

43/84

105

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE - CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

CALCUL de Structures
en Beton Arme
sur Micro-ordinateur

Proposé par :
C.N.E.R.I.B.

Etudié par :
Z MEROUANI
T AYOUB

Dirigé par :
MM BARAKA
BENSLIMANE



PROMOTION : JANVIER 84

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

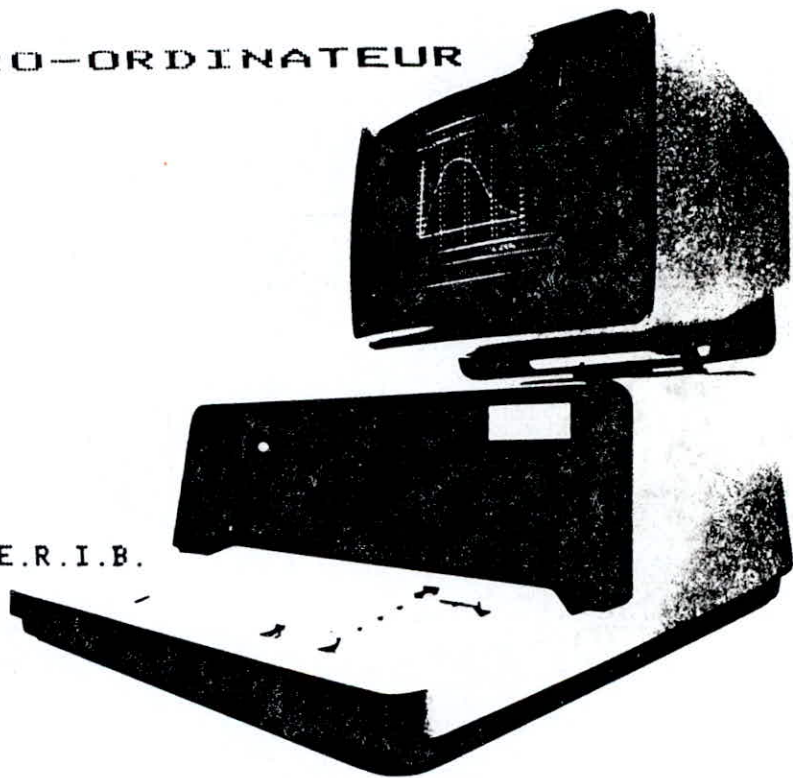
DEPARTEMENT GENIE CIVIL

Projet de fin d'études

CALCUL de STRUCTURES

en BETON ARME

sur MICRO-ORDINATEUR



Propose par le C.N.E.R.I.B.

Dirige par MM BENSLIMANE
BARAKA

Presente par MM T. AYOUB
Z. MEROUANI

- Janvier 1984 -

À ma famille, à tous mes amis ...

Z. MEROUANI

A ma famille, à Sabah, à tous mes amis...

T. AYOUB

REMERCIEMENTS

Que Messieurs BARAKA et BENSLIMANE trouvent ici l'expression de notre gratitude pour l'aide et l'intérêt constant qu'ils ont accordé à notre travail.

Nous tenons à remercier l'ensemble du personnel du C.N.E.R.I.B et en particulier M^{elles} KAMEL et BADAOUTI ainsi que Monsieur GUESSOUM pour leur disponibilité.

Nous ne saurions terminer sans remercier Mesdames MENTIZI et ZEKKAR ainsi que Monsieur AVOUB pour le soin qu'ils ont apporté à la mise en forme de ce travail.

I N T R O D U C T I O N

Dans cette introduction nous essaierons de donner un bref aperçu sur la machine utilisée, le langage de programmation et les différents chapitres composants ce projet.

Les calculs de génie-civil étant souvent laborieux et répétitifs, la rapidité et l'efficacité apportées par le calcul automatique permettent à l'ingénieur de se pencher sur des problèmes nouveaux. Il faut dire aussi que le calcul automatique évite pratiquement tout risque d'erreur quant il est parfaitement maîtrisé et interprété.

Les programmes réalisés durant ce projet sont élaborés sur un micro-ordinateur Honeywell Bull-Cii du type Questar/M qui est plutôt destiné à la gestion. Une fois que le système est chargé en BASIC* il ne reste à l'utilisateur qu'un espace libre de 16,6 kilo-octets environ; (cette capacité reste faible pour un calcul scientifique).

Le C.N.I. (Commissariat National à l'Informatique) a vendu un grand nombre de ces micro-ordinateurs à des entreprises susceptibles de faire du calcul de génie-civil; c'est la raison pour laquelle nos promoteurs ont choisi d'élaborer les programmes sur ce type de machine.

*B.A.S.I.C. est une abréviation de Beginner's All purpose Symbolic Instruction Code, soit en français code d'instructions symboliques tous usages pour débutants.

Parlons un peu du BASIC, Le premier avantage qu'il offre résulte du fait qu'il a été conçu comme un langage d'initiation destiné aux débutants (comme son nom l'indique). Actuellement encore, le BASIC reste un langage particulièrement simple à apprendre.

Un autre avantage fondamental peut-être constaté par tout rédacteur d'un programme en langage BASIC : les erreurs inévitables de programmation sont rapidement repérées et facilement corrigées. En effet, à chaque erreur détectée par la machine, il y a arrêt de l'exécution et affichage immédiat d'un "diagnostic" clair. Pour la correction, des commandes particulières à chaque matériel permettent de modifier très aisément la ligne erronée et de relancer l'exécution.

Un troisième avantage qui concerne l'utilisateur, est la commodité d'emploi des programmes. Ce langage a en effet été conçu en vue de permettre l'introduction des données sous une forme "conversationnelle", l'utilisateur répondant à des questions posées par la machine. Cette particularité est, à nos yeux, très avantageuse vu qu'elle ne nécessite pas beaucoup de connaissances en informatique de la part de l'utilisateur et la rapidité avec laquelle se déroule l'opération.

Pour ce qui est du projet, il comprend trois chapitres essentiels :

Etude au vent :

Cette étude est destinée à déterminer les actions d'ensemble sur un bâtiment d'habitation à base quadrangulaire et de hauteur moyenne conformément aux règles N.V. 65.

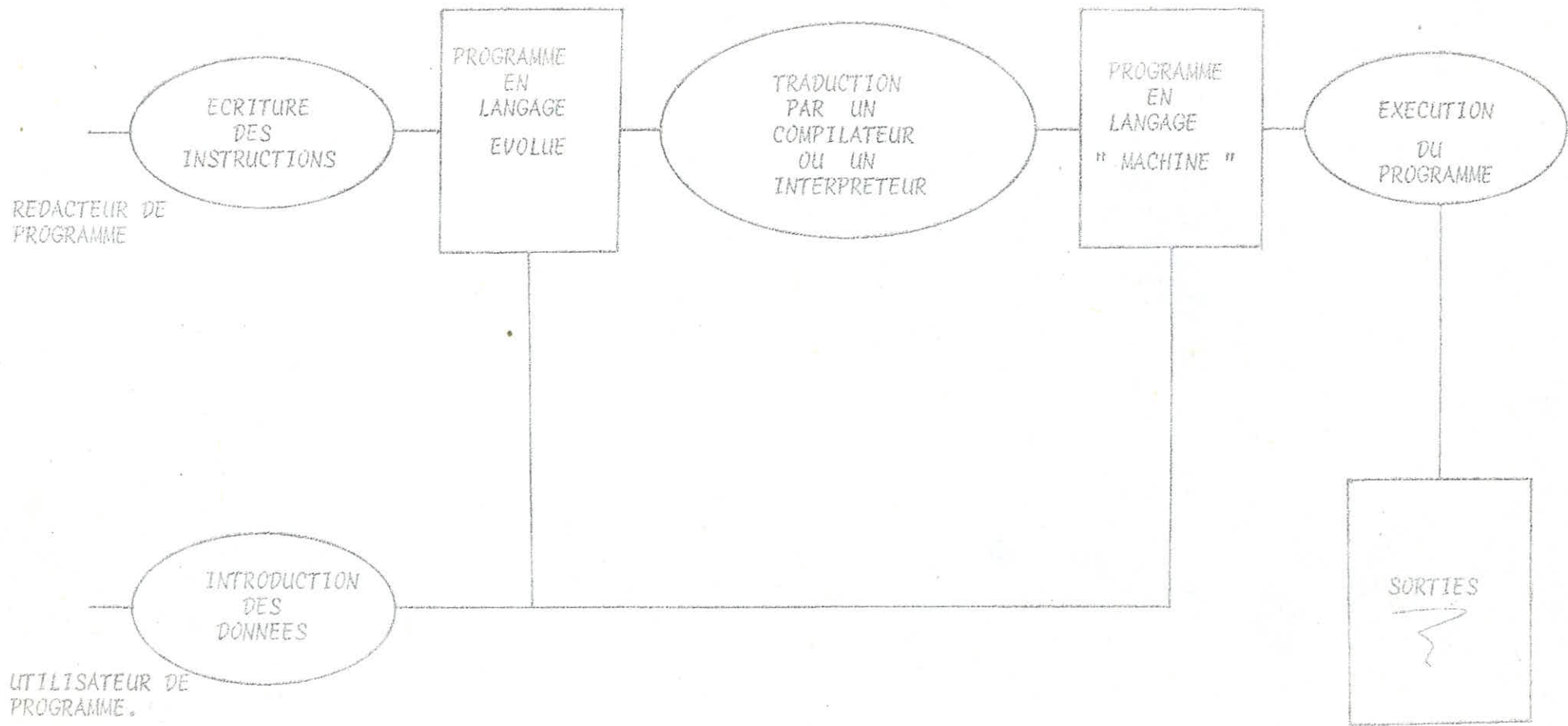
L'étude au vent nous a servi d'initiation au BASIC et nous a permis un apprentissage rapide des modalités de fonctionnement du QUESTAR/M.

Calcul de structure :

Pour le calcul de la structure nous avons adopté la méthode matricielle des déplacements pour un système de barres à section invariable disposées et sollicitées dans un même plan.

Calcul du béton armé :

Dans ce chapitre on évalue les sections d'aciers longitudinaux et transversaux pour une poutre sollicitée en flexion simple selon les règles B.A.E.L. 80.



C H A P I T R E I

ETUDE AU VENT

Le programme du calcul au vent est établi conformément aux règles N.V. 65. Comme le but de notre travail est de calculer un bâtiment courant (R + 4) nous avons dès le début posé certaines conditions. Nous évaluerons donc l'action d'ensemble due au vent sur une construction à base quadrangulaire avec les hypothèses suivantes :

- le bâtiment est à usage d'habitation ou de bureaux (perméabilité inférieure à 5%)
- le contreventement est assuré par :
 - . mur en maçonnerie ou béton banché
 - . voile de béton armé
 - . ossature de béton armé
 - . ossature métallique.

Pour la phase de calcul l'utilisateur doit indiquer la région du site (1;2 ou 3), la nature du site (protégé, exposé ou normal), les dimensions du bâtiment et le nombre de niveaux.

Certains abaques tels que ceux donnant le coefficient de dimensions, le coefficient de réponse, le coefficient de pulsation etc... étant difficiles à introduire dans le programme, nous demandons donc à l'utilisateur d'entrer ces coefficients en lisant les abaques respectifs.

PRESSION DYNAMIQUE DE BASE :

Compte tenu de la vitesse du vent qui peut souffler, on adopte les valeurs suivantes pour la pression dynamique de base normale Q_{10} pour une altitude inférieure à 1000mètres

Région 1 $Q_{10} = 50 \text{ daN/m}^2$

Région 2 $Q_{10} = 70 \text{ daN/m}^2$

Région 3 $Q_{10} = 90 \text{ daN/m}^2$

PRESSION DYNAMIQUE DE CALCUL :

La pression dynamique de calcul est obtenue en affectant la pression dynamique de base de certains coefficients selon les effets considérés.

Effets statiques :

Dans ce cas les paramètres intervenant dans le calcul sont:

- a) $2,5 \frac{h + 18}{h + 60}$ h étant la hauteur au dessus du sol où se trouve l'élément.
- b) Coefficient du site (K_s) : tient compte de l'emplacement de la construction.
- c) Coefficient de dimensions (S) : est fonction de la plus grande dimension de l'élément offerte au vent.
- d) Coefficient de masque (K_m) : tient compte du masque fait par les constructions voisines ou par la nature.

Si l'utilisateur n'a pas de renseignements précis sur K_m il prendra $K_m = 1$.

On aura finalement pour un élément situé à une hauteur h :

$$Q(h) : 2,5 \cdot Q_{10} \cdot \frac{h + 18}{h + 60} \cdot K_s \cdot S \cdot K_m$$

Valeurs limites des pressions dynamiques de calcul :

En aucun cas la réduction globale due à l'effet de masque et à l'effet de dimensions ne devra excéder 33%.

Par ailleurs quelles que soient les conditions citées, la pression dynamique normale devra être comprise entre 30 et 170 daN/m² et la pression dynamique extrême compri-

se entre 52,5 et 297,5 daN/m²

$$Q_e = 1,75 Q_n$$

Effets dynamiques :

Aux effets statiques s'ajoutent les effets dynamiques qui dépendent des caractéristiques mécaniques et aérodynamiques de la construction. On devrait tenir compte des actions parallèles à la direction du vent et celles qui lui sont perpendiculaires. Mais étant donné les hypothèses de départ les actions perpendiculaires à la direction du vent sont négligeables, il est donc inutile de les prendre en considération.

Les paramètres affectant cette pression dynamique sont :

a) Le coefficient d'amplification dynamique (B)

$$B = \theta (1 + \xi \cdot \tau)$$

B est au moins égal à l'unité.

1- Coefficient θ H_s étant la hauteur totale de la construction.

$$\theta = 1 \text{ pour } H_s \geq 60 \text{ mètres}$$

$$\theta = 0,7 + 0,01 (H_s - 30) \text{ pour } 30 \text{ m} < H_s < 60 \text{ m}$$

$$\theta = 0,7 \text{ pour } H_s \leq 30 \text{ m.}$$

2- Coefficient de pulsation (τ) : tient compte du niveau de l'élément considéré.

3- Coefficient de réponse (ξ) : tient compte de la période d'oscillation du mode fondamental et du matériau du contreventement.

Il y a des formules forfaitaires applicables au calcul de bâtiments d'habitation donnant T en fonction du contreventement utilisé.

L_x : dimension du bâtiment dans la direction du vent (en mètres)

H : hauteur du bâtiment (en mètres)

* Contreventement par mur de maçonnerie ou béton banché :

$$T = 0,06 \frac{H}{Lx}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{H}{2Lx} + H \right)^{\frac{1}{2}}$$

* Contreventement par voile de béton armé :

$$T = 0,08 \frac{H}{Lx}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{H}{Lx} + H \right)^{\frac{1}{2}}$$

* Contreventement par ossature de béton armé :

$$T = 0,09 \frac{H}{Lx}^{\frac{1}{2}}$$

* Contreventement par ossature métallique :

$$T = 0,10 \frac{H}{Lx}^{\frac{1}{2}}$$

b) Coefficient de traînée (Ct) :

$$C_t = 1,3 \delta_0$$

Le coefficient d'application δ_0 tient compte du rapport de dimensions pour les constructions à base rectangulaire.

Compte tenu de l'amplification due à l'action dynamique du vent l'expression de la pression dynamique devient pour une hauteur h donnée :

$$Q(h) = 2,5 \cdot Q_{10} \frac{h + 18}{h + 30} \text{ Ks. Km. S.B. Ct}$$

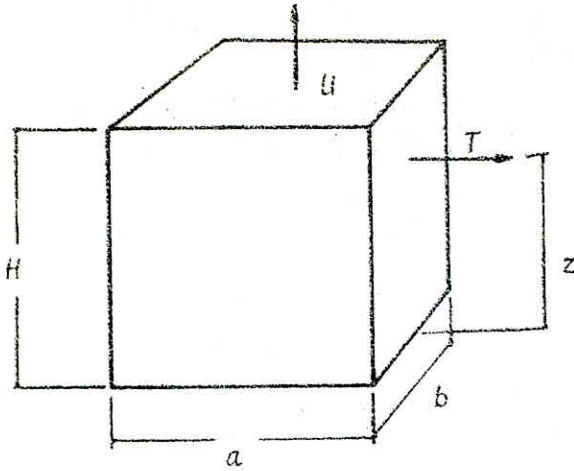
$$\text{où } B = 0 (1 + \varphi \cdot Z)$$

$$\text{et } C_t = 1,3 \cdot \delta_0$$

EFFORTS D'ENSEMBLE :

Etant donné la répartition de la pression dynamique due au vent sur la construction il en découle deux forces d'ensemble ; l'une est dans la direction du vent (T) et l'autre lui est perpendiculaire (U).

T étant l'effort de trainée et U effort de portance



$$T = \int_0^H Q(h) b \, dh$$

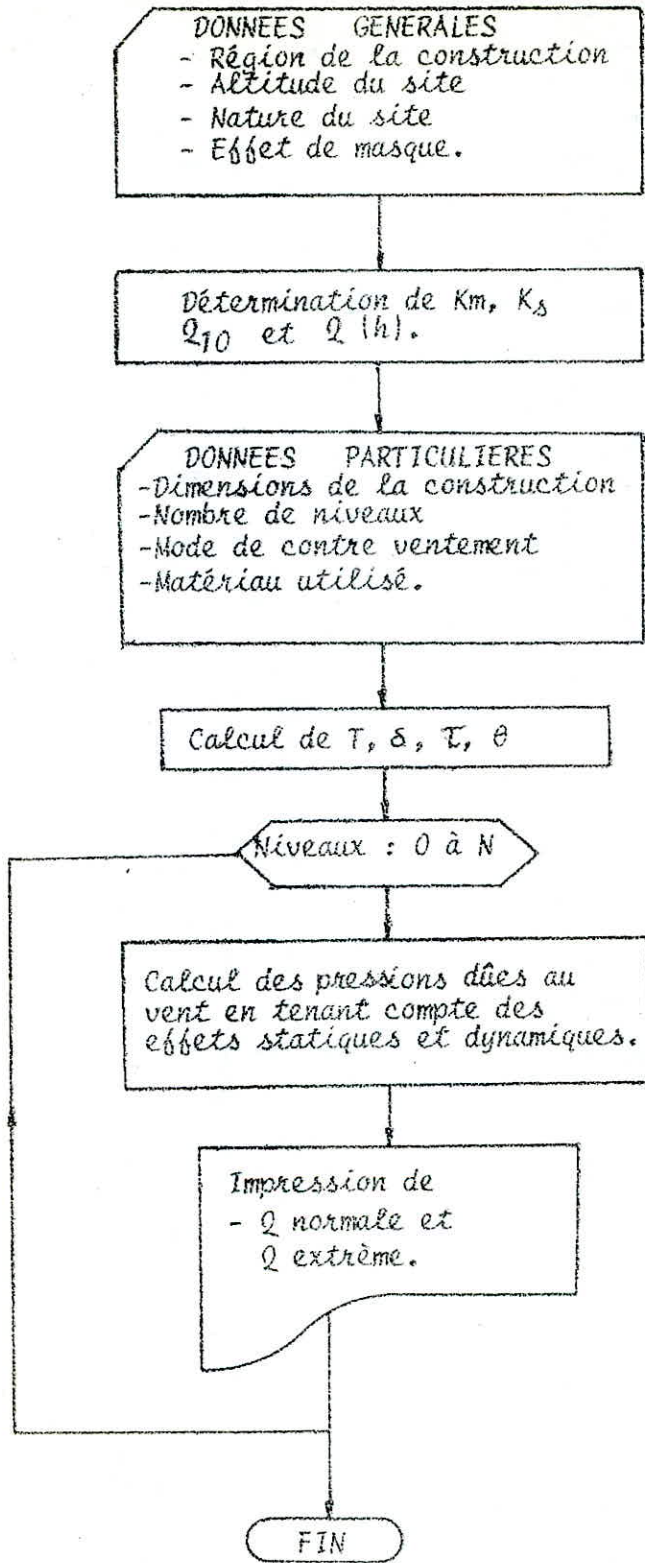
$$U = ab Q(H)$$

$$z = \frac{\int Q(h) \cdot h \, dh}{\int Q(h) \cdot dh}$$

Remarque :

Les résultats de ces calculs sortent sur une imprimante et on peut lire tout aussi bien les caractéristiques géométriques du bâtiment (hauteur, longueur, largeur, nombre de niveaux) que les coefficients constants tels que celui du site, dimensions, masque, réponse, pulsation, global, amplification, trainée, ainsi que la période d'oscillation selon que le calcul se fait dans le sens longitudinal ou transversal. Il y a aussi l'affichage des pressions dynamiques de calcul (normale et extrême) à chaque niveau permettant ainsi à l'utilisateur de faire ses calculs comme il lui convient.

ORGANIGRAMME DE L'ETUDE AU VENT



C H A P I T R E 2

C A L C U L D E S T R U C T U R E

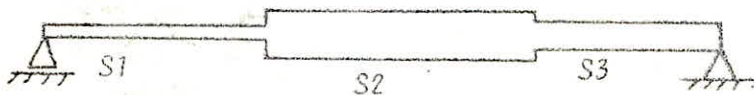
I N T R O D U C T I O N :

Le programme élaboré dans ce chapitre calcule une structure plane constituée de barres, de sections invariables* sollicitée dans son plan.

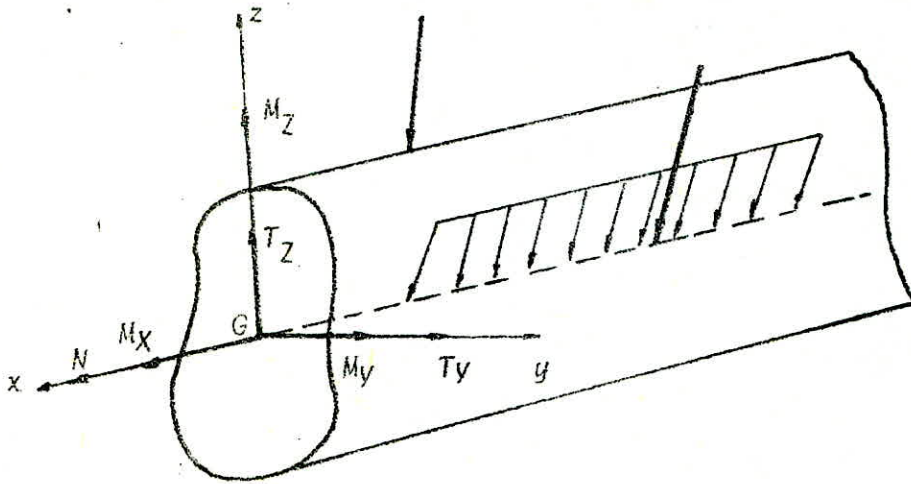
Pour cela nous utiliserons la méthode matricielle des déplacements qui semble toute indiquée pour ce type de structure. Elle a l'avantage sur la méthode matricielle des forces d'être plus souple et plus systématique. Cette méthode consiste principalement en la construction préalable du système linéaire où les inconnues éventuelles sont les déplacements généralisés (déplacements et rotations aux noeuds de la structure).

Les éléments simples constituant la structure sont alors étudiés par la théorie des poutres, pour lesquelles on a fait à priori une hypothèse sur la distribution des déplacements (loi des sections planes).

* Une barre est déterminée par ses connections, ainsi la poutre suivante est composée de 3 barres de sections S_1 , S_2 et S_3 .



ENERGIE DE DEFORMATION ELASTIQUE D'UNE POUTRE A PLAN
MOYENS EN FONCTION DE N, M, T



Si le plan de sollicitation est xGz alors :

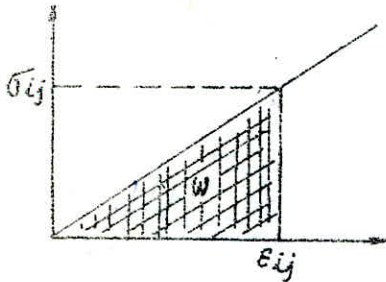
$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{I_y} \frac{m_{sy}(z)}{e_y(z)}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

La densité d'énergie de déformation est donc d'après les hypothèses de déformation des poutres de Bernouilli:



$$dW = \frac{1}{2} \sum_{ij} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}$$

soit dans notre cas

$$dW = \frac{1}{2E} \sigma_x^2 + \frac{1}{2G} \tau_{xz}^2$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{1}{E} \left(\frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y} z \right)^2 + \frac{T_z^2}{G I_y} + \frac{m_s y}{e y z} \right] dv \quad (2')$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{(L)} \left[\frac{N^2}{ES^2} \int\int_S dydz \right] ds + \frac{1}{2} \int_{(L)} \left[\frac{M_y^2}{EI_y^2} \int\int_S z^2 dydz \right] ds$$

$$+ \int_{(L)} \left[\frac{NM}{ESI_y} \int\int_S z dydz \right] ds + \frac{1}{2} \int_{(L)} \left[\frac{T_z^2}{GI_y^2} \int\int_S \frac{m_s y^2}{e y z} dy \right] ds$$

(aire de la section)

$$\int_{(S)} z^2 dydz = I_y \quad (\text{moment quadratique par rapport à l'axe } y)$$

$$\int_{(S)} z dydz = 0$$

$$\int_{(S)} \frac{m_s y^2}{e^2 y} dydz = \frac{I_y^2}{S r^2} \quad (S_r \text{ étant la section réduite})$$

L'expression (2) s'écrit sous la forme simple

$$W = \frac{1}{2} \int_{(L)} \left[\frac{N^2}{ES} + \frac{T_z^2}{G S r^2} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right] ds \quad (3)$$

m_s = moment statique

Remarque :

Si la barre était sollicitée dans le plan xOy l'expression de l'énergie de déformation sera :

$$W = \frac{1}{2} \int_{(L)} \left\{ \frac{N^2}{ES} + \frac{T_y^2}{GS_{2y}} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right\} ds \quad (4)$$

Si, en plus, il existe un couple de torsion de moment M_x l'énergie de déformation due à ce moment uniquement vaut :

$$W = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{M_x^2}{GI_p} ds \quad (5)$$

où I_p est le moment polaire (de torsion)

On conclue que dans le cas général d'une sollicitation tridimensionnelle, l'énergie de déformation élastique totale d'une poutre s'écrit :

$$W = W_N + W_{Ty} + W_{Tz} + W_{Mx} + W_{My} + W_{Mz} \quad (6)$$

$$(7) \quad W_N = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{N^2}{ES} ds \quad \text{due à l'effort normal}$$

$$(8) \quad W_{Ty} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{T_y^2}{GS_{2y}} ds \quad \text{" " " tran-
chant suivant } Gy$$

$$(9) \quad W_{Tz} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{T_z^2}{GS_{2z}} ds \quad \text{" suivant } GZ$$

$$(10) \quad W_{Mx} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{M_x^2}{GI_p} ds \quad \text{" au moment de torsion}$$

$$(11) \quad W_{My} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{M_y^2}{EI_y} ds \quad \text{" " " de fle-
sion autour de } Gy$$

$$(12) \quad W_{Mz} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{M_z^2}{EI_z} ds \quad \text{" " " de } GZ$$

MATRICE DE RIGIDITE D'UNE BARRE EN TRACTION-COMPRESSION



En structure discrète seuls les déplacements aux noeuds existent.

Lorsqu'il n'y a pas de chargement en travée, le champ de déplacement intérieur vaut :

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x \quad (13)$$

La déformation axiale est constante et vaut :

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_2 - u_1}{l} \quad (14)$$

On a alors, en vertu de la loi de Hooke

$$N = \sigma S = E \varepsilon S = ES \frac{u_2 - u_1}{l} \quad (15)$$

Pour une barre sollicitée seulement en traction compression l'expression de l'énergie de déformation est :

$$W_N = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{ES} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{E^2 S^2}{ES} \frac{(u_2 - u_1)^2}{l^2} dx$$

$$W_N = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (u_2 - u_1)^2 \quad (16)$$

On peut tout aussi bien l'écrire de la façon suivante :

$$W_N = \frac{1}{2} u^T K u \quad (17)$$

où u est un vecteur représentant les déplacements nodaux et K une matrice carrée.

$$W_N = \frac{1}{2} (u_1 \quad u_2) \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas :

$$K = KN = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

K est appelée matrice de rigidité élémentaire.

MATRICE DE RIGIDITE D'UNE BARRE EN TORSION :



Si l'on considère une barre sous l'effet de la torsion, le champ de déplacement interne est linéaire et vaut :

$$\theta(x) = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} x \quad (19)$$

Le déplacement relatif de deux sections voisines Σ et Σ' distantes de dx est une rotation $d\theta$ autour de l'axe du moment de torsion. On a :

$$\frac{d\theta}{dx} = - \frac{Mx}{GI_p} \quad (20)$$

C'est à dire que Mx est constant tout le long de la barre :

$$Mx = \frac{GI_p}{l} (\theta_1 - \theta_2)$$

En remplaçant dans (10) on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{GI_p}{l^2} (\theta_2 - \theta_1)^2 dx$$

ou

$$W = \frac{GI_p}{2l} (\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (21)$$

Si on veut l'écrire sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} U^T \cdot K_{Mx} \cdot U \quad \text{avec } U = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

alors

$$K_{Mx} = \frac{GI_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

MATRICE DE RIGIDITE D'UNE BARRE EN FLEXION :

Etudions maintenant l'effet des rotations de flexion :



La barre n'est pas chargée en travée, le moment de flexion varie linéairement et vaut :

$$M(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) M_1 + \frac{x}{l} M_2 \quad (23)$$

Les formules de Bresse permettent alors d'écrire les rotations aux noeuds 1 et 2

$$\begin{cases} \theta_1 = -a M_1 - b M_2 \\ \theta_2 = b M_1 + c M_2 \end{cases} \quad (24)$$

a, b et c sont les coefficients de souplesse définis comme suit :

$$a = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EI}$$

$$b = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} \frac{dx}{EI} \quad (25)$$

$$c = \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EI}$$

Le terme EI étant constant, on a :

$$a = c = \frac{l}{3EI} \quad b = \frac{l}{6EI} \quad (26)$$

D'où en remplaçant dans (24) et en inversant :

$$M_1 = \frac{2EI}{l} (2\theta_1 + \theta_2) ; M_2 = \frac{2EI}{l} (\theta_1 + 2\theta_2) \quad (27)$$

L'expression du moment fléchissant devient :

$$M(x) = \frac{2EI}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) (2\theta_1 + \theta_2) + \frac{x}{l} 2EI (\theta_1 + 2\theta_2)$$

$$M(x) = \frac{2EI}{l} \left(\left(\frac{x}{l} - 1\right) (2\theta_1 + \theta_2) + \frac{x}{l} (\theta_1 + 2\theta_2) \right)$$

Cherchons maintenant la valeur de l'énergie de déformation pour une barre fléchie.

$$W_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M(x)^2}{EI} dx$$

$$W_M = \frac{2EI}{l^2} \int_0^l \left[\left(\frac{3x}{l} - 1 \right) (2\theta_1 + \theta_2) + \frac{x}{l} (\theta_1 + 2\theta_2) \right]^2 dx$$

$$W_M = \frac{2EI}{l^2} \theta_1^2 \int_0^l (3x-2)^2 dx + \frac{2EI}{l^2} \theta_2^2 \int_0^l (3x-1)^2 dx + 4EI \theta_1 \theta_2 \int_0^l \left(\frac{3x}{l} - 2 \right) \left(\frac{3x}{l} - 1 \right) dx$$

$$\int_0^l \left(\frac{3x}{l} - 2 \right)^2 dx = l$$

$$\int_0^l \left(\frac{3x}{l} - 1 \right)^2 dx = l$$

$$\int_0^l \left(\frac{3x}{l} - 2 \right) \left(\frac{3x}{l} - 1 \right) dx = \frac{l}{2}$$

On obtient ainsi :

$$W_M = \frac{2EI}{l} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1 \theta_2) \quad (28)$$

Si on veut l'écrire sous la forme (9) on aura :

$$W_M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix} \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Et la matrice de rigidité pour la flexion sera donc :

$$K_M = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Remarques :

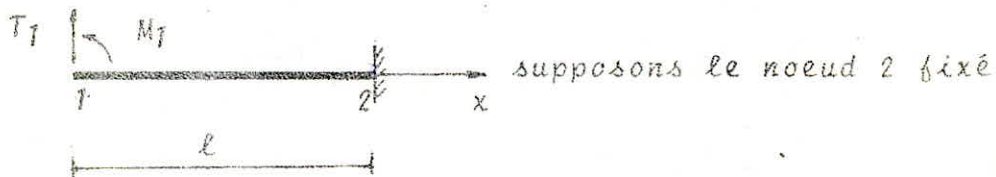
- (1) Pour le calcul de la matrice de rigidité d'une barre fléchie nous n'avons pas spécifié le plan de sollicitation et par conséquent selon que ce soit le plan xGy ou xGz nous considérerons les moments quadratiques relatifs aux axes Gz ou Gy

$$KM_y = \frac{EI_y}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$KM_z = \frac{EI_z}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- (2) Dans cet exposé nous avons considéré que les poutres constituant la structure sont assez élancées pour pouvoir négliger les déformations de cisaillement. Mais il ne faut pas perdre de vue les moments induits par les efforts tranchants.

Soit la poutre suivante sollicitée par un moment de flexion et un effort tranchant



on a : $T = T_1$

$$M = M_1 - T_1 \cdot x \quad (30)$$

L'énergie s'écrit (on néglige les déformations de cisaillement)

$$W_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

$$W_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(M_1 - T_1 \cdot x)^2}{EI} dx \quad (31)$$

Comme on est dans le domaine élastique l'énergie de déformation W_M est égale à l'énergie complémentaire W_M^C .

En appliquant le 2^e théorème de CASTIGLIANO,

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\partial W^C}{\partial T_1} \\ \theta_1 = \frac{\partial W^C}{\partial M_1} \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\ell^2}{2EI} M_1 + \frac{\ell^3}{3EI} T_1 \\ \theta_1 = \frac{\ell}{EI} M_1 - \frac{\ell^2}{2EI} T_1 \end{cases}$$

En inversant ces relations on trouve :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Dans la structure entrée, les noeuds (1) et (2) sont libres de se déplacer ensemble cependant seuls les déplacements relatifs interviennent dans l'énergie de déformation (les autres étant les déplacements de corps rigide).

De la même manière, en supposant (1) fixé, on aura :

$$\begin{aligned} T &= T_2 \\ M &= M_2 + T_2 \cdot x \end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Les deux matrices qu'on vient de déterminer proviennent de l'application directe des efforts aux noeuds considérés : ce sont les matrices de "rigidité".

Les noeuds (1) et (2) libres sont reliés par les équations d'équilibre :



$$\begin{cases} T_1 + T_2 = 0 \\ M_1 - T_1 \cdot l + M_2 = 0 \end{cases} \quad (35)$$

soit

$$\begin{cases} T_2 = -T_1 \\ M_2 = M_1 + T_1 \cdot l \end{cases}$$

En reprenant la relation (33) on aura

$$\begin{cases} T_2 = -\frac{12 EI}{l^2} v_1 + \frac{6 EI}{l^2} \theta_1 \\ M_2 = \frac{6 EI}{l^2} v_1 + \frac{2 EI}{l} \theta_1 \end{cases}$$

i.e

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & -6l \\ 6l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Cette relation découle de la répercussion des efforts du noeud (1) sur le noeud (2); c'est la matrice de répercussion.

Si l'on considère maintenant la répercussion des efforts du noeud (2) sur le noeud (1), les équations d'équilibre s'écriront :

$$\begin{aligned} T_1 &= -T_2 \\ M_1 &= -M_2 - T_2 \cdot l. \end{aligned}$$

d'où

$$T_1 = -\frac{12 EI}{l^3} v_2 + \frac{6 EI}{l^2} \theta_2$$

$$M_1 = \frac{6 EI}{l^2} V_2 - \frac{4 EI}{l} \theta_2 - \frac{12 EI}{l^2} V_2 + \frac{6 EI}{l} \theta_2$$

$$M_1 = -\frac{6 EI}{l^2} V_2 + \frac{2 EI}{l} \theta_2$$

Soit la seconde matrice de répercussion

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & 6l \\ -6l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la matrice de rigidité pour toute la poutre sera :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \\ -12 & -6l \\ 6l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Remarques :

(1) Le plan de sollicitation n'ayant pas été spécifié on prendra $I = I_z$ lorsque les efforts seront dans le plan xGy , dans l'autre cas $I = I_y$

(2) Soit H_{ij} la sous matrice de rigidité
 L_{ij} la sous matrice de répercussion.

La matrice de rigidité K_{My} (K_{Mz}) peut s'écrire sous la forme :

$$K_M = \begin{bmatrix} H_{ij} & L_{ij} \\ L_{ji} & H_{ji} \end{bmatrix} \quad (38)$$

En général : $H_{ij} \neq H_{ji}$
 et $L_{ji} = L_{ij}^T$ (transposée)

il suffit de voir les matrices de rigidité inscrites jusque là.

ASSEMBLAGE DES EFFORTS POUR UN ELEMENT =

L'énergie totale de déformation W s'écrit

$$W = \frac{1}{2} U^T \cdot K U$$

or

$$W = \frac{1}{2} \left(U_N^T \cdot K_N U_N + U_{Mx}^T K_{Mx} U_{Mx} + U_{My}^T K_{My} U_{My} + U_{Mz}^T K_{Mz} U_{Mz} \right)$$

donc

$$U = \begin{bmatrix} U_N \\ U_{Mx} \\ U_{My} \\ U_{Mz} \end{bmatrix}$$

et

$$K = \begin{bmatrix} K_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{Mx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{My} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{Mz} \end{bmatrix} \quad (39)$$

où K représente la matrice de rigidité élémentaire dans le cas d'une sollicitation tridimensionnelle.

RELATION ENTRE DEPLACEMENTS ET SOLLICITATIONS :

D'après le théorème de Castigliano la force généralisée en un point donné est égale à la dérivée partielle de l'énergie de déformation du système par rapport au déplacement correspondant, soit :

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}$$

Comme $W = \frac{1}{2} U^T \cdot KU$

En dérivant on obtient une relation linéaire liant les efforts et les déplacements de la forme :

$$F = KU \quad (40)$$

où F : vecteur des sollicitations (forces appliquées et réactions)

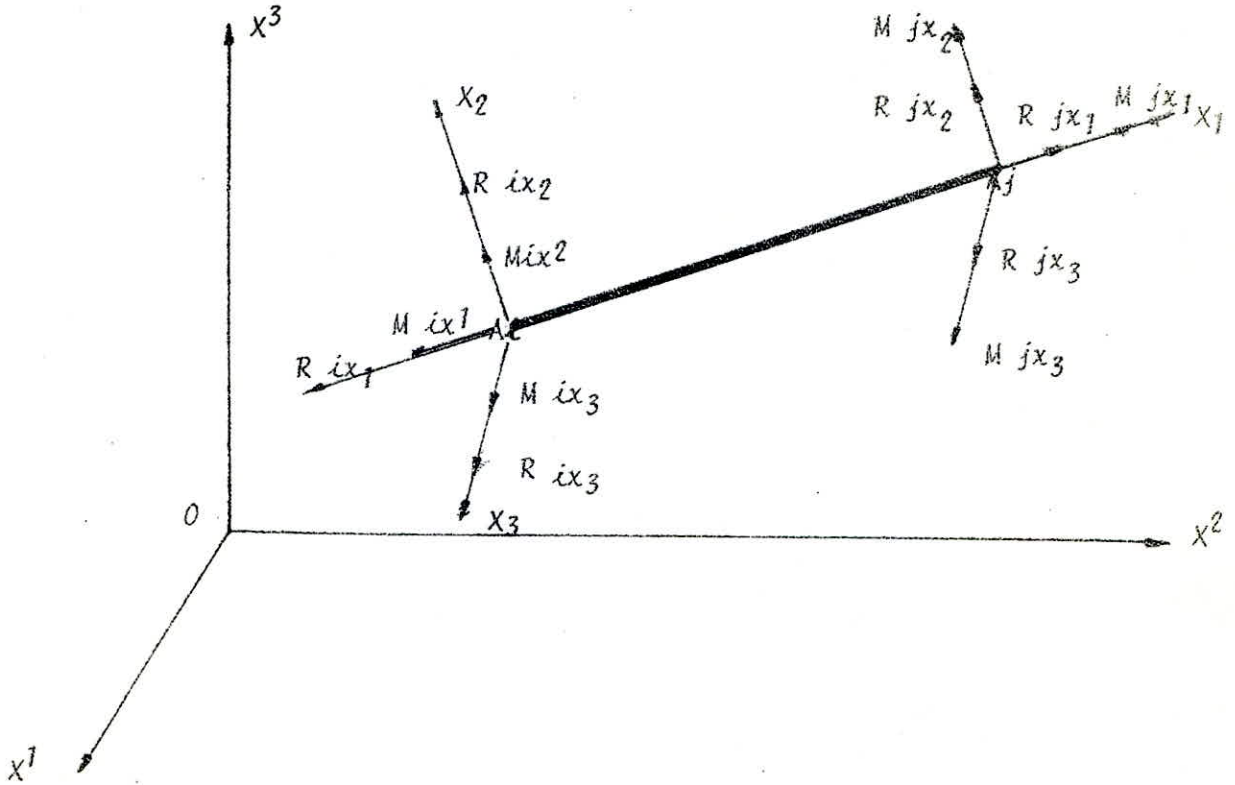
K : matrice de rigidité

U : vecteur des déplacements supposés cinématiquement indéterminés.

Le problème consiste donc surtout à construire K , trouver les déplacements effectivement inconnus, et enfin les réactions au moyen de ces déplacements.

MATRICE DE RIGIDITE GENERALE D'UNE BARRE

Soit une barre $A_i A_j$ sollicitée dans un espace tridimensionnel



Nous regroupons toutes ces matrices en un tableau général, auquel on se référera pour la construction manuelle de la matrice de rigidité.

On a 6 inconnues à chaque noeud, la dimension de K_e sera donc (12×12) .

Tout comme pour les sollicitations planes, on a la relation :

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ij} & L_{ij} \\ L_{ji} & H_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}$$

$$K^e = \begin{bmatrix} H_{ij} & L_{ij} \\ L_{ji} & H_{ji} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs déplacement F_i et U_i et les matrices H_{ij} et L_{ij} sont définis comme suit :

$$F_i^T = \begin{bmatrix} M_{ix} & M_{iy} & M_{iz} & R_{ix} & R_{iy} & R_{iz} \end{bmatrix}$$

$$u_i^t = \begin{bmatrix} \theta_{ix} & \theta_{iy} & \theta_{iz} & u_{ix} & u_{iy} & u_{iz} \end{bmatrix}$$

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{GI_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{GI_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} \end{bmatrix} \quad (48)$$

où I_p est le moment polaire

I_y et I_z sont les moments quadratiques relatifs
aux axes principaux centraux.

REPÈRE GLOBAL :

L'équation (38) donne la matrice de rigidité de la barre $A_i A_j$ dans le repère local, on peut écrire symboliquement

$$F^e - f^e = K^e \cdot U^e$$

$$K^e = \begin{bmatrix} H_{ij} & L_{ij} \\ L_{ji} & H_{ji} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Pour écrire cette matrice dans le repère global avant assemblage il suffit d'appliquer la matrice de passage orthogonale T_{ij} qui fait passer de $Ox^1x^2x^3$ à $A_i x_1x_2x_3$.

On a dans le repère global :

$$F^{ij} = T_{ij}^T F_{ij}$$

$$U^i = T_{ij} U_j \quad (44)$$

$$U^j = T_{ij} U_i$$

donc

$$H^{ij} = T_{ij}^T H_{ij} T_{ij}$$

$$L^{ij} = T_{ij} L_{ij} T_{ij} \quad (45)$$

de sorte que formellement on retrouve la même forme qu'en (43).

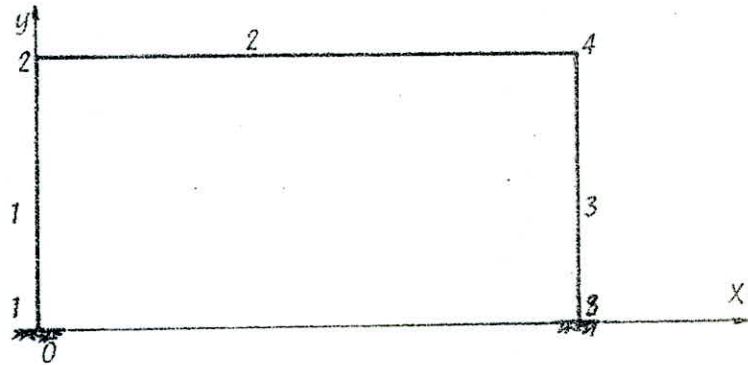
ASSEMBLAGE - MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE

L'assemblage est effectué en prenant les éléments un à un (c'est à dire en prenant leurs matrices de rigidité élémentaires) et en les éclatant dans un tableau, dont la dimension est égale aux degrés de liberté de toute la structure, en fonction de leurs connections. Le tableau est appelé matrice de rigidité globale.

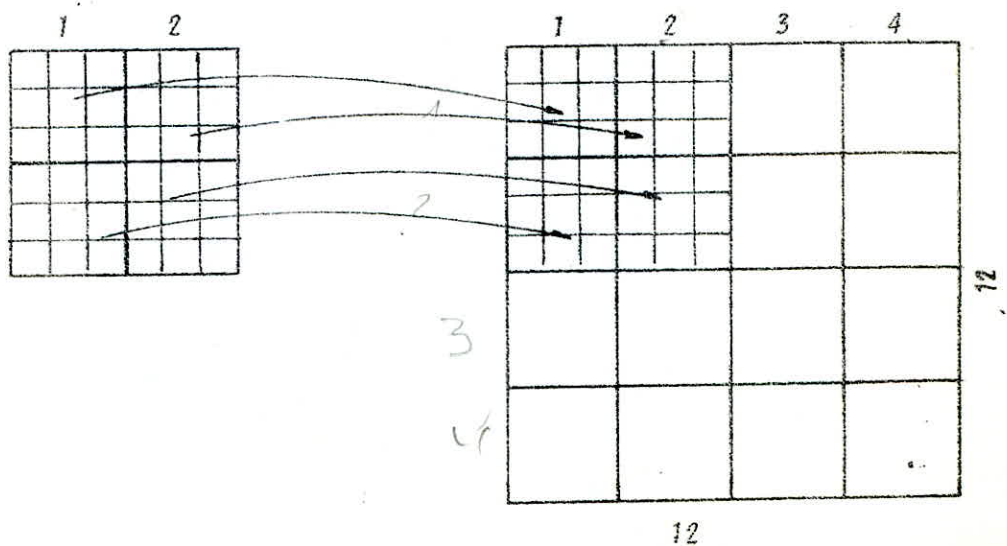
Pour être plus clair nous allons schématiser la procédure sur un exemple de portique plan.

La structure est composée de trois éléments et de quatre noeuds. Il y a 3 degrés de liberté par noeuds, la matrice de rigidité globale sera de dimension 12×12 .

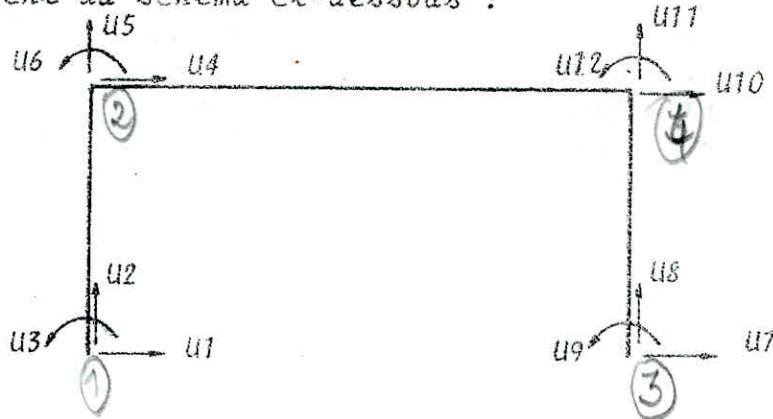
Les matrices des différents éléments sont exprimées dans le repère OXY.



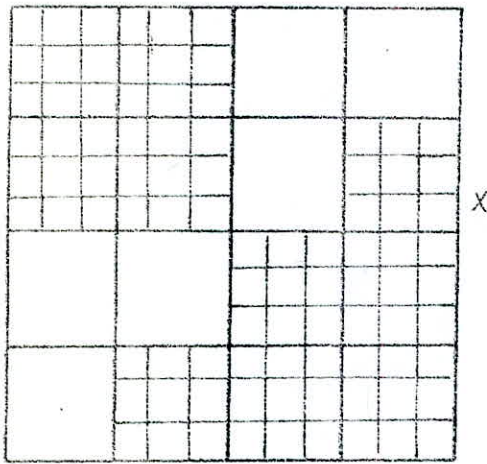
Eclatement de l'élément 1



Si les déplacements (et les efforts nodaux) sont numérotés conformément au schéma ci-dessous :



La relation entre les déplacements et les efforts s'écrit :



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{bmatrix}$$

Si les noeuds 1 et 3 sont rigidement encastrés, leurs déplacements sont connus et égaux à zéro.

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_7 = u_8 = u_9 = 0$$

Par contre, en ces noeuds sont appliquées les réactions d'appuis R_1, R_2, R_3, R_7, R_8 et R_9 .

On a donc

$$\begin{bmatrix} A & B & & \\ B^T & C & & D \\ & & E & F \\ & & D^T & F^T & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{bmatrix}$$

En général KG est singulière et de dimension $6n \times 6n$ pour une structure comprenant n noeuds.

En réarrangeant ce système pour regrouper les inconnues on obtient :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline C & D & B^T & \\ \hline D^T & G & & F^T \\ \hline B & & A & \\ \hline & F & & E \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{l} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{array}$$

Les déplacements sont donc obtenus par :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline C & D \\ \hline D^T & G \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{array} = \begin{array}{l} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{array} \quad (*)$$

L'application des conditions aux limites a réduit l'ordre du système d'inconnues en déplacements et l'expression (*) peut être écrite symboliquement.

$$K_R \cdot U_e = F_e \quad (**)$$

où K_R est la matrice de rigidité réduite inversible

U_e et F_e sont respectivement les déplacements et les efforts aux noeuds libres.

On peut donc écrire

$$U_e = K_R^{-1} F_e$$

Une fois que les déplacements sont déterminés, les réactions d'appuis sont facilement obtenues :

$$\begin{array}{|c|} \hline R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline R_3 \\ \hline \end{array} = B \begin{array}{|c|} \hline U_4 \\ \hline U_5 \\ \hline U_6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline R_7 \\ \hline R_8 \\ \hline R_9 \\ \hline \end{array} = F \begin{array}{|c|} \hline U_{10} \\ \hline U_{11} \\ \hline U_{12} \\ \hline \end{array}$$

CARACTERISTIQUES DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ=

La matrice de rigidité a quelques particularités, certaines sont très intéressantes (surtout du point de vue économie de mémoire).

1) K est une matrice symétrique :

Soit une structure soumise à deux cas de chargement sous le premier chargement on a :

$$F_{(1)} = K U_{(1)}$$

et sous le second

$$F_{(2)} = K U_{(2)}$$

Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti peut s'écrire :

$$F_{(1)}^T U_{(2)} = F_{(2)}^T U_{(1)} \quad (30)$$

soit encore sous une autre forme

$$F_{(1)}^T U_{(2)} = U_{(1)}^T F_{(2)} \quad (30')$$

$$F_{(1)}^T U_{(2)} = (K U_{(1)})^T U_{(2)} = U_{(1)}^T K^T U_{(2)} \quad (*)$$

et comme $U_{(1)}^T F_{(2)} = U_{(1)}^T K U_{(2)} \quad (**)$

on a $U_{(1)}^T K U_{(2)} = U_{(1)}^T K^T U_{(2)}$

soit finalement :

$$K = K^T$$

La matrice de rigidité globale est donc symétrique.

2) K est une matrice bande :

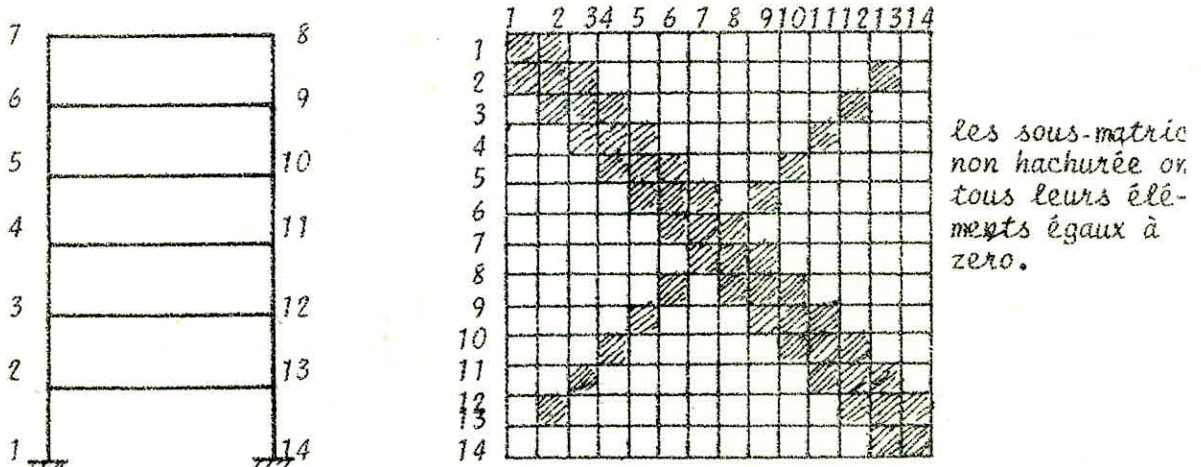
La largeur de la demi bande dépend de la différence de numérotation maximale ND des noeuds d'un élément de la structure. Cette largeur LD vaut :

$$LD = 3 (ND+1)$$

La numérotation des noeuds doit se faire de sorte à avoir ND le plus petit possible; ainsi le gain en temps de résolution et l'économie de la mémoire, qui pour nous est con-

sidérée comme prioritaire) sont parfois considérables.

D'ailleurs l'exemple qui suit est très significatif.



les sous-matrice non hachurée ont tous leurs éléments égaux à zero.

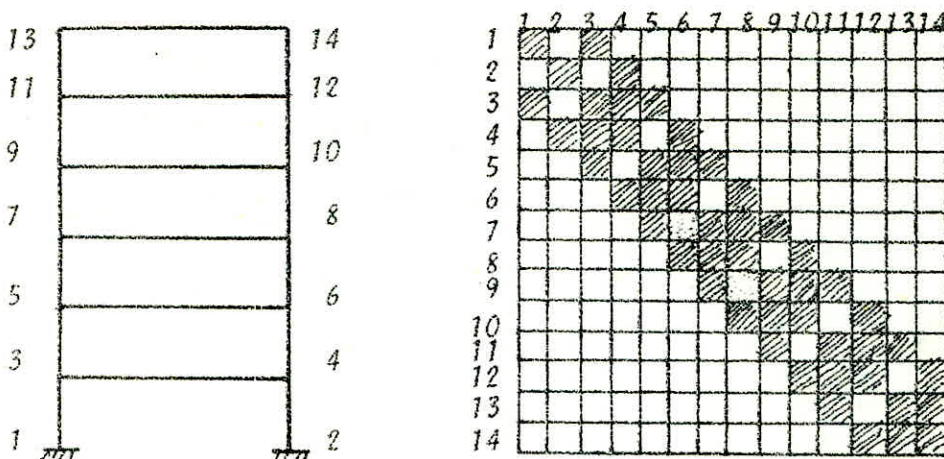
Cette numérotation est mauvaise : les liaisons horizontales donnent des termes hors diagonale.

□ : matrice 3 x 3

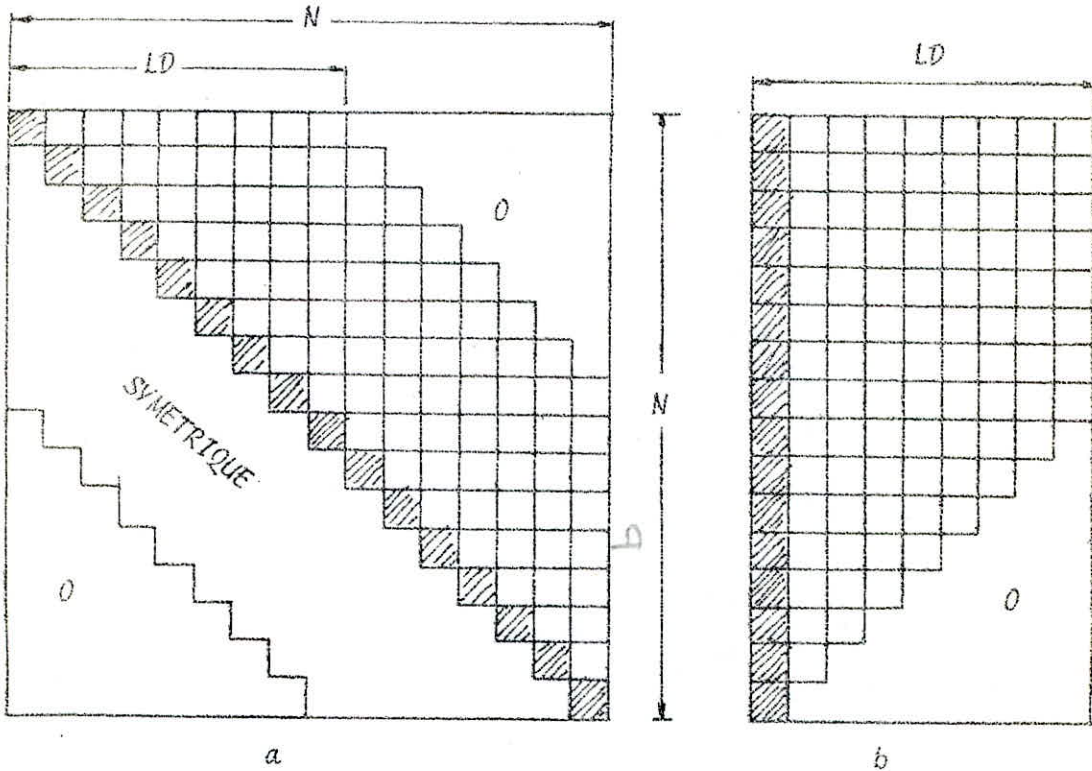
NN et NB étant respectivement les nombres de noeuds et de degrés de liberté bloqués, si N représente le nombre de degrés de liberté à assembler alors :

$$N = 3 NN - NB$$

Par contre la numérotation ci-dessous est la meilleure possible.



Etant donné la nature bande de la matrice de rigidité symétrique il est inutile de retenir tous les éléments de la matrice globale, il suffit de stocker la demi bande à partir de la diagonale. On aura donc une matrice rectangulaire sous la forme redressée.



- (a) Forme de stockage usuelle
 (b) Stockage de la bande supérieure de K
 en une matrice rectangulaire $N \times LD$.

Comparons, pour les deux cas des numérotations des noeuds, du dernier portique les nombres d'éléments à stocker dans la matrice (b).

1er cas : $N = 3 (14 - 2) = 36$
 $ND = 11$
 $LD = 3 (11+1) = 36$
 On aura 36×36 soit 1296 éléments

2è cas : $N = 36$
 $ND = 2$
 $LD = 3 (2+1) = 9$
 soit $36 \times 9 = 324$

On voit que dans le 1er cas le nombre de coefficients à stocker est 4 fois plus grand que dans le second.

3) K est définie positive :

L'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} u^T \cdot K u$$

avec $u^T \cdot K u > 0$

Soient λ_i : les valeurs propres associées à K

x_i : les vecteurs propres associés

on a $x_i^T \cdot K x_i > 0$

ou $\lambda_i x_i^T \cdot x_i > 0$

donc $\lambda_i > 0$.

Tous les déterminants réduits sont positifs, et par conséquent la matrice est définie positive.

Cette propriété nous laisse un large choix des méthodes de résolution : méthodes itératives (Gauss-Seidel) méthode de Choleski, etc...

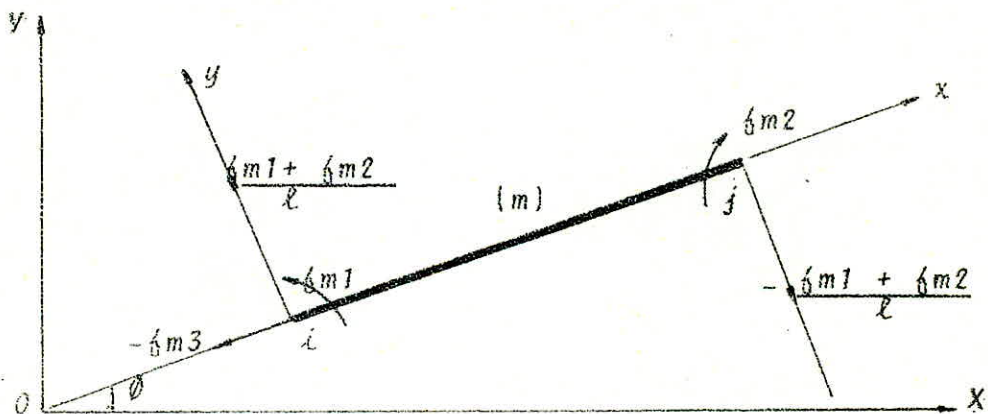
CONSTRUCTION DIRECTE DU SYSTEME REDUIT POUR UNE
OSSATURE PLANE

La construction du système tel qu'il a été présenté jusque là pêche par deux points :

- on assemble des degrés de liberté qu'on élimine par la suite.
- les degrés de liberté assemblés sont souvent liés.

Pour économiser de l'espace mémoire et du temps de calcul on procède par des méthodes plus directes pour les ossatures planes.

Etant donné l'interdépendance existant entre les moments et les efforts tranchants nodaux et celle entre les efforts normaux, on peut réduire le système de sorte à avoir des degrés de liberté par barre (et non par noeud).



Pour la barre (m) on a :

$$\delta m = \begin{bmatrix} \delta m_1 \\ \delta m_2 \\ \delta m_3 \end{bmatrix}$$

$$u_m = \begin{bmatrix} u_m 1 \\ u_m 2 \\ u_m 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \delta m = k_m \cdot u_m$$

Dans notre cas f_m et u_m sont comme suit :

$$f_m = \begin{bmatrix} M_i \\ M_j \\ N_j \end{bmatrix} \quad u_m = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ u_j \end{bmatrix}$$

Ainsi, si la barre (m) est encastrée en i et j, on a :

$$k_m = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES}{L} \end{bmatrix}$$

Si j est un noeud rigide mais i mobile, on a :

$$k_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES}{L} \end{bmatrix}$$

Pour la construction de la matrice de rigidité élémentaire dans le programme nous avons tenu compte des relaxations des noeuds. Nous avons donc fait intervenir des nombres réels compris entre 0 et 1 caractérisant la nature de l'appui :

- 0 pour une rotule
- 1 pour un noeud rigidement encastré.

Relation entre F et f :

Dans le cas d'une sollicitation plane d'un élément et si l'on reprend les vecteurs :

$$F_m = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} \quad \text{et } f_m = \begin{bmatrix} N_j \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix}$$

S'il n'y a pas de charges en travée, on a les relations suivantes dans le repère local

$$\left\{ \begin{array}{l} N_i = -N_j \\ T_i = \frac{M_i + M_j}{L} \\ M_i = M_i \\ N_j = N_j \\ T_j = -\frac{M_i + M_j}{L} \\ M_j = M_j \end{array} \right. \quad (49)$$

$$F_m = R \cdot f_m \quad (50)$$

R : matrice de réduction des variables

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Pour passer au repère global, on écrit :

$$F_m = T \cdot F_m' \quad (52)$$

où T est la matrice de rotation qui se présente sous la forme

$$T = \begin{bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & T_j \end{bmatrix}$$

avec

$$T_i = T_j = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θ est l'angle d'inclinaison de l'élément (m) par rapport à l'axe OX.

Enfinement le passage du vecteur f_m à F_m s'effectue à l'aide d'une matrice géométrique A rectangulaire

$$F_m = A \cdot f_m \quad (53)$$

avec $A = T \cdot R$

$$A = \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\frac{\sin \theta}{l} & -\frac{\sin \theta}{l} \\ -\sin \theta & \frac{\cos \theta}{l} & \frac{\cos \theta}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & \frac{\sin \theta}{l} & \frac{\sin \theta}{l} \\ \sin \theta & -\frac{\cos \theta}{l} & -\frac{\cos \theta}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Relation entre K et k :

Pour \bar{u} et \bar{u} virtuels cinématiquement admissibles, on a d'après le théorème des travaux virtuels,

$$F^T \cdot \bar{u} = f^T \cdot \bar{u}$$

ou en appliquant (53) $f^T A^T \bar{u} = f^T \bar{u}$

f^T étant quelconque, on en tire :

$$u = A^T \cdot \bar{u} \quad (55)$$

A partir des relations (53) et (55) on déduit :

$$K = A k A^T \quad (56)$$

CONDITIONS AUX LIMITES :

Il suffit de reporter les valeurs imposées des déplacements des appuis dans le système d'équations de $K \cdot u = F$ pour pouvoir le résoudre.

Il est clair que, sans la substitution d'un nombre minimal de déplacements imposés (nuls ou non nuls) de manière à empêcher les mouvements de corps solide de la structure, le système est impossible à résoudre car dans une telle situation les déplacements ne sont pas déterminés de façon unique par les forces. Cette

évidence physique s'interprète mathématiquement par le fait que la matrice de rigidité K est singulière ; elle admettrait donc une infinité de solutions.

On peut regrouper les degrés de libertés des noeuds libres, déterminer leurs déplacements et enfin calculer les réactions aux appuis. Dans le cas d'un traitement sur ordinateur ce procédé s'avère peu commode alors que l'on peut atteindre le même but en ajoutant un nombre très grand g au coefficient K_{ii} du noeud i considéré et en remplaçant dans le second membre F_i par $g\bar{u}_i$ (\bar{u}_i étant le déplacement imposé).

$$\begin{bmatrix} K_{11} & & & & & \\ & K_{12} & \dots & \dots & \dots & \\ & & K_{22} & \dots & \dots & \\ & & & & & \\ & & & & K_{ii} + g & \dots \\ & & & & & \dots \\ & & & & & \dots \\ & & & & & \dots \\ & & & & & \dots \\ & & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ g\bar{u}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

L'équation i s'écrit donc :

$$g u_i + \sum_j K_{ji} u_j = g \bar{u}_i$$

Si g est plus grand que n'importe quel autre terme de la matrice de rigidité cette égalité donnera :

$$u_i = \bar{u}_i$$

Cette procédure a un très grand avantage : elle vérifie la condition imposée tout en laissant le système sous sa forme initiale ; ceci permet de limiter les modifications à faire dans la séquence de calcul.

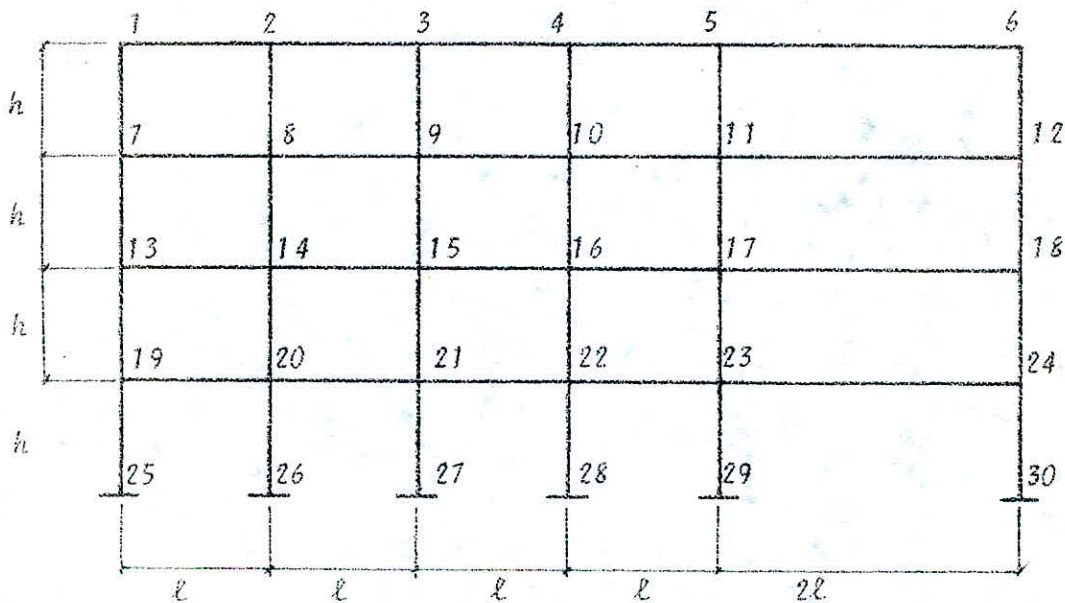
Lorsque la machine utilisée n'offre pas une grande précision (cas du QUESTAR/M) la présence du grand nombre implique un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité.

POSSIBILITES DU PROGRAMME
DE STRUCTURE

Maillage automatique :

Nous avons deux variantes pour le programme de structure, dans la première les données nodales sont introduites une à une, tandis que dans la seconde il est possible d'interpoler des noeuds séparés par des barres de même longueur

Exemple :



En supposant que les caractéristiques des sections restent les mêmes suivant une verticale ou une horizontale, on peut interpoler les noeuds compris :

horizontalement entre 1 et 5
entre 7 et 11
entre 13 et 17
entre 19 et 23
entre 25 et 29

verticalement entre 1 et 25
 entre 2 et 26
 entre 3 et 27
 entre 4 et 28
 entre 5 et 29

Efforts dûs aux effets thermiques :

Dans ce programme on tient compte des sollicitations dues aux variations de température. Ainsi, l'effort normal induit par une variation de température t est :

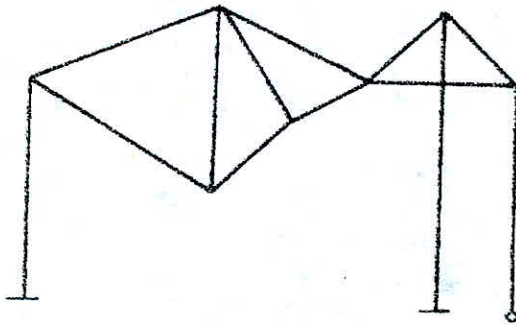
$$N = -ES \alpha t$$

car $\epsilon = \frac{l+l}{l} = \frac{l(1+\alpha t)}{l} - 1 = \alpha t$

α étant le coefficient d'expansion thermique

Structures calculées :

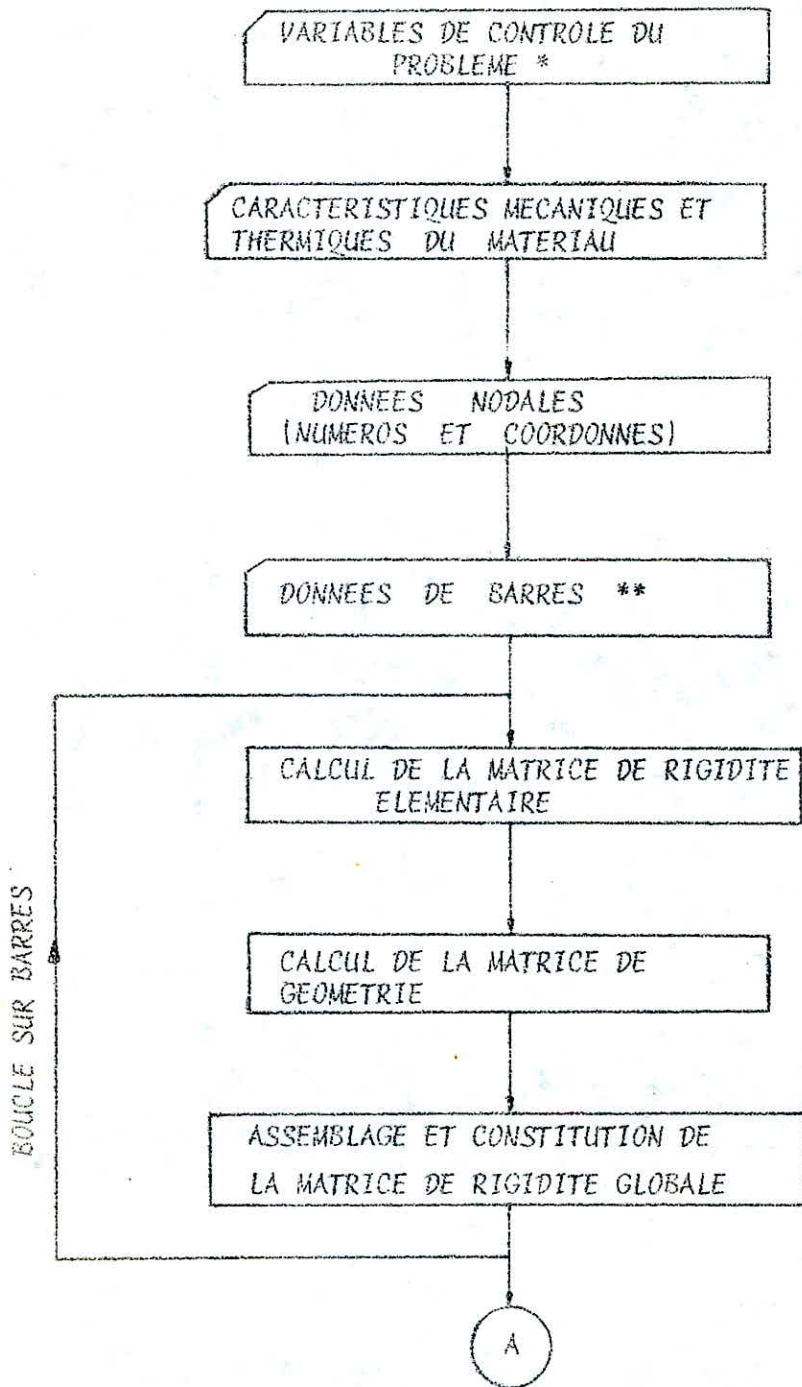
Une structure à barres planes est calculée quelque soit l'assemblage de ses éléments. (barres obliques...)



Il est même possible de calculer des arcs si la courbure n'est pas très importante ; on assimilera l'arc à un ensemble de barres comme suit :

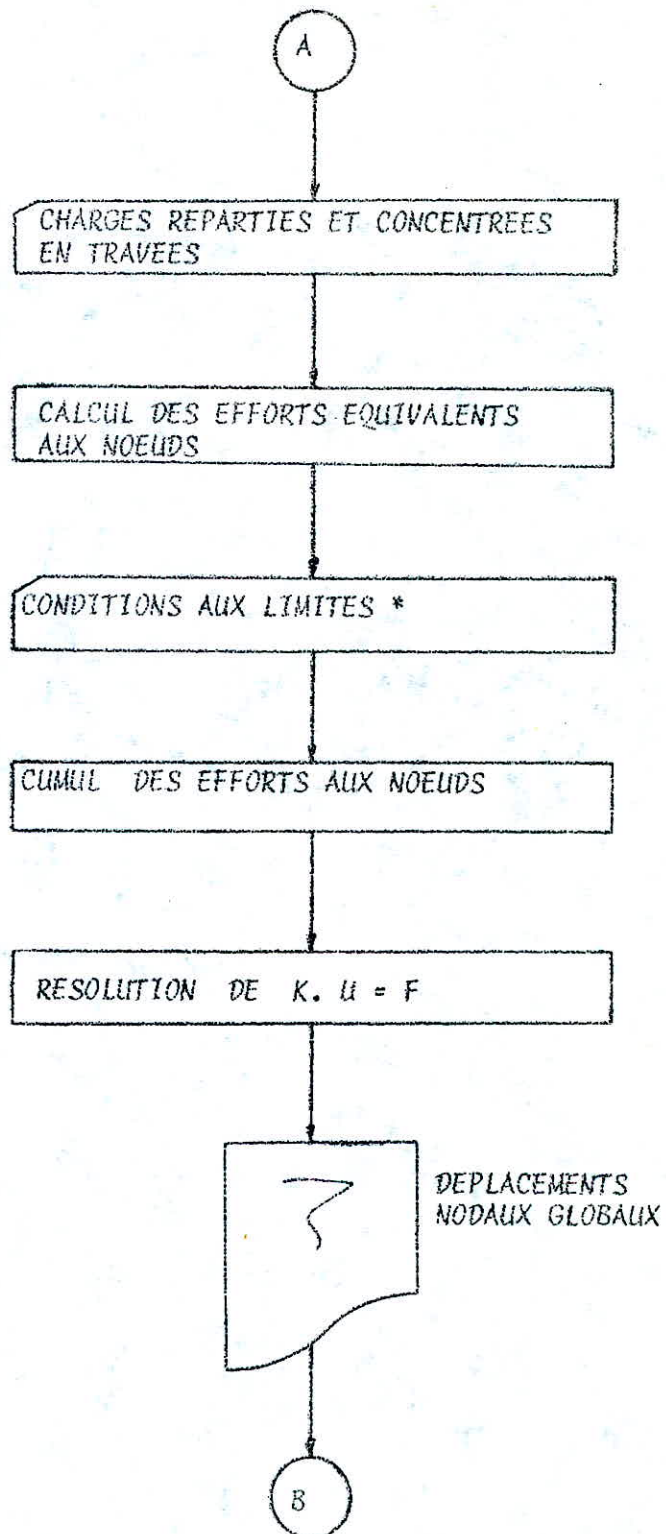


ORGANIGRAMME GENERAL DE CALCUL DE STRUCTURES

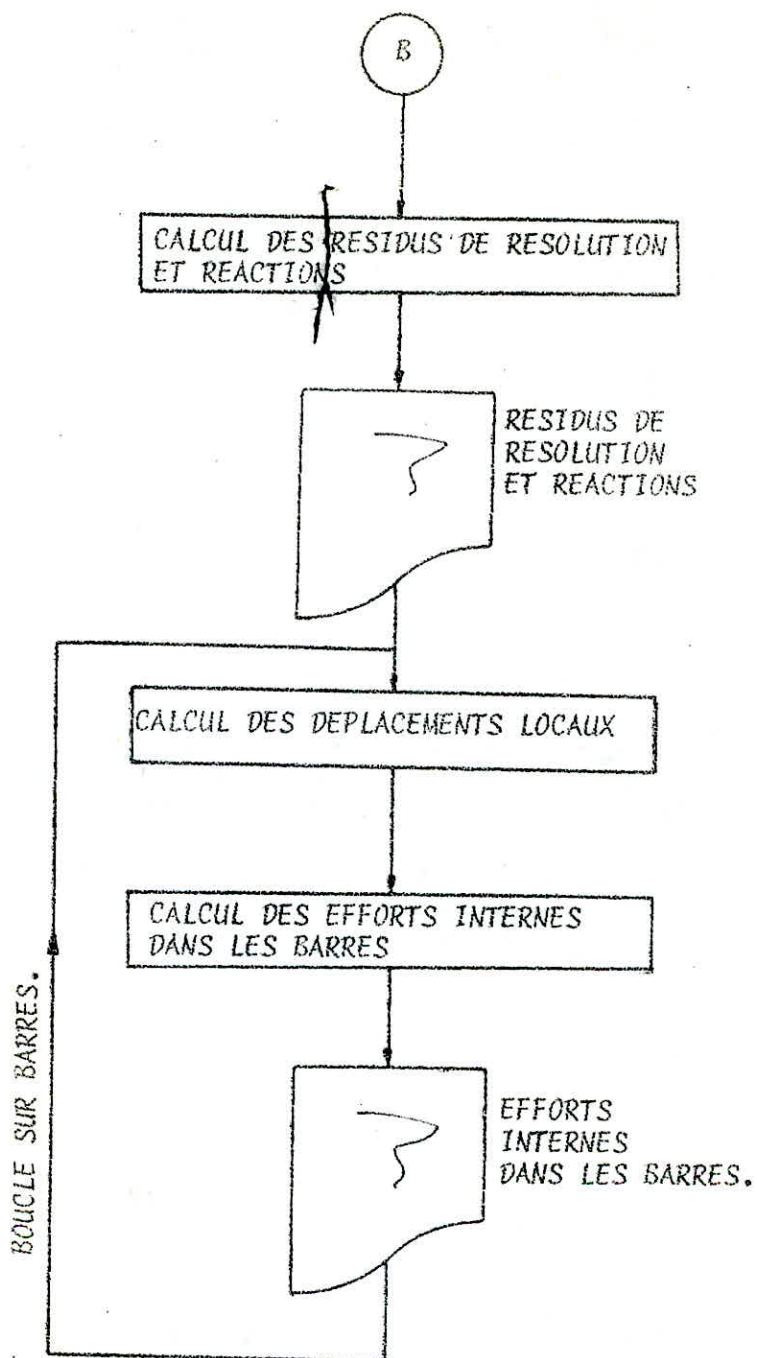


* Nombre total de noeuds, de barres, plus grande différence de numérotation des connections d'un élément.

** Numéro, connections, relaxations, géométrie.



* Chargements et déplacements imposés aux noeuds.



DEVELOPPEMENTS A APPORTER AU PROGRAMME

Si certains développements n'ont pas été réalisés jusqu'à présent sur le programme de structures ce n'est que par souci d'économie de mémoire. Il serait, par conséquent, très intéressant d'introduire une méthode de résolution par blocs : Ainsi on ne sera plus limité par le nombre de degrés de liberté.

Il sera utile de prendre en considération les déformations dues aux efforts tranchants pour pouvoir calculer les voiles avec ouvertures et les poutres non élancées.

Dans ce cas seule la matrice de rigidité élémentaire change.

On peut envisager le calcul des poutres sur appuis élastiques. La résolution s'effectue d'une manière très simple : Si un noeud i repose sur un ressort de rigidité X il suffit de remplacer le terme sur la diagonale K_{ii} par $K'_{ii} = K_{ii} + X$.

On peut aussi prévoir le calcul de dalles sollicitées perpendiculairement à leur plan, la dalle étant représentée par un ensemble de barres de rigidité équivalente.

En plus des transformations que l'on vient d'énumérer, il est prévu une étude dynamique de la structure. Cette étude sera élaborée sur un micro-ordinateur ayant une capacité nettement supérieure celle du QUESTAR/M.

CALCUL DE BETON ARME

INTRODUCTION

Un ouvrage doit être conçu et calculé de manière à présenter durant toute sa durée d'exploitation des sécurités appropriées vis-à-vis :

- de sa ruine ou celle de l'un de ses éléments,
- d'un comportement en service susceptible d'affecter gravement sa durabilité, son aspect ou encore le confort des usagers.

Lorsqu'une condition requise de la structure ou de l'un de ses éléments pour remplir l'objet défini ci-dessus cesse d'être satisfaite, on dit qu'un état limite a été atteint pour la structure ou l'élément considéré.

Un état limite peut être atteint par intervention combinée de multiples facteurs aléatoires d'insécurité qui peuvent être classés comme suit :

- incertitudes sur les valeurs des actions (incertitude dans la prévision, au moment de la conception de l'ouvrage, de la valeur des actions qui s'exerceront normalement sur celui-ci,...

- incertitudes sur les valeurs des résistances des matériaux, dues à la dispersion des mesures de résistance effectuées sur les éprouvettes.

- incertitudes sur les valeurs des sollicitations, dues à des approximations inévitables dans les hypothèses de calcul ou provenant d'inexactitudes géométriques dues à l'exécution.

- incertitudes sur la convenance du modèle de calcul utilisé pour représenter le comportement de la structure.

Recours au "semi-probabilisme"

Malheureusement, toutes les données statistiques nécessaires, ne sont pas disponibles et certains paramètres ne sont pas aléatoires, on est obligé en pratique de s'en tenir au semi-probabilisme, qui permet une approche suffisamment correcte du problème.

Les divers états limites que l'on peut envisager peuvent être classés en deux catégories :

a) - les états limites de service au delà desquels ne sont plus satisfaites les conditions normales d'exploitation et de durabilité, et pour lesquels les critères sont des contraintes admissibles.

Ils correspondent à la limite ;

- de compression du béton,
- d'ouverture des fissures,
- de déformation.

b) - Les états limites ultimes correspondent à la ruine de l'ouvrage ou de l'un de ses éléments par perte d'équilibre statique, rupture, flambement,...

PRESENTATION DU PROGRAMME.

Le programme détermine le ferrailage transversal et longitudinal des poutres en béton, de sections rectangulaire ou en forme de T, en flexion simple, conformément aux règles BAEL 80.

Le programme de structure donne les efforts aux noeuds par combinaison défavorable des actions.

Les sollicitations en travées sont calculées à partir des moments et efforts tranchants sur appuis, d'après les formules classiques de résistance des matériaux. Elle sont établies tous les 1/10 de travées.

Les caractéristiques des travées peuvent être différentes ou identiques.

SORTIES.

Les données introduites (géométrie, actions, résistances caractéristiques des matériaux type de fissuration, ...) apparaissent sur l'imprimante.

Le programme imprime ;

Pour les aciers longitudinaux :

- le moment flechissant (état limite ultime et état limite de service), ainsi que les abscisses de calculs.
- les contraintes de compressions du béton à l'état limite de service.
- les contraintes dans les aciers.
- le pourcentage d'armatures.

Pour les aciers transversaux :

- l'effort tranchant (à l'état limite ultime).
- les contraintes tangentées.
- l'espacement maximum admissible t .
- le rapport A_t/t .

Pour les vérifications diverses :

- conditions aux appuis.

NOTATIONS UTILISEES DANS LE CHAPITRE.

- $A = A_s$ = acier tendu.
 $A' = A'_s$ = acier comprimé.
 E_s = module d'young de l'acier = 200.000 MPa.
 M_u = moment extérieur en état limite ultime (ELU).
 M_R = moment repère en état limite ultime
 $M_{T,u}$ = moment maximal équilibré par la table seul d'une section en T_e en E.L.U.
 M_{ser} = moment extérieur en état limite de service (ELS)
 $M_{T,s}$ = moment maximal équilibré par la table seule d'une section en T_e en ELS.
 b = largeur total de la table d'une poutre en T_e, largeur d'une poutre rectangulaire.
 b_0 = largeur de la nervure d'une poutre en T_e!
 h_s = hauteur utile d'une section.
 h_0 = hauteur de la table d'une section en T_e!.
 d' = enrobage des aciers comprimés.
 d = enrobage des aciers tendus.
 F_{cj} = contrainte caractéristique du béton à 28 jours.
 F_e = limite élastique de l'acier.
 h_t = hauteur totale de la section.
 y = distance de la fibre neutre à la fibre la plus comprimée.
 Z = bras de levier.
 n = coefficient d'équivalence acier - béton.
 ϵ_{bc} = raccourcissement du béton.
 ϵ_s (ϵ'_s) = allongement (raccourcissement) de l'acier tendu (comprimé).
 δ' = d'/h_s .
 μ_{bu} = moment réduit en E.L.U = $M_u/bh_s^2 F_{bu}$.
 F_{bu} = contrainte de calcul du béton en état limite ultime correspondant à un raccourcissement supérieur à 2%.
 ψ = coefficient de remplissage.
 δ_G = coefficient de centre de gravité.
 α = ordonnée de l'axe neutre = y/h_s
 σ_s (σ'_s) = contrainte de traction (de compression), donnée par le diagramme de formation-contrainte de l'acier pour un allongement donné.

- $\bar{\sigma}_s$ = Contrainte admissible de l'acier en E.L.S.
 σ_s' = contrainte de l'acier comprimé en E.L.S.
 σ_{bc} = contrainte de compression du béton sur la fibre la plus comprimée.
 M_{rb} = moment résistant du béton seul.
 m = coefficient de fissuration.
 V_u = Effort tranchant extérieur
 τ_b = Contrainte tangente réelle
 τ_u = Contrainte tangente de calcul
 t = Espacement des nappes d'armatures.

HYPOTHESES PROPRES AUX CALCULS AUX ETATS LIMITES DE SERVICE.

1. Au cours de la déformation d'une poutre sous l'action d'un système quelconque de forces extérieures, les sections droites restent planes et conservent leurs dimensions.
2. La résistance du béton tendu est considérée comme nulle.
3. Par suite de l'adhérence, chaque armature subit la même variation linéaire que la gaine de béton qui l'entoure.
4. A toute déformation relative ϵ d'un élément de fibre compris entre deux sections droites infiniment voisines correspond une contrainte normale.

$$\sigma = E \epsilon$$

E , module de déformation longitudinal du matériau constitutif.

$$\epsilon_s = \epsilon_b \quad ; \quad \sigma_s = -\frac{E_s}{E_b} \sigma_b$$

5. Etat-limite de compression du béton.
6. Etat-limite d'ouverture des fissures.

HYPOTHESES PROPRES AUX CALCULS D'ETAT-LIMITE ULTIME.

On suppose ici que les effets de second ordre (influence des déformations sur les sollicitations) sont négligés.

Aux hypothèses 1,2,3, du calcul élastique, pré-cités s'ajoutent

4. Déformations relatives limites :
 - de l'acier le plus tendu = 10‰
 - du béton comprimé par flexion = 3,5‰
 - par compression simple = 2‰
5. Règle "des trois pivots" = pour dimensionner à l'état limite ultime, on admet que le diagramme des déformations passe par l'un des trois pivots A, B, et C

Fig 1.1.

Pivot A, Région 1.

L'allongement de l'acier le plus tendu est 10%. La section est soumise à la traction simple ou à la flexion simple ou composée
Pivot B, Région 2.

Le raccourcissement du béton est 3,5 %. La section est soumise à la flexion simple ou composée.

Pivot C, Région 3.

Le raccourcissement du béton au niveau de C est 2%. La section est soumise à la flexion composée ou à la compression simple.

MATERIAUX.ACIER. (Art. 2.2 BAEL).

Les aciers utilisés sont du type naturels ou ecrouis. Ils sont caractérisés par la limite d'élasticité F_e et la forme de leur diagramme contraintes-déformations.

Dans un souci d'économie de mémoire, nous avons préféré adopter, pour les aciers écrouis, le diagramme bi-linéaire.

Le diagramme contraintes-déformations de calcul s'obtient par une affinité parallèle à la droite de Hooke et de rapport $1/\gamma_s$ (fig 1).

BETON. (Art. 4.3,4).

Le diagramme contraintes-déformations de calcul est le diagramme parabole-rectangle pour la section rectangulaire, le diagramme rectangulaire simplifié pour la section en T (fig 2)

Condition de non fragilité (art. 4.2): la sollicitation provoquant la fissuration du béton ne doit pas entraîner le dépassement de la limite d'élasticité dans l'acier.

ALGORITHME DE CALCUL.

Nous étudierons le cas général où la section peut comporter des armatures comprimées.

On considère la section comme résultant de la superposition de deux sections fictives. Fig 2.2.

1/- Une section rectangulaire, sans aciers comprimés dont l'armature tendue est constituée par une fraction A_b de la section totale A , équilibrant une fraction M_b du moment total M (M_u ou M_{ser} , selon l'état limite considéré)

2/- Une section de hauteur $h_s - d'$, de largeur nulle, dont la membrure comprimée est constituée par l'armature comprimée, de section A' , et la membrure tendue par une fraction A_s de la section totale, et qui équilibre une fraction M_s , limitée à 40% du moment total (art. BAEL).

Si l'on désigne par σ_s et $\sigma_{s'}$ les contraintes respectives des aciers tendus et comprimés, le moment équilibre par la section fictive ;

$$M_s = A_s (h_s - d') \sigma_s = A' (h_s - d') \sigma_{s'}$$

On a donc de façon générale, aussi bien pour l'état limite ultime que pour l'état limite de service (moments rapportés au centre de gravité des aciers tendus) ;

$$M = M_b + A' (h_s - d') \sigma_{s'}$$

ou encore

$$M = M_b + A_s (h_s - d') \sigma_s$$

et

$$A = A_b + A' \frac{\sigma_{s'}}{\sigma_s}$$

Dans les paragraphes suivants, on donnera le mode de calcul des armatures pour l'état limite ultime et l'état limite de service.

DIMENSIONNEMENT PAR L'ETAT LIMITE ULTIME.

1. Section rectangulaire.

Domaine 1b

Ici, l'acier le plus tendu atteint sa déformation-limite ϵ_s :

Le raccourcissement du béton comprimée sur la fibre opposée de section est compris entre 0 et 3,5‰

Les frontières du domaine sont définis par :

$$0 < \alpha < 1/27$$

Les diagrammes des déformations et des contraintes ont alors l'allure représentée sur la Fig 1.1.

L'équation de compatibilité ;

pour les aciers tendus $\epsilon_s = 10‰$

pour les aciers comprimés $\epsilon'_s = 10‰ \frac{\alpha}{1 - \alpha}$

pour le béton $\epsilon_{bc} = 10‰ \frac{\alpha}{\alpha - 1}$

A l'intérieur du domaine 1b, il existe également une valeur particulière du raccourcissement ϵ_{bc} qui est celle pour laquelle le diagramme parabole - rectangle se réduit à un diagramme parabolique, soit $\epsilon_{bc} = 2‰$ et la valeur correspondante de $\alpha = 1/6$ (0.1667).

a) - Premier cas :

Soit $0 < \epsilon_{bc} < 2‰$

Soit λy ($\lambda > 1$) la valeur de l'ordonnée correspondant au raccourcissement de 2‰ dans le diagramme de déformation fictivement prolongé. Fig 1.2

Un calcul simple de l'aire et de la position du centre de gravité du secteur parabolique permet d'obtenir :

L'aire du diagramme $y \cdot F_{bu} (3\lambda - 1) / 3\lambda^2$

Le centre de gravité $y (4\lambda - 1) / 4 (3\lambda - 1)$

Le coefficient de remplissage $(3\lambda - 1) / 3\lambda^2$

Le coefficient de centre de gravité ; $(4\lambda - 1)/4 (3\lambda - 1)$

$$\lambda y/h (1 - \alpha) = 1/5$$

ou alors $\lambda = (1/\alpha - 1)/5$

Les équations d'équilibre

$$A_s \sigma_s = b \cdot h_s \cdot F_{bu} \cdot \alpha \cdot (3\lambda - 1)/3\lambda^2$$

b)- Deuxième cas :

$$\text{Soit } 2\% < \epsilon_{bc} < 3,5\%$$

Soit λy ($\lambda < 1$) la valeur de l'ordonnée pour laquelle le raccourcissement est égale à 2%. (Fig 1.3)

Par un raisonnement analogue, nous obtenons ;

$$\psi = 1 - \lambda/3$$

$$y_G = y (\lambda^2 - 4\lambda + 6)/4 (3 - \lambda)$$

d'ou les équations

$$\lambda = 2\% / \epsilon_{bc} = (1/\alpha - 1)/5$$

$$A_s \cdot \sigma_s = b \cdot h_s \cdot F_{bu} \cdot \alpha (1 - \lambda/3).$$

REMARQUE :

Tout ces calculs supposent α connu. il serait possible de stocker un tableau donnant les valeurs de ϵ_{bc} , ψ , σ_G et y en fonction de α pour le domaine 1b, mais ceci n'est malheureusement pas économique du point de vue mémoire.

Désignons par ;

A_r section d'acier tendu réelle.

A_a section d'acier tendu approchée.

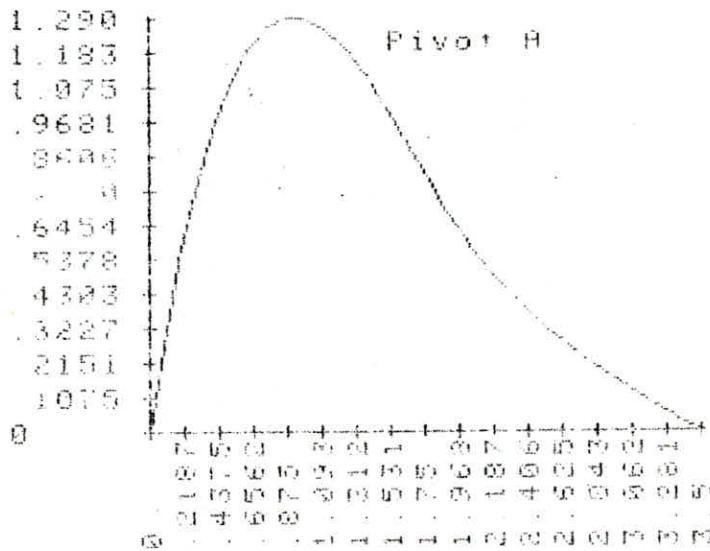
Faisons varier α dans le domaine 1b, et calculons le moment réduit correspondant ainsi que le bras de levier réel z_r .

Calculons ensuite α (approché), pour la valeur du moment réduit trouvé et le bras de levier z_a (approché).

$$\alpha(\text{approché}) = 1,202 (1 - (1 - \mu b u)^{1/2}).$$

Pour de faibles valeurs du raccourcissement du béton ($\epsilon_{bc} < 2\%$), l'approximation faite sur α semble importante, en fait cela n vient que sur le bras de levier qui varie très peu comme on peut le voir dans le tableau 1 ci-après ou l'on calcule la variation relative de la section d'acier.

Le graphe de la figure 1.4 qui donne la variation relative de section d'acier en fonction du raccourcissement du béton montre que l'approximation sur la section d'acier ne dépasse pas 1,29% qui n'est en fait très faible puisque pour le choix des barres $A > A(\text{calculé})$



$$\left(\frac{A_r - A_a}{A_r} \right) \% = g (\epsilon_{bc} \%)$$

NOTE

La section de béton étant surabondante dans ce domaine la mise en place d'armatures comprimées ne sera pas nécessaire.

Le raccourcissement de la fibre la plus comprimée a pour valeur 3,5‰, ce qui correspond à la contrainte F_{bu} d'après la figure 2.1

Le diagramme des contraintes comporte une partie parabole et une droite.

Les sections restent planes ;

$$\epsilon_s = 3,5\text{‰} (1 - \alpha) / \alpha$$

$$\epsilon_{bc} = 3,5\text{‰}$$

$$\epsilon'_s = 10\text{‰} (\alpha - \delta') / \alpha : \delta' = d' / h_s$$

Nous exposerons deux méthodes de calcul :

- méthode du moment repère.
- méthode du moment limite.

1. MOMENT REPERE

Lorsque l'allongement relatif de l'armature tendue est égal à l'allongement élastique ϵ_e , le diagramme des déformation est situé dans le domaine 2, et la position de l'axe neutre est donnée par (fig 2.2.1) ;

$$\alpha_x = 3,5 / (3,5 + 1000 \epsilon_e)$$

On définit alors le moment repère MR comme étant celui pour lequel la contrainte de traction des aciers est F_e / γ_s la valeur est donnée par l'expression ;

$$MR = \mu_x b \cdot h_s^2 \cdot F_{bu}$$

Ce moment ne dépend que des contraintes de calcul de l'acier et du béton.

Le principe consiste à bloquer le diagramme des déformations à $\epsilon = \epsilon_e$ ceci pour des moment supérieur au moment repères, et à reprendre l'excédent par des aciers comprimés.

Afin de trouver une solution voisine de la solution la plus économique, on n'établira pas, en principe pour nos calculs une armatures comprimée si la déformation relative ϵ_s est supérieure à la déformation élastique ϵ_e .

$$M \leq MR$$

Le moment sera équilibré par le béton seul l'armature inférieure est tendue avec un allongement supérieur à ϵ_c , donc bien utilisée.

$$M > MR$$

Il serait possible d'établir seulement une armature inférieure, mais travaillant à une contrainte trop faible et sera donc mal utilisée.

On peut montrer que la section A de l'armature tendue augmente très rapidement avec le moment, surtout dans le cas des aciers naturels.

A titre d'exemple le tableau 2 illustre le calcul de sections pour deux aciers ayant même limite élastique de calcul, l'un naturel, l'autre écroui, correspondant successivement aux moments repères $MR1$ et $MR2$.

La figure (2.3.) montre la variation de la section en fonction du moment. On constate que cette solution doit être rejetée en pratique pour les aciers naturels ; elle ne pourra être adoptée pour les aciers écrouis que si le moment a une valeur voisine de celle du moment repère.

Dans le cas général ($M > MR$), on établira une armature comprimée.

Notons que ce calcul pourrait conduire à un dépassement de la contrainte d'état limite de compression du béton. Ainsi, comme nous le verrons plus loin, dans notre programme la section d'armature sera recalculée lorsque la contrainte sur la fibre la plus comprimée dépasse $0,6 f_{cj}$.

TECHNIQUE DE CALCUL

$$1. \text{ On calcul } \gamma_{bu} = M_u / b \cdot h_s \cdot \sigma_{bu}^2$$

2. Si $\gamma_{bu} < \gamma_r$; des aciers comprimés ne sont pas nécessaires

$$\alpha = 119 (1 - (1 - 594 \gamma_{bu} / 289)^{1/2}) / 99$$

Connaissant α

$$\epsilon_s \longrightarrow \sigma_s = f(\epsilon_s, \sigma_{ed}) \text{ diagramme de calcul}$$

$$Z = h_s (1 - \sigma_G \cdot \alpha)$$

La section d'armature

$$A = \frac{M}{Z \cdot \sigma_s}$$

3. Si $\chi_{bu} > \chi_r$

Pour les aciers naturels $\alpha_r = 735 / (F_{ed} + 735)$

Pour les aciers écrouis $\alpha_r = 735 / (F_{ed} + 1155)$

α_r donne χ_r

Le raccourcissement relatif des aciers supérieurs a pour vale

$$\epsilon'_s = 3,5\% - d' (\epsilon_e + 3,5\%) / h_s$$

On en déduit la contrainte ;

$$\sigma'_s = g (\epsilon'_s , F_{ed}).$$

La section des armatures est alors donnée par les expression

$$A' = (M_u - M_r) / (h_s - d') \sigma'_s$$

$$A = (M_R / Z_r + A' \sigma'_s) / F_{ed}.$$

2. NOTION DU MOMENT LIMITE.

M. PERCHAT a mis en évidence l'existence d'un moment limite correspondant au risque d'atteinte de la contrainte admissible du béton ($0,6 f_{cj}$) sur la fibre la plus comprimée aux ELS, lors d'un dimensionnement aux états limites ultimes.

Ce moment limite, noté M_{lu} , dépend du caractère mécanique des aciers utilisés, de la résistance à la compression du béton ainsi que du rapport θ du moment ultime M_u au moment de service M_{ser} . Les moments étant évalués avec leurs coefficients de pondération respectifs pour le même cas de charge de la même combinaison d'actions.

$$\theta = M_u / M_{ser}$$

Le dépassement de ce moment limite peut entraîner :

- le dépassement de la contrainte du béton en service,
- le risque d'une sous-utilisation des aciers tendus ($\sigma_s < \sigma_{élastique}$) Fig 2.5

Pour l'exemple traité précédemment, calculons les contraintes en service pour des moments en service égaux à :

$$M_{ser} = M_u / \theta$$

Le cas de l'acier écroui est traité. Les résultats du tableau montrent que les contraintes de compression croissent en fonction de M_u le moment limite est défini comme étant celui pour lequel $\sigma_{bc} = 0,6 f_{cj}$.

On remarque d'autre part que la contrainte en service des aciers tendus diminue pour des moments ultimes croissants.

L'étude effectuée par M. PERCHAT montre que la loi de variation du moment limite réduit en fonction de θ peut être schématisée par une droite ;

$$u_{lu} = a\theta - b$$

Les valeurs des coefficients a et b sont données pour les cas les plus courants qui peuvent se présenter.

Pour des moment $M_u > M_{lu}$, il convient donc, soit de changer les dimensions de la section, soit de mettre des aciers comprimés.

Principe de dimensionnement

$u_{bu} \leq u_{lu}$; des armatures comprimées ne sont pas nécessaires.

$u_{bu} > u_{lu}$; la section d'aciers comprimée strictement requise.

$A' = (M_u - M_{lu}) / (h_s - d') \sigma_s'$ la section d'aciers tendue.

$A_s = (A' \sigma_s' + 0,416 b \cdot h_s \cdot F_{bu} \cdot \alpha) / \sigma_s$.

REMARQUE CONCERNANT LE PROGRAMME DE CALCUL :

Les deux méthodes de calcul ont été adoptées pour notre programme.

L'entrée des données étant sous forme conversationnelle, le choix pour le calcul se fera en fonction des données de l'utilisateur.

La méthode du moment limite suppose les valeurs suivantes de la résistance du béton et de la limite élastique pour les deux types de l'acier ;

- pour F_c 28 : 20, 22, 25 (MPa).
- pour F_e : 400, 500 (MPa).

Les équations de u_{lu} seront stockées en début du sous-programme SPAL que nous étudierons par la suite.

Le programme analyse les données et fait le branchement au sous-programme convenant.

SECTION EN Te.

Ce dimensionnement implique une fissuration peu nuisible. En cas de fissuration préjudiciable, il faut généralement dimensionner par l'état limite de service.

La présence de la table seule ^{rend} pratiquement superflue la vérification de l'état limite de compression, il n'est donc généralement pas nécessaire de prévoir des armatures comprimées.

Le diagramme retenu du béton est le diagramme rectangulaire simplifié. Le moment qui serait équilibré par la table seule

$$M_{T,U} = B h_0 (h_s - h_0/2) F_{bu}$$

$$\underline{M_u \leq M_{T,U}}$$

La table est surabondante le calcul se ramène à la détermination des armatures d'une section rectangulaire $b \times h_t$.

$$\underline{M_u > M_{T,U}}$$

On décompose la section en deux sections fictive (Fig 2.61).

TECHNIQUE DE CALCUL

On cherche tout d'abord les armatures A_1 de la section rectangulaire de largeur b_0 soumise au moment M_1 .

$$M_1 = M_u - M_{T,U} (1 - b_0/b)$$

$$\mu_{bu} = M_1 / b_0 h_s^2 F_{bu}$$

On calcule ensuite $\alpha = 1,25 (1 - (1 - 2 \mu_{bu})^{1/2})$ puis σ_s

La section d'aciens cherchée

$$A_s = (M_1 / h_s (1 - 0,4 \alpha) + (b - b_0) h_0 F_{bu}) / \sigma_s$$

CALCUL AUX ETATS LIMITES DE SERVICE.

Le calcul des contraintes s'effectue en supposant les comportement du béton et de l'acier linéaires. (fig 3.1).

La méthode de calcul est donc classique ; c'est celle des règlements antérieurs.

ETAT LIMITE D'OUVERTURE DES FISSURES.

Les règles BAEL (Art 4.5,3) prescrivent trois types de fissuration

- fissuration peu nuisible ; la contrainte de l'acier tendu n'étant pas limitée en service, aucune vérification particulière n'est demandée
- fissuration préjudiciable ; la contrainte de l'acier tendu est limitée à la plus basse des deux valeurs $\frac{2}{3} f_{e} ; 150 \text{ m.}$
- fissuration très préjudiciable ; la contrainte de l'acier tendu est limitée à la plus basse des deux valeurs $0,5 f_{e} ; 110 \text{ m.}$

ETAT LIMITE DE COMPRESSION.

Afin d'éviter l'écrasement du béton dans la zone comprimée, la contrainte du béton est limitée à $\sigma_{bc} = 0,6 f_{c,j}$ (Art. 4.5,2 BAEL).

Section rectangulaire ;

Le moment résistant du béton est donné par ; Fig 3.2

$$M_{rb} = 0,5 b h_s^2 \bar{\alpha} (1 - \bar{\alpha}/3) \sigma_{bc}$$

Pour un moment extérieur appliqué, on cherche la section d'acier pour satisfaire $\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$ et $\sigma_{b'} = \bar{\sigma}_{b'}$.

Le programme calcule le moment appliqué et le compare à M_{rb} ;

$$M_{ser} \leq M_{rb}$$

Des armatures comprimées ne sont pas nécessaires. Les équations d'équilibre permettent d'écrire ;

$$M_{ser} = \frac{b y^2 (3 h_s - y)}{h_s - y} \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_n}$$

équation du 3^e degré.

Le calcul de la position de l'axe neutre se fera par un processus itératif basé sur la résolution de l'équation du moment statique ;

$$B = M_{ser} / b h s^2 \bar{\sigma}_s = (3 - \alpha) \cdot \alpha^2 (6 n (1 - \alpha))$$

$$\alpha = \left(6 n B \frac{1 - \alpha}{3 - \alpha} \right)^{1/2}$$

initialisation de α à 0,3

$$Z = h s (1 - \alpha/3) ; A_s = M_{ser} / Z \cdot \bar{\sigma}_s.$$

$M_{ser} > M_{rb}$

Le béton comprimé seul reprend M_{rb} l'excédent ($M_{ser} - M_{rb}$) sera repris par des armatures comprimées.

La section d'armatures comprimées strictement nécessaires est :

$$A'_x = (M_{ser} - M_{rb}) / (h s - d') \sigma'_s$$

$$\sigma'_s = f_{cj} (1 - \delta' / \alpha_{rb}).$$

La résolution des équations d'équilibre donne la section d'acier tendus ;

$$A_s = \frac{M_{rb}}{h s (1 - \alpha_{rb}/3)} + A'_x (\sigma'_s) \frac{1}{\bar{\sigma}_s}$$

Section en T_e'

Le dimensionnement par l'état-limite de service implique une fissuration préjudiciable ou très préjudiciable.

Le moment maximal équilibré par la table seule est : (fig 3.)

$$M_{T,s} = 0,5 b h_0 (H_s - h_0/3) \sigma_{bc}$$

$M_{ser} \leq M_{T,s}$; la section se comporte comme une section rectangulaire $b \times h_t$.

$M_{ser} > M_{T,s}$; le programme se fixe la valeur de la contrainte du béton à une fraction de 0,6 f_{cj} . Nous avons estimé une erreur relative de 1% sur cette contrainte.

Le programme calcule les forces de compression dans le béton et les moments correspondants (fig 3.) il compare le moment de la section au moment extérieur et corrige, éventuellement, l'erreur sur la contrainte de béton. Ce calcul se fait par un procédé itératif.

ETUDE DE L'EFFORT TRANCHANT.

Les poutres soumises à des efforts tranchants sont justifiées vis à vis de l'état limite ultime.

L'effort tranchant de calcul est défini par :

$$V_u = \sum_1^n \gamma_{si} V_{ki}$$

Où

V_{ki} effort tranchant dû à l'action k γ_{si} coefficient de pondération de l'action k .

La justification d'une section concerne les armatures transversales de l'âme ainsi que la contrainte de compression des bielles.

D'autre part, les zones d'appui (d'about ou intermédiaire) sont l'objet de vérifications supplémentaires.

La contrainte tangente de calcul est prise conventionnellement égale à : (art 5.1,1 BAEL)

$$\tau_u = V_u / b h_s$$

Où

b = largeur de l'âme.

h_s = hauteur utile de la poutre.

Outre les contraintes tangentes longitudinales et transversales l'effort tranchant provoque sur des plans inclinés à 45° sur la ligne moyenne, des contraintes de traction ou de compression qui peuvent provoquer une fissuration à 45° près des appuis et un risque d'écrasement du béton suivant les bielles découpées par les fissures à 45°.

Il est donc nécessaire de limiter la contrainte tangente τ_b et de couvrir les fissures obliques par des armatures d'âme.

Nous nous limiterons dans le programme au calcul d'armatures d'âme droites.

Afin que la contrainte admissible du béton de l'âme ne soit pas dépassée les règles BAEL (art. 5.1,2) limitent τ_u aux valeurs suivantes :

En cas de fissuration peu nuisible

$$\tau_u \leq \inf (0,13 f_{cj} ; 4 \text{ Mpa}).$$

En cas de fissuration préjudiciable (ou très)

$$\tau_u \leq \inf (0,1 f_{ct} ; 3 \text{ MPa}).$$

La résistance des armatures d'âme est vérifiée selon la théorie du treillis de RITTER - MÖRSH.

$$1 \frac{A_t}{s} \sigma_{st} = b_0 \frac{(\tau_b - \tau_{bf})}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

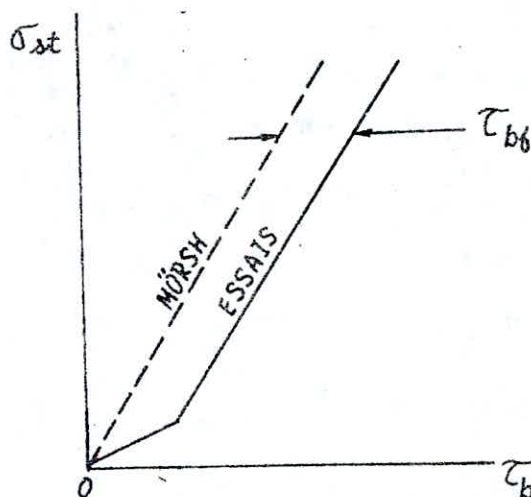
Où

α = inclinaison de l'armature transversale.

$\alpha = 90^\circ$.

$$1 \frac{A_t}{s} \sigma_{st} = b (\tau_b - \tau_{bf})$$

avec $\tau_b = \frac{V_u}{b_0 \cdot z} = \frac{\tau_u}{0,9}$



$$\sigma_{st} = \frac{F_{ct}}{s} ; \frac{A_t}{b_0 s} \geq \frac{\tau_u - 0,5 k}{0,8 F_{ct}}$$

Les règles BAEL (art. 5.1,2) imposent un pourcentage minimal d'armatures d'âmes droites donné par :

$$\frac{A_t}{b \cdot t} F_{ct} \geq \sup (\tau_u / 2 ; 0,4 \text{ MPa})$$

L'espacement maximal des nappes d'armatures d'âme ;

$$t \leq \inf (0,9 h_s ; 40 \text{ cm}).$$

VERIFICATIONS DIVERSES.

- Appui simple d'about :

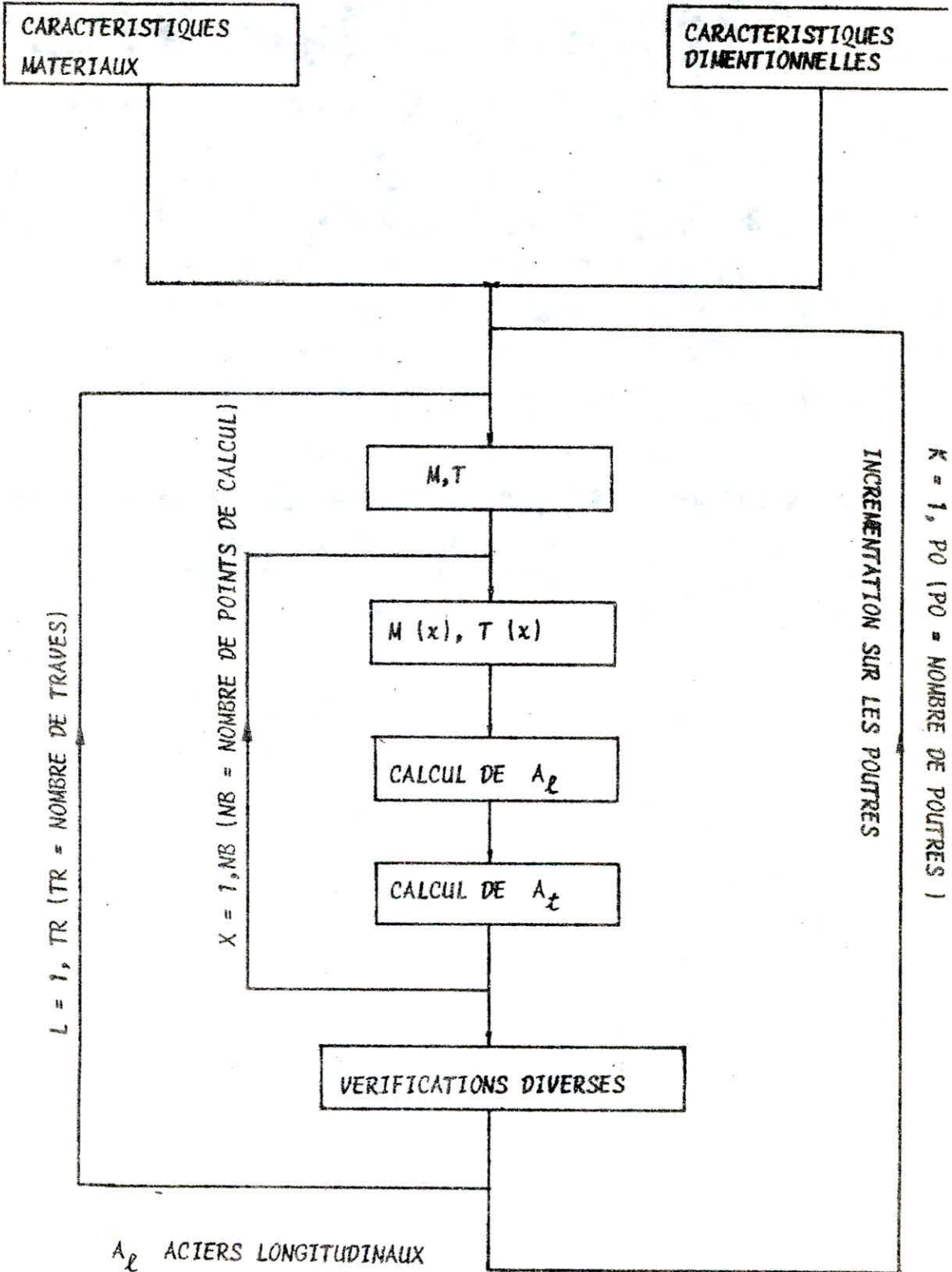
Sur un appui simple, l'armature de traction doit pouvoir équilibrer un effort de traction égal à la réaction d'appui, (soit $A \geq 1,15 V_{uo} / Fe$) et être ancrée au delà du nu d'appui pour cet effort.

- Appui intermédiaire :

Pour chacune des travées adjacentes à un appui intermédiaire, on vérifiera la bielle comprimée où la contrainte doit être inférieure à $0,867 F_{cj}$ et pour les aciers inférieurs on doit avoir :

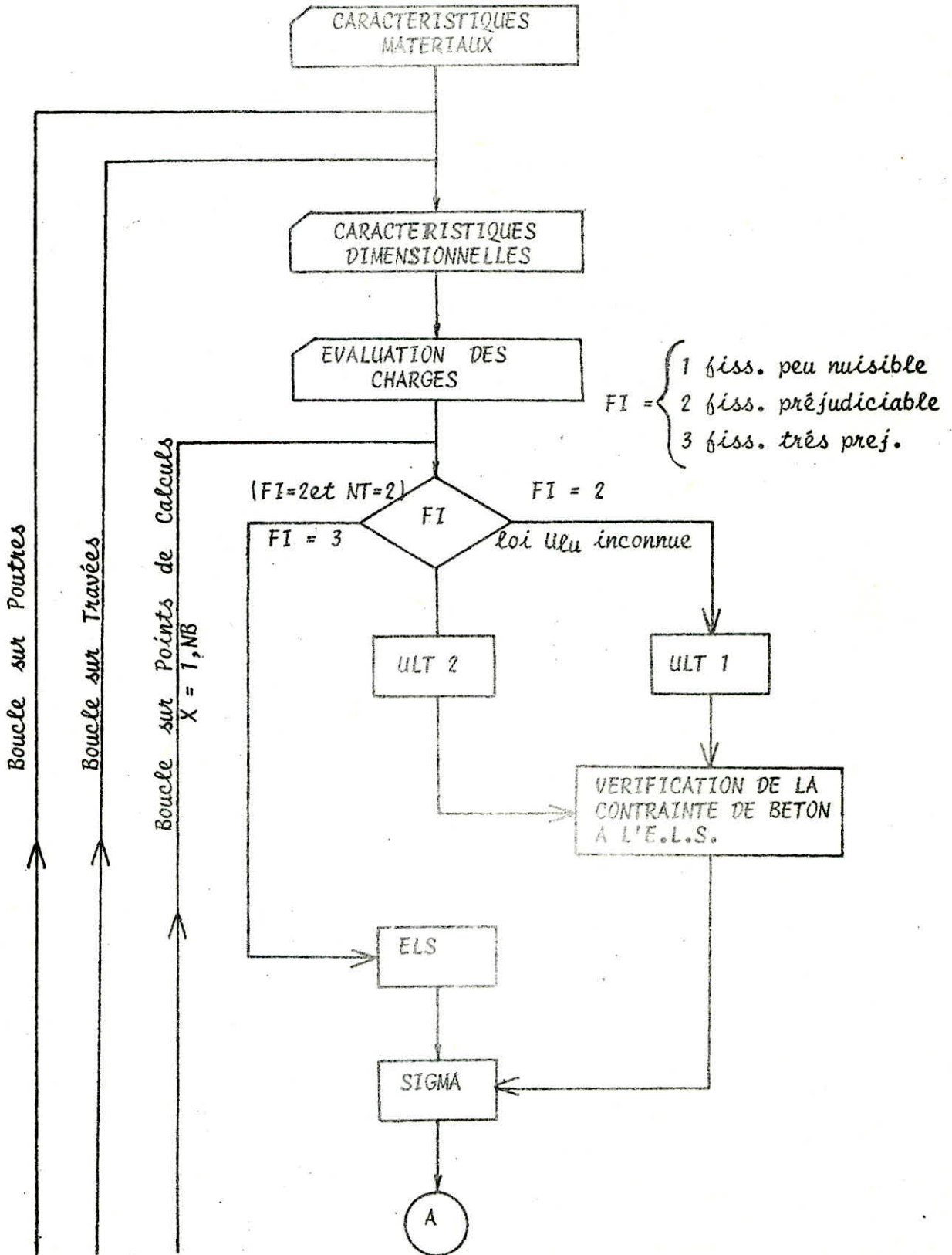
$$A_i \geq 1,15 (V_{uo} + M_u/z) / Fe. \text{ où } M_u : \text{moment à l'appui.}$$

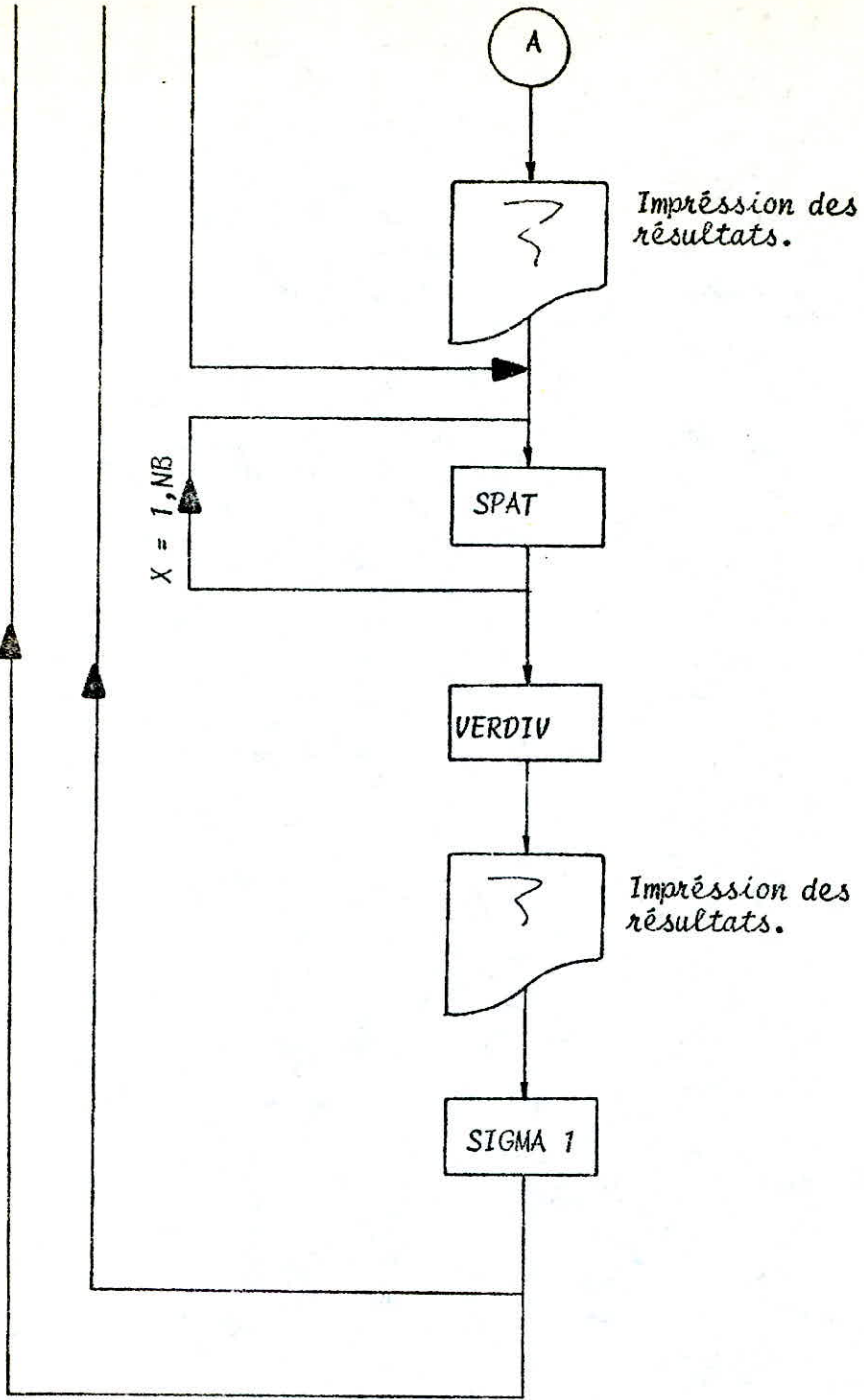
ORGANIGRAMME FONCTIONNEL.



A_l ACIERS LONGITUDINAUX
 A_t ACIERS TRANSVERSAUX

ORGANIGRAMME DE CALCUL





S.P.	O B J E T	OBSERVATIONS
ULT 1	CALCUL DES A_l A L'ETAT LIMITE ULTIME (MOMENT REPERE).	
ULT 2	CALCUL DES A_l A L'ETAT LIMITE ULTIME (MOMENT LIMITE).	
ELS	CALCUL DES A_l A L'ETAT LIMITE DE SERVICE.	
SIGMA	VERIFICATION DES CONTRAINTES DE L'ACIER ET DU BETON A L'E.L.S.	
SPAT	CALCUL DES ARMATURES TRANSVERSALES, DES ESPACEMENTS ADMISSIBLES.	
VERDIV	CONDITIONS D'APPUI. (CALCUL DE LA CONTRAINTE DANS LES BIELLES DE BETON).	
SIGMA 1	CALCUL DES CONTRAINTES DE L'ACIER ET DU BETON EN DES POINTS PARTICULIERS.	<i>Se fait sur demande de l'utilisateur.</i>

EXTENSIONS PREVUES.

Pour un nombre important de charges concentrées en travées, la programmation devient fastidieuse et nécessite une mémoire plus importante.

Néanmoins, il est prévu de rajouter un sous-programme qui interpole (méthode de LAGRANGE) ou approxime (méthode des moindres carrés) par un polynôme les courbes réelles des moments et des efforts tranchants.

Les autres extensions concerneront le choix automatique des diamètres et du nombre de barres.

Il est également prévu de rajouter le calcul du mètre des poutres ainsi que le dessin du ferrailage sur imprimante ou sur table traçante.

Ces extensions sont prévues sur HP 9836 S et sur ses périphériques.

TABLEAU 2.

limite elastique $f_e=400$ MPa . (1.15)

valeur caracteristique $f_{c28}=25$ MPa . (1.5)

$b=30$ cm , $h_t=60$ cm , $d=5$ cm

M_u (MNm)	Au (acier ecroui)	Au (acier nat.)
.3	17.3311	18.2201
.31	18.1369	18.9504
.32	18.9566	19.6923
.33	19.7911	20.4465
.34	20.641	21.2136
.35	21.5071	21.9942
.36	22.39	22.7891
.37	23.2907	23.5992
.38	24.21	24.4252
.39	25.1492	25.2683
.4	26.1094	26.1294
.41	27.0919	27.0099
.42	28.0982	27.911
.43	29.1301	28.8344
.44	30.1894	29.7817
.45	31.2784	30.7549
.46	32.3995	31.7562
.47	33.5557	32.7882
.48	34.7503	33.8541
.49	35.9873	34.9572
.5	37.2715	36.1018
.51	40.3907	40.3907
.52	46.5122	46.5122
.53	54.1682	54.1682
.54	64.015	64.015
.55	77.1533	77.1533
.56	95.588	95.588
.57	123.41	123.41
.58	170.513	170.513
.59	268.762	268.762
.6	611.711	611.711

Moment repere (ecroui) $MR1=.406$ MNm

Moment repere (nat.) $MR2=.507$ MNm

limite elastique $f_e=400$ MPa

valeur caracteristique du Beton $f_{c28}=25$ MPa

$b=30$ cm , $ht=60$ cm , $d=5$ cm

$$=M_u/M_{ser}=1.4$$

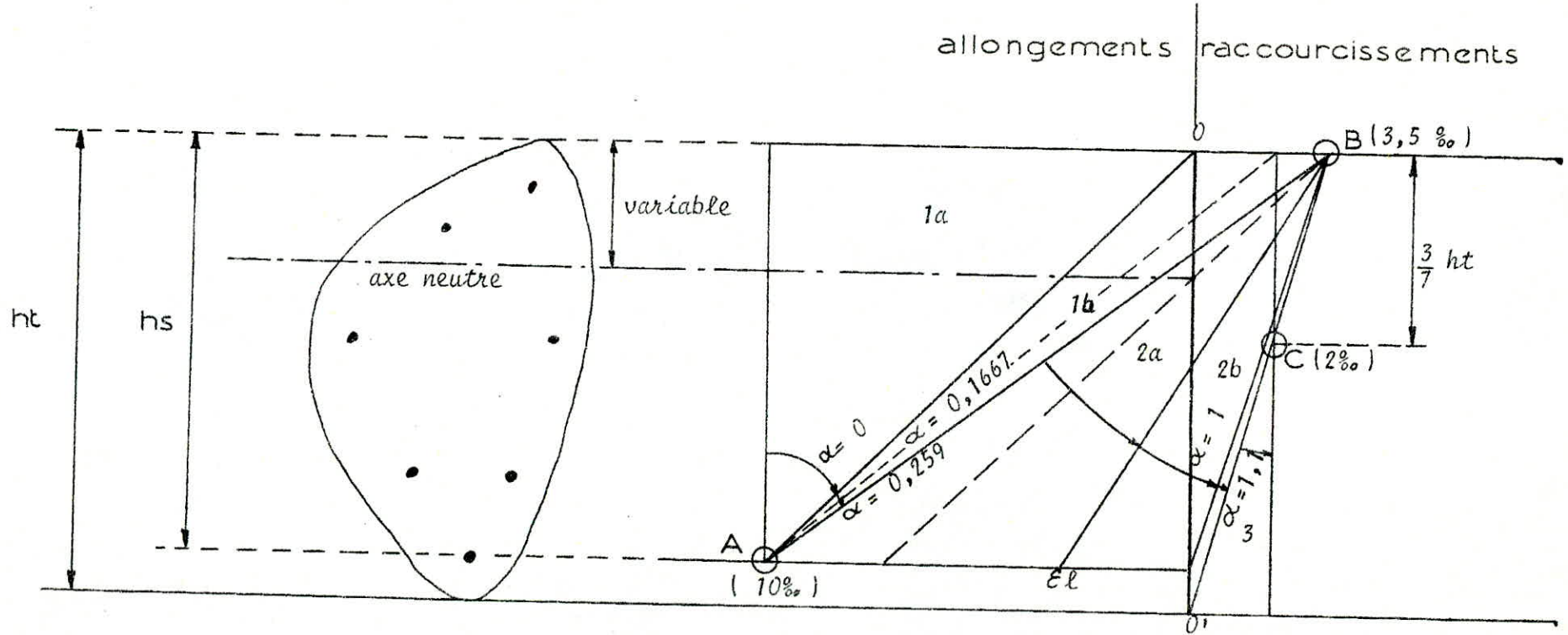
M_u (MPa)	M_{ser} (MPa)	A_t (ELU)	Contrainte beton(ELS)	Contrainte acier(ELS)
.28	.2	15.76	12.43	267.4
.3	.214	17.33	12.92	261.6
.32	.228	18.96	13.39	256.2
.34	.243	20.64	13.92	252.1
.36	.257	22.39	14.38	247.1
.38	.271	24.21	14.84	242.2
.4	.286	26.11	15.33	238.1
.42	.3	28.1	15.77	233.27
.44	.314	30.18	16.04	229.71
.46	.33	32.4	16.72	224.7
.48	.343	34.75	17.08	218.8
.5	.357	37.27	17.48	213.3
.52	.371	46.51	17.26	180.48
.54	.386	64.015	16.82	139.59
.56	.4	95.58	16.26	99.68

(TABLEAU-3)

Variation de la contrainte du Beton et de l'acier
(E.L.S) en fonction de la quantite d'acier A_t
Calculee a l'etat limite ultime.

Regle des 3 Pivots

figure 1.1.



$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ \mu &= 0,104 \\ \mu_{ab} &= 0,1873 \end{aligned}$$

$$\mu_{bc} = 0,484$$

Zone suspecte
des armatures comp-
rimées sont peut-être
nécessaires dans l'E.L.S.

FIGURE 1.

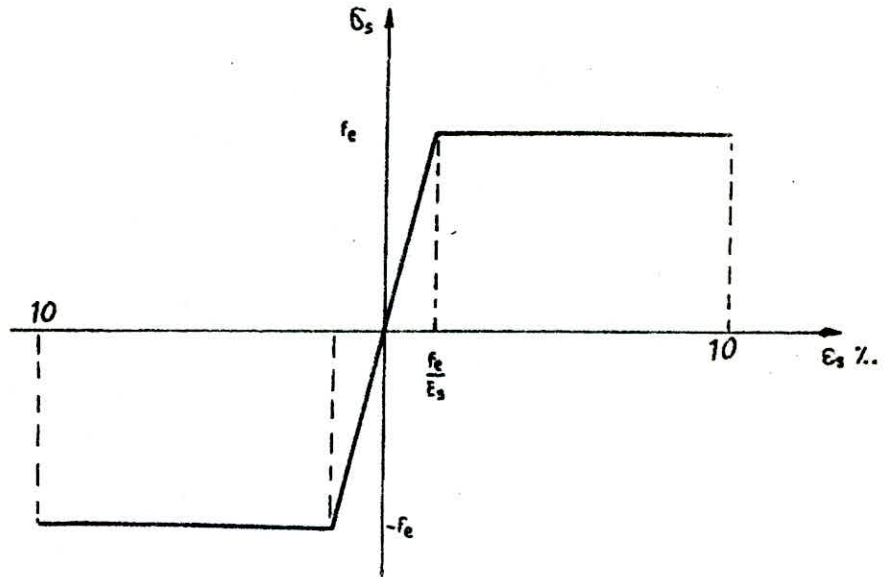


DIAGRAMME CONTRAINTE - DEFORMATION D'UN ACIER NATUREL.

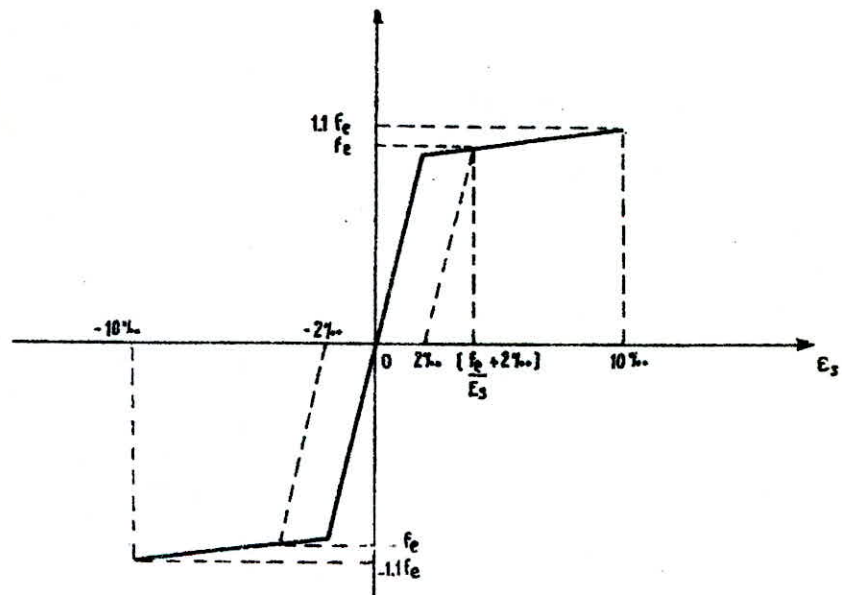
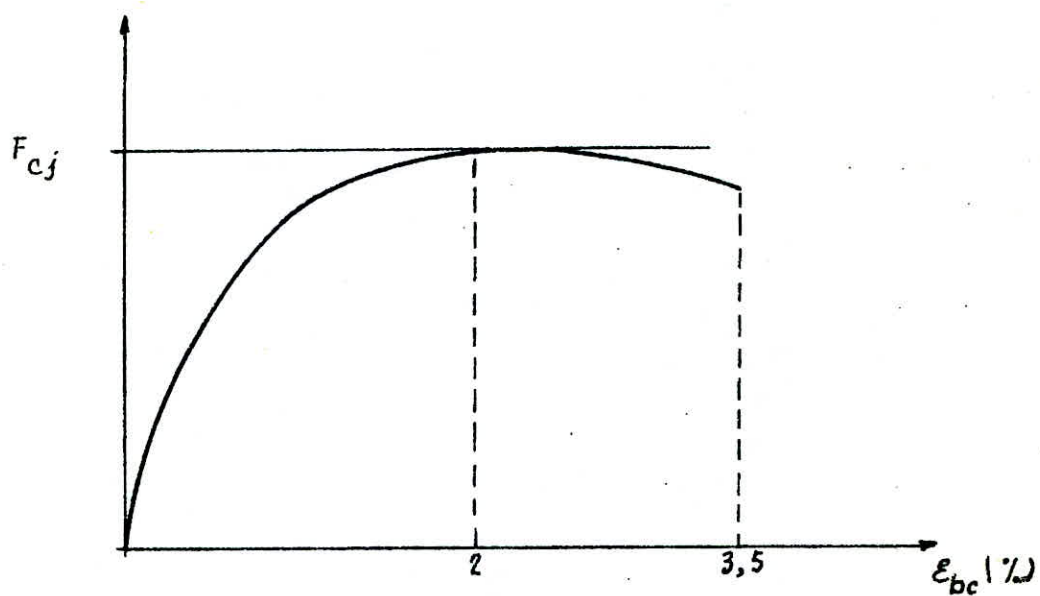
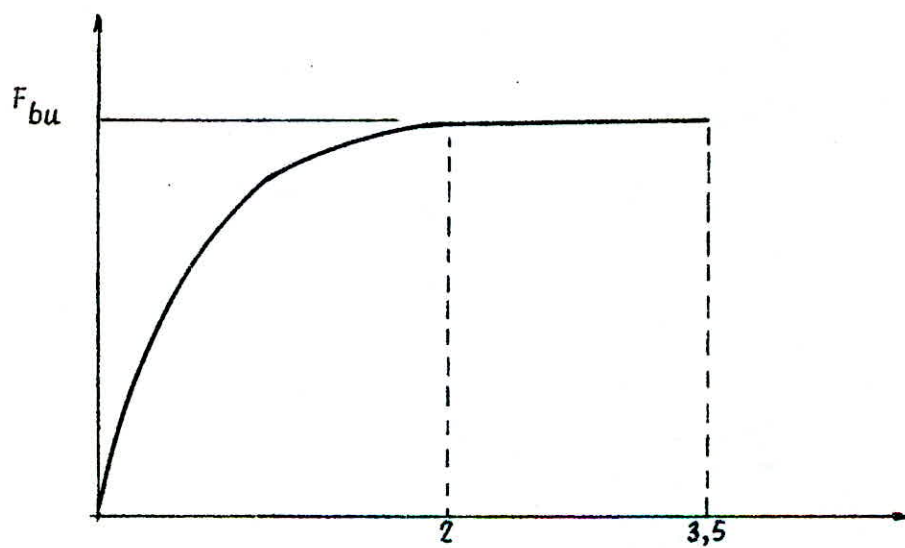


DIAGRAMME CONTRAINTE - DEFORMATION D'UN ACIER ECROUI.

FIGURE 2.



COURBE CONTRAINTE-DEFORMATION DU BETON



BETON : DIAGRAMME BARABOLE - RECTANGLE

FIGURE 1.2

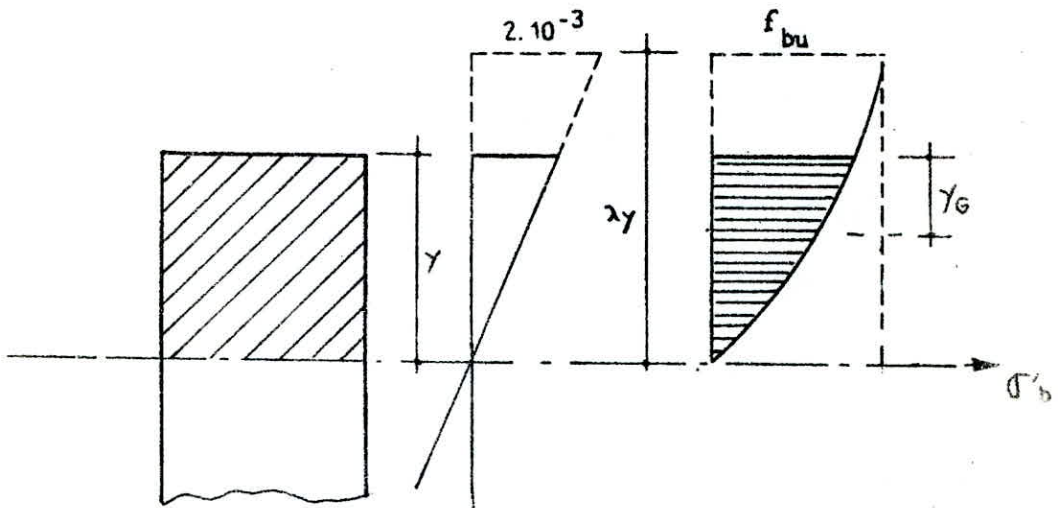


FIGURE 1.3

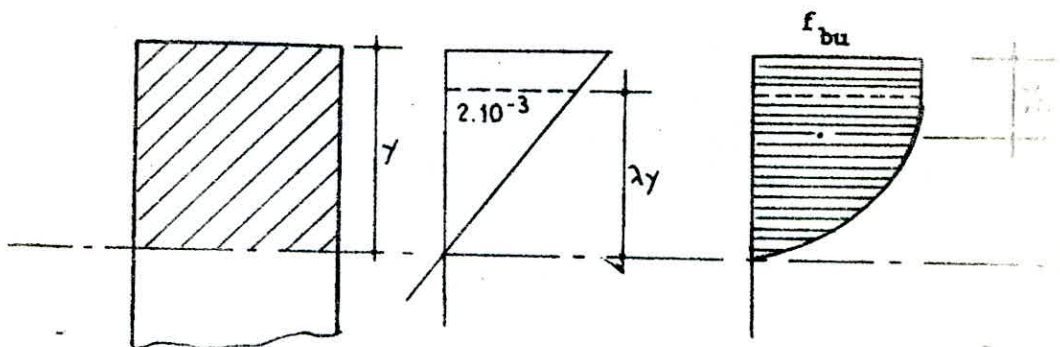


FIGURE 2.1

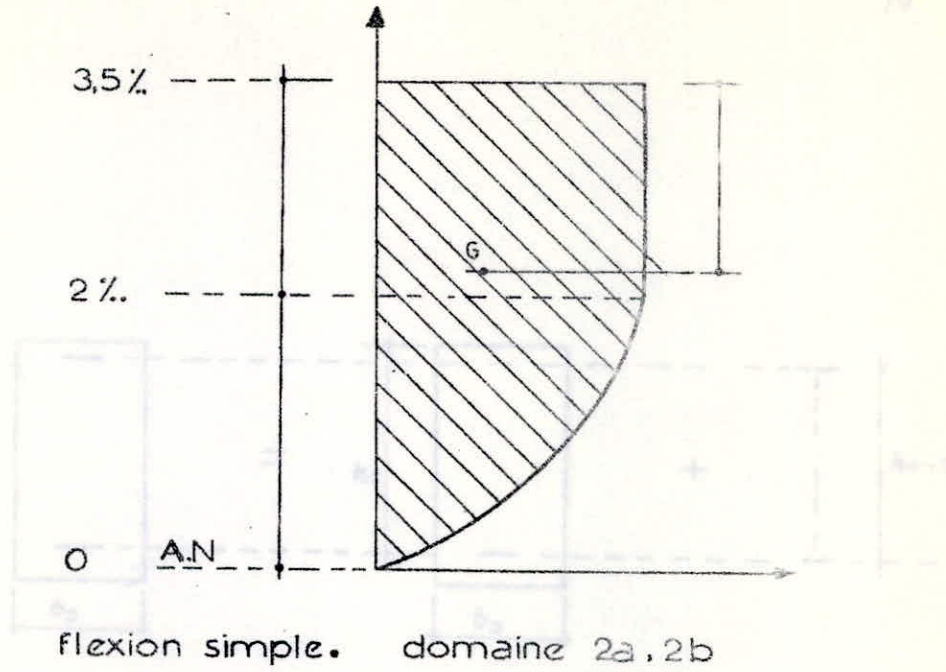
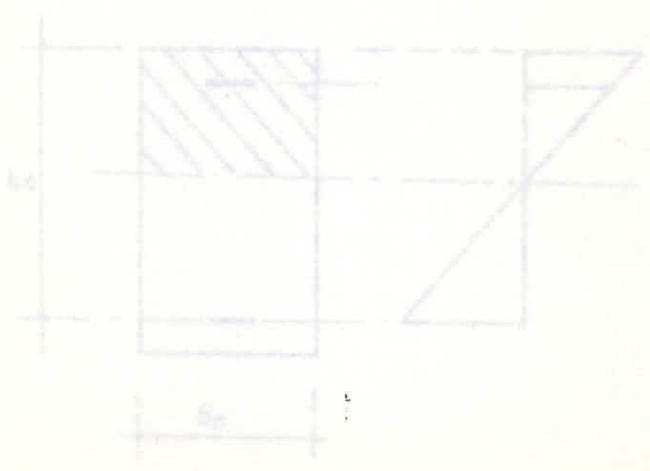


FIGURE 2.2 SECTION RECTANGULAIRE AVEC ACIERS COMPRIMES



DEFORMATIONS

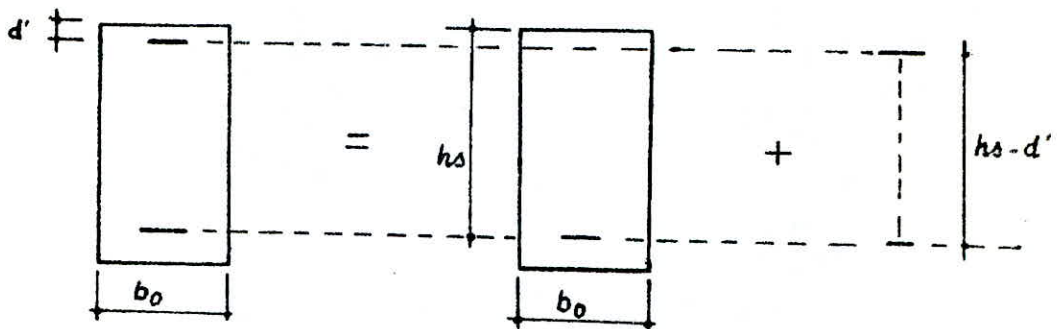
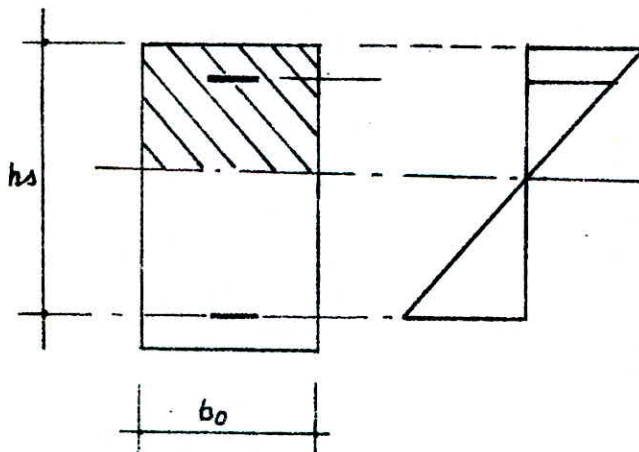


FIGURE 2.2 SECTION RECTANGULAIRE AVEC ACIERS COMPRIMES



DEFORMATIONS

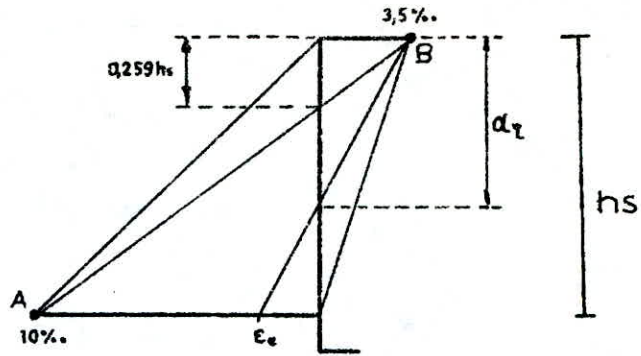
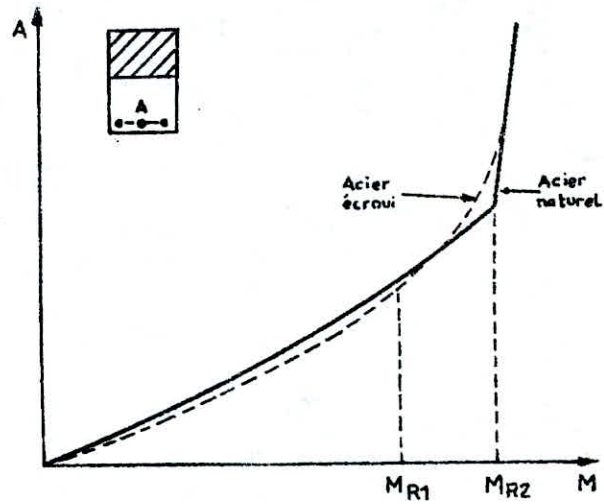


FIGURE .2.2.1 NOTION DU MOMENT REPERE

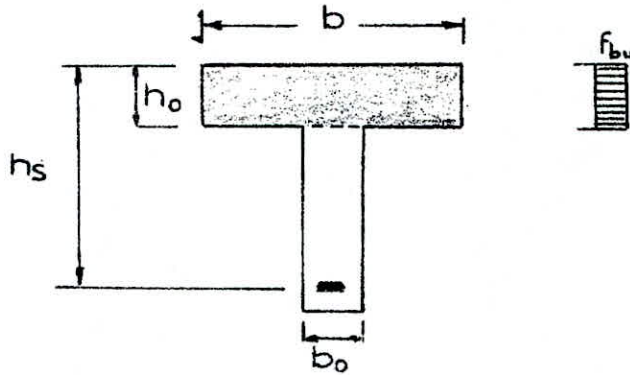


$$M > M_{rb}$$

FIGURE 2.3.

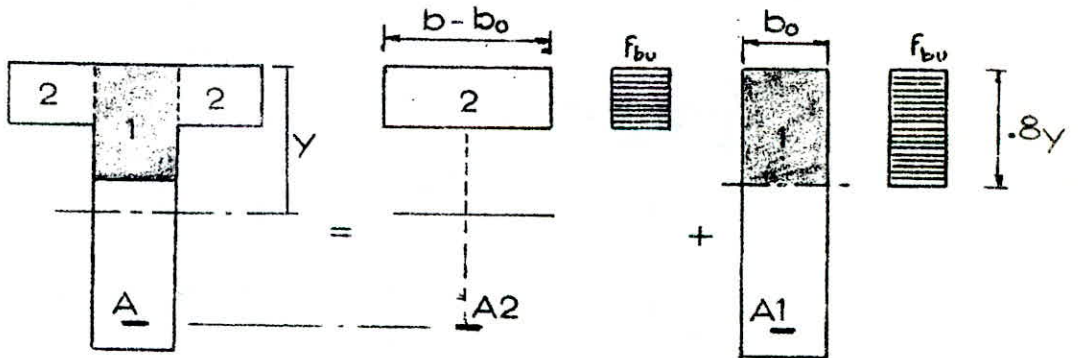
variation de la section d'acier tendue en fonction du moment.

FIGURE 2.6. ETATS LIMITES ULTIMES.



LE MOMENT EQUILIBRE PAR LA TABLE SEULE

$$M_{T,u} = b h_o (h_s - h_o/2) F_{bu}.$$



$$M_u > M_{T,u}$$

$$A = A_1 + A_2$$

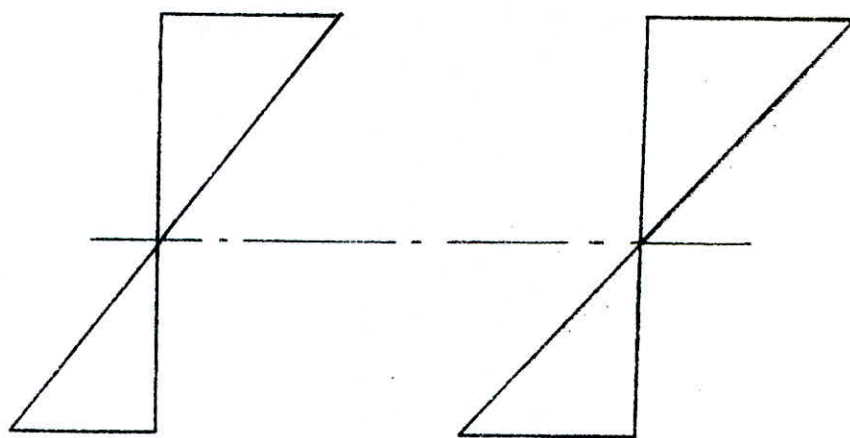


FIGURE 3.1. DEFORMATIONS - CONTRAINTES EN ETAT LIMITE DE SERVICE.

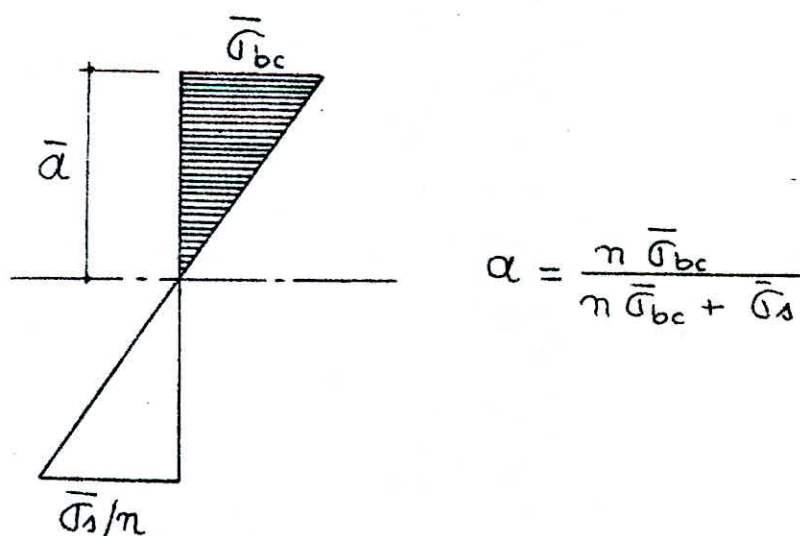
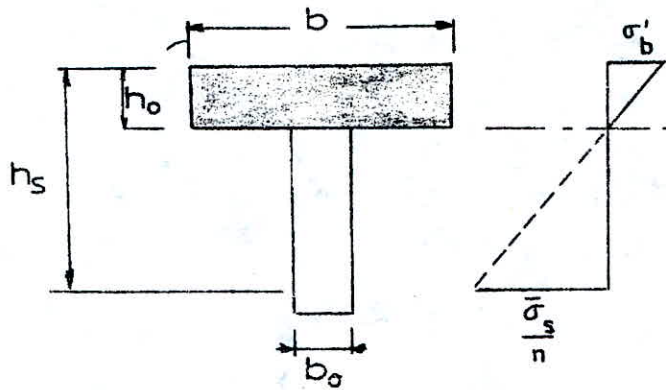


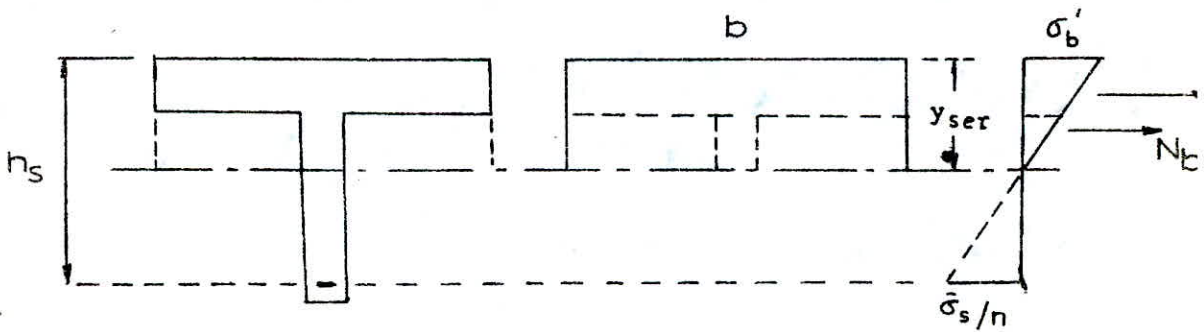
FIGURE 3.2. MOMENT RESISTANT DU BETON.

FIGURE 2.7. ETATS LIMITES DE SERVICE..



LE MOMENT EQUILIBRÉ PAR LA TABLE SEULE

$$M_{T,S} = \frac{1}{2} b h_o (h_s - h_o/3) \sigma'_b$$



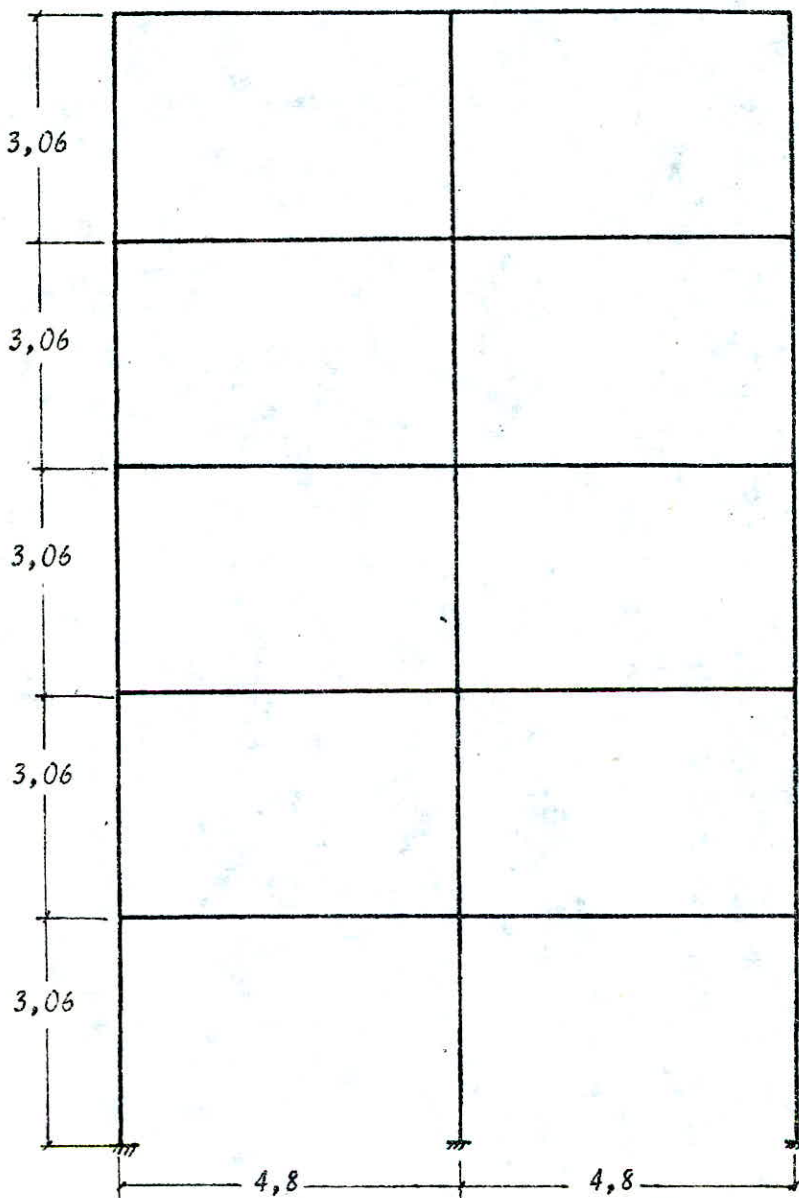
$$M_{ser} > M_{T,S}$$

$$N_{b1} = 0,5 b y \sigma'_b$$

$$N_{b2} = 0,5 (b - b_o) (y - h_o)^2 \sigma'_b / y$$

Exemple

Etude au vent d'un bâtiment à usage d'habitation
- Site Normal



PROJET No

DATE

CALCUL AU VUE DE

CHARACTERISTIQUES

SENS LONGITUDINAL

COEFFICIENTS CONSTANTS:

SITE	DIMENSIONS	MASQUE	REPONSE	PULSATION
1	.81	1	.35	.35

COEFFICIENTS VARIABLES:

* EFFETS STATIQUES *

NIVEAU	HAUTEUR (m)	Qh (daN/m2)	Qh*Km*kSd (daN/ml)	Q(H)ext (daN/ml)
0	0	52.5	408.24	714.40
1	3.06	58.4443	454.463	795.014
2	6.12	63.8385	496.408	868.719
3	9.18	68.7554	534.642	935.014
4	12.24	73.2558	569.637	996.039
5	15.3	77.3904	601.788	1053.17

- FORCE DE TRAINEE : T= 96.6536 tonnes
- BRAS DE LEVIER : Z= 8.08049 metres

SENS TRANSVERSAL

COEFFICIENTS CONSTANTS:

SITE	DIMENSIONS	MASQUE	REPONSE	PULSATION
1	.81	1	.43	.35

COEFFICIENTS VARIABLES:

* EFFETS STATIQUES *

NIVEAU	HAUTEUR (m)	Qh (daN/m2)	Qh*Km*kSd (daN/ml)	Q(H)ext (daN/ml)
0	0	52.5	637.875	1116.80
1	3.06	58.4443	710.099	1242.67
2	6.12	63.8385	775.638	1357.37
3	9.18	68.7554	835.378	1461.91
4	12.24	73.2558	890.058	1557.6
5	15.3	77.3904	940.294	1645.51

- FORCE DE TRAINEE : T= 151.021 tonnes
- BRAS DE LEVIER : Z= 8.08049 metres

N.V.65

BATIMENT

- HAUTEUR : 15.3 metres
- LONGUEUR : 15 metres
- LARGEUR : 9.6 metres
- NOMBRE DE NIVEAUX : 4

GLOBAL *---

<u>GLOBAL</u>	<u>AMPLIFI.</u>	<u>TRAINEE</u>	<u>PERIODE(sec)</u>
.7	1	1.3	.35554

* EFFETS DYNAMIQUES *

Qh*Km*kS*d*Ct*Beta (daN/ml)	Q(H)extreme (daN/ml)
530.712	928.746
590.802	1033.9
645.33	1129.33
695.035	1216.31
740.528	1295.92
782.324	1369.07

GLOBAL *---

<u>GLOBAL</u>	<u>AMPLIFI.</u>	<u>TRAINEE</u>	<u>PERIODE(sec)</u>
.7	1	1.3	.444425

* EFFETS DYNAMIQUES *

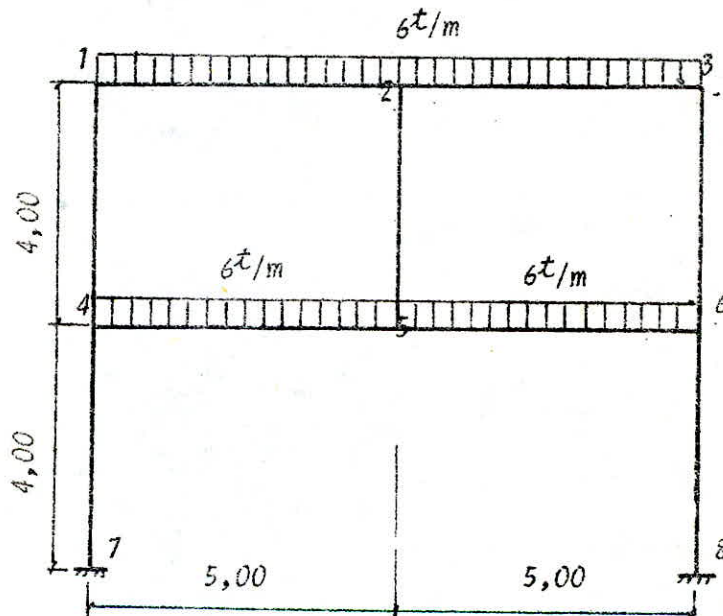
Qh*Km*kS*d*Ct*Beta (daN/ml)	Q(H)extreme (daN/ml)
829.238	1451.17
923.128	1615.47
1008.33	1764.58
1085.99	1900.49
1157.08	2024.88
1222.38	2139.17

Exemple 1

PORTIQUE DROIT A 1 ETAGE AVEC TRAVERSE

(P. Charon page 292) : CALCUL DE STRUCTURES
par la methode des Rotations

Les donnees de barres (inerties, sections, ...)
sont indiquees dans les sorties



REMARQUE

La methode des rotations ne tient pas compte des efforts normaux de second ordre; On mettra donc une grande rigidite à l'effort normal.

 * Projet No EFFORTS ET DEPLACEMENTS

--- CARACTERISTIQUES

BARRE	ND. GAUCHE	ND. DROIT	APP. GAUCHE	APP. DROIT
1	1	2	1	1
2	2	3	1	1
3	1	4	1	1
4	2	5	1	1
5	3	6	1	1
6	4	5	1	1
7	5	6	1	1
8	4	7	1	1
9	6	8	1	1

--- DEPLACEMENTS

NOEUD	DEPLAC. HORIZONTAL
1	7.76982E-04
2	3.47899E-06
3	-7.70024E-04
4	-4.49876E-04
5	1.25192E-06
6	4.5238E-04
7	-6.4475E-20
8	6.4475E-20

--- RESIDUS DE RESOL

1	0	0
2	-1.30018E-07	4.78343E-12
3	0	-9.14931E-06
4	-3.57628E-07	-4.76837E-06
5	4.76837E-07	3.8147E-06
6	5.81953E-20	-9.33674E-07
7	6.4475	59.8809
8	-6.4475	59.8809

--- FORCES INTERNES

BARRE	MOMENT AU PREMIER NOEUD
1	32.659
2	-31.7258
3	-32.659
4	5.7533E-06
5	32.659
6	46.4475
7	-38.60
8	-17.192
9	17.192

 VS LA STRUCTURE

ES BARRES DE LA STRUCTURE --

VERTICE DE FLEXION	SECTION
20	100000
20	100000
8	100000
8	100000
8	100000
20	100000
20	100000
8	100000
8	100000

GLOBAUX --

DEPLAC. VERTICAL	ROTATION
-3.51031E-03	-3.00836
-14.2312	-8.94088E-08
-3.51032E-03	3.00836
-2.39524E-03	-2.14894
-14.231	-5.31613E-08
-2.39524E-03	2.14894
-5.98809E-19	8.59712E-20
-5.98809E-19	-8.59712E-20

ION ET REACTIONS --

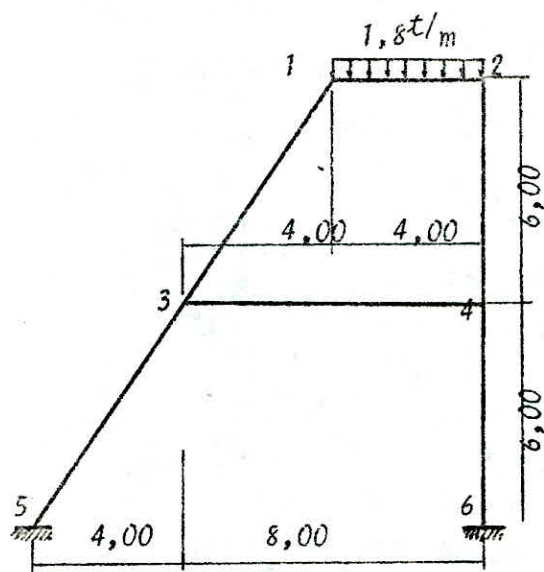
- 1.90735E-06
- 1.69472E-06
- 3.33786E-06
- 2.14577E-06
- 2.73741E-18
- 4.6054E-19
- 8.59712
- 8.59712

NS LES BARRES --

MOMENT AU SECOND NOEUD	EFFORT NORMAL
31.7258	-15.4701
-32.659	-15.4701
-29.2213	-27.877
5.89829E-06	-4.22001
29.2213	-27.877
38.6057	9.02256
-46.4142	9.02256
-8.59712	-59.8809
8.59712	-59.8809

Exemple 2

PORTIQUE MULTIPLE AVEC MONTANTS INCLINES
(P.Charon page 234)



 * Projet No EFFORTS ET DEPLACEMENTS

--- CARACTERISTIQUES

BARRE	ND.GAUCHE	ND.DROIT	APP.GAUCHE	APP.DROIT
1	1	2	1	1
2	1	3	1	1
3	2	4	1	1
4	3	4	1	1
5	3	5	1	1
6	4	6	1	1

--- DEPLACEMENTS

NOEUD	DEPLAC.HORIZONTAL
1	1.12174
2	1.12167
3	.685973
4	.686014
5	-4.77568E-21
6	4.63885E-21

--- RESIDUS DE RESOLL

NOEUD	F X	F Y
1	5.61661E-03	-2.36616E-04
2	5.36442E-07	5.0664E-07
3	1.01715E-04	-3.94136E-05
4	8.9407E-08	1.19209E-07
5	.477568	1.55253
6	-.463885	5.63981

--- FORCES INTERNES D

BARRE	MOMENT AU PREMIER NOEUD
1	-1.71223
2	1.71223
3	4.50769
4	-1.8619
5	1.27987
6	.712186

 ANS LA STRUCTURE

DES BARRES DE LA STRUCTURE --

INERTIE DE FLEXION	SECTION
28	100000
30	100000
30	100000
15	100000
30	100000
30	100000

 GLOBAUX ---

DEPLAC. VERTICAL	ROTATION
-.748137	.0412347
-6.47688E-04	.184417
-.457451	-.0945983
-3.38389E-04	-.135894
-1.55253E-20	-2.06698E-20
-5.63981E-20	-2.07113E-20

 TION ET REACTIONS ---

M Z
1.78814E-07
1.43051E-06
4.47035E-08
7.76786E-20
2.06697
2.07113

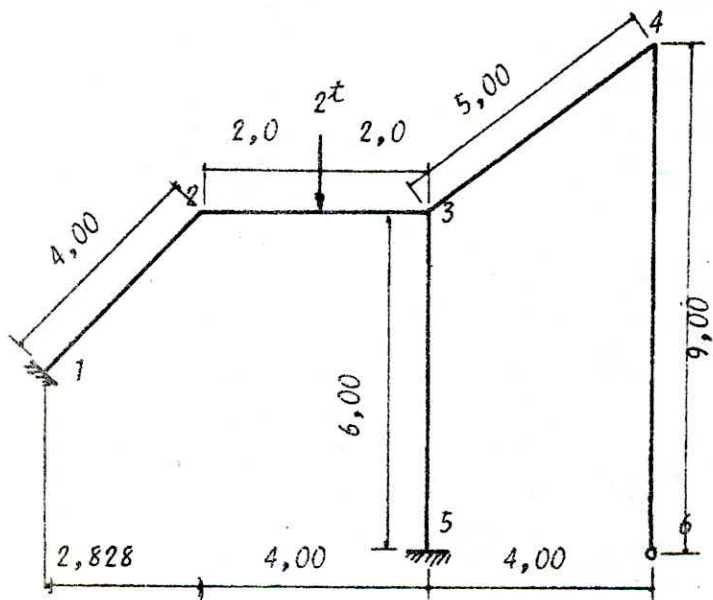
 ANS LES BARRES --

MOMENT AU SECOND NOEUD	EFFORT NORMAL
-4.50769	-.986457
.582035	-2.24351
1.30458	-5.15498
-2.01676	.502169
2.06698	-1.55767
2.07113	-5.63981

Exemple 3

PORTIQUE CONTINU QUELCONQUE
encastrement et rotule

(P.Charon page 223)



 # Projet No EFFORTS ET DEPLACEMENT

--- CARACTERISTIQUES

BARRE	ND. GAUCHE	ND. DROIT	APP. GAUCHE	APP. DROIT
1	1	2	1	1
2	2	3	1	1
3	3	4	1	1
4	3	5	1	1
5	4	6	1	.02

--- DEPLACEMENT

NOEUD	DEPLAC. HORIZONTAL
1	-2.40787E-21
2	2.134
3	2.134
4	2.13391
5	2.55298E-21
6	-4.52516E-23

--- RESIDUS DE RES

NOEUD	F X	F Y
1	.240787	.577573
2	0	-9.05186E-04
3	2.32433E-03	2.23517E-08
4	-1.16925E-07	2.77942E-09
5	-.255298	1.54069
6	4.52516E-03	-.118226

--- FORCES INTERNE

BARRE	MOMENT AU PREMIER NOEUD
1	.696525
2	-.260973
3	.512622
4	.902637
5	-.0407265

 DANS LA STRUCTURE

DES BARRES DE LA STRUCTURE --

INERTIE DE FLEXION	SECTION
1	100000
1	100000
1	100000
1	100000
1	100000

DES GLOBAUX --

DEPLAC. VERTICAL	ROTATION
-5.77573E-21	-6.96525E-21
-2.13404	-.870973
-9.24414E-05	.820457
1.06403E-05	-.359281
-1.54069E-20	-6.29152E-21
1.18226E-21	-.176012

DES REACTIONS --

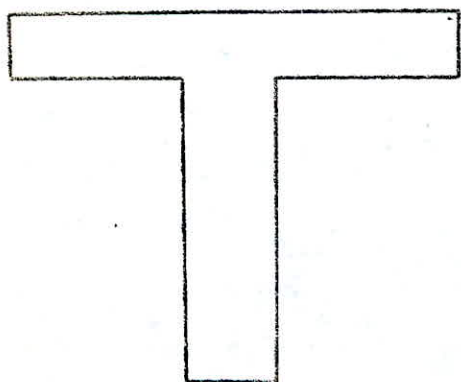
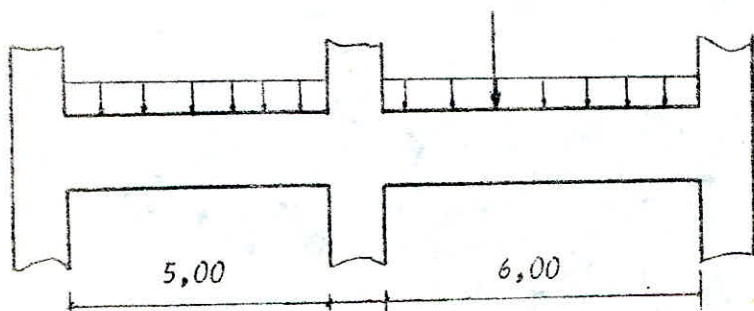
M 2
-.696525
-5.96046E-08
8.9407E-08
-7.74162E-09
.629151
0

DANS LES BARRES --

MOMENT AU SECOND NOEUD	EFFORT NORMAL
.260973	-.578252
-1.41526	-.238419
.0407265	-.0562026
.629151	-1.54069
-2.91038E-10	.118226

EXEMPLE 4

POUTRE CONTINUE A 2 TRAVEES, DE SECTION EN FORME DE T
LE CHARGEMENT EST INDIQUE DANS LES ENTrees.



**** CALCUL DE BETON ARME ****

**** HYPOTHESES ****

-Regles B.A.E.L. **** Unites: MNm , MPa , m
-Acier long. : ecroui
-Acier transv. : Naturel
fe fet Gamma-s fci Gamma-b
400 400 1:15 25 1.5
-avec Reprise de BETONN.
-section acier transv. : .000113
-type de fissuration: 2

POUTRE NC 1

TRAVÉE NC 1

l'épaisseur de la table est insuffisante,
il faut mettre des armatures de couture

**** DONNEES GEOMETRIQUES ****

L	b	bo	hs	ho	d'
5	.85	.65	.96	.15	.03

**** CHARGEMENT ****

Qult.	Mus.	Mud.	Qser.	Mser.	Mserd.
.12	-.32	-.27	.086	-.23	-.19

-nbre de charges ponct. : 0

X (m)	Mu (MNm)	Mser (MNm)	Ainf. (cm2)	SIGinf. (MPa)	Asup. (cm2)	SIGsup. (MPa)	SIGbet.
0	-.32	.23	0	0	10.7056	285.679	9.81165
.5	-.18	.12925	0	0	5.91549	285.434	8.05017
1	-.07	.05	0	0	2.2439	285.093	6.2099
1.5	.01	7.75002E-03	.34088	284.688	0	0	4.52694
2	.06	.044	1.97062	285.054	0	0	6.03121
2.5	.08	.05875	2.64383	285.144	0	0	6.45479
3	.07	.052	2.33517	285.105	0	0	6.26739
3.5	.03	.02375	1.05499	284.893	0	0	5.32877
4	-.04	.026	0	0	1.15615	284.914	5.41742
4.5	-.14	.09725	0	0	4.42065	285.322	7.38667
5	-.27	.19	0	0	8.79014	285.596	9.15545

X (m)	Vu (MN)	Tau (MPa)	At/t (cm ² /ml)	t (cm)
0	.31	.496795	10.0911	.1
.5	.25	.400641	8.13802	.1
1	.19	.304487	6.1849	.15
1.5	.13	.208333	4.23177	.25
2	.07	.112179	2.27865	.4
2.5	.01	.0160256	.325521	.4
3	.05	.0801282	1.6276	.4
3.5	.11	.176282	3.58073	.3
4	.17	.272436	5.53386	.2
4.5	.23	.36859	7.48698	.15
5	.29	.464744	9.44011	.1

**** CONDITION D'APPUI ****

- Appui gauche
- Contrainte dans la bielle de beton en MPa : 20.7143
- Appui droit
- Contrainte dans la bielle de beton en MPa : 20.7143

TRAVÉE N° 2

l'épaisseur de la table est insuffisante,
il faut mettre des armatures de couture
** DONNEES GEOMETRIQUES **

L. b bo hs ho d'
6 .85 .65 1.16 .16 .03
** CHARGEMENT **

Qult. Mus. Mud. Qser. Mser. Mserd.
.14 -.35 -.283 .093 .25 .204
-nbre de charges ponct. : 1

Pult. Pser. abscisse
.09 .071 2

X (m)	Mu (MNm)	Mser (MNm)	Ainf. (cm ²)	SIGinf. (MPa)	Asup. (cm ²)	SIGsup. (MPa)	SIGbet.
0	-.35	.25	0	0	9.21064	278.381	29.0707
.6	-.0805	.06634	0	0	8.41447	278.322	23.4683
1.2	-.1386	.08384	3.05634	278.333	0	0	24.1922
1.8	-.3073	.20054	7.36912	278.373	0	0	27.8422
2.4	-.3896	.25536	9.41062	278.382	0	0	29.1969
3	-.4035	.2625	9.67714	278.382	0	0	29.3632
3.6	-.367	.23616	8.69463	278.379	0	0	28.739
4.2	-.2801	.17634	6.47079	278.368	0	0	27.1908
4.8	-.1428	.08304	3.02696	278.333	0	0	24.1608
5.4	-.0449	.04374	0	0	1.58802	278.303	22.381
6	-.283	.204	0	0	7.49771	278.374	27.9323

X (m)	Vu (MN)	Tau (MPa)	At/t(cm ² /ml)	t (cm)
0	.491167	.651415	13.2319	.08
.6	.407167	.540009	10.9689	.1
1.2	.323167	.428603	8.706	.1
1.8	.239167	.317197	6.44307	.15
2.4	.0651667	.0864279	1.75557	.4
3	.0188333	.0249779	.507363	.4
3.6	.102833	.136384	2.77029	.4
4.2	.186833	.24779	5.03322	.2
4.8	.270833	.359195	7.29616	.15
5.4	.354833	.470601	9.55909	.1
6	.438833	.582007	11.822	.08

**** CONDITION D'APPUI ****

-Appui gauche

-Contrainte dans la bielle de beton en MPa : 20.8968

-Appui droit

-Contrainte dans la bielle de beton en MPa : 20.8968

B I B L I O G R A P H I E

- COURS DE M. BARAKA. (STRUCTURES).
- M. ABSI (ANALYSE DES STRUCTURES).
- M. LAREDO (GRANDS BATIMENTS).
- J. COURBON (RESISTANCE DES MATERIAUX).
- J. PERCHAT (BETON ARME AUX ETATS LIMITES).
- A. FUENTES, R. LACROIX, H. THONIER
(TRAITE DE BETON ARME).

B I B L I O G R A P H I E

- COURS DE M. BARAKA. (STRUCTURES).
- M. ABSI (ANALYSE DES STRUCTURES).
- M. LAREDO (GRANDS BATIMENTS).
- J. COURBON (RESISTANCE DES MATERIAUX).
- J. PERCHAT (BETON ARME AUX ETATS LIMITES).
- A. FUENTES, R. LACROIX, H. THONIER
(TRAITE DE BETON ARME).

