures sans conditions aux limites.

$\{R\}$  : réactions d'appuis.

$R_i = 0$  lorsque le degré de liberté est libre.

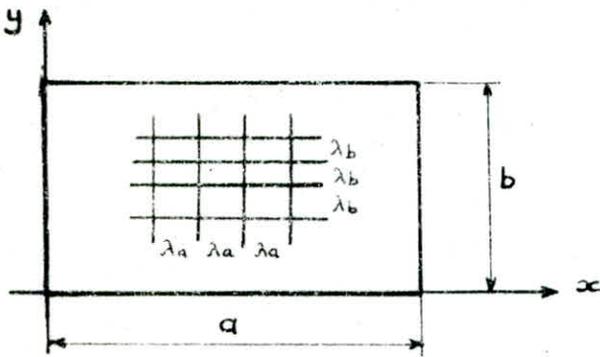
$R_i \neq 0$  lorsque le degré de liberté est bloqué.

remarque : dans notre travail, nous avons repris le programme conçu pour l'élément de plaque auquel on a apporté des modifications au niveau du programme principal et nous avons écrit les sous programmes suivants :

- le sous programme EFFOR (utilisé pour le calcul des contraintes)
- le sous programme Réact (utilisé pour le calcul des réactions d'appuis)

IV.3 - Exemples d'application :

- Schéma type d'une dalle



convention de notation

- $a$  Longueur de la dalle
- $b$  largeur de la dalle
- $h$  épaisseur de la dalle
- $\lambda_a$  et  $\lambda_b$  Espacements des axes du grillage.

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

rigidité à la flexion de la dalle

Nota : toutes les unités sont en mètres et en tonnes.

exemple 1

plaque carrée totalement encastree

$a = b = 4,00$

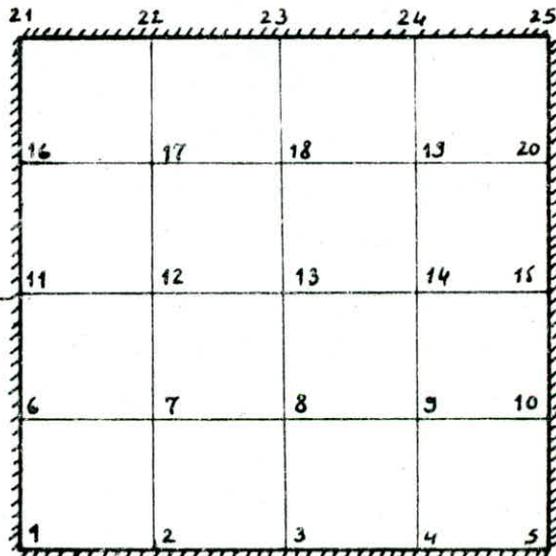
$\lambda_a = \lambda_b = 1,00$

$D = 4500$

$\nu = 0,3$

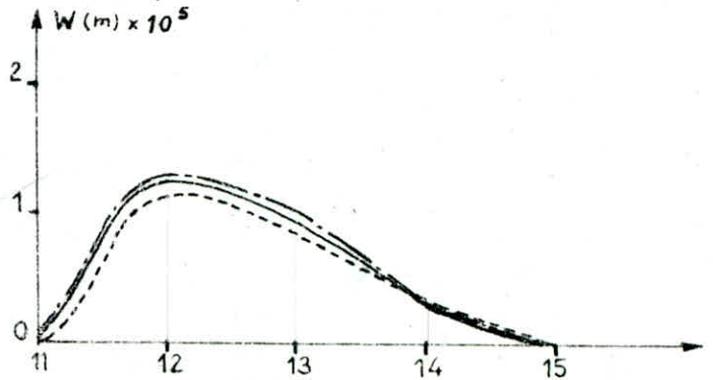
$P_{12} = 1 \text{ t}$

(charge concentrée au noeud 12)



résultats obtenus

N° du noeud	$W(m) \times 10^5$	
	Solution Plaque	Solution par assimilation
7	0,45867	0,43121
8	0,49980	0,52452
9	0,16131	0,17303
12	1,26980	1,29750
13	0,96117	1,04220
14	0,29856	0,31040
17	0,45867	0,49121
18	0,49980	0,52452
19	0,16131	0,17303



- Solution analytique ; D. young : Journ Appl. Mech dec 1940
- Solution par assimilation à un grillage de poutres
- Solution (plaque)

PLAQUE CARREE SIMPLEMENT APPUYEE ET UNIFORMEMENT CHARGEE

\*\*\*\*\*

NOMBRE DE NOEUDS = 9      NOMBRE D ELEMENTS = 8

=====

NOEUDS	COORDONNEES	
1	0.00000	0.00000
2	3.00000	0.00000
3	6.00000	0.00000
4	0.00000	3.00000
5	3.00000	3.00000
6	6.00000	3.00000
7	0.00000	6.00000
8	3.00000	6.00000
9	6.00000	6.00000

ELEMENTS	CONNECTIVITES		
1	1	2	4
2	2	5	4
3	2	3	5
4	3	6	5
5	4	5	7
6	5	8	7
7	5	6	8
8	6	9	8

! RIGIDITE DE FLEXION = 0.100000E+01!

! CHARGEMENT REPARTI = 0.600000E+03!

=====

VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE: 1= 0.000000E+00

VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE: 2= 0.000000E+00

VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE: 3= 0.000000E+00

VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE: 4= 0.000000E+00

VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE: 6= 0.000000E+00

VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE: 7= 0.000000E+00

VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE: 8= 0.000000E+00

VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE: 9= 0.000000E+00

=====

NOEUD	X	Y	D.L.
1	0.00000	0.00000	0.000000E+00
2	3.00000	0.00000	0.135000E-26
3	6.00000	0.00000	0.000000E+00
4	0.00000	3.00000	0.135000E-26
5	3.00000	3.00000	0.135000E+04
6	6.00000	3.00000	0.135000E-26
7	0.00000	6.00000	0.000000E+00
8	3.00000	6.00000	0.135000E-26
9	6.00000	6.00000	0.000000E+00

PLAQUE CARREE SIMPLEMENT APPUYEE ET UNIFORMEMENT CHARGEE

\*\*\*\*\*

NOMBRE DE NOEUDS = 9      NOMBRE D ELEMENTS = 8

=====

NOEUDS                      COORDONNEES

NOEUDS	COORDONNEES	COORDONNEES
1	0.00000	0.00000
2	3.00000	0.00000
3	6.00000	0.00000
4	0.00000	3.00000
5	3.00000	3.00000
6	6.00000	3.00000
7	0.00000	6.00000
8	3.00000	6.00000
9	6.00000	6.00000

=====

ELEMENTS                      CONNECTIVITES

ELEMENTS	CONNECTIVITES	CONNECTIVITES	CONNECTIVITES
1	1	2	4
2	2	5	4
3	2	3	5
4	3	6	5
5	4	5	7
6	5	8	7
7	5	6	8
8	6	9	8

=====

!RIGIDITE DE FLEXION= 0.19231E+07!

!

!CHARGEMENT REPARTI = 0.13500E+04!

=====

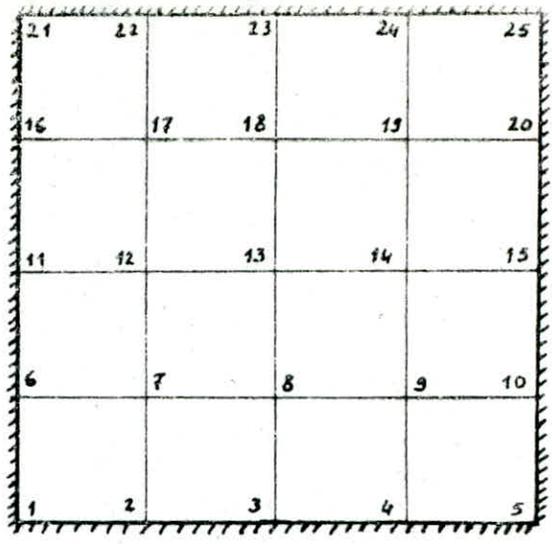
VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE:      1= 0.00000E+00  
 VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE:      2= 0.00000E+00  
 VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE:      3= 0.00000E+00  
 VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE:      4= 0.00000E+00  
 VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE:      6= 0.00000E+00  
 VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE:      7= 0.00000E+00  
 VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE:      8= 0.00000E+00  
 VALEUR IMPOSEE AU DEGRE DE LIBERTE:      9= 0.00000E+00

=====

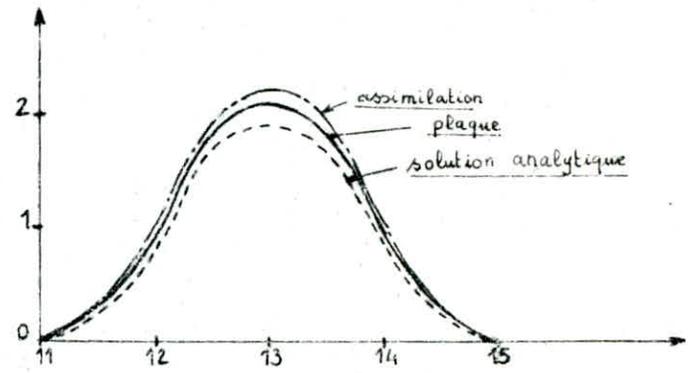
NOEUD	X	Y	D.L.
1	0.00000	0.00000	0.00000E+00
2	3.00000	0.00000	0.30375E-26
3	6.00000	0.00000	0.00000E+00
4	0.00000	3.00000	0.30375E-26
5	3.00000	3.00000	0.15795E-02
6	6.00000	3.00000	0.30375E-26
7	0.00000	6.00000	0.00000E+00
8	3.00000	6.00000	0.30375E-26
9	6.00000	6.00000	0.00000E+00

exemple 2

$a = b = 4,00$                        $\nu = 0,3$   
 $\lambda_a = \lambda_b = 1,00$                  $P_{13} = 1 \text{ t}$   
 $D = 4500$

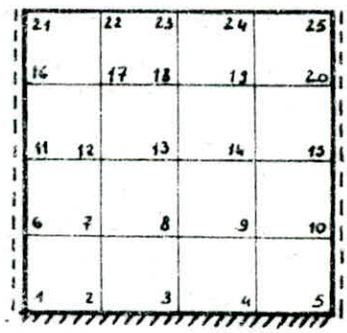


N° du noeud	W (m) x 10 <sup>5</sup>	
	Solution plaque	Solution par assimilation
7	0,48941	0,52108
8	0,96117	1,04220
9	0,48941	0,52108
12	0,96117	1,04220
13	2,18110	2,3402
14	0,96117	1,04220
17	0,48941	0,52108
18	0,96117	1,04220
19	0,48941	0,52108



exemple 3 : Plaque carrée à deux cotés appuyés, le troisième libre et le dernier encastré.

$a = b = 6,00$   
 $\lambda_a = \lambda_b = 1,50$   
 $D = 6490$   
 $\nu = 0,3$   
 $P_{13} = 1 \text{ t}$



N° du Noeud	W (m) x 10 <sup>4</sup>	
	Solution plaque	Solution par assimilation
7	0,19009	0,19517
8	0,28750	0,29655
9	0,19009	0,19517
12	0,44484	0,46901
13	0,71916	0,73978
14	0,44484	0,46901

N° du noeud	W (m) x 10 <sup>4</sup>	
	Solution plaque	Solution par assimilation
17	0,51722	0,53634
18	0,75061	0,77410
19	0,51722	0,53634
22	0,52797	0,49276
23	0,74287	0,69728
24	0,52797	0,49276

## **5. calcul par assimilation à un probleme de champ scalaire**

V. CALCUL PAR ASSIMILATION A UN PROBLEME DE CHAMP SCALAIRE

De la théorie des plaques minces, on a la relation suivante

$$\boxed{\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D}} \quad (1)$$

en désignant par  $\Delta$  l'opérateur Laplacien :  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

l'équation (1) peut s'écrire :  $\Delta \Delta W = \frac{q}{D}$

d'où :

$$\boxed{\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \frac{q}{D}} \quad (2)$$

On sait aussi d'après la théorie des plaques que :

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

$$M_x + M_y = -D (1 + \nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

posant :  $M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}$

$$\implies M = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

d'où :

$$\boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}} \quad (3)$$

des relations (2) et (3) on obtient :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left( -\frac{M}{D} \right) = \frac{q}{D}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -q} \quad (4)$$

à partir des relations (3) et (4) on peut calculer les déplacements latéraux ( $W$ ) d'une plaque rectangulaire simplement appuyée et uniformément chargée, en utilisant un élément à un degré de liberté par noeud et en calculant deux fois l'opérateur  $\Delta$ . donc, on calcule :

$$1^\circ) \quad \begin{cases} \Delta M = -q \\ M = 0 \text{ sur le contour} \end{cases}$$

2°) on prendra  $M$  comme charge extérieure (uniformément répartie) et on calcule :

$$\begin{cases} \Delta W = -\frac{M}{D} \\ W = 0 \text{ sur le contour} \end{cases}$$

Pour l'application de cette méthode, nous avons utilisé le programme BBMEF dans sa version originale (réf : G. DHATT et G. TOUZOT : une présentation de la méthode des éléments finis.)

Le programme BBMEF résout l'équation de poisson :

$$d \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + F_v = 0$$

l'élément utilisé ici est un élément triangulaire à trois noeuds et à un degré de liberté par noeud.

dans l'équation de Poisson précédente :  $d$  représente le coefficient de conductivité alors que dans notre cas (plaques), on le remplacera par la rigidité  $D$  ( $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ) et  $F_v$  représente la sollicitation de volume alors que dans notre cas il sera remplacé par le chargement réparti.

Donc en faisant tourner deux fois le programme BBMEF, on pourra déterminer les déplacements ( $W$ ) de la plaque.

## CONCLUSION

Dans le cadre de notre travail, nous avons testé plusieurs procédés de calcul des plaques et montré comment on peut résoudre un problème bien déterminé en utilisant plusieurs procédés différents.

Nous avons été amené à nous initier au calcul sur ordinateur, pour cela on a réécrit le programme B.B.M.E.F (réf: G.DHATT et G. TOUZOT, une présentation de la méthode des éléments finis) dans un premier temps et par la suite nous l'avons modifié afin qu'il s'adapte à notre cas qui est l'étude des plaques en utilisant l'élément rectangulaire à quatre noeuds.

au cours de ce travail, nous avons rencontré certaines difficultés notamment lors de l'utilisation de l'élément rectangulaire dont la matrice de rigidité élémentaire a été reprise du ZIENKIEWICZ.

Le problème se posait lorsqu'on voulait aller loin dans la discrétisation, ainsi pour un maillage de  $8 \times 8$  (81 noeuds) les résultats obtenus étaient erronés; mais au dessous de 64 éléments nous avons obtenu des résultats très satisfaisants pour les différents exemples traités.

nous avons par la suite étudié un élément de poutre pour pouvoir appliquer la théorie des équivalences. Pour cela on a introduit dans le programme de plaque la matrice de rigidité de l'élément de poutre et amené des changements au niveau du programme principal et on a écrit certains sous programmes nécessaires.

Nous avons testé par la suite des grillages de poutres dont le nombre de noeuds total atteignait 81, c'est le même nombre de noeud que celui de la plaque avec un maillage de  $8 \times 8$  donc la même taille des matrices de rigidités globales; et dans ce cas (poutres) nous avons obtenu des résultats corrects. Ceci nous a amené à penser qu'il y ait une erreur dans la matrice de rigidité élémentaire de l'élément rectangulaire donné dans ZIENKIEWICZ.

En ce qui concerne la théorie des équivalences, nous avons obtenus de très bons résultats pour les différents exemples traités.

Nous avons aussi étudié le cas des dalles en béton armé aux états de service et testé un exemple dont on connaissait les résultats expérimentaux et nous avons obtenu des résultats proches de ceux donnés par l'expérience.

Enfin on a traité le cas des plaques simplement appuyées et uniformément chargées en assimilant le problème de plaque à celui d'un champ scalaire en utilisant le programme B.B.M.E.F dans sa version originale et en le faisant tourner deux fois. Les résultats obtenus étaient très satisfaisants.

Donc nous pensons avoir fait un tour général sur la manière dont on peut résoudre un problème de plaque, néanmoins beaucoup reste à faire dans ce sujet.

#### Suggestions :

- vérification de la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire
- Développer les calculs et améliorer notre étude en ce qui concerne la théorie des équivalences.
- essayer d'améliorer nos programmes en installant un sous programme de génération automatique des données car l'introduction des données est vraiment un handicap lorsque celles ci sont nombreuses.
- dans le cas du béton armé, introduire la loi de comportement réelle du matériau.

## BIBLIOGRAPHIE

1. S. TIMOSHENKO  
Théorie des plaques et coques.
2. G. DHATT et G. TOUZOT  
Une présentation de La méthode des éléments finis.
3. L. ROCKEY  
Introduction à La méthode des éléments finis.
4. O.C. ZIENKIEWICZ  
The Finite Element Method in Engineering Science.
5. J.M. GERE  
Analysis of Framed Structures.
6. J.F. IMBERT  
Analyse des structures par éléments finis.
7. Annales ITBTP , E. ABSI octobre 72  
La théorie des équivalences et son application à l'étude des ouvrages d'art.
8. Annales ITBTP (Juillet - Août 1979)  
Calcul des sections en béton armé.
9. CEBTP  
Théorie des équivalences et son application au Génie civil.
10. Thèse de doctorat de Jean PERA  
contribution au calcul aux états - limites des sections en béton armé.

d'où :

$$\boxed{\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -q} \quad (4)$$

à partir des relations (3) et (4) on peut calculer les déplacements latéraux ( $W$ ) d'une plaque rectangulaire simplement appuyée et uniformément chargée, en utilisant un élément à un degré de liberté par noeud et en calculant deux fois l'opérateur  $\Delta$ . donc, on calcule :

$$1^\circ) \quad \begin{cases} \Delta M = -q \\ M = 0 \text{ sur le contour} \end{cases}$$

2°) on prendra  $M$  comme charge extérieure (uniformément répartie) et on calcule :

$$\begin{cases} \Delta W = -\frac{M}{D} \\ W = 0 \text{ sur le contour} \end{cases}$$

Pour l'application de cette méthode, nous avons utilisé le programme BBMEF dans sa version originale (réf : G. DHATT et G. TOUZOT : une présentation de la méthode des éléments finis.)

Le programme BBMEF résout l'équation de poisson :

$$d \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_v = 0$$

l'élément utilisé ici est un élément triangulaire à trois noeuds et à un degré de liberté par noeud.

dans l'équation de Poisson précédente :  $d$  représente le coefficient de conductivité alors que dans notre cas (plaques), on le remplacera par la rigidité  $D$  ( $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ) et  $F_v$  représente la sollicitation de volume alors que dans notre cas il sera remplacé par le chargement réparti.

Donc en faisant tourner deux fois le programme BBMEF, on pourra déterminer les déplacements ( $W$ ) de la plaque.

