

وزارة التعليم العالي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

## PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

LOGICIEL DE CALCUL  
DES RESEAUX DE POUTRES  
CROISEES SOUS CHARGES  
SISMIQUES VERTICALES

Proposé par :

Pr. B. TILIOUINE

Etudié par :

SAIS Djamel

HAMMAL Abdelkader

Dirigé par :

Pr. B. TILIOUINE

PROMOTION : JANVIER 1988

# ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### S U J E T

LOGICIEL DE CALCUL DES RESEAUX  
DE POUTRES CROISEES SOUS  
CHARGES SISMIQUES VERTICALES

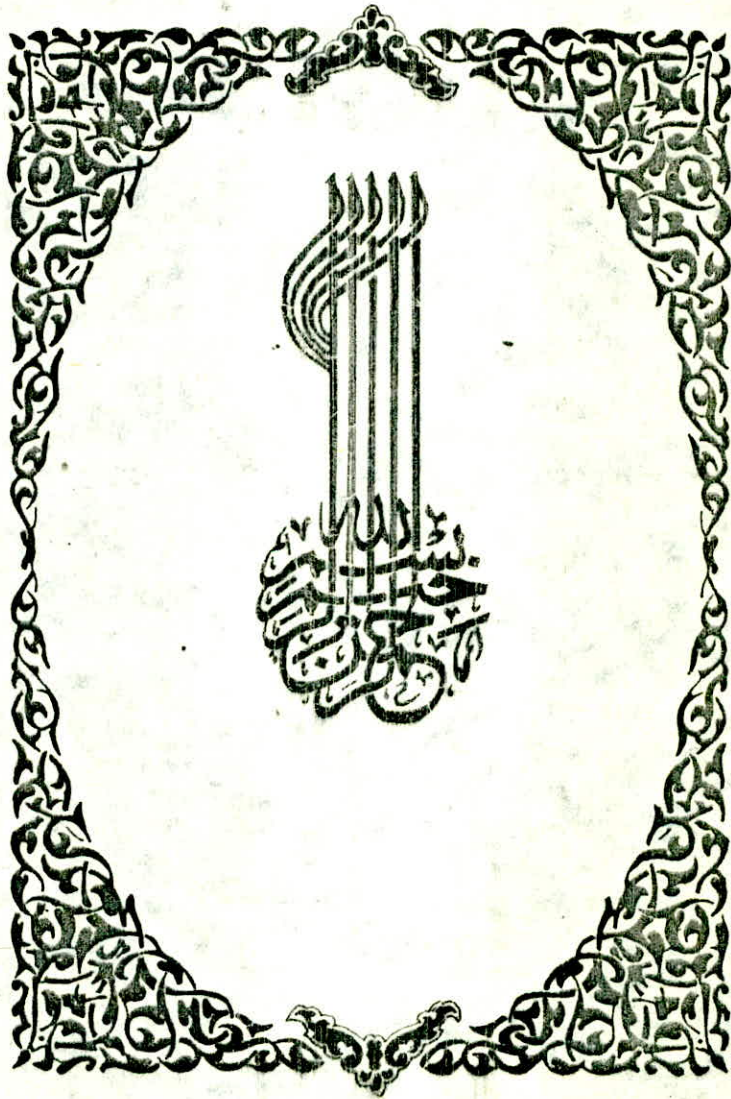
Proposé par :  
Pr B.TILIOUINE

Etudié par :  
Djamel S A I S  
Abdelkader HAMMAL

Dirigé par :  
Pr B.TILIOUINE

PROMOTION : JANVIER 88

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique



**الموضوع:** برنامج آلي لحساب المنشآت ذوات الجيزان المتشابكة تحت الحمولة الزلزالية العمودية.

**الملخص:** يتناول الموضوع تحليل المنشآت ذوات الجيزان المتشابكة تحت القوة السكونية والحركية. وبفضل نظرية الخكافوء، استطعنا تحويل حساب البلاطات الى حساب جملة من الجيزان المتشابكة، وقد اعددنا لذلك برنامج آلي.

**Sujet:** logiciel de calcul des réseaux de poutres croisées sous charges sismiques verticales.

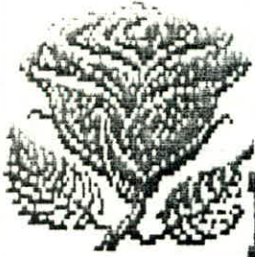
**Resumé:** la présente thèse a pour but l'implantation sur ordinateur d'un programme résolvant les problèmes posés par les poutres croisées, pour cet effet un programme marchant sur MICROVAX est opérationnel, un autre sur IBM PC l'est aussi.

**Subject:** Computing calculation of grids structures

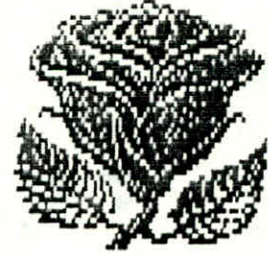
**Abstract:** the goal of our study is the analysis of grid's structures. The calculation of these structures had until now been either too complicated, then it's requires the use of an automatic calculation. The report wich follows the procedure to be followed for both static and dynamic analysis for this type of structures. The final goal to be reached is the preparation of two computer programs for static and dynamic analysis too.

**Titulo:** calcul de los forjados con vigas cruzadas sometidos a los esfuerzos sismicos verticales.

**Resumen:** nuestro proyecto se propone de estudiar las vigas cruzadas por eso un programa sobre computador esta realizado.



# Remerciements



On tient à exprimer notre gratitude envers le professeur Boualem TILIOUINE, qui malgré ses préoccupations, n'a cessé de nous apporter aide, conseil et nous orienter mettant sa compétence scientifique et sa disponibilité à tout moment.

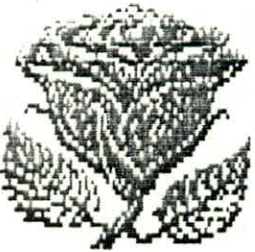
Nos vifs remerciements pour tous ceux qui ont contribué à notre formation.

Nos remerciements vont aussi à Messieurs: NECHNECH et TAIBI, LAAGAB, ABED pour leurs disponibilités.

ALI SMAIL pour sa gentillesse et sa contribution à la mise en page de la thèse.

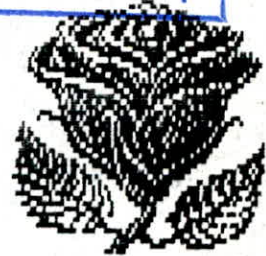
Nos remerciements vont enfin à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin. Seul DIEU pourra les récompenser.

Djamel et Abdelkader





# Dedicaces



- A la memoire de ma tante
- A ma mere
- A mon pere
- A mes freres et soeurs
- A toute ma famille
- A Krimo
- A tout mes amis
- a tous ceux qui croient en ALLAH dieu unique.  
je dedie ce travail

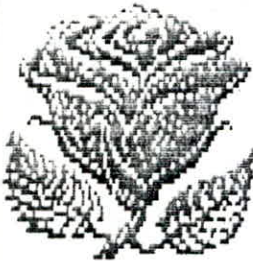
Djamel

- A ma mere
- A mon pere
- A mes freres et soeurs
- A toute ma famille
- A Djamel
- A tous mes amis
- A tous mes freres de religion  
je dedie ce travail

Abdelkader

- A tous nos amis croyants

Djamel et abdelkader



# S O M M A I R E

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACES	
REMERCIEMENTS	
PRESENTATION	7

## CHAPITRE 1

### ANALYSE STATIQUE

* Concepts elementaires d'analyse de structures	9
-Introduction	9
-Description	9
-Conditions d'equilibres	9
-Compatibilite	10
-Indetermination statique et cinematique	10
-Equations des forces et des deplacements	11
-Definition des elements d'une structure	13
> Noeud	13
> Element	13
> Appui	13
> Charges	14
> Repere local et repere global	14
* Analyse des structures a poutres croisees	15
-Introduction	15
-Matrice de raideurs elementaire	16
-Determination des coefficients de raideurs	18
> Cas de flexion	18
> Cas de torsion	20
-Rotation des axes dans les deux directions	23
-Etapas de l'analyse de structure	25
> Systeme de numerotation	25
> Assemblage de la matrice des raideurs globale	26
> Vecteur des charges nodales	28
> Efforts aux extremités des elements sous charges	29
> Vecteur des charges nodales equivalentes	29
> Vecteur des charges nodales resultantes	30
> Calcul des deplacements	31
> Calcul des reactions	31
> Calcul des efforts aux extremités des elements	31
-Notion de la largeur de bande	32
-Exemple commente	33

## CHAPITRE 2

### ANALYSE DYNAMIQUE

-Introduction	41
-Oscillation libre de la structure	42

*Methode modale spectrale.....	43
-Modelisation.....	43
>Determination des matrices massae et raideurs.....	43
>Condensation statique.....	44
-Calcul des valeurs et vecteurs propres.....	46
>Facteur de contribution modale.....	47
>Masse effective .....	47
-Etude a l'aide d'un spectre.....	47
>Accelerogrammes-spectres de reponses.....	47
>Reponse d'un oscillateur simple a une excitation sismique	47
>Spectre de reponse.....	48
>Utilisation des spectres de reponse.....	49
-Calcul des reponses de la structure.....	50

### CHAPITRE 3

<u>PROGRAMMATION</u> .....	51
*Presentation des programmes.....	52
-Calcul Statique des Reseaux de Poutres Croisees C.S.R.P.C.	53
-Calcul dynamique des Reseaux de Poutres Croisees C.D.R.P.C.	59
*Organigrammes.....	62

### CHAPITRE 4

<u>APPLICATIONS</u> .....	75
*Application 1:poutre continue a inertie variable.....	76
*Application 2:reseau 1.....	78
*Application 3:reseau 2.....	80
Theorie des equivalences .....	82
*Application 4:etude d'une dalle isotrope.....	85
*Application 5:influence de la negligence de la torsion.....	88
*Application 6:etude statique et dynamique du plancher d'une salle de conferences en poutres croisees.....	92
<u>CONCLUSIONS</u> .....	106
<u>BIBLIOGRAPHIE</u> .....	107



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# Introduction

## PRESENTATION

Les méthodes classiques de la résistance des matériaux ont été établies en vue d'une résolution manuelle du calcul des structures, avec l'outil informatique une nouvelle et importante possibilité s'est offerte aux ingénieurs. Or les ordinateurs ne peuvent exécuter normalement que les quatre opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication et division) et des opérations d'ordre logique. Ainsi il est impossible d'utiliser la méthode de CASTIGLIANO qui nécessite une dérivation par rapport aux inconnues hyperstatiques. Par contre le calcul matriciel devient un outil très commode et s'adapte facilement au calcul automatique.

Dans cette présente thèse nous tenterons une synthèse générale de cette nouvelle tendance et l'adapterons au calcul et l'analyse des réseaux de poutres croisées

On s'intéressera en particulier aux problèmes statiques et dynamiques de celles-ci

EN STATIQUE on utilisera la formulation par les MATRICES de RAIDEURS.

En assimilant à un réseau de poutres croisées grâce à la théorie des EQUIVALENCES, on proposera des applications de notre travail aux dalles.

EN DYNAMIQUE, l'insuffisance des règlements à l'égard des charges sismiques verticales nous a obligé à utiliser des SPECTRES de REPONSES.

Pour réduire la taille des problèmes dynamiques on a été conduit à condenser quelques paramètres, jugés de faibles influences sur le résultat.

enfin nous donnerons quelques résultats obtenus ainsi que quelques recommandations.



**ANALYSE  
STATIQUE**

# CONCEPTS ELEMENTAIRES DE L'ANALYSE DES STRUCTURES

## Introduction

Vue la complexité des structures à poutres croisées nous sommes amenés dans l'actuelle étude aidés par la puissance de l'ordinateur, de traiter le problème par une des méthodes dites « exactes ».

Le choix s'est porté sur la méthode des déplacements, dite encore méthode des raideurs, applicable à n'importe quel type de structure, en particulier les structures à poutres croisées.

## Description

Une structure à poutres croisées ou "GRIDS" en anglais est une structure formée d'éléments qui se croisent entre eux; l'angle entre deux éléments peut être quelconque. Dans la pratique on se retrouve toujours avec des poutres orthogonales.

Il s'agit donc d'un grillage de poutres dont les connections sont supposées être des nœuds rigides.

Toutes les forces appliquées à de telles structures sont normales au plan de la structure, alors que les couples ont leurs vecteurs dans le même plan que celui de la structure.

Par conséquent, il y a apparition de moments de torsion et de flexion dans les éléments; avec en plus l'effort tranchant causé par les couples de flexion et les forces verticales.

Les effets des forces axiales ne seront pas pris en compte.

## Conditions d'équilibre

Un des objectifs de l'analyse de structures est de déterminer les efforts dans une structure tel que les réactions des supports et efforts internes (moments, efforts tranchants... etc). Une solution correcte de ces quantités doit satisfaire toutes les conditions de l'équilibre statique non seulement pour la structure mais aussi pour n'importe quelle partie de celle-ci prise isolée.

Dans le cas général les équations d'équilibre suivantes doivent être toujours vérifiées.

$$\sum F_x=0 \quad \sum F_y=0 \quad \sum F_z=0$$

$$\sum M_x=0 \quad \sum M_y=0 \quad \sum M_z=0$$

Ces équations expriment que la résultante des forces pour une direction donnée (respectivement la résultante des vecteurs moments) est réduite à zéro, par conséquent la structure pour laquelle ces conditions sont remplies se trouvera en équilibre.

### Compatibilité

En plus des conditions d'équilibre statique, il est nécessaire de remplir toutes les conditions de compatibilité.

Ces conditions se rapportent à la continuité des déplacements dans toute la structure et parfois aux conditions géométriques.

Comme exemple les conditions de compatibilité devraient être satisfaites en tout point du support où il est nécessaire d'avoir les déplacements de la structure en compatibilité avec les conditions d'appuis.

Ces conditions doivent être satisfaites intérieurement en chaque point de la structure. D'habitude, elles sont importantes et les plus intéressantes aux noeuds de la structure. Comme exemple pour un noeud rigide reliant deux éléments leurs déplacements sont égaux.

### Indéterminations Statique et Cinématique

#### Indétermination statique

Une structure est dite statiquement déterminée ou isostatique lorsque les équations d'équilibre statique suffisent pour déterminer tous les efforts inconnus (nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations).

Dans le cas où le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations la structure est dite statiquement indéterminée ou hyperstatique.

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre d'inconnues (nombre de réactions superflues).

Une structure peut être hyperstatique extérieurement ou intérieurement ou bien les deux à la fois; le degré d'hyperstaticité total d'une structure est la somme des degrés d'hyperstaticité extérieur et intérieur.

#### Indétermination cinématique

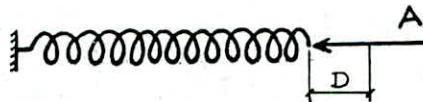
Elle concerne les déplacements nodaux; un noeud peut être la jonction d'éléments, un appui, un point de changement de caractéristiques mécaniques ou géométriques.

Le nombre de déplacements inconnus constitue les quantités cinématiques indéterminées, leur nombre représente le degré de liberté de la structure, noté  $N$

Si  $N=0$  → la structure est cinématiquement déterminée  
 Si  $N>0$  → la structure est cinématiquement indéterminée au degré  
 $N$

### Equation des forces et des déplacements

Les relations liants les efforts aux déplacements jouent un rôle important dans l'analyse des structures. Une simple illustration de telles équations est obtenue en considérant un ressort linéaire montré dans la figure ci-dessous.



L'effort A comprimera le ressort engendrant ainsi un déplacement D de l'extrémité du ressort.

La relation entre A et D peut être exprimée comme suit:

$$D=F \times A$$

dans cette relation F est la flexibilité du ressort et elle est définie comme étant le déplacement produit par un effort égal à l'unité

En voulant exprimer l'effort en fonction du déplacement on obtient l'équation suivante:

$$A=k \times D$$

où K est la raideur du ressort

La raideur K est l'effort qu'il faut appliquer au ressort pour avoir un déplacement égal à l'unité

D'après les deux équations précédentes on montre que:

$$F=1/K=K^{-1} \quad ; \quad K=1/F=F^{-1}$$

La raideur étant l'inverse de la flexibilité et vice-versa.

$$[F]=m/N \quad ; \quad [K]=N/m$$

Ces deux équations expriment les dimensions de la flexibilité F et la raideur K.

Dans ce qui suivra on s'intéressera aux équations exprimant les efforts en fonction des déplacements. Cela pour pouvoir introduire la méthode des raideurs.

Considérons maintenant un exemple plus général dans lequel trois charges  $A_1, A_2$  et  $A_3$  agissent sur une poutre continue (voir figure), les charges  $A_1, A_2$  et  $A_3$  sont prises positives dans les directions montrées dans la figure.

Les déplacements de la poutre correspondants respectivement aux charges  $A_1, A_2$  et  $A_3$  sont dus à l'action simultanée des trois charges, sont notées  $D_1, D_2$  et  $D_3$

Le principe de résolution est le suivant:

On provoque un déplacement unitaire correspondant à une action donnée en bloquant les autres déplacements, puis on note les raideurs correspondants à chaque déplacement

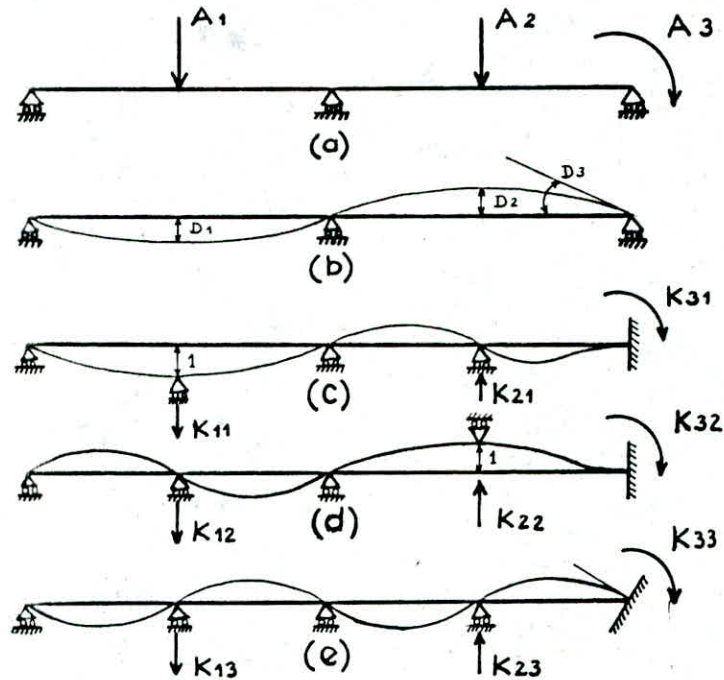


Fig : Illustration des coefficients de raideurs

Le cas de figures (c), (d) et (e) montrent les 3 opérations à faire, en appliquant le principe de superposition on obtient

$$\begin{aligned} A_1 &= K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 \\ A_2 &= K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 \\ A_3 &= K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 \end{aligned}$$

Ces équations expriment les actions en fonction de déplacements, ces derniers sont à déterminer.

#### CAS GENERAL

Soient  $n$  actions agissant sur une structure donnée, de même manière que précédemment on obtient les équations des actions en fonction des déplacements.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + \dots + K_{1n}D_n \\
 A_2 &= K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + \dots + K_{2n}D_n \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 A_n &= K_{n1}D_1 + K_{n2}D_2 + \dots + K_{nn}D_n
 \end{aligned}$$

qu'on peut écrire sous une forme matricielle

$$\begin{array}{l}
 |A_1| \\
 |A_2| \\
 | \vdots | \\
 | \vdots | \\
 | \vdots | \\
 |A_n|
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 | K_{11} \ K_{12} \ \dots \ K_{1n} | \\
 | K_{21} \ K_{22} \ \dots \ K_{2n} | \\
 | \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots | \\
 | \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots | \\
 | K_{n1} \ K_{n2} \ \dots \ K_{nn} |
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 |D_1| \\
 |D_2| \\
 | \vdots | \\
 | \vdots | \\
 |D_n|
 \end{array}$$

soit

$$A = K \times D$$

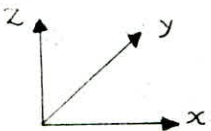
ou A et D représentent les matrices d'actions et des déplacements qui sont respectivement d'ordre  $n \times 1$ . La matrice K des raideurs est une matrice carrée d'ordre  $n \times n$ . Chaque coefficient  $K_{ij}$  est défini comme étant la i-ème action due à la valeur unité du j-ème déplacement en maintenant les autres bloqués.

#### DEFINITION DES ELEMENTS D'UNE STRUCTURE

**Noeud** : c'est un point particulier du plan en lequel concourent deux ou plusieurs éléments, les liaisons avec le milieu extérieur se feront par l'intermédiaire des noeuds.

**élément** : c'est la matière de la structure elle est délimitée par deux noeuds; noeud origine et noeud fin. L'élément représente donc dans toute notre étude la sous structure élémentaire de la structure globale, elle est considérée droite et de dimensions constantes (ainsi les inerties et la section de chaque élément sont constantes).

**Appui** : ce sont les liaisons de la structure avec le milieu extérieur, selon leurs nature, ils peuvent empêcher un ou plusieurs déplacements. Comme illustration, nous schématisons les appuis suivants:



$\Delta y$  empêché



$\Delta x, \Delta y$  empêchés



$\Delta x, \Delta y$  et  $\Delta z$  empêchés



Charges : peuvent avoir une origine quelconque. Poids propre, surcharges d'exploitation, climatiques ou thermique, ... etc. On distingue deux types de charges, les charges appliquées directement au noeud et des charges appliquées sur les éléments.

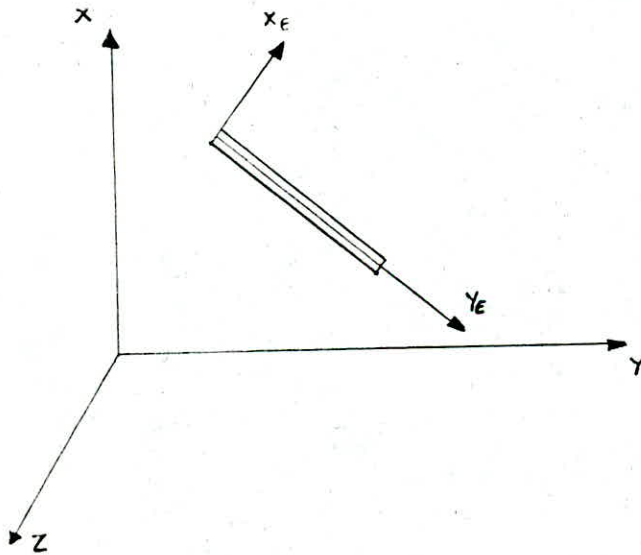
#### REPÈRE LOCAL - REPÈRE GLOBAL

La définition de notre structure et celle des efforts dans les barres nous conduit à utiliser implicitement deux repères différents:

-le repère global ou repère de la structure, noté  $(X, Y, Z)$ , sert à définir les coordonnées des noeuds et dans lequel seront exprimées les réactions d'appuis, les déplacements des noeuds;

-le repère local ou repère lié à la barre, noté  $(X_E, Y_E, Z_E)$ , qui est un repère propre à chaque élément et défini par l'élément lui-même (axe  $X_E$  orienté du noeud début au noeud fin,  $Y_E$  axe perpendiculaire à l'axe  $X_E$ , et enfin les trois axes  $X_E, Y_E$  et  $Z_E$  forment un repère direct), où seront exprimés les efforts aux extrémités.

Nous verrons plus loin comment passer d'un repère à un autre et vice-versa.



# ANALYSE DES STRUCTURES A POUTRE CROISEES

## Introduction

Une structure à poutres croisées est une structure plane, elle peut être considérée comme une structure à portiques plans. Cependant, la différence existant entre ces deux types de structures réside dans le système de chargement. Dans le cas des poutres croisées, les forces sont normales au plan de la structure, les vecteurs moment agissent dans le même plan de celle-ci.

Alors que dans le deuxième type de structure, peut lui être appliqué des forces se trouvant dans le plan de la structure, bien-sûr dans les deux directions, tandis que les moments ont leurs vecteurs normaux à la structure.

Dans l'analyse des structures à poutres croisées, il y a lieu de noter que les efforts de flexion sont prédominants, avec comme effets secondaires ceux de la torsion. Les effets dus au tranchant sont faibles (ce sont les seules sollicitations à prendre en compte dans ce type de structure).

Dans l'analyse des structures à poutres croisées, le système d'axes doit être pris tel qu'il est montré dans la figure ( ). La structure est dans le plan  $(X, Y)$ , et toutes les forces appliquées agissent parallèlement à l'axe  $Z$ . Les couples ont leurs vecteurs dans le plan  $(X, Y)$ . La figure ( ) nous montre un élément typique  $i$  entre les noeuds  $j$  et  $k$  ( $j$  étant noeud début,  $k$  le noeud fin). Les déplacements à considérer en chaque noeud de cet élément sont:

- deux rotations d'axes  $X$  et  $Y$ ;
- une translation dans la direction  $Z$ .

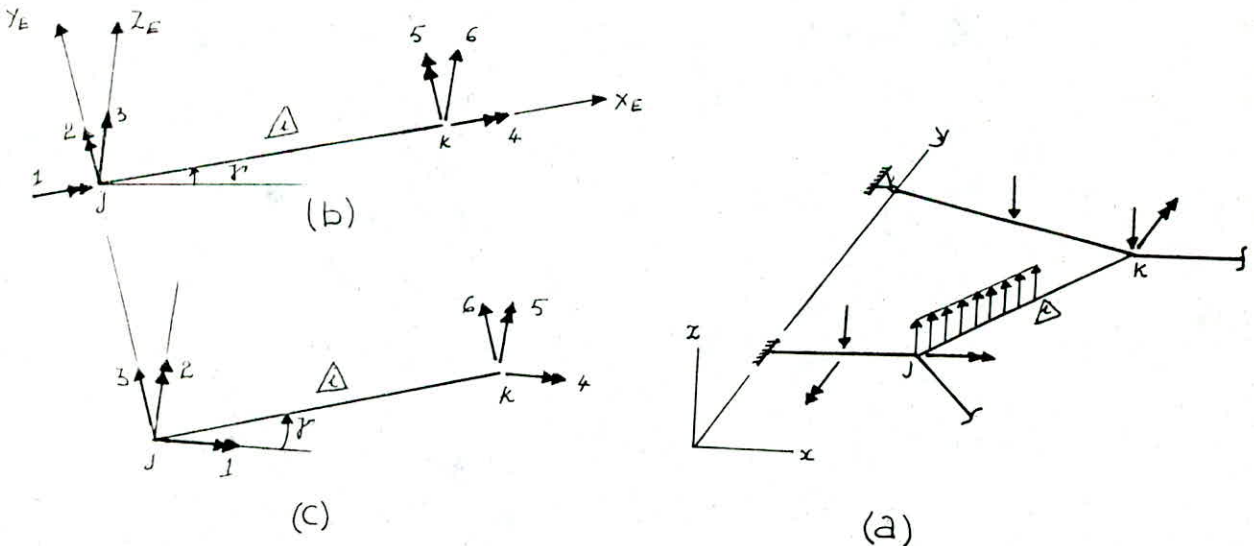


Fig : Systeme de numérotation pour un élément

Le repère  $(X_E, Y_E, Z_E)$  représente le repère local,  $(X, Y, Z)$  est le repère global (ou repère de la structure).

Un vecteur avec une seule flèche représentera toujours une translation (dans le cas des charges ou efforts internes, il représentera une force ou un effort tranchant).

Un vecteur avec deux flèches représentera une rotation, un moment ou couple dans le cas des charges et efforts internes.

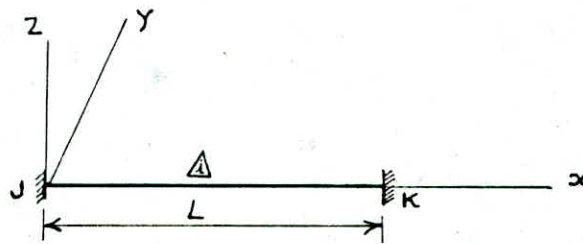
Les figures (b) et (c) montrent les déplacements des deux noeuds j et k de l'élément i. La numérotation de ces déplacements doit respecter l'ordre déjà mentionné

### Matrice élémentaire $K_E$

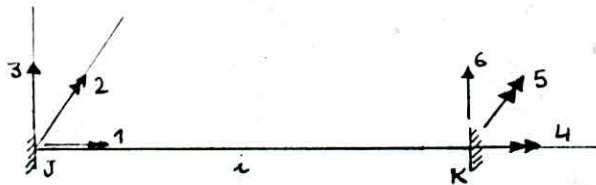
Cette matrice représente la matrice des raideurs d'un élément (pris isolé) écrite dans le repère local. Elle sera désignée par  $K_E$ .

Pour un élément pris d'une structure à poutre croisées, la matrice  $K_E$  sera d'ordre  $6 \times 6$  (car il y a six ddl par élément).

considérons un élément i pris entre les noeuds j et k



Les déplacements possibles qui pourront avoir lieu sont: deux rotations d'axes  $X_E, Y_E$  et une translation de direction  $Z_E$  par extrémité.

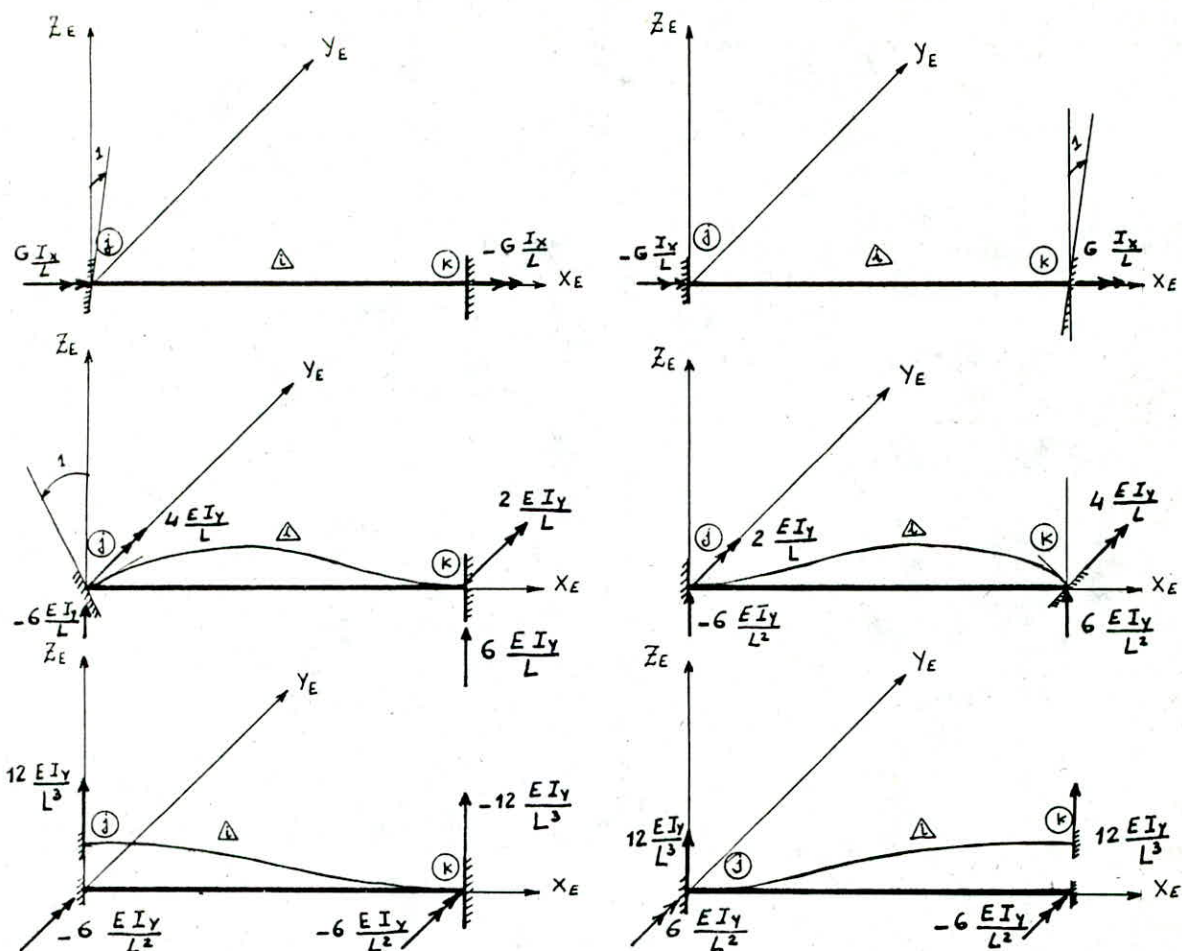


la figure montre les six déplacements possibles des extrémités de l'élément considéré

Chaque colonne de cette matrice contiendra les efforts qui se développent aux extrémités de l'élément, pour chaque déplacement unitaire provoqué.

L'obtention d'une colonne de cette matrice se fait comme suit: on provoque un déplacement unitaire suivant le ddl i; par un calcul de RDM, on détermine tous les efforts produits dans les extrémités, on note ces efforts dans un vecteur colonne dans un ordre conforme à celui des déplacements.

La matrice  $K_E$  s'obtient, donc, à travers les six cas de figures suivants:



Enfin on obtient la matrice  $K_E$  égale à:

$$K_E = \begin{bmatrix} G I_x / L & 0 & 0 & -G I_x / L & 0 & 0 \\ 0 & 4 E I_y / L & -6 E I_y / L^2 & 0 & 2 E I_y / L & 6 E I_y / L^2 \\ 0 & -6 E I_y / L^2 & 12 E I_y / L^3 & 0 & -6 E I_y / L & -12 E I_y / L^2 \\ -G I_x / L & 0 & 0 & G I_x / L & 0 & 0 \\ 0 & 2 E I_y / L & -6 E I_y / L^2 & 0 & 4 E I_y / L & 6 E I_y / L^2 \\ 0 & 6 E I_y / L^2 & -12 E I_y / L^3 & 0 & 6 E I_y / L^2 & 12 E I_y / L^3 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est valable seulement pour la même numérotation évoquée plus haut et qui est la suivante:

Détermination des coefficients de raideurs ( $K_{ij}$ )

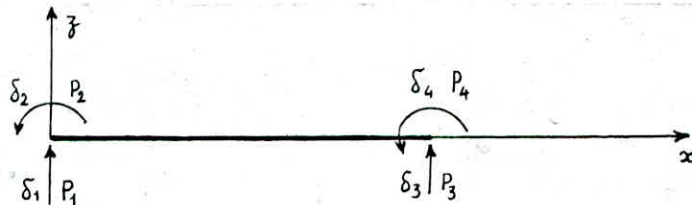
Les coefficients de raideurs associés à un ensemble de déplacements nodaux quelconques peuvent s'obtenir par application directe de leurs définitions. La notion d'*éléments finis* procure fréquemment le moyen le plus pratique de calculer les caractéristiques élastiques d'une structure. La structure est alors modélisée par un système d'éléments séparés, qui ne sont rattachés qu'à un nombre fini de nœuds. Les caractéristiques de la structure entière sont déterminées par une superposition adéquate des caractéristiques individuelles de chaque élément fini.

Le problème se réduit alors au calcul de la raideur d'un élément générique.

Dans ce qui suit on s'intéressera aux cas d'un élément, à inertie constante, soumis à la flexion et la torsion séparément.

a) Cas de la flexion

Soit un élément poutre  $i$  dans le plan ( $xoz$ ), montré ci-dessus

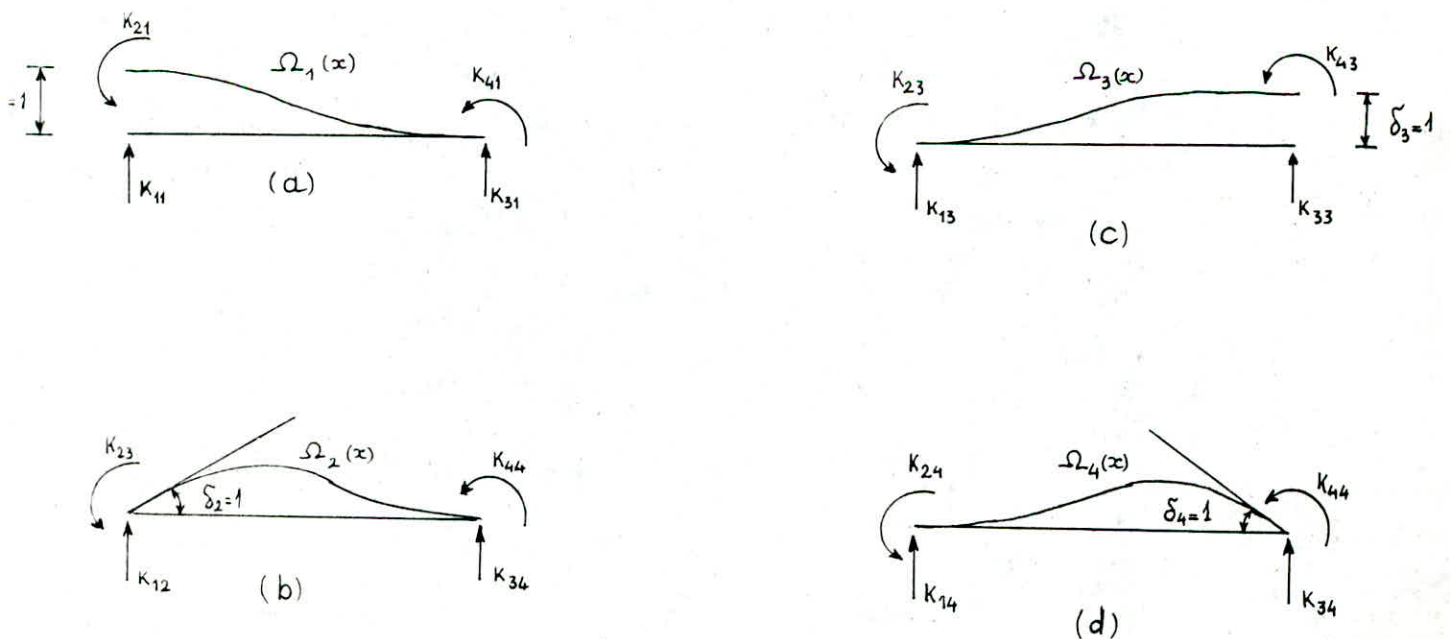


$\delta_1$  (respectivement  $\delta_3$ ) désigne une translation

$\delta_2$  (respectivement  $\delta_4$ ) désigne une rotation

On appelle raideur  $K_{ij}$  la réaction au ddl  $i$  causée par un déplacement unitaire appliqué en  $j$  ( $\delta_j=1$ ); tous les autres étant fixés.

La signification physique de ces coefficients est montrée à travers les cas de figures suivants:



Ces cas de figures montrent les raideurs (efforts) développés, en chaque extrémité.

- pour le cas (a) :  $\delta_1=1$

L'expression du moment le long de la poutre est:

$$M(x) = EI\delta^2 y / \delta x^2$$

et qui est, aussi, à:

$$M(x) = K_{11}x - K_{21}$$

Par une intégration successive, on obtient l'équation de la déformée

$$Ely = K_{11}x^3/6 - K_{21}x^2/2 + C_1x + C_2$$

$K_{11}, K_{21}, C_1$  et  $C_2$  peuvent être déterminés avec les quatre conditions aux limites

$$\begin{array}{ll} x=0 \rightarrow & y(0)=1 \quad (1) \quad y'(0)=0 \quad (2) \\ x=L \rightarrow & y(L)=0 \quad (3) \quad y'(L)=0 \quad (4) \end{array}$$

$$(1) \Leftrightarrow x=0; y(0)=1 \rightarrow C_2 = EI$$

$$(2) \Leftrightarrow x=0; y'(0)=0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow K_{11}L^3/6 - K_{21}L^2/2 + EI = 0$$

$$\Leftrightarrow K_{11}L/2 = K_{21}$$

On obtient, donc:

$$K_{11}L^3/6 - K_{11}L^3/4 + EI = 0$$

de là, on tire la valeur de  $K_{11}$

$$K_{11} = 12EI/L^3$$

et

$$K_{21} = 6EI/L^2$$

On aboutit enfin à l'expression de la fonction de forme  $\Omega_1(x)$  correspondant au ddl  $\delta_1$ :

$$\Omega_1(x) = 2(x/L)^3 - 3(x/L)^2 + 1$$

De la même manière on trouve:

$$\Omega_2(x) = x(1-x/L)^2$$

$$\Omega_3(x) = 3(x/L)^3 - 2(x/L)^2$$

$$\Omega_4(x) = (x^2/L)(x/L - 1)$$

On remarque que pour un déplacement  $\delta_j$  unitaire correspond un déplacement  $\Omega_j(x)\delta_j$ .

La déformée totale sera:

$$y(x) = \sum_{i=1}^4 \Omega_i(x)\delta_i$$

Considérons, maintenant, le cas de la figure (b) qui est en équilibre sous le déplacement unitaire  $\delta_2=1$

Supposons un déplacement virtuel  $\Omega_1(x)$  correspondant au cas de la figure (a). Appliquons le théorème des travaux virtuels dont l'énoncé est le suivant:

Si un système élastique subissant l'action d'une charge appliquée, se trouve en équilibre, alors;

$$\sum P_i \Delta_{im} + W_{im} = 0$$

avec:

$P_i$  : forces extérieures

$\Delta_{im}$ : déplacement des points d'application de ces forces

$W_{im}$ : travail des forces intérieures.

Donc, dans notre cas, on a:

$$W_E = K_{12} \times \delta_1$$

et

$$W_I = \int_0^L M(x) d\theta$$

mais

$$M(x) = d^2 \Omega^2(x) / dx^2$$

$$d\theta / dx = d^2 \Omega_1(x) / dx^2 \rightarrow d\theta = \Omega''_1(x) dx$$

Le travail effectué par les forces élastiques internes se réduit à l'expression:

$$W_I = \int_0^L EI \Omega''_2(x) \Omega''_1(x) dx$$

Donc, on en déduit l'égalité

$$K_{12} \delta_1 = \int_0^L EI \Omega''_2(x) \Omega''_1(x) dx$$

comme la fonction  $\Omega_1(x)$  correspond par définition à  $\delta_1 = 1$  appliqués au ddl (1), on aura:

$$K_{21} = \int_0^L EI \Omega''_2(x) \Omega''_1(x) dx$$

Soit de façon général

$$K_{1j} = \int_0^L EI \Omega''_i(x) \Omega''_j(x) dx$$

$\Omega''_i(x)$  et  $\Omega''_j(x)$  sont les dérivées secondes des fonctions de forme  $\Omega_i(x)$  et  $\Omega_j(x)$ .

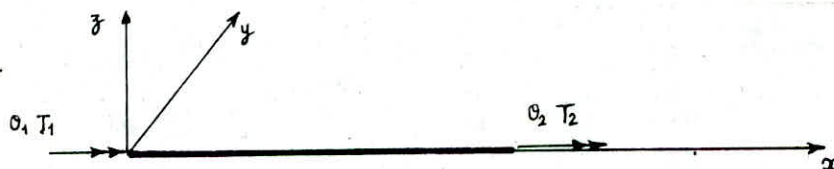
On remarque, d'après l'expression ci-dessus, que :

$$K_{ij} = K_{ji}$$

qui n'est autre qu'une conséquence du théorème de Maxwell-Bétti. On observera donc une symétrie dans la matrice de raideurs.

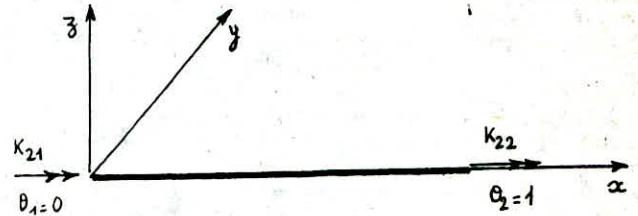
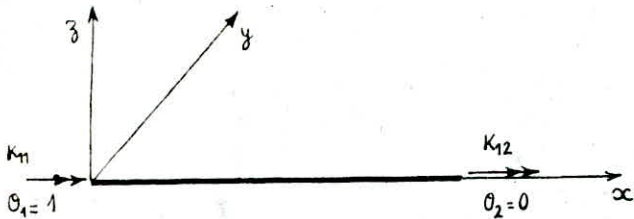
#### b) Cas de la torsion

Soit un élément poutre pris dans le système d'axes (x, y, z) montré dans la figure ci-dessous.



$T_1$  (respectivement  $T_2$ ) désigne un moment de torsion  
 $\theta_1$  (respectivement  $\theta_2$ ) désigne une rotation d'axe  $x$

Les cas de figures suivants montrent les raideurs (efforts de torsion) développés, en chaque extrémité, et causés par les déplacements unitaires correspondants.



Pour le cas (a)  $\theta_1=1$ ,  $\theta_2=0$

Le moment  $M(x)$  à une abscisse  $x$  est:

$$M(x) = G I_x d\theta_x / dx \quad \text{ou} \quad G : \text{module de cisaillement}$$

$$I_x : \text{l'inertie à la torsion}$$

et aussi égal à

$$M(x) = -K_{11}$$

Par une intégration, on obtient:

$$G I_x d\theta_x / dx = -K_{11}$$

$$\rightarrow G I_x \theta(x) = -K_{11} x + C_1$$

$K_{11}$  et  $C_1$  sont des constantes d'intégrations, qui se déterminent par les conditions aux limites.

$$x=0 \rightarrow \theta_x(0) = 1 \quad (1)$$

$$x=L \rightarrow \theta_x(L) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad \theta \quad C_1 = G I_x$$

$$(2) \quad \theta \quad -K_{11} L = C_1$$

$$\rightarrow K_{11} = -G I_x / L$$

Pour  $x=L$ :

$$M(x=L) = K_{12} = -K_{11} \quad \rightarrow \quad K_{12} = G I_x / L$$

Soit :

$$\theta_{x1}(x) = 1 - x/L$$

la fonction de forme correspondant au ddl  $\theta_1$

Pour le cas (b)  $\theta_1=0$ ,  $\theta_2=1$

Le moment  $M(x)$  s'écrit:

$$M(x) = -K_{21}$$

et

$$M(x) = G I_x d\theta_x / dx$$



De la même manière que précédemment, on obtient la fonction forme  $\theta_{x2}(x)$  définie comme suit:

$$\theta_{x2}(x) = x/L$$

Considérons le cas de la figure (b) qui est en équilibre sous l'effet du déplacement unitaire  $\theta_2=1$ .

Considérons un déplacement virtuel  $\theta_{x1}(x)$  correspondant au cas de figure (a), et appliquons le théorème des travaux virtuels.

Le travail des forces extérieures est  $W_E = K_{21} \times \theta_1$

$$W_I = \int_0^L M(x) d\theta \quad \text{mais } M(x) = G I_x d\theta_{x1} / dx$$

$$d\theta / dx = d\theta_{x1} / dx \quad \rightarrow \quad d\theta = \theta'_{x1} dx$$

Le travail effectué par les forces élastiques internes se réduit à l'expression :

$$W_I = \int_0^L G I_x \theta'_{x1} \theta'_{x2} dx$$

On en déduit l'égalité

$$K_{21} \times \theta_1 = \int_0^L G I_x \theta'_{x2} \theta'_{x1} dx$$

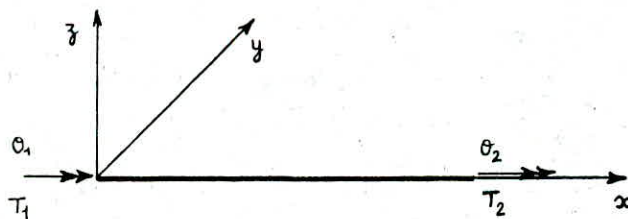
Comme la fonction  $\theta_{x1}(x)$  correspond à  $\theta_1=1$  et appliquée au ddd 1, on aura donc:

$$K_{21} = \int_0^L G I_x \theta'_{x2} \theta'_{x1} dx$$

Soit de façon générale

$$K_{1j} = \int_0^L G I_x \theta'_{x1} \theta'_{xj} dx$$

Pour l'élément considéré suivant, la matrice des raideurs en torsion est la suivante (les coefficients sont calculés par l'expression trouvée ci-dessus)



$$\theta_{x1} = (1-x/L)$$

$$\theta_{x2} = (x/L)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$| = G I_x / L |$

### Rotation des axes dans les deux directions

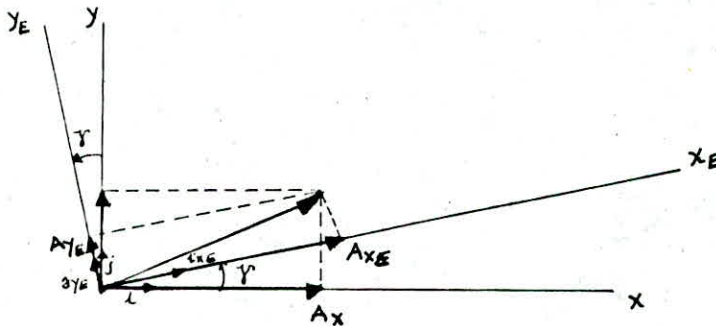
Cette manoeuvre nous permet le passage d'un repère à autre par une rotation d'axes. Elle est utilisée pour les structures complexes, en particulier le cas de notre structure. L'emploi de cette méthode permet le passage du repère local au repère global et vice-versa.

Soit un effort  $A$  agissant dans le plan  $(X, Y)$ , dont les composantes sont:

- $A_x$  projection de  $A$  sur l'axe  $X$ ;
- $A_y$  projection de  $A$  sur l'axe  $Y$ .

Après une rotation des axes dans le sens positif, on aura un repère  $(X_E, Y_E)$  dans lequel les composantes de  $A$  sont notées  $A_{x_E}$  et  $A_{y_E}$ .

Cherchons, maintenant, à exprimer  $A_{x_E}$  (respectivement  $A_{y_E}$ ) en fonction de  $A_x$  et  $A_y$ .



on a directement que:

$$\begin{aligned} i_{x_E} &= (\cos \gamma) \times i & ; & \quad i_{y_E} = (\sin \gamma) \times j \\ j_{x_E} &= (\sin \gamma) \times i & ; & \quad j_{y_E} = -(\cos \gamma) \times j \end{aligned}$$

on note :

$$C_x = \cos \gamma \quad ; \quad C_y = \sin \gamma$$

on a donc:

$$\begin{aligned} A_{x_E} &= C_x A_x + C_y A_y \\ A_{y_E} &= -C_y A_x + C_x A_y \end{aligned} \quad \leftrightarrow$$

$$[A_E] = [R][A]$$

Ainsi l'équation matricielle précédente exprime le passage du vecteur  $A$  écrit dans le repère  $X, Y$  au vecteur  $A_E$  écrit dans le repère  $X_E, Y_E$ .

Ceci, était possible grâce à la matrice rotation  $R$  qui est comme suit:

$$R = \begin{vmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix}$$

En faisant le chemin inverse, on obtient la relation suivante:

$$[A] = [R'] [A_E]$$

$R'$  étant la matrice transposée de  $R$ .

Des deux équations précédentes:

$$[A_E] = [R][A] \quad \text{et}$$

$$[A] = [R'] [A_E]$$

on obtient que :  $[A_E] = [R][R'] [A]$

ce qui implique:  $[R'] = [R^{-1}]$

Donc la matrice rotation est orthogonale.

$K_{ee} =$ 

$$\begin{bmatrix} -GJ_x C_\alpha^2 / L + 2EI_y C_\alpha / L & -(GJ_x / L + 2EI_y / L) C_\alpha C_\gamma & -6EI_y C_\gamma / L^2 & GJ_x C_\alpha^2 / L + 4EI_y C_\gamma^2 / L & (GJ_x / L - 4EI_y / L) C_\alpha C_\gamma & 6EI_y C_\gamma / L^2 \\ -(GJ_x / L + 2EI_y / L) C_\alpha C_\gamma & -GJ_x C_\gamma^2 / L + 2EI_y C_\alpha^2 / L & 6EI_y C_\alpha / L^2 & (GJ_x / L - 4EI_y / L) C_\alpha C_\gamma & GJ_x C_\gamma^2 / L + 4EI_y C_\alpha^2 / L & -6EI_y C_\alpha / L^2 \\ 6EI_y C_\gamma / L^2 & -6EI_y C_\alpha / L^2 & -12EI_y / L^3 & 6EI_y C_\gamma / L^2 & -6EI_y C_\alpha / L^2 & 12EI_y / L^3 \\ GJ_x C_\alpha^2 / L + 4EI_y C_\gamma^2 / L & (GJ_x / L - 4EI_y / L) C_\alpha C_\gamma & -6EI_y C_\gamma / L^2 & -GJ_x C_\alpha^2 / L + 2EI_y C_\gamma^2 / L & -(GJ_x / L + 2EI_y / L) C_\alpha C_\gamma & 6EI_y C_\gamma / L^2 \\ (GJ_x / L - 4EI_y / L) C_\alpha C_\gamma & GJ_x C_\gamma^2 / L + 4EI_y C_\alpha^2 / L & 6EI_y C_\alpha / L^2 & -(GJ_x / L + 2EI_y / L) C_\alpha C_\gamma & -GJ_x C_\gamma^2 / L + 2EI_y C_\alpha^2 / L & -6EI_y C_\alpha / L^2 \\ -6EI_y C_\alpha / L^2 & 6EI_y C_\gamma / L^2 & 12EI_y / L^3 & -6EI_y C_\gamma / L^2 & 6EI_y C_\alpha / L^2 & -12EI_y / L^3 \end{bmatrix}$$

Dans le cas où on veut exprimer la matrice  $K_L$  dans le repère global, on doit utiliser la matrice rotation de transformation  $[R^T]$  définie comme suit:

$$R^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice  $R^T$  est aussi orthogonale, comme l'est la matrice  $R$ .

Application:

A l'aide de la matrice  $R^T$  on pourra avoir:

- la matrice des raideurs  $K_{EG}$ , écrite dans le repère global, par l'équation suivante:

$$[K_{EG}] = [R^T]^T [K_E] [R^T]$$

$R^T$  étant la matrice transposée de la matrice rotation  $R^T$

- les déplacements écrits dans le repère local de l'élément par la relation suivante:

$$[R^T] \times [D_L]$$

où  $[D_L]$  représente le vecteur déplacement, écrit dans le repère local.

D'autres applications de la matrices de rotations seront montrées au fur et à mesure qu'on avance dans l'étude.

#### Etapes de l'analyse de la structure

Avant d'entamer l'analyse de notre structure, il est préférable de donner les conventions de signes adoptées dans toute l'étude.

Les vecteurs avec une seule flèche représentent:

- une translation (dans le cas des déplacements);
- une force (dans le cas des charges ou d'efforts internes).

Les vecteurs avec deux flèches représentent:

- une rotation (dans le cas de déplacement);
- un couple ou un moment (dans le cas de charges)

Une force (respectivement une translation) est prise positive si elle est dirigée vers le haut; dans le cas contraire elle est négative.

Un couple ou un moment (respectivement une rotation) est pris positif s'il est dans le sens contraire des aiguilles d'une montre; négatif dans le cas contraire.

#### Système de numérotation

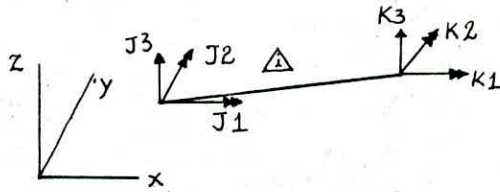
Le système de numérotation est arbitraire. Cependant, il faut que:

- chaque élément et nœud aient un numéro;
- les déplacements aux nœuds soient numérotés.

Les déplacements possibles en un nœud  $j$  doivent être notés comme suit:

- $3j-2$ : indice pour la rotation d'axe  $X$ ;
- $3j-1$ : indice pour la rotation d'axe  $Y$ ;
- $3j$ : indice pour la translation de direction  $Z$ .

Soit un élément  $i$  d'une structure à poutres croisées.



Les indices des déplacements possibles des deux noeuds associés à cet élément sont donnés par les équations suivantes:

$$J1=3j-2 ; J2=3j-1 ; J3=3j$$

$$K1=3k-2 ; K2=3k-1 ; K3=3k$$

Ces équations ont une utilité du point de vue calcul automatique; ça permet à l'ordinateur de générer les indices des déplacements connaissant ceux des noeuds.

Ainsi le degré de liberté d'une telle structure peut être connu connaissant le nombre de déplacements réels bloqués, noté NR, et le nombre de noeuds NJ.

On calcule le degré de liberté N à partir de l'équation suivante:

$$N=3 \times NJ - NR$$

Le nombre NR comprend même le nombre des noeuds appuis.

#### Assemblage de la matrice des raideurs globale de la structure

Cette matrice sera désignée par  $K_T$ .

Afin de construire la matrice  $K_T$  d'une façon ordonnée, il est recommandé de suivre les procédures suivantes.

Premièrement la matrice  $K_{EG}$  est produite pour le i-ème élément de la structure. Cet élément contribue aux raideurs aux noeuds j et k. Par conséquent des éléments appropriés de la matrice  $K_{EG}$  seront transférés directement à la matrice  $K_T$  à travers une manipulation organisée des indices.

La première colonne de la matrice  $K_{EG}$  se compose des raideurs aux noeuds j et k dues à la translation unitée à l'extrémité j de l'élément i dans la direction X (indice J1).

Cette colonne est transférée à la matrice  $K_T$  comme suit:

-on provoque un déplacement unitaire correspondant à J1; on obtient:

$$(K_T)_{J1, J1} = \sum K_{EG} + (K_{EG1}, 1)_i$$

$$(K_T)_{J2, J1} = \sum K_{EG} + (K_{EG2}, 1)_i$$

$$(K_T)_{J3, J1} = \sum K_{EG} + (K_{EG3}, 1)_i$$

$$(K_T)_{K1, J1} = (K_{EG4}, 1)_i$$

$$(K_T)_{K2, J1} = (K_{EG5}, 1)_i$$

$$(K_T)_{K3, J1} = (K_{EG6}, 1)_i$$



La sous matrice  $K$  de  $K_r$  est la matrice des raideurs correspondants aux déplacements libres. C'est une matrice carrée de taille  $N \times N$  ( $N$  étant le nombre de ddl de la structure).

La sous matrice  $K_{DR}$  est, généralement, une matrice rectangulaire. Elle contient les raideurs correspondants aux déplacements réels bloqués causés par les déplacements libres (ddl). En d'autres termes cette matrice nous donne les réactions de la structure causées par les valeurs unitaires des déplacements inconnus (libres réelement).

La matrice  $K_{RD}$  est la matrice transposée de  $K_{DR}$ ; ses coefficients correspondent aux ddl et causées par les valeurs unitées des déplacements bloqués.

La matrice  $K_{RR}$  est une matrice dont les coefficients correspondent aux déplacements réels bloqués et causés par ces mêmes déplacements égaux à l'unité. Elle peut intervenir en cas d'affaissement d'appuis.

### VECTEURS ASSOCIES AUX CHARGES

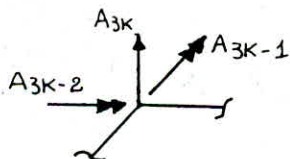
#### Vecteur des charges nodales

En un noeud d'une structure à poutres croisées, peut être appliquées les actions suivantes:

- un couple de torsion d'axe X;
- un couple de flexion d'axe Y;
- une force de direction Z.

On désigne par :

- $A_{3k-2}$ : la composante X d'un vecteur moment appliqué en un noeud  $k$  donné;
- $A_{3k-1}$ : la composante Y d'un vecteur moment appliqué en un noeud  $k$ ;
- $A_{3k}$ : représente la force, de direction Z, appliquée en  $k$ .



Le vecteur  $A$  prendra la forme suivante:

$$A = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_{3k-2}, A_{3k-1}, A_{3k}, \dots, A_{3N-2}, A_{3N-1}, A_{3N})$$

$N$ : nombre de noeuds total dans la structure.

Efforts aux extrémités d'un élément sous-charges

Ils seront désignés  $(A_{ML})_{i,j}$ .

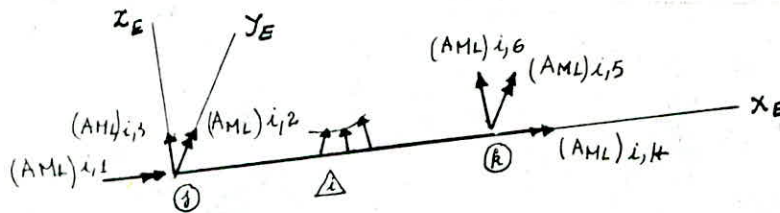
i: l'indice de l'élément considéré

j: désigne l'effort

Soit un élément, d'une structure à poutres croisées, sous charges et pris bi-encasté. Des efforts  $A_{ec}$  apparaîtront aux extrémités de l'élément, qui sont les suivants:

- $(A_{ML})_{i,1}$ : couple d'axe  $X_E$  au noeud j;
- $(A_{ML})_{i,2}$ : couple d'axe  $Y_E$  au noeud j;
- $(A_{ML})_{i,3}$ : force de direction  $Z_E$  au noeud j;
- $(A_{ML})_{i,4}$ : couple d'axe  $X_E$  au noeud k;
- $(A_{ML})_{i,5}$ : couple d'axe  $Y_E$  au noeud k;
- $(A_{ML})_{i,6}$ : force de direction  $Z_E$  au noeud k.

Ces efforts sont écrits par rapport au repère local de l'élément.



Ainsi, on obtient une matrice  $A_{ML}$  rectangulaire d'ordre  $m \times 6$ ;  $m$  étant le nombre d'élément de la structure.

D'où, la matrice  $A_{ML}$  (d'ordre  $m \times 6$ ) est la suivante:

$$[A_{ML}] = \begin{bmatrix} (A_{ML})_{1,1} & (A_{ML})_{1,2} & (A_{ML})_{1,3} & (A_{ML})_{1,4} & (A_{ML})_{1,5} & (A_{ML})_{1,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{ML})_{i,1} & (A_{ML})_{i,2} & (A_{ML})_{i,3} & (A_{ML})_{i,4} & (A_{ML})_{i,5} & (A_{ML})_{i,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{ML})_{m,1} & (A_{ML})_{m,2} & (A_{ML})_{m,3} & (A_{ML})_{m,4} & (A_{ML})_{m,5} & (A_{ML})_{m,6} \end{bmatrix}$$

$m$  étant le nombre d'éléments total de la structure.

Vecteur des charges nodales équivalentes  $A_E$

La notion de vecteur des charges nodales équivalentes est venue s'imposer, pour prendre en compte les charges appliquées sur les éléments.

Le principe de calcul du vecteur charges nodales équivalent  $A_E$  est le suivant:

- on isole un élément sous charges, puis on calcule les réactions dues seulement aux charges (l'élément est pris isolé et bi-encasté), les réactions seront renversées, ce qui nous donnera des charges nodales équivalentes au chargement sur l'élément considéré.

En un noeud peut arriver plusieurs éléments; on aura à sommer toutes les contributions des éléments qui y aboutissent.



Dans le cas le plus général d'une structure plane (exemple de notre structure), les éléments arrivants en un noeud donné peuvent avoir des directions différentes. Les efforts  $A_{ML}$  doivent être, au préalable, projetés sur les axes du repère global pour permettre l'évaluation de  $A_E$ .

D'où

$$[R^T]_i (A_{ML})_i = \begin{bmatrix} C_{x1} & -C_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_{y1} & C_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{x1} & -C_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{y1} & C_{x1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{ML})_{1,1} \\ (A_{ML})_{1,2} \\ (A_{ML})_{1,3} \\ (A_{ML})_{1,4} \\ (A_{ML})_{1,5} \\ (A_{ML})_{1,6} \end{bmatrix}$$

L'équation ci-dessus représente la contribution apportée, seulement, par l'élément  $i$ .

Les expressions résultant de l'écriture des  $A_{ML}$  de l'élément  $i$  dans le repère global avec leurs signes renversés, représentent la portion produite de la contribution de cet élément  $i$  pour le vecteur  $A_E$ .

On a donc:

$$(A_E)_{3j-2} = \sum A_{ML} - (A_{ML})_{1,1} \times C_{x1} + (A_{ML})_{1,2} \times C_{y1}$$

$$(A_E)_{3j-1} = \sum A_{ML} - (A_{ML})_{1,1} \times C_{y1} - (A_{ML})_{1,2} \times C_{x1}$$

$$(A_E)_{3j} = \sum A_{ML} - (A_{ML})_{1,3}$$

$$(A_E)_{3j+2} = \sum A_{ML} - (A_{ML})_{1,4} \times C_{x1} + (A_{ML})_{1,5} \times C_{y1}$$

$$(A_E)_{3j+1} = \sum A_{ML} - (A_{ML})_{1,4} \times C_{y1} - (A_{ML})_{1,5} \times C_{x1}$$

$$(A_E)_{3j} = \sum A_{ML} - (A_{ML})_{1,6}$$

#### Vecteur des charges nodales résultantes $A_C$

Il s'agit, ici, de sommer les charges nodales réelles à celles équivalentes pour avoir, enfin, le vecteur des charges nodales résultantes  $A_C$ . Ainsi, on a:

$$A_C = A + A_E$$

lui-même égal à:

$$A_C = \begin{bmatrix} | A_D | \\ | \dots | \\ | -A_{RL} | \end{bmatrix}$$

où  $A_D$  est le vecteur charges nodales correspondent aux ddl, et  $A_{RL}$  est le vecteur contenant les réactions, sous charges, des noeuds appuis.

### Calcul des inconnues

Les déplacements sont déterminés par la résolution de l'équation matricielle suivante:

$$[A_D] = [K] \times [D]$$

D étant le vecteur des déplacements nodaux

Calcul des réactions: elles sont évaluées à partir de l'équation suivante

$$A_R = A_{RL} + K_{RD} \times D$$

Calcul des efforts aux extrémités  $A_M$ : ils sont déterminés en utilisant l'équation suivante:

pour un élément i donné

$$(A_M)_i = (A_{ML})_i + [K_{Ei}] [R_i] [D_j]_i$$

avec:

- $R_i$  matrice rotation transformation;
- $D_j$  vecteur déplacement correspondant aux six déplacements possibles de l'élément pris en compte.

Les effort aux extrémités des éléments sont évalués dans le repère local

Pour faciliter aux programmeurs l'écriture de l'expression  $[K_{Ei}] [R_i] [D_j]_i$ , nous donnerons son expression détaillée

$$(A_M)_{i,1} = (A_{ML})_{i,1} + (GI_{x1}/L_1) \times [(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}] C_{x1} + [(D_j)_{j2} - (D_j)_{k2}] C_{y1}$$

$$(A_M)_{i,2} = (A_{ML})_{i,2} + (4EI_{y1}/L_1) \times [- (D_j)_{j1} + (1/2) \times (D_j)_{k1}] C_{y1}$$

$$+ [(D_j)_{j2} + (1/2) \times (D_j)_{k2}] C_{x1} - 6EI_{y1}/L_1^2 [(D_j)_{j3} - (D_j)_{k3}]$$

$$(A_M)_{i,3} = (A_{ML})_{i,3} + 6EI_{y1}/L_1 [(D_j)_{j1} + (D_j)_{k1}] C_{y1} - [(D_j)_{j2} + (D_j)_{k2}] C_{x1}$$

$$+ 12EI_{y1}/L_1^3 [(D_j)_{j3} - (D_j)_{k3}]$$

$$(A_M)_{i,4} = (A_{ML})_{i,4} + (GI_{x1}/L_1) \times [- (D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}] C_{x1} - [(D_j)_{j2} - (D_j)_{k2}] C_{y1}$$

$$(A_M)_{i,5} = (A_{ML})_{i,5} + (4EI_{y1}/L_1) \times [- (0.5(D_j)_{j2} + (D_j)_{k2})] C_{y1}$$

$$+ [0.5(D_j)_{j2} + (D_j)_{k2}] C_{x1} - (6EI_{y1}/L_1^2) \times [(D_j)_{j3} - (D_j)_{k3}]$$

$$(A_M)_{i,6} = (A_{ML})_{i,6} + (6EI_{y1}/L_1^2) \times [- (D_j)_{j1} + (D_j)_{k1}] C_{y1} + [(D_j)_{j2} + (D_j)_{k2}] C_{x1}$$

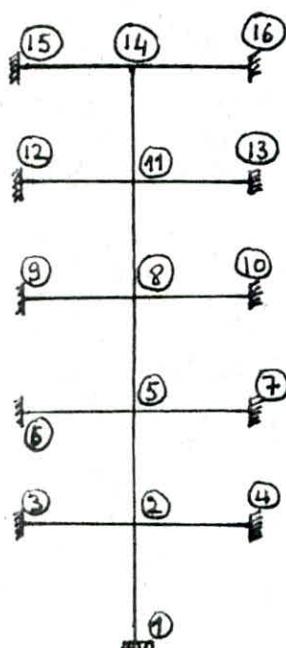
$$- 12EI_{y1}/L_1^3 \times [(D_j)_{j3} - (D_j)_{k3}]$$

# NOTION DE LA LARGEUR DE BANDE

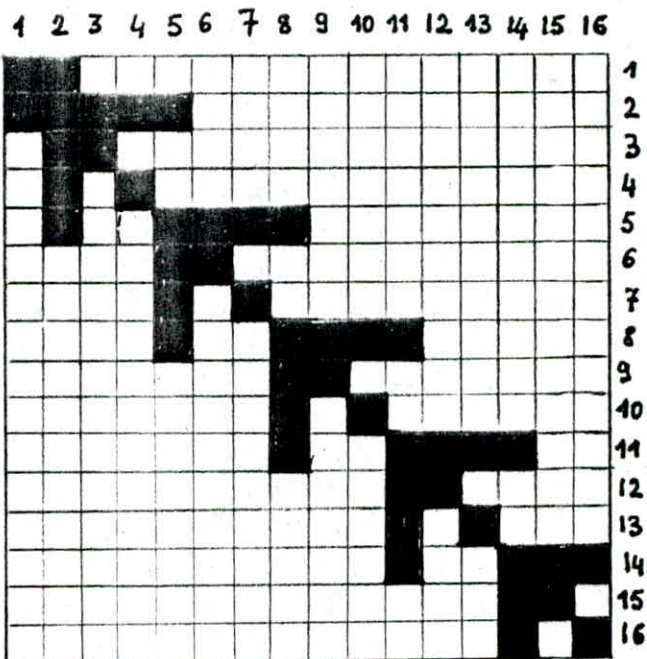
Pour utiliser au mieux la memoire de l'ordinateur, il faut exploiter la propriete "BANDE" de la matrice de raideurs, en effet la largeur de bande depend du nombre de ddl N par noeud et de la difference de numerotation ND entre les noeuds du meme element. Elle est donnee par

$$LB=N(ND+1)$$

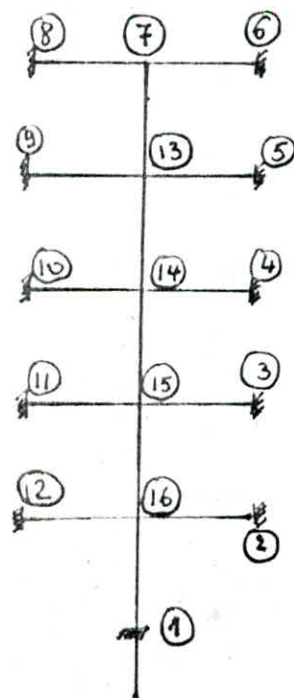
Pour N=3 Nous illustrons l'influence de la numerotation par les schemas suivants:



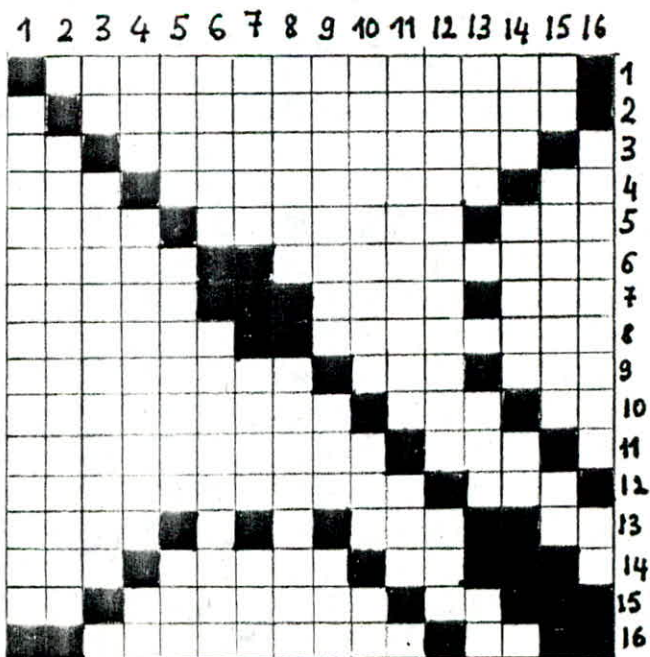
ND=3  
LB=12



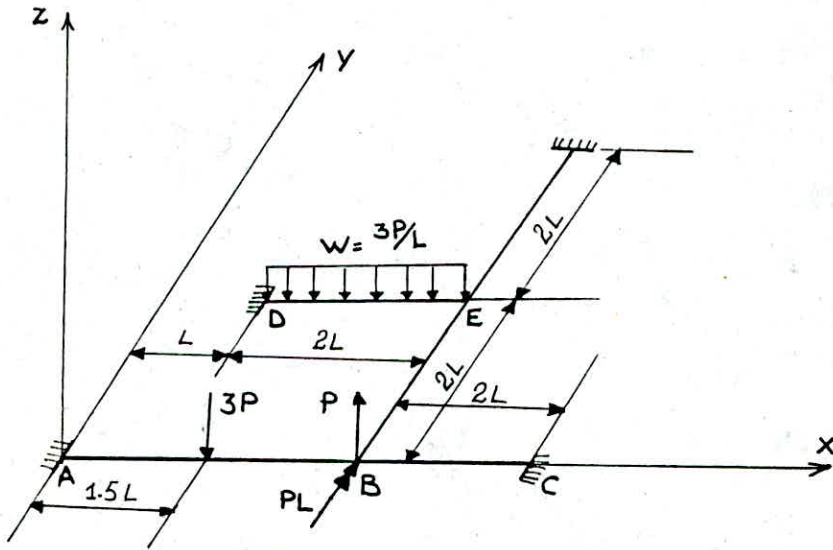
■ = 3x3



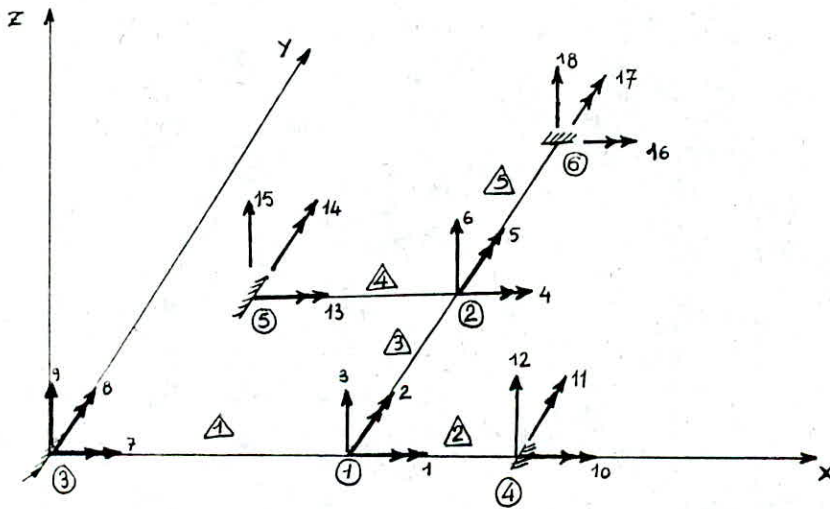
ND=15  
LB=48



EXEMPLE RESOLU ENTIEREMENT A LA MAIN



$E=30000u$     $P=16u$     $IX=2000u$     $G=12000u$     $L=60u$     $IY=1000u$



La matrice des raideurs  $K$  sera d'ordre  $6 \times 6$   
 $K_T$  sera d'ordre  $18 \times 18$   
 $K_{RO}$  sera d'ordre  $12 \times 6$

1- Numerotation des noeuds (fig ci-dessus)

2- Montage de la structure

## 2-1 Caracteristiques geometriques

### 2-1-1 Noeuds

NOEUD	coordonnées		deplacements bloqués		
	X	Y	X	Y	Z
1	180	0	0	0	0
2	180	120	0	0	0
3	0	0	1	1	1
4	300	0	1	1	1
5	60	120	1	1	1
6	180	240	1	1	1

### 2-1-2 Elements

Element	Noeud i	Noeud j	Moments d'inerties			Cx	Cy
			Ix	Iy	Long		
1	3	1	2000	1000	180	1	0
2	1	4	2000	1000	120	1	0
3	1	2	2000	1000	120	0	0
4	5	2	2000	1000	120	1	0
5	2	6	2000	1000	120	0	1

## 2-2 Charges

### 2-2-1 Charges nodales reelles

Noeud	Couple d'axe X (u)	Couple d'axe Y (u)	Force de direction Z (u)
1	0	+960	+16
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0

d'ou  $A = (0, +960, +16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

### 2-2-2 Efforts aux extrémités des éléments AML

Element	(AML)1,1	(AML)1,2	(AML)1,3	(AML)1,4	(AML)1,5	(AML)1,6
1	0	-1080	+24	0	+1080	+24
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	-960	+48	0	+960	+48
5	0	0	0	0	0	0

### 2-3 Matrices rotations

-pour les éléments 1,2,et 4:

$$[R]_1 = [R]_2 = [R]_3 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-pour les éléments 3,5:

$$[R]_3 = [R]_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### 2-4 Matrices des raideurs élémentaires $[K_{e,i}]$

Pour un élément i, la matrice  $[K_{e,i}]$  s'obtient par la relation suivante:

$$[K_{e,i}] = [R^T]_i [K_e] [R]_i$$

Après tout calcul on obtient les matrices suivantes:

$$[K_{e,1}] = 10^3 \times \begin{pmatrix} 133.33 & 0 & 0 & -133.33 & 0 & 0 \\ 0 & 666.667 & -5.555 & 0 & 333.333 & 5.555 \\ 0 & -5.555 & 0.06173 & 0 & -5.555 & -0.06173 \\ -133.33 & 0 & 0 & 133.33 & 0 & 0 \\ 0 & 333.33 & -5.555 & 0 & 666.667 & 5.555 \\ 0 & 5.555 & -0.06173 & 0 & 5.555 & 0.06173 \end{pmatrix}$$

$$[K_{e,2}] = [K_{e,4}] = 10^4 \times \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -1.25 & 0 & 50 & 1.25 \\ 0 & -1.25 & 0.02083 & 0 & -1.25 & -0.02083 \\ -20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & -1.25 & 0 & 100 & 1.25 \\ 0 & 1.25 & -0.02083 & 0 & 1.25 & 0.02083 \end{pmatrix}$$

$$[K_{e,3}] = [K_{e,5}] = 10^4 \times \begin{pmatrix} 100 & 0 & 1.25 & 50 & 0 & -1.25 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ 1.25 & 0 & 0.02083 & 1.25 & 0 & -0.02083 \\ 50 & 0 & 1.25 & 100 & 0 & -1.25 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ -1.25 & 0 & -0.02083 & -1.25 & 0 & 0.02083 \end{pmatrix}$$

2-5 Assemblage de la matrice  $K_T$

On donnera seulement les deux sous-matrices  $K$  et  $K_{RD}$  de  $K_T$  pour.

$$[K] = 10^4 \times \begin{bmatrix} 133.33 & 0 & 1.25 & 50 & 0 & -1.25 \\ 0 & 186.667 & -0.69445 & 0 & -20 & 0 \\ 1.25 & -0.69445 & 0.047839 & 1.25 & 0 & -0.02083 \\ 50 & 0 & 1.25 & 120 & 0 & -1.25 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 120 & 1.25 \\ -1.25 & 0 & -0.02083 & -1.25 & 1.25 & 0.0416667 \end{bmatrix}$$

$$[K_{RD}] = 10^4 \times \begin{bmatrix} -13.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 33.333 & 0.5555 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5555 & -0.006173 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & -1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.02083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25 & -0.02083 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.25 & 0 & -0.02083 \end{bmatrix}$$

2-6 Vecteurs associés aux charges

2-6-1 Vecteur des charges nodales équivalentes  $A_E$

$$A_E = (0, -1080, -24, 0, -960, -48, 0, 1080, -24, 0, 0, 0, 0, 960, -48, 0, 0, 0)$$

2-6-2 Vecteur des charges nodales résultantes  $A_C$

$$A_C = A + A_E = \begin{bmatrix} A_D \\ \vdots \\ -A_{RD} \end{bmatrix}$$

$$A_C = (0, -120, -8, 0, -960, -48, 0, 1080, -24, 0, 0, 0, 0, 960, -48, 0, 0, 0)$$

avec:

$$A_D = (0, -120, -8, 0, -960, -48)$$

$$\text{et } A_{RD} = (0, -1080, 24, 0, 0, 0, 0, -960, 48, 0, 0, 0)$$

2-7 Calcul des déplacements

On calculera les déplacements inconnus à l'aide de l'équation suivante:

$$D = K^{-1} \times A_D$$

avec:

- $D$  vecteur déplacement à déterminer;
- $K^{-1}$  matrice inverse de  $K$ ;
- $A_D$  vecteur des charges nodales correspondant aux ddl.

$$(A_{M1})_1 = \begin{pmatrix} 0 & 133.33 & 0 & 0 & -133.33 & 0 & 0 & 0 \\ -1080 & 0 & 666.667 & -5.555 & 0 & 333.33 & 5.555 & 0 \\ 24 & 10^3 & 0 & -5.555 & 0.06173 & 0 & -5.555 & -0.06173 \\ 0 & -133.33 & 0 & 0 & 133.33 & 0 & 0 & -0.000684 \\ 1080 & 0 & 333.33 & -5.555 & 0 & 666.667 & 5.555 & -0.000288 \\ 24 & 0 & 5.555 & -0.06173 & 0 & 5.555 & 0.06873 & -0.07014 \end{pmatrix}$$

$$(A_M)_1 = (91.19, -1565.7, 29.93, -91.19, 499, 18.07)$$

\* l'element 2:

$$(D_J)_2 = (-0.000684, -0.000288, -0.07014, 0, 0, 0)$$

$(A_{M2})_2$  est nul, donc:

$$(A_{M2})_2 = 10^4 \times \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -1.25 & 0 & 50 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & -1.25 & 0.0208 & 0 & -1.25 & -0.0208 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & -1.25 & 0 & 100 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.0208 & 0 & 1.25 & 0.0208 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où:

$$(A_M)_2 = (-136.8, 588.75, -11.01, 136.8, 732.75, 11.01)$$

\* l'element 3:

$$(D_J)_3 = (-0.000684, -0.000288, -0.07014, 0.000554, 0.000354, -0.1209113)$$

$$(A_{M3})_3 = (0)$$

$$(A_{M3})_3 = 10^4 \times \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 110 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -1.25 & 0 & 50 & 1.25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.25 & 0.0208 & 0 & -1.25 & -0.0208 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 110 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 50 & -1.25 & 0 & 100 & 1.25 & 10 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.0208 & 0 & 1.25 & 0.0208 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où:

$$(A_M)_3 = (-128.4, -227.6, 8.93, 128.4, -846.6, -8.95)$$

\* l'element 4:

$$(D_J)_4 = (0, 0, 0, 0.000554, 0.000354, -0.1209113)$$

$$(A_{M4})_4 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ -960 & 0 & 100 & -1.25 & 0 & 50 & 1.25 & 0 \\ 48 & 0 & -1.25 & 0.0208 & 0 & -1.25 & -0.0208 & 0 \\ 0 & 10^4 & -20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 960 & 0 & 50 & -1.25 & 0 & 100 & 1.25 & 0 \\ 48 & 0 & 1.25 & -0.0208 & 0 & 1.25 & 0.0208 & -0.1209113 \end{pmatrix}$$



Donc:

$$\begin{array}{r}
 | 0.00119 \quad -0.000092 \quad -0.0187 \quad -0.00016 \quad -0.00021 \quad 0.02172 | | 0 | \\
 | -0.000092 \quad 0.000591 \quad 0.0127 \quad -0.000051 \quad 0.000077 \quad 0.00086 | | -120 | \\
 | -0.0187 \quad 0.001269 \quad 3.6038 \quad -0.01625 \quad -0.000068 \quad 0.9648 | | -8 | \\
 D=10^{-4} \quad | | | | | | \\
 | -0.00016 \quad -0.00005 \quad -0.01625 \quad 0.00058 \quad 0.000085 \quad -0.0104 | | 0 | \\
 | -0.00021 \quad 0.000077 \quad -0.000068 \quad 0.000085 \quad 0.00095 \quad -0.0266 | | -960 | \\
 | 0.02172 \quad 0.00086 \quad 0.9648 \quad -0.0104 \quad -0.0266 \quad 2.8653 | | -48 |
 \end{array}$$

Après la multiplication matricielle on obtient le vecteur déplacement D suivant:

$$D = (-0.000684, -0.000288, -0.07014, 0.000554, 0.000354, -0.1209113)$$

### 2-8 Calcul des réactions

On utilise pour cela l'équation suivante:

$$A_R = A_{RL} + K_{RD} \times D$$

Après avoir effectuer le produit  $K_{RD} \times D$ , on obtient:

$$\begin{array}{r}
 | 0 | \quad | 91.13 | \quad | 91.13 | \\
 | -1080 | \quad | -485.7 | \quad | -1565.7 | \\
 | 24 | \quad | 5.9 | \quad | 29.9 | \\
 | 0 | \quad | 136.8 | \quad | 136.8 | \\
 | 0 | \quad | 732.75 | \quad | 732.75 | \\
 A_R = | 0 | + | 11.01 | = | 11.01 | \\
 | 0 | \quad | -110.8 | \quad | -110.8 | \\
 | -960 | \quad | -1334.39 | \quad | -2294.39 | \\
 | 48 | \quad | 20.77 | \quad | 68.77 | \\
 | 0 | \quad | -1234.39 | \quad | -1234.39 | \\
 | 0 | \quad | -70.8 | \quad | -70.8 | \\
 | 0 | \quad | 18.27 | \quad | 18.27 |
 \end{array}$$

Enfin, on a le vecteur  $A_R$  contenant les réactions d'appuis tel que:

$$A_R = (91.13, -1565.7, 29.90, 136.8, 732.75, 11.01, -110.8, -2294.39, 68.77, -1234.39, -70.8, 18.27)$$

### 2-9 Calcul des efforts aux extrémités des éléments ( $A_{ML}$ )

Pour un élément  $i$ , les efforts ( $A_M$ ) $_i$  sont donnés par l'équation suivante:

$$(A_M)_i = (A_{ML})_i + [K_E]_i [R_T]_i (D_j)_i$$

\* l'élément 1:

$$(D_j)_1 = (0, 0, 0, -0.000684, -0.000288, -0.07014)$$

d'où:

$$(A_M)_4 = \{-110.8, -2294.5, 68.76, 110.8, -197.4, 27.23\}$$

\* l'élément 5:

$$(D_j)_5 = \{0.000554, 0.000354, -0.1209113, 0, 0, 0\}$$

$$(A_M)_5 = 10^4 \times \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 110 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000554 \\ 0 & 100 & -1.25 & 0 & 50 & 1.25 & 11 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000354 \\ 0 & -1.25 & 0.0208 & 0 & -1.25 & -0.0208 & 110 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1209113 \\ -20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 110 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & -1.25 & 0 & 100 & 1.25 & 110 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.0208 & 0 & 1.25 & 0.0208 & 110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où:

$$(A_M)_5 = \{70.8, 957.4, -18.26, -70.8, 1234.4, 18.26\}$$

**ANALYSE**

**DYNAMIQUE**

# ANALYSE DYNAMIQUE

## INTRODUCTION

La formulation par les matrices de raideurs nous a permis de trouver la solution aux problèmes d'équilibre des structures soumises à un ensemble de forces extérieures. Nous avons donc étudié les comportements statiques des structures. Néanmoins dans la réalité certains phénomènes sont difficilement assimilables à des forces statiques, par exemple les séismes, le vent, les efforts des machines tournantes etc... D'autre part les sollicitations engendrées par ces phénomènes dynamiques, ne sont pas constantes dans le temps: phase transitoire, phase stationnaire, et celles-ci sont très difficiles à évaluer par un calcul statique.

L'analyse dynamique des structures se propose non plus de trouver un état d'équilibre de la structure, mais de trouver un ou plusieurs modes de vibration ou de réponse à une excitation.

Le but du calcul dynamique est donc de trouver ce mode de vibration, ainsi que la fréquence (ou période) associée. Celle-ci est également très importante, car des excitations cycliques proches de ces fréquences peuvent provoquer des efforts importants dans la structure (phénomènes de résonnances).

Le calcul parasismique a pour but l'estimation des valeurs caractéristiques plus défavorables de la réponse et de dimensionner les éléments résistants en conséquence, afin d'obtenir une sécurité jugée satisfaisante pour l'ensemble de la structure.

Nos structures étant infiniment rigide horizontalement, on se propose de les étudier sous charges verticales.

Notre règlement parasismique RPA étant explicite à cet égard, néanmoins il autorise l'utilisation de méthodes dynamiques approuvées (art 3.2.2.1)

par contre le règlement parasismique français le PS 69 considère les efforts verticaux comme une portion des efforts horizontaux.

$$V_v = \pm H_h (\alpha)^{1/2} \quad \text{pour } \alpha \geq 1$$

$$V_v = \pm H_h \quad \text{pour } \alpha < 1$$

avec  $V_v$  : force verticale  
 $H_h$  : force horizontal  
 $\alpha$  : définit l'intensité sismique

Ces insuffisances nous ont amenés à élaborer une étude à l'aide d'un spectre de réponse vertical.

## OSCILLATION LIBRE DE LA STRUCTURE

L'équation générale de l'oscillation libre de la structure s'écrit:

$$[M][Y''] + [K][Y] = 0 \quad (1)$$

Recherchons une solution de cette équation de la forme:

$$Y = [a] \sin \omega t + [b] \cos \omega t = 0 \quad (2)$$

ou  $[a]$  et  $[b]$  sont des matrices colonnes des coefficients  $a$  et  $b$ .

En portant cette expression dans l'équation (1), on trouve:

$$(K - \omega^2 M) Y = 0 \quad (3)$$

Pour avoir une solution non nulle, il faut que:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (4)$$

Cette équation caractéristique est un polynôme de degré  $m$  en  $\omega^2$ . Les racines de cette équation donnent les  $m$  pulsations propres de vibration de la structure:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m < \dots < \omega_m \quad (5)$$

A chaque pulsation propre  $\omega_i$ , correspond un vecteur propre  $\phi_i$  et un mode de vibration  $X_i$ , tel que:

$$X_i = \phi_i (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t) \quad (6)$$

ou:

$\phi_i$  est une matrice colonne à  $n$  termes dépendant de  $\omega_i$ .  
 $A_i$  et  $B_i$  sont deux constantes d'intégration arbitraires.

On a bien évidemment:

$$(K - \omega_i^2 M) \phi_i = 0 \quad (7)$$

D'où

$$(\omega_i^2) = \phi_i^t [K] \phi_i / (\phi_i^t [M] \phi_i) \quad (8)$$

Tout état de vibration libre de la structure peut être considéré comme une combinaison linéaire des modes propres de vibration

$$Y = \sum_{i=1}^m X_i = \sum_{i=1}^m \phi_i (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t) \quad (8)$$

Les  $2m$  coefficients  $A_i$  et  $B_i$  sont déterminés par les conditions initiales (position et vitesse) liées aux  $m$  degrés de liberté des masses considérées.

Les vecteurs propres jouissent des deux propriétés suivantes qui supposent que les matrices  $K$  et  $M$  sont symétriques:

$$\begin{aligned} X_i^t [K] X_j &= \phi_i^t [K] \phi_j = 0 \\ &\text{Si } i \neq j \\ X_i^t [M] X_j &= \phi_i^t [M] \phi_j = 0 \end{aligned}$$

## METHODE MODALE SPECTRALE

C'est sans doute la méthode la plus fréquemment utilisée pour l'analyse sismique des structures elle comporte les étapes suivantes:

### A: Modélisation

L'étude vibratoire d'un système donné suppose le choix d'un modèle mécanique dont le comportement reflète aussi fidèlement que possible celui du système réel.

La définition du modèle procède, nécessairement, d'une certaine idéalisation en rapport avec la précision recherchée et avec le type du problème traité.

Un système comportant des masses réparties constitue en toute rigueur un système à une infinité de ddl. Son étude complète n'est envisageable que dans certains cas simples, elle est impraticable pour des structures complètes; la concentration des masses en un certain nombre de points, judicieusement choisis, est un des aspects de la modélisation.

Vu la puissance du matériel disponible et dans le souci d'améliorer la précision des résultats, nous avons affecté à chaque noeud les raideurs et inerties relatives à ses trois ddl

La résolution de  $(K - \omega^2 M) Y = 0$  nécessite au préalable la détermination de la matrice de raideurs et celle des masses

### Détermination des matrices RAIDEURS, MASSES

La matrice de raideurs a été formulée et déterminée dans la partie statique son expression étant exactement la même.

Pour obtenir les caractéristiques massiques d'une structure, on opérera par superposition des caractéristiques de chaque élément comme on l'a fait pour la raideur d'ensemble.

Le coefficient  $M_{i,j}$  étant défini comme étant la force d'inertie suivant le ddl  $i$  causée par l'accélération unitaire en  $j$

La formulation par éléments finis permet, par analogie avec la matrice des raideurs l'écriture des coefficients de la matrice masse sous la forme suivante

#### a) Cas de la flexion

Les coefficients  $M_{i,j}$  sont donnés par l'expression suivante:

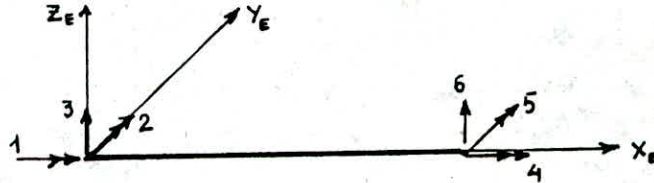
$$M_{i,j} = \int_0^L m(x) \Omega_i(x) \Omega_j(x) dx$$

avec  $\Omega_i(x), \Omega_j(x)$  les fonctions de forme déjà trouvées en statique

b) Cas de la torsion

$$M_{ij} = \int_0^L (m(x) l_x / A) \theta_i(x) \theta_j(x) dx$$

Pour un élément poutre d'une structure à poutres croisées, la matrice élémentaire sera donnée conformément au système de numérotation ci-après.



$$[M] = (m \times L) / 420 \begin{bmatrix} 140I_x/A & & & & & & & & \\ & 0 & 4L^2 & & & & & & \\ & 0 & 22L & 156 & & & & & \\ & 70I_x/A & 0 & 0 & 140I_x/A & & & & \\ & 0 & -3L^2 & -13L & 0 & 4L^2 & & & \\ & 0 & 13L & 54 & 0 & -22L & 156 & & \end{bmatrix} \text{ S Y M}$$

ou

- m: masse par unite de longueur
- A: section de l'element
- $I_x$ : inertie a la torsion

Condensation statique

Il s'agit d'une methode générale qui pourrait avoir plusieurs applications. En particulier, elle sera utilisée, dans notre cas, à reduire la taille de résolution du problème aux valeurs propres en condensant les degrés de liberté dont l'influence sur le comportement dynamique de la structure est jugée non notable.

Les coefficients des matrices [K] et [M] correspondant aux degrés de liberté gardés vont être amplifiés; ceci explique la prise en compte de l'effet des ddl réduits.

La procédure de condensation statique est la suivante:

Soit une matrice des raideurs K d'une structure donnée, disposée sous la forme suivante:

$$K = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix}$$

Où:

$K_{AA}$ : sous-matrice correspondant aux ddl à condenser

$K_{BB}$ : sous-matrice correspondant aux ddl à garder

Cette partition de K en sous-matrices est nécessaire, pour la réduction. Elle montre les coefficients à condenser, et ceux qui doivent être amplifiés.

En statique, on dispose de l'équation suivante:

$$[K][X] = [Q] \quad (1)$$

Où:

K: matrice des raideurs.

X: vecteur déplacement nodal.

Q: vecteur force nodal.

$$(1) \quad \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_A \\ Q_B \end{bmatrix}$$

On ne peut condenser un degré de liberté lui correspondant une action extérieure.

Soit  $Q_A = 0$ ;

le système (1) sera équivalent donc à:

$$K_{AA} \times X_A + K_{AB} \times X_B = 0 \quad (1')$$

$$K_{BA} \times X_A + K_{BB} \times X_B = Q_B \quad (2')$$

de (1') on tire :

$$X_A = -K_{AA}^{-1} \times K_{AB} \times X_B$$

et en remplaçant la valeur de  $X_A$  dans (2'), on trouve:

$$K_{BB}^* \times X_B = Q_B \quad \text{avec}$$

$$K_{BB}^* = -K_{BA} \times K_{AA}^{-1} \times K_{AB} + K_{BB}$$

$K_{BB}^*$  est la matrice des raideurs réduite.

En dynamique, l'équation du mouvement devient:

$$M_{BB}^* \times X'' + K_{BB}^* \times X + C_{BB}^* \times X' = Q_B^*$$

Les matrices réduites  $M_{BB}^*$ ,  $K_{BB}^*$ ,  $C_{BB}^*$ , et les vecteurs X et  $Q_B^*$  sont obtenus par les formules suivantes:

$$M_{BB}^* = T^T \times M \times T$$

$$K_{BB}^* = T^T \times K \times T$$

$$C_{BB}^* = T^T \times C \times T$$

$$X = T \cdot X_B$$

$$Q_B^* = T^T \times Q_B$$



ou:

M: matrice masse de la structure .  
K: matrice des raideurs de la structure.  
C: matrice d'amortissement de la structure.  
T<sup>T</sup>: transposée de la matrice T.

La matrice T est appelée matrice transformation, construite de la façon suivante:

$$T = \begin{pmatrix} -K_{AA}^{-1} \times K_{AB} & I_B \\ & I_A \end{pmatrix}$$

$I_A$  étant la matrice identité.

### B: Calcul des valeurs et vecteurs propres

La deuxième étape de l'analyse modale est le calcul des valeurs propres et vecteurs propres correspondants au système.

Les algorithmes de résolution de  $([K] - \lambda[M])(X) = 0$  avec  $\lambda = \omega^2$  sont nombreux nous en citerons quelques uns en donnant le principe. Il existe différentes méthodes permettant ce calcul.

- Méthode de l'itération vectorielle (ou méthode des puissances): permet d'évaluer la plus grande ou la plus petite valeur propre ainsi que le vecteur propre correspondant, à l'aide d'un processus itératif approprié appliqué à un vecteur initial arbitraire.

- Méthode "LR-Cholesky": permet la recherche d'un certain nombre de valeurs propres d'une matrice bande symétrique à l'une des deux extrémités du spectre.

- Méthode de VIANELLO-STODOLA : elle pousse jusqu'aux modes supérieurs; son principe est l'ajustement successif d'une déformée supposée jusqu'à la forme véritable du mode puis le calcul de la période correspondante.

- Méthode de HOLZER procède dans l'ordre inverse: la période est ajustée successivement à partir d'une hypothèse initiale jusqu'à obtention de la période vraie; la forme est calculée simultanément.

- Méthode de JACOBI : pour un nombre pas trop élevé de ddl; c'est la méthode la plus simple et la plus sûre pour le calcul des valeurs et vecteurs propres. Elle présente l'avantage de ne pas exiger la mise sous forme "standard"  $A\phi = \lambda\phi$ , donc aucune transformation de [K] et [M]. Par conséquent c'est cette méthode que nous allons utiliser.

D'autres valeurs sont accessibles à cette étape d'analyse modale en particulier:

### Facteur de contribution des modes

Le calcul de ce facteur est nécessaire pour connaître le nombre de modes à considérer dans le calcul de l'effort sismique

Pour le mode  $i$  il est donnée par l'expression :

$$a_j = \phi_j^T \times M \times \Delta_j / \phi_j^T \times M \times \phi_j$$

avec  $\Delta_j = 1$  si la direction l'accélération coïncide avec celle du déplacement  
 $= 0$  sinon

### Masse effective

La masse effective associée au ddl  $i$  pour le mode  $j$  est donnée par:

$$M_{eff\ i} = a_j \times \phi_j \times M_{i,j}$$

### ETUDE A L'AIDE D'UN SPECTRE

#### Accélerogrammes- Spectres de réponses

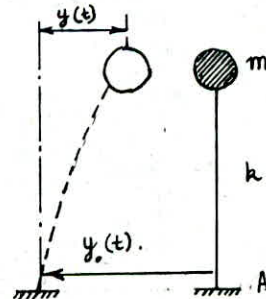
##### Accélerogrammes

Les accélerogrammes résultent de données expérimentales (enregistrées par sismographes) et représentent l'accélération  $V''g(t)$  d'un point du sol, dans une direction donnée, en fonction du temps.

Les constructions doivent être dimensionnées pour résister à des mouvements du sol qui sont en général supposés uniquement horizontaux, ou bien, de façon plus simple, en utilisant les spectres de réponses correspondants.

##### Réponse d'un oscillateur simple à une excitation sismique

On considère une masse  $m$  liée à un poteau de rigidité  $k$  encastré au niveau du sol. Le seisme est défini par son accélerogramme (voir fig); les mouvements du sol sont supposés horizontaux.



On note:  $y_0(t)$  le déplacement absolu du sol

$y''_0(t)$  l'accélération absolue du sol qui est donné par l'accélerogramme.

$y(t)$  le déplacement relatif de la masse  $m$  dans le repère relatif lié à l'oscillateur

$c$  la constante d'amortissement.

L'équation du mouvement s'écrira :

$$my'' + cy' + ky = -my''_0(t) = p(t)$$

La solution est donnée par l'intégrale de DUHAMEL :

$$y(t) = (1/m\omega_D) \int_0^t p(\tau) e^{-\chi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \quad (10)$$

avec  $\omega = \sqrt{k/m}$   $\chi = c/2m\omega$   $\omega_D = \omega \sqrt{1-\chi^2}$ . (11)

La fonction  $y''_0(t)$  étant complexe, le calcul de la valeur de  $y$  pour un temps  $t$  donné sera effectué à l'aide d'une intégration par partie. L'amplitude du mouvement est variable en fonction du temps. On note  $y_{max}$  le déplacement maximum qui se produit à un temps  $t_0$ .



#### Spectre de réponse

La relation (10) dépend des paramètres  $\omega$  et  $\omega_D$  donc du coefficient d'amortissement  $\chi$  et de la pulsation  $\omega$ .

Pour un accélérogramme donné [ $y''_0(t)$  donné], si on considère des oscillations simples ayant tous le même amortissement  $\chi$ , on voit qu'il existe une relation entre le déplacement maximum et  $y_{max}$  et la pulsation  $\omega$ . La courbe représentative s'appelle spectre de déplacement de la secousse tellurique.

On peut aussi combiner trois spectres en seul, dans les cas courants où l'amortissement est faible. En effet, si on suppose  $\omega_D \approx \omega$ , la relation (10) devient :

$$y(t) = (1/\omega) \times S \text{ avec } S = \int_0^t y''_0(\tau) e^{-\chi\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

$S$  est appelé pseudo-vitesse de l'oscillateur.

De plus l'accélération absolue  $y''_0$  et le déplacement relatif  $y$  d'un oscillateur non amorti sont liés par :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

En raisonnant sur les valeurs maximum (comptées positives) on peut

donc écrire:

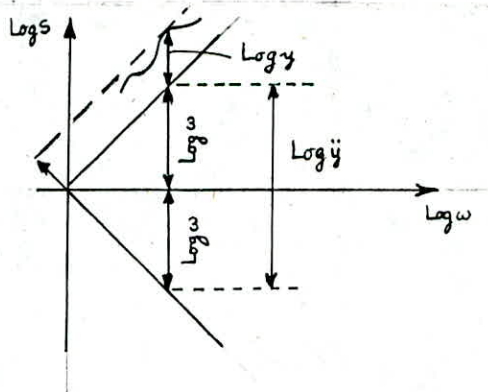
$$y = S/\omega$$

$$\text{Log}y = \text{Log}S - \text{Log}\omega$$

$$y'' = \omega^2 y = \omega S$$

$$\text{Log}y'' = \text{Log}S + \text{Log}\omega$$

On voit (fig ) que l'on peut repérer les valeurs  $\text{Log}y''$ ,  $\text{Log}S$  et  $\text{Log}y$  sur le même graphique en utilisant la première et la deuxième bissectrice comme axes de coordonnées. Cette représentation est appelée représentation "trilog".



#### Utilisation des spectres de réponse

Pour obtenir l'effort maximum dans le ressort de rappel d'un oscillateur simple, on peut utiliser deux méthodes.

a) En fonction de la période  $T$  de l'oscillateur, le spectre des déplacements relatifs donne la valeur  $y_{\max}$ ; On en déduit l'effort maximum dans le ressort;

$$F_{\max} = k y_{\max}$$

b) Le spectre des accélérations absolues donne la valeur  $y''_{\max}$ , maximum de  $y''$ ; on en déduit la force par la formule:

$$F_{\max} = m y''_{\max}$$

On obtient la même valeur de  $F_{\max}$  par les deux méthodes, puisque par construction les spectres de réponse sont liés par la relation:

$$y''_{\max} = \omega^2 y_{\max}$$

Soit:

$$m y''_{\max} = k y_{\max}$$

puisque:

$$\omega^2 = k/m$$

## D: CALCUL DES REponses DE LA STRUCTURE

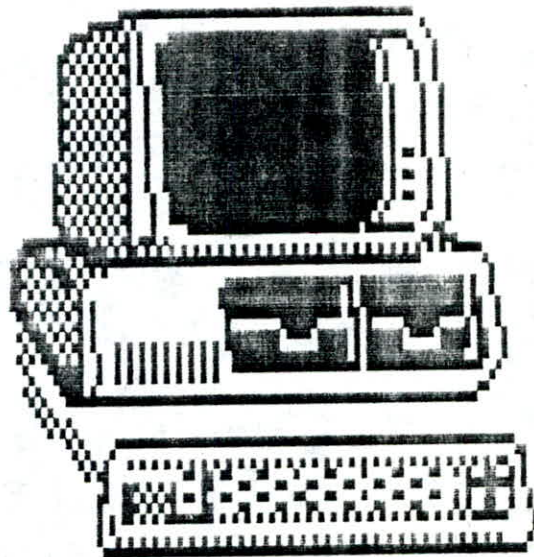
Différentes règles peuvent être adoptées pour effectuer les combinaisons modales; une bande supérieure est évidemment obtenue si l'on suppose que toutes les réponses modales atteignent leurs maximum au même temps et avec le même signe; cette règle, dite de combinaison arithmétique est exagérément pénalisante dans la grande majorité des cas et n'est pratiquement jamais utilisée. La règle communément adoptée est celle de la combinaison dite quadratique, d'après laquelle le maximum probable  $Z$  d'une réponse de la structure (composante de déplacement, de contrainte ou d'effort en un point) est la somme des carrés des réponses  $Z_i$  correspondant aux différents modes

L'effort peut s'exprimer alors:

$$F = (\sum F_i^2)^{1/2}$$

Elle correspond à une hypothèse d'indépendance (au sens statistique) de la réponse modale.

# Programmation



## PRESENTATION DU PROGRAMME ET UTILISATION

Le programme de calcul des réseaux de poutres croisées sous charges sismiques verticales se décompose en deux (02) modules réalisés indépendamment, tout au long de notre thèse, ils seront désignés par les abréviations suivantes:

- *CSRPC* : calcul statique des structures à poutres croisées;
- *CDRPC* : calcul dynamique des structures à poutres croisées;

La première partie intitulée *CSRPC* se décompose en neuf sous-routines, chacune sera traitée, en donnant les calculs qu'elle entreprend, le principe, ainsi qu'un aperçu sur la technique de programmation et éventuellement les résultats de son exécution.

### SOUS ROUTINE *DATSTR*

Elle est chargée de:

- lire les paramètres de la structure suivants:

M : nombre d'éléments ou barres  
NJ: nombre de noeuds  
NR: nombre de déplacements bloqués  
NRJ: nombre de noeuds appuis  
E: module d'élasticité (ou de YOUNG)  
G: module de cisaillement

$$G = E/2 \times (1 + \nu)$$

avec  $\nu$ : coefficient de poisson

- calculer le nombre de degrés de liberté

$$N = 3 \times NJ - NR$$

-lire les coordonnées des noeuds, qui seront rangées dans les tableaux X et Y;

-lire les propriétés et les désignations des éléments dans l'ordre suivant:

- \* conditions de jonction (noeud début, noeud fin)
- \* module de torsion  $I_x$
- \* moment d'inertie  $I_y$
- \* sections (utilisées ultérieurement en dynamique)

-deduire les longueurs des éléments, leurs cosinus directeurs indispensables pour la formation de la matrice des raideurs.

### SOUS ROUTINE *CODAPP*

### SOUS ROUTINE CODAPP

Chargée de lire les conditions aux limites, les déplacements libres sont codés par un zéro (0) ceux bloqués par un (1), ces codes sont rangés dans un tableau RL nécessaire à la formation de la liste cumulative CRL. Celle-ci est donnée par:

$$CRL(i) = \sum_{j=1}^i RL(j) \quad i=1, \dots, i$$

Notons que:  $CRL(1)=RL(1)$  et

$$CRL(NR) = \sum_{j=1}^{NR} RL(j) \quad i=1, \dots, NR$$

soit la somme totale des composants du tableau RL.

En illustration,

$$\text{soit } RL = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

$$CRL = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$$

L'intérêt du tableau CRL sera précisé dans la prochaine sous routine

### SOUS ROUTINE ASSMAT

Cette partie calcule la matrice des raideurs élémentaires dans le repère global et l'injecte directement aux emplacements correspondants dans la matrice des raideurs globale, elle permet encore d'extraire K et  $K_{RD}$  nécessaires pour le calcul des déplacements et des réactions.

La technique de programmation réalisant toutes ces tâches est la suivante:

- En utilisant les listes CRL et RL comme guides; les trois déplacements seront réindexés de la manière suivante: si un déplacement est libre son indice est diminué par une quantité CRL correspondante et contribuera ainsi à la formation de la matrice K, dans le cas contraire l'indice sera égal à N augmenté de CRL et contribuera à la formation de la matrice  $K_{RD}$ .

- Une fois le nombre d'éléments épuisé on se retrouve avec une matrice des raideurs globale dont la partie supérieure constitue la matrice relative aux déplacements inconnus (libres). Cette technique d'isolation a été choisie parmi tant d'autres pour sa performance et sa facilité. On citera ci-dessous les différentes méthodes d'assemblage connues.

#### Première méthode

Elle consiste à multiplier les termes diagonaux de la matrice  $K_T$  correspondants aux déplacements empêchés par un nombre très élevé, par exemple  $10E(30)$ , cela permet d'annuler pratiquement la valeur de ces déplacements.



### Deuxieme methode

Elle elimine entierement les lignes et les colonnes correspondants aux deplacements bloques.

### Troisieme methode

Elle se base sur le réarrangement de  $K_T$  afin de la diviser en quatre sous matrices, une matrice correspond aux deplacements libres, une autre aux deplacements empêchés (ou bloqués), les deux autres correspondent aux deplacements croisés (ddl et deplacements bloqués), ce qui se traduit au niveau de la matrice par une permutation de lignes et de colonnes.

Nous avons alors:

$$\begin{array}{|ccc| |c| |c|} \hline K & & K_{DR} & | & D_D & | & A_D & | \\ \hline & & & | & & | & = & | & \\ \hline K_{RD} & & K_{RR} & | & D_R & | & A_R & | \\ \hline \end{array}$$

La détermination des inconnues du système a été développé dans l'exposé de la methode des raideurs

### Quatrieme methode

Celle-ci consiste à conserver la disposition de la matrice  $K_T$ , tout en remplaçant les lignes et les colonnes correspondantes aux déplacements bloqués par zéro (0) en insérant toute fois un (1) pour le diagonal (afin d'éviter que la matrice soit singuliere)

On placera de meme un zéro sur la ligne correspondante du vecteur force. Ainsi, si  $d_j$  est le déplacement empêché, nous aurons à résoudre:

$$1 \times d_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_j = 0$$

Par la, les raideurs relatives aux déplacements fixes n'interviendront pas dans le calcul des déplacements

### SOUS ROUTINE DATLOA

Elle se charge d'introduire les données des charges. Ces charges peuvent être appliquées sur les noeuds ou sur les éléments.

Pour le cas des charges nodales on fournira le numéro du noeud, ainsi que les valeurs de ces charges dans les trois directions X, Y, Z.

Soit un noeud K, il peut être chargé par 3 actions notées  $A(3K-2)$ ,  $A(3K-1)$ ,  $A(3K)$ ; deux moments d'axes respectifs X, Y et une force de direction Z.

Le programme ne demande que les noeuds chargés, ceux qui ne le sont pas auront automatiquement leurs emplacements correspondants dans le vecteur charges nodales nuls.

Les sur les éléments seront introduits sous forme de réactions d'un élément pris bi-encasté (les réactions seront exprimées dans le repère local); pour un élément i on introduit les six réactions suivantes:

$A_{ML}(i, 1), A_{ML}(i, 2), A_{ML}(i, 3), A_{ML}(i, 4), A_{ML}(i, 5), A_{ML}(i, 6)$

les reactions correspondantes à  $i$  variant de 1 à 3 constituent les réactions du noeud debut, les trois autres les réactions sur le noeud fin.

#### SOUS ROUTINE EQJOLO

Si le nombre des éléments diffère de zéro cette sous routine intervient pour former un vecteur de charges nodales équivalentes aux charges agissantes sur les éléments.

Ces charges équivalentes notées  $A_E$  seront données dans le repère global de la structure.

#### SOUS ROUTINE COJOLO

La sous routine *COJOLO* se charge de nous fournir le Vecteur charges resultantes, en faisant la somme des charges nodales équivalentes  $A_E$  et des charges nodales réelles  $A$ .

donc  $A_C = A + A_E$ , qu'on peut écrire sous la forme suivante

$$A_C = \begin{bmatrix} A_D \\ I \\ -A_{RL} \end{bmatrix}$$

avec :  $A_D$ : les charges nodales résultantes correspondantes aux ddl appuis.  
 $A_{RL}$ : les réactions sous charges correspondants aux noeuds

#### SOUS ROUTINE RESOLV

Une fois la matrice des raideurs est prélevée, le vecteur des charges resultantes monté, *RESOLV* procède à la résolution du système linéaire  $K \times D_D = A_D$ , et détermine ainsi les  $N$  déplacements inconnus.

Il serait intéressant d'inverser directement la matrice  $K$  et attendre la formation de  $A_D$  pour déterminer les déplacements à partir:

$$D = K^{-1} \times A_D$$

toute fois les algorithmes développés montrent qu'il est plus simple et plus rapide de résoudre un système linéaire plutôt que de calculer l'inverse d'une matrice.

Pour la résolution du système linéaire, les traités d'analyse numérique proposent plusieurs méthodes qu'on peut classer en:

\*Méthode directes: solutions déterminées en un nombre fini d'opérations; parmi ces méthodes on peut citer:

-méthode d'élimination de GAUSS et ses variantes (factorisation de crout, GAUSS-JORDAN);

-méthode de factorisation de CHOLESKY;

-méthode de HOUSEHOLDER;

-méthode de CRAMER.

\*Methode iteratives:solutions obtenues en un nombre d'opérations dependant de la précision voulue.On peut citer en exemple:

- GAUSS-SEIDEL;
- JACOBI;
- méthodes de relaxations(relaxation par bloc,sous relaxation);
- minimisation de l'énergie potentielle totale par les méthodes du gradient conjugué.

La base de comparaison entre les différents algorithmes étant:

Les performances:ces méthodes doivent permettre une meilleure utilisation des ressources de l'ordinateur,à savoir la mémoire centrale, les périphériques...etc.Ét un nombre d'opérations arithmétiques réduit qui influence la rapidité d'exécution.

La fiabilité:ces méthodes doivent permettre la détection des singularités ou des situations de mauvais conditionnement;il est en outre souhaitable qu'elles permettent une évaluation de la précision obtenue sur la solution.

Pour satisfaire notre curiosité nous avons cherché le nombre d'opérations exact pour quelques méthodes directes.

nombre d'opérations →	systeme m×m	m=5	m=10
méthode ↓			
CRAMER	$(m+1)^2 m! - 1$	4319	439048799
inversion méthode des mineurs	$m!(m^2+m+1) + 3m^2 - m$	3790	402797090
HOUSEHOLDER	$4m^3/3 + 4m^2 + 14m/3 - 9$	281	1771
GAUSS	$(4m^3 + 9m^2 - 7m)/6$	115	805
CHOLESKY	$(2m^3 + 15m^2 + m)/6$	105	585

Pour notre logiciel nous avons opté pour la méthode de GAUSS adaptée pour un système symétrique à cause de son installation facile dans l'ordinateur, ces performances; en effet le nombre de ses opérations est voisin de celui de CHOLESKY, pour de grands systèmes ( $n \geq 20$ ) il est de l'ordre de  $n^3/3$  en plus, dans le cas de matrices réelles définies positives on peut montrer que la méthode d'élimination de GAUSS est stable

Son principe consiste à transformer le système  $A \times X = B$  en un système  $A' \times X = B'$  où  $A'$  est une matrice triangulaire supérieure; la résolution du système se fait par un calcul à rebours.

Soit pour la  $K$ ème étape

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - (a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}) \times a_{kj}^{(k-1)}$$

pour  $i = k+1, \dots, n$   
 $j = k, \dots, n+1$

La résolution est obtenue par:

$$X_i = 1/a_{ii} (b_i - \sum (a_{ij} \times X_j)) \quad \text{avec } i = n, n-1, \dots, 1$$

$j = i+1, \dots, n$

En résumé *RESOLV* fournit le vecteur déplacement des ddl de la structure en utilisant la méthode de GAUSS aménagée pour une matrice symétrique .

SOUS ROUTINE DEPREA

Cette section se charge du montage du vecteur déplacement total de la structure, du calcul des réactions  $A_R$  des appuis; les déplacements et les réactions sont envoyés vers un dispositif de stockage ou d'impression

Rappelons que les déplacements et les réactions sont fournis dans le système d'axes global.

Les réactions sont déterminées pour un ddl  $j$  par

$$A_R(j) = A_{RL}(j) + K_{RD} \times D$$

avec  $A_{RL}(j)$  réaction, correspondant au ddl  $j$ , sous charge de l'élément pris bi-encasté.

SOUS ROUTINE EFFEXT

L'objet de cette sous routine est le calcul des efforts internes de chaque élément suivant ses six ddl (c'est à-dire efforts aux deux extrémités de l'élément); ils seront établis dans le repère local de l'élément et déterminés par la relation suivante:

$$A_M(i, j) = A_{ML}(i, j) + K_{EX} \times D_j(i)$$

où  $i$  est le numéro de l'élément  
 $j$  étant le numéro du ddd pour l'élément

UTILISATION

Avant l'utilisation du *CSRPC* il faut au préalable ouvrir un fichier de données qu'il commence par vous demander le nom.

Le fichier doit être créé strictement dans cet ordre suivant

DONNEES	NOMBRE DE LIGNE	DISPOSITION DES VARIABLES
parametres de la structure et modules d'elasticités	1	M, NJ, NR, NRJ, E, G
coordonnees des noeuds	NJ	X(J), Y(J)
designation et proprietes des elements	M	JJ(1), JK(1), IX(1), IY(1)
liste des deplacements bloques	NRJ	K, RL(3K-2), RL(3K-1), RL(3K)
nombre de noeuds et elements charges	1	NLJ, NLM
charges nodales reelles	NLJ	K, A(3K-2), A(3K-1), A(3K)
efforts aux extremités de l'element pris bi-encasté	NLM	1, AML(I, 1), AML(I, 2), AML(I, 3) AML(I, 4), AML(I, 5), AML(I, 6)

En plus du rappel des données entrées, le *CSRPC* Donne les résultats suivants:

RESULTATS	NOMBRE DE LIGNE	DISPOSITION DES VARIABLES
deplacement des noeuds suivant les 3 ddl ainsi que les réactions	N	suivant X, Y, Z suivant X, Y, Z
efforts aux extrémités de l'element	M	1, Am(I, 1), Am(I, 2), Am(I, 3) Am(I, 4), Am(I, 5), Am(I, 6)

## PRESENTATION DU CDRPC

### SOUS ROUTINE ASSMAS

La sous routine *ASSMAS* se charge d'assembler la matrice masse de la structure toute entière  $[M_T]$  à partir des matrices masse élémentaires de chaque élément. Le principe d'assemblage reste le même que dans le module *CSRPC*. En effet, la sous routine *ASSMAS* nous fournit la matrice  $[M]$  écrite sous la forme suivante:

$$[M_T] = \begin{bmatrix} M & M_{RD} \\ M_{DR} & M_{RR} \end{bmatrix}$$

La sous routine *ASSMAS* retient seulement la sous matrice  $[M]$  correspondant aux ddl, les autres sont ignorées.

### SOUS ROUTINE AFFECT

Elle se charge de lire la matrice de raideurs  $[K]$  déjà formée par le module *CSRPC* et de l'affecter à une autre matrice utilisée dans la prochaine sous routine.

### SOUS ROUTINE CONDENS

Une fois la matrice masse et celle de raideurs obtenues, la sous routine *CONDENS* se charge de la condensation statique. Elle lit d'abord le nombre de ddl à conserver *NDC* et à éliminer *NDE*, les numéros des déplacements à éliminer et ceux à conserver et les range dans deux tableaux  $V_1, V_2$ . Elle pourra ainsi former les matrices  $K_{AA}$  et  $K_{AB}$  (voir condensation statique). La matrice  $K_{AA}$  est ensuite inversée en utilisant l'algorithme de *GAUSS - JORDAN*.

Le principe de l'algorithme de *GAUSS - JORDAN* est le suivant : soit la matrice  $K_{AA}$  à inverser d'ordre *NDE*, on l'augmente en lui adjoignant la matrice identité  $I_n$ . On partira, donc, de la matrice  $[K_{AA}, I_n]$  d'ordre  $NDE \times 2NDE$  en procédant aux opérations suivantes (algorithme de *GAUSS-JORDAN*):

$$\begin{aligned} a^{k_{kj}} &= a^{k-1_{kj}} / a^{k-1_{kk}} & j &= 2n, \dots, k & | \\ & & & & | \\ a^{k_{ij}} &= a^{k-1_{ij}} - a^{k-1_{ik}} a^{k_{kj}} & j &= 2n, \dots, k & | \\ & & i &= 1, 2, \dots, n & | \\ & & i &\neq k & | \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} k = 1, n$$

avec:

$$a_{ij} = K_{AAij} \quad ; \quad n = NDE$$

On construit après la matrice transformation *T*, on obtient ainsi les matrices condensées  $[K]^*$ ,  $[M]^*$  après multiplications matricielles.



Les coefficients a et b sont calculés en écrivant que:  $K_{m+1,j} = M_{m+1,j} = 0$   
 Soit, en supprimant par simplicité l'indice m+1 sur les termes de chaque  
 matrice:

$$aK_{i,i} + (1 + ab)K_{i,j} + bK_{j,j} = 0$$

$$aM_{i,i} + (1 + ab)M_{i,j} + bM_{j,j} = 0$$

La convergence du processus de calcul est mesurée en comparant les  
 approximations successives des valeurs propres et en vérifiant que pour  
 les matrices  $[K_m]$  et  $[M_m]$  les éléments non diagonaux sont négligeables  
 devant ceux de la diagonale. La convergence est suffisante si:

$$\frac{|\lambda^{(i+1)}_{ii} - \lambda^{(i)}_{ii}|}{\lambda^{(i+1)}_{ii}} \leq 10^{-6} \quad ; \quad i=1, \dots, n$$

ou  $\lambda^{(i+1)}_{ii} = \frac{K^{(i+1)}_{ii}}{M^{(i+1)}_{ii}} \quad ; \quad \lambda^{(i)}_{ii} = \frac{K^{(i)}_{ii}}{M^{(i)}_{ii}}$

et

$$\left[ \frac{(K^{(i+1)}_{ij})^2}{K^{(i+1)}_{ii} \times K^{(i+1)}_{jj}} \right] \leq 10^{-6} \quad ; \quad \left[ \frac{(M^{(i+1)}_{ij})^2}{M^{(i+1)}_{ii} \times M^{(i+1)}_{jj}} \right] \leq 10^{-6} \quad \text{qqsoit } i, j \quad i \neq j$$

$10^{-6}$  représente la tolérance de convergence, en général on prend  $\delta=12$

#### SOUS ROUTINE FACPAR

Les vecteurs propres étant déterminés par l'algorithme de JACOBI;  
 FACPAR se charge de calculer le facteur de participation de chaque mode de  
 vibration en utilisant l'expression suivante:

$$a(i) = (\phi_i M_i \delta) / (\phi_i M_i \phi_i^T) \quad \delta=1 \text{ ou } 0$$

La sélection des modes est telle que la somme de tous les a(i) soit  
 supérieur à 90% .

#### SOUS ROUTINE SISMOQ

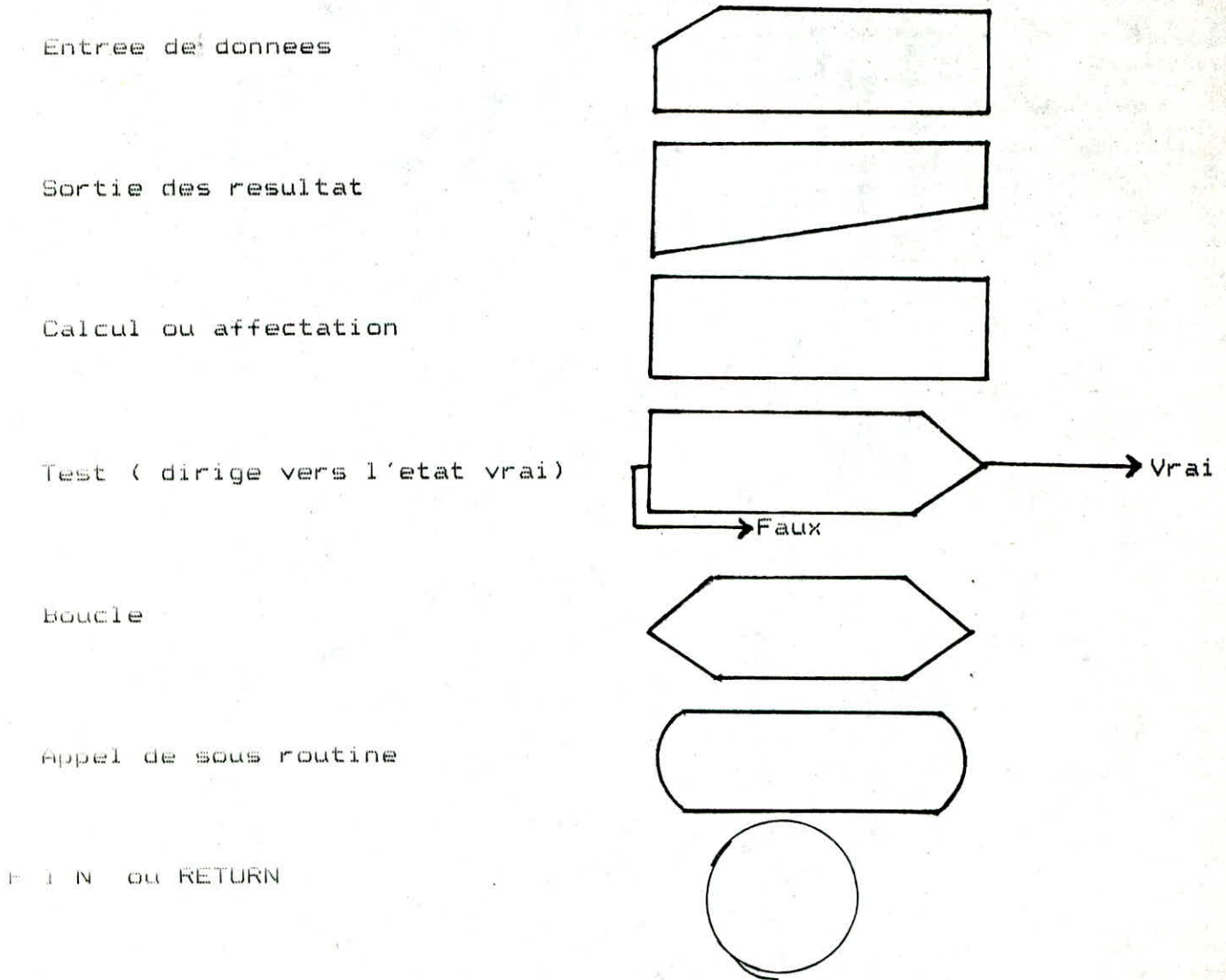
Elle évalue les efforts sismiques, à partir des données d'un spec-  
 tre ; elle calcule les forces sismiques  $F(i, j)$  relatives au ième ddl et au  
 j-ème mode. Enfin, elle détermine les forces  $F_s(i)$  appliquées pour chaque ddl  
 par une combinaison quadratique des forces calculées pour chaque mode.

La sous routine dispose ces forces dans un fichier résultats qui  
 constituera un fichier de données de charges pour une prochaine exécution  
 du CSRFC.



ORGANIGRAMMES  
ORGANIGRAMMES  
ORGANIGRAMMES

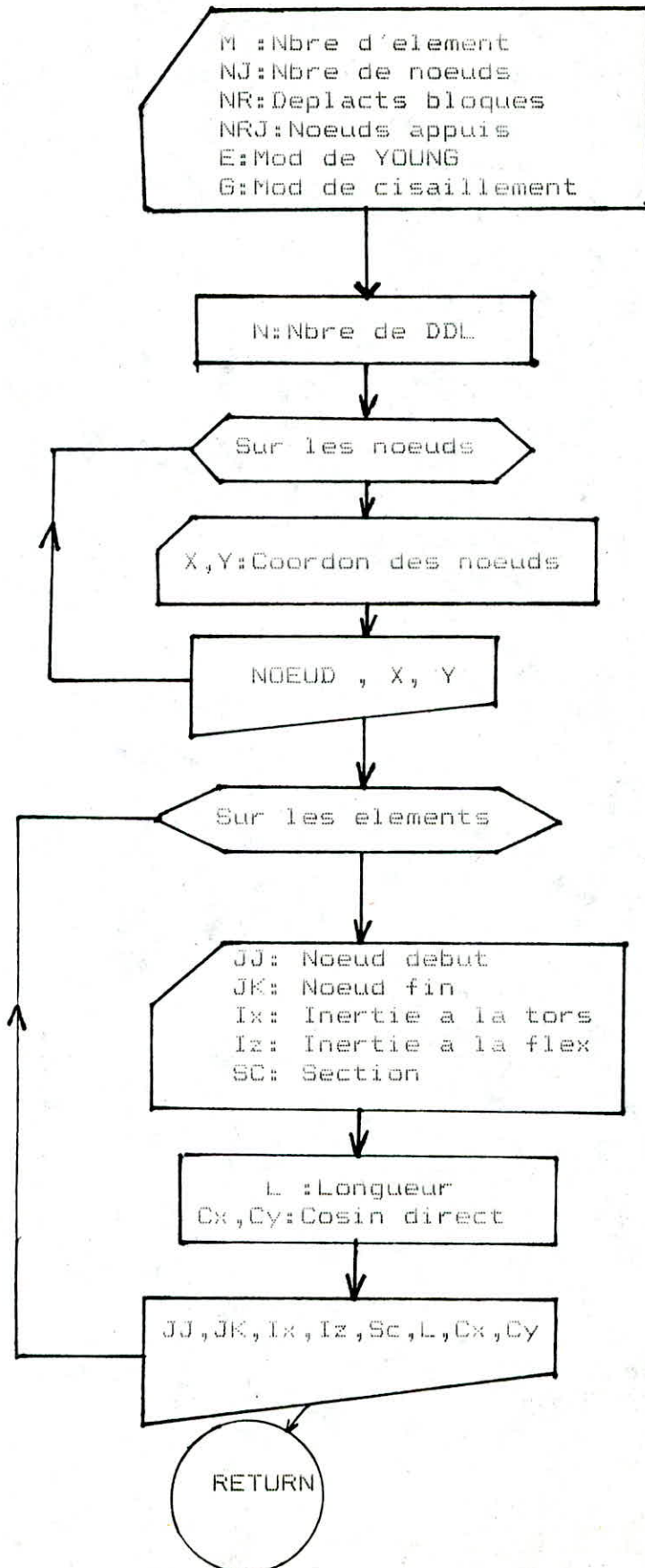
SYMBOLES UTILISEES DANS LES ORGANIGRAMMES

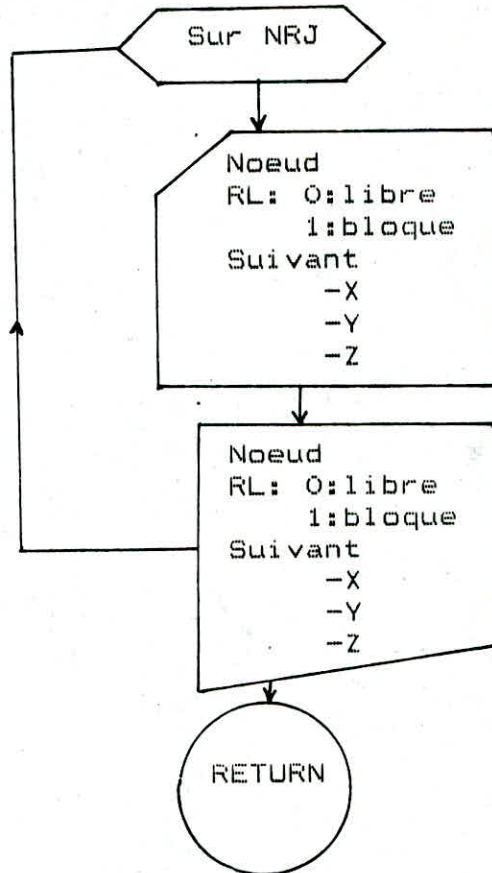


Remarque

La sous routine ASSMAS d'assemblage de la matrice de masses suit le meme procede que celui d'ASSMAT

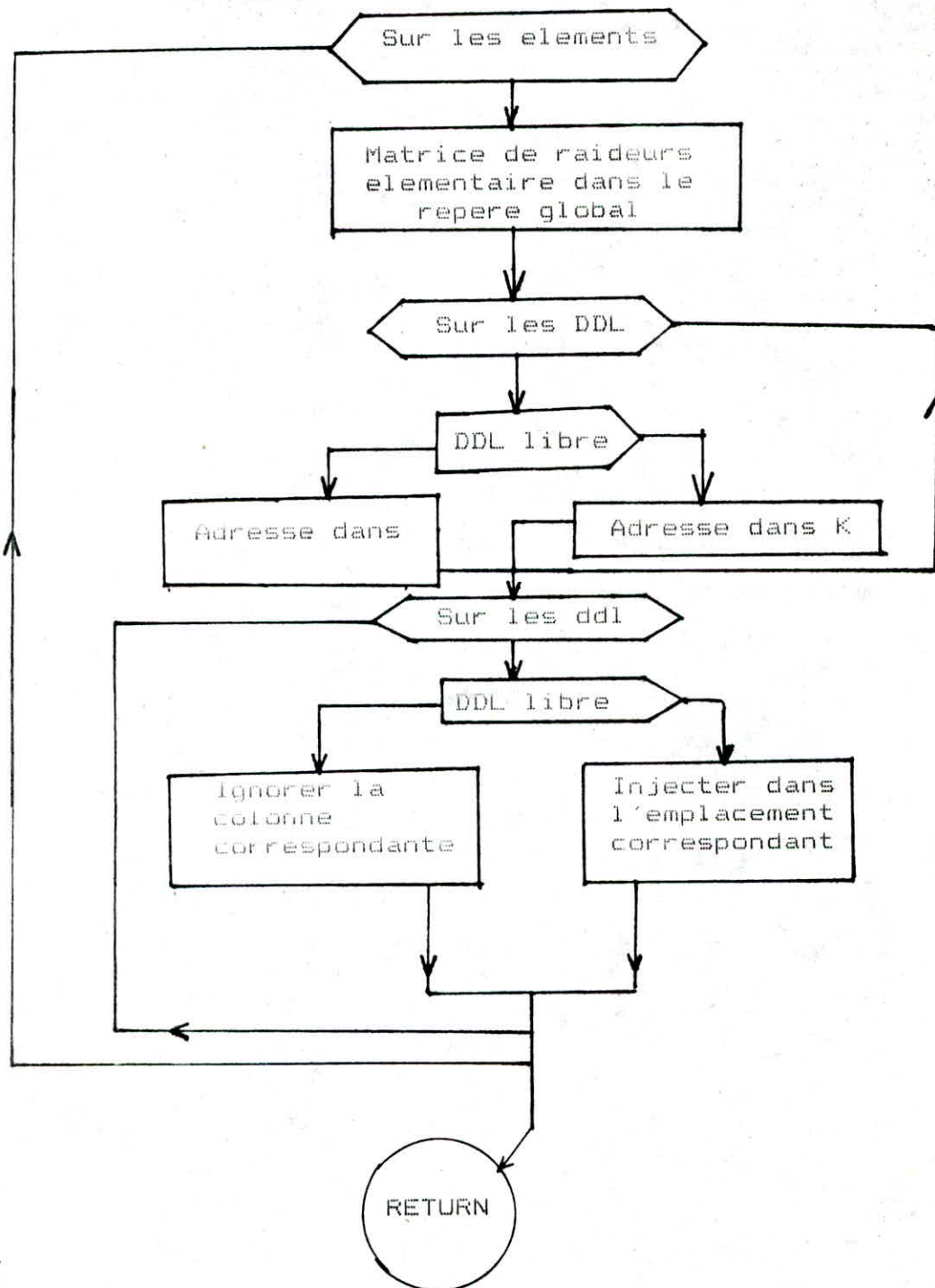
Sous routine DATSIR

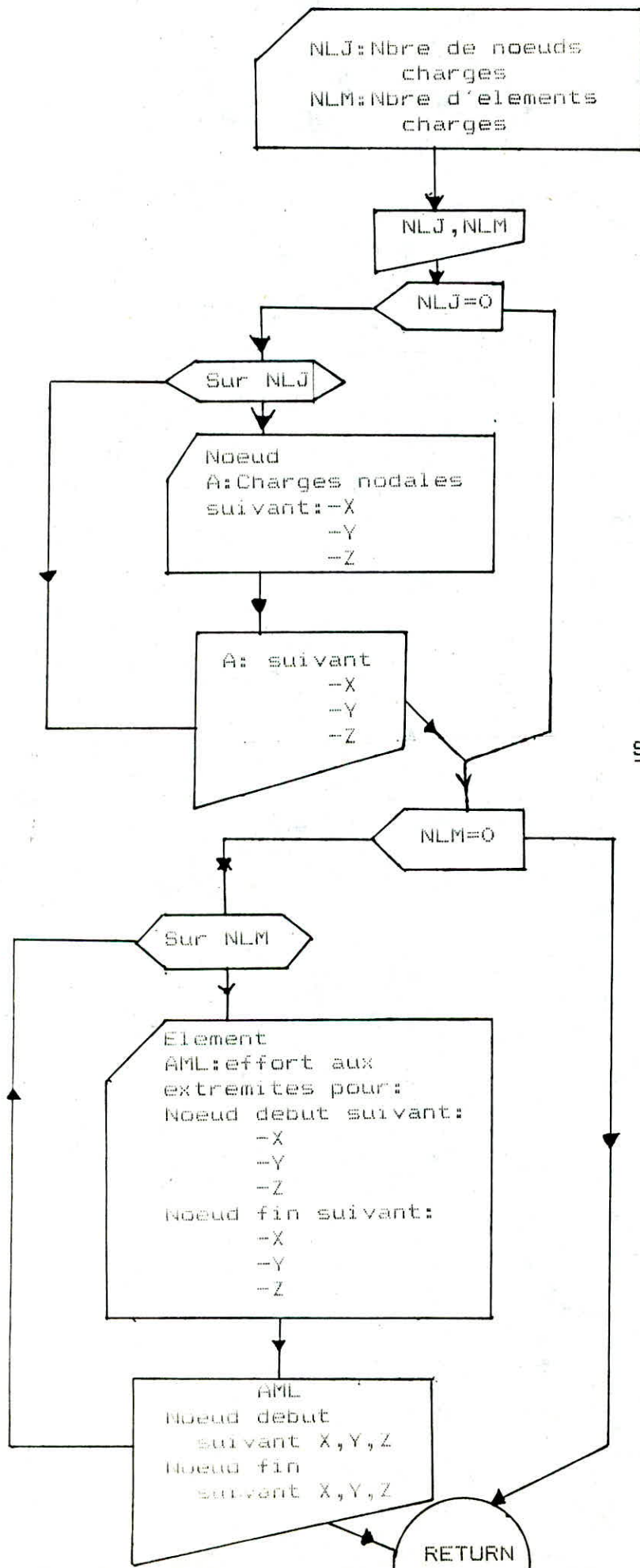




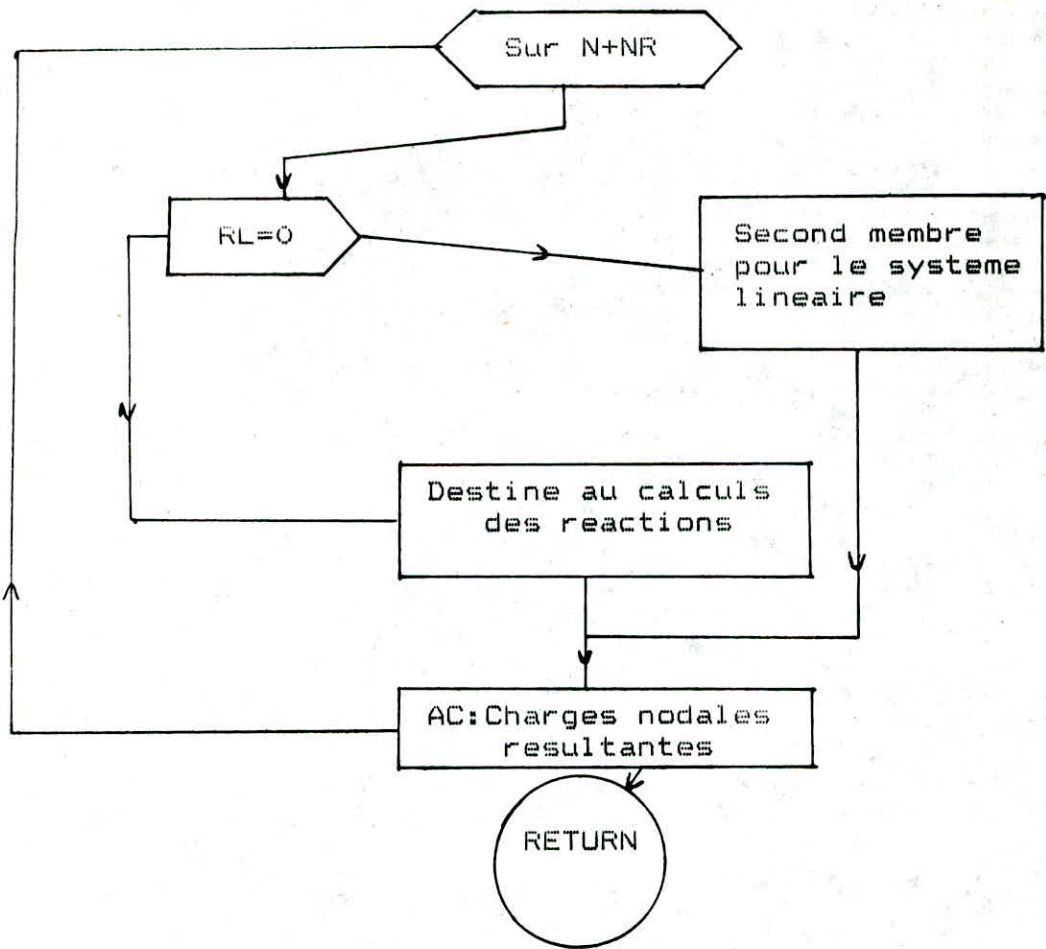
Sous routine CODDAPP

Sous routine ASSMAT

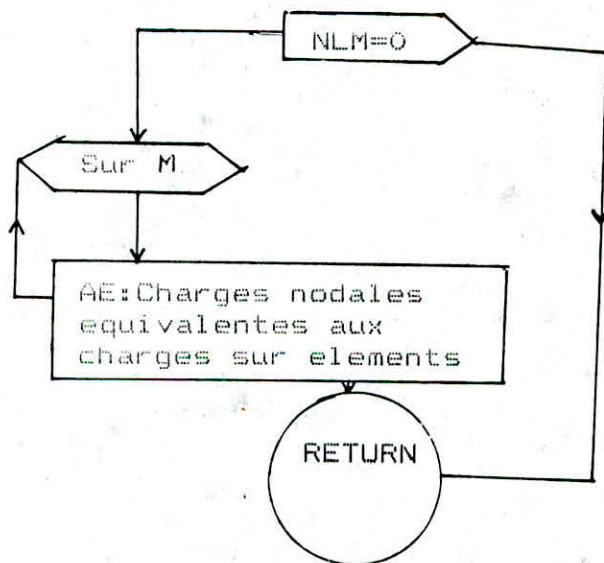




Sous routine DATLOA

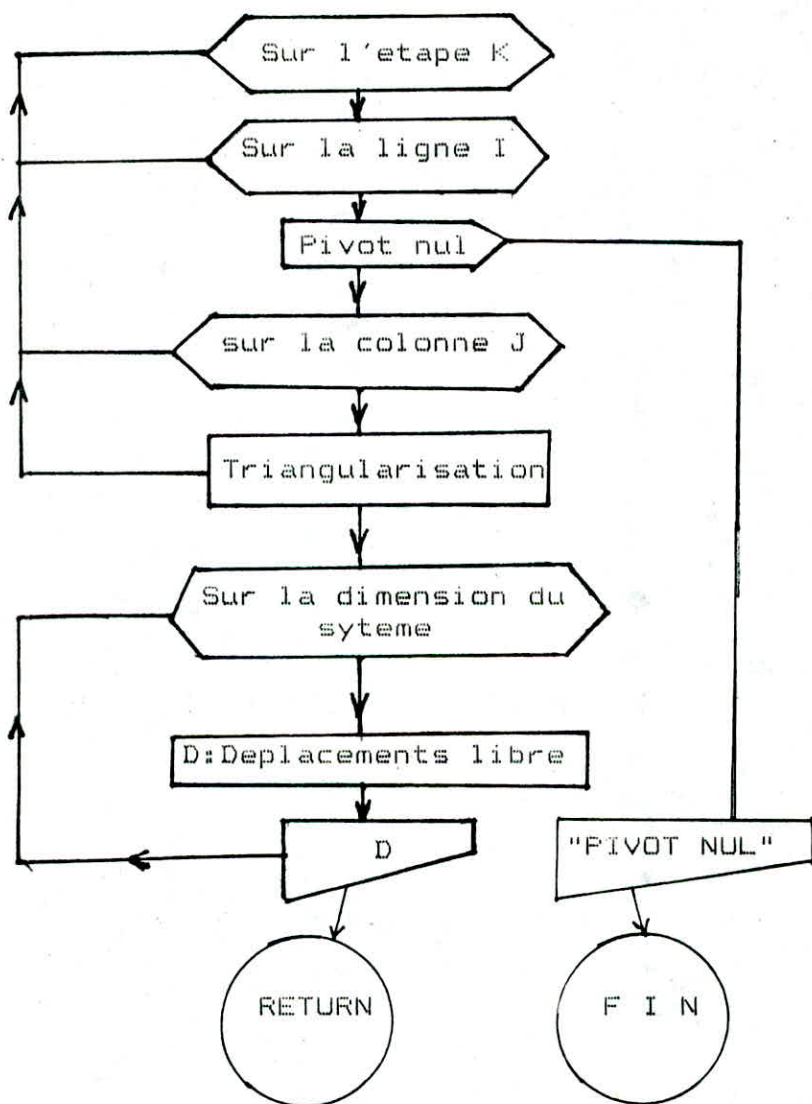


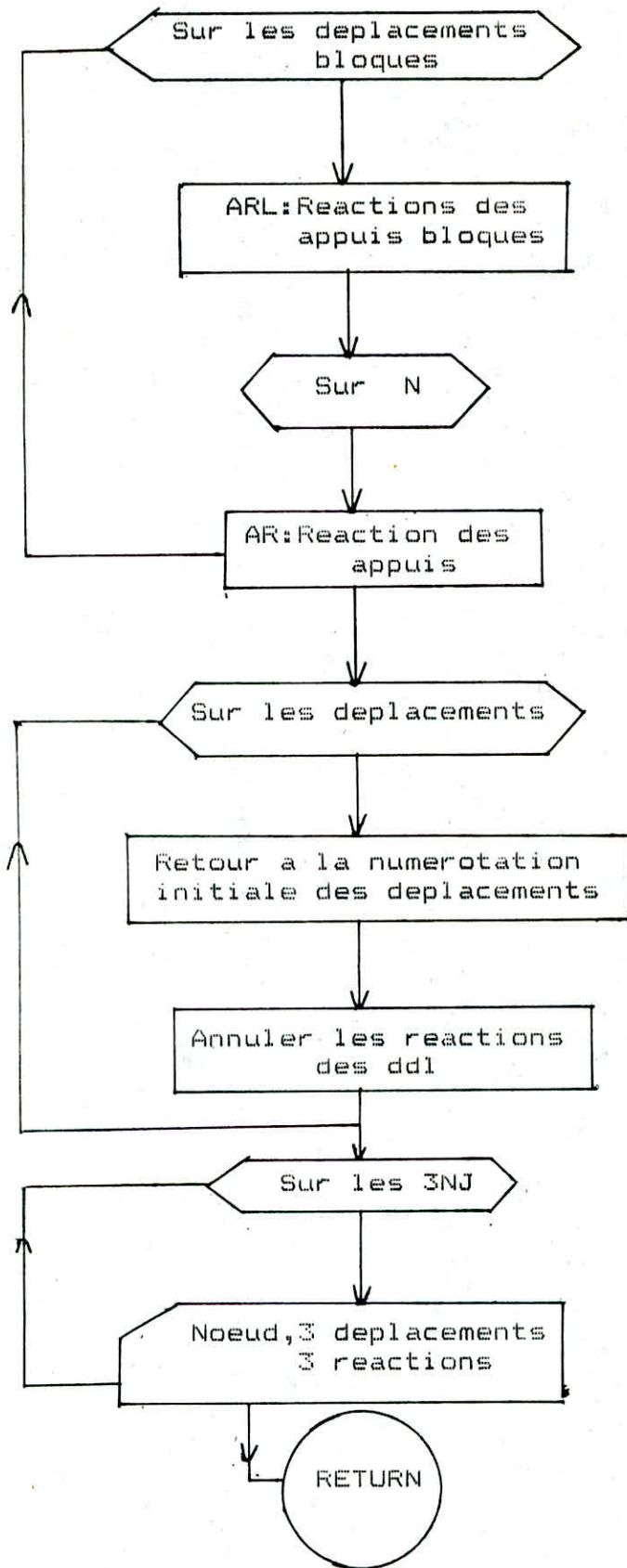
Sous routine COJOLO



Sous routine EQJOLO

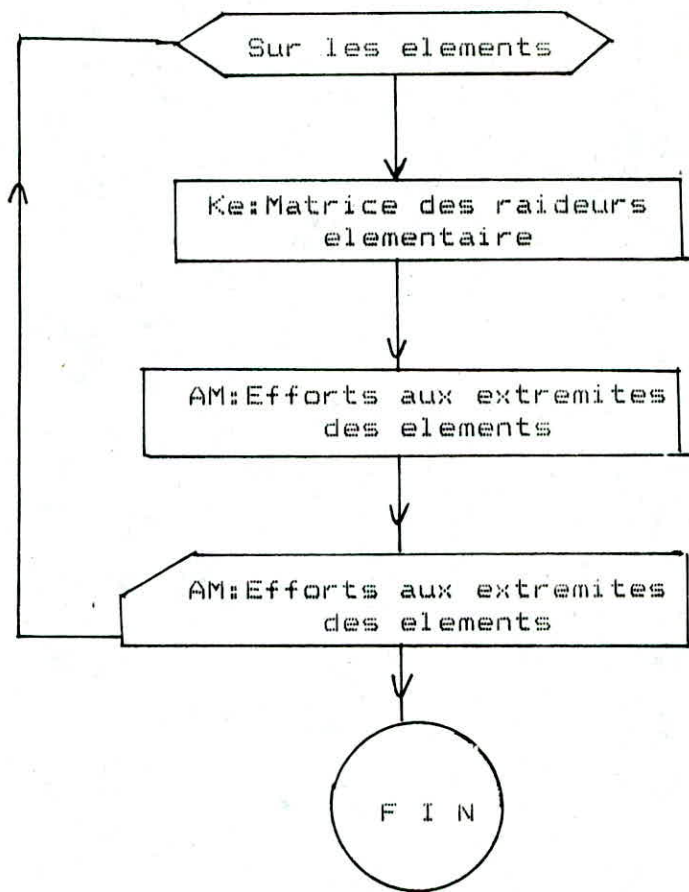
Sous routine RESOLV



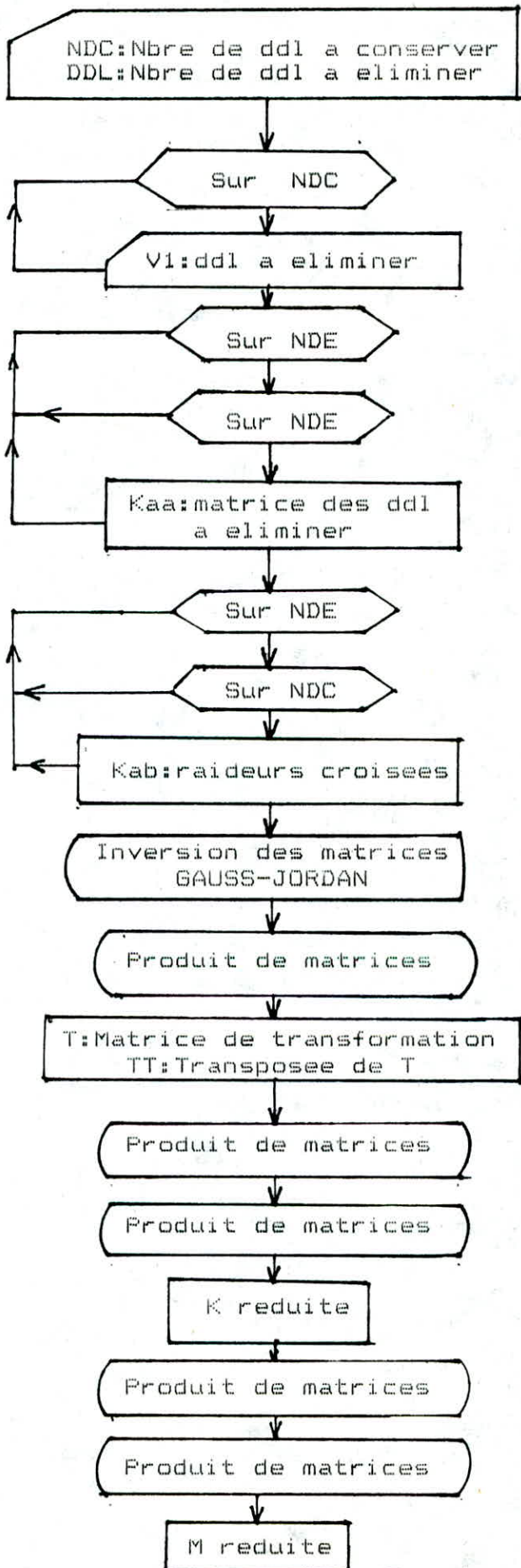


Sous routine DEPREA



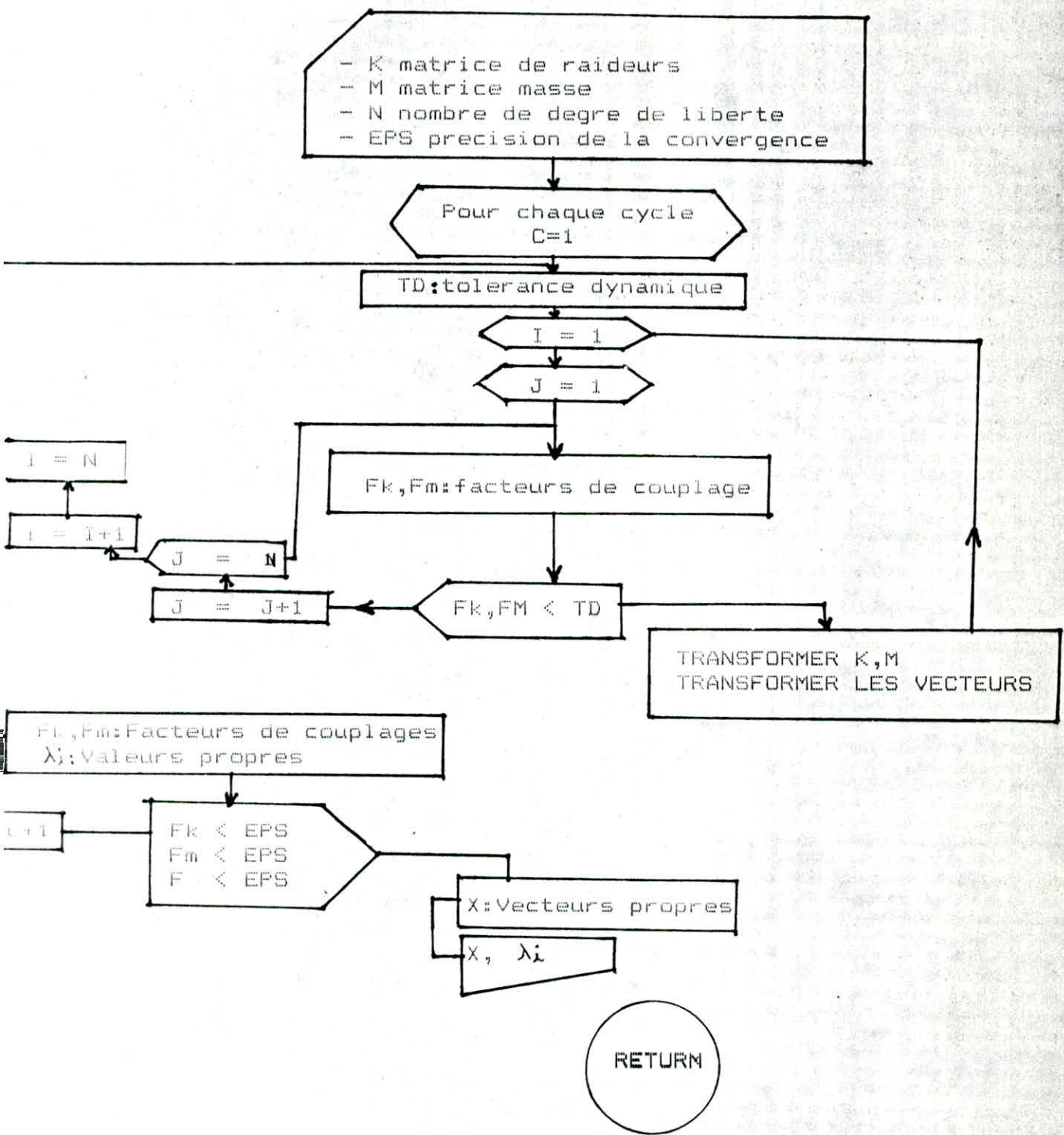


Sous routine EFFEXT

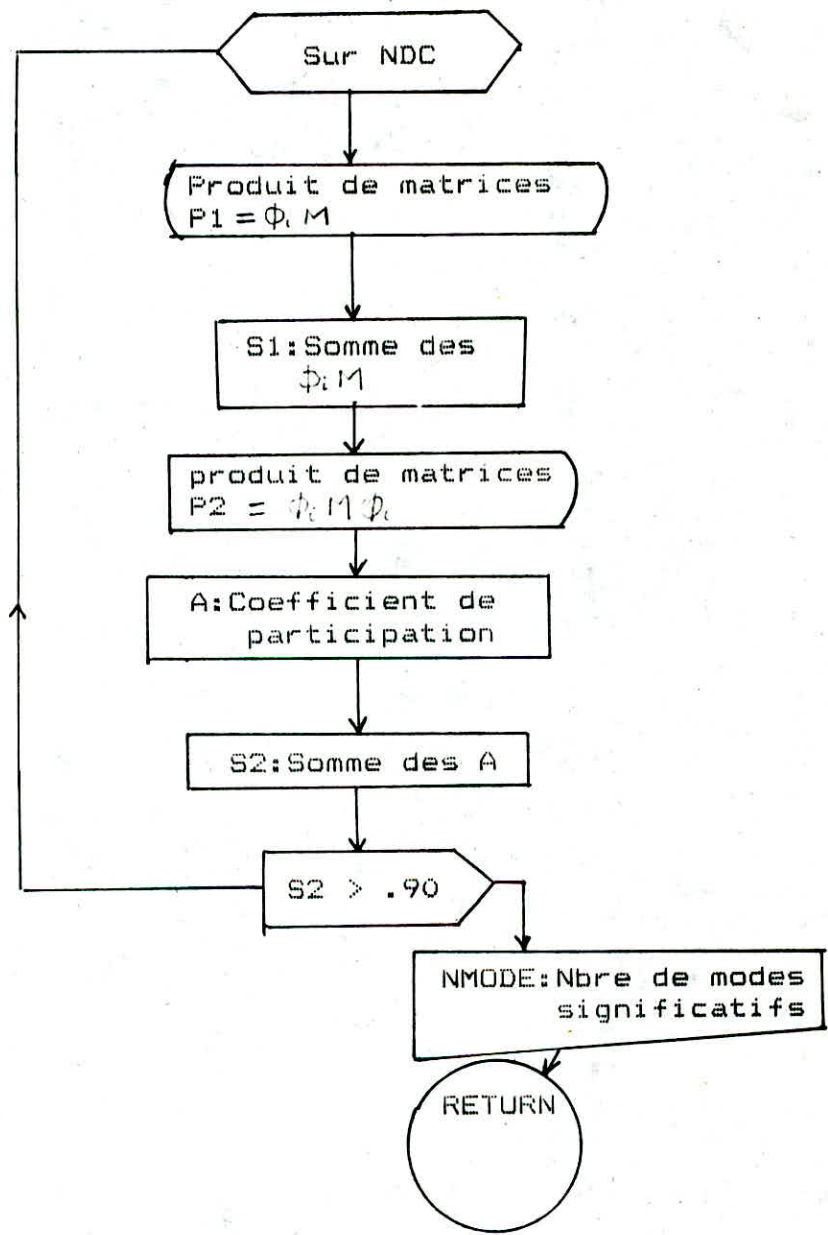


Sous routine

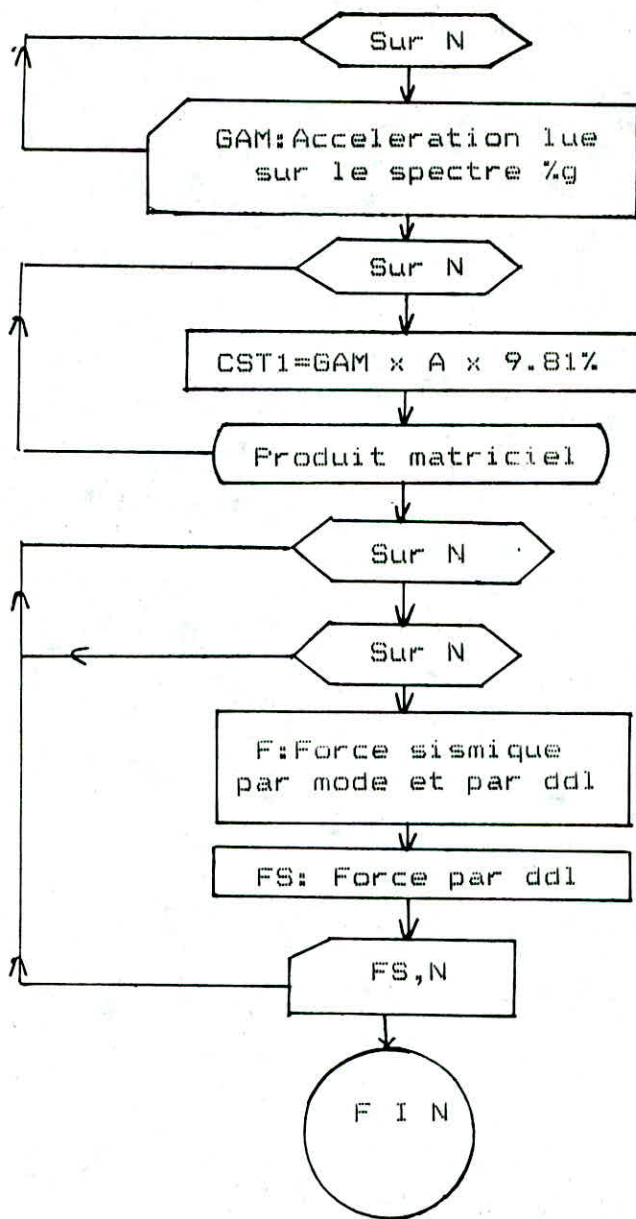
CONDEN



Sous routine JACOBI



Sous routine FACPAR

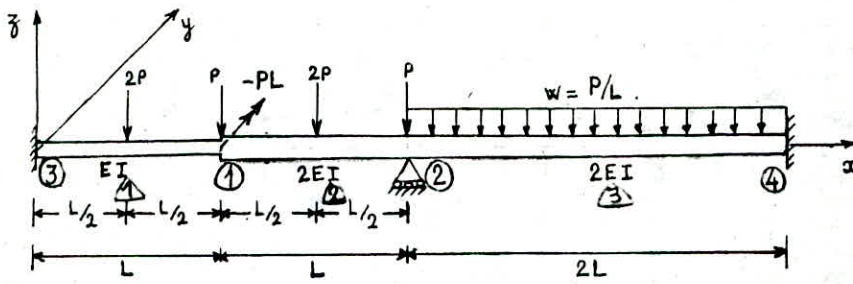


Sous routine SISMIO



# APPLICATIONS

APPLICATION 1: Poutre continue a inertie variable



Donnees:

$E=10000 \text{ u}$

$P=10 \text{ u}$

$L=100 \text{ u}$

Fichier RESULTAT:

CONTILOBER.SAISIBE.R;5

11-JAN-1988 13

POUTRE CONTINUE

DONNEES DE LA STRUCTURE

N	M	NI	NR	NRJ	E	G
3	5	4	7	3	10000.0000	1.0000

COORDONNEES DES NOEUDS

NOEUD	X	Y
1	100.00	0.00
2	200.00	0.00
3	0.00	0.00
4	400.00	0.00

DESIGNATIONS ET PROPRIETES DES ELEMENTS

ELEMENT	JJ	JR	AIX	AIY	AL	CX	CY
1	3	1	1.000	1000.000	100.000	1.000	0.000
2	1	2	1.000	2000.000	100.000	1.000	0.000
3	2	4	1.000	2000.000	200.000	1.000	0.000

NOEUDS APPUIS

NOEUD	XRSTR	YRSTR	ZRSTR
1	0.	0.	1.
2	1.	1.	1.
4	1.	1.	1.

DONNEES RELATIVES AUX CHARGES

NLJ	NLM
2	3

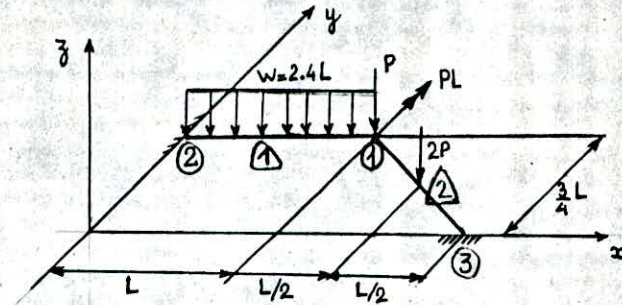
CHARGES NODALES

NOEUD	ACTION X	ACTION Y	ACTION Z
1	0.0000	-1000.0000	-10.0000
2	0.0000	0.0000	-10.0000





APPLICATION 2: reseau de poutre 1



Donnees:

E=10000      P=10      Ix=1000  
G= 4000      L=100      Iy=1000

Fichier resultats:

DUAL:USER.SAISIDE.RES;4

\*\*\*\*\* DONNEES DE LA STRUCTURE \*\*\*\*\*

M	N	NJ	NR	NRJ	E	G
2	3	3	6	2	10000.0000	4000.0000

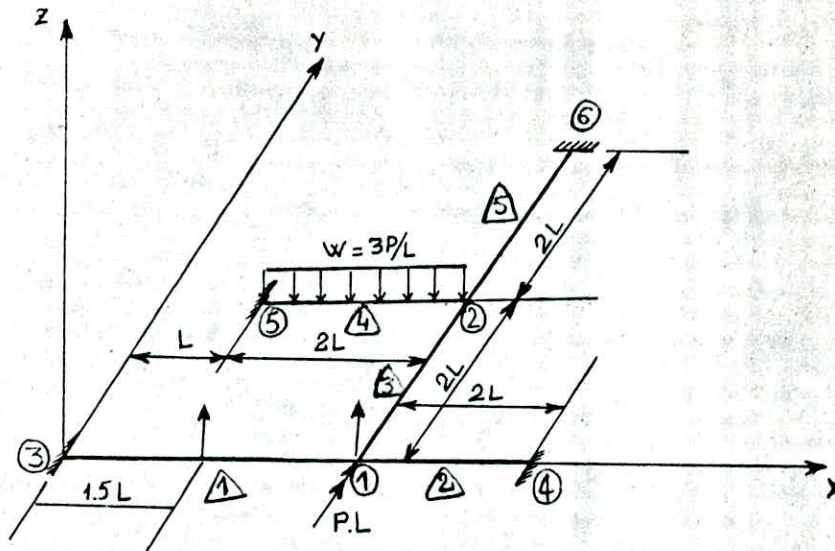
\*\*\*\*\* COORDONNEES DES NOEUDS \*\*\*\*\*

NOEUD	X	Y
1	100.00	75.00
2	0.00	75.00
3	200.00	0.00

ELEMENT	JJ	DESIGNATIONS ET PROPRIETES DES ELEMENTS		AL	CX	CY	
		JK	AIX				AIY
1	2	1	1000.000	1000.000	100.000	1.000	0.000
2	1	3	1000.000	1000.000	125.000	0.800	-0.600

NOEUD	NOEUDS APPUIS		
	XRSTR	YRSTR	ZRSTR
2	1.	1.	1.
3	1.	1.	1.

APPLICATION 3: reseau de poutres 2 (deja traite a la main)



Donnees :

E=30000      P=16      Ix=2000  
G=12000      L=60      Iy=1000

Fichier resultats

\_DUAL:LOSER.SAISIS3.RES;2

27-DEC-

\*\*\*\*\* DONNEES DE LA STRUCTURE \*\*\*\*\*

M	N	NJ	NR	NRJ	E	G
5	6	6	12	4	30000.0000	12000.0000

\*\*\*\*\* COORDONNEES DES NOEUDS \*\*\*\*\*

NOEUD	X	Y
1	180.00	0.00
2	180.00	120.00
3	0.00	0.00
4	300.00	0.00
5	60.00	120.00
6	180.00	240.00

\*\*\*\*\* DESIGNATIONS ET PROPRIETES DES ELEMENTS \*\*\*\*\*

ELEMENT	JJ	JK	IX	IY	L	CX	CY
1	3	1	2000.000	1000.000	180	1.000	0.000
2	1	4	2000.000	1000.000	120	1.000	0.000
3	1	2	2000.000	1000.000	120	0.000	1.000
4	5	2	2000.000	1000.000	120	1.000	0.000
5	2	6	2000.000	1000.000	120	0.000	1.000

\*\*\*\*\* NOEUDS APPUIS \*\*\*\*\*

NOEUD	XRSTR	YRSTR	ZRSTR
3	1.	1.	1.
4	1.	1.	1.
5	1.	1.	1.
6	1.	1.	1.

\*\*\*\*\* DONNEES RELATIVES AUX CHARGES \*\*\*\*\*

NLJ	NLM
1	2

\*\*\*\*\* CHARGES NODALES \*\*\*\*\*

NOEUD	ACTION X	ACTION Y	ACTION Z
1	0.0000	960.0000	16.0000

\*\*\*\*\* EFFORTS AUX EXTREMITES BLOQUEES DES ELEMENTS DUS AUX CHARGES\*\*\*\*\*

ELEMENT	AML1	AML2	AML3	AML4	AML5	AML6
1	0.0000	-1080.0000	24.0000	0.0000	1080.0000	24.0000
4	0.0000	-960.0000	48.0000	0.0000	960.0000	48.0000

\*\*\*\*\* DEPLACEMENTS NODAUX ET REACTIONS D'APPUIS \*\*\*\*\*

NOEUD	X DEPL.	Y DEPL.	Z DEPL.	X REAC.	Y REAC.	Z REAC.
1	-0.6835E-03	-0.2875E-03	-0.7017E-01	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.5540E-03	0.3528E-03	-0.1209E+00	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	91.1346	-1565.6846	29.9290
4	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	136.7019	733.3703	11.0248
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-110.8085	-2295.0505	68.7807
6	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-1234.4421	-70.5651	18.2655

\*\*\*\*\* EFFORTS AUX EXTREMITES DES ELEMENTS \*\*\*\*\*

ELEMENT	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	91.1346	-1565.6846	29.9290	-91.1346	498.4701	18.0710
2	-136.7019	589.6023	-11.0248	136.7019	733.3703	11.0248
3	-128.0723	-227.8365	8.9537	128.0723	-846.6125	-8.9537
4	-110.8085	-2295.0505	68.7807	110.8085	-198.6376	27.2193
5	70.5651	957.4209	-18.2655	-70.5651	1234.4421	18.2655

# THEORIE DES EQUIVALENCES

## Introduction

La theorie des equivalences constitue une approche generale permettant de substituer a l'etude d'un corps reel charge, celle d'un autre corps fictif plus accessible au calcul. Ce corps fictif peut avoir des caracteristiques et des lois de comportement n'ayant pas necessairement un sens physique.

La condition d'equivalence entre le corps reel et le corps fictif est l'egalite de l'energie de deformation.

L'equivalence peut avoir lieu entre deux corps pouvant etre continus ou discrets.

## Notations:

- A : volume occupe par un modele equivalent.
- D : rigidite de la dalle;  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$
- E : coefficient d'elasticite
- I : moment d'inertie.
- $\mu J$  : rigidite a la torsion.
- U : energie de deformation d'un corps.
- $U_0$  : densite de l'energie de deformation d'un corps.
- h : epaisseur .
- L : longueur .
- w : fleche dans une dalle.
- $\nu$  : coefficient de poisson

## Equivalence entre une dalle et un reseau de poutres croisees.

a) Pour une dalle de plan moyen (x,y) et d'epaisseur variable  $h(x,y)$ , l'energie de deformation par unite de surface est donnees par:

$$U_0 = (1/2)D\{(\delta^2 w/\delta x^2)^2 + (\delta^2 w/\delta y^2)^2 + 2\nu(\delta^2 w/\delta x^2)(\delta^2 w/\delta y^2) + 2(1-\nu)(\delta^2 w/\delta x\delta y)^2\}$$

$$U_0 = (1/2)D\{(\delta^2 w/\delta x^2)^2 + (\delta^2 w/\delta y^2)^2 + 2(\delta^2 w/\delta x\delta y)^2 + 2\nu[(\delta^2 w/\delta x^2)(\delta^2 w/\delta y^2) - (\delta^2 w/\delta x\delta y)^2]\}$$

ou D est la rigidite de la dalle :

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

dans le cas de petites flèches, les efforts de membranes sont négligés

$$(\delta^2 w / \delta x \delta y)^2 - (\delta^2 w / \delta x^2) (\delta^2 w / \delta y^2) \approx 0$$

Soit enfin:

$$U_0 = (1/2) D \{ (\delta^2 w / \delta x^2)^2 + (\delta^2 w / \delta y^2)^2 + 2 (\delta^2 w / \delta x \delta y)^2 \} \quad (1)$$

b) Energie de flexion et de torsion d'une barre

Le moment de flexion de la barre en fonction de la  $w$  est par:

$$M_f = EI \times (\delta^2 w / \delta x^2)$$

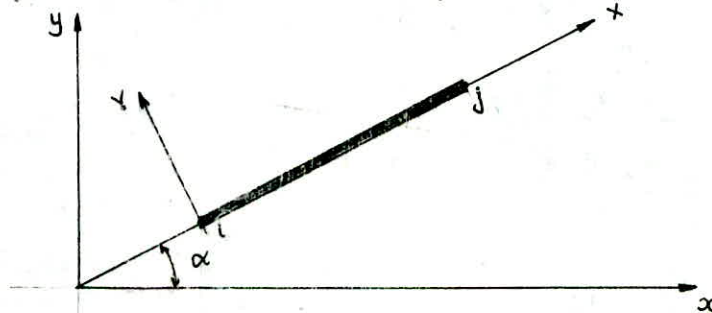
$EI$ : rigidité de flexion

or,

$$\delta w / \delta X = (\delta w / \delta x) \times (\delta x / \delta X) + (\delta w / \delta y) \times (\delta y / \delta Y)$$

→

$$\delta w / \delta X = (\delta w / \delta x) \cos \alpha + (\delta w / \delta y) \sin \alpha$$



$$\delta^2 w / \delta X^2 = (\delta w / \delta x)^2 = (\delta^2 w / \delta x^2) \cos^2 \alpha + (\delta^2 w / \delta y^2) \sin^2 \alpha + 2 (\delta^2 w / \delta x \delta y) \cos \alpha \sin \alpha$$

d'où:

$$M_f = EI [ (\delta^2 w / \delta x^2) \cos^2 \alpha + 2 (\delta^2 w / \delta x \delta y) \cos \alpha \sin \alpha + (\delta^2 w / \delta y^2) \sin^2 \alpha ]$$

l'énergie de flexion est donnée par:

$$W_f = 0.5 \times M_f \times (\delta^2 w / \delta x^2) L = 0.5 \times EI (\delta^2 w / \delta x^2)^2 L$$

$$W_f = 0.5 \times EIL [ (\delta^2 w / \delta x^2) \cos^2 \alpha + 2 (\delta^2 w / \delta x \delta y) \cos \alpha \sin \alpha + (\delta^2 w / \delta y^2) \sin^2 \alpha ]^2$$

on pose  $EIL = \rho'_{13}$ .

De même pour le moment de torsion

$$M_t = \mu J (\delta^2 w / \delta x \delta y)$$

$\mu J$ : rigidité à la torsion

$$W_t = 0.5\gamma [(\delta^2 w / \delta x^2) \cos^2 \alpha + 2(\delta^2 w / \delta x \delta y) \cos \alpha \sin \alpha + (\delta^2 w / \delta y^2) \sin^2 \alpha]$$

avec  $\gamma = \mu J L$ .

L'énergie de torsion devient:

$$W_t = 0.5\gamma [0.5((\delta^2 w / \delta y^2) - (\delta^2 w / \delta x^2)) \sin^2 \alpha + (\delta^2 w / \delta x \delta y) \cos^2 \alpha]^2$$

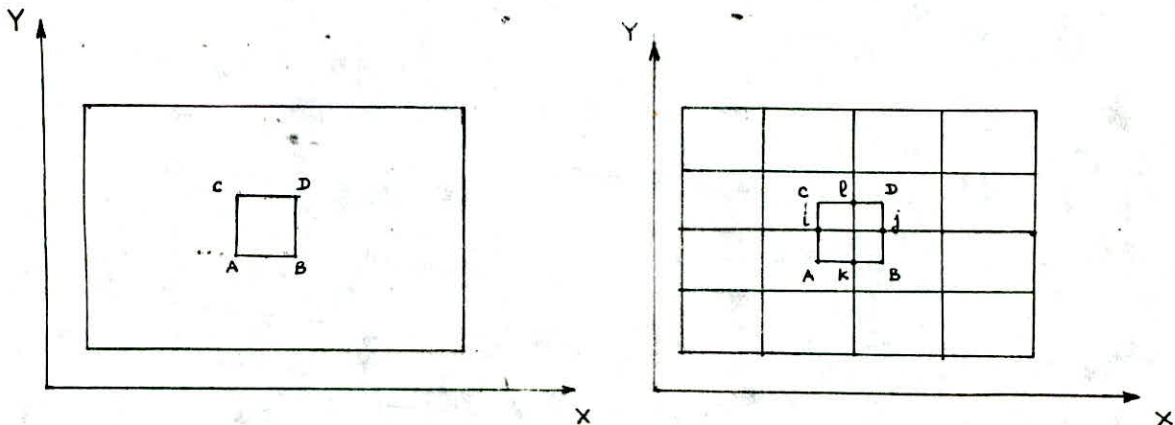
La plaque à calculer sera remplacée par un grillage de poutres équivalent; les poutres sont orthogonales entre elles

Les caractéristiques du modèle équivalent seront déterminées à l'aide des équations énergétiques démontrées précédemment.

En adoptant la formule (1) pour  $U_0$ , on peut obtenir un modèle équivalent constitué par un grillage orthogonal de poutres dont l'utilisation est très commode dans la pratique (voir figure).

Déterminons les caractéristiques différentes des éléments (ij, lk) en désignant par W l'énergie de déformation emmagasinée dans un élément, dans une surface rectangulaire A

$$W = AU_0 = (W_f + W_t)_{ij} + (W_f + W_t)_{kl}$$



et en remplaçant chaque terme par sa valeur, on trouve:

$$AD((\delta^2 w / \delta x^2)^2 + (\delta^2 w / \delta y^2)^2 + 2(\delta^2 w / \delta x \delta y)^2) = \rho'_{ij} (\delta^2 w / \delta x^2)^2 + \rho'_{kl} (\delta^2 w / \delta y^2)^2 + (\gamma_{ij} + \gamma_{kl}) (\delta^2 w / \delta x \delta y)^2$$

par identification, on obtient:

$$\rho'_{ij} = \rho'_{kl} = 0.5(\gamma_{ij} + \gamma_{kl}) = AD$$

$$\rho'_{ij} = EIL_{ij} = AD \rightarrow EIL_{ij} = Eh^3 A / 12(1 - \nu^2) \quad (2)$$

$$\rho'_{kl} = EIL_{kl} = AD \rightarrow EIL_{kl} = Eh^3 A / 12(1 - \nu^2) \quad (3)$$

$$0.5(\mu J L_{ij} + \mu J L_{kl}) = AEh^3 / 12(1 - \nu^2) \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow I_{ij} = h^3 L_{kl} / 12 \text{ et } I_{kl} = h^3 L_{ij} / 12$$

## APPLICATION 4: Calcul du déplacement du centre d'une dalle

### Hypothèses:

- encastrée sur les bords
- carrée
- isotrope

On assimilera pour cela la dalle à un grillage de poutres croisées, dont les caractéristiques sont évaluées comme il a été montré dans l'exposé de la théorie des équivalences.

On passera d'un maillage de plus en plus fin pour admirer la convergence vers le résultat exact. On s'intéressera au déplacement du centre de la dalle qui se réduit au déplacement vertical.

Les résultats obtenus seront comparés à la solution analytique donnée par TIMOSHENKO et celle donnée par ZIENKIEWICZ qui discrétisa la dalle en éléments finis rectangulaires.

Les résultats obtenus seront dressés dans un tableau et représentés à l'aide d'un diagramme à barres.

Pour minimiser l'entrée des données la symétrie a été largement exploitée, le réseaux de calcul a été dressé à côté de chaque maillage.

A	B u	C u	D %	E u	F %
2x2	0.00126	0.0013021	3.34	0.001480	17.16
4x4	0.00126	0.0013205	4.80	0.001403	11.35
6x6	0.00126	0.0013031	3.42	-	-
8x8	0.00126	0.0012938	2.68	0.001304	3.49
12x12	0.00126	0.0012832	1.84	0.001275	1.12
16x16	0.00126	0.0012779	1.41	0.001283	1.83

tableau récapitulatif des résultats.

- ou q : charge uniformément répartie
- l : côté de la dalle
- D : rigidité de la dalle

Colonne A: maillage

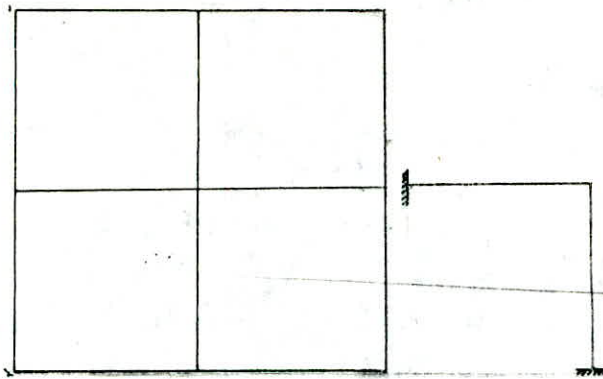
B: solution analytique donnée par S.TIMOSHENKO

C: solution donnée par le CSRPC en assimilant la dalle à un grillage de poutres

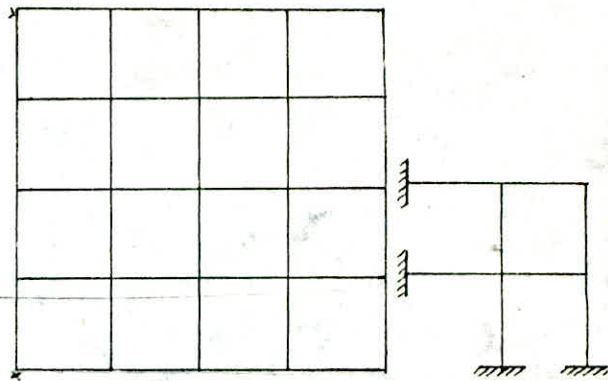
D: erreur relative de celle-ci par rapport à la solution exact

E: solution donnée par O.C. ZIENKIEWICZ

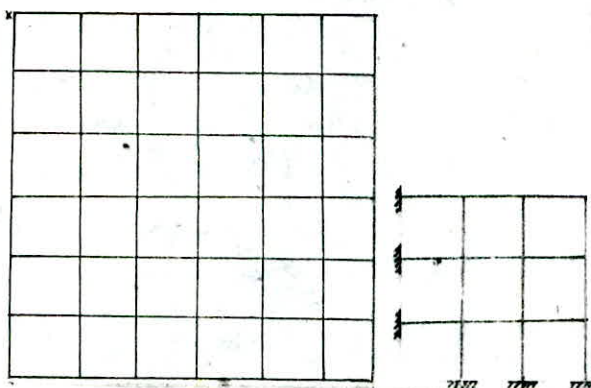
F: erreur relative de celle-ci par rapport à la solution analytique.



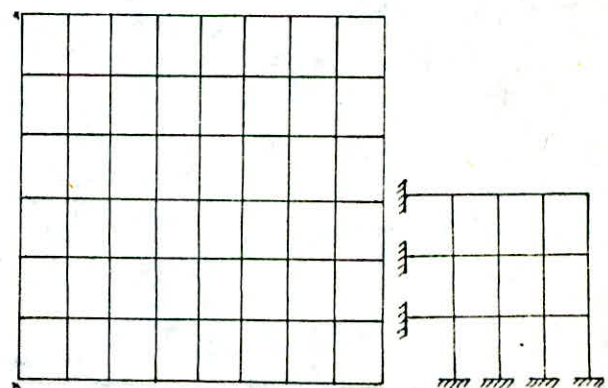
2 x 2



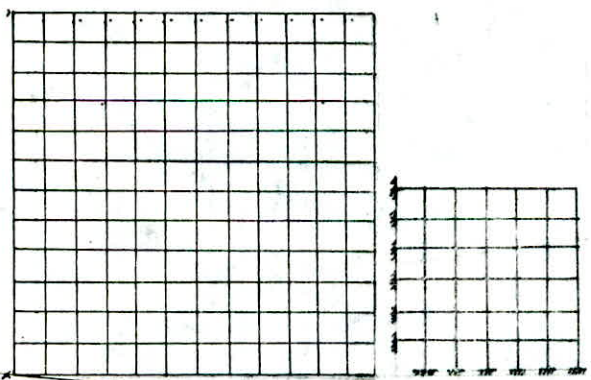
4 x 4



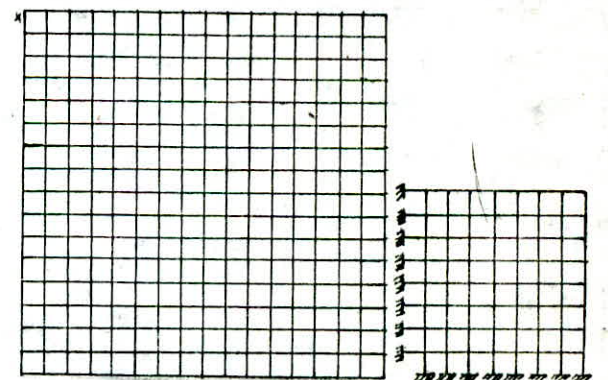
6 x 6



8 x 8



12 x 12



16 x 16

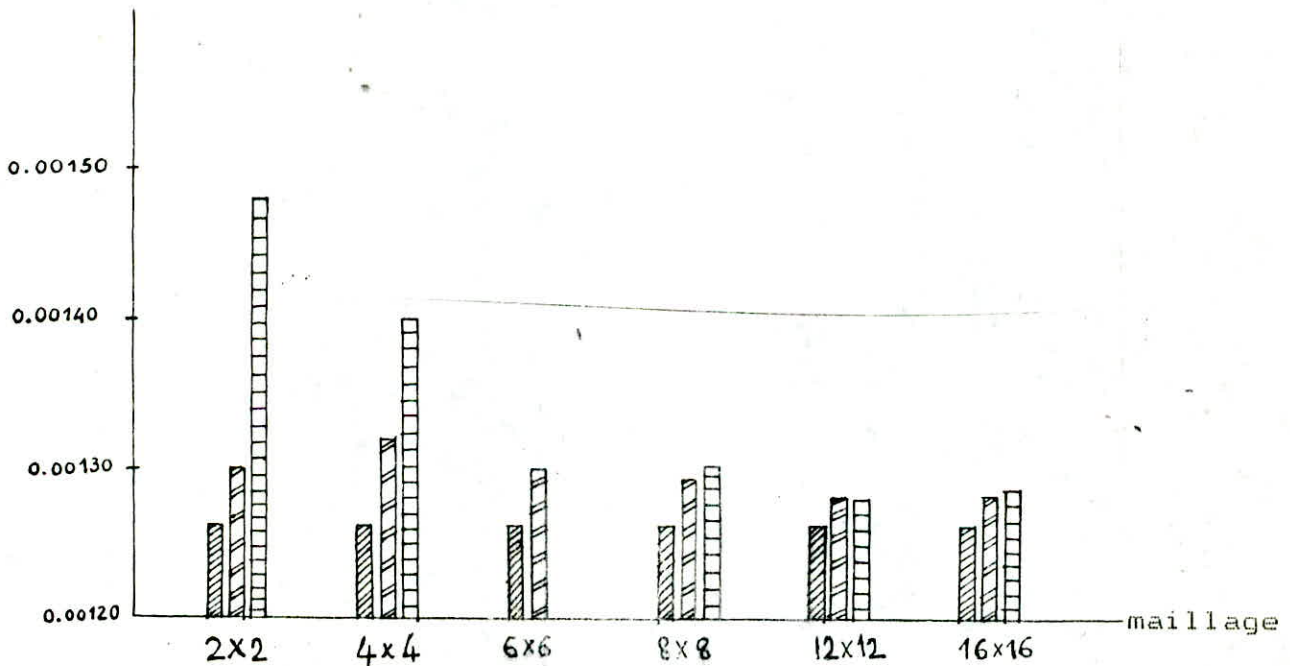
MAILLAGES UTILISES



## CONCLUSIONS

\* Nos résultats convergent plus rapidement que ceux de O.C.ZIENKIEWICZ, ce qui montre la puissance de la discrétisation par éléments finis poutres et les performances de la théorie des équivalences - au moins dans ce cas - en plus du choix judicieux des caractéristiques des éléments considérés, afin de minimiser les erreurs cumulés.

\* On préconise, pour des dalles pareilles, un maillage le plus simple soit 2x2 puisque on atteint une erreur relative de 3.34% , erreur largement acceptable dans la pratique de l'ingénieur.



Solution de TIMOSHENKO

: : du C.S.R.P.C

: : de ZIENKIEWICZ

APPLIICATION 5: Etude de l'influence de la négligence de la torsion

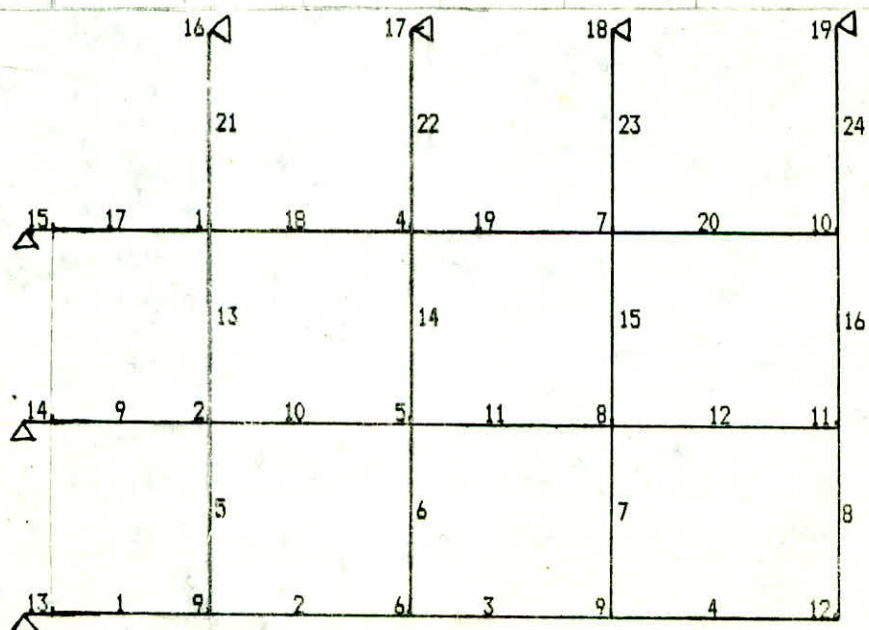
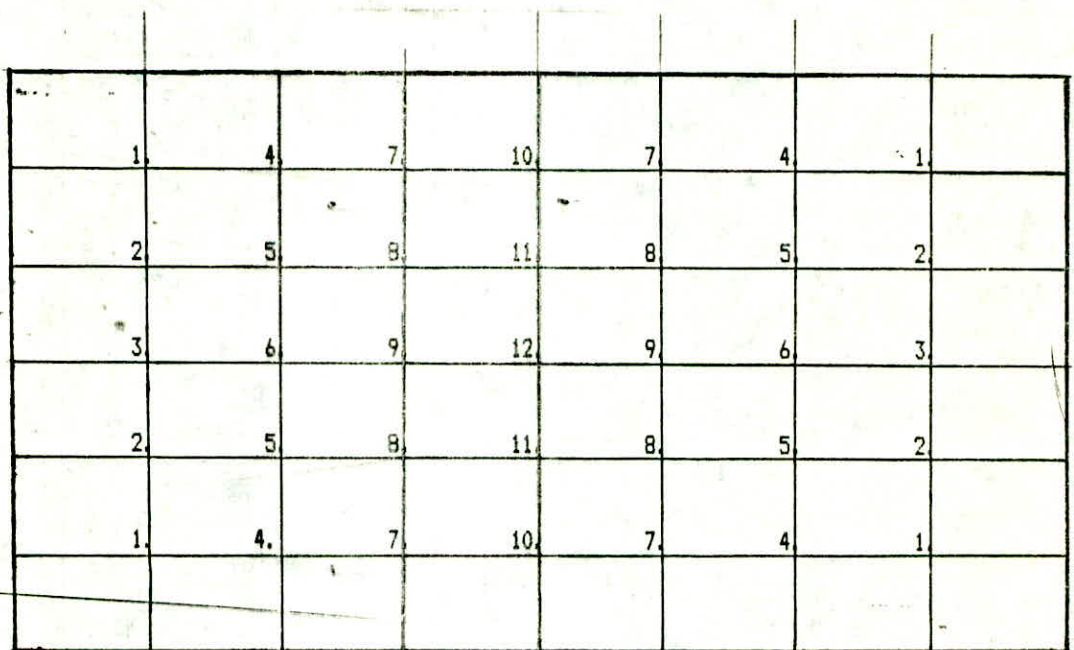
Pour estimer l'erreur commise en négligeant la torsion nous avons exécuté un exemple figurant dans le formulaire J.GOULET édition DUNOD.

Rappelons d'abord les conditions restrictifs du formulaire

- Choix limite des combinaisons (maximum 6 x 9)
- Imposer des panneaux dans le rapport des dimensions est déjà fixe
- La rigidité EI est constante

Le réseau choisi figuré à la page 107

Pour réduire la rentree des données nous avons exploité la symétrie de la structure. En effet les noeuds 10, 11, 12 ne subissent pas de rotations dues à la flexion, par contre les noeuds 3, 6, 9, 12, auront leurs angles de torsion nuls. Ces considérations seront pris en compte, dans les conditions d'appuis



#####  
 RESEAU DE PUTRES CROISEES .....EXEMPLE EXTRAIT DU FORMULAIRE  
 DE R.D.M DE M J GOULET .DUNOD...  
 #####

DONNEES DE LA STRUCTURE

M	N	NJ	NR	NRJ	E	G
24	43	19	14	13	1.0000	1.0000

COORDONNEES DES NOEUDS

NOEUD	X	Y
1	1.00	2.00
2	1.00	1.00
3	1.00	0.00
4	2.00	2.00
5	2.00	1.00
6	2.00	0.00
7	3.00	2.00
8	3.00	1.00
9	3.00	0.00
10	4.00	2.00
11	4.00	1.00
12	4.00	0.00
13	0.00	0.00
14	0.00	1.00
15	0.00	2.00
16	1.00	3.00
17	2.00	3.00
18	3.00	3.00
19	4.00	3.00

DESIGNATIONS ET PROPRIETES DES ELEMENTS

ELEMENT	JJ	JK	AIX	AIY	AL	CX	CY
1	13	3	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
2	3	6	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
3	6	9	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
4	9	12	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
5	3	2	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
6	6	5	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
7	9	8	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
8	12	11	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
9	14	2	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
10	2	5	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
11	5	8	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
12	8	11	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
13	2	1	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
14	5	4	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
15	8	7	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
16	11	10	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
17	15	1	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
18	1	4	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
19	4	7	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
20	7	10	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
21	1	16	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
22	4	17	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
23	7	18	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000
24	10	19	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000

NOEUDS APPUIS

NOEUD	XRSTR	YRSTR	ZRSTR
12	1.	1.	0.
11	0.	1.	0.
10	0.	1.	0.
9	1.	0.	0.
6	1.	0.	0.
3	1.	0.	0.
13	0.	0.	1.
14	0.	0.	1.
15	0.	0.	1.
16	0.	0.	1.
17	0.	0.	1.
18	0.	0.	1.
19	0.	0.	1.

DONNEES RELATIVES AUX CHARGES

NLJ      NLM  
12        0

CHARGES

NODALES

NOEUD	ACTION X.	ACTION Y	ACTION Z
1	0.0000	0.0000	1.0000
2	0.0000	0.0000	1.0000
3	0.0000	0.0000	1.0000
4	0.0000	0.0000	1.0000
5	0.0000	0.0000	1.0000
6	0.0000	0.0000	1.0000
7	0.0000	0.0000	1.0000
8	0.0000	0.0000	1.0000
9	0.0000	0.0000	1.0000
10	0.0000	0.0000	1.0000
11	0.0000	0.0000	1.0000
12	0.0000	0.0000	1.0000

DEPLACEMENT DES NOEUDS ET REACTIONS D'APPUIS

NOEUD	X DEPL.	Y DEPL.	Z DEPL.	X REAC.	Y REAC.	Z REAC.
1	-0.3297E+01	-0.3318E+01	0.3220E+01	0.0000	0.0000	0.0000
2	-0.1888E+01	-0.5087E+01	0.5765E+01	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000E+00	-0.5890E+01	0.6661E+01	1.6023	0.0000	0.0000
4	-0.5222E+01	-0.2316E+01	0.5959E+01	0.0000	0.0000	0.0000
5	-0.2939E+01	-0.3503E+01	0.1015E+02	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000E+00	-0.4010E+01	0.1167E+02	3.2859	0.0000	0.0000
7	-0.6585E+01	-0.1108E+01	0.7586E+01	0.0000	0.0000	0.0000
8	-0.3663E+01	-0.1776E+01	0.1284E+02	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000E+00	-0.2047E+01	0.1474E+02	4.0832	0.0000	0.0000
10	-0.7110E+01	0.0000E+00	0.8097E+01	0.0000	0.8480	0.0000
11	-0.3952E+01	0.0000E+00	0.1375E+02	0.0000	1.9180	0.0000
12	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1578E+02	4.3140	2.1851	0.0000
13	0.0000E+00	-0.7047E+01	0.0000E+00	0.0000	0.0000	-2.3130
14	-0.1888E+01	-0.6104E+01	0.0000E+00	0.0000	0.0000	-2.0342
15	-0.3297E+01	-0.3172E+01	0.0000E+00	0.0000	0.0000	0.2929
16	-0.3182E+01	-0.3318E+01	0.0000E+00	0.0000	0.0000	0.2293
17	-0.6327E+01	-0.2316E+01	0.0000E+00	0.0000	0.0000	-2.2086
18	-0.8087E+01	-0.1108E+01	0.0000E+00	0.0000	0.0000	-3.0042
19	-0.8591E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000	0.0000	-2.9621

EFFORTS AUX EXTREMITES DES ELEMENTS

ELEMENT	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	0.0000	0.0000	-2.3130	0.0000	2.3130	2.3130
2	0.0000	-1.5097	-0.7420	0.0000	2.2517	0.7420
3	0.0000	-1.7447	-0.4353	0.0000	2.1801	0.4353
4	0.0000	-1.9093	-0.2757	0.0000	2.1851	0.2757
5	-0.8034	-1.6023	-0.5710	0.8034	2.1733	0.5710
6	-0.5069	-3.2859	0.6933	0.5069	2.5926	-0.6933
7	-0.2707	-4.0832	0.8404	0.2707	3.2428	-0.8404
8	0.0000	-4.3140	0.7243	0.0000	3.5897	-0.7243
9	0.0000	0.0000	-2.0342	0.0000	2.0342	2.0342
10	1.0515	-1.0688	-1.0309	-1.0515	2.0997	1.0309
11	0.7237	-1.4200	-0.6123	-0.7237	2.0323	0.6123
12	0.2889	-1.6350	-0.2830	-0.2889	1.9180	0.2830
13	-1.7688	-1.1219	-0.5744	1.7688	1.6962	0.5744
14	-1.1866	-2.9204	1.2747	1.1866	1.6457	-1.2747
15	-0.6681	-3.6776	1.5111	0.6681	2.1664	-1.5111
16	0.0000	-3.8786	1.4413	0.0000	2.4373	-1.4413
17	0.0000	0.0000	0.2929	0.0000	-0.2929	-0.2929
18	1.9255	-1.4759	0.9478	-1.9255	0.5281	-0.9478
19	1.3626	-1.7146	1.0139	-1.3626	0.7008	-1.0139
20	0.5248	-1.3688	0.5208	-0.5248	0.8480	-0.5208
21	0.0000	0.2293	-0.2293	0.0000	0.0000	0.2293
22	0.0000	-2.2086	2.2086	0.0000	0.0000	-2.2086
23	0.0000	-3.0042	3.0042	0.0000	0.0000	-3.0042
24	0.0000	-2.9621	2.9621	0.0000	0.0000	-2.9621

CONCLUSION:

Avant de citer les remarques déduites des résultats nous signalons que notre logiciel surmonte toutes les restrictions du formulaire, de point de vue dimensions, charges ou efforts.

Rappelons que cet exemple n'est qu'une illustration, plusieurs autres ont été exécutés - tirés du même formulaire- . Nous constatons les remarques suivantes.

-Les éléments ayant leurs moments de torsion nuls présentent un moment de flexion égal à celui donné par le formulaire.

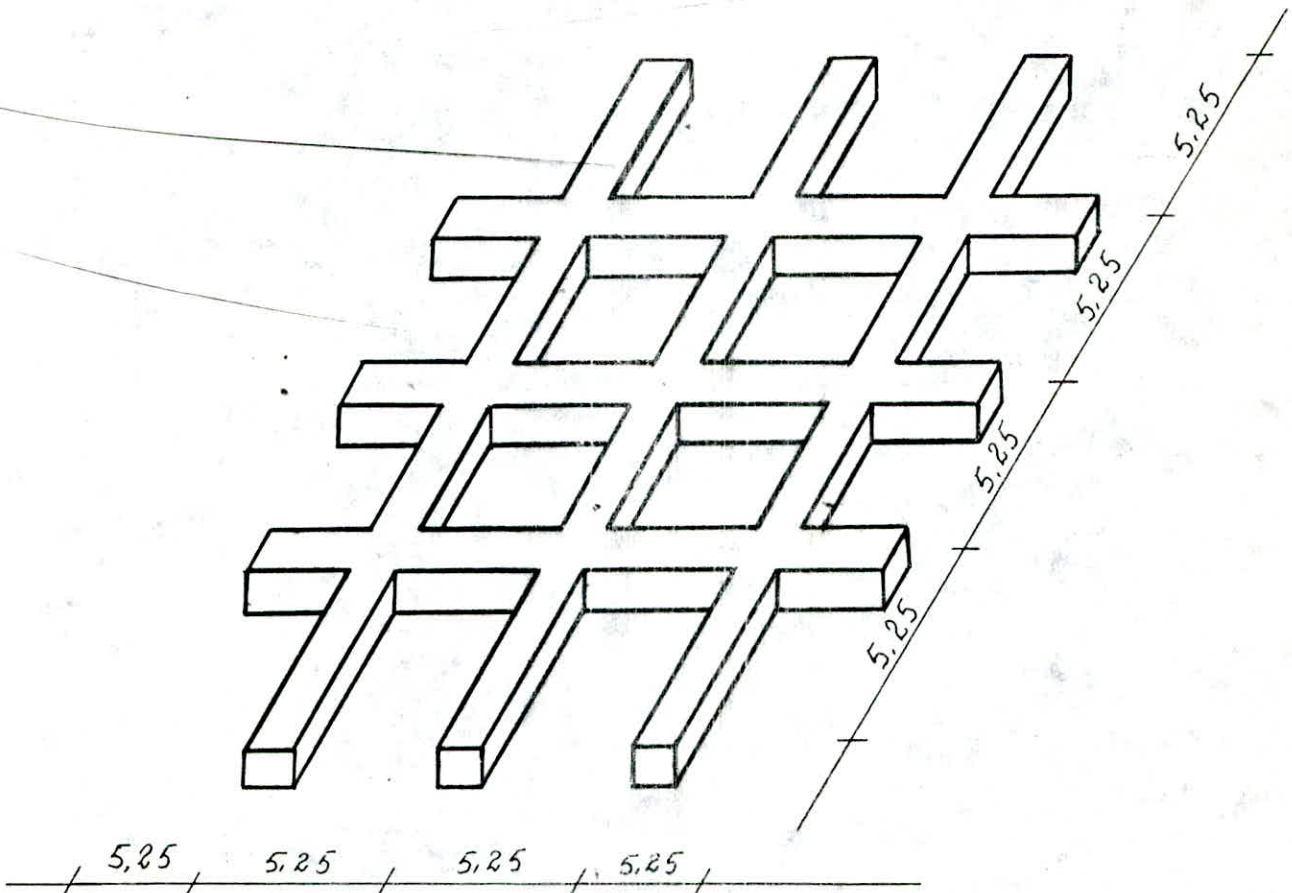
-Le noeud le plus sollicité étant - dans cet exemple - le noeud 12. Un ferrailage avec ce moment est du côté de la sécurité, puisque les autres éléments dont la torsion n'est pas négligeable présentent des résultats supérieurs à ceux du formulaire.

-Pour un ferrailage détaillé nous proposons, pour les éléments dont la torsion n'est pas négligeable et pour être du côté de la sécurité, de majorer le moment de flexion de 40% . Ce pourcentage a été l'erreur relative maximale constatée. Les statistiques restent enfin le moyen le plus sûr pour évaluer ce pourcentage.

-Une comparaison au niveau des contraintes - en considérant tous les efforts - constitue un moyen pratique pour évaluer les erreurs commises en utilisant ce formulaire.

APPLICATION 6 : ETUDE STATIQUE ET DYNAMIQUE DU PLANCHER D'UNE SALLE  
DE CONFERENCE EN POUTRES CROISEES

Le choix s'est porté sur cet ouvrage puisque il a fait l'objet d'un sujet de fin d'étude, et pouvoir procéder a sa vérification.



DESCRIPTION:

Dimensions extrêmes : 21x21 m  
Sections des poutres : 0.98x0.50 m<sup>2</sup>  
Longueur des poutres : 5.25 m

La descente de charge a donnée les résultats suivants:

G = 2.132 t/ml  
P = 0.27 t/ml



NOEUDS APPUIS

NOEUD	XRSTR	YRSTR	ZRSTR
10	1.	1.	1.
11	1.	1.	1.
12	1.	1.	1.
13	1.	1.	1.
14	1.	1.	1.
15	1.	1.	1.
16	1.	1.	1.
17	1.	1.	1.
18	1.	1.	1.
19	1.	1.	1.
20	1.	1.	1.
21	1.	1.	1.

DONNEES RELATIVES AUX CHARGES

ELEMENT	NLJ	NLM	CHARGES SUR LES ELEMENTS					
	0	24	AML1(t.m)	AML2(t.m)	AML3(t)	AML4((t.m)	AML5(t.m)	AML6(t)
1			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
2			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
3			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
4			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
5			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
6			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
7			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
8			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
9			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
10			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
11			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
12			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
13			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
14			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
15			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
16			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
17			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
18			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
19			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
20			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
21			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
22			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
23			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965
24			0.0000	-4.8969	5.5965	0.0000	4.8969	5.5965

DEPLACEMENT DES NOEUDS ET REACTION DES APPUIS

NOEUD	X DEPL.(rd)	Y DEPL.(rd)	Z DEPL.(m)	X REAC.(t.m)	Y REAC.(t.m)	Z REAC.(t.m)
1	-0.7752E-03	0.7752E-03	-0.3245E-02	0.0000	0.0000	0.0000
2	-0.1304E-02	-0.1048E-19	-0.5493E-02	0.0000	0.0000	0.0000
3	-0.7752E-03	-0.7752E-03	-0.3245E-02	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.2379E-20	0.1304E-02	-0.5493E-02	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.4914E-20	0.3846E-19	-0.9415E-02	0.0000	0.0000	0.0000
6	-0.2886E-19	-0.1304E-02	-0.5493E-02	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.7752E-03	0.7752E-03	-0.3245E-02	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.1304E-02	0.3371E-19	-0.5493E-02	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.7752E-03	-0.7752E-03	-0.3245E-02	0.0000	0.0000	0.0000



10	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	60.5183	-6.1478	19.1751
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	99.4402	0.0000	28.8077
12	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	60.5183	6.1478	19.1751
13	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	6.1478	-60.5183	19.1751
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	6.1478	60.5183	19.1751
15	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000	-99.4402	28.8077
16	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000	99.4402	28.8077
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-6.1478	-60.5183	19.1751
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-6.1478	60.5183	19.1751
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-60.5183	-6.1478	19.1751
20	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-99.4402	0.0000	28.8077
21	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-60.5183	6.1478	19.1751

EFFORTS AUX EXTREMITES DES ELEMENTS

ELEMENT	AM1(t.m)	AM2(t.m)	AM3(t)	AM4((t.m)	AM5(t.m)	AM6(t)
1	-6.1478	-60.5183	19.1751	6.1478	-10.7696	-7.9821
2	0.0000	-99.4402	28.8077	0.0000	-22.4188	-17.6147
3	6.1478	-60.5183	19.1751	-6.1478	-10.7696	-7.9821
4	6.1478	-60.5183	19.1751	-6.1478	-10.7696	-7.9821
5	4.1964	8.8182	7.9821	-4.1964	-21.3428	3.2109
6	-4.1964	21.3428	3.2109	4.1964	-8.8182	7.9821
7	-6.1478	10.7696	-7.9821	6.1478	60.5183	19.1751
8	-4.1964	8.8182	7.9821	4.1964	-21.3428	3.2109
9	0.0000	14.0260	11.1930	0.0000	-43.4076	0.0000
10	4.1964	8.8182	7.9821	-4.1964	-21.3428	3.2109
11	0.0000	-99.4402	28.8077	0.0000	-22.4188	-17.6147
12	0.0000	14.0260	11.1930	0.0000	-43.4076	0.0000
13	0.0000	43.4076	0.0000	0.0000	-14.0260	11.1930
14	0.0000	22.4188	-17.6147	0.0000	99.4402	28.8077
15	4.1964	21.3428	3.2109	-4.1964	-8.8182	7.9821
16	0.0000	43.4076	0.0000	0.0000	-14.0260	11.1930
17	-4.1964	21.3428	3.2109	4.1964	-8.8182	7.9821
18	-6.1478	-60.5183	19.1751	6.1478	-10.7696	-7.9821
19	-4.1964	8.8182	7.9821	4.1964	-21.3428	3.2109
20	4.1964	21.3428	3.2109	-4.1964	-8.8182	7.9821
21	6.1478	10.7696	-7.9821	-6.1478	60.5183	19.1751
22	6.1478	10.7696	-7.9821	-6.1478	60.5183	19.1751
23	0.0000	22.4188	-17.6147	0.0000	99.4402	28.8077
24	-6.1478	10.7696	-7.9821	6.1478	60.5183	19.1751

Une pause est nécessaire à ce stade pour montrer l'intérêt du choix du plancher en poutres croisées

Une simple comparaison au niveau des flèches avec une poutre simplement appuyée

Flèche maximale du réseau (noeud 5) = .94 cm

Pour une poutre continue

1) Hypothèses:

-même inertie

-même longueur

La flèche au milieu vaut 3.99cm soit 4.24 fois plus grande que celle du réseau.

- 2) Hypothèses:
  - même inertie
  - même fleche

La longueur de la poutre est de 14.63 m soit un gain de portée de 6.37 m

- 3) Hypothèses:
  - même longueur
  - même flèche
  - même largeur

La hauteur totale de la poutre est de 1.81 m soit le double de celle du réseaux, et surtout un volume de béton double

### EFFORTS SOUS P

#### CHARGES SUR LES ELEMENTS

ELEMENT	AML1(t.m)	AML2(t.m)	AML3(t)	AML4((t.m)	AML5(t.m)	AML6(t)
1	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
2	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
3	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
4	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
5	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
6	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
7	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
8	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
9	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
10	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
11	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
12	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
13	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
14	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
15	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
16	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
17	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
18	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
19	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
20	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
21	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
22	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
23	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087
24	0.0000	-0.6202	0.7087	0.0000	0.6202	0.7087

DEPLACEMENT DES NOEUDS ET REACTION DES APPUIS

NOEUD	X DEPL.(rd)	Y DEPL.(rd)	Z DEPL.(m)	X REAC.(t.m)	Y REAC.(t.m)	Z REAC.
1	-0.9817E-04	0.9817E-04	-0.4110E-03	0.0000	0.0000	0.0000
2	-0.1652E-03	-0.2910E-21	-0.6956E-03	0.0000	0.0000	0.0000
3	-0.9817E-04	-0.9817E-04	-0.4110E-03	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000E+00	0.1652E-03	-0.6956E-03	0.0000	0.0000	0.0000
5	-0.1229E-20	0.2704E-20	-0.1192E-02	0.0000	0.0000	0.0000
6	-0.1804E-20	-0.1652E-03	-0.6956E-03	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.9817E-04	0.9817E-04	-0.4110E-03	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.1652E-03	0.1204E-20	-0.6956E-03	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.9817E-04	-0.9817E-04	-0.4110E-03	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	7.6641	-0.7786	2.4284
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	12.5933	0.0000	3.6483
12	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	7.6641	0.7786	2.4284
13	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.7786	-7.6641	2.4284
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.7786	7.6641	2.4284
15	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000	-12.5933	3.6483
16	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000	12.5933	3.6483
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.7786	-7.6641	2.4284
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.7786	7.6641	2.4284
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-7.6641	-0.7786	2.4284
20	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-12.5933	0.0000	3.6483
21	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-7.6641	0.7786	2.4284

EFFORTS AUX EXTREMITES DES ELEMENTS

ELEMENT	AM1(t.m)	AM2(t.m)	AM3(t)	AM4((t.m)	AM5(t.m)	AM6(t)
1	-0.7786	-7.6641	2.4284	0.7786	-1.3639	-1.0109
2	0.0000	-12.5933	3.6483	0.0000	-2.8392	-2.2308
3	0.7786	-7.6641	2.4284	-0.7786	-1.3639	-1.0109
4	0.7786	-7.6641	2.4284	-0.7786	-1.3639	-1.0109
5	0.5314	1.1167	1.0109	-0.5314	-2.7029	0.4066
6	-0.5314	2.7029	0.4066	0.5314	-1.1167	1.0109
7	-0.7786	1.3639	-1.0109	0.7786	7.6641	2.4284
8	-0.5314	1.1167	1.0109	0.5314	-2.7029	0.4066
9	0.0000	1.7763	1.4175	0.0000	-5.4972	0.0000
10	0.5314	1.1167	1.0109	-0.5314	-2.7029	0.4066
11	0.0000	-12.5933	3.6483	0.0000	-2.8392	-2.2308
12	0.0000	1.7763	1.4175	0.0000	-5.4972	0.0000
13	0.0000	5.4972	0.0000	0.0000	-1.7763	1.4175
14	0.0000	2.8392	-2.2308	0.0000	12.5933	3.6483
15	0.5314	2.7029	0.4066	-0.5314	-1.1167	1.0109
16	0.0000	5.4972	0.0000	0.0000	-1.7763	1.4175
17	-0.5314	2.7029	0.4066	0.5314	-1.1167	1.0109
18	-0.7786	-7.6641	2.4284	0.7786	-1.3639	-1.0109
19	-0.5314	1.1167	1.0109	0.5314	-2.7029	0.4066
20	0.5314	2.7029	0.4066	-0.5314	-1.1167	1.0109
21	0.7786	1.3639	-1.0109	-0.7786	7.6641	2.4284
22	0.7786	1.3639	-1.0109	-0.7786	7.6641	2.4284
23	0.0000	2.8392	-2.2308	0.0000	12.5933	3.6483
24	-0.7786	1.3639	-1.0109	0.7786	7.6641	2.4284

# CALCUL SISMIQUE

## VECTEURS ET VALEURS PROPRES

VT( 1)= 1.00000000  
VT( 2)= 1.41423162  
VT( 3)= 1.00001174  
VT( 4)= 1.41423666  
VT( 5)= 2.00003974  
VT( 6)= 1.41424199  
VT( 7)= 1.00002371  
VT( 8)= 1.41424395  
VT( 9)= 1.00002624

MODE 1 T=0.1889993090 SEC Z= 0.7285403017

VT( 1)= 1.00000000  
VT( 2)= -0.89022467  
VT( 3)= -2.25900287  
VT( 4)= 2.30447072  
VT( 5)= 0.00000007  
VT( 6)= -2.30447063  
VT( 7)= 2.25900291  
VT( 8)= 0.89022477  
VT( 9)= -0.99999994

MODE 2 T=0.1208022687 SEC Z= 0.0000000168

VT( 1)= 1.00000000  
VT( 2)= 1.02012011  
VT( 3)= 0.44267432  
VT( 4)= 0.39407787  
VT( 5)= 0.00000578  
VT( 6)= -0.39406970  
VT( 7)= -0.44266854  
VT( 8)= -1.02011194  
VT( 9)= -0.99999422

MODE 3 T=0.1208022687 SEC Z= 0.0000078049

VT( 1)= 1.00000000  
VT( 2)= 0.04632808  
VT( 3)= -3.18113036  
VT( 4)= -0.04633681  
VT( 5)= 2.18112449  
VT( 6)= -0.04631103  
VT( 7)= -3.18110628  
VT( 8)= 0.04631976  
VT( 9)= 0.99998767

MODE 4 T=0.0916791787 SEC Z= -0.0807677589

VT( 1)= 1.00000000  
 VT( 2)= -4.21427674  
 VT( 3)= -0.11264002  
 VT( 4)= 4.21416052  
 VT( 5)= -0.88728966  
 VT( 6)= 4.21429352  
 VT( 7)= -0.11251703  
 VT( 8)= -4.21431766  
 VT( 9)= 0.99993489

MODE 5 T=0.0916791786 SEC % = 0.0120151040

VT( 1)= 1.00000000  
 VT( 2)= 0.17062071  
 VT( 3)= -0.01751423  
 VT( 4)= -0.17058401  
 VT( 5)= -0.98251902  
 VT( 6)= -0.17060053  
 VT( 7)= -0.01748917  
 VT( 8)= 0.17056876  
 VT( 9)= 1.00004842

MODE 6 T=0.0916791786 SEC % = 0.3187495978

Les déformées seront représentées dans les prochaines pages

**CALCUL DES FORCES SISMIQUES**

**SPECTRE DE CALCUL**

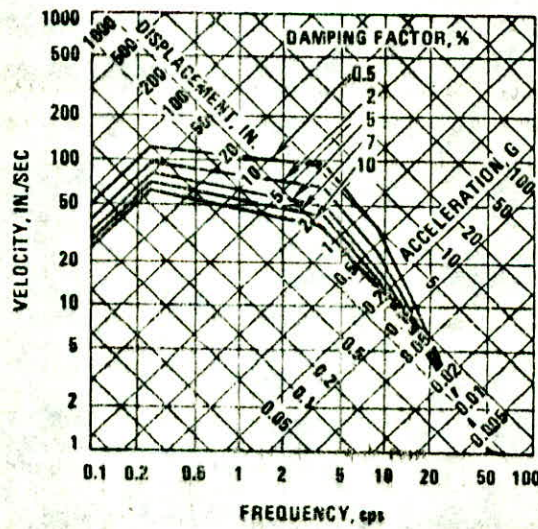
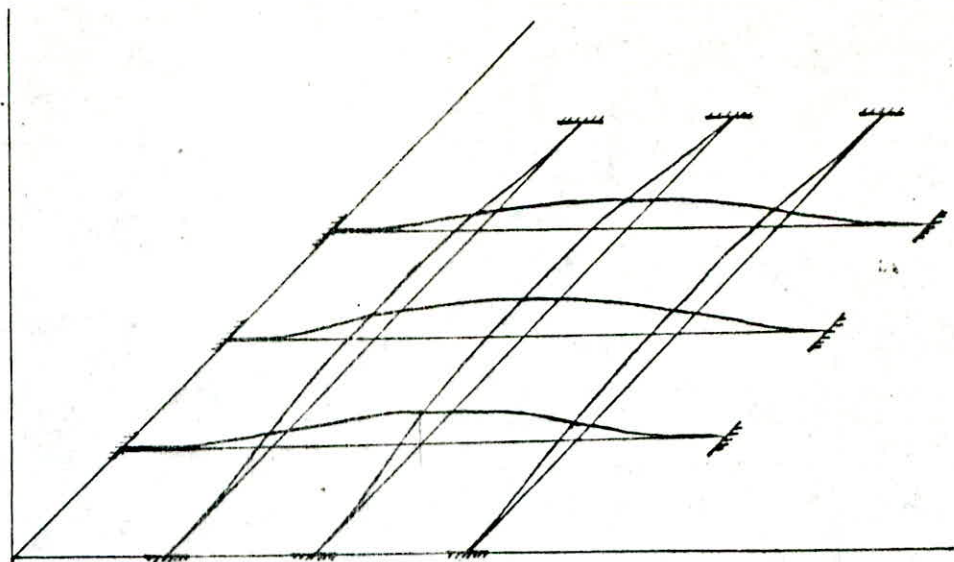
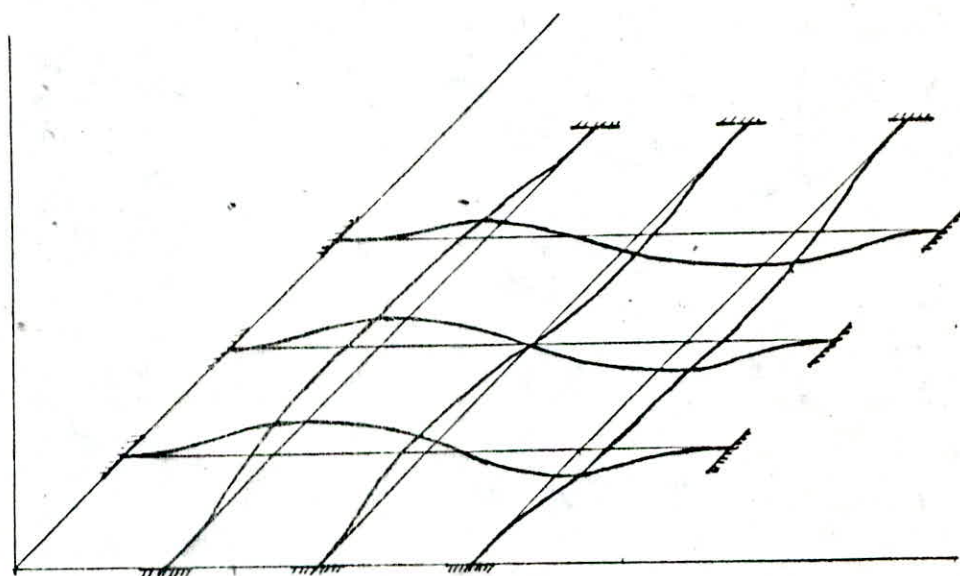


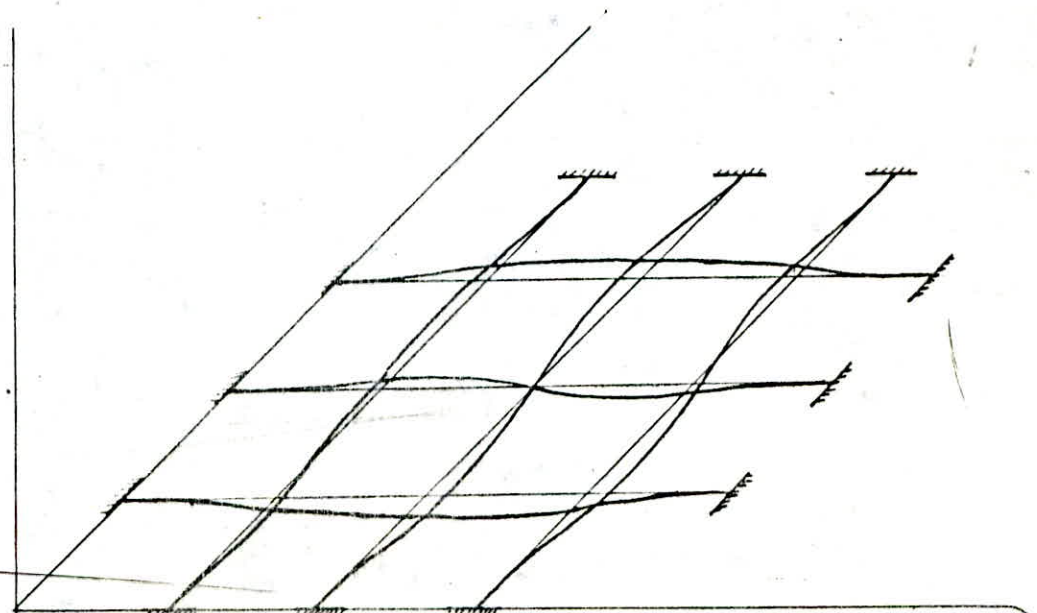
FIGURE-4 VERTICAL DESIGN RESPONSE SPECTRA - SCALED TO 1.g. HORIZONTAL GROUND ACCELERATION (Ref. 34)



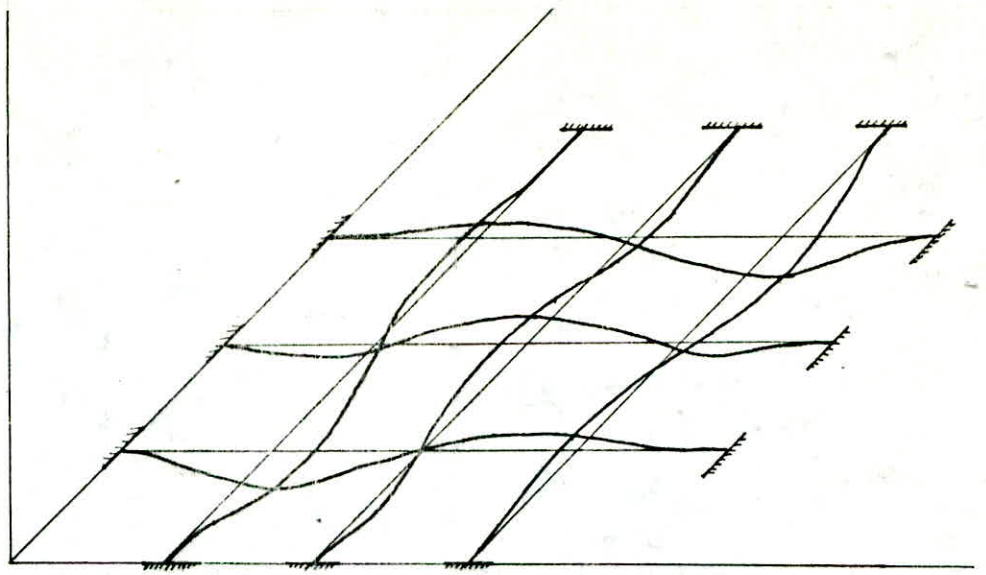
DEFORMEE DU MODE 1



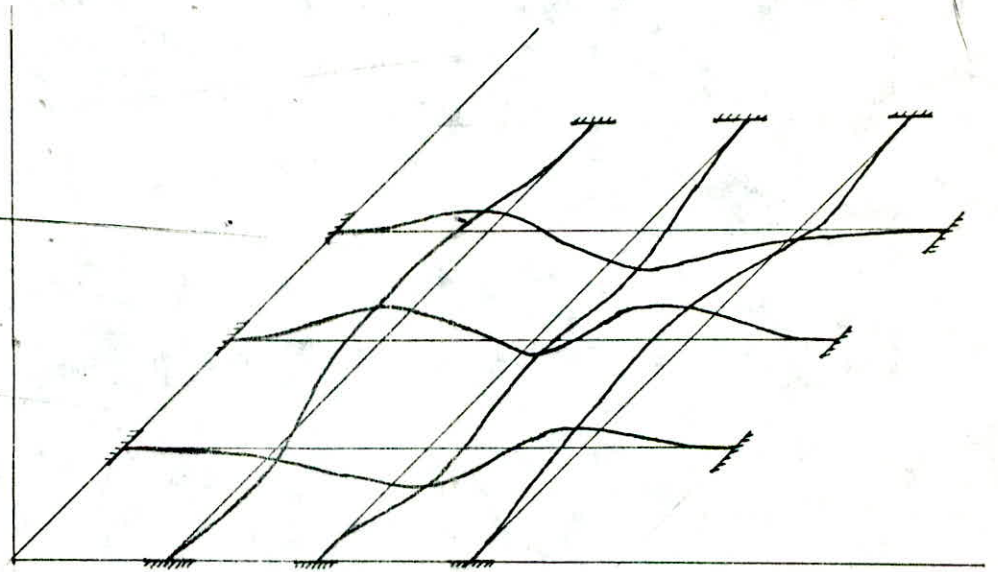
DEFORMEE DU MODE 2



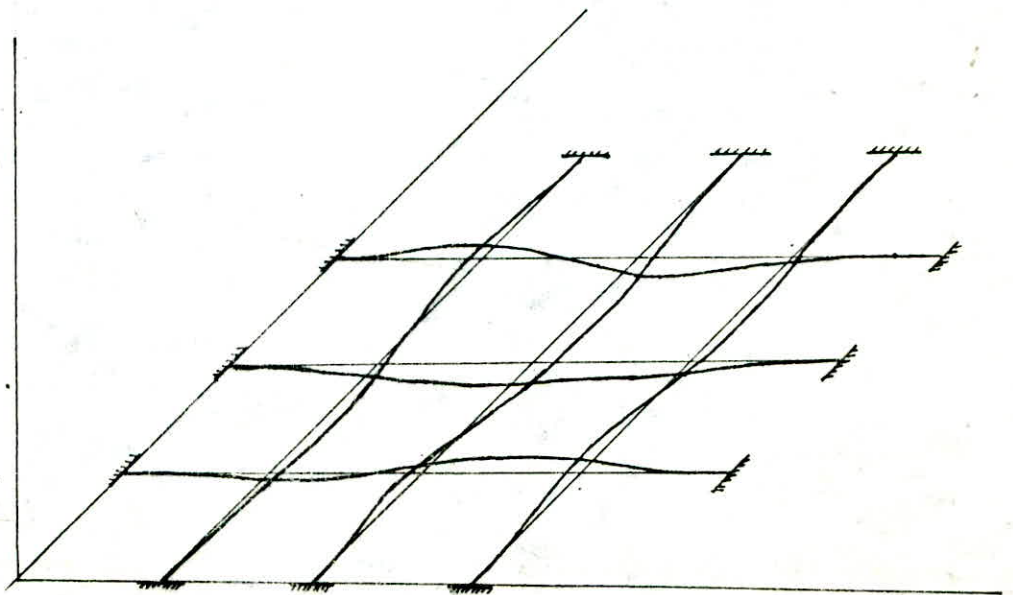
DEFORMEE DU MODE 3



DEFORMEE DU MODE 4



DEFORMEE DU MODE 5



DEFORMEE DU MODE 6

\*\*\*\*\*  
 SALLE DE CONFERENCE SOUS S  
 \*\*\*\*\*  
 DONNEES RELATIVES AUX CHARGES

NLJ NLN  
 9 0

CHARGES SISMQUES NODALES

NOEUD	ACTION X(t.m)	ACTION Y(t.m)	ACTION Z(t)
1	0.0000	0.0000	-1.7300
2	0.0000	0.0000	-2.4100
3	0.0000	0.0000	-1.7020
4	0.0000	0.0000	-2.4050
5	0.0000	0.0000	-3.4030
6	0.0000	0.0000	-2.4050
7	0.0000	0.0000	-1.8690
8	0.0000	0.0000	-2.4100
9	0.0000	0.0000	-1.7130

DEPLACEMENT DES NOEUDS ET REACTION DES APPUIS

NOEUD	X DEPL.(rd)	Y DEPL.(rd)	Z DEPL.(m)	X REAC.(t.m)	Y REAC.(t.m)	Z REAC.
1	-0.8471E-04	0.8461E-04	-0.3378E-03	0.0000	0.0000	0.0000
2	-0.1466E-03	-0.1885E-06	-0.5980E-03	0.0000	0.0000	0.0000
3	-0.8449E-04	-0.8452E-04	-0.3367E-03	0.0000	0.0000	0.0000
4	-0.7849E-06	0.1468E-03	-0.5005E-03	0.0000	0.0000	0.0000
5	-0.3839E-06	-0.4709E-06	-0.1060E-02	0.0000	0.0000	0.0000
6	-0.8945E-07	-0.1465E-03	-0.5976E-03	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.8508E-04	0.8508E-04	-0.3429E-03	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.1467E-03	-0.8840E-06	-0.6003E-03	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.8454E-04	-0.8467E-04	-0.3371E-03	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	5.5825	-0.6710	1.2951
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	10.0596	0.0015	2.3935
12	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	5.5605	0.6703	1.2888
13	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.6718	-5.5872	1.2978
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.6701	5.5590	1.2879
15	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0062	-10.1206	2.4146
16	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0007	10.0490	2.3896
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.6747	-5.7151	1.3419
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.6704	5.5657	1.2891
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-5.7154	-0.6748	1.3421
20	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-10.1180	0.0070	2.4138
21	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-5.5723	0.6714	1.2928



EFFORTS AUX EXTREMITES DES ELEMENTS

ELEMENT	AM1(t.m)	AM2(t.m)	AM3(t)	AM4((t.m)	AM5(t.m)	AM6(t)
1	-0.6710	-5.5825	1.2951	0.6710	-1.2166	-1.2951
2	0.0015	-10.0596	2.3935	-0.0015	-2.5062	-2.3935
3	0.6703	-5.5605	1.2888	-0.6703	-1.2057	-1.2888
4	0.6718	-5.5872	1.2978	-0.6718	-1.2260	-1.2978
5	0.4905	1.0479	0.4334	-0.4905	-3.3230	-0.4334
6	-0.4922	3.3223	-0.4377	0.4922	-1.0242	0.4377
7	-0.6701	1.2027	-1.2879	0.6701	5.5590	1.2879
8	-0.4929	1.0353	0.4295	0.4929	-3.2901	-0.4295
9	0.0022	1.5236	0.8546	-0.0022	-6.0101	-0.8546
10	0.4918	1.0279	0.4370	-0.4918	-3.3222	-0.4370
11	0.0062	-10.1206	2.4146	-0.0062	-2.5560	-2.4146
12	-0.0032	1.5739	0.8459	0.0032	-6.0149	-0.8459
13	-0.0023	6.0139	-0.8571	0.0023	-1.5142	0.8571
14	-0.0007	2.4966	-2.3896	0.0007	10.0490	2.3896
15	0.4892	3.2807	-0.4068	-0.4892	-1.1448	0.4068
16	0.0033	6.0109	-0.8455	-0.0033	-1.5723	0.8455
17	-0.4906	3.3239	-0.4354	0.4906	-1.0380	0.4354
18	-0.6747	-5.7151	1.3419	0.6747	-1.3297	-1.3419
19	-0.4891	1.1442	0.4081	0.4891	-3.2868	-0.4081
20	0.4933	3.2970	-0.4335	-0.4933	-1.0212	0.4335
21	0.6704	1.2020	-1.2891	-0.6704	5.5657	1.2891
22	0.6748	1.3304	-1.3421	-0.6748	5.7154	1.3421
23	-0.0070	2.5546	-2.4138	0.0070	10.1180	2.4138
24	-0.6714	1.2151	-1.2928	0.6714	5.5723	1.2928

FERRAILLAGE

Les sollicitations étant entièrement trouvées, on ne peut terminer sans proposer un ferrailage de la section la plus sollicitée

En effet une sous routine indépendante calcule les différentes sollicitations pour un combinaison quelconque, et interpole même les valeur des efforts en travées

Le ferrailage a été calculé suivant les règles B.A.E.L 83, la combinaison la plus défavorable a donnée le moment de flexion suivant :  $M=122.08 \text{ t}\cdot\text{m}$

La section des armatures trouvée est:

- a l'ELS :  $A_{ser}=61.27 \text{ cm}^2$
- a l'ELU :  $A_u=41.45 \text{ cm}^2$

Soit  $A_s = \max (A_{ser}, A_u)$  soit  $A_s=61.27\text{cm}^2$

On adoptera 10 T 25 et 4 T 20 soit  $61.64\text{cm}^2$

En guise de comparaison l'étudiant qui a déjà traité le problème a trouvé une section de  $58.90\text{cm}^2$

# CONCLUSIONS

## CONCLUSIONS

Un dictionnaire comme disait A. DAUDET " n'est jamais terminé" cela s'applique merveilleusement aux programmes. En effet ,malgré la satisfaction ressenties et le volume de connaissances aquis, des idées de perfectionnement apparaissent après chaque perfectionnement.

Cette présente thèse nous a permis d'améliorer nos connaissances en analyse et calcul des structures, de les approfondir en informatique appliquée.

Nos programmes ont été réalisés en deux langages, le BASIC et le FORTRAN

Sur le MICROVAX, le problème de mémoire ne se posait pas, par contre sur les microordinateurs domestiques, constitue un sujet de réflexion, en exploitant à fond les caractéristiques présentées par le problème; la question est souvent surmontée. Dans notre cas, c'est aux matrices de grandes dimensions qu'on fait allusion. L'exploitation de la symétrie et du caractère "bande" offre une économie considérable en espace mémoire et en temps d'exécution. Les méthodes modernes de rangement ( SKY LINE) et de résolution (methode frontale) peuvent apporter une solution au problème précité.

L'analyse des structures nous a offert une meilleur compréhension des phénomènes de la résistance des matériaux. La théorie des équivalences a ouvert de nouveaux horizons en permettant l'assimilation de structures complexes à d'autres facilement accessibles aux calculs

avec cette thèse nous avons eu les premiers contacts avec la dynamique des structures et son application non pas pour des structures simples ( bâtiments, châteaux d'eau, cheminées...etc) mais pour des structures complexes. Une analogie certaine existe entre les vibrations des poutres croisées et ceux des dalles. L'étude dynamique des dalles peut être l'objet d'un éventuel sujet.

L'étude du plancher a montré la nécessité d'une réglementation systématique à l'égard des charges sismiques verticales, en effet celles-ci ne peuvent être négligées pour les structures complexes.

L'étude à l'aide d'un spectre et l'utilisation de la condensation statique, constitue -a notre connaissance et a ce cycle d'étude - une première à l' E.N.P. Nous espérons que cette initiative sera poursuivie et d'autres apparaîtront.

Nous nous pouvons terminer sans signaler que notre logiciel -le CSRPC au moins- peut faire l'objet d'une sous routine d'un problème plus général d'OPTIMISATION.

## BIBLIOGRAPHIE

- B. TILIOUINE Cours de dynamique des structure donné à l'USTHB
- GERE and WEAVER Analysis of framed structures
- AUBOIN Calcul des structures et informatique
- CLOUGH et PENZINE Dynamique des structures
- CAPRA et DAVIDOVICCI Calcul dynamique des structures en zones  
sismiques
- DAVIDOVICCI Genie parasismique
- BATH and WILSON The finite element method
- DHATT et TOUZOT Présentation de la méthode des éléments finis
- ZIENKIEWICZ The finite element method
- GOULET Aide mémoire de R.D.M Ed Dunod
- PISSARENKO Aide mémoire de R.D.M Ed MIR
- ANNALES de l'I T B T P Numeros: octobre 1972  
mars-avril 1987

