

وزارة الجامعات  
Ministère aux Universitaires

2 es

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

ETUDE COMPARATIVE DU  
VOILE PAR LA M.E.F. ET LA  
METHODE DES PORTIQUES  
EQUIVALENTS

Proposé par :  
M. CHARIF

Etudié par :  
M<sup>elle</sup> F. YENNOUNE  
M<sup>elle</sup> N. LEBIB

Dirigé par :  
M. CHARIF

PROMOTION 91

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قل إنَّ صَلَاتِي وَنُسُكِي

وَمَحْيَايَ وَمَمَاتِي

لِلَّهِ رَبِّ

الْعَالَمِينَ

صلى الله عليه وسلم

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

Promoteur : M H.CHARIF

Elèves Ingénieurs : Naima LEBIB et Fatiha YENNOUNE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

الموضوع: دراسة مقارنة للتجسيم الجدران باستعمال طريقة العناصر المحدودة و طريقة الأروقة المعمدة المتكافئة .  
الملخص: المشروع التالي يتمثل في إنجاز برامج آلية موجهة للتجسيم الجدران تحت تأثير حملات مختلفة باستعمال:  
- طريقة العناصر المحدودة  
- طريقة الأروقة المعمدة المتكافئة.  
الغاية الأساسية هي المقارنة بين الطريقتين لتقييم الفعالية و التطبيق العملي لكليهما.

Sujet : ETUDE DE COMPARATIVE DE LA MODELISATION DES VOILES PAR LA METHODE DES PORTIQUES EQUIVALENTS ET LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .

Resumé : Le présent projet consiste essentiellement en l'élaboration de programmes informatiques en vue de modéliser des voiles sous différents types de chargements ,par les méthodes suivantes :

- La méthode des portiques équivalents .
- La méthode des éléments finis .

Le but recherché est la comparaison de ces deux modélisations afin de juger de l'efficacité et de l'application pratique de chacune d'elles .

Subject : COMPARATIVE STUDY OF WALLS MODELISATION BY TWO METHODS FINIT ELEMENT METHOD AND EQUIVALENT PORTICO METHOD .

Abstract: The present project consists essentially in the elaboration of computer programs for modelisations of walls, under different loading cases by this methods :

- Equivalent portico method .
- Finit element method .

The aim of this research is the comparison between this two methods in order to judge their efficacy and practice application .

# Remerciements

Louanges à DIEU qui nous entoura de sa miséricorde sans laquelle ce modeste travail n'aurait jamais vu le jour .

Nous sommes très reconnaissantes envers M<sup>eur</sup> H .CHARIE, notre promoteur pour sa gentillesse ,ses conseils fructueux ainsi que son apport moral et scientifique .

Notre gratitude va tout spécialement vers M<sup>elles</sup> DJAMILA AREGRADJ et Souâad BERRAMI pour leur serviabilité , leur gentillesse et la patience qu'elles ont manifestées à notre égard n'épargnant ni leur temps ni leur peine pour nous venir en aide .

Qu'il nous soit permis également de remercier M<sup>elles</sup> N.BENKACI et W.SAIDI pour leur soutien moral ,M<sup>eur</sup> O.BELHADJ pour sa disponibilité et ses conseils éclairés ainsi qu'à Messieurs T. MERABTENE ,R.GHEZAL ,M.FRITIH pour leur aide précieuse et leur serviabilité .

Nos remerciements s'adressent également à tous les professeurs qui ont contribué à notre formation ,ainsi qu'au personnel de l'E N P .

إهداء

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

إلى العنوم أسمى ... إلى العلي أسمى ...

إلى أشفائي والأهبة ...

إلى أضحى العزيزة باسمي ...

إلى كل فارس شغوف بالعلم ، مؤمن بمجاهد له علم ، كلمته الله ...  
أهدى هذه الكلمات والنور صنعته ، عسى أن ينفع بها

فنديته

إلى العنوم أسمى ... إلى العزيز أسمى ...

إلى أشفائي وشفيتي الأعباء ...

إلى مهدي و فيصل ...

إلى كل فاضل بكلمته والنوهد ...

أهدى هذا العمل والنور صنع عسى أن ينفع قارئه

نعيمته

S O M M A I R E

CHAPI : MODELISATION EN PORTIQUE EQUIVALENT

1.1: ELEMENTS CONSTITUTIFS DU MODELE

1.2: MODELISATION DES REFENDS

CHAPII: METHODES ENERGETIQUES

11.1: INTRODUCTION

11.2: TRAVAIL D'UNE FORCE

11.3: ENERGIE DE DEFORMATION :U

11.4: METHODE ENERGETIQUE DE CASTIGLIANO

11.5: METHODE DES DEPLACEMENTS

11.6: CALCUL DES REACTIONS D'APPUIS DUES AU  
CHARGEMENT EXTERIEUR

11.7: PRINCIPE DE LA METHODE DES DEPLACEMENTS

CHAPIII: OPERATIONS SUR LA MATRICE DE RIGIDITE DE  
DE LA STRUCTURE

111.1: PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE

111.2: METHODES DE STOCKAGE DE LA MATRICE [K]

111.3: CONDITIONS AUX LIMITES

CHAP IV: METHODES DE RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

IV.1: INTRODUCTION

IV.2: CLASSIFICATION DES METHODES DE RESOLUTION

IV.3: PROPRIETES DES METHODES DE RESOLUTION

IV.4: TECHNIQUES DE CALCUL PAR LES DIFFERENTES  
METHODES

CHAP V: PRESENTATION DU PROGRAMME PORTIQUE EQUIVALENT

V.1: INTRODUCTION

V.2: ENTREE DES DONNEES

V.3: MODELISATION DU VOILE EN PORTIQUE EQUIVALENT

V.4: EXEMPLE D'APPLICATION DE LA 1ere PARTIE

CHAP VI: FONDEMENTS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

VI.1: INTRODUCTION

VI.2: METHODES D'APPROXIMATION

VI.3: CONCEPT D'ELEMENT FINI

VI.4: FORMULATIONS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

VI.5: DOMAINE D'APPLICATION DE LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS

CHAP VII: PROPRIETES DE L'ELEMENT TYPE DEPLACEMENT

VII.1: COMPLETUDE

VII.2: COMPATIBILITE

VII.3: CONVERGENCE

CHAP VIII: THEORIE DE L'ELASTICITEE PLANE

VIII.1: INTRODUCTION

VIII.2: EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'EQUILIBRE

VIII.3: EQUATIONS DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS

VIII.4: EQUATIONS CONSTITUTIVES DU MATERIAU

VIII.5: PROBLEMES D'ELASTICITEE PLANE

VIII.6: RESOLUTION DES PROBLEMES D'ELASTICITEE PLANE

CHAP IX: PRESENTATION DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE POUR  
L'ETUDE DE L'ELASTICITEE PLANE

IX.1: CHOIX DU TYPE D'ELEMENT

IX.2: CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE L'ELEMENT  
RECTANGULAIRE EN ELASTICITEE PLANE

IX.3: DETERMINATION DU VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE  
DES FORCES NODALES

CHAP X: PRESENTATION DU PROGRAMME ELEMENTS FINIS

- X.1: INTRODUCTION
- X.2: PRESETATION DU PROGRAMME
- X.3: ENTREE DES DONNEES
- X.4: TRANSFERT DES DONNEES
- X.5: REPARTITION DE LA MEMOIRE
- X.6: GENERATION AUTOMATIQUE DU MAILLAGE
- X.7: DETECTIONS DES ELEMENTS 'VIDES'
- X.8: DETERMINATION DES MATRICES DE RIGIDITE  
ELEMENTAIRES
- X.9: ASSEMBLAGE DES MATRICES DE RIGIDITE
- X.10: PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS AUX LIMITES
- X.11: DETERMINATION DU VECTEUR FORCE NODALE
- X.12: RESOLUTION DU SYSTEME  $[K]\{U\}=\{F\}$
- X.13: CALCUL DES CONTRAITES INTERNES
- X.14: IMPRESSION DES RESULTATS
- X.15: COMBINAISON DES CHARGES
- X.16: ORGANIGRAMME DE MODELISATION DU VOLLE  
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
- X.17: EXEMPLE D'APPLICATION DE 2eme PARTIE

CHAP XI: COMPARAISON DES METHODES DE MODELISATION DE VOILLES  
PAR LA MEF ET LA MPE

- X1.1: INTRODUCTION
- X1.2: APPLICATION
- X1.3: CONSTATATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS
- X1.4: CONCLUSION



## I N T R O D U C T I O N

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Dans le domaine du génie Civil , l'ingénieur est souvent amené à calculer des bâtiments contreventés, le contreventement est généralement assuré par des portiques ou des refends plans ayant une raideur négligeable dans la direction perpendiculaire à ce plan .

La première étape consiste à modéliser correctement ces contreventements et à les assembler en un modèle dans l'espace ou lorsque çelà est possible en un modèle plan .

La seconde étape consiste à évaluer les efforts auxquels est soumise la structure afin d'assurer l'étape ultime qui consiste à ferrailer la structure .

La méthode de modélisation des voiles la plus couramment utilisée est celle établit par MONSIEUR ALBIGES.

Cette méthode n' a pas pour but de permettre une évaluation exacte des efforts mais simplement d'assurer que le bâtiment à voiles présente une sécurité suffisante sous l'action des forces horizontales .

Néanmoins , il existe des méthodes qui permettent de retrouver le fonctionnement réel du voile et qui donnent des résultats assez proches de la réalité parmi lesquelles on peut citer : la méthode des portiques équivalentes et la méthode des éléments finis .

## CONSEILS GENERAUX POUR LA MODELISATION

Lors de l'étude d'une structure ,le recours à l'ordinateur est bien souvent inévitable ,celui ci permet en effet d'effectuer des calculs complexes difficilement réalisables par des methodes manuelles,et procure un gain de temps important en évitant les opérations longues et fastidieuses.

Le calcul sur ordinateur n'est q'une aide matérielle et ne peut en aucun cas se substituer à la réflexion de l'ingénieur et ne dispense donc pas d'une analyse de la structure étudiée.

Il convient en effet de définir à priori quels sont les résultats recherchés , et de quelle façon ils seront exploités. On pourra alors définir un modèle en respectant quelques règles de bon sens.

1- Essayer de se ramener à un problème plan , car les calculs en trois dimensions sont beaucoup plus longs à préparer et à exploiter que les calculs plans.

2- Bien modéliser les liaisons avec le milieu extérieur , car bien souvent les erreurs se situent à ce niveau .

3- Ne pas compliquer inutilement un modèle .

Un modèle inutilement compliqué ne peut apporter que des difficultés lors de l'exploitation , il convient donc :

a) De ne pas utiliser des éléments finis si une poutre répond aussi bien au problème

b) De définir la précision souhaitée pour le calcul de chaque élément de structure et d'établir le maillage en conséquence.

Il n'est pas nécessaire de calculer les efforts en tous points avec la même précision , certaines zones peuvent être modélisées grossièrement .

4 -Ne pas considérer les résultats comme irréfutables .

Il est donc essentiel de toujours remettre en cause les résultats et de les vérifier soigneusement avant et même pendant leur exploitation .

D'autre part,un modèle n'est jamais qu'une approximation de la réalité,et il est toujours possible sinon souhaitable d'adapter les résultats .

1ere PARTIE

MODELISATION DU VOILE  
PAR  
PORTIQUES EQUIVALENTS

1-1) ELEMENTS CONSTITUTIFS DU MODELE:

Un modèle de structure est composé par un assemblage d'éléments reliant les différents noeuds afin de représenter le mieux possible le comportement de la structure.

Dans ce qui suit, nous allons présenter les 2 types principaux d'éléments utilisés pour la modélisation du voile avec ouverture.

a) POUTRE PLANE A INERTIE CONSTANTE :

Les poutres les plus couramment utilisées dans les modèles plans sont à inertie constante . Elles prennent en compte trois degrés de liberté par noeud qui correspondent dans le repère local de la poutre à un effort normal , un effort tranchant et un moment fléchissant .



fig 1-1 poutre plane

b) POUTRE PLANE A GOUSSETS :

Les poutres planes à goussets comportent une partie médiane souple à inertie constante et une longueur indéformable à chaque extrémité : fig 1 2

Elles permettent de modéliser de manière réaliste les portiques plans lorsque le volume commun à une poutre et au poteau auquel elle est liée n'est pas de dimension négligeable.

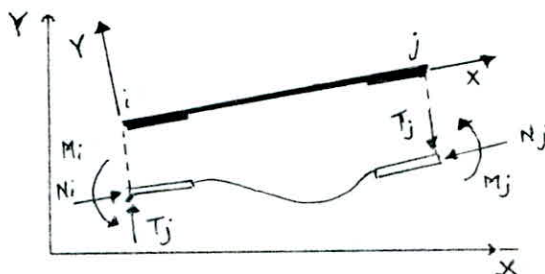


fig 1-2 poutre à goussets

1-2) MODELISATION DES REFENDS :

Le voile avec ouverture est assimilé à un portique dont les barres sont supposées concentrées dans les lignes moyennes des trumeaux et des linteaux. Ce modèle comporte des poutres verticales planes représentant les trumeaux, et des poutres horizontales à goussets matérialisant les linteaux.

L'emploi des poutres comportant une partie centrale déformable et une partie rigide à chaque extrémité est obligatoire dans les linteaux.

En effet l'utilisation de poutres déformables sur toute la longueur conduirait à surestimer la déformation de la partie commune aux linteaux et au trumeau supposée infiniment rigide (partie A A' - B B' ) Fig 1.3

Par contre la présence d'éléments rigides aux extrémités du linteau permet de retrouver un fonctionnement plus conforme à la réalité.

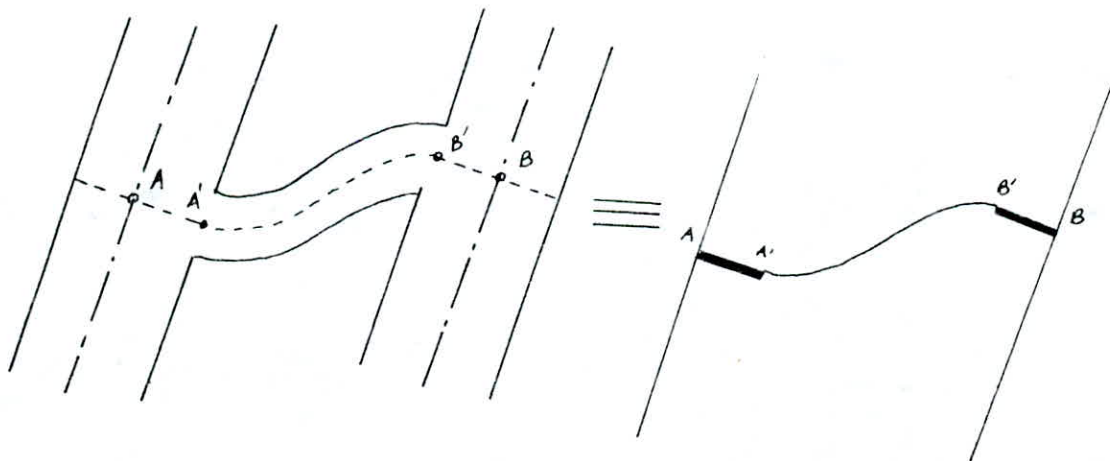


figure 1-3 Modélisation du voile à ouvertures

11- 1 INTRODUCTION

Sous l'action des charges extérieures, toute structure subit des déformations qui sont la conséquence de la déformabilité des matériaux utilisés à leur réalisation.

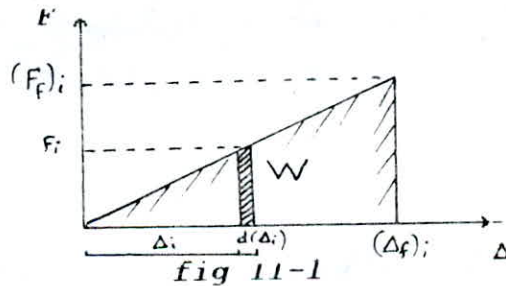
La structure passe ainsi de sa position initiale non déformée à une autre d'équilibre appelée " position déformée "

Afin d'exprimer la condition d'équilibre dans la position déformée ,on peut procéder de deux manières:

- Appliquer le principe de la conservation énergétique :  
méthode énergétique.
- Appliquer le principe de déplacements virtuels :  
méthode cinématique .

Les deux procédés conduisent aux mêmes résultats pour exprimer la condition d'équilibre.

11- 2 TRAVAIL D'UNE FORCE:



Soit un corps élastique soumis à une force extérieure  $F$  et subissant un déplacement proportionnel à  $F$ .

le travail élémentaire est:  $dW = F_i d\Delta_i$

$$W = \int_0^{(\Delta f)_i} F_i d\Delta_i$$

or :

$$\frac{\Delta_i}{(\Delta f)_i} = \frac{F_i}{(Ff)_i} \rightarrow F_i = \frac{(Ff)_i \Delta_i}{(\Delta f)_i}$$

$$W = \int_0^{(\Delta f)_i} \frac{(Ff)_i \Delta_i}{(\Delta f)_i} d\Delta_i$$

Donc :

$$W = \frac{1}{2} (F_f)_i (\Delta f)_i$$

Avec  $(\Delta f)_i$  : déplacement final produit par une force  $F_i$

$(F_f)_i$  : force maximale

Le travail produit par un système de forces est :

$$W = \frac{1}{2} \sum F_i \Delta_i$$

### 11 - 3 ENERGIE DE DEFORMATION U :

Soit  $W$  le travail des forces extérieures et  $U$  le travail des forces intérieures ; d'après le théorème de CLAPEYRON qui est une application du principe de la conservation de l'énergie , il y a égalité entre  $W$  et  $U$ .

Cette égalité ne dépend ni de l'ordre dans lequel les forces sont appliquées , ni des variations de ces forces entre l'état initial et l'état final du corps.

Sous l'effet des forces extérieures , il y a apparition des efforts et des déformations dans les sections de la structure sollicitée.

L'évaluation du  $U$  se fait en partant des contraintes et des déformations unitaires de chaque sollicitation.

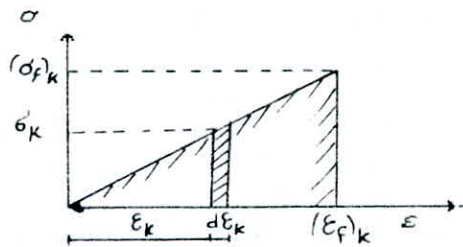


fig 11-2

$$U_k = \int_V \int_0^{(\epsilon_f)_k} \sigma d\epsilon_k dv$$

Car :

$$U = \int_V U_0 dv$$

Avec :

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad \text{: densité de l'énergie de déformation}$$

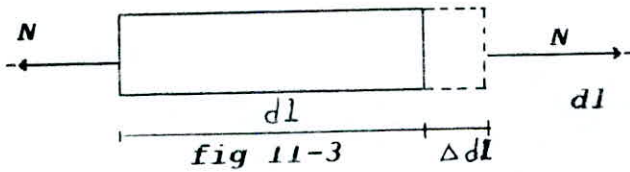
On a :

$$\sigma_k = \frac{(\sigma_f)_k \varepsilon_k}{(\varepsilon_f)_k}$$

Donc :

$$U_k = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_f)_k (\varepsilon_f)_k$$

11 - 3 -a ENERGIE DE DEFORMATION DUE A L'EFFORT NORMAL :



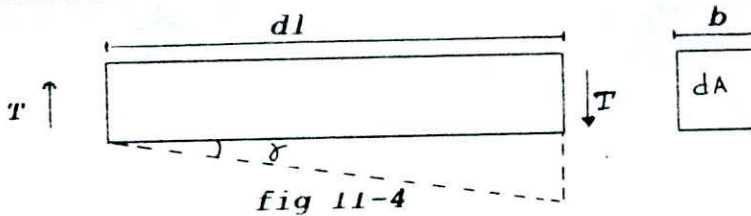
$$U_N = \frac{1}{2} \int_v \sigma \varepsilon dv \quad \text{avec : } dv = S \times dl$$

$$\sigma = \frac{N}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E S}$$

$$U_N = \frac{1}{2} \int_v \frac{N}{S} \frac{N}{E S} S dl$$

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{E S} dl$$

11 - 3 -b ENERGIE DE DEFORMATION DUE A L'EFFORT TRANCHANT :



$$U_T = \frac{1}{2} \int_v \tau \gamma dv \quad \text{avec : } dv = ds \times dl$$

$$\tau = \frac{T S_t}{I b} \quad \begin{array}{l} S_t : \text{moment statique} \\ b : \text{largeur de la section} \end{array}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T S_t}{I b G}$$

$$U_T = \frac{1}{2} \int \frac{T S_t}{I b} \frac{T S_t}{I b G} ds dl$$

On définit la section cisailée réduite par :

$$S' = \frac{I^2}{\int_a (S_t^2 / b^2) ds}$$



D'où :

$$U_T = \frac{1}{2} \int_l \frac{T^2}{G S} dl$$

11 3- c ENERGIE DE DEFORMATION DUE AU MOMENT DE FLEXION

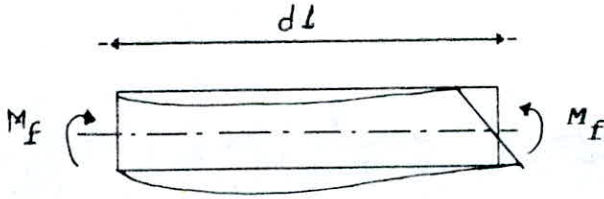


fig 11-5

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dv$$

$$\sigma = \frac{M}{I} Y, \quad \varepsilon = \frac{M Y}{E I}, \quad dv = ds \times dl$$

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V \frac{M Y}{I} \frac{M Y}{E I} ds dl$$

$$U_M = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{E I} dl \int_S Y^2 ds$$

d'où :

$$U_M = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{E I} dl$$

11 3- d ENERGIE DE DEFORMATION DUE AU MOMENT DE TORSION :

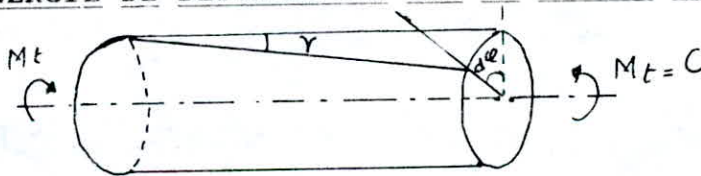


fig 11-6

$$U_C = \frac{1}{2} \int_l \frac{C^2}{G J} dl$$

C : moment de torsion

J : moment quadratique polaire ( section circulaire)

Lorsque toutes les sollicitations simples sont appliquées simultanément, l'énergie de déformation pour une barre est donnée

par:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{N^2}{E S} + \frac{T^2}{G S} + \frac{M^2}{E I} + \frac{C^2}{J G} \right) dl$$

#### 11- 4 METHODE ENERGETIQUE DE CASTILIAGNO :

Le thécrème de CASTILIAGNO permet de calculer les déplacements de points particuliers des barres.

Par extension on peut calculer les déplacements en tout point ainsi que résoudre les problèmes hyperstatiques .

#### ENONCE DU THEOREME DE CASTIGLANO:

-----

le déplacement du point d'application d'une force généralisée dans le sens d'action de cette dernière équivaut à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force .

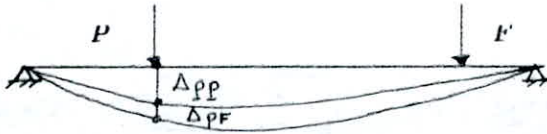


fig 11- 7

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_{PP} + P \Delta_{PF}$$

$$U = \frac{1}{2} P^2 \delta_{PP} + P \Delta_{PF}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = P \delta_{PP} + P \Delta_{PF} = \Delta_{PP} + \Delta_{PF} = \Delta_P$$

d'où :

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial P} = \Delta_P}$$

#### REMARQUE:

Dans le calcul de l'énergie de déformation et des éléments des matrices de souplesse et de rigidité ,on néglige souvent l'effet l'effort tranchant.

Cet effet est négligeable pour les éléments d'élanacement  $\lambda \geq 5$  (poutres et poteaux courants ).

Pour les éléments d'élanacement réduit tels que les poteaux courts et les voiles,l'influence de l'effort tranchant devient très importante,et ne peut être négligée.

## 11 - 5 METHODE DES DEPLACEMENTS :

La méthode de déplacements est caractérisée par le fait que les déplacements indépendants des noeuds sont pris comme inconnus.

La condition de compatibilité est satisfaite en premier lieu en faisant correspondre le déplacement du noeud avec les déformations des barres le composant, les forces dans les barres sont ensuite reliées aux déplacements du point nodal par une matrice définie positive qui est la rigidité de chaque barre.

Finalement selon les conditions d'équilibre, les forces nodales obtenues à partir des déplacements inconnus des noeuds et de la raideur  $K$  doivent contrebalancer les charges extérieures appliquées aux noeuds.

### 11-5-a / COEFFICIENT DE RIGIDITE :

DEFINITION :

Un coefficient de rigidité se définit comme étant la force au point  $i$  résultant du déplacement unitaire au point  $j$ .

### 11-5-b / MATRICE DE RIGIDITE :

on appelle matrice de rigidité d'un élément, la matrice qui exprime les forces en fonction des déplacements en un certain nombre de points. elle est définie par :

$$[K] \{ U \} = \{ F \}$$

avec:

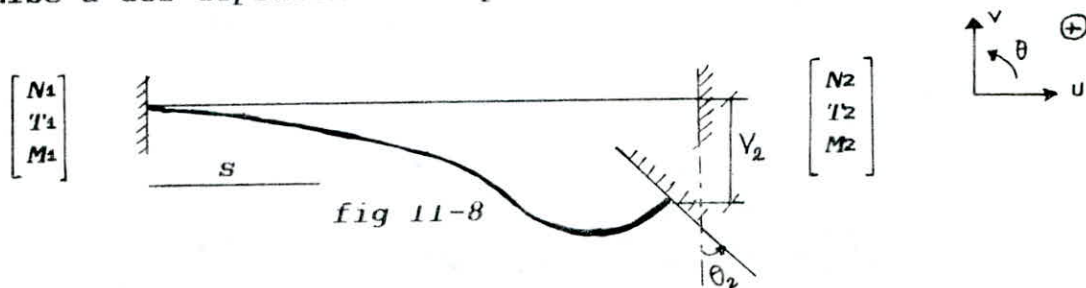
$\{ U \}$  : est le vecteur force

$[K]$  : matrice de rigidité

$\{ F \}$  : vecteur de déplacements

### 11-5-c / MATRICE DE RIGIDITE D'UNE POUTRE SIMPLE BI-ENCASTREE :

Soit une barre encastrée à ses deux extrémités, cette barre est soumise à des déplacements imposés à l'une de ses extrémités.



Naturellement, les déplacements sont petits par rapport aux dimensions de la poutre, nous avons à faire à un système de degrés trois.

Les inconnus hyperstatiques sont :  $N_2$ ,  $T_2$ ,  $M_2$ .

Les équations d'équilibre donnent :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = 0 \\ T_1 + T_2 = 0 \\ M_1 + M_2 + T_2 L = 0 \end{cases}$$

Les efforts dans la barre sont les suivants :

$$\begin{aligned} N &= N_2 \\ M &= T_2 (L - s) + M_2 \\ T &= T_2 \end{aligned}$$

L'énergie de déformation de la barre s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS'} \right) ds$$

D'après le théorème de CASTIGLIANO on a :

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{\partial U}{\partial N_2} = \frac{N_2}{E} \int_0^L \frac{ds}{A} \\ V_2 &= \frac{\partial U}{\partial T_2} = \frac{1}{E} \left( T_2 \int_0^L \frac{(L-s)^2}{I} ds + M_2 \int_0^L \frac{(L-s)}{I} ds + T_2 \int_0^L \frac{E}{GS'} ds \right) \\ \theta_2 &= \frac{\partial U}{\partial M_2} = \frac{1}{E} \left( T_2 \int_0^L \frac{(L-s)}{I} ds + M_2 \int_0^L \frac{1}{I} ds \right) \end{aligned}$$

Si l'inertie  $I$  et la section  $A$  sont constantes :

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{N_2 L}{EA} \\ V_2 &= T_2 \left( \frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{S'G} \right) + \frac{M_2 L^2}{2EI} \\ \theta_2 &= \frac{T_2 L^2}{2EI} + \frac{M_2 L}{EI} \end{aligned}$$

$$\text{En posant } \alpha = \frac{12 EI}{L GS}$$

On a :

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{N_2 L}{EA} \\ V_2 &= T_2 \left( 1 + \alpha / 4 \right) \cdot \frac{L^3}{3EI} + \frac{M_2 L^2}{2EI} \\ \theta_2 &= \frac{T_2 L}{2EI} + \frac{M_2 L}{EI} \end{aligned}$$

et réciproquement :

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{EA}{L} U_2 \\ T_2 &= \frac{1}{(1 + \alpha)} \left[ \frac{12 EI}{L^3} V_2 - \frac{6 EI}{L^2} \theta_2 \right] \end{aligned}$$

$$M_2 = \frac{1}{(1 + \alpha)} \left[ \frac{-6 EI}{L^2} v_2 + (4 + \alpha) \frac{EI}{L} \theta_2 \right]$$

En notation matricielle on a :

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{12 EI}{L^3} & \frac{-1}{1+\alpha} \cdot \frac{6 EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-1}{1+\alpha} \cdot \frac{6 EI}{L^2} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} N_1 &= -N_2 \\ T_1 &= -T_2 \\ M_1 &= -T_2 L - M_2 \end{aligned}$$

En notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{1+\alpha} \cdot \frac{12 EI}{L^3} & \frac{6}{1+\alpha} \cdot \frac{EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-1}{1+\alpha} \cdot \frac{6 EI}{L^2} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

De même que les efforts provoqués par les déplacements :

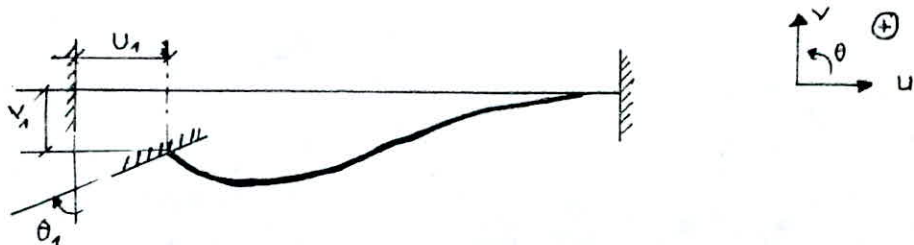


fig 11-9

Exprimons  $(u_1, v_1, \theta_1)$  en fonction de  $(u_2, v_2, \theta_2)$ , pour cela on fait la transformation géométrique suivante :

a-translation  $(-U_1, -V_1)$

b - rotation  $\theta_1$

fig 11-10

$$\begin{aligned} U_2 &= -U_1 \\ V_2 &= -V_1 - L\theta_1 \\ \theta_2 &= -\theta_1 \end{aligned} \quad \text{ou}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= -U_2 \\ V_1 &= -V_2 + L\theta_2 \\ \theta_1 &= -\theta_2 \end{aligned}$$

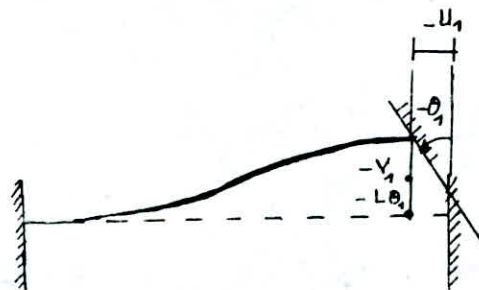
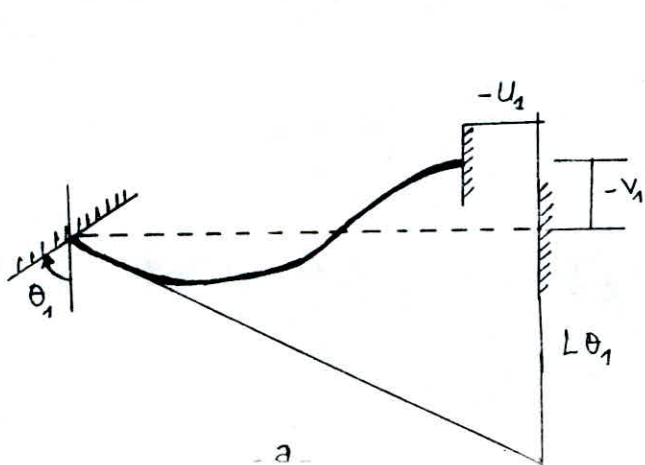
En notation matricielle:

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

$[L]$  : matrice de transformation

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{1+\alpha} \cdot \frac{12 EI}{L^3} & \frac{6}{1+\alpha} \cdot \frac{EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-1}{1+\alpha} \cdot \frac{6 EI}{L^2} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad [L]$$



- b -

On remarque que la matrice de rigidité est symétrique .

Voir page 15

pour la barre .

Nous pouvons donc reconstituer toujours par une formulation matricielle une relation reliant efforts et déplacements

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{12 EI} & \frac{L^2}{6 EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{12 EI} & \frac{L^2}{6 EI} \end{bmatrix} [L] \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Et de même :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{12 EI} & \frac{L^2}{6 EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N1 \\ T1 \\ M1 \\ N2 \\ T2 \\ M2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{-6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ V1 \\ \theta1 \\ U2 \\ V2 \\ \theta2 \end{bmatrix}$$



11-5-d / MATRICE DE RIGIDITE D'UNE POUTRE AVEC DES PARTIES  
INFINIMENT RIGIDES AUX EXTREMITES :

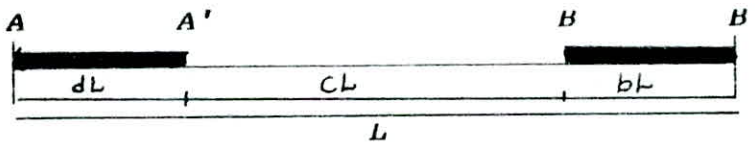


fig 11-11

Les déplacements  $\{U\}$  aux points  $A$  et  $B$  sont liés aux déplacements  $\{U'\}$  en  $A'$  et  $B'$  par la relation geometrique comme suit:

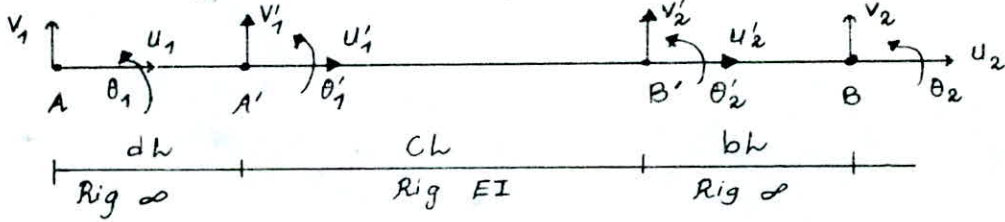


fig 11-12

$$\{ U \} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\{ U' \} = \begin{bmatrix} U_1' \\ V_1' \\ \theta_1' \\ U_2' \\ V_2' \\ \theta_2' \end{bmatrix}$$

\*  $U_1 \neq 0$

$U_1 = U_1'$  et  $V_1' = \theta_1' = V_2' = U_2' = \theta_2' = 0$

\*  $V_2 \neq 0$

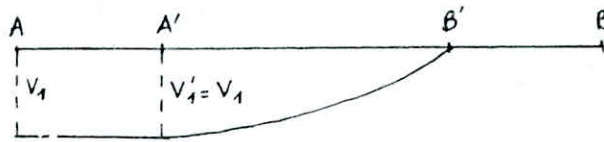


fig 11-13

$V_1' = V_1$

et  $U_1' = U_2' = \theta_1' = \theta_2' = V_2' = 0$

\*  $\theta_1 \neq 0$

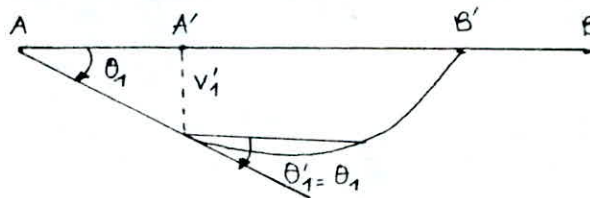


fig 11-14

$$\theta_1' = \theta_1 \quad \text{et} \quad v_1' = dL \times \theta_1, \quad u_1' = u_2' = v_2' = \theta_2' = 0$$

Les autres relations sont obtenus d'une manière similaire .  
Ainsi :

$$\{ U' \} = [H] \{ U \}$$

[H]: transformation géométrique qui s'écrit comme suit:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ V_1' \\ \theta_1' \\ U_2' \\ V_2' \\ \theta_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & dL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -bL \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité de la poutre A'B' de rigidité EI et de vecteur déplacement { U } s'obtient en remplaçant dans la matrice de rigidité du paragraphe précédent L par CL.

voir page

$$\text{Avec : } \alpha = \frac{12 EI}{C^2 L^2 G S'}$$

$$C = 1 - d - b$$

d et b : rapports des parties rigides du linteau à sa longueur totale.

D'autre part , le théorème de BETTI énonce:

$$\boxed{\sum_i F_i U_{iF} = \sum_i F_i' U_{iF}'}$$

THEOREME :

Le travail des forces  $F_i$  soumises aux déplacements  $U_{iF}$  dus à un système de forces  $F_i'$  est égal au travail des forces  $F_i'$  somises aux déplacements  $U_{iF}$  dus au système de force  $F_i$ .

Les forces { F } en A et B et F' en A' et B' engendrent des déplacements semblables car les parties AA' et BB' sont infiniment rigides, on peut donc écrire:

$$\sum F_i U_i = \sum F_i' U_i'$$

ou bien sous la forme matricielle :

$$\{ F \}^T \{ U \} = \{ F' \}^T \{ U' \}$$

Or:  $\{ U' \} = [H] \{ U \}$

D'où:  $\{ F \}^T \{ U \} = \{ F' \}^T [H] \{ U \}$

Par transposition :

$$\{ U \}^T \{ F \} = \{ U \}^T [H]^T \{ F' \} \rightarrow \{ F \} = [H]^T \{ F' \}$$

Or:

$$\{ F \} = [K] \{ U \} \text{ et } \{ F \} = [H]^T \{ F' \} \text{ et } \{ F' \} = [K'] \{ U' \}$$

Donc:

$$\{ F \} = [H]^T [K'] \{ U' \}$$

$$\{ F \} = [H]^T [K'] [H] \{ U \}$$

Par conséquent :

$$\boxed{[K] = [H]^T [K'] [H]}$$

$[K]$  est la matrice de rigidité correspondante aux degrés de liberté (déplacement)  $\{ U \}$  en A et B d'une barre prismatique de longueur  $L$ , avec les parties  $bL$  et  $dL$  extrémités infiniment rigides.

le coefficient  $\alpha = \frac{12 EI}{C^2 L^2 G S^i}$  tient compte de l'effet de l'effort

tranchant . voir page 19

En conclusion, un voile uniforme (sans ouverture) peut être modélisé comme une barre dont la matrice de rigidité est celle de la barre bi-encastée.

Un voile avec ouverture peut être modélisé, comme un portique (en tenant compte de l'effet de l'effort tranchant).

La matrice de rigidité du poteau est celle de la barre bi-encastée et la matrice de rigidité de la poutre (linteau) est celle de la barre à extrémités rigides.

$$K = \frac{EI}{1+\alpha}$$

-19-

$$\begin{bmatrix}
 \frac{A(1+\alpha)}{1cl} & 0 & 0 & \frac{A(1+\alpha)}{1cl} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12}{c^3 l^3} & \frac{6}{c^2 l^2} + \frac{12d}{c^3 l^2} & 0 & \frac{-12}{c^3 l^3} & \frac{6}{c^2 l^2} + \frac{12d}{c^3 l^2} \\
 0 & \frac{6}{c^2 l^2} + \frac{12d}{c^3 l^2} & \frac{(4+\alpha)}{cl} + \frac{12d}{cl^3} + \frac{12d^2}{c^3 l} & 0 & \frac{-6}{c^2 l^2} - \frac{12d}{c^3} & \frac{2-\alpha}{cl} + \frac{6(b+d)}{c^2 l} + \frac{12bd}{c^3 l} \\
 \frac{A(1+\alpha)}{1cl} & 0 & 0 & \frac{A(1+\alpha)}{1cl} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-12}{c^3 l^3} & \frac{6}{c^2 l^2} + \frac{12d}{c^3 l^2} & 0 & \frac{12}{c^3 l^3} & \frac{-6}{c^2 l^2} - \frac{12bd}{c^3 l^3} \\
 0 & \frac{6}{c^2 l^2} + \frac{12d}{c^3 l^2} & \frac{2-\alpha}{cl} + \frac{6(b+d)}{c^2 l} + \frac{12bd}{c^3 l} & 0 & \frac{-6}{c^2 l^2} - \frac{12bd}{c^3 l^2} & \frac{(4+\alpha)}{cl} + \frac{12d}{c^2 l} + \frac{12d^2}{c^3 l}
 \end{bmatrix}$$

11-6 CALCUL DES REACTIONS D'APPUIS DUS AUX CHARGEMENT

EXTERIEUR :

11-6-a CALCUL DES REACTIONS D'APPUIS D'UNE BARRE

BI-ENCASTREE :

11-6-a-1 CHARGEMENT UNIFORME PERPENDICULAIRE A LA BARRE :

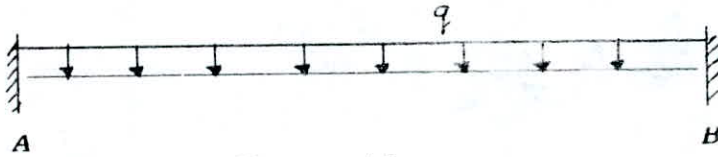


fig 11-15

Si on supprime l'encastrement B le système hyperstatique ci dessus devient

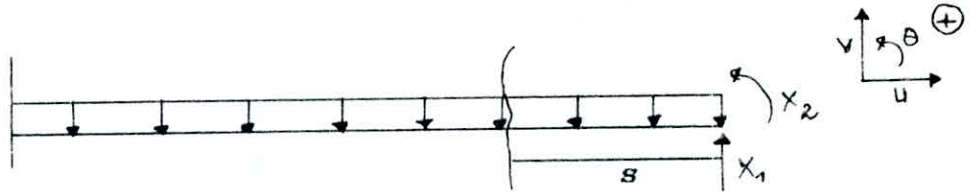


fig 11-16

l'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{T^2}{G S'} + \frac{M^2}{EI} \right) ds$$

Les expressions de T et M sont :

$$T = -X_1 + q s$$

$$M = X_2 + X_1 s - q s^2 / 2$$

d'où :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{(X_1 - qs)^2}{G S'} + \frac{(X_2 + X_1 s - q s^2 / 2)^2}{EI} \right] ds$$

D'après le théorème de Castiglano, nous avons :

$$U_1 = \frac{\partial W}{\partial X_1} ; \quad U_2 = \frac{\partial W}{\partial X_2}$$

En réalité,  $U_1 = U_2 = 0$  car l'extrémité B est un encastrement donc :

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = 0 ; \quad \frac{\partial W}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{-2(X_1 + qs)}{G S'} ds + \int_0^L \frac{2s(X_2 + X_1 s - qs^2/2)}{EI} ds = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{2(X_2 + X_1 s - qs^2/2)}{EI} ds$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = X_1 \left( \frac{1}{G S'} + \frac{L^2}{3EI} \right) + X_2 \frac{L}{2EI} - q \left( \frac{L}{2GS'} + \frac{q L^3}{8EI} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_2} = \frac{X_2 L}{EI} + \frac{X_1 L^2}{2EI} - \frac{q L^3}{6EI} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent :

$$x_1 = \frac{q L}{2} \quad ; \quad x_2 = -\frac{q L^2}{12}$$

De la même manière, on peut calculer les réactions à l'appui A. Le vecteur des réactions de la barre s'écrit :

$$\{ R \} = \begin{bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{bmatrix}$$

11-6-a-2 CHARGEMENT UNIFORME NORMAL A LA BARRE :

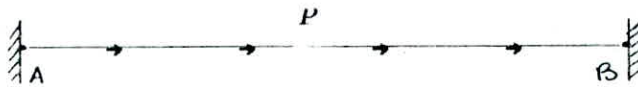


fig 11-17

Si on supprime l'encastrement B, le système hyperstatique ci dessus devient :

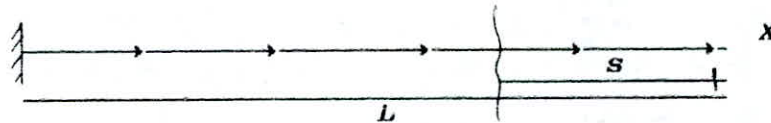


fig 11-18

L'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} ds$$

L'expression de l'effort N :

$$N = X + P s$$

D'où :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(X + P s)^2}{EA} ds$$

d'après le théorème de castigliano on a :

$$U = \frac{\partial W}{\partial X} \quad , \quad X \text{ est une réaction alors } U = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{2(X + P s)}{EA} ds = \frac{1}{EA} (X L + P L^2 / 2) = 0$$

D'où :

$$X = -\frac{P L}{2}$$

11- 6 b CALCUL DES REACTIONS D'APPUIS D'UNE BARRE A EXTREMITE RIGIDES :

11-6- b 1 CHARGEMENT UNIFORME REPARTI SUR LA POUTRE SOUPLE :

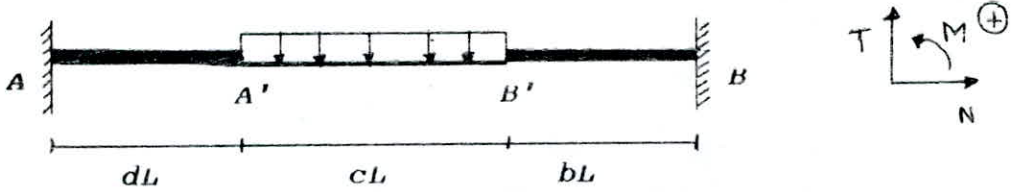


fig 11-19

Sachant que :

$$\{ F' \} = [H] \{ F \} \rightarrow \{ F \} = [H]^{-1} \{ F' \}$$

Or:  $[H]^T = [H]^{-1}$

$$\{ F' \} = \begin{bmatrix} q \, cL / 2 \\ q \, c^2 L^2 / 12 \\ q \, cL / 2 \\ -q \, c^2 L^2 / 12 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\{ F \} = [H] \{ F' \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ dL & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -bL & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \, cL / 2 \\ q \, c^2 L^2 / 12 \\ q \, cL / 2 \\ -q \, c^2 L^2 / 12 \end{bmatrix}$$

$$\{ F \} = \begin{bmatrix} q \, cL / 2 \\ d \, q \, c \, L^2 / 2 + q \, c^2 L^2 / 12 \\ q \, cL / 2 \\ -b \, q \, c \, L^2 / 2 - q \, c^2 L^2 / 12 \end{bmatrix}$$

11-6-b-2 / CHARGEMENT UNIFORME REPARTI SUR TOUTE LA POUTRE :



fig 11-20

$$\{ F \} = \begin{bmatrix} T_A \\ M_A \\ T_B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \, c / 2 + q \, d \\ q \, c \, d / 2 + q \, c^2 / 12 + q \, d^2 / 2 \\ q \, c / 2 + q \, b \\ -q \, c \, b / 2 - q \, c^2 / 12 - q \, b^2 / 2 \end{bmatrix}$$

11-7 PRINCIPE DE LA METHODE DE DEPLACEMENTS :

La méthode des déplacements se base sur le principe simple de la superposition des états d'équilibre qui sont les suivants:

-Chargement sans déformation + Déformation sans chargement





.111-1 / REPERE LOCAL - REPERE GLOBAL :

Jusqu'ici les relations trouvées ne supposaient qu'un seul système d'axe lié à la barre (repère local) .

Les efforts dans les barres sont toujours exprimés par rapport à ce système d'axes ,par contre pour déterminer les réactions des appuis et les déplacements des noeuds ,on choisit un système global d'axes qui ne coïncide pas nécessairement avec celui de la barre .

Il s'avère donc utile de trouver les expressions des déplacements dans le repère global .

Pour cela ,il faut introduire l'angle  $\alpha$  entre l'axe  $x$  du repère global et l'axe  $l$  du repère local .

Cette relation consiste donc à exprimer une rotation d'angle  $\alpha$  d'où on obtient en notant  $(u,v,\varphi)$  les déplacements dans le repère local et  $(x,y,\theta)$  ceux dans le repère global.

$$\begin{aligned} u &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ v &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

On remarque que la rotation  $\varphi$  n'est pas affectée par ce changement de repère, donc :

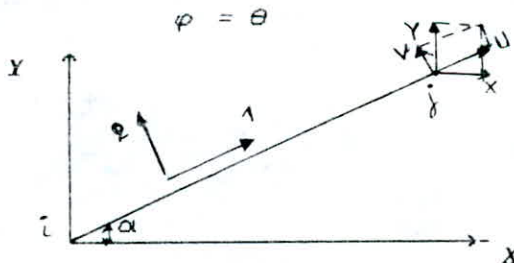


fig 111-1

Compte tenu de la formulation linéaire de cette transformation nous pouvons également l'exprimer sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

De même les efforts (N,T,M) exprimés dans le repère local se déduiront de la même façon des efforts (H,V,C) liés au repère global par :

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix}$$

Soit :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[R] : est appelé matrice de rotation de la barre .

En vertu des propriétés des cosinus directeurs , on peut montrer que :

$$[R]^T [R] = I \rightarrow [R]^{-1} = [R]^T$$

Donc [R] est une matrice orthogonale .

Par conséquent les expressions précédentes peuvent s'écrire sous une forme plus simple :

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix} = [R]^T \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité locale déjà établie au paragraphe 11-5-4 peut être divisée en 4 sous matrices :

$$[k] = \begin{bmatrix} k^0 & l^1 \\ l^0 & k^1 \end{bmatrix}$$

Où  $k^0, k^1, l^0, l^1$  sont des sous -matrices de dimension 3x3 pour déterminer cette matrice complètement , il suffit de connaître une des sous - matrices précédentes .

Les trois autres s'obtiennent ensuite à l'aide de transformations matricielles simples .

La matrice de base est  $[k^1]$  , pour obtenir les autres nous utiliserons deux matrices de transformation que nous noterons  $[T_1]$  et  $[T_2]$  avec :

$$[T_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons alors :

$$[l^1] = [Tg] [k^1]$$

$$[l^0] = [k^1] [Ta]$$

$$[k^0] = [l^1] [Ta]$$

Pour trouver ces matrices dans le repère global , on fait la transformation suivante :

$$[K^1] = [R]^T [k^1] [R]$$

En notant  $\{u_a^i\}$  et  $\{u_b^i\}$  les vecteurs déplacements des extrémités d'une barre "a" et  $\{f_a^i\}$  et  $\{f_b^i\}$  les efforts aux extrémités c'est à dire :

$$\{f_a^i\} = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \end{bmatrix} \quad \{u_a^i\} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$$

Nous obtenons donc les notations matricielles:

$$\begin{bmatrix} f_a^i \\ f_b^i \end{bmatrix} = [k] \begin{bmatrix} u_a^i \\ u_b^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a^i & l_b^i \\ l_a^i & k_b^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a^i \\ u_b^i \end{bmatrix}$$

Ou bien :

$$\begin{aligned} \{f_a^i\} &= [k_a^i] \{u_a^i\} + [l_b^i] \{u_b^i\} \\ \{f_b^i\} &= [l_a^i] \{u_a^i\} + [k_b^i] \{u_b^i\} \end{aligned}$$

Soit un noeud i auquel arrive un certain nombre de barres et

$$\{F_o^i\} = \begin{bmatrix} H_o^i \\ V_o^i \\ C_o^i \end{bmatrix}$$

$\{F_o^i\}$  : vecteur des force extérieures appliquées sur ce noeud .

et :

$\{F_a^i\}$  : les forces provenant des barres .

L'équilibre s'écrit :

$$\begin{aligned} H_o^i &= \sum_a H_a^i \\ V_o^i &= \sum_a V_a^i \quad \rightarrow \quad \{ F_o^i \} = \sum_a \{ F_a^i \} \\ C_o^i &= \sum_a C_a^i \end{aligned}$$

Or :  $\{ F_a^i \} = [R_a]^T \{ f_a^i \}$ , et en tenant compte du principe de la superposition des états d'équilibre,  $\{ f_a^i \}$  peut être décomposé en un terme  $\{ f_a^{i'} \}$  dû aux déplacements seuls et un terme  $\{ f_a^{i''} \}$  dû aux charges seules.

Nous obtenons alors :  $\{ f_a^i \} = \{ f_a^{i'} \} + \{ f_a^{i''} \}$

Or :

$$\{ f_a^{i'} \} = [k_a^i] \{ u_a^i \} + [l_a^i] \{ u_\Delta^i \}$$

Et en exprimant les déplacements en fonction du repère global

nous obtenons :

$$\begin{aligned} D'où : \quad \{ u_a^i \} &= [R_a] \{ U_a^i \} \\ \{ f_a^{i'} \} &= [k_a^i] [R_a] \{ U_a^i \} + [l_a^i] [R_a] \{ U_\Delta^i \} \end{aligned}$$

L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \{ F_o^i \} &= \sum_a ( [R_a]^T [k_a^i] [R_a] \{ U_a^i \} + \\ &\quad [R_a]^T [l_a^i] [R_a] \{ U_\Delta^i \} + [R_a]^T \{ f_a^{i''} \} ) \end{aligned}$$

Le vecteur  $\{ U_a^i \}$  est le vecteur déplacement du noeud  $i$ , il est identique pour toutes les barres, donc on peut le noter  $\{ U^i \}$

L'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} \{ F_o^i \} &= \sum_a [R_a]^T \{ f_a^{i''} \} + \left\{ \sum_a [R_a]^T [k_a^i] [R_a] \right\} \{ U^i \} + \\ &\quad \left\{ \sum_a [R_a]^T [l_a^i] [R_a] \right\} \{ U^j \} \end{aligned}$$

Si on note :

$$\{ F^i \} = \{ F_o^i \} - \sum_a [R_a]^T \{ f_a^{i''} \}$$

On peut écrire :

$$\{ F^i \} = \left( \sum_a [R_a]^T [k_a^i] [R_a] \{ U^i \} \right) + \left( \sum_a [R_a]^T [l_a^i] [R_a] \{ U^j \} \right)$$

C'est à dire une relation du type :

$$[K] \{ U \} = \{ F \}$$

### 111-2 /FORMATION DE LA MATRICE GLOBALE DE LA STRUCTURE :

Il s'agit dans cette partie d'assembler les différentes matrices de rigidité de façon à former la matrice de rigidité de la structure .

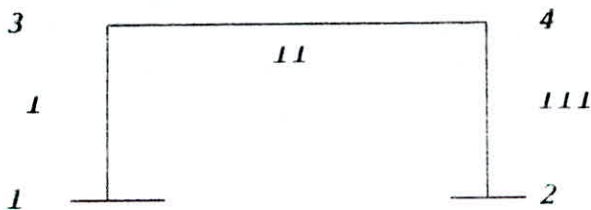
Pour se faire, il faut procéder de la façon suivante en calculant pour chacune des barres les sous matrices  $[K_a^i]$ ,  $[K_a^j]$ ,  $[L_a^i]$ ,  $[L_a^j]$

ensuite :

- Additionner les termes  $[K_a^i]$  et  $[K_a^j]$  à ceux déjà existant .
- Placer les termes  $[L_a^i]$  et  $[L_a^j]$  à leurs positions respectives .

EXEMPLE :

Soit le portique ci dessous constitué de 4 noeuds et 4 barres



Barre 1

$$[K_I] = \begin{bmatrix} K_I^1 & L_I^1 \\ L_I^1 & K_I^3 \end{bmatrix}$$

Barre 11

$$[K_{II}] = \begin{bmatrix} K_{II}^3 & L_{II}^4 \\ L_{II}^3 & K_{II}^4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Barre III} \quad [K_{III}] = \begin{bmatrix} K_{III}^2 & L_{III}^4 \\ K_{III}^2 & L_{III}^4 \end{bmatrix}$$

$$[K \text{ portique}] = \sum_{\alpha=I}^{III} [K_{\alpha}]$$

Ecrivons l'équilibre de chacun des noeuds :

$$\{ F^1 \} = [K_I^1] \{ U^1 \} + [L_I^3] \{ U^3 \}$$

$$\{ F^2 \} = [K_{III}^2] \{ U^2 \} + [L_{III}^4] \{ U^4 \}$$

$$\{ F^3 \} = ( [K_I^3] + [K_{II}^3] ) \{ U^3 \} + [L_I^1] \{ U^1 \} + [L_{II}^4] \{ U^4 \}$$

$$\{ F^4 \} = ( [K_{II}^4] + [K_{III}^4] ) \{ U^4 \} + [L_{II}^3] \{ U^3 \} + [L_{III}^2] \{ U^2 \}$$

D'où la matrice de rigidité:

$$[K_{\text{PORTIQUE}}] = \begin{bmatrix} K_I^1 & 0 & L_I^3 & 0 \\ 0 & K_{III}^2 & 0 & L_{III}^4 \\ L_I^1 & 0 & K_I^3 + K_{II}^3 & L_{II}^4 \\ 0 & L_{III}^2 & L_{II}^3 & K_{II}^4 + K_{III}^4 \end{bmatrix}$$

REMARQUES :

a) s'il n'ya pas de barres entre deux noeuds  $i$  et  $j \rightarrow K_{ij} = K_{ji} = 0$

b)  $K_{ii} = \sum_{\alpha} K_i^{\alpha}$

c)  $i \neq j \quad K_{ij} = L_i^{\alpha} \text{ ou } L_j^{\alpha}$

d/ INFLUENCE DE LA NUMEROTATION DES NOEUDS :

Il apparait de ce qui précède que la numérotation des noeuds et des éléments est arbitraire, toutes fois les grands programmes de calcul de structure tiennent compte du fait que tous les noeuds ne sont pas reliés les uns aux autres.

La matrice globale peut être une matrice bande et les gains en capacité du programme et de résolution peuvent être considérables

EXEMPLE : portique plan défini ci dessous :

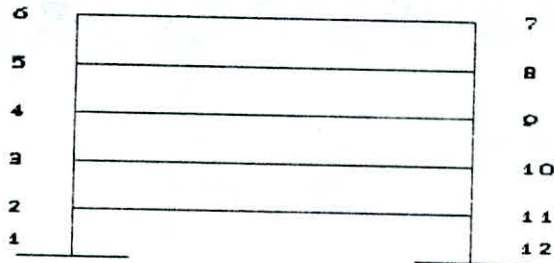


fig 111-3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12												
11	X	X	X						X		X	
10		X	X	X					X			
9			X	X	X			X				
8				X	X	X						
7					X	X	X					
6					X		X	X				
5				X			X	X	X			
4			X					X	X	X		
3		X							X	X	X	
2	X									X	X	X
1											X	X

Cette numérotation est mauvaise ,les liaisons horizontales donnent des termes hors-diagonale ,après réarrangement en fonction des appuis,on aura à résoudre un système linéaire complet .

La numérotation ci dessous est meilleure .

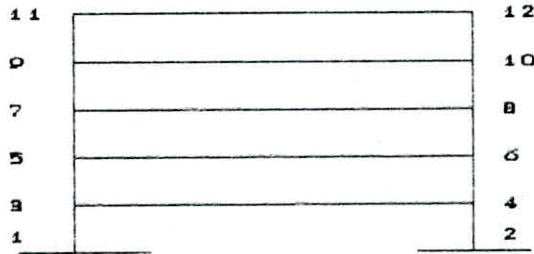


fig 111- 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
12	X		X										
11		X		X									
10	X		X	X	X								
9		X	X	X		X							
8			X		X	X	X						
7				X	X	X		X					
6					X		X	X	X				
5						X	X	X		X			
4							X		X	X	X		
3								X	X	X		X	
2									X		X	X	
1										X	X	X	

111-3 / CALCUL DES EFFORTS DANS LES BARRES ET DES REACTIONS DES APPUIS :

111-3-1/ CALCUL DES EFFORTS DANS LES BARRES :

Pour calculer les efforts dans les barres , il suffit de reprendre le principe de base de la méthode de calcul ,C'est à dire la superposition des deux états d'équilibre :

- Charges sur les barres sans déplacements des extrémités .
- Déplacement des extrémités sans charges sur la barre .

Cette égalité est exprimé sous la forme :

$$\{ f_a \} = \{ f_a' \} + \{ f_a'' \}$$

Et ceci pour les deux extrémités que nous noterons i et j de notre barre .

Nous avons montré que le terme  $\{ f''_a \}$  représentant les charges sur la barre sans déplacement des extrémités pouvant se calculer sans difficulté .





A ce stade du calcul nous connaissons également les déplacements des noeuds  $i$  et  $j$  que nous pouvons exprimer dans le repère local de la barre par :

$$\{ u_a^i \} = [R_a] \{ U^i \}$$

$$\{ u_a^j \} = [R_a] \{ U^j \}$$

Ainsi nous aurons directement le terme  $\{ f'a \}$  qui nous est donné par la relation

$$\{ f'_a \} = [K_a^i] [R_a] \{ U^i \} + [L_a^j] [R_a] \{ U^j \}$$

Nous pouvons calculer donc complètement les efforts dans les barres aux deux extrémités (par ex en  $i$ )

$$\{ f_a^i \} = [K_a^i] [R_a] \{ U^i \} + [L_a^j] [R_a] \{ U^j \} + \{ f_a^{''i} \}$$

et de façon similaire pour l'autre extrémité .

### 111-3-2 / CALCUL DES REACTIONS D'APPUI :

Une fois , les efforts dans les barres complètement déterminés les réactions d'appuis s'obtiennent par application du principe de l'action et de la réaction .

L'équilibre du noeud donne donc :

$$\{ F_0^i \} = \sum [R_a]^T \{ f_a^i \}$$

avec  $\{ F_0^i \}$  : vecteur réaction du noeud  $i$

$[R_a]^T$  : Matrice transposée de rotation de la barre "a" .

Cette méthode outre sa simplicité présente les avantages suivants :

- pour les noeuds non appuis , cela permet de vérifier par un contrôle d'équilibre que le vecteur force  $\{ F_0^i \}$  représente bien uniquement les forces directement appliquées au noeud , et dans le cas le plus courant , où ces forces sont nulles , ce calcul doit nous fournir un vecteur nul .

Ceci n'est jamais le cas car il reste toujours de petits résidus compte tenu des erreurs d'arrondis inévitables et cela permet ainsi de juger la précision du calcul .

IV 1 / PROPRIETE DE LA MATRICE DE RIGIDITE :

La matrice de rigidité présente quelques particularités dont certaines sont très intéressantes du point de vue économie de mémoire

a) -[K] Matrice symétrique :

La matrice de rigidité globale est une matrice symétrique ,cette propriété permet des économies importantes pour le stockage et la résolution du système d'équations et peut être démontrée en appliquant le théorème de BETTY MAXWELL

b) -[K] Est singulière :

N'étant soumise à aucune condition d'appui, la structure peut subir des translations ou des rotations sans qu'il y ait déformations .

Ce sont des déplacements de corps rigides correspondants à une énergie de déformation nulle . Donc il faut imposer des conditions d'appuis en nombre suffisant pour avoir un système algébrique plausible à résoudre .

c) -[K] Est définie positive :

Lorsque les forces appliquées à une structure provoquent des déformations , le travail effectué est emmagasiné sous forme d'énergie de déformation .

Cette énergie est toujours positive ou nulle

$$\frac{1}{2} \{ U \}^T [K] \{ U \} \geq 0$$

d) -[K] Est une matrice bande :

La structure bande de la matrice [k] est une caractéristique importante elle permet des économies tant au niveau du stockage de la matrice que dans la résolution du système d'équations final la valeur LB de la demi largeur de bande correspond au maximum de la différence entre les numéros deux noeuds voisins .

$$LB = [\max |j-i| + 1] * nd$$

j et i les numéros des noeuds voisins

nd:nombre de degrés de liberté par noeud .

IV 2- / METHODES DE STOCKAGE DE LA MATRICE [K] :

Il existe différentes méthodes de stockage de la matrice de rigidité ,la plus part de ces méthodes se basent sur les propriétés de cette matrice (symétrie ,bande.... ) .

IV 2-a /MATRICE PLEINE NON SYMETRIQUE :

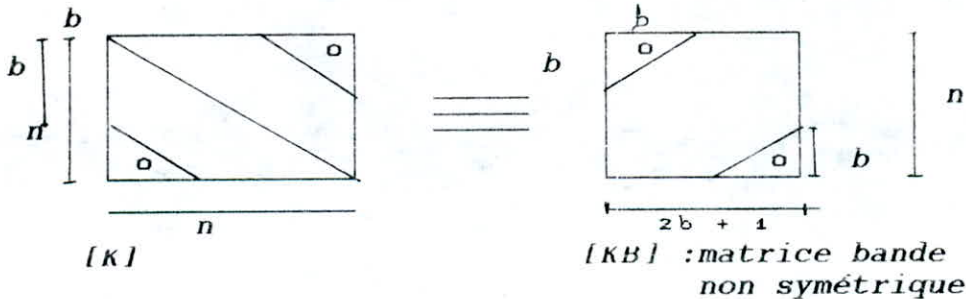
Dans ce cas la matrice est stockée entièrement ,Elle occupera alors si elle est de dimension  $n \times n$  -  $n^2$  nombres en mémoire d'ordinateur .

IV 2-b /MATRICE PLEINE SYMETRIQUE :

La matrice étant symétrique , il suffit de stocker le triangle supérieur ,dans ce cas ,il faut stocker  $n \times (n+1)/2$  nombres réels

IV 2-c / MATRICE BANDE NON SYMETRIQUE :

Pour une matrice bande non symétrique ,nous stockons la matrice "redressée" dans une table rectangulaire [KB] de dimension  $n \times (2b+1)$ .



$b = LB-1$  (largeur de la bande moins la diagonale )

Dans ce cas il faut stocker  $n \times (2b+1)$  nombres réels incluant  $(b+1) \times b$  valeurs nulles .

IV 2-d /MATRICE BANDE SYMETRIQUE :

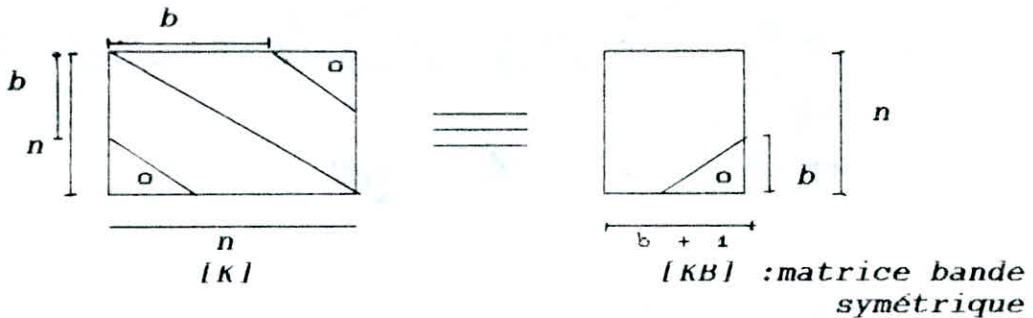
La structure de données la plus simple pour la mémorisation de matrices de rigidité consiste à les considérer comme des matrices bandes .

Dans ce cas on considère que les termes de rigidité extérieurs à la bande sont nulles .

les termes stockés sont tel que :

$$\begin{cases} J-1 \leq LB -1 \\ J \geq 1 \end{cases}$$

En raison de la symétrie de  $[K]$ , on ne mémorise que la partie triangulaire supérieure ou inférieure ,l'encombrement mémoire correspondant est  $(b+1) \times (n-b/2)$  ,c'est à dire  $nx(b+1)/2$  valeurs inutiles .



#### IV 2-e / MATRICE A LIGNE DE CIEL NON SYMETRIQUE :

Cette méthode consiste à stocker les termes de  $[K]$  par lignes et colonnes à hauteurs variables .

La ligne de ciel est l'enveloppe des sommets de colonnes à hauteurs variables .

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & 0 \\ 0 & 0 & k_{53} & 0 & k_{55} \end{bmatrix}$$

#### IV 2-f / MATRICE A LIGNE DE CIEL SYMETRIQUE :

Le stockage est identique à celui d'une matrice non symétrique pour la diagonale et le triangle supérieur .

IV 3 / CONDITIONS AUX LIMITES :

Parmi les propriétés d'une matrice de rigidité c'est sa singularité d'où la nécessité d'une modification de la matrice [K] en tenant compte des conditions aux limites .

Il existe différentes méthodes pour mener à bien cette modification .

IV-3-a / METHODES DU TERME DIAGONAL DOMINANT :

Elle consiste à ajouter aux termes diagonaux de la matrice [K] correspondant aux noeuds appuis un nombre très grand par rapports à tous les termes  $K_{ij}$  ce qui revient à remplacer  $k_{ii}$  par  $k_{ii} + \alpha$  et  $F_i$  par  $\overline{U}_i$  .

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_i \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{F_i}{\alpha U_i} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix}$$

L'équation i s'écrit :

$$\alpha U_i + \left( \sum_{j=1}^n k_{ij} * U_j \right) = \alpha \overline{U}_i$$

$$U_i + \left( \sum_{j=1}^n k_{ij} * U_j \right) / \alpha = \overline{U}_i$$

$$\alpha \text{ très grand} \rightarrow \left( \sum_{j=1}^n k_{ij} * U_j \right) / \alpha \approx 0$$

Elle admet la solution approchée :  $U_i \approx \overline{U}_i$

Le terme  $\alpha$  est choisi selon la précision de l'ordinateur ceci conduit à une erreur sur  $U_i$  qui est du même ordre que la précision de l'ordinateur .

IV -3-b / METHODE DU TERME UNITE SUR LA DIAGONALE :

Elle consiste à remplacer les lignes et les colonnes correspondants aux noeuds appuis par des "zéros" en mettant la valeur de 1 pour le terme diagonal ,ce qui conduit à modifier pour chaque relation  $U_i = \overline{U}_i$ , le vecteur { F } puis la matrice [K]

$$F_i = F_i - k_{ij} U_j \quad i=1, \dots, n \quad j \neq i$$

$$F_i = \overline{U_i}$$

$$k_{ij} = k_{ji} = 0 \quad j=1, \dots, n \quad j \neq i$$

$$k_{ii} = 1$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i-1} & \dots & 0 & \dots & k_{1i+1} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i-1,1} & \dots & k_{i-1,i-1} & \dots & 0 & \dots & k_{i-1,i+1} & \dots & k_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i+1,1} & \dots & k_{i+1,i-1} & \dots & 0 & \dots & k_{i+1,i+1} & \dots & k_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{ni-1} & \dots & 0 & \dots & k_{ni+1} & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{i-1} \\ \overline{U_i} \\ \vdots \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 - k_{1i} \overline{U_i} \\ \vdots \\ F_{i-1} - k_{i-1,i} \overline{U_i} \\ \overline{U_i} \\ \vdots \\ F_{i+1} - k_{i+1,i} \overline{U_i} \\ \vdots \\ F_n - k_{ni} \overline{U_i} \end{bmatrix}$$

Cette méthode ne pose pas de problèmes numériques .

#### IV 3-C / METHODE DE SUPPRESSION DES EQUATIONS :

Elle consiste à restructurer la matrice  $[K]$  de manière à supprimer les équations correspondantes aux degrés de liberté imposés  $U_i$  .

Elle a l'avantage de réduire le nombre d'inconnus du système cela revient à résoudre les deux systèmes suivants :

$$\begin{aligned} [K_r] \{U\} &= \{F\} \\ [K_E] \{U\} &= \{FE\} \end{aligned}$$

AVEC :

$[K_r]$  : Matrice de rigidité de la structure réduite en supprimant de  $[K]$  les colonnes relatives aux déplacements imposés nuls .

$[KE]$  : Matrice formée de colonnes extraites de  $[K]$  .

$\{FE\}$  : Vecteurs groupants les réactions d'appuis .

#### IV 3-d / METHODE DE REARRANGEMENT DU SYSTEME :

Elle consiste à réarranger  $[K]$  afin de diviser le système d'équations en deux sous-systèmes :

L'un correspondant aux noeuds non appuyés ,et l'autre au noeuds appuyés ,ce qui se traduit au niveau de la matrice ,par une permutation de lignes et colonnes .

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

AVEC :

$\{U_1\}$  : vecteur déplacement de tous les noeuds non appuyés (inconnus)

$\{U_2\}$  : Vecteur déplacement des noeuds appuyés (connus)  $\{U_2\} = 0$

$\{F_1\}$  : Vecteur force des noeuds non appuyés parfaitement déterminé

$\{F_2\}$  : Vecteur force des noeuds appuyés .

La résolution se fait donc en deux étapes :

-Détermination de  $\{U_1\}$  à partir de  $[K_1]\{U_1\} = \{F_1\}$  .

-Détermination de  $\{F_2\}$  à partir de  $[K_2]\{U_2\} = \{F_2\}$  .

## CHAPITRE V METHODES DE RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

### INTRODUCTION :

Ce chapitre est consacré aux méthodes permettant la résolution du système des équations d'équilibre .

$$[K] \{U\} = \{F\}^i \quad i= 1 \dots\dots\dots Nc$$

Nc:nombre de cas de charge .

L'ordre des systèmes linéaires correspondants aux modèles finis est généralement élevé pour les structures complexes .

Le coût de la résolution numérique de ces systèmes d'équations est une partie significative du coût global d'analyse ,ainsi les méthodes de résolution utilisées doivent être adaptées à ces types de problèmes en tirant profit de la symétrie de la matrice de rigidité,et généralement de leur faible densité et peuplement .

En outre , de telles méthodes doivent permettre la résolution la plus économique avec de nombreux cas de charges .

### .V-2 CLASSIFICATION DES METHODES DE RESOLUTION :

Les méthodes de résolution peuvent se classer en 3 groupes :

#### 1- LES METHODES ITERATIVES :

parmi lesquelles on cite :

- Methode Gauss-Seidel
- Methode de relaxation

#### 2- LES METHODES DIRECTES :

parmi lesquelles on cite :

- Methodes d'élimination de Gauss
- Methodes de factorisation de CHOLESKY.

#### 3 - INVERSION DE MATRICE

Les qualités requises pour une méthode de résolution utilisée dans un logiciel d'analyse des structures sont les suivantes :

##### \* LA PERFORMANCE :

Les méthodes doivent conduire à un coût minimal pour une précision donnée en utilisant au mieux les ressources de l'ordinateur .



1- Factorisation de [K] :

D'après le théorème de CHOLESKY , si [k] est une matrice symétrique et positive ,alors elle peut être décomposée en :

$$[K] = [S]^T [S]$$

Où [S] :est une matrice triangulaire supérieure.

L'algorithme de factorisation de Cholesky est:

$$S_{pp} = \sqrt{K_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} S_{kp}^2}$$

$$S_{pj} = \frac{1}{S_{pp}} \left[ K_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} S_{kp} S_{kj} \right] \quad \begin{matrix} j=p+1, \dots, n \\ p=2, \dots, n \end{matrix}$$

le système d'équations : [K] { U } = { F }

implique :

$$[S]^T [S] \{U\} = \{F\} \rightarrow [S]^T \{Y\} = \{F\}$$

Avec :  $[S] \{U\} = \{Y\}$

2) Résolution du système triangulaire 1:

$$[S]^T \{Y\} = \{F\} \quad -1- \text{ et détermination du vecteur } \{Y\}$$

3) Résolution du système triangulaire 2:

$$[S] \{U\} = \{Y\} \quad -2- \text{ et détermination du vecteur déplacement } \{U\}.$$

\* De par son principe la méthode de CHOLESKY est adaptée aux matrices symétriques.

Dans la phase de factorisation ,elle ne nécessite que la mémorisation d'une partie triangulaire de la matrice

2°) METHODE DE GAUSS :

Théorème de GAUSS :

Etant donné une matrice carrée [K] quelconque , il existe des matrices inversibles [S] telles que : [S] [K] = [K']

Où [K'] est une matrice triangulaire supérieure .

**PRINCIPE :**

La méthode de GAUSS consiste à transformer le système  $[K] \{U\} = \{F\}$  à matrice  $[K]$  quelconque, en un système équivalent  $[K'] \{U\} = \{F'\}$  où  $[K']$  est une matrice triangulaire supérieure la résolution de ce dernier système est immédiate .

Cette méthode est donc constituée de deux étapes :

-1 -TRIANGULARISATION

-2 -RESOLUTION DU SYSTEME TRIANGULAIRE

**a ) TRIANGULARISATION :**

Cette phase consiste à éliminer  $U_j, j= 1,2,\dots,n$  dans les équations  $j + 1$  à  $n$  , l'élimination de  $U_j$  se fait de la manière suivante :

- Exprimer  $U_j$  en fonction de  $U_{j+1} , U_{j+2}, \dots, U_n$  et  $F_j$  en utilisant l'équation  $j$
- Reporter l'expression de  $U_j$  précédente dans les équations  $j+1, j+2, \dots, n$  .

Il s'agit donc de la suite d'opérations qui transforment le système  $[K] \{U\} = \{F\}$  en un système équivalent  $[K'] \{U\} = \{F'\}$

L'algorithme de GAUSS est :

$$K_{ij}^{(l)} = K_{ij}^{(l-1)} - ( K_{ik}^{(l-1)} / K_{kk}^{(l-1)} ) \times K_{kj}^{(l-1)}$$

Avec :

$$\begin{cases} k = 1 , n - 1 \\ i = k + 1 , n \\ j = k , n + 1 \end{cases}$$

Où  $K_{ij}^0 = K_{ij}$  sont les éléments de la matrice  $[K]$  d'origine .

On doit remarquer que toutes ces transformations supposent que les termes  $K_{kk}$  appelés "pivots" sont non nuls ,il faudra donc ajouter une phase de vérification de la non nullité du pivot  $K_{kk}$

**b- RESOLUTION DU SYSTEME TRIANGULAIRE SUPERIEUR :**

Le système suivant  $[K'] \{U\} = \{F'\}$  où  $[K']$  est une matrice triangulaire supérieure donne :

$$\sum_{j=1}^n K'_{ij} U_j = F'_i \quad \text{où} \quad K'_{ij} = 0 \text{ si } j < i$$

$i=1, \dots, n$

Il equivaut donc à :

$$F'_i = \sum_{j=1}^n K'_{ij} U_j = \sum_{j=i+1}^n K'_{ij} U_j + K'_{ii} U_i \quad i = 1 \text{ à } n$$

$U_i$  s'obtient donc aisément par le calcul à rebours suivant :

$$U_i = \frac{1}{K'_{ii}} \left[ F'_i - \sum_{j=i+1}^n K'_{ij} U_j \right]$$

$i = n, n-1, \dots, 1$

Conclusion :

Entre les 2 méthodes citées (Gauss et Cholesky), on préfère celle de Cholesky pour résoudre le système  $[K] \{U\} = \{F\}$ , car elle tient compte de la propriété de symétrie de la matrice  $[K]$ , ce qui implique des résultats plus précis que ceux donnés par la méthode de GAUSS, de plus elle est parfaitement adaptée à la résolution des problèmes avec des cas de charges multiples, étant donné qu'elle n'affecte pas le second membre.

#### V 4 b / METHODES ITERATIVES :

Parmi les méthodes itératives, on citera celle de Gauss-siedel.

a-PRINCIPE :

La matrice  $[k]$  étant décomposée en :

$$[k] = ([D] - [L]) - [R] = [M] - [N]$$

$[D]$  = matrice diagonale.  $d_{ii} = K_{ii} \forall i$ .

$[L]$  : matrice triangulaire inférieure  $\begin{cases} L_{ij} = -K_{ij} & \text{pour } i > j \\ L_{ij} = 0 & \text{pour } i \leq j \end{cases}$

$[R]$  : matrice triangulaire supérieure  $\begin{cases} R_{ij} = -K_{ij} & \text{pour } i < j \\ R_{ij} = 0 & \text{pour } i \geq j \end{cases}$

soit :

$$[K] \{U\} = \{F\} \Rightarrow K U = F$$

$$\left[ (D - L) - R \right] U = F$$

$$(D - L) U^{(k+1)} = R U^k + F$$

$$D U^{(k+1)} = L U^{(k+1)} + R U^k + F$$

$$U^{(k+1)} = D^{-1} L U^{(k+1)} + D^{-1} R U^k + D^{-1} F$$

Développons cette récurrence vectorielle :

$$U_1^{(k+1)} = [ F_1 - K_{12} U_2^k - K_{13} U_3^k - \dots - K_{1n} U_n^k ] / K_{11}$$

$$U_2^{(k+1)} = [ F_2 - K_{21} U_1^{(k+1)} - K_{23} U_3^k - \dots - K_{2n} U_n^k ] / K_{22}$$

$$\vdots$$

$$U_n^{(k+1)} = [ F_n - K_{n1} U_1^{(k+1)} - K_{n2} U_2^{(k+1)} - \dots - K_{nn-1} U_{n-1}^{(k+1)} ] / K_{nn}$$

**b -ALGORITHME :**

Résumons l'algorithme de GAUSS :

$$-1- \quad U_i^{(k+1)} = \left[ F_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} U_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} U_j^k \right] / K_{ii}$$

$$k = 1 \text{ à } k_{\max}$$

$$i = 1 \text{ à } n$$

-2 - Arrêter si :

$$\left| U_i^{(k+1)} - U_i^k \right| < \xi_1$$

ou

$$\left| U_i^{(k+1)} - U_i^k \right| / \left| U_i^{(k+1)} \right| < \xi_2 \quad k = 1, \dots, k_{\max}$$

**V 4 c / INVERSION DE MATRICES :**

Dans cette méthode le vecteur  $\{U\}$  est déduit de la relation:

$$\{U\} = [K]^{-1} \{F\}$$

Ceci nécessite un grand nombre d'opérations, ainsi pour un petit système ( $n = 10$ ), le nombre d'opérations est à peu près égal à  $3 \cdot 10^9$ .

Aussi cette méthode est impraticable au sens du temps de calcul et des erreurs cumulées d'arrondis.

**V.5./ METHODE DE RESOLUTION BANDE :**

Nous avons jusqu'à présent considéré la résolution d'un système d'équations dans le cas général ( sans permutations ), il y'a lieu maintenant de tirer profit des propriétés spéciales que possèdent généralement les matrices utilisées dans la méthode des portiques équivalents et particulièrement dans la méthode des éléments finis.

En effet, la matrice de rigidité est souvent symétrique ( $K_{ij} = K_{ji}$ ) et pour ce genre de problèmes, il n'est pas utile de mémoriser la totalité de la matrice de coefficients, il suffit de sauvegarder les coefficients placés au dessus (ou au dessous) de la diagonale principale et d'employer certaines équations pour déterminer la partie manquante, ce qui réduit de près de la moitié la taille mémoire nécessaire à la matrice de coefficients. L'économie de mémoire peut être encore plus importante, si on ne conserve que les coefficients à l'intérieur d'une bande non nulle.

Dans les problèmes de calcul par éléments finis, la largeur de la bande des coefficients non nuls est en général faible comparée au nombre total d'inconnues, souvent de l'ordre de 10 à 20 %, ce qui dans le cas des matrices symétriques réduit la taille mémoire nécessaire de  $n(n+1)/2$  à  $(0.1 \text{ à } 0.2) n^2$ .

Etant donné que la méthode de résolution utilisée dans les deux programmes est la méthode de GAUSS bande, il s'avère donc nécessaire de donner un petit aperçu sur la méthode GAUSS modifiée.

**\* LA METHODE DE GAUSS POUR LES MATRICES BANDES SYMETRIQUES :**

Dans ce cas la matrice de rigidité n'est plus carrée mais elle est de dimension  $NK \times LB$ .

La triangularisation n'affecte pas toute la matrice de rigidité on opère que sur une demi bande qui est formée lors de l'assemblage, et les éléments qui doivent être stockés dans la matrice carrée le sont à présent dans la matrice bande tel que :

$$A(i, j) : \text{matrice carrée} \longrightarrow A(i, j-i+1) \text{ avec } j \geq i$$



TABLEAUX COMPARATIFS DE QUELQUES METHODES DE RESOLUTION :

methode	GAUSS	GAUSS BANDE	CHOLESKY	CHOLESKY BANDE
nombre d'opérations	$= N^3 / 3$	$= Nb^2 / 2$	$= N^3 / 6$	$= Nb^2 / 2$

$$(b = LB - 1)$$

## CHAPITRE VI PRESENTATION DU PROGRAMME PORTIQUE EQUIVALENT

### VI -1 / INTRODUCTION :

Ce programme constitue la première partie de notre travail , il permet de trouver une formulation de la théorie de modélisation de voiles en portiques adaptée au calcul informatique .

Il nécessite la manipulation de matrices et vecteurs de grande taille ainsi que différentes techniques numériques (Assemblage , résolution ,.....), ceci rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle à l'application de la méthode .

On commence par voir en premier lieu, l'organisation du programme écrit en FORTRAN et commenté en regard du texte théorique.

Il est constitué de plusieurs sous-programmes où le passage des paramètres ne s'effectue pas lors de l'appel du sous programme mais par le biais de blocs communs ( COMMON ), ce qui facilite la programmation et la rend très souple car on ne sera pas contraint à chercher les paramètres qui doivent passer d'une routine à une autre .

### VI -2 / ENTREE DES DONNEES:

Cette partie est disposée en une routine appelé "DONNE" qui permet de lire puis imprimer les données concernant la structure à modéliser .

On introduit tout d'abord :

- \* Les caractéristiques physiques du matériau utilisé : MODULE DE YOUNG - DENSITE - COEFFICIENT DE POISSON .
- \* Les caractéristiques géométriques du voile (largeur, épaisseur, hauteur) .
- \* Le nombre d'ouvertures dans le sens de la largeur désigné par la variable NFO , et en élévation désigné par NOE .
- \* Les coordonnées des ouvertures ainsi que leurs caractéristiques géométriques .

(Ces coordonnées sont calculées dans le repère orthornormé (OXY) dont l'origine est située au bas gauche du voile ) .

- \* Les différents types de chargement (permanentes-exploitations sismiques) .

### VI.3) MODELISATION DU VOILE EN PORTIQUE :

La modélisation du voile en portique est détaillé dans la subroutine "CARACT" qui consiste en :

#### A - DETERMINATION DES VARIABLES RELATIVES AU NOEUD :

Les noeuds sont numérotés automatiquement de gauche à droite et de bas en haut .

##### A-1/NOMBRE DE NOEUDS NN :

Par une autre relation de récurrence nous avons établi la formule donnant NN en fonction de NFO et NOE .

$$NN = (NFO + 1) * (NOE + 1)$$

##### A-2/COORDONNEES DES NOEUDS :

Chaque noeud est repéré par son abscisse x et son ordonnée y qui sont calculées automatiquement en fonction des caractéristiques géométriques du voile .

##### A-3/CODE APPUI DES NOEUDS :

Etant donné que le voile est encastéré à sa base, on peut remarquer que les noeuds dont la numérotation allant de 1 à ( NFO + 1 ) sont des appuis et les autres non ,c'est pourquoi on définit un tableau IAPP (NN) qui permet de savoir si le noeud est appui ou non selon la codification suivante :

$$\begin{aligned} IAPP(1) &= 0 && \text{si le noeud est appui} \\ IAPP(1) &= 1 && \text{si le noeud est libre} \end{aligned}$$

#### B -/DETERMINATION DES VARIABLES RELATIVES AU BARRES :

Les barres sont numérotées automatiquement et cela en commençant par les poteaux puis les poutres, le sens de numérotation est de gauche à droite et de bas en haut .

##### B-1/NOMBRE DE BARRE :

Il est donné par :

$$NB = N \text{ poteaux} + N \text{ poutres}$$

Avec:

$$N \text{ poteaux} = (NFO+1) * NOE$$

$$N \text{ poutres} = NFO * NOE$$

B-2/CARACTERISTIQUES DES BARRES :

Chaque barre est caractérisée par le numéro de son début  $JDEB(1)$  et le numéro de son noeud fin  $JFIN(1)$  .

En ce qui concerne les caractéristiques géométriques des barres, on prend comme section et inertie des poteaux celles des trumeaux et comme section et inertie des poutres celles des linteaux, d'où les variables  $SECT(1)$ , et  $AINE(1)$  .

La longueur des poutres est calculée en faisant la différence entre l'abscisse du noeud final et l'abscisse du noeud début ,pour la longueur des poteaux ,elle est calculée en faisant la différence entre l'ordonnée du noeud final et l'ordonnée du noeud début ,d'où la variable  $ALON(1)$  .

C-/CALCUL DES CHARGES REVENANT AUX BARRES :

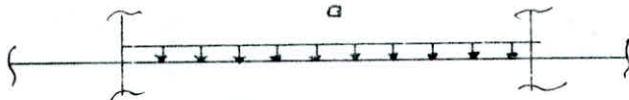
La subroutine " CHARGE " assure le calcul des charges revenant aux barres d'après le schéma suivant :

- Désignation de l'élément chargé
- Cas de chargement
- Intensité de la charge

SOIT :

- NC : nombre de charges élémentaires ,la charge est repérée par l'indice  $i$
- ELE( $i$ ): numéro de l'élément soumis à la charge  $i$
- CHA( $i$ ): valeur de la charge  $i$
- CAS( $i$ ): cas de chargement ,il prend la valeur :
  - 1 - charge permanente du plancher
  - 2 - poids propre du linteau
  - 3 - poids propre des poteaux
  - 4 - surcharge du plancher
  - 5 - charge sismique

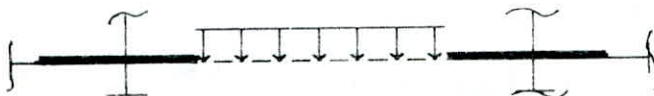
PREMIER CAS : CHARGE PERMANENTE DU PLANCHER :



Cette charge est uniformément répartie sur les poutres de valeur  $CHA(i)=G$

DEUXIEME CAS : POIDS PROPRE DU LINTEAU :

poids du linteau





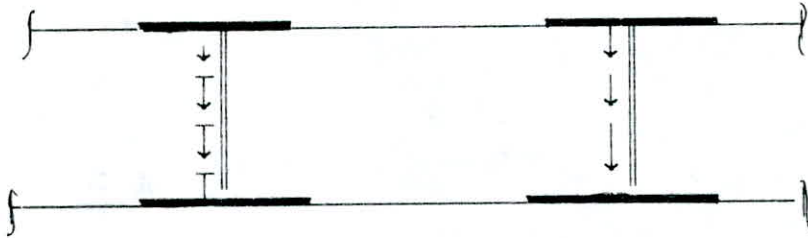
Cette charge est uniformément répartie sur la partie flexible de la poutre ( linteau ) .

$$CHA(i) = \text{sect} \times Mv$$

Avec :

sect : section du linteau  
Mv : masse volumique du béton armé

TROISIEME CAS : POIDS PROPRE DU POTEAU :



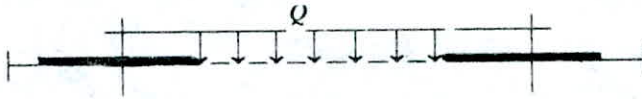
Cette charge est uniformément répartie normalement au poteau (trumeau)

$$CHA(i) = \text{sect} \times Mv$$

Avec :

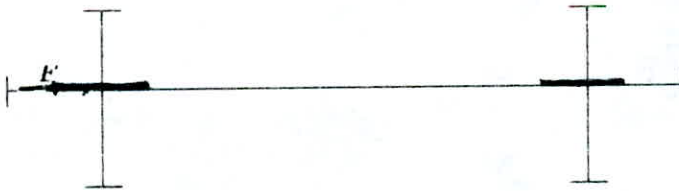
sect : section du trumeau  
Mv : masse volumique du béton armé

QUATRIEME CAS : SURCHARGE DU PLANCHER :



Cette charge est uniformément répartie sur les poutres  $CHA(i) = Q$

CINQUIEME CAS : CHARGE SISMIQUE :



C'est une charge appliquée au niveau des noeuds de rive donc c'est une charge nodale :  $CHA(i) = F$

d -/ MATRICES DE RIGIDITE :

Le calcul de matrices de rigidité est fait dans la subroutine "MATRIG". La formation de cette matrice passe par les étapes suivantes :

1- Calcul de la matrice de rotation

On distingue:

- Matrice de rotation de poteaux avec  $\alpha = 90^\circ$
- Matrice de rotation des poutres avec  $\alpha = 0^\circ$

Les éléments de cette matrice sont rangés dans le tableau ROT(9,i) Avec i : numéro de la barre.

2- Calcul de la matrice de rigidité inférieure droite

On distingue:

- Matrice de rigidité des poteaux
- Matrice de rigidité des poutres avec extrémités infiniment rigides.

Les éléments de cette matrice sont rangés dans un tableau RIG(9,i) avec i: numéro de la barre.

**E / ASSEMBLAGE DE MATRICE DE RIGIDITE DE LA STRUCTURE :**

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale [AK] et le vecteur global des sollicitations {F} à partir des matrices et vecteurs élémentaires .

Cette étape est réalisé dans la subroutine "ASSEMBL" qui permet l'assemblage des matrices de rigidités de toutes les barres de façon à construire la matrice de rigidité complète de la structure .

La matrice de rigidité d'une barre s'écrit:

$$[AK] = \begin{bmatrix} k^0 & l^1 \\ l^0 & k^1 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir les sous-matrices :  $[L^0]$ ,  $[L^1]$ ,  $[K^0]$  à partir de la sous-matrice  $[k^1]$ , on utilise les matrices transferts que nous notons  $[T_g]$  et  $[T_a]$  qui ont été définies ultérieurement .

$$[l^1] = [T_g] [k^1]$$

$$[l^0] = [k^1] [T_a]$$

$$[k^0] = [l^1] [T_a]$$

Ensuite ces différentes matrices seront calculées dans le repère global par la transformation suivante:

$$[K^1] = [R]^T [k^1] [R]$$

$$[L^1] = [R]^T [l^1] [R]$$

$$[L^0] = [R]^T [l^0] [R]$$

$$[K^0] = [R]^T [k^0] [R]$$

Enfin ces sous matrices seront ajoutées dans la matrice de rigidité de la structure. Chaque barre est repérée par les numéros JDEB et JFIN de ses extrémités, la matrice de rigidité de la barre est:

	JDEB	JFIN	
	$K^0$	$L^1$	JDEB
	$L^0$	$K^1$	JFIN

L'exemple ci-dessous illustre l'injection de la matrice  $K^0$  dans la matrice globale .

	JDEB	JFIN	
	II		
JDEB	JJ	$K^0$	$L^1$
JFIN		$L^0$	$K^1$

La sous-matrice  $K^0$  est de dimension 3x3

Soit:

$$II = 3 \times (JDEB - 1)$$

$$JJ = 3 \times (JDEB - 1)$$

$$I = 1 \text{ à } 3$$

$$J = 1 \text{ à } 3$$

$$IL = II + I$$

$$IC = JJ + J$$

$$AK ( IL, IC ) = AK ( IL, IC ) + K^0 ( I, J )$$

J suivant

I suivant

Par soucis de réduire et compacter l'espace mémoire utilisé pour le stockage de la matrice de rigidité globale, ainsi que le nombre d'opérations lors de la résolution du système, nous avons opté pour l'assemblage en bande dont l'algorithme est le suivant:

le terme  $(I_b, J_b)$  de la matrice  $[AK_b]$  bande correspond au terme

(1,J) de la matrice complète [AK] S1:

$$\begin{cases} I_b = 1 \\ J_b = J-1+1 \\ J \geq 1 \end{cases}$$

Pour injecter par exemple une sous-matrice [K°] dans la demi-matrice bande, on considère cette correspondance:

$$II = 3 \times (JDEB - 1)$$

$$JJ = 3 \times (JDEB - 1)$$

$$II = 1 \text{ à } 3$$

$$J1 = 1 \text{ à } 3$$

$$IL = II + 11$$

$$IC = JJ + J1$$

$$SI \quad IC \geq IL \quad ET \quad IC \leq LB-1+1 \quad ALORS$$

$$AK ( IL, IC-IL+1 ) = AK ( IL, IC-IL+1 ) + K^\circ ( II, J1 )$$

J1 suivant

II suivant

Afin de simplifier l'assemblage, on utilise deux sous-programmes annexes qui sont:

- Matrpro (A,B,C)

- MATADD (AK,A,I,J): addition dans AK de la matrice 3x3 :A correspondant à la ligne du noeud I et la colonne du noeud J.

(AK,A,I,J) peut prendre les formes suivantes:

(AK,K°,JDEB,JDEB)

(AK,K<sup>1</sup>,JFIN,JFIN)

(AK,L°,JFIN,JDEB)

(AK,La,JDEB,JFIN)

F-/ CALCUL DU VECTEUR FORCE :

Ce calcul se fait dans la subroutine "CALFOR", le vecteur force se compose de deux termes:

-un terme dû aux forces appliquées directement aux noeuds .

-un terme dû aux forces appliquées sur les barres .

$$\{F\} = \{FN\} + \{FB\}$$

Avec:

{FN} : Vecteur des forces appliquées directement aux noeuds

{FB} : Vecteur des forces appliquées aux barres

Les forces appliquées sur les barres seront transformées en forces nodales comme il a été décrit ultérieurement dans la section 11-6

Etant donné qu'il s'agit de cinq types de chargement, pour les quatre premiers, nous avons calculé les réactions nodales .

Pour transformer ces dernières en forces nodales, il faut multiplier les vecteurs réactions par le scalaire (-1), les forces nodales sont ensuite calculées dans le repère local et ajoutées aux termes {FB} puis après rotation, elles sont introduites dans le terme {FN}.

Les forces appliquées aux noeuds sont en général exprimées dans le repère global, c'est pourquoi elles seront directement, ajoutées au vecteur {FN} .

#### G / CONDITIONS AUX LIMITES :

Arrivé à ce stade des calculs, où nous connaissons la matrice [AK] complète et le vecteur {FN} et avant de passer à la résolution du problème, nous allons tenir compte des différentes conditions aux limites dans la subroutine "LIMIT".

La méthode envisagée est celle du terme unité sur la diagonale qui présente l'avantage de ne pas bouleverser l'ordre de la matrice et conserver une signification directement interprétable aux résultats obtenus.

La démarche suivie est:

- Faire un test sur le code appui des noeuds .

si le noeud est appui alors :

- Mise à zéro des éléments lignes et colonnes du noeud 1

- Mise de 1 sur la diagonale

- Mise de zéro sur l'élément de {FN}

L'algorithme de prise en compte des conditions d'appuis dans la matrice demi bande est:

si le noeud est appui.

13 = (1-1) x 3

11 = 1 à 3

S1 11+13 ≤ LB

JJ = 1 à 13+11

AK ( 13+11+1-JJ, JJ ) = 0 mise à 0 de la colonne 13+11

JJ suivant

S1 11+13 ≥ LB

JJ = 1 à LB

AK ( 13+11+1-JJ, JJ ) = 0 mise à 0 de la colonne 13+11

JJ suivant

JJ = 1 à LB

AK ( 13+11, JJ ) = 0 mise à 0 de la ligne 13+11

JJ suivant

AK ( 13+11, 1 ) = 1 unité sur la diagonale

11 suivant

## H -/RESOLUTION DU SYSTEME

Cette phase de calcul présente un grand intérêt pour l'aspect numérique du problème, intérêt qui porte principalement sur la réduction appréciable de l'espace mémoire qu'on doit utiliser pour la résolution du système, en introduisant la notion de stockage en bande ainsi que la réduction du nombre d'opération en éliminant celles qui sont faites sur des éléments nuls, se trouvant en dehors de la largeur de la bande.

Pour se faire la méthode utilisée dans la subroutine "RES" est la méthode "GAUSS modifiée"

### I -/ CALCUL DES EFFORTS DANS LES BARRES ET LES REACTIONS D'APPUI

Ainsi les déplacements des noeuds sont déterminés, il nous faut donc calculer les efforts dans les barres.

Ces efforts sont calculés d'après la formulation développée dans la section 11.7.1.

c'est à dire :

$$\{f_a^i\} = [K_a^i] [R_a] \{U^i\} + [L_a^j] [R_a] \{U^j\} + \{f_a^{''i}\}$$

Enfin pour les réactions des appuis, nous reprendrons les forces provenant des différentes barres arrivant au noeud considéré et après les avoir exprimée dans le repère global, nous en ferons la somme.

$$\{r_o^i\} = \sum_a [R_a]^i \{f_a^i\}$$

Afin de bien faire la distinction entre les noeuds appuis et les noeuds non appuis, nous ferons deux impressions séparées dans la subroutine "IMP".

La même procédure est suivie pour les trois types de chargement par le biais de l'indice IND qui prend les valeurs suivantes:

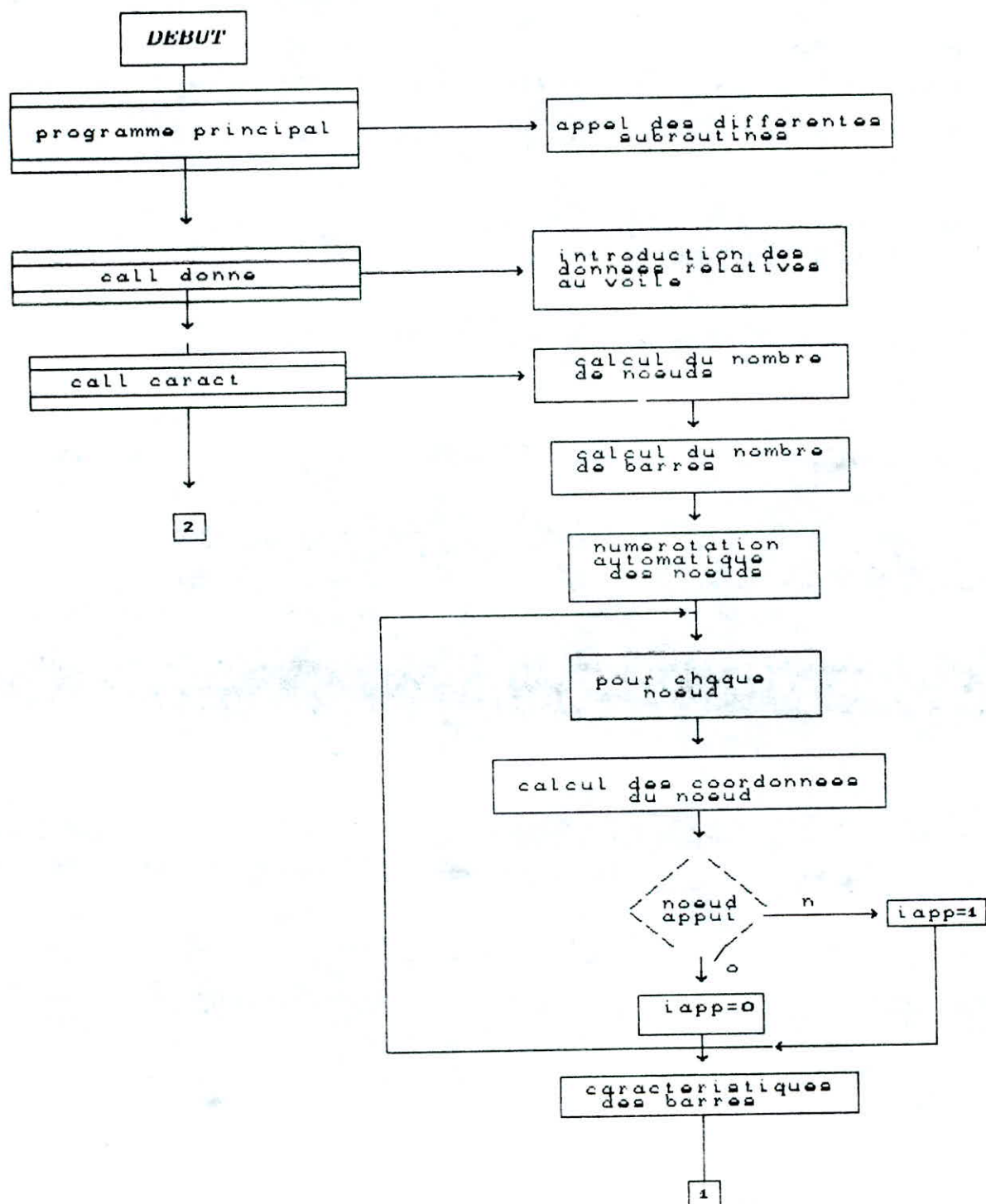
- IND = 1 sous charges permanentes
- IND = 2 sous charges d'exploitations
- IND = 3 sous charges sismiques

### J - /COMBINAISON DES CHARGES :

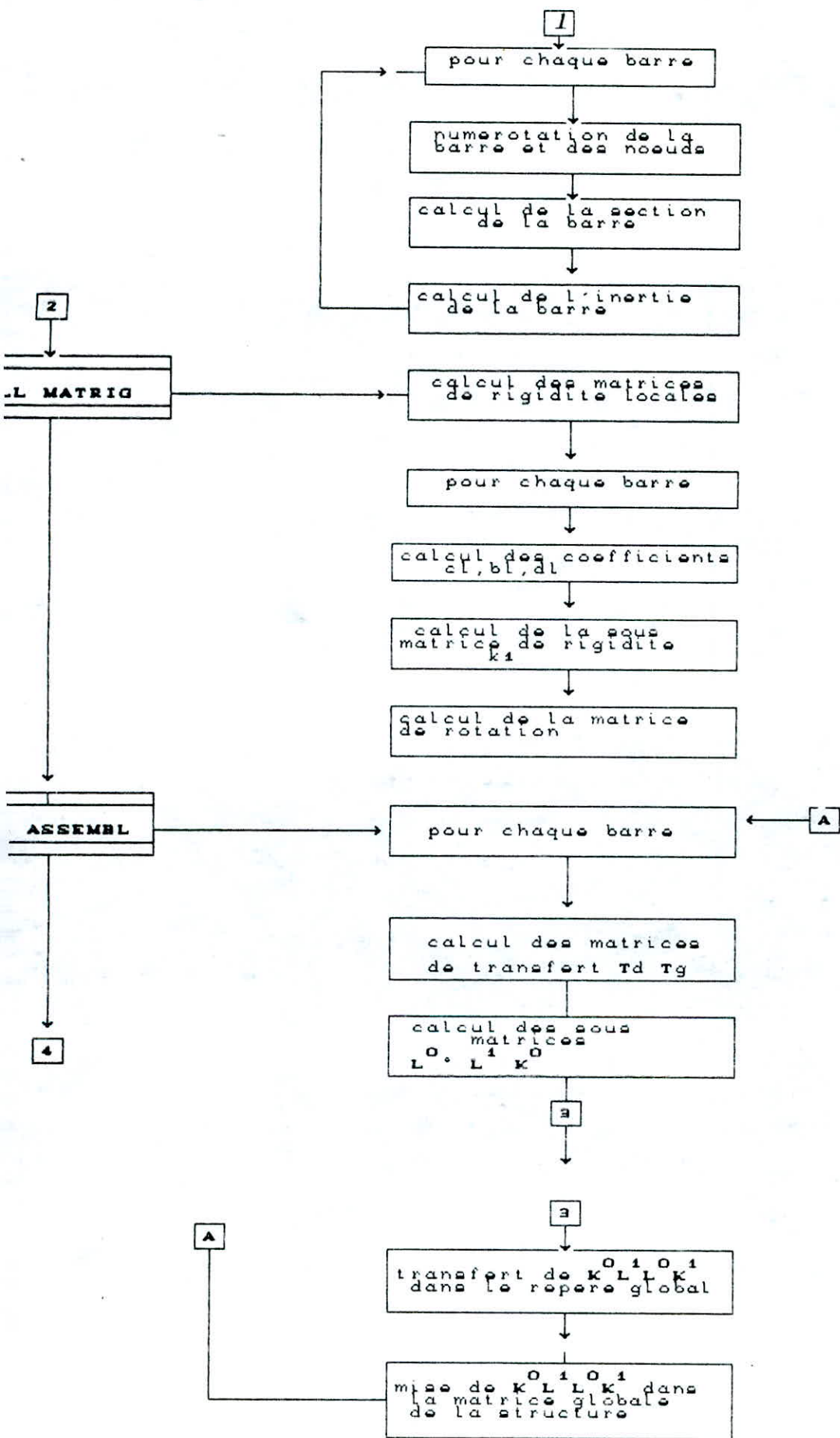
La dernière étape du programme consiste à combiner les efforts calculés sous les trois types de chargement, cette combinaison est disposée en une routine appelé "Combine" .

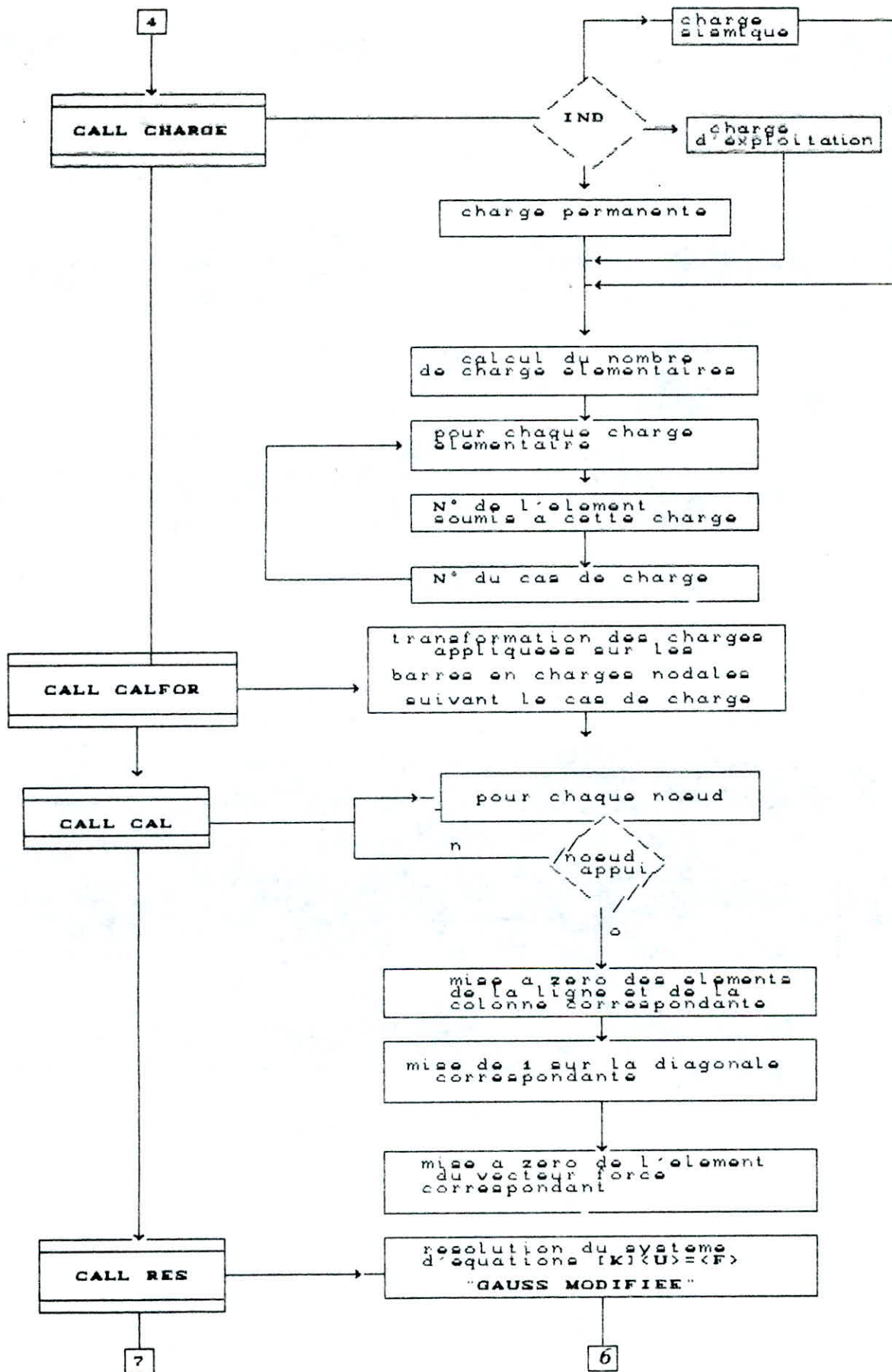


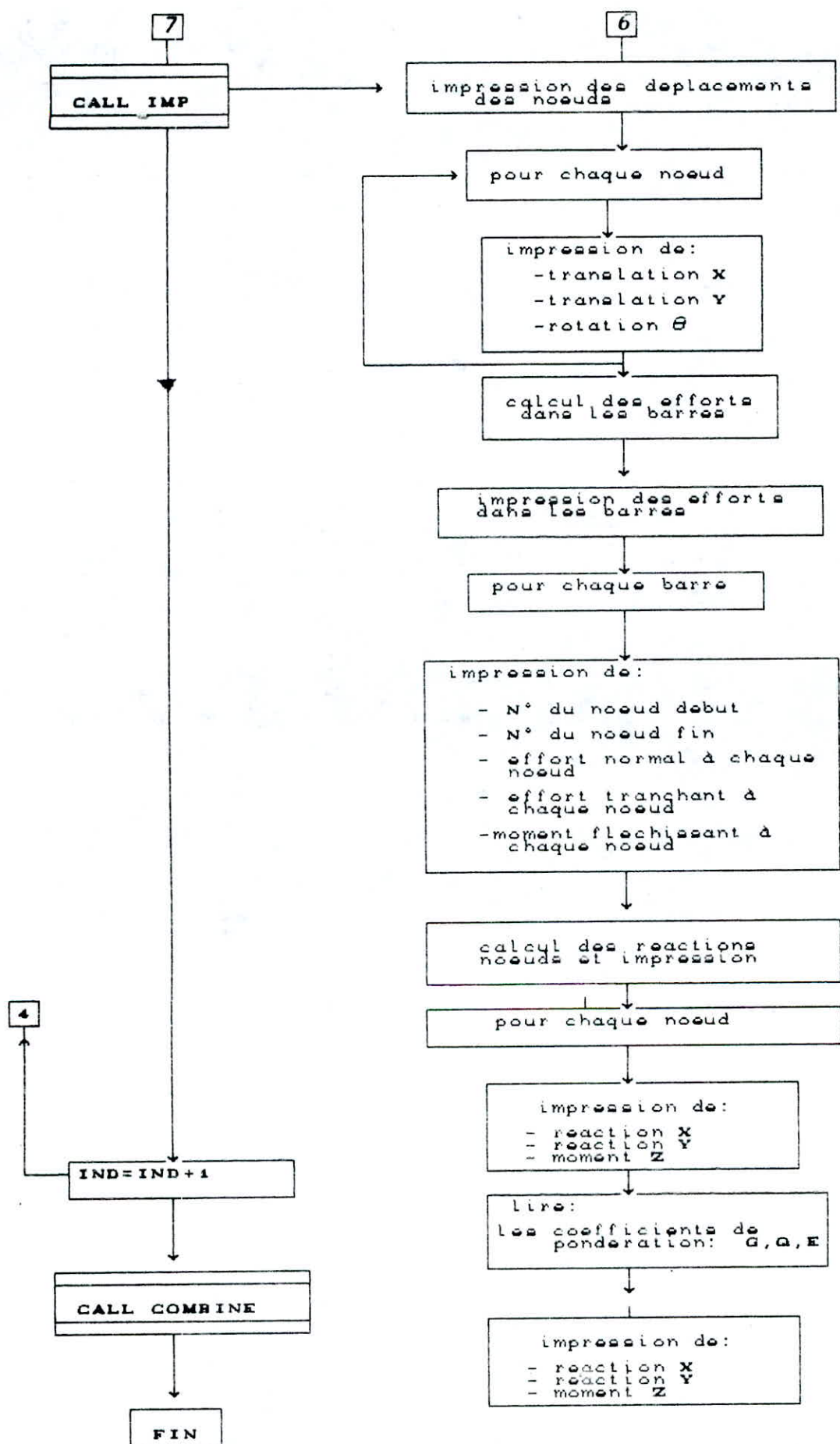
ORGANIGRAMME DE MODELISATION D'UN VOILE EN PORTIQUE











2eme PARTIE

MODELISATION DU VOILE  
PAR  
ELEMENTS FINIS

VI.1 INTRODUCTION

Les méthodes matricielles permettent d'analyser des structures discrètes constituées par des éléments simples (barres, poutres...) de signification physique évidente.

Cependant, les structures sont souvent constituées de milieux continus, dans ce cas, il faut avoir recours à des méthodes numériques basées sur des méthodes d'approximation adéquates pour discrétiser ces milieux continus, parmi lesquelles la méthode des éléments finis.

VI.1/ LES METHODES D'APPROXIMATION :

Le problème général de l'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit. Pour cela, on définit une approximation  $\tilde{U}$  en posant :

$$\tilde{U}(M) = \sum_{l=1}^N \alpha_l f_l(M) \quad \forall M(x, y, z)$$

.  $f_l(x, y, z)$  : sont les fonctions choisies et constituent une base fonctionnelle.

Les coefficients  $\alpha_l$  inconnues : représentent les coordonnées généralisées.

$\tilde{U}(M)$  : est une approximation de  $U$  dans la base fonctionnelle  $f_l$ . Les fonctions de base doivent satisfaire à certaines conditions : continuité, complétude et conditions aux limites.

Le principe des méthodes d'approximation est de remplacer la résolution d'un problème continu à nombre infini d'inconnues par celle d'un problème à nombre fini d'inconnues : les coordonnées généralisées  $\alpha_l$ , en définissant la meilleure approximation et ceci en minimisant un critère, soit une énergie potentielle, soit un critère d'erreur.

Les méthodes d'approximations se classent en 2 catégories:

**\* LES METHODES UNIVERSSELLES :**

Utilisables dans le cas d'une formulation locale du problème (équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites associées)

**\* LES METHODES VARIATIONNELLES:**

Utilisables dans le cas d'une formulation variationnelle du problème (c.a.d de conditions de stationnarité de fonctionnelles ou énergie potentielle)

**METHODE VARIATIONNELLE METHODE DE RITZ**

La solution exacte du problème variationnel, est celle qui, appartenant à l'espace des fonctions admissibles satisfaisants les conditions aux limites cinématiques (du type déplacement), rend extrémale l'énergie potentielle c'est à dire :

$$\delta \pi = 0, \quad \forall \delta U$$

Or  $\pi[U] = \pi[\alpha]$  donc la meilleure approximation est caractérisée par les N conditions de stationnarités de  $\pi$

Soit en exprimant  $\pi$  par :  $\tilde{\pi} = 1/2(U^t K U) - U^t F$

\* --->  $\nabla_U \pi$  (condition de stationnarité) -->  $KU = F$

La valeur de l'énergie minimum est :

$$\tilde{\pi}^* = 1/2(U^t F) - U^t F = -1/2(U^t F)$$

\* La méthode de RITZ converge de façon monotone en énergie si les fonctions de base de l'approximation satisfont les conditions de complétude et compatibilité.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\pi}_N^* = \pi^*, \quad \tilde{\pi}^* : \text{approximatif}, \pi^* : \text{exact.}$$

$$\pi^* < \tilde{\pi}_N^* \quad U_{\text{exact}}^t F > \tilde{U}_{\text{app}}^t F$$

On peut donc en déduire que la méthode de RITZ conduit à des modèles approchés de structures qui sont plus rigides que ne l'est la structure réelle.

En effet si on considère une structure soumise à une force ponctuelle P, en un noeud donné, il vient immédiatement :

$$\bar{\Pi}^* = -1/2(\rho\sigma_{\text{exact}}) < \tilde{\bar{\Pi}}^* = -1/2(\rho\sigma_{\text{app}})$$

$\sigma_{\text{appl}} < \sigma_{\text{exact}}$
--

### VI.3 / LE CONCEPT D'ELEMENT FINI

La méthode des éléments finis est considérée comme une extension de la celle de RITZ permettant l'analyse des structures complexes par la méthode des déplacements.

Le principe de base de la MEF consiste à subdiviser le continuum en sous domaines de formes relativement simples appelés "Éléments finis". On définit alors une approximation de la solution (déplacements et ou contraintes) non pas pour l'ensemble de la structure mais pour chacun de ces éléments constitutifs, on résoud alors le problèmes à l'aide de la méthode des déplacements

### VI.4 : FORMULATIONS DE LA MEF

Il existe plusieurs formulations d'éléments finis en mécanique des structures

#### VI.4.a: formulation déplacement :

Dans laquelle on se donne une approximation de champs de déplacements le critère variationnel étant celui de l'énergie potentielle totale. Cette formulation suppose que les conditions de compatibilité sont satisfaites, ce qui nous amènera à poser les équations d'équilibre puis les résoudre a fin de déterminer les déplacements nodaux (uniques).

#### VI.4.b. Formulation contrainte ou équilibre:

Dans laquelle on se donne un champs de contraintes en équilibre, on pose ensuite les équations de Compatibilité des déplacements et on les résoud pour obtenir les forces.

#### VI.4.c. Formulations hybrides: (formulation hybride de type contrainte)

Dans laquelle on définit la solution, le plus souvent, en termes d'approximations d'une part d'un champs de contraintes internes en équilibre, d'autre part de déplacements sur la frontière de l'élément.

#### VI.4.d. Formulation choisie :

Dans la présente thèse nous avons opté pour la formulation déplacement (très courante) et qui présente certaines facilités par rapport aux autres dont, la facilité d'approcher les déplacements plutôt que les contraintes.

Les déplacements sont donc les inconnues de base, on approchera le champ de déplacement réel, par des fonctions d'interpolation assurant la continuité des déplacements à l'intérieur de l'élément et aux noeuds.

Ces déformations jointes à d'éventuelles déformations initiales et compte tenu des propriétés élastiques du matériau, définissent l'état de contrainte en tout point de l'élément et par conséquent sur les frontières.

#### VI.5/ DOMAINE D'APPLICATION :

La méthode des éléments finis peut être appliquée avec succès dans d'autres domaines de la physique thermique, électromagnétique, mécanique des fluides.



## CHAPITRE VII: PROPRIETES DES ELEMENTS TYPE DEPLACEMENT

IL y a des propriétés de l'élément fini qui sont nécessaires afin d'obtenir de "bonnes" solutions au niveau de la structure complète.

En particulier les conditions de convergence de la MEF : Complétude et compatibilité.

### VII.1/ COMPLETUEDE:

Un élément fini est dit complet quand l'approximation de la solution dans l'élément permet de représenter à la limite n'importe quelles valeurs de déformations (ou de courbures dans le cas de problèmes de flexion), quand on diminue la taille de l'élément. Ce critère s'applique d'une part aux états de déformation nulle (modes rigides), et d'autre part aux états de déformation élastique ; on peut en déduire les deux critères suivants:

#### VII.1.a - Représentation des modes rigides:

Quand on prescrit aux déplacements nodaux des valeurs correspondant à un déplacement d'ensemble, on doit retrouver un état de déformation nulle dans l'élément et donc des forces nodales nulles.

#### VII.1.b - Représentation des états de déformation constante :

Quand on prescrit aux déplacements nodaux d'un élément des valeurs correspondants à un état de déformation constante, on doit effectivement retrouver cet état de déformation à l'intérieur de l'élément.

Ces deux critères induisent une condition sur le degré minimal des polynômes utilisés pour l'approximation des déplacements.

$$\begin{cases} u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases}$$

En effet les six coordonnées généralisées permettent de représenter les modes rigides :  $u = \alpha_1 = \text{cste}$ ,  $v = \alpha_4 = \text{cste}$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 - \alpha_5 = \text{cste}$$

Les états de déformation constante :

$$\xi_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2, \quad \xi_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6$$

$$\xi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_5 = \text{cste}$$

### VII.2 /COMPATIBILITE:

Un élément fini est dit compatible quand il permet la définition d'un champ compatible, au sens de Ritz, c'est à dire une continuité  $C^0$  (déplacements continus) pour les problèmes d'élasticité, et une continuité  $C^1$  (déplacements et leurs dérivées premières continues) pour les problèmes de flexion.

De part le principe même de la MEF, cette condition de continuité s'applique à l'intérieur des éléments et aux interfaces.

La continuité des déplacements à l'intérieur des éléments ne pose pas de problèmes particuliers en raison de l'unicité de des déplacements qui découle de leur présentation par une fonction.

Par contre la compatibilité inter-élément requiert une attention particulière pour le choix de l'approximation et des déplacements nodaux.

La compatibilité inter-élément est requise en exprimant l'énergie potentielle totale de la structure complète, comme la somme des énergies potentielles élémentaires :

$$\Pi = \sum_{\text{elém}} \Pi^e$$

Physiquement : La compatibilité inter-élément s'explique par le caractère des modèles de déplacements.

En effet en élasticité plane par exemple : la ( violation ) de ce critère entrainerait des modèles de déplacements inadmissibles d'un simple point de vue physique à cause de l'apparition d'ouvertures entre éléments au cours du chargement.

### VII.3 /CONVERGENCE :

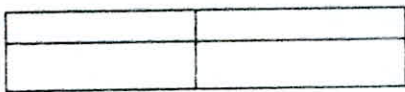
Les conditions de convergence de la MEF, se déduisent de celles de la méthode de Ritz. Les éléments finis de type déplacement convergent en énergie s'ils satisfont les conditions de complétude et de compatibilité. De tels éléments sont appelés conformes.

Nous pouvons illustrer ceci par la fig-1 qui représente une suite de solutions à partir d'une suite de maillages dans laquelle,

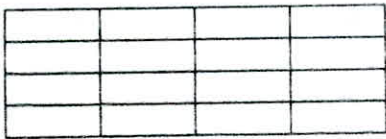
chaque maillage est obtenu par subdivision du maillage précédent.  
 Pour des éléments conformes, cette suite converge vers la solution exacte de façon monotone en énergie.

En d'autres termes, l'énergie totale potentielle des modèles tend vers sa valeur exacte de minimum absolu lorsqu'on augmente le nombre  $N$  de degrés de liberté, où ce qui est équivalent dans le cas d'un chargement ponctuel, les déplacements convergent par "le bas".

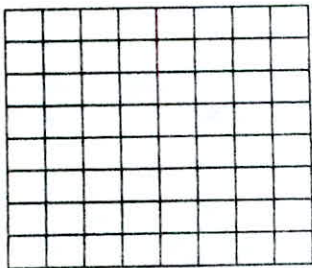
Les modèles conformes de type déplacements sont trop rigides par rapport à la structure réelle.



modèle 1 (2\*2)



modèle 2 (4\*4)



modèle 3 (8\*8)

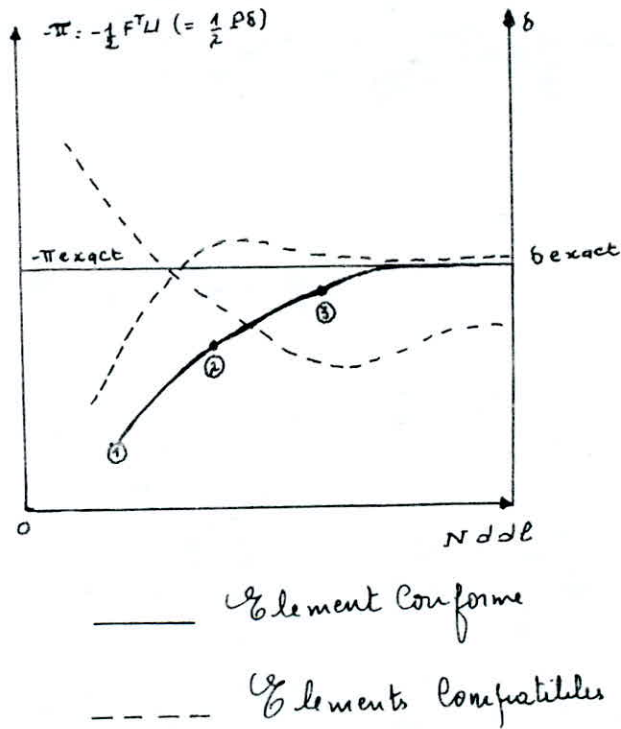


Fig-1. test de convergence

## CHAPITRE VIII: THEORIE DE L'ELASTICITE PLANE

### VIII.1 /INTRODUCTION:

Dans ce chapitre, nous allons considérer les descriptions mathématiques des contraintes et des déformations ainsi que les équations caractérisant la réaction du matériau à un chargement extérieur, donc son comportement macroscopique résultant de sa constitution interne. Cependant les matériaux surtout à l'état solide, ont un comportement tellement complexe, qu'il n'est pas possible de mettre au point une équation ni même un système d'équations, qui décrivent le comportement en tenant compte de tous les paramètres intervenants.

EN pratique, on procède à une formulation séparée d'équations décrivant différentes catégories de réponses de matériau idéal. Chacune des équations est une formulation mathématique ayant pour but, l'approximation d'observations physiques, de la réponse d'un matériau idéal, dans un domaine déterminé.

Parmi les matériaux idéaux nous citons: LE SOLIDE ELASTIQUE HOOKIEN ET LE FLUIDE VISQUEUX NEWTONIEN.

Le solide élastique est un matériau idéal communément utilisé en calcul de structure, et il est supposé suivre la loi de HOOK.

De plus tous les matériaux possèdent, à un certain degré, les propriétés d'être élastique. C'est à dire que si les forces extérieures qui provoquent les déformations d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra en même temps que les forces qui lui donnent naissance.

Pour ce genre de matériaux, il existe une théorie dite "THEORIE DE L'ELASTICITE " qui permet d'étudier le comportement des solides réels, sous l'action de différents systèmes de forces

\* Pour l'établissement de lois mathématiques on suppose que les solides sont HOMOGENES, ISOTROPES à l'état neutre, ( c'est à dire que les propriétés physiques et mécaniques sont les mêmes en chaque point et dans toutes les directions)

\* Les solides ne doivent être le siège d'aucune tension interne en l'absence de forces extérieures. GRADIENT THERMIQUE ou autre .  
 La théorie de l'élasticité consiste à formuler trois types d'équations qui sont :

- \* LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'EQUILIBRE
- \* LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS
- \* LES LOIS INTRINSEQUES DES MATERIAUX

### 111.2/ EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'EQUILIBRE

Dans cette partie nous proposons de relier dans un champs de contraintes, l'état de contrainte en un point à l'état de contrainte en un autre point du milieu . Pour cela il est nécessaire d'avoir une équation différentielle gouvernante.

Dans le cas présent, il est question de l'équation différentielle d'équilibre qui gouverne le changement des composantes du tenseur contrainte lors du passage d'un point à un autre avoisinant.

On considère l'équilibre d'un cube élémentaire de dimensions :  $dx dy dz$  .  $x, y, z$  sont les forces de volume. nous avons :

voir fig III-1

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 & \implies \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} dx + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dy + X = 0 \\ & \implies \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \end{aligned}$$

De même pour les autres directions :

$$\begin{aligned} \sum Y_i = 0 & \implies \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \sum Z_i = 0 & \implies \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre sont donc :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right.$$

### VIII.3 LES EQUATIONS DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS:

En élasticité, la définition de la déformation est basée sur la comparaison d'une configuration donnée, avec une configuration initiale. Il est aussi supposé que les détails du processus par lequel le matériau est passé de l'état initial à l'état actuel n'affectent pas l'état actuel, dans la mesure où le processus est élastique.

Malgré cette hypothèse la caractérisation de l'état de déformation n'est pas simple sauf si les déplacements et les gradients de déplacement sont petits (voir infinitésimaux). Ce n'est que lorsque ils sont infinitésimaux que la théorie des petites déformations est rigoureusement correcte.

Nous allons traiter le problème à deux dimensions puis nous généraliserons à trois dimensions. Nous avons : voir fig III-2

$$\xi_x = (A'B' - AB)/AB, \quad \xi_y = (A'D' - AD)/AD$$

$$AB = dx, \quad A'B' = dx(1 - \frac{\partial u}{\partial x}), \quad AD = dy, \quad A'D' = dy(1 + \frac{\partial v}{\partial y})$$

De même nous avons:

$$\partial_{xy} = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{\pi}{2} - \psi = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Ceci est vrai lorsque nous négligeons les termes d'ordre supérieur:

$\xi_x$  : dilatation ou déformation longitudinale

$\xi_y$  : dilatation ou déformation transversale

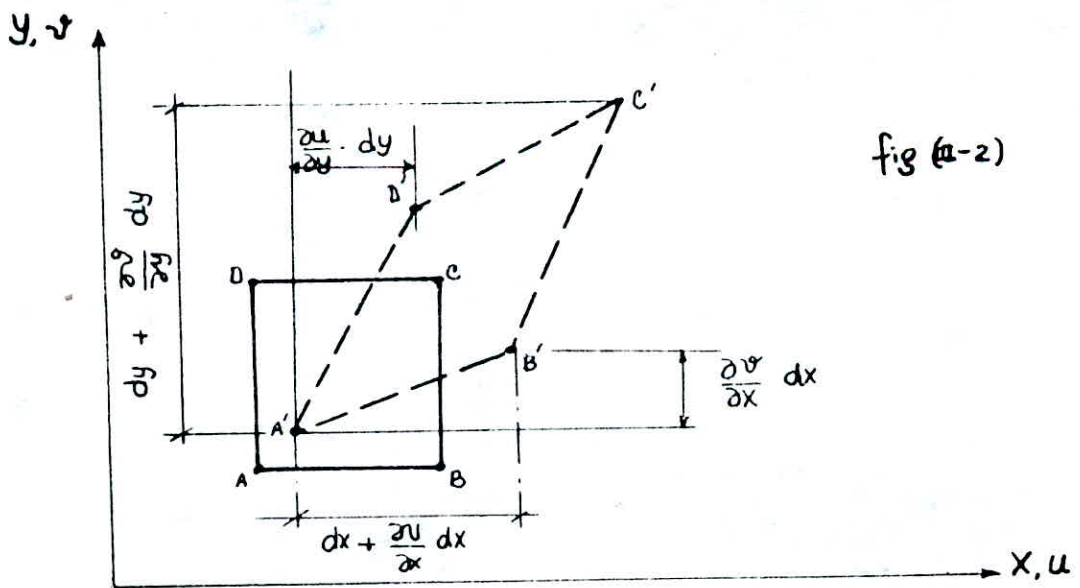
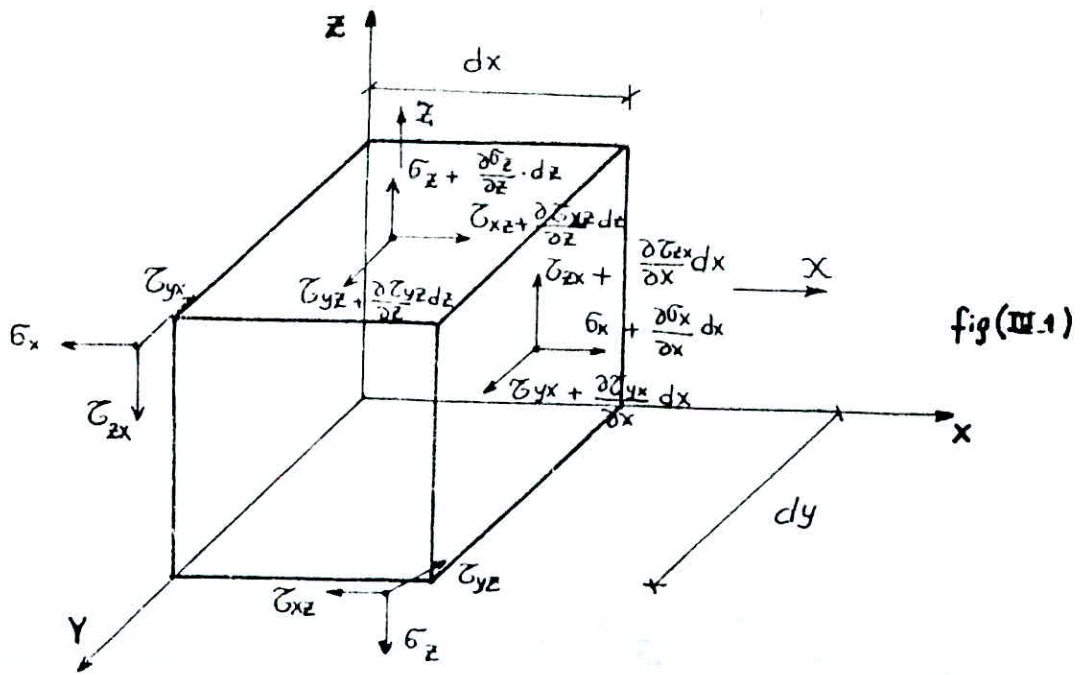
$\gamma_{xy}$  : distorsion ou déformation tangentielle c'est aussi la déformation d'un angle qui était droit avant déplacement

En tridimensionnel les équations précédentes deviennent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \xi_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \xi_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \partial_{xy} = \partial_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \partial_{xz} = \partial_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \partial_{yz} = \partial_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{array} \right.$$

#### CONDITIONS DE COMPATIBILITE :

Il existe trois relations indépendantes liants les composantes du tenseur déformation ( $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \partial_{xz}, \partial_{yz}, \partial_{xy}$ ) ce sont les équations de compatibilité.



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

#### VIII.4 / EQUATIONS CONSTITUTIVES DU MATERIAU :

Dans cette partie, nous allons déterminer les équations caractérisant le matériau et ses réactions à un chargement extérieur (propriétés mécaniques du matériau). Ces équations sont dites : Equations Constitutives parcequ'elles décrivent le comportement résultant de la constitution interne du matériau. Vu la complexité du problème, le matériau est supposé élastique (Voir introduction). Nous passerons en revue les différentes étapes qui permettent d'exprimer la loi de HOOK généralisée.

##### VIII.4.a Loi de HOOK généralisée :

###### - 1 Matériau linéaire élastique

Un matériau est dit élastique idéal s'il retrouve son état initial à la suite de son chargement : c'est un matériau qui restitue entièrement l'énergie une fois déchargé.

Pour un tel matériau il existe une relation biunivoque entre l'état de contrainte et l'état de déformation.

$$\{\sigma\} = [C] \{\xi\}$$

Ces équations constitutives de l'élasticité classique sont appelées : Lois de HOOK généralisées.

[C] : Tenseur qui représente des fonctions de réponse du matériau c'est un tenseur symétrique composé de 21 termes indépendants. -

###### 2 Matériau linéaire élastique isotrope

Un matériau isotrope est un matériau dont les équations constitutives sont indépendantes du système d'orientation.

Pour ce type de matériau, les constantes élastiques  $C_{ij}$  ne sont fonction que de deux constantes indépendantes appelées : Constantes de LAME.



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} *$$

Les deux constantes indépendantes sont  $\lambda$  et  $\mu$  et peuvent s'exprimer en fonction de  $E$  et  $\nu$ .  $\lambda = E\nu / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$ ,  $\mu = G = E/2(1 + \nu)$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} *$$

#### VIII.5 / PROBLEMES DE L'ELASTICITE PLANE

Les problèmes de l'élasticité plane concernent les structures continues chargées dans leurs plans. Ces problèmes peuvent être séparés en deux classes distinctes où les équations sont très simplifiées : problèmes en déformations planes et problèmes en contraintes planes.

Dans ces deux cas, contraintes et déformations sont indépendantes de la troisième dimension  $z$ , en plus  $z$  est une direction principale pour les deux tenseurs.

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0, \quad \xi_{zx} = \xi_{zy} = 0.$$

#### VIII.5.a : Problèmes de déformations planes :

Dans ces problèmes, on suppose que la déformation normale au plan du chargement est nulle. Ceci est dû à la dimension de la structure suivant ( $z$ ) qui est très grande devant les dimensions dans le plan. Ces problèmes traitent par exemple le cas des barrages, murs de soutènement ... ect Dans ce cas nous avons  $\epsilon_{zz} = 0$  ( $u_z = 0$ ,  $u_x, u_y$ , indépendant de  $z$ ).

$$\text{Il vient } \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

1 \* EQUATIONS CONTRAINTE DEFORMATIONS:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

2.\* EQUATIONS DEFORMATIONS-CONTRAINTE :

$$\begin{bmatrix} \xi_{xx} \\ \xi_{yy} \\ \gamma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

2.\* EQUATIONS D'EQUILIBRE

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

3.\* EQUATIONS DE COMPATIBILITES

Les équations de compatibilités se réduisent à :

$$\frac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

Nous avons donc 6 équations et 6 inconnues ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \xi_{xx}, \xi_{yy}, \gamma_{xy}$ ) il est donc possible de les déterminer en prenant en compte les conditions aux limites. En substituant les équations dans (4) et en exprimant  $\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}$  à partir de

(3) nous obtenons :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} ((1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (-\nu\sigma_{xx} + (1-\nu)\sigma_{yy}) = 2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\text{Or d'après (3)} \implies 2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = \frac{-1}{(1-\nu)} \left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right]$$

Or  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} =$  Le Laplacien bidimensionnel.

L'équation de compatibilité en termes de contraintes est :

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{1}{(\nu-1)} \left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right]$$

VIII.5.b: Problèmes en contraintes planes :

Ces problèmes permettent d'étudier les structures continues (plaques et coques) qui ont une dimension suivant l'axe z très petite devant les dimensions dans le plan, ce qui fait que les contraintes normales au plan de la structure seront négligées (exemple de plaques minces, plaques perforées en traction et l'âme des poutres cloisons). Dans ce cas nous avons  $\sigma_{zz} = 0, \epsilon_{zz} \neq 0$

1.\* EQUATIONS CONTRAINTES DEFORMATIONS:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

2.\* EQUATIONS DEFORMATION-CONTRAINTES

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

3\*. EQUATIONS D'EQUILIBRE

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

#### 4\*. EQUATIONS DE COMPATIBILITE

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

l'équation de compatibilité en termes de contraintes est :

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = - (1+\nu) \left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right]$$

#### VIII.6/ RESOLUTION DU PROBLEME D'ELASTICITE PLANE:

La résolution du problème peut se faire par le biais de méthodes numériques telles que :

- La méthode des éléments finis.
- Les méthodes variationnelles.
- Certaines solutions peuvent être trouvées par des méthodes inverses (méthodes de la fonction contrainte) où l'on se donne une solution dite : fonction d'AIRY.

Ainsi dans le cas où les forces volumiques ne sont pas prises en compte, ou lorsque la seule force volumique est le poids, l'équation de compatibilité devient :

$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0.$

 (valable en contraintes ou en déformations planes).

Dans le cas où la fonction d'AIRY est utilisée, les équations d'équilibres sont identiquement satisfaites si les contraintes sont reliées à une fonction  $\phi(x,y)$  : fonction d'AIRY par les équations suivantes :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \implies \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \implies$$

$\nabla^4 \phi = 0 \quad (*) \text{ (équation biharmonique)}$

La solution du problème se réduit à déterminer  $\phi(x,y)$  vérifiant l'équation (\*) puis en déduire  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ . Pour s'assurer de l'unicité de la solution, il faut vérifier les conditions aux limites .

En conclusion, nous pouvons dire que cette méthode n'est applicable que pour les problèmes simples et c'est pour cette raison qu'il est préférable d'utiliser les méthodes numériques qui sont plus pratiques, en particulier par l'utilisation de l'ordinateur. Parmi les méthodes numériques, la méthode la plus utilisée est : la méthode des éléments finis. Cette méthode a fournit des résultats satisfaisants et en concordance avec les résultats des méthodes analytiques .

CHAPITRE IX : PRESENTATION DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE  
POUR L'ETUDE DE L'ELASTICITE PLANE

IX . 1/ INTRODUCTION

Comme cela a été indiqué en introduction les refends peuvent être modélisés à l'aide des éléments finis.

IX . 2 /CHOIX DU TYPE D'ELEMENT:

Les refends sont en général soumis à des forces dans leur plan, ils sont donc étudiés en élasticité plane qui, comme il a été précisé dans les chapitres ultérieurs, concerne les structures continues chargées dans leur plan. Les éléments appartenant au plancher seront calculés en déformations planes et dans le cas contraire en contraintes planes.

Notre choix s'est donc porté sur l'élément rectangulaire à quatre noeuds avec deux degrés de liberté pour chaque noeud à savoir deux translations  $u$  et  $v$ .

L'évaluation de la matrice de raideur de l'élément utilisé passe par sept étapes :

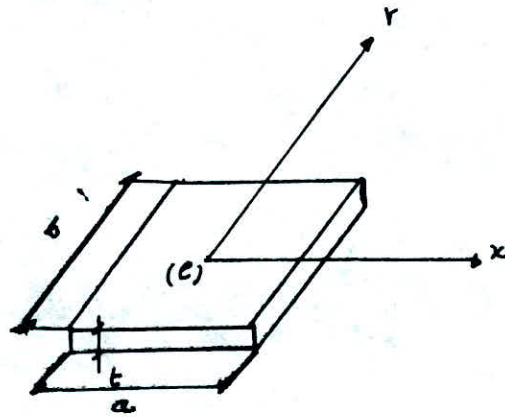
IX . 3 /CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE  
EN ELASTICITE PLANE

Etape 1 : Cette étape consiste en le choix du système de coordonnées convenables et la numérotation de l'élément de référence.

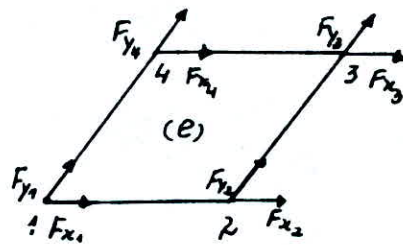
On suppose que l'élément rectangulaire à des dimensions  $a$  (suivant  $x$ ) et  $b$  (suivant  $y$ ) et une épaisseur  $E_v$  fig-1.

Nous optons pour la numérotation indiquée dans la figure 2 et qui présente une facilité considérable lors de la programmation.

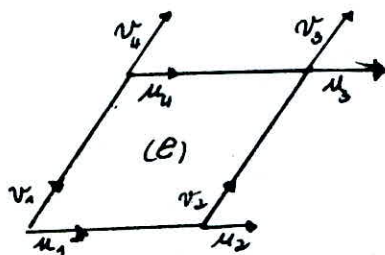
Nous notons par :  $\{U(x,y)\} = \left\{ \begin{array}{l} u(x,y) \\ v(x,y) \end{array} \right\}$  déplacement en un point donné de coordonnées  $x$  et  $y$ .



Repère locale



Forces nodales



Déplacements nodaux

fig - 1 -

Le vecteur déplacements nodaux de l'élément de référence est noté comme suit :

$$\{U^{\circ}\} = \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{U_4\} \end{Bmatrix} \quad \text{Avec } \{U_l\} = \begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \end{Bmatrix}$$

$$\{U^{\circ}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad \{F^{\circ}\} = \begin{Bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{y1} \\ F'_{x2} \\ F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ F'_{x4} \\ F'_{y4} \end{Bmatrix}$$

Le vecteur déplacement nodal est d'ordre 8, de même que le vecteur force nodale de telle sorte que la matrice de rigidité élémentaire soit d'ordre 8.

$$\boxed{\{F^{\circ}\} = [K^{\circ}]\{U^{\circ}\}} \quad 1$$

Etape 2 : Choisir la fonction de déplacement  $f(x,y)$  qui définit le déplacement  $U(x,y)$ .

Cette étape concerne donc le choix de la fonction de déplacement. Pour les problèmes d'élasticité plane, les déplacements peuvent être représentés par deux polynômes en  $x$  et  $y$  tels que :

$$\begin{cases} U(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ V(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{cases}$$

Le nombre de degrés de liberté de l'élément de référence est 8, de ce fait nous avons choisi deux polynômes à quatre coefficients inconnus chacun.

D'où :

$$\{U(x,y)\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\{U(x,y)\} = [f(x,y)] \{\alpha\} \quad (11)$$



Etape 3 : Exprimer l'état des déplacements  $\{U(x,y)\}$  en chaque point de l'élément en fonction des déplacements nodaux  $\{U^{\circ}\}$ .

Cette étape consiste à remplacer par leurs valeurs les coordonnées nodales dans l'équation II, puis à résoudre en  $\{\alpha\}$ .

Nous obtenons donc :

$$\{U^{\circ}\} = \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \\ f(x_4, y_4) \end{bmatrix} \quad \{\alpha\} \quad \{U^{\circ}\} = [A] \{\alpha\}$$

$$[A] =$$

1	-a/2	-b/2	ab/4	0	0	0	0
0	0	0	0	1	-a/2	-b/2	ab/4
1	a/2	-b/2	-ab/4	0	0	0	0
0	0	0	0	1	a/2	-b/2	-ab/4
1	a/2	b/2	ab/4	0	0	0	0
0	0	0	0	1	a/2	b/2	ab/4
1	-a/2	+b/2	-ab/4	0	0	0	0
0	0	0	0	1	-a/2	+b/2	-ab/4

- Tab 1 -

$$[A^{-1}] =$$

1/4	0	1/4	0	1/4	0	1/4	0
-1/2a	0	1/2a	0	1/2a	0	-1/2a	0
-1/2b	0	-1/2b	0	1/2b	0	1/2b	0
1/ab	0	-1/ab	0	1/ab	0	-1/ab	0
0	1/4	0	1/4	0	1/4	0	1/4
0	-1/2a	0	1/2a	0	1/2a	0	-1/2a
0	-1/2b	0	-1/2b	0	1/2b	0	1/2b
0	1/ab	0	-1/ab	0	1/ab	0	-1/ab

- Tab 2 -

$$\begin{aligned} \{U^{\circ}\} &= [A]\{\alpha\} \implies \{\alpha\} = [A^{-1}]\{U^{\circ}\} \\ \{U(x,y)\} &= [f(x,y)][A^{-1}]\{U^{\circ}\} = [N(x,y)]\{U^{\circ}\} \\ \{U(x,y)\} &= [N(x,y)]\{U^{\circ}\} \quad \text{III} \end{aligned}$$

Pour le système de coordonnées adopté précédemment nous avons :

$$[N(x,y)] = \{f(x,y)\} [A^-] =$$

$\frac{1-x}{4} \frac{-Y+XY}{2a} \frac{-Y+XY}{2b} \frac{-XY}{2b}$	0	$\frac{1+x}{4} \frac{-Y}{2a} \frac{-XY}{2b} \frac{-XY}{2b}$	0	$\frac{1+x}{4} \frac{+Y}{2a} \frac{+Y}{2b} \frac{+XY}{2b}$	0	$\frac{1-x}{4} \frac{+Y}{2a} \frac{-XY}{2b} \frac{-XY}{2b}$	0
0	$\frac{1-x}{4} \frac{-Y}{2a} \frac{-Y}{2b} \frac{+XY}{2b}$	0	$\frac{1+x}{4} \frac{-Y}{2a} \frac{-XY}{2b} \frac{-XY}{2b}$	0	$\frac{1+x}{4} \frac{+Y}{2a} \frac{+Y}{2b} \frac{+XY}{2b}$	0	$\frac{1-x}{4} \frac{+Y}{2a} \frac{-XY}{2b} \frac{-XY}{2b}$

Les propriétés de la fonction d'interpolation  $[N(x,y)]$  sont:

- 1 - Nous avons :

$$N_i(x,y) = 0 \text{ si } x \neq x_i \text{ ou } y \neq y_i \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$N_i(x,y) = 1 \text{ si } x = x_i \text{ et } y = y_i$$

- 2 - La fonction de déplacement  $f(x,y)$  est continue sur la frontière des éléments et est dérivable (mais ses dérivées ne sont pas forcément continues), ceci implique que  $N(x,y)$  l'est aussi.

$$- 3 - \sum_{i=1}^4 N_i(x,y) = 1$$

Etape 4 : Relier les déformations  $\{\xi(x,y)\}$  en chaque point aux déformations  $\{U(x,y)\}$  et donc aux déplacements nodaux  $\{U^0\}$

La relation entre les déformations et les déplacements en tout point pour un problème d'élasticité plane est indépendante de la forme de l'élément choisi :

$$D'où les équations : \xi_x = \partial U / \partial y, \quad \xi_y = \partial V / \partial x,$$

$$\gamma_{xy} = \partial U / \partial x + \partial V / \partial y$$

Nous pouvons ainsi écrire :

$$\begin{cases} \xi_x = \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \xi_y = \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \gamma_{xy} = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{cases}$$

$$\{\xi(x,y)\} = [C] \{\alpha\} \quad \text{or } \{\alpha\} = [A^-] \{U^0\}$$

$$\text{Donc } \{\xi(x,y)\} = [C] [A^-] \{U^0\}$$

$$\text{En posant } [B] = [C] [A^-]$$

$$\{\xi(x,y)\} = [B] \{U^0\} \quad (IV)$$

$-\frac{1}{2}a + \frac{y}{ab}$	0	$\frac{1}{2}a - \frac{y}{ab}$	0	$\frac{1}{2}a + \frac{y}{ab}$	0	$-\frac{1}{2}a - \frac{y}{ab}$	0
0	$-\frac{1}{2}a + \frac{x}{ab}$	0	$-\frac{1}{2}b - \frac{x}{ab}$	0	$\frac{1}{2}b + \frac{x}{ab}$	0	$\frac{1}{2}b - \frac{x}{ab}$
$-\frac{1}{2}b + \frac{x}{ab}$	$-\frac{1}{2}a + \frac{y}{ab}$	$\frac{1}{2}b - \frac{x}{ab}$	$\frac{1}{2}a - \frac{y}{ab}$	$\frac{1}{2}b + \frac{x}{ab}$	$\frac{1}{2}a + \frac{y}{ab}$	$\frac{1}{2}b - \frac{x}{ab}$	$-\frac{1}{2}a - \frac{y}{ab}$

Tab-4-

Etape 5 : Relier les contraintes internes  $\{\sigma(x,y)\}$  aux déformations  $\{\xi(x,y)\}$  et aux déplacements nodaux  $\{U^0\}$

La loi de HOOK généralisée donne :

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] \{\xi(x,y)\} \quad (V)$$

$[D]$  est la matrice d'élasticité donnée par :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

Avec :  $d_{11} = d_{22} = E(1 - \alpha\nu) / ((1 + \nu)(1 - (\alpha + 1)\nu))$

$$d_{12} = d_{21} = E \cdot \nu / ((1 + \alpha)(1 - (1 + \alpha)\nu))$$

$$d_{33} = E / 2(1 + \alpha)$$

$E$  : module de YOUNG,  $\nu$  : coefficient de Poisson.

$\alpha = 0$  en contraintes planes

$\alpha = 1$  en déformations planes

Des equations (IV) et (V) nous déduisons :

$$\{\sigma(x,y)\} = [D][B]\{U^0\} \quad (VI)$$

$$\{\sigma(x,y)\} = [H(x,y)]\{U^0\}, \text{ avec } [H(x,y)] = [D][B].$$

$$[H(x,y)] = (1/ab)[L]$$

$d_{11}(b/2 - y)$	$d_{12}(a/2 - x)$	$d_{11}(-b/2 + y)$	$d_{12}(a/2 + x)$	$d_{11}(b/2 + y)$	$d_{12}(-a/2 - x)$	$d_{11}(-b/2 - y)$	$d_{12}(a/2 - x)$
$d_{21}(b/2 - y)$	$d_{22}(a/2 - x)$	$d_{21}(-b/2 + y)$	$d_{22}(a/2 + x)$	$d_{21}(b/2 + y)$	$d_{22}(-a/2 - x)$	$d_{21}(-b/2 - y)$	$d_{22}(a/2 - x)$
$d_{33}(a/2 - x)$	$d_{33}(a/2 + x)$	$d_{33}(-b/2 + y)$	$d_{33}(-a/2 - x)$	$d_{33}(b/2 + y)$	$d_{33}(a/2 + x)$	$d_{33}(a/2 - x)$	$d_{33}(-b/2 - y)$

Tab-5-

Etape 6 : Remplacer les contraintes  $\{\sigma(x,y)\}$  par des forces nodales statiquement équivalentes  $\{F^0\}$ , relier les forces nodales aux déplacements nodaux  $\{U^0\}$ , et de là obtenir la matrice de rigidité de l'élément.

Nous utilisons le principe des travaux virtuels pour déterminer l'ensemble des charges nodales qui sont statiquement équivalent aux contraintes internes.

La condition d'équivalence peut être exprimée comme suit :

Durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le

travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes. On choisit un ensemble arbitraire de déplacements nodaux représenté par le vecteur  $\{U^{\circ}\}$  où :

$$\{U^{\circ}\} = \left\{ \begin{array}{l} \{U_1^{\circ}\} \\ \{U_2^{\circ}\} \\ \{U_3^{\circ}\} \\ \vdots \\ \{U_n^{\circ}\} \end{array} \right\}$$

Le travail extérieur  $w_{ext}$  des forces nodales est donné par :

$$w_{ext} = \{U_1^{\circ}\} \{F_1^{\circ}\} + \{U_2^{\circ}\} \{F_2^{\circ}\} + \dots + \{U_n^{\circ}\} \{F_n^{\circ}\} = \{U^{\circ}\}^L \{F^{\circ}\}.$$

Si les déplacements arbitrairement imposés produisent des déformations  $\{\xi(x,y)^*\}$  aux points de l'élément où les contraintes réelles sont les contraintes  $\{\sigma(x,y)\}$ , dans le travail interne par unité de volume est donné par :

$$w_{int} = \{\xi(x,y)^*\}^L \{\sigma(x,y)\}$$

Et le travail interne total est obtenu en intégrant sur le volume total de l'élément c'est à dire :

$$\int^v w_{int} d(vol) = \int^v \{\xi(x,y)^*\}^L \{\sigma(x,y)\} d(vol)$$

Or d'après la relation (IV)  $\{\xi(x,y)\} = [B] \cdot \{U^{\circ}\}$ .

Les déplacements nodaux imposés étant virtuels  $\{U^{\circ}\}^*$ , les

déformations correspondantes s'expriment par :

$$\{\xi(x,y)^*\} = [B] \{U^{\circ}\}^*.$$

De plus l'équation (VI) reliant les contraintes réelles dans l'élément aux déplacements nodaux étant :  $\{\sigma(x,y)\} = [D][B] \{U^{\circ}\}$ .

Nous pouvons donc remplacer ces expressions dans l'équation des travaux virtuels (travail interne) et nous obtenons :

$$\int^v w_{ext} d(vol) = \int^v [B]^L \{U^{\circ}\}^* [D][B] \{U^{\circ}\} d(vol)$$

$$w_{ext} = \{U^{\circ}\}^L \{F^{\circ}\}$$

L'opération finale consiste à évaluer travail interne et travail externe produits pendant les déplacements virtuels  $\{U^{\circ}\}^*$ . Puisque le principe de base des déplacements virtuels est valide pour

n'importe quel système de déplacements appliqué, on peut choisir ce dernier comme l'on veut. Dans le cas présent il est commode de supposer les déplacements nodaux égaux à l'unité. Nous obtenons alors :

$$\{F^{\circ}\} = [S^{\vee} [B]^t [D] [B] d(vol)] \{U^{\circ}\} \quad (VII)$$

La comparaison avec l'équation  $\{F^{\circ}\} = [K^{\circ}] \{U^{\circ}\}$  (1) donne :

$$[K^{\circ}] = \int^{\vee} [B]^t [D] [B] d(vol) \quad (VIII)$$

La matrice de rigidité élémentaire est donc donnée par l'équation (VIII).

La matrice  $[B]$  étant définie par l'équation (IV)

La matrice  $[D]$  étant définie par l'équation (V)

Pour l'élément rectangulaire d'épaisseur constante  $E\nu$ ,

L'équation (VIII) devient  $[K^{\circ}] = E\nu \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{b/2} [B]^t [D] [B]^t dx dy$  (\*)

Or  $[B] = [C][A^-]$  sachant que la matrice  $[A]$  est constante.

L'équation (\*) devient :

$$[K^{\circ}] = E\nu \cdot [A^-]^t \left( \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} [C]^t [D] [C] dx dy \right) \cdot [A^-]$$

Le calcul de la matrice élémentaire  $[K^{\circ}]$  revient donc à calculer l'intégrale suivante :

$[Gauss] = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} [C]^t [D] [C] dx dy$  l'expression finale de  $[K^{\circ}]$  est :

$$[K^{\circ}] = E\nu \cdot [A^-]^t \cdot [Gauss] \cdot [A^-] \quad (\text{Voir Tab 6})$$

Etape 7 : Etablir la matrice  $[H]$  reliant contraintes et déplacements.

La relation cherchée est donnée par :  $\{\sigma(x,y)\} = [H(x,y)] \{U^{\circ}\}$ . La matrice  $[H(x,y)]$  en tout point est fournie par le tableau Tab 5. Les contraintes ainsi obtenues contiennent des termes en  $x$  et  $y$  que l'ordinateur ne peut prendre en considération.

En conséquence pour obtenir les contraintes en un point donné, nous remplaçons  $x$  et  $y$  dans la matrice  $[H]$  par les coordonnées de ce point. De cette façon, nous pouvons avoir les contraintes en chacun des quatre noeuds de l'élément, d'où l'obtention de  $\{\sigma^e\}$

$$\{\sigma^e\} = \begin{bmatrix} \sigma(x_1, y_1) \\ \sigma(x_2, y_2) \\ \sigma(x_3, y_3) \\ \sigma(x_4, y_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(x_1, y_1) \\ H(x_2, y_2) \\ H(x_3, y_3) \\ H(x_4, y_4) \end{bmatrix} \{U^e\}$$

→ La matrice  $[H(x_i, y_i)]$  s'obtient en remplaçant les coordonnées du noeud  $i$  dans les expressions de  $[H]$  données par le tableau Tab4.

Equation définissant la matrice  $[H]$  pour

$\{\sigma^e\} = [H^e] \{U^e\}$

l'élément rectangulaire dans le cas d'un problème élasticité plane.

Remarque : la matrice  $[H^e]$  est donnée par le tableau Tab7

#### IX .4/ DERMINATION DU VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE DES FORCES NODALES

Lors de cette étape, on se propose de calculer les forces nodales statiquement équivalentes aux chargements répartis sur les frontières de l'élément.

Pour cela, on impose un déplacement virtuel  $\delta\{U^e\}$  arbitraire aux noeuds de l'élément et on égalise l'expression des travaux intérieurs et extérieurs

$$\delta(W_{int}^*) = \delta(W_{ext}^*).$$

\*Travail effectué par les forces nodales directement appliqués aux noeuds est égal à la somme des produits de chaque composantes des forces par le déplacement correspondant.

$q_n$  : Forces nodales directement appliquées aux noeuds.

$$\delta(W_{ext}^*) = \delta(\{U^e\}^* \{q^e\}) \quad (a)$$

\* Travail intérieur est égal au travail effectué par les contraintes et les chargements répartis.

$\{Q\}$  obtenu par intégration sur le volume de l'élément.

$\{Q\}$  chargement cohérent qui lorsqu'il est surfacique (linéique) on remplace  $(dv)$  par  $(ds)$  respectivement  $(dl)$ .

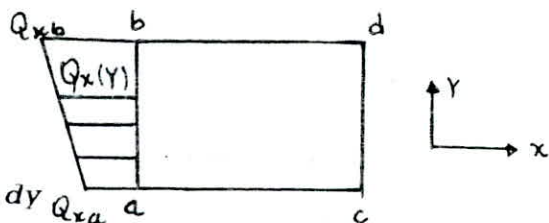
Considérons maintenant les différents cas de charges auxquels peut être soumis l'élément.

Premier cas : le chargement est suivant x (le côté chargé est ab)

Nous avons alors  $\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x(y) \\ 0 \end{Bmatrix}$

Avec  $Q_x(y) = Q_{xa} + (Q_{xb} - Q_{xa}) y/b$

$$\{F^e\} = \int_{y_a}^{y_b} [N]^t \{Q\} dy = \int_{-b/2}^{b/2} [N]^t \{Q\} dy$$



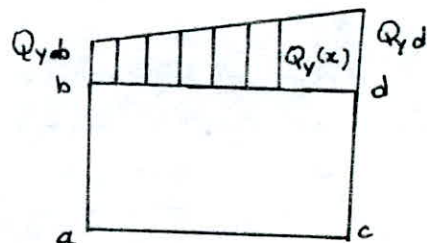
Dans le cas où c'est le côté cd qui est chargé, il faut donc substituer les indices a et b respectivement par les indices c et d.

Deuxième cas : le chargement est suivant Y (le côté chargé est (bd))

Nous aurons dans ce cas  $\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_y(x) \end{Bmatrix}$

$Q_y(x) = Q_{by} + (Q_{yd} - Q_{by}) x/a$

De même que pour le premier cas, si le côté (ac) est chargé alors il s'agit de remplacer l'indice (d) par l'indice (c) et l'indice (b) par l'indice (a).



Remarque : Si les quatre côtés de l'élément sont chargés. On superpose les cas de charges précédents.

Troisième cas : L'effet du poids propre (masse)

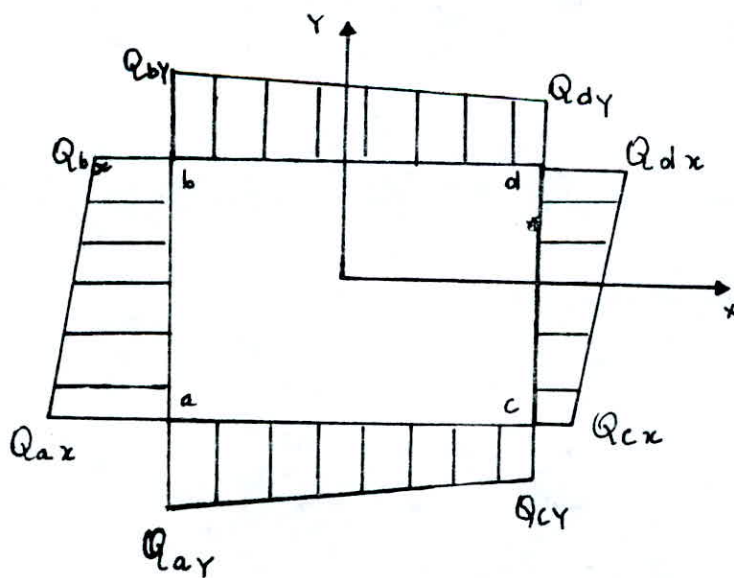
Dans ce cas, nous sommes en présence d'un chargement volumique qui s'écrit comme suit :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho \end{Bmatrix} \quad \{F^e\} = \int_{V_0} [N]^t Q dv$$

Ce chargement n'intervient que pour les structures dont le poids propre (ou une de ses composantes) agit dans leur plan.

Après avoir effectué les opérations nécessaires (produit matriciel et intégration), nous obtenons l'expression du vecteur force nodale élémentaire.

$$\begin{bmatrix} Q_{xa} \frac{b}{3} + Q_{bx} \frac{b}{6} \\ Q_{ya} \frac{a}{3} + Q_{cy} \frac{a+ab\sigma}{4} + Q_{dy} \frac{a+ab\sigma}{4} \\ Q_{xa} \frac{b}{3} + Q_{dx} \frac{b}{6} \\ Q_{cy} \frac{a}{3} + Q_{ay} \frac{a+ab\sigma}{4} \\ Q_{dx} \frac{b}{3} + Q_{cx} \frac{b}{6} \\ Q_{dy} \frac{a}{3} + Q_{by} \frac{a+ab\sigma}{4} \\ Q_{bx} \frac{b}{3} + Q_{ax} \frac{b}{6} \\ Q_{by} \frac{a}{3} + Q_{dy} \frac{a+ab\sigma}{4} \end{bmatrix}$$





$$[k^e] =$$

$\frac{b^2 d_{11} + a^2 d_{33}}{3 a b}$	$\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$	$\frac{a^2 d_{33} - 2b^2 d_{11}}{6 a b}$	$\frac{d_{12} - d_{33}}{4}$	$-\frac{a^2 d_{33} + b^2 d_{11}}{6 a b}$	$-\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$	$\frac{-2a^2 d_{33} + b^2 d_{11}}{6 a b}$	$\frac{d_{33} - d_{12}}{4}$
	$\frac{b^2 d_{33} + a^2 d_{22}}{3 a b}$	$\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$	$\frac{a^2 d_{22} - 2b^2 d_{33}}{6 a b}$	$-\frac{(d_{33} + d_{12})}{4}$	$-\frac{a^2 d_{22} + b^2 d_{33}}{6 a b}$	$\frac{d_{12} - d_{33}}{4}$	$\frac{b^2 d_{33} - 2a^2 d_{22}}{6 a b}$
		$\frac{b^2 d_{11} + a^2 d_{33}}{3 a b}$	$-\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$	$-\frac{2a^2 d_{33} + b^2 d_{11}}{6 a b}$	$\frac{d_{12} - d_{33}}{4}$	$-\frac{a^2 d_{33} + b^2 d_{11}}{6 a b}$	$\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$
			$\frac{b^2 d_{33} + a^2 d_{22}}{3 a b}$	$\frac{d_{33} - d_{12}}{4}$	$-\frac{2a^2 d_{22} + b^2 d_{33}}{6 a b}$	$\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$	$-\frac{a^2 d_{22} + b^2 d_{33}}{6 a b}$
				$\frac{b^2 d_{11} + a^2 d_{33}}{3 a b}$	$\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$	$\frac{a^2 d_{33} - 2b^2 d_{11}}{6 a b}$	$\frac{d_{12} - d_{33}}{4}$
					$\frac{b^2 d_{33} + a^2 d_{22}}{3 a b}$	$\frac{d_{33} - d_{12}}{4}$	$\frac{a^2 d_{22} - 2b^2 d_{33}}{6 a b}$
						$\frac{b^2 d_{11} + a^2 d_{33}}{3 a b}$	$-\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$
							$\frac{b^2 d_{33} + a^2 d_{22}}{3 a b}$

$-b d_{11}$	$-a d_{12}$	$b d_{11}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$a d_{12}$
$-b d_{21}$	$-a d_{22}$	$b d_{21}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$a d_{22}$
$-a d_{33}$	$-b d_{33}$	$0$	$b d_{33}$	$0$	$0$	$a d_{33}$	$0$
$-b d_{11}$	$0$	$b d_{11}$	$-a d_{12}$	$0$	$a d_{12}$	$0$	$0$
$-b d_{12}$	$0$	$b d_{21}$	$-a d_{22}$	$0$	$a d_{22}$	$0$	$0$
$0$	$-b d_{33}$	$-a d_{33}$	$b d_{33}$	$a d_{33}$	$0$	$0$	$0$
$0$	$0$	$0$	$-a d_{12}$	$b d_{11}$	$b d_{12}$	$-b d_{11}$	$0$
$0$	$0$	$0$	$-a d_{22}$	$b d_{21}$	$a d_{22}$	$-b d_{21}$	$0$
$0$	$0$	$-a d_{33}$	$0$	$a d_{33}$	$b d_{33}$	$0$	$-b d_{33}$
$0$	$-a d_{12}$	$0$	$0$	$b d_{11}$	$0$	$-b d_{11}$	$a d_{12}$
$0$	$-a d_{22}$	$0$	$0$	$b d_{21}$	$0$	$-b d_{21}$	$a d_{22}$
$-a d_{33}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$b d_{33}$	$a d_{33}$	$b d_{33}$

$$[H^{\circ}] = (1/ab)$$

TAB - 7-

## CHAP X PRESENTATION DU PROGRAMME ELEMENTS FINIS

### X.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, en application de la théorie exposée dans les chapitres précédents, nous allons considérer quelques unes des étapes rencontrées au cours du développement du programme de modélisation d'un voile par éléments finis.

Le programme présenté ici, pourra être utilisé pour résoudre les problèmes à deux dimensions.

On peut distinguer deux parties essentielles :

- a- Le module de génération automatique des données
- b- Le module de résolution et d'exploitation des résultats

### X.2/ PRESENTATION DU PROGRAMME

Ce programme permet la modélisation des voiles en élasticité plane, il a été élaboré d'une manière structurée, il est constitué de plusieurs sous programmes où le passage des paramètres s'effectue par le biais de blocs 'commun' étiquetés, ce qui rend la programmation très souple et facilite le passage des paramètres d'une subroutine à une autre.

### X.3/ ENTREE DES DONNEES

La subroutine d'entrée des données doit transmettre suffisamment d'informations aux autres subroutines pour qu'on puisse résoudre le problème.

Cette subroutine sert à lire dans un fichier, les données indispensables concernant ,les caractéristiques physiques des matériaux: (module de YOUNG, coefficient de POISSON, densité), la géométrie du voile (hauteur, largeur, épaisseur, coordonnées) , les coordonnées et les dimensions des ouvertures, le chargement extérieur (charge d'exploitation, charge permanente, charge sismique)

#### X.4/ TRANSFERT DES DONNEES :

Le transfert des données est réalisé à l'aide de blocs "commun" étiquetés qui contiennent en " parametr " deux données essentielles qui sont :

- Le nombre d'éléments suivant la direction x :(NEX)
- Le nombre d'éléments suivant la direction y :(NEY)

Les blocs " commun " utilisés contiennent un ensemble de tableaux dimensionnés conçus pour mémoriser les coordonnées des noeuds, les points de connection des éléments, la codification des conditions aux frontières, par exemple :

```
COMMON / COORD / XG(NN), YG(NN), XL(NN), YL(NN)
COMMON / LOC / LOC (NE,4)
COMMON / CAL / IAPP(NN)
COMMON / CONT / SIGMA(NE,4,3) , HN(3,8)
COMMON / ELEM / D(3,3), A(8,8),ALT(8,8)
```

#### X.5/ REPARTITION DE LA MEMOIRE

Tout tableau, dans les blocs " COMMUN ", reçoit une dimension variable égale à la valeur exacte nécessitée par chaque problème, par l'utilisation de jeux d'index, calculé dans le "parametr"

De cette façon, il n'ya aucun gaspillage au cours de la mémorisation des données, et un minimum de place reste attribué aux tableaux globaux. C'est donc une répartition dynamique de la mémoire

#### X.6/ GENERATION AUTOMATIQUE DU MAILLAGE

Avec un maillage très important, la préparation des données resterait fastidieuse, aussi notre programme engendre t'il automatiquement, la plupart des données.

Le procédé consiste à introduire les pas du maillage ou pas de discrétisation selon les deux sens x et y

Ces pas sont définis comme suit:

- \* Le nombre d'éléments entre le bord du voile et la 1<sup>ère</sup> ou la dernière ouverture
- \* Le nombre d'éléments d'une même ouverture
- \* Le nombre d'éléments entre deux ouvertures juxtaposées

Le nombre d'éléments selon les sens x et y sont calculés moyennant ces pas de discretisation.

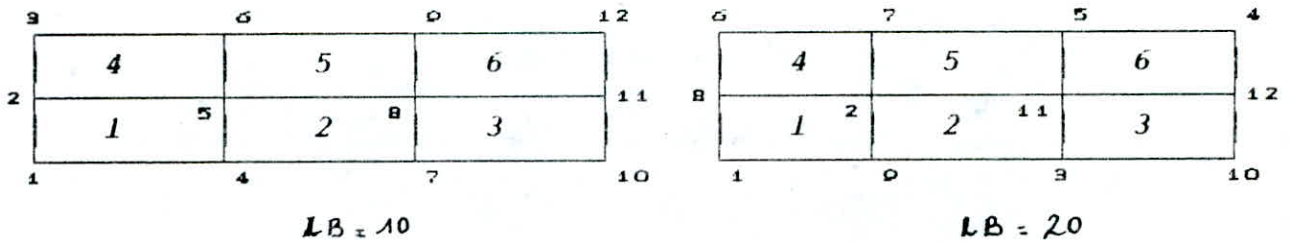
X.6.a Génération automatique des connectivités:

I : INTERET DE LA NUMEROTATION SUR LA LARGEUR DE LA BANDE

La numérotation des noeuds conditionne la forme de la matrice globale de rigidité qui peut être une matrice bande et les gains en capacité du programme et en temps de résolution peuvent être considérables.

Notre but étant d'obtenir une matrice globale bande, la numérotation des noeuds de la structure est faite automatiquement, selon le sens qui correspond au moins d'éléments

Pour mettre en évidence l'intérêt de cette numérotation, étudions la variation de la largeur de bande pour l'exemple suivant en fonction de la numérotation.



LB = 10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1	+	+	+		+							
2	+	+	+		+	+						
3		+	+									
4	+			+	+		+	+				
5	+	+		+	+	+		+	+			
6	+	+			+							
7		+				+	+		+	+		
8			+	+		+	+	+		+	+	
9				+			+					
10							+					
11							+	+				
12								+				

□ : matrice vide  
2\*2  
+ : matrice pleine  
2\*2

Numérotation optimale

LB = 20

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1	+	+						+	+	+	+	
2	+	+				+		+	+	+	+	+
3			+					+	+	+	+	+
4				+						+		
5		+			+					+		
6					+			+				
7		+				+		+				
8	+	+			+	+	+	+				
9	+	+	+					+			+	
10				+								
11	+	+	+	+	+			+			+	+
12		+								+		+

Mauvaise numérotation

La demi largeur de bande est calculée automatiquement par la formule suivante :

$$LB = (Max + 1) \times ND \quad \text{où :}$$

Max : plus grande différence des numeros des noeuds des éléments

ND : Le nombre de degrés de liberte par noeud

LB : Demi largeur de bande

Ainsi pour les 2 cas precedents nous obtenons :

$$LB = 10 \text{ (1er cas )}$$

$$LB = 20 \text{ (2em cas )}$$

On voit donc qu'une mauvaise numérotation peut avoir de graves consequences sur la largeur de la bande et donc sur l'efficacité de la résolution.

## 2 : GENERATION DES CONNECTIVITES

Le programme permet de générer automatiquement les connectivités de tous les éléments de la structure, par le biais de deux incréments  $L_x$  et  $L_y$  et qui sont les pas des connectivites respectivement selon l'axe x et l'axe y.

Ainsi pour tous les éléments situés sur le même axe x, les connectivites de l'élément i sont ceux de l'élément i-1 incrementés de dx.

De même pour tous les éléments situés sur le même axe y, les connectivités de l'élément j sont ceux de l'élément j-1 incrementés de dy.

Exemple :

Reprenons l'exemple precedent avec la numérotation 1

$$\text{Element n}^\circ 2 : \text{Loc} (2,k) = \text{Loc} (1,k) + 3 \quad k=1,4$$

$$\text{Element n}^\circ 6 : \text{Loc} (6,k) = \text{Loc} (1,k) + 1 \quad k=1,4$$

$$\text{avec } L_x = NEY + 1 = 3 \quad L_y = 1$$

### X.6.b Génération automatique des coordonnées des noeuds:

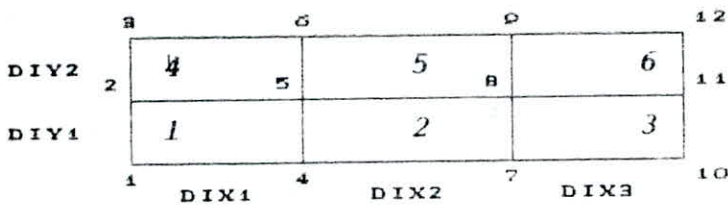
Les coordonnées des noeuds sont générées automatiquement suite à l'introduction des pas du maillage.

Le processus est le suivant :

Les noeuds juxtaposés situés sur un même axe x, ont même coordonnée y, tandis que leurs coordonnées x diffèrent d'un incrément égale a la distance qui les sépare.

De même, pour des noeuds juxtaposés sur un même axe y, ils ont même coordonnée x, tandis que leurs coordonnées y diffèrent d'un incrément égale à la distance qui les sépare.

Pour illustrer ceci reprenons l'exemple précédent :  
 Pour le noeud 2 :  $XG(2)=XG(1)$        $YG(2)=YG(1)+Diy_1$



X.6.c : Génération des codes appui des noeuds:

La structure étant supposée encadrée à la base, le même code appui est pris pour tous les noeuds situés à la base :

$1PP(i) = 0,$        $i$  : indice des noeuds à la base.

Pour les autres noeuds, le code appui est supposé égale à un  $1PP(j) = 1,$        $j$ : indice des noeuds non appuis.

X.7/. DETECTION DES ELEMENTS VIDES

La technique utilisée pour la modélisation des ouvertures est la technique des éléments fictifs ou éléments 'vides'

Le but de la subroutine "Detect" est justement la détection de ces éléments fictifs résultant de la discretisation du vide, qui ne pouvait être évitée afin d'aboutir à un maillage continu.

Ces éléments une fois détectés, sont stockés dans un vecteur dit :IVID (NEV), où NEV est le nombre d'éléments vides.



## X.8/ DETERMINATION DES MATRICES DE RIGIDITE ELEMENTAIRES.

Les principales étapes de calcul des matrices de rigidité élémentaires sont schématisées sur l'organigramme fig 1.

Les étapes fondamentales en sont :

- \* La détection des éléments vides
- \* L'intégration numérique
- \* L'inversion de matrice
- \* Le stockage des matrices qui serviront dans la suite du programme

### X.8.a Test sur les éléments vides:

Le calcul des matrices de rigidité élémentaires débute par un test afin d'identifier les éléments fictifs, si le test est vérifié, le passage à l'élément suivant est automatique. Ainsi le calcul des matrices élémentaires ne concerne que les éléments non vides et n'est donc aucunement affecté par la discrétisation du vide.

### X.8.b. Inversion de matrice:

Lorsqu'une matrice  $[A]$  n'est pas singulière, il existe une matrice carrée et une seule d'ordre  $n$  noté:  $[A^{-1}]$  dite "matrice inverse de  $[A]$ ", et qui satisfait à la condition ci après:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

Pour obtenir les matrice inverse  $A^{-1}$ , On peut se baser sur les considérations suivantes :

soit:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Le système linéaire  $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ .

où l'inconnue  $X_i$  de rang  $i$  du système linéaire  $AX = B$  est donnée par

$$x_i = \alpha_{i1} b_1 + \alpha_{i2} b_2 + \dots + \alpha_{in} b_n$$

**X.B.c** Intégration de GAUSS :

Le calcul des matrices de rigidité par intégration explicite ne peut être envisagé que pour les éléments les plus simples. Par ailleurs l'intégration exacte peut soulever de sérieuses difficultés pour certains types de problèmes : Élément d'ordre élevé ou isoparamétrique courbe...

Dans cette éventualité l'intégration numérique doit être utilisée.

Dans notre programme la méthode que nous avons adoptée est :

L'intégration de GAUSS

Pour un problème bidimensionnel l'intégration de GAUSS peut s'exprimer par :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r1} \sum_{j=1}^{r2} W_i W_j Y(\xi_i, \eta_j)$$

ou :  $W_i, W_j$  : sont les coefficients de pondération

$\xi_i, \eta_j$  : sont les coordonnées des points d'intégration correspondants

Les méthodes d'intégration numérique étant présentées pour l'élément de référence, il est facile de les transposer sur l'élément réel en utilisant la formule suivante (cas unidimensionnel)

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x) dx = \frac{(x_2 - x_1)}{2} \int_{-1}^1 Y(\xi) d\xi, \quad x = ((1 - \xi)/2)x_1 + ((1 + \xi)/2)x_2$$

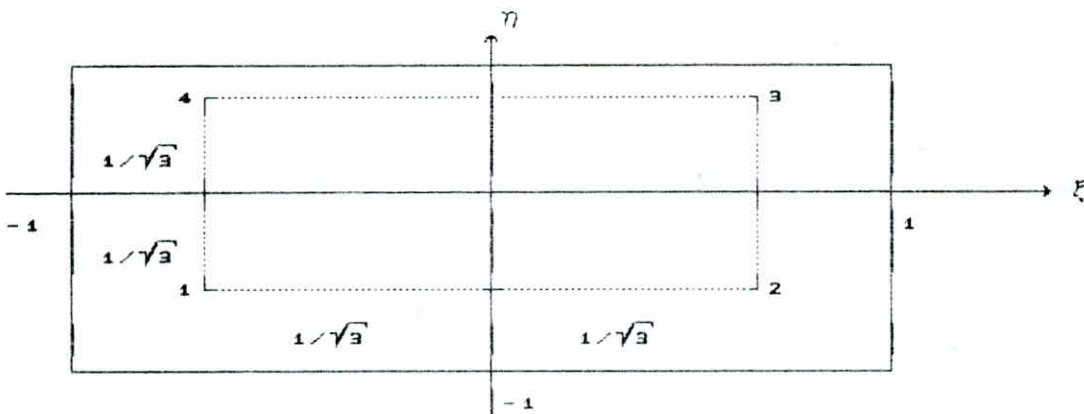


fig 1

fig 4 : Integration de GAUSS (2x2) pour le quadrilatere.

L'élément utilisé étant quadrilatère le nombre de points d'integrations utilisé est  $2 \times 2 = 4$

Remarquons que si le vecteur B est tel que :

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

On aura :  $X_i = \alpha_{i1}$  C'est à dire :  $X = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix}$

X est donc le 1er vecteur colonne de la matrice inverse  $A^{-1}$ .

De même si le vecteur B est tel que :

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

le un figurant en jème position.

Le vecteur solution du systeme lineaire sera :

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{bmatrix}$$

X est donc le jème vecteur colonne de la matrice  $A^{-1}$ . Nous voyons donc que pour obtenir les matrice  $A^{-1}$  d'ordre n, il suffit de résoudre n fois le système lineaire  $Ax = B$ , en prenant pour le vecteur B les vecteurs colonnes successifs de la matrice diagonale unitaire I.

La subroutine "Invers" a été réalisée en tenant compte de toutes ces Considerations. La méthode de résolution implicite utilisée est la methode de GAUSS JORDAN

## X.9/ ASSEMBLAGE DES MATRICES DE RIGIDITE

### X.9.a Principe d'assemblage :

Dans les paragraphes précédents, le principe des travaux virtuels a été appliqué à un élément isolé, et l'on en a déduit le concept de force nodale équivalente. Le principe de l'assemblage en a manifestement découlé en suivant la méthode conventionnelle de l'équilibrage direct de ces forces nodales.

L'idée des forces nodales associées à chaque élément et qui remplacent les interactions continues, est en fait difficile de bien concevoir, bien qu'elle présente un attrait considérable pour l'ingénieur à l'esprit pratique et qu'elle permette parfois une interprétation des phénomènes qui autrement ne serait pas perceptible par le mathématicien, d'esprit plus rigoureux. Il n'y a cependant aucune raison de considérer chaque élément séparément, et les raisonnements du paragraphe IX peuvent s'appliquer directement au milieu continu dans son intégralité.

La relation III du chap IX peut s'interpréter comme s'appliquant cette fois à la structure complète, à savoir :

$$\{U\}_{(x,y)} = [N]_{(x,y)} \{U^{\circ}\}$$

Le vecteur  $\{U^{\circ}\}$  regroupe les déplacements de tous les points nodaux, et

$$* [\bar{N}]_{(x,y)} = [N^{\circ}]$$

\* Lorsque le point considéré est intérieur à l'élément  $e$  et que  $i$  est un point associé à cet élément.

$$[N]_{(x,y)} = 0$$

\* Lorsque le point  $i$  ne figure pas dans l'élément.

On donnera à la matrice  $[\bar{B}]$  une définition analogue. on est alors en mesure d'appliquer le principe des travaux virtuels à

toute la structure. Le travail virtuel extérieur associé à un déplacement virtuel quelconque de tous les noeuds  $\delta\{U_{(x,y)}\}$  devient :

$$\delta\{U_{(x,y)}\}^t \{F\}$$

Cependant le travail virtuel intérieur a pour expression :

$$\int_v \delta\{\xi(x,y)\}^t \{\sigma(x,y)\} dv - \int_v \delta\{U_{(x,y)}\}^t \{Q\} dv.$$

L'intégration étant cette fois effectuée sur tout le domaine : En effectuant la substitution de  $\delta\{U_{(x,y)}\}$  par  $[\bar{N}]_{(x,y)} \delta\{U\}^0$  et de  $\delta\{\xi_{(x,y)}\}$  par  $[B]\delta\{U\}^0$ . Et en tenant compte de la relation contraintes-déformations  $\{\epsilon\} = [D]\{\xi\}$ , nous obtenons immédiatement en égalant les travaux virtuels intérieur et extérieur :

$$[K]\{U\}^0 - \{F_q\} = \{F\}$$

Il vient pour l'expression de la matrice de raideur

$$[K] = \int_v [B]^t [D][B] dv$$

(L'intégrale étant réalisée sur tout le domaine).

\* Si l'on considère, cependant la relation entre  $[\bar{B}]$  et  $[B]$ , il est évident que  $[K] = \sum [K^0]$ , où les termes provenant de chaque élément ont été évalués individuellement, conformément aux méthodes du chapitre IX

On peut montrer qu'il en est de même pour les diverses composantes des forces qui interviennent.

#### X.9.b Étapes d'assemblage :

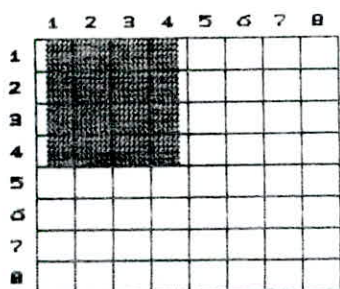
De ce qui précède, on peut dire que l'assemblage se fait en deux étapes: .

1- La construction de la matrice de rigidité et vecteur force étendus de chaque élément.

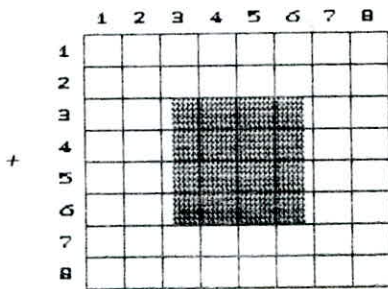
2- La sommation des matrices et vecteurs étendus.

Exemple d'assemblage :

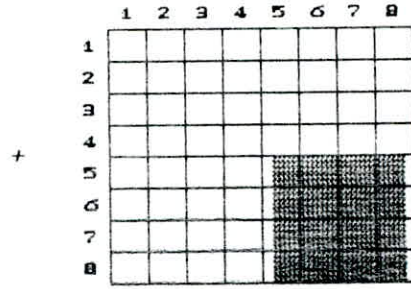
Soit la structure suivante composée de 3 éléments à 4 noeuds chacun. L'ordre de la matrice globale est donc: 16x16 .



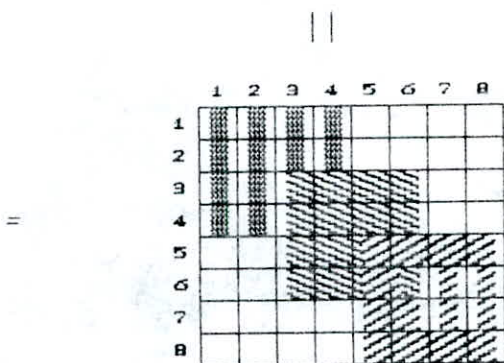
Elément 1



Elément 2



Elément 3



[K] : matrice globale assemblée

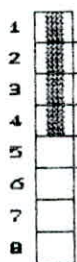
- : Chaque carré étant une matrice 2\*2.
- : Chaque carré étant une matrice 2\*2.  
**pleine**

[F1]

[F2]

[F3]

[F]



+



+



Elément 1

Elément 2

Elément 3

Vecteur force global assemblé

: Chaque carré étant un vecteur 2\*1

: Chaque carré étant un vecteur 2\*1  
**plein**

X.9.c : subroutine d'assemblage "ASSEMBLI" :-

L'assemblage des matrices de rigidité est réalisé par la subroutine "assebli" au fur et à mesure de leur constitution. La méthode d'assemblage adoptée est le stockage en matrice bande symétrique pour ses divers avantages entre autre:  
La diminution de l'ordre de les matrice de  $(NK \times NK)$  à  $(NK \times LB)$

LB : demi largeur de bande.

L'assemblage s'effectue comme suit :

\* Soient : IG , JG : les indices de la matrice locale étendue.  
et IL , JL : les indices de la matrice de rigidité locale  
Ainsi l'injection de la matrice locale AKL dans la matrice globale AK s'effectue comme suit:

$$AK(IG, JG) = AK(IG, JG) + AKL(IL, JL) \quad (*)$$

Les 2 aspects symétrie et bande de la matrice globale sont pris en compte par l'introduction de deux conditions supplémentaires qui sont :

$$\begin{cases} JG \leq LB - 1 + IG \\ JG \geq IG \end{cases}$$

Sachant aussi que la relation qui lie les indices IB, JB de la matrice globale modifiée (bande) aux indices IG, JG de les matrice ordinaire sont :

$$\begin{cases} I_B = I_a \\ J_B = J_a - I_a + 1 \end{cases}$$

La relation (\*) devient :

$$AK(IG, JG - IG + 1) = AK(IG, JG - IG + 1) + AKL(IL, JL)$$

X.10/ PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS AUX LIMITES

Dans les chapitres précédents, nous avons vu combien, il était important de s'assurer que la structure avait des

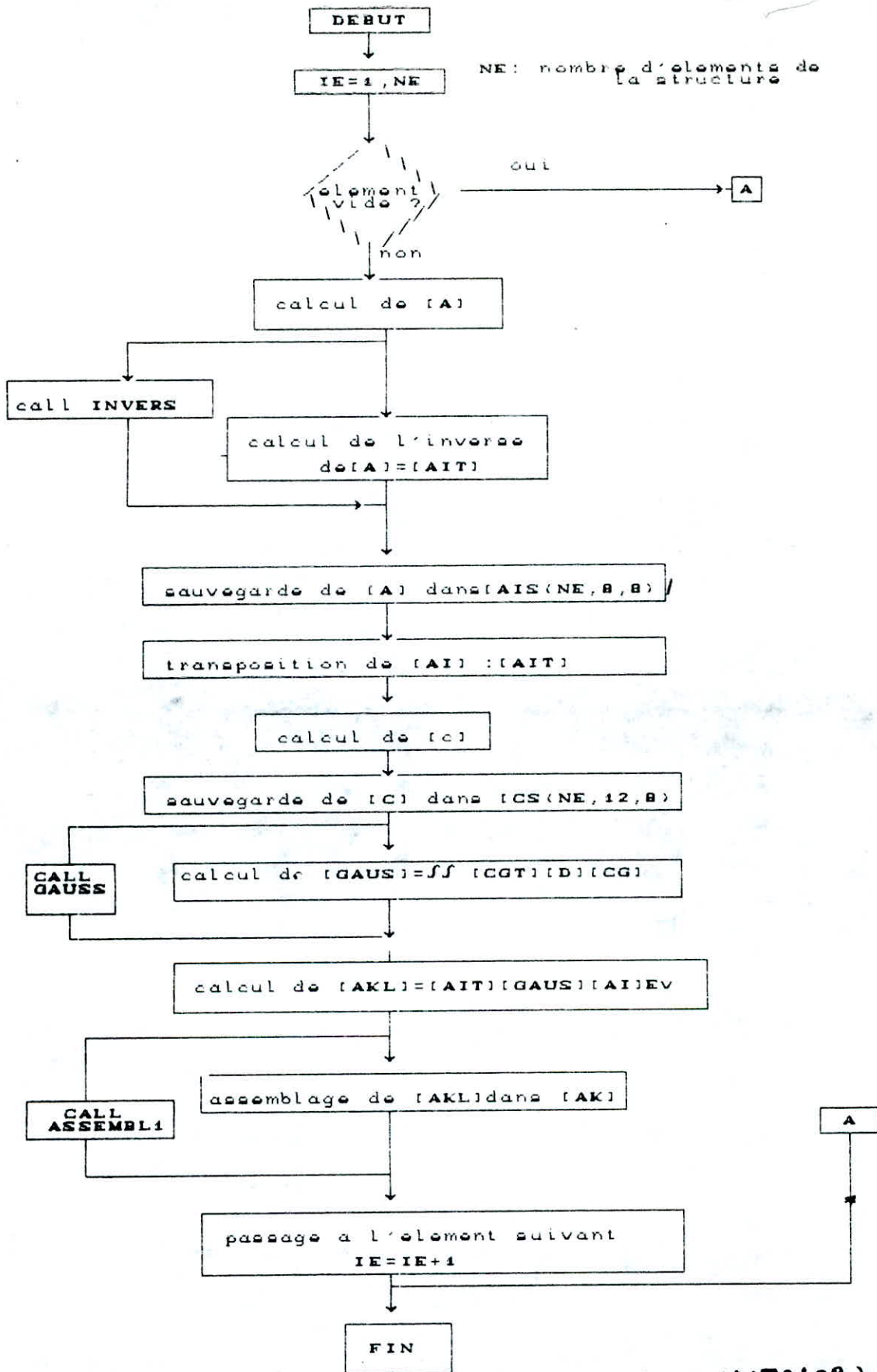


fig-2-

(Subroutine: MATGLOB)



appuis adéquats avant de mettre en oeuvre la résolution sous peine de rendre le problème insoluble.

La méthode adoptée pour la prise en compte des conditions aux limites est la technique du terme unité sur la diagonale, qui a été exposée dans la première partie.

La subroutine qui fait intervenir les conditions aux limites est la subroutine "Limitel".

L'éventualité d'un élément diagonal nul a été évitée par la transformation des éléments diagonaux nuls en unité  
 Cette éventualité est due à la discrétisation du vide qui peut conduire à un noeud commun à 4 éléments vides.

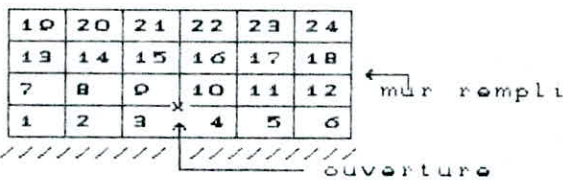
Exemple:

Pour illustrer ceci prenons l'exemple suivant :

Pour le noeud i commun à 4 éléments

vides (3,4,9,10) nous avons :

$$K(i,i) = 0$$



Ainsi la résolution du système linéaire  $[k] \{U\} = \{F\}$  devient impossible il est donc nécessaire de poser  $AK(i,i) = 1$

La résolution donnera :  $[K] \{U\} = \{F\} \implies U_i = 0$ .

#### X.11/ DETERMINATION DU VECTEUR FORCE NODAL

La subroutine "force" permet le calcul du vecteur force nodale déterminé ultérieurement.

Tous les éléments discretisés dans le voile sont supposés supporter leur propre poids qui peut être considéré comme un chargement volumique.

Les éléments situés sous planchers sont supposés reprendre les charges d'exploitation des planchers qu'ils supportent.

Ainsi le vecteur force nodale a l'expression suivante:

0
$a*b*\rho*E_v/4$
0
$a*b*\rho*E_v/4$
0
$q*a/2+a*b*\rho*E_v/4$
0
$q*a/2+a*b*\rho*E_v/4$
0
$q*a/2+a*b*\rho*E_v/4$

$E_v$  : épaisseur du voile  
 $(a,b)$  : dimensions de l'élément considéré

$q$ : chargement uniformément réparti sur la facette supérieure de l'élément considéré (charge permanente ou charge d'exploitation)  
 $\rho$  : masse volumique du matériau utilisé. (béton ou autre)

X.12 /- RESOLUTION DE SYSTEME  $[K] \{U\} = \{F\}$

Dans cette partie nous abordons l'étape ultime du programme en éléments finis et qui consiste à déterminer les déplacements nodaux  $\{U_i\}$ , par le biais d'une des méthodes de résolution des systèmes linéaires.

La méthode adoptée est la méthode "GAUSS bande", vu les propriétés symétrie et bande de la matrice de rigidité, cette méthode a été exposée dans le Chapitre IV.

Le sous programme de résolution est la subroutine "bande"

X.13/ CALCUL DES CONTRAINTS INTERNES:

Une fois les déplacements déterminés, il ne reste plus qu'à calculer les contraintes nodales moyennant la matrice  $[HN]$  déterminée lors de cette étape en faisant le produit des matrices stockées dans le bloc /SAUV/

Le procédé est schématisé dans l'organigramme de la figure 2..

X.14 / IMPRESSION DES RESULTATS

L'impression des résultats est réalisée par la subroutine "SORTIE1".

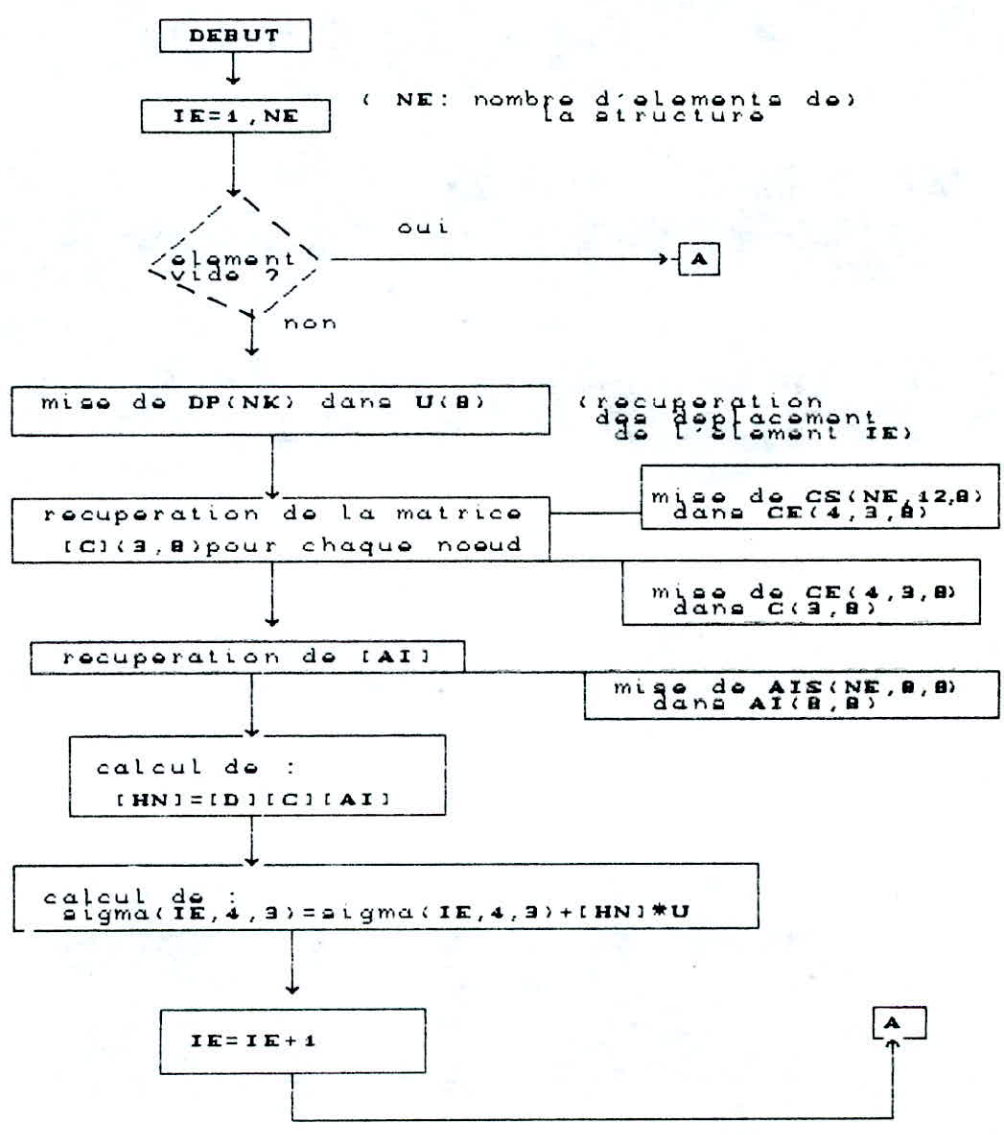


fig-3- (Subroutine SIGMA)

Elle comporte 2 étapes :

1 - Impression des déplacements nodaux pour chaque noeud  $U$  et  $V$

2 - Impression des contraintes moyennes en chaque noeud  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  (Le calcul des contraintes moyennes est fait dans cette subroutine)

#### X.15 / COMBINAISON DES CHARGES

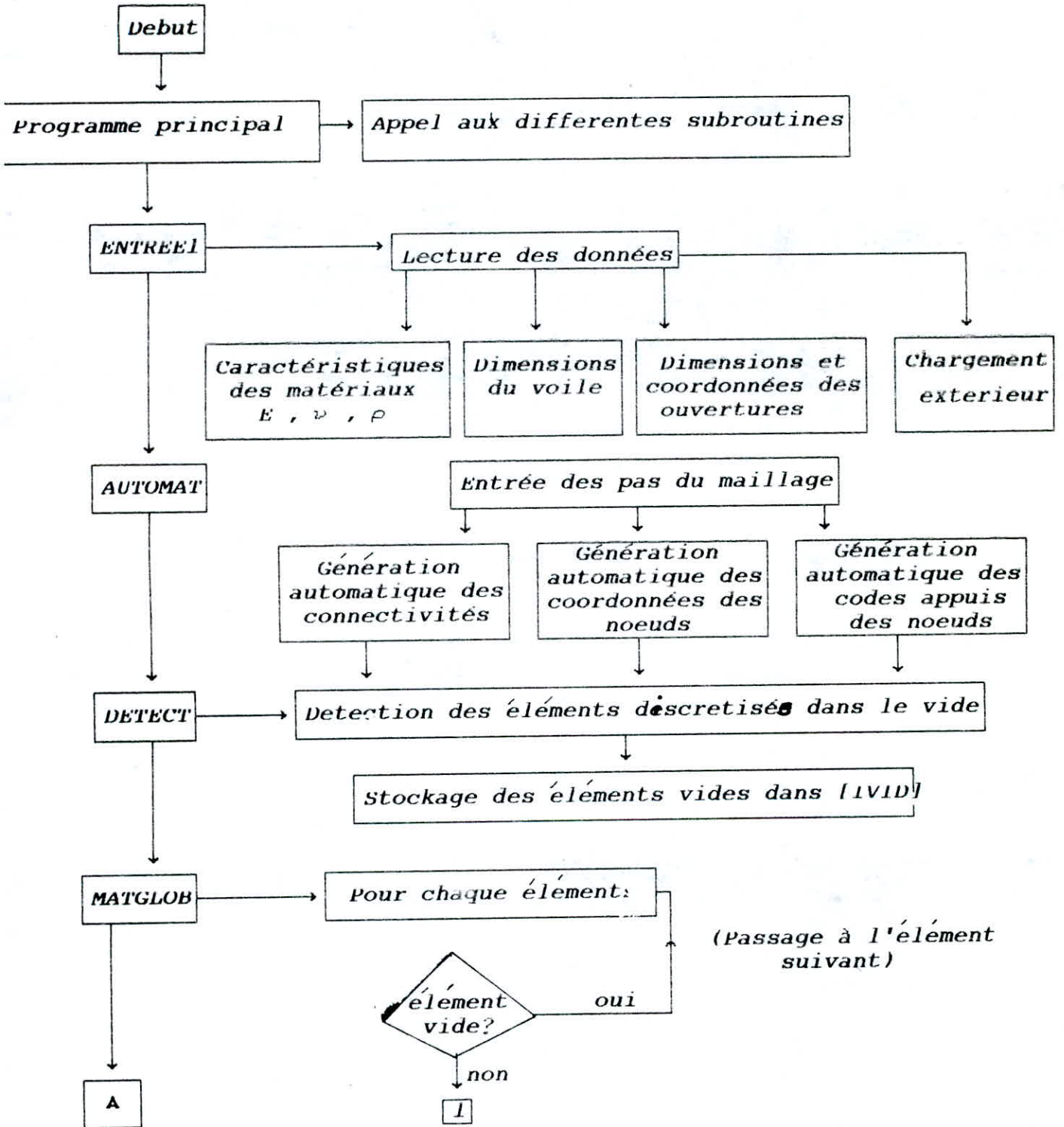
Selon les choix de l'utilisateur, une combinaison de charges peut être réalisée si l'utilisateur fixe les coefficients de pondération : coef1, coef2, coef3.

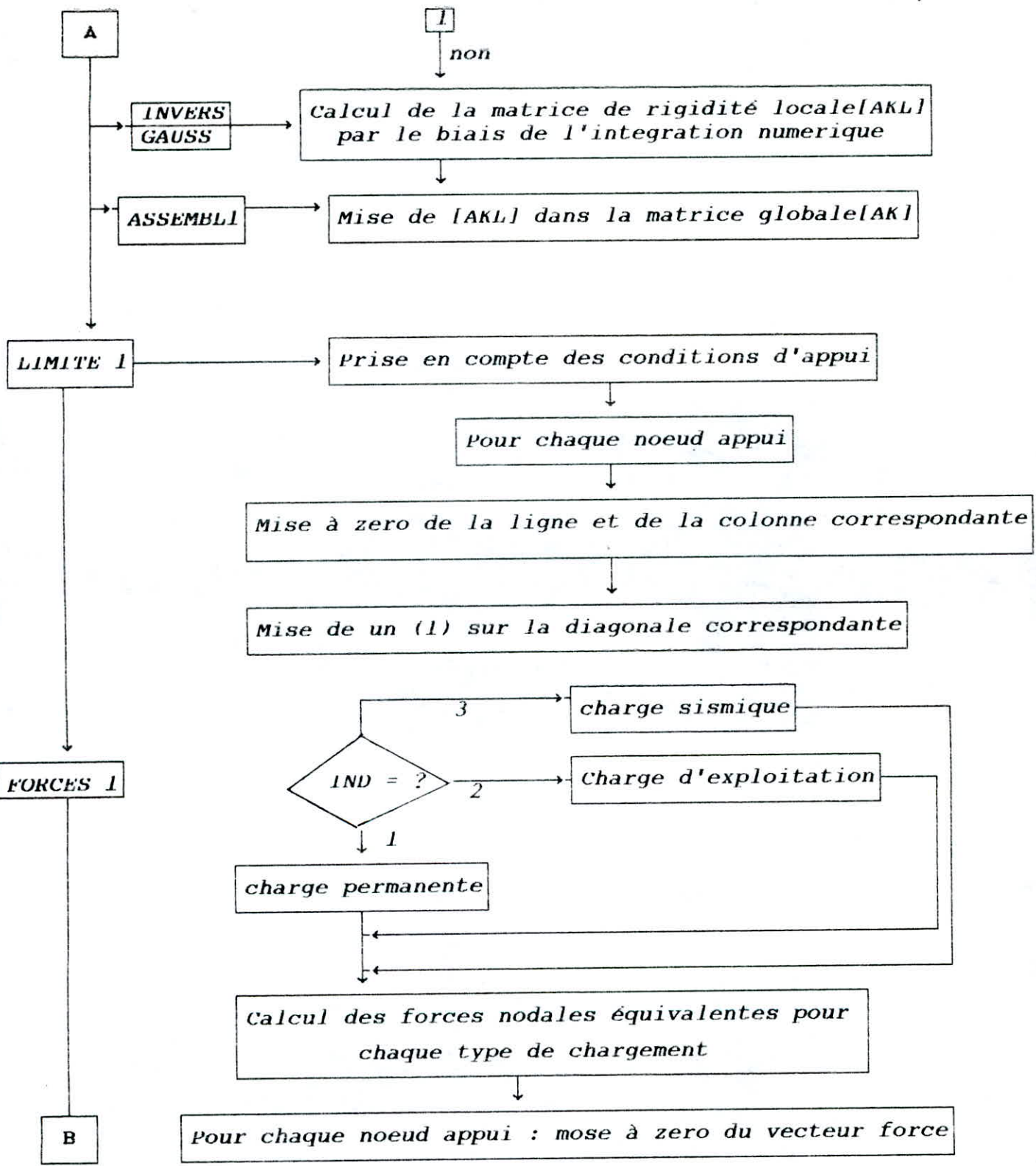
L'expression des contraintes combinées est :

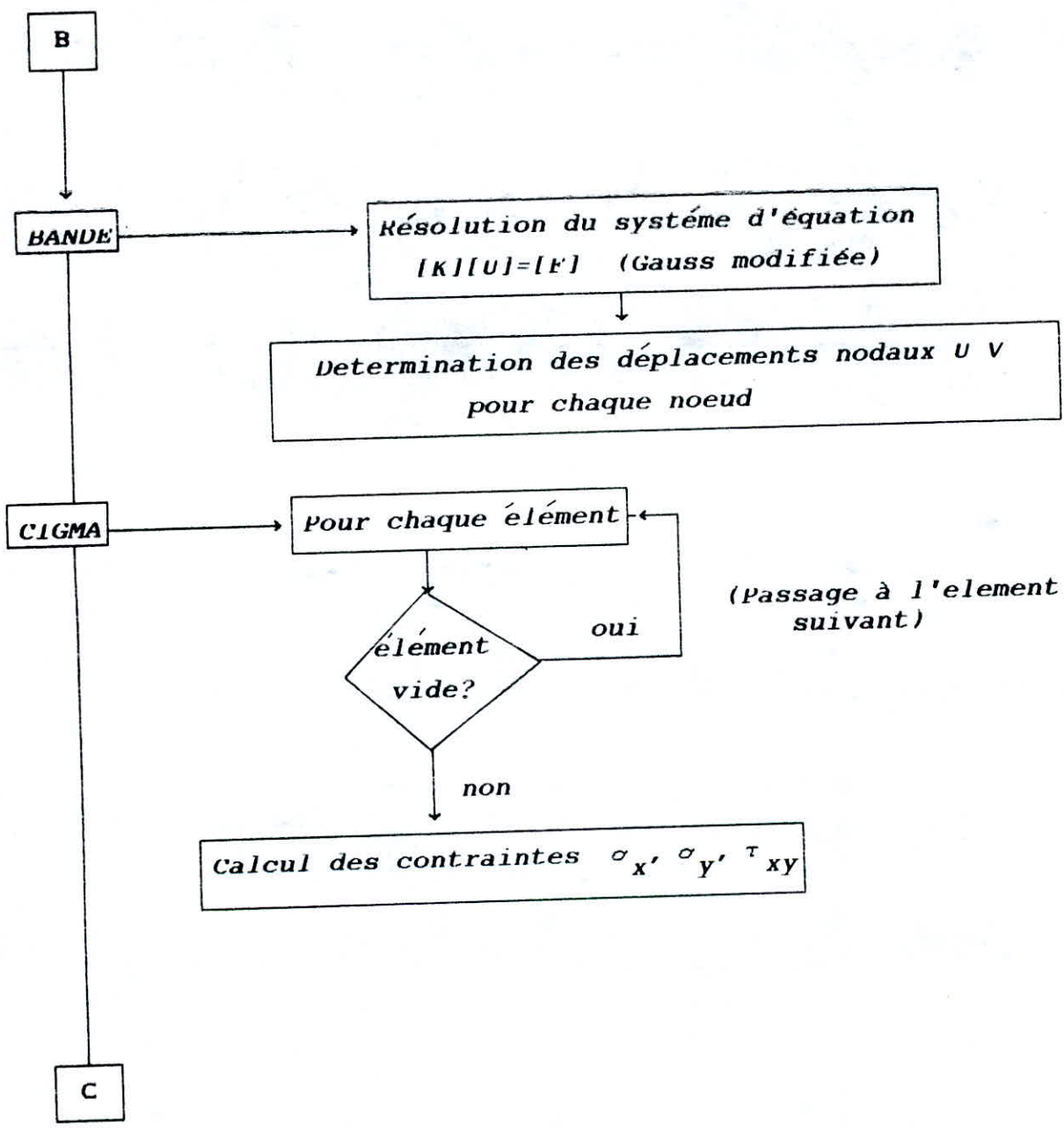
$$\text{Contrainte combinée} = \text{coef1} * \text{Contrainte due à G} + \text{coef2} * \text{Contrainte due à Q} + \text{coef3} * \text{Contrainte due à E}$$

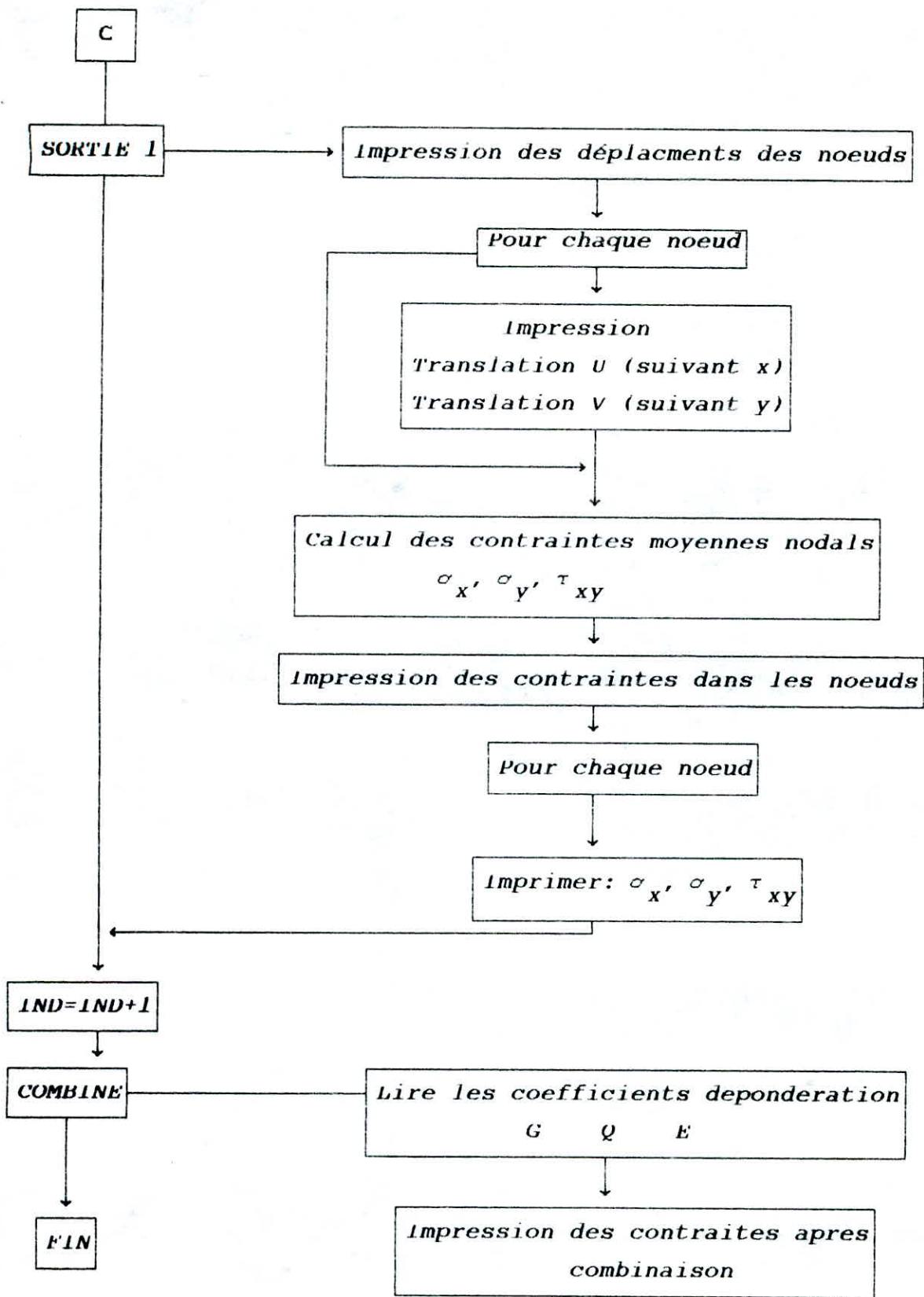
$G$  : charges permanents ,  $Q$  : charges d'exploitation ,  $E$  : charges sismiques .Les charges combinées obtenues à la fin de cette subroutine sont une combinaison des contraintes calculées pour chaque type de charge.

Organigramme de modelisation de voile par element finis











X.17/ EXEMPLE D'APPLICATION

L'exemple traité dans cette section est une poutre chargée uniformément reposant sur deux appuis simples à ces extrémités.

Données du problème:

$$q=0.8 \text{ t/in} \quad l=15\text{in} \quad E=13400 \text{ t/in}^{**2} \quad t=\text{lin}$$

$$\nu = 0.3$$

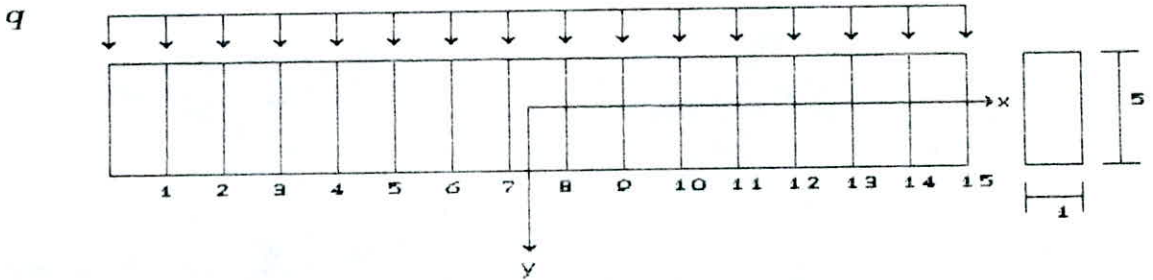


TABLEAU DES RESULTATS: DEPLACEMENTS VERTICAUX (V)

x	48 noeuds	80 noeuds	Elasticité	Fléxion
1	-0.9608E-3	-0.9905E-3	-1.0373E-3	-0.7990E-2
2	-0.1870E-2	-0.1924E-2	-0.1937E-2	-0.1558E-2
3	-0.2680E-2	-0.2755E-2	-0.3146E-2	-0.2244E-2
4	-0.3360E-2	-0.3454E-2	-0.3706E-2	-0.2826E-2
5	-0.3889E-2	-0.3997E-2	-0.4173E-2	-0.3284E-2
6	-0.4252E-2	-0.4369E-2	-0.4516E-2	-0.3597E-2
7	-0.4435E-2	-0.4557E-2	-0.4710E-2	-0.3757E-2

La solution "exacte" pour ce problème a été obtenue par la théorie de l'élasticité pour cela on se propose une fonction d'AIRY  $\phi(x,y)$  vérifiant l'équation biharmonique  $\nabla^4 \phi = 0$  et satisfaisant les conditions aux limites (unicité de la solution).

Nous avons réalisé deux modélisations en éléments finis présentant

respectivement 48 et 80 noeuds.

La condition d'appui simple a été obtenue en annulant les déplacements verticaux de tous les noeuds des extrémités de la poutre.

La flèche de la poutre a été représentée au niveau de la ligne moyenne.

Les graphes des contraintes sont représentés dans les pages 116-117-118

#### CONSTATATIONS ET COMMENTAIRE

Après avoir étudié l'exemple classique de la poutre fléchie nous constatons que le programme éléments finis établit donne des résultats satisfaisants en comparaison avec les valeurs théoriques surtout en ce qui concerne les contraintes normales  $\sigma_x$  et les déplacements.

Cependant, nous remarquons l'éloignement des contraintes  $\tau_{xy}$  de celles données par l'élasticité au niveau des régions d'extrémités. Cela étant dû à la valeur maximale de l'effort tranchant au niveau de la section d'appui, cette région étant très proche du point d'application du système de forces d'où une distribution de contraintes ou de déformations non uniforme.

Nous constatons aussi la discontinuité des contraintes aux noeuds, pour remédier à cette discontinuité nous prenons la moyenne des contraintes aux noeuds.

#### CONCLUSION:

D'après l'exemple précédant nous pouvons conclure que la méthode des éléments finis converge lorsque le nombre de degrés liberté de la structure augmente (maillage fin).

*La méthode des éléments finis présente aussi des difficultés dans les zones où règne un gradient de contrainte ou de déformation (les points d'applications du système de forces).*

*Pour remédier légèrement à ce problème, on doit affiner le maillage près de ces zones. Concernant la discontinuité des contraintes elle est due au choix de la fonction de déplacement car celle choisie est continue par contre ses dérivés premières (déformations) ne le sont pas sur les frontières de l'élément, il en découle que le champ de contraintes n'est pas uniforme.*

VARIATIONS DE LA CONTRAINTE SIGMA X  
SUR LES HAUTEURS DE LA POUTRE

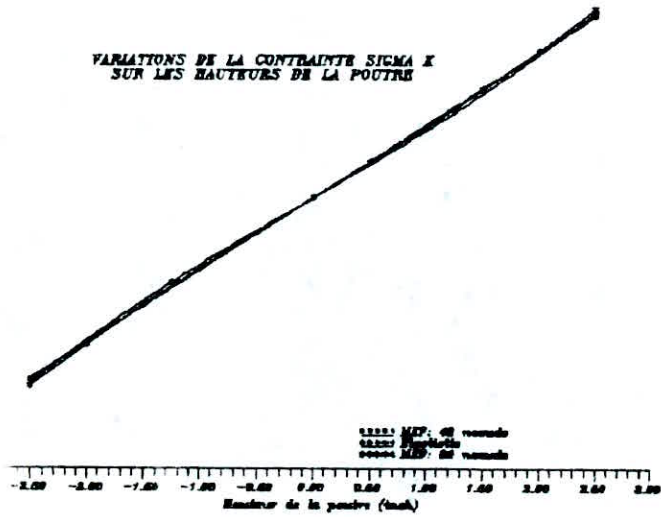


fig n:2

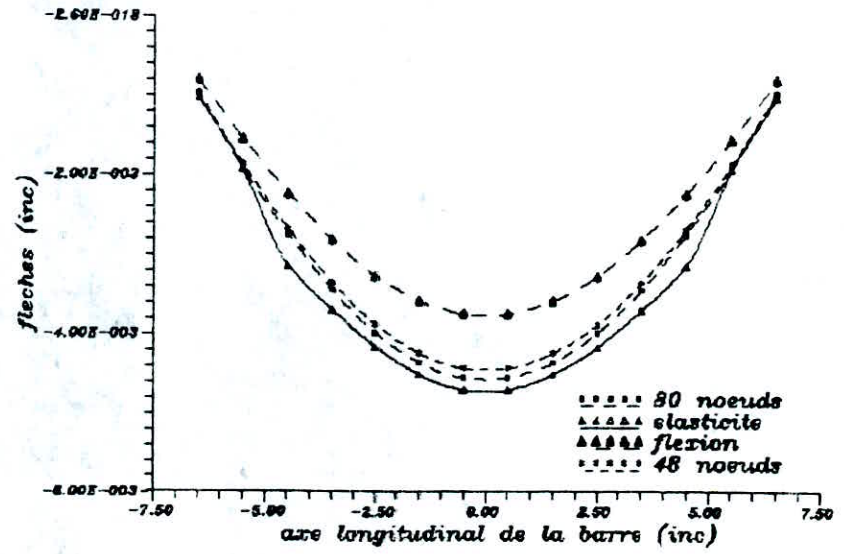


fig n:1

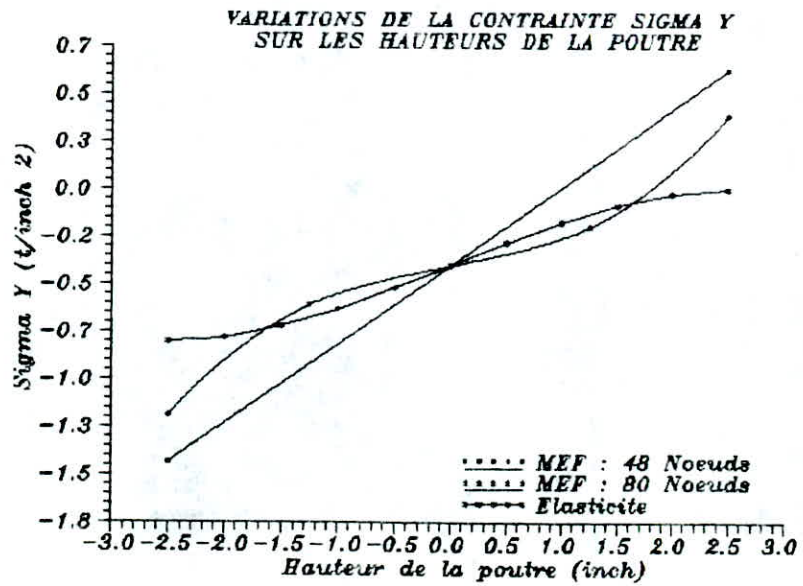


fig n:3

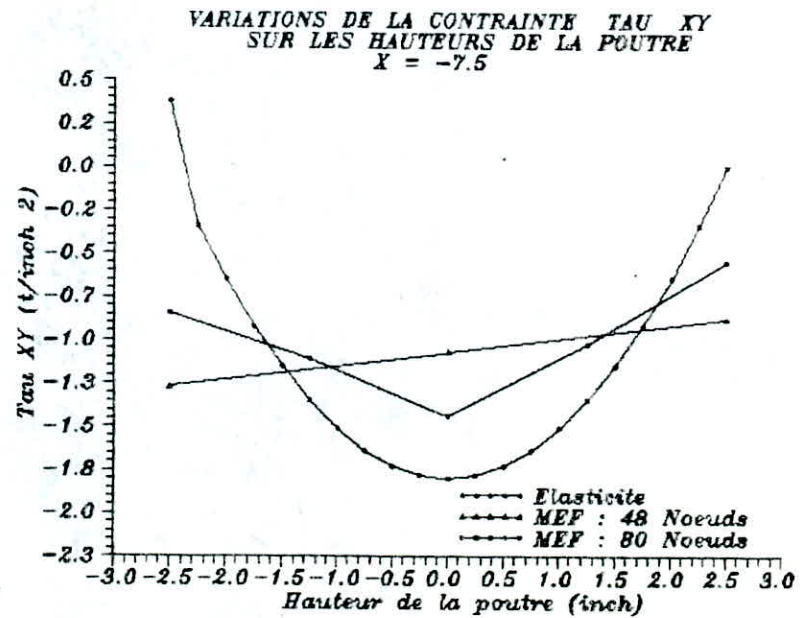


fig n:4

VARIATIONS DE LA CONTRAINTE TAU XY  
SUR LES HAUTEURS DE LA POUTRE  
X = -3.5

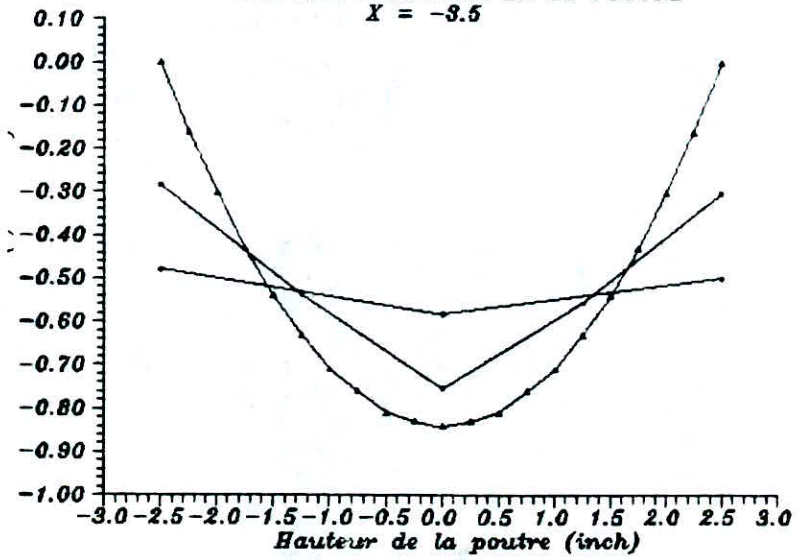


fig n:5

CHAPITRE XI COMPARAISON DES METHODES DE MODELISATION  
DES VOILES PAR LA M.P.E ET LA M E F

XI 1- INTRODUCTION :

Les chapitres précédents étaient destinés à présenter deux méthodes de modélisation de voiles, le but recherché étant de juger de leur efficacité .

Le présent chapitre est consacré à cet effet ,l'étude a été faite sur un voile particulier ,elle est illustré de graphes et suivie d'interprétation .

XI 2- APPLICATION:

La comparaison entre les deux méthodes de modélisation a été effectué sur un voile soumis à des types de chargements différents .

Le voile à pour hauteur  $h = 9.6$  m et pour largeur  $L_v = 13.6$  m son épaisseur est  $E_v = 0.3$  m.

Le nombre d'étage est  $NE = 3.0$  m .

Le voile présente deux ouvertures dans le sens de la largeur et trois ouvertures en élévation .

les caractéristiques des ouvertures sont illustrées dans la figure --

Le module de YOUNG :  $E = 3.78$  t/m<sup>2</sup>

Le coefficient de POISSON :  $\nu = 0.30$

La densité volumique :  $\rho = 2.5$  t/m<sup>2</sup>

Le voile est soumis à trois types de chargements :

Charges permanentes :  $g = 1.5$  t/ml

Charges d'exploitation :  $q = 2$  t/ml

Les charges sismiques ont pour valeur :

$$FV = 1.714 \text{ t ( 1<sup>er</sup> niveau )}$$

$$FV = 3.428 \text{ t ( 2<sup>ème</sup> niveau )}$$

$$FV = 5.142 \text{ t ( 3<sup>ème</sup> niveau )}$$

La modélisation du voile en portique a fournit les résultats illustres dans la colonne 1 des tableaux 1,2,3  
Les trois autres colonnes représentent les déplacements résultant de la modélisation du voile par éléments finis sous trois discrétisations .

.La première discrétisation comporte :

-nombre de noeuds :  $NN = 190$  noeuds

-nombre d'éléments :  $NE = 162$  éléments

-Le nombre d'éléments entre le bord du voile et la première ouverture :  $1P1 = 2$

-Le nombre d'éléments dans un linteau :  $1P2 = 5$

-Le nombre d'éléments entre deux ouvertures :  $1P3 = 4$

-Le nombre d'éléments sur une hauteur d'une ouverture dans le sens de X :  $JP1 = 2$

-Le nombre d'éléments entre deux ouvertures dans le sens de Y :  $JP2 = 2$

-la deuxième discrétisations comporte :

$NN = 775$  noeuds

$NE = 720$  éléments

$1P1 = 6$

$1P2 = 5$

$1P3 = 8$

$JP1 = 6$

$JP2 = 2$



Resultats des exemples

**TABLEAU 1:**

**SOUS CHARGES PERMANENTES:**

Noeuds	portique E-4 (m)	1 <sup>ère</sup> discrétiséat E-4 (m)	2 <sup>ème</sup> discrétiséat E-4 (m)	3 <sup>ème</sup> discrétiséat E-4 (m)
4	-0.3001	-0.3953	-0.3781	-0.3749
7	-0.5204	-0.7118	-0.6729	-0.6677
10	-0.6123	-0.8499	-0.8047	-0.7983
5	-0.3715	-0.3839	-0.3686	-0.3653
8	-0.6460	-0.7104	-0.6708	-0.6648
11	-0.7676	-0.8462	-0.7985	-0.7916
6	-0.3001	-0.3953	-0.3781	-0.3749
9	-0.5204	-0.7118	-0.6729	-0.6677
12	-0.6123	-0.8499	-0.8047	-0.7983

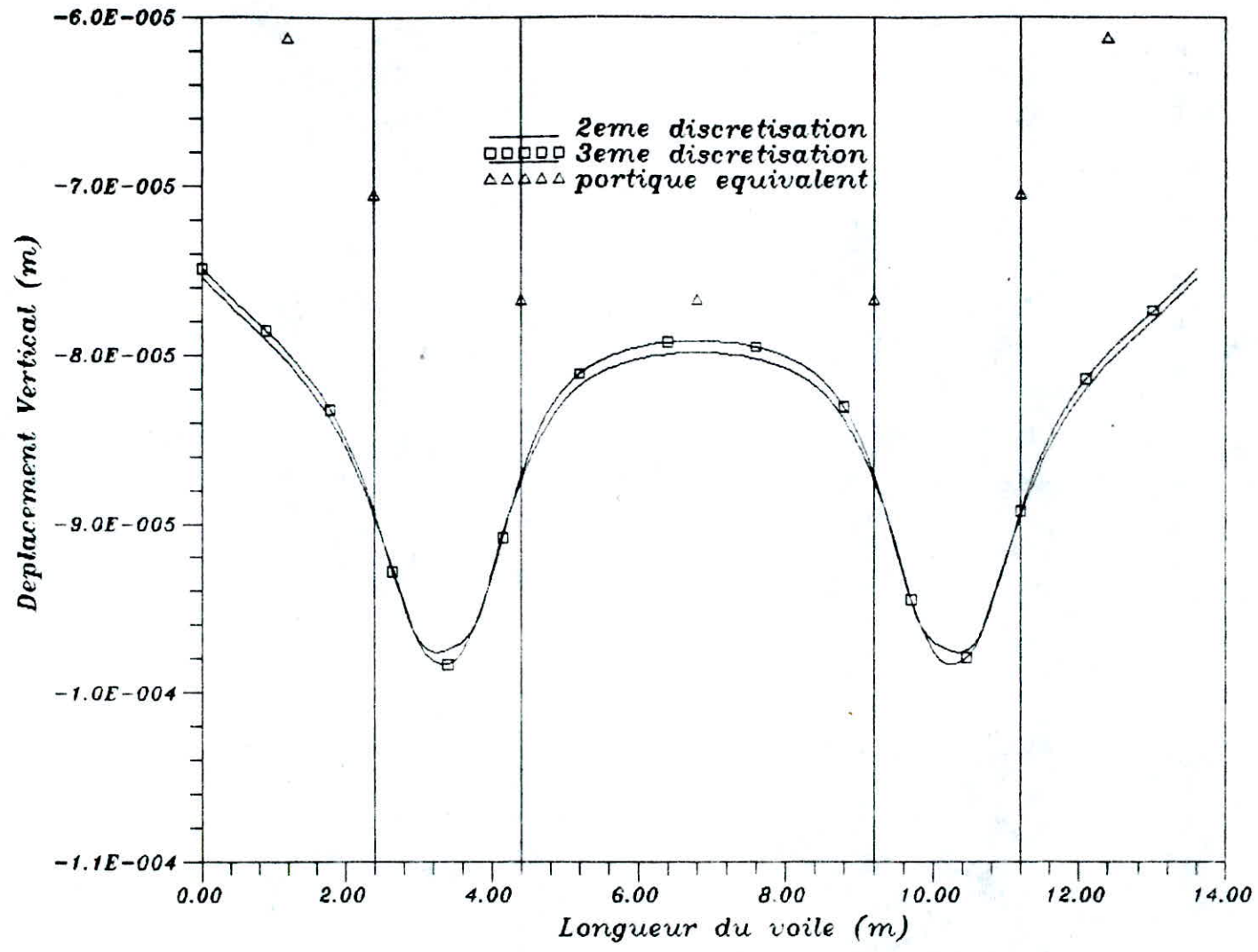
TABLEAU 2:

SOUS CHARGES D'EXPLOITATION

noeuds	portique E-4 (m)	1 <sup>ère</sup> discrétisation E-4 (m)	2 <sup>ème</sup> discrétisation E-4 (m)	3 <sup>ème</sup> discrétisation E-4 (m)
4	-0.1040	-0.1464	-0.1498	-0.1502
7	-0.1835	-0.2695	-0.2723	-0.2731
10	-0.2224	-0.3299	-0.3331	-0.3341
5	-0.1552	-0.1485	-0.1456	-0.1420
8	-0.2733	-0.2731	-0.2711	-0.2683
11	-0.3333	-0.3342	-0.3293	-0.3270
6	-0.1040	-0.1464	-0.1498	-0.1502
9	-0.1835	-0.2695	-0.2723	-0.2731
12	-0.2224	-0.3299	-0.3331	-0.3341

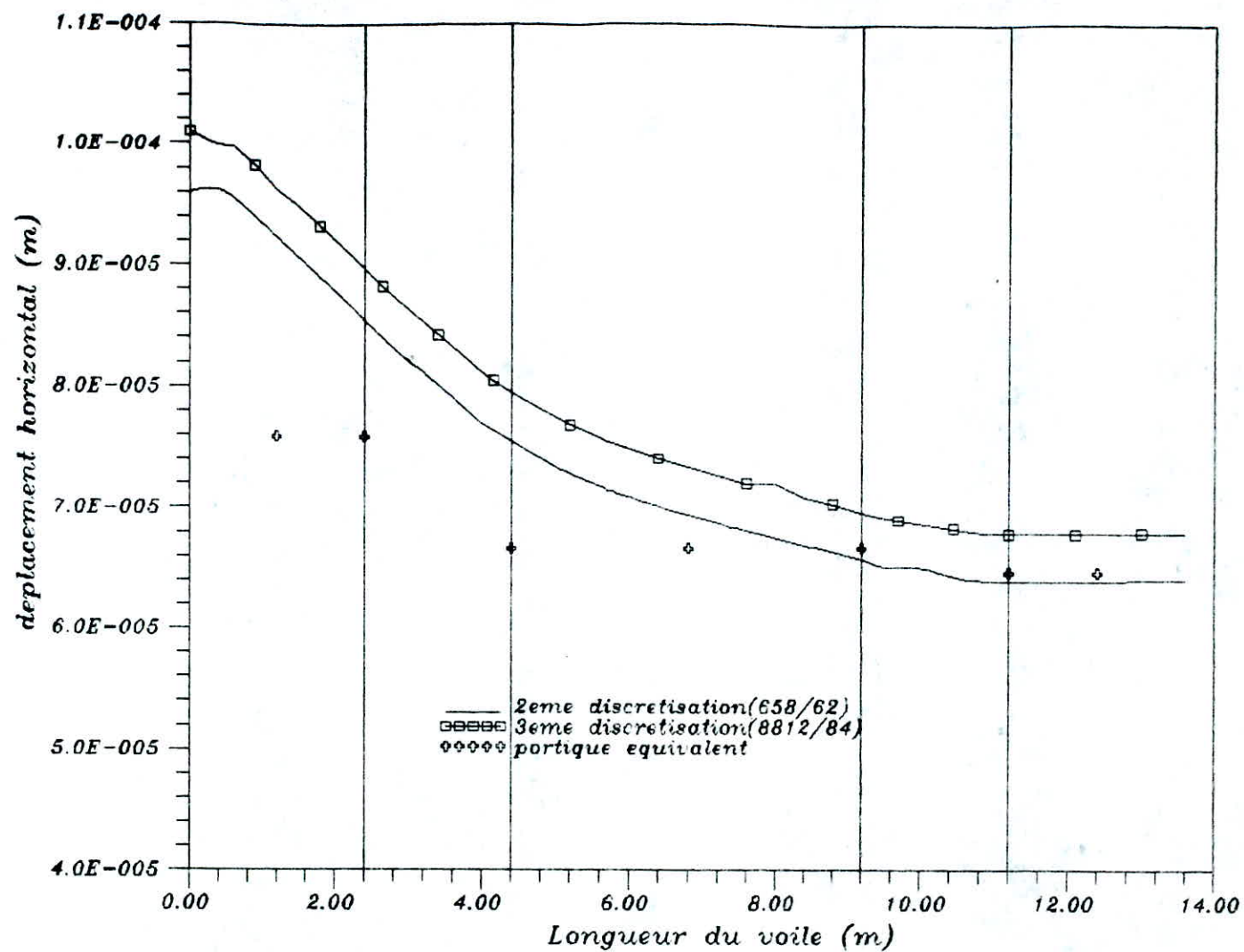
**TABLEAU 3:**  
**SOUS CHARGES SISMIQUES:**

noeuds	portique E-4 (m)	1 <sup>ère</sup> discrétisat E-4 (m)	2 <sup>ème</sup> discrétisat E-4 (m)	3 <sup>ème</sup> discrétisat E-4 (m)
4	0.1914	0.1569	0.1942	0.2009
7	0.4986	0.4563	0.5405	0.5641
10	0.7579	0.7921	0.9225	0.9652
5	0.1681	0.1296	0.1558	0.1617
8	0.4349	0.3639	0.4292	0.4506
11	0.6657	0.5873	0.6930	0.7328
6	0.1592	0.1231	0.1512	0.1573
9	0.4242	0.3451	0.4098	0.4314
12	0.6459	0.5410	0.6388	0.6780



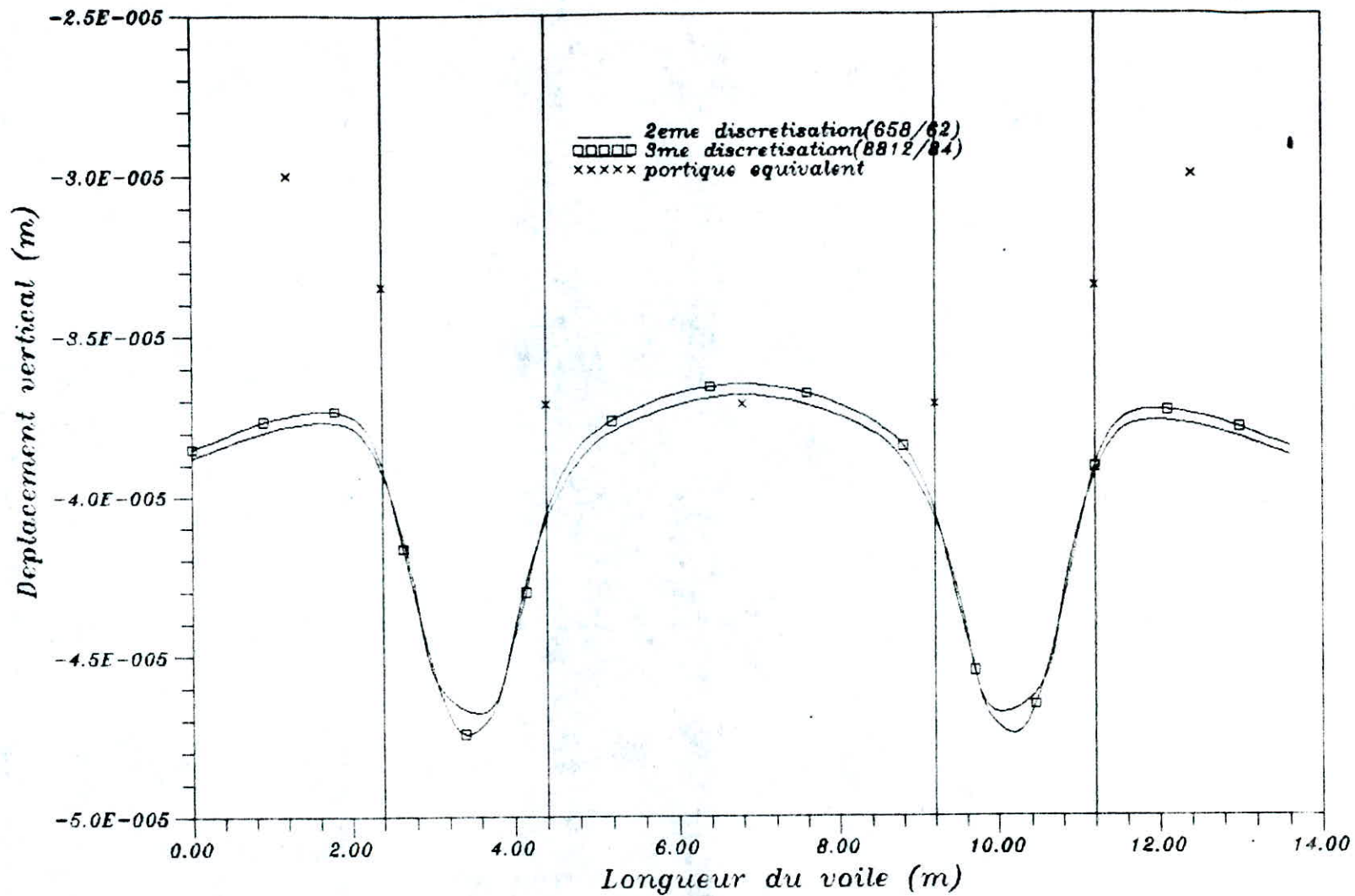
LINTEAU3 SOUS CHARGES PERMANENTES

fig n:1



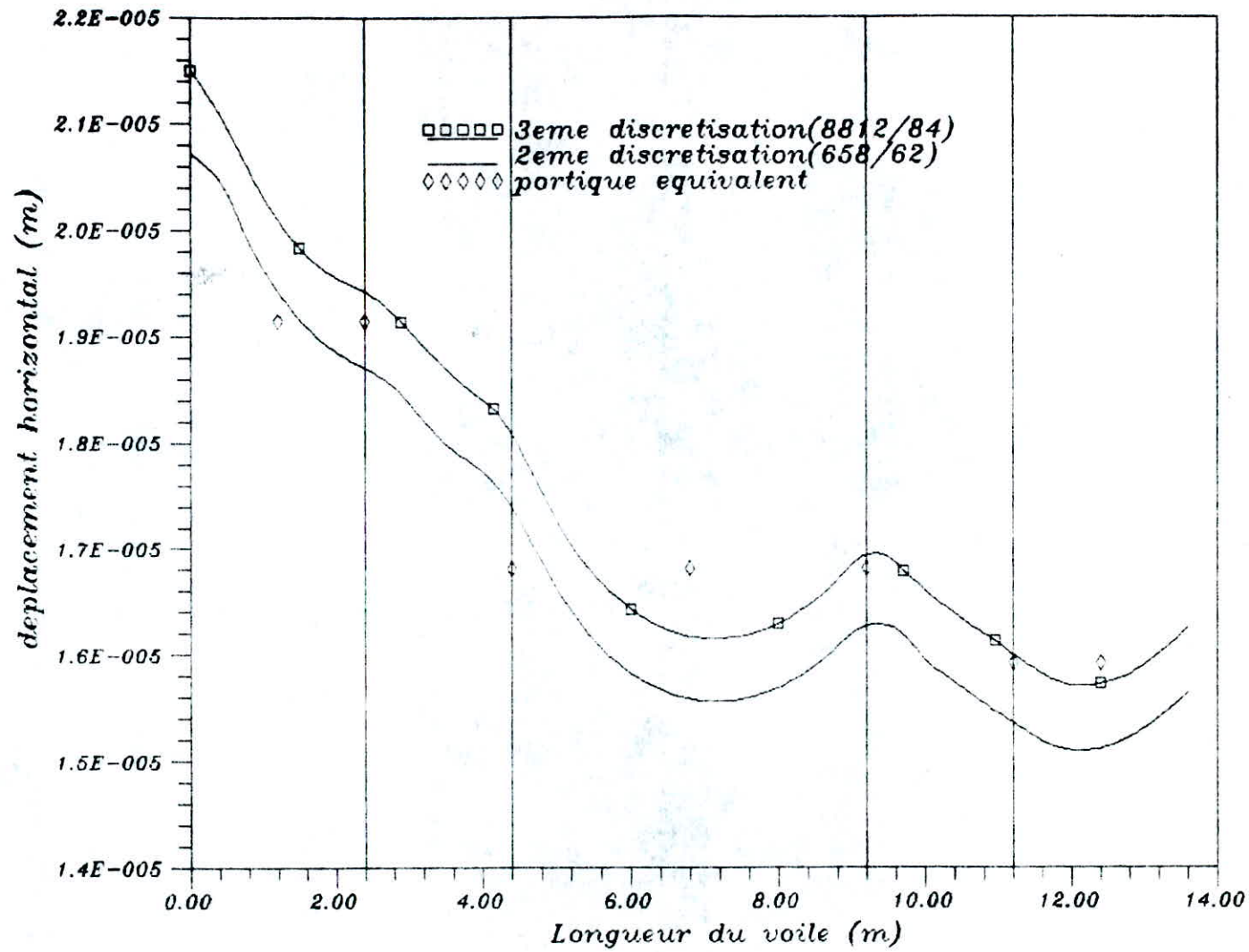
LINTEAU3 SOUS CHARGES SISMIQUES (fibre moyenne)

fig n:2



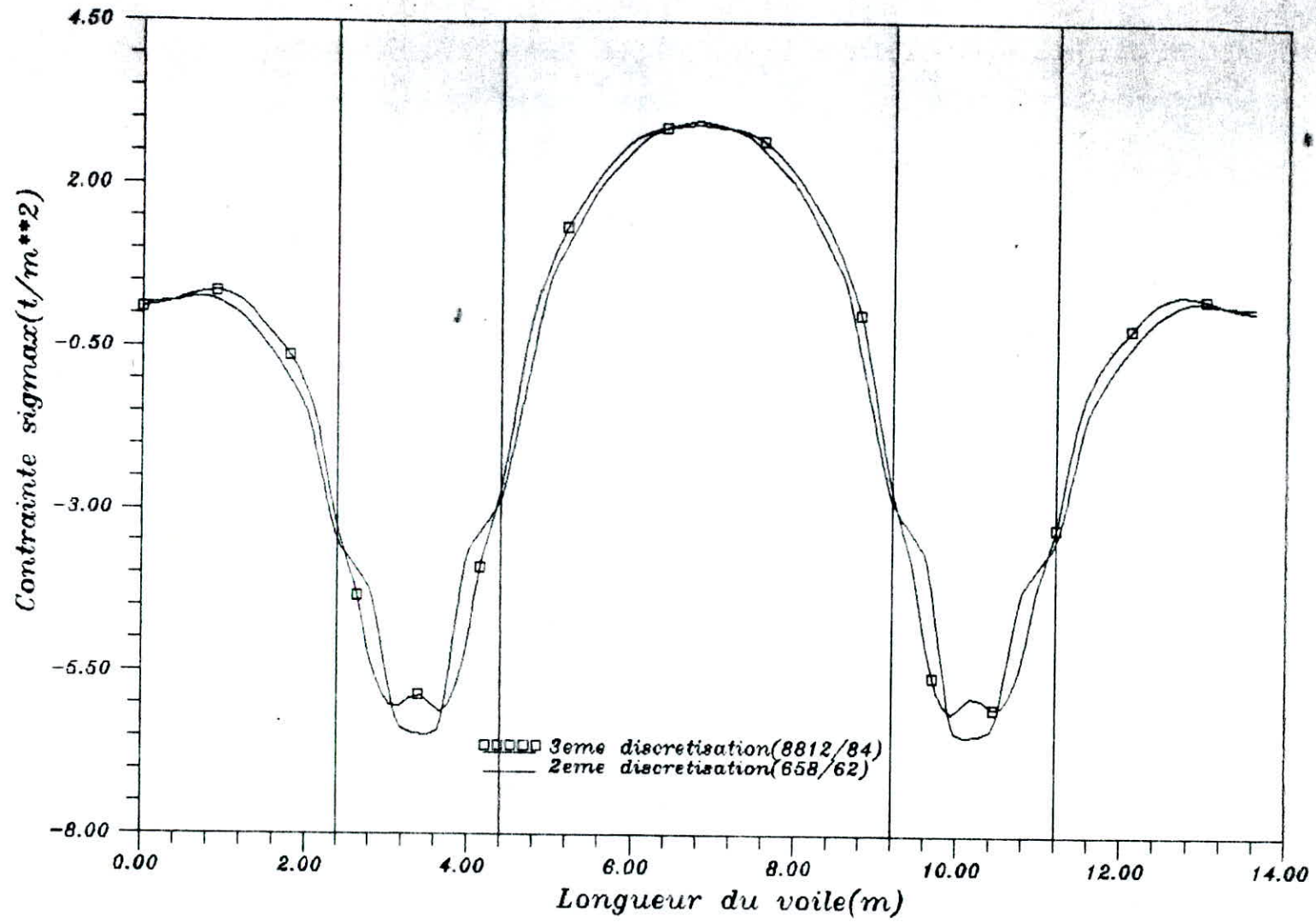
LINTEAU1 SOUS CHARGES PERMANENTES (fibre moyenne)

fig n:3



LINTEAU1 SOUS CHARGES SISMIQUES

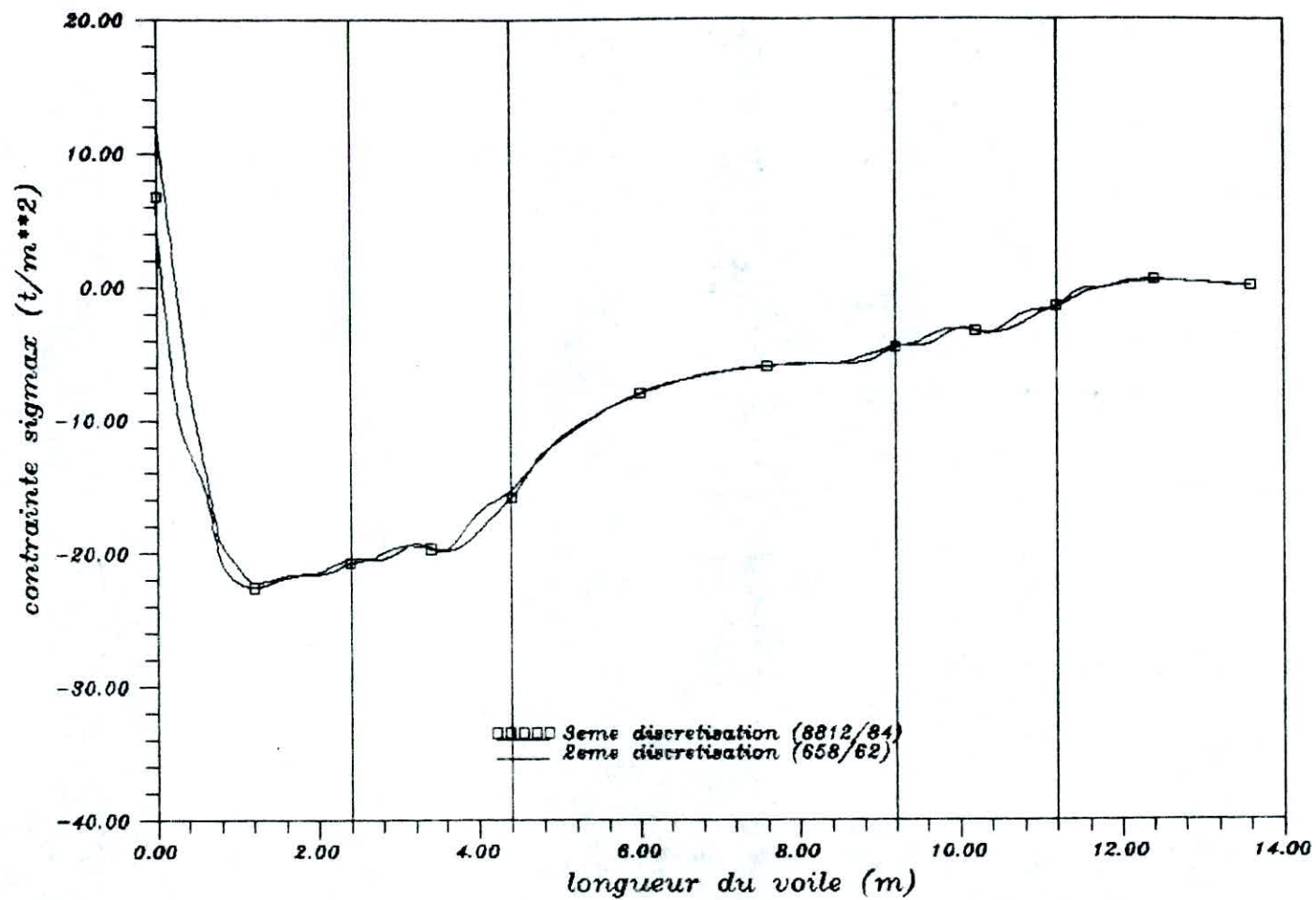
fig n:4



LINTEAUX SOUS CHARGES PERMANENTES (fibre moyenne) .

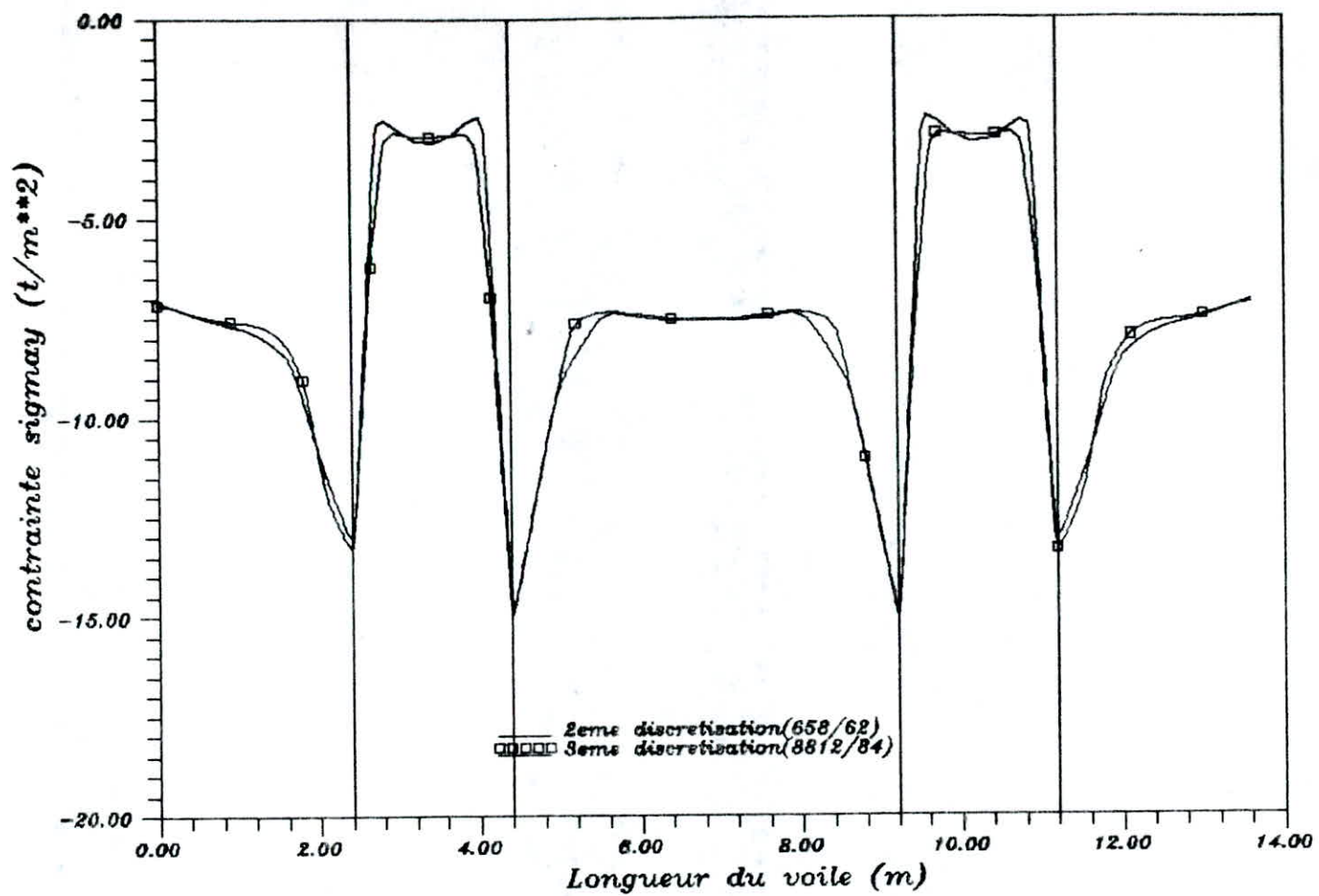
fig n:5





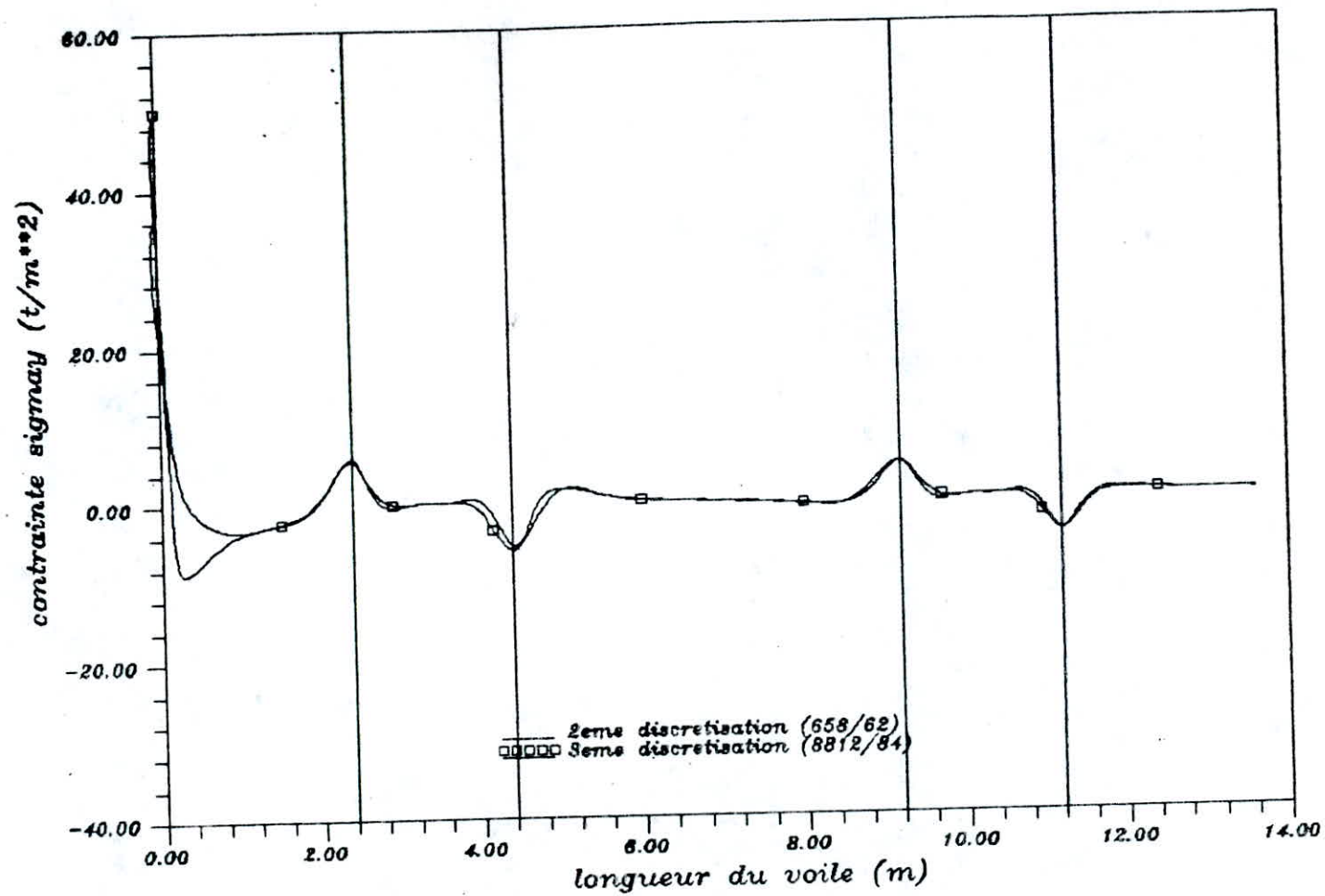
LINTEAU3 SOUS CHARGES SISMIQUES (fibre moyenne)

fig n:6



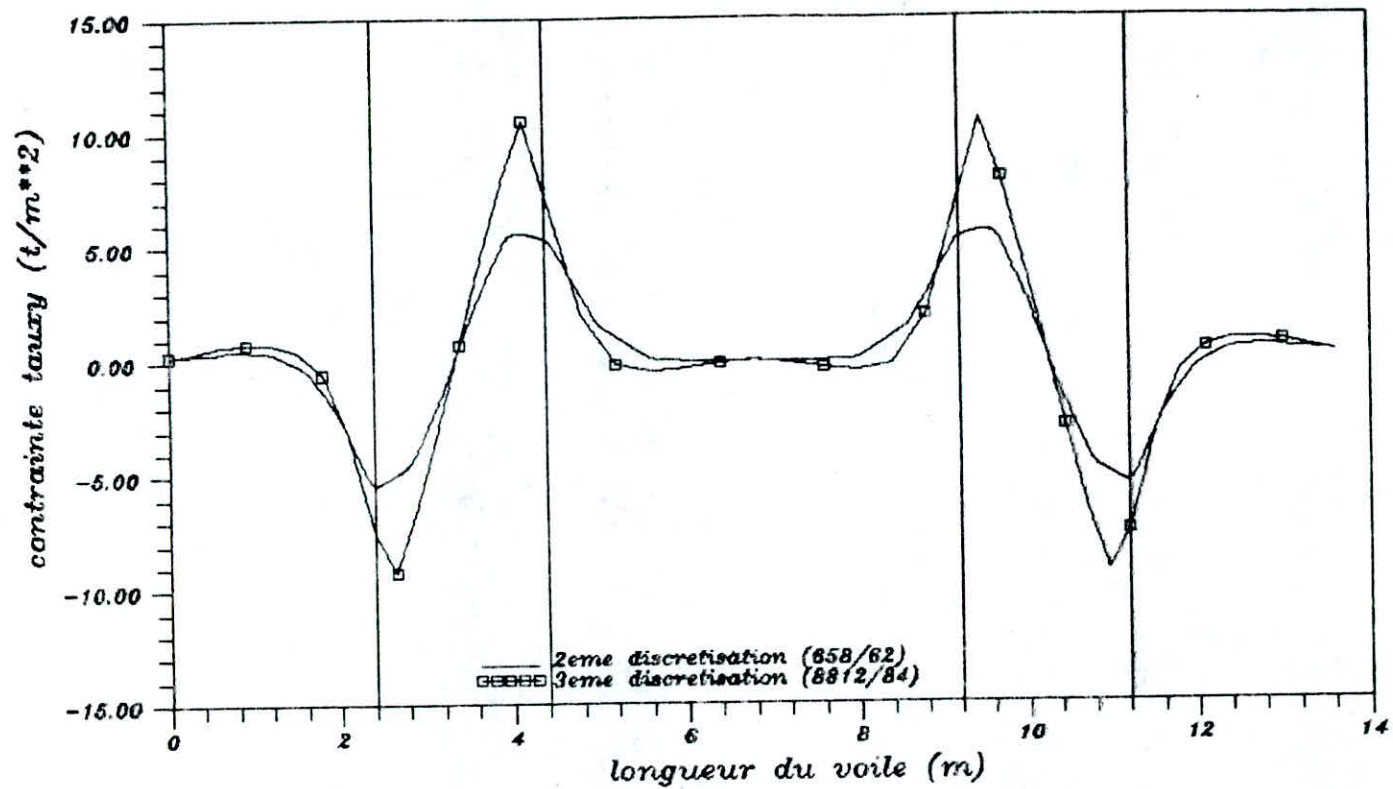
LINTEAUS SOUS CHARGES PERMANENTES (fibre moyenne)

fig n:7



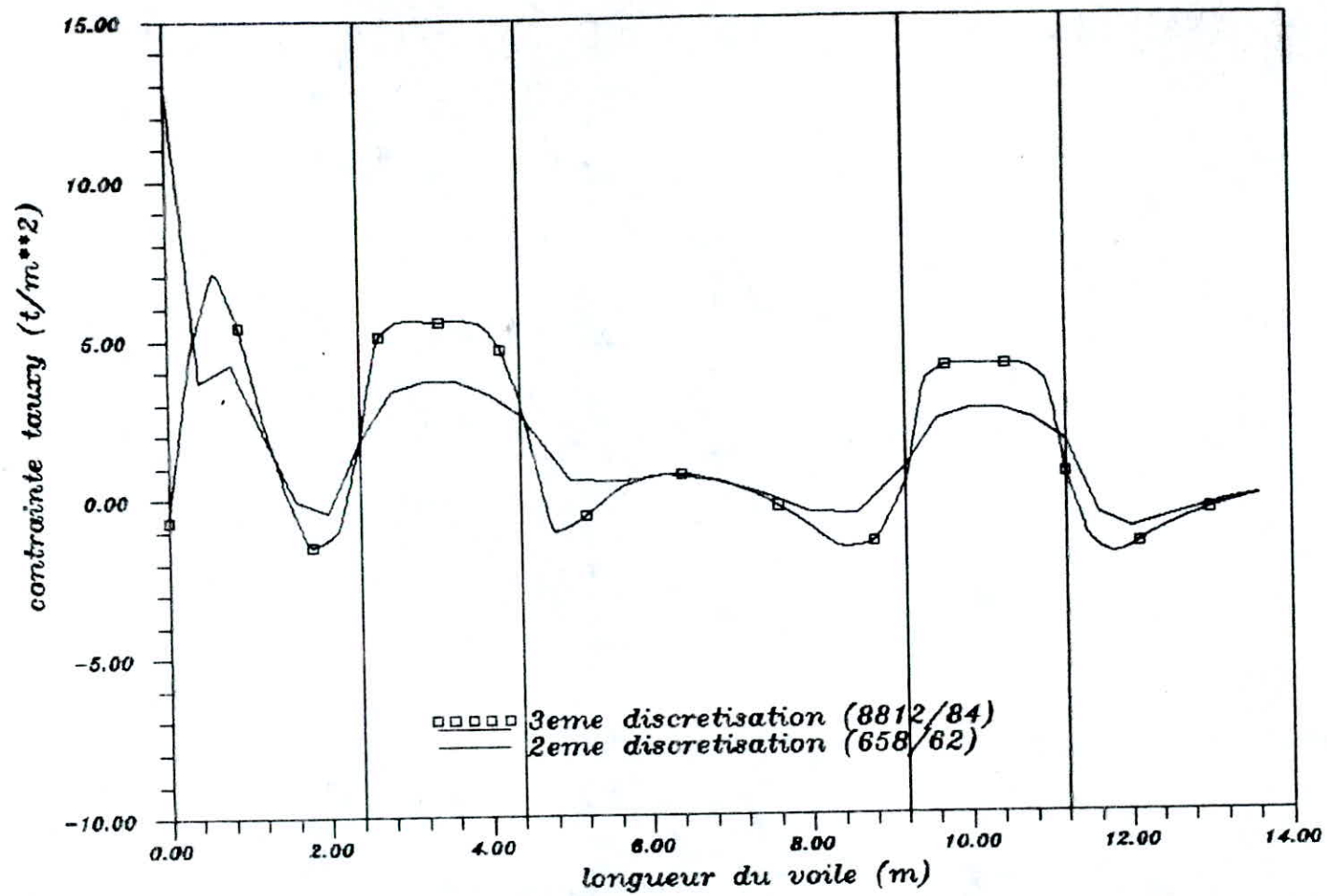
LINTEAU3 SOUS CHARGES SISMIQUES (fibre moyenne)

fig n:8



LINTEAU3 SOUS CHARGES PERMANENTES (fibre moyenne)

fig n:9



LINTEAUS SOUS CHARGES SISMIQUES (fibre moyenne)

fig n:10

Vu l'insuffisance de l'espace mémoire du microvax pour effectuer un nombre de discrétisations suffisant afin de confirmer la convergence de la méthode des éléments finis, nous avons jugé bon de modéliser un second voile de hauteur plus réduite que celle du premier .

les caractéristiques du second voile sont les suivantes:

hauteur : 6.4 m

largeur : 13.6 m

épaisseur : 0.3 m

ce voile présente deux ouvertures dans le sens de la largeur et deux ouvertures dans le sens de la hauteur

Il est soumis a deux types de chargement :

charge permanente :  $g = 1.5 \text{ t/ml}$  pour chaque niveau

charges sismiques:

$FV = 3.428 \text{ t}$  ( 1<sup>er</sup> niveau )

$FV = 6.142 \text{ t}$  ( 2<sup>ème</sup> niveau )

Les trois discrétisations en éléments finis se résument en:

1ère discrétisation :

NN = 527 noeuds

NE = 480 éléments

1P1 = 6

1P2 = 5

1P3 = 8

JP1 = 6

JP2 = 2

2ème discrétisation :

NN = 1537 noeuds

NE = 1452 éléments

1P1 = 10

1P2 = 10

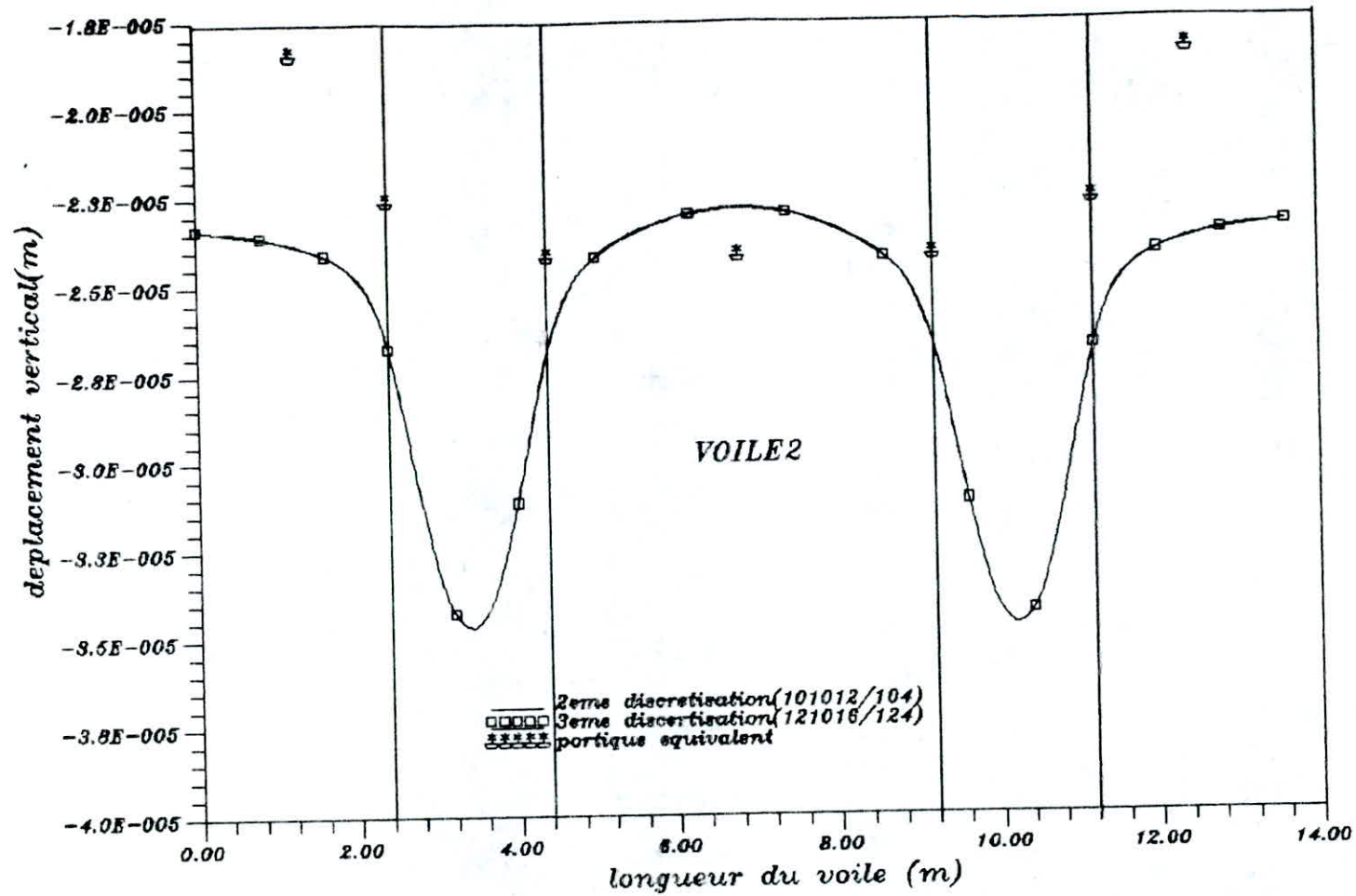
**TABLEAU 4:**  
**SOUS CHARGES PERMANENTES:**

noeuds	portique E-4 (m)	1 <sup>ère</sup> discretisa E-4 (m)	2 <sup>ème</sup> discretisa E-4 (m)	3 <sup>ème</sup> discretisa E-4 (m)
4	-0.1840	-0.2392	-0.2383	-0.2381
5	-0.2415	-0.2295	-0.2288	-0.2286
6	-0.1840	-0.2392	-0.2383	-0.2381
7	-0.2731	-0.3702	-0.3689	-0.3686
8	-0.3659	-0.3560	-0.3549	-0.3546
9	-0.2731	-0.3702	-0.3689	-0.3686

**TABLEAU 5:**  
**SOUS CHARGES SISMIQUES:**

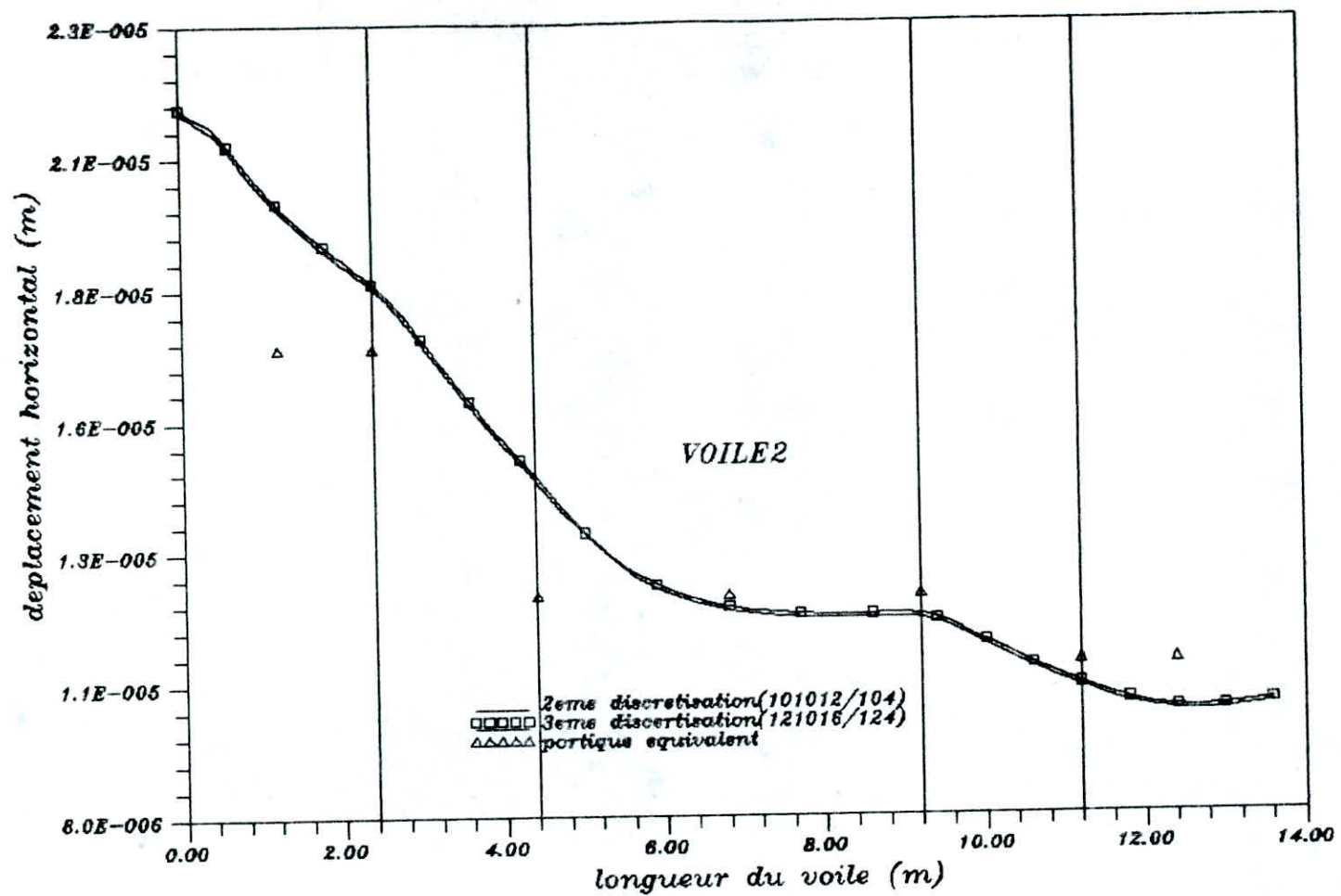
noeuds	portique E-04 (m)	1 <sup>ère</sup> discretie E-04 (m)	2 <sup>ème</sup> discretie E-04 (m)	3 <sup>ème</sup> discretie E-04 (m)
4	0.1688	0.1943	0.1954	0.1963
5	0.1217	0.1181	0.1188	0.1199
6	0.1091	0.0986	0.0994	0.1000
7	0.3661	0.5228	0.5260	0.5286
8	0.2720	0.2876	0.2900	0.2921
9	0.2545	0.2411	0.2435	0.2454





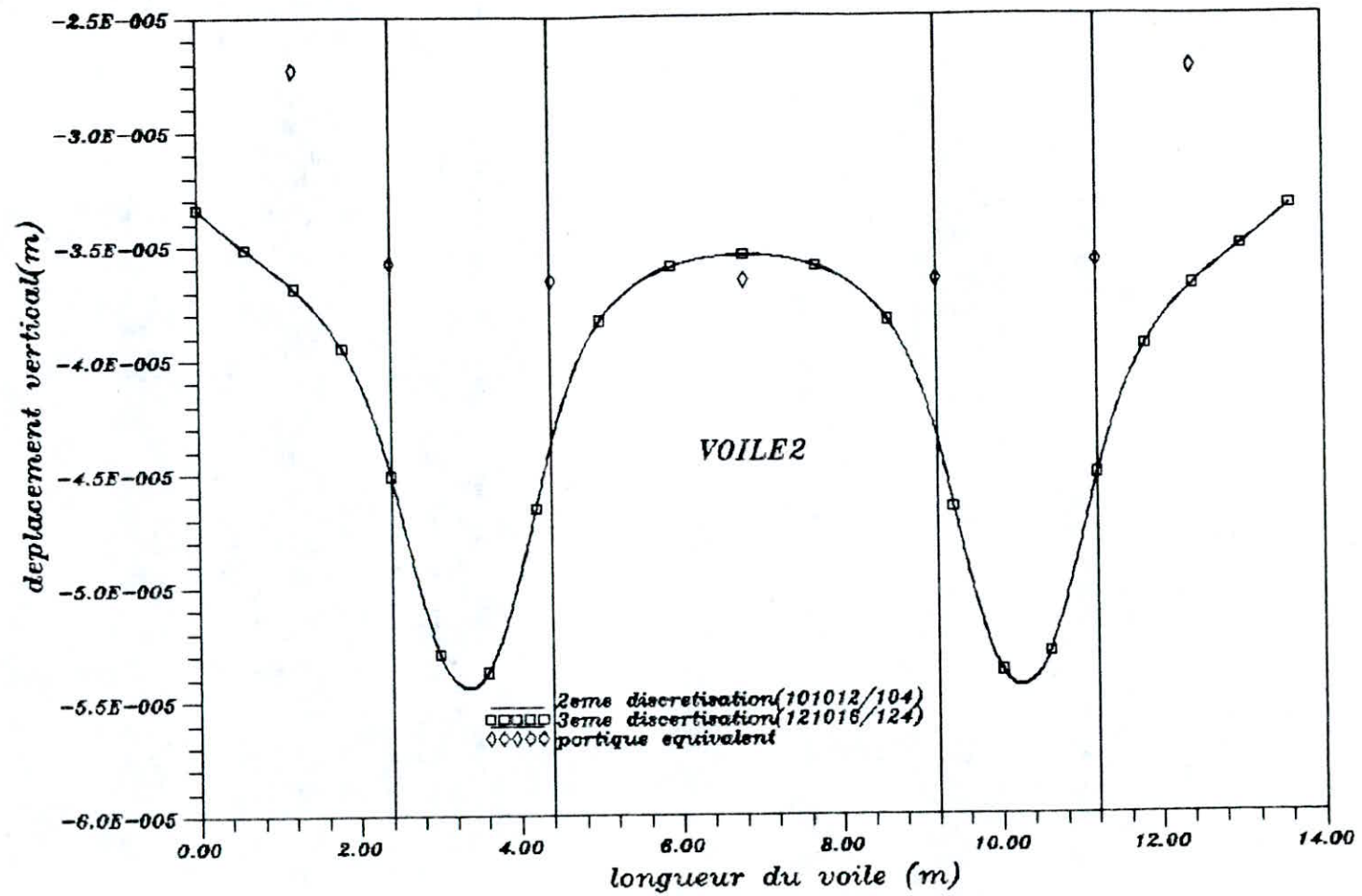
LINTEAU 1 SOUS CHARGES PERMANENTES

fig n:11



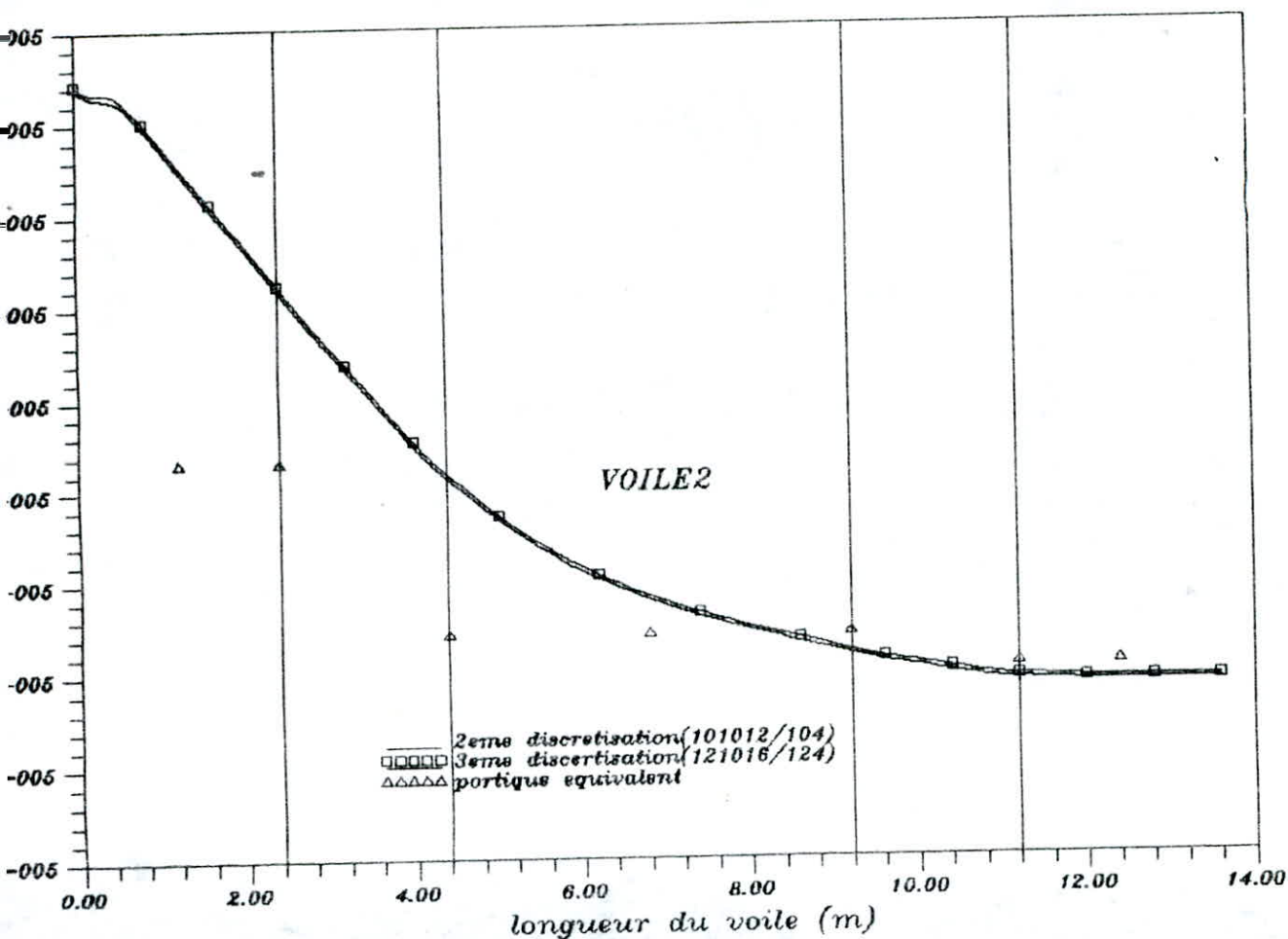
LINTEAU 1 SOUS CHARGES SISMQUES

fig n:12



**LINTEAU 2 SOUS CHARGES PERMANENTES**

fig n:13



### LINTEAU 2 SOUS CHARGES SISMQUES

fig n:

#### XI 3 - CONSTATATIONS ET INTERPRETATION DES RESULTATS :

##### XI 3 a- Convergence de la méthode des éléments finis :

Dans le but d'approcher le comportement réel du voile plusieurs discrétisations en éléments finis ont été réalisées, parmi lesquelles nous avons choisi les dernières ayant pu être acceptées par la capacité mémoire de l'ordinateur.

Ces deux dernières discrétisations ont données des résultats très proches, ce qui confirme la convergence de la méthode des éléments finis, donc possibilité de comparaison avec la méthode des portiques équivalents.

La première constatation est que pour une même discrétisation la convergence est meilleure lorsqu'il s'agit d'un chargement latéral .

Nous constatons aussi au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de subdivisions du maillage l'accroissement des déplacements au niveau des linteaux. La structure devient donc plus flexible ce qui confirme la théorie de RITZ.

NB: Nous avons tenté d'affiner le maillage pour confirmer la convergence de la méthode des éléments finis, mais un certain nombre de problèmes empêcha le bon déroulement des exécutions dont la capacité du micro-Vax à mémoriser la totalité des matrices d'ordre très élevé (un quota de cinq millions d'octets fut insuffisant), s'ajoute à cela la saturation répétée du disque et les coupures fréquentes de courant.

### XI 3 b- Comparaison des deux modélisation MEF et MPE. :

En analysant les déplacements obtenus par les deux types de chargements (chargement vertical réparti et chargement latéral concentré), nous remarquons que les déplacements du voile obtenus par la M.P.E se rapprochent plus de ceux fournis par la M.E.F lorsque le chargement est nodal .

#### 1- Chargement repart (charge d'exploitation et charge permanente)

Pour ce type de chargement, la première constatation est la similitude des déplacements obtenus par les deux modélisations (MEF et MPE) au niveau du trumeau central (le pourcentage d'éloignement chute jusqu'à atteindre 1.69 % voir tab-1-). Ceci pouvant résulter du fait que l'estimation du chargement au niveau de la partie centrale du voile est pratiquement la même pour les deux méthodes.

*Nous constatons par contre un léger éloignement des déplacements fournis par les deux modélisations au niveau des trumeaux extrêmes (le pourcentage d'éloignement atteint 33.33 % voir tab-2-) , ceci pouvant s'expliquer par la sous estimation du chargement vertical dans la modélisation en portiques équivalents (au delà de ligne moyenne des trumeaux extrêmes le chargement est ignoré) .*

*D'une manière générale, la structure semble être plus rigide dans la modélisation en portiques que dans la modélisation en éléments finis .*

Resumé des pourcentages d'éloignement des deux méthodes :

	<i>Pourcentage maximum</i>	<i>Pourcentage maximum</i>
<i>Linteau 1</i>	<i>19.95 %</i>	<i>1.69 %</i>
<i>Linteau 2</i>	<i>22.06 %</i>	<i>2.83 %</i>
<i>Linteau 3</i>	<i>23.29 %</i>	<i>3.04 %</i>

tab-1-

*Chargement permanent*

	<i>Pourcentage maximum</i>	<i>Pourcentage maximum</i>
<i>Linteau 1</i>	<i>30.76 %</i>	<i>7.39 %</i>
<i>Linteau 2</i>	<i>32.81 %</i>	<i>1.86 %</i>
<i>Linteau 3</i>	<i>33.43 %</i>	<i>1.93 %</i>

tab-2-

*Charges d'exploitation*

Les pourcentages ont été calculés comme suit :

$$= \left| \left( \frac{\text{Valeur MEF} - \text{Valeur MPE}}{\text{Valeur MEF}} \right) * 100 \right|$$

2- Chargement sismique :

S'agissant du chargement sismique, la convergence entre les deux méthodes (MEF et MPE) est meilleure lorsqu'on s'éloigne du bord sollicité (bord gauche).

NB : Globalement les résultats fournis par les deux modélisations sont d'autant plus similaires que l'on se rapproche des plus bas étage.

	Pourcentage maximum	Pourcentage maximum
Linteau 1	4.72 %	1.20 %
Linteau 2	11.61 %	1.66 %
Linteau 3	21.47 %	4.73 %

Charges sismiques

### XI 3 c - Interprétation :

L'analyse globale des constatations conduit à quelques interprétations possibles qui peuvent se résumer en les points suivants .

1- La différence de la conception des deux modélisations :

Ainsi

la méthode des éléments finis donne des résultats plus proches de la réalité étant donné que dans cette méthode le voile qui est un



milieu continu est modélisé comme tel ,contrairement dans la méthode des méthodes des portiques équivalents ce même voile est assimilé à un milieu discret ( assemblage de poutres )

2 - Différence des répartitions des charges sur les noeuds :

Il ressort des constatations dégagées dans la section XI 3 b que La convergence des deux méthodes MEF et MPE est meilleure sous charges concentrées que sous charges réparties ceci pouvant résulter du fait que ,le calcul du vecteur force nodale est automatique lorsqu'il s'agit d'un chargement concentré , contrairement à celui relatif à un chargement réparti qui est calculé suite à une transformation des charges réparties en forces nodales statiquement équivalentes moyennant des techniques différentes d'une modélisation à une autre .

REMARQUE CONCERNANT L'EXEMPLE 2 :

L'analyse des résultats obtenus par l'exemple 2 fournit une meilleure convergence de la M E F (ceci est illustré par les graphes),ainsi que la confirmation des résultats dégagés dans l'exemple 1

#### CONSTATIONS CONCERNANTS LES CONTRAINTES :

1: CONTRAINTES NORMALES SIGMAX :

En analysant les graphes des contraintes auxquelles est soumis le voile étudié nous constatons sous chargement vertical ,les contraintes normales sont concentrées au milieu des linteaux . Par contre sous chargement lateral ,les contraintes sont intenses au niveau du bord extrême chargé ,elles diminuent au fur et à mesure que l'on s'en éloigne jusqu'à s'annuler à proximité du bord non chargé.

2: CONTRAINTES NORMALES SIGMAY :

Concernant les contraintes sigmay ,elles sont intenses au niveau des extrémités des linteaux ,ces derniers étant faiblement sollicités par rapport aux trumeaux,ceci s'agissant du chargement vertical .Sous chargement lateral ,nous remarquons les valeurs infimes des contraintes tout au long du voile.

### 3: CONTRAINTES TANGENTIELLES TAUXY:

*Sous chargement vertical , les contraintes tauxy sont concentrées aux extrémités des linteaux ceci pouvant être causé par l'intensité de l'effort tranchant aux niveau des bords encastrés, contrairement les trumeaux sont très faiblement sollicités. Nous constatons par contre sous charges sismiques la diminution des sollicitations au fur et à mesure de l'éloignement du bord chargé , ainsi que la concentration des contraintes au niveau linteaux.*

## CONCLUSION :

De cette étude il ressort qu'il est très difficile de comparer les deux méthodes étudiées (la méthode des éléments finis et la méthode des portiques équivalents).

En effet ces deux modélisations sont des techniques de discrétisation qui requièrent la résolution de systèmes d'équations algébriques simultanées en vue de déterminer les déplacements nodaux.

A part cette similitude, les deux méthodes apparaissent très différentes l'une de l'autre surtout en ce qui concerne le nombre de degrés de liberté requis pour atteindre la convergence. Ainsi dans l'exemple 1 la modélisation du voile étudié par portique exigea un nombre de degrés de liberté invariant et réduit égale à 36 pour fournir des résultats très proches de ceux déduits de la méthode des éléments finis, cette dernière nécessitant 3330 degrés de liberté, cependant on doit aussi se rendre compte de la possibilité d'une étude détaillée de la structure qu'offre la M F E.

Il ressort également que la comparaison des deux modélisations dépend inévitablement du type de problème et de l'intensité du maillage, de telle manière que la M F E tendra à être embarrassante lorsqu'il s'agit de modéliser un voile de très grande hauteur, présentant plusieurs ouvertures et ceci pour la considérable capacité mémoire exigée et que l'ordinateur ne peut fournir.

Il apparaît aussi qu'aucune des deux modélisations ne peut supplanter l'autre aisément.

Les avantages de la M P E résidant dans son attrait pratique et la relative facilité avec laquelle les structures compliquées peuvent être modélisées, il semble donc qu'elle soit plus exploitable lorsqu'il s'agit des structures compliquées.

Concernant la M E F la nature cette modélisation a pour conséquence l'augmentation de la précision avec le nombre d'éléments de discrétisation, cependant il a été confirmé que

cette augmentation rend plus grand le temps de calcul nécessaire pour obtenir la solution ceci a pour effet un coût plus élevé.

En conclusion la méthode des éléments finis est une méthode très précise mais coûteuse ,contrairement la méthode des portiques consomme moins de temps machine mais ne peut fournir les résultats qu'en des points particuliers de la structure modélisée.

BIBLIOGRAPHIE

- [11] : AUBOIN -CALCUL DES STRUCTURES ET INFORMATIQUE-  
EDITIONS EYROLLES : 1983
- [12] : BOUMAHKAT ET GOURDIN -METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES-  
EDITIONS OPU : 1983
- [13] : A CAPRA ET ME HAUTCORUR-MODELISATION DES STRUCTURES  
POUR CALCUL SUR ORDINATEUR  
EDITION EYROLLES : 1983
- [14] : DHATT ET TOUZOT -UNE PRESENTATION DE LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS  
EDITION MALOINE
- [15] : IMBERT JR -ANALYSE DES STRUCTURES PAR ELEMENTS FINIS-  
CEPADUES EDITIONS
- [16] : M LAPORTE ET J VIGNES -ALGORITHMES NUMERIQUES ANALYSE  
ET MISE EN OEUVRE
- [17] : K.C ROCKEY -INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS  
EDITION EYROLLES : 1979
- [18] : OC ZIENKIEWICZ-LA METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE  
A L'ART DE L'INGENIEUR  
EDITION EDISCIENCE : 1973

TRAVAUX:

*BERRAH: COURS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS*

*DEMIDEM: COURS DE CALCUL DES STRUCTURES*

*CHARIF: NOTES DU COURS DE CALCUL DES STRUCTURES*

*THESES DE PROJETS DE FIN D'ETUDE*

