

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

32/85

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

202

DEPARTEMENT GENIE - CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET :

CALCUL AUTOMATIQUE D'UN
QUADRILLAGE DE POUTRES ET
DES EFFORTS DANS UN PONT

Proposé par :

C.N.E.R.I.B.

Etudié par :

MM. OUZIT M.A.
ZENATI A.

Dirigé par :

MM. BARAKA M.S.
BENSLIMANE I.

PROMOTION : JANVIER - 85

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi — EL-HARRACH — ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE - CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET :

CALCUL AUTOMATIQUE D'UN
QUADRILLAGE DE POUTRES ET
DES EFFORTS DANS UN PONT

Proposé par :

C.N.E.R.I.B.

Etudié par :

MM. OUZIT M.A.
ZENATI A.

Dirigé par :

MM. BARAKA M.S.
BENSLIMANE I.

PROMOTION : JANVIER - 85

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi — EL-HARRACH — ALGER

A MES PARENTS, A MA FAMILLE, A MES AMIS, A AMINE

ABDELKADER

A MES PARENTS, A MA FAMILLE, A MES AMIS, A ABDELKADER

AMINE

R E M E R C I E M E N T S :

C'est cordialement que nous remercions :

. M. TIAR, directeur général du C.N.E.R.I.B.

. M. BENOUNICHE

pour nous avoir accueilli au sein de l'entreprise,

. M. BARAKA et BENSLIMANE, nos promoteurs, pour l'aide
et l'intérêt constant qu'ils ont accordé à notre travail.

. M. GUESSOUM, pour sa disponibilité,

. M. MEROUANI, pour son aide amicale,

. M. TALBI , Directeur des études de la S.E.R.O.A.

Nos parents et tous ceux qui ont participé à la mise en
forme de ce travail.

. tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

S O M M A I R E

- Généralités
- Langages et machines utilisées
- Poutre isostatique
 - Moment flechissant
 - Effort tranchant
 - Fleche
 - Rotation
- Poutre hyperstatique à n travées
 - Moments sur appuis
 - Moments en travée
 - Efforts tranchants
 - Réactions d'appuis
 - Flèches
 - Rotations d'appuis
- Calcul d'un quadrillage de poutres
 - Matrice de rigidité élémentaire
 - Assemblage
 - Matrice de rigidité globale
 - Résolution du système : $F=K.U.$
 - Exemple numériques
 - Conclusion .

GENERALITES

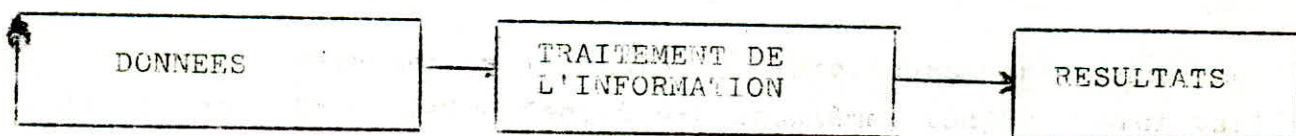
GENERALITES -

Nous assistons aujourd'hui à un développement rapide du matériel de calcul.

Les machines et les méthodes numériques sont constamment sollicitées afin de faire face à des problèmes toujours plus variés. D'où une reconversion permanente de nos idées sur l'ensemble des questions liées à l'application des ordinateurs et les tâches que nous imposons aux procédés de calcul.

Néanmoins, l'opinion répandue sur les ordinateurs, donne l'impression que les ingénieurs n'éprouvent aucune difficulté, ou peu s'en faut, à résoudre numériquement un problème et n'ont que faire de nouvelles méthodes de calcul. Or, rien n'est plus faux. L'ordinateur est certes fidèle et rapide (peut-être 10^3 fois plus rapide que l'homme), ses résultats sont très variables, mais il faut le programmer, donc apprendre son langage, mettre au point les programmes, ce qui est souvent très long, codifier les données ce qui est souvent fastidieux.

Schématiquement, on a :



BUT DU PROJET

L'objet de notre travail est d'établir deux programmes en langage Basic de calcul d'efforts d'un pont.

Ce travail fait partie d'un vaste programme d'établissement de logiciels proposé par le C.N.E.R.I.B (Centre National d'Etude et de Recherche Intégrées du Batiment).

Il sera utilisé par des entreprises Spécialisées dans les ponts, en l'occurrence la S.E.R.O.A (Société d'Etude et de Réalisation des Ouvrages d'Arts).

Nous présenterons:

- Un programme de tracé des lignes d'influence et de calcul des efforts sous les surcharges prescrites par le règlement pour des ponts isostatiques et hyperstatiques à n travées.
- Un programme de calcul de quadrillage de poutres sous des charges normales à son plan moyen.

Dans cette présentation, nous essayons de donner un bref aperçu sur le langage et les machines utilisées.

Le langage de programmation utilisé est le "BASIC", qui est un langage évolué, encore appelé de haut niveau, car sa définition est indépendante de l'ordinateur ou de la machine sur lequel les programmes écrits dans ce langage seront exécutés.

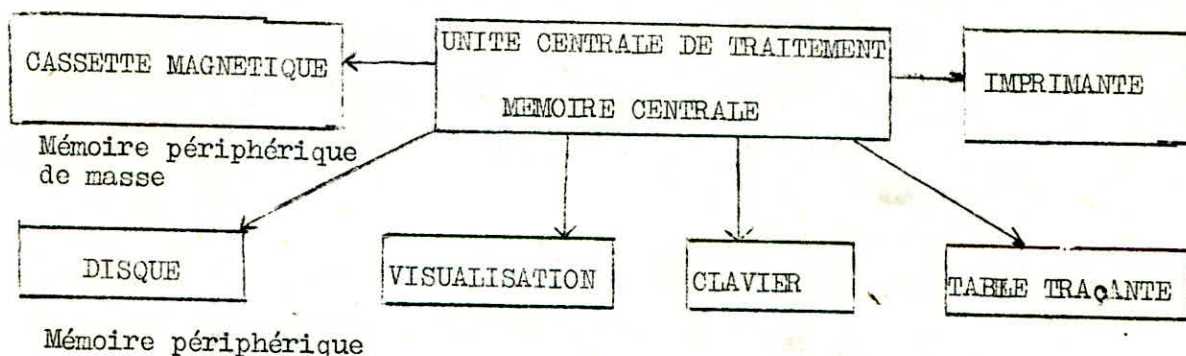
C'est un langage interactif et interprété, c'est-à-dire, que chaque instruction est traduite en langage machine et exécutée immédiatement lorsqu'elle est correcte, s'il y a des erreurs, elles sont détectées et on peut les corriger.

De ce fait, "BASIC" est un langage facile à apprendre pour les débutants, il s'agit d'un acronyme pour : "BEGINNER'S ALL PURPOSE SYMBOLIC INSTRUCTION CODE".

Il faut cependant, noter que ce langage peut également être utilisé par des professionnels qui veulent tester rapidement un algorithme, ou un problème mathématique simple, etc...

- Les machines utilisées :

Les machines utilisées sont des micro-ordinateurs de type - HP 9836 et QUESTAR/M, de configuration (ensemble taille mémoire, les périphériques et les extensions possibles), représentée par un schéma du type :



Objet du Programme:

Ce programme trace les lignes d'influence des efforts puis calcule ces derniers sous les systèmes de surcharges prescrites par le règlement C.P.S. ^{ou le}

Etant donné que nos programmes sont en premier lieu destinés à la SEROA. (Société d'Etude et réalisation des Ouvrages d'Arts) et que celle-ci fait essentiellement des ponts isostatiques nous avons jugé utile de traiter séparément les deux types de ponts.

Pour le pont isostatique les lignes d'influence sont triviales

Pour le pont hyperstatique nous distinguerons:

- Ligne d'influence des moments sur appuis
- Ligne d'influence des moments en travée (section quelconque)
- Ligne d'influence des efforts tranchants en section quelconque
- Ligne d'influence des réactions d'appuis.
- Ligne d'influence de la flèche d'une section quelconque.
- Ligne d'influence des rotations d'appuis.

DOMAINE D'APPLIQUATION.

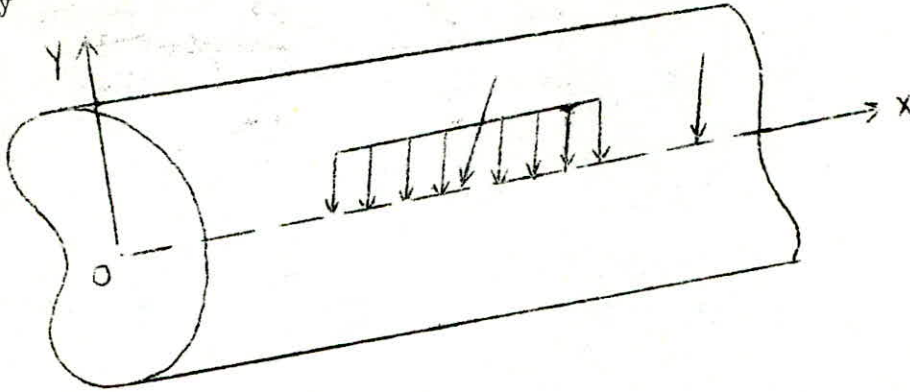
Ce programme est destiné pour le calcul des efforts de ponts isostatiques ou hyperstatiques à N travées (le nombre de travées est limité par la capacité de la machine utilisée)

Ces ponts peuvent être horizontaux ou à appuis dénivelés, avec trois cas d'inerties variables:

- Inertie constante sur toute la travée.
- Inertie linéaire aux appuis et constante en travée.
- Variation parabolique de la hauteur.

Ce programme peut être aussi utilisé pour le calcul de poutres continues de bâtiments.

On se place dans le cas de poutre à plan moyen chargées dans ce plan ; on définit les sections par leur abscisse x , axe horizontal $o x$, axe verticale $o y$



Soit à calculer, pour différents cas de charges, un effet élastique quelconque F (dans notre cas, moment fléchissant, effort tranchant, flèche et rotation dans une section donnée).

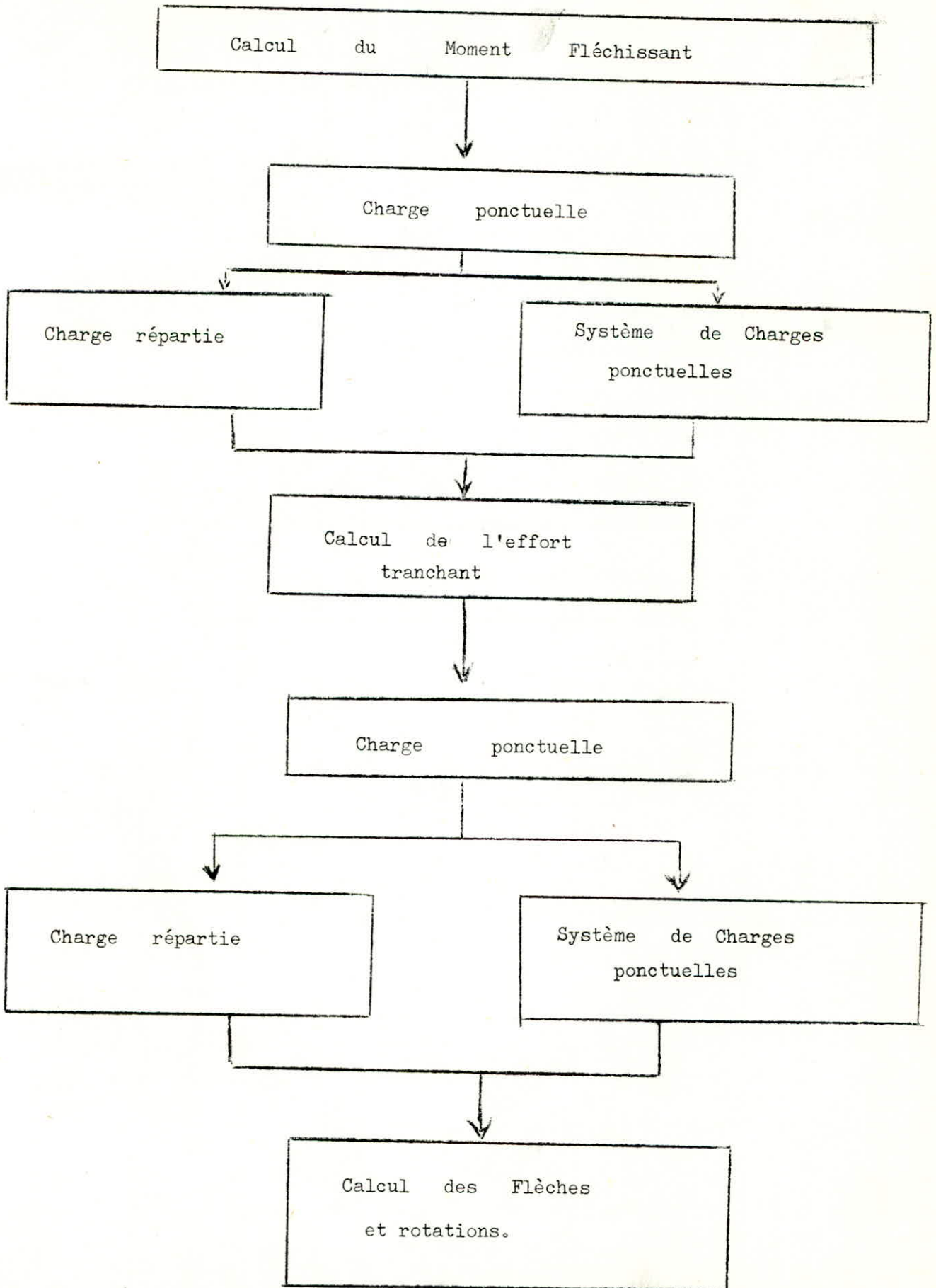
Les charges sont verticales et comptées positivement vers le haut. On simplifie le problème considérablement en cherchant l'effet F dû à l'application d'une force unité verticale appliquée au centre de gravité d'une section quelconque d'abscisse α . En effet puisque on est dans le domaine élastique on obtient l'effet F dû à un système de forces P_i appliquées aux abscisses α_i par superposition.

La connaissance de la fonction $F = F(\alpha)$, ou de la courbe représentative de cette fonction obtenue en portant au droit de la section d'abscisse α l'effet F produit par une force unité appliquée dans cette section, peut être calculé rapidement et systématiquement pour n'importe quel système de charges verticales.

La fonction $F = F(\alpha)$ est appelée fonction d'influence de l'effet F dû à l'action d'une force unité.

La courbe représentative de cette fonction est la ligne d'influence de cet effet F ; ainsi les lignes d'influence, nous permettent de rechercher les valeurs extrêmes de l'effet F sous l'action de charges variées.

POUTRE ISOSTATIQUE



I - ETUDE DU PONT ISOSTATIQUE : I. 1 Définition

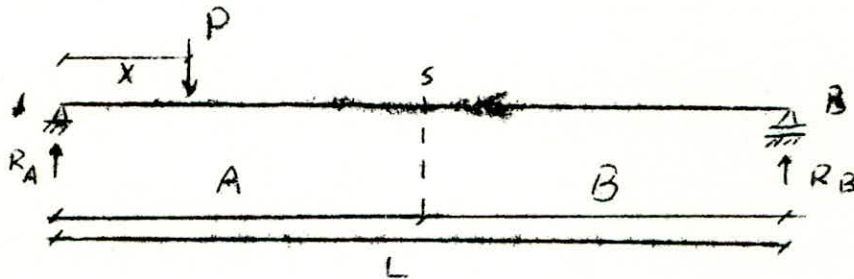
I.1.1. Définition d'une poutre isostatique :

-7-

Une poutre isostatique est une poutre droite reposant sur deux appuis simples susceptibles de ne développer que des réactions R_A et R_B normales à la fibre moyenne de la poutre.

Généralement l'un des appuis est fixé, et l'autre mobile, de façon à permettre la libre dilatation de la poutre.

I. 1.2. Définition de la ligne d'influence du moment flechissant d'une poutre isostatique :

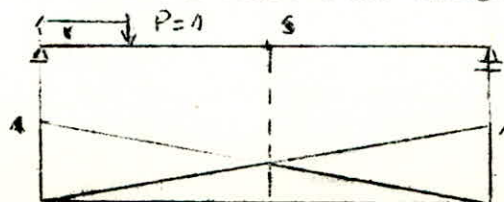


Soit une charge P appliquée dans la section C d'abscisse X ; En écrivant que le moment par rapport à A ou à B est nul, nous trouvons la valeur des réactions R_A et R_B en A et B

$$\left\{ \begin{array}{l} R_A = P \left(1 - \frac{X}{L} \right) \\ R_B = P \frac{X}{L} \end{array} \right. \text{ pour } P = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} R_A = 1 \left(1 - \frac{X}{L} \right) \\ R_B = 1 \frac{X}{L} \end{array} \right.$$

Pour retrouver la ligne d'influence des réactions R_A et R_B , prenant $P = 1$; la ligne d'influence de R_A est une droite ayant pour ordonnées 1 pour $X = 0$ et 0 pour $X = L$; Celle de R_B est une droite ayant pour ordonnées 0 pour $X = 0$ et 1 pour $X = L$ (Fig. L)

Le schéma ci-après représenté la ligne d'influence des réactions R_A et R_B au droit d'une section S sous l'effet d'une charge unitaire.



/...

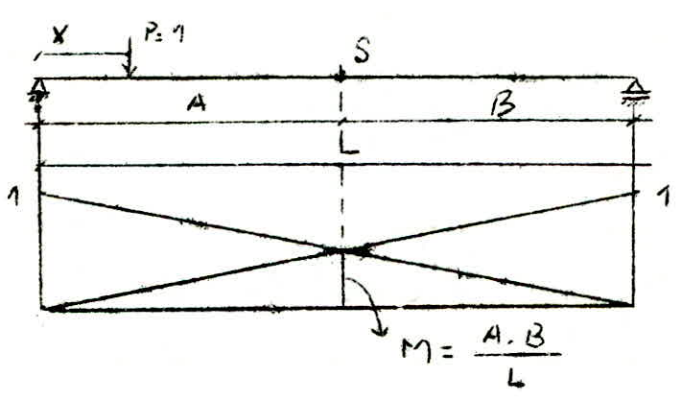
La valeur du moment flechissant est :

$$M = R_A * A - 1 (A - X) \quad \text{pour } X \leq A$$

$$M = R_A * A \quad \text{pour } X > A$$

Au droit de la section S : X = A : M = R_A . A

$$R_A = 1 \left(1 - \frac{A}{L} \right) = \frac{L - A}{L} = \frac{B}{L} \quad \text{d'où } \hat{=} : \boxed{M = \frac{AB}{L}}$$



I. 2-Calcul du moment fléchissant :

Compte tenu du résultat précédent ; nous calculerons le moment fléchissant sous l'effet des charges réglementaires à l'aide de cette ligne d'influence.

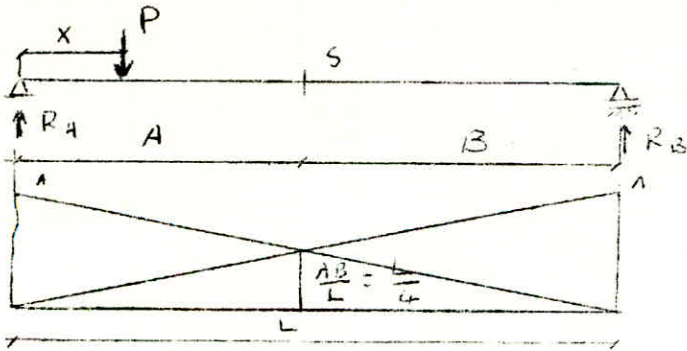
a/ Cos d'une charge ponctuelle :

Cette charge peut être unitaire, quelconque ou une ~~trave~~ travée isolée (système Br) de 10 tonnes ; selon le cas à étudier et au droit d'une section choisie calculons les moments le long de la poutre avec un pas choisi au préalable ; le moment maximum est obtenu lorsque la charge ponctuelle se trouve au droit de cette section :

$$\boxed{M = P \frac{A * B}{L}}$$

A l'aide des équations établies précédemment la section dangereuse est à $X = \frac{L}{2}$ (à mi - travée), ça sera celle qui donnera le plus grand moment sur la poutre : $M = \frac{P \cdot L}{4}$

/...



-98

$$R_A = \frac{P \cdot (L - x)}{L}$$

$$R_B = \frac{P \cdot x}{L}$$

$$A = B = \frac{L}{2}$$

Si $x \leq A$ alors $M = R_A \cdot A - (A - x)$

Si $x > A$ alors $M = R_A \cdot A$

pour $x = A = \frac{L}{2}$ on a : $M = \frac{P \cdot (L - \frac{L}{2})}{L} \times \frac{L}{2} - P \cdot (\frac{L}{2} - \frac{L}{2})$

$$M = \frac{PL}{4}$$

(voir Organigramme
page suivante)

b/ - Cas d'une charge répartie :

Pour ce type de chargement nous distinguerons deux catégories de charge :

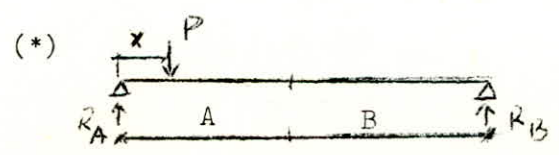
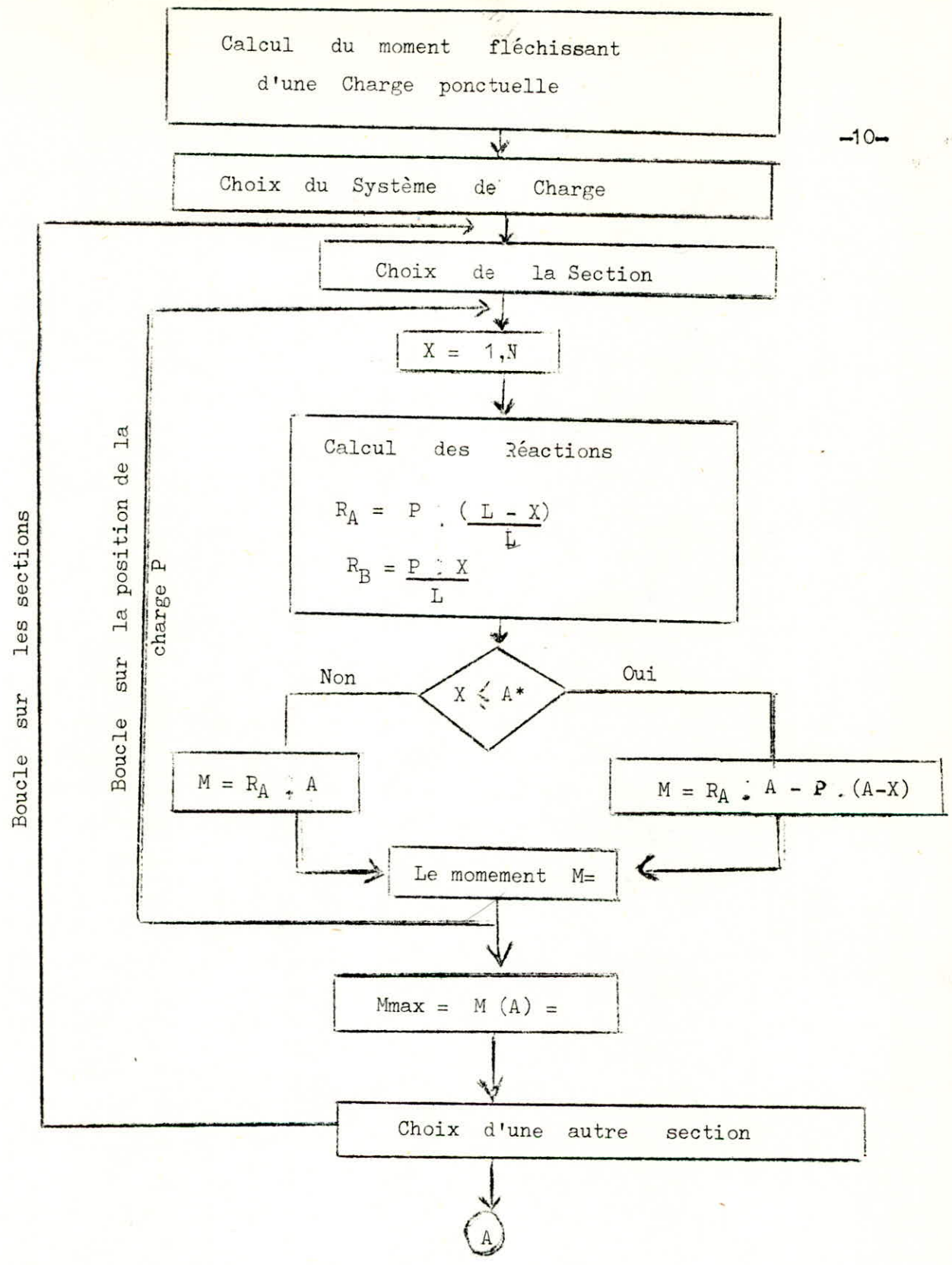
- 1/ - les charges quelconques
- 2/ - Les charges réglementaires

Pour les charges quelconques sont inconnues la valeur de sa densité Q/m et sa longueur sur la travée L_1 , des charges réglementaires nous avons les cas suivants :

a/ - Surcharges Militaires :

- Mc 80 : se compose de véhicule types à chenilles :
avec $Q = 72t$ et $L_1 = 4,9 m$
- Mc 120 : Même type de véhicule que Mc 80 :
avec $Q = 110 t$ et $L_1 = 6,1m$

/...



b/ - Surcharges exceptionnelles :

-11-

- Type D : comporte une **remorque** de trois éléments de quatre lignes à deux essieux de 240t de poids total. Ce poids est supposé réparti au niveau de la chaussée sur un rectangle uniformément chargé de 3,20m de large et 18,60 m de long.

- Type E : Comporte une **remorque** de trois éléments de quatre lignes à trois essieux de 360t de poids total. Ce poids est supposé réparti au niveau de la chaussée sur un rectangle uniformément réparti de 5,10M de la large et 18,60M de long.

C/ - Surcharges A :

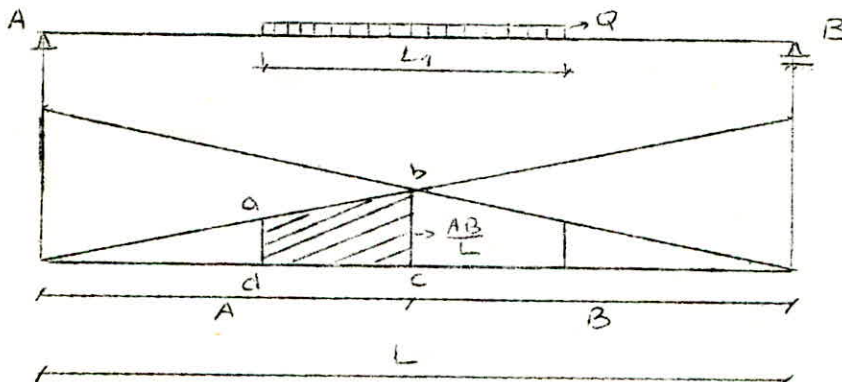
L'utilisateur doit donner la valeur de la charge A et sa longueur L1 sur le pont.
Selon les itinéraires ~~chassés~~ pour permettre la circulation de **convois** lourds exceptionnels ou de convois militaires les ponts doivent être calculés pour supporter les véhicules types décrit ci-dessus ; suivant ce que le C.P.S. préconise l'utilisateur à le choix des convois et des sections sur le pont.

Pour ce qui est des sections, les efforts sont calculés pour les :

- 1/ - Sections quelconques
- 2/ - Sections dangereuses

* Section dangeureuse

La section dangeureuse se trouve à mi - travée ($X = \frac{L}{2}$)



Suivant que la charge Q est répartie sur tout le pont, ou sur une partie du pont ; le moment donné à l'aide de la ligne d'influence sera égale au produit de la charge Q par l'aire que renferme cette charge.

$M \hat{=} Q * 2 * \text{Aire du trapèze } a b c d$

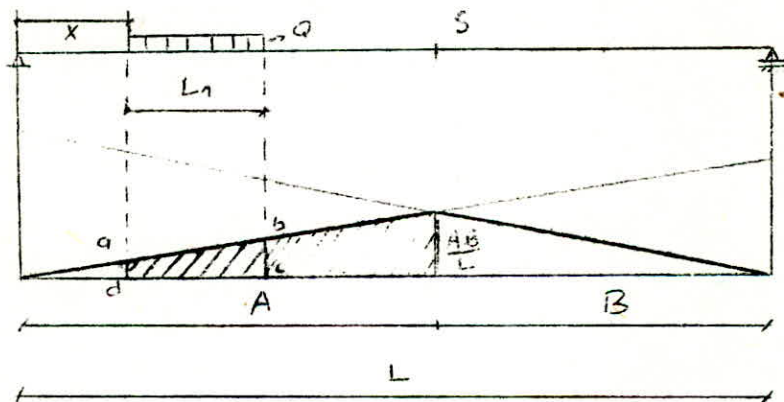
$$Y_s = \frac{AB}{L} = \frac{\frac{L}{2} \times \frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{4}$$

$$Y_1 = \frac{XL - L1}{L} \quad Y_s = \frac{L - L1}{L} \times \frac{L}{4} = \frac{L - L1}{4}$$

$$M = 2 Q \times \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4} + \frac{L - L1}{4} \right) * \frac{L1}{2} = \frac{Q}{2} \left(\frac{L + L - L1}{4} \right) \times L1$$

$$M = \frac{Q L1 (2L - L1)}{8}$$

* Section quelconque :



Pour une charge répartie se déplaçant sur le pont et au droit d'une section S choisie ; le moment fléchissant sera calculé comme suit :

$M = Q * \text{Aire du trapèze } a b c d$

$$X = 0 \text{ à } L$$

Si $L1 \geq L$ alors $M = \frac{Q * A + B}{2}$

(cas d'une surcharge A répartie sur tout le pont).

Si $L1 + X \leq L$ alors $M = \frac{Q * B}{L1} * \frac{(L1 + 2 X)}{2L}$

/...

$$\text{Si } L1 + X > A \text{ alors } M = Q \left[\left(\frac{B * X}{L} + \frac{A * B}{L} \right) \frac{(A - X)}{2} + \left(\frac{A * B}{L} * \frac{A(L-L1-X)}{L} \right) + \left(\frac{L1+X - A}{2} \right) \right]$$

$$\text{Si } X \gg A \text{ alors } M = \frac{Q * L1}{2L} * \left[A(L - X) + (L - L1 + X) \right]$$

$$\text{Si } X \gg A \text{ et } L1 + X > L \text{ alors } M = \frac{Q * A}{2L} (L - X)^2$$

Au droit de cette section S, il nous est donné parmi tout les moments calculés, le moment maximum ainsi que la position de la charge donnant ce moment

(Voir Organigramme, page suivante)

C/ - Cas d'un système de charges ponctuelles :

Un convoi est un système de charges concentrées (essieux) pouvant se déplacer dans leur ensemble, les distances mutuelles entre les lignes d'action des différentes charges restant invariables au cours du déplacement ; tel est le cas des ~~essieux~~ d'un camion ou d'un train. Parmi ces convois, nous avons le système de charges B, le système de charges militaires et le système de charges quelconques.

1/ - Système de charge B :

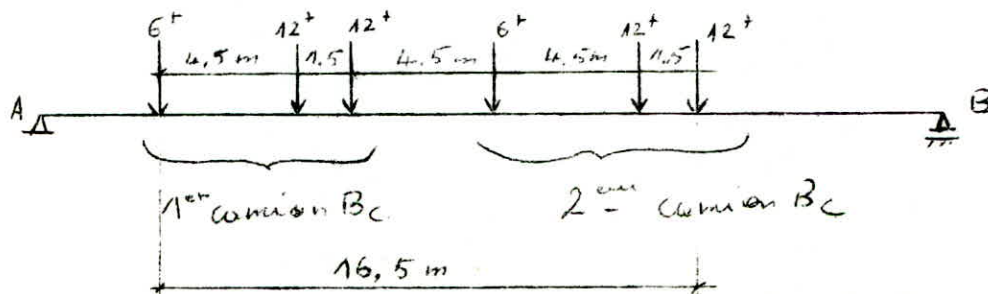
Le système de charges B comprend trois cas de chargement :

- Système B_c
- Système B_t
- Système B_r

Le système B_r a été étudié dans le cas d'une charge ponctuelle.

* Système B_c :

Un camion type du système B_c comporte trois essieux, tous trois à roues simples munies de pneumatiques de masse totale 30 tonnes.



A

Calcul du moment Fléchissant d'un Système de Charges réparties

Choix du système de Charges à traiter (quelconque, Mc, 80, Mc 120, Type D, Type E)

Choix de la section

Section dangereuse

$$M = \frac{Q * L_1}{8} (2 * L - L_1)$$

le moment M =

Section quelconque

Boucle sur les positions

Pour différentes positions du système

Calcul de M

Moment Max et sa position

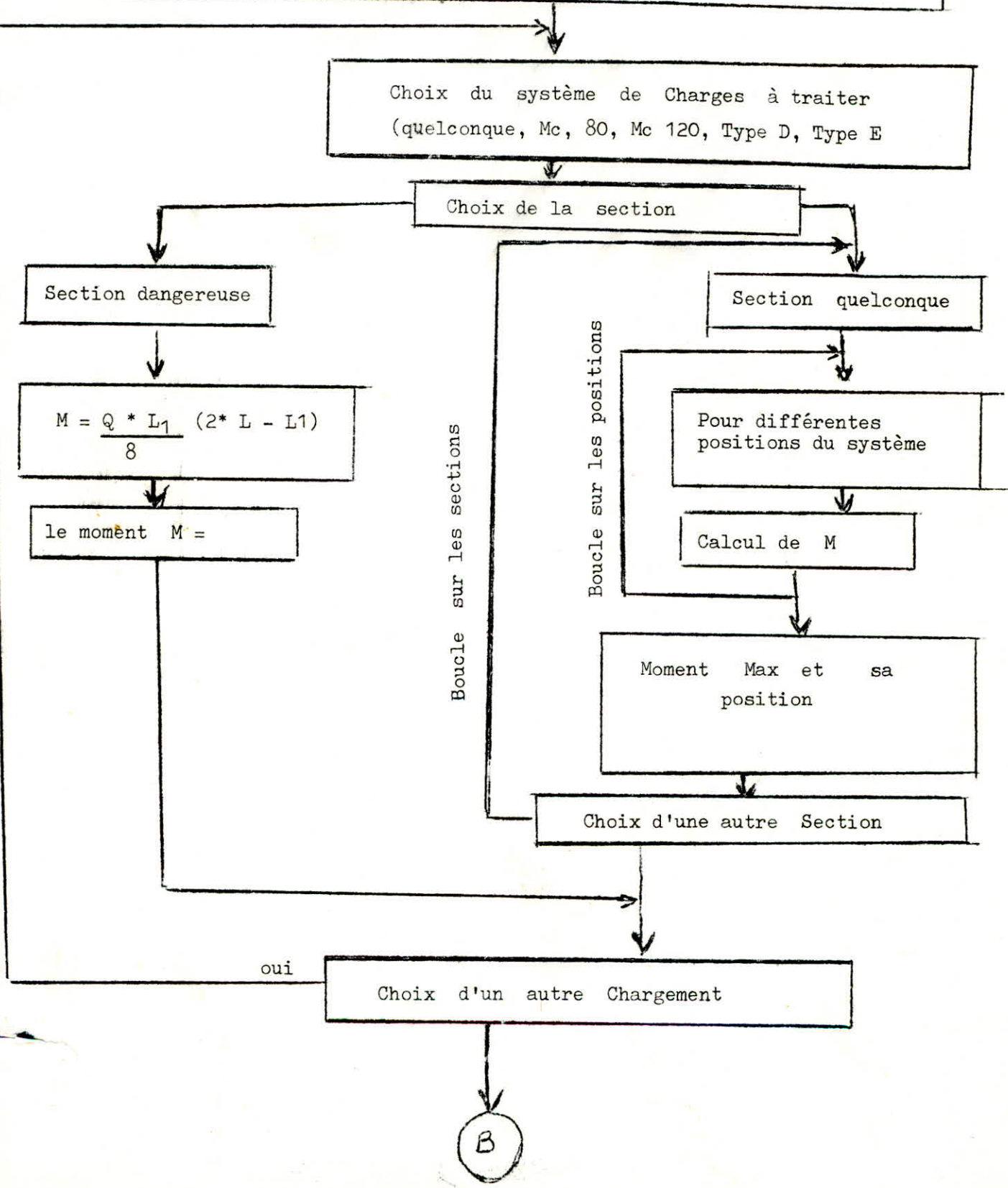
Boucle sur les sections

Choix d'une autre Section

oui

Choix d'un autre Chargement

B



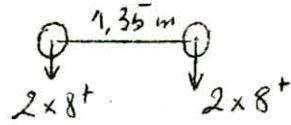
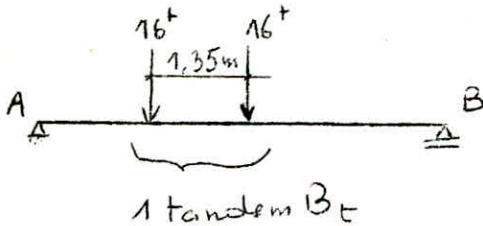
Transversalement, nous avons :

- Un camion type Bc si le nombre de voies est égale à un (N=1)
- Deux camions type Bc ou plus si le nombre est égale à deux ou plus afin d'avoir l'effet le plus défavorable.

Nous avons 2 camions seulement ; en gardant l'esprit qu'on peut mettre autant d'essieux des 2 camions que peut supporter notre pont, cela veut dire que pour le système Bc nous raisonnons par essieux.

* Système Bt :

Le système Bt est un tandem comportant deux essieux tous deux à roues simples munies de pneumatiques de masse égale à 32 tonnes.



Transversalement, nous avons :

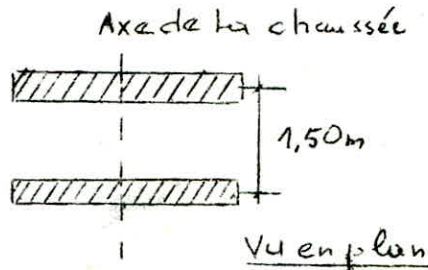
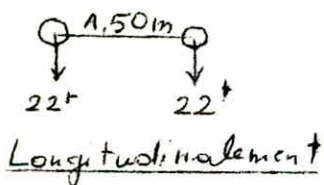
- Un tandem si le nombre de voies est égale à 1 (N = 1)
- Deux tandems si le nombre de voies est supérieur ou égale à deux voies (N > 2)

Longitudinalement, il y a un seul tandem

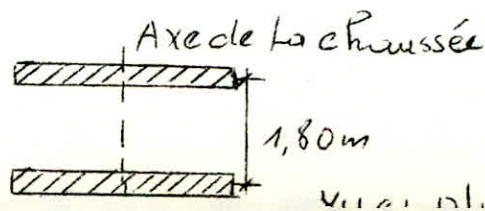
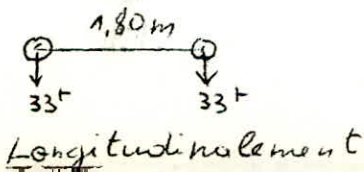
2/ - Système de charges militaires :

Ce système est représenté par un groupe de deux essieux, chacun essieu assimilé à un rouleau de masse égale à 22 tonnes pour le Me 80 et de 33 tonnes pour le Me 120

* Me 80



* Me 120



3/ - Système de charges quelconques : il est demandé à l(

Il est demandé à l'utilisateur de donner la masse de ces charges et les distances entre elles.

On peut se contenter de déterminer les valeurs maximales de M dans un certain nombre de sections du pont, mais il est également intéressant de déterminer les valeurs maximales du moment fléchissant M dans l'ensemble du pont ; c'est pour cela qu'on a jugé utile d'étudier le moment fléchissant en : -

- Une section dangereuse
- Une section quelconque.

C/ - 1 - Section dangereuse :

Elle sera déterminée à l'aide du théorème de barré, soit un convoi engagé sur le pont, les étapes à suivre pour trouver cette section dangereuse ainsi que le moment fléchissant maximum sont :

- 1/ - Détermination de la charge la plus défavorable
- 2/ - A l'aide du théorème de barré placé les charges sur le pont, ainsi la section dangereuse sera celle où est appliquée la charge la plus défavorable.
- 3/ - Détermination des ordonnées des charges en utilisant le schéma de la ligne d'influence.
- 4/ - Calcul du moment fléchissant.

C - 1 - 1/ Détermination de la charge la plus défavorable :

En gardant les notations du programme, cette charge est donnée par la formule suivante

$$S_A \leq \frac{R}{2} \leq S_B \quad (1)$$

Avec R = résultante du système de charges = $\sum_{i=1}^n P_i$

$$S_A = \sum_{i=1}^{n-1} P_i \quad \text{et} \quad S_B = \sum_{i=1}^n P_i$$

N'étant le nombre de charges ponctuelles engagées sur le pont. pour i vérifiant la condition (1) ; la charge P_i ; est une charge défavorable. Pour un même convoi on peut avoir une ou plusieurs charges défavorables.

C - 1 - 2 / Recherche de la section dangereuse :

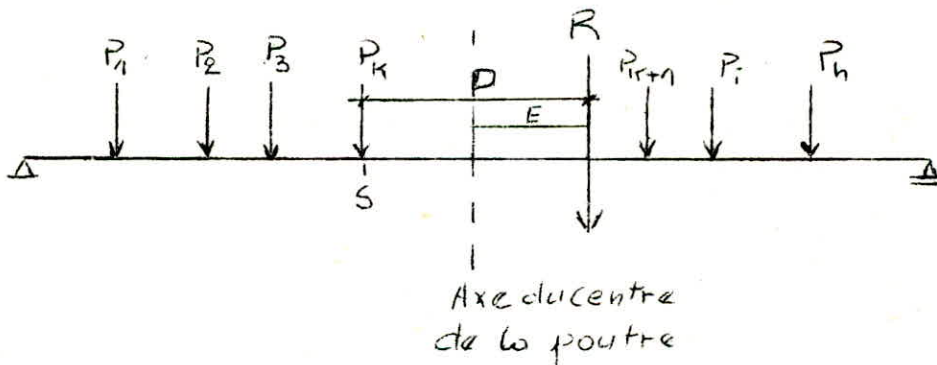
Ayant trouvé la charge défavorable et calculé la position de la résultante dans le convoi, on peut utiliser le théorème de Barré.

Enoncé du théorème de Barré :

Le moment fléchissant M_i au droit d'une charge P_i due à un ensemble de charges mobiles $\sum P_i$ engagée sur la poutre AB sera maximum au droit de cette charge P_i lorsque cette charge et la résultante de toutes ses charges seront symétrique par rapport au centre de la poutre.

Cas 1 : La résultante tombe à droite de la charge défavorable.

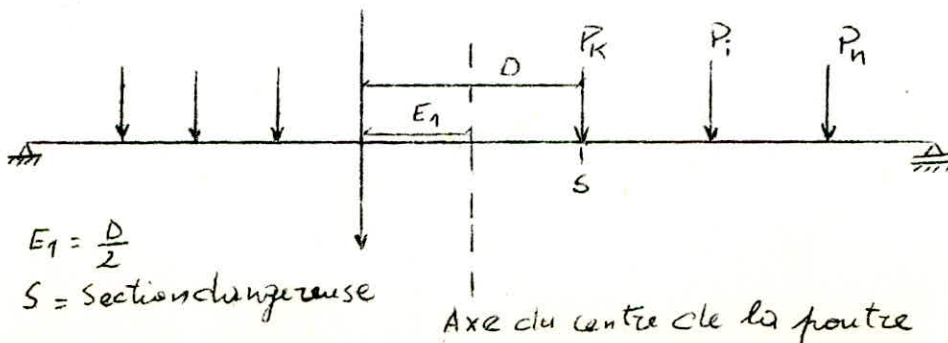
Supposons P_k une charge défavorable ; en utilisant le théorème de Barré on aura le schéma suivant :



- $R =$ Resultante du système
- $E = \frac{D}{2}$
- $S =$ Section dangereuse

Cas 2 : La résultante tombe à gauche de la charge défavorable.

Supposons P_k la charge défavorable, d'après le théorème de Barré on obtient le schéma suivant



- $E_1 = \frac{D}{2}$
- $S =$ Section dangereuse

Après avoir envisagé les deux cas de charges précédentes, on a ainsi la section dangereuse, elle sera au droit de la charge la plus défavorable.

C - 1 (3/ Calcul des coordonnées des charges ponctuelles :

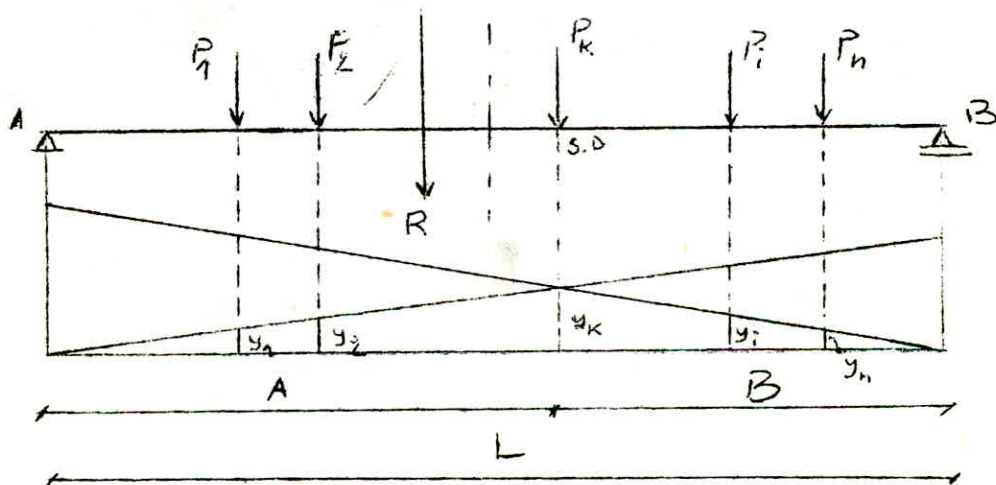
Pour cela nous calculons les abscisses et les ordonnées de chaque charge du convoi.

X (I) il se fera après emplacement des charges sur le pont

(Pour le calcul des abscisses), pour les ordonnées, nous calculons:

$Y(I)$ pour $X(I) \leq A$ et $X(I) > A$

S.D. = Section Dangereuse.



Pour la charge $P_k : x(k) = A$

Si $X(I) \leq A = X(k)$ Alors $Y(I) = \frac{L-A}{L} \times X(I)$

Si $X(I) > A = X(k)$ " $Y(I) = A \times \frac{L-X(I)}{L}$

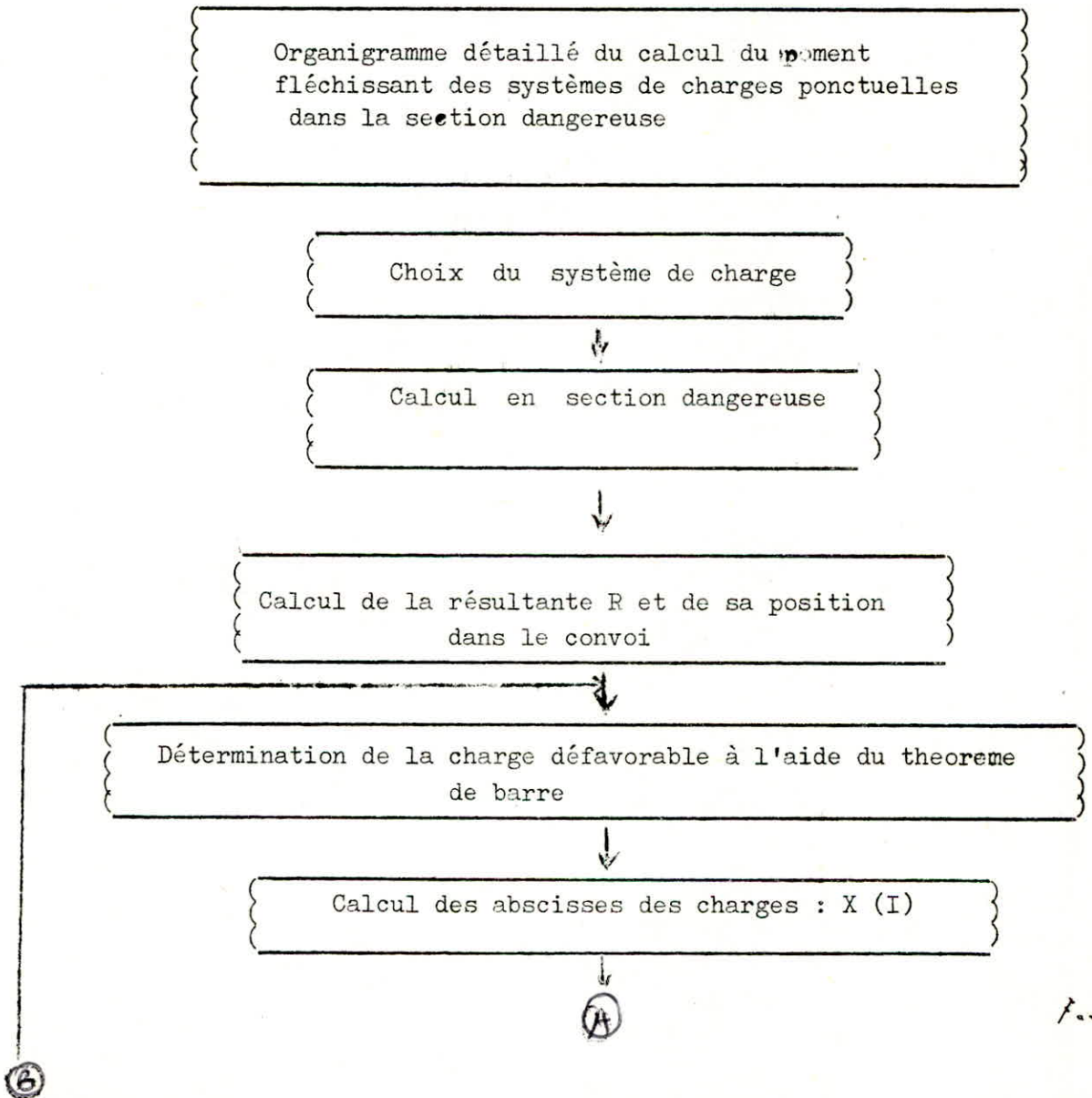
Si $X(I) \leq 0$ et $X(I) > L$ " $Y(I) = 0$

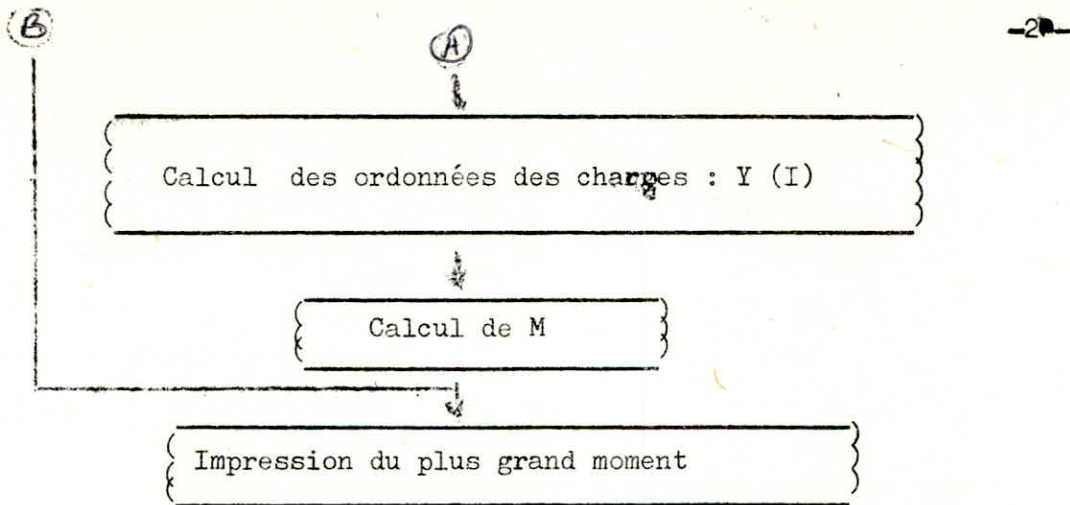
C - 1 - 4/ Calcul du moment fléchissant :

Ayant calculé les ordonnées Y (I) des charges du convoi, le moment fléchissant sera :

$$M = \sum_{I=1}^N P (I) * Y (I)$$

Ce moment fléchissant M est le plus grand ; si on tombe dans le cas où on a deux ou plus charges défavorables (deux ou plus sections dangereuses), le programme calculé un moment pour chaque section dangereuse et imprime le plus défavorable (le plus grand)





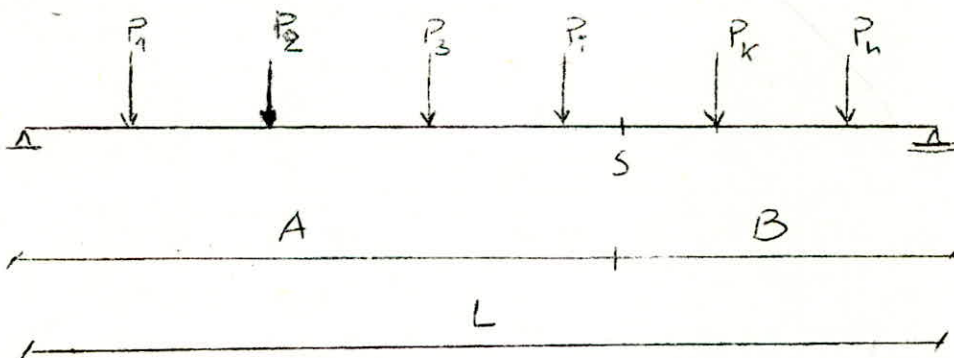
C - 2 / Section quelconque :

Au droit d'une section quelconque choisie, il sera calculé un moment fléchissant ceci après avoir trouvé la charge défavorable. L'algorithme de calcul serait le suivant.

- 1/ - Détermination de la charge défavorable
- 2/ - Au droit de la section choisie placer la charge défavorable, si cette dernière n'existe pas placer les charges les plus laurdes au droit de cette section.
- 3/ - Détermination des abscisses et ordonnées du convoi
- 4/ - calcul du moment fléchissant

C - 2 - 1 / Détermination de la charge défavorable

Soit le système à étudier :



Pour déterminer la charge défavorable du convoi ci-dessus on utilise les relations suivantes :

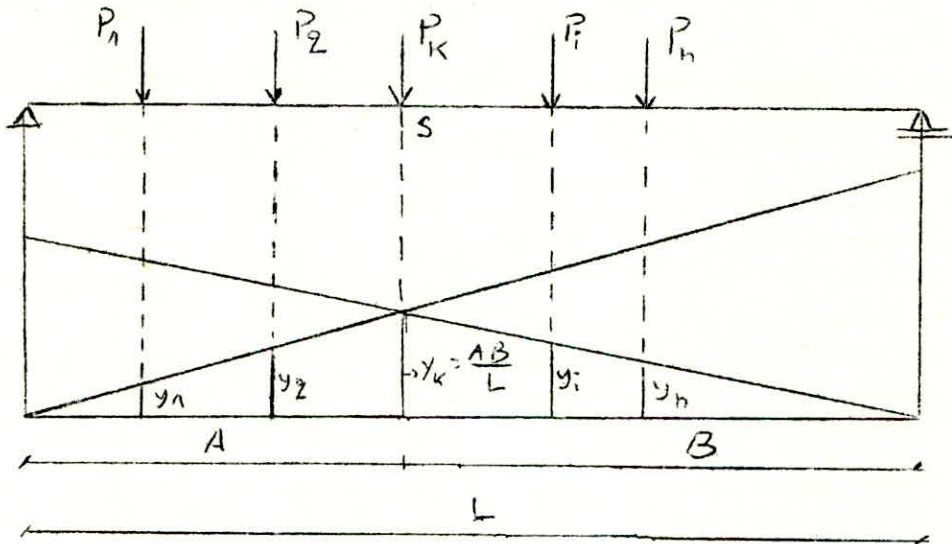
$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\sum_{\alpha=1}^i P_{\alpha}}{A} > \frac{\sum_{\alpha=i+1}^n P_{\alpha}}{B} \quad \text{et} \quad (2) \quad \frac{\sum_{\alpha=1}^{i-1} P_{\alpha}}{A} < \frac{\sum_{\alpha=i}^n P_{\alpha}}{B} \\
 (3) \quad & \frac{\sum_{\alpha=1}^i P_{\alpha}}{A} < \frac{\sum_{\alpha=i+1}^n P_{\alpha}}{B} \quad \text{et} \quad (4) \quad \frac{\sum_{\alpha=i}^n P_{\alpha}}{A} > \frac{\sum_{\alpha=1}^{i-1} P_{\alpha}}{B}
 \end{aligned}$$

(1) et (2) doivent être vérifiées en même temps ;
de même pour (3) et (4)

Pour α vérifiant (1) et (2) ou (3) et (4) ; la charge $P\alpha$ est défavorable. Cette dernière sera placée sur la section S choisie, dans le cas, il n'y aurait pas de charge défavorable on mettra les charges les plus lourdes au droit de cette section.

C - 2 - 2 / Calcul des ordonnées des charges et du moment fléchissant

Les abscisses des charges ^{section} calculés après emplacement des charges sur le pont.
Les ordonnées seront calculées comme



Supposons P_k défavorable : $X (K) = A$

pour $I = 1 \dots, N$

Si $X (I) \leq A$ alors $y(I) = \frac{L - A}{L} * X (I)$

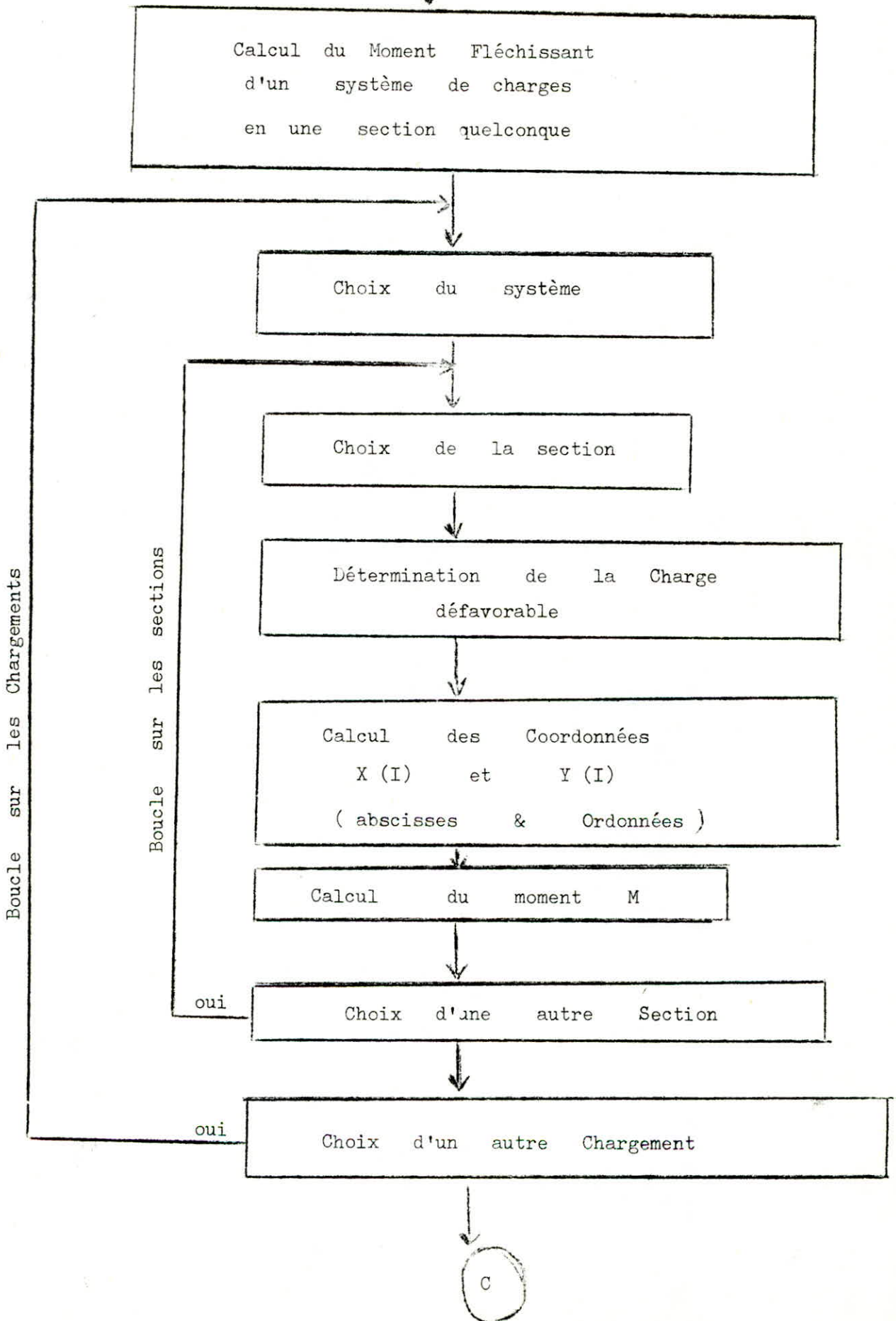
Si $X (I) > A$ alors $Y (I) = \frac{A * (L - X (I))}{L}$

Si $0 > X > L$ alors $Y (I) = 0$

Y (I) étant déterminée .

$$M = \sum_{I=1}^N P (I) * Y (I)$$

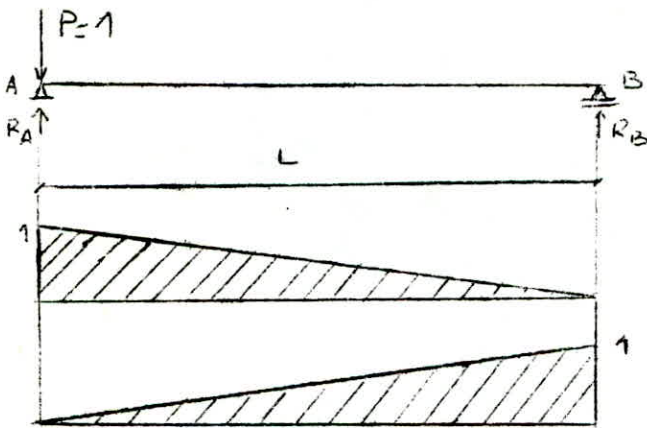
B



I - 3/ Calcul de l'effort tranchant

I - 3 - 1/ Définition de la ligne d'influence de l'effort tranchant d'une poutre isostatique :

a/ - Au droit de l'appui



$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow R_B = 0 \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow R_A = 1 \end{aligned}$$

Cette courbe n'est autre que la ligne d'influence de l'effort tranchant au droit de l'appui (réaction d'appui), il est de même pour P = 1 sur l'appui B

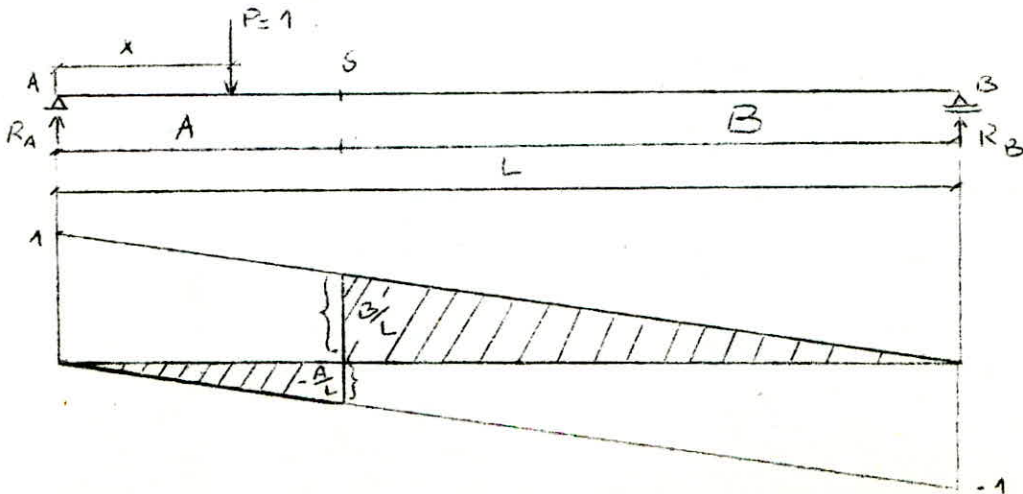
b/ - Au droit d'une section :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_B = \frac{Px}{L} \\ R_A = P(1 - \frac{x}{L}) \end{cases}$$

$$P=1 \Rightarrow \begin{cases} R_B = \frac{x}{L} \\ R_A = 1 - \frac{x}{L} \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} R_A & \text{si } P \leq A \\ R_A - P & \text{si } P > A \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} 1 - \frac{x}{L} & \text{si } x \leq A \\ -\frac{x}{L} & \text{si } x > A \end{cases}$$



On calcule les 2 expressions en $X = 0$ et $X = L$; d'où l'allure de la ligne d'influence de l'effort tranchant ; pour avoir les valeurs de T au droit de la section on fait $X = A$ d'où $T = \frac{B}{L}$ et $T = -\frac{A}{L}$

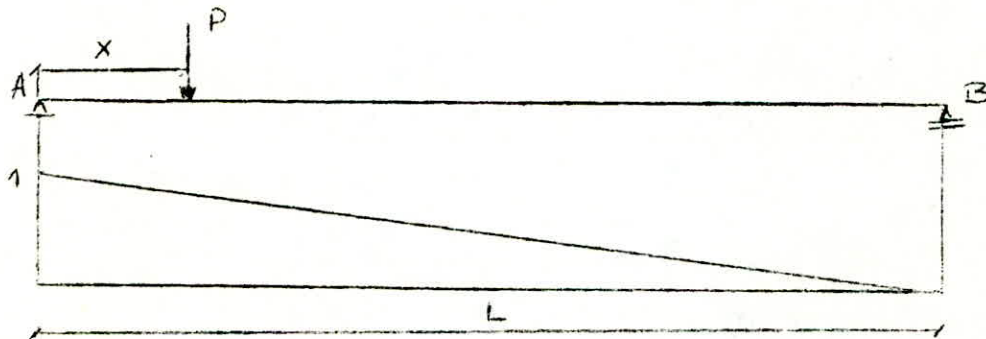
I - 3 - 2 / Cas une charge ponctuelle :

Nous calculons l'effort tranchant en deux sections :

1/ - Sur appui

2/ - En train

* - Au droit de l'appui : Calcul de la réaction d'appui

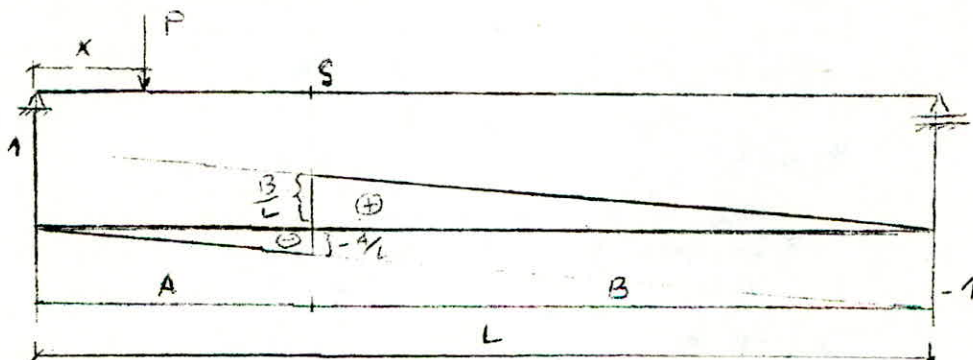


Comme le moment fléchissant, notre charge ponctuelle peut être unitaire, quelconque ou une roue isolée (système Br) de 10 tonnes.

Pour X variant de zéro à L : $T = P \frac{(L - X)}{L}$

Pour $X = 0 \rightarrow T = P$ (réaction d'appui) : effort tranchant maximum

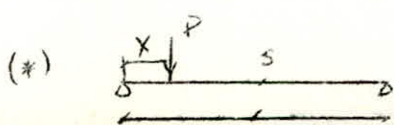
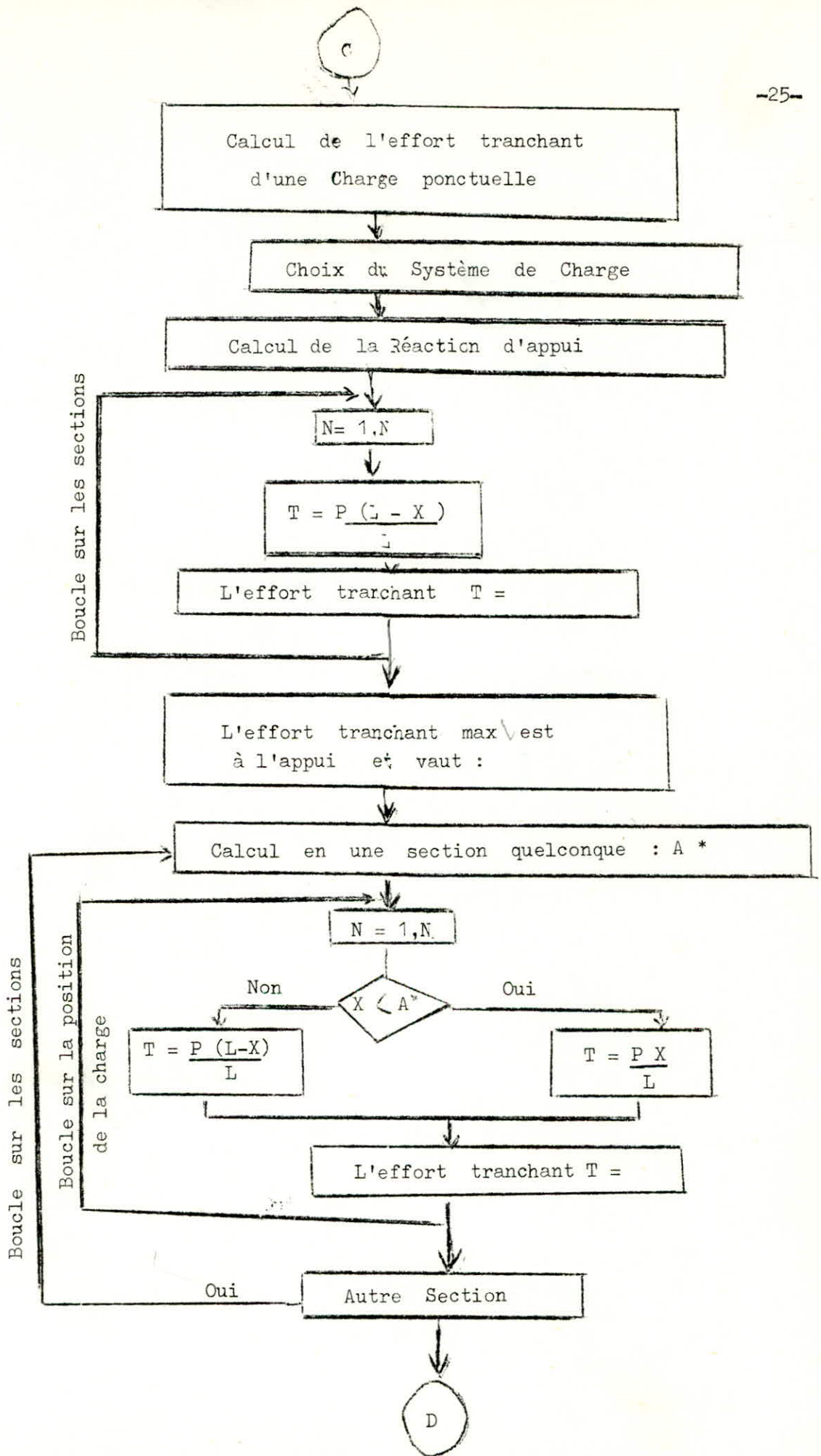
* Au droit d'une section



pour X variant de zéro à L; si $X < A$ alors $T = -\frac{P X}{L}$

Si $X \geq A$ alors $T = \frac{P (L - X)}{L}$

il sera maximum lorsque la charge P se trouve sur la section S et $T = \frac{P \cdot B}{L}$

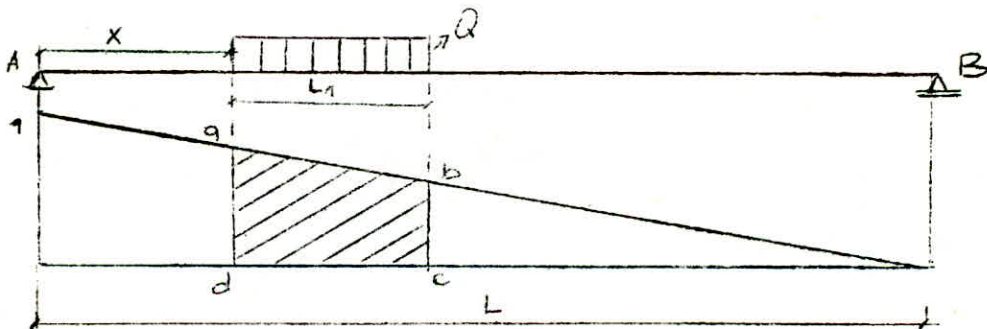


I - 3 - 3 / Cas d'une charge répartie :

Comme pour le moment fléchissant, les différents cas de charges sont : - surcharge quelconque (Q = ? ; L1 = ?)

- Surcharges militaire \rightarrow Mc 80 (Q = 72t, L1 = 4,9m)
 \rightarrow Mc 120 (Q = 110t, L1 = 6,1m)
- Surcharge exceptionnelles \rightarrow type D (Q = 240t, L1 = 18,6m)
 \rightarrow type E (Q = 360t, L1 = 18,6m)
- Surcharge A (A = ?, L1 = ?)

* - Au droit de l'appui :



Pour la charge se déplaçant de A vers B ; l'effort tranchant sera égal à :

$$T = Q * \text{Aire du trapèze a b c d}$$

$$\text{Si } L1 + X < L \quad \text{alors } T = \frac{Q L1}{2 L} [2 (L - X) - L1]$$

$$\text{Si } L1 + X > L \quad \text{alors } T = \frac{Q}{2 L} (L - X)^2$$

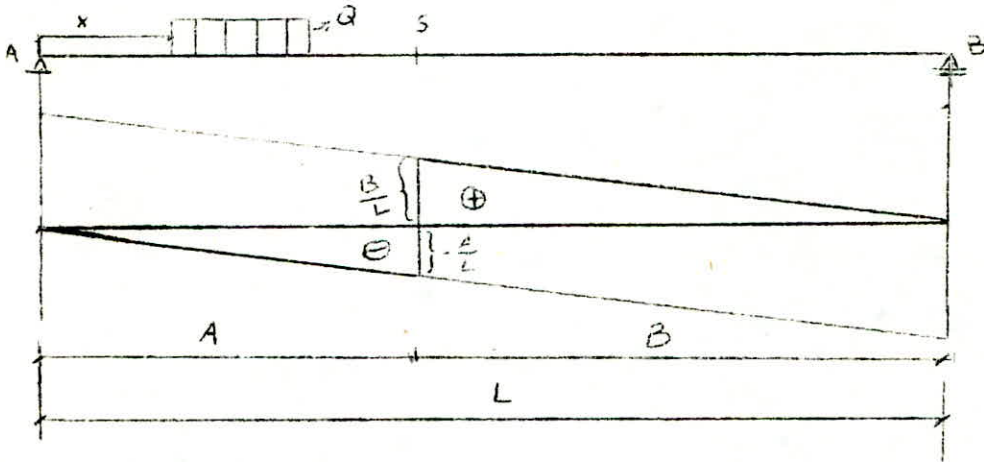
$$\text{Si } X = 0 \quad \text{Alors } \frac{Q L1}{2 L} (2L - L1)$$

$$\text{Si } L = L1 \quad \text{alors } T = \frac{QL}{2} \quad (\text{cas une surcharge A appliquée sur tout le point})$$

* - Au droit d'une section :

-27-

Pour l'effort tranchant le plus défavorable, nous ne chargeons que la partie positive de la ligne d'influence du pont.



Pour X variant de A à L, l'effort sera égale à :

$$\text{Si } L_1 + X < L \quad \text{alors } T = \frac{q L_1}{2L} (2L - 2X + L_1) = \frac{q L_1}{2L} (2(L - X) - L_1)$$

$$\text{Si } L_1 + X > L \quad \text{alors } T = \frac{q}{2L} (L - X)^2$$

Si $L_1 = L$ (cas de la surcharge A) ou ne chargera le pont que sur la distance B, alors $T = \frac{q B^2}{2L}$ (voir Organigramme page suivante)

I-3-4) Cas d'un système de charges ponctuelles

Les convois que l'on va étudier dans ce paragraphe seront ceux déjà cités dans le calcul du moment fléchissant (les surcharges B ; les surcharges militaires, et les surcharges quelconques).

Nous calculerons comme auparavant en deux sections - sur appui
- en travée

Calcul de l'effort tranchant pour une charge uniformément répartie

Choix du système de Charges

Calcul de la réaction d'appui

Pour différentes positions de la Charge

calcul de T

Boucle sur les positions

L'effort tranchant max est à l'appui et vaut T

Calcul en une section quelconque

Choix de la section

Pour différentes positions de la Charge à partir de la section A

Calcul de T

Position et effort tranchant max

Autre section

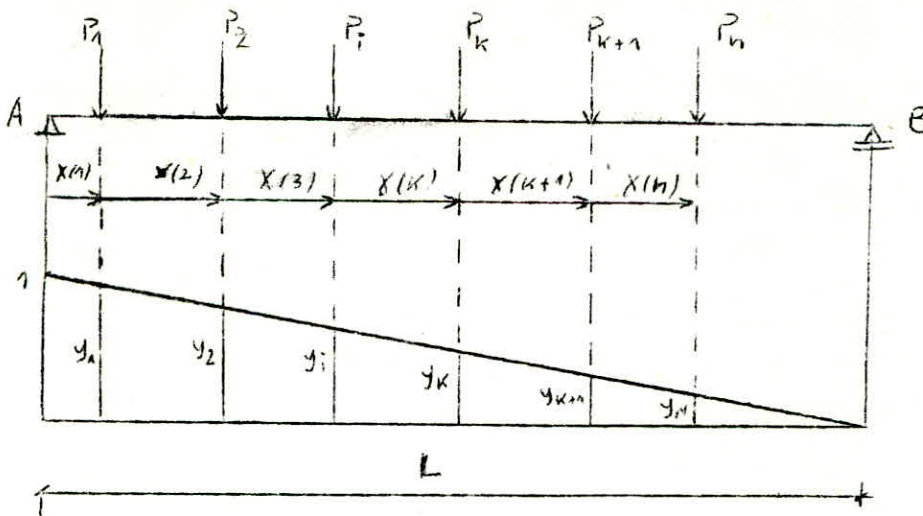
Autre chargement

Boucle sur les chargements

Boucle sur les sections

Boucle sur les positions

* Au droit de l'appui :



Afin de déterminer l'effort tranché maximum à l'appui A, on procédera comme :

- Engager le convoi sur la poutre AB
- Prendre les charges les plus lourdes et les plus rapprochées les placer le plus près possible de l'appui A.

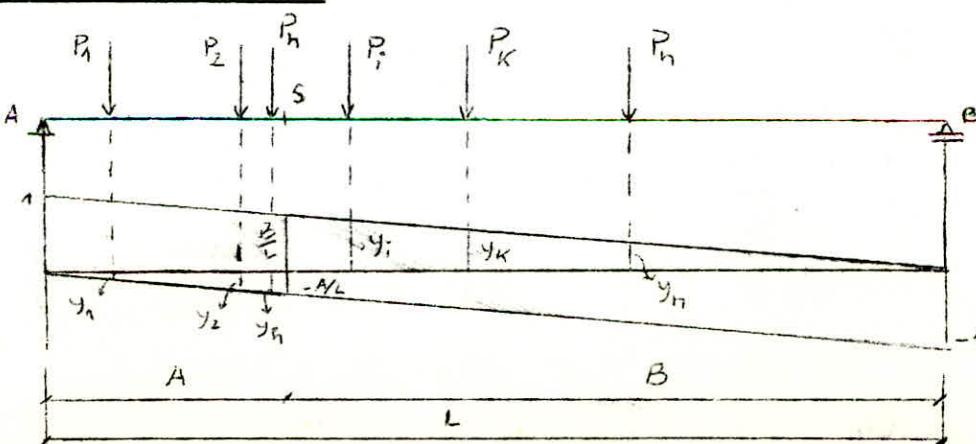
$$TA_{max} = \sum_{I=1}^N P(I) \cdot Y(I)$$

P(I) étant connue, les Y(I) seront comme suit :

pour I = 1 à N $Y(I) = \frac{L - X(I)}{L}$
 si $X(I) > L \rightarrow Y(I) = 0$

Les X(I) sont comptées positivement de A vers B et sont pris par rapport à l'appui A.

* Au droit d'une section :



L'effort tranchant maximum sera obtenu en lui plaçant le maximum de charges et les plus lourdes le plus près possible de la section S. On évitera de placer les charges dans la partie négative, si on ne peut pas faire autrement, on essaiera de placer, le minimum des charges, (les moins lourdes) et en les éloignant de la section considérée A.

Supposons que la position arrêtée sur le schéma est la plus défavorable ; l'effort tranchant maximum est alors :

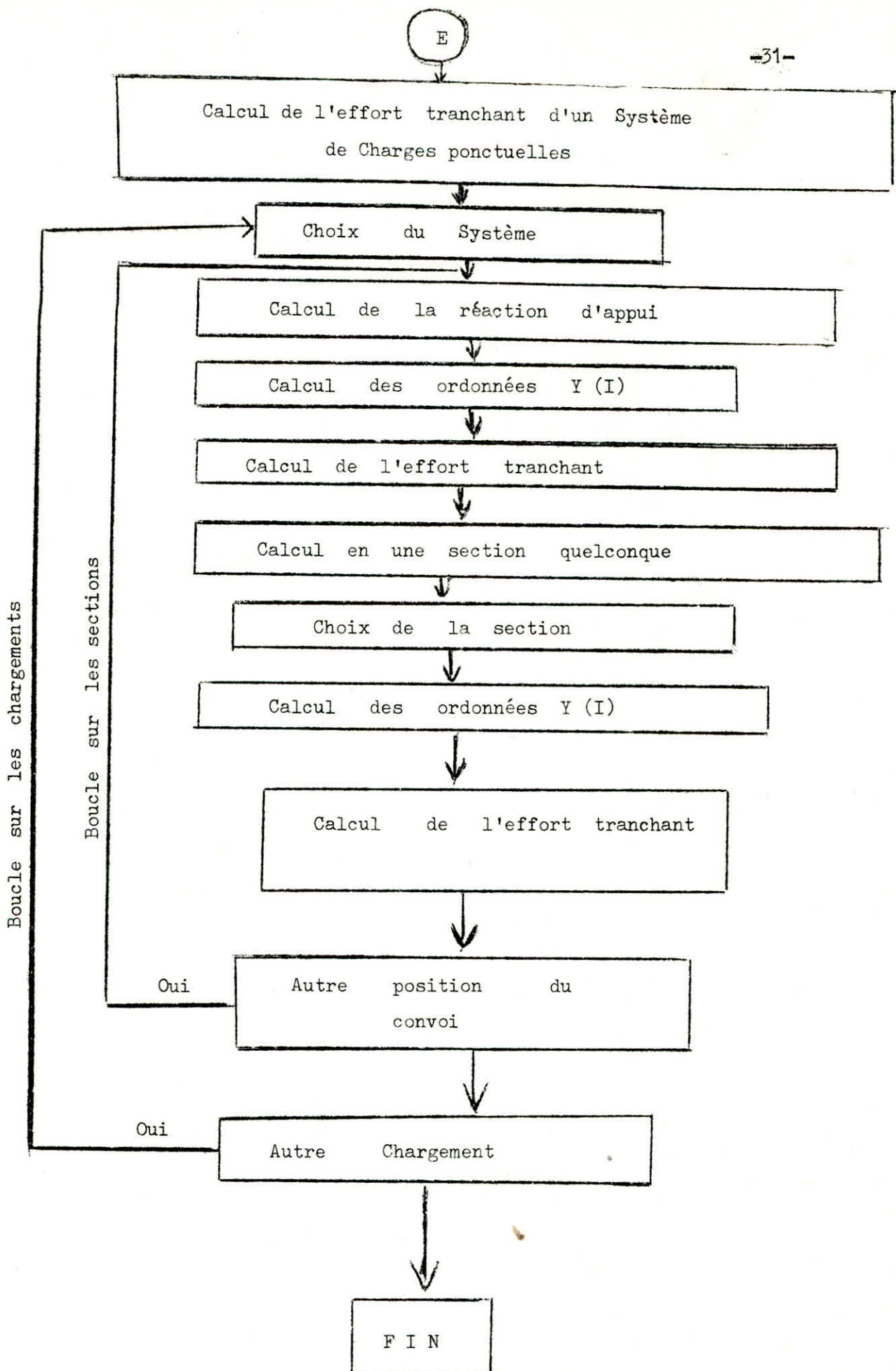
$$T_s \text{ max} = \sum_{I=1}^h P(I) + Y(I) + \sum_{I=i}^N P(I) * Y(I)$$

Pour $I = 1$ à N

$$\text{Si } X(I) < A \quad \text{Alors } Y(I) = -\frac{X(I)}{L}$$

$$\text{Si } X(I) \geq A \quad \text{Alors } Y(I) = \frac{L - X(I)}{L}$$

$$\text{Si } 0 > X(I) > L \quad \text{Alors } Y(I) = 0$$



I.4 - CALCUL DE LA LIGNE D'INFLUENCE DE LA FLECHE ET DE LA ROTATION -

I.4.1 - DEFINITION DE LA FLECHE :

On désigne sous le nom de flèche dans la section d'abscisse x , le déplacement vertical de cette section. La fibre moyenne déformée est appelée ligne élastique de la poutre.

I.4.2 - CALCUL DE LA FLECHE :

Elle sera calculée numériquement à l'aide des intégrales $U(x)$ et $V(x)$. Connaissant le moment fléchissant M dû à une charge unitaire appliquée à la poutre, on calcule $U(x)$ et $V(x)$ pour toute section d'abscisse x :

$$U(x) = \int_0^x \frac{M(\xi)}{E I(\xi)} d\xi$$

$$V(x) = \int_0^x U(\xi) d\xi$$

Ces intégrales sont calculées à l'aide de la formule des trapèzes ($n = 1$)

Pour calculer $\int_a^b f(x) dx$ - adoptons le pas :

$$h = \frac{b - a}{n}$$

dans notre cas $n = 1$

donc $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1)$

On calcule tout d'abord la rotation de la section d'extrémité :

$$W_0 = - \frac{V(L)}{L}$$

puis

$$W(x) = W_0 + U(x)$$

$$V(x) = W_0 x + V(x)$$

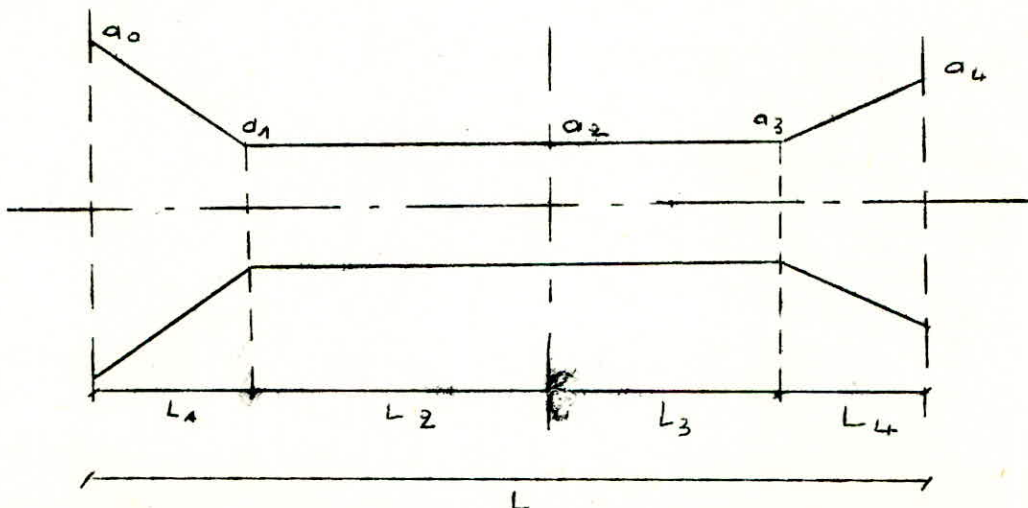
$W(x)$ étant la rotation dans la section x

$V(x)$ étant la flèche dans la section x .

La fonction $I(\xi)$ est donnée par les trois cas suivants :

- 1) - Inertie constante,
- 2) - Inertie constante en travée et linéaire aux appuis,
- 3) - Variation parabolique de la hauteur.

Pour la 2ème cas, c'est-à-dire inertie constante en travée et linéaire aux appuis, on peut prendre par exemple le cas de l'épaississement de l'âme aux appuis des poutres :



*Entre a_0 et a_1

$$I(x) = I_0(1 - \frac{x}{L_1}) + I_1 \frac{x}{L_1} \quad (I_0 = I_1)$$

$I_0 = I$ nertie en a_0

$I_1 =$ " " a_1

*Entre a_1 et a_2

$$I(x) = I_1$$

*Entre a_2 et a_3 : $I = I_1$

*Entre a_3 et a_4 : $I(x) = I_1(1 - \frac{x}{L_4}) + I_4 \cdot \frac{x}{L_4}$

En général la travée est symétrique par rapport à son milieu : $L_1 = L_4$, $L_2 = L_3$, $I_0 = I_4$.

Le cas d'une variation parabolique de la hauteur est plutôt fréquent dans les poutres continues; alors nous avons jugé utile de le développer dans l'étude des poutres continues.

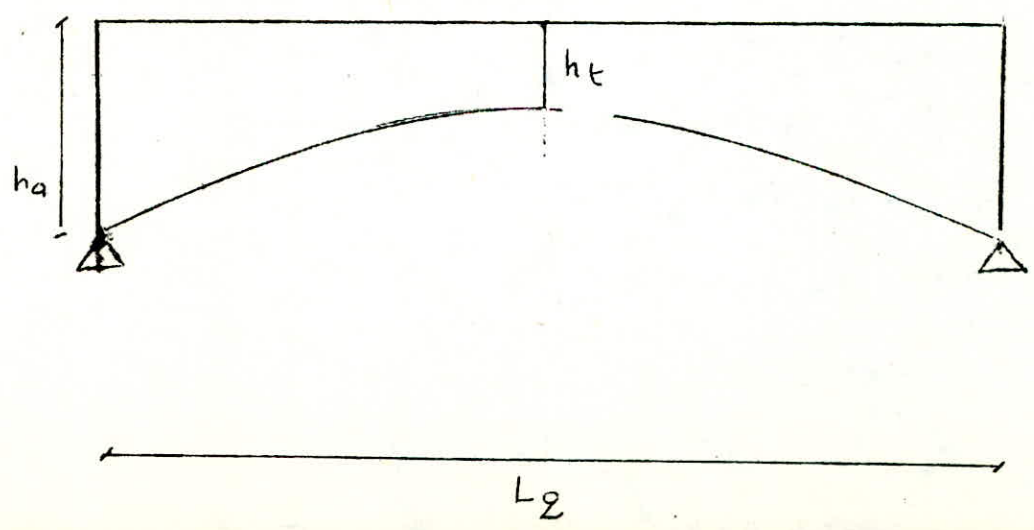
Les équations donnant la variation de l'inertie et de la hauteur sont :

$$h(x) = h_t \left[1 + (z - 1) \left(\frac{2x - L_2}{L_2} \right)^2 \right]^{5/2}$$
$$I(x) = I_t \left[1 + (z - 1) \left(\frac{2x - L_2}{L_2} \right)^2 \right]^{5/2}$$

$h_t =$ Hauteur à la clé (mi - travée)

$h_a =$ " " l'appui

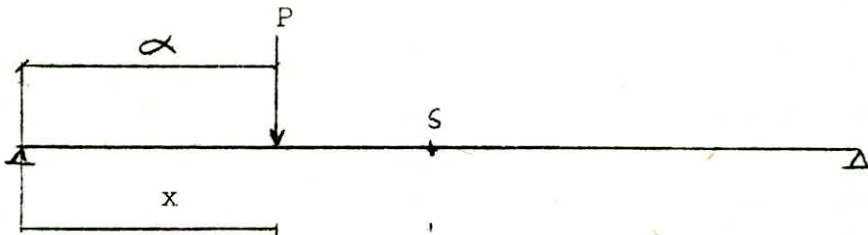
$z = \frac{h_a}{h_t}$ $I_t = I$ nertie à mi-travée.



I-4-3 Ligne d'influence de la flèche

Pour obtenir la ligne d'influence de la flèche et de la rotation, nous faisons varier la position de la charge unitaire ($P = 1$) de sorte que :

$$M(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{P \cdot x \cdot (L - \alpha)}{L} & x \leq \alpha \\ \frac{P \cdot \alpha \cdot (L - x)}{L} & x > \alpha \end{cases}$$



La rotation de section s'écrit pour chaque position de P :

$$W_0(\alpha) = - \frac{V(L)}{L}$$

Puis :

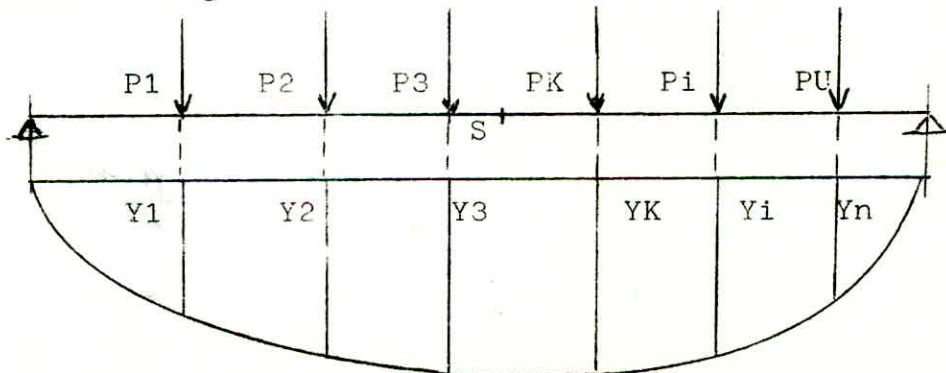
$$\begin{cases} W(\alpha, x) = W_0(\alpha) + U(\alpha, x) \\ \theta(\alpha, x) = W_0(\alpha) x + V(\alpha, x) \end{cases}$$

$W(\alpha, x)$ étant la ligne d'influence de la rotation

$V(\alpha, x)$ " " " " flèche.

I-4-4 Calcul d'efforts

Les valeurs de la ligne d'influence de la flèche et de la rotation étant stockées en mémoire, il nous suffit de les utiliser pour calculer la flèche en une section donnée sous l'effet d'un système de charges :



Si on appelle V la flèche en une section S elle s'écrit :

$$V = \sum_{I=1}^n P(I) \cdot Y(I)$$

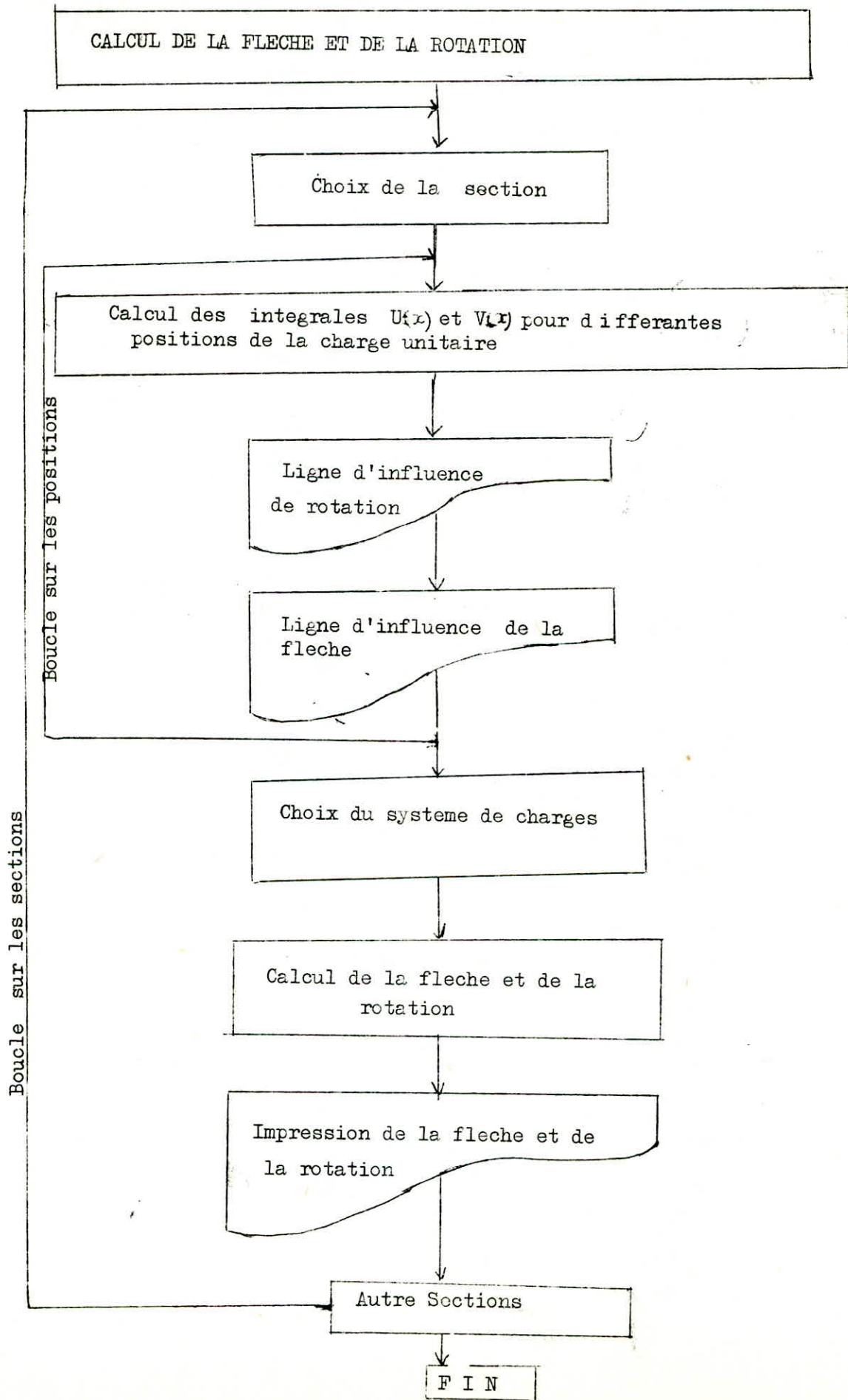
Avec $Y(I) = \nu(\alpha, s)$. (déjà calculé).

De même si on appelle W la rotation en une section S , elle s'écrit :

$$W = \sum_{I=1}^n (P(I) \cdot Y(I))$$

$$Y(I) = W(\alpha, s)$$

O R G A N I G R A M M E



POUTRE CONTINUE

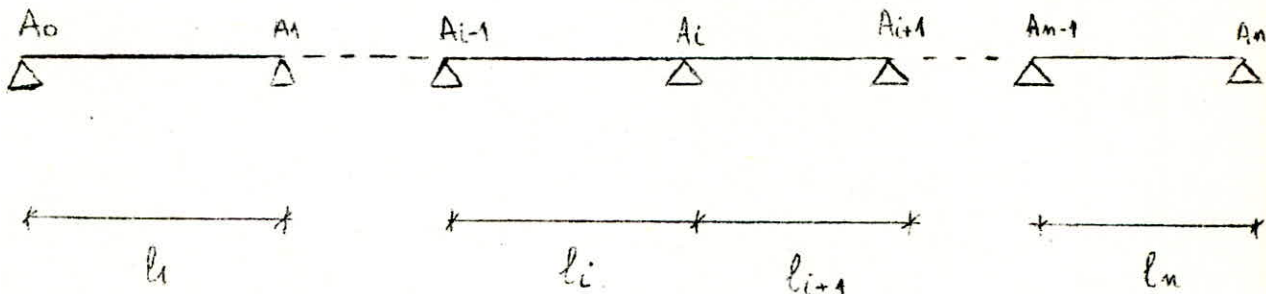


II - 1/ Définition et notations :

Une poutre continue est une poutre droite horizontale reposant sur plus de deux appuis simples incompressibles. La poutre est soumise à des charges verticales, et les réactions d'appuis sont verticales.

On suppose les efforts nuls dans la poutre en l'absence de charges appliquées.

On numérote les appuis de 0 à n : $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, et les travées de 1 à n, la portée de la travée $A_{i-1} A_i$ étant l_i



Les réactions d'appuis sont au nombre de $n+1$, et les équations de la statique sont au nombre de deux, les forces étant parallèles. Il en résulte que la poutre continue est $n-1$ fois hyperstatique.

Il serait possible de prendre comme inconnues hyperstatiques les valeurs de $n-1$ réactions d'appuis, mais le calcul est long et fatidieux, toutes les inconnues figurant dans les équations.

La meilleure méthode consiste à prendre comme inconnues hyperstatiques les valeurs des moments fléchissants dans la poutre au droit des appuis intermédiaires M_1, M_2, \dots, M_{n-1} .

On détermine ensuite immédiatement les moments fléchissants m_i et les efforts tranchant t_i dans une section quelconque de la travée $A_{i-1} A_i$:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i = \frac{M_{i-1}}{L_i} + M_i \frac{(L_i - x)}{L_i} + M_i \frac{x}{L_i} \\ T_i = \frac{dM}{dx} = \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} \end{array} \right.$$

x désignant l'abscisse de la section comptée à partir de l'appui de gauche A_{i-1}
 M_i : le moment fléchissant de la travée $A_{i-1} A_i$ supposée isostatique.

La réaction R_i exercée par l'appui A_i ; a pour valeur :

$$R_i = (T_{i+1})_{x=0} - (T_i)_{x=L_i}$$

II - 2/ Méthode de calcul des moments hyperstatiques :

Les méthodes les plus utilisées sont :

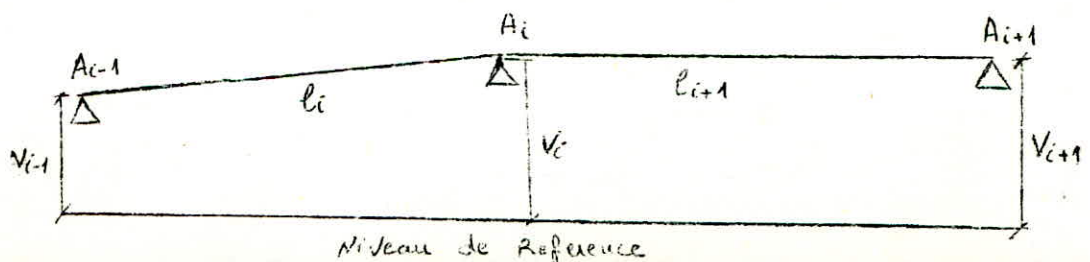
- a/ - Méthode de relaxation (cross par exemple)
- b/ - Méthodes directes : - méthodes des 3 moments
 - méthodes des 2 moments

Le cas a/ est simple mais nécessite des calculs itératifs et n'admet que difficilement des inerties variables.

Dans notre cas nous avons opté pour la méthode des 3 moments

II - 2-1 - Relation des trois moments :

On considère les deux travées successives de portée l_i et l_{i+1} reposant sur les trois appuis successifs $A_{i-1} A_i A_{i+1}$. On suppose les appuis dénivelés par rapport à un niveau de référence.



La relation fondamentale due à clapeyron qui relie trois moments successifs est :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i + \beta_{i+1} - \beta_i$$

a_i, b_i, c_i désignant les constantes mécaniques relatives à la travée $A_{i-1} A_i$:

$$a_i = \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i}$$

$$b_i = \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{x}{l_i} \frac{dx}{EI_i}$$

$$c_i = \int_0^{l_i} \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i}$$

ω'_i, ω''_i les rotations des sections d'extrémités de la travée $A_{i-1} A_i$ supposée sur appuis simples.

$$\omega'_i = - \int_0^{l_i} \mu_i \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI_i}$$

$$\omega''_i = \int_0^{l_i} \mu_i \left(\frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI_i}$$

$$\beta_i = \frac{V_i - V_{i-1}}{l_i}$$

V_i : dénivellation de l'appui A_i comptée positivement vers le haut.

Remarque : On a négligé les déformations dues : à l'effort tranchant

Il est possible de calculer les moments sur appuis d'une poutre continue en appliquant $n-1$ fois la formule des trois moments aux appuis $A_0 A_1 A_2, A_1 A_2 A_3, \dots, A_{n-2} A_{n-1} A_n$

Pour le calcul des lignes d'influence on suppose que seule la travée $A_{i-1} A_i$ est chargée par une force unitaire et que seule μ_i est différent de zéro, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}
 (c_1 + a_2)M_1 + b_2 M_2 = 0 \\
 b_2 M_1 + (c_2 + a_3)M_2 + b_3 M_3 = 0 \\
 \dots \\
 b_{i-2} M_{i-3} + (c_{i-2} + a_{i-1})M_{i-2} + b_{i-1} M_{i-1} = 0 \\
 b_{i-1} M_{i-2} + (c_{i-1} + a_i)M_{i-1} + b_i M_i = \omega_i' + \delta_i \\
 b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1})M_i + b_{i+1} M_{i+1} = -\omega_i'' - \delta_i \\
 \dots \\
 b_{i+1} M_i + (c_{i+1} + a_{i+2})M_{i+1} + b_{i+2} M_{i+2} = 0 \\
 \dots \\
 b_{n-2} M_{n-3} + (c_{n-2} + a_{n-1})M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} = 0 \\
 b_{n-1} M_{n-2} + (c_{n-1} + a_n)M_{n-1} = 0
 \end{cases}$$

On a obtenu un système (tri-diagonal) :

$$\begin{bmatrix}
 c_1 + a_2 & ; & b_2 & ; & 0 \\
 b_2 & ; & c_2 + a_3 & ; & b_3 & ; & 0 \\
 0 & ; & b_3 & ; & c_3 + a_4 & ; & b_4 & ; & 0 \\
 \dots & & & & & & & & \\
 b_{n-2} & ; & c_{n-2} + a_{n-1} & ; & b_{n-1} \\
 0 & ; & b_{n-1} & ; & c_{n-1} + a_n & ; & M_{n-1} \\
 \dots & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 M_1 \\
 M_2 \\
 \dots \\
 M_{n-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 \omega_i' + \delta_i \\
 -\omega_i'' - \delta_i \\
 \dots \\
 0
 \end{bmatrix}$$

On poursuit ainsi, d'où l'algorithme de résolution :

1ère phase : $d_1 = \beta_1$; $C_1 = \frac{b_1}{\beta_1} = \frac{b_1}{d_1}$; $x_n = 0$

$d_i = \beta_i - \frac{\alpha_i x_{i-1}}{d_{i-1}}$ pour $i = 2, \dots, n$

$C_i = \frac{b_i}{d_i} - \frac{\alpha_i C_{i-1}}{d_i}$ pour $i = 2, \dots, n$

2ème phase :

$x_n = C_n$ $i = n$
 $x_i = C_i - \frac{\alpha_i}{d_i} x_{i+1}$

avec cette résolution on détermine donc tous les moments sur les appuis intermédiaires.

II - 3 Variation des inerties :

Nous avons adopté trois cas de variations d'inertie.

1ère : cas : Inertie constante sur toute la travée i

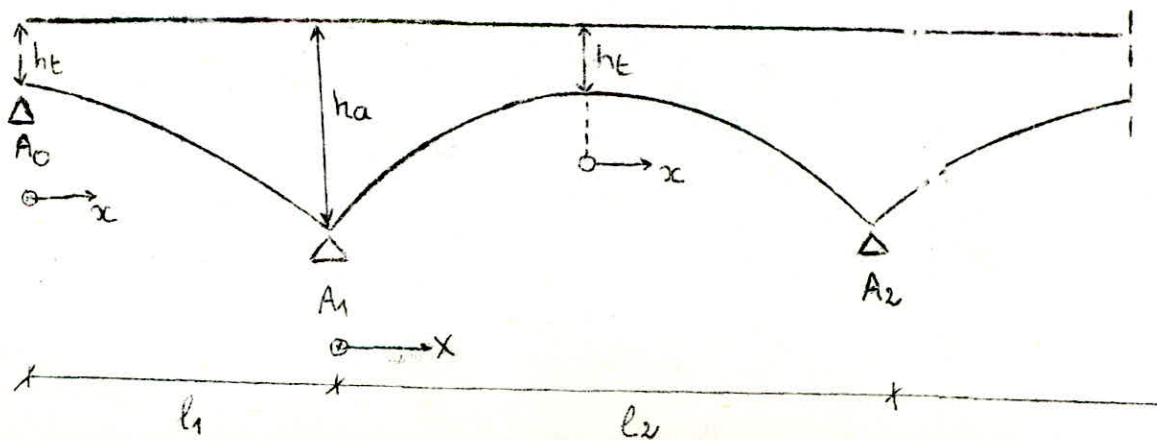
2ème cas : inertie linéaire aux appuis et constante en travée

3ème : cas : variation parabolique de la hauteur

*- Le cas d'inertie constante est simple

* - Le 2ème cas est traité dans la partie " poutre isostatique ".

* Vu que le 3ème cas est généralement fréquent dans les poutres continues (cas de ponts en béton précontraint) on a jugé utile de la traiter dans la partie " poutre continue ".



La hauteur varie comme suit ($Z = h_a/h_c$)

$$h(x) = h_t \left[1 + (Z-1) \left(\frac{x}{l_1} \right)^2 \right] \text{ dans la travée de rive}$$

$$h(x) = h_t \left[1 + (Z-1) \left(\frac{2x}{l_2} \right)^2 \right] \text{ dans la travée intermédiaire}$$

en reportant l'axe x en $A1$ on aura $X = x + \frac{l_2}{2} \rightarrow + \rightarrow x = X - \frac{l_2}{2}$

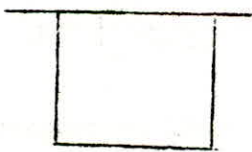
$$\text{et } h(x) = h_t \left[1 + (Z-1) \left(\frac{2X - l_2}{l_2} \right)^2 \right]$$

La principale difficulté est d'avoir dès le départ une estimation correcte des efforts, puisque ces derniers dépendent en toute rigueur, des formes de sections qui seront adoptées. Or celles-ci seront précisément déterminées en fonctions des efforts.

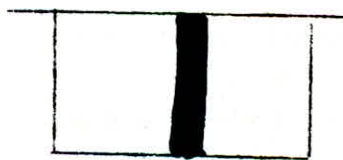
On est donc amené à faire certaines hypothèses simplificatrices qui permettront sans encore connaître de façon précise le coffrage, d'avoir une bonne approximation des efforts.

a/ - Forme de la section :

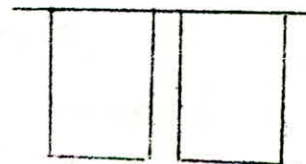
Dans ce type d'ouvrage, la section adoptée est en forme de caisson on a comme exemple :



1 caisson à 2 âmes



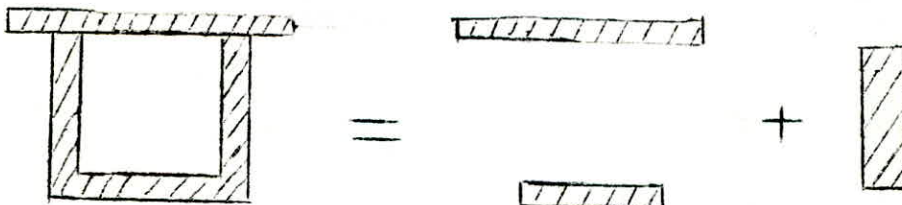
1 caisson à 3 âmes



2 caisson à 2 âmes

b/ Variation de l'inertie :

La section en forme de caisson, comprend 2 membrures et 2 âmes



Son comportement, en flexion, est intermédiaire entre celui d'une section réduite :

- à ses deux membrures (où I varie comme h^2)
- à son âme (où I varie comme h)

On peut donc prendre en compte, en première approximation une variation intermédiaire, soit :

$$I = K h^{5/2}$$

On a ainsi :

- travée de rive :

$$I(x) = I_t \left[1 + (Z-1) \left(\frac{x}{\ell_1} \right)^2 \right]^{5/2}$$

- en travée centrale :

$$I(x) = I_t \left[1 + (Z-1) \left(\frac{2x - \ell_2}{\ell_2} \right)^2 \right]^{5/2}$$

I_t : inertie à la hauteur h_t

II - 4 calcul des constantes mécaniques a_i , b_i , c_i

Les constantes mécaniques a_i , b_i , c_i sont données par les intégrales suivantes :

$$a_i = \int_0^{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i} \right)^2 \frac{dx}{EI_i}$$

$$b_i = \int_0^{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i} \right) \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{EI_i}$$

$$c_i = \int_0^{\ell_i} \left(\frac{x}{\ell_i} \right)^2 \frac{dx}{EI_i}$$

- calcul de w'_i , w''_i et R_i

$$R_i = \frac{V_i - V_{i-1}}{\ell_i}$$

$$w'_i = - \int_0^{\ell_i} \mu_i \left(1 - \frac{x}{\ell_i} \right) \frac{dx}{EI_i}$$

$$w''_i = \int_0^{\ell_i} \mu_i \left(\frac{x}{\ell_i} \right) \frac{dx}{EI_i}$$

$$\mu_i = \begin{cases} P \cdot d \cdot (\ell_i - x) / \ell_i & \text{si } x \geq \alpha \\ P \cdot x \cdot (\ell_i - \alpha) / \ell_i & \text{si } x < \alpha \end{cases}$$

α : abscisse de la charge unitaire P.

x : abscisse de la section

II - 4-1 Inertie constante dans la travée i

$$a_i = 2b_i = C_i = \frac{l_i}{3EI_i}$$

$$w_i' = \frac{-1}{EI_i} \frac{P \alpha (l_i - \alpha) (2 l_i - \alpha)}{6 l_i}$$

$$w_i'' = \frac{1}{EI_i} \frac{P \alpha (l_i - \alpha) (l_i + \alpha)}{6 l_i}$$

II - 4-2 Inertie linéaire aux appuis et constantes entravée

On procède par intégration numérique pour le calcul de ces intégrales.

La méthode appliquée est celle de Gauss - le genre à 3 points (n=3)

résumé de la méthode :

Supposons la fonction f (t) définie sur l'intervalle $[-1, 1]$

Le problème est donc de trouver les points t_1, t_2, \dots, t_n et les coefficients A_1, \dots, A_n pour que :

$$\int_{-1}^{+1} f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \text{ soit exacte pour tout polynôme}$$

F (t) de degré N le plus grand possible

Puisque nous avons 2 n constantes t_i et A_i , on a 1 polynôme de $2n-1$ degré, donc N maximal est $N = 2n - 1$

Les t_i sont les racines du polynôme de Legendre :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[(t^2 - 1)^n \right]$$

et les A_i sont données par le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n A_i = 2 \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} = 0 \end{array} \right.$$

Dans notre cas le polynôme de Legendre s'écrit :

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

ses racines sont : $t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$; $A_1 = A_3 = \frac{5}{9}$;
 $t_2 = 0$; $A_2 = \frac{8}{9}$
 $t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

par conséquent :

$$\int_{-1}^{+1} f(t) dt = \frac{1}{9} \left[5 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8 f(0) + 5 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right]$$

Le problème général peut toujours se ramener à ce cas en faisant la transformation suivante :

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$$

On obtient :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

Nous avons des intégrales du type : $\int_0^{l_i} f(x) dx$

$$x_1 = \frac{l_i+0}{2} + \frac{l_i-0}{2} t_1 = 0,41702 \cdot l_i$$

$$x_2 = \frac{l_i+0}{2} + \frac{l_i-0}{2} t_2 = 0,5 l_i$$

$$x_3 = \frac{l_i+0}{2} + \frac{l_i-0}{2} t_3 = 0,887298 l_i$$

Les nouveaux coefficients sont :

$$W_1 = \frac{l_i - 0}{2} \cdot A_1 = 0,277778 l_i$$

$$W_2 = \frac{l_i - 0}{2} \cdot A_2 = 0,444444 l_i$$

$$W_3 = \frac{l_i - 0}{2} \cdot A_3 = 0,277778 l_i$$

On aura alors :

$$\int_0^{L_i} f(x) dx = W1. f(x1) + W2. f(x2) + W3. f(x3)$$

II - 4 - 3 Variation parabolique de la hauteur :

* - Constantes mécaniques :

- travée de rive :

$$a1 = \frac{211}{3EI_a} \frac{Z^{5/2}}{1 + \sqrt{Z}}, \quad I_a : \text{Inertie à l'appui (hauteur } h_a)$$

$$b1 = \frac{11}{3EI_a} \frac{Z^2}{1 + \sqrt{Z}}$$

$$c1 = \frac{11}{3EI_a} Z$$

b- Travée intermédiaire :

$$a_i = C_i = \frac{l_i}{6 EI_a} Z(l_i + 1)$$

$$b_i = \frac{l_i}{6 EI_a} Z^2$$

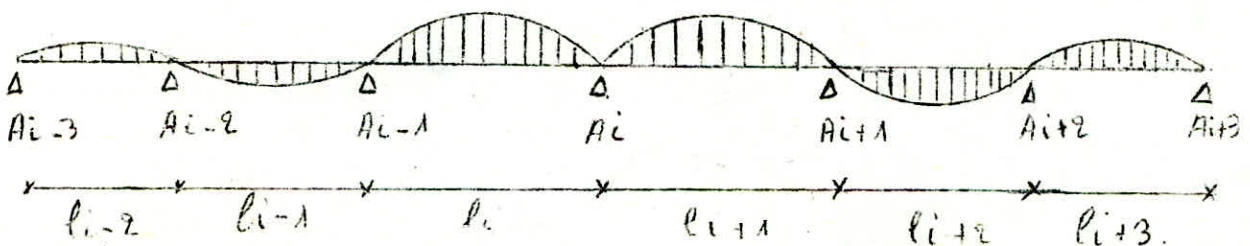
* Rotations des extrémités :

on procède par intégration numérique de GAUSS - Legendre

II - 5 - lignes d'influence des moments sur appuis :

La ligne d'influence du moment au droit de chaque appui, s'obtient en faisant varier l'abscisse de la charge unitaire sur chaque travée, on a ainsi pour chaque position de la charge des valeurs des moments de chaque appui.

La ligne d'influence du moment au droit de l'appui A_i a l'allure suivante :



* Ligne d'influence du moment fléchissant dans une section quelconque :

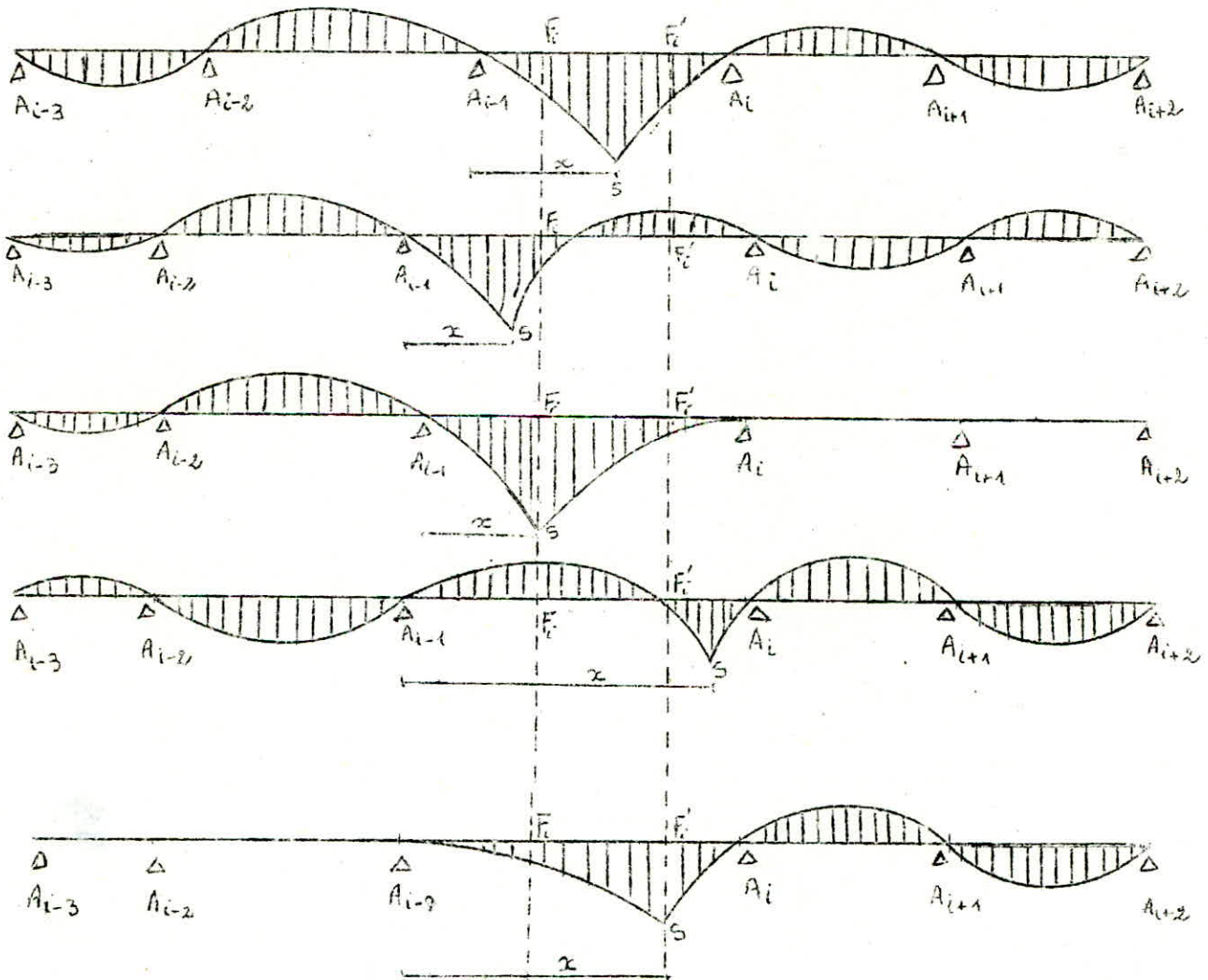
soit S la section d'abscisse x dans la travée $A_{i-1}-A_i$, compté à partir de A_{i-1}

La ligne d'influence du moment fléchissant dans cette section est donnée par l'expression :

$$M(\alpha, x) = \mu_i(\alpha, x) + M_{i-1}(\alpha) \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_i(\alpha) \cdot \frac{x}{l_i}$$

$\mu_i(\alpha, x)$ est le moment isostatique de la travée $A_{i-1}-A_i$, $\mu_i(\alpha, x)$ étant nul lorsque la charge se trouve sur une travée autre que $A_{i-1}-A_i$

La ligne d'influence de la section S dans la travée $A_{i-1}-A_i$ à l'allure suivante



L'étude faite ci-dessus pour les lignes d'influences des moments sur appuis montrent que ces lignes d'influence ont les formes représentées ci-dessus suivant que la section § se trouve entre les foyers F_i et F_{i-1} de la travée $A_i - 1-A_i$ ou en dehors des foyers. Ces lignes d'influence permettent de rechercher les moments fléchissants extrêmes dans chaque section

On remarquera que le moment fléchissant au droit d'un foyer de gauche d'une travée ne dépend pas des charges appliquées sur les travées situées à droite de cette travée. De même le moment fléchissant au droit d'un foyer de droite d'une travée ne dépend pas des charges appliquées sur les travées situées à gauche de cette travée. Ces propriétés sont caractéristiques des foyers.

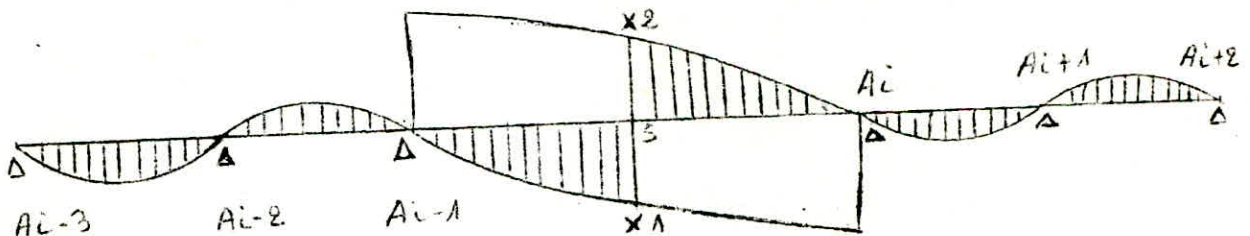
* Ligne tranchant dans une section quelconque :

La ligne d'influence de l'effort tranchant dans la section § l'abscisse x de la travée $A_i - 1 A_i$ est donnée par l'expression :

$$T(\alpha, x) = Z_i(\alpha, x) + \frac{M_i(\alpha) - M_{i-1}(\alpha)}{L_i}$$

$Z_i(\alpha, x) = \frac{\partial}{\partial x} \mu_i(\alpha, x)$ étant nul lorsque la charge unité se trouve sur une travée autre que $A_{i-1} A_i$

La forme de la ligne d'influence de l'effort tranchant est donnée par :



Lorsque S varie entre A_{i-1} et A_i , il suffit de déplacer le segment vertical

$\overline{XIX} = 1$; les courbes tracées ne changeant pas :

* - Ligne d'influence de la réaction d'appui A_i :

Elle est donnée par :

$$R_i(\alpha) = (t_{i+1}(\alpha))_{x=0} - (t_i(\alpha))_{x=l_i}$$

$$\text{Soit } R_i(\alpha) = \left(\frac{d \mu_{i+1}(\alpha)}{d x} \right)_{x=0} + \frac{M_{i+1}(\alpha) - M_i(\alpha)}{l_i} - \left(\frac{d M_i(\alpha)}{d x} \right)_{x=l_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}$$

$$R_i = R'_{i+1} + R''_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}} + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i}$$

$$R_i = R_{i+1} + R''_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}} + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i}$$

Avec R'_i et R''_i les réactions de l'appui de gauche et de l'appui de droite de la travée (i) : A_{i-1} A_i supposée sur appuis simples .

* Ligne d'influence de la flèche dans une section quelconque :

La ligne d'influence de la flèche dans 1 section est, d'après le théorème de maxweill confondue avec la déformée de la poutre sous l'action d'une charge unité appliquée dans cette section, elle est donnée par :

$$V_i(\alpha, x) = V'_i(\alpha, x) + M_{i-1}(\alpha) \cdot w_i(x) - M_i(\alpha) \cdot w''_i(x)$$

$V'_i(\alpha, x)$: ligne d'influence de la flèche dans la travée supposée isostatique
la ligne d'influence d'une poutre continue est une combinaison linéaire de la ligne d'influence dans la travée supposée isostatique et des lignes d'influence des moments sur les appuis limitant cette travée.

En vertu du théorème de Max Well, la ligne d'inf. de la flèche peut encore s'écrire :

$$V_i(\alpha, x) = V'_i(\alpha, x) + M_{i-1}(\alpha) W'_i(x) - M_i(\alpha) W''_i(x)$$

car $V'_i(\alpha, x)$ et $V_i(\alpha, x)$ sont symétriques en α et x

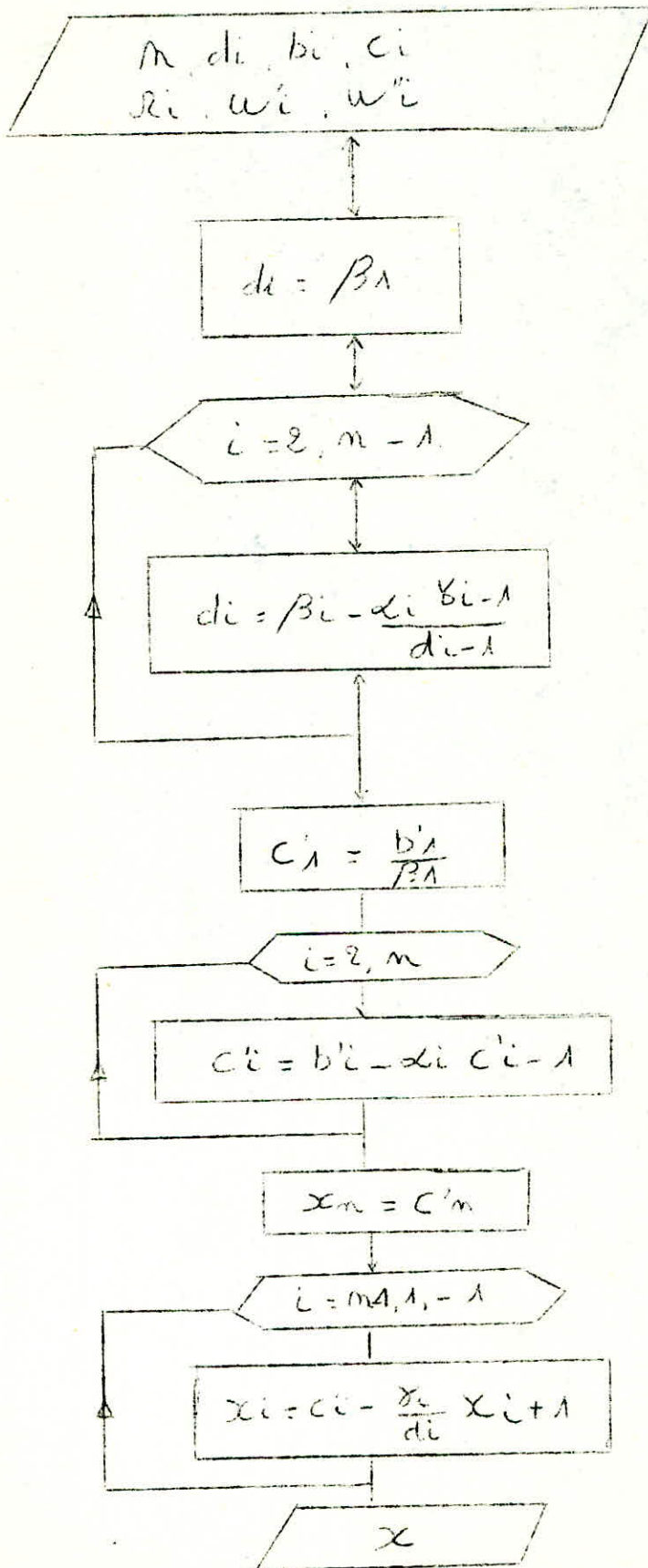
Le calcul de $V_i'(\alpha, x)$ est développé dans la partie concernant le poutre isostatique.

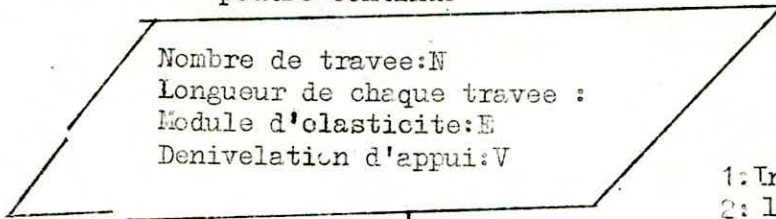
* - Ligne d'influence des rotations d'appuis de la travée $A_{i-1} - A_i$:

$$W_{i-1}(\alpha) = W'_i(\alpha) - a_i M_{i-1}(\alpha) - b_i M_i(\alpha) \quad \text{rotation de l'appui } A_{i-1}$$

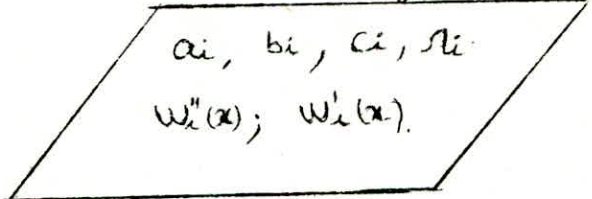
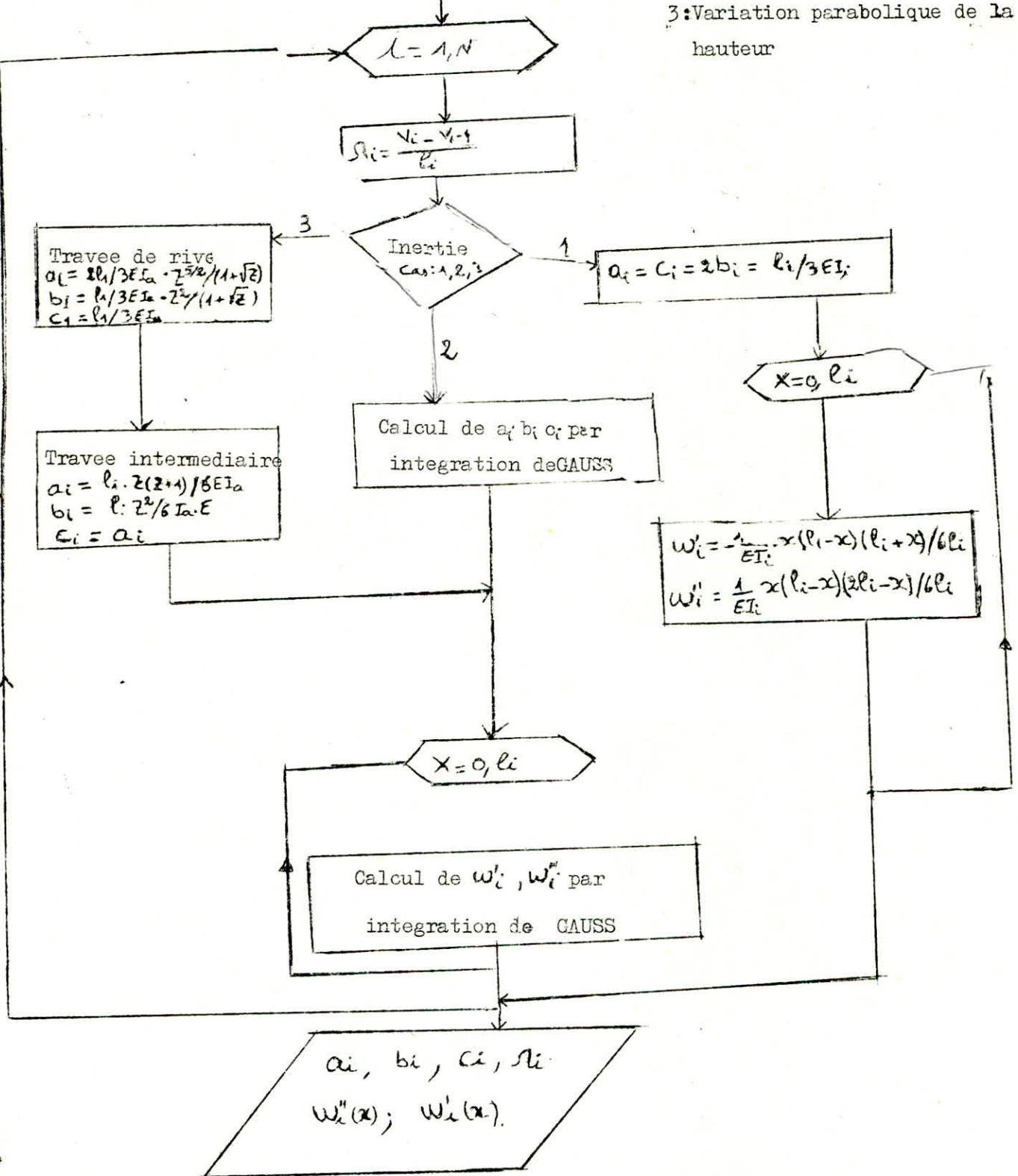
$$W_i(\alpha) = W''_i(\alpha) + b_i M_{i-1}(\alpha) + c_i M_i(\alpha) \quad \text{rotation de l'appui } A_i$$

$W'_i(\alpha)$, $w''_i(\alpha)$: lignes d'influence des rotations des extrémités de la poutre isostatiques.





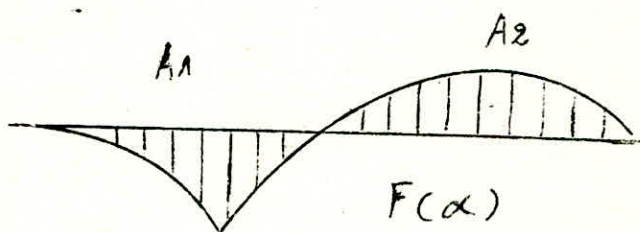
- 1: Inertie constante
- 2: linéaire aux appuis, constante en travée
- 3: Variation parabolique de la hauteur



CALCUL DES EFFORTS

I. - UTILISATION DES LIGNES D'INFLUENCE -

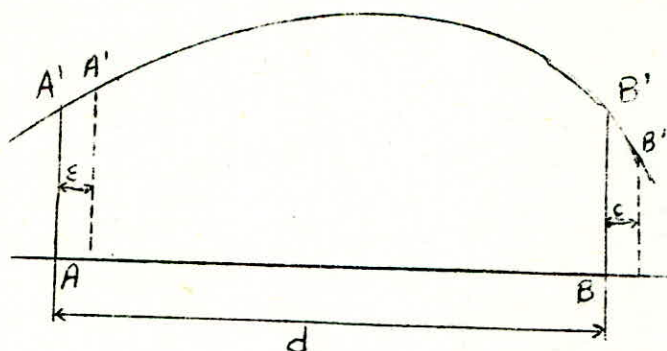
Les lignes d'influence permettent de rechercher les valeurs extrêmes de l'effet -F-, sous l'action de surcharges variées ; par exemple, si la ligne d'influence de l'effet -F- dû à l'action d'une charge unité comporte deux zones, l'une positive, l'autre négative.



L'effet (F) dû à une charge répartie de densité constante, -P- pouvant être appliquée à une partie seulement de la poutre, est compris toujours entre P.A1 et P.A.2 :

$$- P.A_2 \leq F \leq P.A_1$$

A1 et A2 désignant respectivement les aires positive et négative, comme autre exemple, soit le schéma suivant :



L'effet maximum $-F-$ produit par une charge de densité constante $-p-$ répartie sur une longueur $-d-$ s'obtiendra, en disposant cette charge sur un segment $AB = d$, tel que les ordonnées de la ligne d'influence en A et B, soient égales $AA' = BB'$.

II. - CALCUL DES EFFORTS -

Les efforts sont calculés sous les systèmes de surcharges prescrits par le **Reglement** notamment :

* surcharges ponctuelles :

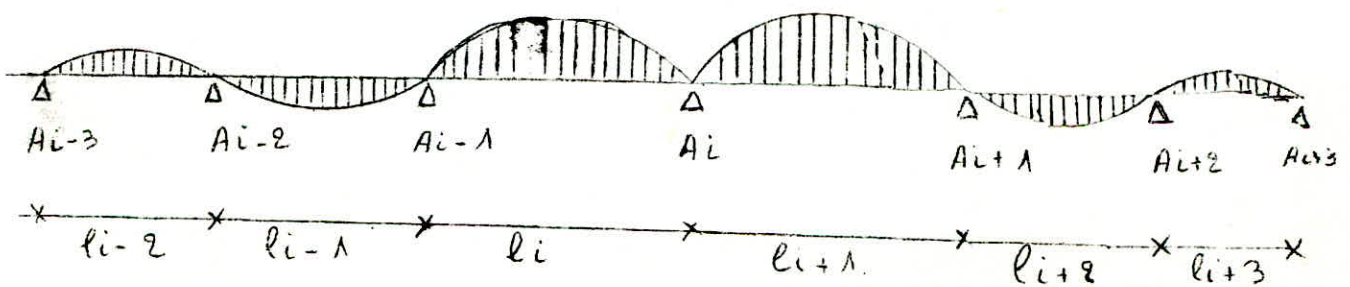
- système Bc,
- système Bt,
- système Br,
- système Me 80,
- système Me 120.

* surcharges réparties :

- surcharge - A,
- système - Mc 80,
- système - Mc 120,
- convoi - type D,
- convoi - type E.

II.1 - Calcul des moments sur appuis :

soit la ligne d'influence du moment de l'appui A_i .



* Surcharges ponctuelles :

pour obtenir les moments il suffit de multiplier les charges par les ordonnées correspondantes de la ligne d'influence

- Système Bc

Le moment maximum en valeur absolue sur l'appui A_i est obtenu en disposant longitudinalement un camion sur la travée

$A_{i-1} A_i$ et un autre sur la travée $A_i A_{i+1}$, la distance entre les deux camions est telle qu'elle produit l'effet le plus défavorable.

Remarque 1): La disposition des deux camions B_c est envisagée dans les deux sens.

2): Le nombre de camions transversalement est déterminé suivant la classe du pont.

- Système Bt

Longitudinalement on dispose un tandem sur la travée $A_{i-1} A_i$ ou sur la travée $A_i A_{i+1}$ tel qu'il produit l'effet le plus défavorable.

Transversalement le nombre est déterminé selon la classe du pont.

- Système Br

On dispose la roue isolée au droit de la section de plus grand moment donné par la ligne d'influence sur la travée considérée.

-Systèmes: Me 80, Me 120

On procède de la même manière que pour le système Bt.

*Surcharges réparties:

Pour obtenir les moments sous une charge répartie, on multiplie la valeur de la surcharge par l'aire de la ligne d'influence correspondante. Pour calculer cette aire on utilise la méthode d'intégration numérique des trapèzes.

REMARQUE CONCERNANT LES METHODES D'INTEGRATION NUMERIQUE .

- Méthode de GAUSS-LEGENDRE :

Cette méthode a l'avantage de donner des résultats avec une précision élevée en présence d'un nombre de points d'intégration relativement faibles (3 points dans notre cas), mais présente cet inconvénient que les abscisses des points - t_i - d'intégration et les coefficients de poids - A_i - sont en général des nombres irrationnels.

C'est pourquoi, nous l'avons utilisé pour le calcul des intégrales où les fonctions à intégrer sont connues.

Par contre, pour le calcul des efforts où les valeurs des fonctions ne sont connues qu'en des points distincts, nous avons choisi, la méthode des trapèzes qui intègre en ces points, mais qui est moins précise que celle de GRANSS.

- SURCHARGE - A -

Il résulte de la forme de la ligne d'influence de M_i que, pour trouver le moment fléchissant maximum en valeur absolue sur l'appui A_i , il faut charger les deux travées contigues à l'appui A_i , et les autres travées de deux en deux.

La valeur de la surcharge A est déterminée selon la classe du pont; comme la valeur de $aA(l)$ diminue avec la longueur de la ligne d'influence correspondante, le moment Max diminue et correspond pas au chargement de toutes les travées, généralement il est Max quand on charge uniquement les deux travées contigues à l'appui A_i ;

$$A(l) = 230 + 36000 / (L + 12)$$

L : Longueur chargée (déterminée par la ligne d'influence)

$$A = K; A(l) \cdot \frac{l_0}{l_v}$$

K ; l_0 ; l_v : données suivant la classe du pont.

- SYSTEME Mc 80 ET Mc 120 -

D'après le règlement, le nombre de chars Mc 80 ou Mc 120, est illimité longitudinalement, la distance entre deux chars consécutifs, est telle qu'elle produit l'effet le plus défavorable, néanmoins, la distance minimale est de 30,5 m, de plus les longueurs des travées sont inconnues.

C'est là où résulte le problème du point de vue programmation, car tenir compte de ces contraintes conduirait à un problème d'optimisation et de recherche opérationnelle qui est long et coûteux.

D'autant plus que la plupart des ponts courants sont calculés sous les surcharges civiles nous n'avons pas jugé utile de développer ce programme.

Nous nous sommes contentés de placer un char dans chacune des deux travées contigues à l'appui Ai de façon à produire chacun l'effet le plus grand en ayant soin de garder la distance entre eux supérieure ou égale à 30,5 m, et un char sur chacune des autres travées de deux en deux. La distance étant supérieure à 30,5 m pour les autres travées.

D'autre raison qui nous amène à faire ce choix est que la plus part des ponts courants en Algérie, ont des longueurs de travée de l'ordre de 40 m.

- CONVOIS - TYPE D et E -

On place un convoi type D ou E dans la travée contigue à l'appui Ai qui donnerait le moment le plus grand.

Si la travée est inférieure à 18,6 m, on disposera le convoi sur les deux travées contigües à Ai.

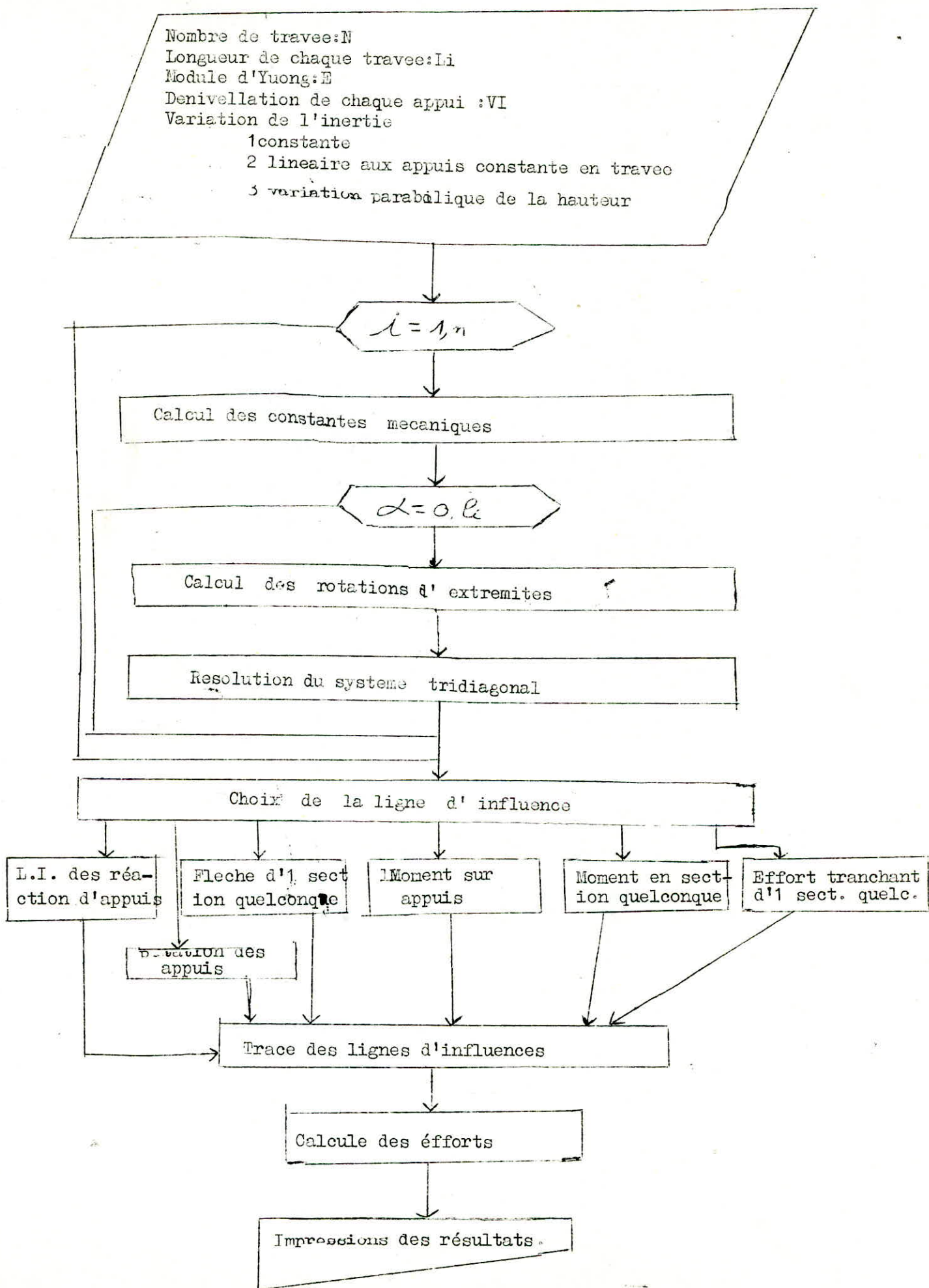
III. - CALCUL DES AUTRES EFFORTS -

Nous calculerons les efforts :

- . moment en travée (section quelconque et dangereuse),
- . efforts tranchants en section quelconque et au droit des appuis,
- . réactions des appuis,
- . flèche d'une section quelconque.
- . rotation des extrémités,

en s'inspirant de la méthode exposée précédemment.

ORGANIGRAMME SOMMAIRE DES LIGNES D'INFLUENCE



DEROULEMENT DU PROGRAMME

Le programme traite deux parties essentielles :

- 1ère partie : pont isostatique
- 2ème partie : pont hyperstatique

L'utilisateur se voit poser la question s'il s'agit d'un pont isostatique ou hyperstatique.

* pont isostatique:

- entrée des données;
- longueur de la travée

Les lignes d'influence étant connues, on passe directement au calcul des efforts.

- choix des efforts:

- 1) moment fléchissant
- 2) effort tranchant
- 3) flèche
- 4) rotation

- choix de la section:

- 1) section quelconque
- 2) section dangereuse

- choix du système de charge :

- 1) réglementaire
- 2) quelconque

Après l'entrée des données, le programme calcule, les efforts maximums au droit des sections choisies et imprime les résultats.

* Pont hyperstatique

- entrée des données
 - . nombre de travées
 - . longueur de chaque travée (si les travées sont identiques. l'utilisateur n'entre qu'une seule fois la longueur

-Module d'Young

-Dénivellations des appuis par rapport a un niveau de reference

- VARIATION DES INERTIES -

- 1) - Inertie constante sur la travée,
- 2) - Inertie linéaire aux appuis, constante en travée,
- 3) - Variation parabolique de la hauteur.

Après l'entrée de ces données, le programme calcule les constantes mécaniques de chaque travée ainsi que les rotations d'extrémités, puis résoud le système tridiagonal.

L'utilisateur se voit ensuite proposer le choix des lignes d'influence :

1. - lignes d'influence des moments sur appuis,
2. - lignes d'influence des moments en travée :
 - . section quelconque,
 - . section dangereuse.
3. - lignes d'influence de l'effort tranchant :
 - . section immédiatement à gauche des appuis,
 - . section immédiatement à droite des appuis,
 - . section quelconque,
4. - lignes d'influence des réactions d'appuis,
5. - lignes d'influence de la flèche d'une section quelconque,
6. - lignes d'influence des rotations d'appuis ;

une fois la ligne d'influence choisie, il y a impression des efforts maximums puis apparait le choix de :

1/ la trace decette ligne d'influence

2/ autre lignes d'influence

3/ calcul des efforts a partir de cette ligne d'influence les systemes de charges prescrites par le reglement;

impression des efforts maximums puis renvoi ver le choix des lignes d'influence

QUADRILLAGE DE POUTRES

OBJET DU PROGRAMME :

Ce programme calcule les efforts internes d'un quadrillage de poutres sollicité par des charges perpendiculaires à son plan moyen par la méthode matricielle des déplacements. Il calcule aussi les déplacements nodaux globaux et les réactions. Nous envisageons donc un déplacement et deux rotations.

DOMAINE D'APPLICATION :

Ce programme est destiné pour le calcul de ports à poutres principales avec entretoises.

Il calcule aussi les planchers nervurés, les dalles orthotropes (dalles de bâtiments).

I - 1 - Définition d'une structure :

Une structure est constituée d'une infinité de points, la mécanique des milieux continus fournit théoriquement les équations permettant de définir en chaque point les contraintes et les déformations. Le calcul étant laborieux il est apparu nécessaire de trouver des modèles de calcul en discrétisant la structure, celle-ci n'est pas considérée comme un corps continu mais comme un assemblage d'éléments plus simples qui peuvent être étudiés séparément moyennant certaines hypothèses.

Dans certains cas la discrétisation s'impose par la configuration même de la structure ; c'est le cas par exemple des ossatures formées de barres, les éléments simples sont alors étudiés par la théorie des poutres, pour lesquelles on a fait à priori une hypothèse sur la distribution des contraintes (loi des sections planes). Dans d'autres cas la discrétisation n'est pas évidente, les plaques par exemple, qui seront découpées en petits éléments pour lesquels on choisira une hypothèse relative aux déformations.

On a souvent recours à un calcul automatique, pour le cas qui nous concerne : quadrillage de poutres ; on se propose de l'étudier par la méthode des déformations connue aussi sous le nom des déplacements. Le calcul par cette méthode conduit à la résolution d'un système linéaire. Cette résolution constitue à elle seule une somme de calculs considérable, seul un puissant outil de calcul permet de vaincre cette difficulté : le calcul informatique. Dans la méthode des déplacements consiste en la construction préalable du système linéaire où les inconnues éventuelles sont des déplacements généralisés (déplacements et rotations aux noeuds de la structure).

La linéarité du système n'est que la traduction algébrique du choix d'analyse en petites perturbations (petites déformations et petits déplacements) et du choix de la loi rhéologique linéaire de Hooke pour le comportement du matériau constitutif

on obtient donc un système $F = K \cdot U$ à résoudre

avec F = Vecteur sollicitations (forces appliquées et réactions).

K = Matrice de rigidité

U = Vecteur des déplacements supposés cinématiquement indéterminé

Le problème consiste donc en la construction de K, trouver les déplacements effectivement inconnus et les réactions au moyen des déplacements.

-66-

I - 2 - Définition d'une matrice de rigidité :

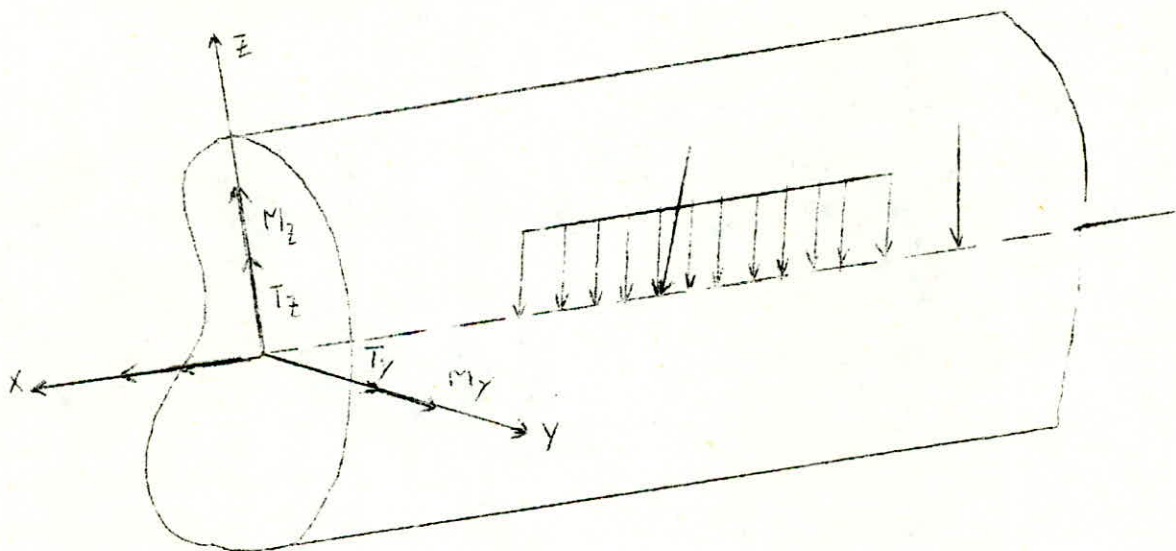
On appelle matrice de rigidité d'un élément simple, la matrice exprimant les forces en fonction des déplacements en un certain nombre de points.

Nous développerons par la suite ses caractéristiques et formulerons directement la matrice de rigidité.

Les différentes parties que l'on va exposer sont les suivantes :

- 1/ - Eléments utilisés pour la détermination de la rigidité
- 2/ - Elaboration de la matrice de rigidité élémentaire d'une barre
- 3/ - Ecriture de la matrice de rigidité globale (de toute la structure)
- 4/ - Résolution du système $F = K \cdot U$ et détermination des déplacements et des réactions.

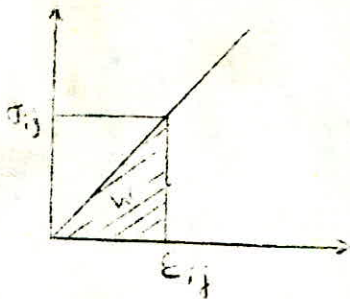
II - 1 . Energie de déformation élastique d'une poutre à plan moyen en fonction de N , M, T



Si le plan de sollicitation est x Gz alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_y z}{I_y} \\ T_y = T_z = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} = \frac{T_z}{I_y} \frac{w_{sy}(z)}{e_y(z)} \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

La densité d'énergie de déformation est donc d'après les hypothèses de déformation des poutres de BERNOULLI.



$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} T_{ij} \epsilon_{ij}$$

soit dans notre cas

$$W = \frac{1}{2E} T_x^2 + \frac{1}{2G} T_{xz}^2 \quad (1)$$

en remplaçant T_x et T_{xz} par leur valeurs,

la relation (1) devient :

$$W = \frac{1}{L} \int_{(L)} \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{T_z^2}{GSz_z} + \frac{T_y^2}{ET_y} \right) dA \quad (2)$$

S = section de la poutre, G = module de cisaillement, E = module de Young, I_y = inertie par rapport à l'axe y .

avec m = moment statique ; S_r = section réduite

remarque :

Si le plan de sollicitation est $x Gy$ l'expression de

l'énergie de déformation est $W = \frac{1}{2} \int_{(L)} \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{T_y^2}{GS_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right) ds \quad (3)$

Si en plus il existe un couple de torsion de moment M_x l'énergie de déformation due à ce moment uniquement vaut :

$$W = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{M_x^2}{G I_p} dA \quad (4)$$

où I_p est le moment polaire de torsion

On conclue que dans le cas général d'une sollicitation tri-dimensionnelle, l'énergie de déformation élastique totale d'une poutre s'écrit :

$$W = W_N + W_{T_y} + W_{T_z} + W_{M_x} + W_{M_y} + W_{M_z} \quad (5)$$

(6) $W_N = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{N^2}{ES} ds$ dû à l'effort normal

(7) $W_{T_y} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{T_y^2}{GS_y} ds$ dû à l'effort tranchant suivant G_y

(8) $W_{T_z} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{T_z^2}{GS_z} ds$ dû à l'effort tranchant suivant G_z

(9) $W_{M_x} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{M_x^2}{G I_p} ds$ dû au moment fléchissant détorsion

(10) $W_{M_y} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{M_y^2}{E I_y} ds$ dû à la flexion autour de G_y

(11) $W_{M_z} = \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{M_z^2}{E I_z} ds$ dû à la flexion autour de G_z

II - 2. Matières de rigidité d'une barre :

a/ - En traction - compression :

-68-



En structure discrete seuls les déplacements aux noeuds existent. Lorsqu'il n'y a pas de chargement en travée, le champs de déplacement intérieure vaut :

$$U(x) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{L} x \quad (12)$$

La déformation axiale est constante et vaut :

$$\epsilon(x) = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_2 - U_1}{L} \quad (13)$$

On a alors, en vertu de la loi de Hooke

$$N = \sigma \cdot S = E \epsilon S = ES \frac{U_2 - U_1}{L} \quad (14)$$

Pour une barre sollicitée seulement en traction compression l'expression de l'énergie de déformation est :

$$W_N = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{ES} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{E^2 S^2}{ES} \frac{(U_2 - U_1)^2}{L^2} dx$$

$$W_N = \frac{1}{2} \frac{ES}{L} (U_2 - U_1)^2 \quad (15)$$

On peut aussi l'écrire de la façon suivante :

$$W_N = \frac{1}{2} U^T K U \quad (16)$$

Où \$U\$ est un vecteur représentant les déplacements nodaux et \$K\$ une matrice carrée

$$W_N = \frac{1}{2} (U_1 \quad U_2) \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$K = K_N = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

\$K\$ est appelée Matrice de rigidité élémentaire

b/ en Torsion :

-69-



Soit une barre soumise à une torsion, le champ de déplacement interne est linéaire et s'écrit :

$$\theta(x) = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{L} x \quad (18)$$

Le déplacement relatif de deux sections voisines A et B distantes de dx est une rotation $d\theta$ autour de l'axe du moment de torsion, on a :

$$\frac{d\theta}{dx} = - \frac{M_x}{GI_p} \quad (19)$$

c'est à dire que M_x est constant tout le long de la barre :

$$M_x = \frac{GI_p}{L} (\theta_1 - \theta_2)$$

En remplaçant dans (9) on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{GI_p}{L} (\theta_2 - \theta_1)^2 dx$$

$$\text{ou } W = \frac{GI_p}{2L} (\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (20)$$

Si on veut l'écrire sous la forme

$$W = \frac{1}{2} U^T K M x. U \quad \text{avec } U = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } K M x = \frac{GI_p}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$K M x$ = matrice de rigidité élémentaire d'une barre en torsion

c/ En flexion :

Soit maintenant une poutre soumise à des rotations de flexion, comme l'indique la figure ci-dessous

La barre n'est pas chargée, le moment de flexion s'écrit :

$$M(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) M_1 + \frac{x}{L} M_2 \quad (21)$$



Les formules de Bresse permettent alors d'écrire les rotations aux noeuds 1 et 2

$$\begin{cases} \theta_1 = -a M_1 - b M_2 \\ \theta_2 = b M_1 + c M_2 \end{cases} \quad (22)$$

70-

a, b, et c, étant les coefficients de souplesse définit comme suit :

$$\begin{aligned} a &= \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} \\ b &= \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \frac{dx}{EI} \\ c &= \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} \end{aligned} \quad (23)$$

Le terme EI étant constant, on a : $a = c = \frac{L}{3 EI}$; $b = \frac{L}{6 EI}$

En remplaçant dans (22) et en inversant :

$$M_1 = 2 \frac{EI}{L} (2\theta_1 + \theta_2) , \quad M_2 = 2 \frac{EI}{L} (\theta_1 + 2\theta_2)$$

L'expression du moment fléchissant devient :

$$M(x) = -2EI \left(1 - \frac{x}{L}\right) (2\theta_1 + \theta_2) + 2EI \frac{x}{L} (\theta_1 + 2\theta_2)$$

Calculons maintenant la valeur de l'énergie de déformations ;

$$\begin{aligned} W_{M1} &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(x)}{EI} dx \\ W_{M1} &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{x}{L} - 1\right) (2\theta_1 + \theta_2) + \frac{x}{L} (\theta_1 + 2\theta_2) \right]^2 dx \end{aligned}$$

Après intégration, nous obtenons :

$$W_{M1} = 2 \frac{EI}{L} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2) \quad (24)$$

On peut aussi l'écrire sous la forme suivante :

$$W_{M1} = \frac{1}{2} (\theta_1 \quad \theta_2) \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Et la matrice de rigidité d'une barre en flexion

$$K_{M1} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- 1/ - Pour le calcul de la matrice de rigidité d'une barre fléchie nous n'avons pas spécifié le plan de sollicitation et par conséquent, selon que ce soit le plan x Gy ou x Gz nous considérerons les moments quadratiques relatifs aux axes Gz ou Gy

$$k_{my} = \frac{EI_y}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K_{Mz} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- 2/ - Nous avons considéré que les poutres constituant la structure sont assez élancés pour pouvoir négliger les déformations de cisaillement. Mais il ne faut pas perdre de vue les moments induits par les efforts tranchants.

II - 3 - Matrice de rigidité d'une poutre sollicitée par un moment de flexion et un effort tranchant



a/ Supposons le noeud (2) fixé

$$\text{on a } T = T_1$$

$$M = M_1 - T_1 \cdot x$$

L'énergie de formation s'écrit (on néglige les déformations de cisaillement)

$$W_{M1} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx$$

$$W_{M1} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(M_1 - T_1 \cdot x)^2}{EI} dx$$

Comme on est dans le domaine élastique l'énergie de déformation W_m est égale à l'énergie complémentaire W^c_M .

En appliquant le théorème de Castigliano

$$\begin{cases} V_1 = \frac{\partial W^c}{\partial T_1} \\ \theta_1 = \frac{\partial W^c}{\partial M_1} \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = -\frac{L^2}{2EI} M_1 + \frac{L^3}{3EI} T_1 \\ \theta_1 = \frac{L}{EI} M_1 - \frac{L^2}{2EI} T_1 \end{cases} \quad (25)$$

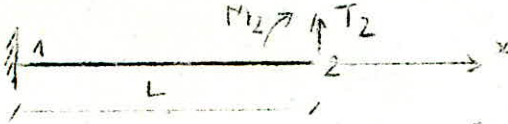
En inversant (25) on trouve :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

b/ Supposons (1) fixé . On aura $T = T_2$

-72

$$M = M_2 + T_2 \cdot x$$



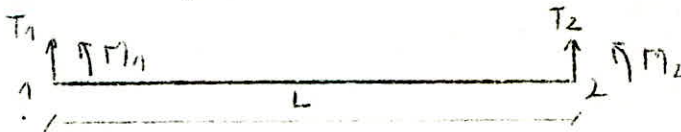
et par conséquent :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$K_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad + \quad K_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

K_1 et K_2 sont les matrices provenant de l'application des efforts aux noeuds considérés. Cesont les matrices de rigidité.

C/ - Supposons maintenant que (1) et(2) sont libres



Les noeuds (1) et (2) sont liés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = 0 \\ M_1 - T_1 \cdot L + M_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T_2 = -T_1 \\ M_2 = -M_1 + T_1 \cdot L \end{cases}$$

En reprenant la relation (26) :

$$\begin{cases} T_2 = - \frac{12EI}{L^3} v_1 - \frac{6EI}{L^2} \theta_1 \\ M_2 = \frac{6EI}{L^2} v_1 + \frac{2EI}{L} \theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Cette relation n'est autre que la repercussion des efforts du noeud (1) sur le noeud (2) : c'est la matrice de répercuSSION si l'on considère maintenant la repercussion des efforts du noeud (2) sur le noeud (1). Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} T_1 = -T_2 \\ M_1 = -M_2 - T_2 \cdot L \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} T_1 = - \frac{12EI}{L^3} v_2 + \frac{6EI}{L^2} \theta_2 \\ M_1 = - \frac{6EI}{L^2} v_2 + \frac{2EI}{L} \theta_2 \end{cases}$$

d'où la seconde matrice de repercussion

$$\begin{bmatrix} T1 \\ M1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la matrice de rigidité pour la poutre sera :

$$\begin{bmatrix} T1 \\ M1 \\ T2 \\ M2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & -L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V1 \\ \theta_1 \\ V2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Remarques : 1/ Le plan de sollicitation n'ayant pas été spécifié on prendra $I = IZ$; lorsque les efforts seront dans le plan $x Gy$, dans l'autre cas $I = Iy$

2/ - Soit Hij la sous matrice de rigidité
 lij la sous matrice de repercussion

La matrice de rigidité $KMy (KMZ)$ peut s'écrire sous la forme :

$$KM = \begin{bmatrix} Hij & Lij \\ Lji & Hji \end{bmatrix} \quad (29)$$

En général : $Hij = Hji$
 et $Lji = Lij^T$

II - 4 ASSEMBLAGE DES EFFORTS POUR UN ELEMENT :

On a vu que l'énergie de déformation s'écrivait : $W = \frac{1}{2} U^T K \cdot U$

L'énergie totale de déformation W s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \left[U_N^T \cdot K_N \cdot U_N + U_{Mx}^T \cdot K_{Mx} \cdot U_{Mx} + U_{My}^T \cdot K_{My} \cdot U_{My} + U_{Mz}^T \cdot K_{Mz} \cdot U_{Mz} \right]$$

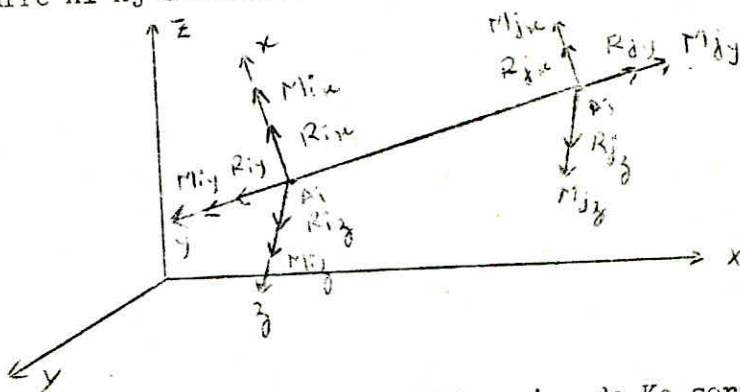
donc $U = \begin{Bmatrix} U_N \\ U_{Mx} \\ U_{My} \\ U_{Mz} \end{Bmatrix}$

et $K = \begin{bmatrix} K_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{Mx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{My} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{Mz} \end{bmatrix} \quad (30)$

K représente la matrice de rigidité élémentaire dans le cas d'une sollicitation tridimensionnelle.

II - 5 - MATRICE DE RIGIDITE D UNE BARRE :

Soit une barre $A_i A_j$ sollicitée dans une espace tridimensionnel



On a 6 inconnues en chaque noeud, la dimension de K_e sera donc (12X12)
 Pour des sollicitation planes, on la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ij} & L_{ij} \\ L_{ji} & H_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} H_{ij} & L_{ij} \\ L_{ji} & H_{ji} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \\ R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{iz} \end{bmatrix} \quad U_i = \begin{bmatrix} \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \\ U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{iz} \end{bmatrix}$$

La sous matrice de rigidité H_{ij} s'écrit :

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \theta_{ix} & \theta_{iy} & \theta_{iz} & U_{ix} & U_{iy} & U_{iz} \\ \frac{6EI_p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} \end{bmatrix}$$

La sous matrice de rigidité H_{ji} s'écrit :

$$H_{ji} = \begin{bmatrix} \theta_{jx} & \theta_{jy} & \theta_{jz} & u_{jx} & u_{jy} & u_{jz} \\ \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{L^2EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} \end{bmatrix}$$

La sous matrice de repercussion L_{ij} s'écrit :

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} \theta_{ix} & \theta_{iy} & \theta_{iz} & u_{ix} & u_{iy} & u_{iz} \\ -\frac{GI_p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} \end{bmatrix}$$

La sous matrice de repercussion $L_{ji} = L_{ij}^T$
avec $I_p =$ le moment polaire

I_y et I_z sont les moments quadrotiques relatifs aux axes principaux centraux.

Lorsqu'on écrit la matrice de rigidité dans son repère local on se réfère directement aux matrices H_{ij} , H_{ji} , L_{ij} et L_{ji} établit pour sa construction manuelle.

Lorsqu'on veut établir la ou les matrices de rigidité dans le repère global, on applique la matrice de passage orthogonal T_{ij} qui fait passer de $OXYZ$ à A,xyz .

Nous aurons dans le repère global :

$$\begin{aligned} \underline{F}_{ij} &= T_{ij}^T \cdot F_{ij} \\ \underline{U}_i &= T_{ij} \cdot U_i \\ \underline{U}_j &= T_{ij}^T \cdot U_j \end{aligned} \quad (35)$$

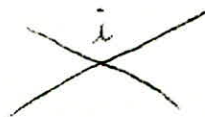
$$\begin{aligned} \text{d'où : } \underline{H}_{ij} &= T_{ij}^T \cdot H_{ij} \cdot T_{ij} \\ \underline{L}_{ij} &= T_{ij}^T \cdot L_{ij} \cdot T_{ij} \end{aligned}$$

De sorte qu'on retrouve la mesure forme qu'en (31)

-76-

IVF - ASSEMBLAGE - MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE :

La matrice de rigidité de chaque barre étant connue dans le repère global ; il suffit d'écrire l'équilibre des noeuds :



L'équilibre du noeud i s'écrit : $F^i = \sum_j F_j^i$

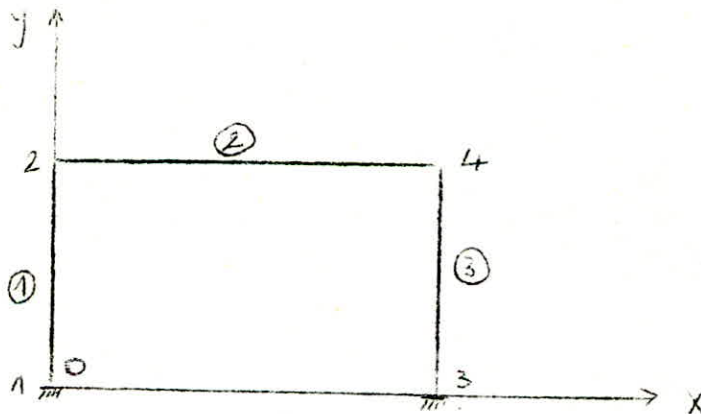
Le vecteur F_i ayant 6 composantes, il y aura 6 équations par noeud dans le cas général, si la structure à n noeuds, il y aura $6n$ équations ; mais on a nécessairement moins de $6n$ inconnus à cause des conditions aux limites en déplacements qui doivent être en nombre suffisant (6 indépendants dans R^3 , 3 indépendants dans R^2) pour éviter les déplacements d'ensemble (à la manière de ceux d'un corps rigide).

L'assemblage est effectué en prenant les éléments un à un (c'est à dire en prenant leurs matrices de rigidité élémentaire) et en les éclatant dans un tableau dont la dimension est égale aux degrés de liberté de toute la structure, en fonction de leurs connexions. Le tableau est appelé : Matrice de Rigidité Globale.

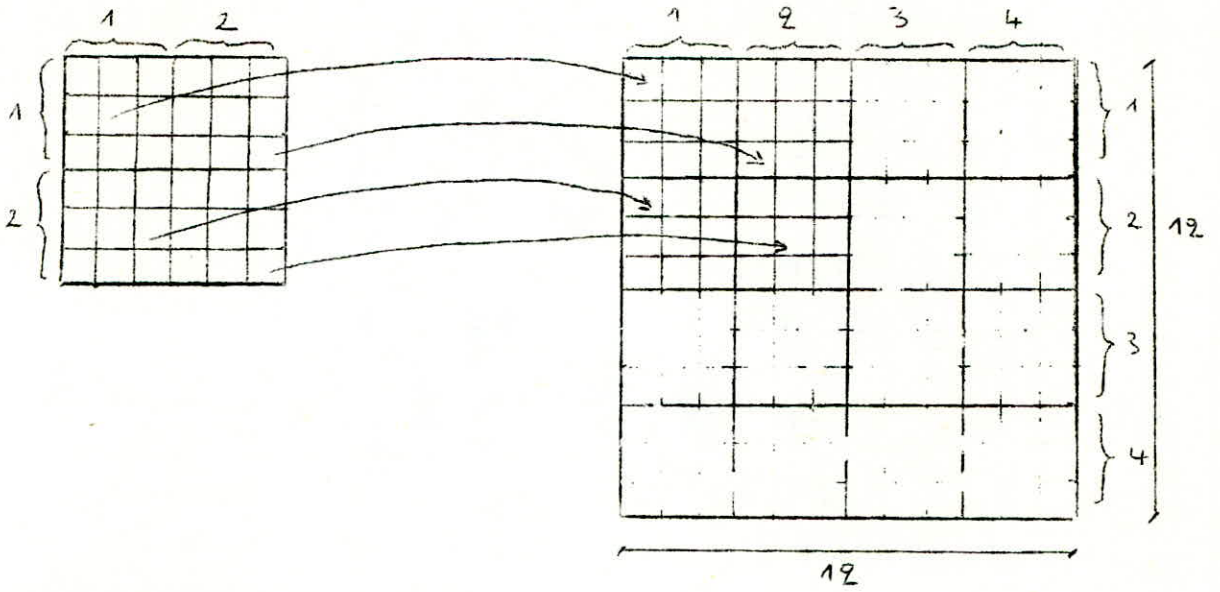
Nous schématiserons la procédure sur un exemplaire de portique plan

* Exemple :

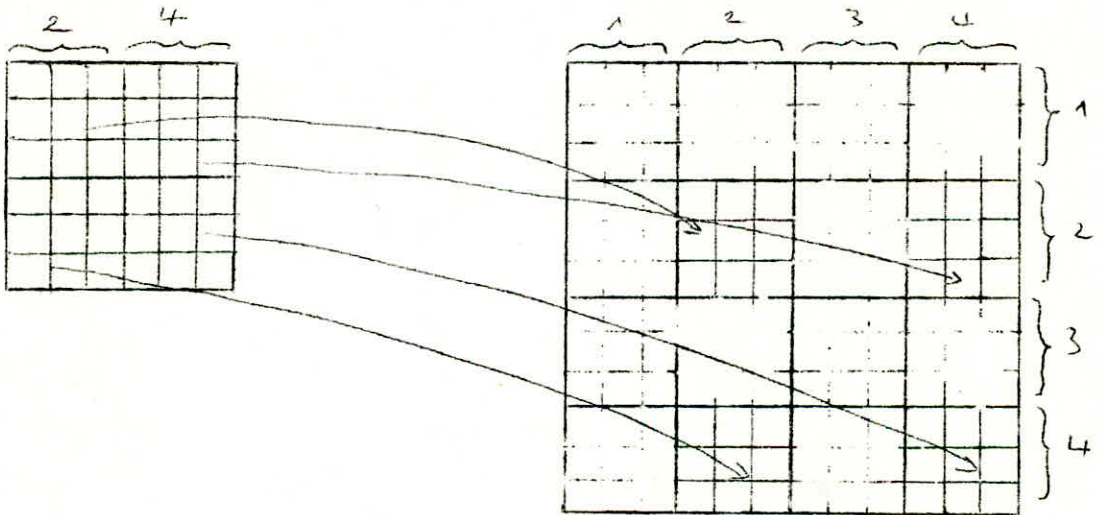
La structure est composée de trois éléments et de quatre noeuds. Il ya trois degrés de liberté par noeuds, la matrice de rigidité globale sera de dimension 12×12



Les matrices de rigidité des différents éléments sont exprimées dans le repère OXY

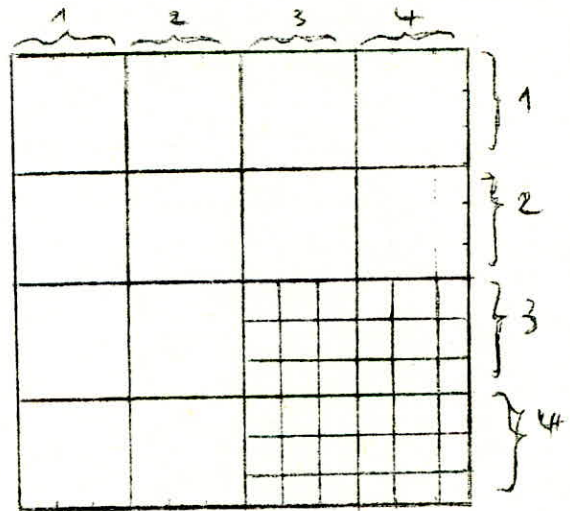
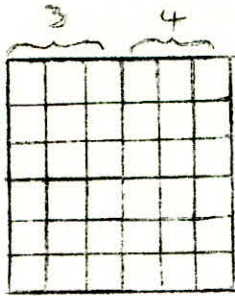


Elément (2) : Barre (2 - 4)

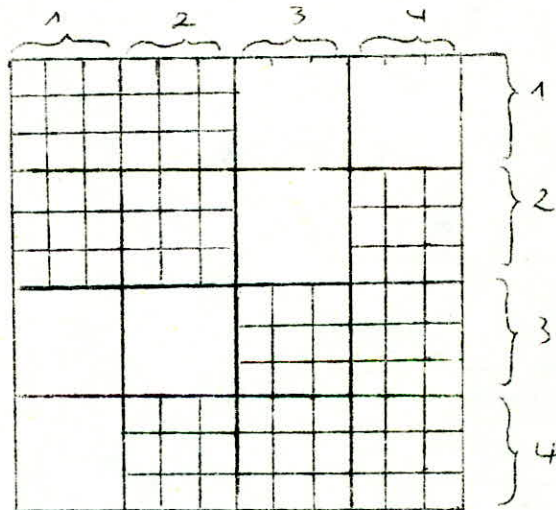


Elément (3) : barre (3-4)

-78-



Superposant les 3 tableaux, on obtient la matrice de rigidité globale de la structure, sans oublier toutefois, de cumuler les valeurs de la superposition des travaux.



$$\begin{bmatrix} C & D & & \\ D^T & G & & F^T \\ B & & A & \\ & F & & E \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix}$$

Les déplacements sont donc obtenus :

$$\begin{bmatrix} C & D \\ D^T & G \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{bmatrix}$$

et les réactions d'appuis par :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ \\ \\ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \\ \\ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix}$$

On a bien vu comment les conditions aux limites ont réduit l'ordre du système d'inconnus et l'expression (36) peut être écrite :

$$K_z \cdot U_e = F_e$$

Où K_z est la matrice de rigidité réduite inversible. U_e et F_e sont respectivement les déplacements et les efforts aux noeuds libres.

$$U_e = K_z^{-1} \cdot F_e$$

* Caractéristiques de la matrice de rigidité :

La matrice de rigidité a quelques particularités, certaines sont très intéressantes (surtout du point de vue économie de mémoire).

1/ - K est une matrice symétrique :

Soit une structure soumise à deux cas de chargement ; sous le premier chargement on a : $F(1) = K U(1)$

et sous le second : $F(2) = K \cdot U(2)$

Le théorème de réciprocité de MAXWELL - BETTI peut s'écrire :

$$F_{(1)}^T \cdot U_{(2)} = F_{(2)}^T \cdot U_{(1)} \quad (37)$$

Soit encore sous une autre forme.

$$F_{(1)}^T \cdot U_{(2)} = U_{(1)}^T \cdot F_{(2)} \quad (38)$$

$$F_{(1)}^T \cdot U_{(2)} = (K \cdot U_{(1)})^T \cdot U_{(2)} = U_{(1)}^T \cdot K^T \cdot U_{(2)}$$

et comme

$$U_{(1)}^T \cdot F_{(2)} = U_{(1)}^T \cdot K \cdot U_{(2)}$$

$$U_{(1)}^T \cdot K \cdot U_{(2)} = U_{(1)}^T \cdot K^T \cdot U_{(2)}$$

Soit finalement : $K = K^T \rightarrow$ la matrice de rigidité globale est symétrique

2/ - K EST UNE MATRICE BANDE :

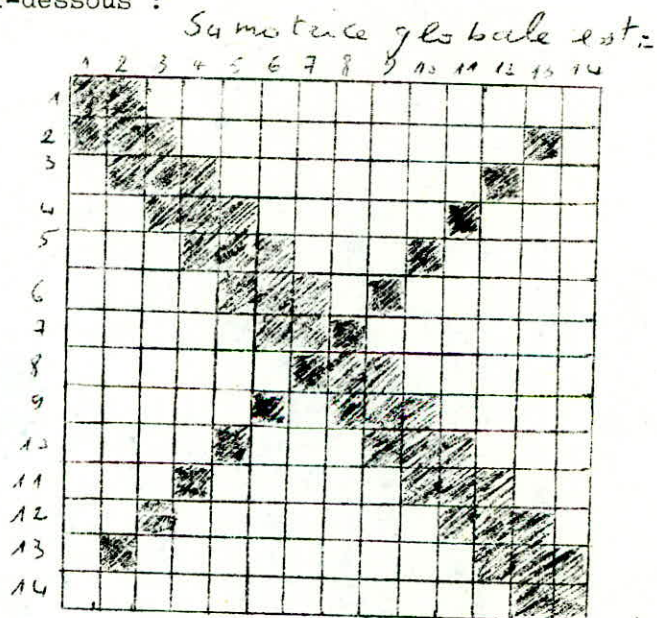
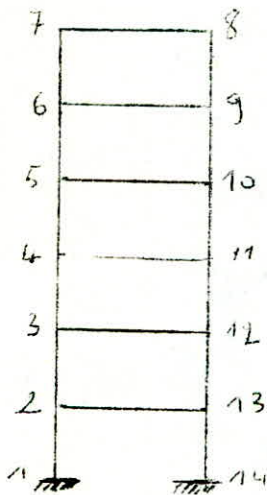
La largeur de la demi bande dépend de la différence de numérotation maximale ND des noeuds d'un élément de la structure. Cette largeur LD vaut :

$$LD = 3 (ND + 1)$$

La numérotation des noeuds doit se faire de sorte à avoir ND le plus petit possible ; ainsi le gain en temps de résolution et l'économie de la mémoire.

Nous schématisons cette influence de numérotation par l'exemple suivant :

Soit le portique plan défini ci-dessous :



□ = Matrice 3x3

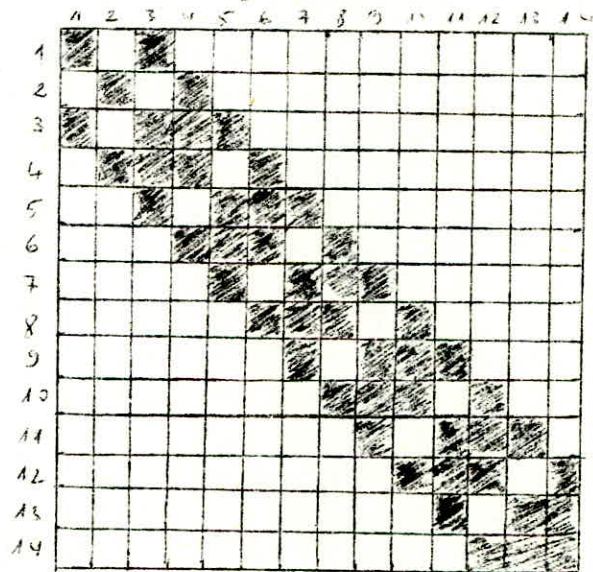
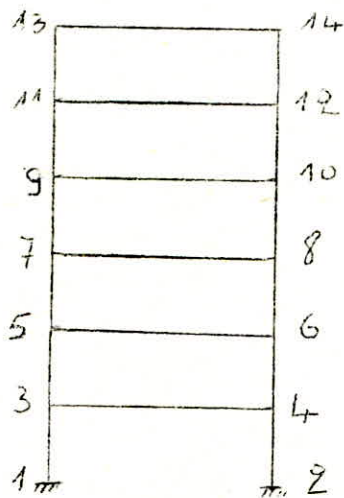
Cette numérotation est mauvaise ; les liaisons horizontales donnent des termes hors - diagonale. -82-

NN et NB étant respectivement les nombres de noeuds et de degrés de liberté bloqués, si N représente le nombre de degrés de liberté à assembler alors :

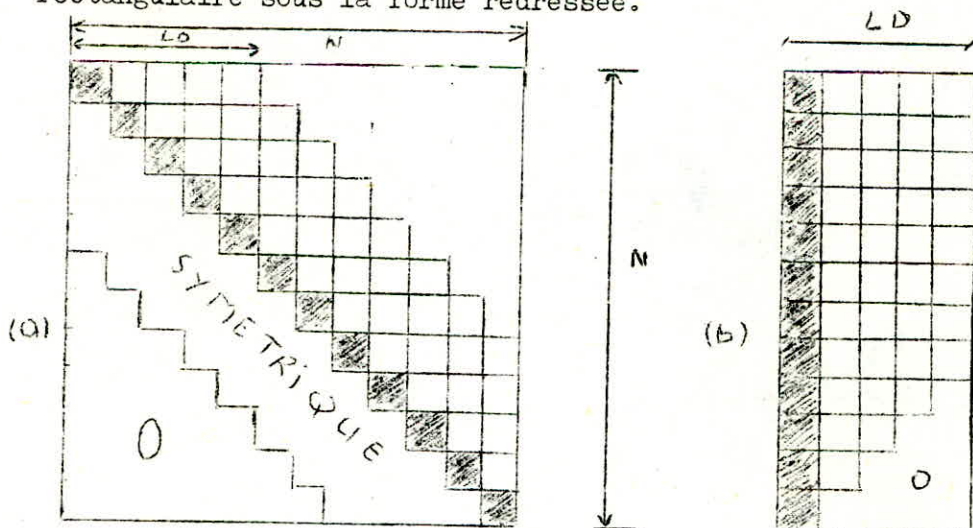
$$N = 3 (NN - NB);$$

Par contre la numérotation ci-après est meilleure, car elle donne une matrice bande symétrique.

La matrice globale est :



Etant donné la nature bande de la matrice de rigidité symétrique, il est inutile de revenir tous les éléments de la matrice globale, il suffit de stocker la demi - bande à partir de la diagonale. On aura donc une matrice rectangulaire sous la forme redressée.



(a) - forme de stockage usuelle

(b) - stockage de la bande supérieure de K en une matrice rectangulaire N X LD.

Faisons maintenant une comparaison pour les 2 cas de numérotations des noeuds, les nombres d'éléments à stocker dans la matrice (10)

1er cas : $N = 3 (NN - N\delta) = 3 (14 - 2) = 36$ -83-
ND = 11 on aura 36 X 36
LD = 3 (ND + 1) = 36 soit 1296 éléments

2èm cas : $N = 36$
ND = 2
LD = 3 (ND + 1) = 9
soit 36 X 9 = 324 éléments

On remarque que dans le 1er cas le nombre de coefficient à stocker est 4 fois plus grand que le second.

3/ - K est défini positive :

L'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} U^T \cdot K \cdot U \quad \text{avec } U^T \cdot K \cdot U > 0$$

Soient λ_i = les valeurs propres associés à K.

X_i : les vecteurs propres associés

$$\text{on a } X_i^T \cdot K \cdot X_i > 0$$

$$\text{on } \lambda_i \cdot X_i^T \cdot X_i > 0$$

Tous les déterminants réduits sont positifs, et par conséquent la matrice est définie positive.

Cette propriété nous laisse un large choix des méthodes de résolution :

Méthodes itératives (Gauss - Séidel), Méthode de choleski,....

* Principe de numérotation des noeuds :

On numérote de telle sorte qu'on essaye d'avoir la plus petite largeur de bande autour de la diagonale. /: Facilité de programmation.

Pour prendre la largeur de bande de toute la matrice aussi petite que possible les noeuds doivent être numérotés de façon que la différence maximale entre les numéros des noeuds soit la plus petite possible.

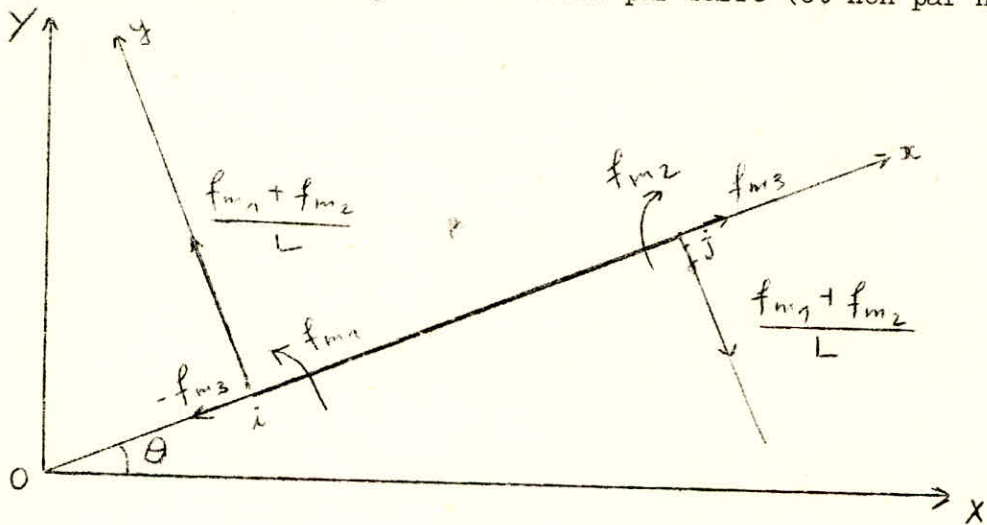
La règle pour obtenir cet arrangement est : la numérotation doit commencer le long de la plus petite largeur de la structure, quand on atteint la fin de cette ligne de noeuds on revient au noeud situé au-dessus du premier numéroté et on refait la même opération jusqu'à numérotation de de tout les noeuds.

La construction du système tel qu'il a été présenté jusque là pêche par deux points :

- on assemble des degrés de liberté qu'on élimine par la suite
- les degrés de liberté assemblés sont souvent liés.

Pour économiser de l'espace mémoire et du temps de calcul on procède par méthodes plus directes pour les ossatures planes.

Etant donné l'interdépendance existant entre les moments et les efforts tranchants nodaux et celle entre les efforts normaux, on peut réduire le système de sorte à avoir des degrés de liberté par barre (et non par noeud).



Pour la barre (m) on a :

$$f_m = \begin{bmatrix} f_{m1} \\ f_{m2} \\ f_{m3} \end{bmatrix}, U_m = \begin{bmatrix} U_{m1} \\ U_{m2} \\ U_{m3} \end{bmatrix} \quad f_m = K_m \cdot U_m$$

Dans notre cas f_m et u_m sont comme suit :

$$f_m = \begin{bmatrix} N_i \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} \quad u_m = U_m = \begin{bmatrix} \theta_i \\ u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

Ainsi, si la barre (m) est encastrée en i et j, on a :

$$K_m = \begin{bmatrix} 4 \frac{EI}{L} & 2 \frac{EI}{L} & 0 \\ 2 \frac{EI}{L} & 4 \frac{EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} \end{bmatrix}$$

Si j est un noeud rigide, mais i mobile, on a :

$$k_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \frac{EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} \end{bmatrix}$$

Pour la construction de la matrice de rigidité élémentaire dans le programme nous avons tenu compte des relaxations des noeuds. Nous avons donc fait intervenir des nombres réels compris entre 0 et 1 caractérisant la nature de l'appui :

- 0 pour une rotule
- 11 pour un noeud rigidement encastré

IV - . 1 RELATION ENTRE F et f :

Dans le cas d'une sollicitation plane d'un élément et si l'on reprend les vecteurs :

$$F'_m = \begin{bmatrix} T_i \\ M_{i\psi} \\ M_i \\ T_j \\ M_{j\psi} \\ M_j \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f_m = \begin{bmatrix} M_i \\ M_{i\psi} \\ M_j \end{bmatrix}$$

S'il n'y a pas de charges en travée, on a les relations suivantes dans le repère local :

$$\begin{cases} T_i = \frac{M_i + M_j}{L} \\ M_{i\psi} = M_{\psi} \\ M_i = M_i \\ T_j = - \left(\frac{M_i + M_j}{L} \right) \\ M_{j\psi} = - M_{\psi} \\ M_j = M_j \end{cases} \quad (39) \quad \begin{array}{l} M_i = \text{Moment de flexion au noeud } i \\ M_j = \text{ " " " " " } j \\ M_{\psi} = \text{Moment de torsion} \end{array}$$

$$F'_m = R \cdot f_m$$

R = matrice de réduction des variables.

R = est déduite de la relation (39)

$$R = \begin{bmatrix} M_i & M_{i\psi} & M_j \\ \frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Pour passer au repère global, on écrit :

$$F_m = T \cdot F_m$$

où T est la matrice de rotation qui se présente sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & T_j \end{bmatrix} \quad (41)$$

avec $T_i = T_j =$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θ est l'angle d'inclinaison de l'élément (m) par rapport à l'axe x (dans notre cas $\theta = 0$).

Finalement le passage du vecteur F_m à F_m s'effectue à l'aide d'une matrice géométrique A rectangulaire.

$$F_m = A \cdot f_m \quad (42) \quad \text{avec } A = T \cdot R$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta}{L} & -\sin \theta & \frac{\cos \theta}{L} \\ \frac{\sin \theta}{L} & \cos \theta & \frac{\sin \theta}{L} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos \theta}{L} & \sin \theta & -\frac{\cos \theta}{L} \\ -\frac{\sin \theta}{L} & -\cos \theta & -\frac{\sin \theta}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

(Dans le programme A est appelée B_L et écrite avec $\theta = 0$)

Pour \bar{U}_m et U_m virtuels cinématiquement admissibles, on a d'après le théorème des travaux virtuels.

$$F_m^T \cdot \bar{U}_m = f_m^T \cdot U_m$$

Ou en appliquant (42)

$$f_m^T A^T \cdot \bar{U}_m = f_m^T \cdot U_m$$

$$f_m^T \text{ étant quelconque d'où : } u_m = A^T \cdot \bar{U}_m \quad (44)$$

A partir des relations (42) et (44) on déduit : la matrice de rigidité K_m

$$K_m = A \cdot k_m \cdot A^T$$

IV - 3 - CONDITIONS AUX LIMITES :

Il suffit de reporter les valeurs imposées des déplacements des appuis dans le système d'équations de $K \cdot U = F$ pour pouvoir le résoudre. Il est clair que sans la substitution d'un nombre minimal de déplacement imposés (nuls ou non nul) de manière à empêcher les mouvements de corps solide de la structure, le système est impossible à résoudre car dans une telle situation les déplacements ne sont pas déterminés de façon unique par les forces.

Cette évidence physique s'interprète mathématiquement par le fait que la matrice de rigidité K est singulière ; elle admettrait donc une infinité de solutions.

On peut regrouper les degrés de liberté des noeuds libres, déterminer leurs déplacements et enfin calculer les réactions sur appuis. Dans le cas de traitement sur ordinateur ce procédé s'avère peu commode alors que l'on peut atteindre le même but en ajoutant un nombre très grand G au coefficient K_{ii} du noeud i considéré et en remplaçant dans le second membre F_i par $G U_i$; (U_i étant le déplacement imposé.)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & \dots & \dots \\ & K_{22} & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & K_{ii} + G & \dots \\ & & & & \dots \\ & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ G U_i \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

L'équation i s'écrit donc :

-88-

$$G U_i + \sum_j K_{ji} U_j = G \bar{U}_i$$

Si G est plus grand que n'importe quel autre terme de la matrice de rigidité cette égalité donnera :

$$U_i \approx \bar{U}_i$$

Ce procédé a un très grand avantage, il vérifie la condition imposée tout en laissant le système sous sa forme initiale, ceci permet de limiter les modifications à faire dans la séquence calcul.

Exemple :

soit à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2X + 5Y = 12 \\ X + Y = 3 \end{cases}$$

Il est évident que la résolution donne $X = 1$ et $Y = 2$

En utilisant le procédé précédent on aura :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Prenons $G = 1000$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 + 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 + X \cdot 1000 \end{bmatrix}$$

Supposons que X et Y représentent les déplacements en deux points quelconques, imposons une valeur à Y ($Y = 2$)

On aura : 1. $X + (1 + 1000) \cdot Y = 3 + 1000$

$$X = 3000 - 2002 = 998 = 1000$$

$$\text{d'où : } \boxed{X = 1}$$

de même en se fixant X ; on a y

V - RESOLUTION DU SYSTEME :

Dans les paragraphes précédents, on a vu comment établir les matrices de rigidité élémentaire et globale, le procédé de détermination des déplacements (conditions aux limites) ; maintenant passant à la résolution du système $F = K \cdot U$, ce système linéaire posé peut se résoudre par de nombreuses méthodes dont :

a/ Méthodes de Gauss :

-89-

Elle consiste à triangulariser la matrice par combinaisons linéaires des équations. Il suffit alors de résoudre en commençant par la dernière équation (à un terme)

b/ - Méthodes itératives :

Ces méthodes convergent bien pour ce type de système, mais elles prennent plus de temps que les autres et son avantage par rapport aux autres c'est qu'elles ne consomment pas beaucoup de mémoire.

c/ - Méthodes de choleski :

Cette méthode s'applique pour des systèmes symétriques définis positifs. Elle consiste à découper la matrice en deux matrices triangulaires transposés l'une de l'autre.

$$K = L^T \cdot L$$

L'étant la matrice triangulaire.

Les expressions analytiques des termes de L en fonction de ceux de K se trouvent facilement par identification.

On résoud alors successivement les deux systèmes triangulaires.

$$X = L U = (L^T)^{-1} \cdot F$$

$$U = L^{-1} (L^T)^{-1} \cdot F$$

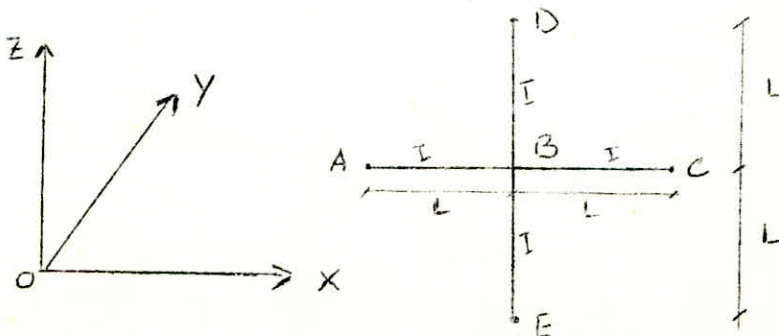
Cette méthode est intéressante à la main et sur ordinateur lorsque tout le système peut être stocké en mémoire centrale.

Cette méthode est celle choisie pour la résolution de notre système vu les qualités qu'elle présente.

VI - Exemples

* Exemple 1

Soit à étudier le système suivant :



Ce système se trouvant dans le plan XO Y, on a en chaque noeud un déplacement suivant Z, un moment de torsion suivant X ou Y (dépend de la barre considérée) et un moment de flexion suivant aussi X ou Y.

En se référant aux sous matrices (32), (33) et (34), on peut établir la matrice de rigidité élémentaire de chaque barre,

Il est évident que celle de A B est la même que celle de BC, ainsi que celle de DB et BE.

Barre AB et BC : la matrice K s'écrit d'après le paragraphe IV ci la page 84.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ_p}{L} \end{bmatrix}$$

et comme on a établi un vecteur déplacement et rotation qui s'écrit $\begin{pmatrix} \Delta Z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix}$, K s'écrit:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{GJ_p}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } A=BL = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta}{L} & -\sin \theta & \frac{\cos \theta}{L} \\ \frac{\sin \theta}{L} & \cos \theta & \frac{\sin \theta}{L} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos \theta}{L} & \sin \theta & -\frac{\cos \theta}{L} \\ -\frac{\sin \theta}{L} & \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on écrit BL sous sa forme rectangulaire:

$$\theta=0 \quad BL = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 1 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* Noeud A:

$$T = K \cdot BL^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{GJ_p}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_G = BL^{(1)T} \cdot \underbrace{K \cdot BL^{(1)}}_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * T$$

$$K_G = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ_p}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$

* Nœud B:

$$T = K \cdot B_L^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ 2EI/L & 0 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ 0 & -GJ/L & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{GB} = B_L^{(2)T} \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

La représentation de A sur B s'écrit: $T = K \cdot B_L^{(2)}$
 et $K_G = B_L^{(2)T} \cdot T$.

Après calcul on a:

$$K_{G_{A \rightarrow B}} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 2EI/L \end{bmatrix}$$

$$K_{G_{B \rightarrow A}} = K_G^T = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & 2EI/L \end{bmatrix}$$

La barre AB et BC étant les mêmes $K_{GB}^* = K_{GA}$ et $K_{GB}^* = K_{GC}$
 $K_{GC}^* = K_{CB}$ et $K_{GC}^* = K_{CA}$

Barre DB et BE: * Nœud D

$\theta = 0$ BL s'écrit comme précédemment

$$T = K \cdot B_L^{(1)} \text{ et } K_G = B_L^{(1)T} \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

* Nœud B:

$$T = K \cdot B_L^{(2)} \text{ et } K_G = B_L^{(2)T} \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

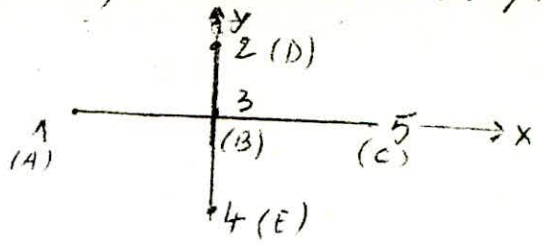
$$K_{G_{D \rightarrow B}} = K_G \text{ et } K_G = K_{G_{B \rightarrow D}}$$

de même pour la barre BE: $K_{GB}^* = K_{GD}$ et $K_{BE}^* = K_{GB}$
 $K_{GE}^* = K_{GB}$ et $K_{EB}^* = K_{GD}$

* Pour avoir le résultat sur machine, on numérote notre système

de la manière suivante :

- A devient 1
- B " 3
- C " 5
- D " 2
- E " 4



Matrice de rigidité globale

	Node 1 $\Delta A_z \quad \theta_{Ax} \quad \theta_{Ay}$	Node 2 $\Delta D_z \quad \theta_{Dx} \quad \theta_{Dy}$	Node 3 $\Delta B_z \quad \theta_{Bx} \quad \theta_{By}$	Node 4 $\Delta E_z \quad \theta_{Ex} \quad \theta_{Ey}$	Node 5 $\Delta C_z \quad \theta_{Cx} \quad \theta_{Cy}$
T_{Az}	$\frac{12EI}{L^3}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$	0	0
M_{Ax}	0	0	0	0	0
M_{Ay}	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	0
T_{Dz}	0	$\frac{12EI}{L^3}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	0
M_{Dx}	0	0	0	0	0
M_{Dy}	0	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	0
T_{Bz}	$-\frac{12EI}{L^3}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$
M_{Bx}	0	$-\frac{6EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L}$	0
M_{By}	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$
T_{Ez}	0	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	0	0
M_{Ex}	0	0	0	$-\frac{6EI}{L}$	0
M_{Ey}	0	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	0
T_{Cz}	0	0	0	0	$\frac{12EI}{L^3}$
M_{Cx}	0	0	0	0	0
M_{Cy}	0	0	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$

Pour l'assemblage de la matrice de rigidité globale, on opère barre par barres, c'est à dire que pour une barre donnée le programme appelle les SUBROUTINES respectives :

- Calcul des caractéristiques élémentaires (connections, coordonnées)
- Calcul de la matrice de rigidité élémentaire
- calcul de la matrice de géométrie

On a vu dans le calcul du portique droit du paragraphe III, qu'on calcule la matrice de rigidité élémentaire de chaque barre dans un tableau de dimension $N \times N$.

$$N = 3 \times NN \quad NN = \text{Nombre de noeuds}$$

Ensuite nous faisons la superposition et on obtient la matrice de rigidité globale pour la structure ; on a tenu compte de la nature bande de la matrice de rigidité symétrique ; on a vu aussi qu'il était inutile de retenir tous les éléments de la matrice globale et on a établi donc une matrice rectangulaire sous la forme redressée.

Le programme tient compte de ce fait, et opère noeud par noeud d'une barre de la manière suivante :

- 1/ - On établit une matrice T appelée de travail telle que T s'écrit : $T = Ke \cdot BL$

$BL =$ Matrice géométrique, $Ke =$ matrice de rigidité élémentaire

- 2/ - On remplit le tableau de la matrice rigidité globale pour les trois degrés de liberté du premier noeud de la barre.
- 3/ - On remplit le tableau de la matrice rigidité globale pour les trois degrés de liberté du second noeud de la barre.
- 4/ - On remplit le tableau de la matrice de rigidité globale par la prpercussion du premier noeud sur le second.

Les cas 2, 3 et 4 sont établis à l'aide de la matrice de travail T ; si on appelle KG la matrice globale : $KG = BL^T \cdot T$; ainsi la matrice de rigidité globale est montée par noeuds d'une barre et imprimé sous forme redressée.

REMARQUE :

La numérotation des noeuds peut être quelconque, si toute fois la machine utilisée offre une forte capacité de mémoire.

Après l'assemblage, on écrit la matrice de rigidité

avec $E = I = G = I_p = L = 1$

	Node 1 $\Delta A_Z \ \theta_{A_X} \ \theta_{A_Y}$	Node 2 $\theta_{D_Z} \ \theta_{D_X} \ \theta_{D_Y}$	Node 3 $\Delta B_Z \ \theta_{B_X} \ \theta_{B_Y}$	Node 4 $\Delta E_Z \ \theta_{E_X} \ \theta_{E_Y}$	Node 5 $\Delta C_Z \ \theta_{C_X} \ \theta_{C_Y}$
T_{A_Z}	12	0	-12	0	0
T_{A_X}	0	0	0	0	0
T_{A_Y}	0	0	-6	0	0
T_{D_Z}	0	12	-12	0	0
T_{D_X}	0	0	0	0	0
T_{D_Y}	0	0	+6	0	0
T_{B_Z}	-12	0	12	-12	-12
T_{B_X}	0	0	0	0	0
T_{B_Y}	0	0	0	0	0
T_{E_Z}	0	0	0	12	0
T_{E_X}	0	0	-12	0	0
T_{E_Y}	0	0	0	0	0
T_{C_Z}	0	0	0	0	12
T_{C_X}	0	0	0	0	0
T_{C_Y}	0	0	0	0	0

Calcul donné par Le Programme

```

*****
NOEUD      DONNEES SUR LES NOEUDS *****
           ABSCISSE  ORDONNEE
1          -1         0
2          0         1
3          0         0
4          0        -1
5          1         0

```

```

*****
Barre  Nd.i  Nd.j  Rig.i  Rig.j  Inert.x E  G x Ip
1      1     3     1     1     1         1
2      3     2     1     1     1         1
3      3     4     1     1     1         1
4      3     5     1     1     1         1

```

MATRICE DE RIGDITE GLOBALE

```

12  0  6  0  0  0 -12  0  6
1  0  0  0  0  0 -1  0  0
4  0  0  0 -6  0  2  0  0
12  0 -6 -12  0 -6  0  0  0
1  0  0 -1  0  0  0  0  0
4  6  0  2  0  0  0  0  0
48  0 12 -12  0  6 -12  0  6
4  0  0 -1  0  0 -1  0  0
16 -6  0  2 -6  0  2  0  0
12  0 -6  0  0  0  0  0  0
1  0  0  0  0  0  0  0  0
4  0  0  0  0  0  0  0  0
12  0 -6  0  0  0  0  0  0
1  0  0  0  0  0  0  0  0
4  0  0  0  0  0  0  0  0

```

* Formulation directe de la matrice de rigidité :

Les opérations à suivre pour le montage des matrices de rigidité élémentaire et globale sont les suivantes :

- 1/ - Former les matrices de rigidité des éléments (K_e)
- 2/ - Assembler la matrice de rigidité de la structure K à partir des éléments indépendantes K_e .
- 3/ - Appliquer les conditions aux limites
- 4/ - Obtenir les déplacements et les réactions après résolution du système $F = K \cdot U$
- 5/ - Utiliser les relations entre forces et déplacements pour obtenir les forces dans l'élément.

* - Rôle du programme :

Le rôle du programme principal est d'appeler les SUBROUTINES une à une, les SUBROUTINES est d'appeler les charges et les données de suite.

↓
ainsi

Le cheminement est le suivant :

- Introduction des données et des charges ainsi que le calcul des vecteurs charges et leur stockage.

- Phase de résolution, assemblage de la Matrice de rigidité globale à l'aide des matrices de rigidité de chaque élément.

VII - POSSIBILITES DU PROGRAMME :

* EFFORTS DUS AUX EFFETS THERMIQUES :

Dans ce programme on tient compte des sollicitations dues aux variations de temperature. Ainsi, l'effort normal induit par une variation de temperature est :

$$N = - E S \alpha t$$

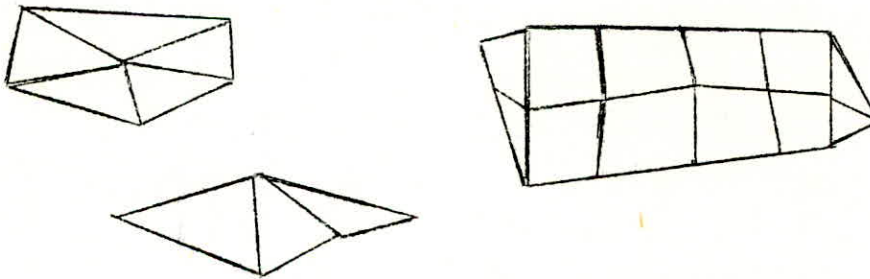
$$\text{car } \epsilon = \frac{L' - L}{L} = \alpha t$$

α = coefficient de dilatation thermique

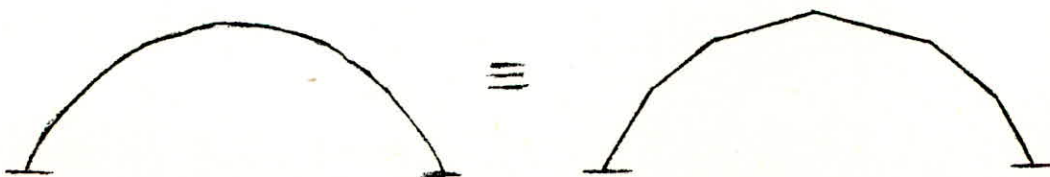
* Structures calculées :

Une structure à barres planes est calculée quelque soit l'assemblage de ses éléments (barres obliques...)

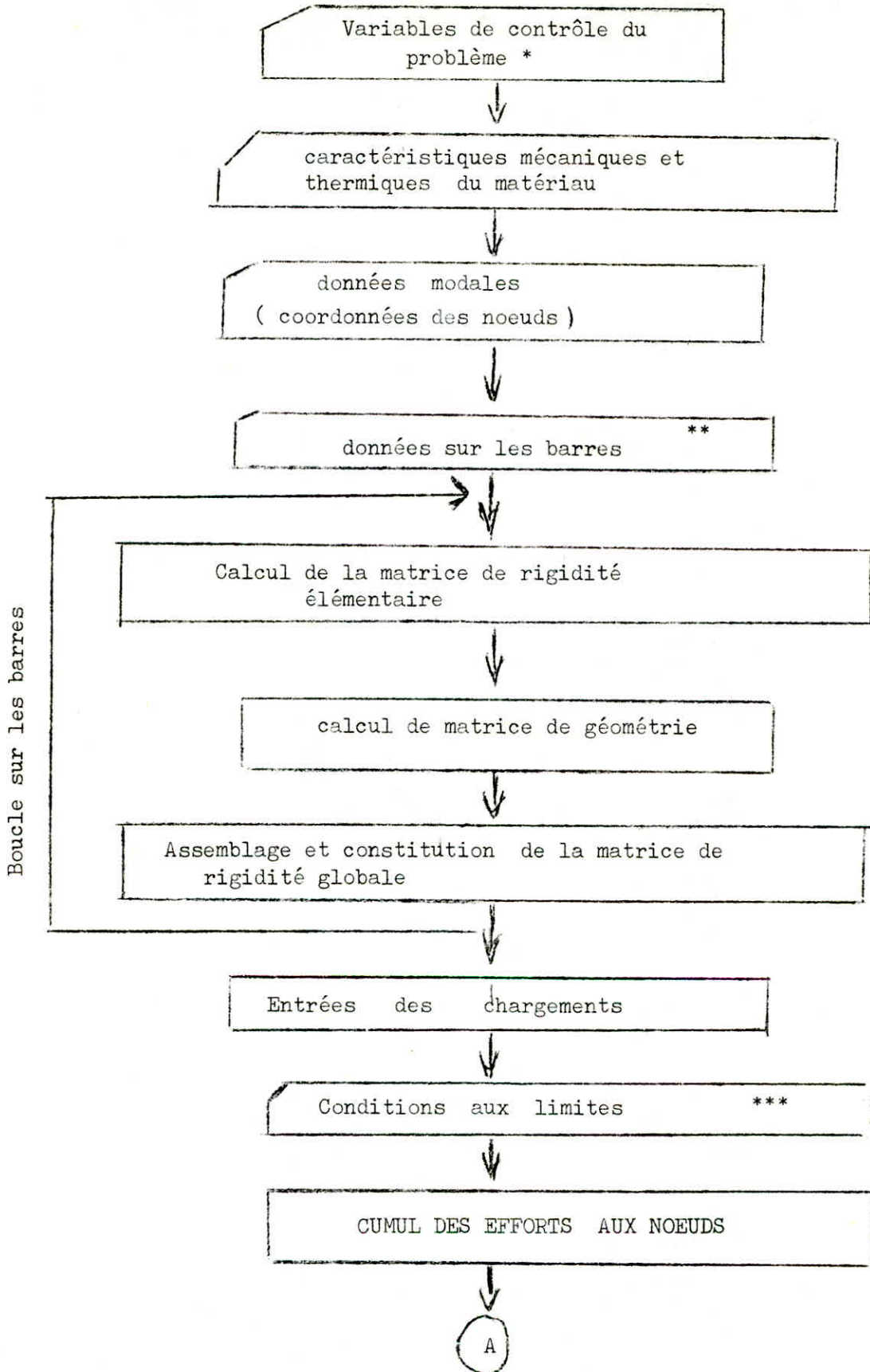
Exemple :



Il est même possible de calculer les arcs si toutefois la courbure n'est pas très importantes; ou assimilera l'arc à un ensemble l'arc à un ensemble de barre comme suit :



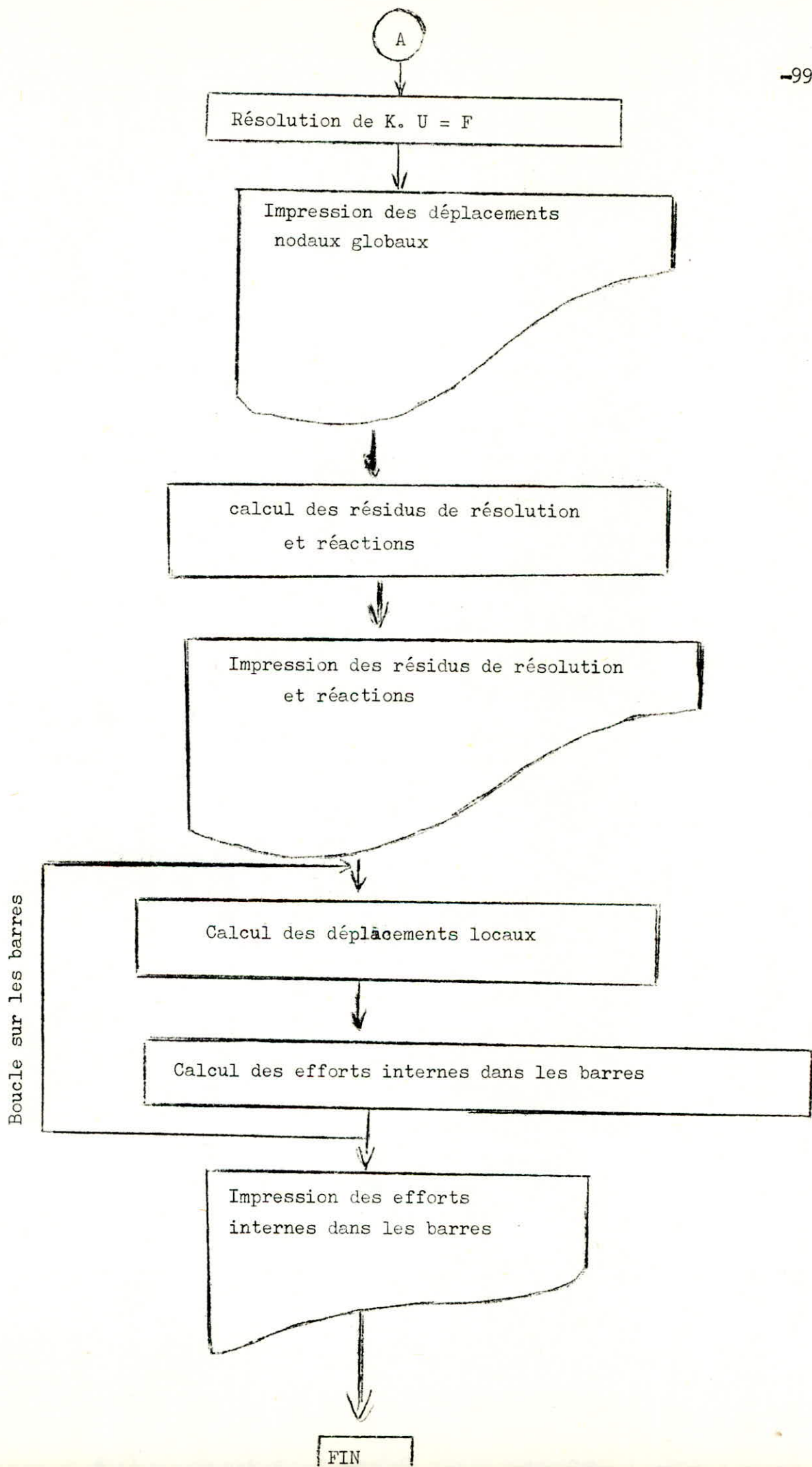
ORGANIGRAMME GENERAL



* Nombre total de noeuds, de barres, plus grande différence de numérotation de deux noeuds voisins

** Numéro, connexions, relaxations, géométrie

*** chargements et déplacements imposés aux noeuds.



DEROULEMENT DU PROGRAMME

1ere Etape:

Entrée des données de départ;

- Nombres de noeuds et de barres (variables de contrôle)
- Coordonnées des noeuds (Topologie de structure)
- Données sur les barres (Cormextions, relaxation et géométrie)

2eme Etape:

Après l'entrée de ces données, le programme calcule :

- La matrice de rigidité élémentaire d'une barre
- La matrice de géométrie

Assemble et construit la matrice de rigidité globale, cette dernière étant redressée.

3eme Etape:

l'utilisateur fait entrer son chargement:

- 1) charge uniforme
- 2) charge ponctuelle entravée, cette dernière étant ramerée au noeud i avec un moment et un effort tranchant en ce noeud plus un moment au noeud j .

4eme Etape:

Introduction des conditions aux limites.

- Nombre de noeuds chargés ou à déplacements imposés
- Numéro du noeud et code

On a établi des codes pour chaque type de noeud si ce dernier est chargée o introduit le code qui correspond aux charges suivant X et Y et le moment; s'il est à déplacements imposés . o introduit le code qui correspond au déplacement suivant Z, rotation suivant X, rotation suivant Y.

Après l'introduction de ces données, le programme résoud le système $F = K.U$, puis calcule les déplacements globaux et les efforts internes (moments suivants X,Y, torsion) et imprime les resultats.

EXTENSION DES PROGRAMMES.

Il serait intéressant de tracer les courbes enveloppes des efforts maximums et minimums pour les poutres continues, et de prendre en considération les déformations dues à l'effort tranchant pour pouvoir calculer les poutres non élancées

Il serait utile de considérer d'appuis élastique aussi bien pour les poutres continues que pour le quadrillage de poutres.

La résolution se fait d'une manière très simple :

Si un noeud i repose sur un ressort de rigidité X . Il suffit de remplacer

le terme diagonale K_{ii} par $K'_{ii} = K_{ii} + X$

Enfin ces programmes seront utilisés pour le calcul de sections .

CONCLUSION .

Notre étude nous a permis d'apprécier le calcul automatique et de constater la possibilité d'effectuer des calculs exacts et importants sur des petits systèmes peu coûteux et performants que toute entreprise ou école susceptible de faire du calcul de génie-civil se doit d'acquiescer. Cette constatation est importante vu l'importance et la priorité accordées par notre pays au développement de l'informatique.

ANNEXES

EXEMPLES DE TRACES DES LIGNES D'INFLUENCES

1) POUTRE ISOSTATIQUES A INERTIE CONSTANTE

2) POUTE CONTINUE A 6 TRAVEES

$$l_1 = l_5 = 40\text{m}$$

$$l_2 = l_3 = l_4 = 50\text{m}$$

$$l_6 = 35\text{m}$$

inertie constante pour toutes les travees

$$I = 24 \text{ m}^4$$

$$E = 42 \cdot 10^5 \text{ t/m}^2$$

3) PONT HYPERSTATIQUE A HUIT TRAVEES

$$l_1 = l_8 = 40\text{m}, \text{ les autres travees : } l_i = 55\text{m}$$

variation parabolique de la hauteur (voir exemple calcul des efforts

pont de Belleville)

EXEMPLE DE CALCUL DES EFFORTS

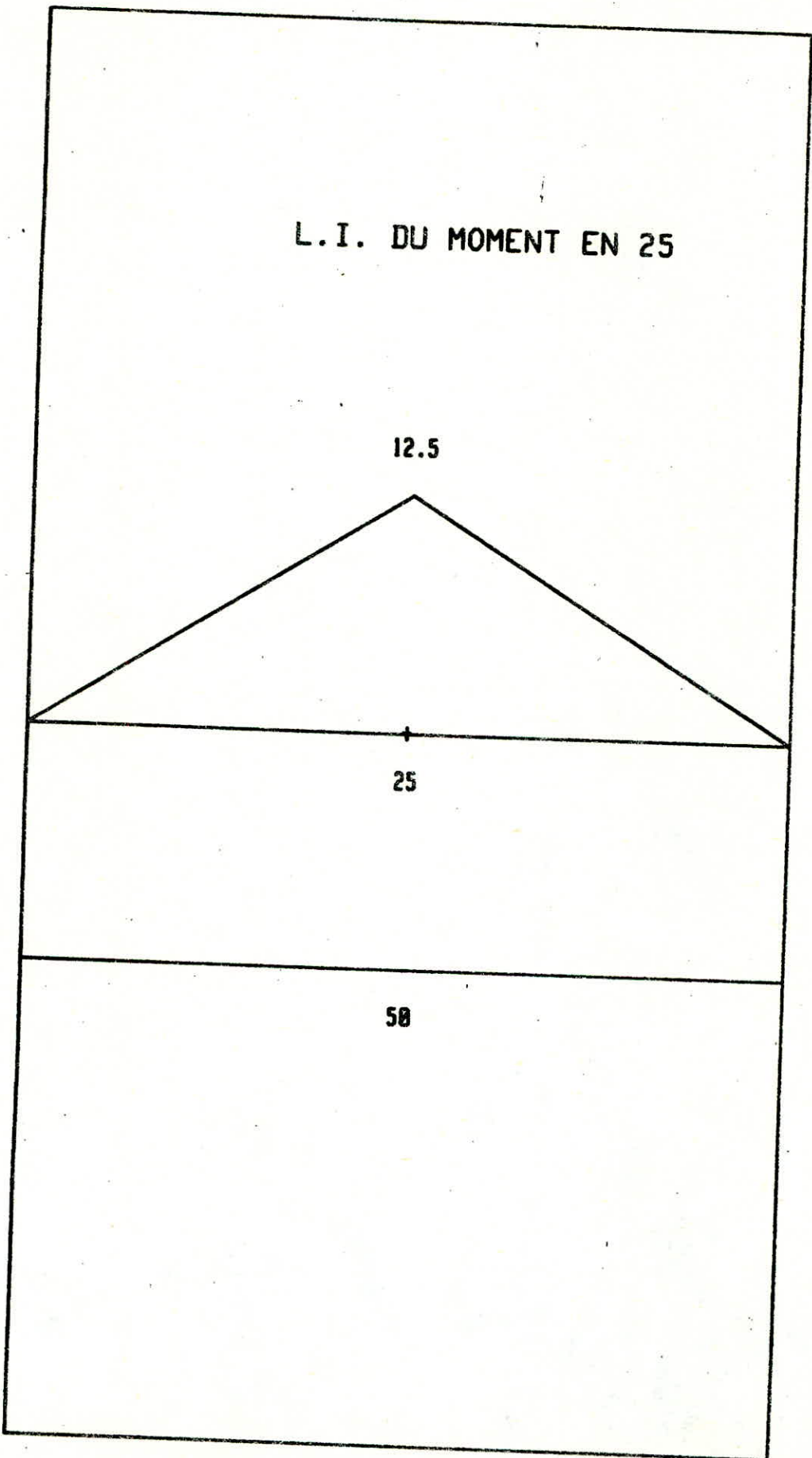
- 1) poutre isostatique
- 2) pont de Belleville
- 3) poutre continue a 8 travees
- 4) calcul de structures

L.I. DU MOMENT EN 25

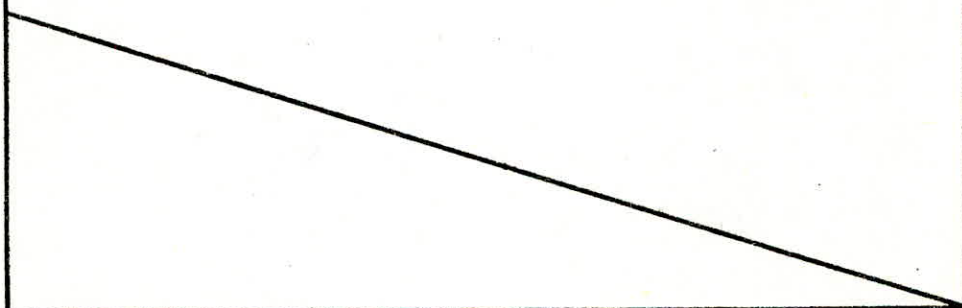
12.5

25

50

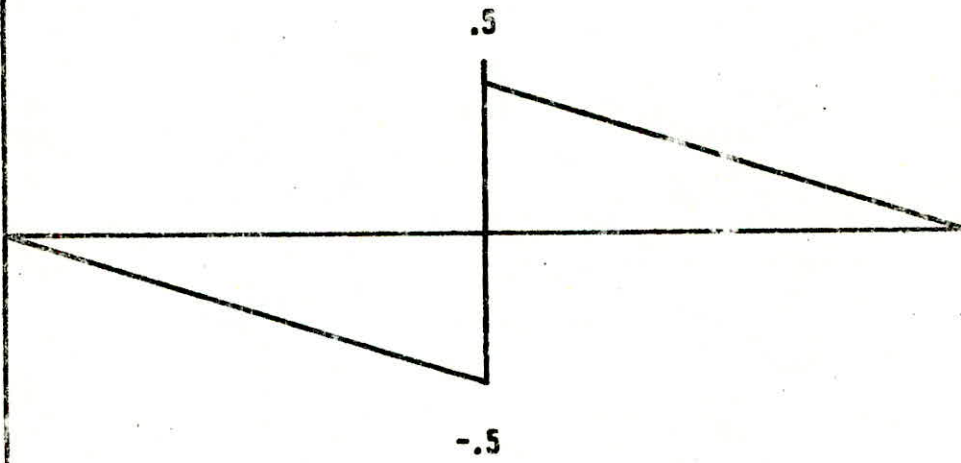


L.I. DE L'EFFORT TRANCHANT EN Ø



50

L.I. DE L'EFFORT TRANCHANT EN 25



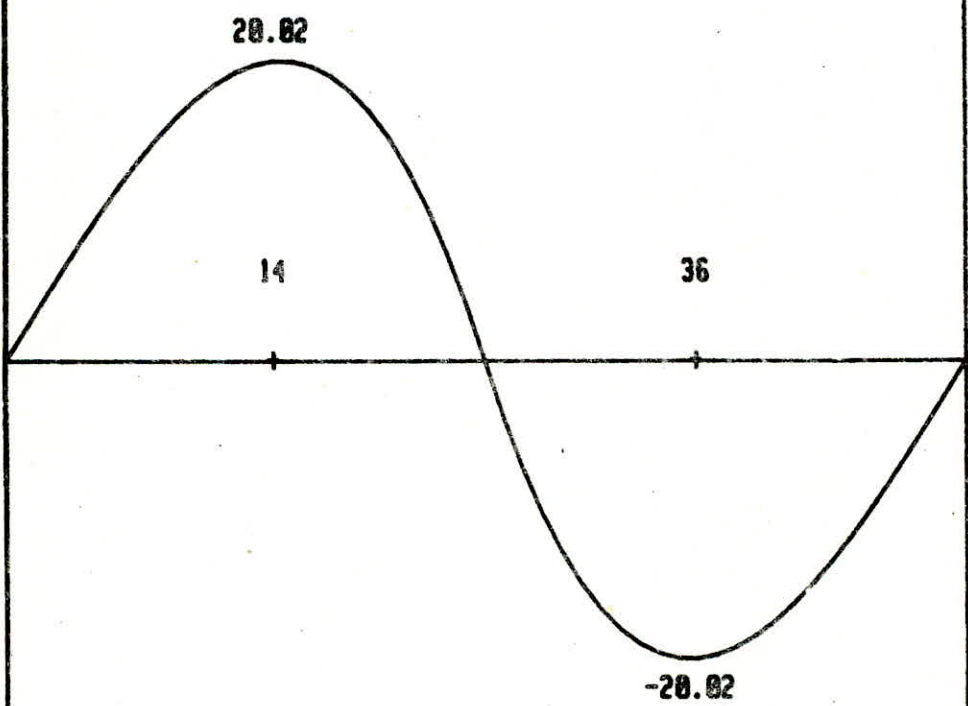
L.I. DE LA FLECHE EN 25

25

-2603

58

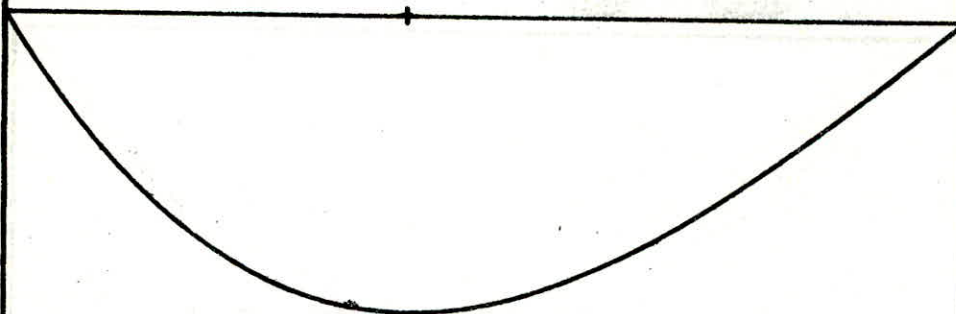
L.I. DE LA ROTATION EN 25



50

L.I. DE LA ROTATION EN 0

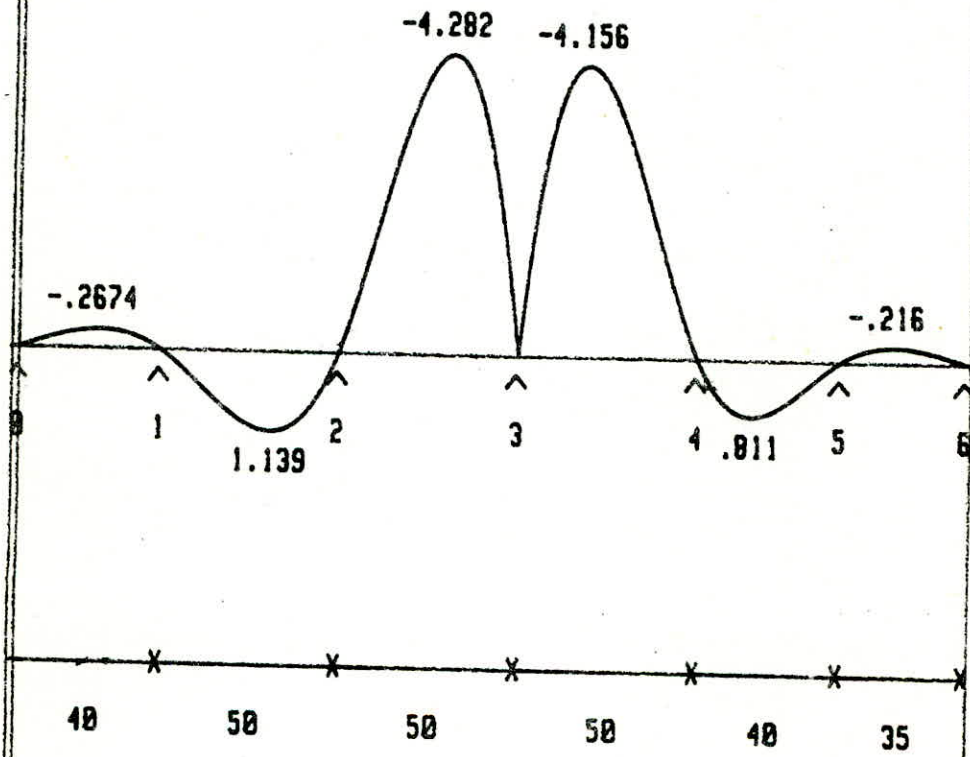
21



-160.3

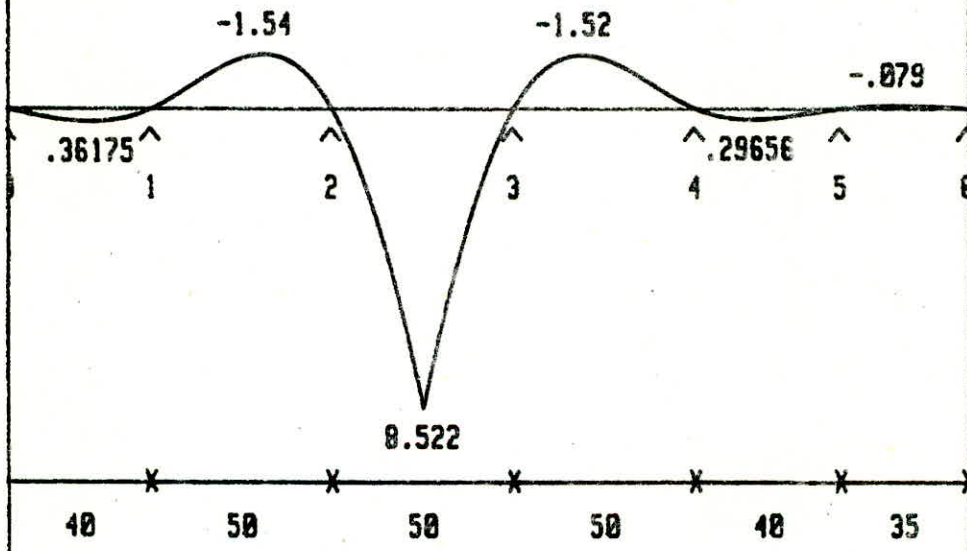
50

L. I. DU MOMENT DE L'APPUI 3



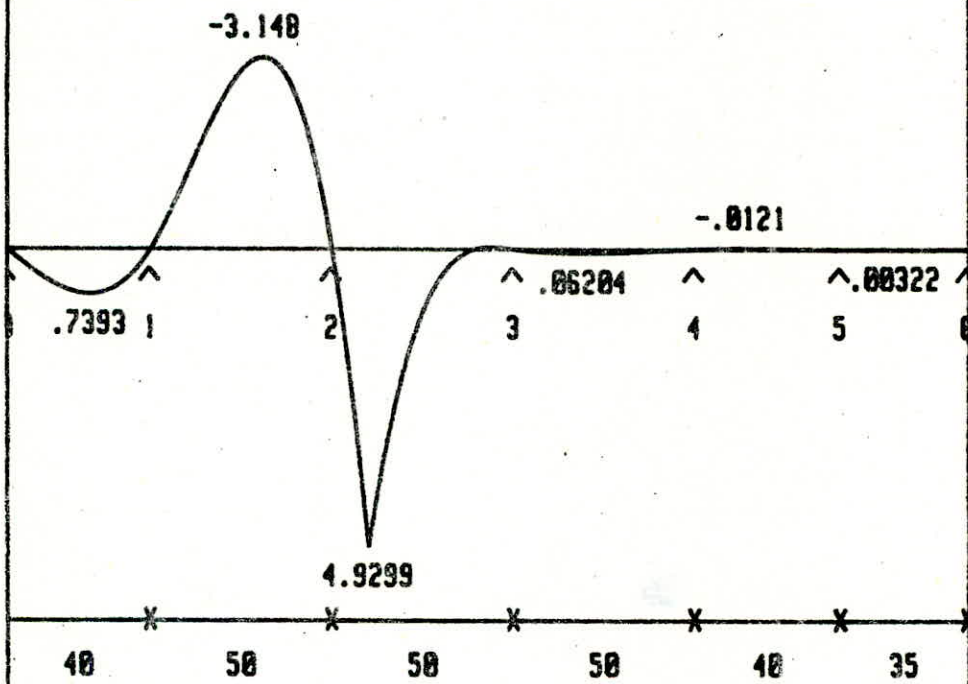
L.I. DU MOMENT DE LA SECT. 25

Travee 2 - 3

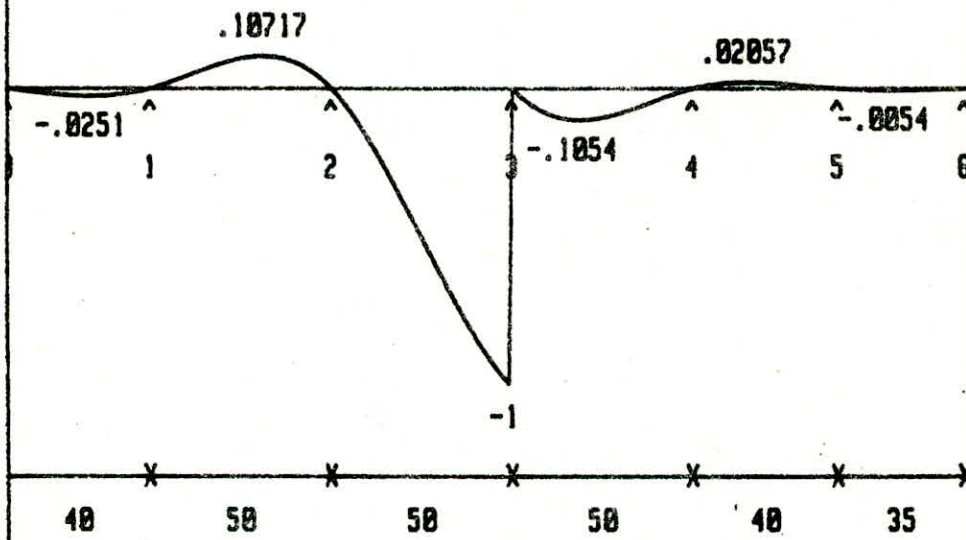


L.I. DU MOMENT DE LA SECT. 10

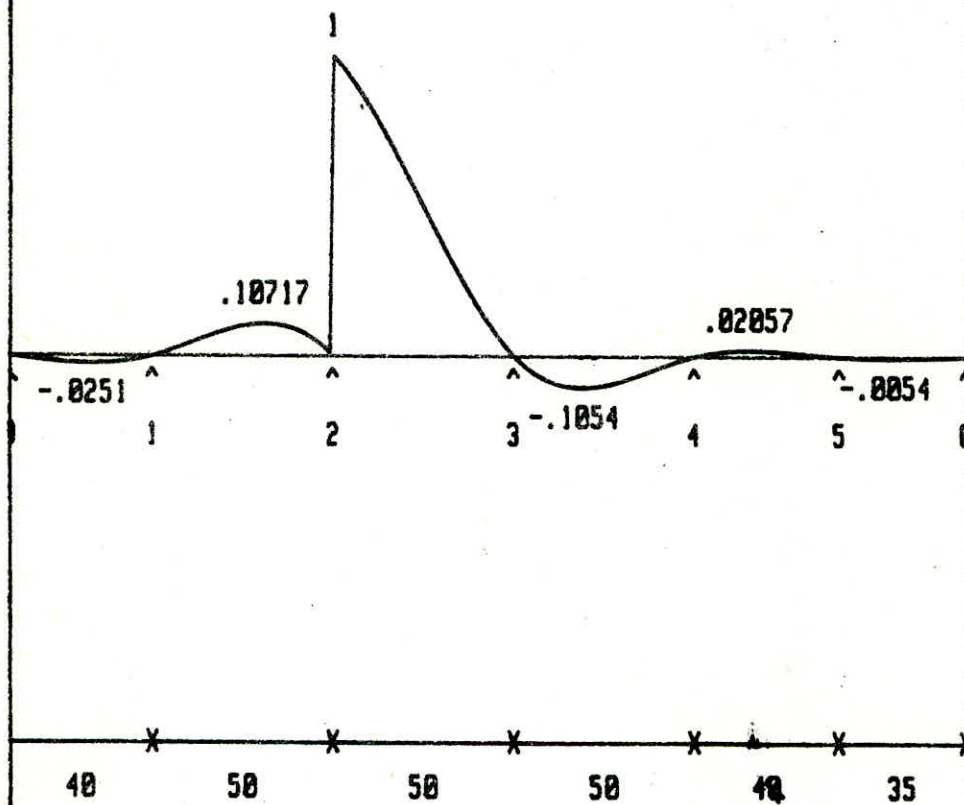
Traves 2 - 3



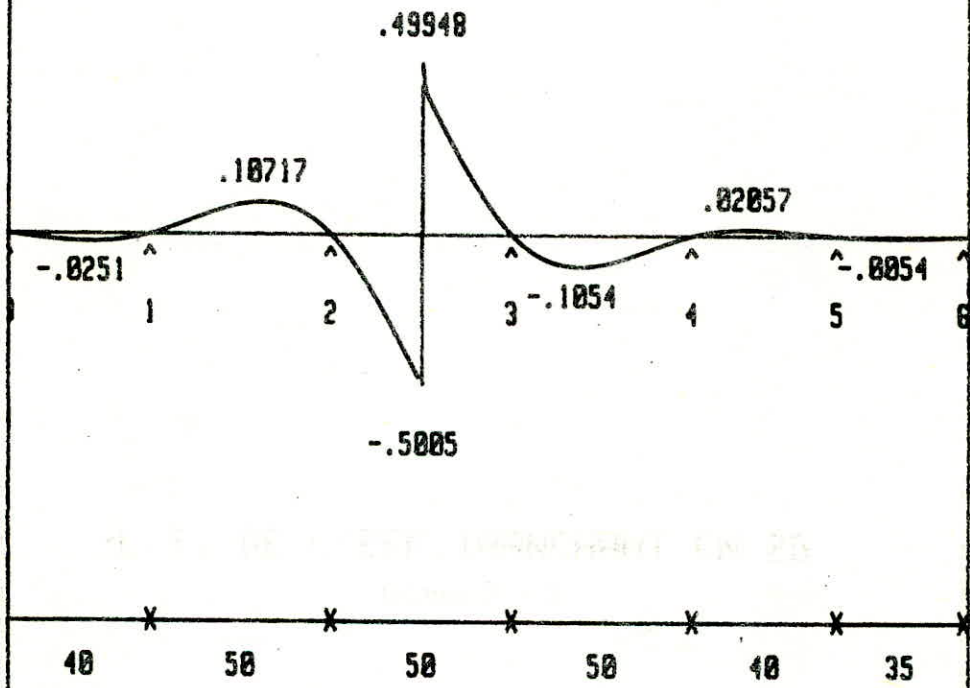
L.I. DE L'EFF. TRANCHANT EN 50
Travee 2 - 3



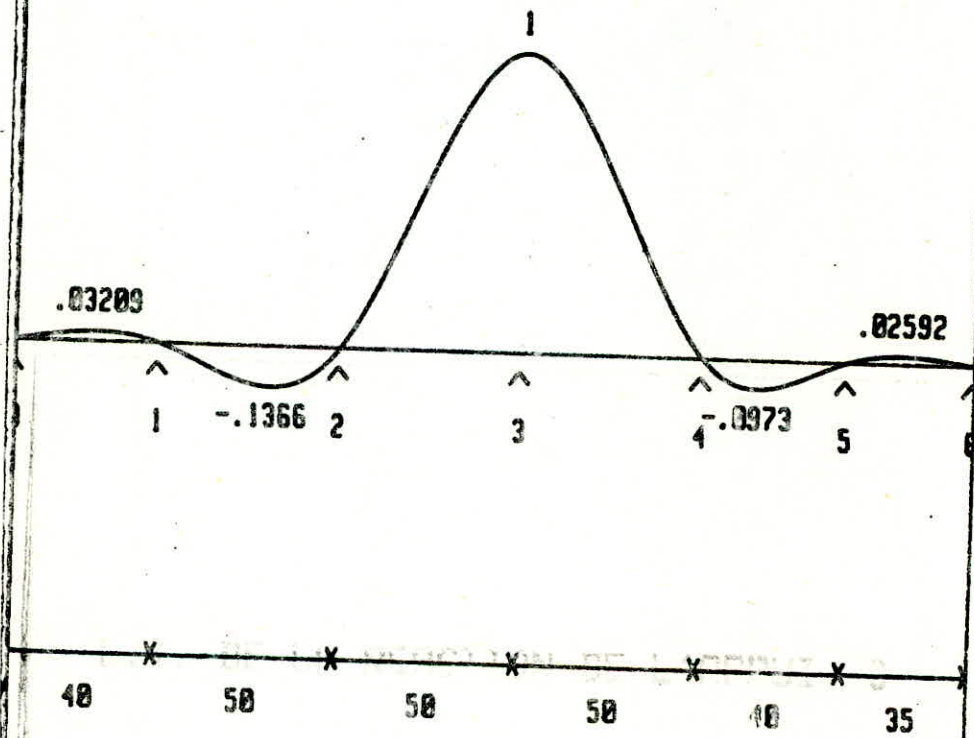
L.I. DE L'EFF. TRANCHANT EN Ø
 Traves 2 - 3



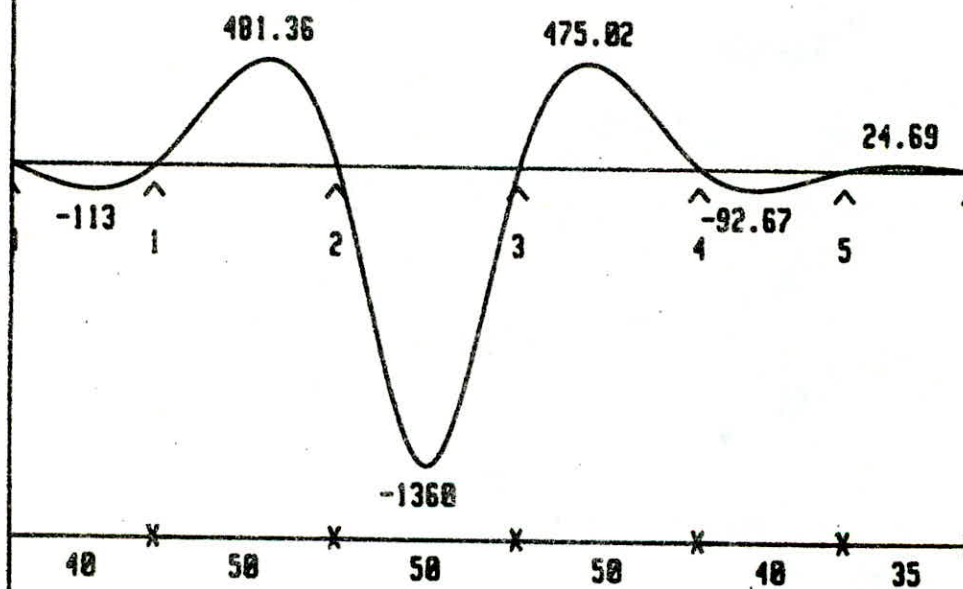
L.I. DE L'EFF. TRANCHANT EN 25
Travee 2 - 3



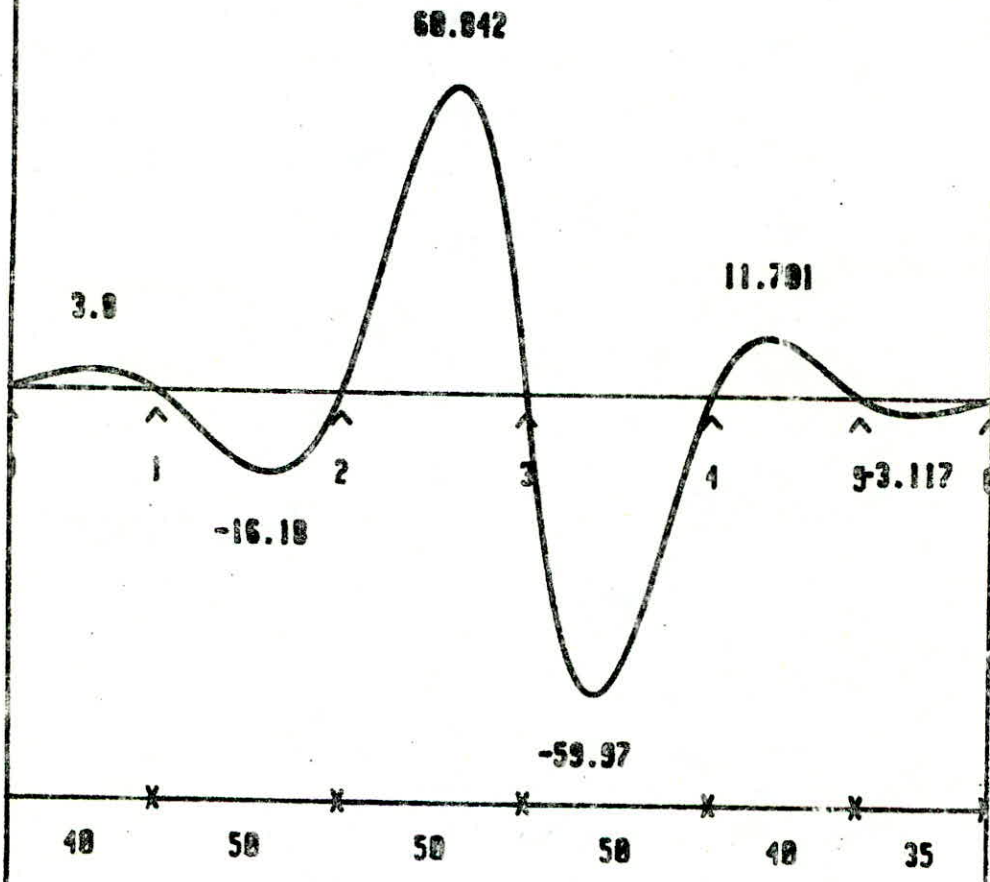
L.I. DE LA REACTION DE L'APPUI 3



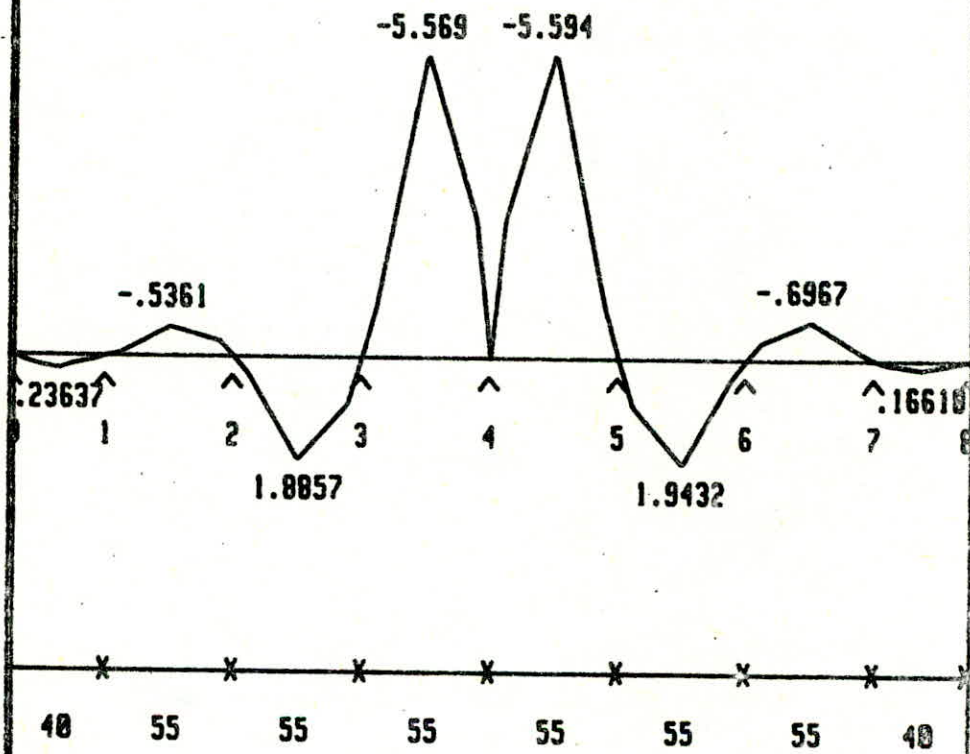
L.I. DE LA FLECHE EN 25
Travee 2 - 3



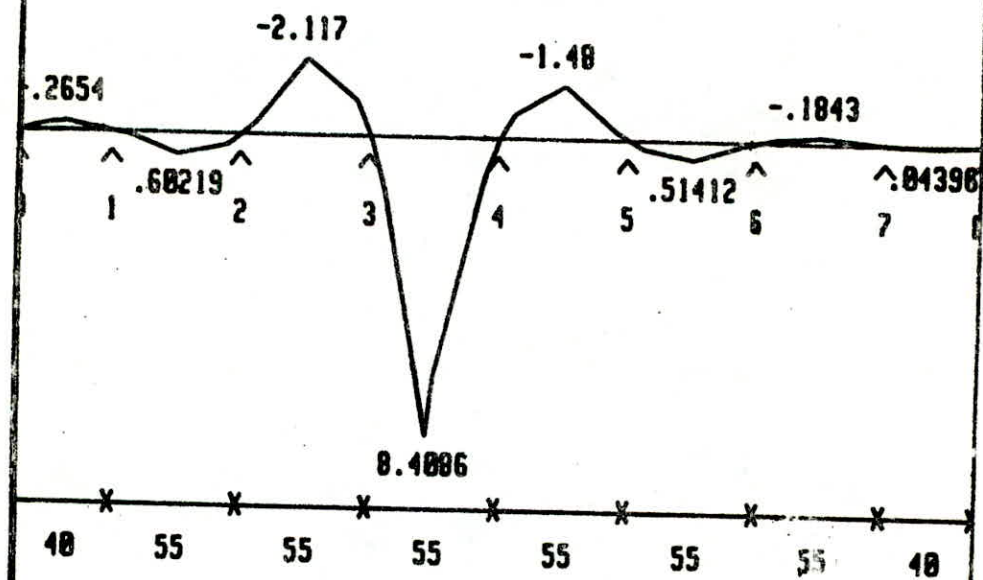
L.I. DE LA ROTATION DE L'APPUI 3



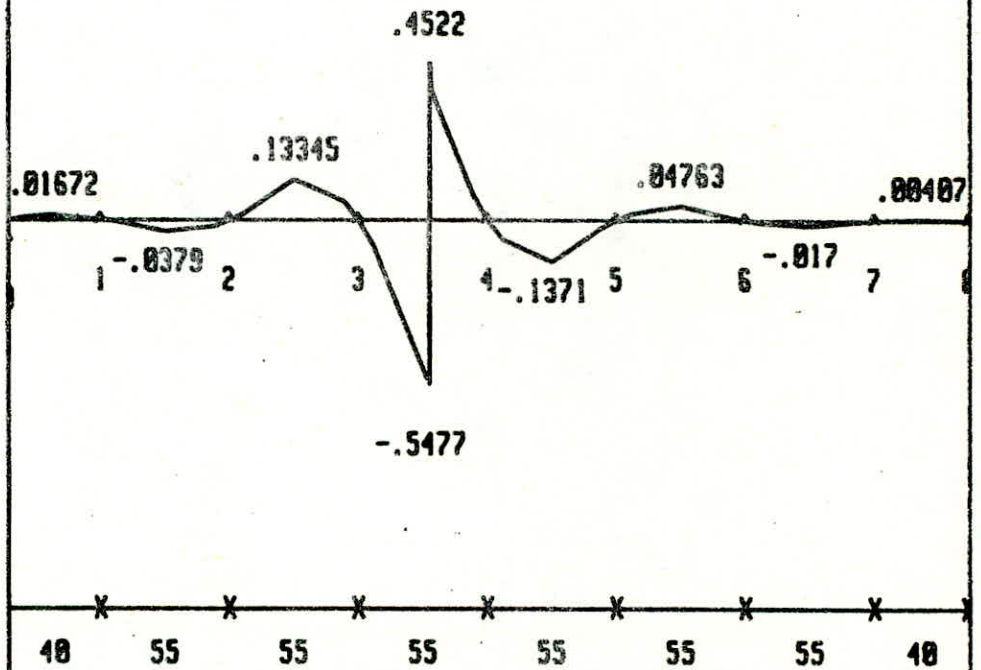
L.I. DU MOMENT DE L'APPUI 4



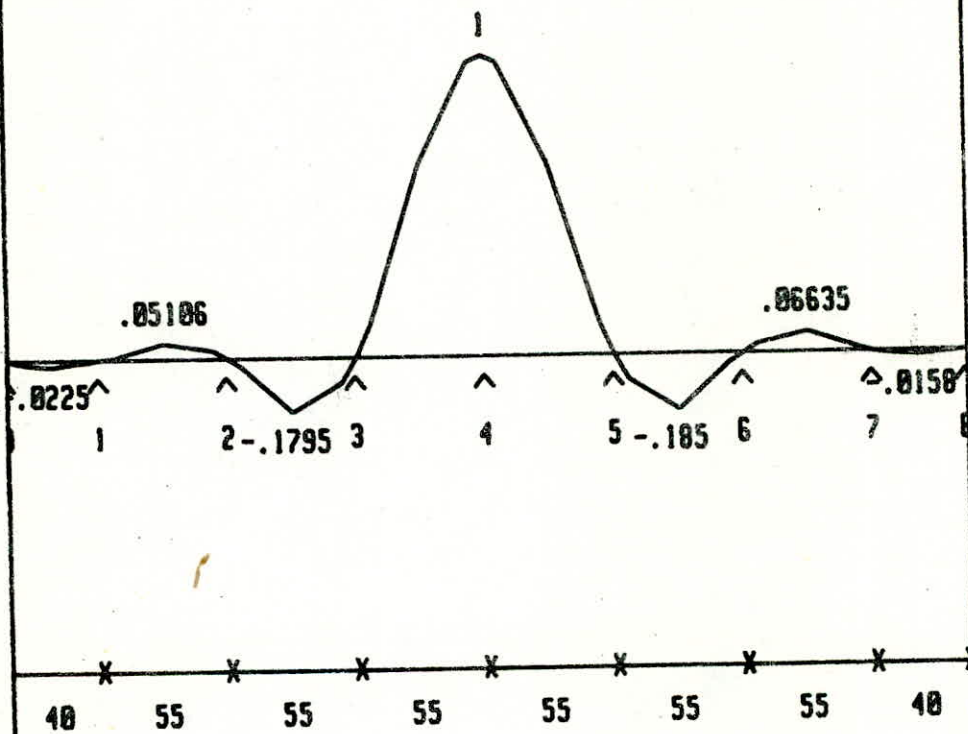
L.I. DU MOMENT DE LA SECT. 25
Travee 3 - 4



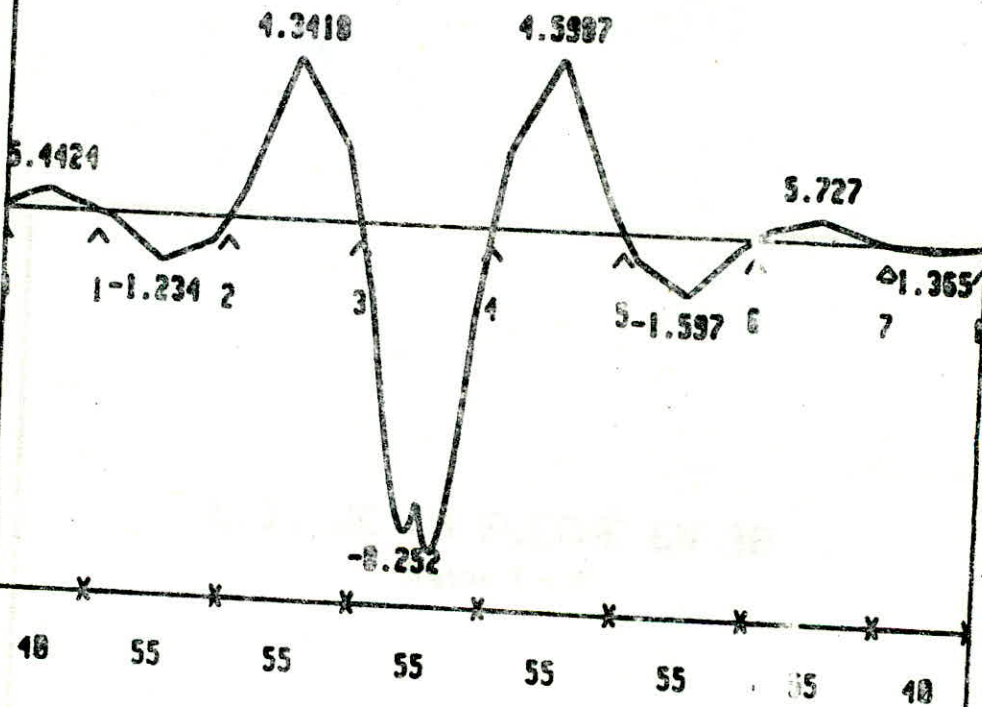
L.I. DE L'EFF. TRANCHANT EN 30
Travee 3 - 4



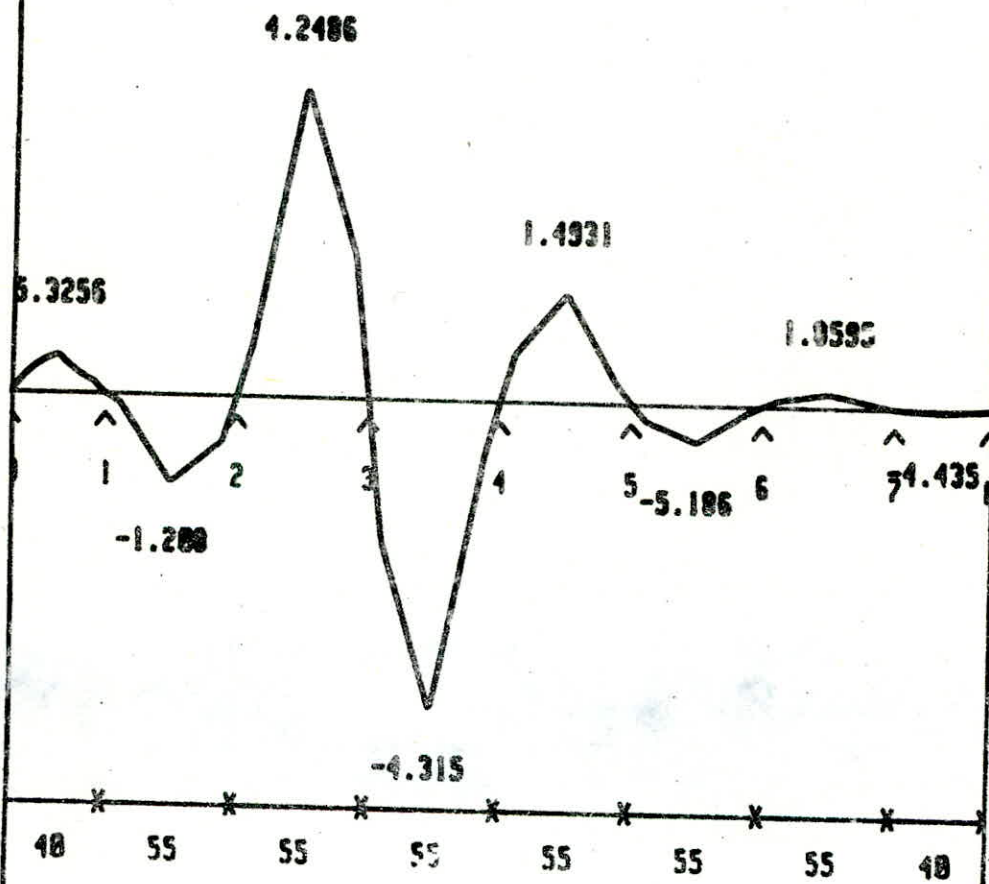
L.I. DE LA REACTION DE L'APPUI 4



L.I. DE LA FLECHE EN 30
Travée 3 - 4



L.I. DE LA ROTATION DE L'APPUI 3



Calcul d'un pont isostatique

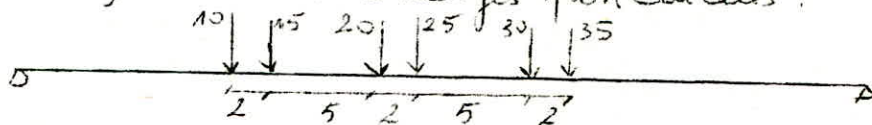
Pont isostatique (d'après document de la SONATRO)

Longueur de la travée: $L = 38 \text{ m}$

1) Calcul du moment flechissant

Il sera calculé pour tout les systemes réglementaires plus des systemes quelconques qui sont:

- Surcharge répartie: $q = 80^t$, $L_q = 10 \text{ m}$
- Systeme de charges ponctuelles:



Il sera calculé en section changeante et en une section quelconque à 25 m .

2) Calcul de l'effort tranchant

Il sera calculé pour les mêmes systemes de charges que 1). Les sections considérées sont à l'appui et une section à 2 m .

- P quelconque = 50^t

- Surcharge A: $L_z = 10 \text{ m}$, $L_{tr} = 1 \text{ m}$ } \Rightarrow Pont de 1^{er} classe

$$A = 850 \text{ Kg/m}^2; A_{ml} = 8.5 \text{ t/ml}$$

3) Calcul de fleche et rotation

Elles seront calculées pour des charges réglementaires et quelconques comme 1) + 2) pour 3 cas d'inertie.

1^{er} cas: Inertie constante.

Section rectangulaire de $2 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$

$$I = 0,333 \text{ m}^4$$

2^{ème} cas: Inertie constante en travée, linéaire aux appuis

A l'appui: Section rectangulaire de $2 \text{ m} \times 0,75 \text{ m}$

En travée: " " " $2 \text{ m} \times 0,50 \text{ m}$.

Inertie à l'appui: $I_0 = 0,5 \text{ m}^4$

" en travée: $I_1 = 0,333 \text{ m}^4$

La poutre a une inertie linéaire sur 5 m ($L_q = 5 \text{ m}$)

3^{eme} cas : Variation parabolique de la hauteur

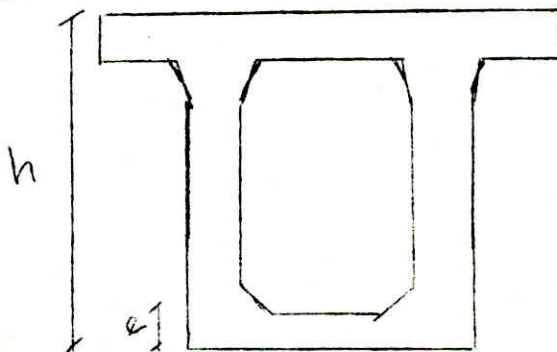
N'ayant pas trouvé ce cas d'inertie dans les documents de la SONATRACH, on a jugé tout de même utile de calculer la fleche et la rotation pour ce cas afin de faire une comparaison avec les cas.

On a pris la poutre du pont de Belleville où la hauteur est parabolique, ses caractéristiques sont :

	Appui	de (mi-travée)
h (m)	4,04	2,50
e (m)	0,40	0,20
I (m ⁴)	11,34	4,079

$$E = 48 \cdot 10^5 \text{ t/m}^2$$

La section est en I caisson :



La fleche et la rotation sont calculées à l'appui et à mi-travée.

 * Les Unites sont en metres, tonnes, t.m.t/m2 *
 * La longueur de la travée L= 38 m *

 CALCUL DU MOMENT FLECHISSANT *****

SYSTEMES	:	S. DANGEREUSE a 19 m	:	S. QUELCONQUE a 25 m	*
Br	:	95	:	85.5263	*
P QUELCONQUE	:	475	:	427.632	*
SURCHARGE A	:	1534.25	:	1387.25	*
QUELCONQUE	:	6600	:	5941.81	*
Mc 90	:	3135.51	:	2822.81	*
Mc 120	:	5862.86	:	5278.19	*
Type D	:	32029.2	:	28835	*
Type E	:	48043.8	:	43252.5	*
Sc	:	S.DANGEREUSE a 17.275 m	:	S.QUELCONQUE a 25 m	*
	:	934.397	:	762.474	*
Bt	:	S.DANGEREUSE a 18.6625 m	:	S.QUELCONQUE a 25 m	*
	:	586.592	:	532.59	*
QUELCONQUE	:	S.DANGEREUSE a 18.4074 m	:	S.QUELCONQUE a 25 m	*
	:	968.748	:	908.421	*
Me 80	:	S.DANGEREUSE a 18.625 m	:	S.QUELCONQUE a 25 m	*
	:	401.663	:	365.026	*
Me 120	:	S.DANGEREUSE a 18.55 m	:	S.QUELCONQUE a 25 m	*
	:	597.652	:	544.153	*

 CALCUL DE L'EFFORT TRANCHANT *****

SYSTEMES	:	Section a l'Appui	:	S.QUELCONQUE a 2 m	*
Br	:	10	:	9.47368	*
P QUELCONQUE	:	50	:	47.3684	*
SURCHARGE A	:	161.5	:	144.947	*
Mc 90	:	1360	:	311.485	*
Mc 120	:	2090	:	581.828	*
QUELCONQUE	:	1520	:	652.632	*
Type D	:	4560	:	3136.55	*
Type E	:	6840	:	4704.82	*
QUELCONQUE	:	98.9158	:	91.7105	*
Sc	:	93.9474	:	87.6316	*
Bt	:	62.8632	:	59.4947	*
Me 80	:	43.1316	:	40.8158	*
Me 120	:	64.4369	:	60.9632	*

* La Longueur de la travée = 38 m *
 * Le Module de Youngs = 4.8E+06 t/m2 *
 * Inertie Constante *

 CALCUL DE LA FLECHE ET DE LA ROTATION *****
 DANS LA SECTION S= 19 m

SYSTEMES	FLECHE max	ROTATION max
Bc	-.0762801	5.69978E-04
Bt	-.0456482	-4.60988E-04
SURCHARGE QUELCONQUE	-.0250145	-2.53543E-04
Me 80	-.0313195	-3.14756E-04
Me 120	-.0469792	-4.72134E-04
SURCHARGE QUELCONQUE	-.552959	-5.17953E-03
Mc 80	-.254733	-2.53082E-03
Mc 120	-.465775	-4.59185E-03
Type D	-2.7808	-.0212779
Type E	-4.1712	-.0319168
SURCHARGE A	-.14422	0

 * Les Unites sont en metre,tonne,t/m2,m4,Rad *
 * La Longueur de la travée = 38 m *
 * Le Module de Youngs = 4.8E+06 t/m2 *
 * Inertie Constante en travée,Lineaire aux APPUIS *

 CALCUL DE LA FLECHE ET DE LA ROTATION *****
 DANS LA SECTION S= 19 m

SYSTEMES	FLECHE max	ROTATION max
Bc	-.0761234	5.66636E-04
Bt	-.0455646	-4.5902E-04
SURCHARGE QUELCONQUE	-.0249688	2.5253E-04
Me 80	-.031262	-3.13483E-04
Me 120	-.046893	-4.70224E-04
SURCHARGE QUELCONQUE	-.551915	-5.15638E-03
Mc 80	-.254263	-2.51975E-03
Mc 120	-.464913	-4.57275E-03
Type D	-2.77516	-.0211486
Type E	-4.16274	-.0317229
SURCHARGE A	-.143831	0

 * Les Unites sont en metre,tonne,t/m2,m4,Rad *
 * La Longueur de la travée = 38 m *
 * Le Module de Youngs = 4.8E+06 t/m2 *
 * Variation Parabolique de la Hauteur *

 CALCUL DE LA FLECHE ET DE LA ROTATION *****
 DANS LA SECTION S= 19 m

SYSTEMES	FLECHE max	ROTATION max
Bc	-5.41196E-03	3.62532E-05
Bt	-3.28038E-03	-2.96491E-05
SURCHARGE QUELCONQUE	-1.79809E-03	-1.62393E-05
Me 80	-2.25007E-03	-2.01248E-05
Me 120	-.0033751	-3.01872E-05
SURCHARGE QUELCONQUE	-.0395791	-3.30849E-04
Mc 80	-.0182864	-1.42341E-04

* Les unites sont en metre, tonne, t/m², m⁴, Rad *
 * La Longueur de la travée = 38 m *
 * Le Module de Young = 4.8E+06 t/m² *
 * Inertie Constante *

 CALCUL DE LA FLECHE ET DE LA ROTATION *****
 DANS LA SECTION S= 0 m *

SYSTEMES	FLECHE max	ROTATION max
Sa	0	-6.30591E-03
Sb	0	-3.70397E-03
SURCHARGE QUELCONQUE	0	-2.02834E-03
Mc 80	0	-2.54195E-03
Mc 120	0	-3.81293E-03
SURCHARGE QUELCONQUE	0	-1.0451307
Mc 80	0	-1.0207074
Mc 120	0	-1.0378703
Type D	0	-1.229392
Type E	0	-1.344088
SURCHARGE	0	0

 * Les unites sont en metre, tonne, t/m², m⁴, Rad *
 * La Longueur de la travée = 38 m *
 * Le Module de Young = 4.8E+06 t/m² *
 * Inertie Constante en travée, Lineaire aux Appuis *

 CALCUL DE LA FLECHE ET DE LA ROTATION *****
 DANS LA SECTION S= 0 m *

SYSTEMES	FLECHE max	ROTATION max
Sa	0	-6.23813E-03
Sb	0	-3.66796E-03
SURCHARGE QUELCONQUE	0	-1.72136E-03
Mc 80	0	-2.51669E-03
Mc 120	0	-3.77504E-03
SURCHARGE QUELCONQUE	0	-1.0446714
Mc 80	0	-1.0205044
Mc 120	0	-1.0374914
Type D	0	-1.227011
Type E	0	-1.340517
SURCHARGE	0	0

* Les Unites sont en metre, tonne, t/m2, m4, Rad *
 * La Longueur de la travee = 38 m *
 * Le Module de Young = 4.8E+04 t/m2 *
 * Variation Parabolique de la Hauteur *

 CALCUL DE LA FLECHE ET DE LA ROTATION *****
 DANS LA SECTION S= 0 m

SYSTEMES		FLECHE max	ROTATION max
Bc	:	0	-4.11512E-04
Bc	:	0	-2.44838E-04
SURCHARGE QUELCONQUE	:	0	-1.34095E-04
Mc 80	:	0	-1.67967E-04
Mc 120	:	0	-2.5195E-04
SURCHARGE QUELCONQUE	:	0	-2.97178E-03
Mc 80	:	0	-1.36711E-03
Mc 120	:	0	-2.49977E-03
Type D	:	0	-.014982
Type A	:	0	-.0224729
SURCHARGE A	:	0	0

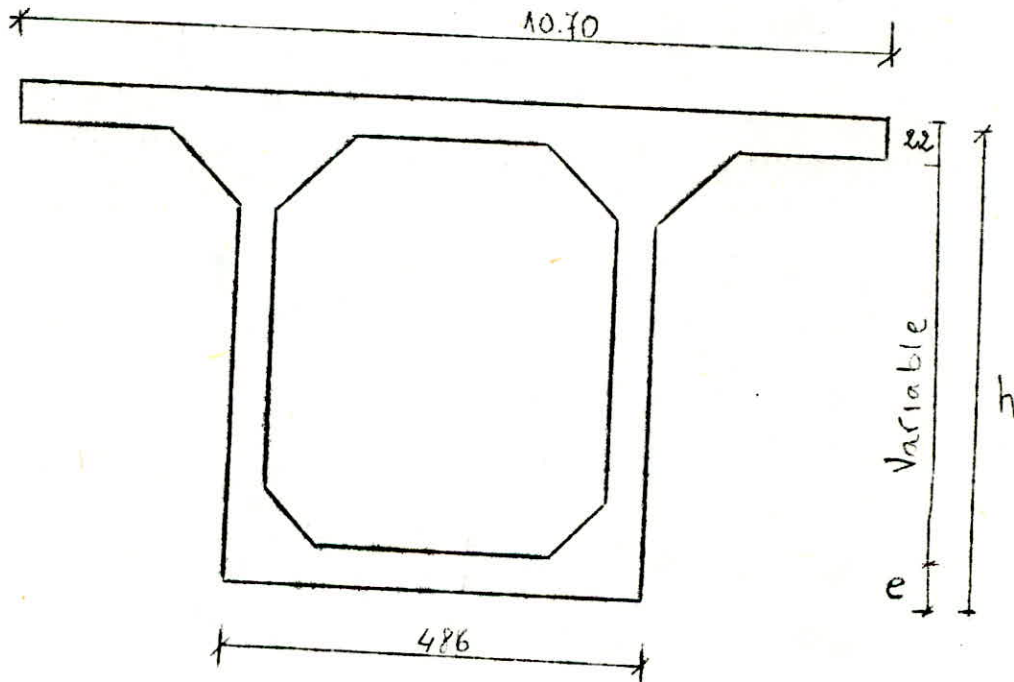
Pont route de Belleville

* Caracteristiques geometriques

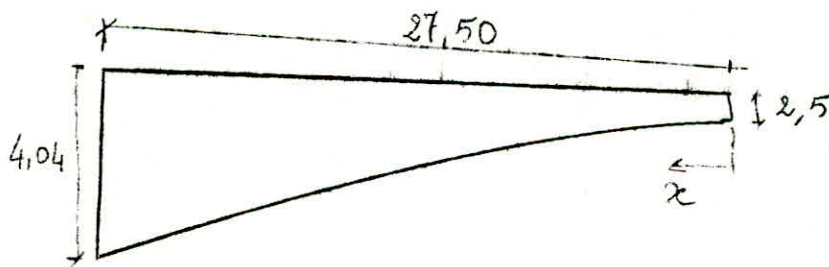
- pont à 8 travées

• travées de rives : $l_1 = l_8 = 40 \text{ m}$

• travées intermédiaires : $l_i = 55 \text{ m}$



h : variable paraboliquement
 e : variable



	Appui	clé (mi-travée)
h	4,04 m	2,5 m
e	0,40 m	0,20 m
I	11,34 m ⁴	4,079 m ⁴

$$E = 48 \cdot 10^5 \text{ t/m}^2$$

MOMENTS POUR APPUI 1

(t.m)

Charges ponctuelles

```

*****
* Systeme           Mmax NEgatif           Mmax Positif *
*****
Bc(Sens 1)         843.166666935           312.58461942
Bc(Sens 2)         822.514531807           314.262789536
Bt                 560.792723144           288.821318579
Me80               380.522096416           293.639140557
Mei20              570.783144624           293.639140557
Br                 87.9173612998           30.40230728
    
```

Charges Unif. Reparties

```

*****
* Systeme           Mmax positif           Mmax negatif *
*****
A                 1771.88199308           414.541045689
Mc80              3339.01634377           806.274414164
Mc120             5342.42615004           1290.03906266
D                 32986.2681056           11406.8329214
E                 49479.4021583           17110.2493822
    
```

MOMENTS POUR APPUI 2

(t.m)

Charges ponctuelles

```

*****
* Systeme           Mmax NEgatif           Mmax Positif *
*****
Bc(Sens 1)         837.055880412           234.696240753
Bc(Sens 2)         828.232846058           228.996837533
Bt                 570.783144624           370.748039921
Me80               909.734359822           1709.37335925
Mei20              909.734359822           1709.37335925
Br                 59.6943733144           20.6437934294
    
```

Charges Unif. Reparties

```

*****
* Systeme           Mmax positif           Mmax negatif *
*****
A                 1424.46011864           479.665531235
Mc80              1458.14371967           545.173262107
Mc120             2333.02995148           872.277219372
D                 22397.1074457           7745.47422253
E                 33595.6611685           11618.2113338
    
```


MOMENTS POUR APPUI 3

(t.m)

Charges ponctuelles

```

+++++
* Systeme           Mmax NEgatif           Mmax Positif *
+++++
Bc(Sens 1) :           660.381722898           :           602.720010277
Bc(Sens 2) :           652.05664565           :           599.838642115
Bt          :           377.083295989           :           288.230284202
Me80        :           617.72422108           :           565.185882342
Me120       :           617.72422108           :           565.185882342
Br          :           56.3229649715          :           19.4869555164
    
```

Charges Unif. Reparties

```

+++++
* Systeme           Mmax positif           Mmax negatif *
+++++
A          :           1511.54968279           :           476.822945273
Mc80       :           1375.79505383           :           514.554785357
Mc120      :           2201.27208613           :           823.287656571
D          :           21132.1661794           :           7311.42901968
E          :           31698.2492691           :           10967.1435295
    
```

MOMENTS POUR APPUI 4

(t.m)

Charges ponctuelles

```

+++++
* Systeme           Mmax NEgatif           Mmax Positif *
+++++
Bc(Sens 1) :           645.790194581           :           445.376031983
Bc(Sens 2) :           631.169469822           :           442.494285278
Bt          :           356.879458832           :           351.585180422
Me80        :           583.07530415           :           383.751434103
Me120       :           583.07530415           :           383.751434103
Br          :           55.9489673981           :           19.4329299986
    
```

Charges Unif. Reparties

```

+++++
* Systeme           Mmax positif           Mmax negatif *
+++++
A          :           1488.39839123           :           510.462168897
Mc80       :           1366.69365443           :           512.563697543
Mc120      :           2186.7098471           :           820.10191607
D          :           20991.832383           :           7291.12618868
E          :           31487.7485745           :           10936.689283
    
```


Charges ponctuelles

* Systeme	Mmax Positif	Mmax Negatif *
Bc	622.634952846	456.505771072
Bt	446.789761109	416.197553797
Me80	299.992581832	423.163693482
Me120	449.988872748	423.163693482
Br	71.4122249233	43.9586806499

Charges Uniformes

* Systeme	Mmax Negatif	Mmax Positif *
A	1022.40610051	998.974428076
Mc80	666.742717972	1027.71028468
Mc120	1334.31479362	1921.80727751
D	23408.0221942	16493.1340528
E	35112.0332913	24739.7010792

Charges ponctuelles

* Systeme	Mmax Positif	Mmax Negatif *
Bc	659.133325992	188.236195644
Bt	444.181885995	123.187902897
Me80	298.793549814	107.844617938
Me120	448.19032472	125.807258576
Br	70.8992144159	13.8269722845

Charges Uniformes

* Systeme	Mmax Negatif	Mmax Positif *
A	1107.41316533	536.213556392
Mc80	1098.45924227	323.260183351
Mc120	2112.56439628	604.493169526
D	24699.4503396	6835.52051389
E	37049.1755094	10253.2807708

Charges ponctuelles

```

*****
* Systeme          Mmax Positif          Mmax Negatif *
*****
Bc          :          1146.15579667          :          283.360334019
Bt          :          505.378035398          :          157.494371301
Me80       :          337.038947083          :          155.339998621
Me120     :          505.558420624          :          155.339998621
Br          :          80.5786320533          :          18.5392835747
    
```

Charges Uniformes

```

*****
* Systeme          Mmax Negatif          Mmax Positif *
*****
A          :          1292.03220768          :          623.026085598
Mc80      :          1352.74035962          :          433.421335992
Mc120    :          2580.58724066          :          810.494187589
D          :          28331.5897458          :          6955.86998208
E          :          42497.3846187          :          10433.8049731
    
```

Charges ponctuelles

```

*****
* Systeme          Mmax Positif          Mmax Negatif *
*****
Bc          :          770.519078009          :          208.626134831
Bt          :          511.936625142          :          118.047845049
Me80       :          344.762028175          :          103.445156275
Me120     :          517.143042262          :          120.170669884
Br          :          81.6251889536          :          17.5452248234
    
```

Charges Uniformes

```

*****
* Systeme          Mmax Negatif          Mmax Positif *
*****
A          :          1312.16450308          :          688.206883551
Mc80      :          1349.19808289          :          410.12025525
Mc120    :          2581.4458428          :          766.927790318
D          :          28723.7948593          :          6944.964446
E          :          43085.692289          :          10417.446669
    
```

EFFORT TRANCHANT -Travee 0 1

Charges ponctuelles

```

*****
* Systeme          Appui 0                      Appui 1      *
*****
Bc                91.9471239376                -105.187549019
Bt                62.8174806055                -63.4418953737
Me80              42.3755509075                -43.2486759299
Me120            63.5633263613                -64.8730138948
Br                10                      -10
    
```

Charges uniformes

```

*****
* Systeme          Appui 0                      Appui 1      *
*****
A                67.2641626802                -92.7358373198
Mc80            378.840995601                -173.237324129
Mc120          639.458307879                -455.088387708
D              2987.49024064                -3619.84116885
E              4481.23536096                -5429.76175327
    
```

EFFORT TRANCHANT -Travee 1 2

Charges ponctuelles

```

*****
* Systeme          Appui 1                      Appui 2      *
*****
Bc                165.456066279                -157.140508308
Bt                63.7535196692                -63.4963116748
Me80              43.6610895452                -43.3074285529
Me120            65.4916343177                -64.9611428294
Br                10                      -10
    
```

Charges uniformes

```

*****
* Systeme          Appui 1                      Appui 2      *
*****
A                134.445508056                -113.054491944
Mc80            675.961939472                -293.896077729
mc120          967.643228308                -576.896596755
D              3856.57893588                -3592.86544965
E              5784.86840382                -5389.29817448
    
```


EFFORT TRANCHANT -Travee 2 3

Charges ponctuelles

* Systeme	Appui 2	Appui 3	*
Bc	107.282807841	-106.619655197	
Bt	63.5895918718	-63.5588239734	
Me80	43.4356888237	-43.3933829634	
Me120	65.1535332355	-65.0900744452	
Br	10	-10	

Charges uniformes

* Systeme	Appui 2	Appui 3	*
A	125.02942487	-122.47057513	
mc80	428.022772421	-24.6977254767	
Mci20	714.171498093	-309.808034579	
D	3713.11428505	-3681.56818261	
E	5569.67142758	-5522.35227392	

EFFORT TRANCHANT -Travee 3 4

Charges ponctuelles

* Systeme	Appui 3	Appui 4	*
Bc	106.922198175	-106.840905073	
Bt	63.5700119281	-63.5662402205	
Me80	43.4087664012	-43.4035803031	
Me120	65.1131496018	-65.1053704547	
Br	10	-10	

Charges uniformes

* Systeme	Appui 3	Appui 4	*
A	110.139412739	-109.860587261	
Mc80	428.703355253	-268.235005172	
Mci20	654.193649809	-553.595612613	
D	3695.99073501	-3692.12363055	
E	5543.98610251	-5538.18544582	

REACTION DE L'APPUI 1

(t)

```

*****
* Charges Ponctuelles * Charges uniformes *
*****
* Systeme Rmax * Systeme Rmax *
-----
Bc : 120.669261445 * A : 251.347666392
Bt : 67.055223532 * Mc80 : 729.067412215
Me80 : 45.9112319199 * Mc120 : 918.142908859
Mei20 : 68.8668478799 * D : 4288.64811254
Br : 10 * E : 6432.9721688
    
```

REACTION DE L'APPUI 2

(t)

```

*****
* Charges Ponctuelles * Charges uniformes *
*****
* Systeme Rmax * Systeme Rmax *
-----
Bc : 117.420777615 * A : 244.763317292
Bt : 63.9784358393 * Mc80 : 462.683959583
Me80 : 43.9703492791 * Mc120 : 691.528398529
Mei20 : 65.9555239186 * D : 4224.51262529
Br : 10 * E : 6336.76893794
    
```

REACTION DE L'APPUI 3

(t)

```

*****
* Charges Ponctuelles * Charges uniformes *
*****
* Systeme Rmax * Systeme Rmax *
-----
Bc : 117.327469707 * A : 283.652229601
Bt : 63.9021761347 * Mc80 : 460.610417055
Me80 : 43.8654921852 * Mc120 : 687.477570838
Mei20 : 65.7982382778 * D : 4229.37234634
Br : 10 * E : 6344.0585195
    
```

REACTION DE L'APPUI 4

(t)

```

*****
* Charges Ponctuelles * Charges uniformes *
*****
* Systeme Rmax * Systeme Rmax *
-----
Bc : 117.317406446 * A : 253.039017523
Bt : 63.8933100554 * Mc80 : 460.495846457
Me80 : 43.8533013261 * Mc120 : 687.248559844
Mei20 : 65.7799519892 * D : 4229.96807917
Br : 10 * E : 6344.95211875
    
```

FLECHE DE LA SECTION 27.5 (m)

 TRAVEE 1 2

* Charges Ponctuelles *		* Charges Uniformes *	
* Systeme	Fmax	* Systeme	Fmax
Bc	: .00419500000308	A	: .00502678715876
Bt	: .00228138616044	Mc80	: .0130186876715
Me80	: .0015684529853	Mc120	: .0113601198833
Me120	: .00235267947796	D	: .147173632998
Br	: .000258936707114	E	: .220760449497

FLECHE DE LA SECTION 27.5 (m)

 TRAVEE 2 3

* Charges Ponctuelles *		* Charges Uniformes *	
* Systeme	Fmax	* Systeme	Fmax
Bc	: .0059623737932	A	: .00804617424743
Bt	: .0032353612246	Mc80	: .0261326253907
Me80	: .00222431084191	Mc120	: .0246127269972
Me120	: .00333646626287	D	: .212461543566
Br	: .000433123966417	E	: .318692315349

FLECHE DE LA SECTION 27.5 (m)

 TRAVEE 3 4

* Charges Ponctuelles *		* Charges Uniformes *	
* Systeme	Fmax	* Systeme	Fmax
Bc	: .00617436059737	A	: .00740707498634
Bt	: .00335246198153	Mc80	: .0173101380032
Me80	: .0023048176123	Mc120	: .0275544515917
Me120	: .00345722641845	D	: .220292465997
Br	: .000454016696518	E	: .330438698996

ROTATION DE L'APPUI 1

Charges Ponctuelles

```

+++++
* Systeme          Rmax Negatif          Rmax Positif *
+++++
Bc      :          .000313116292314      :          .000137754031569
Bt      :          .000203241724338      :          8.50051930153E-5
Me80    :          .00013837551451       :          5.76796968246E-5
Me120   :          .000207563271765     :          8.6519545237E-5
Br      :          3.20097289181E-5      :          1.33265500037E-5
    
```

Charges Uniformes

```

+++++
* Systeme          Rmax Negatif          Rmax Positif *
+++++
A        :          .000285206315677      :          .000161519954301
Mc80     :          .00283959918557       :          .00397878461397
Mc120    :          .00425939877835       :          .00596817692095
D        :          .0112775925502        :          .00500007216828
E        :          .0169163888253        :          .00750010825242
    
```

ROTATION DE L'APPUI 2

Charges Ponctuelles

```

+++++
* Systeme          Rmax Negatif          Rmax Positif *
+++++
Bc      :          .000260727645317      :          .000301086909895
Bt      :          .000159896147306      :          .000185794649982
Me80    :          .000108678766735      :          .00012606969231
Me120   :          .000163018150102      :          .000189104538465
Br      :          2.51088934063E-5      :          2.91276506714E-5
    
```

Charges Uniformes

```

+++++
* Systeme          Rmax Negatif          Rmax Positif *
+++++
A        :          .000341799361613      :          .000397160868633
Mc80     :          .00397878461397       :          .00206486996325
Mc120    :          .00596817692095       :          .00309730494488
D        :          .00942311749687       :          .0109285864899
E        :          .0141346762453        :          .0163928797349
    
```

ROTATION DE L'APPUI 3

Charges Ponctuelles

```

+++++
* Systeme          Rmax Negatif          Rmax Positif *
+++++
Bc          :          .000311776497979          :          .000320637341583
Bt          :          .000194753303366          :          .000197859549764
Me80       :          .000132170335499          :          .000134256189674
Me120     :          .000198255503249          :          .000201384284511
Br          :          3.05370856504E-5          :          3.10190922913E-5
    
```

Charges Uniformes

```

+++++
* Systeme          Rmax Negatif          Rmax Positif *
+++++
A          :          .000370054387782          :          .000375956624556
Mc80      :          .00224692164403          :          .00397878461397
Mc120    :          .00337038246605          :          .00596817692095
D         :          .0114576828324          :          .01163824762
E         :          .0171865242486          :          .0174573714301
    
```

ROTATION DE L'APPUI 4

Charges Ponctuelles

```

+++++
* Systeme          Rmax Negatif          Rmax Positif *
+++++
Bc          :          .000317938806377          :          .000323135284027
Bt          :          .000198957753529          :          .000199407077739
Me80       :          .00013500404195          :          .000135305764562
Me120     :          .000202506062925          :          .000202958646843
Br          :          3.11918690173E-5          :          3.12615921574E-5
    
```

Charges Uniformes

```

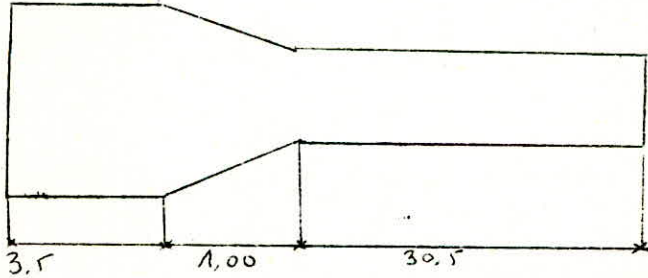
+++++
* Systeme          Rmax Negatif          Rmax Positif *
+++++
A          :          .000378043342035          :          .000378897111354
Mc80      :          .00397878461397          :          .0022469217469
Mc120    :          .00596817692095          :          .00337038262036
D         :          .0117031073228          :          .0117292263488
E         :          .0175546609842          :          .0175938395232
    
```


Soit un pont a 8 travees identiques de longueur

$$L_i = 35m$$

$$E = 4210^5 t/m^2$$

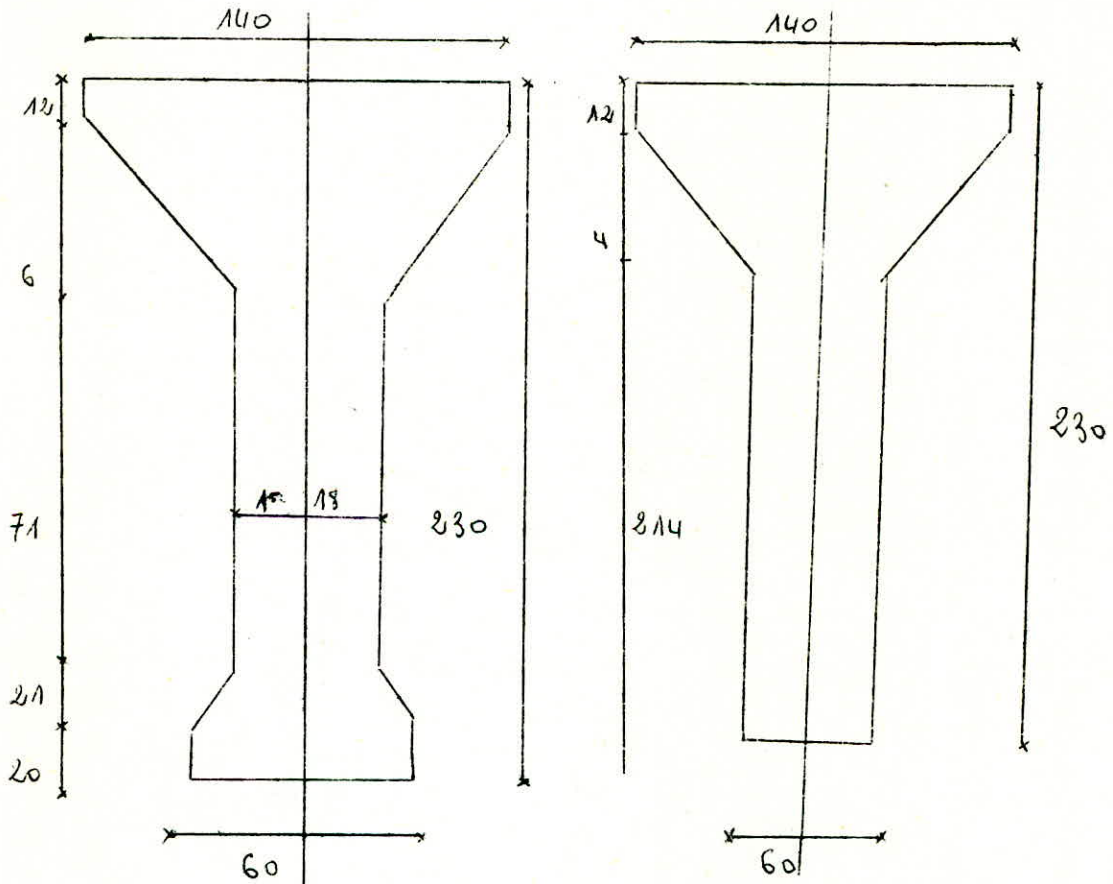
L' inertie varie linierement aux appuis et constante en travee



C A R A C T E R I S T I Q U E G E O M E T R I Q U E S

mi- travee: $I = 132m^4$

a bout : $I = 2434m^4$



MOMENTS POUR APPUI 1 (t.m)

Charges ponctuelles

* Systeme	Mmax NEgatif	Mmax Positif *
Bc(Sens 1)	394.790048828	112.456602498
Bc(Sens 2)	389.976445002	114.647524024
Bt	238.22472497	107.432285843
Me80	217.195405067	110.188513566
Me120	244.379801339	110.188513566
Br	37.4054049807	10.694892996

Charges Unif. Reparties

* Systeme	Mmax positif	Mmax negatif *
A	654.785210271	104.165792061
Mc80	504.570453728	132.734399508
Mc120	807.312725964	212.375039213
D	14101.947627	4032.00617997
E	21152.9214405	6048.00926995

MOMENTS POUR APPUI 4 (t.m)

Charges ponctuelles

* Systeme	Mmax NEgatif	Mmax Positif *
Bc(Sens 1)	455.423573665	116.544930475
Bc(Sens 2)	453.868110928	116.099057028
Bt	359.389379502	74.2255814981
Me80	1101.27085868	67.6724295871
Me120	1101.27085868	76.1413540706
Br	40.7359338083	11.6543805789

Charges Unif. Reparties

* Systeme	Mmax positif	Mmax negatif *
A	573.844233347	164.310137459
Mc80	95.5124264135	158.035733615
Mc120	152.819882262	252.857173785
D	15357.618872	4393.91800205
E	23036.428308	6590.87700308

Charges ponctuelles

* Systeme	Mmax Positif	Mmax Negatif *
Bc	586.817835834	199.533940857
Bt	448.335336037	186.268286192
Me80	298.088302937	191.088245161
Me120	447.132454406	191.088245161
Br	70.0582903631	18.7027024904

Charges Uniformes

* Systeme	Mmax Negatif	Mmax Positif *
A	543.267389157	182.159994292
Mc80	589.383258679	227.927477128
Mc120	1204.90257079	307.683442061
D	22402.2842616	7050.97381349
E	33603.4263924	10576.4607202

Charges ponctuelles

* Systeme	Mmax Positif	Mmax Negatif *
Bc	669.218778529	131.823708597
Bt	364.131737352	127.668862571
Me80	241.67516376	127.027373265
Me120	362.51274564	127.027373265
Br	57.132202608	14.5473142771

Charges Uniformes

* Systeme	Mmax Negatif	Mmax Positif *
A	357.057853571	182.392493447
Mc80	273.310984722	70.2833436167
Mc120	571.760240228	70.2833436167
D	17262.9215716	5484.39884382
E	25894.3823575	8226.59826572

EFFORT TRANCHANT -Travee 1 2

Charges ponctuelles

```

*****
* Systeme          Appui 1                      Appui 2          *
*****
Bc      :          101.282931417                :          -95.4124822328
Bt      :          63.2864170881                :          -62.9931361672
Me80    :          43.2513898493                :          -42.6837999722
Me120   :          64.877084774                :          -64.0256999583
Br      :          9.89428802128                :          -9.89428802128
    
```

Charges uniformes

```

*****
* Systeme          Appui 1                      Appui 2          *
*****
A      :          83.8363016846                :          -73.6874711126
Mc80   :          641.945380715                :          34.8795214281
Mc120  :          922.27449941                :          57.9816243894
D      :          3424.65920064                :          -3270.71366087
E      :          5136.98880096                :          -4906.0704913
    
```

EFFORT TRANCHANT -Travee 3 4

Charges ponctuelles

```

*****
* Systeme          Appui 3                      Appui 4          *
*****
Bc      :          153.216475846                :          -142.309583522
Bt      :          63.3281441965                :          -62.9699940636
Me80    :          43.3280877815                :          -42.6539234383
Me120   :          64.9921316722                :          -63.9808851575
Br      :          9.88550476762                :          -9.88550476762
    
```

Charges uniformes

```

*****
* Systeme          Appui 3                      Appui 4          *
*****
A      :          75.5735841382                :          -64.4480483808
Mc80   :          374.953659794                :          -236.920029066
Mc120  :          658.667274919                :          -503.957811462
D      :          3464.9568176                :          -3247.84943287
E      :          5197.4352264                :          -4871.7741493
    
```


REACTION DE L'APPUI 2

(t)

* Charges Ponctuelles		*	Charges uniformes		*
* Systeme	Rmax	*	Systeme	Rmax	*
Bc	: 115.014088818	*	A	: 159.710056274	
Bt	: 65.099541038	*	Mc80	: 398.323782073	
Me80	: 44.7263033685	*	Mc120	: 833.962264899	
Me120	: 67.0894550527	*	D	: 4096.77236143	
Br	: 9.78051018067	*	E	: 6145.15854215	

REACTION DE L'APPUI 3

(t)

* Charges Ponctuelles		*	Charges uniformes		*
* Systeme	Rmax	*	Systeme	Rmax	*
Bc	: 115.174838311	*	A	: 158.817130888	
Bt	: 65.3263853728	*	Mc80	: 445.759238448	
Me80	: 44.8707250128	*	Mc120	: 630.611722578	
Me120	: 67.3060875192	*	D	: 4094.10098298	
Br	: 9.77752638052	*	E	: 6141.15147447	

REACTION DE L'APPUI 4

(t)

* Charges Ponctuelles		*	Charges uniformes		*
* Systeme	Rmax	*	Systeme	Rmax	*
Bc	: 115.189443026	*	A	: 158.746777671	
Bt	: 65.3460607924	*	Mc80	: 398.242182989	
Me80	: 44.8832498079	*	Mc120	: 590.936780173	
Me120	: 67.3248747118	*	D	: 4093.89990571	
Br	: 9.77730752732	*	E	: 6140.84985857	

REACTION DE L'APPUI 1

(t)

* Charges Ponctuelles		*	Charges uniformes		*
* Systeme	Rmax	*	Systeme	Rmax	*
Bc	: 113.982759502	*	A	: 191.964860562	
Bt	: 63.6220568093	*	Mc80	: 462.847171243	
Me80	: 43.6287663846	*	Mc120	: 649.175897464	
Me120	: 65.4431495769	*	D	: 4129.4673724	
Br	: 9.81703466228	*	E	: 6194.2010586	

FLECHE DE LA SECTION 17.5 (m)

TRAVEE 0 1

* Charges Ponctuelles		*	Charges Uniformes		*
* Systeme	Fmax	*	Systeme	Fmax	*
Bc	: .00972817559694	*	A	: .00821418853302	
Bt	: .00601741924009	*	Mc80	: .0495850952656	
Me80	: .00413697572756	*	Mc120	: .0495850952656	
Me120	: .00620546359134	*	D	: .360705230926	
Br	: .000942323238908	*	E	: .541057846389	

FLECHE DE LA SECTION 17.5 (m)

TRAVEE 3 4

* Charges Ponctuelles		*	Charges Uniformes		*
* Systeme	Fmax	*	Systeme	Fmax	*
Bc	: .00523425083687	*	A	: .00401936199249	
Bt	: .00343032574063	*	Mc80	: .0307698588249	
Me80	: .00235834894668	*	Mc120	: .0307698898793	
Me120	: .00353752342002	*	D	: .18939527932	
Br	: .000511458626612	*	E	: .284092918979	

FLECHE DE LA SECTION 17.5 (m)

TRAVEE 2 3

* Charges Ponctuelles		*	Charges Uniformes		*
* Systeme	Fmax	*	Systeme	Fmax	*
Bc	: .00525930192083	*	A	: .00404507702624	
Bt	: .00344546651494	*	Mc80	: .024078833057	
Me80	: .00236875822902	*	Mc120	: .0240794847676	
Me120	: .00355313734353	*	D	: .190445257505	
Br	: .000514099020183	*	E	: .285667886257	

ROTATION DE L'APPUI 1

Charges Ponctuelles

* Systeme	Rmax Negatif	Rmax Positif *
Bc	.000452813027992	.000842196278402
Bt	.00028270010731	7.34994743235E-5
Me80	.000191974822202	4.32945277659E-5
Me120	.000287962233303	6.49417916488E-5
Br	4.41893095335E-5	7.85642738012E-5

Charges Uniformes

* Systeme	Rmax Negatif	Rmax Positif *
A	.000383427371256	.000680175863453
Mc80	.00495850952656	.00184701339233
Mc120	.00743776428984	.00277052008849
D	.0166915882135	.0296189621545
E	.0250373823203	.0444284432317

ROTATION DE L'APPUI 3

Charges Ponctuelles

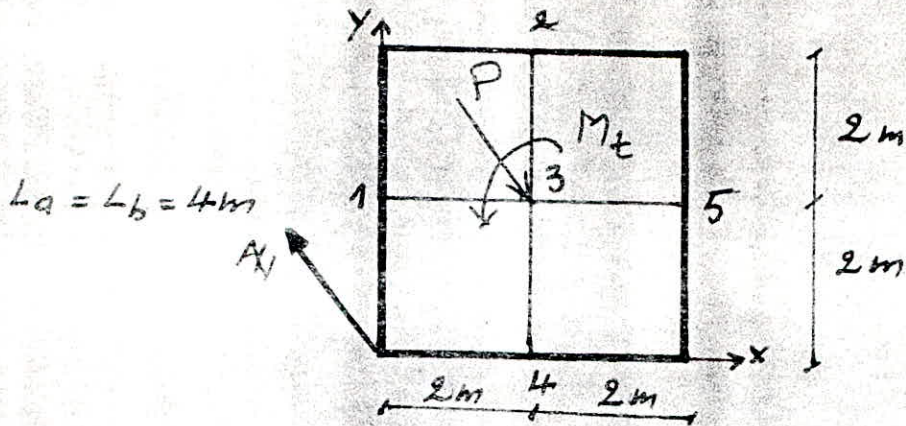
* Systeme	Rmax Negatif	Rmax Positif *
Bc	.00028608188643	.000789806769001
Bt	.000184142440312	5.23576002946E-5
Me80	.000125799859468	3.08040502571E-5
Me120	.000188699789202	4.62060753857E-5
Br	2.89536354455E-5	7.36770766941E-5

Charges Uniformes

* Systeme	Rmax Negatif	Rmax Positif *
A	.000264863970106	.000717598513337
Mc80	.00273307531668	.00338322105804
Mc120	.00409961297501	.00507483158707
D	.0105572104745	.0277764821342
E	.0158358157117	.0416647232013

Exemple tiré de L'aide - mémoire :

Resistance des matériaux (page 91)



$P = 10t$
 $M_t = 5t.m$

***** DONNEES SUR LES NOEUDS *****

NOEUD	ABSCISSE	ORDONNEE
1	0	2
2	2	4
3	2	2
4	2	0
5	4	2

***** DONNEES SUR LES BARRES *****

Barre	Nd. i	Nd. j	Rig. i	Rig. j	Inert. x E	G x Ip
1	3	1	1	1	1	.5
2	3	2	1	1	1	.5
3	3	4	1	1	1	.5
4	3	5	1	1	1	.5

***** DEPLACEMENTS GLOBAUX *****

NOEUD	DEPLAC. Z	ROTATION X	ROTATION Y
1	-2.5E-28	2.5E-28	5.E-28
2	-2.5E-28	2.5E-28	5.E-28
3	-.0006666666666666667	.0005	.0005
4	-2.5E-28	2.5E-28	5.E-28
5	-2.5E-28	2.5E-28	5.E-28

***** RESIDUS DE RESOLUTION ET REACTIONS *****

NOEUD	F(Z)	M(X)	M(Y)
1	2.5	-2.5	-5
2	2.5	-2.5	-5
3	3.5527137013E-15	-2.5E-24	-5.E-24
4	2.5	-2.5	-5
5	2.5	-2.5	-5

***** FORCES INTERNES DANS LES BARRES *****

BARRE	MOMENT-I	M-TORS	MOMENT-J
1	0	2.5	-5
2	0	2.5	-5
3	0	2.5	-5
4	0	2.5	-5

-10-

B I B L I O G R A P H I E

- Introduction au basic ; J.LEBHEU
- Introduction à l'analyse numérique , J.BARANGER.
- Elément de calcul numérique; B. DEMIDOVITCH.
- Méthodes numériques appliquées; M.BOUMAHRAT;A GOURDIN
- Résistance des matériaux ;J COURBON.
- Résistance des matériaux appliquées ; M. ALBIGES, A .Coin.
- Cours de mécanique de construction; V.KOUZNETSOV, A.DARKOV.
- Grands batiments(Contreventements dynamique des structures,calcul automatique) ; M.LAREDO.
- Aide mémoire résistance des matériaux ; DUNOD.
- Résistance des matériaux revue du C.H.E.C J.TRINH.
- Bétons précontraint application revue du C.H.E.C J.L BRAULT.
- Structures.Cours de ; M.BARAKA.

