

20/88

MINISTERE DE L'ENSEIGEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المكتبة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

## PROJET DE FIN D'ETUDES

# THEME

2ex

VOILES AVEC OUVERTURES  
A CHARGEMENT QUELCONQUE

MEMOIRE DE LICENCE

Proposé par :

Mr I. BENSLIMANE  
Mr S. BARAKA

Etudié par :

ATAYA Moufid  
BEDROUNI Fateh

Dirigé par :

Mr I. BENSLIMANE  
Mr S. BARAKA

PROMOTION JUIN 1988



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

## PROJET DE FIN D'ETUDES

# THEME

VOILES AVEC OUVERTURES  
A CHARGEMENT QUELCONQUE

MEMOIRE DE LICENCE

Proposé par :

Mr I. BENSLIMANE

Mr S. BARAKA

Etudié par :

ATAYA Moufid

BEDROUNI Fateh

Dirigé par :

Mr I. BENSLIMANE

Mr S. BARAKA

PROMOTION JUIN 1988

E.N.P. - 10, Avenue Hacén Badi - EL-HARRACH - ALGER



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**VOILES AVEC  
OUVERTURES  
A  
CHARGEMENT  
QUELCONQUE**

الموضوع : جدران متعددة الفتوحات تحت تأثير حملات مختلفة

الملخص :

عدة طرق اقترحت في هذه الدراسة لحساب الجدران المسلحة،  
متعددة الفتوحات، وقد اجريت أيضا مقارنة بين هذه الطرق  
تحت تأثير حملات مختلفة حيث سميت في هذا المجال منحنيات  
تساعد على حساب الاجهادات بشكل بسيط دون اللجوء الى وسائل الاعلام الآلي.

Sujet : Voiles avec ouvertures à chargement quelconque

Résumé : Plusieurs méthodes de calcul de voiles avec ouvertures  
sont proposées et comparées sous des charges variées .

De plus , des abaques sont proposés pour aider au calcul de ces  
éléments .

Subject : Walls under numerous loading cases .

Abstract : Various methods are developed and compared for the  
design of shear walls under numerous loading cases .

In addition , numerical tables are given so as to help in hand  
computations .

إهداء  
أهدي هذا العمل البناء الى أمي الكريمة

شفيفة نصار

التي طالما تفتت أن ترى هذا اليوم بحينها  
لكن القدر كان سابقاً فأخذ معه الأمانى .

مفيد عطايا

#### DEDICACE

Je dédie ce travail à ma mère

CHAFIKA NASSAR

qui a tellement souhaité assister à ce jour , mais le destin  
s'est imposé et a rendu ce souhait impossible .

ATAYA MOUFID

### DEDICACES

C'est avec une grande joie que je dédie ce modeste travail à :

- Ma mère
- Mon père
- Mes frères et soeurs
- Toute ma famille

Ainsi qu'à tous mes amis de la promotion , amis d'enfance ,  
et mes frères croyants en dieu unique et tout puissant .

F.BEDROUNI

C'est avec une grande joie que je dédie ce modeste travail à :

- Mon père ,
- Mes frères et soeurs
- Toute ma famille

Ainsi qu'à tous mes amis de la promotion , à tous mes amis  
Algériens et Libanais .

M.APAYA

## REMERCIEMENTS

Nous sommes particulièrement reconnaissant à monsieur BENSLIMANE notre promoteur , qui avec ses conseils éclairés , nous a fait surmonter bien des obstacles .

Nous lui sommes extrêmement redevables pour toute la gentillesse et la sollicitude dont il a fait preuve à notre égard , n'épargnant ni son temps ni sa peine pour nous venir en aide .

Notre gratitude va tout spécialement à monsieur BARAKA pour sa contribution effective par son aide précieuse , ses conseils et sa gentillesse .

Nos remerciements s'adressent également au personnel du centre de calcul de l'école nationale polytechnique , dont la compréhension fut précieuse , ainsi qu'à tous les professeurs qui ont contribué à notre formation .

## SOMMAIRE



### INTRODUCTION

#### CHAPITRE I

##### METHODE D'ALBIGES & GOULET

- Hypothèses de calcul
- Notations
- Théorie et méthode de calcul
- A - ETUDE DU CAS ELEMENTAIRE
  - \* Refend à une file d'ouvertures
  - Effort tranchant dans les linteaux
  - Moment de flexion dans les trumeaux
  - Effort normal dans les trumeaux
  - Effort tranchant dans les trumeaux
  - Flèche au sommet
  - Inertie équivalente
- B - ETUDE DU CAS GENERAL
  - \* Refend à plusieurs files d'ouvertures

#### CHAPITRE II

##### METHODE DE LA CHARGE CONCENTREE

- EXPOSE DE LA METHODE
- A - Etude du cas élémentaire
  - \* Refend à une file d'ouvertures
  - Effort tranchant dans les linteaux
  - Moment de flexion dans les trumeaux
  - Effort normal dans les trumeaux
  - Effort tranchant dans les trumeaux
  - Flèche au sommet
  - Inertie équivalente
- B) - Etude du cas général
  - \* Refend à plusieurs files d'ouvertures

- Programmation

### CHAPITRE III

#### METHODE DES DIFFERENCES FINIES

- Hypothèses
- Notations
- Effort tranchant dans les linteaux
- Moment de flexion dans les linteaux
- Effort normal dans les trumeaux
- Effort normal dans les linteaux
- Moment de flexion dans les trumeaux
- Déplacement en tête du refend
- Inertie équivalente

### CHAPITRE IV

#### CALCUL EN PORTIQUE

- Introduction
- Notation
- Formation de la matrice de souplesse
- Matrice de transformation de degré de liberté
- Matrice de rotation pour six degrés de liberté
- Assemblage et obtention de la matrice de la structure
- Conditions aux limites
- Résolution et obtention des déplacements de l'élément de poutre
- Calcul des efforts
- Programmation

### CHAPITRE V

#### THEORIE DES EQUIVALENCES

- Introduction
- Énergie de déformation du corps réel
- Énergie de déformation du corps fictif
- Conditions d'équivalences
- Matrice de rigidité d'une barre dans le repère global
- Détermination du champ de contraintes dans le corps

réel

## CHAPITRE VI

### METHODE DES ELEMENTS FINIS

- Introduction
- Notations
- Élément fini rectangulaire pour l'étude de l'élasticité plane
- Formation de la matrice de rigidité de l'élément
- Assemblage de la matrice de rigidité de la structure [K]
- Conditions aux limites
- Résolution et obtention des déplacements
- Programmation

## CHAPITRE VII

### EXEMPLES NUMERIQUES

### CONCLUSION

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# Introduction

## INTRODUCTION

La stabilité des batiments de grande hauteur , en béton armé , soumis aux effets du vent et du séisme , est généralement assurée par des voiles avec ou sans ouvertures .

La présence d'ouvertures y a posé de tels problèmes , que traditionnellement l'ingénieur a dû se contenter d'études assez grossières conduisant à des coefficients de sécurité mal définis sauf dans les cas extrêmes .

- très petites ouvertures dont la présence ne modifie que localement la distribution des contraintes .

- très grandes ouvertures , on a alors affaire à une ossature que l'on traite par des méthodes classiques .

Mais il restait à traiter le problème des ouvertures dans le cas général pour assurer le passage entre ces cas extrêmes .

En Mai 1960 , Messieurs M.ALBIGES et J.GOULET faisaient paraître un article traitant des effets d'un vent constant sur un refend présentant une file d'ouvertures .

En Septembre 1967 , Monsieur V.DAVIDOVICI traitait des effets des charges verticales sur ce même refend .

Entre-temps , en Avril 1966 , Monsieur DESPEYROUX annonçait la méthode générale d'approche du calcul des refends munis de plusieurs files d'ouvertures .

Habituellement les bureaux d'études se servent uniquement des cas résolus de chargements réguliers (types répartis uniformément ou triangulairement) même si ceux-ci ne le sont pas .

Par exemple un calcul sismique pour un bâtiment à niveaux irréguliers, ou par un calcul dynamique où les effets de plusieurs modes sont pris en compte .

Ce problème nous amène à exposer d'une manière détaillée les outils de calculs prenant en compte ces types de chargements en développant l'analyse mathématique de l'équation générale du contreventement .

De plus dans cette étude , nous analysons l'influence de différents paramètres tels que le pourcentage d'ouvertures , la formation de rotules au niveau des linteaux , de même on fera une comparaison entre ces différentes méthodes .

Les six méthodes sont :

1-Méthode d'ALBIGES ET GOULET

2-Méthode de la charge concentrée

3-Méthode des différences finies

4-Méthode des éléments finis

5-Théorie des équivalence

6-Calcul en portique avec prise en compte de l'effet de l'effort tranchant

**CHAPITRE**  
**- 1 -**  
**METHODE**  
**D'ALBIGES**  
**ET**  
**GOULET**

## METHODE D'ALBIGES ET GOULET

### 1- Hypothèses de calcul :

Pour étudier le refend constitué par un ensemble d'éléments reliés par des files verticales de linteaux, on prendra les hypothèses simplificatrices suivantes .

- 1)- La liaison par éléments discontinus réalisée par les linteaux est assimilée à une liaison continue .
- 2)- La déformation d'effort normal des linteaux est négligeable vis-a-vis du déplacement horizontal des éléments de refend au même étage .
- 3)- Les éléments de refend sont supposés encastrés à leur base dans le cas général, le cas d'un encastrement élastique sera néanmoins étudié.
- 4)- Le bâtiment est élevé .
- 5)- Les caractéristiques géométriques des linteaux et des éléments de refend sont constantes sur la hauteur du bâtiment. Elles varient d'une file de linteaux à l'autre et d'un élément de refend à l'autre .
- 6)- La hauteur d'étage est constante .
- 7)- Les linteaux ont une inertie transversale faible vis-a-vis de celle de chacun des éléments de refend .
- 8)- Le voile est constitué par des éléments de refend dont la ligne moyenne est verticale .
- 9)- Les planchers sont indéformables .

## 2- Conséquences de ces hypothèses :

Mathématiquement l'hypothèse de calcul, est qu'il existe une fonction de déformation  $y(x)$  qui est la même pour tous les refends, y compris ses dérivées première, seconde et troisième  $y'(x), y''(x), y'''(x)$ .

Il en résulte que les sections d'encastrement des linteaux ont à côte égale, même rotation  $y'(x)$ , et que les moments dans les éléments de refend vérifient :

$$\frac{M}{EI} = y''(x) = \text{constante d'un élément à l'autre à un niveau donné .}$$

## 3- Charges appliquées :

La charge horizontale de vent ou de séisme, qui a une répartition triangulaire nulle à la base. ( voir fig (3) )

## 4- Notations utilisées :

a)- Données géométriques fondamentales :

**H** : Hauteur du bâtiment

**h** : Hauteur de l'étage

**n+1** : nombre d'éléments de refend numérotés de 1 à n+1

**i** : ordre de l'élément courant

**n** : nombre de files de linteaux numérotés de 1 à n

**2ai** : distance entre les deux sections d'encastrement Sig et Sid des linteaux de la file "i"

**2ci** : distance entre les centres de gravités  $G_i$  et  $G_{i+1}$  des éléments de refend "i" et "i+1"



$\Omega_i$  Aire de la section horizontale de l'élément "i"

$\Omega_0$  Somme des aires des éléments de refend

$I_i$  Inertie de l'élément "i"

$I_0$  Somme des inerties des éléments de refend

$I$  Inertie totale du refend par rapport à  $G_0$ , centre de gravité de l'ensemble

$J_i$  Inertie du linteau de la file "i"

$m_i$  Moment statique par rapport à  $G_0$  des sections  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i$

$E$  Module d'élasticité des éléments de refend.

$E'$  Module d'élasticité des linteaux.

b)- Efforts :

$\overline{\pi}_i$  Effort tranchant dans le linteau "i"

$T_i$  Effort tranchant dans l'élément de refend "i"

$N_i$  Effort normal dans l'élément de refend "i"

$M_i$  Moment fléchissant dans l'élément de refend "i"

$T_1$  Effort tranchant à la base dû à la partie triangulaire du vent

5 - Définition des fonctions :

$$X(\alpha, \xi) = \left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right) \left(1 - \frac{\text{ch} \alpha (1-\xi)}{\text{ch} \alpha}\right) + \frac{2 \text{sh} \alpha \xi}{\alpha \text{ch} \alpha} - \xi^2$$

Fonction de calcul des efforts tranchant dans les linteaux

$$\Delta(\alpha, \xi) = \left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right) \left(1 - \xi - \frac{\text{sh} \alpha (1-\xi)}{\alpha \text{ch} \alpha}\right) + \frac{2}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\text{ch} \alpha \xi}{\text{ch} \alpha}\right) - \frac{1}{3} (1 - \xi^3)$$

Fonction de calcul des moments fléchissants et les efforts normaux dans les éléments de refend

6 - Théories et méthodes de calcul :

Soit à la côte  $x$  au-dessus de la section d'encastrement .

$\pi(x)$  effort tranchant dans le linteau .

$N(x)$  Effort normal dans chaque élément de refend .

Ces efforts résultent uniquement de l'action des forces horizontales sur le refend .

La figure (2.) représente le refend déformé .

$f_{i1}$ : est le déplacement relatif résultant de la flexion simple des éléments de refend, caractérisée par la déformée  $y$  .

$f'_{i3}$ : correspond à l'action de l'effort normal sur le refend  $i$  compté positivement s'il s'agit de compression .

$f''_{i3}$ : correspond à l'action de l'effort normal sur le refend  $i+1$  compté positivement s'il s'agit de compression .

$f_{i2}$ : est le déplacement relatif résultant des trois effets précédents .

Nous avons alors :

$$f_{i2} = f_{i1} + f'_{i3} - f''_{i3} \quad (1)$$

Avec  $f_{i1} = 2c_i y'$  (2)

$$f_{i2} = \frac{2\pi_i a_i^3}{3E'J_i} \quad (3)$$

$$f'_{i3} = \frac{1}{E\Omega_i} \int_0^x N_i dx \quad (4)$$

$$f''_{i3} = \frac{1}{E\Omega_{i+1}} \int_0^x N_{i+1} dx \quad (5)$$

L'équation (1) devient :

$$\frac{2 a_i^3}{3 E' J_i} \pi_i = 2 c_i y' + \frac{1}{E \Omega_i} \int_0^x N_i dx - \frac{1}{E \Omega_{i+1}} \int_0^x N_{i+1} dx \quad (6)$$

En remarquant qu'avec les hypothèses de continuité adoptées, on peut écrire.



$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{\pi_i - \pi_{i-1}}{h} \quad (7) \quad \frac{dN_{i+1}}{dx} = \frac{\pi_{i+1} - \pi_i}{h} \quad (8)$$

représente l'accroissement de l'effort normal d'un niveau à un autre .

Nous désignerons par  $M_i$  et  $T_i$  le moment et l'effort tranchant qui régnent dans la section de côte  $x$  de l'élément de refend  $i$ . L'équilibre d'un élément de refend compris entre l'étage  $j$  et l'étage  $j+1$  nous fournit l'équation suivante (voir fig 4)

$$\frac{dM_i}{dx} = \frac{-T_i h + \pi_{i-1}(a_{i-1} + v_i) + \pi_i(v_{i+a_i})}{h} \quad (9)$$

L'équation (9) est écrite pour n'importe quel élément de refend. On déduit par addition :

$$EI_0 \frac{dM}{dx} = -T + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n 2c_j \pi_j \quad (10)$$

Par dérivation deux fois successives de l'équation (6) on aura

$$\frac{2a_i^3}{3E'I_j} \pi''_i = 2c_i y''' + \frac{dN_i}{E\Omega_i dx} - \frac{dN_{i+1}}{E\Omega_{i+1} dx} \quad (11)$$

En injectant l'équation (10) dans l'équation (11), on obtient

$$\frac{2a_i^3}{3E'I_j} E \pi''_i = \frac{2c_i}{I_0} \sum_{j=1}^n 2c_j \pi_j - \frac{\pi_{i-1}}{\Omega_i} + \pi_i \left( \frac{1}{\Omega_i} + \frac{1}{\Omega_{i+1}} \right) - \frac{\pi_{i+1}}{\Omega_{i+1}} - \frac{2c_i h}{I_0} T \quad (12)$$

Equation générale de contreventement

#### A - ETUDE DU CAS ELEMENTAIRE

\* Refend à une file d'ouvertures :

L'équation (12) se réduit à :

$$\pi'' - \omega^2 \pi = - \omega^2 \frac{m h}{I} T \quad (13)$$

1 - Efforts tranchants dans les linteaux :

$$\omega^2 = \frac{3E'}{2E} \times \frac{J}{h a^3} \times \frac{I}{I_0} \times \frac{2c}{m} \quad (14)$$

$$m = \frac{2c}{\frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2}} \quad (15) \quad I = I_1 + I_2 + 2mc \quad (16)$$

\* Effet du vent (séisme) triangulaire seul :

On assimile le voile à une console encadrée à la base

L'expression de l'effort tranchant est donnée par :

$$T = T_1 (1 - \xi^2) \quad (17)$$

Avec  $T_1$  : effort tranchant à la base

L'équation (13) prend la nouvelle forme

$$\pi'' - \omega^2 \pi = - \omega^2 \frac{mh}{I} T_1 (1 - \xi^2) \quad (18)$$

L'intégrale générale sera

$$\pi = a \operatorname{ch} \alpha \xi + b \operatorname{sh} \alpha \xi + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2} - \xi^2\right) \frac{mh}{I} T_1$$

\* Conditions aux limites :

- A la base la rotation est nulle  $y' = 0 \implies \pi(0) = 0$

revenir aux expressions donnant  $\pi$  en fonction de  $y'$ , équation (6)

- Au sommet puisque c'est une console les efforts N et M sont

nuls  $\implies \pi'(H) = 0$

Ces deux conditions aux limites nous donnent les constantes

d'intégration a, b et d'écrire finalement

$$\pi = \frac{mh}{I} T_1 X(\alpha, \xi) \quad (19)$$

Avec

$$X(\alpha, \xi) = \left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha (1 - \xi)}{\operatorname{ch} \alpha}\right) + \frac{2 \operatorname{sh} \alpha \xi}{\alpha \operatorname{ch} \alpha} - \xi^2 \quad (20)$$

2 - Moments fléchissants dans les éléments de refend :

Les relations 
$$y'' = \frac{M_1}{EI_1} = \frac{M_2}{EI_2}$$

montrent la proportionnalité entre les moments  $M_1$  et  $M_2$  dans les éléments de refend (1) et (2), et les inerties de ces éléments.

Si  $M$  est le moment résultant total dans la section de côte  $x$ , dû à l'application des forces horizontales extérieures, on peut écrire :

$$M = M_1 + M_2 + 2c \int_x^H \frac{\pi}{h} dx \quad (21)$$

On a donc :

$$\frac{M_1}{I_1} = \frac{M_2}{I_2} = \frac{M_1 + M_2}{I_1 + I_2} = \frac{M - \frac{2c}{h} \int_x^H \pi dx}{I_1 + I_2} \quad (22)$$

D'où

$$M_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \left( M - \frac{2c}{h} \int_x^H \pi dx \right) \quad (23)$$

$$M_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} \left( M - \frac{2c}{h} \int_x^H \pi dx \right)$$

Par intégration de l'expression de (équation (19)), on trouve .

$$\int_x^H \pi dx = \frac{mh}{I} T_1 H \left[ \left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right) \left(1 - \xi - \frac{\text{sh} \alpha(1-\xi)}{\alpha \text{ch} \alpha}\right) + \frac{2}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\text{ch} \alpha \xi}{\text{ch} \alpha}\right) - \frac{1}{3} (1 - \xi^3) \right] \quad (24)$$

Cette formule peut se mettre sous la forme

$$\int_x^H \pi dx = \frac{mh}{I} T_1 H \Delta(\alpha, \xi) \quad (25)$$

Si nous remplaçons  $M$  par sa valeur en fonction de  $\xi = \frac{x}{H}$

$M = T_1 H \frac{(2 - 3\xi + \xi^3)}{3}$ , les formules (23) deviennent .

$$M_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} T_1 H \left( \frac{2 - 3\xi + \xi^3}{3} - \frac{2cm}{I} \Delta(\alpha, \xi) \right) \quad (26)$$

$$M_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} T_1 H \left( \frac{2 - 3\xi + \xi^3}{3} - \frac{2cm}{I} \Delta(\alpha, \xi) \right)$$

3 - Efforts normaux dans les éléments de refend :

Pour une file d'ouvertures, l'équation (7) devient .

$$\frac{dN}{dx} = \frac{\pi}{h} \quad , \text{l'intégration de cette équation nous donne .}$$

$$N = \frac{m H}{I} T_1 \cdot \Delta(\alpha, \xi) \quad (27)$$

$\Delta(\alpha, \xi)$ : étant la fonction qui a été définie dans l'équation (24)

On peut procéder d'une autre manière pour calculer N à l'aide de la formule suivante .

$$N_x = \sum_x^H \pi \quad (28)$$

4 - Efforts tranchants dans les éléments de refend :

On assimile l'ensemble des éléments de refend à une console encastree à sa base . L'effort tranchant régnant dans la section de cote x est donné par la formule .

$$T = T_1 (1 - \xi^2) \quad (29)$$

Avec T : Effort tranchant à la base

Le partage de cet effort se fait proportionnellement aux inerties de tous les éléments de refend .

$$T_i = \frac{I_i}{I_0} T \quad (30)$$

On introduit l'équation (29) dans l'équation (30) on obtient.

$$T_i = \frac{I_i}{I_0} T_1 (1 - \xi^2) \quad (31)$$

5 - Flèche au sommet :

Pour un cas de chargement triangulaire la flèche au sommet a pour expression .

$$f = \frac{11}{60} \times \frac{T_1 H^3}{EI} + \frac{2cm}{I} \times \frac{T_1 H^3}{EI_0} \times \frac{\Delta(\alpha, 0)}{\alpha^2} \quad (32)$$

6 - Inertie équivalente :

Par définition , nous appellerons INERTIE EQUIVALENTE  $I_e$  du refend considéré , l'inertie d'un refend plein fictif qui , soumis au même effort horizontal  $T_1$  , présenterait à son sommet une flèche égale à celle du refend avec ouvertures .

Flèche du refend plein est :

$$f = \frac{11}{60} \times \frac{T_1 H^3}{EI_e} \quad (33)$$

L'égalité des expressions (32) et (33) , on tire .

$$I_e = \frac{I}{1 + \frac{60}{11} \times \frac{2mc}{I_0} \times \frac{\Delta(\alpha, 0)}{\alpha^2}} \quad (34)$$

Pour un chargement sismique , l'expression de  $I_e$  devient .

$$I_e = \frac{a_n I}{1 + \frac{60}{11} \times \frac{2mc}{I_0} \times \frac{\Delta(\alpha, 0)}{\alpha^2}} \quad (35)$$

$$\text{Avec } a_n = \frac{11}{20} + \frac{9}{20n} - \frac{1}{30n^2} - \frac{1}{30n^3}$$

## B - ETUDE DU CAS GENERAL

Nous nous proposons ici d'étudier le cas d'un refend formé par  $n + 1$  éléments liés par  $n$  files verticales de linteaux .

Dans le cas des voiles percés de plusieurs files d'ouvertures, on utilise fréquemment une méthode simplifiée déduite de celle exposée par M. ALBIGES , alors que la méthode générale calcule des coefficients de monolithisme  $\alpha$  dont le nombre est égal au nombre de files d'ouvertures. La méthode générale fait appel

à un calcul matriciel très laborieux dont l'utilisation de l'ordinateur est très indispensable, par contre la méthode simplifiée tient compte uniquement d'un seul coefficient  $\alpha$  qui est fonction des paramètres de toutes les ouvertures.

Il faut noter que ce coefficient ne traduit pas la géométrie de l'ouverture comme dans le cas d'une seule file d'ouverture.

On commence tout d'abord par calculer le coefficient  $\alpha$ .

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{J_i C_i^2}{a_i^3} \quad (36) \quad \omega^2 = \frac{6E'}{E h I_0} \cdot K \quad (37)$$

$$\alpha = \omega H \quad (38)$$

### 1 - Efforts tranchants dans les linteaux :

On calcule les efforts tranchants de deux manières.

$$1- \text{ Soit par } \pi_i = \frac{m_i h}{I} T_i \chi(\alpha, \xi) \quad (39)$$

$$2- \text{ Soit par } \pi_i = d_i h T_i \chi(\alpha, \xi) \quad (40)$$

$$\text{Avec : } d_i = \frac{J_i C_i}{2 a_i^3 K}$$

$T_1$  : toujours l'effort tranchant à la base.

$h$  : hauteur de l'étage.

### 2 - Moments fléchissants dans les éléments de refend :

L'expression des moments est :

$$M_i = \frac{I_i}{I_0} \cdot T_1 \cdot H \left[ \frac{2 - 3\xi + \xi^3}{3} - \frac{\sum_{i=1}^n 2 m_i c_i}{I} \Delta(\alpha, \xi) \right] \quad (41)$$

### 3 - Efforts normaux dans les éléments de refend :

On peut évaluer les efforts normaux soit par

$$N_i = \sum_x^H \pi_i - \sum_x^H \pi_{i-1} \quad (42)$$

$$\text{soit par } N_i = \frac{(m_i - m_{i-1})}{I} \cdot H \cdot T_1 \Delta(\alpha, \xi)$$

4 - Efforts tranchants dans les éléments de refend :

On calcule les efforts tranchants à partir de la formule suivante .

$$T = \frac{I_i}{I_0} T_1 (1 - \xi^2) \quad (43)$$

5 - Flèche au sommet :

On détermine la valeur de la flèche à l'aide de l'expression suivante .

$$f = \frac{11}{60} \times \frac{T_1 H^3}{EI} + \frac{\sum 2c_i m_i}{I} \times \frac{T_1 H^3}{E I_0} \times \frac{\Delta(\alpha, 0)}{\alpha^2} \quad (44)$$

6 - Inertie équivalente :

L'égalité des flèches entre un refend plein fictif et le refend réel nous fournit l'expression suivante .

$$I_e = \frac{I}{1 + \frac{60}{11} \times \frac{\sum^n 2c_i m_i}{I_0} \times \frac{\Delta(\alpha, 0)}{\alpha^2}} \quad (44)$$

Pour le cas d'un séisme .

$$I_e = \frac{a_n I}{\frac{60}{11} \times \frac{I}{I_0} \times \frac{\Delta(\alpha, 0)}{\alpha^2} + 1} \quad (45)$$

$a_n$  : étant le coefficient qui a été défini auparavant .

**CHAPITRE**  
**- 2 -**  
**METHODE**  
**DE LA**  
**CHARGE**  
**CONCENTREE**

## METHODE DE LA CHARGE CONCENTREE

1 - Exposé de la méthode :

On conserve dans cette étude les mêmes hypothèses qu'ALBIGES sauf celle qui concerne la hauteur du bâtiment .

Sous l'action d'une charge unitaire horizontale appliquée à la côte relative  $\tau$ , l'effort tranchant appliqué à l'ensemble du refend a pour expression :

$$T = T(\tau, \xi) = \dot{\xi}(\tau, \xi)$$

Avec

$$\dot{\xi}(\tau, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < \xi \\ 1 & \text{si } 0 \leq \xi \leq \tau \end{cases} \quad (\text{voir fig 1})$$

Revenons alors à l'équation générale de contreventement qui a été établie au chapitre I et remplaçons T par sa valeur .

$$p_i \frac{2\alpha_i^3 E}{3E' J_i} \pi''_i = \frac{2c_i}{I_0} \sum_1^n 2c_j \pi_j - \frac{\pi_{i-1}}{\Omega_i} + \pi_i \left( \frac{1}{\Omega_i} + \frac{1}{\Omega_{i+1}} \right) - \frac{\pi_{i+1}}{\Omega_{i+1}} - \frac{2c_i h}{I_0} \dot{\xi}(\tau, \xi) \quad (1)$$

A - Etude du cas élémentaire :

\* Refend à une file d'ouvertures :

L'équation (1) se réduit à :

$$\pi'' - \omega^2 \pi = -\omega^2 \frac{mh}{I} \dot{\xi}(\tau, \xi) \quad (2)$$

Avec  $I = I_0 + 2mc$

$$m = \frac{2c}{\frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2}}$$

$$\omega^2 = \frac{3E'}{2E} \times \frac{J}{h^3 a^3} \times \frac{I}{I_0} \times \frac{2c}{m}$$

$$\alpha = \omega H$$

1 - Efforts tranchants dans les linteaux :

$$\pi' - \omega^2 \pi = -\omega^2 \frac{mh}{I} \dot{\xi}(\tau, \xi)$$

La solution complémentaire est de la forme .

$$\pi = a \operatorname{ch} \alpha \xi + b \operatorname{sh} \alpha \xi \quad (3)$$

La solution particulière aura la forme suivante .

$$f(\xi) = -\frac{\omega^2 m h}{I} \dot{\epsilon}(\tau, \xi)$$

$$y_p = \frac{-\omega^2}{-\omega^2} \times \frac{m h}{I} \dot{\epsilon}(\tau, \xi) = \frac{m h}{I} \dot{\epsilon}(\tau, \xi) \quad (4)$$

La solution générale est donc .

$$\pi = a \operatorname{ch} \alpha \xi + b \operatorname{sh} \alpha \xi + \frac{m h}{I} \dot{\epsilon}(\tau, \xi) \quad (5)$$

Il reste maintenant à déterminer les constantes d'intégration avec les conditions aux limites suivantes .

- A la base la rotation est nulle  $y' = 0 \implies \pi(0) = 0$
- revenir aux expressions donnant  $\pi$  en fonction de  $y'$ , équation(6)
- A la côte relative  $\tau$  les efforts N et M sont nuls .

$$\implies \pi'(\tau) = 0$$

Finalement on retrouve :

$$a = -\frac{m h}{I} \dot{\epsilon}(\tau, \xi) \quad (6)$$

$$b = \frac{m h}{I} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha \tau}{\operatorname{ch} \alpha \tau} \cdot \dot{\epsilon}(\tau, \xi)$$

L'effort tranchant dans les linteaux est donné par

$$\pi = \frac{m h}{I} \nabla(\alpha, \tau, \xi) \quad (7) \text{ avec}$$

$$\nabla(\alpha, \tau, \xi) = \dot{\epsilon}(\tau, \xi) \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha (\tau - \xi)}{\operatorname{ch} \alpha \tau} \right] \quad (8)$$

L'action d'une charge Q concentrée à la côte relative  $\tau$  donne naissance à des efforts tranchants dont les valeurs sont à multiplier par la charge Q .

$$\pi = \frac{m h}{I} Q \nabla(\alpha, \tau, \xi) \quad (9)$$

\* Cas d'un refend avec plusieurs charges concentrées :

Dans le cas où on a plusieurs charges concentrées à des côtes relatives différentes , on applique le principe de superposition de l'effet de chacune de ces charges pour en finir de trouver l'effort tranchant total résultant .

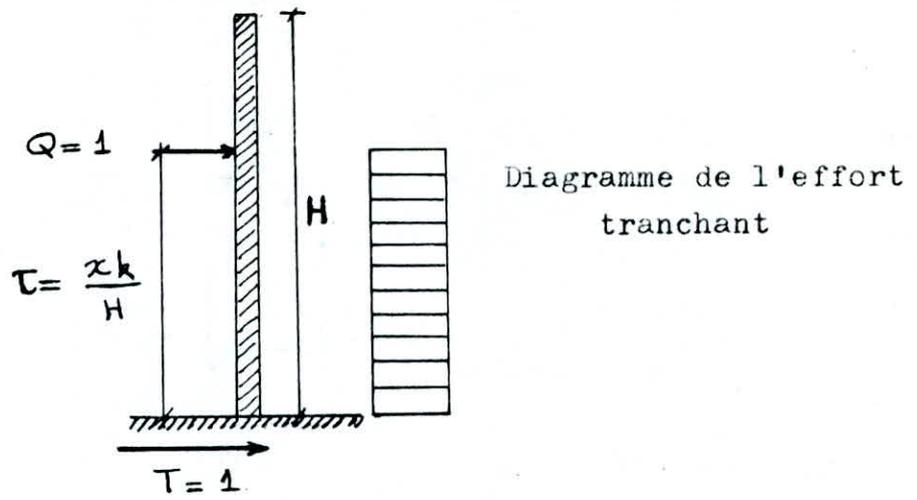


fig (1)

Refend à une file d'ouvertures avec n niveaux

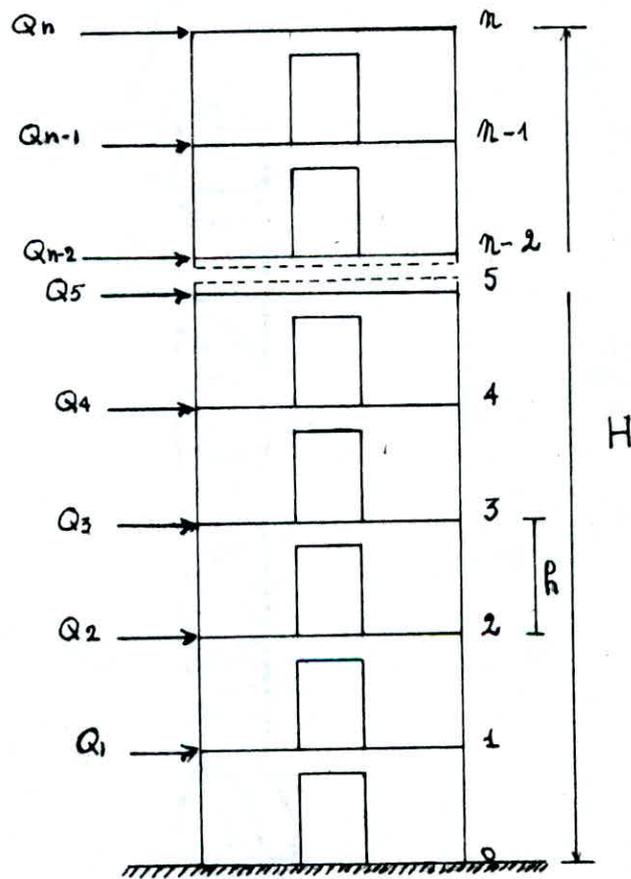


fig (2)

L'effort tranchant total résultant dans la section de côte relative  $\xi$  aura pour expression :

$$\pi = \frac{mh}{I} \sum_{j=1}^{NV} Q_j \nabla(\alpha, \tau_j, \xi) \quad (10)$$

Avec : NV : nombre de niveaux

$\tau_j$  : côte relative de la force concentrée  $Q_j$

(voir fig 3)

2 - Moments fléchissants dans les éléments de refend :

Reprenons l'équation (10) du chapitre I avec naturellement  $T = \dot{E}(\tau, \xi)$ .

$$h E I_0 y'' = - h \dot{E}(\tau, \xi) + 2c \pi = - h \dot{E}(\tau, \xi) + \frac{2cm}{I} \nabla$$

En intégrant cette relation, on retrouve .

$$E I_0 y'' = H \left[ \bar{E}(\tau, \xi) - \frac{2cm}{I} S(\alpha, \tau, \xi) \right] \quad (11)$$

Les relations qui montrent la proportionnalité entre les moments  $M_i$  dans les éléments de refend et leurs inerties nous donnent .

$$M_i = \frac{H I_i}{I_0} \left[ \bar{E}(\tau, \xi) - \frac{2cm}{I} S(\alpha, \tau, \xi) \right] \quad (12)$$

Il reste maintenant à définir les fonctions  $\bar{E}(\tau, \xi)$  et  $S(\alpha, \tau, \xi)$

a)- Définition de la fonction  $\bar{E}(\tau, \xi)$  :

Elle est définie par l'intégrale suivante .

$$\bar{E}(\tau, \xi) = \int_{\xi}^{\tau} \dot{E}(\tau, \xi) d\xi$$

En développant cette intégrale, on obtient :

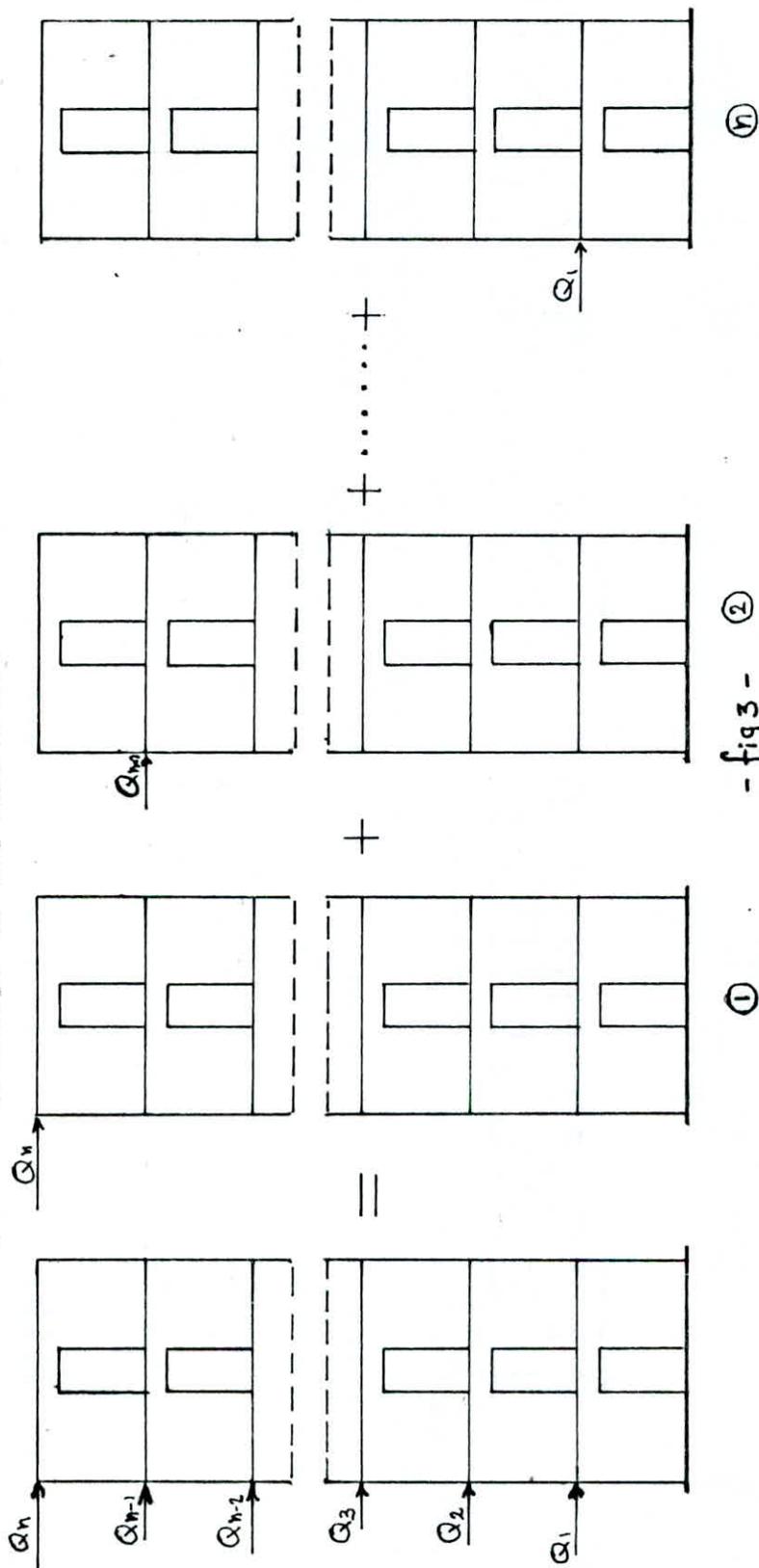
$$\bar{E}(\tau, \xi) = (\tau - \xi) \dot{E}(\tau, \xi) \quad (13)$$

b)- Définition de la fonction  $S(\alpha, \tau, \xi)$  :

Elle est définie par l'intégrale suivante .

$$S(\alpha, \tau, \xi) = \int_{\xi}^{\tau} \nabla(\alpha, \tau, \xi) d\xi$$

- Principe de superposition -



- fig 3 -

$\pi(\xi)$	=	$\pi^{\textcircled{1}}$	+	$\dots$	+	$\pi^{\textcircled{n}}$
$M(\xi)$	=	$M^{\textcircled{1}}$	+	$\dots$	+	$M^{\textcircled{n}}$
$N(\xi)$	=	$N^{\textcircled{1}}$	+	$\dots$	+	$N^{\textcircled{n}}$
$f(H)$	=	$f^{\textcircled{1}}$	+	$\dots$	+	$f^{\textcircled{n}}$

En développant les calculs de cette intégrale on obtient :

$$S(\alpha, \tau, \xi) = \bar{\xi}(\tau, \xi) \left[ (\tau - \xi) - \frac{\text{Sh} \alpha (\tau - \xi)}{\alpha \text{ch} \alpha \tau} \right] \quad (14)$$

Le moment fléchissant engendré par l'application d'une charge concentrée  $Q$  à la côte relative  $\tau$  est donné par la relation suivante .

$$M_i = \frac{Q I_i H}{I_0} \left[ \bar{\xi}(\tau, \xi) - \frac{2cm}{I} S(\alpha, \tau, \xi) \right] \quad (15)$$

Dans le cas où on a plusieurs charges concentrées, on applique le principe de superposition .(voir fig 3)

$$M_i = \frac{H I_i}{I_0} \sum_{j=1}^{NV} Q_j \left[ \bar{\xi}(\tau_j, \xi) - \frac{2mc}{I} S(\alpha, \tau_j, \xi) \right] \quad (16)$$

### 3 - Efforts normaux dans les éléments de refend :

Pour une file d'ouvertures , on a

$$\frac{dN}{dx} = \frac{\pi}{h} \quad \text{l'intégrale de cette équation nous donne .}$$

$$N = \frac{m H}{I} S(\alpha, \tau, \xi) \quad (17)$$

L'effort normal engendré par l'application d'une charge concentrée  $Q$  à la côte relative  $\tau$  aura pour valeur .

$$N = \frac{Q m H}{I} S(\alpha, \tau, \xi) \quad (18)$$

Pour un système de charges concentrées, appliquées à des côtes différentes , on applique le principe de superposition pour aboutir à l'expression finale de  $N$  .

$$N = \frac{m H}{I} \sum_{j=1}^{NV} Q_j S(\alpha, \tau_j, \xi) \quad (19)$$

#### 4 - Efforts tranchants dans les éléments de refend :

L'effort tranchant total appliqué à l'ensemble des éléments de refend a pour valeur .

$$T = \dot{\epsilon}(\tau, \xi)$$

Le partage de cet effort se fait proportionnellement aux inerties de tous les éléments de refend .

$$T_i = \frac{I_i}{I_0} T = \frac{I_i}{I_0} \dot{\epsilon}(\tau, \xi) \quad (20)$$

Par application d'une charge concentrée  $Q$  à la côte relative  $\tau$ ,  $T$  prend la forme suivante .

$$T_i = \frac{I_i}{I_0} Q \dot{\epsilon}(\tau, \xi) \quad (21)$$

Pour un système de charges concentrées appliquées à des côtes différentes , on applique le principe de superposition .

$$T_i = \frac{I_i}{I_0} \sum_{j=NV}^x Q_j \dot{\epsilon}(\tau_j, \xi) \quad (22)$$

#### 5 - Flèche au sommet :

Partons de la relation :

$$h E I_0 y'' = - h \dot{\epsilon}(\tau, \xi) + \frac{2cm}{I} h \nabla(\alpha, \tau, \xi)$$

après trois intégrations successives en tenant compte des conditions aux limites , on obtient .

$$y(H) = \frac{H^3}{6 E I} (3\tau^2 - \tau^3) + \frac{H^3}{E I_0} \frac{2cm}{I} \frac{S(\alpha, \tau, 0)}{\alpha^2} \quad (23)$$

L'application d'une charge  $Q$  à la côte relative  $\tau$  provoque un déplacement en tête du refend égal à :

$$y(H) = \frac{H^3 Q}{6 E I} (3\tau^2 - \tau^3) + \frac{H^3 Q}{E I_0} \times \frac{2cm}{I \alpha^2} \times S(\alpha, \tau, 0) \quad (24)$$

Pour un système de charges concentrées à des côtes relatives différentes, le déplacement en tête du refend étant la somme des déplacements élémentaires accusés à chaque niveau. Par application du principe de superposition, on parvient à la relation suivante.

$$f = y(H) = \frac{H^3}{6 EI} \sum_{j=1}^{NY} Q_j (3\tau_j^2 - \tau_j^3) + \frac{H^3}{EIO} \times \frac{2cm}{I \alpha^2} \sum_{j=1}^{NY} Q_j S(\alpha, \tau_j, 0) \quad (25)$$

6 - Inertie équivalente :

La notion de l'inertie équivalente a été déjà introduite au chapitre I, on donne ici uniquement la méthode à suivre pour obtenir cette inertie pour un chargement quelconque.

La flèche du refend fictif soumis à un système de charges concentrées à des côtes relatives différentes est donnée par

$$f = \frac{H}{6EI_e} \sum_{j=1}^{NY} Q_j (3\tau_j^2 - \tau_j^3) \quad (26)$$

L'égalité des relations (25) et (26) donne.

$$I_e = \frac{I}{1 + \frac{12mc \sum Q_j S(\alpha, \tau_j, 0)}{10 \alpha^2 \sum Q_j (3\tau_j^2 - \tau_j^3)}} \quad (27)$$

## B - ETUDE DU CAS GENERAL

\* Refend à plusieurs files d'ouvertures :

On commence tout d'abord par l'évaluation du coefficient

$$K = \sum_1^n \frac{J_i c_i^2}{\alpha^3} \quad (28)$$

$$\omega^2 = \frac{6E'K}{E h I_0} \quad (29)$$

$$\alpha = \omega H \quad (30)$$

1 - Efforts tranchants dans les linteaux :

On calcule les efforts tranchants de deux manières.

$$1- \text{ Soit par } \pi = \frac{m_i h}{I} \nabla(\alpha, \tau, \xi) \quad (31)$$

$$2- \text{ Soit par } \pi = d_i h \nabla(\alpha, \tau, \xi) \quad (32)$$

$$\text{Avec : } d_i = \frac{J_i c_i}{2 \alpha_i^3 \kappa}$$

a)-Cas d'une charge Q :

$$\pi = \frac{m_i h Q}{I} \nabla(\alpha, \tau, \xi) \quad (33)$$

$$\pi = d_i h Q \nabla(\alpha, \tau, \xi) \quad (34)$$

b)-Cas d'un système de charges concentrées :

$$\pi = \frac{m_i h}{I} \sum Q_j \nabla(\alpha, \tau_j, \xi) \quad (35)$$

$$\pi = d_i h \sum Q_j \nabla(\alpha, \tau_j, \xi) \quad (36)$$

2 - Moments fléchissants dans les éléments de refend :

L'expression du moment est donnée par la formule suivante .

$$M_i = \frac{I_i}{I_0} H \left[ \bar{\xi}(\tau, \xi) - \frac{\sum 2c_i m_i}{I} s(\alpha, \tau, \xi) \right] \quad (37)$$

a)-Cas d'une charge Q :

$$M_i = \frac{Q I_i H}{I_0} \left[ \bar{\xi}(\tau, \xi) - \frac{\sum 2c_i m_i}{I} s(\alpha, \tau, \xi) \right] \quad (38)$$

b)-Cas d'un système de charges concentrées :

$$M_i = \frac{I_i H}{I_0} \sum_{j=NY} Q_j \left[ \bar{\xi}(\tau_j, \xi) - \frac{\sum^n 2c_i m_i}{I} s(\alpha, \tau_j, \xi) \right] \quad (39)$$

3 - Efforts normaux dans les éléments de refend :

On peut évaluer les efforts normaux dans les éléments de refend

en faisant le cumul des efforts tranchants des linteaux du sommet vers le niveau considéré .

$$\text{Soit : } N_x = \sum_x^h \pi_i - \sum_x^h \pi_{i-1} \quad (40)$$

On peut aussi calculer les efforts normaux à partir des relations théoriques suivantes .

$$N = \frac{H (m_i - m_{i-1})}{I} S(\alpha, \tau, \xi) \quad (41)$$

$$N = (d_i - d_{i-1}) H S(\alpha, \tau, \xi) \quad (42)$$

a)-Cas d'une charge Q :

$$N = \frac{Q H (m_i - m_{i-1})}{I} S(\alpha, \tau, \xi) \quad (43)$$

$$N = Q H (d_i - d_{i-1}) S(\alpha, \tau, \xi) \quad (44)$$

b)-Cas d'un système de charges concentrées :

$$N = \frac{H (m_i - m_{i-1})}{I} \sum_{j=1}^{NV} Q_j S(\alpha, \tau_j, \xi) \quad (45)$$

$$N = H (d_i - d_{i-1}) \sum_{j=1}^{NV} Q_j S(\alpha, \tau_j, \xi) \quad (46)$$

4 - Efforts tranchants dans les éléments de refend :

Le partage de l'effort tranchant se fait proportionnellement aux inerties de tous les éléments de refend .

$$T_i = \frac{I_i}{I_0} \cdot T = \frac{I_i}{I_0} \dot{\xi}(\tau, \xi) \quad (47)$$

a)-Cas d'une charge Q :

$$T_i = \frac{I_i}{I_0} Q \dot{\xi}(\tau, \xi) \quad (48)$$

b)- Cas de plusieurs charges concentrées :

$$T_i = \frac{I_i}{I_0} \sum_{j=1}^x Q_j \dot{\xi}(\tau_j, \xi) \quad (49)$$

### 5 - Flèche au sommet :

Pour un système de charges concentrées , la flèche au sommet est la somme des déplacements élémentaires provoqués par chacune de ces charges .

$$f = \sum_1^{NV} f_j = \frac{H^3}{6EI} \times \sum_{j=1}^{NV} Q_j (3\tau_j^2 - \tau_j^3) + \frac{\sum_1^n 2m_i c_i \times H^3}{I \times EIO} \times \sum_{j=1}^{NV} Q_j \times \frac{S(\alpha, \tau_j, \xi)}{\alpha^2} \quad (50)$$

### 6 - Inertie équivalente :

Elle est donnée par l'expression suivante .

$$I_e = \frac{I}{1 + \frac{12 \sum m_i c_i}{\alpha^2 \times IO} \times \frac{\sum_{j=1}^{NV} Q_j S(\alpha, \tau_j, \xi)}{\sum_{j=1}^{NV} Q_j (3\tau_j^2 - \tau_j^3)}} \quad (51)$$

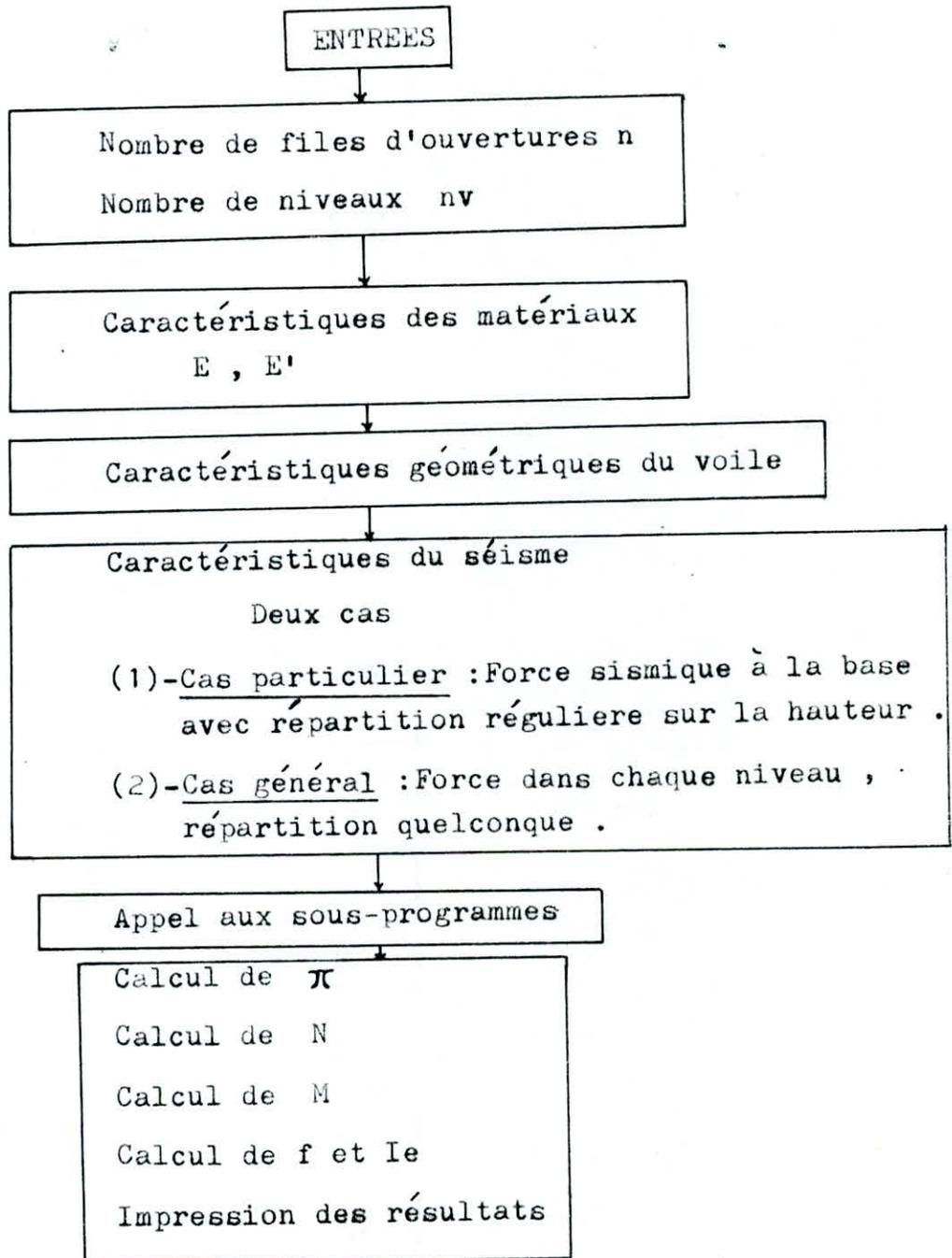
### C - Organigramme :

L'organigramme général est donné dans la page 30 .

### D - Programme :

Le programme établi est très simple à utiliser , vu qu'on a opté pour un mode conversationnel pour l'entrée des données . Une fois l'entrée des données est achevée , il apparait sur l'écran en premier lieu les caractéristiques du refend telles- que I , m<sub>i</sub> , ω , α , . Un message en bas de l'écran invite l'utilisateur à appuyer sur une touche quelconque pour voir la suite des résultats .

Pour l'impression des résultats, l'utilisateur peut avoir une copie d'écran en appuyant simultanément sur les touches (SHIFT/PRT) .



E - Calcul pratique des efforts tranchants dans les linteaux et les moments dans les trumeaux :

La méthode de calcul pratique des efforts tranchants dans les linteaux , et les moments dans les trumeaux pour un voile avec ouvertures à partir de la résolution exposée précédemment sous-entend l'utilisation d'un outil de calcul performant (ordinateur) , mais il est possible d'effectuer ce calcul manuellement à partir d'abaques que nous proposons .

Les abaques proposés (dont la fig constitue un exemple) sont au nombre de 10 et chaque abaque est tracé pour une valeur de  $\xi$  multiple de 0.1 , avec  $\xi$  compris entre 0 et 1 .

$$\xi = 0.1 , 0.2 , \dots , 1$$

La connaissance de 10 points permet de tracer la courbe complète des efforts tranchants et des moments , et à partir de laquelle on peut déduire les valeurs de  $\pi_i$  et  $M_i$  quelle que soit l'altitude désirée .

a)- Principe de la construction d'un abaque :

L'effort tranchant dans les linteaux est donné par la relation

$$\pi_i = \frac{m_i h}{I} Q \nabla(\alpha, \tau, \xi)$$

Pour une altitude donnée , par exemple  $\xi = 0.1$  , l'abaque

donne la fonction  $\nabla$  en fonction de .

$\alpha$  qui caractérise géométriquement le voile .

$\tau$  qui indique la position de la charge .

On déterminera autant de valeurs de  $\nabla$  qu'il y a de charges extérieures , et l'effort tranchant résultant est donné par

le principe de superposition.

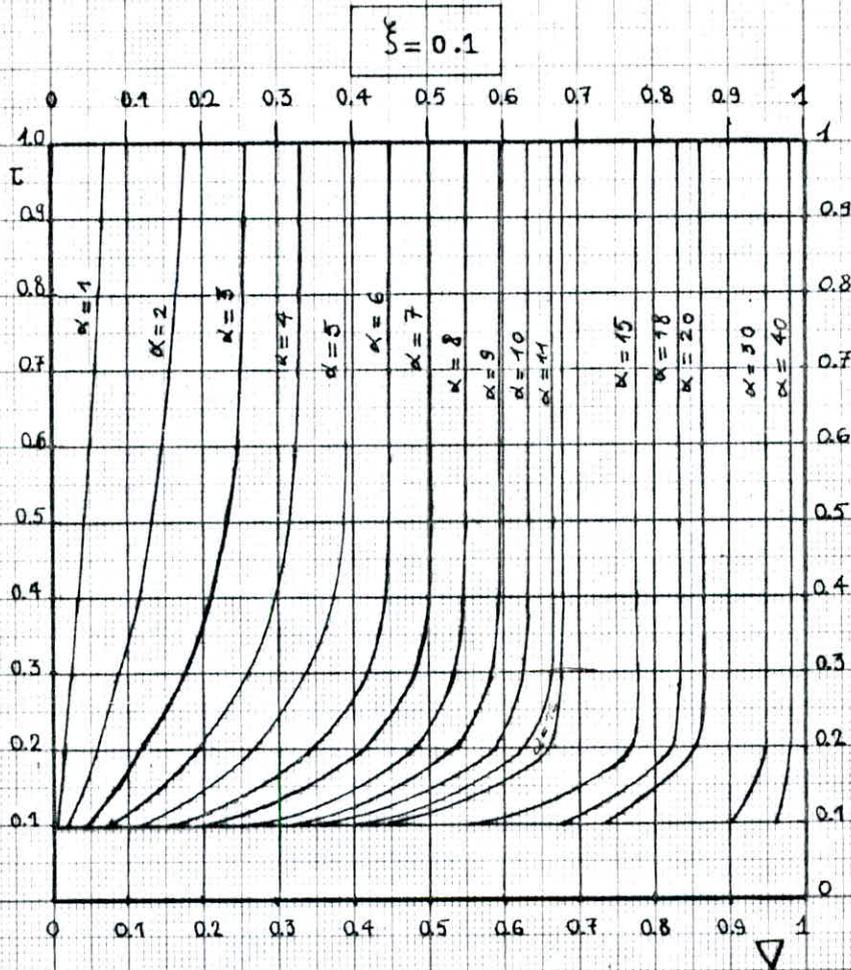
Pour les moments , on procédera de la même manière (ou par équilibre) sauf que la fonction  $\nabla$  est remplacée par la fonction  $S(\alpha, \tau, \xi)$  .

$$M_i = \frac{Q I_i H}{I_0} \left[ \bar{E}(\tau, \xi) - \frac{\sum 2c_i m_i}{I} S(\alpha, \tau, \xi) \right]$$

b)- Application :

Voir l'exemple (R+7) avec un pourcentage d'ouvertures de 25 %  
(Exemple d).

Valeurs de la fonction  $\nabla(\alpha, \tau, \xi)$  de répartition  
 des efforts tranchants dans les linteaux pour  
 une charge concentrée



# CHAPITRE

- 3 -

Methode des  
differences  
finies

## METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Dans ce qui suit on donne uniquement un petit aperçu sur la méthode . Pour plus de détail consulter les annales de l'ITBTP (Fev 71) par COIN ,DECAUCHY et COLLIGNON .

L'étude des refends à plusieurs files d'ouvertures due à M. DESPEYROUX constitue la généralisation de l'étude des refends percés d'une seule file d'ouvertures établie par Messieurs ALBIGES et GOULET .

On peut critiquer le processus de résolution de la méthode générale, car l'intégration est faite dans le cas de coefficients constants (ce qui suppose que ni les refends , ni les linteaux, ni les ouvertures ne varient avec l'altitude), et on perd ainsi une grande partie des avantages de cette méthode .

Il est préférable de conserver le système d'équations différentielles obtenu et de le transformer , sans le résoudre en équations aux différences finies .

1 - Hypothèses :

Voir les hypothèses du chapitre

2 - Notations :

I : indice d'un étage .

NN : indice du dernier étage .

J : indice d'un trumeau .

MM : indice du dernier trumeau .

H(I): hauteur d'étage comprise entre l'étage I-1 et l'étage I

G(I): hauteur moyenne d'étage à l'étage I .

$$G(I) = \frac{1}{2} [H(I) + H(I+1)] \quad I = 1, NN-1$$

$$G(NN) = \frac{1}{2} H(NN)$$

C(J): distance entre les centres de gravité des trumeaux

CM(I): effort horizontal s'exerçant au niveau I .

V(J): portée du linteau J .

S(I,J): section du trumeau J au niveau I .

RI(I,J): moment d'inertie du même refend

BI(I,J): moment d'inertie du linteau J au niveau I .

E(I,J): module d'élasticité du trumeau J au niveau I .

EL(I,J): module d'élasticité du linteau J au niveau I .

X(I): altitude de l'étage I rapportée à la section d'encastrement à la base .

$$X(I) = \sum_1^I H(K)$$

PI(I,J): effort tranchant dans le linteau J de l'étage I .

NL(I,J): effort normal dans le linteau J de l'étage I .

ML(I,J): moment de flexion dans le linteau J de l'étage I .

MR(I,J): moment de flexion dans le trumeau J à mi-hauteur de l'étage I-1 .

MR1(I,J): moment de flexion dans le trumeau J juste au-dessus du linteau de l'étage I-1 .

MR2(I,J): moment de flexion dans le trumeau J juste au-dessous du linteau de l'étage I .

TR(I,J): effort tranchant dans le trumeau J dans la hauteur de l'étage I .

NR(I,J): effort normal dans le trumeau J dans la hauteur de l'étage I .

TE(I): effort tranchant des forces extérieurs .

ME(I) moment de flexion des forces extérieures appliquées, du niveau I au niveau NN mesuré à mi-hauteur de l'étage I.

3 - Efforts tranchants dans les linteaux :

L'équation différentielle en PI(I,J) s'écrit :

$$\frac{PI''(I,J) V(J)^2}{12 EL(I,J) BI(I,J) C(J)} + \frac{1}{G(I) C(J)} \left[ \frac{PI(I,J+1) - PI(I,J)}{E(I,J+1) S(I,J+1)} - \frac{PI(I,J) - PI(I,J-1)}{E(I,J) S(I,J)} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{MM} E(I,J) RI(I,J)} \left[ \frac{1}{G(I)} \sum_{j=1}^{MM-1} PI(I,J) C(J) - TE(I) \right]$$

Cette équation peut être transformée en équations aux différences finies en revenant à la définition élémentaire de la dérivée.

En admettant que la hauteur entre deux étages successifs est sensiblement la même.

$$PI''(I,J) = \frac{PI(I+1,J) + PI(I-1,J) - 2PI(I,J)}{G(I)^2}$$

On trouve alors un système d'équations linéaires en PI(I,J).

Les indices variant de 0 à NN pour I, et de 1 à MM-1 pour J.

$$\frac{PI(I+1,J) - 2PI(I,J) + PI(I-1,J)}{G(I)} \times \frac{V(J)^3}{12 EL(I,J) BI(I,J) C(J)}$$

$$+ \frac{PI(I,J+1) - PI(I,J)}{E(I,J+1) S(I,J+1) C(J)} - \frac{PI(I,J) - PI(I,J-1)}{E(I,J) S(I,J) C(J)} =$$

$$= \frac{1}{\sum E(I,J) RI(I,J)} \left[ \sum PI(I,J) C(J) - TE(I) G(I) \right]$$

\* Conditions aux limites :

-A la base de la construction, les éléments de refend sont encastres,  $\Rightarrow y'(0) = 0$  ce qui donne  $PI(0,J) = 0$

-Au sommet de la construction les moments de flexion dans les éléments de refend sont nuls, ce qui donne  $y''(NN) = 0$

on a donc  $PI(NN,J) = 0$

Il suffit donc d'ajouter un étage fictif distant de  $G(NN)$  pour lequel on impose  $PI(NN+1,J) = PI(NN,J)$  .

La matrice ainsi obtenue est une matrice bande d'autant plus étroite que le nombre de trumeaux est faible devant le nombre de niveaux .

\* Résolution du système :

La détermination des efforts tranchants dans les linteaux  $PI(I,J)$  revient à résoudre le système linéaire déjà établi . Pour la résolution , nous avons opté pour l'algorithme de GAUSS-JORDAN .

4 - Moment de flexion dans les linteaux :

Donné par l'expression suivante .

$$ML(I,J) = \pm PI(I,J) V(J)/2$$

5 - Moment de flexion à mi-hauteur d'étage dans les refends :

Ce moment peut être exprimé en fonction des forces extérieures et des efforts tranchants dans les linteaux .

$$MR(I,J) = \frac{E(I,J) RI(I,J)}{\sum_{j=1}^{MM} E(I,J) RI(I,J)} \left[ ME(I) - \sum_{j=1}^{MM-1} C(J) \sum_{k=1}^{NN} PI(K,J) \right]$$

6 - Effort normal dans les trumeaux :

Il résulte directement des efforts tranchants dans les linteaux.

$$NR(I,J) = \sum_{k=1}^{NN} [PI(K,J-1) - PI(K,J)]$$

7- Moment de flexion dans les refends :

Le moment varie linéairement sur la hauteur de l'étage I entre les valeurs suivantes .

$$MR1(I,J) = MR(I,J) + TR(I,J) \cdot H(I)/2$$

$$MR2(I,J) = MR(I,J) - TR(I,J) \cdot H(I)/2$$

8 - Effort normal dans les linteaux :

Il est donné par l'équilibre d'un élément de refend.

$$NL(I,J) = CM(I) + \sum_{L=1}^J [TR(I+1,L) - TR(I,L)]$$

9 - Déplacement en tête du refend :

On sait que la flèche correspond au moment de flexion de l'état de charge fictif  $M/EI$ , ce qui permet d'écrire pour le niveau I et le refend J.

$$\frac{MR(I,J) H(I)}{E(I,J) RI(I,J)} \left( X(NN) - X(I) + \frac{H(I)}{2} \right) + \frac{TR(I,J)}{E(I,J) RI(I,J)} \times \frac{H(I)}{2} \times \frac{H(I)}{4} + \frac{H(I)}{6}$$

Par sommation sur tous les niveaux, il vient :

$$Y(NN) = \sum_{I=1}^{NN} \left[ \frac{MR(I,J) H(I)}{E(I,J) RI(I,J)} \left( X(NN) - X(I) + \frac{H(I)}{2} \right) + \frac{TR(I,J)}{E(I,J) RI(I,J)} \frac{H(I)^3}{12} \right]$$

En faisant intervenir MR1 et MR2, on obtient.

$$Y(NN) = \sum_{I=1}^{NN} \frac{MR1(I,J) + MR2(I,J)}{E(I,J) RI(I,J)} \left( X(NN) - X(I) \right) \frac{H(I)}{2} + \frac{2MR1(I,J) + MR2(I,J)}{E(I,J) RI(I,J)} \times \frac{H(I)^2}{6}$$

10- Inertie équivalente :

Elle est donnée par la relation suivante.

$$EI = \frac{1}{Y(NN)} \sum_{I=1}^{NN} \left[ ME(I) H(I) \left( X(NN) - X(I) + \frac{H(I)}{2} \right) + TE(I) \frac{H(I)^3}{12} \right]$$

**CHAPITRE**

**- 4 -**

**CALCUL**

**EN**

**PORTIQUE**

## 1- INTRODUCTION :

Dans la plupart des cas quand la structure est élancée, les déformations dues à l'effet de l'effort tranchant sont généralement négligeables, mais pour les éléments courts cet effet n'est pas du tout négligeable et même parfois prépondérant à celui obtenu par les autres efforts.

Dans cette étude, on a tenu compte de deux phénomènes :

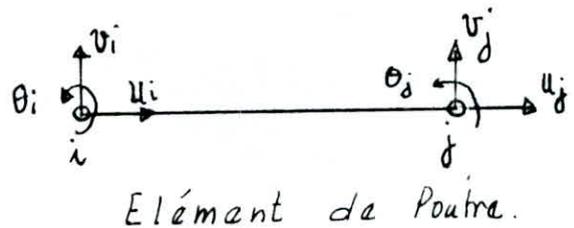
- Déformation due à l'effort tranchant.
- La relaxation

Le premier phénomène est pris en considération dans les coefficients de la matrice de souplesse.

On traduit le deuxième phénomène par l'introduction des fonctions de relaxation au niveau de la matrice de souplesse. Les coefficients de relaxation expriment la plastification du matériau par rapport à son élasticité, et ceci est fait pour observer les conséquences de la plastification au niveau des linteaux et son influence sur les trumeaux.

## 2- Notations :

E: module d'Young      G: module de cisaillement  
A: section des barres       $A_r$ : section réduite des barres  
l: longueur de la barre      I: inertie de la barre



3- Formation de la matrice de souplesse :

Les formules de BRESSE ( on peut aussi utiliser GASTIGLIANO ) permettent d'écrire les coefficients de souplesse d'une poutre soumise à la flexion , au cisaillement , et à l'effort normal.

$$a = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EI} + \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{dx}{G \cdot A_r}$$

$$b = \int_0^l \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EI} - \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{dx}{G \cdot A_r}$$

$$c = \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EI} + \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{dx}{G \cdot A_r}$$

La matrice de souplesse s'écrit :

$$[S] = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ -b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

La matrice de raideur s'écrit :

$$[R] = [S]^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} c & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & ac - b^2 \\ & & & d \end{bmatrix}$$

Si l'inertie I , la section A et la section  $A_r$  sont constantes .



$$a = c = 1/3EI + 1/GA_r l$$

$$b = 1/6EI - 1/GA_r l$$

$$d = 1/EA$$

On pose  $\tau = 6EI/GA_r l^2$

La matrice de raideur devient :

$$\begin{bmatrix} M1 \\ M2 \\ N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2EI(2+\tau)}{1(1+2\tau)} & \frac{2EI(1-\tau)}{1(1+2\tau)} & 0 \\ \frac{2EI(1-\tau)}{1(1+2\tau)} & \frac{2EI(2+\tau)}{1(1+2\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & EA/l \end{bmatrix}}_{[R]} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta \end{bmatrix}$$

La matrice  $[R]$  est liée à l'élément ; ici ses degrés de liberté sont réellement indépendants (car ils proviennent de la matrice de souplesse). Pour passer à la matrice habituelle (contenant les déplacements de corps rigides) on doit procéder de la façon suivante.

a) - Matrice de transformation de degré de liberté :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta \end{bmatrix} = [E] \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & 1/l & 1 & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & 1/l & 0 & 0 & -1/l & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour tenir compte de la rotation des six degrés de liberté, on fait intervenir la matrice de rotation suivante

b) - Matrice de rotation pour six degrés de liberté :

$$[R_0] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour tenir compte de la transformation de degré de liberté et de leur rotation, on doit multiplier la matrice  $[E]$  par la matrice  $[RO]$ .

$$[B] = [E][RO] = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \theta}{l} & \frac{\cos \theta}{l} & 1 & \frac{\sin \theta}{l} & -\frac{\cos \theta}{l} & 0 \\ -\frac{\sin \theta}{l} & \frac{\cos \theta}{l} & 0 & \frac{\sin \theta}{l} & -\frac{\cos \theta}{l} & 1 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Pour faire intervenir l'effet de relaxation, on choisit des coefficients qui varient dans l'intervalle  $[0,1]$ , avec lesquelles on pourra choisir des fonctions variant dans le même intervalle.

Donc la nouvelle matrice de rigidité devient.

$$[R'] = \begin{bmatrix} \frac{2EI(2 + \tau)}{1(1 + 2\tau)} f_1 & \frac{2EI(1 - \tau)}{2(1 + 2\tau)} f_2 & 0 \\ \frac{2EI(1 - \tau)}{1(1 + 2\tau)} f_2 & \frac{2EI(2 + \tau)}{1(1 + 2\tau)} f_3 & 0 \\ 0 & 0 & EA/l \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \frac{3\alpha_1^2}{(4 - \alpha_1\alpha_2)} \quad f_2 = \frac{3\alpha_1\alpha_2}{(4 - \alpha_1\alpha_2)} \quad f_3 = \frac{3\alpha_2^2}{(4 - \alpha_1\alpha_2)}$$

Finalement on obtient la matrice de rigidité de l'élément de poutre à partir de l'expression matricielle suivante.

$$[Re] = [B]^t [R'] [B]$$

On pose :

$$[R'] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

$$\sin \theta = y/l$$

$$\cos \theta = x/l$$

$$[Re] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -a_{11} & -a_{12} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & -a_{12} & -a_{22} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & -a_{23} & a_{36} \\ \text{Symetrique} & & & a_{11} & a_{12} & -a_{16} \\ & & & & a_{22} & -a_{26} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$a_{11} = (m_{11} + 2m_{12} + m_{22}) \frac{y^2}{e^4} + \frac{nx^2}{e^2} \quad a_{12} = -(m_{11} + m_{12} + m_{22}) \frac{xy}{e^4} + \frac{nx}{e^2}$$

$$a_{13} = -(m_{11} + m_{12}) \frac{y}{e^2} \quad a_{16} = -(m_{12} + m_{22}) \frac{y}{e^2}$$

$$a_{22} = (m_{11} + 2m_{12} + m_{22}) \frac{x^2}{e^4} + \frac{ny^2}{e^2} \quad a_{23} = (m_{11} + m_{12}) \frac{x}{e^2}$$

$$a_{26} = (m_{12} + m_{22}) \frac{x}{e^2} \quad a_{33} = m_{11} \quad a_{34} = (m_{11} + m_{12}) \frac{y}{e^2}$$

$$a_{36} = m_{12} \quad a_{66} = m_{22}$$

4- Assemblage et obtention de la matrice de la structure :

5- Conditions aux limites :

6- Résolution et obtention des déplacements de l'élément de poutre :

(Même principe que la méthode des éléments finis)

7- Calcul des déplacements de l'élément de barre :

Après l'obtention des déplacements de l'élément de poutre, on peut calculer les déplacements de l'élément de barre à partir de la relation suivante .

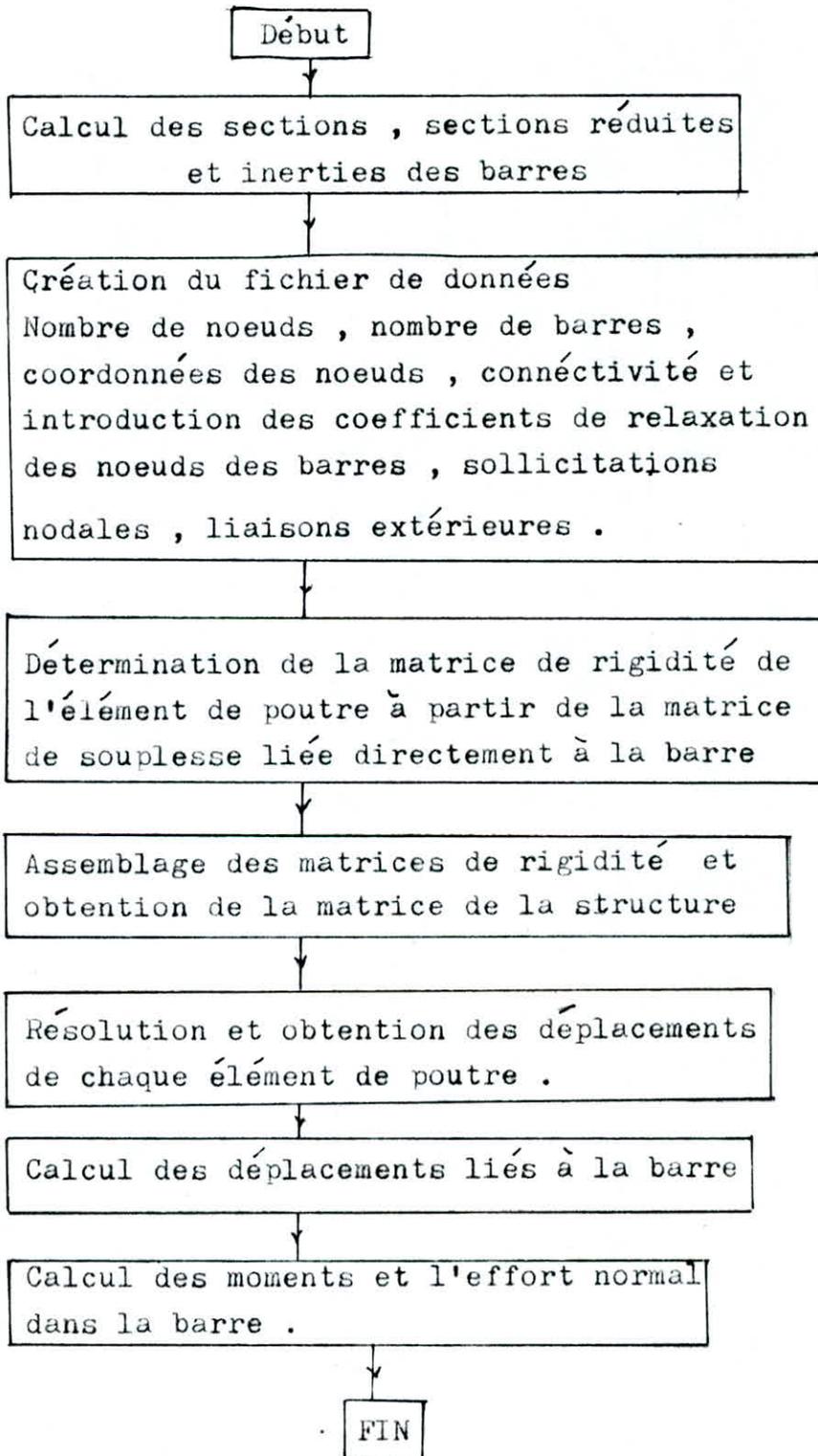
$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta \end{bmatrix} = [B] \times \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

8 - Calcul des efforts :

Pour obtenir les efforts dans les barres , on utilise la relation matricielle suivante .

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N \end{bmatrix} = [R'] \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta \end{bmatrix}$$

9- PROGRAMMATION :



**CHAPITRE**  
**- 5 -**  
**THEORIE**  
**DES**  
**EQUIVALANCES**

## THEORIE DES EQUIVALENCES

Dans ce qui suit , on donne uniquement un petit aperçu sur la méthode , pour plus de détail vous pouvez consulter les annales de M.ABSI (théorie des équivalences) .

### 1)- Introduction :

La théorie des équivalences constitue une approche générale permettant de substituer à l'étude d'un corps chargé celle d'un autre corps fictif plus accessible au calcul . Ce corps fictif peut avoir des caractéristiques et des lois de comportement n'ayant pas nécessairement un sens physique . la condition d'équivalence entre le corps réel et le corps fictif , dit équivalent , se traduit par l'égalité de leur énergies de déformation . L'équivalence sera faite entre un voile (corps réel) et un treilli (corps fictif)

### 2)- Énergie de déformation du corps réel :

Le tenseur de déformation  $e_{ij}$  est défini par l'expression

$$e_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$$

Les coefficients de Lamé :

$$\lambda = \nu E / [(1-\nu)(1+\nu)] \quad \mu = E / 2(1+\nu)$$

Pour un problème plan, l'énergie de déformation se traduit par

$$U_0 = [ e_{11}^2 + e_{22}^2 + 2\nu e_{11} e_{22} + 2(1-\nu) e_{12}^2 ] E / 2(1-\nu^2)$$

### 3)- Énergie de déformation du corps fictif :

L'énergie de déformation de la barre est donnée par l'expression

$$W = E L S \varepsilon^2 / 2$$

on pose :  $\rho = E.L.S$

Le modèle choisi étant un rectangle (Voir fig.-1)

$$W_{AB} = W_{CD} = \rho_{AB} e_{11}^2 / 2$$

$$W_{AC} = W_{BD} = \rho_{AC} e_{22}^2 / 2$$

$$W = 2W_{AB} + 2W_{AC} + W_{AD} + W_{BC}$$

$$W_{AD} = [e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha + 2 e_{12} \sin \alpha \cos \alpha]^2 \rho_{AD} / 2$$

$$W_{BC} = [e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha - 2 e_{12} \sin \alpha \cos \alpha]^2 \rho_{BC} / 2$$

4)- Conditions d'équivalences :

$$\rho_{AB} = \rho_{CD} = [3 - \cot^2 \alpha] A^4 / 2$$

$$\rho_{AC} = \rho_{BD} = [3 - \tan^2 \alpha] A^4 / 2$$

$$\rho_{AD} = \rho_{BC} = A^4 / 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

Dans le cas de contrainte plane  $\nu = 0.333$

Dans le cas de déformation plane  $\nu = 0.25$

5)- Matrice de rigidité d'une barre dans le repère global :

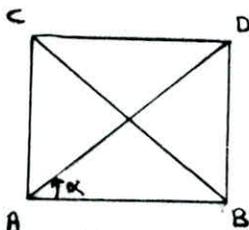
$$[K] = EA/L \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda \mu & -\lambda^2 & -\lambda \mu \\ \lambda \mu & \mu^2 & -\lambda \mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda \mu & \lambda^2 & \lambda \mu \\ -\lambda \mu & -\mu^2 & \lambda \mu & \mu^2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda = \cos \theta \\ \mu = \sin \theta \end{array}$$

6)- Détermination du champ de contraintes dans le corps réel :

$$\sigma_{11} = [e_{11} + \nu e_{22}] E / (1 - \nu^2)$$

$$\sigma_{22} = [\nu e_{11} + e_{22}] E / (1 - \nu^2)$$

$$\tau_{12} = G e_{12}$$



- fig 1 -

**CHAPITRE**  
**- 6 -**  
**METHODE**  
**DES**  
**ELEMENTS**  
**FINIS**

\* Notations utilisées :

u : Déplacement selon ox

v : Déplacement selon oy

$F^e$  : Vecteur force nodale de l'élément

$\delta^e$  : Vecteur déplacement nodal de l'élément

$f(x,y)$  : Fonction d'interpolation des déplacements

$\epsilon$  : Déformation linéaire

$\gamma$  : Déformation angulaire

$\sigma$  : Contrainte normale

$\tau$  : Contrainte tangentielle

E : Module d'Young

$\nu$  : Coefficient de poisson

G : Module de cisaillement

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

t : L'épaisseur de l'élément

a : La longueur de l'élément selon ox

b : La largeur de l'élément selon oy

## NOTIONS DE BASE EN ANALYSE DES STRUCTURES

### A- INTRODUCTION :

#### a)-Connaissances fondamentales nécessaires :

Quelle que soit la cause des forces et des déformations dans une structure, trois conditions doivent être vérifiées . Ce sont :

- 1)-L'équilibre des forces .
- 2)-La compatibilité des déplacements .
- 3)-Les lois de comportement des matériaux .

#### b)-Méthodes d'analyse matricielles :

- 1)-Méthode de rigidité ou des déplacements .
- 2)-Méthode de souplesse ou des forces .
- 3)-Méthode mixte .

Pour la première méthode (méthode de rigidité), les conditions de compatibilité de déplacements sont satisfaites et les équations d'équilibre sont posées et résolues pour obtenir les déplacements nodaux .

#### c)-Principe des travaux virtuels :

Ce principe exprime les relations existant entre l'ensemble des charges extérieures et les forces intérieures correspondantes satisfaisant ensemble à la condition d'équilibre, et l'ensemble des déplacements des noeuds et les déformations correspondantes des différentes parties satisfaisant à la condition de compatibilité .

Ce principe peut être posé en termes généraux de la façon

suivante .

- $W_{ext}$  = Le travail virtuel des charges extérieures
- $W_{int}$  = Le travail virtuel interne absorbé par la structure

$$\Rightarrow \sum F \delta = \int_V \sigma \varepsilon dv$$

$F$  : Représente le système des charges extérieures

$\delta$  : Le déplacement de ces charges

$\sigma$  : Le système des forces internes volumiques

$\varepsilon$  : Les déformations internes de la structure

## B- ELEMENTS FINIS RECTANGULAIRES POUR L'ETUDE DE L'ELASTICITE PLANE :

### \* CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE RECTANGULAIRE

ETAPE I : Choisir un système de coordonnées convenable et numéroté les noeuds .

Les caractéristiques de l'élément rectangulaire sont :

- a : La longueur de l'élément selon  $ox$ . (voir fig I-1)
- b : La largeur de l'élément selon  $oy$ .

Pour un problème d'élasticité plane , en chaque noeud on a deux degrés de liberté, ceci implique que pour chaque élément existe huit degrés de liberté .

Nombre de noeuds par élément X nombre de degré de liberté par noeud c.a.d 4 (noeuds) X 2 (degrés de liberté) = 8

$(u_1, v_1)$  ,  $(u_2, v_2)$  ,  $(u_3, v_3)$  ,  $(u_4, v_4)$  (voir fig I-2)

Et les forces correspondantes sont:

$(F_{x1}, F_{y1})$  ,  $(F_{x2}, F_{y2})$  ,  $(F_{x3}, F_{y3})$  ,  $(F_{x4}, F_{y4})$ .

Les vecteurs des déplacements et des forces pour l'élément sont

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \\ u4 \\ v4 \end{Bmatrix} \quad (1) \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} Fx1 \\ Fy1 \\ Fx2 \\ Fy2 \\ Fx3 \\ Fy3 \\ Fx4 \\ Fy4 \end{Bmatrix} \quad (2) \quad \{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (3)$$

$[K^e]$ : matrice de rigidité de l'élément

ETAPE II : Choisir la fonction ( $f(x,y)$ ) qui définit le déplacement ( $\delta(x,y)$ ) en chaque point de l'élément :

En tout point de l'élément l'état de déplacement peut être représenté par deux composantes .

$$\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Or l'élément à huit degrés de liberté ceci implique qu'on doit avoir huit coefficients inconnus dans le polynôme représentant le modèle de déplacement par les deux équations suivantes .

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \quad (4)$$

si  $x = \text{conste}$  ceci implique que  $u$  et  $v$  varient linéairement avec  $y$ .

si  $y = \text{conste}$  ceci implique que  $u$  et  $v$  varient linéairement en fonction de  $x$ .

$$\text{Pour } y = 0 \implies \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x \end{aligned} \quad (\text{voir fig II-1})$$

Puisque des déplacements identiques sont imposés aux noeuds c'est-à-dire que la compatibilité des déplacements nodaux est assurée, les mêmes déplacements existent dans des éléments adjacents pour tous les points le long de l'interface .

La continuité aux noeuds implique que:  $v_{4A} = v_{1B}$  et  $v_{3A} = v_{2B}$   
 (voir fig II-2)

On peut écrire l'équation (4) sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \{\delta(x,y)\} = [f(x,y)]\{\alpha\} \quad (6)$$

ETAPE III : Exprimer l'état des déplacements  $\{\delta(x,y)\}$  en chaque point de l'élément en fonction des déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$ .

Noeud  $i$  : Pour  $x = x_i, y = y_i, i = 1, 2, 3, 4$

$$[f(x_i, y_i)] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & x_i y_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\{\delta^e\} = \{\delta_i\}$$

$$\{\delta^e\} = [f(x_i, y_i)]\{\alpha\} = [A]\{\alpha\} \quad i = 1, 4$$

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (8)$$

Avec :

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/a & 0 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/b & 0 \\ 1/ab & 0 & -1/ab & 0 & 1/ab & 0 & -1/ab & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a & 0 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/b \\ 0 & 1/ab & 0 & -1/ab & 0 & 1/ab & 0 & -1/ab \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \delta(x,y) = [f(x,y)][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (10)$$

ETAPE IV : Relier les déformations  $\{\epsilon(x,y)\}$  en chaque point aux déplacements  $\{\delta(x,y)\}$ , et donc aux déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$ .

La relation entre les déformations et les déplacements en tout

point pour un problème d'élasticité plane est indépendant de la forme de l'élément choisi .

$$\{\epsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Par dérivation de l'équation (4) on obtient .

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \epsilon_y &= \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \gamma_{xy} &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{aligned} \quad (12)$$

On constate que  $x$  varie linéairement en fonction de  $y$  et indépendamment de  $x$ , tandis que  $y$  varie linéairement en fonction de  $x$ , et  $xy$  varie linéairement en  $x$  et  $y$  à la fois (voir fig IV-1 pour la variation de  $\epsilon_x$ ).

Sous forme matricielle on peut écrire .

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\text{Donc } \{\epsilon(x,y)\} = [C]\{\alpha\} \quad (14)$$

A partir de (8) on peut obtenir l'équation suivante .

$$\{\epsilon(x,y)\} = [C][A]^{-1}\{\delta^e\} = [B]\{\delta^e\}, \text{ avec } [B] = [C][A]^{-1}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -1/a+y/ab & 0 & 1/a-y/ab & 0 & y/ab & 0 & -y/ab & 0 \\ 0 & -1/b+x/ab & 0 & -x/ab & 0 & x/ab & 0 & 1/b-x/ab \\ -1/b+x/ab & -1/a+y/ab & -x/ab & 1/a-y/ab & x/ab & y/ab & 1/b-x/ab & -y/ab \end{bmatrix}$$

La matrice  $[B]$  relie les déformations en n'importe quel point avec les déplacements nodaux .

ETAPE V : Relier les contraintes internes  $\{\sigma(x,y)\}$  aux déformations  $\{\epsilon(x,y)\}$  et aux déplacements nodaux .

Pour un problème plan ,les composantes des contraintes et des déformations sont liées par la matrice  $[D]$  tel que .

$$\{\sigma(x,y)\} = [D]\{\epsilon(x,y)\} \quad (15)$$

Les relations entre les contraintes et déformations sont données par :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu \sigma_y/E - \nu \sigma_z/E \\ \epsilon_y &= \sigma_y/E - \nu \sigma_x/E - \nu \sigma_z/E \\ \epsilon_z &= \sigma_z/E - \nu \sigma_x/E - \nu \sigma_y/E \end{aligned} \quad (16)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G = 2(1+\nu)\tau_{xy}/E$$

Dans le cas de contrainte plane  $\sigma_z = 0$  .

$$\text{D'où} \quad \{\epsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = 1/E \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

En arrangeant l'équation (17) on obtient :

$$\{\sigma(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Dans le cas de déformation plane  $\epsilon_z = 0$  .On élimine  $\sigma_z$  et on resoud en  $\sigma_x$  ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Alors la matrice  $[D]$  peut être exprimée sous la forme suivante

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

Pour des contraintes planes on a .

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = E/(1-\nu^2) \\ d_{12} &= d_{21} = \nu E/(1-\nu^2) \\ d_{33} &= E/2(1+\nu) \end{aligned}$$

Et pour des déformations planes on a .

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu) \\ d_{12} &= d_{21} = \nu E/(1+\nu)(1-2\nu) \\ d_{33} &= E/2(1+\nu) \end{aligned}$$

De l'équation  $\{\sigma(x,y)\} = [D]\{\epsilon(x,y)\}$

et de l'équation  $\{\epsilon(x,y)\} = [B]\{\delta^e\}$  , on peut déduire la relation suivante .  $\{\sigma(x,y)\} = [D][B]\{\delta^e\}$

ETAPE VI : a)-Remplacer les contraintes internes  $\{\sigma(x,y)\}$  par des forces nodales statiquement équivalentes  $\{F^e\}$ .

On utilise le principe des travaux virtuels pour déterminer l'ensemble des charges nodales .

Durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément (le travail extérieur total des charges = travail interne des contraintes ) .  $W_{ext} = W_{int}$

On choisit un ensemble arbitraire des déplacements nodaux représenté par le vecteur  $\{\delta^{*e}\}$  où :

$$\{\delta^{*e}\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^{*e}\} \\ \{\delta_2^{*e}\} \\ \vdots \\ \{\delta_n^{*e}\} \end{Bmatrix}$$

Le travail extérieur  $W_{ext}$  des forces nodales est donné par :

$$W_{ext} = \{\delta_1^{*e}\} \{F_1^e\} + \{\delta_2^{*e}\} \{F_2^e\} + \dots + \{\delta_n^{*e}\} \{F_n^e\}$$

Si les déplacements arbitraires imposés produisent des déformations  $\{\epsilon^*(x,y)\}$  aux points de l'élément où les contraintes réelles sont les  $\{\sigma(x,y)\}$ , alors le travail interne par unité de volume est donné par .

$$W_{int} = \{\epsilon^*(x,y)\}^T \{\sigma(x,y)\}$$

Pour obtenir le travail interne total, on intègre sur le volume total de l'élément c.à.d

$$\int_V W_{int} dv = \int_V \{\epsilon^*(x,y)\}^T \{\sigma(x,y)\} dv$$

$$\text{Or } \{\epsilon^*(x,y)\} = [B] \{\delta^e\}$$

$$\{\epsilon^*(x,y)\}^T = \{\delta^e\}^T [B]^T$$

$$\{\sigma(x,y)\} = [D][B]\{\delta^e\}$$

Finalement on obtient :

$$\int_V W_{int} dv = \{\delta^e\}^T [B]^T [D][B] \{\delta^e\} dv .$$

On choisit  $\{\delta^e\}$  arbitrairement, il est commode de supposer les déplacements nodaux égaux à l'unité on obtient

$$\{F^e\} = \left[ \int_V [B]^T [D] [B] dv \right] \{\delta^e\}$$

b)-Relier les forces nodales aux déplacements nodaux, et obtenir la matrice de rigidité de l'élément  $[K^e]$  .

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\}$$

$$\{F^e\} = \left[ \int_V [B]^T [D] [B] dv \right] \{\delta^e\}$$

Par identification on obtient :

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D][B] dv$$

Pour un élément qui a une épaisseur constante (exp : voile )

$$[K^e] = t \int_S [B]^T [D][B] ds$$

on pose  $p = a/b$   $p^{-1} = b/a$

$[K_e] =$

- 57 -

$4d_{11}P^{-1} + 4d_{33}P$	$3d_{21} + 3d_{33}$	$-4d_{11}P^{-1} + 2d_{33}P$	$3d_{21} - 3d_{33}$	$-2d_{11}P^{-1} - 2d_{33}P$	$-3d_{21} - 3d_{33}$	$2d_{11}P^{-1} - 4d_{33}P$	$-3d_{21} + 3d_{33}$
	$4d_{22}P + 4d_{33}P^{-1}$	$-3d_{21} + 3d_{33}$	$2d_{22}P - 4d_{33}P^{-1}$	$-3d_{21} - 3d_{33}$	$-2d_{22}P - 2d_{33}P^{-1}$	$3d_{21} - 2d_{33}$	$-4d_{22}P + 2d_{33}P^{-1}$
		$4d_{11}P^{-1} + 4d_{33}P$	$-3d_{21} - 3d_{33}$	$2d_{11}P^{-1} - 4d_{33}P$	$3d_{21} - 3d_{33}$	$-2d_{11}P^{-1} - 2d_{33}P$	$3d_{21} + 3d_{33}$
			$4d_{22}P + 4d_{33}P^{-1}$	$-3d_{21} + 3d_{33}$	$-4d_{22}P - 2d_{33}P^{-1}$	$3d_{21} + 3d_{33}$	$-2d_{22}P - 2d_{33}P^{-1}$
				$4d_{11}P^{-1} + 4d_{33}P$	$3d_{21} + 3d_{33}$	$-4d_{11}P^{-1} + 2d_{33}P$	$3d_{21} - 3d_{33}$
					$4d_{22}P + 4d_{33}P^{-1}$	$-3d_{21} + 3d_{33}$	$2d_{22}P - 4d_{33}P^{-1}$
						$4d_{11}P^{-1} + 4d_{33}P$	$-3d_{21} - 3d_{33}$
							$4d_{22}P + 4d_{33}P^{-1}$

SYMETRIQUE

$[H] = \frac{1}{ab}$

$-d_{11}(b-y)$	$-d_{22}(a-x)$	$d_{11}(b-y)$	$-d_{21}x$	$d_{11}y$	$d_{21}x$	$-d_{11}y$	$d_{21}(a-x)$
$-d_{21}(b-y)$	$-d_{22}(a-x)$	$d_{21}(b-y)$	$-d_{22}x$	$d_{21}y$	$d_{22}x$	$-d_{21}y$	$d_{22}(a-x)$
$-d_{33}(a-x)$	$-d_{33}(b-y)$	$-d_{33}x$	$d_{33}(b-y)$	$d_{33}x$	$d_{33}y$	$d_{33}(a-x)$	$-d_{33}y$

ETAPE VII : Etablir la matrice H reliant les contraintes avec les déplacements nodaux .

$$\begin{aligned} \{\sigma(x,y)\} &= [D][B]\{\delta^e\} \\ \{\sigma(x,y)\} &= [H]\{\delta^e\} \end{aligned}$$

On deduit que  $[H] = [D][B]$

De cette façon on peut déterminer les contraintes en chacun des quatre noeuds de l'élément , elles peuvent être représentées

par  $\{\sigma^e\}$  ou :

$$\{\sigma^e\} = \{\sigma(x_i, y_i)\} \quad i = 1, 2, 3, 4 = \begin{bmatrix} [H(x_1, y_1)] \\ [H(x_2, y_2)] \\ [H(x_3, y_3)] \\ [H(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \{\delta^e\}$$

$$\implies \{\sigma^e\} = [H^e]\{\delta^e\}$$

$[H^e]$  : est la matrice pour un élément rectangulaire dans le cas d'un problème d'élasticité plane .

\* RESUME DES ETAPES D'OBTENTION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

1) - Choix d'un système de coordonnées convenable et numérotation des noeuds .

2) -  $\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)]\{\alpha\}$

3) -  $\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)][A]^{-1}\{\delta^e\}$

4) -  $\{\epsilon(x,y)\} = [C]\{\alpha\} = [B]\{\delta^e\}$

5) -  $\{\sigma(x,y)\} = [D][B]\{\delta^e\} = [H]\{\delta^e\}$

6) -  $\{\sigma(x,y)\} = [D]\{\epsilon(x,y)\}$

7) -  $\{F^e\} = \int_V [B]^T [D][B] dv \{\delta^e\}$

8) -  $[K^e] = \int_V [B]^T [D][B] dv$

C -ASSEMBLAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE LA STRUCTURE [K] :

Dés qu'on établit les matrices de rigidité  $[K^e]$  de tous les éléments , il est nécessaire de les assembler dans la matrice de rigidité de toute la structure [K].

Le procédé est simple , on place la matrice de rigidité de chaque élément dans le bloc qui lui correspond de la matrice de rigidité totale , ensuite on additionne toutes ces matrices pour trouver la matrice de rigidité totale de la structure .

Supposons qu'il existe  $n_t$  noeuds dans la structure , puisqu'il y a deux degrés de liberté par noeud (u,v), la matrice de la structure est d'ordre  $2 \times n_t$  . Les vecteurs des déplacements nodaux et le vecteur des charges nodales auront chacun  $n_t$  composantes .

$$\begin{Bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \end{Bmatrix}_{i=1, n_t} = \begin{bmatrix} \text{Matrice de rigidité} \\ K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}_{i=1, n_t}$$

Caractéristiques de la matrice de rigidité de la structure :

-Symétrique

-D'ordre  $2n_t \times 2n_t$

-Les termes des angles en bas à gauche et en haut à droite de K sont tous nuls , les termes non nuls se trouvant dans une bande de chaque côté de la diagonale principale .(voir fig C1)

#### D)-CONDITIONS AUX LIMITES :

Il est important de s'assurer des conditions aux limites avant de mettre en oeuvre la résolution sous peine de rendre le problème insoluble . En général la structure s'appuie sur plusieurs noeuds pour lesquels certains déplacements sont imposés .

Pour la résolution du problème il existe différentes méthodes parmi lesquelles on a choisi la méthode suivante : Multiplier les termes diagonaux de  $[K]$  correspondant aux déplacements fixés , soit  $k_{ii}$  , par un grand nombre tel que  $10^{20}$  . Par exemple imposons au déplacement  $x$  du noeud  $i$  d'être nul , c'est-à-dire qu'il faut que l'on ait  $u_i = 0$  . Développons alors l'équation pour la ligne  $i$  :

$$F_{xi} = k_{i1} u_1 + k_{i2} v_1 + k_{i3} u_2 + \dots + k_{ii} u_i + \dots + k_{in} v_n$$

On multiplie alors le terme diagonal  $k_{ii}$  par  $10^{20}$  .

$$F_{xi} = k_{i1} u_1 + k_{i2} v_1 + \dots + (10)^{20} k_{ii} u_i + \dots + k_{in} v_n$$

ainsi

$$u_i = \frac{F_{xi} - (k_{i1} u_1 + k_{i2} v_1 + \dots + k_{in} v_n)}{(10)^{20} k_{ii}}$$

Puisque le terme diagonal est maintenant beaucoup plus grand que les termes non diagonaux , la valeur du déplacement  $u_i$  est très proche de zéro .

E)- Résolution et obtention des déplacements :

Vu le nombre important des équations obtenues lors de la formation de la matrice de rigidité de la structure , il est difficile de résoudre ce système avec les moyens habituels et les méthodes classiques . Cependant on pourra remédier à ce problème en se référant à des méthodes numériques qui peuvent être programmées sur ordinateur telles que :

- Elimination de GAUSS
- CHOLESKY
- Méthode itérative de GAUSS-SEIDEL

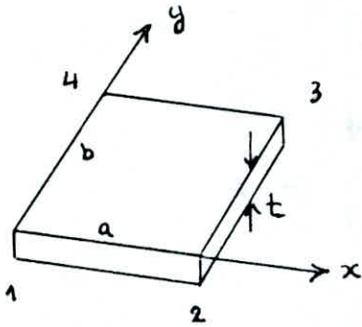


fig I-1

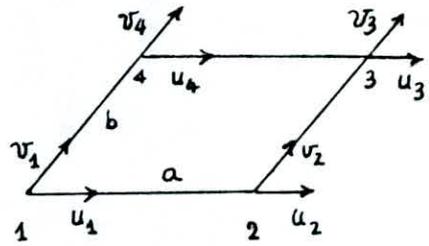


fig I-2

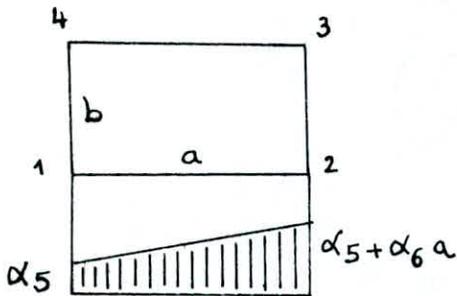


fig II-1

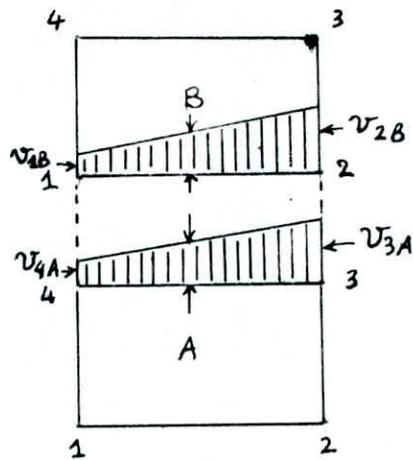


fig II-2

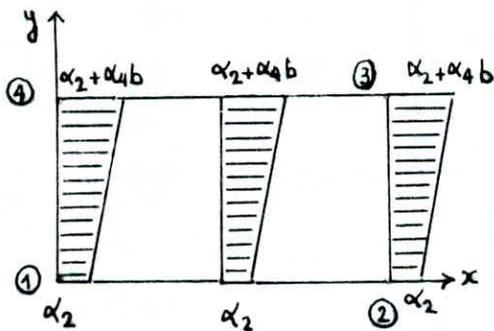


fig IV-1

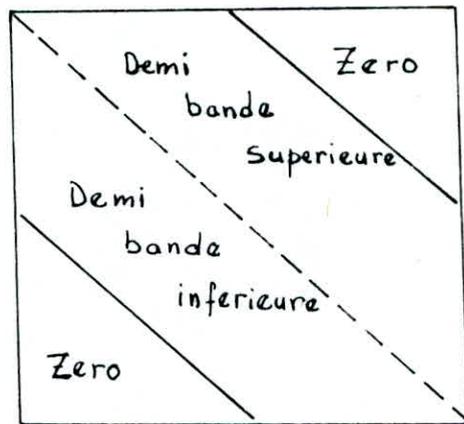


fig c-1

F)- PROGRAMMATION :

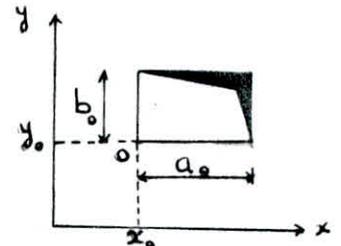
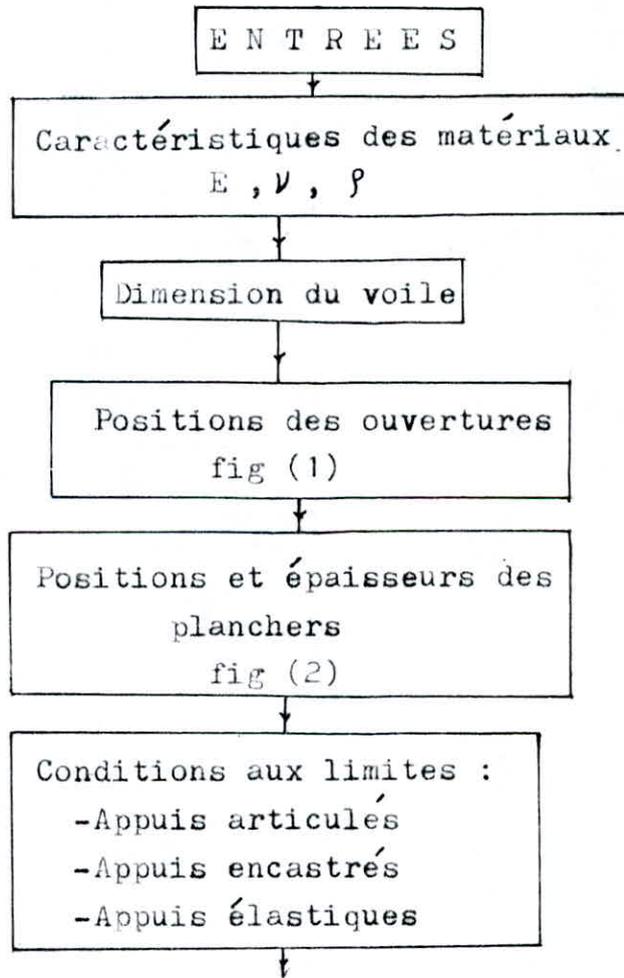
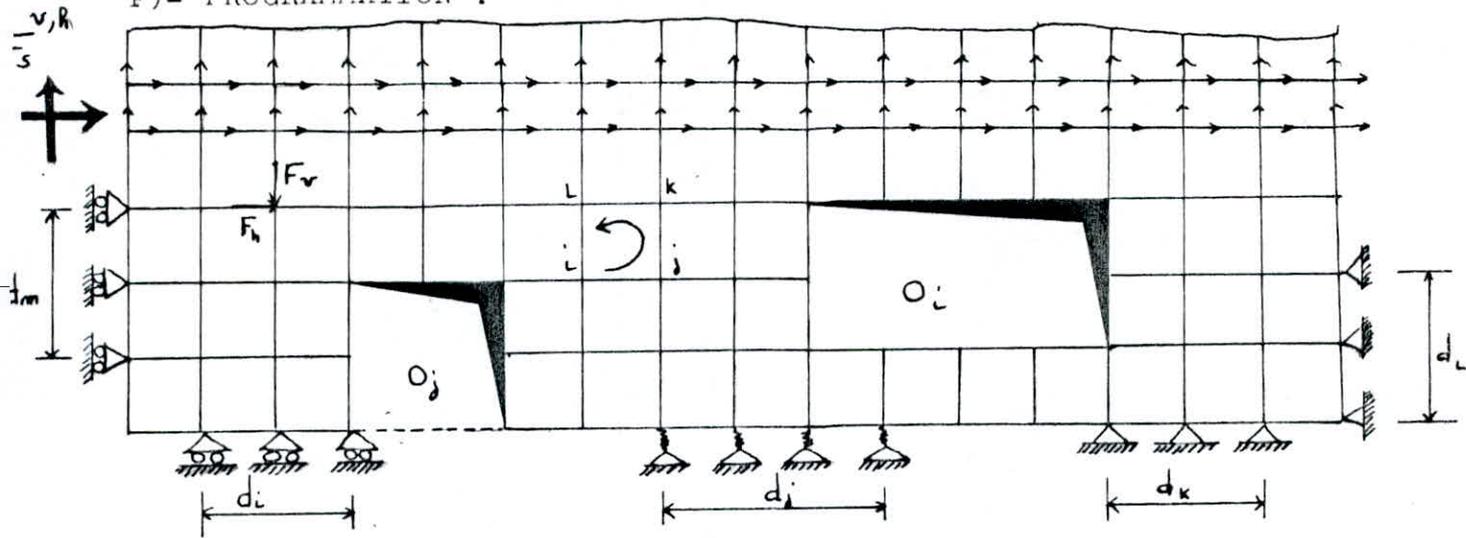


fig (1)

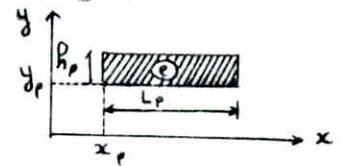
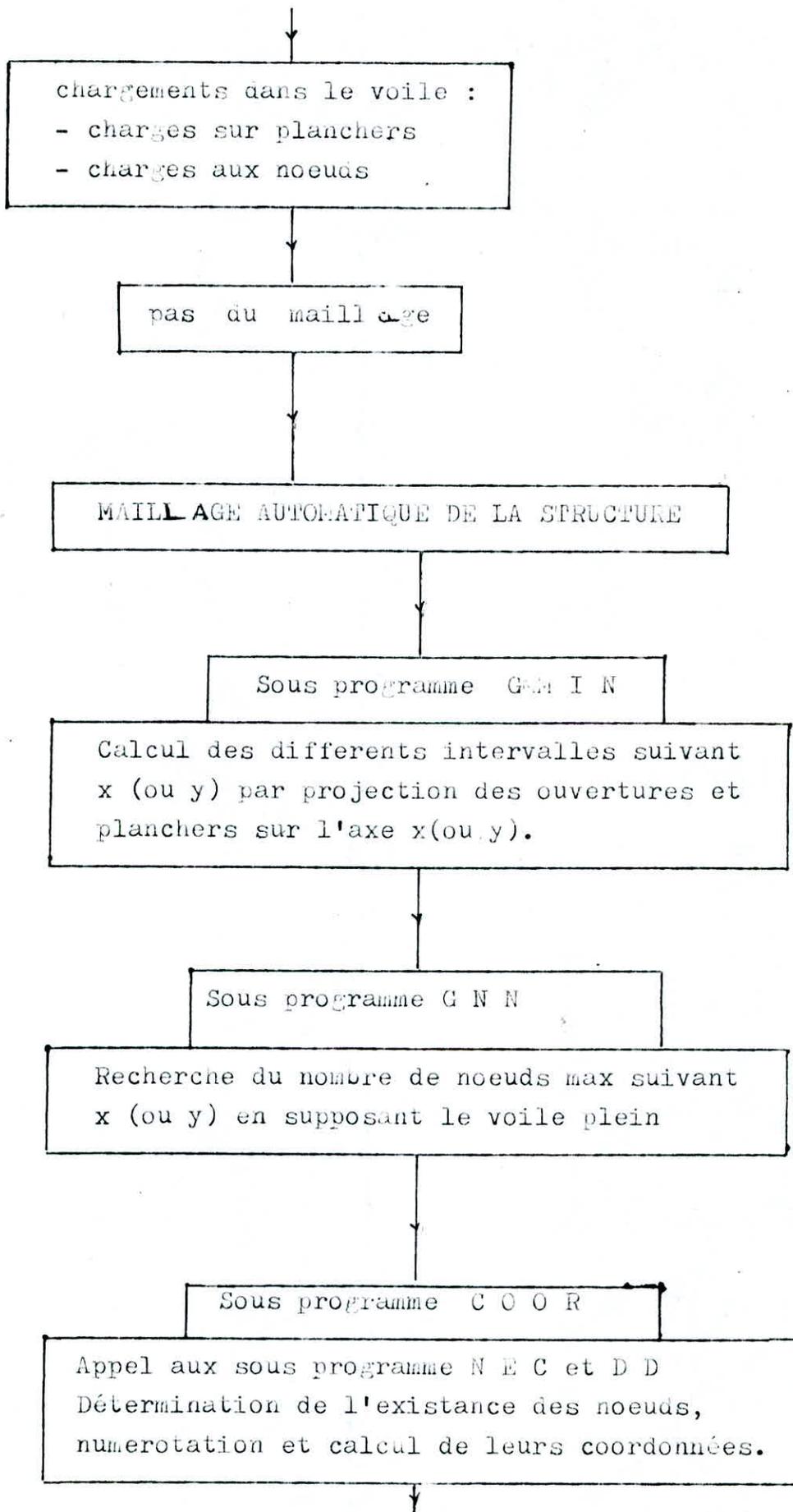


fig (2)



Sous programme C O N D

Prise en compte les conditions aux limites:

- CAS Général : le noeud repéré par l'utilisateur
- CAS Particulier : voile reposant sur le (ou les) bords , ou une partie du bord :

après le choix du type d'appui la même condition aux limites est prise pour tous les noeuds du même bord.

Sous programme F O R C E

Introduction du chargement :

- Cas général: le noeud est repéré par l'utilisateur qui introduit le chargement désiré.
- cas particulier : Introduction de force horizontale et verticale sismiques par niveaux.

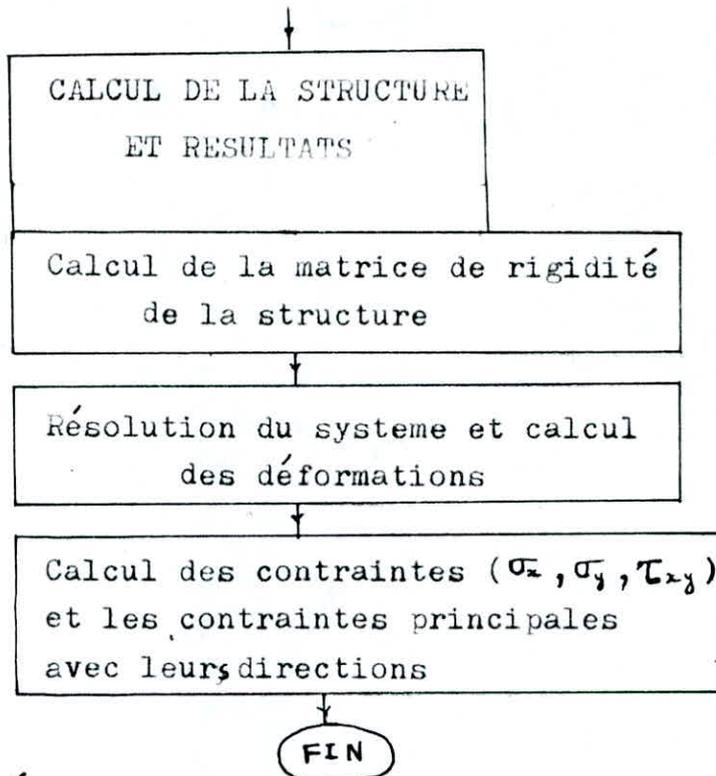
Elles sont repercutées sur les noeuds de tout le plancher correspondant.

Sous programme C O N E C

Recherche de connectivités de chaque élément  
transformation du poids propre de l'élément en charges nodales

transformation des charges du planchers en charges nodales

NB. l'élément appartenant au plancher sera calculé en déformation plane et dans le cas contraire, en contrainte plane.



-Cas traités :

1-Problème de vérification : exemple poutre , barre en (traction , compression ) , etc ...

2-Voile plein ou avec ouvertures quelconques avec de différentes formes de planchers .

3-Peut être utilisé pour un calcul d'un portique .

-Avantages du maillage automatique introduit dans le programme :

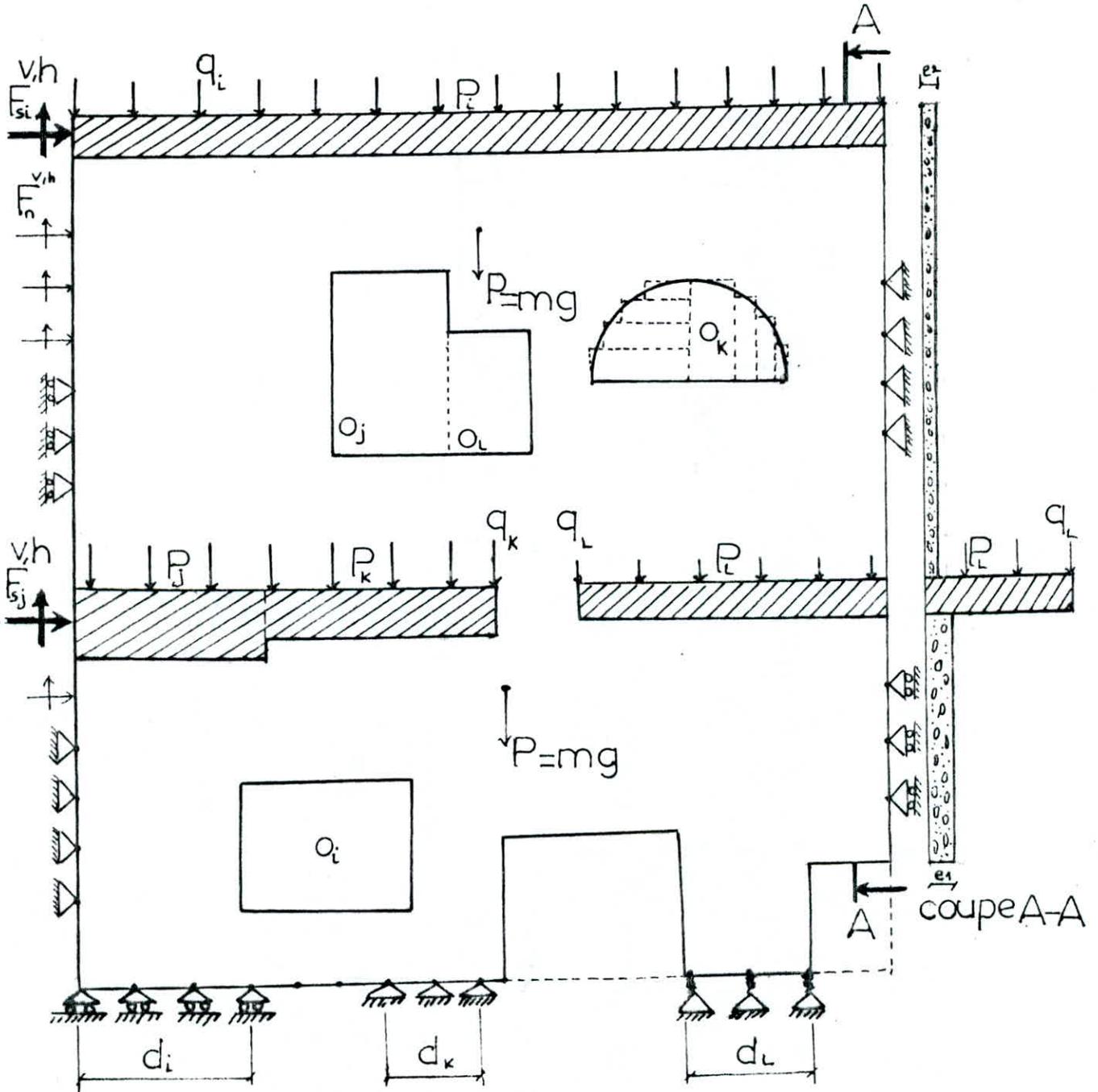
1-On peut traiter des problèmes avec un nombre illimité de noeuds (la seule limitation étant due à la mémoire dont dispose l'ordinateur)

2-Gain de temps avec le fichier de données

3-Moins de risque d'erreur dans l'introduction des données

4-Gain de temps concernant la vérification de l'introduction de données .

Cas complexe de voile



Application de la théorie des équivalences  
et de la méthode des éléments finis au calcul d'une  
plaque

L'exemple traité est une plaque carrée encastree le long d'un  
cote et chargee uniformement sur le cote oppose .

Le probleme est considere comme un probleme de deformation  
planes. On designe par  $e$  l'epaisseur de la plaque .

Les dimensions de la plaque sont presentees sur la fig(1)

Modele equivalent :

-Nous prendrons comme modele equivalent un treillis articule  
a maille carree , nous decomposons la plaque en 16 carres .

-La charge uniforme est repartie aux noeuds comme indique  
sur la fig(2 et 3)

-L'encastrement le long de AB impose des deplacements nuls  
aux noeuds 1,2,3,4,5

-Dans le cas des deformations planes  $\nu = 0.25$  ,  $\lambda = \mu = 0.4E$

-Le module d'Young est pris egal a 1 pour la plaque et les  
barres equivalentes .

-Les resultats de l'exemple sont presentes sous forme de  
courbes sur les fig 4,5,6,7,8, page 70 .

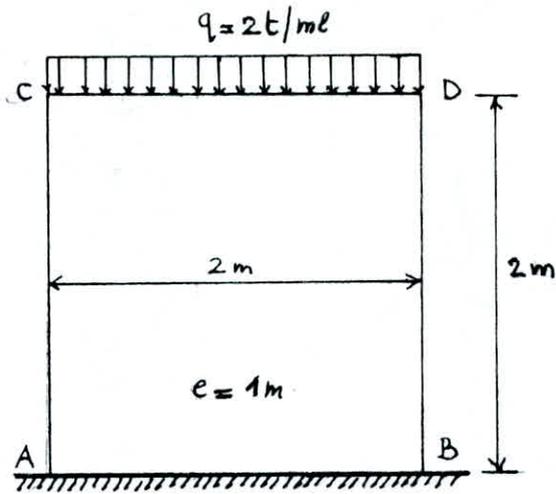


fig (1)

Modèle pour la  
théorie des  
équivalences

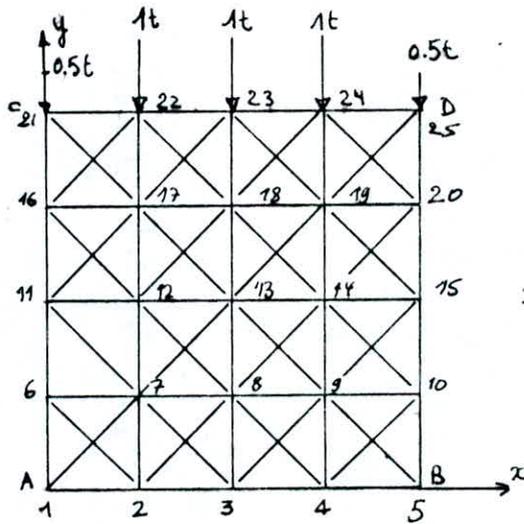


fig (2)

Modèle pour la  
méthode des éléments  
finis

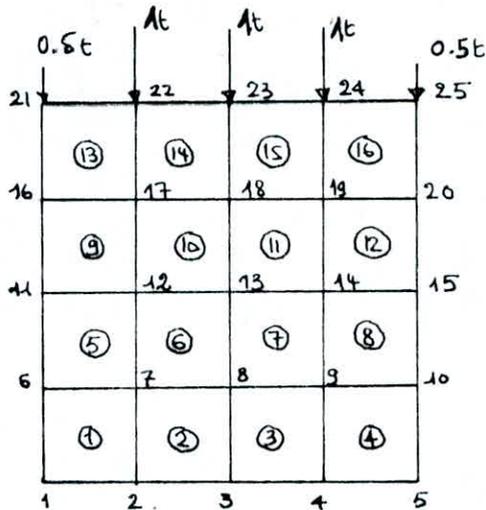
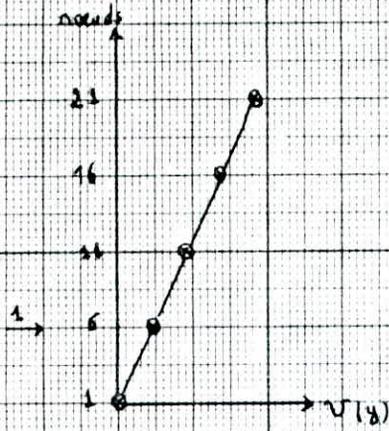


fig (3)

Deplacements

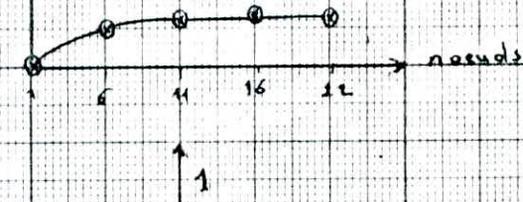
x Elements finis

O Theorie d'equivalence



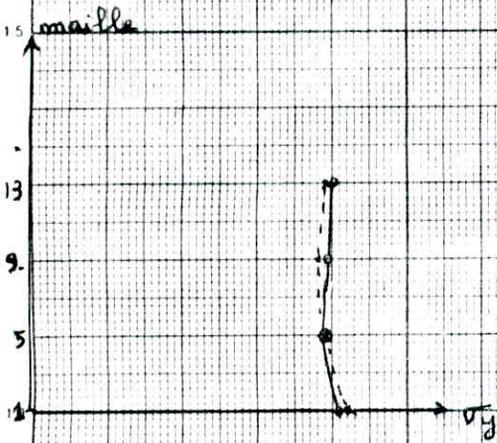
-fig 4-

U(x)

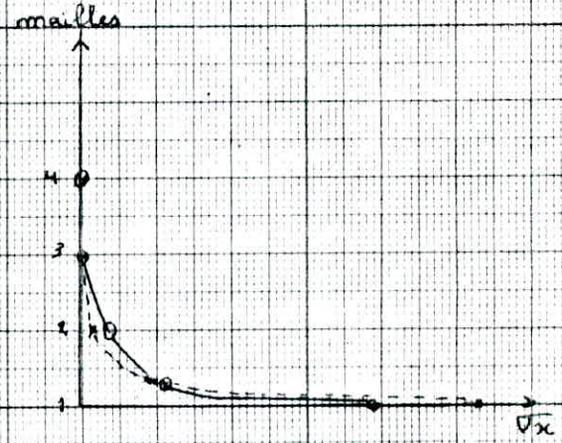


-fig 5-

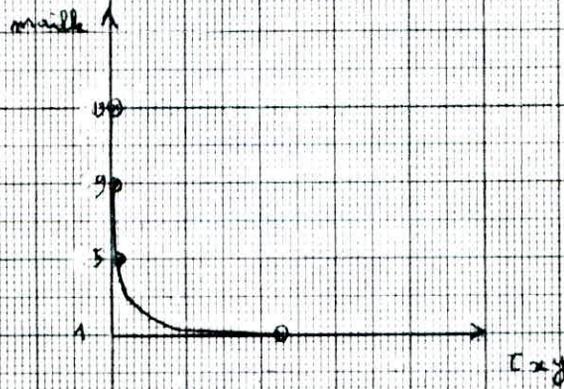
Contraintes



-fig 6-



-fig 7-



-fig 8-

**CHAPITRE**  
**- 7 -**  
**EXEMPLES**  
**NUMERIQUES**

## EXEMPLES NUMERIQUES

a)- Voile R+5 avec  $\beta = 15\%$  :

L'exemple traité est un voile à 2 files d'ouvertures, encasturé à la base, soumis à un chargement triangulaire comme il est montré sur la fig (1).

$$H = 19.2 \text{ m} , h = 3.2 \text{ m} , h_1 = 0.8 \text{ m} , E = 3.78 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$E' = 3.78 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2 , 2c_1 = 2c_2 = 8.1 \text{ m} , \Omega_1 = \Omega_3 = 0.8 \text{ m}^2 , \Omega_2 = 1.64 \text{ m}^2$$

$$I_1 = I_3 = 1.067 \text{ m}^4 , I_2 = 9.189 \text{ m}^4 , 2a_1 = 2a_2 = 2 \text{ m}$$

$$J_1 = J_2 = 0.009 \text{ m}^4 , G+G_0 = D = 8.1 \text{ m} , m_1 = m_2 = 6.48 \text{ m}^3 , I = 116.2 \text{ m}^4$$

$$\omega = 0.22 , \alpha = \omega H = 4.24$$

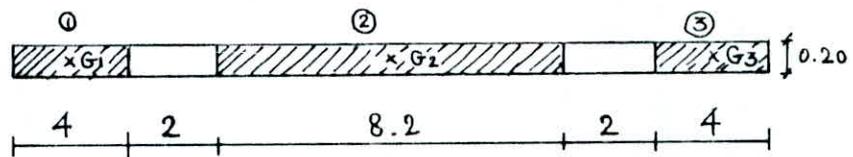
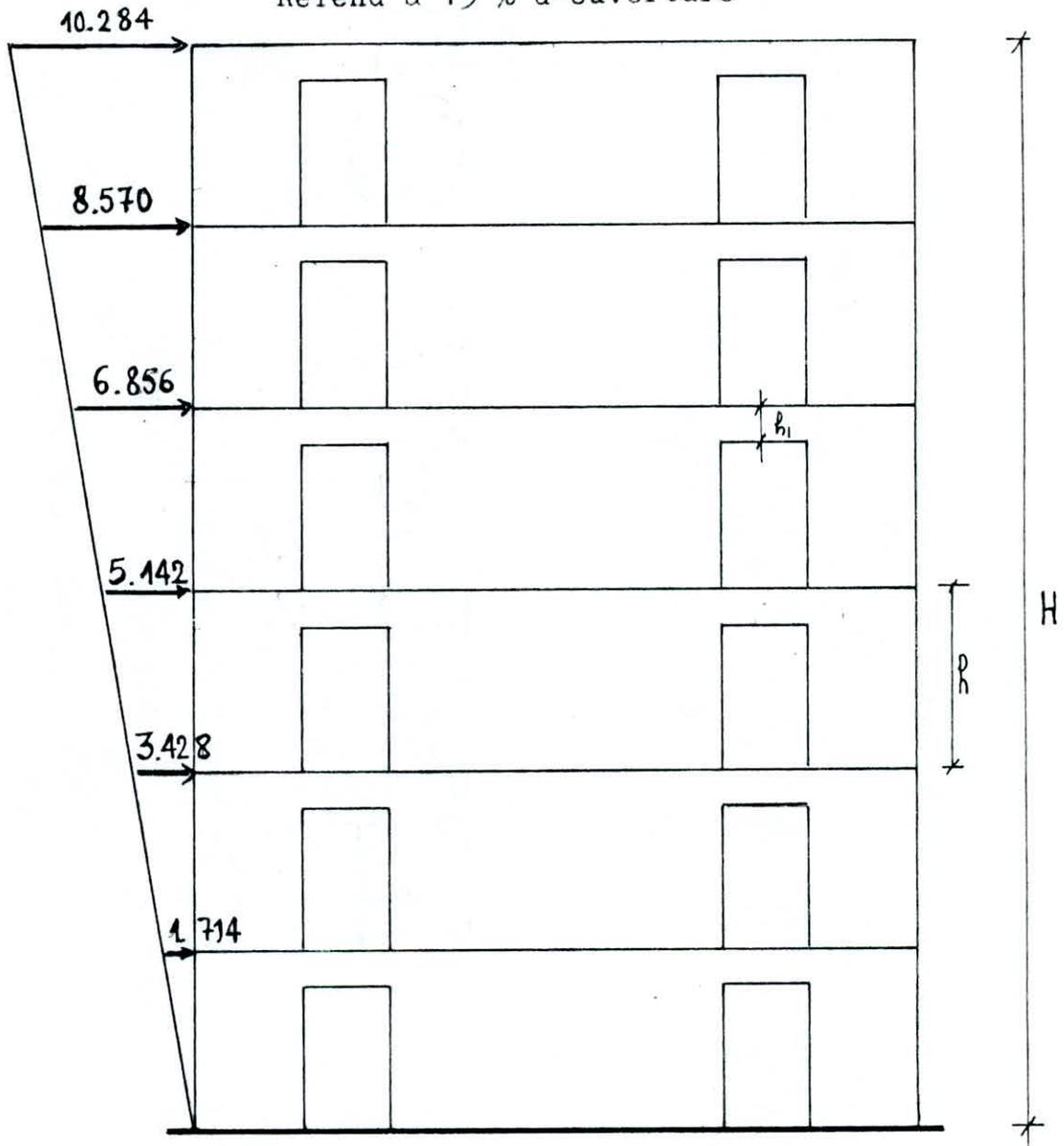
Séisme à la base :  $V = 36 \text{ t}$

Pour cet exemple, les résultats donnés par les différentes méthodes sont comparables (10 à 15 % de différence).

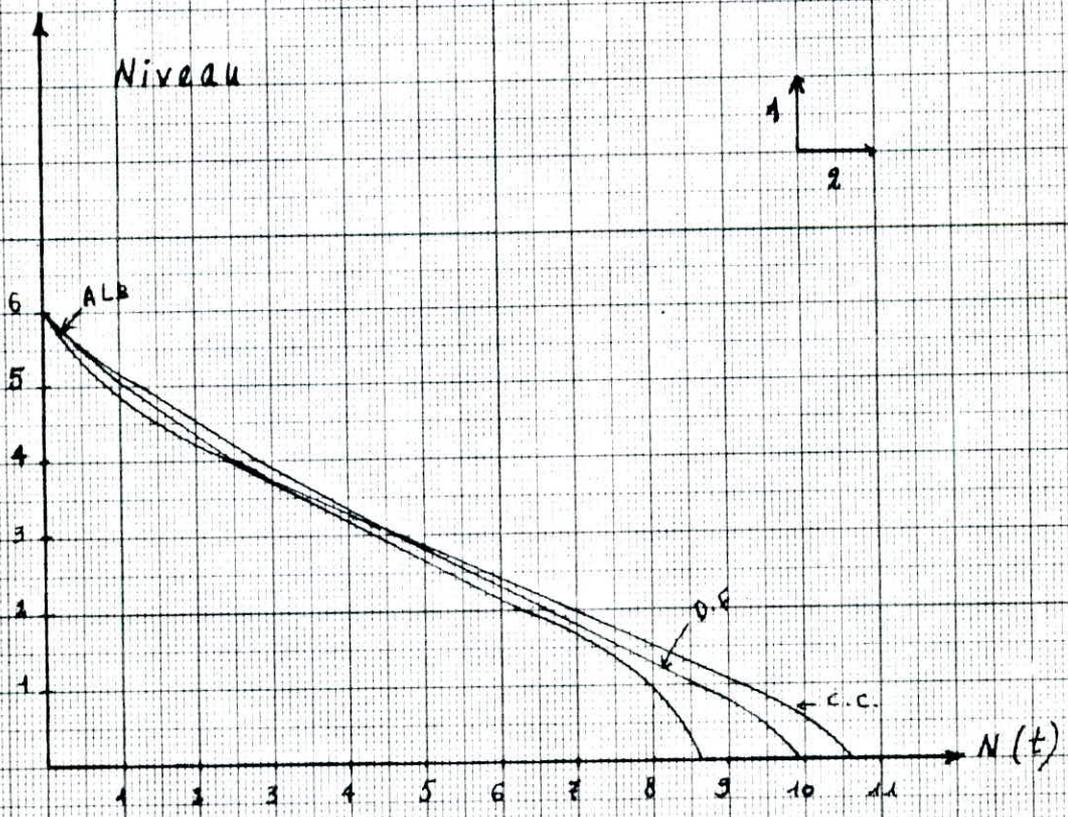
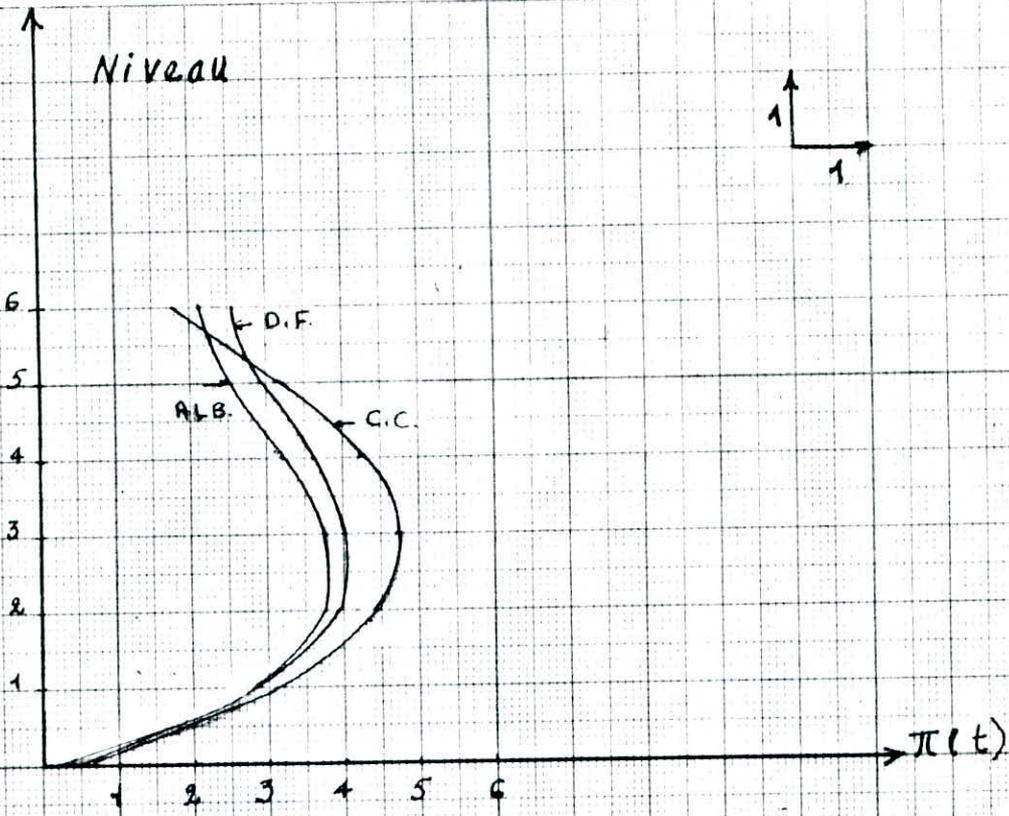
Concernant les inerties équivalentes, les résultats d'ALBIGES chutent de 35 % par rapport aux deux autres méthodes.

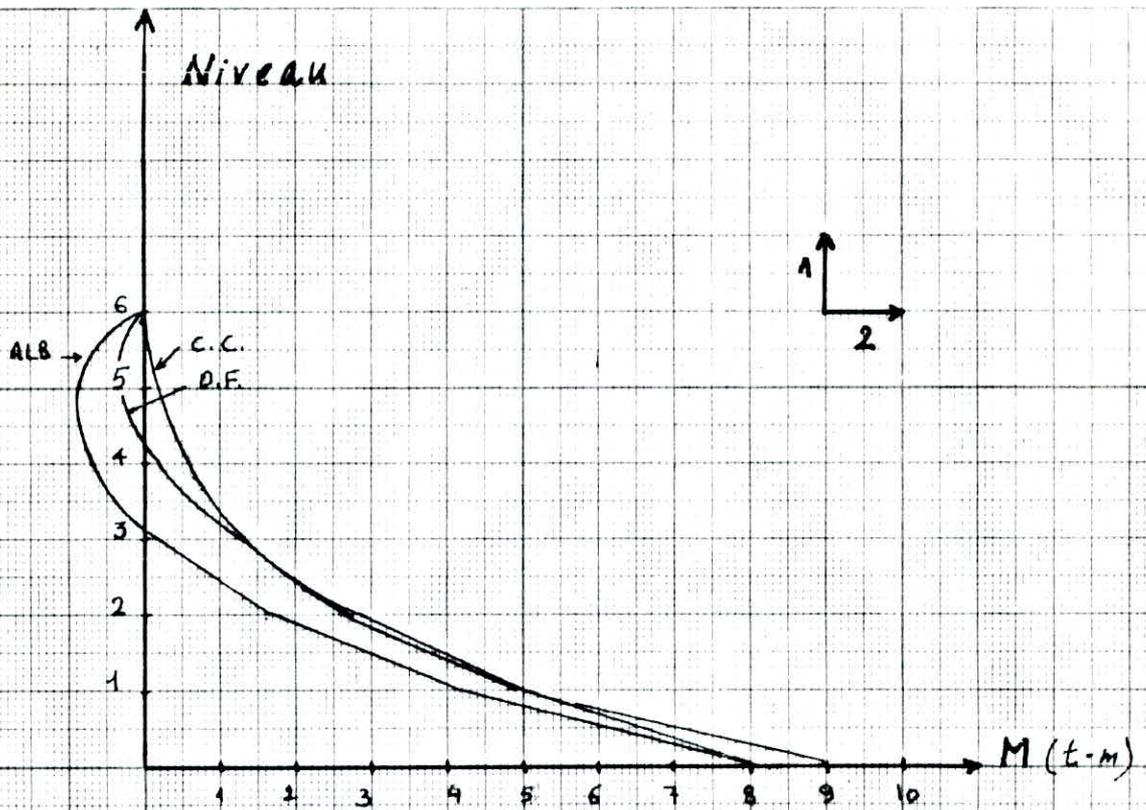
De plus, nous avons constaté que même pour un pourcentage d'ouverture de 15 %, le voile avec ouverture ne peut être assimilé à un voile plein.

Refend à 15 % d'ouverture



fig(1)





Méthode	$I_e$ ( $m^4$ )	$f$ ( cm )
Différences finies	64.73	0.021
Charge concentrée	52.30	0.027
Albiges	30.09	0.024

b)- Refend R+5 avec  $\beta = 80 \%$  :

Données :  $h_1 = 0.3 \text{ m}$  ,  $2c_1 = 2c_2 = 9.8 \text{ m}$  ,  $2a_1 = 2a_2 = 9 \text{ m}$

$\Omega_1 = \Omega_2 = 0.12 \text{ m}^2$  ,  $\Omega_2 = 0.2 \text{ m}^2$  ,  $I_1 = I_3 = 3.6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  ,  $I_2 = 16.67 \times 10^{-3} \text{ m}^4$

$J_1 = J_2 = 0.00045 \text{ m}^4$  ,  $I = 23.07 \text{ m}^4$  ,  $m_1 = m_2 = 0.1364 \text{ m}^3$

$\omega = 0.13$  ,  $\alpha' = 2.62$

Méthodes utilisées :

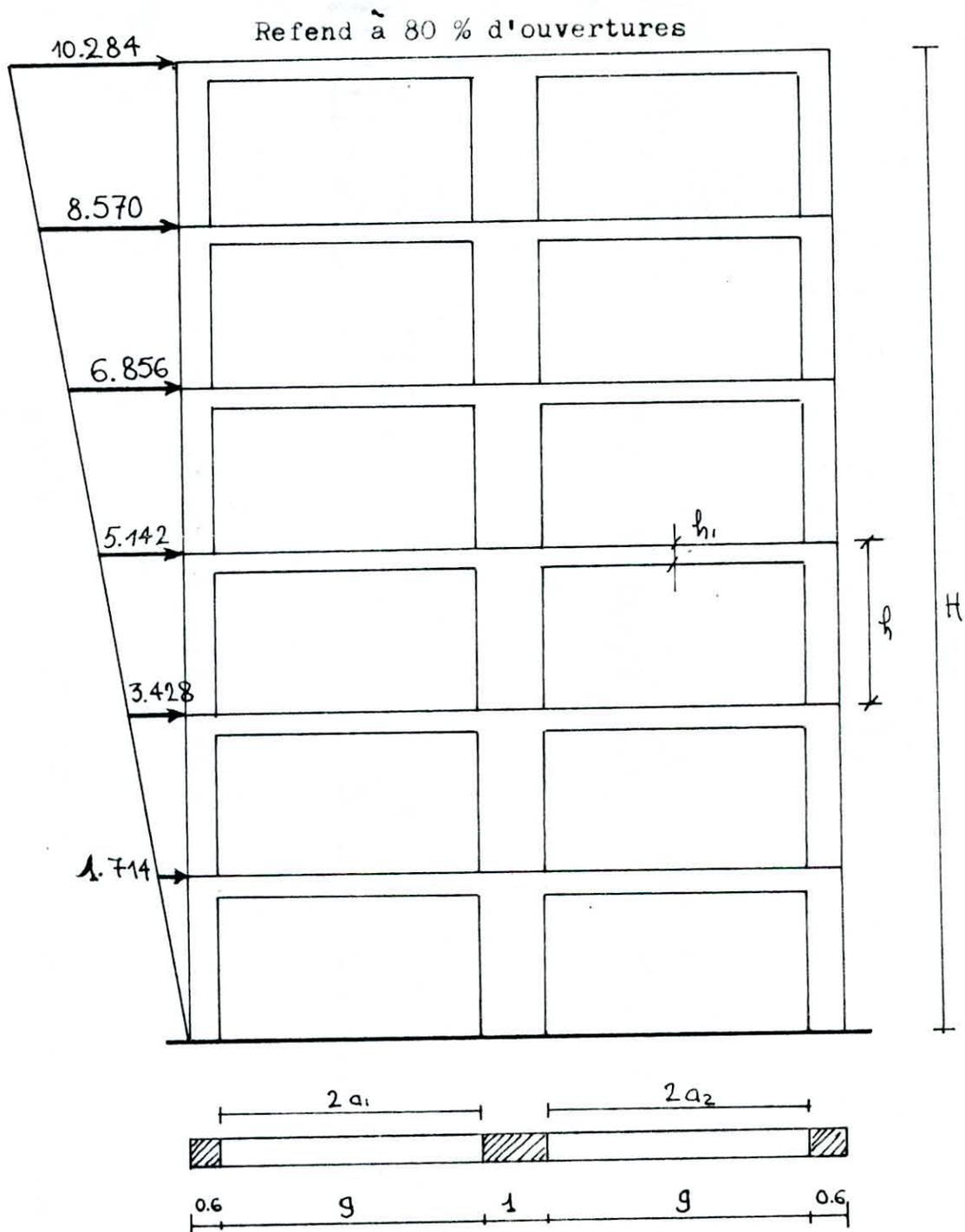
- Différences finies
- ALBIGES
- Charge concentrée
- Calcul en portique

Résultats : ( voir les courbes )

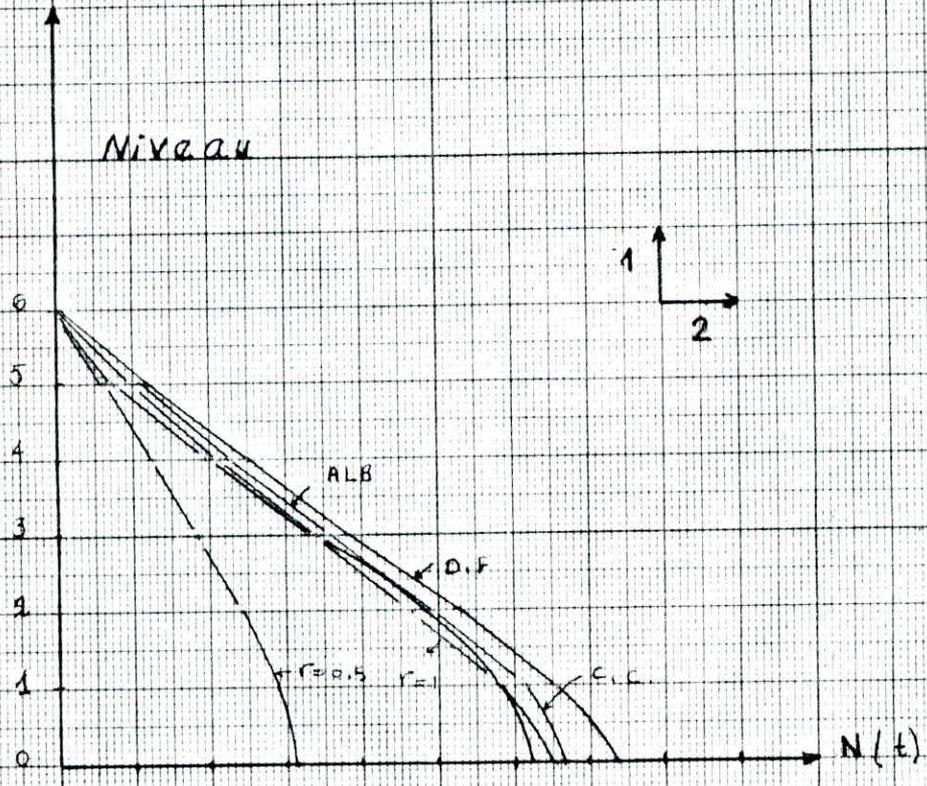
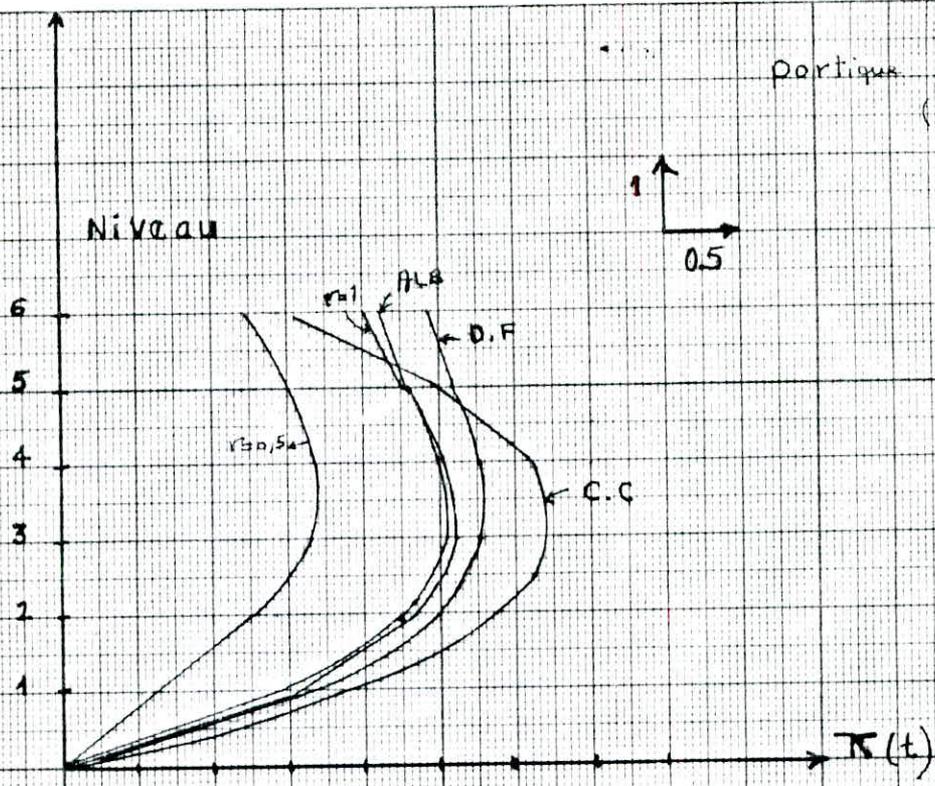
Dans cet exemple , le calcul en portique donne des résultats tout à fait comparable à ceux donnés par les trois autres méthodes avec une légère différence allant jusqu'à 15 % .

Le calcul du même refend en portique , avec un coefficient de relaxation  $r = 0.5$  a montré une diminution des efforts dans les linteaux ( - 30 % ) .

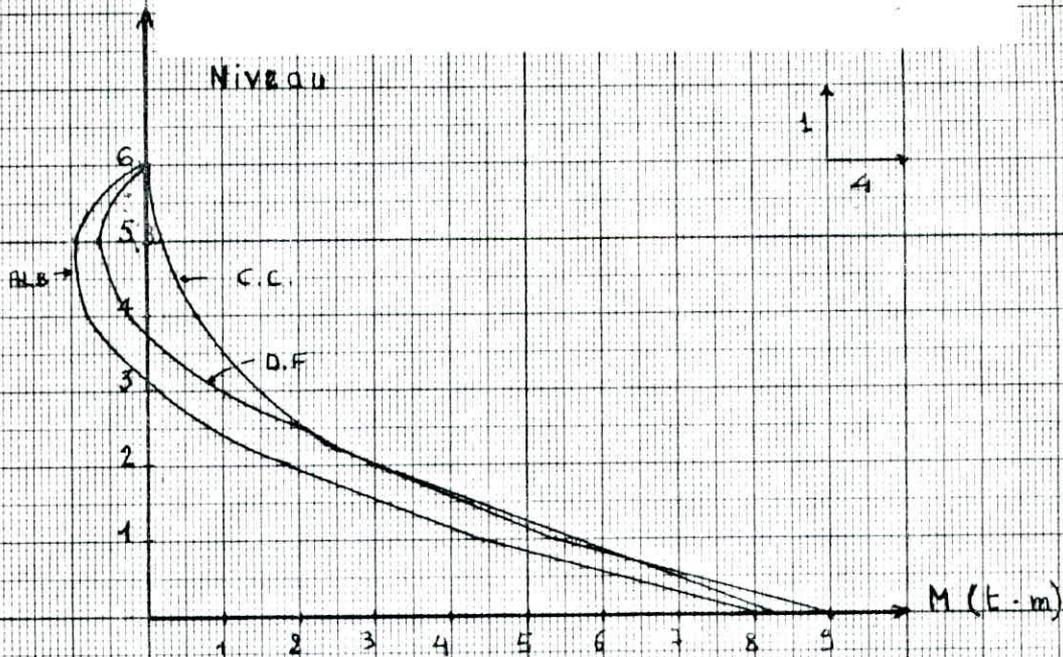
Dans la pratique , on peut se contenter d'utiliser la méthode d'ALBIGES , à condition que la répartition des charges soit triangulaire , ou bien on modélise le voile comme un portique , qui pourra être traité par des méthodes classiques .



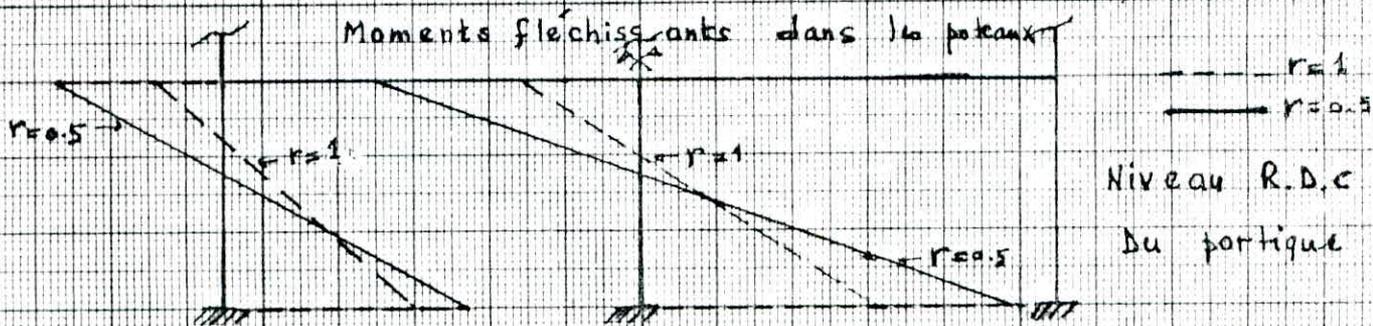
Portique  $\beta = 80\%$   
(R+5)



# Moments flechissants dans les trumeaux



Methode	$I_e$ ( $m^4$ )	$f$ (cm)
Difference finies	0.10	13.12
Charge concentree	0.09	15.55
Albige	0.08	14.71
Calcul en portique		14.2 $r = 1$
		32.45 $r = 0.5$



c)- Voile R+5 à 25 % d'ouvertures :

Données :  $h_1 = 0.8 \text{ m}$  ,  $2c_1 = 2c_2 = 8.6 \text{ m}$  ,  $2a_1 = 2a_2 = 3.4 \text{ m}$  ,

$\Omega_1 = \Omega_3 = 0.6 \text{ m}^2$  ,  $\Omega_2 = 1.48 \text{ m}^2$  ,  $I_1 = I_3 = 0.45 \text{ m}^4$  ,  $I_2 = 6.75 \text{ m}^4$

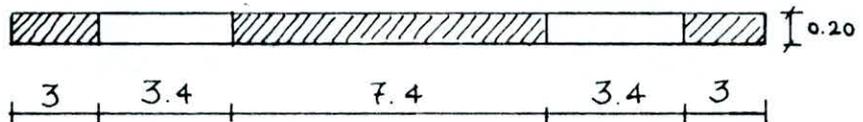
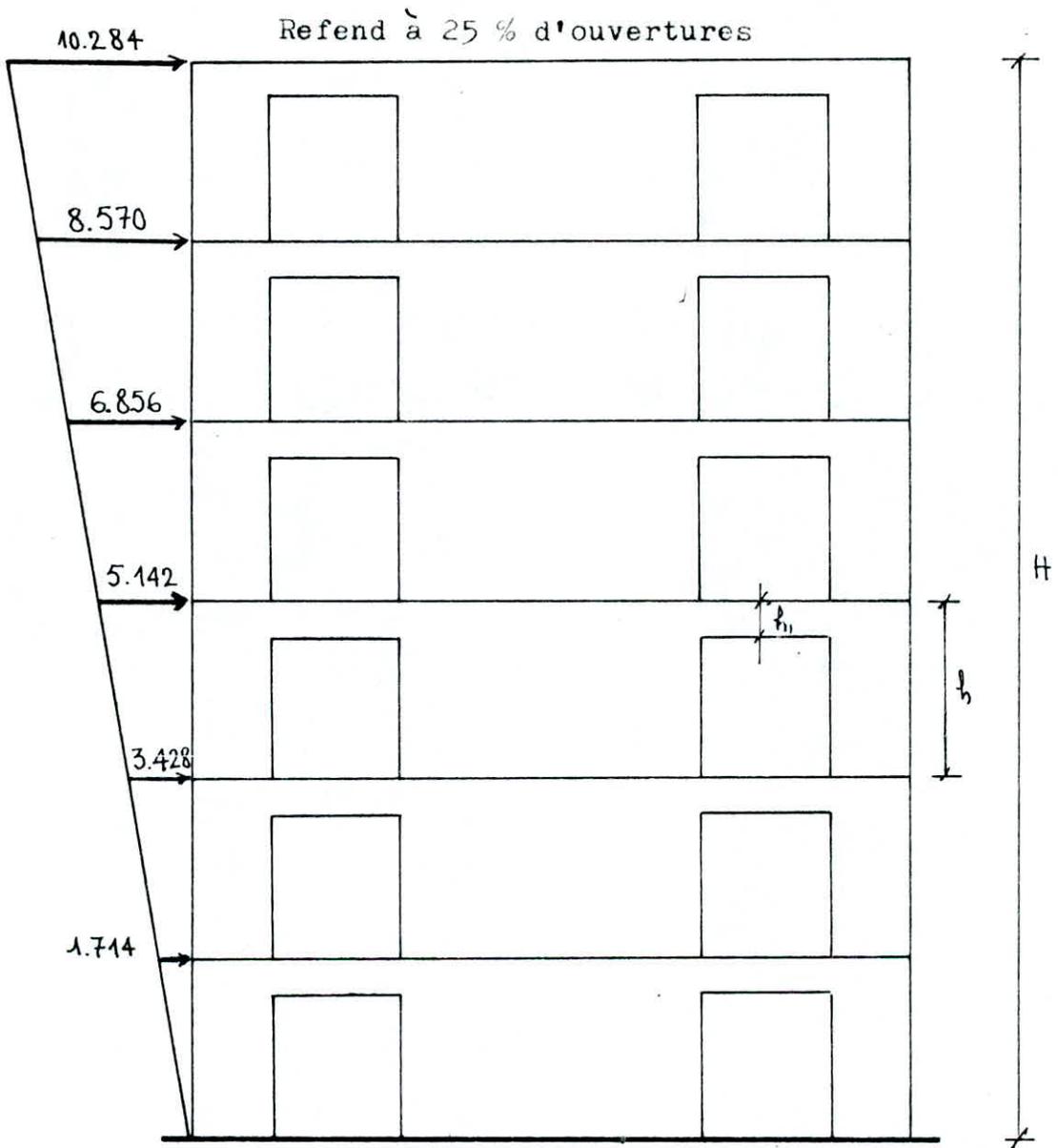
$J_1 = J_2 = 0.009 \text{ m}^4$  ,  $G_1 G_0 = D = 8.6 \text{ m}$  ,  $I = 96.406 \text{ m}^4$  ,  $m_1 = m_2 = 5.16 \text{ m}^3$

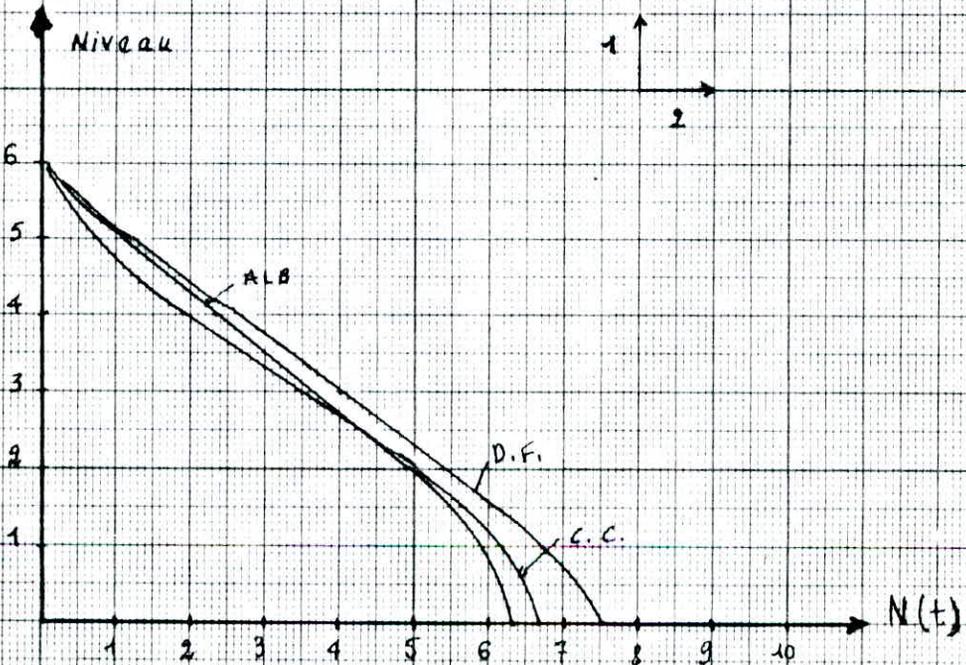
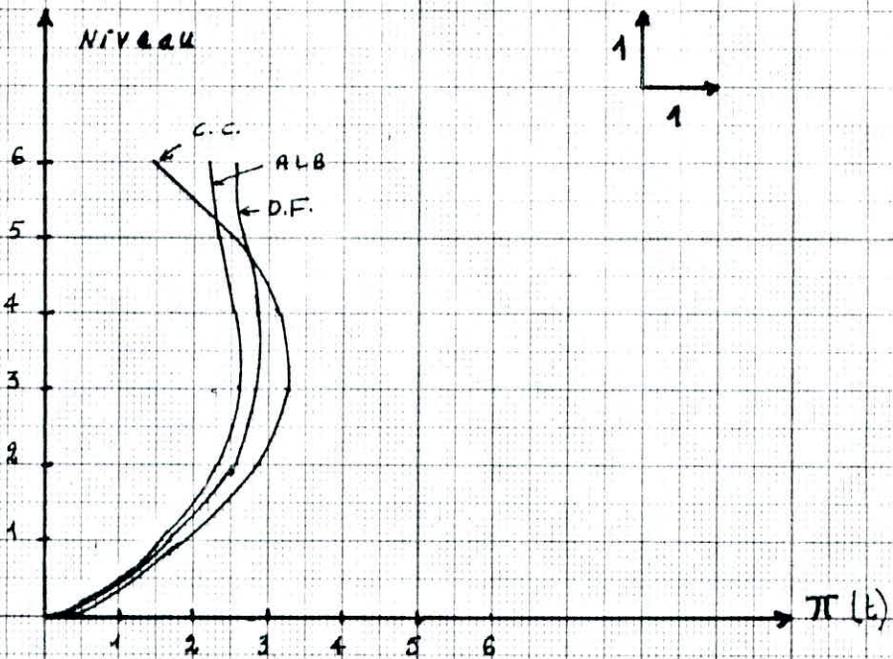
$\omega = 0.128$  ,  $\alpha = \omega H = 2.47$  .

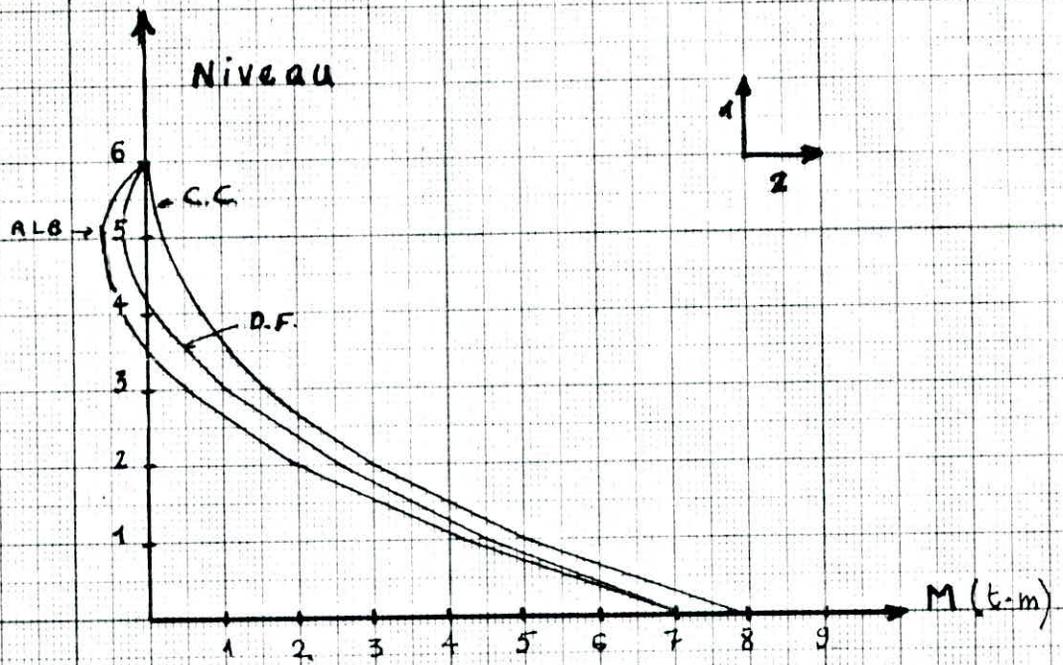
Méthodes utilisées :

- Différences finies
- Charge concentrée
- Albigès

Les résultats donnés par les trois méthodes coïncident globalement , vu qu'on a enregistré une différence maximale de 15 % . Ceci étant pour les efforts , s'agissant de l'inertie équivalente , celle donnée par la méthode d'ALBIGES chute de moitié par rapport à celle donnée par un chargement triangulaire uniforme , et à celles données par les deux autres méthodes . Concernant maintenant les flèches , les trois méthodes donnent des résultats comparables .







Méthode	$I_e$ ( $m^4$ )	$f$ ( cm )
Différences finies	24.83	0.056
Charge concentrée	22.45	0.062
Albiges	12.38	0.100

d)- Voile R+7 avec 25 % d'ouvertures :

On traitera dans cet exemple , un voile soumis à un chargement quelconque dans le but de pouvoir tirer des conclusions sur l'application de la méthode d'ALBIGES à un tel chargement .

Données :

Le chargement est obtenu par un calcul dynamique avec superposition quadratique des trois premiers modes .

La force sismique à la base  $V = 88.9 \text{ t}$

Méthodes utilisées :

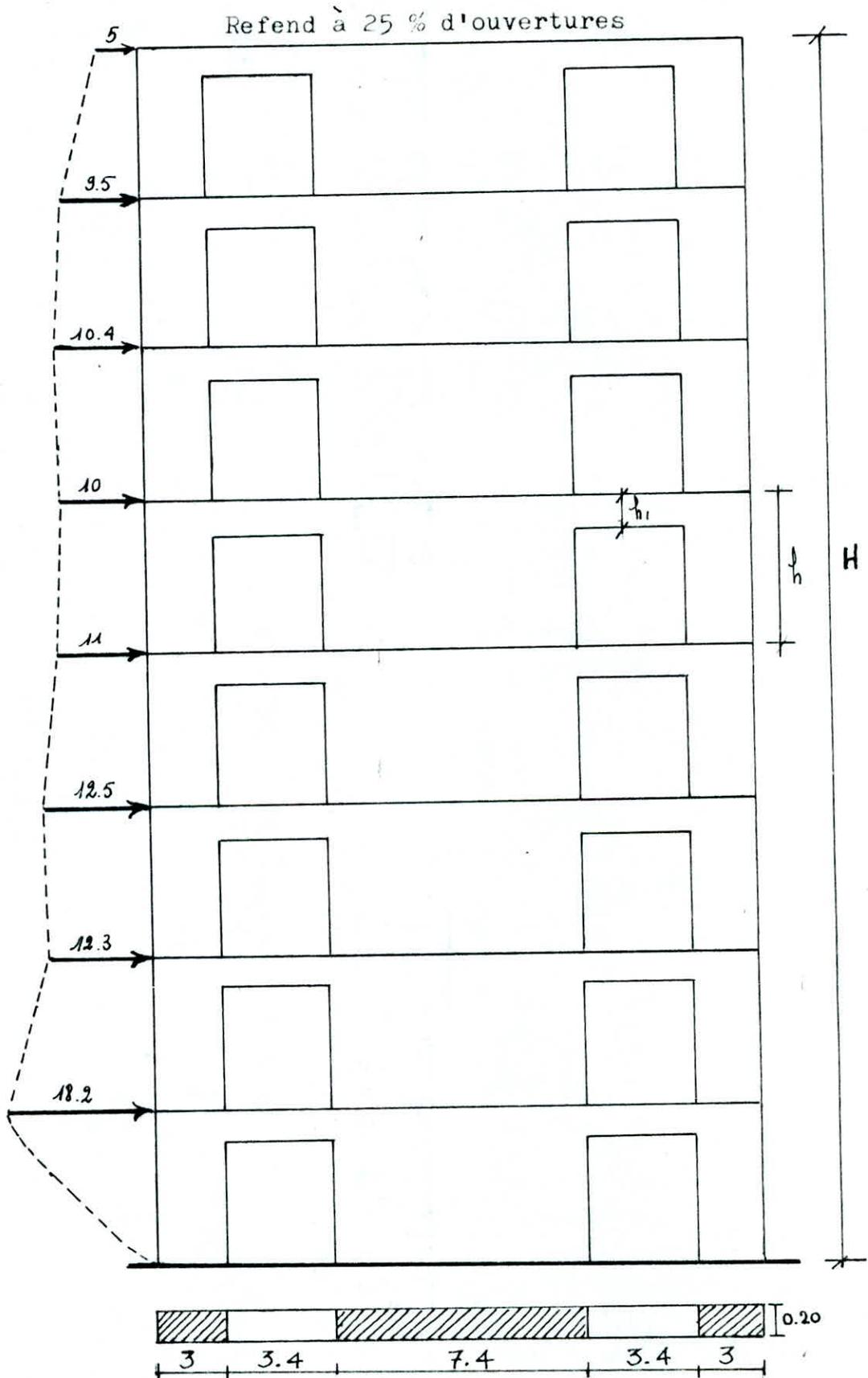
- Différences finies
- Charge concentrée
- ALBIGES

On trouve  $\omega = 0.12$  ,  $\alpha = \omega H = 3.29$

Dans cet exemple , les résultats donnés par la résolution d'ALBIGES sont supérieurs de 30 % aux valeurs données par les deux autres méthodes, ceci étant pour les efforts , concernant les flèches et les inerties équivalentes , on trouve entre la méthode des différences finies et la charge concentrée une différence de 10 % , par contre on constate une chute de moitié de l'inertie équivalente donnée par ALBIGES à celles données par les deux autres méthodes .

On remarque aussi dans cet exemple que l'inertie équivalente est très importante , ce qui nous amène à dire que l'intervention des linteaux dans le contreventement est considérable .

\* Calcul de l'effort tranchant dans les linteaux à la cote relative  $\xi = 0.1$  au moyen de l'abaque :



On aura dans ce cas huit positions de la charge .

$\tau$  varie de 0 à 1 avec un pas de  $1/8$

$\alpha = 3.29$  ,  $\xi = 0.1$  on lit sur l'abaque les valeurs de  $\nabla$  correspondantes aux valeurs de  $\tau$

$$\tau_1 = 0.125 \longrightarrow \nabla_1 = 0.065 \quad , \quad \tau_2 = 0.25 \longrightarrow \nabla_2 = 0.15$$

$$\tau_3 = 0.375 \longrightarrow \nabla_3 = 0.2 \quad , \quad \tau_4 = 0.5 \longrightarrow \nabla_4 = 0.235$$

$$\tau_5 = 0.625 \longrightarrow \nabla_5 = 0.25 \quad , \quad \tau_6 = 0.75 \longrightarrow \nabla_6 = 0.255$$

$$\tau_7 = 0.875 \longrightarrow \nabla_7 = 0.255 \quad , \quad \tau_8 = 1 \longrightarrow \nabla_8 = 0.255$$

On calcul l'effort tranchant à l'aide de la relation .

$$\pi_i = \frac{mih}{I} \cdot Q \cdot \nabla(\alpha, \tau, \xi)$$

$$\text{Pour la charge } Q_1 : \pi = \frac{5.16 \cdot 3.2}{96.406} \cdot 18.2 \cdot 0.065 = 0.203 \text{ t}$$

$$Q_2 : \pi_2 = 0.171 \cdot 12.3 \cdot 0.15 = 0.316 \text{ t}$$

$$Q_3 : \pi_3 = 12.5 \cdot 0.171 \cdot 0.20 = 0.428 \text{ t}$$

$$Q_4 : \pi_4 = 0.171 \cdot 11 \cdot 0.235 = 0.443 \text{ t}$$

$$Q_5 : \pi_5 = 0.171 \cdot 10 \cdot 0.25 = 0.428 \text{ t}$$

$$Q_6 : \pi_6 = 0.171 \cdot 10.4 \cdot 0.255 = 0.454 \text{ t}$$

$$Q_7 : \pi_7 = 0.171 \cdot 9.5 \cdot 0.255 = 0.415 \text{ t}$$

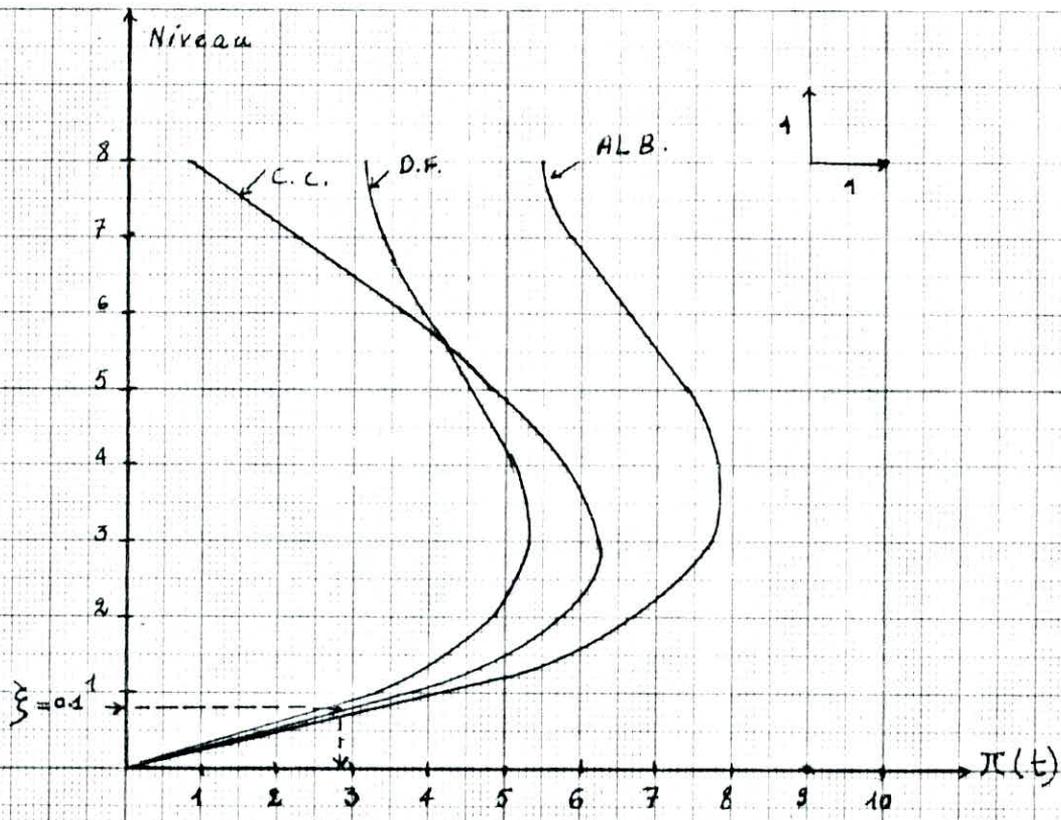
$$Q_8 : \pi_8 = 0.171 \cdot 5 \cdot 0.255 = 0.218 \text{ t}$$

Pour trouver l'effort tranchant total à la côte relative  $\xi=0.1$  on applique le principe de superposition .

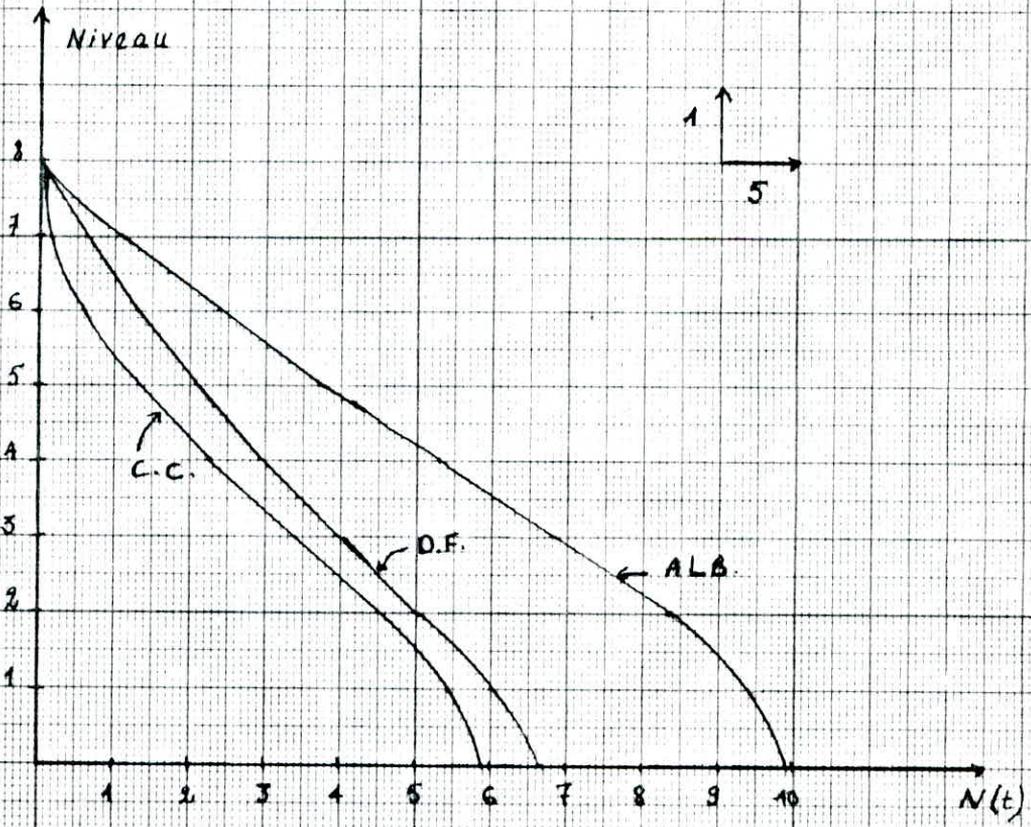
$$\begin{aligned} \pi &= 0.203 + 0.316 + 0.428 + 0.443 + 0.428 + 0.454 + 0.415 + \\ &+ 0.218 = 2.9 \text{ t} \end{aligned}$$

On lit sur la courbe donnant  $\pi$  en fonction de l'altitude la valeur de  $\pi$  :

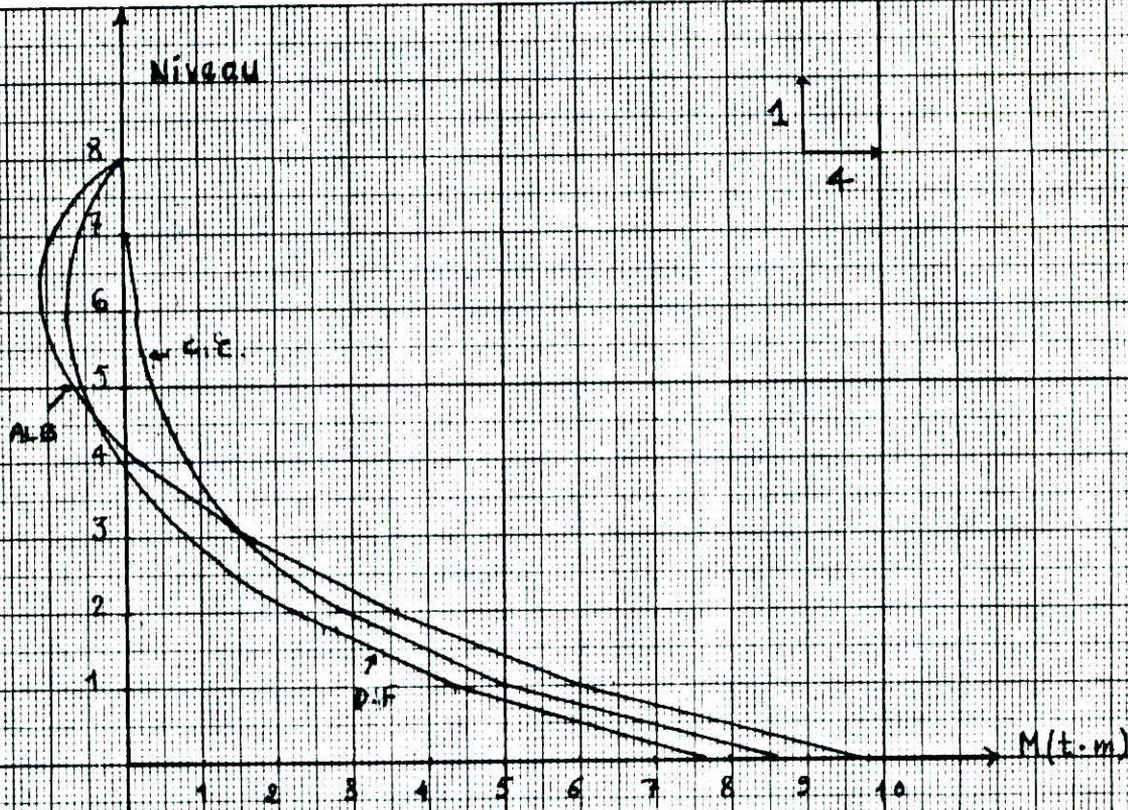
$$\pi = 2.86 \text{ t} \quad (\text{voir fig d1})$$



- fig d1 -



- fig d2 -



- fig d3 -

Méthode	$I_e$ ( $m^4$ )	$f$ ( cm )
Différences finies	33.14	0.525
Charge concentrée	30.06	0.465
Albiges	16.37	0.442

e)- Voile R + 7 avec 50 % d'ouvertures :

Données :  $h_1 = 0.8 \text{ m}$  ,  $h = 3.2 \text{ m}$  ,  $H = 25.6 \text{ m}$  ,  $2c_1 = 2c_2 = 9.6 \text{ m}$   
 $2a_1 = 2a_2 = 7 \text{ m}$  ,  $\Omega_1 = \Omega_3 = 0.2 \text{ m}^2$  ,  $\Omega_2 = 0.84 \text{ m}^2$  ,  $I_1 = I_3 = 0.017 \text{ m}^4$  ,  
 $I_2 = 1.235 \text{ m}^4$  ,  $I = 38.133 \text{ m}^4$  ,  $m_1 = m_2 = 1.92 \text{ m}^3$  ,  $\omega = 0.11$  ,  $\alpha = 3.6$

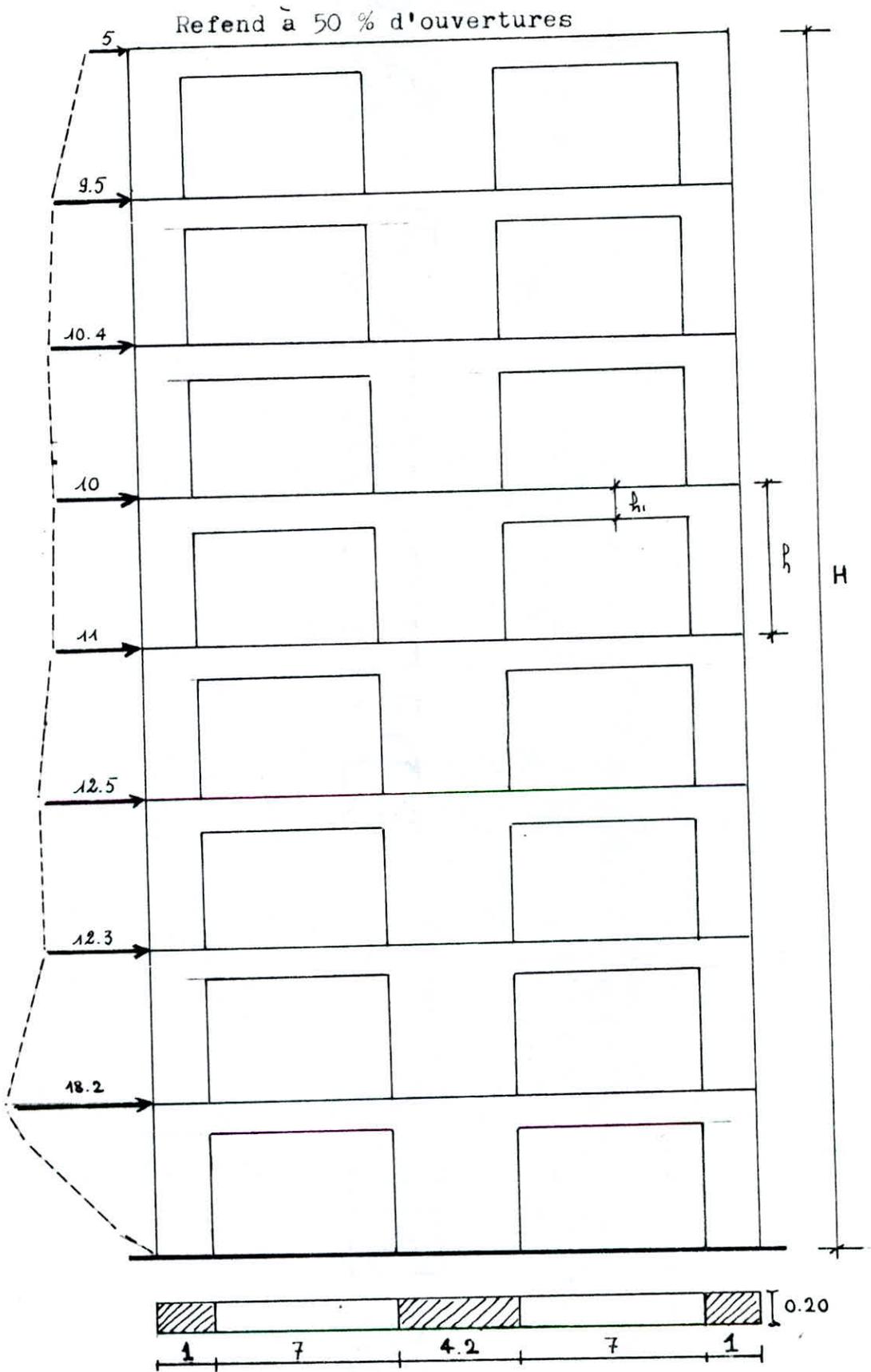
Méthodes utilisées :

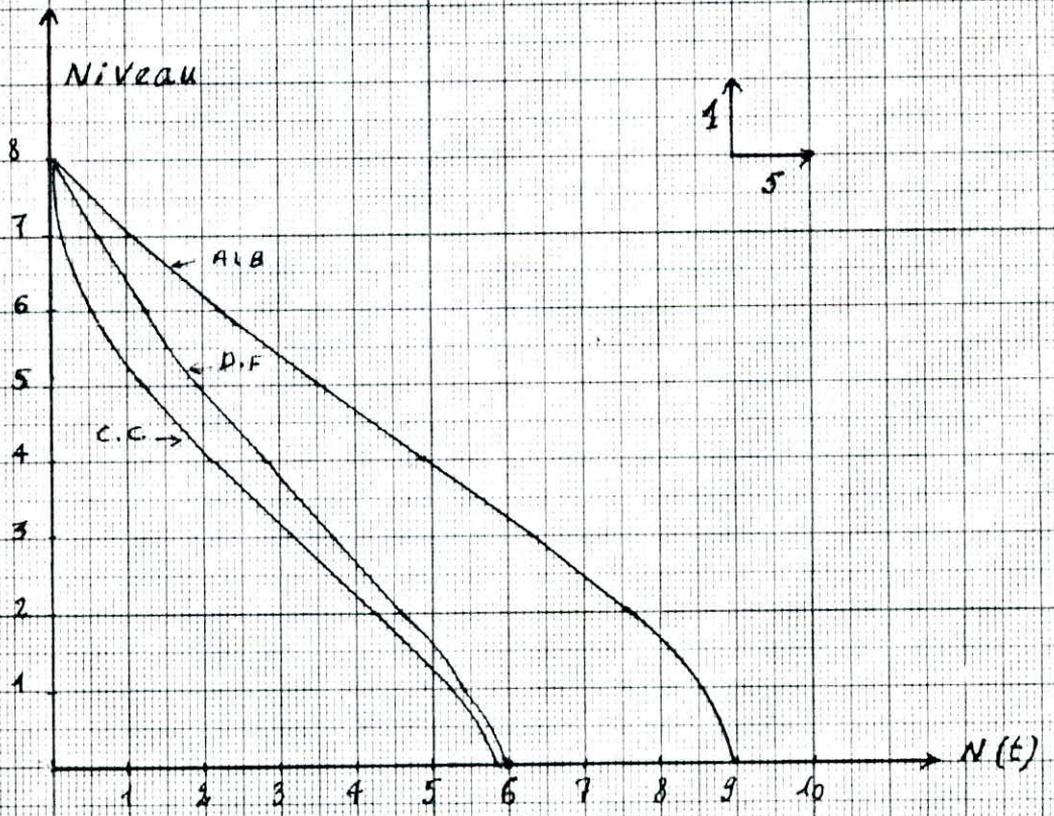
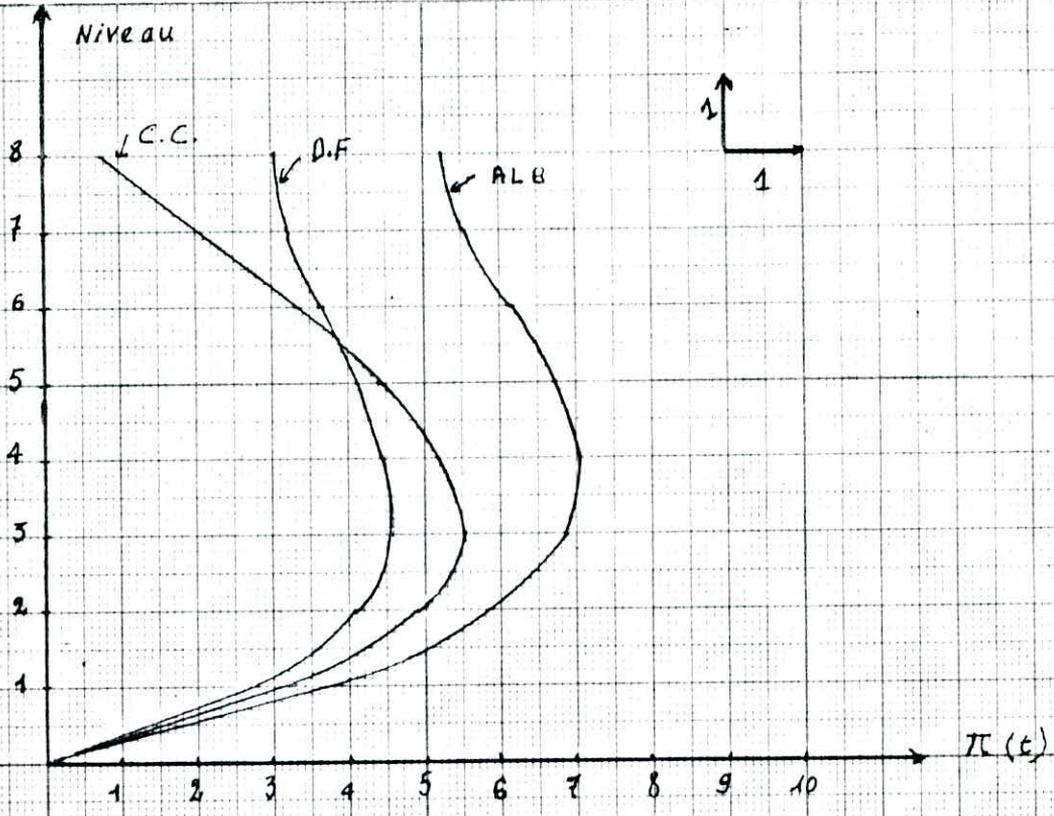
- Différences finies
- Charge concentrée
- ALBIGES

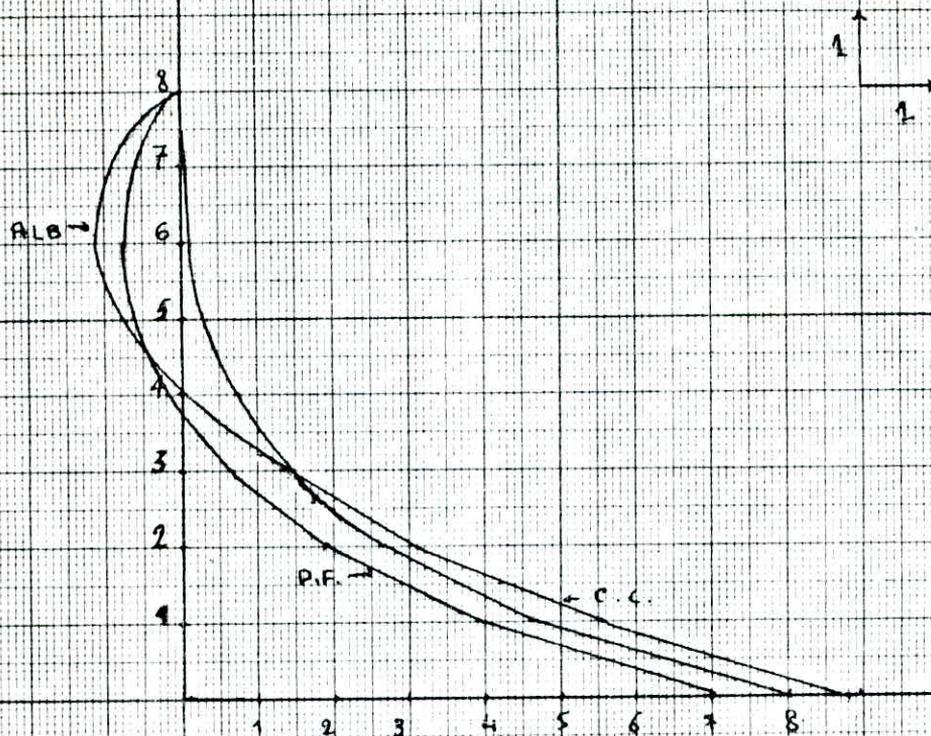
Les résultats donnés par la résolution d'ALBIGES sont supérieurs de 25 % par rapport à la méthode de la charge concentrée et de 30 % par rapport à la méthode des différences finies .

Les deux autres méthodes donnent pratiquement la même chose . Cette sur estimation est due à l'assimilation des charges sismiques à répartition non régulière à un chargement régulier triangulaire .

Cette constatation nous amène à éviter d'appliquer la méthode d'ALBIGES pour un tel chargement et de procéder à une autre méthode telle que différences finies ou la charge concentrée .







Méthode	$I_e$ ( m <sup>4</sup> )	f ( cm )
Différence finies	4.95	0.930
Charge concentrée	5.38	0.856
Albiges	2.95	2.455

f)- Application de la méthode des éléments finis au calcul d'un voile R+2 plein et avec ouvertures :

On a traité deux exemples de voiles , le premier est plein , le second avec ouvertures non alignées , soumis à un chargement mixte .

- Le premier chargement est une charge uniformément répartie de valeur 5 t/ml , appliquée au niveau des planchers .

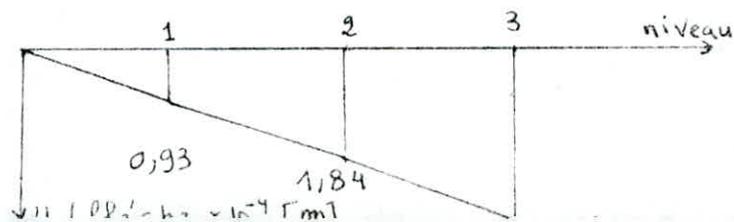
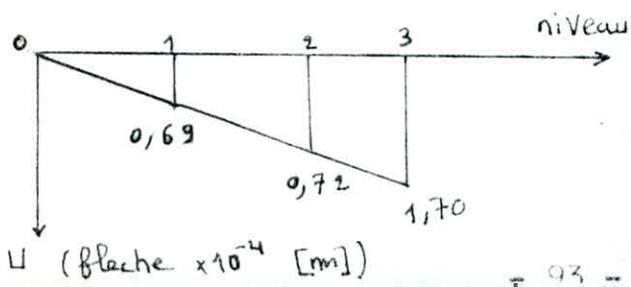
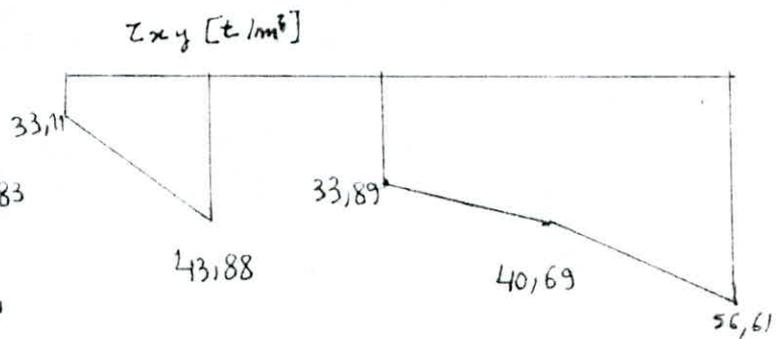
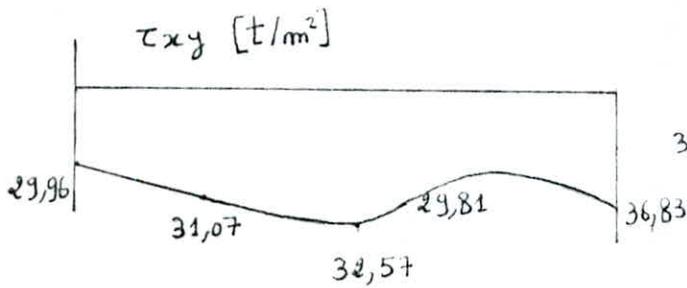
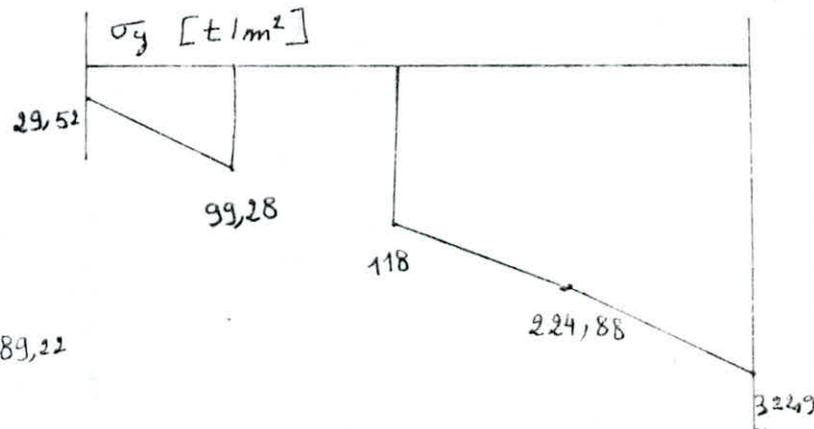
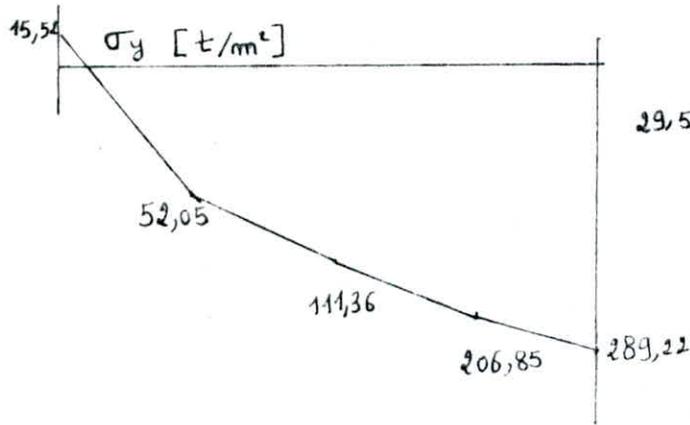
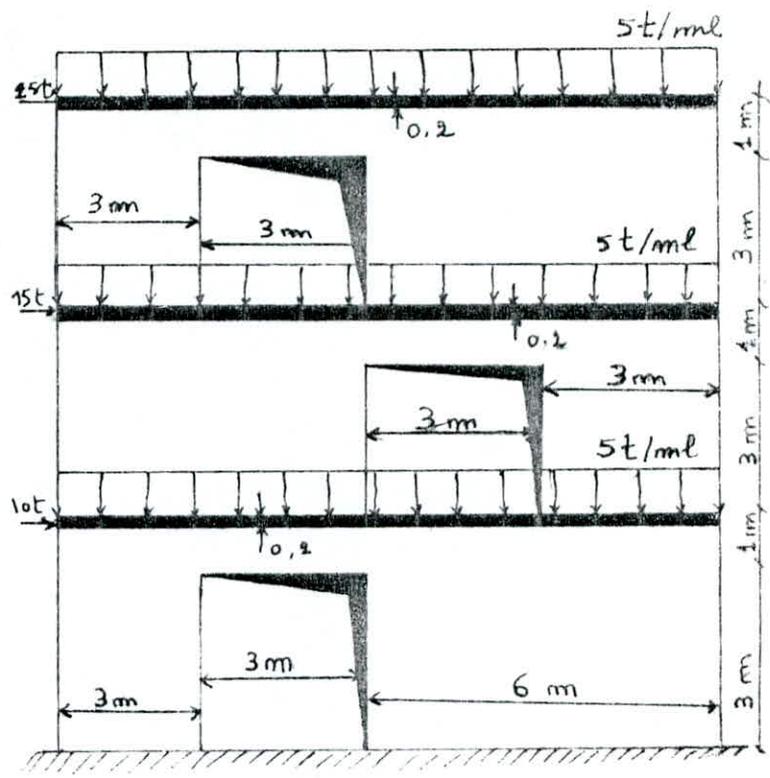
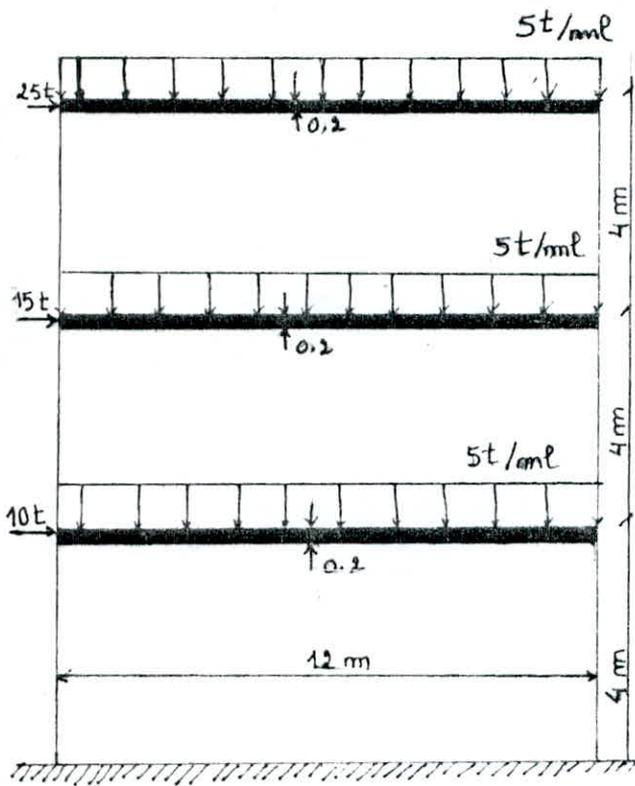
-le second sont des forces horizontales , appliquées dans le plan moyen des planchers , leur valeurs sont indiquées sur la figure de la page suivante .

Les résultats sont représentés sous formes de courbes .

\* La première série représente les contraintes normales aux noeuds qui se trouvent à la base du voile .

\* La deuxième série représente les contraintes tangentielles aux mêmes noeuds .

\* La troisième série représente le déplacement horizontal des noeuds du bord gauche du voile situés verticalement.



# Conclusion

## Conclusion générale :

### a)- Influence du type de chargement :

Dans le cas d'un voile à pourcentage d'ouverture moyen , et si le chargement sismique est régulier (triangulaire) , nous avons constaté une similitude des différents résultats données par les diverses méthodes de calcul utilisées . De ce fait , on peut conclure , même dans le cas d'un chargement sismique , pour peu qu'il soit régulier triangulaire , que les résultats d'ALBIGES pour un vent triangulaire peuvent être utilisés . Par contre dans le cas d'un chargement non régulier (présence d'une force au sommet , prise en compte de plusieurs modes de vibrations ou étages irréguliers) , on ne peut plus utiliser les résultats établis pour un chargement triangulaire . Cette approximation donne des résultats complètement erronés et il est impératif d'utiliser une autre méthode de calcul : calcul par la méthode des différences finies ou calcul par la méthode de la charge concentrée . Cette dernière méthode à l'avantage de pouvoir être utilisée manuellement par l'utilisation d'abaques .

### b)- Comparaison entre les différentes méthodes de calcul des voiles avec ouvertures :

Pour des pourcentages d'ouvertures moyens de 20 à 70% les résultats donnés par les différentes méthodes classiques sont comparables .

Dans le cas de petites ouvertures ( $\beta = 10\%$ ) , les résultats d'ALBIGES s'éloignent (30%) de ceux donnés par les autres

méthodes .

De plus , nous avons constaté que même pour un pourcentage d'ouvertures de 10 % , le voile ne peut être assimilé à un voile plein .

Les perturbations causées par les ouvertures ne sont pas négligeable . Il est probable qu'il faudrait un pourcentage d'ouverture de 5 % ou moins pour pouvoir faire cette approximation. Dans le cas de grandes ouvertures ( $\beta = 80\%$ ), un calcul en portique donne des résultats tout à fait comparables à ceux donnés par les méthodes des différences finies et charges concentrées .

c)- Influence de la relaxation des linteaux :

Le calcul du voile par assimilation à un portique avec prise en compte des effets de l'effort tranchant et des relaxations des linteaux a montré l'augmentation des efforts (+ 30 % ) que l'on pouvait avoir au niveau des trumeaux . Physiquement cette relaxation des linteaux traduisant la formation de rotules , il apparait opportun de majorer les efforts de calcul des trumeaux par leur dimensionnement .

d)- Calcul des voiles par la méthode des éléments finis :

Le programme établi permet d'appréhender le calcul de cas complexes de voiles avec toutes les possibilités de chargement désirés .

Dans l'exemple traité (cas de voiles courts) , nous constatons que les méthodes établies pour des structures élancées ne peuvent être utilisées . L'effet de l'effort tranchant devenant

prépondérant .

Un problème au niveau du système MICROVAX ne nous a pas permis de rentrer des exemples de voiles de plus de trois niveaux , ce qui aurait souhaitable pour tirer une conclusion fiable sur les méthodes de calcul globales utilisées dans cette étude .

e)- Etablissement des abaques pour le cas de charges concentrées :  
Le développement de l'équation générale de contreventement pour le cas des charges concentrées a permis de construire le système d'élaboration d'abaques . Ceci peuvent être manuellement utilisé pour traiter le cas de voiles soumises à un chargement horizontal quelconque .

## BIBLIOGRAPHIE

- Annales de l'ITBTP (Fev 71) par COIN , DECAUCHY & COLLIGNON
  - \* Murs de contreventements à ouvertures multiples .
- Annales de l'ITBTP (Fev 72) par J.DESPEYROUX & V.GUILLOT
  - \* Analyse statique et dynamique des contreventement par consoles solidarisiées par des milieux élastiques .
  - \* Influence des ouvertures dans la stabilité des batiments de grande hauteur . Refend à N files d'ouvertures .
- CHEC par ALBIGES & GOULET
  - \*Contreventement des batiments .
- M.DIVER (DUNOD)
  - \* Calcul pratique des tours en béton armé .
- A.FUENTES (EYROLLES)
  - \* Calcul pratique des ossatures de batiments en béton armé. Batiments courants , batiments de grande hauteur .
- Annales de l'ITBTP (Oct 72) par E.ABSI
  - \* La théorie des équivalences et son application á l'étude des ouvrages d'art .
- DHAT & TOUZOT
  - \* Méthode des éléments finis
- ROCKEY
  - \* Initiation à la méthode des éléments finis

