

وزارة الجامعات
Ministère aux Universitaires

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

GENIE-CIVIL

2 ex

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE COMPARATIVE DES ELEMENTS

CONFORMES ET NON CONFORMES

DANS L'ANALYSE DES PLAQUES

EN FLEXION PAR LA M.E.F

Proposé par :

Mr T.MESSAFER

Etudié par :

Mr S.BENHADJ-ABED

Mr H.BENHADJ-AMAR

Dirigé par :

Mr T.MESSAFER

PROMOTION

Promoteur : M. T. MESSAFER

Elèves Ingénieurs : M. BENHADJ ABED ; M. BENHADJ AMAR

الموضوع:

دراسة مقارنة لعناصر مطابقة وغير مطابقة في التحليل الإنشائي للصفائح باستعمال طريقة العناصر

المحدودة

الملخص:

هذا المشروع يهدف إلى إنجاز برامج آلية لدراسة الصفائح الرقيقة باستعمال ثلاثة عناصر

■ 12 درجة حرية غير مطابق

■ 16 درجة حرية مطابق

■ 12 درجة حرية مغير

وذلك ليتسنى إيجاد المجهول الأساسية للصفائح تمت ممولة ساكنة عمودية وذوي شروط تثبيت مختلفة بنية

المقارنة بين مختلف هذه العناصر.

Sujet:

Etude comparative des éléments conformes et non conformes dans l'analyse des plaques en flexion par la méthode des éléments finis.

Résumé:

Le présent travail a pour objectif l'élaboration de programmes pour l'analyse flexionnelle des plaques minces en utilisant 3 éléments :

- Un élément à 12 degrés de liberté non conforme.
- Un élément à 16 degrés de liberté conforme.
- Un élément à 12 degrés de liberté modifié.

Permettant la détermination des inconnues de base des plaques sous charge statique verticale et sous diverses conditions d'appuis, afin d'établir une comparaison entre les différents éléments utilisés.

SOMMAIRE

Introduction

1- Introduction	1
2- Objet du travail	1

Chap.I. Théorie des plaques minces

I-1- Introduction	3
I-2- Définition	3
I-3- Cadre général de la théorie des plaques	4
I-3-1- Plaques minces à faibles flèches	4
I-3-2- Plaques minces avec grandes flèches	5
I-3-3- Plaques épaisses	6
I-4- Etude de la flexion pure	6
I-4-1- Relations déformations-déplacements	6
I-4-2- Relations contraintes-déformations	9
I-4-3- Efforts internes	12
I-4-4- Equations d'équilibre	14
I-5- Conditions aux limites	17
I-6- Méthodes de résolution de l'équation gouvernante	20
I-7- Conclusion	20

Chap.II. Généralités sur la méthode des éléments finis

II-1- Introduction	22
II-2- Historique	22
II-3- Notions de base de la méthode des éléments finis	23
II-3-1- Concepts d'éléments finis	23
II-3-2- Formulation de la méthode des éléments finis	24
II-4- Présentation de la méthode des éléments finis selon la formulation variationnelle	25
II-4-1- Introduction	25
II-4-2- Différentes méthodes de formulation de la méthode des éléments finis	25
II-5- Classification des systèmes physiques	29
II-6- Principe de l'énergie potentielle minimale	32

II-7- Critères de convergence

Chap.III. Application de la méthode des éléments finis pour l'étude de la flexion des plaques

III-1- Introduction	35
III-2- Discrétisation d'une structure	36
III-3- Problème de continuité	36
III-4- Obtention de la matrice de rigidité globale par le principe des travaux virtuels	38

Chap.IV. Élément rectangulaire à 12 D.D.L non conforme

IV-1- Introduction	49
IV-2- Fonction de déplacement	50
IV-3- Déformations constantes, déplacement nodal et compatibilité inter-éléments	51
IV-4- Expression des D.D.L d'un nœud	53
IV-5- Formation de la matrice A	54
IV-6- Formation de la matrice de rigidité locale	57

Chap.V. Élément rectangulaire à 16 D.D.L conforme

V-1- Introduction	59
V-2- Fonction de déplacement	61
V-3- Formation de la matrice A	63
V-4- Formation de la matrice C	64
V-5- Formation de la matrice de rigidité locale	65

Chap.VI. Élément rectangulaire à 12 D.D.L modifié

VI-1- Introduction	66
VI-2- Développement des expressions de déplacement	66
VI-3- Choix de la constante C	69
VI-4- Construction de la matrice B	70
VI-5- Formation de la matrice de rigidité locale	78

Chap.VII. Techniques de calcul et méthodes de résolution

VII-1- Introduction	81
VII-2- Les différentes méthodes de résolution des systèmes	81

VII-3- Méthode de GAUSS	82
VII-4- Factorisation de CHOLESKY	84
VII-5- Méthode d'intégration de GAUSS	86
VII-6- Choix du nombre de points d'intégration	88
<u>Chap.VIII. Description du programme</u>	
VIII-1- Subroutine INPUT	89
VIII-2- Subroutines (PROD1, PROD2, PROD3, PROD4, INVERSION)	89
VIII-3- Subroutine ASSEMBLE	89
VIII-4- Subroutine LIMITE	90
VIII-5- Subroutine RESOLUTION	90
VIII-6- Subroutine MOMENT	90
Organigramme	91
<u>Chap.IX. Résultats et interprétation</u>	
IX-1- Introduction	92
IX-2- Applications	92
IX-3- Interprétation des résultats	113
<u>Conclusion</u>	114
<u>Annexe</u>	116

INTRODUCTION

INTRODUCTION

1-INTRODUCTION

La méthode des éléments finis est une méthode de résolution numérique applicable à un grand nombre de problèmes techniques qui intéressent l'ingénieur. Elle est née d'une manière intuitive, pour résoudre des problèmes d'élasticité, mais son domaine d'application s'est considérablement étendu, essentiellement à tous les problèmes de champs : champs de contraintes, champs de température, champs électriques ou magnétiques, écoulement fluide, pour des comportements linéaires ou non linéaires.

Les mathématiciens ont assis la méthode sur des bases solides et ont démontré la convergence des solutions approchées vers la solution exacte.

La méthode des éléments finis permet l'analyse de structures discontinues ou continues. La structure à étudier est décomposée en un ensemble de parties appelées "éléments". Ces éléments sont raccordés les uns aux autres pour former la structure complète, par l'intermédiaire de points appelés nœuds ou points nodaux.

Les éléments constituant la structure sont choisis suffisamment simples pour que leur comportement structurel soit facile à établir. Ce comportement structurel dépend de la géométrie de l'élément, des approximations faites et du comportement du matériau constituant l'élément.

2-OBJET DU TRAVAIL

L'objet du présent travail consiste en l'analyse flexionnelle des plaques par la méthode des éléments finis en faisant varier la fonction de déplacement de la manière suivante :

- Une fonction pour le 12 degré de liberté non conforme.
- Une fonction pour le 16 degré de liberté conforme.
- Une fonction pour le 12 degré de liberté modifié.

INTRODUCTION

Le but étant la détermination des déplacements et des contraintes en n'importe quel point d'une plaque soumise à un chargement concentré ou uniforme avec diverses conditions d'appuis.

Pour ce faire, on établit des programmes de résolution par éléments finis en utilisant des éléments de plaques rectangulaires en adoptant 3 éléments différents.

Le premier élément adopté est rectangulaire, non conforme et comporte 3 degrés de liberté par nœud. En ce qui concerne le deuxième, on a fait introduire le phénomène de gauchissement afin de perfectionner le résultat et l'élément est passé à 4 degrés de liberté par nœud.

Enfin, on est revenu à un élément rectangulaire à 3 degrés de liberté par nœud avec une modification opérée sur la fonction de forme dans un souci de palier à la non conformité du 1^{er} élément.

Le second objectif est de faire une étude comparative entre les 3 modèles afin de déterminer l'élément qui offre une meilleure convergence vers les solutions exactes.

CAPIRE /

Chap. I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

I-1-INTRODUCTION

L'étude des plaques minces sujettes seulement à des flèches peu importantes représente une classe extrêmement importante de problèmes ayant un grand nombre d'applications pratiques.

Les dalles plates, les tabliers de ponts, les planchers, les dômes et réservoirs à parois minces, soumis à des pressions intérieures et extérieures, en sont des exemples frappants. Il y a plusieurs types de plaques qui diffèrent par le comportement de leurs matériaux (plaques isotropes, orthotropes, anisotropes ...etc).

Suivant le chargement, une plaque peut être soumise à un état de contraintes planes si ce chargement est appliqué dans son plan moyen et peut avoir un comportement flexionnel si ce chargement est appliqué perpendiculairement à son plan moyen. Dans le cas d'une action simultanée on parle alors de flexion composée des plaques. La méthode des éléments finis a été utilisée avec succès pour les problèmes non linéaires, notons qu'il existe 2 types de non linéarité qui sont la non linéarité géométrique (larges déplacements) et la non linéarité du matériau (plasticité).

Dans tout ce qui suivra, on ne s'intéressera qu'aux problèmes des plaques minces homogènes, isotropes, à petites flèches chargées perpendiculairement à leur plan moyen.

I-2-DEFINITION

Une plaque est un solide limité par 2 plans parallèles et un contour fermé, une surface de référence plane (plan XY) en représente un plan de symétrie

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

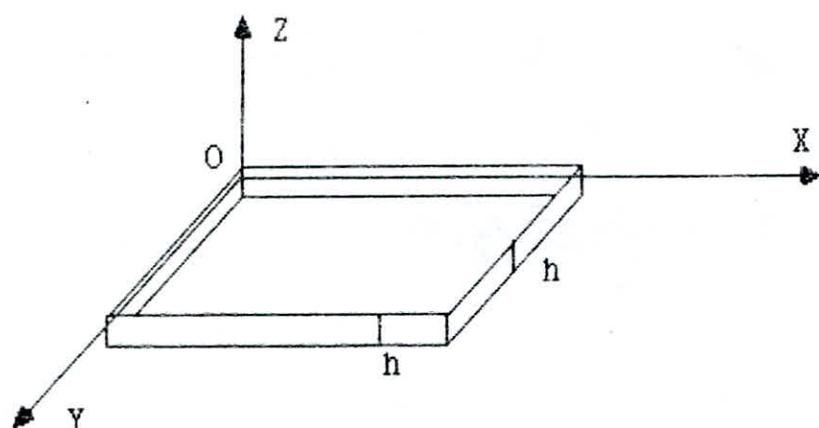


Fig (I-1)

Sous l'effet d'un chargement il y a déplacement de chaque point du plan moyen. Le déplacement selon l'axe OZ est appelé déflexion et est noté W .

Les propriétés de flexion d'une plaque dépendent en grande partie de son épaisseur rapportée à ses autres dimensions.

Pour cela nous distinguerons 3 sortes de plaques :

- Plaques minces à faibles flèches
- Plaques minces à grandes flèches
- Plaques épaisses.

I-3- CADRE GENERAL DE LA THEORIE DES PLAQUES

I-3-1-PLAQUES MINCES A FAIBLES FLECHES ($h/L < 1/15$ et $W/h < 1/5$)

Si les flèches W d'une plaque sont faibles par rapport à son épaisseur h , on peut alors énoncer une théorie approximative très satisfaisante sur la flexion d'une plaque soumise à des charges transversales, en émettant les hypothèses suivantes :

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

1) Le chargement extérieur sera considéré comme appliqué perpendiculairement à la surface moyenne.

2) La dilatation linéaire transverse est nulle (pas de variation d'épaisseur) il n'y a donc pas de déformations dans le plan moyen d'une plaque, ce plan reste neutre pendant la flexion, les déplacements U_0 et V_0 (suivant XY) d'un point quelconque de la surface moyenne seront par conséquent nuls. On écrit alors :

$$U_0 = 0 \quad \text{et} \quad V_0 = 0$$

3) Dans les relations de comportement les contraintes σ_z normales suivant une direction transversale à la plaque seront négligées par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes σ_z .

4) Les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée.

Ces hypothèses nous amènent à conclure que toutes les composantes de la contrainte peuvent s'écrire en fonction de la flèche W de la plaque, l'hypothèse n°4 des sections inclut celle dite de conservation des normales (les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur la normale à la surface moyenne déformée), on admet ainsi que la rigidité de cisaillement est très grande par rapport à la rigidité de la flexion cela implique que les déformations de cisaillement sont négligeables par rapport aux autres composantes $\epsilon_{xy} = 0$ et $\epsilon_{yz} = 0$, cette hypothèse reste satisfaisante sauf dans le cas de trous dans la plaque où l'influence du cisaillement devient importante (§ 39, page 165 Timoshenko).

I-3-2-PLAQUES MINCES AVEC GRANDES FLECHES ($W/h < 1/5$)

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

L'hypothèse n°2 n'est plus vérifiée ; il apparait une déformation du plan moyen due à la flexion (même sous effort normal extérieur), couplage des effets de membranes et des effets de flexion.

I-3-3-PLAQUES EPAISSES

Le problème n'étant pas simple, il doit être par conséquent rapporté à la théorie de Mindlin.

I-4-ETUDE DE LA FLEXION PURE

I-4-1-RELATIONS DEFORMATIONS - DEPLACEMENTS

ϵ_x : nommée déformation longitudinale est la dérivée du déplacement U suivant l'axe X

ϵ_y : nommée déformation transversale est la dérivée du déplacement V suivant l'axe Y.

ϵ_{xy} : déformation tangentielle (déformation d'un angle qui était droit avant déplacement).

D'après les hypothèses de Kirchoff, on peut écrire:

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (I-1)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (I-4)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (I-2)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \quad (I-5)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (I-3)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \quad (I-6)$$

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

En intégrant l'équation n° 4 on obtient $W = W(x,y)$

En intégrant les équations n° 5 et n° 6 on obtient :

$$U = -z \frac{\partial W}{\partial x} + U_0(x,y) \quad (I-7)$$

$$V = -z \frac{\partial W}{\partial y} + V_0(x,y) \quad (I-8)$$

Or, d'après l'hypothèse n°2 énoncée au § (I-3-1), on sait que :

$$U_0 = V_0 = 0$$

Les équations (7) et (8) s'écriront alors comme suit :

$$U = -z \frac{\partial W}{\partial x} \quad (I-9)$$

$$V = -z \frac{\partial W}{\partial y} \quad (I-10)$$

En substituant les équations (9) et (10) dans les équations (1), (2) et (3) on arrive au système écrit ci desous :

$$\xi_x = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = z \frac{1}{r_x}$$

$$\xi_y = -z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = z \frac{1}{r_y} \quad (I-A)$$

$$\xi_{xy} = -2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = z \frac{1}{r_z}$$

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

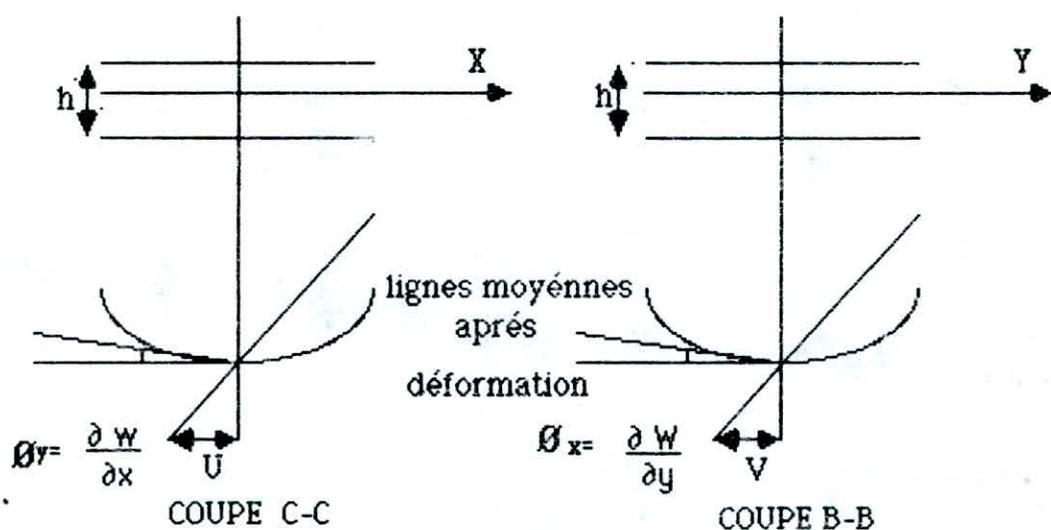
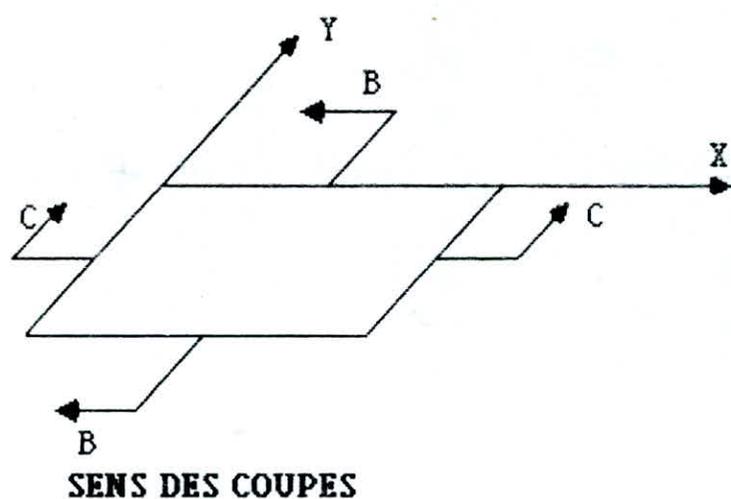


Fig (I-2)

$\frac{1}{r_x} = - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ (I-11) est la courbure du plan moyen dans le plan XZ

Chap. I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

$$\frac{1}{r_y} = - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad \text{(I-12)} \quad \text{est la courbure du plan moyen dans le plan YZ}$$

$$\frac{1}{r_x} = - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad \text{(I-13)} \quad \text{est la courbure du plan moyen dans le plan XY}$$

Remarque : Nous considérons une courbure comme positive si elle est convexe vers le bas. Les équations (11), (12) et (13) sont précédées du signe (-) car la flèche est convexe vers le bas et donc la dérivée seconde est négative.

I-4-2-RELATIONS CONTRAINTES-DEFORMATIONS

En utilisant la loi de Hooke généralisée pour un comportement élastique en contraintes planes, on exprime les déformations en fonction des contraintes régnant sur l'épaisseur de la plaque (σ_x , σ_y et σ_{xy}).

E_x et E_y sont les modules de Young (respectivement dans les sens X et Y)
 μ_x et μ_y sont les coefficients de Poisson (respectivement dans les sens X et Y)

G étant le module d'élasticité transversale.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_x \frac{\sigma_y}{E_x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_y \frac{\sigma_x}{E_y} \end{aligned} \quad \text{(I-B)}$$

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

$$\xi_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}$$

Remarque: Pour une plaque ayant les mêmes caractéristiques physiques suivant les 2 sens X et Y et donc isotrope :

$$E_x = E_y = E$$

$$\mu_x = \mu_y = \mu$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Le système d'équations (B) peut donc se réécrire de la manière suivante :

$$\xi_x = \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\xi_y = \frac{\sigma_y}{E} + \mu \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{(I-C)}$$

$$\xi_{xy} = (1+\mu) \frac{\sigma_{xy}}{E}$$

De la même manière nous pouvons exprimer les contraintes en fonction des déformations comme ci dessous :

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\mu^2)} (\xi_x + \mu \xi_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\mu^2)} (\xi_y + \mu \xi_x) \quad \text{(I-D)}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\mu)} \xi_{xy}$$

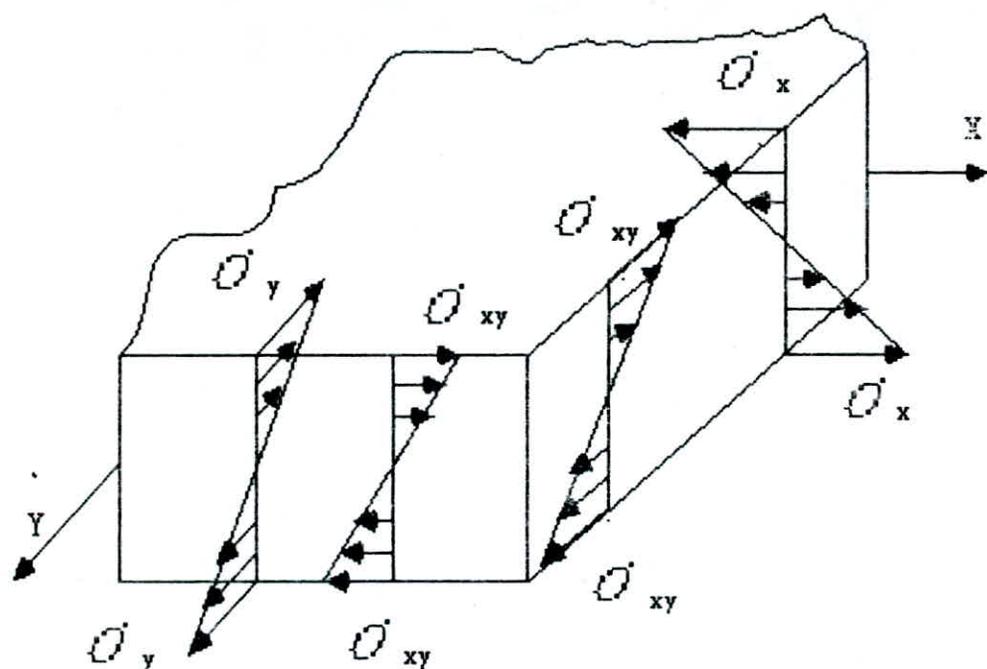
Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

En remplaçant ϵ_x , ϵ_y et ϵ_{xy} par leurs valeurs trouvées dans le système d'équations (A) dans le système (D) on trouve:

$$\sigma_x = -z \frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = -z \frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad \text{(I-E)}$$

$$\sigma_{xy} = -z \frac{E}{(1+\mu)} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

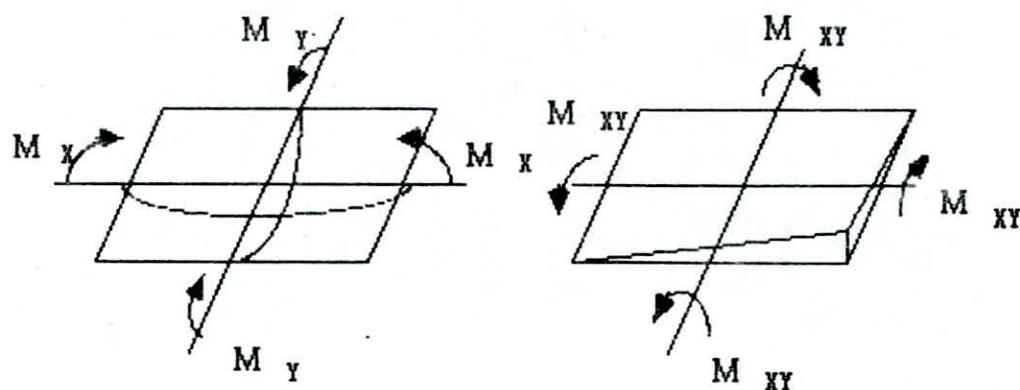


Contraintes s'appliquant sur une portion
de plaque plane mince

Fig(1-3)

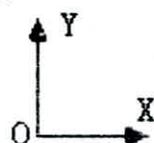
I-4-3-EFFORTS INTERNES

Les contraintes régnant sur l'épaisseur de la plaque donnent naissance à des moments de flexion, de torsion et à des efforts tranchants exprimés par unité de longueur qui sont nommés contraintes généralisées :



MOMENTS DE FLEXION

MOMENTS DE TORSION



Fig(I-4)

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz$$

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz \quad \text{(I-F)}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz$$

En introduisant les équations (I-E) dans (I-F) et en intégrant on obtient :

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad \text{(I-G)}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D (1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

. D : rigidité flexionnelle de la plaque

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

Les efforts tranchants s'écrivent:

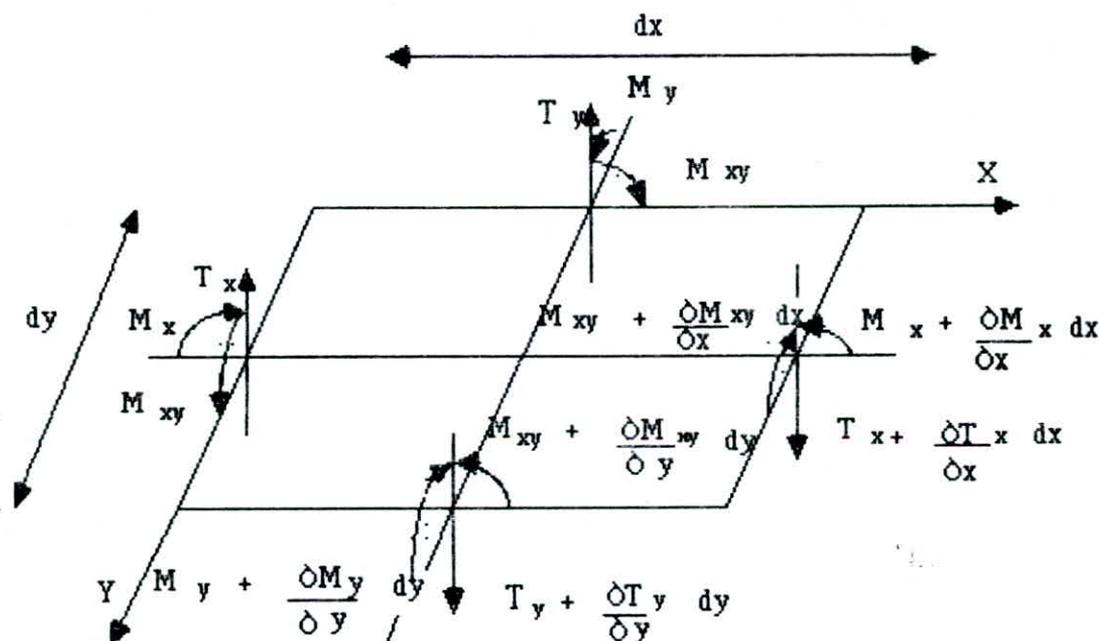
$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz$$

(I-H)

$$T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz$$

I-4-4-EQUATIONS D'EQUILIBRE (EQUATION DE LAGRANGE)

Considérons un élément plaque (dx dy) sur lequel agit une charge q(x,y) répartie par unité de surface .



Fig(I-5)

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

Projetons sur l'axe OZ toutes les forces agissant sur l'élément ; on obtient l'équation d'équilibre suivante :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} (dx dy) + \frac{\partial T_y}{\partial y} (dx dy) + q dx dy = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0 \quad (I-14)$$

En faisant de même pour les projections des moments sur les axes X et Y on obtient les 2 équations suivantes :

$$\sum M/x = - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + T_y = 0 \quad (I-1)$$

$$\sum M/y = \frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - T_x = 0$$

Remarque : Les équations (I-14) et (I-1) définissent entièrement l'équilibre de notre élément étant donné qu'il n'existe pas de forces agissant suivant les axes X et Y et pas de moment par rapport à Z .

Des équations (I-1), on peut déduire :

$$T_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (I-J)$$

$$T_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

En dérivant la première et la seconde équation de (I-J) respectivement par rapport à x puis y , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial T_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \end{aligned} \quad \text{(I-K)}$$

En injectant les équations (I-K) dans l'équation (I-14) on obtient :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad \text{(I-15)}$$

En substituant les valeurs de M_x , M_y et M_{xy} obtenues dans les équations (I-G) dans l'équation (I-15), on en déduit l'équation suivante :

$$\Delta^4 W = q/D \quad \text{(I-16)}$$

Remarque : L'équation (I-16) est dite équation gouvernante ou équation de Poisson.

On peut réécrire les équations (I-J) sous la forme :

$$\begin{aligned} T_x &= -D \frac{\partial \Delta^2 W}{\partial x} \\ T_y &= -D \frac{\partial \Delta^2 W}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{(I-L)}$$

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

Remarque : Δ^2 désigne le Laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

I-5-CONDITIONS AUX LIMITES

Le déplacement W doit satisfaire à l'équation de Lagrange et aux conditions aux limites sur le contour de la plaque pour différents cas d'appuis.

1) Bord encasté

Si le bord de la plaque est encasté, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent à la surface moyenne fléchie le long de ce bord coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque .

Supposons que le bord encasté soit $x=a$

$$W|_{x=a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial x}|_{x=a} = 0$$

2) Bord simplement appuyé

Si le bord $x=a$ de la plaque est simplement appuyé, la flèche W le long de celui-ci sera nulle ; cependant, ce bord pourra tourner librement autour de l'axe Y , c'est à dire qu'il n'existe pas de moment de flexion par rapport à l'axe Y le long de ce bord ; la représentation analytique des conditions aux limites est donnée par :

$$W|_{x=a} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0$$

3) Bord libre

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

Si le bord $x=a$ de la plaque est entièrement libre, cela veut dire que ce bord ne subit ni moment de torsion et de flexion, ni forces de cisaillement verticales.

$$M_x|_{x=a} = 0 \quad ; \quad M_{xy}|_{x=a} = 0 \\ T_x|_{x=a} = 0$$

M_x , M_{xy} et T_x sont les effort appliqués sur les bords de la plaque. C'est Poisson qui a exprimé les conditions aux limites pour un bord ; plus tard Kirchoff prouva que 2 conditions suffisaient pour déterminer complètement les flèches satisfaisant l'équation de Sophie Germain. Il démontra que les 2 conditions aux limites relatives aux moments de torsion M_{xy} et l'effort tranchant T_x pouvaient être remplacés par une seule condition aux limites. La répartition des moments de torsion M_{xy} est statiquement équivalente à une répartition de forces de cisaillement d'intensité :

$$T_x = \left(\frac{\partial(M_{xy}/x)}{\partial y} \right) |_{x=a}$$

Par suite, la condition requise, relative à M_{xy} et T_x le long du bord libre est :

$$(T_x + T'_x) |_{x=a} = 0 \quad \text{ou bien ;} \quad (T_x + \frac{\partial(M_{xy}/x)}{\partial y}) |_{x=a} = 0 \quad \text{(I-17)}$$

Or :

$$T_x = -D \frac{\partial \Delta^2 W}{\partial x} dy \quad \text{et} \quad M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy$$

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

En remplaçant dans la formule (I-17) on obtient :

$$\left(-D \frac{\partial \Delta^2 W}{\partial x} - D(1-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0$$

Ou bien :

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} - \mu \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0$$

D'où la 1^{ère} condition aux limites :

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{(I-17)}$$

La condition pour laquelle le moment de flexion est nul le long du bord libre est :

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{(I-18)}$$

Les équations (I-17) et (I-18) représentent les 2 conditions aux limites établies par Kirchoff.

I-6-METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTE

La résolution de l'équation gouvernante peut se faire par plusieurs méthodes se présentant en 2 groupes :

1^{er} Groupe :

On démarre de la fonction satisfaisant à l'équation fondamentale de notre plaque sans toutefois satisfaire forcément à une ou plusieurs des conditions aux limites ; en second lieu on recherche une fonction complémentaire susceptible de satisfaire communément tant à l'équation générale de la plaque qu'aux conditions aux limites.

2^{ème} Groupe

La procédure de résolution se fait de manière inverse à celle évoquée précédemment ; parmi ces méthodes on peut citer:

- Méthode des séries doubles de Fourier
- Méthodes variationnelles
- Méthodes par différence
- Méthode directe de résolution
- Solution de Maurice-Lévy

I-7-CONCLUSION

De tout ce qui a précédé il est à noter que la résolution des équations aux dérivées partielles dans le cas de flexion de plaques demeure fastidieuse , pour les cas simples .

Chap.I. THEORIE DES PLAQUES MINCES

Si les conditions de distribution du chargement , la géométrie de la plaque et les conditions aux limites se compliquent, la résolution analytique peut devenir impossible et c'est pourquoi seules les méthodes numériques sont applicables.

La méthode des éléments finis représente l'un des outils indiqués pour la résolution de ces équations.

CHAPTER II

II-1-INTRODUCTION

La nécessité de réalisation de projets d'envergure et souvent complexes amène l'ingénieur à rechercher des modèles adéquats lui permettant de simuler les comportements des systèmes physiques complexes imposés par l'évolution technologique.

La méthode des éléments finis constitue aujourd'hui un procédé général de discrétisation des problèmes continus ; elle utilise pour cela une approximation simple des variables inconnues pour transformer les relations mathématiques (équations aux dérivées partielles) décrivant le comportement des systèmes physiques en équations algébriques dont la résolution numérique se fait par ordinateurs.

II-2-HISTORIQUE

La 2^{ème} moitié du 19^{ème} siècle constitue le point de départ logique de l'histoire de l'analyse des structures. Ceci a pu se faire grâce aux travaux d'imminents savants tels Navier , Maxwell et Castigliano qui ont énormément contribué et permis à leurs successeurs de poser les fondements de l'analyse des structures composées d'assemblage de barres présentant ainsi la méthodologie précédant l'analyse matricielle des structures.

La limitation sévère sur la taille des problèmes ne pouvant être traités à cause du système d'équations à résoudre a freiné en quelque sorte la percée, pour un certain temps, de cette méthode. Il fallait attendre que Hardy Cross en 1934 introduise la méthode de la distribution des moments, méthode qui a rendu résolubles des problèmes beaucoup plus complexes et provoquant ainsi la naissance de la méthode matricielle surtout pour les structures à treillis.

- Méthode des forces ARGYRIS, DENKE (1955)
- Méthode des déplacements ARGYRIS, TURNER (1956)

Les travaux de Courant (1940) ont présenté aussi un intérêt particulier en raison de leurs orientations vers des phénomènes régis par des équations

Chap.II. GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

applicables dans des domaines autres que celui de la mécanique des structures. Dès 1960 la méthode des éléments subit un développement rapide en se basant théoriquement d'une part sur la formulation énergétique et la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation [Ritz (1908) , Galerkin (1915)]. Son champs d'application ne cesse de s'élargir et de s'étendre touchant ainsi à presque tous les domaines sensibles, en particulier la construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire.

II-3-NOTIONS DE BASE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II-3-1-CONCEPTS D'ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis fixe un certain nombre de principes qui facilitent l'approximation et surmontent les problèmes de passage, du modèle réel au modèle mécanique.

a) Le milieu continu est divisé par des lignes imaginaires en un certain nombre de parties dites "éléments-finis".

b) Les éléments sont supposés reliés entre eux en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières ; les déplacements de ces points nodaux seront les inconnues de base du problème.

c) On choisit une (dans notre cas plusieurs) fonction(s) permettant de définir de manière unique le champs de déplacement.

d) Les fonctions de déplacement définissent sans ambiguïté l'état des déformations à l'intérieur d'un élément en fonction des déplacements nodaux ; ces déformations définissent à leur tour l'état des contraintes en tout point de l'élément et par voie de conséquence également sur les frontières.

Chap.II. GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

e) On détermine un système de forces concentrées aux noeuds qui équilibrent les contraintes s'exerçant aux frontières et d'éventuelles forces réparties ; il en résulte une relation de rigidité.

C'est par le biais de ces fondements que les recouvrements et les vides le long des inter-éléments ne sont pas tolérés, ce qui différencie la méthode des éléments finis des autres méthodes matricielles.

II-3-2-FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Trois formulations possibles peuvent être envisagées pour traiter un problème par éléments finis.

- Méthode des déplacements (de rigidité)
- Méthode des forces (de souplesse)
- Méthode mixte (hybride)

Pour la 1^{ère} formulation, on définit un champs de déplacements satisfaisant la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément, cela peut se faire par le choix d'une fonction de déplacement qui caractérisera l'état de déplacement d'une façon unique.

On suppose que les conditions de compatibilité des déplacements, l'équation gouvernante et le mouvement de corps rigide sont satisfaits, la résolution des équations d'équilibre nous permettra de déterminer les déplacements nodaux (uniques). C'est l'approche déplacement.

En ce qui concerne la 2^{ème} formulation, elle consiste à définir un champs de contraintes assurant l'équilibre de l'élément. En résolvant ensuite les équations de compatibilité des déplacements, on obtient les forces.

Enfin la 3^{ème} formulation est un mélange des deux précédentes donnant ainsi naissance à un nouveau concept qui est "élément fini hybride".

Chap.II. GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Dans notre cas, en raison de la plus grande facilité d'approcher les déplacements que les contraintes, nous avons opté pour la première formulation qui est d'ailleurs la plus utilisée, pour cela les inconnues du problème (déplacements) seront approchées par des fonctions d'interpolation (généralement de forme polynomiale) afin d'assurer la continuité de ces déplacements aux niveaux des interfaces et des noeuds communs à 2 éléments adjacents.

Mais le choix de ces fonctions d'interpolation n'est pas chose facile, du fait que ces dernières doivent satisfaire aux conditions de continuité des déplacements le long des interfaces et cela en faisant abstraction à la continuité à l'intérieur des éléments qui doit être satisfaite en raison de l'unicité des déplacements (état de déformation constant, mouvement de corps rigide).

Ces difficultés de choix des champs de déplacements proviennent du fait que la flexion des plaques planes est régie par une équation différentielle du 4^{ème} ordre, et non du second ordre comme dans le cas des équations d'équilibres en contraintes planes et en déformations planes.

II-4- PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS SELON LA FORMULATION VARIATIONNELLE

II-4-1-INTRODUCTION

La plupart des formulations actuelles pour les structures s'obtiennent par l'application du principe variationnel.

II-4-2-DIFFERENTES METHODES DE FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Chap.II. GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

On a exposé au court du paragraphe précédent les 3 grandes classes de méthodes pour la construction des équations algébriques permettant une formulation complète en éléments finis.

L'établissement de ces équations relatives à chaque grande classe peut être examiné par l'une des 3 méthodes suivantes :

- 1)- Méthode directe
- 2)- Méthode des résidus pondérés
- 3)- Méthode variationnelle

a)Méthode directe

On combine directement les 3 systèmes d'équations d'élasticité à savoir les équations d'équilibre, les équations déformations-déplacements et les équations intrinsèques du matériau avec l'équation force contraintes.

$$[K] \{\hat{U}\} = \{F\} \text{ équation d'équilibre} \quad \text{(II-1)}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\hat{\epsilon}\} \text{ équation intrinsèque} \quad \text{(II-2)}$$

$$\{\hat{\epsilon}\} = [L] \{\hat{U}\} \text{ équation déformations-déplacements} \quad \text{(II-3)}$$

$$\{F\} = [A] \{\sigma\} \text{ équation forces-contraintes} \quad \text{(II-4)}$$

En remplaçant (II-2) et (II-3) dans (II-4), on obtient l'équation suivante :

$$\{F\} = [A] [D] [L] \{\hat{U}\}$$

Puis en utilisant l'équation (II-1) on déduit :

$$[K] = [A] [D] [L]$$

Remarque: La méthode directe est d'une application limitée, elle s'applique pour des éléments discrets, et il est difficile, voire impossible de l'appliquer à des éléments complexes.

b) Méthode des résidus pondérés

Elle implique à priori le choix d'une fonction d'approximation (polynome par exemple). Cette fonction ne satisfait pas, en général, l'équation différentielle du problème, et sa substitution dans cette équation entraînerait l'apparition d'un résidu qu'on note R.

Afin d'aboutir à une solution parfaite, nous tâcherons de minimiser l'intégrale des résidus portant sur le domaine, c'est à dire :

$$\int_V R \, dv = \text{minimum}$$

On peut relever la précision de cette méthode en lui associant une fonction de pondération notée \emptyset et on essayera maintenant de minimiser le produit :

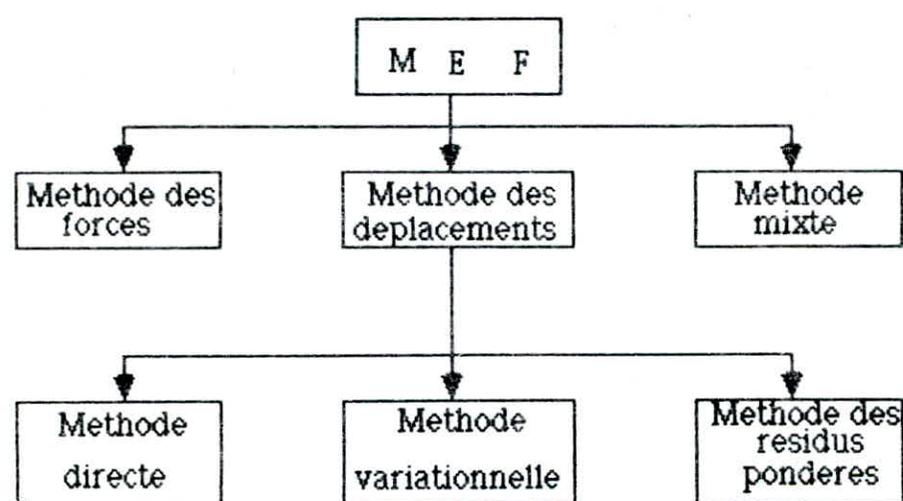
$$\int_V R \emptyset \, dv = 0$$

Cette dernière équation résume la méthode des résidus pondérés, différentes fonctions de pondération ont pu être établies par différents chercheurs tels Galerkin et Ritz.

c)Formulation variationnelle (approche énergétique)

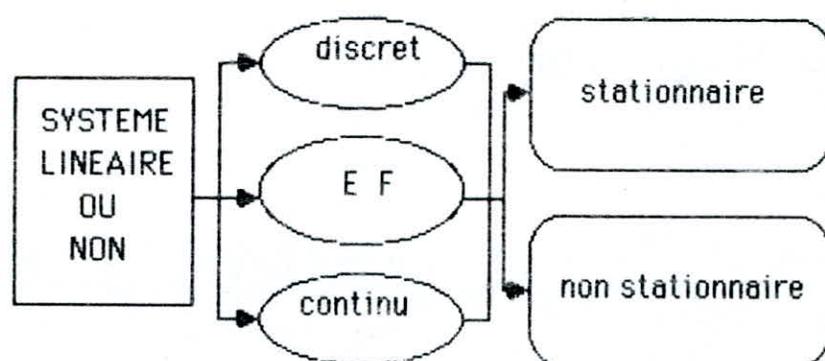
Vue l'importance que revêt cette méthode, son utilisation fréquente dans la mécanique des structures, et vus les inconvénients que présente la méthode directe dont le domaine d'application est limité, la méthode variationnelle est la méthode qu'on préfère utiliser.

Cela ne touche en rien au mérite de la méthode des résidus pondérés dont le domaine d'application est illimité et qui est utilisée pour des applications dans d'autres domaines.



Fig(II-1)

II-5-CLASSIFICATION DES SYSTEMES PHYSIQUES



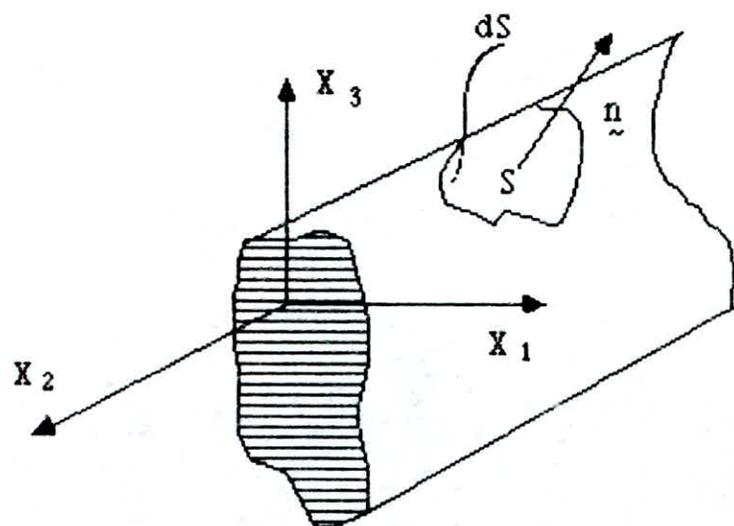
Fig(II-2)

La méthode variationnelle appliquée aux problèmes de la mécanique des structures se base sur le principe des travaux virtuels, lequel constitue le fondement des principes variationnels tel que le principe de la stationnarité de l'énergie de déformation qu'on exposera ultérieurement.

a)Principe du travail virtuel

Si on impose à un corps déformable un champs de déplacement virtuel δU_i , les forces extérieures réelles effectuent un travail virtuel extérieur δW tandis que les forces intérieures $(\sigma_{ij} dS)$ effectuent un travail virtuel de déformation δU . Ce corps sera en équilibre si :

$$\delta W = \delta U \quad (II-5)$$



Fig(II-3)

$T_i = \sigma_{ij} n_j$: Forces de surface

$B_i = \Omega f_i$: Forces de volume

$$\delta W = \int_V B_i \delta U_i dV + \int_S T_i \delta U_i dS$$

Chap.II. GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

D'après le principe de convergence :

$$\int_R \Delta \tilde{V} \tilde{dV} = \int_{\partial R} \tilde{V} \tilde{x} \tilde{dA}$$

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial x_i} dV = \int_S F n_i dS$$

Donc :

$$\delta W = \int_V B_i \delta U_i dV + \int_V (\sigma_{ij} \delta U_i)_j dV$$

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV$$

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta U_{i,j} + \delta U_{j,i}) \quad (\text{II-6})$$

Comme $\delta U_{i,j} = \delta U_{j,i}$ on peut donc écrire

$$\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta U_{i,j} \quad (\text{II-7})$$

$$\delta W = \int_V [(B_i + \sigma_{ij,j}) \delta U_i + \sigma_{ij} \delta U_{i,j}] dV \quad (\text{II-8})$$

Chap.II. GENERALITES SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

En considérant l'équilibre locale, le terme $(B_{ij} + \sigma_{ij,j})$ s'annule :

On écrit :

$$(B_{ij} + \sigma_{ij,j}) = 0$$

L'équation (II-8) devient :

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \delta U$$

Puis, en considérant l'équation (II-7), on peut écrire :

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta U$$

D'où:

$$\delta W = \delta U$$

II-6-PRINCIPE DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE MINIMALE

D'après le principe du travail virtuel on a :

$$\delta U = \delta W \quad \text{donc} \quad \delta U - \delta W = 0 \quad \text{c'est à dire}$$

$$\delta (U - W) = 0$$

Théorème: De tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, celui qui satisfait aux conditions

d'équilibre donne à l'énergie potentielle totale Π une valeur stationnaire .

Si le système est stable, l'énergie totale est par définition minimum dans la configuration réelle du système.

$$\delta \Pi = \delta (U - W) = 0$$

Principe de l'énergie potentielle minimale:

Parmi toutes les configurations de déplacements cinématiquement admissibles qu'un corps élastique peut prendre, se trouve la configuration qui satisfait l'équilibre, de manière que l'énergie potentielle totale prend une valeur minimale.

L'énergie potentielle totale d'un système contenant des degrés de liberté d_i ($i=1; \dots; n$) peut être exprimée en fonction de ces mêmes degrés de liberté de la manière suivante .

$$\Pi = \Pi (d_i) \quad i= 1; \dots; n$$

L'énergie potentielle totale sera minimale si ses dérivées partielles par rapport aux degrés de liberté s'annulent :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial d_2} = \dots = \frac{\partial \Pi}{\partial d_n} = 0$$

Cette procédure va engendrer un système de N équations algébriques simultanées.

II-7-CRITERES DE CONVERGENCE

On ne s'intéressera qu'aux erreurs causées par la discrétisation de la structure et à la convergence de la solution par éléments finis vers la solution exacte (modèle mathématique).

Au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente la convergence peut se faire soit de manière monotone soit de manière non monotone.

Conditions de convergence monotone: Les éléments doivent être complets et compatibles.

a) Élément complet: Les fonctions de déplacement doivent être en mesure de représenter des déplacements de corps rigide $\sum h_i = 1$ et un état de déformation constante.

b) Élément compatible: Les déplacements au sein des éléments et à travers les limites séparant les éléments doivent être continus.

Physiquement la compatibilité assure la non émergence d'espaces ou vides, entre éléments lorsque l'assemblage est chargé.

La compatibilité est très difficile à satisfaire lorsque les degrés de liberté aux noeuds sont dépendants ($W ; \theta_x ; \theta_y$) comparativement aux éléments avec des degrés de liberté indépendants.

CHAPTER III

Chap. III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

III-1-INTRODUCTION

Pour les structures treillis, une subdivision en plusieurs éléments est naturelle, alors que pour une structure continue, une subdivision finie correspondante naturelle n'existe pas, de telle sorte que la structure doit être artificiellement divisée en éléments. Cependant la méthode des éléments finis permet de bâtir un modèle satisfaisant en utilisant un nombre fini de constituants bien définis. Cette approximation peut être obtenue de la manière suivante :

-Le milieu continu est divisé par des lignes ou par des surfaces imaginaires, en un certain nombre d'éléments finis.

-Les éléments sont supposés reliés entre eux en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières, appelés communément "nœuds" . Les déplacements de ces points seront des inconnues de base du problème exactement comme un simple calcul de structures.

- On choisit une (ou des) fonction (s) permettant de définir de manière unique le champs des déplacements à l'intérieur de chaque " élément fini " , en fonction des déplacements de ces nœuds.

- Les fonctions de déplacements définissent maintenant l'état des déformations sans ambiguïté à l'intérieur de l'élément, en fonction des déplacements nodaux. Et compte tenu des propriétés élastiques du matériau ces mêmes fonctions définissent l'état de contraintes en tout point de l'élément et par conséquent sur ses frontières.

- On détermine un système de forces concentrées aux nœuds qui équilibrent les contraintes s'exerçant aux frontières, et d'éventuelles forces réparties. Il en résulte une relation de rigidité.

Chap.III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

III-2-DISCRETISATION D'UNE STRUCTURE

Un corps déformable possède un nombre infini de points ; en chacun de ceux ci, on peut définir les forces extérieures, les contraintes, les déformations et les déplacements.

Dés lors, il est indispensable de substituer à la structure étudiée, un modèle mathématique composé d'un certain nombre d'éléments appelés "éléments finis", reliés entre eux en un nombre fini de points appelés nœuds.

Il y a un grand nombre d'éléments finis, chacun ayant ses avantages particuliers. Dans le présent travail, nous opterons pour un élément fini rectangulaire linéaire.

L'énergie de déformation devra approcher le plus possible celle de la structure continue. Les interactions entre éléments sont introduites sous forme de forces et de déplacements généralisés.

Certaines structures, notamment les plaques et les coques, sont idéalisées par des éléments discrets, dont les liaisons mutuelles sont continues le long des interfaces.

L'idéalisation consiste à ne considérer que les liaisons nodales, c'est à dire en un nombre fini de points situés sur les bords des éléments.

Les forces qui assureront ainsi l'interaction des éléments aux nœuds, sont dites généralisées.

Lorsque le champs de déplacement assure en outre la continuité des déplacements aux interfaces, l'élément constitue un modèle pur ou "conforme".

III-3-PROBLEME DE CONTINUITÉ

Dans la méthode des éléments finis, les éléments indépendants sont contraints de se déformer de façon bien spécifique.

Le choix d'un mode convenable de déformation pour les éléments doit être tel que toute la continuité de l'assemblage tende à être maintenue.

Chap. III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

Pour la flexion des plaques, le déplacement latéral W du plan médian devra définir de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

Pour que soit assurée la continuité des paramètres nodaux d'un élément à l'autre le long des côtés, il est pratique de représenter par une expression polynomiale en X et Y la fonction déplacement, et puisque son but est d'exprimer les déplacements de n'importe quel point $(a(x,y))$ en termes de déplacements nodaux (a^e) , elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément.

Dans un premier temps nous étudierons un élément de 4 nœuds à 3 degrés de liberté par nœuds, l'élément comportera alors un total de 12 degrés de liberté par élément, la fonction d'interpolation représentant la déflexion W comportera donc 12 coefficients indéterminés. La fonction choisie permettra une discontinuité de la pente normale le long de n'importe quel bord, elle n'est donc pas idéale et elle est nommée par conséquent fonction non conforme.

Un moyen de surmonter cette difficulté consiste à utiliser des éléments d'ordre plus élevé, donc à opter pour des polynômes d'ordre plus élevé pour les fonctions de déplacement.

Cela peut se faire de 2 façons :

- La première consiste à donner des paramètres de déplacement additionnels aux nœuds situés sur les sommets (éléments de haute précision de type Hermite).

- La seconde consiste à placer d'autres nœuds le long des côtés (en plus des nœuds aux sommets), en donnant à ceux-ci n'importe quel paramètre de déplacement (éléments de haute précision de type Lagrange).

L'avantage de ces éléments est que très peu d'entre eux sont nécessaires pour modéliser une structure. Cependant cela est réalisé au détriment de la simplicité de calcul.

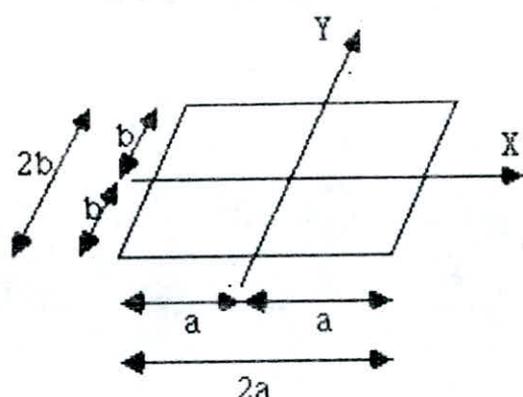
Dans ce qui suivra, nous utiliserons pour le calcul de la rigidité des éléments la première solution c'est à dire celle qui consiste à augmenter les degrés de liberté de chaque nœud.

Chap.III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

III-4- OBTENTION DE LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE PAR LE PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

On peut énoncer les étapes suivantes pour la résolution d'un problème d'éléments finis.

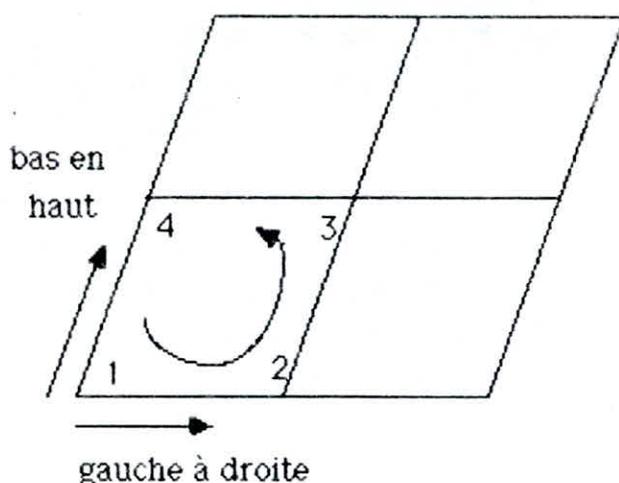
1^{er}étape: (choix d'un système de coordonnées convenable et numérotation des nœuds)



Fig(III-1)

L'élément que nous considérerons durant tout ce qui suit est rectangulaire de cotés $2a$ et $2b$; on numérote de manière que la différence entre les valeurs maximales et minimales attribuées aux nœuds d'un même élément soit la plus petite possible ; pour cela on opte pour une numérotation de gauche à droite et de bas en haut.

Chap.III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES



Fig(III-2)

Pour la numérotation locale on choisit le sens trigonométrique comme indiqué sur la figure ci dessus.

2^{em} étape: (choix de la fonction de déplacement $[f(x,y)]$ qui définit le déplacement en chaque point de l'élément)

En fonction du degré de liberté par nœud et les fonctions de forme adoptées on écrit la relation entre les déplacements en n'importe quel point et les déplacements nodaux.

$$\{a\} = [f(x,y)] \{\beta\}$$

Puis comme $\{a^e\} = [A] \{\beta\}$ c'est à dire $\{\beta\} = [A]^{-1} \{a^e\}$

On écrit $\{a(x,y)\} = f(x,y) [A]^{-1} \{a^e\}$

Chap.III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

3^{em}étape: (Relier les déformations $\{ \xi(x,y) \}$ en chaque point aux déplacements $\{ a(x,y) \}$ et donc aux déplacements nodaux $\{ a^e \}$)

Dans le cas d'un problème de flexion des plaques, l'état des déformations en chaque point peut être représenté par 3 composantes :

- La courbure dans la direction de X notée: $-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$

- La courbure dans la direction de Y notée: $-\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$

- La torsion notée: $-\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$

Les moments internes M_x et M_y agissent chacun sur 2 cotés de l'élément, il en est de même pour les moments de torsion M_{xy} et M_{yx} , mais puisque M_{xy} est égal à M_{yx} on peut ne considérer que l'un des deux, par exemple M_{xy} agit sur les quatres cotés, cela en doublant le terme de torsion dans le vecteur déformation.

$$\{ \xi(x,y) \} = \left\{ -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} ; -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} ; -2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right\}^T$$

Puis en remplaçant W par sa valeur dans la fonction de déplacement choisie, on écrit :

$$\{ \xi(x,y) \} = [C] \{ \beta \}$$

Chap.III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

Et comme

$$\{\beta\} = [A]^{-1} \{a^e\}$$

Donc

$$\{\xi(x,y)\} = [C] [A]^{-1} \{a^e\}$$

4^{em}étape: (Relier les contraintes internes $\{\sigma(x,y)\}$ aux déformations et aux déplacements nodaux $\{a^e\}$)

Dans la résolution des problèmes de flexion des plaques, les contraintes internes sont réellement les moments de flexion et de torsion, les déformations sont représentées par les courbures et les torsions vues dans l'étape 3. Ainsi l'état de contrainte peut être représenté par les 3 composantes M_x , M_y et M_{xy} .

$$\{\sigma(x,y)\} = \{M_x; M_y; M_{xy}\}^T$$

Les relations entre contraintes et déformations comme données au CHAPII s'écrivent :

$$M_x = (D_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2})$$

$$M_y = (D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2})$$

$$M_{xy} = -2 D_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

Chap.III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

D_x et D_y sont les rigidités de flexion dans les directions X et Y

D_1 est la rigidité de couplage de type Poisson

D_{xy} est la rigidité a la torsion

Comme on est dans le cas d'une plaque isotrope :

$$D_x = D_y = D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$D_1 = \mu D \quad \text{et} \quad D_{xy} = \frac{1}{2} (1-\mu) D$$

$$\{ \sigma(x,y) \} = \begin{vmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{vmatrix} \{ \epsilon(x,y) \}$$

Puis :

$$\{ \sigma(x,y) \} = [D] \{ \epsilon(x,y) \}$$

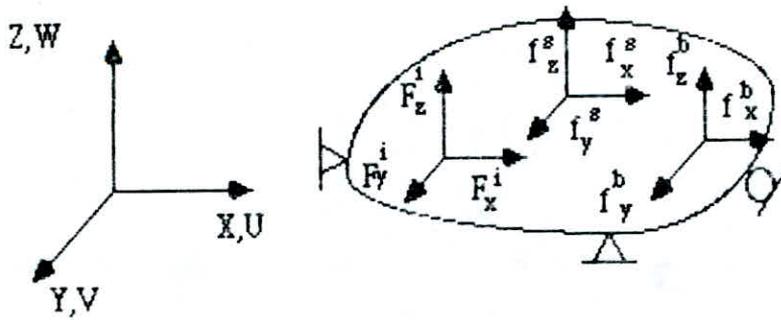
$$\{ \epsilon(x,y) \} = [C] [A]^{-1} \{ a^e \}$$

Donc :

$$\{ \sigma(x,y) \} = [D] [C] [A]^{-1} \{ a^e \} \quad \text{(III-1)}$$

**Chap.III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES**

5^{em}étape :



Fig(III-3)

F_i : force concentrée
 f^b : force volumique
 f^s : force surfacique

Avec

$$\{F_i\} = \{ F_x^i ; F_y^i ; F_z^i \}^T$$

$$\{f^b\} = \{ f_x^b ; f_y^b ; f_z^b \}^T$$

$$\{f^s\} = \{ f_x^s ; f_y^s ; f_z^s \}^T$$

Soit $\{a^e\} = \{ u ; v ; w \}^T$ (III-2)

Les déformations correspondantes sont :

$$\{ \varepsilon_{(x,y)} \}^T = \{ \varepsilon_{xx} ; \varepsilon_{yy} ; \varepsilon_{zz} ; \varepsilon_{xy} ; \varepsilon_{yz} ; \varepsilon_{zx} \}$$

Chap. III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

Les contraintes correspondantes sont :

$$\{ \sigma(x,y) \}^T = \{ \sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \sigma_{zz}; \sigma_{xy}; \sigma_{yz}; \sigma_{zx} \} \quad \text{(III-3)}$$

Le problème consiste à déterminer les déplacements et contraintes de (III-2) et (III-3) dans le milieu considéré sous l'effet du chargement extérieur et des conditions aux limites. Pour ce faire il faut préalablement établir les équations d'équilibre ; on utilisera pour cela la condition de stationnarité du potentiel total du système. Le principe de stationnarité du potentiel total du système est équivalent au principe des travaux virtuels ou déplacements virtuels qui stipule que l'équilibre du milieu nécessite que, pour tout champ de déplacements virtuels infinitésimaux, compatible, satisfaisant les conditions aux limites essentielles (de type déplacements) imposées au milieu, il y ait égalité des travaux internes et externes.

Soit $\{ a^{e*} \} = \{ u^* ; v^* ; w^* \}^T$ le vecteur déplacements virtuels

On écrit :

$$W_{int} = W_{ext}$$

C'est à dire

$$\int_V \{ \xi^* \}^T \{ \sigma \} dV = \int_V \{ a^{b*} \}^T \{ f^b \} dV + \int_S \{ a^{s*} \}^T \{ f^s \} dS + \sum_i \{ a^{i*} \}^T \{ F^i \}$$

$$W_{ext} = \{ a^* \}^T \{ F^e \}$$

$$W_{int} = \int_V \{ \xi^* \}^T \{ \sigma \} dV$$

Compte tenu de ce qui a été trouvé dans la formule (III-1), on peut écrire :

Chap.III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

$$\{a^*\}^T \{F^e\} = \int_V \{a^*\}^T [B]^T [D] [B] dV \{a^e\}$$

D'où :

$$\{F^e\} = \int_V [B]^T [D] [B] dV \{a^e\} \quad \text{(III-4)}$$

L'équation (III-2) est du type : $\{F^e\} = [K^e] \{a^e\}$

Ou bien : $[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$

Remarque : $[K^e]$ est dite matrice de rigidité de l'élément

Pour le cas particulier de la flexion des plaques où le travail total est dû aux moments et aux torsions internes pour un déplacement virtuel de l'élément, on peut écrire

$$[K^e] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b [B]^T [D] [B] dx dy$$

6^{em}étape: (Lors de cette étape on doit évaluer le vecteur forces nodales pour l'élément rectangulaire en appliquant le théorème de la conservation de l'énergie potentielle totale)

Afin de pouvoir calculer les forces nodales statiquement équivalentes aux chargements répartis sur les frontières de l'élément, on impose un déplacement virtuel arbitraire aux nœuds de l'élément ; le travail effectué par les forces nodales directement appliquées aux nœuds étant égal à la somme des produits de chaque composante des forces par le déplacement correspondant,

Chap.III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

on écrit :
$$\delta W^*_{ext} = \delta \{a^{e*}\}^T \{Q^e\} \quad (III-5)$$

Le travail intérieur effectué par les contraintes et les chargements répartis (q), obtenu par intégration sur le volume de l'élément :

$$\delta W^*_{int} = \int_V \delta \{\varepsilon(x,y)\}^T \{\sigma(x,y)\} dV - \int_V \{a^*\} \{q\} dV \quad (III-6)$$

Ou encore:

$$\delta W^*_{int} = \int_V \delta \{a^{e*}\}^T [B]^T \{\sigma(x,y)\} dV - \int_V \delta \{a^{e*}\} [N]^T \{q^e\} dV \quad (III-7)$$

$$[N] = [f(x,y)] [A]^{-1}$$

Où $f(x,y)$ est la fonction de déplacement qu'on développera dans le chapitre suivant

Et $[N]$ est la fonction de forme.

Puis en considérant que la variation du travail interne est égale à la variation du travail externe :

$$\delta W^*_{int} = \delta W^*_{ext} \quad (III-8)$$

En égalisant les équations (III-6) et (III-7) en vertu de l'équation (III-8) :

**Chap.III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES**

$$\delta \{a^e\}^T \{Q^e\} = \delta \{a^e\}^T \left(\int_V ([B]^T \{\sigma(x,y)\} - [N]^T \{q^e\}) dV \right)$$

Cette relation étant valable pour n'importe quel déplacement virtuel, on en conclue donc l'égalité des matrices multiplicatrices de ces derniers.

$$\{Q^e\} = \int_V ([B]^T \{\sigma(x,y)\} - [N]^T \{q^e\}) dV \quad \text{(III-9)}$$

Et comme pour un comportement linéaire élastique

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] [B] \{a^*\}$$

L'équation (III-7) devient:

$$\{Q^e\} = \{a^*\} \int_V [B]^T [B] dV - \int_V [N]^T \{q^e\} dV$$

C'est à dire :

$$\{Q^e\} = [K^e] \{a^e\} - \int_V [N]^T \{q^e\} dV \quad \text{(III-10)}$$

Puis :

$$\{Q^e\} = [K^e] \{a^e\} - \{P^e\} \quad \text{(III-11)}$$

Avec $[K^e] \{a^e\}$: vecteur engendré par les déplacements des nœuds.

Et $\{P^e\}$: forces nodales statiquement équivalentes à une charge $\{q\}$ répartie sur la surface de l'élément.

En identifiant les équations (III-8) et (III-9) on déduit :

$$\{P^e\} = \int_V [N]^T \{q^e\} dV \quad \text{(III-12)}$$

Chap. III. APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

Dans notre cas, cette intégrale généralisée se ramène à une intégrale surfacique, le vecteur charge a une seule composante suivant l'axe Z et sachant que :

$$[N]^T = [A]^{-1T} [f]^T$$

L'équation (III-10) s'écrira donc :

$$\{p^e\} = [A]^{-1T} \{q^e\} \int_{-a}^a \int_{-b}^b [f]^T dx dy$$

Après intégration, le vecteur forces nodales devient :

$$\{p^e\} = \frac{q a b}{4} \left\{ 1; \frac{b}{6}; -\frac{a}{6}; 1; \frac{b}{6}; \frac{a}{6}; -\frac{b}{6}; \frac{a}{6}; -\frac{b}{6}; -\frac{a}{6} \right\}$$

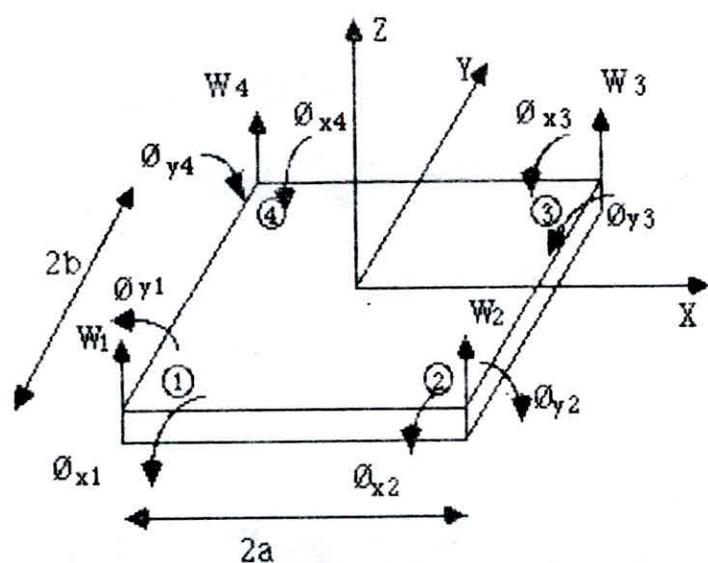
Pour un élément à 16 D.D.L, le vecteur force sera comme suit :

$$\{p^e\} = \frac{q a b}{4} \left\{ 1; \frac{b}{6}; -\frac{a}{6}; \frac{ab}{36}; 1; \frac{b}{6}; \frac{a}{6}; -\frac{ab}{36}; 1; -\frac{b}{6}; \frac{a}{6}; -\frac{ab}{36}; 1; -\frac{b}{6}; -\frac{a}{6}; -\frac{ab}{36} \right\}^T$$

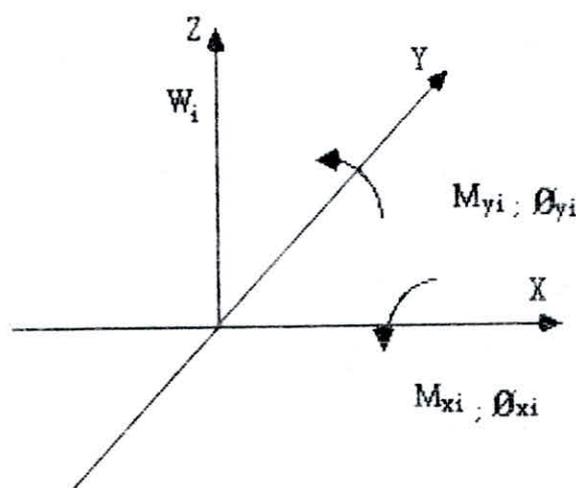
CHAPTER IV

IV-1-INTRODUCTION

Il est très facile de travailler avec un élément de forme rectangulaire en comparaison avec d'autres éléments parce qu'il convient parfaitement à l'utilisation des coordonnées cartésiennes. Un élément rectangulaire type est montré sur la figure ci-après.



Fig(IV-1-a)



Fig(V-1-b)

L'élément considéré a une longueur de $2a$, une largeur de $2b$ et une épaisseur de h , on suppose que l'origine du repère cartésien est au milieu de l'élément rectangulaire et qu'on a 3 degrés de liberté par nœud, une déflexion W suivant l'axe Z , une rotation autour de l'axe X notée $\theta_x = \frac{\partial W}{\partial y}$ et une rotation autour de l'axe Y notée $\theta_y = \frac{\partial W}{\partial x}$

Puisque l'élément a 12 degrés de liberté, on doit avoir 12 coefficients indéterminés dans le polynôme qui représente W . L'équation (IV-1) citée dans le paragraphe suivant donne une fonction convenable.

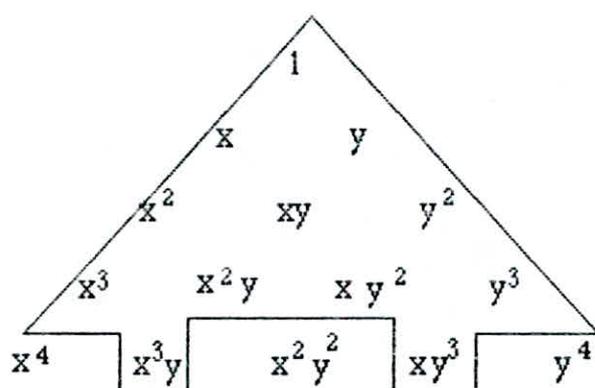
IV-2-FONCTION DE DEPLACEMENT

La fonction de déplacement dictée ci-dessous peut être retrouvée en utilisant le triangle de Pascal.

Chap.IV. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L NON CONFORME

$$W(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y + \beta_9 xy^2 + \beta_{10} y^3 + \beta_{11} x^3 y + \beta_{12} xy^3$$

(IV-1)



Fig(IV-2)

C'est un polynome d'ordre 4 incomplet en x et y avec comme termes supprimés x^4 , y^4 et $x^2 y^2$.

IV-3-DEFORMATIONS CONSTANTES, DEPLACEMENT NODAL ET COMPATIBILITE INTER-ELEMENTS

L'élément plaque peut avoir 3 mouvements possibles, une déflexion et 2 rotations θ_x et θ_y . Dans la fonction de déplacement les 3 termes β_1 , $\beta_2 x$ et

Chap. IV. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L NON CONFORME

β_3y montrent le besoin des 3 déplacements nodaux respectivement aux constantes β_1 , β_2 et β_3 .

L'élément plaque a 3 termes de déformation $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$

Dans la fonction de déplacement les 3 termes β_4x^2 , β_5y^2 et β_6xy montrent le besoin des 3 déformations constantes respectivement aux constantes β_4 , β_5 et β_6 .

Pour vérifier la compatibilité inter-éléments, considérons la fonction de déplacement le long du côté 2-3 de l'élément montré sur la figure (IV-1-a). On peut donc écrire :

$$W(a,y) = a_1 + a_2y + a_3y^2 + a_4y^3$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}(a,y) = a_2 + 2 a_3y + 3 a_4y^2$$

Les 4 constantes a_1 , a_2 , a_3 et a_4 sont définies uniquement par les 4 valeurs de D.D.L aux nœuds 2 et 3.

$$W(a,-b) = a_1 - a_2b + a_3b^2 - a_4b^3 = W_2$$

$$W(a, b) = a_1 + a_2b + a_3b^2 + a_4b^3 = W_3$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}(a,-b) = a_2 - 2 a_3b + 3 a_4b^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_2$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}(a, b) = a_2 + 2 a_3b + 3 a_4b^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_3$$

Les mêmes valeurs de D.D.L sont données aussi par les éléments adjacents ayant en commun le côté 2-3.

Considérons maintenant la rotation θ_y le long du côté 2-3 de l'élément de la figure (IV-1-a). En considérant l'équation (IV-1) et pour $x=a$, on a:

$$\frac{\partial W}{\partial x}(a,y) = a_5 + a_6 + a_7 y^2 + a_8 y^3$$

Les 4 constantes ne peuvent être déterminées uniquement par 2 valeurs nodales de θ_y aux nœuds 2 et 3 ; et comme les 2 éléments voisins vont avoir eux aussi 2 fonctions indéfinies de θ_y la compatibilité inter-éléments de la rotation θ_y , le long du côté 2-3 ne sera pas satisfaite.

IV-4-EXPRESSION DES D.D.L D'UN NŒUD

$$\theta_x = \frac{\partial W}{\partial y} = \beta_3 + \beta_5 x + 2\beta_6 y + \beta_8 x^2 + 2\beta_9 xy + 3\beta_{10} y^2 + \beta_{11} x^3 + 2\beta_{12} xy^2$$

$$\theta_y = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\beta_2 - 2\beta_4 x - \beta_5 y - 3\beta_7 x^2 - 2\beta_8 xy - \beta_9 y^2 - 3\beta_{11} x^2 y - \beta_{12} y^3$$

(IV-2)

On peut écrire les équations (IV-1) et (IV-2) sous la forme matricielle suivante :

$$\{ W ; \theta_x ; \theta_y \}^T = \{ U(x,y) \} = [f(x,y)] \{ \beta_i \}$$

[f(x,y)] : fonction reliant le déplacement d'un nœud de coordonnées (x,y) aux 12 coefficients β_i .

{ β_i } : vecteur des coefficients inconnus.

$$f(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \end{vmatrix}$$

Pour former la matrice de rigidité, on évalue en premier lieu les valeurs des 12 D.D.L aux nœuds basés sur l'équation (IV-1) s'écrivant sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\{ a^e \} = [A] \{ \beta \}$$

D'où :

$$\{ \beta \} = [A]^{-1} \{ a^e \}$$

IV-5-FORMATION DE LA MATRICE [A]

La formation de la matrice [A] se fait à partir de la matrice [f(x,y)] . Cette matrice [A], comme citée précédemment, lie les déplacements nodaux aux coefficients inconnus β_i

Par simple remplacement de x et y par les coordonnées respectives de chaque nœud et en respectant la numérotation adoptée, on obtient :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -a & -b & a^2 & ab & b^2 & -a^3 & -a^2b & -ab^2 & -b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & -2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & 3a^2b & -b^3 \\ 1 & a & -b & a^2 & -ab & b^2 & a^3 & -a^2b & ab^2 & -b^3 & -a^3b & -ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & -2b & 0 & a^2 & -2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & -2a & b & 0 & -3a^2 & 2ab & -b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & -2a & -b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \\ 1 & -a & b & a^2 & -ab & b^2 & -a^3 & a^2b & -ab^2 & b^3 & -a^3b & -ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & 2b & 0 & a^2 & -2ab & 3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & -b & 0 & -3a^2 & 2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \end{vmatrix}$$

Chap.IV. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L NON CONFORME

$$\{ a(x,y) \} = [f(x,y)] [A]^{-1} \{ a^e \} = [N] \{ a^e \}$$

Où :

$[N] = [f(x,y)] [A]^{-1}$ représente la matrice de fonctions de forme de dimension $[3 ; 12]$.

Remarque: L'inversion de $[A]$ a été faite numériquement même si cela a été au dépend de l'allègement du programme.

L'étape suivante consiste à formuler les déformations en fonction des constantes β_i .

$$\{ \xi(x,y) \} = [C] \{ \beta \}$$

$$\{ \xi(x,y) \} = - \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} ; \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} ; 2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\}^T$$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{vmatrix}$$

L'expression des déformations en fonction des déplacements nodaux se formule de la manière suivante :

Chap. IV. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L NON CONFORME

$$\{ \xi(x,y) \} = [C] [A]^{-1} \{ a^e \}$$

$$\text{D'où } \{ \xi(x,y) \} = [B] \{ a^e \} \quad \text{avec } [B] = [C] [A]^{-1}$$

L'étape suivante consiste à exprimer les contraintes en fonction des déformations :

$$\{ \sigma(x,y) \} = \{ M_x ; M_y ; M_{xy} \}^T = [D] \{ \xi(x,y) \}$$

$$\{ \sigma(x,y) \} = [D] [C] [A]^{-1} \{ a^e \}$$

$$\{ \sigma(x,y) \} = [D] [B] \{ a^e \}$$

ou bien on peut écrire $\sigma(x,y)$ sous la forme :

$$\{ \sigma(x,y) \} = [H] \{ a^e \} \quad \text{avec } [H] = [D] [B]$$

Remarque: [D] est dite matrice d'élasticité

$$D = \begin{vmatrix} D & \mu D & 0 \\ \mu D & D & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{vmatrix}$$

Chap.IV. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L NON CONFORME

$$C = a(60 p^{-1} + 6 + 24 \mu)$$

$$O = b^2(40 p - 16 + 16 \mu)$$

$$D = 30 p - 30 p^{-1} - 42 + 12 \mu$$

$$P = 0$$

$$E = b(30 p - 6 - 24 \mu)$$

$$Q = -b^2(20 p + 4 - 4 \mu)$$

$$F = a(60 p^{-1} + 6 - 6 \mu)$$

$$R = 0$$

$$G = -30 p - 30 p^{-1} + 42 - 12 \mu$$

$$S = b^2(40 P - 4 + 4 \mu)$$

$$H = b(30 p - 6 + 6 \mu)$$

$$T = 0$$

$$I = a(30 p^{-1} - 6 + 6 \mu)$$

$$U = a^2(80 p^{-1} + 16 - 16 \mu)$$

$$J = -60 p + 30 p^{-1} - 42 + 12 \mu$$

$$IV = a^2(40 p^{-1} - 4 + 4 \mu)$$

$$K = b(60 p + 6 - 6 \mu)$$

$$W = a^2(20 p^{-1} + 4 - 4 \mu)$$

$$L = a(30 p^{-1} - 6 - 24 \mu)$$

$$X = a^2(40 p^{-1} - 16 + 16 \mu)$$

Avec : $p = \frac{a}{b}$ et D : rigidité flexionnelle de la plaque

μ : coefficient de Poisson

$2a$ et $2b$ sont les dimensions de la plaque.

Remarque: La matrice de rigidité $[K]$ a été obtenue par intégration numérique de Gauss.

CELESTINE V

V-1-INTRODUCTION

L'élément étudié au chapitre V était un élément non conforme et la fonction de déplacement choisit engendre une discontinuité de la pente normale le long de n'importe quel bord et de ce fait elle était "non conforme" . Mais ce problème peut être résolu en passant à des éléments d'ordre plus élevé, ce qui fait augmenter l'ordre des fonctions de déplacement.

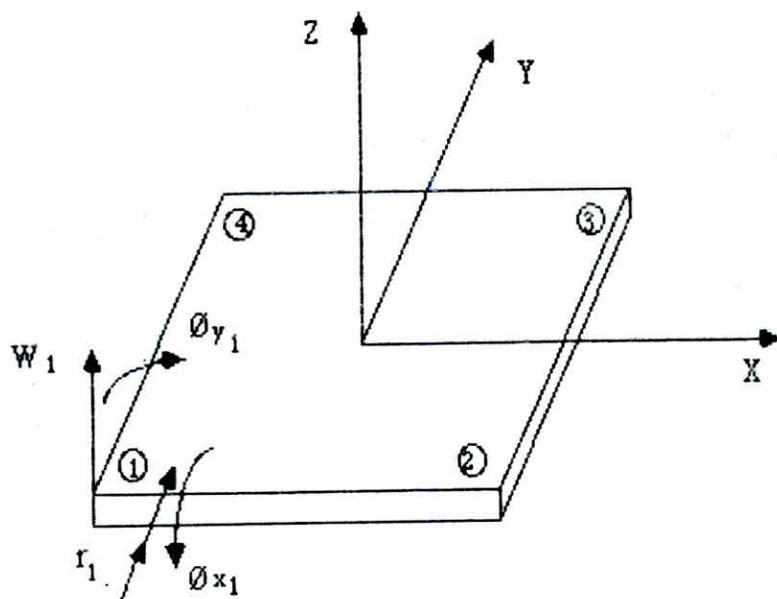
Un élément d'ordre plus élevé peut être obtenu de 2 manières :

- 1) Maintenir le nombre de nœuds, et donner des paramètres de déplacement additionnels aux nœuds situés sur les sommets.
- 2) Ajouter d'autres nœuds le long des cotés en leur donnant des paramètres de déplacement arbitraires.

Dans le cadre de notre étude, nous avons opté pour la première solution qui consiste à augmenter le degré de liberté de chaque nœud ; chacun des nœuds sera donc augmenté d'un degré de liberté qui est la dérivée seconde mixte appelée communément gauchissement " $r = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ " .

La fonction polynomiale aura 16 coefficients indéterminés, étant donné que chaque nœud aura 4 degrés de liberté .

La même démarche établie pour l'élément à 12 D.D.L non conforme sera reconduite pour étudier l'élément à 16 D.D.L conforme.



Fig(V-1)

Le vecteur déplacement pour chaque nœud sera défini comme suit :

$$\{a_1^e\} = \{W_1 ; \theta_{x1} ; \theta_{y1} ; r_1\}^T$$

Le vecteur force lui correspondant serait :

$$\{F_1^e\} = \{T_{1z} ; M_{x1} ; M_{y1} ; M_{xy1}\}^T$$

Où :

T_{1z} : est la force latérale transversale.

M_{x1} , M_{y1} : moments de flexion suivant les directions X et Y .

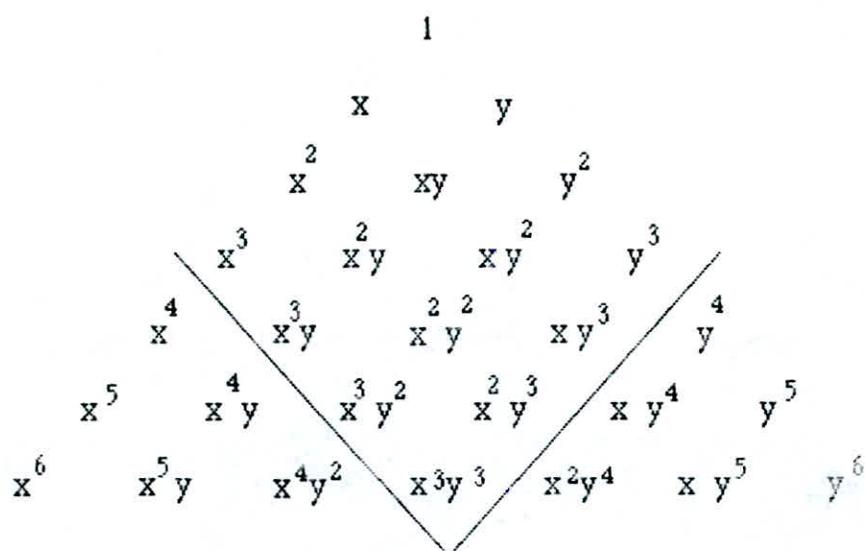
M_{xy1} : moment de gauchissement.

V-2- FONCTION DE DEPLACEMENT

Les 16 termes de la fonction polynomiale de déplacement sont obtenus par le produit de deux polynomes cubiques.

$$W(x,y) = (a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3) (b_1 + b_2y + b_3y^2 + b_4y^3)$$

L'illustration par le triangle de Pascal se fait de la manière suivante :



Donc :

$$W(x,y) = \beta_1 + \beta_2x + \beta_3y + \beta_4x^2 + \beta_5xy + \beta_6y^2 + \beta_7x^3 + \beta_8x^2y + \beta_9xy^2 + \beta_{10}y^3 + \beta_{11}x^3y + \beta_{12}x^2y^2 + \beta_{13}xy^3 + \beta_{14}x^3y^2 + \beta_{15}x^2y^3 + \beta_{16}x^3y^3$$

(V-1)

Où les 16 constantes peuvent être déterminées par l'évaluation des 16 valeurs nodales.

Chap. V. ELEMENT RECTANGULAIRE A 16 D.D.L CONFORME

En considérant l'équation (V-1), on remarquera qu'elle contient les 3 termes (β_4x^2 ; β_5xy et β_6y^2) de déformation constante.

Puis en suivant le même raisonnement établi dans le chapitre précédent, on peut montrer que cette fonction est conforme, c'est à dire qu'elle assure la continuité des flèches et des pentes .

Considérons le bord 2-3 c'est à dire $x = a$:

$$\frac{\partial W}{\partial x}(a,y) = a_1 + a_2y + a_3y^2 + a_4y^3$$

Où les 4 constantes ne peuvent être déterminées que par les 4 conditions suivantes :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_2 \quad ; \text{pour} \quad y = -b$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_3 \quad ; \text{pour} \quad y = b$$

Donc la rotation autour de l'axe X entre 2 éléments adjacents est compatible. Cette fonction de déplacement remplit tous les critères de convergence monotone, cet élément est conforme et continu.

Soit $[f(x,y)]$ la fonction reliant le déplacement d'un nœud de coordonnées (x,y) aux coefficients β_i .

A partir de l'équation (V-1) on obtient les expressions des rotations et du gauchissement.

$$\theta_x = \frac{\partial W}{\partial y} = \beta_3 + \beta_5x + 2\beta_6y + \beta_8x^2 + 2\beta_9xy + 3\beta_{10}y^2 + \beta_{11}x^3 + 2\beta_{12}x^2y + 3\beta_{13}xy^2 + 2\beta_{14}x^3y + 3\beta_{15}x^2y^2 + 3\beta_{16}x^3y^2$$

Chap.V. ELEMENT RECTANGULAIRE A 16 D.D.L CONFORME

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -[\beta_2 + 2\beta_4x + \beta_5y + 3\beta_7x^2 + 2\beta_8xy + \beta_9y^2 + 3\beta_{11}x^2y + 2\beta_{12}xy^2 + \beta_{13}y^3 + 3\beta_{14}x^2y^2 + 2\beta_{15}xy^3 + 3\beta_{16}x^2y^3]$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \beta_5 + 2\beta_8x + 2\beta_9y + 3\beta_{11}x^2 + 4\beta_{12}xy + 3\beta_{13}y^2 + 6\beta_{14}xy + 6\beta_{15}xy^2 + 9\beta_{16}x^2y^2$$

$$f(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & x^3y^2 & x^2y^3 & x^3y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 2x^2y & xy^2 & 2x^3y & 3x^2y^2 & 3x^3y^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -2xy^2 & -y^3 & -3x^2y^2 & -2xy^3 & -3x^2y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 3x^2 & 4xy & 3y^2 & 6x^2y & 6xy^2 & 9x^2y^2 \end{vmatrix}$$

V-3-FORMATION DE LA MATRICE [A] :

À partir de la matrice $[f(x,y)]$, on construit la matrice $[A]$ qui lie les déplacements nodaux aux coefficients inconnus et ceci en remplaçant chaque nœud par ses coordonnées.

Chap.V. ELEMENT RECTANGULAIRE A 16 D.D.L CONFORME

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b & a^2 & ab & b^2 & -a^3 & -a^2b & -ab^2 & -b^3 & a^3b & a^2b^2 & ab^3 & -a^3b^2 & -a^2b^3 & a^3b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & -2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & -a^3 & -2a^2b & -ab^2 & 2a^3b & 3a^2b^2 & -3a^3b^3 \\ 0 & -1 & 0 & 2a & b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & 3a^2b & 2ab^2 & b^3 & -3a^2b^2 & -2ab^3 & 3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2a & -2b & 0 & 3a^2 & 4ab & 3b^2 & -6a^2b & -6ab^2 & 9a^2b^2 \\ 1 & a & -b & a^2 & -ab & b^2 & a^3 & -a^2b & ab^2 & -b^3 & -a^3b & a^2b^2 & -ab^3 & a^3b & -a^2b^3 & -a^3b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & -2b & 0 & a^2 & -2ab & 3b^2 & a^3 & -2a^2b & ab^2 & -2a^3b & 3a^2b^2 & 3a^3b^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & b & 0 & -3a^2 & 2ab & -b^2 & 0 & 3a^2b & -2ab^2 & b^3 & -3a^2b^2 & 2ab^3 & 3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & -2b & 0 & 3a^2 & -4ab & 3b^2 & -6a^2b & 6ab^2 & 9a^2b^2 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & a^2b^2 & ab^3 & a^3b^2 & a^2b^3 & a^3b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 2a^2b & ab^2 & 2a^3b & 3a^2b^2 & 3a^3b^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & -b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -2ab^2 & -b^3 & -3a^2b^2 & -2ab^3 & 3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 2b & 0 & 3a^2 & 4ab & 3b^2 & 6a^2b & 6ab^2 & 9a^2b^2 \\ 1 & -a & b & a^2 & -ab & b^2 & -a^3 & a^2b & -ab^2 & b^3 & -a^3b & a^2b^2 & -ab^3 & -a^3b^2 & a^2b^3 & -a^3b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & 2b & 0 & a^2 & -2ab & 3b^2 & -a^3 & 2a^2b & -ab^2 & -2a^3b & 3a^2b^2 & 3a^3b^2 \\ 0 & -1 & 0 & 2a & -b & 0 & -3a^2 & 2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & 2ab^2 & -b^3 & -3a^2b^2 & 2ab^3 & -3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2a & 2b & 0 & 3a^2 & -4ab & 3b^2 & 6a^2b & -6ab^2 & 9a^2b^2 \end{pmatrix}$$

V-4-FORMATION DE LA MATRICE [C]:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & -2y^2 & 0 & -6y^2 & -2y^3 & -6xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -2x^2 & -6xy & -2x & -6x^2y & -6x^3y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -8xy & -6y^2 & -12x^2y & -12xy^2 & -18x^2y^2 \end{pmatrix}$$

V-5-FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE LOCALE:

$$[K] = [A]^{-1} \left(\int_{-a}^a \int_{-b}^b [C]^T [D] [C] \right) [A]$$

Remarque: La matrice de rigidité [K] a été calculée numériquement par intégration de Gauss

CELESTINE W

VI-1-INTRODUCTION

L'exactitude des résultats obtenus en utilisant la méthode des éléments finis, méthode des déplacements, dépend non seulement de la forme et la dimension des éléments mais aussi de la nature du déplacement assumé à l'intérieur de ceux-ci, du reste la convergence vers la solution exacte avec raffinement du maillage ne peut généralement avoir lieu que si les déplacements permettent la représentation d'un état de déformation constant à l'intérieur de l'élément.

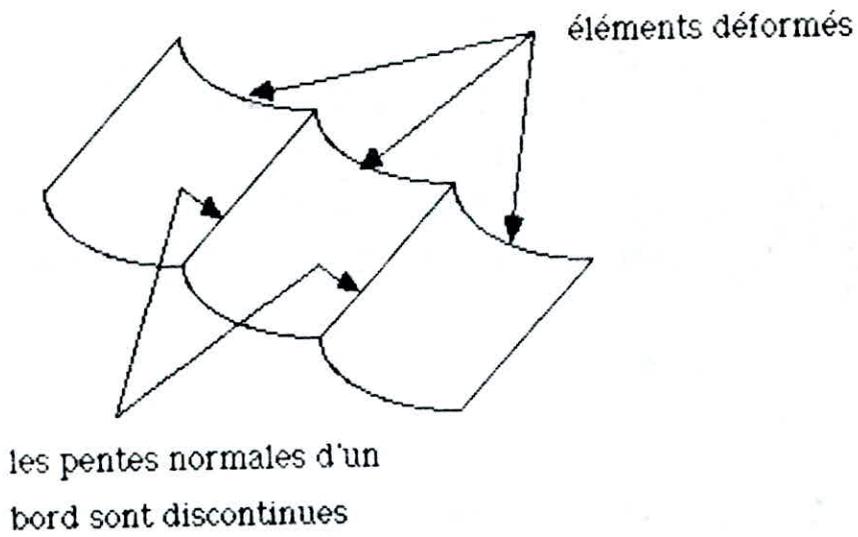
Il a été constaté au cours des deux chapitres précédents que l'expression de la déflexion latérale pour un élément de plaque rectangulaire s'écrivant sous forme polynomiale simple satisfait à la condition précédente et donne de bons résultats. Cette expression établit la continuité de la déflexion latérale entre 2 éléments "frontaliers" mais la continuité de la pente normale le long du bord de l'élément n'est obtenue qu'au niveau du point nodal (nœud).

Nous allons voir que des résultats numériques "exacts" peuvent être obtenus par addition d'un extra-terme à l'expression du polynôme pour la déflexion (V-1), et c'est grâce à ce terme additionnel que la continuité de W , θ_x et θ_y est assurée.

Cet élément sera appelé le 12 D.D.L modifié.

VI-2-DEVELOPPEMENT DES EXPRESSIONS DE DEPLACEMENTS

Il a été constaté que les déplacements donnés par les équations (V-1) et (V-2) assurent la continuité de la déflexion latérale W et la rotation θ_x inter-élément mais non la rotation θ_y comme il a été démontré au chapitre V. Le terme additionnel auquel il a été fait référence au § (VI-1) ajouté à l'équation (V-1) assure la continuité inter-éléments de θ_y sans pour autant influencer sur la continuité de θ_x déjà acquise.



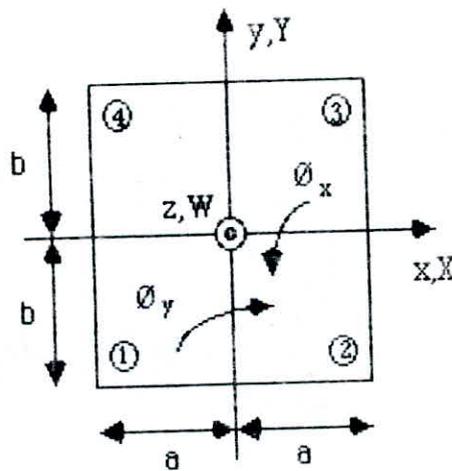
Fig(VI-1)

On peut alors écrire :

$$W = W_{R1} + (1+X)(1-X)(1+Y)(1-Y)(P + QX + RY + SXY) \quad (VI-1)$$

Où :

P, Q, R et S sont des coefficients, $X = \frac{x}{a}$ et $Y = \frac{y}{b}$



Fig(VI-2)

Chap.VI. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L MODIFIE

W_{R1} désigne l'équation de la déflexion donnée par la formule (V-1).

Après examen et étude de la variation de la pente normale le long du bord de l'élément, **DAWE** a remarqué que l'expression (VI-1) permet la continuité complète de la déflexion et rotation si :

$$P = 0$$

$$Q = \frac{C}{8} (-\theta_{x1} + \theta_{x2} - \theta_{x3} + \theta_{x4}) \quad (VI-2)$$

$$R = \frac{C}{8} (-\theta_{y1} + \theta_{y2} - \theta_{y3} + \theta_{y4})$$

$$S = \frac{C}{8} (2W_1 - 2W_2 + 2W_3 - 2W_4 + \theta_{x1} - \theta_{x2} - \theta_{x3} + \theta_{x4} + \theta_{y1} + \theta_{y2} - \theta_{y3} - \theta_{y4})$$

où C est une constante trouvée par la condition de constance des déformations, et où l'expression de la déflexion W_{R1} est obtenue pour (C = 0).

D.J. DAWE du Structures Department, Royal Aircraft Establishment Farnborough, dans son article (On Assumed Displacements for the Rectangular Plate Bending Element), apparu dans la revue **JOURNAL OF THE ROYAL AERONAUTICAL SOCIETY (OCTOBER 1967) N° 722 VOL 71**, au prix d'un travail laborieux, a pu exprimer (VI-1) en fonction des fonctions de formes de la manière suivante :

$$W = \sum_{i=1}^4 (f_i^I W_i + f_i^{II} \theta_{xi} + f_i^{III} \theta_{yi}) \quad (VI-3)$$

Où :

$$f_i^I = \frac{1}{8} [(1+X_iX) (1+Y_iY) (2 + X_iX(1-X_iX) + Y_iY(1-Y_iY)) + 2 \mu X_iY_iXY]$$

$$f_i^{II} = \frac{b}{8} [-Y_i((1+X_iX) (1+Y_iY) (1+Y_iY) (1-Y_iY) + \mu X_iX(1+Y_iY))] \quad (VI-4)$$

Chap. VI. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L MODIFIE

$$f_i^{III} = \frac{a}{8} [-X_i((1+X_iX)(1+X_iX)(1-X_iX)(1+Y_iY) + \mu Y_i Y(1+X_iX))]$$

Où :

$$\mu = C(1+X)(1-X)(1+Y)(1-Y)$$

Avec :

$$X = \frac{x}{a} \quad Y = \frac{y}{b} \quad X_i \text{ et } Y_i \text{ les coordonnées aux nœuds } i$$

VI-3-CHOIX DE LA CONSTANTE C

Plusieurs propositions de choix de constante C ont été proposées par des auteurs tels que ARGYRIS et DAWE. Ce dernier a sélectionné une valeur de C assurant la continuité des rotations le long des bords de l'élément.

Si nous considérons la variation de la pente normale le long du côté (1-2) de la figure (VI-1), la dérivée de la déflexion W par rapport à x donne :

$$(\delta \theta_x)_{y=-1} = \sum_{i=1}^4 \{ [X_i Y_i X(1-X^2)(1-4C)] W_i + [2(1-Y_i)(1+X_iX) \{ 1 + C X_i X(1-X_iX) \}] \theta_{xi} + [-X_i Y_i \{ (1+X_iX)(1-X^2)(1-2C) \}] \theta_{yi}$$

(VI-5)

Il apparait immédiatement que :

1) Si $C = 1/4$, le coefficient associé à la déflexion W_i est éliminé et les coefficients relatifs à la rotation θ_y sont réduits de moitié par rapport à leurs valeurs d'origine.

Chap.VI. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L MODIFIE

2) Si $C = 1/2$, la dépendance de θ_x par rapport à θ_y est changée et le coefficient associé à W_i reste inchangé à l'exception du signe par rapport à leurs valeurs d'origine.

3) Si $C = 1/3$, alors la magnitude des coefficients de tous les W_i et θ_i est réduite du tiers par rapport aux valeurs trouvées avec l'expression d'origine de la déflexion.

VI-4-CONSTRUCTION DE LA MATRICE [B]

Nous rappelons la formule (VI-3) énoncée plus en avant dans ce chapitre :

$$W = \sum_{i=1}^4 (f_i^I W_i + f_i^{II} \theta_{xi} + f_i^{III} \theta_{yi})$$

La relation qui lie les déformations $\{ \xi(x,y) \}$ aux déplacements nodaux $\{ a^e \}$ est :

$$\{ \xi(x,y) \} = [B] \{ a^e \}$$

Ou bien :

$$\{ \xi(x,y) \} = \left\{ -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} ; -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} ; -2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right\}^T$$

$$\{ \xi(x,y) \} = \sum_{i=1}^4 \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{vmatrix} [f_i^I ; f_i^{II} ; f_i^{III}]^T \begin{Bmatrix} W_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}$$

$$B = - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1^I}{\partial x^2} & \frac{\partial f_1^{II}}{\partial x^2} & \frac{\partial f_1^{III}}{\partial x^2} & \frac{\partial f_2^I}{\partial x^2} & \frac{\partial f_2^{II}}{\partial x^2} & \frac{\partial f_2^{III}}{\partial x^2} & \frac{\partial f_3^I}{\partial x^2} & \frac{\partial f_3^{II}}{\partial x^2} & \frac{\partial f_3^{III}}{\partial x^2} & \frac{\partial f_4^I}{\partial x^2} & \frac{\partial f_4^{II}}{\partial x^2} & \frac{\partial f_4^{III}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f_1^I}{\partial y^2} & \frac{\partial f_1^{II}}{\partial y^2} & \frac{\partial f_1^{III}}{\partial y^2} & \frac{\partial f_2^I}{\partial y^2} & \frac{\partial f_2^{II}}{\partial y^2} & \frac{\partial f_2^{III}}{\partial y^2} & \frac{\partial f_3^I}{\partial y^2} & \frac{\partial f_3^{II}}{\partial y^2} & \frac{\partial f_3^{III}}{\partial y^2} & \frac{\partial f_4^I}{\partial y^2} & \frac{\partial f_4^{II}}{\partial y^2} & \frac{\partial f_4^{III}}{\partial y^2} \\ \frac{2\partial f_1^I}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_1^{II}}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_1^{III}}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_2^I}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_2^{II}}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_2^{III}}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_3^I}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_3^{II}}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_3^{III}}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_4^I}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_4^{II}}{\partial x\partial y} & \frac{2\partial f_4^{III}}{\partial x\partial y} \end{vmatrix}$$

La matrice [B] est une matrice [3, 12]

a) Considérons la 1^{ère} fonction de forme

$$f_1^I = \frac{1}{8} [(1+X_iX) (1+Y_iY) (2 + X_iX(1-X_iX) + Y_iY(1-Y_iY)) + 2 \mu X_iY_iXY] \quad (VI-6)$$

Développons cette équation en considérant la valeur de μ donnée plus haut dans le S (VI-2) ; l'équation (VI-6) devient :

$$f_1^I = \frac{1}{8} [2 + 3 X_iX + 3Y_iY + (4X_iY_i + 2CX_iY_i) XY - Y_i^3Y^3 - X_i^3X^3 - (X_i^3Y_i + 2CX_iY_i) X^3Y - (X_iY_i^3 + 2CX_iY_i) XY^3 + 2CX_iY_iX^3Y^3]$$

Sachant que : $X = \frac{x}{a}$; $Y = \frac{y}{b}$; $X_i = \frac{x_i}{a}$; $Y_i = \frac{y_i}{b}$; $C = \frac{1}{3}$

Chap.VI. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L MODIFIE

En remplaçant X, Y, X_i et Y_i par leurs valeurs respectives en fonction de a, b, x, y, x_i et y_i , puis, en dérivant par rapport à x ou y ou les deux en même temps, nous arrivons à :

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{1}{4a^2} \left[-3 X_i X - 3 (X_i^3 Y_i + \frac{2}{3} X_i Y_i) XY + 2 X_i Y_i X Y^3 \right]$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{1}{4b^2} \left[-3 Y_i Y - 3 (X_i Y_i^3 + \frac{2}{3} X_i Y_i) XY + 2 X_i Y_i X^3 Y \right]$$

$$\varepsilon_{xy} = -2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{4ab} \left[4 X_i Y_i + \frac{2}{3} X_i Y_i - 3 (X_i^3 Y_i + \frac{2}{3} X_i Y_i) X^2 - 3 (X_i Y_i^3 + \frac{2}{3} X_i Y_i) Y^2 + 6 X_i Y_i X^2 Y^2 \right]$$

Puis en remplaçant x_i et y_i par les coordonnées en chaque nœud :

Nœud n°1: $x_i = -a ; y_i = -b$ donc $X_i = -1$ et $Y_i = -1$

$$B(1,1) = -\frac{1}{4a^2} (3 X - 5 XY + 2 XY^3)$$

$$B(2,1) = -\frac{1}{4b^2} (3 Y - 5 XY + 3 X^3 Y)$$

$$B(3,1) = -\frac{1}{4ab} (\frac{14}{3} - 5 X^2 - 5 Y^2 + 6 X^2 Y^2)$$

Nœud n°2: $x_i = a ; y_i = -b$ donc $X_i = 1$ et $Y_i = -1$

$$B(1,4) = -\frac{1}{4a^2} (-3 X + 5 XY - 2 XY^3)$$

$$B(2,4) = -\frac{1}{4b^2} (3Y + 5XY - 2X^3Y)$$

$$B(3,4) = -\frac{1}{4ab} \left(-\frac{14}{3} + 5X^2 + 5Y^2 - 6X^2Y^2 \right)$$

Nœud n°3: $x_i = a ; y = b$ donc $X_i = 1$ et $Y_i = 1$

$$B(1,7) = -\frac{1}{4a^2} (-3X - 5XY + 2XY^3)$$

$$B(2,7) = -\frac{1}{4b^2} (-3Y - 5XY + 2X^3Y)$$

$$B(3,7) = -\frac{1}{4ab} \left(\frac{14}{3} - 5X^2 - 5Y^2 + 6X^2Y^2 \right)$$

Nœud n°4: $x_i = -a ; y_i = b$ donc $X_i = -1$ et $Y_i = 1$

$$B(1,10) = -\frac{1}{4a^2} (3X + 5XY - 2XY^3)$$

$$B(2,10) = -\frac{1}{4b^2} (-3Y + 5XY - 2X^3Y)$$

$$B(3,10) = -\frac{1}{4ab} \left(-\frac{14}{3} + 5X^2 + 5Y^2 - 6X^2Y^2 \right)$$

b) Considérons la 2^{ème} fonction de forme:

$$f_1^{\text{II}} = \frac{b}{8} [-Y_i ((1+X_iX)(1+Y_iY)(1+Y_iY)(1-Y_iY) + \mu X_iX(1+Y_iY))] \quad \text{(VI-7)}$$

Chap.VI. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L MODIFIE

En développant l'équation (VI-7) de la même manière que pour la 1ère fonction de forme on obtient :

$$f_i^{II} = -\frac{b}{8} Y_i \left[1 + \frac{4}{3} X_i X + Y_i Y + \frac{4}{3} X_i Y_i XY - (X_i Y_i^2 + \frac{1}{3} X_i) XY^2 - Y_i^2 Y^2 - Y_i^3 Y^3 - C X_i X^3 \right. \\ \left. - (X_i Y_i^3 + C X_i Y_i) XY^3 + C X_i X^3 Y^2 - C X_i Y_i X^3 Y + C X_i Y_i X^3 Y^3 \right]$$

Et après dérivation :

$$\xi_x = \frac{b}{4a^2} Y_i \left[-X_i X + X_i XY^2 - X_i Y_i XY + X_i Y_i XY^3 \right]$$

$$\xi_y = \frac{b}{4b^2} Y_i \left[- (X_i Y_i^2 + \frac{1}{3} X_i) X - Y_i^2 - 3 Y_i^3 Y - 3 (X_i Y_i^3 + \frac{1}{3} X_i Y_i) XY + \frac{X_i X^3}{3} + X_i Y_i X^3 Y \right]$$

$$\xi_{xy} = \frac{b}{4ab} Y_i \left[X_i Y_i + \frac{1}{3} X_i Y_i - 2 (X_i Y_i^2 + \frac{1}{3} X_i) Y - 3 (X_i Y_i^3 + \frac{1}{3} X_i Y_i) Y^2 \right. \\ \left. + 2 X_i X^2 Y - X_i Y_i X^2 + 3 X_i Y_i X^2 Y^2 \right]$$

Nœud n°1:

$$B(1,2) = -\frac{b}{4a^2} (X - XY^2 - XY + XY^3)$$

$$B(2,2) = -\frac{b}{4b^2} \left(\frac{4}{3} X - 1 + 3 Y - 4 XY - \frac{X^3}{3} + X^3 Y \right)$$

$$B(3,2) = -\frac{b}{4ab} \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3} Y - 4 Y^2 - 2 X^2 Y - X^2 + 3 X^2 Y^2 \right)$$

Nœud n°2:

$$B(1,5) = \frac{b}{4a^2} (X - XY^2 - XY + XY^3)$$

$$B(2,5) = -\frac{b}{4b^2} \left(\frac{-4}{3} X - 1 + 3Y + 4XY + \frac{X^2}{3} - X^3Y \right)$$

$$B(3,5) = -\frac{b}{4ab} \left(\frac{-4}{3} - \frac{8}{3} Y + 4Y^2 + 2X^2Y + X^2 - 3X^2Y^2 \right)$$

Nœud n°3:

$$B(1,8) = \frac{b}{4a^2} (-X + XY^2 - XY + XY^3)$$

$$B(2,8) = \frac{b}{4b^2} \left(\frac{-4}{3} X - 1 - 3Y - 4XY + \frac{X^2}{3} + X^3Y \right)$$

$$B(3,8) = \frac{b}{4ab} \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} Y - 4Y^2 + 2X^2Y - X^2 + 3X^2Y^2 \right)$$

Nœud n° 4:

$$B(1,11) = \frac{b}{4a^2} (X - XY^2 + XY - XY^3)$$

$$B(2,11) = \frac{b}{4b^2} \left(\frac{4}{3} X - 1 - 3Y + 4XY - \frac{X^2}{3} - X^3Y \right)$$

$$B(3,11) = \frac{b}{4ab} \left(\frac{-4}{3} + \frac{8}{3} Y + 4Y^2 - 2X^2Y + X^2 - 3X^2Y^2 \right)$$

b) Considérons la 3^{ème} fonction de forme:

$$f_i^{III} = \frac{a}{8} [-X_i ((1+X_i X) (1+X_i X) (1-X_i X) (1+Y_i Y) + \mu Y_i Y (1+X_i X))] \quad (VI-8)$$

En développant l'équation (VI-8) de la même manière que pour la 1^{ère} fonction de forme on obtient :

$$f_i^{III} = -\frac{a}{8} X_i [1 + X_i X + (Y_i + C Y_i) Y + (X_i Y_i + C X_i Y_i) X Y - (X_i^2 Y_i + C Y_i) X^2 Y - X_i^2 X^2 - X_i^3 X^3 - C Y_i Y^3 - (X_i^3 Y_i + C X_i Y_i) X^3 Y + C Y_i X^2 Y^3 - C X_i Y_i X Y^3 + C X_i Y_i X^3 Y^3]$$

Et après dérivation :

$$\varepsilon_x = \frac{a}{4a^2} X_i [-(X_i^2 Y_i + \frac{1}{3} Y_i) Y - X_i^2 - 3X_i^3 X - 3(X_i^3 Y_i + \frac{1}{3} X_i Y_i) X Y + \frac{Y_i Y^3}{3} + X_i Y_i X Y^3]$$

$$\varepsilon_y = \frac{a}{4b^2} X_i [-Y_i Y + Y_i X^2 Y - X_i Y_i X Y + X_i Y_i X^3 Y]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{a}{4ab} X_i [X_i Y_i + \frac{1}{3} X_i Y_i - 2(X_i^2 Y_i + \frac{1}{3} Y_i) X - 3(X_i^3 Y_i + C X_i Y_i) X^2 + 2Y_i X Y^2 - X_i Y_i Y^2 + 3X_i Y_i X^2 Y^2]$$

Nœud n° 1:

$$B(1,3) = \frac{a}{4a^2} (\frac{4}{3} Y - 1 + 3X - 4XY - \frac{Y^2}{3} + XY^3)$$

$$B(2,3) = -\frac{a}{4b^2} (Y - X^2 Y - XY + X^3 Y)$$

Chap.VI. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L MODIFIE

$$B(3,3) = -\frac{a}{4ab} \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3} X - 4X^2 - 2XY^2 - Y^2 + 3X^2Y^2 \right)$$

Nœud n°2:

$$B(1,6) = \frac{a}{4a^2} \left(\frac{4}{3} Y - 1 - 3X + 4XY - \frac{Y^2}{3} - XY^3 \right)$$

$$B(2,6) = \frac{a}{4b^2} \left(Y - X^2Y + XY - X^3Y \right)$$

$$B(3,6) = \frac{a}{4ab} \left(-\frac{4}{3} + \frac{8}{3} X + 4X^2 - 2XY^2 + Y^2 - 3X^2Y^2 \right)$$

Nœud n°3:

$$B(1,9) = \frac{a}{4a^2} \left(-\frac{4}{3} Y - 1 - 3X - 4XY + \frac{Y^3}{3} + XY^3 \right)$$

$$B(2,9) = \frac{a}{4b^2} \left(-Y + X^2Y - XY + X^3Y \right)$$

$$B(3,9) = \frac{a}{4ab} \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} X - 4X^2 + 2XY^2 - Y^2 + 3X^2Y^2 \right)$$

Nœud n°4:

$$B(1,12) = -\frac{a}{4a^2} \left(-\frac{4}{3} Y - 1 + 3X + 4XY + \frac{Y^2}{3} - XY^3 \right)$$

$$B(2,12) = -\frac{a}{4b^2} \left(-Y + X^2Y + XY - X^3Y \right)$$

$$B(3,12) = -\frac{a}{4ab} \left(-\frac{4}{3} - \frac{\delta}{3} X + 4X^2 + 2XY^2 + Y^2 - 3X^2Y^2 \right)$$

VI-5-FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE LOCALE

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

$$K = K_{R1} + \frac{D}{60ab} (C k^* + \frac{\delta}{105} C^2 k^{**}) \quad (VI-9)$$

Où :

K_{R1} : est la matrice de rigidité obtenue dans le cas de l'élément rectangulaire non conforme à 12 D.D.L (voir § V-6 du CHAP. V)

k^* et k^{**} matrices ayant la même structure que la matrice K_{R1}

En prenant $C = 1/3$

La formule (VI-9) devient :

$$k_{ij} = k_{R1ij} + \frac{1}{3} k_{ij}^* + \frac{\delta}{945} k_{ij}^{**}$$

a) Formation de la matrice k^*

Chap. VI. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L MODIFIE

$$k^*(1,1) = 24p - 24p^{-1} + 48\mu$$

$$k^*(10,2) = b(-18p + 24p^{-1} - 18\mu)$$

$$k^*(2,1) = b(18p + 36p^{-1} + 30\mu)$$

$$k^*(11,2) = b^2(8p - 8\mu)$$

$$k^*(3,1) = a(36p + 18p^{-1} + 30\mu)$$

$$k^*(3,3) = a^2(16p^{-1} + 32\mu)$$

$$k^*(4,1) = -24p - 24p^{-1} - 48\mu$$

$$k^*(4,3) = a(24p - 18p^{-1} - 18\mu)$$

$$k^*(7,1) = 24p + 24p^{-1} + 48\mu$$

$$k^*(5,3) = ab(24p - 36p^{-1} - 12\mu)$$

$$k^*(10,1) = -24p - 24p^{-1} - 48\mu$$

$$k^*(6,3) = a^2(8p^{-1} - 8\mu)$$

$$k^*(2,2) = b^2(16p + 32\mu)$$

$$k^*(7,3) = a(-24p + 18p^{-1} + 18\mu)$$

$$k^*(3,2) = ab(36p + 36p^{-1} + 24\mu)$$

$$k^*(8,3) = ab(24p + 24p^{-1})$$

$$k^*(4,2) = b(-18p - 36p^{-1} - 30\mu)$$

$$k^*(9,3) = a^2(-8p^{-1} + 8\mu)$$

$$k^*(5,2) = b^2(-16p - 32\mu)$$

$$k^*(10,3) = a(-36p - 18p^{-1} - 30\mu)$$

$$k^*(7,2) = b(18p - 24p^{-1} + 18\mu)$$

$$k^*(11,3) = ab(36p - 24p^{-1} + 12\mu)$$

$$k^*(8,2) = b^2(8p - 8\mu)$$

$$k^*(12,3) = a^2(-16p^{-1} - 32\mu)$$

b) Formation de la matrice k^{**}

$$k^{**}(1,1) = 252 + 180p + 180p^{-1}$$

$$k^{**}(10,2) = b(-126 - 90p - 90p^{-1})$$

$$k^{**}(2,1) = b(126 + 90p + 90p^{-1})$$

$$k^{**}(11,2) = b^2(-42 + 30p - 270p^{-1})$$

$$k^{**}(3,1) = a(126 + 90p + 90p^{-1})$$

$$k^{**}(3,3) = a^2(168 + 360p + 60p^{-1})$$

$$k^{**}(4,1) = -252 - 180p - 180p^{-1}$$

$$k^{**}(4,3) = a(-126 - 90p - 90p^{-1})$$

Chap.VI. ELEMENT RECTANGULAIRE A 12 D.D.L MODIFIE

$$k^{**}(7,1) = 252 + 180p + 180p^{-1}$$

$$k^{**}(5,3) = ab(-63 - 45p - 45p^{-1})$$

$$k^{**}(10,1) = -252 - 180p - 180p^{-1}$$

$$k^{**}(6,3) = a^2(-42 - 270p + 30p^{-1})$$

$$k^{**}(2,2) = b(168 + 60p - 360p^{-1})$$

$$k^{**}(7,3) = a(126 + 90p + 90p^{-1})$$

$$k^{**}(3,2) = ab(63 + 45p + 45p^{-1})$$

$$k^{**}(8,3) = ab(-63 - 45p - 45p^{-1})$$

$$k^{**}(4,2) = b(-126 - 90p - 90p^{-1})$$

$$k^{**}(9,3) = a^2(42 + 270p - 30p^{-1})$$

$$k^{**}(5,2) = b^2(-168 - 60p - 360p^{-1})$$

$$k^{**}(10,3) = a(-126 - 90p - 90p^{-1})$$

$$k^{**}(7,2) = b(126 + 90p + 90p^{-1})$$

$$k^{**}(11,3) = ab(63 + 45p + 45p^{-1})$$

$$k^{**}(8,2) = b^2(42 - 30p + 270p^{-1})$$

$$k^{**}(12,3) = a^2(-168 - 360p - 60p^{-1})$$

Où :

$$p = \frac{a}{b}$$

D : rigidité flexionnelle de la plaque

μ : coefficient de Poisson

2a et 2b sont les dimensions de la plaque.

CHAPTER VII

VII-1-INTRODUCTION

L'équation matricielle de rigidité à résoudre se présente comme suit :

$$[K] \{a^e\} = \{F^e\} \quad \text{(VII-1)}$$

[K] : étant la matrice de rigidité symétrique

{a^e} : vecteur déplacements nodaux

{F^e} : vecteur forces nodales

La résolution de ce système d'équations est une étape importante de la méthode des éléments finis et le système est linéaire car la matrice [K] ne dépend pas des déplacements {a}.

VII-2-LES DIFFERENTES METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES

Les méthodes de résolutions des systèmes d'équations linéaires peuvent être rangées en deux groupes.

1) Méthodes exactes: Qui sont des algorithmes finis de calcul des solutions du système. On peut énoncer à titre d'exemple :

- Règle de Cramer.
- Méthode de Gauss.
- Méthode du pivot.
- Méthode des racines carrées

2) Méthodes itératives: Qui permettent d'obtenir les solutions des systèmes avec la précision imposée à l'aide de processus convergents infinis. on peut citer à titre d'exemple :

- Méthode des approximations successives.

Chap.VII. TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE RESOLUTION

- Méthode de Seidel.
- Méthode de relaxation.

La grande majorité des programmes utilisent des méthodes directes dérivées de la méthode de Gauss car nécessitant en général beaucoup moins d'opérations que les méthodes itératives ; par contre elles sont plus sensibles aux erreurs d'arrondis.

Les approximations inévitables font que même les résultats de ces méthodes dites exactes sont approchés ; dans le cas général l'estimation des erreurs des solutions est plutôt malaisée.

Dans notre présent travail, nous avons utilisé la méthode d'élimination de Gauss et la méthode de Cholesky.

VII-3-METHODE DE GAUSS

La méthode la plus utilisée dans la résolution des systèmes d'équations linéaires est l'algorithme d'élimination des inconnues ; cette méthode se nomme méthode de résolution de Gauss.

Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} k_{11} a_1 + k_{12} a_2 + \dots + k_{1n} a_n &= f_1 \\ k_{21} a_1 + k_{22} a_2 + \dots + k_{2n} a_n &= f_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ k_{n1} a_1 + k_{n2} a_2 + \dots + k_{nn} a_n &= f_n \end{aligned} \tag{VII-2}$$

On sait que la matrice de rigidité est définie positive donc tous les termes se trouvant sur la diagonale sont différents de "0".

Conduite des calculs:

Divisons les coefficients de la 1^{ère} équation du système (VII-2) par k_{11} ; on obtient :

$$a_1 + \beta_{12} a_2 + \dots + \beta_{1n} a_n = f_1 \quad \text{(VII-3)}$$

Où :
$$\beta_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$$

En considérant l'équation (VII-3), on peut facilement éliminer l'inconnue a_1 du système. A cette fin, il suffit de soustraire de la 2^{ème} équation du système (VII-2) le produit de l'équation (VII-3) par a_{21} , de la 3^{ème} équation de (VII-2) le produit de l'équation (VII-3) par a_{31} et ainsi de suite jusqu'à aboutir au système suivant :

$$a_1 + \beta_{12} a_2 + \beta_{13} a_3 + \dots + \beta_{1n} a_n = f_1$$

$$k^{(1)}_{22} a_2 + \dots + k^{(1)}_{2n} a_n = f_2$$

$$k^{(1)}_{n1} a_2 + \dots + k^{(1)}_{nn} a_n = f_n$$

La même opération est reconduite avec les autres équations et on se ramène à la construction d'un système équivalent dit "matrice triangulaire".

Cette transformation peut aboutir à un système triangulaire supérieur ou inférieur

$$\begin{vmatrix} \backslash & & & K \\ & \backslash & & \\ & & \backslash & \\ 0 & & & \backslash \end{vmatrix}$$

triangulaire
inférieure

ou

$$\begin{vmatrix} \backslash & & & 0 \\ & \backslash & & \\ & & \backslash & \\ K & & & \backslash \end{vmatrix}$$

triangulaire
supérieure

Chap.VII. TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE RESOLUTION

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & & & & \\ b_{21} & & & & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ b_{n1} & & & & b_{nn} \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & c_{12} & \cdot & & c_{1n} \\ 0 & 1 & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & c_{n-1,n} \\ 0 & \cdot & & & 1 \end{vmatrix}$$

Les éléments b_{ij} et c_{ij} sont définis alors, d'après les formules, de la sorte :

$$b_{i1} = d_{i1}$$

$$b_{ij} = d_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj} \quad (i \geq j > 1)$$

$$c_{ij} = \frac{d_{1j}}{b_{11}}$$

$$c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}} \left(d_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \quad (1 < i < j)$$

Et le vecteur déplacement recherché a^e peut être calculé d'après la chaîne d'équations :

$$B y = f \quad \text{et} \quad C a = y \quad \text{(VII-4)}$$

Les matrices [B] et [C] étant triangulaires, les systèmes (VII-4) se résolvent sans peine :

$$y_1 = \frac{a_{1,n+1}}{b_{11}}$$

$$y_i = \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{i, n+1} + \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k \right) \quad (i > 1)$$

Et :

$$x_n = y_n$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k \quad (i < n)$$

La méthode de Cholesky est commode pour travailler sur des calculatrices électroniques car les opérations de numérotation peuvent se faire sans enregistrer les résultats intermédiaires.

VII-5-METHODE D'INTEGRATION DE GAUSS

Introduction: Dans la méthode des éléments finis, la matrice de rigidité [K] s'exprime sous forme d'intégrales à une, deux ou trois dimensions définies sur l'élément réel V^e .

$$[K] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \quad \text{(VII-5)}$$

Si on utilise une intégration sur l'élément de référence V^r l'intégrale (VII-5) devient :

$$[K] = \int_{V^r} [B(\beta; \Omega)]^T [D] [B(\beta; \Omega)] \det(J(\beta; \Omega)) dV^r \quad \text{(VII-6)}$$

Où V^r : est le volume de l'élément de référence.

J : matrice jacobienne de la transformation géométrique.

Chap.VII. TECHNIQUES DE CALCUL ET METHODES DE RESOLUTION

Tous les termes de l'intégrale sont des polynomes, leur intégration explicite est facile.

Il est en général préférable d'utiliser une intégration numérique pour (VII-6) de la forme :

$$[K] = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j [B(\beta_i, \Omega_j)]^T [D] [B(\beta_i, \Omega_j)] \det (J(\beta_i, \Omega_j)) \quad \text{(VII-7)}$$

Où :

- β_i et Ω_j sont les coordonnées des r_1 et r_2 points d'intégration
- W_i et W_j sont les coefficients de pondération (aux points) correspondants.

Principe de la méthode:

La méthode de Gauss est une méthode d'intégration numérique très utilisée dans laquelle les W_i et β_i, Ω_i sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynomes d'ordre ($m \leq 2r-1$) où r est le nombre de points d'intégration.

Cette méthode consiste à utiliser, dans chaque direction β et Ω , une intégration numérique à une dimension. Si nous utilisons r_1 points dans le sens β et r_2 points dans le sens Ω , la méthode de Gauss intègre exactement le produit d'un polynome en β d'ordre $2r_1-1$ et d'un polynome en Ω d'ordre $2r_2-1$; la méthode "produit" utilise $r = r_1 r_2$ points et intègre tous les monomes $\beta^i \Omega^j$ tels que l'on ait :

$$0 \leq i \leq 2r_1-1$$

$$0 \leq j \leq 2r_2-1$$

Cette méthode "produit" pour un élément de référence rectangulaire s'exprime :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y(\beta_i; \Omega_j) d\beta d\Omega = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j y(\beta_i; \Omega_j)$$

Par exemple, pour intégrer l'expression (VII-6) avec $r = 2 \times 2$ points de Gauss

$$\begin{aligned} [K] = & [B(\beta_1; \Omega_1)]^T ([D] W_1 W_1 \det(J(\beta_1; \Omega_1))) [B(\beta_1; \Omega_1)] \\ & + [B(\beta_1; \Omega_2)]^T ([D] W_1 W_2 \det(J(\beta_1; \Omega_2))) [B(\beta_1; \Omega_2)] \\ & + \dots + [B(\beta_4; \Omega_4)]^T ([D] W_4 W_4 \det(J(\beta_4; \Omega_4))) [B(\beta_4; \Omega_4)] \end{aligned}$$

Cette méthode d'intégration a été présentée pour un élément de référence, il est facile de la transposer sur l'élément réel.

VII-6-CHOIX DU NOMBRE DE POINTS D'INTEGRATION

Le choix du nombre de points d'intégration dépend du type d'élément utilisé et de la matrice de rigidité que l'on construit.

Il existe pour chaque type d'élément, un nombre minimum de points d'intégration en dessous duquel la matrice de rigidité $[K]$ reste singulière malgré l'introduction des conditions aux limites.

Pour un élément quadrilatéral à 4 noeuds (c'est notre cas), il faut par exemple 3×3 points pour calculer la matrice de rigidité de l'élément à 12 D.D.L vu que le degré du polynôme à intégrer est du 5^{ème} ordre en X et Y.

CHAPTER VIII

CHAPTER VIII

VIII-1-SUBROUTINE INPUT

Cette subroutine permet de lire le nombre total des éléments (NE) et le nombre total de nœuds (NN), elle permet par ailleurs la lecture des coordonnées dans le repère global, l'épaisseur (h) et les propriétés du matériau qui sont le module de Young (XE) et le coefficient de poisson (XD) de la plaque.

La numérotation d'un élément est définie et lue en n'importe quel élément ; quant à la numérotation locale elle a été dévoilée durant le chapitre (IV).

VIII-2-SUBROUTINES (PROD1, PROD2, PROD3, PROD4, INVERSION)

La matrice de rigidité locale est formée grâce aux subroutines PROD1, PROD2, PROD3, etc...

En premier lieu et pour chaque élément (IE), les coordonnées locales des nœuds sont formées, d'où l'obtention de la matrice [A] qui est ensuite stockée en $A(i,j)$ puis inversée par appel à la subroutine "INVERSE" Elle sera notée "A1". On formera ensuite la matrice [A1T] par transposition de [A1].

Après avoir formé la matrice [C], sa transposée [CT] et la matrice d'élasticité [D], on détermine par intégration de Gauss la matrice de rigidité locale [OKL].

Pour chaque élément le rang de la matrice [OKL] est soit (12*12), soit (16*16) selon la fonction de déplacement choisie.

Remarque: En ce qui concerne le 12 D.D.L, la formation puis l'inversion de [A] est inutile car on forme directement $[A1] [C] = [B]$.

VIII-3-SUBROUTINE ASSEMBLE

Cette subroutine forme la matrice de rigidité globale (GLO) pour toute la structure de la plaque. Chaque matrice [OKL] est décomposée en sous-matrices de dimensions (3*3) ou (4*4) (selon la fonction de déplacement choisie) qui

Chap.VIII. DESCRIPTION DU PROGRAMME

sont ensuite stockées sous la forme $S(L, m, i, j)$; ces dernières seront assemblées dans la matrice de rigidité globale [GLO].

VIII-4-SUBROUTINE LIMITE

Les conditions aux limites seront incorporées à l'intérieur de la matrice de rigidité globale [GLO], la lecture du vecteur force $\{F\} = \{Q ; M_x ; M_y\}^T$ au lieu prescrit se fait de telle manière que seules les valeurs non nulles sont lues. De même, le vecteur déplacement [déflexion W , rotations $(\theta_x ; \theta_y)$ et gauchissement r] sont lus aux lieux prescrits. Enfin, le vecteur force et le vecteur déplacements sont arrangés respectivement dans le vecteur force global {VP} et le vecteur déplacement global {VD}.

VIII-5-SUBROUTINE RESOLUTION

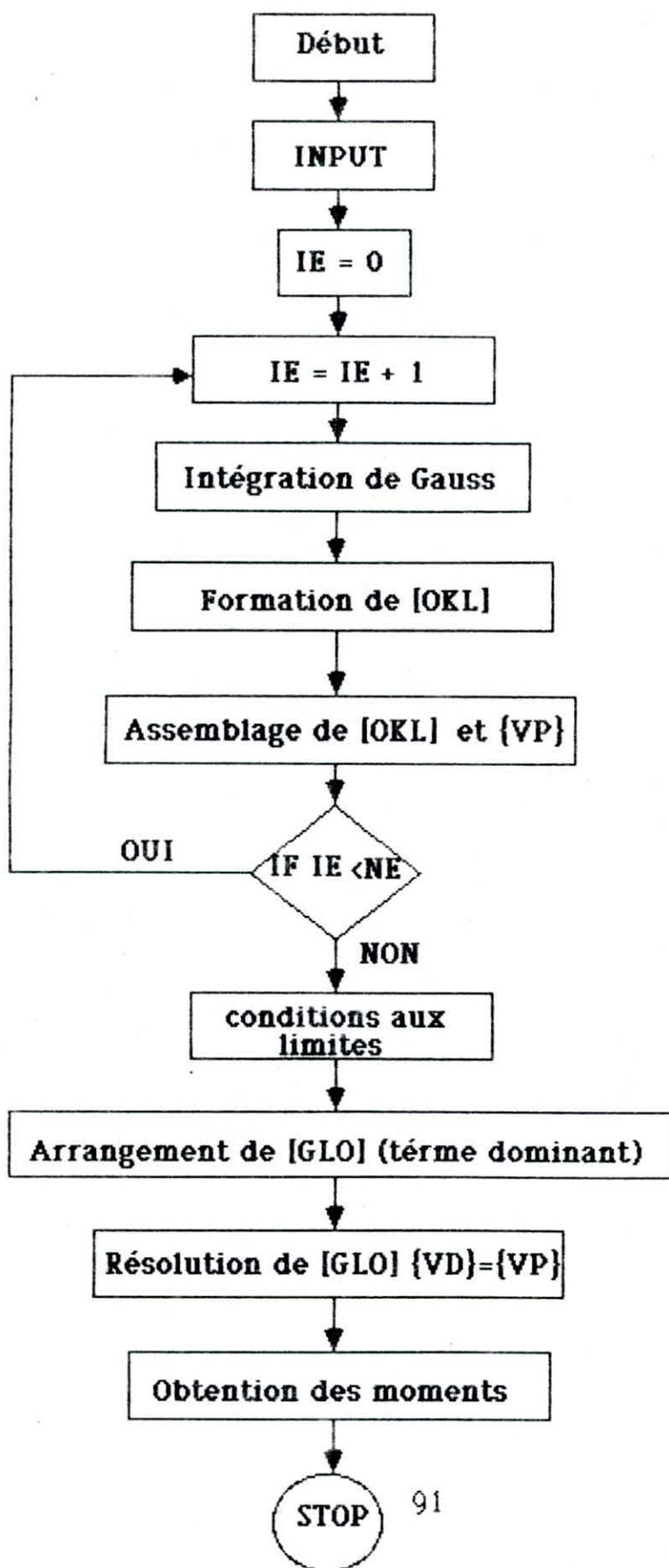
Le système d'équation $[GLO] \{VD\} = \{VP\}$ est résolu en utilisant la méthode de Gauss.

VIII-6-SUBROUTINE MOMENT

Les moments de flexion et de torsion pour tous les nœuds sont déterminés pour chaque élément. Les coordonnées locales des nœuds et leurs déplacements sont évalués et notés respectivement $XL(I)$, $YL(I)$ et $VD(I)$.

Les vecteurs moment seront calculés en faisant à chaque fois le produit $[A]^{-1} [C] [D]$ et notés $RM(IE ; i ; j)$.

Chap.VIII. DESCRIPTION DU PROGRAMME



CLAYTON

Chap.IX. RESULTATS ET INTERPRETATION

IX-1- INTRODUCTION

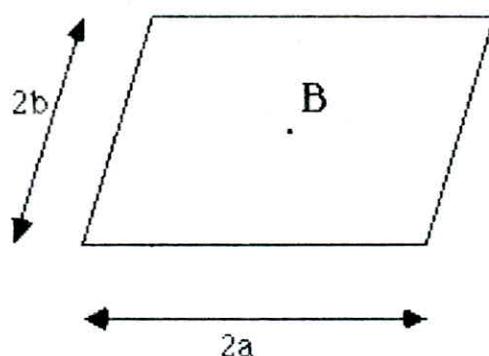
L'objet de ce chapitre est l'application des programmes établis pour l'étude des éléments de plaques à 12 DDL non conforme, 16 DDL conforme et 12 DDL modifié conforme pour l'étude d'une plaque mince.

Les paramètres de cette plaque sont les suivants :

- épaisseur $t = 0,01$ m
- dimensions $2a$ et $2b$ avec $a/b = 1$
- coefficient de Poisson $\mu = 0,3$

Il est à noter que les résultats donnés dans les tableaux ont été obtenus pour des valeurs quelconques du module de Young (E).

A partir des résultats, nous déduirons l'élément le plus adéquat en faisant une étude comparative.



Fig(IX-1)

IX-2- APPLICATIONS

Exemple 1 : (plaque encastree chargée en son centre)

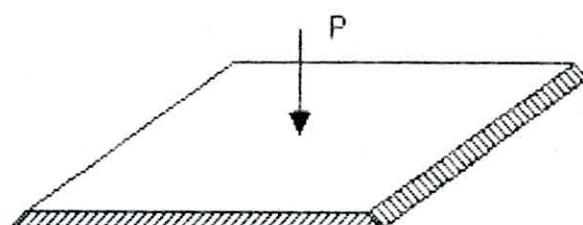


Fig (IX-2)

1-1-Tableau des déflexions :

		DEFLEXION $W (qa^4 / D)$		
Maillage	D.D.L	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	- 0,005919	- 0,005315	- 0,005110
2 x 2	27	- 0,006134	- 0,005485	- 0,005471
4 x 4	75	- 0,005803	- 0,005580	- 0,005584
6 x 6	147	- 0,005710	- 0,005598	- 0,005602
8 x 8	243	- 0,005672	- 0,005604	- 0,005607
Solution exacte :		- 0,005605		

Chap.IX. RESULTATS ET INTERPRETATION

1-2- Tableau des moments :

		M o m e n t M_x = M_y (a,b) ; (qb²)		
Maillage	D.D.L	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	- 0,184660	- 0,165820	- 0,159430
2 x 2	27	- 0,243960	- 0,220960	- 0,206670
4 x 4	75	- 0,313200	- 0,292950	- 0,280140
6 x 6	147	- 0,354740	- 0,335100	- 0,322630
8 x 8	243	- 0,384360	- 0,364950	- 0,352590

1-3- Tableau des erreurs sur les déflexions:

		E r r e u r s u r l a d é f l e x i o n		
Maillage	D.D.L	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	0,056020	- 0,051730	- 0,088310
2 x 2	27	0,094380	- 0,021400	- 0,023900
4 x 4	75	0,035320	- 0,004460	- 0,003740
6 x 6	147	0,018730	- 0,001240	- 0,000530
8 x 8	243	0,011950	- 0,000170	- 0,000350

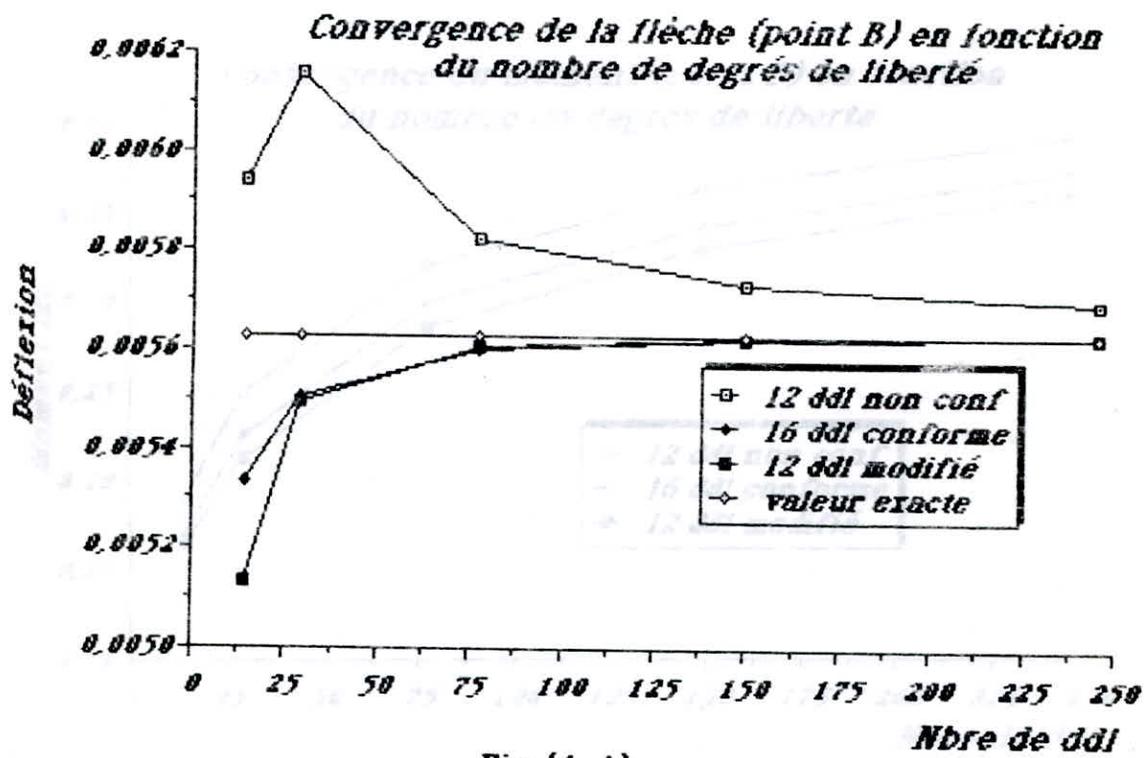


Fig (1-1)

Chap.IX. RESULTATS ET INTERPRETATION

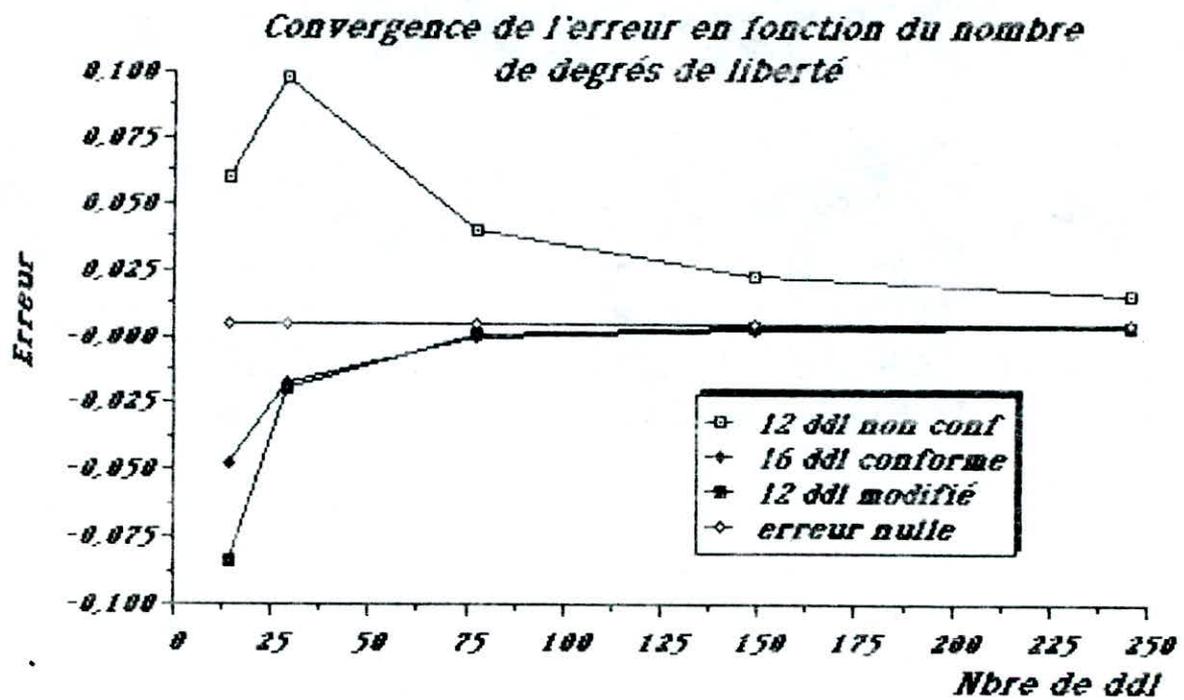


Fig (1-3)

Chap.IX. RESULTATS ET INTERPRETATION

Exemple 2 : (plaque encastree uniformement chargée)

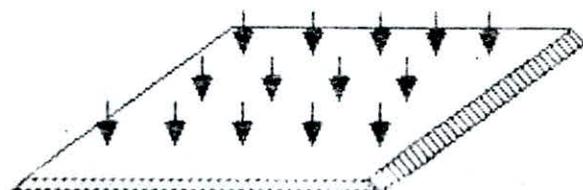


Fig (IX-3)

2-1-Tableau des déflexions :

		DEFLEXION $W (qa^4 / D)$		
Maillage	D.D.L	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	- 0,001480	- 0,001329	- 0,001277
2 x 2	27	- 0,001403	- 0,001265	- 0,001267
4 x 4	75	- 0,001304	- 0,001265	- 0,001267
6 x 6	147	- 0,001283	- 0,001265	- 0,001266
8 x 8	243	- 0,001275	- 0,001265	- 0,001266
Solution exacte :		- 0,001260		

Chap.IX. RESULTATS ET INTERPRETATION

2-2- Tableau des moments :

		M o m e n t $M_x = M_y (a,b) ; (qb^2)$		
Maillage	DDL	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	- 0,046160	- 0,041450	- 0,039860
2 x 2	27	- 0,027780	- 0,025100	- 0,022960
4 x 4	75	- 0,024050	- 0,023340	- 0,022790
6 x 6	147	- 0,023410	- 0,023090	- 0,022840
8 x 8	243	- 0,023100	- 0,023010	- 0,022870

2-3- Tableau des erreurs sur les déflexions:

		E r r e u r s u r l a d é f l e x i o n		
Maillage	DDL	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	0,174603	0,054760	0,008730
2 x 2	27	0,113490	0,003968	0,008730
4 x 4	75	0,034920	0,003968	0,008730
6 x 6	147	0,018253	0,003968	0,004761
8 x 8	243	0,001190	0,003968	0,004761

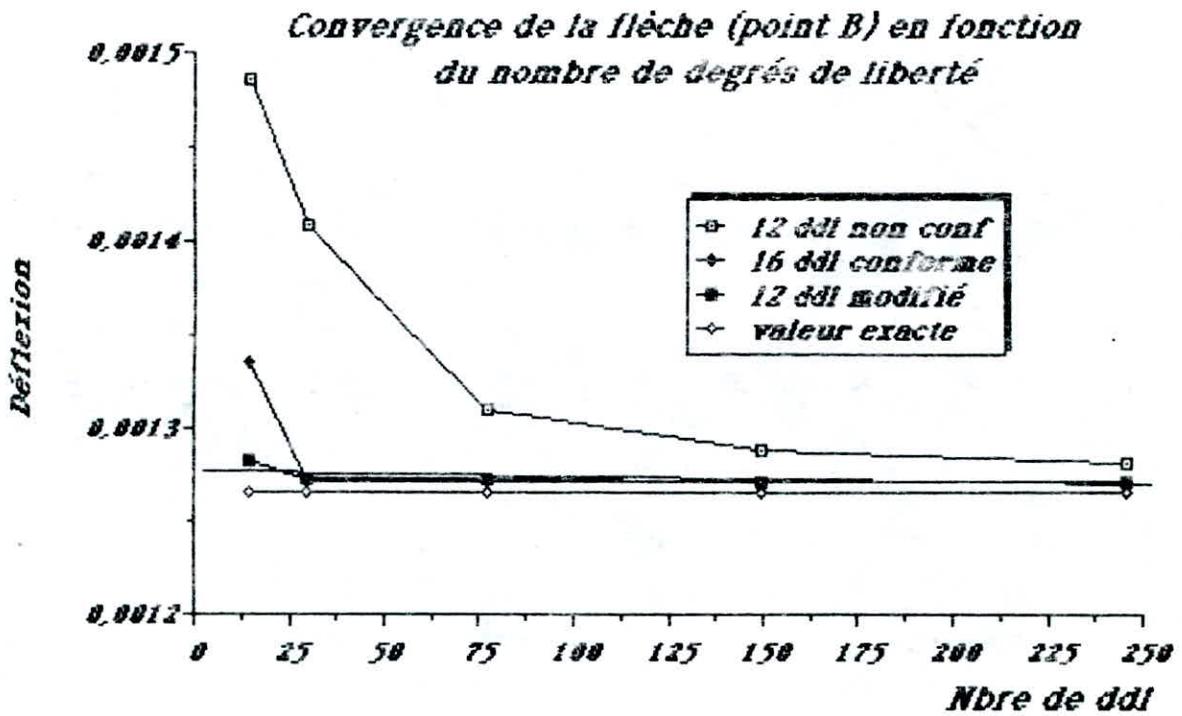


Fig (2-1)

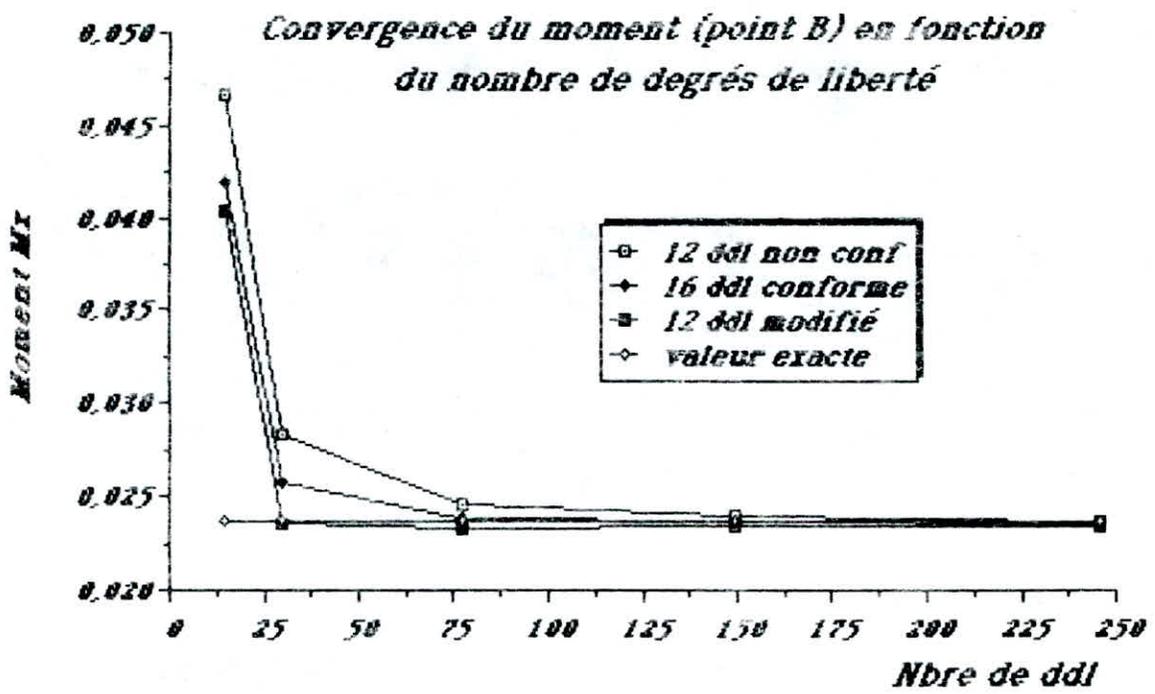


Fig (2-2)

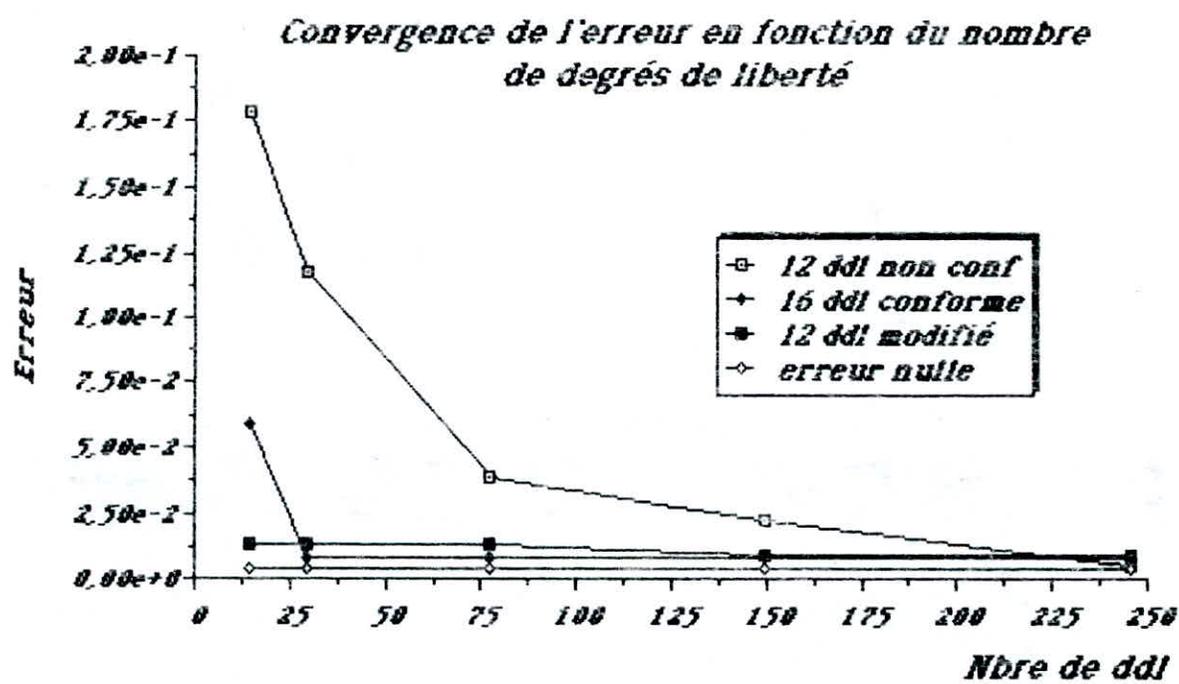


Fig (2-3)

Exemple 3 : (plaque simplement appuyée chargée en son centre)

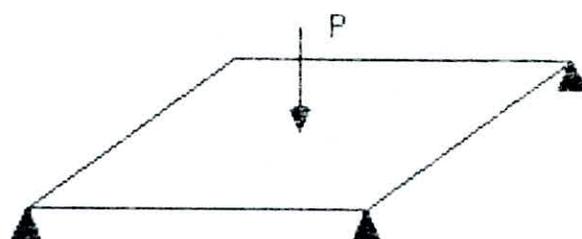


Fig (IX-4)

3-1-Tableau des déflexions :

		DEFLEXION \bar{w} (qa^4 / D)		
Maillage	D.D.L	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	/	- 0,010117	- 0,010934
2 x 2	27	- 0,012327	- 0,011048	- 0,011497
4 x 4	75	- 0,011829	- 0,011339	- 0,011563
6 x 6	147	- 0,011714	- 0,011423	- 0,011595
8 x 8	243	- 0,011669	- 0,011465	- 0,011598
Solution exacte :			- 0,011600	

Chap.IX. RESULTATS ET INTERPRETATION

3-2- Tableau des moments :

		M o m e n t $M_x = M_y (a,b) ; (qb^2)$		
Maillage	D.D.L	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	/	- 0,174460	- 0,173110
2 x 2	27	- 0,295480	- 0,266320	- 0,257360
4 x 4	75	- 0,366410	- 0,344250	- 0,335550
6 x 6	147	- 0,408280	- 0,387240	- 0,376140
8 x 8	243	- 0,439950	- 0,417470	- 0,406200

3-3- Tableau des erreurs sur les déflexions:

		E r r e u r s u r l a d é f l e x i o n		
Maillage	D.D.L	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	/	- 0,127840	- 0,057410
2 x 2	27	0,062670	- 0,047580	- 0,008870
4 x 4	75	0,019740	- 0,022100	- 0,003190
6 x 6	147	0,009820	- 0,015250	- 0,000250
8 x 8	243	0,005948	- 0,011630	- 0,000172

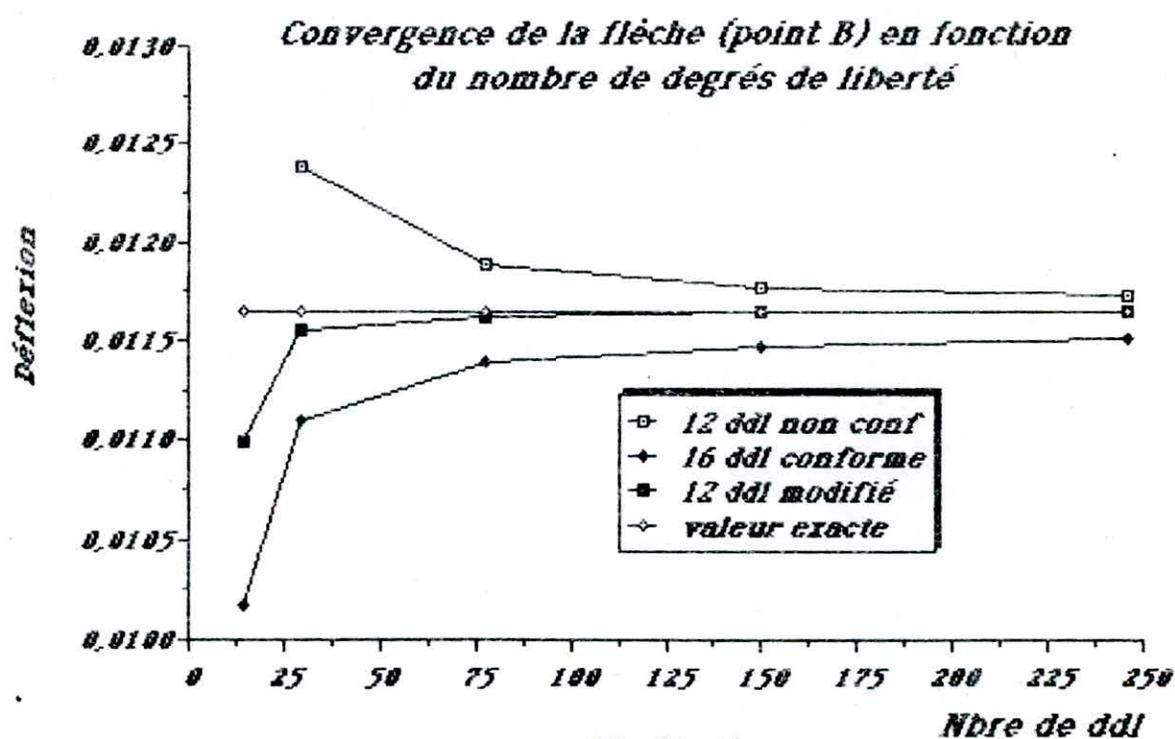


Fig (3-1)

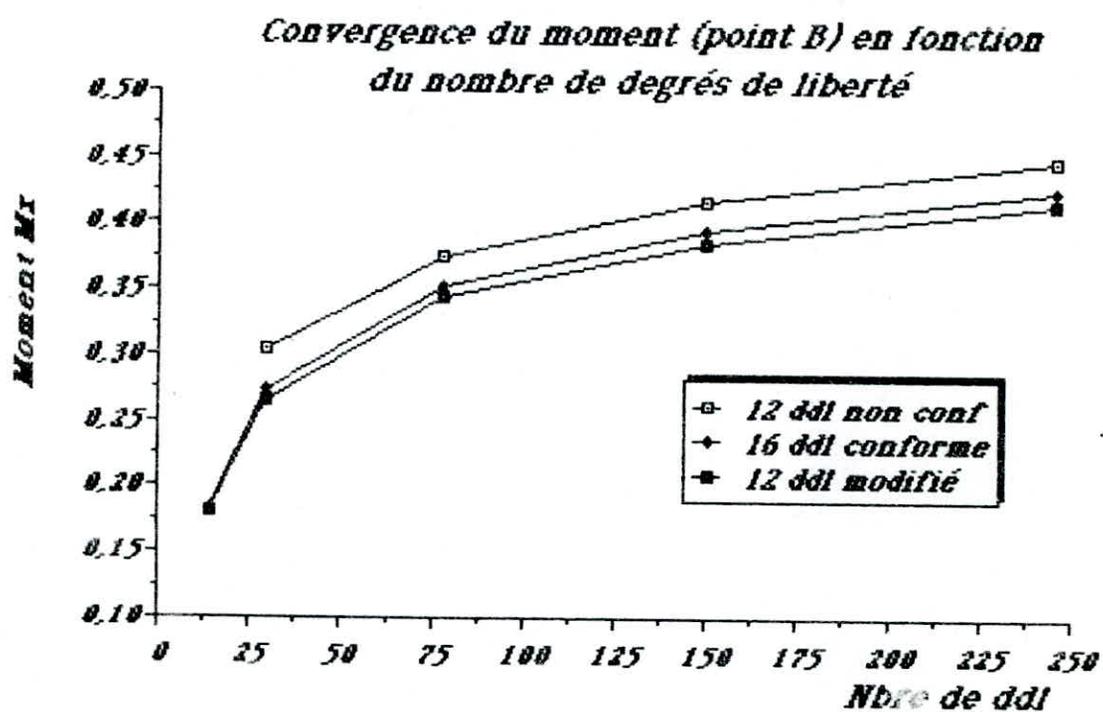


Fig (3-2)

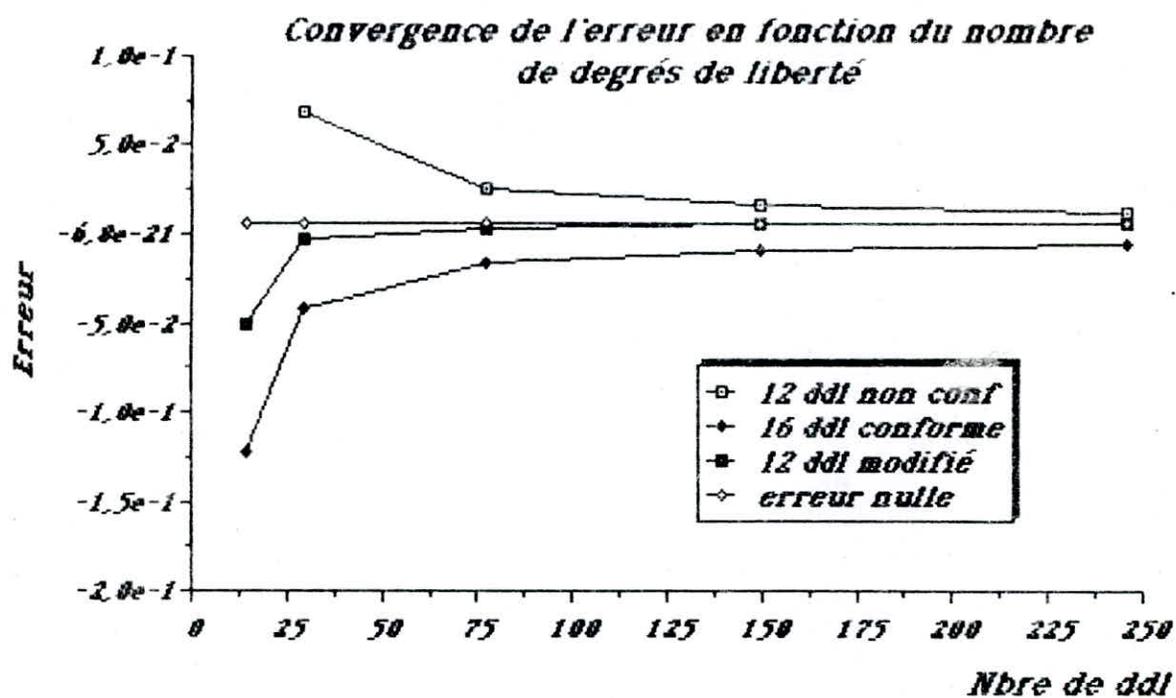


Fig (3-3)

Exemple 4 : (plaque simplement appuyée et uniformément chargée)

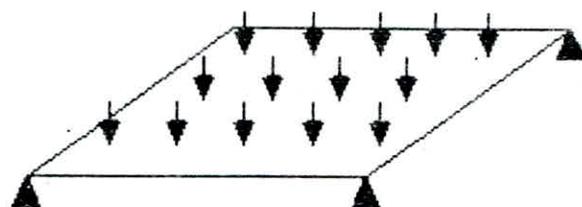


Fig (IX-5)

4-1-Tableau des déflexions :

		DEFLEXION $W (qa^4 / D)$		
Maillage	D.D.L	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	- 0,005063	- 0,003661	- 0,002733
2 x 2	27	- 0,004215	- 0,003875	- 0,003597
4 x 4	75	- 0,004091	- 0,003958	- 0,004055
6 x 6	147	- 0,004074	- 0,003987	- 0,004005
8 x 8	243	- 0,004068	- 0,004004	- 0,004029
Solution exacte :		- 0,004062		

Chap.IX. RESULTATS ET INTERPRETATION

4-2- Tableau des moments :

		M o m e n t $M_x = M_y (a,b) : (qb^2)$		
Maillage	D.D.L	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	- 0,066020	- 0,045650	- 0,050610
2 x 2	27	- 0,051000	- 0,046350	- 0,043240
4 x 4	75	- 0,048590	- 0,047190	- 0,047340
6 x 6	147	- 0,048150	- 0,047330	- 0,047190
8 x 8	243	- 0,048030	- 0,047430	- 0,047430

4-3- Tableau des erreurs sur les déflexions:

		E r r e u r s u r l a d é f l e x i o n		
Maillage	D.D.L	12 D.D.L non conforme	16 D.D.L conforme	12 D.D.L modifié
1 x 1	12	0,246430	- 0,098720	- 0,327170
2 x 2	27	0,037666	- 0,046030	- 0,114470
4 x 4	75	0,007139	- 0,025600	- 0,001723
6 x 6	147	0,002954	- 0,018460	- 0,014032
8 x 8	243	0,001470	- 0,014270	- 0,008120

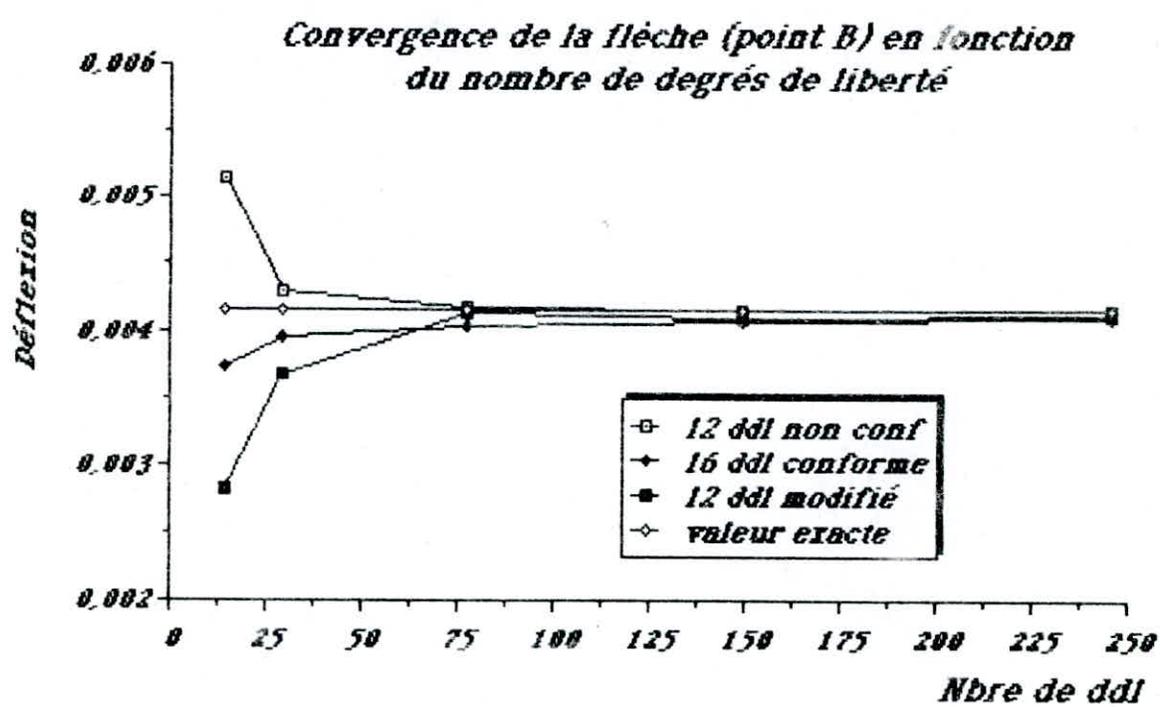


Fig (4-1)

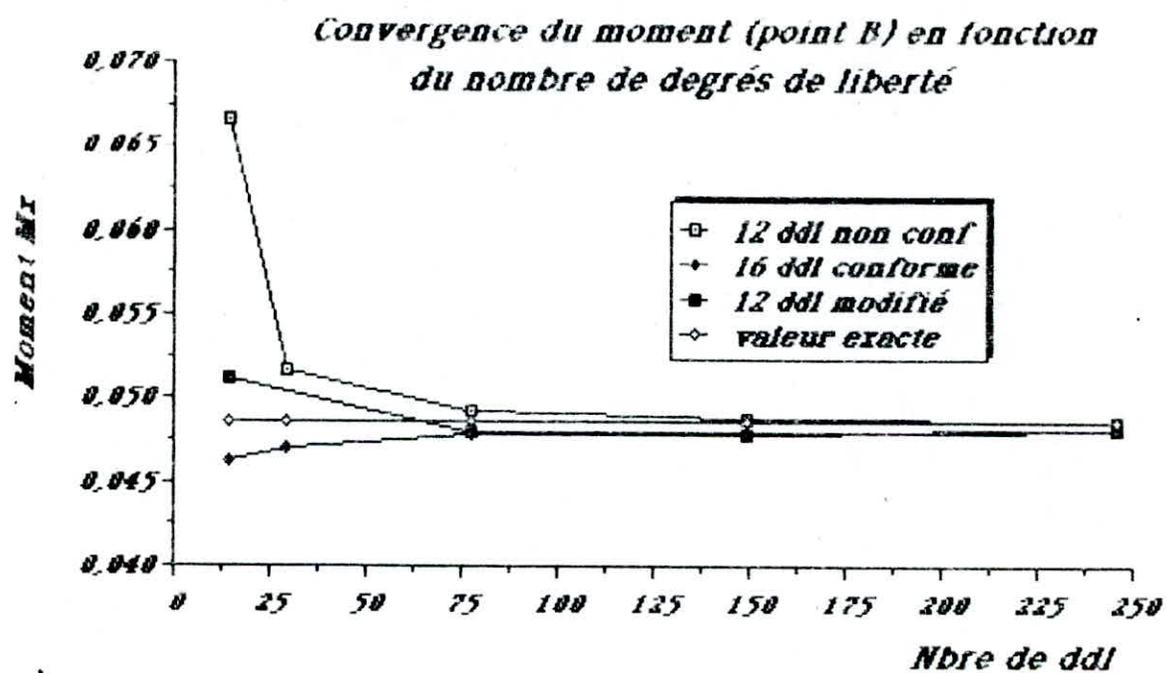


Fig (4-2)

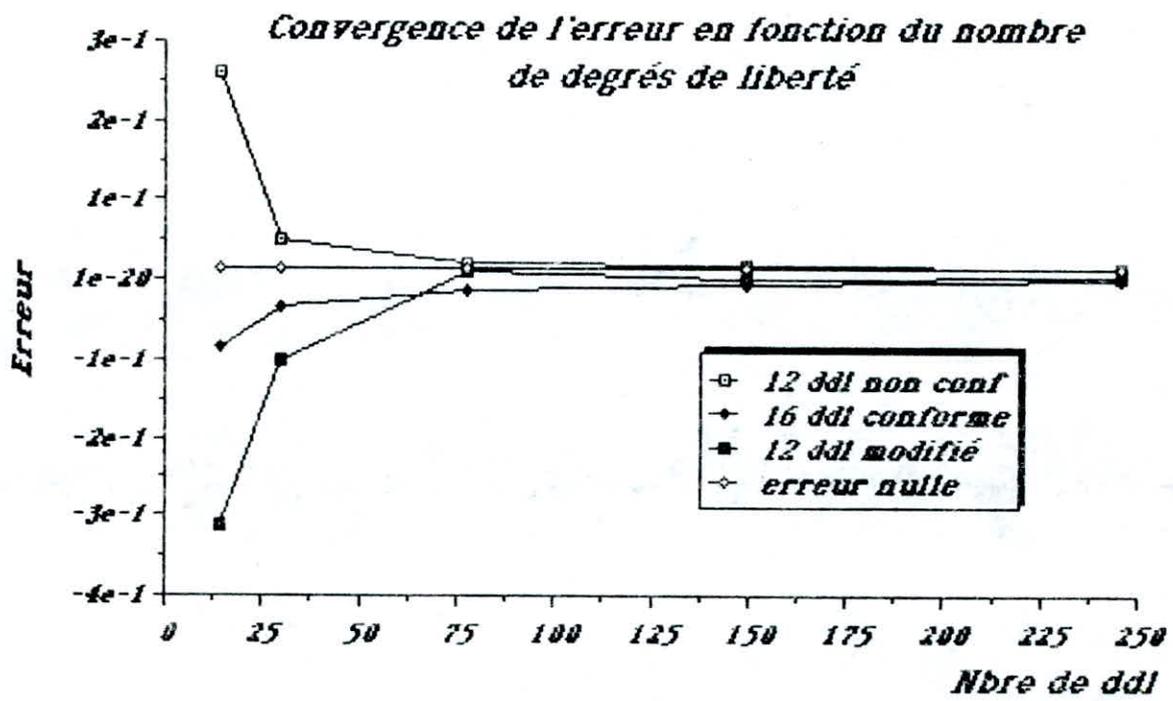


Fig (4-3)

IX-3- INTERPRETATION DES RESULTATS

Au vu des graphes de convergence de la déflexion et ceux de pourcentage d'erreur pour le comportement flexionnel des plaques soumises à des charges concentrées ou uniformément réparties avec diverses conditions d'appui, on notera ce qui suit :

- Pour l'élément à 12 D.D.L non conforme, il apparaît que la convergence de la déflexion vers la solution exacte est assurée mais d'une manière qui n'est pas toujours monotone, en fonction du cas de chargement et des conditions d'appui considérées. La convergence n'est obtenue qu'avec un maillage plus fin relativement aux deux autres éléments. Les graphes d'erreur correspondant à cet élément montrent clairement la lenteur de convergence. Les remarques précédentes sont valables pour tout cas de chargement et quelle que soit la nature des appuis.

- Par contre, l'élément à 16 D.D.L, en introduisant le gauchissement comme degré de liberté nodal supplémentaire, montre une convergence monotone vers la solution exacte (TIMOSHENKO). Cette convergence est obtenue généralement pour un maillage n'excédant pas 7×7 pour l'ensemble des plaques et, dans certains cas, pour un maillage plus fin. Ceci entraîne un pourcentage d'erreur qu'on qualifie de très bon comme dans le cas d'une plaque encadrée sur son pourtour avec une charge concentrée en son milieu.

- Enfin, le dernier élément étudié, le 12 D.D.L modifié (présence d'un extra-terme dans la fonction de forme du 12 D.D.L non conforme), offre la meilleure convergence et la plus rapide relativement aux deux précédents éléments. Ceci s'explique par le fait qu'on se rapproche rapidement (maillage 4×4 ou 6×6) de la solution exacte, puis la convergence se maintient progressivement. C'est aussi la raison pour laquelle les graphes d'erreur concernant cet élément montrent cet aspect de convergence rapide dès le début de l'affinement du maillage (4×4).

CONCLUSION

CONCLUSION

Ce travail est consacré à la formulation d'éléments de plaques en flexion et à l'étude de plaques minces avec faibles flèches en utilisant la formulation de l'énergie potentielle totale.

L'étude de la flexion des plaques englobe un domaine très large qui nécessite un temps plus long pour une étude poussée.

Notre travail comporte l'étude de trois éléments rectangulaires, avec des expressions de forme à expressions polynomiales.

Dans un premier temps est développé l'élément à 12 D.D.L dont la fonction de forme est non conforme. Malgré cet handicap créant un problème au niveau des interfaces, nous avons constaté que la convergence est assurée. En voulant satisfaire la conformité de cet élément, nous avons excédé à un autre élément comportant 4 D.D.L par nœud, conforme et assurant la conformité de tous les paramètres nodaux.

Enfin, en voulant garder le même nombre de D.D.L que pour le premier élément, en nous basant sur une étude de DAWES, nous avons pu, grâce à un ajout de termes sur la fonction à 12 D.D.L, palier à sa non conformité.

Afin de mener une étude comparative, nous avons arbitrairement choisi 4 exemples pour pouvoir illustrer la rapidité de convergence de chacun d'eux.

Dans le premier exemple est envisagée une plaque carrée de côté $2a = 2b$, encadrée sur tout son périmètre et soumise à une charge concentrée P en son centre.

Dans le deuxième exemple, la plaque garde les mêmes conditions d'appui, mais avec un chargement uniformément réparti. Par la suite, nous reprenons respectivement les deux exemples précédents en modifiant les conditions d'appui pour passer à une plaque carrée simplement appuyée.

Les exemples cités plus haut sont utilisés pour comparer les différentes formulations d'éléments plaques en flexion. Il s'agit pour cela de calculer la flèche sous différents chargements et de tracer le pourcentage d'erreur de la flèche en fonction du nombre de degrés de liberté de la plaque.

Il est à noter que le procédé de présentation des résultats d'erreurs sur la flèche n'est pas forcément le meilleur comparé aux procédés de contrainte ou d'énergie de déformation qui ont, à notre connaissance, plus de signification pour caractériser le comportement de la structure.

En fait, le principal intérêt des courbes fournies dans le chapitre précédent est de mettre en évidence la convergence, puis de comparer le mode de convergence des différents éléments.

L'élément à 12 D.D.L non conforme approche la solution exacte par excès ; mais comme les conditions de continuité inter-éléments ne sont pas respectées, cet élément perd son avantage qui s'avère dans certains cas indispensable. Par contre, la formulation à 16 termes est conforme et donne donc des résultats satisfaisants.

Les résultats obtenus à l'aide du 12 D.D.L modifié montrent une amélioration sensible de la convergence due au rajout de l'extra-terme à la fonction 12 D.D.L non conforme.

En conclusion, nous pouvons déduire des résultats obtenus que le 12 D.D.L modifié constitue l'élément idéal, comparativement aux deux autres, pour l'étude d'une plaque en flexion.

ALBERT

Annexe

BIBLIOGRAPHIE

1- Ouvrages :

- AUBOIN : Calcul des structures et informatique.
- DHATT et TOUZOT : Une présentation de la M.E.F.
- GALLAGHER, R.H. : Introduction aux éléments finis.
- IMBERT, J.F. : Analyse des structures par éléments finis.
- ROCKY, K.C. : Introduction à la méthode des éléments finis.
- TIMOSHENKO, S. : Théorie des plaques et coques.
- WANG : Calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles.
- ZIENKIEWICZ, O.C. : La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur.

2- Travaux :

- BENZAIBI et YAHI : Analyse flexionnelle des plaques multicouches par différences finis - éléments finis et bandes finis.
- BOUABDELLAH et MOUSSAOUI : Analyse flexionnelle des plaques par la M.E.F. (Projet de fin d'études, Juin 1988).

