



Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Civil  
Laboratoire Construction et Environnement

LCE

## Thèse de Doctorat D'état en Génie Civil Option : Structure

Présenté par :

**Abderrazak Menasri**

Diplôme d'études approfondies de l'université de Nancy II  
Magister en Mécanique des sols de l'Université Mohamed Boudiaf M'sila

# Simulation du mouvement fort via la technique ARMA. Applications au comportement non linéaire des sols de fondations.

Soutenu publiquement le **18 /07/2012** devant le jury composé de :

<b>Président :</b>	Mr Berrah Mounir	Professeur à l'ENP Alger
<b>Rapporteur :</b>	Mr Bali Abderrahim	Professeur à l'ENP Alger
	Mr Roger Frank	Professeur à l'ENPC Paris (France)
<b>Examineurs :</b>	Mr Belkacemi Smain	Professeur à l'ENP Alger
	Mr Hadid Mohamed	Professeur à l'ENSTP Alger
	Mr Laouami Nacer	Directeur de Recherche CGS Alger
<b>Invité :</b>	Mr Belazougui Mohamed	D.G CGS Alger

**ENP 2012**

## **Remerciements**

Cette thèse est le fruit de quelques années de travail effectuées au sein du Centre d'Etudes et de Recherche en Mécanique des Sols (CERMES) à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées de Paris. Même si elle porte le nom de son auteur, elle est aussi le résultat de la combinaison presque magique de diverses contributions. Et je voudrais ici remercier les nombreuses personnes qui, à des titres divers, ont participé à son élaboration.

Le bon déroulement de cette thèse, jusqu'à son heureux dénouement, sont en grande partie imputables à mes directeurs de thèse les Professeurs Abderrahim Bali et Roger Frank. Ils ont suggéré ce travail, l'ont dirigé et accompagné me laissant une certaine liberté d'action. J'ai d'ailleurs beaucoup apprécié la confiance qu'ils ont placée en moi. Je les remercie vivement et chaleureusement pour leurs disponibilités, leurs dynamismes et leurs patiences.

Ces remerciements sont à partager avec Monsieur Malek Brahimi, Professeur au collège of technology université de Newyork city, qui s'est impliqué de manière remarquable dans cette thèse et lui a donné sa dimension actuelle, grâce à ses conseils experts et ses relectures approfondies.

Merci également à Monsieur Berrah Mounir, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, pour m'avoir honoré par sa présidence du jury.

Je suis extrêmement reconnaissant à Monsieur Belkacemi Smain, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, à Monsieur Hadid Mohamed, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics d'Alger et à Monsieur Louami Nacer Directeur de Recherche au CGS Alger, d'avoir accepté d'être les examinateurs de cette thèse. Je remercie Monsieur Belazougui Mohamed d'avoir accepté d'assister à cette soutenance comme invité.

Je tiens, enfin, à adresser un grand remerciement aux chercheurs du CERMES de Paris et de l'ECP de Paris en particulier aux Professeurs Pierre Delage, Jean Canou, Behrouz, ainsi que tous mes collègues de l'Association Française de Génie Parasismique (AFPS) et du Comité Français de Mécanique des sols (CFMS).

## محاكاة الحركات القوية بواسطة نماذج ARMA تطبيقات على السلوك الغير خطي لتربة الاساسات.

### ملخص:

تحليل حركة زلزالية بدلالة الزمن يتطلب عدد كبير من التسجيلات للحركة الزلزالية وذلك لضمان تغطية كافية للمشكلة. في هذه الدراسة تم تطوير أسلوب المحاكاة الذي يتمثل في تحديد الزلازل المقاسة بواسطة نماذج ARMA، ثم توليد زلازل اصطناعية، بالاعتماد على فرضية أن زلزالا ملاحظا هو انجاز من بين مجموعة من العمليات التي يمكن توليدها عن طريق عمليات عشوائية متميزة بنموذج ARMA. ديناميكية التفاعل بين التربة والهيكل تمت دراستها على نطاق واسع بافتراض أن التربة لديها سلوك خطية، لكن في الزلازل ذات الشدة المعتدلة فإن إجهاد القص الأعظمي يمكنه أن يبلغ الحدود المرنة للتربة. من وجهة نظر التفاعل بين التربة والهيكل، فإن الآثار غير الخطية يمكنها أن تغير من صلابة التربة عند قاعدة البناية وكذلك كمية الطاقة المبددة في التربة. لذلك، فإن تجاهل أو إهمال الخصائص غير الخطية للتربة في التفاعل بين التربة وهيكل ديناميكي يمكنه أن يؤدي إلى توقعات خاطئة لاستجابة البنية. الهدف من هذه الدراسة هو تبيان تأثير عدم خطية التربة على التفاعل بين التربة وهيكل ديناميكي. المقارنة بين الحساب الخطي وحساب غير الخطي (وفق القانون قطع مكافئ) لنموذج تربة-أساس معرض للاهتزازات شاقولية يؤكد أنه في مسألة تفاعل ديناميكي تربة-هيكل، فإن التربة يكون لديها سلوك غير خطي عالي في المنطقة القريبة من الهيكل، هذا السلوك يتسبب في ولوج الأساس في الأرض والتي لا يمكن إلا أن تحسب انطلاقا من قانون غير خطي. الحساب الخطي لنموذج تربة-أساس معرض للاهتزازات أفقية توفر لنا نتائج مثيرة للاهتمام. ومع ذلك فإن بعض الظواهر المتأينة من السلوك غير الخطي للتربة لا يمكن تفسيره من خلال الحسابات الخطية ويمكن لحساب غير الخطي أن يعطي نتائج مرضية أكثر.

**المفاتيح:** نموذج ARMA، محاكاة، تفاعل، تربة-هيكل، والآثار غير الخطية الاستجابة، القانون قطع مكافئ.

### Simulation du mouvement fort via la technique ARMA.

#### Applications au comportement non linéaire des sols de fondations

#### Résumé :

L'analyse du mouvement sismique en fonction du temps nécessite plusieurs enregistrements du mouvement sismique afin d'assurer une couverture convenable du problème. Dans cette étude une méthode de simulation a été développée qui consiste à identifier les séismes mesurés par les modèles ARMA, puis générer les séismes artificiels, en se basant sur l'hypothèse qu'un séisme observé est une réalisation parmi un ensemble de processus qui peuvent être générés par des processus stochastiques caractérisé par un modèle ARMA. L'interaction dynamique sol-structure a été largement explorée en supposant le comportement linéaire du sol. Néanmoins, pour des séismes d'intensité modérée, la contrainte de cisaillement maximale peut facilement atteindre la limite élastique du sol. Du point de vue de l'interaction sol-structure, les effets non linéaires peuvent modifier la rigidité du sol à la base de la structure ainsi que la quantité d'énergie dissipée dans le sol. En conséquence, l'ignorance des caractéristiques non linéaires du sol dans l'interaction dynamique sol-structure (IDSS) peut conduire à des prédictions erronées de la réponse de la structure. Le but de ce travail est d'examiner l'effet de la non linéarité du sol sur l'interaction dynamique sol-structure. La comparaison entre le calcul linéaire et le calcul non-linéaire (la loi hyperbolique) d'un modèle sol-fondation soumis à des vibrations verticales confirme que, dans un problème d'interaction dynamique sol-structure, le sol a un comportement fortement non-linéaire dans la zone située à proximité de la structure. Ce comportement non-linéaire du sol provoque l'enfoncement de la fondation dans le sol qui ne peut être calculé qu'à partir d'une loi non-linéaire. Un calcul linéaire du modèle sol-fondation soumis à des vibrations horizontales peut nous fournir des résultats intéressants. Néanmoins, certains phénomènes provenant du comportement non-linéaire des sols ne peuvent pas être interprétés par un calcul linéaire. Un calcul non-linéaire peut donner des résultats plus satisfaisants.

**Mots-clés :** modèle ARMA, simulation, sol-structure, interaction, effet de la non linéarité, réponse, loi hyperbolique

#### Strong motion simulation technique via ARMA. Applications to nonlinear behavior of Soil foundations

#### Abstract:

The analysis of seismic motion over time requires more records of seismic motion to ensure adequate coverage of the problem. In this study a simulation method was developed which consists of identifying earthquakes measured by the ARMA model, then generate artificial earthquakes, based on the assumption that an earthquake is an observed realization of a set of processes that can be generated by stochastic processes characterized by an ARMA model. The dynamic soil-structure interaction has been extensively explored assuming linear soil behavior. However, for earthquakes of moderate to severe, the maximum shear stress can easily reach the elastic limit of the soil. From the point of view of the soil-structure interaction, non-linear effects may modify the stiffness of the soil at the base of the structure and the amount of energy dissipated in the soil. Consequently, the ignorance of the non-linear characteristics of the soil in the dynamic soil-structure interaction (DSSI) can lead to erroneous predictions of the response of the structure. The aim of this study is to examine the effect of soil nonlinearity on dynamic soil-structure interaction. The comparison between the linear calculation and the calculation nonlinear (hyperbolic law) of a model soil-foundation subjected to vertical vibration confirms that in a problem of dynamic soil-structure interaction, soil behavior is highly non-linear in the area near the structure. This non-linear behavior of the soil causes the sinking of the foundation in the ground which can only be calculated from a nonlinear law. A linear calculation model soil-foundation subjected to horizontal vibrations can provide us with interesting results. Nevertheless, some phenomena from the nonlinear behavior of soils can not be interpreted by a linear calculation. A nonlinear calculation can give more satisfactory results.

**Keywords:** ARMA model, simulation, soil-structure, interaction, non-linear effects, response, hyperbolic law.

## TABLE DES MATIERES

<b>Introduction</b>	1
<b>Chapitre 1 : Étude bibliographique</b>	<b>4</b>
1.1 Concepts de base et contexte bibliographique	4
1.2. Objectifs.	11
1.3 Présentation du mémoire.	12
<b>Chapitre 2 : Généralités</b>	<b>15</b>
2.1 Généralités sur les processus stochastiques uni-variés : Rappels	15
2.2 Présentations des Modèles Autorégressifs Moyennes Mobiles : ARMA	17
2.2.1 Domaine fréquentiel	17
2.3 Domaine temporel.	21
<b>Chapitre 3 : Les Séries de temps</b>	<b>25</b>
3.1 Séries chronologiques : définitions et exemples	25
3.1.1. Définition	27
3.1.2. Objectifs principaux d'étude d'une série de temps	28
3.1.3. Modélisation.	29
3.1.4 Tendance et saisonnalités	30
3.1.4.1 Elimination du trend en l'absence de saisonnalité	31
3.1.4.2. Estimation paramétrique	31
3.1.4.3 Estimation non paramétrique	32
3.1.4.4 Méthode des différences	33
3.1.5 Processus stationnaires	33
3.1.6 Bruit blanc	34
3.2 Processus linéaires	36
3.2.1. Processus linéaires et processus linéaires généraux	37
3.2.2 Processus ARMA	38
3.2.2.1 Processus MA(q)	39
3.2.2.2 Processus AR(p): stationnarité et causalité	40
3.2.2.3 Inversibilité	41
3.2.2.4 Autocovariance des processus ARMA.	41
3.3 Filtre de Kalman	42
3.3.1. Présentation espace d'état	43
3.3.2 Présentation espace d'état avec paramètres stochastiques	43
3.4 Filtre passe-bas.	44
<b>Chapitre 4. Estimation, tests de validation et prévision des processus ARMA</b>	<b>46</b>
4.1 Les méthodes d'estimation des paramètres du modèle ARMA.	46
4.1.1. Estimation des paramètres autorégressifs : les équations de Yule-Walker	46
4.1.2. Estimation par maximum de vraisemblance	49
4.1.2.1 Approche courante	49
4.1.3. Méthode des moindres carrés	51
4.1.3.1. Présentation de la méthode	52
4.1.4. Méthode des moments	55
4.1.5. Méthode d'autocovariance	55
4.2. Prédiction	55
4.2.1. Equations linéaires de prédiction	55
4.2.2. Algorithme de Durbin-Levinson	56
4.2.3. Prédiction d'un processus autorégressif	58

4.2.4.	Prédiction d'un processus ARMA	58
4.3	Ajustement d'un modèle ARMA	59
4.3.1	Choix de l'ordre d'un modèle par les fonctions d'autocorrélation	59
4.3.1.1	Autocorrélation d'un modèle MA(q)	60
4.3.1.2	Autocorrélation partielle d'un modèle AR(p)	61
4.3.1.3.	La fonction d'autocorrélation partielle	61
4.3.1.4.	La fonction d'autocorrélation partielle d'un processus autorégressif	62
4.3.1.5	La fonction d'autocorrélation partielle: définition et normalité asymptotique	63
4.3.1.6	Cas des modèles mixtes ARMA	64
4.4.	Critères automatiques	64
4.4.1	Estimation des paramètres du modèle	65
4.4.2	Sélection de l'ordre du Modèle	65
4.4.3	Le critère FPE (processus autorégressifs purs)	66
4.4.4.	Le critère AIC	68
4.4.5	Relation entre les différents ordres de model	69
4.4.6	Choix de l'ordre d'un modèle ARMA	71
4.4.6.1	Exemple de test des critères de sélection de l'ordre	72
4.5.	Tests sur les résidus	74
4.5.1.	Théorème central limite pour les résidus	74
4.5.2.	Le test Portemanteau	74
4.6	Prévision des processus non stationnaires	75
4.6.1	Analyse Box-Jenkins	75
4.6.1.1	Processus ARIMA	76
4.6.1.2	Processus SARIMA	77
<b>Chapitre 5 : Formulation du modèle ARMA et procédure de modélisation application aux séismes</b>		<b>79</b>
5.1.	Modèle autorégressif (AR)	79
5.1.1.	La valeur de l'espérance et de la variance	79
5.1.2.	Fonction d'autocorrélation	80
5.1.3.	Fonction d'autocorrélation partielle	80
5.1.4.	Condition de stationnarité	80
5.2.	Modèle a moyenne glissante (MA)	80
5.2.1.	Propriétés du modèle MA(q).	81
5.3.	Modèle autorégressif à moyenne mobile ARMA (p, q)	81
5.3.1	Propriétés du modèle ARMA (p, q)	81
5.4	La fonction de modulation.	85
5.5	La fonction enveloppe.	87
<b>Chapitre 6 : Applications et résultats.</b>		<b>89</b>
6.1	Formulation du modèle ARMA.	89
6.2	Simulation du séisme de Chlef	89
6.3	Procédure de modélisation	89
6.3.1	Fonction de modulation	92
6.3.1.1	Détermination de la fonction de modulation	92
6.3.2	Fonction enveloppe	94
6.3.3	Détermination de la série de temps stabilisée	97
6.4	Détermination des modèles ARMA	97
6.4.1	La fonction d'autocorrélation	97
6.4.2	La fonction d'auto corrélation partielle.	97

6.4.3	Le critère AIC	101
6.4.4	Simulation des séismes	104
6.5	Méthode d'analyse : calcul de la réponse sismique d'une couche de sol par la méthode des éléments finis.	108
6.5.1	calcul d'une couche de sol par la méthode des éléments finis.	108
6.5.2	Le choix de la loi de comportement	110
6.5.3	Modèle hyperbolique de Duncan	111
6.5.4	Modèle hyperbolique de Hardin et Drnevich	111
6.5.5	Algorithme utilisé pour le calcul non linéaire	112
6.5.6.	Choix de l'étape de temps et la dimension de la maille	112
6.5.7	Maillage utilisé	113
6.5.8	Propriétés du sol	113
6.5.9	Réponse sismique du profil de sol et résultats.	113
6.6	Simulation du séisme de Boumerdes.	116
6.6.1	Les données sismiques	116
6.6.2	Formulation du modèle ARMA.	116
6.6.2.1	Test concernant les paramètres	117
6.6.2.2	Test de la nullité de la moyenne des résidus $(e_t)_{t \in Z}$	117
6.6.2.3	Test individuel de bruit blanc .	118
6.6.2.4	Test global de bruit blanc : Test portmanteau	118
6.6.3	Procédure de modélisation	119
6.6.4	L'estimation des paramètres de la fonction enveloppe	120
6.6.5	Le modèle ARMA et ses paramètres	122
6.6.6	Qualité d'ajustement	124
6.6..6.1	Validation	125
6.6.7	Critère AIC	127
6.6.8	Un exemple de simulation	128
6.7	Application du modèle ARMA pour mesurer le potentiel de destruction des séries temporelles d'accélération pour nord de l'Algérie.	132
6.7.1	Mesure des dommages.	132
6.7.2	Les résultats numériques.	134
<b>Chapitre 7 : Interaction Sol-Structure</b>		<b>136</b>
7.1	Notion d'Interaction Sol-Structure (ISS)	136
7.1.1	Les phénomènes physiques dus à l'interaction sol-structures	137
7.1.2	Fonctions d'impédance.	137
7.1.3	Formulation d'un problème d'interaction sol-structure	138
7.1.4	Les différentes méthodes pour prendre en compte l'ISS	139
7.2.	Modélisations-Analyse dimensionnelle et lois de similitude	147
7.2.1	Modèles et simulations.	147
7.2.2	L'élaboration d'un modèle	148
7.2.3	Expérimentations dynamiques sur table vibrante	149
7.2.4	Lois de similitude pour les essais sur table vibrante	150
7.2.5	Description du model analogique.	151
7.2.6	Essais sur modèles réduits	152
7.2.7	Dispositif expérimental	154
7.3	Calcul d'un modèle sol-fondation soumis aux vibrations verticales.	156
7.3.1	Maillage utilisé	157
7.3.2	Conditions aux limites	157

7.3.3	Propriétés des matériaux	157
7.3.4	Accéléogramme	159
7.3.5	Résultats	159
7.4.	Calcul des modèles sol-fondation soumis à des vibrations horizontales	161
7.4.1	Dispositif expérimental.	162
7.4.2	Expériences	162
7.4.3	Calcul	163
7.4.4	Calcul de la première catégorie d'expériences	165
7.4.5	Calcul de la deuxième catégorie d'expériences	168
7.4.6	Discussion	179
7.4.7	comparaisons avec l'expérience	179
	Conclusions	182
	Références bibliographique	184

## Liste des figures

1.1	La fonction FPE d'une série.	67
1.2	Sorties d'accélération mesurée à partir de la table vibrante .Longueur de données A et B	72
1.3	Longueur de données A: sélection de modèle d'ordre dans chaque cas de la prédiction finale. Erreur Critère (FPE), le critère d'information d'Akaike (AIC), l'AIC bayésien (BIC) et le critère bayésien de Schwarz (SBC).	73
1.4	Longueur de données B: sélection du modèle d'ordre dans chaque cas de la prédiction finale. Erreur Critère (FPE), le critère d'information d'Akaike (AIC), l'AIC bayésien (BIC) et le critère bayésien de Schwarz (SBC).	73
2.1	Torsion de la voie ferrée Alger- Oran (séisme du 10/10/1980). (séisme du 10/10/1980).	88
2.2	La liquéfaction du sol aux abords de la vallée des Issers (séisme du 21/05/2003).	88
2.3	Les différentes failles observées à Chlef lors du séisme du 10-10-1980 et stations d'enregistrements.	90
2.4	Procédure de modélisation	93
2.5	Fonction de modulation et enveloppe (Chlef-1)	95
2.6	Fonction de modulation et enveloppe (Chlef-2)	95
2.7	Fonction de modulation et enveloppe (Chlef-3)	96
2.8	Fonction de modulation et enveloppe (El Attaf)	96
2.9	Fonction d'autocorrélation (Chlef-1)	99
2.10	Fonction d'autocorrélation (Chlef-2)	99
2.11	Fonction d'autocorrélation (Chlef-3)	100
2.12	Fonction d'autocorrélation (El attaf)	100
2.13	Fonction d'autocorrélation partielle (Chlef-1)	102
2.14	Fonction d'autocorrélation partielle (Chlef-2)	102
2.15	Fonction d'autocorrélation partielle (Chlef-3)	103
2.16	Fonction d'autocorrélation partielle (El attaf)	103
2.17	Séismes Naturels	106
2.18	Séismes Artificiels.	106
2.19	Spectre de réponse de la série temporelle pour un taux d'amortissement = 0,05	107
2.20	Maillage	113
2.21	le déplacement de la couche de sol soumise au séisme d'El Attaf pour les séismes réels et artificiels (cas linéaire et non linéaire).	114
2.22	résultats de déplacement de la couche de sol soumise aux quatre événements pour les séismes réels et artificiels.	114
2.23	la contrainte de cisaillement à un instant quelconque pour la couche de sol considérée sujette aux 4 séismes, réels et artificiels dans le cas linéaire et non linéaire.	115
3.1	Fonction de modulation et enveloppe Affroun ew	121
3.2	Fonction de modulation et enveloppe Affroun ns	122
3.3	Fonction de modulation et enveloppe Affroun V	122
3.4	Fonction d'autocorrélation (Af-ew)	123
3.5	Fonction d'autocorrélation (Af-ns)	124
3.6	Fonction d'autocorrélation (Af-ew)	124
3.7	Séisme naturel Affroun-ew	129
3.8	Séisme naturel Affroun-ns	130
3.9	Séisme naturel Affroun-v	130
3.10	Séisme simulé Affroun-ew	131
3.11	Séisme simulé Affroun-ns	131
3.12	Séisme simulé Affroun-v	132
3.13	Système d'un seul degré de liberté.	135
3.14	Spectre de l'indice de dommages	135
3.15	la moyenne des indices des spectres de dommages d'un échantillon de 20 tremblements de terre générés pour chaque séisme	135

3.16	l'indice moyen des spectres de dommages pour un échantillon de tremblement de terre simulé de Boumerdes produit par 20 tremblements de terre pour un système élasto-plastique et pour différentes valeurs de rapport de force	135
4.1	Théorème de superposition pour l'interaction sol-structure.	139
4.2	Représentation schématique d'un calcul interaction sol-structure méthode globale.	140
4.3	Principe de superposition de Kausel	141
4.4	Méthode des sous-structures : Méthode de frontière	144
4.5	Méthode des sous-structures : Méthode de volume	146
4.6	Décomposition en champ proche et champ lointain pour la définition de la frontière du macro-élément d'ISS.	147
4.7	La table vibrante Vésuve.	154
4.8	La table vibrante Tounesol	155
5.1	Maillage.	158
5.2	Histoires de déplacement vertical pour différents points indiqués situé sur la surface du massif (le déplacement négatif représente le déplacement vers le bas)	160
5.3	Histoires de déplacement vertical pour différents points indiqués situé sur une ligne horizontale à 15 cm de la surface	160
5.4	Histoires de contrainte verticale pour différents points indiqués situés sous la fondation.	161
5.5	Histoires de contrainte verticale pour différents points situés à la limite inférieure de la couche.	161
6.1	Vue de l'ensemble (la forme et les dimensions de la fondation indiquées sur la figure ne sont pas représentatives pour toutes les expériences	162
6.2	Montage expérimental.	163
6.3	Montage expérimental 2ème catégorie d'expériences	163
6.4	Maillage	165
6.5	Champs des déplacements pour $t=0.1s$	167
6.6	Champs des déplacements pour $t=0.1$ seconde.	167
6.7	Variation de la distribution des pressions dynamiques (totales) exercées sur l'écran, en fonction du temps.	168
6.8	Maillage.	169
6.9	Visualisation des nœuds pour lesquels les variations de l'accélération et du déplacement horizontaux sont définies.	170
6.10	Visualisation des lignes verticales le long desquelles on a déterminé les variations de déplacement ou d'accélération (chaque ligne est déterminée par les nœuds qui sont situés à des extrémités).	170
7.1	Champs des déplacements pour $A_{max} = 0.1g, 0.4g$ et $0.8g$ (25DT)	171
7.2	Variation de déplacement horizontal en fonction du temps pour le nœud 127	172
7.3	Variation d'accélération horizontale en fonction du temps pour le nœud 127	172
7.4	Variation d'accélération horizontale en fonction du temps pour le nœud 156	173
7.5	Variation d'accélération horizontale en fonction du temps pour le nœud 274	173
7.6	Variation de contrainte au long de la paroi latérale droite (25DT).	174
7.7	Variation de déplacement au long de la ligne verticale qui relie les nœuds 10 et 14 (25DT)	174
7.8	Variation de déplacement au long de la ligne verticale qui relie les nœuds 66 et 70 (25 DT)	175
7.9	Variation de déplacement au long de la ligne verticale qui relie les nœuds 155 et 159 (25DT)	175
7.10	Variation d'accélération au long de la ligne verticale qui relie les nœuds 10 et 14 (25DT).	176
7.11	Variation d'accélération au long de la ligne verticale qui relie les nœuds 66 et 70 (25 DT)	176
7.12	Variation d'accélération au long de la ligne verticale qui relie les nœuds 155 et 159 (25 DT)	177
7.13	Variation de l'accélération à la surface du massif. (T=25DT, 75DT, 125DT, 175DT)	177
7.14	Iso-accélération horizontale. (25DT) ; (75DT) ; (125DT) ; (175DT)	178
7.15	Variation du facteur de l'accélération en fonction de l'accélération de la table obtenue par l'expérience et par le calcul pour le point indiqué)	180
7.16	Variation du facteur de l'accélération en fonction de l'accélération de la table (obtenue par l'expérience et par le calcul pour le point indiqué)	181

## Liste des tableaux

01	Ordres optimaux sélectionnés dans le cas d'une longueur de données	74
02	caractéristiques des séismes réels.	89
02a	Les paramètres de la fonction Enveloppe.	94
03	Caractéristiques des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle	98
04	Application des critères AIC aux différents modèles ARMA	104
05	Paramètres des modèles retenus.	104
06	caractéristiques des séismes réels et celle des séismes simulés.	105
07	Paramètres du séisme du 21 Mai selon différents centres.	116
08	caractéristiques des séismes réels.	119
09	Les paramètres de la fonction enveloppe.	121
10	SSE- R carré- R au carré ajusté et le RMSE des paramètres de la fonction Enveloppe	121
11	Caractéristiques de l'échantillonnage	125
12	Résultats numériques de quelques critères statistiques pour le séisme d'el Affroun	125
13	Les coefficients ARMA et l'écart type du bruit blanc $\sigma_w$ , data variable StaAfr e-w	126
14	Les coefficients ARMA et l'écart type du bruit blanc $\sigma_w$ , data variable: StaAfr-ns	126
15	Les coefficients ARMA et l'écart type du bruit blanc $\sigma_w$ , data variable: StaAfr-V	127
16	Application des critères AIC aux différents modèles ARMA	127
17	Paramètres des modèles retenus	128
18	Caractéristiques des séismes réels et celle des séismes simulés.	129
19	Caractéristiques de la table Vésuve	155
20	Caractéristiques de la table Tounesol	156
21	Coefficients de la loi de Duncan pour le matériau utilisé	157
22	Propriétés mécaniques de la fondation	158
23	Description des 4 modèles.	164
24	Fréquence de chaque modèle pour trois modes	164
25	Coefficients de la loi hyperbolique pour le matériau utilisé	166
26	Propriétés mécaniques de la fondation	166

**Introduction**

La statistique se préoccupe de porter des jugements sur une population à partir de l'observation d'un échantillon de cette population. Si on prend l'exemple des données d'enquête, l'ordre dans lequel sont échantillonnées les observations n'a pas d'importance. On peut quand même parfois accorder de l'importance aux unités qui sont échantillonnées. La dimension temporelle prend de l'importance quand on décide d'analyser la série à chaque pas de temps on peut alors étudier son évolution dans le temps.

Dans le domaine de la statistique dénommée analyse des séries temporelles, la dimension temporelle des observations devient primordiale. Une série temporelle est définie comme une suite d'observations indexées par le temps. L'attention va se focaliser sur les propriétés évolutives d'une variable aléatoire, tant pour sa prévision que dans sa relation avec son passé. Comme exemple de série temporelle, viennent immédiatement à l'esprit toutes les séries macroéconomiques, mais aussi les séries sismiques.

Les séries temporelles peuvent être observées de manière continue ou de manière discrète. Les modèles de la sismicité par exemple reposent souvent sur une hypothèse de temps continu. Par contre les données macroéconomiques sont typiquement des données observées en temps discret à un intervalle du mois, du trimestre ou même de l'année.

Un accélérogramme sismique ne peut pas contenir assez d'informations pour représenter les caractéristiques du phénomène sismique pour l'analyse de la réponse. Alors la construction de séismes artificiels par simulation est devenue un outil important en génie sismique. Les accélérations simulées sont facilement utilisées pour calculer la réponse d'une structure dans le cas linéaire ou non linéaire.

Dans les études sismiques le mouvement du sol est généralement décrit par des paramètres tels que la magnitude, la distance de l'épicentre et les conditions locales du sol. Les propriétés importantes du mouvement de sol pour prédire la réponse sont l'amplitude, le contenu des fréquences et la durée du mouvement sismique.

Les spectres de réponse structurelle sont des éléments fondamentaux dans la conception classique des séismes pour les systèmes d'un seul degré de liberté [1].

Ces spectres de réponses sont établis en utilisant les accélerogrammes comme entrée à des modèles linéaires ou non linéaires pour calculer des réponses telles que le déplacement maximum. Pour les structures non linéaires, le rendement (le rapport du déplacement au déplacement maximum) ou de facteur de ductilité est employé comme paramètre de conception. Pour n'importe quel enregistrement simple, les spectres de réponse irréguliers obtenus sont généralement lissés en tripartites approximations linéaires [2].

Lorsque des enregistrements des différents séismes sont utilisés, les ordonnées des spectres de calcul montrent une bonne partie de la variabilité. Pour déterminer la moyenne et la variance des ordonnées spectrales, les enregistrements de différents séismes sont normalisés par rapport aux caractéristiques de mouvement de pointe telle que l'accélération ou la vitesse maximales [3]. Les spectres de réponse normalisés sont revus à la baisse pour la conception appropriée des grands ouvrages [4].

Concevoir des structures importantes telles que les barrages, ponts, centrales nucléaires, sur la base de pic des différents tremblements de terre a de sérieuses limites :

- a. Le potentiel de dégâts dans tout séisme dépend des caractéristiques de l'excitation notamment le contenu fréquentiel et la durée.
- b. La combinaison de différents événements sismiques est statistiquement discutable. Chaque enregistrement d'accélération est une réalisation d'un processus stationnaire non-aléatoire. Le pic mesuré à partir d'un seul enregistrement est juste un échantillon de cette variable aléatoire.
- c. La valeur du pic est une variable aléatoire, et la normalisation d'une variable aléatoire par un point variable aléatoire introduit une inconnue et une mesure inutile d'incertitude. Dans cette étude, un événement mesuré est supposé être un échantillon d'une population sous-jacente, qui caractérise le processus sismique en cause. Les enregistrements mesurés sont utilisées pour estimer les paramètres de la population sous-jacente en utilisant des techniques du maximum de vraisemblance. Les enregistrements simulés à partir de cette population sont ensuite utilisés pour obtenir des spectres de réponse pour chaque événement historique avec une estimation de la variance de réponse.

Le nord de l'Algérie est l'une des zones les plus dangereuses d'un point sismologique et géotechnique. La zone étudiée présente une similitude de comportement de propagation des ondes sismiques. Il ya eu récemment une augmentation considérable de conception des structures dans les secteurs de développement urbain et industriel. En outre, le récent séisme

destructeur dans la région de Boumerdes (2003 séisme de magnitude  $M = 6,8$ ) a tourné l'attention sur cette région du nord du pays.

Le but ultime de cette recherche consiste à obtenir la simulation des mouvements des séismes de chlef et de la région de Boumerdes, au nord de l'Algérie, qui sont statistiquement semblables aux mouvements enregistrés de la région. À cette fin, il est utile d'être en mesure de décrire le contenu d'une trace sismique enregistrée avec un minimum de paramètres, qui peuvent être liés aux caractéristiques enregistrées des mouvements forts.

Il existe des méthodes qui tiennent compte des caractéristiques sismologique d'une région et utilisent des petits séismes à des défauts de sources du modèle comme fonction dérivée empirique et de simulation basé sur des caractéristiques d'atténuation via la modélisation sismologique. Ces méthodes sont appelées (méthodes déterministiques). Une méthode stochastique qui simule le mouvement fort du sol basée sur des accélérogrammes enregistrés est nommée modélisation ARMA[5,6,7,8,9].

Findell et al[10] ont utilisé une méthode pour décrire une histoire de temps en transformant l'enregistrement dans une série apparentée stationnaire en utilisant la fonction de transformation et d'ajustement d'un modèle ARMA simple et invariant dans le temps à cette nouvelle série. Ils ont utilisé cette méthode pour simuler des accélérogrammes dans la région d'Istanbul[10]. En vue d'analyser et simuler les séismes d'El Centro et de San-Fernando séismes, Chang et al, ont utilisé la méthode ARMA[5].

Pour ce qui est de l'accès des données numérisées d'accélération de séisme de manière uniforme pour l'analyse a un intérêt largement répandu dans la génération artificielle des accélérogrammes numérisées pour les études de réponse structurelles, il est intéressant de considérer l'utilisation de modèles qui peuvent être formulés explicitement en temps discret.

L'un des modèles automatique discret les plus importants est le modèle Auto régressif à moyenne mobile (ARMA) qui peut être représenté par une équation de récurrence linéaire stochastique d'ordre fini. Dans cette étude, 4 accélérogrammes enregistrés sont utilisés pour simuler le séisme de Chlef et 3 accélérogrammes pour simuler le séisme de Boumerdes dans la région visée. Les données d'accélérogrammes utilisées dans cette étude ont été obtenues à partir de la banque de données du centre de Génie Parasismique (CGS) d'Alger.

## **Chapitre 1 : Étude bibliographique**

### **1.1. Concepts de base et contexte bibliographique.**

Les accélérations peuvent être simulées en utilisant des modèles aléatoires (stochastiques) dans le domaine des temps ou le domaine des fréquences. Différents modèles de processus sismiques dans les domaines des temps et des fréquences ont été présentés par Shinozuka, Deodatis[11]. Le concept de base de la simulation artificielle d'accélérogramme sismique a été proposé par Housner et Jennings[12] ,Kanai et Tajimi[13] .Un nombre de publication a été fait sur les modèles ARMA (Auto régressive Moving Average) ou les modèles AR purs. L'avantage de l'utilisation du modèle ARMA est que les paramètres peuvent être estimés directement à partir des données.

Dans l'analyse des séries temporelles (chronologiques), la classe des modèles autorégressifs moyennes mobiles (ARMA pour Auto Regressive Moving Average) (voir Reinsel, 1997, Lütkepohl, 2005)[14,15] et la sous-classe des modèles (voir Lütkepohl, 1993) [16] sont utilisées pour étudier les propriétés des chacune de ces séries, mais aussi pour décrire de possibles relations croisées entre les différentes séries chronologiques.

Ces modèles ARMA occupent une place centrale pour la modélisation des séries temporelles. Les modèles ARMA constituent la classe la plus utilisée de modèles de séries temporelles univariées (voir Brockwell et Davis, 1991)[17]. Leurs extensions aux modèles autorégressifs moyennes mobiles vectoriels (VARMA pour Vector Auto Regressive Moving Average) pose néanmoins des problèmes ardu, comme par exemple, l'identification et l'estimation des paramètres du modèle et suscite des axes de recherches spécifiques, comme la cointégration (voir Lütkepohl, 2005) [15].

Ces modèles ARMA sont généralement utilisés avec des hypothèses fortes sur le bruit qui en limitent la généralité. Ainsi, nous appelons ARMA forts les modèles standard dans lesquels le terme d'erreur est supposé être une suite indépendante et identiquement distribuée (i.e. iid), et nous parlons de modèles ARMA faibles quand les hypothèses sur le bruit sont moins restrictives. Nous parlons également de modèle semi-fort quand le bruit est supposé être une différence de martingale.

Plusieurs formulations ARMA ont été introduites pour décrire différents types de séries temporelles. L'une des formulations les plus générales et les plus simples est le modèle ARMA suivant :

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \dots - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (1.1)$$

où  $\phi_i, \theta_j$  sont des paramètres constant,  $Z_t$  : La séquence de données,  $a_t$  : Variable aléatoire de Gauss.

Les modèles structurels permettent d'étudier des relations économiques instantanées. Les formes réduites sont plus pratiques d'un point de vue statistique, car elles donnent les prévisions de chaque composante en fonction des valeurs passées de l'ensemble des composantes.

Afin de donner une définition précise d'un modèle linéaire et non linéaire d'un processus, commençons par rappeler la décomposition de Wold (1938) [18] qui affirme que si  $(Z_t)$  est un processus stationnaire, purement non déterministe, il peut être représenté comme une moyenne mobile infinie (i.e.  $MA(\infty)$ ) (voir Brockwell et Davis, 1991 [17], pour le cas univarié). Les arguments utilisés s'étendent directement au cas multivarié (voir Reinsel, 1997) [14].

Ainsi tout processus  $X = (X_t)$  de dimension  $d$  vérifiant les conditions ci-dessus admet une représentation  $MA(\infty)$  vectorielle :

$$X_t = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l \epsilon_{t-l} \quad (1.2)$$

Où  $\sum_{l=0}^{\infty} \|\psi_l\|^2 < \infty$ . Le processus  $(\epsilon_t)$  est l'innovation linéaire du processus  $X$ .

Nous parlons de modèles linéaires lorsque le processus d'innovation  $(\epsilon_t)$  est iid et de modèles non linéaires dans le cas contraire. Dans le cadre univarié Francq, Roy et Zakoïan (2005) [19], Francq et Zakoïan (1998) [20] ont montré qu'il existe des processus très variés admettant, à la fois, des représentations non linéaires et linéaires de type ARMA, pourvu que les hypothèses sur le bruit du modèle ARMA soient suffisamment peu restrictives.

Pour les applications économétriques, le cadre univarié est très restrictif. Les séries temporelles présentent des interdépendances fortes rendant nécessaires l'étude simultanée de plusieurs séries. Le développement de la littérature sur la cointégration (fondée sur les travaux du prix Nobel d'économie Granger) atteste de l'importance de cette problématique.

Parmi les modèles pouvant être ajustés au processus d'innovation linéaire, dont les autocorrélations sont nulles mais qui peut néanmoins présenter des dépendances temporelles, nous pouvons citer les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH) introduits par Engle (1982)[21] et leur extension GARCH (ARCH généralisés) due à Bollerslev (1986)[22]. Contrairement aux modèles ARMA, les extensions des modèles GARCH au cadre multivarié ne sont pas directes. Il existe dans la littérature différents types de modèles GARCH multivariés (voir Bauwens, Laurent et Rombouts, 2006) [23], comme le modèle à corrélation conditionnelle constante proposé par Bollerslev (1988)[24] et étendu par Jeantheau (1998)[25]. Les séries générées par ces modèles sont des différences de martingales et sont utilisés pour décrire des séries.

Pour la modélisation de ces séries temporelles, d'autres modèles peuvent être utilisés, comme par exemple les modèles all-pass (Davis et Breidt, 2006) [26] qui génèrent aussi des séries non corrélées mais qui ne sont pas en général des différences de martingales.

De nombreux outils statistiques ont été développés pour l'analyse, l'estimation et l'interprétation des modèles ARMA (voir e.g. Chitturi (1974)[27], Dunsmuir et Hannan (1976)[28], Hannan (1976)[29], Hannan, Dunsmuir, et Deistler (1980)[30], Hosking (1980,1981a, 1981b)[31,32,33], Kascha (2007)[34], Li et McLeod (1981) [35] et Reinsel, Basu et Yap (1992) [36].

Les méthodes Autorégressifs à Moyenne Ajustée (ARMA) sont très utilisées en traitement du signal et en sismologie, avec une comme applications privilégiées la représentation paramétrique des signaux et des systèmes et l'estimation spectrale.

Durant les trois dernières décades de nombreuses méthodes ont été proposées pour l'identification des modèles ARMA. Bien que la tâche soit relativement difficile, étant donnée la place dont nous disposons et le nombre impressionnant d'articles (plusieurs centaines) écrits sur le sujet, nous allons essayer d'effectuer un classement de ces méthodes et de faire un bref historique afin de mieux situer la contribution du présent travail.

Ces méthodes peuvent être classées de différentes manières :

Classe C1- suivant la procédure d'estimation utilisée :

Classe C11- Méthodes basées sur une procédure en une étape, avec estimation simultanée des paramètres AR et MA.

Classe C12 - Méthodes basées sur une procédure en deux étapes, avec estimation séparée des paramètres AR puis des paramètres MA.

A noter que pour certaines applications (commande adaptative de processus, estimation spectrale, ..) l'estimation de la partie MA peut ne pas être nécessaire ou être remplacée par l'estimation d'autres paramètres comme par exemple les coefficients du numérateur spectral (Moses, Beex , 1986) [37].

Classe C2- suivant le type d'information utilisée et de traitement des données effectué.

Classe C22- Méthodes basées sur un traitement par bloc des mesures (méthodes non récursives), avec possibilité de faire appel à des fonctions de corrélation estimées.

Il est à noter que dans le but d'améliorer l'efficacité numérique des algorithmes (en termes de temps de calcul), la plupart des méthodes récentes fait appel à des techniques d'algorithmes rapides (filtres en treillis, équations de Chandrasekhar), Pour une présentation synthétique de ces algorithmes voir les articles de Friedlander ,1982 a et b [38,39]

Parmi les méthodes de la classe C11 on trouve :

La méthode du maximum de vraisemblance qui nécessite de résoudre un système d'équations non linéaires (Newbold , 1974) [40], (Anderson , 1977) [41], (Dugre et al,1986) [42], et ses nombreuses approximations parmi lesquelles on peut citer les méthodes RML1. RML2 et RML2 modifié ([Panuska – 1968) [43], (Young, 1968) [44], (Soderstrom , 1973) [45], (Friedlander , 1982c) [46].

Des méthodes basées sur l'ajustement du spectre. (Friedlander, Porat, 1984) [47] proposent de minimiser un critère d'écart quadratique entre le spectre estimé de façon non paramétrique à l'aide de la fonction d'autocorrélation du processus et le spectre estimé de façon paramétrique à l'aide du modèle ARMA. La méthode qui en résulte fait appel à des procédures d'optimisation non linéaire, et peut être vue comme une forme approchée de la méthode du maximum de vraisemblance.

Des formes en treillis moindres-carrés obtenues à partir de la décomposition du modèle ARMA en un modèle AR à deux dimensions et basées sur l'algorithme des moindres-carrés étendus. Ces algorithmes ont été proposés par (Morf, Lee, 1979) [48] et, sous forme normalisées

par (Lee et al- 1980) [49] dans le cas d'un modèle ARMA(p, p), puis par (Benveniste, Chaure-1981)[50] et (Friedlander, 1983b)[51] dans le cas d'un modèle ARMA(p, q).

Nous allons maintenant considérer les méthodes de la classe C12, en envisageant tout d'abord celles qui permettent d'estimer la partie AR à l'aide de fonctions de corrélation (classe C22).

Méthodes basées sur la résolution d'un système d'équations linéaires algébriques dites de type Yule- Walker étendues (ou modifiées). Dans (Gersch, 1970) [52] ces équations, en nombre minimal (q), sont écrites à l'aide de la fonction d'autocorrélation du processus ARMA. Dans (Chow, 1972) [53] il est suggéré d'utiliser un nombre d'équations supérieur à q afin d'améliorer la qualité de l'estimation. Cette idée a été utilisée par (Cadzow, Moses, 1981) [54] pour résoudre le problème d'estimation spectrale à l'aide d'un modèle ARMA (voir aussi C Cadzow, 1982) [55]. On parle alors de système: d'équations de Yule-Walker modifiées surdimensionné. Une autre manière d'améliorer cette méthode consiste à la combiner avec une approche de type maximum de vraisemblance (Stoica et al., 1987a) [56].

Dans (Favier - 1977 a et b) [57,58] les équations de Yule-Walker étendus sont exprimées en termes de la fonction d'autocorrélation d'un pseudo processus d'innovation ou de la fonction d'inter corrélation entre le processus ARMA et un pseudo-processus d'innovation

Il est à noter que les équations de Yule- Walker étendues sont étroitement liées à la méthode de la variable instrumentale (Friedlander - 1983a) [59]. Une analyse asymptotique de ce type de méthode est effectuée dans (Stoica et al, 1985, 1987 b et c) [60,61,62]. Finalement ces équations peuvent être résolues de manière récursive (classe C1) en faisant appel à une technique de filtrage en treillis. Ainsi (Cadzow, Moses, 1981) [63] proposent d'utiliser un algorithme en treillis de type fenêtre avant (voir aussi (Moses et al, 1985) [64] et (Samson), 1982) [65].

En ce qui concerne les méthodes d'estimation de la partie MA appelées aussi méthodes de factorisation spectrale, deux types d'approches faisant appel à des fonctions de corrélation estimées sont possibles (classe C22)

Méthodes utilisant une procédure de factorisation de Cholesky (Morf, 1974) [66]. (Wilson, 1969, 1972) [67,68], avec possibilité de faire appel à un algorithme en treillis (Friedlander, 1983c) [69] pour effectuer les calculs.

Algorithmes de réalisation stochastique nécessitant la résolution d'une équation de type Riccati ou Chandrasekhar (Dickinson et al, 1974) [70], (Favier, 1977, 1979, 1982b) [71, 72, 73], (Favier, Alengrin, 1979) [74], (Favier, Salut - 1979) [75].

Méthode basée sur une procédure itérative et approchée faisant appel à l'algorithme des moindres carrés ordinaires et fournissant des estimés consistants pour les paramètres AR (Tsay, Tiao, 1984) [76]. Une version récursive de cet algorithme, utilisant une méthode de blanchiment en treillis moindres carrés d'ordre  $(p+q)$  et nécessitant la résolution d'un système de  $q$  équations linéaires algébriques, a été proposée par (Li, Dickinson, 1986) [77]. Les paramètres MA peuvent également être obtenus en utilisant cette approche à travers une simple procédure de normalisation des variables intermédiaires solutions du système d'équations algébriques précédent (Li, Dickinson, 1988) [78].

Enfin pour terminer la présentation des méthodes de la classe C12, nous citerons les méthodes permettant d'estimer, en deux étapes, aussi bien les paramètres AR que MA.

Méthodes basées sur l'identification de modèles AR longs (Durbin, 1959, 1960) [79, 80], (Graupe et al, 1975) [81] ou MA longs [Favier, 1982 a et b) [82, 83]. Dans ces deux dernières références la dualité des deux approches (AR long et MA long) est clairement mise en évidence.

Pour les modèles non-linéaires des séries chronologiques plusieurs travaux ont vu le jour, démontrant le gain qu'on peut gagner en s'intéressant aux modèles non-linéaires. En effet, dans plusieurs disciplines l'existence de la non-linéarité entre variables est reconnue.

Parmi les modèles non-linéaires, on peut citer les modèles bilinéaires (BL), les modèles autorégressifs à seuil (TAR), les modèles autorégressifs exponentiels (EXPAR), les modèles ARCH...etc. (voir Guégan (1993)) [84].

Ces modèles, à l'origine, ont été développés d'un point de vue déterministe (voir Weiner (1958)) [85], et leurs applications ont été essentiellement orientées en automatique et théorie du contrôle (voir Molher (1970)) [86].

Et c'est grâce à Granger et Anderson (1978) [87] que la représentation stochastique de ces modèles a été introduite pour modéliser des séries économiques. A la suite de leur travail et de

celui de Subba Rao (1981) [88], Guégan s'est intéressée à cette présentation stochastique et a étudié les propriétés probabilistes des cas particuliers des modèles bilinéaires à cause de leur complexité structurale.

En (1981) [89], Guégan a étudié l'existence, pinversibilité et l'expression de la fonction de vraisemblance d'un modèle bilinéaire superdiagonal d'ordre un. Ensuite, elle a abordé le problème de l'ergodicité pour des cas particuliers en (1983) et (1984) [90; 91].

À cette époque des théorèmes plus généraux sur l'existence des modèles bilinéaires, la fonction de covariance et les moments d'ordre supérieur ont vu le jour par Bahskara Rao, Subba Rao et walker en (1983) [92]. Cependant l'étude statistique de ces modèles reste peu développée, par manque de résultats constitutifs comme Pinversibilité ou l'existence de certains moments. Néanmoins, Pham et Tran en (1981)[93] ont fourni des estimateurs consistants, pour les paramètres de certains modèles particuliers, par la méthode des moindres carrés, et Guégan en (1984)[91] a estimé par la méthode des moments les paramètres de certains modèles.

L'année (1985) représente un tournant essentiel dans l'étude des modèles bilinéaires et une nouvelle orientation se dessine avec la représentation markovienne. En effet, Pham fut le pionnier de la représentation markovienne des modèles superdiagonaux[94]. Il établit les conditions d'existence, d'unicité et de minimalité de cette représentation, ce qui lui a permis d'obtenir l'expression de la fonction de covariance et des moments d'ordre supérieur des modèles bilinéaires correspondants.

En (1986), Guégan[95] a montré que cette représentation s'étend difficilement au cas des modèles sous diagonaux et elle a introduit, en revanche, la forme stochastique des modèles polynomiaux en entrées affines en état définis par Sontag (1979)[96]. C'est grâce à l'approche markovienne que l'étude statistique des modèles bilinéaires a connu un certain développement. En effet, Guégan et Pham (1987 a) [97] ont obtenu l'inversibilité de la classe des modèles bilinéaires diagonaux, et en (1990) Liu a obtenu des conditions d'inversibilité pour les modèles bilinéaires généraux[98]. Or, la notion d'inversibilité est indispensable pour espérer développer certaines propriétés statistiques des modèles bilinéaires, comme l'estimation qui n'a été abordée pertinemment, que pour des cas particuliers des modèles en question.

L'estimation par maximum de vraisemblance a été abordée par Subba Rao et Gabr en (1984) [99], pour la classe des modèles superdiagonaux. En (1987 b) Guégan et Pham ont obtenu pour l'ensemble des paramètres des modèles diagonaux, des estimateurs consistants par la méthode des moindres carrés[100].En (1990), Kim et Billard ont proposé des estimateurs des paramètres du modèle bilinéaire diagonal d'ordre un par la méthode de la fonction d'autocovariance [101].

Les tests, aussi, ont été considérés avec un grand intérêt. Cet outil statistique est le mieux adapté pour la discrimination entre les modèles linéaires et bilinéaires. Parmi les tests proposés, on cite : Guégan et Pham (1992) [102], Wandji (1995) [103], Benghabrit et Hallin (1992, 1996,1998) [104,105,106], Houfaïdi et Benghabrit (1998 b)[107] .

Malgré ce panorama de travaux, l'étude des modèles ARMA n'a pas encore atteint son apogée.

## **1.2- Objectifs.**

La conception et le calcul sismiques sont pratiquement basés sur un nombre limité d'accélérogrammes sismiques. Dans l'approche déterministe des enregistrements de séismes spécifiques sont utilisés pour établir les spectres de réponses linéaire et non linéaire ; les limites de cette pratique sont apparues clairement lors du séisme de Chlef en octobre 1980 et Boumerdes en Mai 2003.

Cette partie d'étude développe les modèles ARMA aléatoires non stationnaire des séismes algériens qui permettent une comparaison statistiquement valide avec les données de mesure. Ces modèles fournissent également un échantillon homogène d'accélérogrammes pour les séismes spécifiques qui sont utilisées pour l'évaluation de la réponse de la structure.

Les spectres de dommage conditionné sont établis sur la base d'un séisme de référence. L'évaluation de la moyenne et de la variance des ordonnées de ces spectres permet l'évaluation d'une alternative de la prévision de dommage comparé au dommage du séisme d'octobre 1980. L'étude proposée examine les événements mesurés et enregistrés en Algérie avec deux buts spécifiques :

a) Amélioration de la représentation stochastique du tremblement de terre. Un modèle non stationnaire auto régressif à moyenne mobile (ARMA) peut être construit pour chaque séisme à l'aide des paramètres estimés par la technique du maximum vraisemblance. A partir de tels modèles il sera possible de générer des échantillons statistiquement homogènes enregistrés lors du même séisme. Ces échantillons peuvent être utilisés pour générer les distributions conditionnées du dommage pour un séisme donné.

b) Evaluation des prévisions des dommages: pour tenir compte des effets de la durée, la demande de d'énergie, le contenu fréquentiel et le pic du mouvement, plusieurs prévisions de dommage ont été proposées. Le spectre de dommage dépend de plusieurs critères peut être obtenu pour des systèmes linéaires et non linéaires. L'analyse de la fiabilité des structures sous chargement sismique dépend d'une description précise du processus d'excitation (en fréquence et en amplitude).

### **1.3. Présentation du mémoire**

Ce manuscrit s'articule autour de sept chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique des modèles de simulations des séismes à savoir le modèle ARMA et les modèles bilinéaire.

Le deuxième chapitre dresse un panorama de concepts utilisés tout au long de ce mémoire. Il débute par des généralités sur les processus stochastiques et la définition des modèles ARMA et leurs propriétés probabilistes constituées de Pinversibilité et de la stationnarité nous l'enchainons par une présentation des différents modèles Autorégressifs Moyennes Mobiles : ARMA dans le domaine des temps ou le domaine des fréquences.

Dans le chapitre trois, nous allons discuter dans un premier temps, sur un niveau tout d'abord descriptif, du cadre général de la modélisation de séries chronologiques. Après avoir donné la base pour la suite de notre analyse de séries temporelles, nous discuterons comment modéliser et estimer les composantes non stationnaires d'un modèle classique de décomposition d'une série de temps. Ici, l'idée est de séparer la tendance générale, ainsi qu'un comportement saisonnier éventuel des données, d'une partie stationnaire qui inclura toutes les petites fluctuations aléatoires autour de ces deux composantes dépendant explicitement du temps.

La stationnarité, et le concept de série stationnaire, seront définis et discutés dans la troisième

partie de ce chapitre et signifient que, en moyenne, les caractéristiques de la série (sa tendance et sa variation) ne changent pas avec le temps. Toutefois, le but de ce chapitre sera de comprendre pourquoi c'est surtout cette dernière partie stationnaire qui nous intéresse le plus quant à la modélisation d'une structure de notre série observée- une structure qui est susceptible de trouver un bon modèle ajusté pour effectuer le but ultime de la prévision des séries temporelles. Dans ce chapitre, nous entamons l'étude détaillée de la partie aléatoire d'une série chronologique. Les processus linéaires constituent le modèle le plus simple pour décrire cette composante.

Dans le quatrième chapitre nous traitons une des questions fondamentales posées dans le troisième chapitre la prédiction des séries chronologiques stationnaires. Pour prédire les valeurs futures d'un processus ARMA, il sera nécessaire d'en estimer les paramètres. Pour calculer un intervalle de prévision en pratique, il sera nécessaire d'ajuster un modèle adéquat aux données observées. Le but de ce chapitre est de présenter les outils statistiques les plus utilisés pour atteindre cet objectif. Nous verrons différentes méthodes qui permettront de choisir un modèle ARMA approprié aux données observées, avant de développer des tests d'ajustement pour valider ces choix. Le premier outil permettant de choisir l'ordre d'un modèle ARMA est basé sur l'analyse de la structure d'autocorrélation des données observées. Pour sélectionner l'ordre d'un modèle nous développons des critères automatiques pour le choisir. Dans ce même chapitre nous allons finalement résoudre le problème de la construction en toute généralité des prédicteurs pour des processus soit stationnaires, soit non stationnaires à cause de la présence éventuelle d'une tendance ou d'une saisonnalité. Nous allons voir surtout comment l'approche paramétrique de Box-Jenkins, c'est-à-dire la modélisation du type ARMA à un nombre fini des paramètres, est capable de fournir de bons prédicteurs (linéaires) si le nombre d'observations d'une période assez homogène de la fin de notre série est suffisamment grand.

Le cinquième chapitre est consacré à la formulation et à la modélisation du modèle ARMA dans le cas d'un séisme, nous allons entamer la définition du modèle, la présentation des conditions de stationnarité et d'inversibilité, et nous construisons l'espace d'état de ce modèle à travers lequel nous donnons l'expression de la log-vraisemblance. Ensuite, nous décrivons l'algorithme d'estimation des paramètres de ce modèle.

Le chapitre six de ce mémoire, est consacré à l'estimation des paramètres d'un modèle ARMA, nous nous contentons dans ce chapitre de dresser les résultats des simulations faites .Une application du modèle ARMA aux données issues des tremblements de terre de Chlef et Boumerdes, a été réalisée, nous évoquons à la fin de ce chapitre les résultats numériques de cette étude.

Le septième chapitre est consacré a la présentation des différentes méthodes d'interaction sol-structure et au calcul d'un modèle sol-fondation soumis à des vibrations verticales, en utilisant la loi hyperbolique de Duncan et nous comparons les résultats obtenus par les deux méthodes. Enfin, nous calculons un modèle sol-fondation soumis à des vibrations horizontales (Table vibrante). Dans un premier temps, nous calculons les modes propres du modèle et ensuite nous calculons les expériences effectuées sur ce modèle.

## Chapitre 2 : Généralités.

Dans ce chapitre nous focalisons notre intérêt sur la présentation de l'aspect général des modèles ARMA et des méthodes que nous utiliserons dans les chapitres suivants. Ce préliminaire débutera par des généralités sur les processus stochastiques. Nous l'enchaînons ensuite par, une présentation des Modèles Autorégressifs Moyennes Mobiles : ARMA

### 2.1. Généralités sur les processus stochastiques uni-variés : Rappels

Pour modéliser une collection d'observations, on cherche le modèle qui approxime adéquatement le vrai processus aléatoire sous-jacent à ces observations. Pour mener cette étude on a besoin de processus stochastiques. Ainsi, nous pensons indispensable de débiter ce chapitre par quelques définitions propres aux processus stochastiques univariés, que nous utiliserons dans la suite.

**Définition 1 :** *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires définies sur un certain espace de probabilité et indexées par un certain ensemble  $T$  (ensemble de réelles ou des entiers relatifs) appelé ensemble de temps.*

**Définition 2 :** *Un processus stochastique à temps discret est une suite de variables aléatoires réelles  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ . La loi d'un tel processus est caractérisée par les lois de toute sous famille finie  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, n \in \mathbb{N}^*, t_1, \dots, t_n, n \in \mathbb{Z}$  (théorème de Kolmogorov).*

**Définition 3 :** *Le processus  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est dit strictement stationnaire, si pour toute suite finie d'instants  $t_1, \dots, t_k$  et pour tout entier  $t$ , la loi conjointe de  $X_{t_1+t}, \dots, X_{t_k+t}$ , ne dépend pas de  $t$ .*

**Définition 4 :** *Un processus  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est stationnaire du second ordre, si :*

$$\forall t \in \mathbb{Z}, E[X_t^2] < \infty \quad (2.1)$$

$$\forall t \in \mathbb{Z}, E[X_t] = \mu (\text{indépendant de } t), \quad (2.2)$$

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}, \text{cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) (\text{indépendant de } t). \quad (2.3)$$

#### Exemple :

Un processus stationnaire fort utile est celui que l'on appelle bruit blanc; un tel processus est une suite de variable aléatoires  $(e_t, t \in \mathbb{Z})$ , d'espérances mathématiques nulle ( $E[e_t] = 0$ ), non corrélées ( $\gamma(h) = 0$

si  $h \neq 0$ ) et de même variance ( $V[e_t] = \sigma^2 = \gamma(0)$ ).

**Définition 5 :** Un processus stationnaire est dit ergodique si toutes ses caractéristiques peuvent être déterminées à partir d'une seule trajectoire de ce processus : en pratique ceci veut dire qu'une trajectoire observée pendant une durée assez longue suffit à calculer l'espérance du processus  $X_t$ . Ainsi pour l'espérance : on calculera la moyenne temporelle (stochastique) sur un intervalle de durée  $h$  :

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} X_t dt = M_h \quad (2.4)$$

Si le processus est ergodique :

$$M_h \rightarrow \mu = E[X_t] \text{ si } h \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

**Définition 6 :** Un processus stochastique stationnaire  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est inversible si et seulement si il existe une suite  $\tilde{e}_n$  fonction de  $X_1, \dots, X_n$  uniquement telle que  $\tilde{e}_n - e_n \rightarrow 0$  en probabilité quand  $n \rightarrow \infty$  ( $e_t, t \in \mathbb{Z}$ ), est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance finie.

**Définition 7 :** La fonction  $\rho$  définie sur  $\mathbb{Z}$  qui à  $h$  fait correspondre :

$$\rho(h) = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{V(X_t)}\sqrt{V(X_{t+h})}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \quad (2.6)$$

appelée fonction d'autocorrélation du processus et son graphe est appelé corrélogramme.

**Définition 8 :**  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  étant un processus stationnaire, on appelle fonction d'autocorrélation partielle la fonction :

$$\rho(h) = \frac{\text{cov}(X_t - X_t^*, X_{t-h} - X_{t-h}^*)}{V(X_t - X_t^*)} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \quad (2.7)$$

où  $X_t^*$  (respectivement  $X_{t-h}^*$ ) est la régression affine de  $X_t$  (respectivement  $X_{t-h}$ ) sur  $X_{t-i}, \dots, X_{t-h+i}$

$r(h)$  est le coefficient de régression de  $X_t - X_t^*$  sur  $X_{t-h} - X_{t-h}^*$ . D'après la propriété de Frisch et Waugh (Droesbeke et al 1989) il est égal au coefficient  $\alpha_h$  de  $X_{t-h}$  dans la régression de  $X_t$  sur  $1, \dots, X_{t-h}$

$$X_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^h \alpha_i X_{t-i} + v_t \quad (2.8)$$

où  $v_t$  est tel que,  $E[v_t] = 0$  et  $E[v_t X_{t-i}] = 0$  pour  $i = 1, \dots, h$ .

Dans plusieurs domaines on est confronté à des phénomènes évoluant dans le temps qu'on désire décrire, analyser, contrôler ou prévoir. L'économie, la finance, la gestion, la météorologie, la démographie, la fiabilité des systèmes, les réseaux de télécommunications, la sismologie, ...etc, constituent quelques exemples de ces domaines. La suite de valeurs numériques correspondant aux réalisations d'un phénomène observé au cours du temps,

s'appelle série chronologique, ou temporelle. La façon la plus appropriée d'étudier une série chronologique est de la considérer comme la réalisation d'un processus stochastique.

La première étape de l'étude d'une série chronologique est la modélisation. Il s'agit de choisir le modèle qui s'ajuste adéquatement à la série qu'on veut étudier. Dans la pratique on trouve plusieurs modèles de séries chronologiques nous citons : modèles AutoRégressifs Moyennes Mobiles (ARMA), modèles Bilinéaires (BL), les modèles ARCH, les modèles GARCH,...

## **2.2. Présentations des Modèles Autorégressifs Moyennes Mobiles : ARMA**

Un accélérogramme sismique ne peut pas contenir assez d'informations pour représenter les caractéristiques du phénomène sismique pour l'analyse de la réponse. Alors la construction de séismes artificiels par simulation est devenue un outil important en génie sismique. Les accélérations simulées sont facilement utilisées pour calculer la réponse d'une structure dans le cas linéaire ou non linéaire.

Dans les études sismiques le mouvement du sol est généralement décrit par des paramètres tels que la magnitude la distance de l'épicentre et les conditions locales du sol.

Les propriétés importantes du mouvement de sol pour prédire la réponse sont l'amplitude le contenu des fréquences et la durée du mouvement sismique.

Les accélérations peuvent être simulées en utilisant des modèles aléatoires (stochastiques) dans le domaine des temps ou le domaine des fréquences.

### **2.2.1. Domaine fréquentiel**

La modélisation des séries de temps de l'accélération de sol comme des processus stochastiques a été proposée par plusieurs chercheurs. Dans l'approche utilisée dans le domaine fréquentiel il existe trois (03) méthodes de simulation :

#### **2.2.1.1. Modèles avec stationnarité d'amplitude et du contenu fréquentiel**

Une ancienne approche pour simuler les séismes est faite par Bycroft[108] en utilisant une représentation des mouvements sismiques à l'aide d'un bruit blanc. Le bruit blanc est généré avec un ordinateur qui fournit une bande limitant le bruit blanc avec une densité spectrale plate de 0 à 35 Hz.

L'amplitude du bruit blanc est multipliée par une constante pour avoir les valeurs représentatives des quelques pics de l'accélération du sol. Cette représentation des séismes avec un bruit blanc a été évaluée par comparaison du spectre de réponse établi à partir du séisme simulé et celui du séisme original d'Elcentro.

Du point de vue pratique, ce modèle est simple et il possède quelques limitations dues à la supposition que la plupart de l'accélération sismique est stationnaire et la densité spectrale évolutionnaire est constante.

Housner et Jennings[12] ont considéré l'accélération du sol comme des segments consistant en séries d'impulsions distribuées aléatoirement dans le temps, ce processus est décrit par la moyenne zéro et la variance  $\sigma^2$  et une densité spectrale énergétique  $G(\omega) = \lambda \frac{\sigma^2}{\pi}$ , Ou  $\lambda$  est le nombre moyen d'impulsions par seconde.

Sur la base de la théorie approchée de Resonblueth et Bustamante [109] qui relie l'énergie maximale de l'oscillateur à la densité spectrale de l'énergie du bruit blanc, la densité spectrale du processus est reliée au spectre de réponse des vitesses pour un système non amorti.

Avec cette relation la densité spectrale de l'énergie de l'accélération sismique a été estimée et utilisée pour adapter la forme fonctionnelle du filtre développé par Kanai et Tajimi[13]. Huit séismes ont été générés et le spectre de réponse a été calculé et comparé à celui des événements originaux.

Puisque le spectre de réponse dépend du caractère de non stationnarité de l'amplitude de la fréquence d'un séisme, la modélisation des séismes basée sur la proposition de stationnarité est visiblement limitée.

### 2.2.1.2. Modèles avec non stationnarité d'amplitude.

Cette approche implique une fonction de modulation d'amplitude dans le temps avec stationnarité du contenu fréquentiel. Shinozuka, Sato[110], Jennings, Housner et Tasi [111] ont examiné deux processus aléatoires de la simulation des séismes.

Le premier processus  $X_1(t)$  a été obtenu en faisant passer un bruit blanc gaussien à travers un filtre et en multipliant le résultat par une fonction déterministique :

$$\Psi(t) = 0 \text{ pour } t \leq 0$$

$$\Psi(t) \gg 0 \text{ pour } t > 0$$

$$\text{Et } \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = 0$$

Le deuxième processus  $X_2(t)$  a été obtenu en multipliant le bruit blanc généré par la fonction déterministique  $\Psi(t)$  et en le faisant passer à travers un filtre. Dans les applications de l'engineering des séismes  $X(t)$  est supposé être la vitesse.

Amin et Ang [112] ont utilisé un processus gaussien non-stationnaire du type bruit blanc, passé à travers un filtre linéaire pour simuler un processus non-stationnaire. Trois types de filtres ont été considérés :

Le premier est caractérisé par une simple fonction de réponse d'impulsion  $\exp(-I \cdot t)$ , où  $I$  est un paramètre devant être choisi. Le second filtre a une fonction de réponse d'impulsion de la forme :

$$W^{-1} \exp(\gamma \cdot w \cdot t) \cdot \sin(w \cdot t) \quad (2.1)$$

Où  $\gamma$  et  $w$  sont les paramètres du filtre.

Le troisième filtre a été représenté par un système amorti à un seul degré de liberté soumis à une excitation à la base par un shot-noise non-stationnaire.

La fonction de modulation utilisée pour obtenir le bruit blanc non-stationnaire était basée sur la supposition que les séismes peuvent être divisés en trois phases :

- ✓ La phase de début
- ✓ La phase forte
- ✓ La phase finale

Les paramètres des filtres sont choisis pour mettre l'autocorrélation du résultat du filtre en conformité avec ceux mesurés à partir des enregistrements sismiques.

Ils ont trouvé que le deuxième et le troisième filtre semblent être adéquats pour la simulation des séismes ; par contre le premier était un mauvais filtre. Ces modèles ont été justifiés sur la base de la fonction de variation de la covariance de temps et le spectre de réponse des séismes réels et simulés.

### **2.2.1.3. Modèles non stationnaires en amplitude et en contenu fréquentiel.**

Beaucoup d'approches sophistiquées ont été développées en utilisant le spectre d'énergie évolutionnaire pour modéliser la dépendance de temps du contenu fréquentiel dans les enregistrements d'accélération.

Avant combinaison avec une fonction enveloppe déterministique, on peut rendre dépendant du temps soit l'amplitude dans une série de sinusoïdes, soit les caractéristiques d'un filtre pour le bruit blanc filtre (lin et shinozuka).

Saragoni et Hart [113] ont proposé un modèle pour simuler les enregistrements d'accélération sismique par filtrage d'un bruit blanc gaussien avec une fonction enveloppe temporelle déterministique. La variation de temps dans le contenu fréquentiel était mesurée par division du domaine temporel en trois régions en supposons que le mouvement du sol simulé dans chaque région possède une fonction unique de densité spectrale d'énergie.

Ce modèle a été appliqué au séisme de Fernando en 1971, 60 séismes ont été générés et comparés au séisme original.

D'autres études faites par Deodaltis, Shinozuka et Samaras [114] utilisent un processus (AR) pour générer des fonctions de séries de temps non- stationnaires, un processus oscillatoire ( $X_t$ ) était discuté dans lequel la valeur  $\rho(\omega)$  et le spectre d'énergie évolutionnaire  $F(t, \omega)$  sont différentiables. Cependant l'autocorrélation  $C(s, t)$  et le spectre d'énergie  $F(t, \omega)$  sont définies par :

$$C_{xx}(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_s(\omega) \cdot A_t(\omega) \cdot \exp(i\omega(s - t)) \cdot \rho(\omega) d\omega \quad (2.2)$$

$$F(t, \omega) = [A_t(\omega)]^2 \mu(\omega). \quad (2.3)$$

Les coefficients du processus (AR) étaient estimés en utilisant l'autocorrélation de l'équation (2.2) à chaque instant pour générer les éléments des séries de temps non- stationnaires. L'ordre du processus (AR) était fixé à ( $p=3$ ), les résultats ont été évalués par comparaison de la fonction d'autocorrélation estimée et dérivée.

Lin et Yong [115] ont examiné trois (03) modèles basés sur le concept des trains d'impulsions aléatoires : un modèle évolutionnaire de Kanai-Tajimi, un modèle élastique uni-dimensionnel et un modèle de Maxwell uni-dimensionnel.

Dans le modèle de Kanai-Tajimi la couche supérieure entre la surface du sol et le lit rocheux le plus proche était approximée par un système à un seul degré de liberté.

Dans le modèle élastique unidimensionnel ils ont supposé que la source des ondes est le lit rocheux (substratum) et ils ont considéré le mouvement à la surface libre du sol en utilisant l'équation de propagation d'une onde unidimensionnel. Dans le modèle de Maxwell, la couche supérieure du sol a été supposée comme un matériau linéaire pour lequel l'onde unidimensionnelle était utilisée pour obtenir la fonction de la réponse des impulsions. Ces modèles ont été utilisés pour générer des séismes artificiels similaires à celui de Mexico

1985. L'examen de ces trois modèles cités, confirme que celui de Kanai- Tajimi est simple en application et donne de bons résultats.

Une étude faite par Shinozuka ,Deodatis et Harada[116] a développé un modèle analytique d'ondes sismiques pour rendre compte de leurs caractéristiques stochastiques dans le domaine temporel et spatial.

Premièrement une simulation d'un processus stochastique univariable unidimensionnel est introduite. Pour un processus stationnaire  $(x_t)$  avec une fonction d'autocorrélation  $C_{xx}(k)$ .

La fonction de densité spectrale  $S_{xx}(w)$  du processus est reliée à l'autocorrélation à travers la transformation de Weiner-Khinchine.

Cependant le processus  $(x_t)$  peut être simulé en utilisant les séries suivantes :

$$X_t = (2)^{1/2} \sum_{j=1}^N (2 \cdot S_{xx}(\Delta\omega))^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\omega_j \cdot t + \varphi_j) \quad (2.4)$$

avec  $\omega_j = j\Delta\omega$  ,  $j=1,2,3,\dots,n$  et  $\varphi_j$  sont des angles de phase aléatoires et indépendants uniformément distribués sur l'intervalle  $[0, 2n]$ .

Cette analyse était élargie pour inclure le champ n-dimensionnel, m-variables pour les cas stationnaires et non-stationnaires en utilisant les représentations spectrales.

### 2.3 Domaine temporel.

Le premier travail dans la modélisation des données sismiques comme des séries de temps en utilisant des modèles linéaires, a été accompli par Robinson [117], Liu[118] et Kozin [119]. Robinson [117] a utilisé un processus à moyenne glissante (MA) pour générer des séismes artificiels. Liu [118] a étudié et comparé un nombre de modèles. Les modèles ARMA ont été spécifiés comme une approche potentielle pour caractériser les enregistrements sismiques. Mais cette étude a été une étude générale et une comparaison des modèles stochastiques.

Kozin[123] a proposé un modèle temporel continu non- stationnaire :

$$X(t) + a(t) \cdot X(t) + b(t) \cdot X(t) = \varphi(t) \cdot w(t) \quad (2.5)$$

Où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des polynômes

$$a(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 t^3 \quad (2.6)$$

$$b(t) = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + b_3 t^3 \quad (2.7)$$

$\varphi(t)$  est une fonction obtenue par ajustement cubique de l'enveloppe des enregistrements actuels, et  $w(t)$  est un bruit blanc gaussien.

Les paramètres sont estimés à partir des données en utilisant les techniques de filtrage non linéaire. Telles techniques sont les extensions des méthodes d'estimation récurrente du filtrage de Kalman.

Il a été trouvé que si les paramètres initiaux ne convergent pas aux valeurs initiales, l'estimation récurrente devient instable.

Parce qu'il n'avait pas de théorèmes de convergence concernant les méthodes non linéaires pour l'estimation des paramètres désirées, Kozin a utilisé l'estimation par la technique (maximum de vraisemblance) pour les méthodes ARMA.

Deux publications de Kozin et Nakajima [120] discutent le problème général de convergence ; ont abouti à un théorème de base qui garantit la convergence des paramètres. Les critères de l'information d'Akaike a été élargi pour inclure les modèles non-stationnaires comme le modèle proposé par Kozin dans la modélisation des séries de temps non-stationnaires qui ont la forme suivante :

$$y(k) + a_1(k-1).y(k-1) + \dots + a_L(k-1).y(k-1) = g(k).u(k) \quad (2.8)$$

Où  $y(k)$  présente le séisme donne,  $u(k)$  est le bruit blanc,  $a(k)$  et  $g(k)$  sont des fonctions de temps variables estimées à partir des données. Les coefficients  $a_L(k)$  ont été paramétrisés comme une combinaison linéaire des fonctions discrètes orthogonales.

$$a_L(k) = \sum_{i=1}^L a_{ij}.f_j(k) \quad , \quad i = 1, \dots, L \quad (2.9)$$

$$f_j(k) = \sum_{s=1}^L (-1)^s \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+s \\ s \end{bmatrix} \frac{k^{(s)}}{N^{(s)}} \quad , j=0,1,2,\dots,N \quad (2.10)$$

La fonction  $g(k)$  était obtenue par un ajustement cubique pour l'enveloppe du séisme. Les coefficients  $g(k)$  sont calculés en premier lieu, alors que les coefficients  $(a_{ij})$  sont estimés en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Le critère d'information d'Akaike est utilisé pour trouver le bon ajustement. Ce modèle a été appliqué à une grande classe de séisme de Caltech reports et il a donné de bons résultats.

L'approche du maximum de vraisemblance a été très effective et désirable pour les modèles ARMA appliqués aux séismes. Aussi il a été trouvé que l'ordre le plus convenable de l'ajustement parmi plusieurs séismes étudiés varie entre 2 et 6.

L'approche du maximum de vraisemblance a été très effective et désirable pour les modèles ARMA appliqués aux séismes. Aussi il a été trouvé que l'ordre le plus convenable de l'ajustement parmi plusieurs séismes étudiés varie entre 2 et 6.

Dans une étude faite par Chang et al [121] en utilisant le modèle ARMA l'enregistrement d'accélération a été divisé en segments courts de 250 points avec un pas de 0.02 secondes et chaque segment est supposé stationnaire. Chaque segment est ajusté à un modèle ARMA où les coefficients sont estimés en utilisant la procédure de box et Jenkins. Dans cette procédure on fait une supposition initiale de l'ordre (p, q) basée sur la fonction d'autocorrélation et la fonction d'autocorrélation partielle.

La fonction d'autocorrélation partielle est obtenue par estimation du dernier paramètre AR(n) d'un processus AR(n) à partir des données dans une succession par ordre, 1,2, ....en utilisant la méthode des moindres carrés. La supposition initiale est obtenue à partir des équations de Yule-Walker pour commencer l'estimation par les moindres carrés. La qualité de l'ajustement est testée par l'expression suivante :

$$Q = N \sum_{k=1}^n Y_k^2 \quad (2.11)$$

Où  $Y_k$  est la  $k^{ième}$  autocorrélation des résiduels au décalage K, N est le nombre de points donnés et  $n = N/5$ . Pour un bon ajustement, Q sera limité à (n-p-q). Dans cette étude six (06) séismes ont été étudiés, deux (02) à partir d'EL-Centro (1940 ;1956), et quatre (04) de San Fernando (1971). Pour El-Centro ils ont trouvé un ARMA (2,1) et un ARMA (4,1), et un ARMA (4,1) pour San Fernando, et cela pour tous les segments sauf un qui a été ajusté par un ARMA (3,1).

Dans une étude faite par Polhemus et Cakmak[122] un modèle ARMA a été proposé qui fait inclure la variance dépendante du temps du processus et les coefficients ARMA. Ce modèle a la forme suivante :

$$Z_t - \varphi_1 \cdot Z_{t-1} - \dots - \varphi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.12)$$

La procédure consiste en premier lieu à estimer la variance du séisme original (donné)  $\sigma_Z^2(t)$  par élévation au carré des données en utilisant la transformation de Box-Cox et donc ajuster la variance en modélé polynomial de la forme :

$$h(t) = b(0) + b(1) \cdot t + b(2) \cdot t^2 + \dots + b(k) \cdot t^k \quad (2.13)$$

Les coefficients sont obtenus en utilisant la méthode des moindres carrés. Après avoir transformé la série de temps d'accélération, un modèle ARMA est construit pour représenter les données. Trois (03) composantes d'un séisme de San Fernando ont été analysées et modélisées pour établir deux processus ARMA(2,1) et ARMA(4,1).

Une étude faite par Moham et Shah [123] utilise le modèle proposée par Kozin représenté comme suit :

$$y(n) = a_1(n)y(n-1) + a_2(n)y(n-2) + \dots + a_p(n)y(n-p) + g(n)w(n) \quad (2.14)$$

Où  $w(n)$  est un bruit blanc avec  $E[w(n)] = 0$ ,  $E[w(n)w(k)] = \delta_{nk}$  et  $g(n)$  est le terme de gain, les paramètres  $a_i(n)$  sont linéarisés comme suit :

$$a_i(n) = \sum_{j=0}^q a_{ij}u_j(n) \text{ pour } i = 1, \dots, p \quad (2.15)$$

Les paramètres sont calculés par estimation de  $g(n)$  comme courte variance de temps et donc évaluer  $a_{ij}$  en utilisant la méthode des moindres carrés. Les résiduels sont donc calculés et vérifiés s'ils sont blancs si non  $g(n)$  est multipliée par la racine carrée de la courte variance de temps des résiduels et les étapes sont répétées. L'ordre du modèle qui est un AR a été basé sur l'expérience. Deux (02) séismes d'El-Centro qui ont été simulés par un modèle AR(4) et ont donné de bons résultats.

Une étude faite par Kitagawa et Gerch [124] utilise les coefficients AR variables dans le temps, avec la forme suivante :

$$a(n) = \sum_{i=1}^n a(i, n)a(n-1) + \varepsilon(n) \quad (2.16)$$

Où les  $a(i, n)$  sont des coefficients supposés changeant graduellement avec le temps,  $\varepsilon(n)$  est supposé être un bruit blanc normalement distribué avec la variance  $\sigma_\varepsilon^2$ , en plus l'enregistrement sera divisé en segments. Pour l'estimation des paramètres ils ont utilisé la méthode des moindres carrés l'ordre de chaque segment est déterminé par le critère AIC. Pour simuler le séisme de Western-Washington de 1949 ils ont utilisé un AR(3).

## **Chapitre 3 : Les séries de temps.**

### **3.1. Séries chronologiques : définitions et exemples**

Une série chronologique est une succession d'observations d'une grandeur effectuées à intervalles réguliers au cours du temps. Donnons quelques exemples dans le secteur économique et social : inflation, cours boursiers, chômage, productions, exportations, natalité, immigration, scolarisation, logement, . . .

On rencontre également des exemples à l'intérieur même de l'entreprise à caractère industriel, commercial ou de services : chiffres d'affaire, stocks, ventes, vie d'un produit, clientèle, . . .

Le domaine d'application des séries chronologiques est très large : Prospection et exploitation pétrolières et minières, Astronomie, Océanographie, météorologie, hydrologie, environnement, biologie, médecine, physique, traitement de signal, séismes, Imagerie médicale.

Ces disciplines scientifiques sont amenées à traiter des données temporelles, en particulier, le traitement du signal, qui intervient dans ces domaines, constitue à lui seul une activité de recherche importante très liée à celle effectuée en séries chronologiques. L'étude des premiers exemples relève essentiellement du domaine temporel alors que le traitement du signal fait beaucoup plus appel à l'analyse spectrale. Les deux approches sont souvent complémentaires.

La spécificité de l'analyse d'une série chronologique, qui la distingue des autres analyses statistiques, est précisément dans l'importance accordée à l'ordre dans lequel sont effectuées les observations. Les méthodes statistiques classiques demandent souvent que les variables étudiées soient stochastiquement indépendantes et observées plusieurs fois.

En séries chronologiques, la dépendance temporelle entre les variables constitue la source principale de l'information. Celle-ci peut être entièrement contenue dans la valeur moyenne des variables, qui sont alors supposées stochastiquement indépendantes. Cependant, l'ordre demeure car cette moyenne représente l'évolution lente du phénomène à laquelle s'ajoute parfois un effet périodique, lorsque la moyenne est nulle ou constante, la dépendance temporelle se situe dans l'organisation des différentes corrélations entre les variables.

Certaines données historiques célèbres sont utilisées par de nombreux auteurs (voir par exemple, Box et Jenkins (1976) [125], Brockwell et Davis (1987) [126] afin de comparer les différentes méthodes utilisées dans l'analyse d'une série chronologique.

L'analyse des séries chronologiques a connu un grand développement depuis la parution du livre de Box et Jenkins (1970) [125], où les principales propriétés des processus stationnaires autorégressif moyenne mobile (ARMA) ont été décrites avec les méthodes d'identification, d'estimation et de validation.

L'utilisation de ces modèles simples s'explique par la forme particulière de la fonction de transfert. Cependant, ces modèles ARMA ne peuvent modéliser des phénomènes à effets « longue mémoire » au sens où la série chronologique présente une autocorrélation à des instants lointains, autrement dit lorsque les autocorrélations présentent une « décroissance lente ». On peut, dans cette situation, adapter un modèle plus large appelé modèle ARMA fractionnaire et qui présente « une longue mémoire ».

L'étude des modèles à « longue mémoire » et leurs applications constituent actuellement un des domaines populaires de la recherche statistique.

Depuis une vingtaine d'années, la littérature est abondante et riche en résultats. On peut citer les ouvrages généraux de Beran (1994) [127], Deniau, Doukhan, Oppenheim et Renault (2000) [128], Doukhan, Oppenheim et Taqqu (2003) [129] et Robinson (2003) [130]. Les domaines d'applications utilisant ces modèles n'ont cessé de se développer ces dernières années, touchant des domaines variés. Citons quelques travaux couvrant un large spectre : Hurst (1951) [131], Hosking (1984) [132] en hydrologie, Mandelbrot (1962) [133], Lo (1991) [134], Willinger, Taqqu et Teverovsky (1999) [135] en finance, Hassler et Wolters (1995) [136] en macroéconomie, Graf (1983) [137], Beran et Terrin (1996) [138] en géophysique, Taqqu, Willinger, Sherman et Wilson (1997) [139] en télécommunications.

D'autres domaines d'applications plus récents ont fait également l'objet de la modélisation à « longue mémoire » : la psychologie, Wagenmakers, Farrel et Ratcliff (2004) [140], Tore, Delignieers et Lemoine (2007) [141] et la démographie, Gil-Alana (2004) [142] et Mishra (2008) [143].

### 3.1.1. Définition

La théorie des séries temporelles (ou chronologiques) est appliquée de nos jours dans des domaines aussi divers que l'économétrie, la médecine, la sismologie ou la démographie, pour n'en citer qu'une petite partie.

Une série chronologique est une suite formée d'observations au cours du temps. On peut songer par exemple à l'évolution de l'accélération en fonction du temps d'un séisme.

La définition mathématique adéquate pour l'étude et la prévision de telles suites consiste à les considérer comme une réalisation particulière d'une famille de variables aléatoires  $\{X_t, t \in I\}$  définies sur un espace de probabilité.

où  $I$  est un intervalle de temps qui peut être discret, (dans ce cas,  $I = \{1, 2, 3, \dots, T\}$  et  $T$  est le nombre d'observations) ou continu (Gourieroux et Monfort (1995) [144] ou de Brockwell and Davis (1991) [145]).

Un des objectifs principaux de l'étude d'une série temporelle est la prévision des réalisations futures, (prévoir l'évolution de la série mesurée.).

Bien entendu, aucun modèle ne correspond exactement à la réalité, et il est impossible de prévoir parfaitement le devenir d'une série temporelle. Lorsque cela sera possible, il existe des intervalles de prévisions, afin de pouvoir apporter une information quant à la précision de la prévision. Pour ce faire, il existe un large choix de modèle utilisable :

- les modèles de régression.
- les lissages exponentiels qui sont très simples à mettre en œuvre,
- les modèles de type ARMA, qui consistent à enlever de la série les tendances et saisonnalités (ou périodicités) évidentes et à modéliser le résidu restant. Ces méthodes sont plus sophistiquées et plus lourdes numériquement (temps de calcul) que les précédentes, mais également plus performantes.

Les défis que nous allons devoir relever sont les suivants :

- définir un modèle avec un nombre fini de paramètres,
- estimer les paramètres de ce modèle,
- vérifier la qualité d'ajustement du modèle, comparer différents modèles (partage de l'échantillon d'observations en 80% pour l'apprentissage et 20% pour le test),
- effectuer des prédictions.

### 3.1.2. Objectifs principaux d'étude d'une série de temps

Nous pouvons déjà poser quelques problèmes à résoudre lorsqu'on observe une série chronologique. Tout d'abord, la prévision consiste à prévoir les valeurs futures  $X_{T+h}$  ( $h = 1, 2, 3, \dots$ ) de la série chronologique à partir de ses valeurs observées jusqu'au temps  $T$ :  $X_1 \dots X_T$ . La prédiction de la série chronologique au temps  $t + h$  est notée  $\hat{X}_T(h)$  et, en général, est différente de la valeur réelle  $X_{T+h}$  que prend la série en  $T + h$ .

Pour mesurer cette différence, on définira l'erreur de prédiction par la différence  $\hat{X}_{T+h} - X_{T+h}$  "en moyenne" avec l'idée que plus  $h$  est grand, plus grande est l'erreur. L'intervalle de précision défini par les deux valeurs  $\hat{X}_T^{(1)}(h)$  et  $\hat{X}_T^{(2)}(h)$ , est susceptible de contenir la valeur inconnue de  $X_{T+h}$ .

La qualité de la prédiction pourra être mesurée en se basant sur 80 % des observations, puis en simulant une prédiction sur les 20% d'observations restantes. Cette technique est aussi utile pour :

- ✓ les séries qui contiennent des "trous"
- ✓ mesurer l'effet d'un phénomène accidentel (erreur, ...)

Un autre problème intéressant est la détection de ruptures résultantes. Ces ruptures peuvent être de deux ordres :

- a. Une rupture de niveau.
- b. Une rupture de pente.

La prévision de ces dates de rupture est bien évidemment très importante. Il faudra également éliminer la tendance (ou trend) représentant l'évolution du phénomène étudié. Cette tendance agit comme une forte corrélation entre les variables  $X_t$  qui n'exprime aucune liaison à caractère explicatif. Nous verrons comment enlever cette tendance pour voir si de telles liaisons existent afin de n'étudier que les corrélations sans tendance qui sont les quantités qui nous intéressent pour expliquer un phénomène observé.

Dans le même ordre d'idée, nous corrigerons les éventuelles variations saisonnières qui résultent d'un comportement cyclique dans la série observée. Il faut éliminer cette saisonnalité afin de nous intéresser uniquement aux composantes aléatoires de la série chronologique.

### 3.1.3. Modélisation

Un modèle est une image simplifiée de la réalité. Un modèle peut être meilleur qu'un autre pour décrire la réalité. Plusieurs questions se posent: Comment mesurer cette qualité ? Comment diagnostiquer un modèle ?

Dans le traitement des modèles d'ajustement, il faut d'abord parler du "modèle classique de décomposition"

$$X_t = m_t + S_t + Y_t \quad (3.1)$$

où les observations  $X_t$  sont modélisées comme superposition additive d'une tendance déterministe  $m_t$ , une saisonnalité (déterministe)  $S_t$  et une perturbation aléatoire  $Y_t$  qui représente les composantes ("erreurs") non systématiques, de moyenne nulle, mais qui possède une structure de corrélation non nulle. (Ce sera justement cette structure qui nous intéressera le plus par rapport au développement d'un bon modèle à ajuster pour réaliser notre but ultime, la prévision.). Ce modèle classique connaît comme généralisation :

$$X_t = f(t, Y_t). \quad (3.2)$$

On distingue souvent entre un ajustement additif du type :  $f(t, Y_t) = g(t) + Y_t$  pour lequel le modèle (3.1) est un exemple avec  $g(t) = m_t + S_t$  et un ajustement multiplicatif, c'est-à-dire  $f(t, Y_t) = g(t) \cdot Y_t$ , pour lequel on fait référence aux modèles du type (GARCH).

Tandis que la modélisation des composantes  $g(t)$  de type déterministe pose normalement relativement peu de problèmes. Une possibilité pour une modélisation puissante est donnée par les modèles autorégressifs du type :

$$Y_t = h(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, \varepsilon_t) \quad (3.3)$$

où  $\varepsilon_t$  est une variable aléatoire qui est indépendante de  $Y_t$  et qui ne porte pas de structure de corrélation intéressante.

La signification de ce type de modèle est évident : on essaie d'expliquer la valeur aléatoire  $Y_t$  par une relation fonctionnelle  $h(\cdot)$  avec des valeurs du passé de cette variable,  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots$ , mais en ajoutant un bruit aléatoire  $\varepsilon_t$ . Ce dernier est nécessaire pour distinguer cette modélisation d'un lien purement déterministe entre  $Y_t$  et ses valeurs du passé (une relation qui se trouve rarement en pratique : le lien fonctionnel donné par  $h$  restera toujours une approximation...).

Le cas particulier d'une relation fonctionnelle  $h$  linéaire est particulièrement important. Il mène aux modèles autorégressifs linéaires, par exemple, un modèle d'ordre 2 avec des coefficients autorégressifs  $a_1, a_2$  :

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (3.4)$$

où  $\{\varepsilon_t\}$  est un "bruit blanc", c'est-à-dire, une variable aléatoire de moyenne nulle qui est non corrélée.

Pour une généralisation finale des modèles du type (3.2) on cite les modèles explicatifs du type

$$X_t = f(V_t, Y_t). \quad (3.5)$$

où  $V_t$  représente une variable exogène ou un vecteur de plusieurs variables exogènes, qui sont soit déterministes, soit aléatoires. Ici, on distingue deux types de modèles explicatifs.

On parle d'un modèle statique si toutes les variables incluses sont observées au même temps  $t$  par exemple :

$$X_t = a + b V_t + Y_t. \quad (3.6)$$

Par contre, si le modèle inclut un décalage temporel par exemple :

$$X_t = f(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, Y_t) \quad (3.7)$$

Il s'agit d'un modèle dynamique. De nouveau, l'inclusion des "perturbations aléatoires"  $Y_t$  du type auto projectif (3.3) permettra une modélisation à la fois puissante et assez générale.

#### 3.1.4. Tendances et saisonnalités

Lorsqu'on souhaite analyser une série chronologique présentée sous la forme d'un tableau de chiffres, il faut tout d'abord représenter la série sous la forme d'un graphe. Dans les représentations des figures, on peut observer dans certains cas une composante déterministe qui se présente sous la forme d'une tendance ou d'un cycle saisonnier.

Une série chronologique peut également présenter ces deux comportements en même temps. Bien entendu, cette tendance ou cette saisonnalité ne sont pas toujours faciles à déceler. Il peut même arriver que des séries ne contiennent aucune de ces composantes déterministes. Il se peut aussi que le trend n'apparaisse qu'après avoir transformé les données par une fonction, par exemple, logarithmique.

Nous supposons que toute série chronologique  $X_t$  puisse être mise sous la forme de la décomposition vue déjà dans (3.1) :  $X_t = m_t + S_t + Y_t$

où  $m_t$  est appelé trend (ou tendance) et est soit une fonction décrite par un nombre fini de paramètres : une fonction linéaire du temps  $a + bt$  ou un polynôme en  $t$ , soit, plus généralement, une fonction lisse en temps  $t$ .

$S_t$  est appelé saisonnalité et est une fonction périodique. Soit  $d$  la période de  $S_t$ , on a alors :

$S_t = S_{t+d}$  pour tout  $t$ . On supposera également que  $S_t$  ne contient pas de tendance, ce qu'on écrira :

$$\sum_{j=1}^d S_{t+j} = 0 \quad (3.8)$$

En d'autres termes, toute la tendance est modélisée dans  $m_t$ .

$m_t + S_t$  : est la composante déterministe du modèle.

$Y_t$  : est par opposition, la composante aléatoire, supposée de moyenne nulle (parce qu'elle représente les composantes (erreurs) non systématiques), mais possédant en général une structure de corrélation non nulle. C'est bien évidemment la partie la plus intéressante à modéliser.

Nous verrons comment, sous certaines hypothèses, nous pourrions ajuster un modèle pour  $Y_t$  qui permettra de prévoir les valeurs futures de la série chronologique. Notons que, si  $Y_t$  n'est de moyenne nulle, on pourra remplacer  $m_t$ , par  $m_t + EY_t$ , et  $Y_t$  sera remplacé par :  $W_t = Y_t - EY_t$ . on a alors  $EW_t = 0$ .

Dans un premier temps, nous allons estimer la composante déterministe du signal. De cette façon, nous n'aurons plus qu'à nous intéresser à la partie aléatoire.

#### 3.1.4.1. Elimination de la tendance en l'absence de saisonnalité

Supposons, dans un premier temps, que la partie déterministe du modèle soit uniquement composée d'un trend  $m_t$  :

$$X_t = m_t + Y_t \quad (3.9)$$

Dans cette section, nous donnons trois méthodes pour estimer  $m_t$ .

#### 3.1.4.2 Estimation paramétrique

Cette méthode consiste à estimer le trend par la méthode des moindres carrés ordinaires. Supposons que l'on observe une série donnée. Il semble naturel d'estimer la composante  $m_t$  de cette série par une fonction linéaire :

$$\hat{m}_t = \hat{a} + \hat{b}t \quad (3.10)$$

où  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  sont des estimateurs des coefficients de la fonction linéaire estimant  $m_t$ .

Pour trouver ces estimateurs par la méthode des moindres carrés, il faut minimiser l'erreur quadratique commise en remplaçant  $m_t$  par  $\hat{m}_t$  dans (3.9). En conséquence, si on observe la série  $X_1 \dots X_T$  il faut trouver les coefficients minimisant :

$$\sum_{t=1}^T (X_t - a - bt)^2 = 0 \quad (3.11)$$

La solution de ce problème de minimisation est, en posant :

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{4T+2}{T-1} \bar{X} - \frac{6}{T(T-1)} \sum_{t=1}^T t \cdot X_t \\ \hat{b} = \frac{6}{T(T-1)} \left( \frac{2}{T(T-1)} \right) \sum_{t=1}^T t \cdot X_t - \bar{X} \end{cases} \quad (3.13)$$

### 3.1.4.3. Estimation non paramétrique

Dans certaines situations, il n'est pas facile de trouver le degré du polynôme d'ajustement pour  $m_t$ .

Si le polynôme utilisé au départ pour  $m_t$  n'est ni linéaire, ni quadratique dans ce cas, il n'est pas possible d'utiliser la méthode des moindres carrés. On pourrait utiliser un polynôme avec un degré élevé, mais le nombre de paramètres à estimer serait important et rendrait les calculs fastidieux. Dans cette situation, on a recourt à la théorie non paramétrique de l'estimation du trend, qui ne suppose pas que la tendance soit polynomiale a priori.

Pour comprendre cette technique, supposons que  $m_t$  soit linéaire dans un intervalle  $[t - q, t + q]$ . Dans ce cas, un bon estimateur du trend est donné par :

$$\hat{m}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{k=-q}^{+q} X_{t+k} \quad (3.14)$$

On peut à présent calculer  $\hat{m}_t$  pour chaque valeur de  $t$  en calculant cette moyenne sur les  $2q$  observations autour de  $t$ . On peut aussi voir l'intervalle  $[t - q, t + q]$  comme une "fenêtre" sur les observations, que l'on déplace lorsque  $t$  varie. A chaque valeur de  $t$ , l'estimateur  $\hat{m}_t$  calcule la moyenne des observations tombant dans cette fenêtre glissante (on dit alors qu'on effectue une estimation par moyenne mobile).

Pour éviter que des problèmes se posent aux bords de la série (lorsque  $t \leq q$ , ou  $t > T - q$ ), on pose :

$$\begin{cases} X_t = X_1 & \text{pour } t < 1 \\ X_t = X_T & \text{pour } t > T \end{cases}$$

### 3.1.4.4 Méthode des différences.

On peut également appliquer la méthode des différences pour éliminer à la fois le trend et la saisonnalité. Etant donné un modèle (3.2), appliquons l'opérateur de différence d'ordre  $d$ ,  $\nabla_d$ , où  $d$  est la période de  $S_t$ , à la série observée  $X_t$ :

$$\begin{aligned}\nabla_d X_t &= X_t - X_{t-d} \\ \nabla_d X_t &= m_t + S_t + Y_t - m_{t-d} + S_{t-d} - Y_{t-d} \\ \nabla_d X_t &= (m_t - m_{t-d}) + (S_t - S_{t-d}) + (Y_t - Y_{t-d})\end{aligned}\tag{3.15}$$

où, par définition, le terme  $(S_t - S_{t-d})$  est nul.  $\nabla_d$  est donc une série chronologique désaisonnalisée, mais contenant un trend  $\nabla_d m_t$ . Les méthodes d'élimination du trend en l'absence de saisonnalité s'appliquent donc.

En appliquant cette technique aux valeurs de la série chronologique donnée, on obtient  $\nabla_d X_t$ . Pour éliminer la tendance restante, on peut à nouveau utiliser la méthode des différences et l'on obtient la série purement aléatoire  $\nabla \nabla_d X_t$ .

### 3.1.5 Processus stationnaires.

Le but de cette section est d'introduire le cadre pour modéliser la composante stationnaire  $Y_t$ . C'est-à-dire, dans cette section nous fournissons une série de définitions de base de quantités qui caractérisent des processus stationnaires. Nous utilisons  $X_t$  pour représenter nos observations, à présent supposées stationnaires.

Lorsqu'on parle du modèle pour une série temporelle  $X_1 \dots X_T$  on utilise certaines notations et définitions spécifiques.

La suite de variables aléatoires  $\{X_t\}_{t \in Z}$  appelée processus stochastique. Les observations (données) empiriques  $X_1 \dots X_T$  sont interprétées comme des réalisations particulières de ce processus, tandis que  $\{X_t\}_{t \in Z}$  lorsqu'on ajoute des conditions sur sa structure probabiliste (ses moyennes, ses variances et covariances, ...) servent à dénoter le modèle (paramétrique) théorique. Celui-ci aidera à mieux comprendre le comportement "en moyenne" et des propriétés statistiques des estimateurs des paramètres du modèle.

Ayant introduit la notion d'un processus stochastique servant à modéliser des séries chronologiques, on se concentre maintenant sur la classe importante des processus stationnaires.

Considérons une suite de variables aléatoires  $\{X_t\}_{t=0,1,2,\dots}$ . On dit que cette suite est stationnaire en moyenne lorsque la moyenne de chacune des variables de la suite est identique :

$$EX_t = EX_0, \forall t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

De même, cette suite est stationnaire en variance lorsque :

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_0), \forall t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

La définition suivante caractérise les suites qui sont stationnaires en moyenne et dont la structure de covariance reste elle-aussi constante.

**Définition :**  $\{X_t\}_{t=0,1,2,\dots}$  est une suite stationnaire au sens faible (ou stationnaire du second ordre) lorsque les trois propriétés suivantes sont simultanément vérifiées :

$$(i) EX_t = \mu < \infty \quad \forall t \in N$$

$$(ii) EX_t^2 < \infty \quad \forall t \in N$$

$$(iii) \text{Cov}(X_s; X_s + t) = \text{Cov}(X_{s-1}; X_{s-1} + t) = \dots = \text{Cov}(X_0, X_t) \quad \forall s, t \in N$$

Dans cette définition, la propriété (i) exprime la stationnarité en moyenne de la suite, (ii) assure que la variance de chaque variable reste finie, et (iii) précise ce qu'on entend par "invariance de la structure de covariance". Par cette propriété, on peut introduire la suite :

$$r_h^X = \text{Cov}(X_s, X_s + h) \quad (3.18)$$

qui est indépendante de  $s$ . Cette suite est la suite des autocovariances (acv) de  $\{X_t\}$  et n'est bien définie que si la suite  $\{X_t\}$  est stationnaire du second ordre, donc respecte (iii). Comme précédemment, on peut normaliser cette suite et définir la suite des autocorrélations (acf = "autocorrelation function" de  $\{X_t\}$ ) par :

$$\rho_t^X = \frac{r_t^X}{r_0^X} \quad (3.19)$$

### 3.1.6 Bruit blanc.

Convention : une suite est stationnaire si elle est faiblement stationnaire.

Un processus bruit blanc, constitue en fait l'exemple le plus simple pour un processus stationnaire.

Définition. La suite de variables aléatoires  $\{\epsilon_t\}_{t=0,1,2,\dots}$  constitue un bruit blanc faible (respectivement fort) si les trois propriétés suivantes sont respectées.

$$(i) E\epsilon_t = 0 \quad \forall t \in Z$$

$$(ii) E\epsilon_t^2 = \sigma^2 \text{ est constante et strictement positive ;}$$

(iii)  $\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$  si  $t \neq s$  (respectivement, les  $\epsilon_t$  sont i.i.d.(c.à.d. Indépendants et identiquement distribués).

Si  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc faible, on notera  $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ .

Si  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc fort, on notera  $\{\varepsilon_t\} \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$ .

Le bruit blanc, même non portant de la structure de corrélation non triviale ("processus purement aléatoire"), jouera un rôle prépondérant dans la modélisation : Il intervient comme

module de base pour construire des processus stationnaires portant des corrélations intéressantes ainsi qu'il servira comme modèle pour les "résidus" d'une modélisation, la composante qui reste après avoir modélisé toute structure de corrélation intéressante et qui est supposée de ne plus contribuer à cette structure non triviale.

En effet, tester si ces résidus sont compatibles avec un bruit blanc sera un des moyens principaux pour une diagnostique du modèle ajusté aux données stationnaires mais auto corrélées.

Deux exemples pour des processus stationnaires qui représentent déjà deux modèles importantes pour inclure une structure de corrélation non triviale. Le premier processus moving average = moyenne mobile, qui introduit de la corrélation en combinant linéairement plusieurs bruits blancs  $\{\varepsilon_t\}$  décalés en temps. Le deuxième c'est le processus autorégressif qui s'exprime comme une combinaison linéaire entre les valeurs des observations  $X_t$  et des valeurs du passé de ses observations  $X_{t-1}; X_{t-2}$ . Il est à noter que ces deux exemples ont en commun qu'il s'agit d'une représentation en combinaison linéaire.

Pour des objectifs analytiques le bruit blanc est approximé par des fonctions typiques. En premier lieu on procède à la génération d'une série de nombres pseudo aléatoires  $u_i$ , tel qu'ils ne se répètent généralement, qu'après un cycle très long, On utilise la fonction modulo, où le nombre pseudo aléatoire  $u_i$  est relié au suivant par la relation suivante :

$$r_{i+1} = k \cdot r_i \pmod{m} \quad (3.20)$$

Où  $k$  et  $m$  sont des nombres entiers choisis de sorte à avoir le cycle le plus long possible, dans cette étude on a pris  $k=6807$  et  $m=2147483647$ .

Les nombres pseudo aléatoires  $u_i$  générés; par cette méthode peuvent être supposés comme des séquences indépendantes d'une variable aléatoire  $u$ , qui possède une distribution rectangulaire  $0 < u < 1$ . Ces nombres pseudo aléatoires seront utilisés pour générer des fonctions typiques qui sont très proches du bruit blanc avec une distribution gaussienne de moyenne  $\mu$  et de variance  $s^2$ .

La transformation de Ahrens et Dieter et Box miller [146]est utilisée comme suit :

Prenons :

$$\begin{cases} X_1 = 2 \cdot r_1 - 1 \\ X_2 = 2 \cdot r_2 - 1 \\ W = X_1 + X_2 \end{cases} \quad (3.21)$$

Si  $W > 1$  la procédure est répétée autrement :

$$\begin{cases} y_1 = \left[ X_1 (-2A \log \left( \frac{X_1}{W} \right)) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot s + u \\ y_2 = \left[ X_2 (-2A \log \left( \frac{X_2}{W} \right)) \right]^{1/2} \cdot s + u \end{cases} \quad (3.22)$$

Maintenant on peut établir une fonction typique ou les  $y_1, y_2, \dots, y_n$  représentent ses ordonnées espacées d'intervalles de  $(\Delta t = 0.02 \text{ sec})$ . En prenant  $m$  intervalles de temps et les ordonnées correspondantes on obtient un processus stationnaire, caractérisé par sa fonction d'autocorrélation qui est presque nulle.

### 3.2. Processus linéaires

Les processus linéaires constituent le modèle le plus simple pour décrire la partie aléatoire d'une série chronologique. Les processus autorégressifs et les processus moyennes mobiles (moving average) pour ces processus linéaires.

Ces processus sont des combinaisons linéaires de processus de bruit blanc (fort ou faible) dont l'intérêt tient au comportement de leur fonction d'autocovariance, qui tend vers zéro lorsque l'on compare deux variables éloignées dans le temps :

$$r_h^X = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \rightarrow 0 \text{ pour } |h| \rightarrow \infty. \quad (3.23)$$

Intuitivement, cela signifie que la "mémoire" du processus est contrôlée : la liaison du second ordre est plus importante pour deux variables proches dans le temps que pour des variables hautement différées. La suite des autocovariances d'un processus linéaire tend "rapidement" vers zéro. Ce modèle est donc à mémoire appelée "courte", même si elle est "infinie" pour un processus autorégressif (contrairement au processus moving average à mémoire finie).

Les séries ARMA est un cas particulier important à ces processus :

Les séries ARMA qui sont, la combinaison des processus autorégressifs et moyennes mobiles. Cette classe des processus ARMA jouera le rôle prépondérant dans la modélisation concrète des processus stationnaires, tandis que la classe encore plus large des processus linéaires sert surtout pour classifier de la façon générale théorique les processus autorégressifs, moyennes mobiles et ARMA par rapport à ses propriétés intéressantes pour la modélisation et à la forme théorique de ses autocovariances et autocorrélations.

### 3.2.1. Processus linéaires et processus linéaires généraux

Un processus linéaire est un processus stochastique  $X_t$  formé par une combinaison linéaire (non nécessairement finie) de bruits blancs forts. On définit également la classe des processus linéaires généraux, qui sont constitués de combinaisons linéaires de bruits blancs faibles.

**Définition :**  $\{X_t\}_{t \in Z}$  est un processus linéaire (respectivement un processus linéaire général) de moyenne  $\mu$  s'il peut être écrit sous la forme :

$$X_t = \mu + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \varepsilon_{t-k} \quad (3.24)$$

où  $\{\varepsilon_t\}_{t \in Z}$  est un bruit blanc fort (respectivement faible), avec variance  $\sigma_\varepsilon^2$ , et où la suite des coefficients  $b_k$  est supposée telle que :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^2 < \infty \quad (3.25)$$

Dans cette dernière définition, nous devons préciser le sens qui est donné à la série infinie (3.24). Pour ce faire, considérons une suite de nombres  $m_n \rightarrow \infty$  et formons le processus linéaire tronqué :

$$\mu + \sum_{k=-m_n}^{+m_n} b_k \varepsilon_{t-k} \quad (3.26)$$

qui est bien défini puisque le nombre de termes dans la somme est fini. La convergence (3.24) signifie que la moyenne quadratique :

$$E \left( \mu + \sum_{k=-m_n}^{+m_n} b_k \varepsilon_{t-k} - X_t \right)^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^2 E[\varepsilon_{t-k}^2] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k \geq m_n} b_k^2 \quad (3.27)$$

tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$  (et donc lorsque  $m_n \rightarrow \infty$ ).

La restriction (3.25) faite sur les coefficients  $b_k$  est usuelle, et signifie que, lorsque  $k$  grandit, les coefficients  $|b_k|$  décroissent rapidement (autrement, la somme infinie (3.25) ne saurait être finie).

La condition (3.25) se dit également "b<sub>k</sub>" est de carré sommable", ou encore  $b_k \in l^2(Z)$ . En

terme de modélisation, cette condition signifie que l'influence de la série  $\{\varepsilon_t\}$  est limitée dans le temps :  $X_t$  sera principalement déterminé par le bruit blanc aux instants proches de  $t$ . La condition (3.25) est également nécessaire pour que la série (3.24) converge au sens de la moyenne quadratique, comme nos considérations ci-dessus le montrent.

Le résultat suivant montre que les processus linéaires que nous avons définis sont des processus stationnaires.

**Théorème :** Si  $X_t$  est un processus linéaire général défini par (3.24) avec  $\varepsilon_t \sim WN(0; \sigma_\varepsilon^2)$  alors  $X_t$  est stationnaire et on a :

$$\begin{cases} r_0^X = \text{Var}X_t = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^2 \\ r_s^X = \text{Cov}X_t, X_{t+s} = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k b_{k+s}, \forall s \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.28)$$

### 3.2.2. Processus ARMA

Les processus ARMA (Auto Regressive Moving Average) est une classe de processus linéaires qui est très importante dans la modélisation des séries chronologiques. Ces processus sont linéaires et, sous certaines conditions, stationnaires. Leur linéarité fournira une théorie simple de la prévision.

**Définition :** Un processus linéaire stationnaire  $\{X_t\}$  est appelée ARMA( $p, q$ ),  $p > 0, q > 0$  s'il existe des constantes  $a_1, \dots, a_p$  ( $a_p \neq 0$ ) et  $\theta_1, \dots, \theta_q$  ( $\theta_q \neq 0$ ) et un processus  $\varepsilon_t \sim WN(0; \sigma_\varepsilon^2)$  tels que :

$$X_t - \sum_{k=1}^p a_k X_{t-k} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (3.29)$$

Le processus  $\{\varepsilon_t\}$  est appelé processus des innovations. La signification de cette classe de processus pour la modélisation se déduit du résultat suivant :

**Théorème :** Pour une suite d'autocovariances  $\{r_h\}$  donnée et pour chaque nombre entier  $K > 0$ , il existe un processus ARMA  $\{X_t\}$  tel que ses premières  $K$  autocovariances  $r_h^X$  coïncident avec  $r_h$ :  $r_h^X = r_h$  pour  $h = 0, \dots, K$

Pour étudier cette classe importante de processus, nous allons tout d'abord nous concentrer sur quelques exemples particuliers de processus ARMA. Tout d'abord, si  $p = q = 0$ , (3.29) devient :  $X_t = \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$  et donc, un processus ARMA (0, 0) est un bruit blanc faible. Les deux grandes catégories de processus ARMA sont ceux pour lesquels un des deux paramètres  $p$  ou  $q$  est nul, et l'autre paramètre est non nul. On aura :

Si  $p = 0$  et  $q > 0$ , les processus ARMA(0, q), notés MA(q), de la forme :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-j}, \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (3.40)$$

et appelés processus à moyenne mobile d'ordre q.

Si  $p > 0$  et  $q = 0$ , les processus ARMA(p, 0), notés simplement AR(p), de la forme :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^p a_k X_{t-k}, \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (3.41)$$

et appelés autorégressifs d'ordre p.

Dans la définition des processus ARMA, nous avons indiqué que ces processus sont stationnaires. Cette précision s'avère nécessaire car un processus défini par (3.29) pourrait ne pas être stationnaire.

Dans la suite, nous examinerons quelles sont les conditions sur les coefficients  $a_1, \dots, a_p$  et  $\theta_1, \dots, \theta_q$  pour que le processus défini par (3.29) soit toujours stationnaire.

### 2.2.2.1. Processus MA(q)

Ces processus apparaissent naturellement comme cas particuliers d'un processus linéaire général (3.24) dans lequel le nombre de coefficients non nuls est fini, et donc la série infinie devient finie. Soit donc un processus de la forme :

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad (3.42)$$

Pour  $q > 0$  fixé et pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ . La première question que nous nous posons est de savoir si ce processus est stationnaire. On a bien entendu que  $EX_t = 0$  et, pour ce qui est de la structure de second ordre, on adapte (3.28) pour obtenir :

$$r_h^X = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=1}^q \theta_j \theta_{j+h} & \text{si } 0 \leq h \leq q \\ 0 & \text{si } h > q \end{cases} \quad (3.43)$$

avec  $\theta_0 = 1$ . En conséquence, tout processus à moyenne mobile est automatiquement un processus stationnaire.

La fonction d'autocorrélation d'un processus MA(q) s'ensuit automatiquement :

$$\rho_h^X = \begin{cases} \frac{\theta_h + \theta_1 \theta_{h+1} + \dots + \theta_{q-h} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{si } 1 \leq h \leq q \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.44)$$

et, en particulier,  $\rho_h^X = \frac{\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2}$  ne s'annule que si  $\theta_q = 0$ , ce qui revient à dire que le

processus n'est pas d'ordre  $q$ .

Insistons sur le fait que si  $h > q$ , alors la fonction d'autocorrélation d'un processus  $MA(q)$  s'annule. Cette observation sera utile pour la modélisation :

si, à partir de données  $X_1, \dots, X_T$  la fonction d'autocorrélation empirique n'est pas significativement différente de zéro au-delà d'un certain nombre  $q_0$ , on sera alors guidé pour choisir d'ajuster un modèle  $MA(q_0)$  aux données observées.

Ce choix est en plus motivé par le résultat suivant sur la signification des processus  $MA(q)$  :

**Théorème :** Soit  $\{X_t\}$  un processus linéaire stationnaire corrélé d'ordre  $q$ , c'est-à-dire dont  $r_h^X = 0$  pour tout  $|h| > q$ . Alors  $\{X_t\}$  possède une représentation comme processus  $MA(q)$ .

### 3.2.2.2. Processus $AR(p)$ : stationnarité et causalité

Ces processus forment une classe flexible de modèles pour de nombreux phénomènes observés. Ils sont définis implicitement par la relation :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q a_j X_{t-j}, \{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (3.45)$$

Contrairement aux processus  $MA(q)$ , cette définition pose quelques problèmes :

Le processus ainsi défini est-t-il stationnaire ? Quelle est sa forme explicite ?

**Définition :** Un processus  $AR(p)$  est dit causal lorsqu'il existe une suite de nombres  $\{\alpha_k\}$  telle que :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| < \infty \quad (3.46)$$

et

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon_{t-k} \quad (3.47)$$

Remarquons immédiatement que tout processus à moyenne mobile est, par définition, causal.

Nous pouvons à présent retenir de notre développement une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus  $AR(1)$  soit stationnaire et causal :

$|a| < 1$ , et dans ce cas, les coefficients  $\alpha_k$  de sa représentation causale  $MA(\infty)$  sont donnés par  $\alpha_k = a^k$ .

Observons également que la situation  $|a| = 1$  ne fournit pas de solution stationnaire ce qui s'explique de soi en vue de la forme de l'auto covariance. La généralisation de ce résultat au cas où le modèle autorégressif est d'ordre  $p > 1$  n'est pas directe. Le résultat suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes de stationnarité et de causalité des modèles autorégressifs sur le comportement de l'opérateur  $A$ .

**Théorème :** Le processus autorégressif est causal et stationnaire si et seulement si le polynôme en  $z$ :

$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^p a_k z^k$  Polynôme générateur est telle que :

$$A(z) \neq 0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1. \quad (3.48)$$

Les coefficients  $a_k$  apparaissant dans la représentation causale  $MA(\infty)$ , sont déterminés par :

$$1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j = \frac{1}{A(z)} \text{ si } |z| \leq 1. \quad (3.49)$$

### 3.2.2.3. Inversibilité

**Définition :** Si  $X_t$  est un processus  $MA(q)$  défini par (3.40), on dit que  $X_t$  est inversible lorsqu'il existe  $\theta_j$  avec  $\sum_j \theta_j < \infty$  telle que :

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j X_{t-j} \quad (3.50)$$

Par définition, on a directement que tout processus autorégressif est automatiquement inversible. L'équation (3.50) est parfois qualifiée de "représentation  $AR(\infty)$ " du processus. C'est d'ailleurs une des motivations principales pour l'étudier : Un processus linéaire qui est inversible permet une telle représentation  $AR(\infty)$  avec des coefficients  $\theta_j$  rapidement croissants. Alors, il existe une bonne approximation par un processus  $AR(p)$ , avec un ordre  $p$  assez petit.

Celui-ci permettra de traiter le processus linéaire donné dans le cadre simple et efficace de l'estimation et de la prédiction des processus autorégressifs d'ordre  $p$ .

Le résultat suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes d'inversibilité des modèles à moyenne mobile.

**Théorème :** Le processus à moyenne mobile (3.42) est inversible si et seulement si le polynôme en  $z$ :

$$\theta(z) = \sum_{j=0}^q \theta_j z^j \quad (3.51)$$

est tel que :  $\theta(z) \neq 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \leq 1$

Les coefficients  $\theta_j$  apparaissant dans (3.50) sont déterminés par :

$$\sum_{j=0}^q \theta_j z^j = \frac{1}{\theta(z)} \text{ si } |z| \leq 1. \quad (3.52)$$

### 3.2.2.4. Autocovariance des processus ARMA

Les résultats que nous avons exposés pour les processus  $AR(p)$  ou  $MA(q)$  peuvent être résumés en considérant un processus général  $ARMA(p, q)$  donné par (3.29).

**Théorème :** Soit  $X_t$  un processus  $ARMA(p, q)$  respectant (3.29). Supposons que les polynômes :

$$(z) = 1 - a_1z - \dots - a_pz^p \text{ et } \theta(z) = 1 + \theta_1z + \dots + \theta_qz^q \quad (3.53)$$

n'ont pas de racine commune.

1.  $X_t$  est stationnaire et causal si et seulement si  $A(z) \neq 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \leq 1$ . Les coefficients  $\theta_j$  apparaissant dans (3.47) sont déterminés par :

$$\sum_{j=0}^q \alpha_j z^j = \frac{\theta(z)}{A(z)} \text{ si } |z| \leq 1. \quad (3.54)$$

2.  $X_t$  est inversible si et seulement si :  $\theta(z) \neq 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \leq 1$ .

Les coefficients  $\phi_j$  apparaissant dans (3.51) sont déterminés par :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j z^j = \frac{A(z)}{\theta(z)} \text{ si } |z| \leq 1. \quad (3.55)$$

3.  $X_t$  est inversible si et seulement si :  $\theta(z) \neq 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \leq 1$ .

Les coefficients  $\phi_j$  apparaissant dans (3.46) sont déterminés par :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j z^j = \frac{A(z)}{\theta(z)} \text{ si } |z| \leq 1. \quad (3.56)$$

### 3.3. Filtre de Kalman

Kalman (1960,1963) [147] fut le pionnier de l'algorithme appelé filtre de Kalman. Son idée était d'exprimer un système dynamique par une représentation espace d'état et de mettre à jour d'une manière séquentielle la projection linéaire de ce système. Parmi les bénéfices que fournit l'algorithme, on cite le calcul de la log-vraisemblance du processus ARMA.

#### 3.3.1. Présentation espace d'état

Soit  $X_t$  un  $(N \times 1)$  vecteur de variables observées et  $\xi_t$  un  $(r \times 1)$  vecteur non-observable appelé vecteur d'état. Hamilton (1994) [148] a donné la représentation espace d'état de  $X_t$ , qui est définie par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \xi_{t+1} = F \cdot \xi_t + \xi v_{t+1} , & \text{équation d'état} \\ X_t = H\xi_t + A'y_t + \omega_t , & \text{équation d'observation} \end{cases} \quad (3.57)$$

Où  $F$ ,  $A'$  et  $H$  sont des matrices de paramètres de dimensions  $(r \times r)$ ,  $(N \times k)$  et  $(N \times r)$  respectivement et  $y_t$  est  $(k \times 1)$  vecteur de variables exogènes ou prédéterminées.  $v_t$  et  $w_t$  sont deux vecteurs de bruit blanc de dimension  $(r \times 1)$  et  $(N \times 1)$  respectivement, non corrélés avec  $\xi_t$  ils vérifient:

$$E[v_t v_t'] = \begin{cases} Q, & \text{pour } t = \tau \\ 0_m, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.58)$$

$$E[\omega_t \omega_t'] = \begin{cases} R, & \text{pour } t = \tau \\ 0_m, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.59)$$

Où  $Q$  et  $R$  sont des matrices de dimension  $(r \times r)$  et  $(N \times N)$  respectivement.  $v_t$  et  $\omega_t$  sont assumés non-corrélés :

$$E[\omega_t \omega_t'] = 0 \text{ pour tout } t \text{ et } r. \quad (3.60)$$

$y_t$  peut contenir des valeurs du vecteur  $X_t$

### 3.3.2. Présentation espace d'état avec paramètres stochastiques

Le modèle espace d'état avec paramètres stochastiques donné par Hamilton (1994) [148], est défini par

$$\begin{cases} \xi_{t+1} = F(y_t) \cdot \xi_t + v_{t+1} \\ X_t = H(y_t) \xi_t + a(y_t) + \omega_t \end{cases} \quad (3.61)$$

Où  $F(y_t)$  désigne une matrice  $(r \times r)$ ,  $a(y_t)$  un vecteur  $(N \times 1)$  et  $H(y_t)$  une matrice  $(Nr)$ , dont les éléments sont fonctions de  $y_t$ . Cette présentation espace d'état généralise celle donnée précédemment.

On assume que, conditionnellement à  $y_t$  et aux données

$X_t \equiv (X'_{t-1}, X'_{t-2}, \dots, X'_1, y'_{t-1}, y'_{t-2}, \dots, y'_1)$  observées jusqu'à  $(t - 1)$ , le vecteur  $(v'_{t+1}, \omega'_{t+1})$  a une distribution Gaussienne de moyenne nulle et de matrice variance-covariance suivante :

$$\begin{bmatrix} Q_{(y_t)} & 0 \\ 0 & R_{(y_t)} \end{bmatrix}.$$

On en déduit que  $\left[ \begin{pmatrix} \xi_t \\ X_t \end{pmatrix} / X_t, X_t \right]$  est gaussien.

Maintenant, nous allons décrire l'algorithme du filtre de Kalman, On présume que  $x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N$  ont été observées. L'algorithme débute par le calcul de  $\xi_1 | 0$  qui dénote la prévision de  $\xi_1 | 0$ , et qui n'est autre que l'espérance de  $\xi_1$  le carré moyen des erreurs commises est :  $\xi_1 | 0 = E(\xi_1)$

Le carré moyen des erreurs commises est :

$$P_{1|0} = E([\xi_1 - \hat{\xi}_{1|0}][\xi_1 - \hat{\xi}_{1|0}]'). \quad (3.62)$$

En partant de ces valeurs initiales, la deuxième étape est de calculer  $\hat{\xi}_{2|1}$  et  $P_{2|1}$ .

La procédure de calcul pour  $t = 2, 3, \dots, N$  à la même forme basique. C'est pourquoi nous restreignons la description de l'algorithme à l'étape  $t$ .

A l'étape  $t$  en donnant  $\hat{\xi}_{t|t-1}$  et  $P_{t|t-1}$ , l'objectif sera de calculer  $\hat{\xi}_{t|t+1}$  et  $P_{t|t+1}$  à partir des deux équations suivantes :

$$\hat{\xi}_{t|t+1} = F(y_t) \hat{\xi}_{t|t-1} + K_t H'(y_t) (X_t - a(y_t) - H(y_t) \hat{\xi}_{t|t-1}), \quad (3.63)$$

$$K_t = P_{t|t-1} H(y_t) (H'(y_t) P_{t|t-1} H(y_t) + R)^{-1} \quad (3.64)$$

$$\hat{\xi}_{t|t+1} = F(y_t)\hat{\xi}_{t|t-1} + K_t H'(y_t)(X_t - a(y_t) - H(y_t)\hat{\xi}_{t|t-1}), \quad (3.63)$$

$$K_t = P_{t|t-1} H(y_t)(H'(y_t)P_{t|t-1}H(y_t) + R)^{-1} \quad (3.64)$$

et la matrice de gain de Kalman,

$$P_{t+1|t} = F(y_t)[P_{t|t-1} - K_t H'(y_t)P_{t|t-1}]F'(y_t) + Q \quad (3.65)$$

Ensuite nous calculons la prévision de  $X_{t+1}$  donnée par :

$$\hat{X}_{t+1|t} = a(y_t) + H'(y_t)\hat{\xi}_{t+|t} \quad (3.66)$$

et le carré moyen des erreurs associées

$$\hat{M}_{t+|t} = E([X_{t+1} - \hat{X}_{t+|t}][X_{t+1} - \hat{X}_{t+|t}]') = H'(y_t)P_{t+1|t}H(y_t) + R \quad (3.67)$$

Pour plus de détail de cet algorithme, nous invitons le lecteur à consulter le livre de Hamilton (1994) [121].

### 3.4. Filtre passe-bas.

Il ya plusieurs façons pour calculer un filtre dépendant d'une application donnée. Dans les enregistrements sismiques le filtrage est nécessaire pour corriger les erreurs introduites dans les accélérogrammes par le processus de génération (Hudson) [149]. Les séismes simulés contiennent des erreurs de basses fréquences qui influent sur le processus d'intégration.

Si  $H(w)$  est la fonction de transfert du filtre, le problème de l'approximer par un filtre de réponse d'impulsion finie pour une limite des fréquences passantes  $w_p$ , une limite des fréquences bloquées  $w_s$  et des tolérances  $\delta_p$  et  $\delta_s$ ; la fonction de transfert  $G(w)$  correspondante au filtre doit satisfaire :

$$\begin{cases} |1 - G(w)| < \delta_p & , 0 < w < w_p \\ |G(w)| < \delta_s & , w_p < w < n \end{cases} \quad (3.68)$$

Pour approximer  $H(w)$  on utilise l'optimisation numérique, ainsi pour deux valeurs données  $p$  et  $s$  on définit  $g_u$  telle elle minimise l'intégrale suivante :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |H(w) - \sum_{u=r}^s g_u \cdot \exp(-i u \cdot w)|^2 dw \quad (3.69)$$

$H(w)$  et écrite sous la forme :  $x(w) + i \cdot y(w)$  et sous la forme :  $x_u + i \cdot y_u$

L'équation (3.69) est développée et différenciée respectivement par rapport à  $x_u$  et  $y_u$ . On obtient la solution suivante :

$$g_u = h_u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(w) \cdot \exp(-i u \cdot w) dw, u = r, \dots, s \quad (3.70)$$

La fonction de transfère approchée sera :

$$H_{r,s}(w) = \sum_{u=r}^s h_u \cdot \exp(-i u \cdot w) \quad (3.71)$$

pour  $r = -s$  on aura :

$$H_{r,s}(w) = \sum_{u=-s}^s h_u \cdot \exp(-iu \cdot w) = \frac{2s+1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(\lambda) \cdot D_{(2s+1)}(w - \lambda) d\lambda \quad (3.72)$$

La fonction de transfère d'un filtre passe-bas idéal est représentée comme suit :

$$H(w) = \begin{cases} 1 & 0 < w < w_c \\ 0 & 0 < w < w_c \end{cases} \quad (3.73)$$

Ou  $w_c$  est la fréquence de coupage (cutofffréquency)

Le coefficient  $h_u$  pourrait être calculé en utilisant l'équation (3.74) pour des valeurs réelles :

$$h_u = \frac{1}{\pi} \int_0^w \cos(u \cdot w) dw \quad (3.74)$$

et  $h_0 = \frac{w}{\pi}$

Dans la simulation des séismes  $w_c$  est prise égale à 0.0378 .

## **Chapitre 4: Estimation, tests de validation et prévisions des processus ARMA.**

### **4. Prédiction des processus stationnaires.**

Pour prédire les valeurs futures d'un processus ARMA, il sera nécessaire d'en estimer les paramètres. Dans le chapitre précédent, on a étudié deux estimateurs importants de ces processus : la moyenne empirique qui estime la moyenne théorique du processus et la fonction d'autocorrélation empirique qui permet d'estimer la véritable fonction d'autocorrélation du processus.

Dans le présent chapitre, nous supposons que l'ordre du modèle a été choisi. Nous savons donc que les données proviennent, disons, d'un processus ARMA(p, q) et on se demande, d'une part, comment estimer les p + q paramètres  $a_1, \dots, a_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  apparaissant dans (3.29) et, d'autre part, comment construire une théorie prédictive pour ce modèle.

#### **4.1. Les méthodes d'estimation des paramètres du modèle ARMA.**

Dans cette section, nous nous intéressons à l'estimation des paramètres du modèle ARMA. L'étude sur l'estimation des paramètres du modèle pour les modèles classiques ARMA à une histoire relativement longue. Pour une perspective historique, nous avons évoqué les livres de Priestley (1994) [150], Stoica et al. (1997) [151], Proakis et al (2006) [152] et d'autres.

Parmi les problèmes de l'inférence statistique qui se posent dans les modèles ARMA est l'estimation des paramètres inconnus. La difficulté et la complexité de ces modèles ont poussé l'intérêt des chercheurs vers l'estimation des paramètres des modèles particuliers.

Dans ce paragraphe nous allons présenter les méthodes d'estimation des paramètres des modèles ARMA, nous évoquerons aussi la nouvelle approche qui se base sur la méthode du maximum de vraisemblance.

##### **4.1.1. Estimation des paramètres autorégressifs : les équations de Yule-Walker.**

Considérons tout d'abord un processus autorégressif d'ordre p causal et de moyenne nulle :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j}, \{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (4.1)$$

En multipliant chaque membre de cette équation par  $X_{t-h}$  ( $h = 0, \dots, p$ ) et en prenant l'espérance de chaque côté, on obtient, pour le premier membre, la fonction d'autocovariance :

$$E(X_t X_{t-h}) = r_h^X \quad (4.2)$$

et, pour le second membre :

$$\sum_{k=1}^p a_k E(X_t X_{t-h}) + E(\varepsilon_t X_{t-h}) = r_h^X = \begin{cases} \sum_{k=1}^p a_k r_{k-h}^X & \text{si } h = 1 \dots, p \\ \sum_{k=1}^p a_k r_k^X + \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

car, par l'hypothèse de causalité du processus,  $E(\varepsilon_t X_{t-h})$  s'annule sauf pour  $h=0$ . En égalant (4.2) et (4.3), on a, pour  $h > 0$ , la relation :

$$r_h^X = \begin{cases} \sum_{k=1}^p a_k r_{k-h}^X & \text{si } h = 1 \dots, p \\ \sum_{k=1}^p a_k r_k^X + \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle : en notant  $r_p^X$  le vecteur colonne de longueur  $p$  formé par  $(r_1^X, \dots, r_p^X)$ , en notant  $a_p$  le vecteur colonne  $(a_1, \dots, a_p)$  et en formant la matrice  $p \times p$  dont l'élément  $(i, j)$  vaut  $r_{i-j}^X$  c'est-à-dire :

$$R_p^X = \begin{pmatrix} r_0^X & r_1^X & \dots & r_p^X \\ r_1^X & r_0^X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_1^X \\ r_p^X & \dots & \ddots & r_0^X \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

alors le système (4.4) peut se réécrire matriciellement et on a le système :

$$\begin{cases} r_p^X = R_p^X a_p \\ r_0^X = a_p r_p^X + \sigma_\varepsilon^2 \end{cases} \quad (4.6)$$

sont appelées équations de Yule-Walker. Elles relient les paramètres  $a_p$  du processus autorégressif à la fonction d'autocovariance théorique qui définit  $r_p^X$  et  $R_p^X$ .

Si on veut estimer les paramètres  $a_1, \dots, a_p$  du modèle, on peut se servir des équations de Yule-Walker en utilisant la fonction d'autocovariance empirique  $\hat{r}_p^X$  définie au chapitre précédent comme un estimateur de  $r_p^X$ . On construit alors le vecteur colonne  $\hat{r}_p^X = (\hat{r}_1^X, \dots, \hat{r}_p^X)$  et la matrice  $\hat{R}_p^X$  construite en substituant  $r_h^X$  par  $\hat{r}_h^X$  dans (4.5).

Les relations trouvées ci-dessus entre  $a_p$ ,  $r_p^X$  et  $R_p$  permettent donc de trouver un estimateur  $\hat{a}_p$  de  $a_p$  et un estimateur  $\hat{\sigma}_\varepsilon$  de  $\sigma_\varepsilon$  à travers le système de Yule-Walker suivant, à résoudre en  $\hat{a}_p$  et  $\hat{\sigma}_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} \hat{r}_p^X = \hat{R}_p^X \hat{a}_p \\ \hat{r}_0^X = \hat{a}_p \hat{r}_p^X + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \end{cases} \quad (4.7)$$

Nous signalons déjà ici qu'il existe une méthode de résoudre ce système d'équations de Yule-

Walker sans passer par l'inversion de la matrice  $\hat{R}_p^X$  l'algorithme itératif de Durbin-Levinson.

Nous allons à présent étudier quelques propriétés de cet estimateur.

Tout d'abord, on peut montrer que les valeurs estimées  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p$  du processus AR(p) respectent la condition (3.48).

En d'autres termes, le processus AR(p) défini par :

$Y_t - \hat{a}_1 Y_{t-1} - \dots - \hat{a}_p Y_{t-p} = \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$  est stationnaire et causal. Il s'agit du modèle ajusté aux observations  $X_1, \dots, X_T$ .

La fonction d'autocovariance du modèle ajusté est notée  $r_h^Y$  et obéit aux équations de Yule-Walker :

$$\begin{cases} r_p^Y = R_p^Y a_p & h = 1, \dots, p \\ r_0^Y = R_p^Y a_p + \sigma_\varepsilon^2 & h = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

En utilisant (3.7), on tire de ce système que :  $r_p^Y = r_p^X h = 0, \dots, p$  et donc que la fonction d'autocovariance du modèle ajusté coïncide avec la fonction d'autocovariance empirique. En conséquence, nous avons le résultat suivant :

**Théorème :** Pour toute matrice  $R = (r_{|i-j|})_{i,j=0}^p$ , inversible, il existe un processus AR(p) dont la fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\hat{r}_h = \begin{cases} r_h & \text{si } h = 0, \dots, p \\ 0 & \text{si } h > p \end{cases} \quad (4.9)$$

Le résultat suivant décrit la normalité asymptotique des estimateurs de Yule-Walker.

**Théorème :** Si  $\{X_t\}$  est un processus stationnaire et causal de la forme (4.1) avec  $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$  et si  $\hat{a}_p$  est l'estimateur de Yule-Walker de  $a_p$ , obtenu à partir de  $T$  observations  $X_1, \dots, X_T$  du processus autorégressif, alors, lorsque  $T \rightarrow \infty$  :

$$\sqrt{T}(\hat{a}_p - a_p) \rightarrow Np(0, \sigma_\varepsilon^2 R_p^{-1})$$

Où  $R_p$  est la matrice  $p \times p$  de covariance donnée par (4.5). (Cette matrice est inversible si  $r_0^X > 0$ .) De plus, pour  $T \rightarrow \infty$  :  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \xrightarrow{p} \sigma_\varepsilon^2$

Les estimateurs de Yule-Walker sont donc consistants et, par leur normalité asymptotique, ils sont asymptotiquement efficaces car ils possèdent asymptotiquement les mêmes variances que les estimateurs du maximum de vraisemblance traités ci-dessous. On dit, qu'un estimateur est efficace si sa variance coïncide avec la plus petite variance possible (étant donnée par la borne de Rao-Cramér). En plus, la normalité asymptotique permet de construire des intervalles de confiance pour chaque composante du vecteur  $\hat{a}_p$ .

#### 4.1.2. Estimation par maximum de vraisemblance

L'estimation des paramètres des modèles ARMA et bilinéaires par cette technique fut d'abord abordée par Guégan (1981) pour le modèle superdiagonal d'ordre 1 BL(0,0,2,1) [153], parallèlement par Subba Rao (1981) pour les modèles superdiagonaux BL(p,0,p,p) [154]. Enfin, ce résultat fut généralisé pour les modèles superdiagonaux BL(p,0,P,Q), par Gabr et Subba Rao (1984) [155].

##### 4.1.2.1. Approche courante

La méthode du maximum de vraisemblance offre une approche générale à l'estimation des paramètres inconnus à l'aide de données. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité de probabilité  $f(x, \theta)$ . Le problème consiste donc à construire une expression analytique fonction des réalisations de cette variable dans un échantillon de taille  $n$  permettant de trouver la valeur numérique la plus vraisemblable pour le paramètre.

La méthode de Yule-Walker ne permet pas d'estimer de la façon efficace les paramètres d'un modèle contenant une partie MA parce qu'elle mène à un système d'équations non linéaires ce que l'on peut facilement vérifier déjà pour le cas d'un MA(1). Néanmoins, il existe un algorithme itératif, l'algorithme des innovations voir (Brockwell & Davis, 1996) [156], qui permet de résoudre numériquement efficace ce système d'équations non linéaires. Donc, cet algorithme joue le même rôle que l'algorithme de Durbin-Lenvinson pour le traitement itératif des équations de Yule-Walker.

Dans cette section, nous allons appliquer, comme méthode alternative, la méthode générale du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres d'un modèle ARMA.

Considérons un modèle causal ARMA(p, q) de moyenne nulle :

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \theta_0 \varepsilon_t + \dots + \theta_q \varepsilon_t - q, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (4.10)$$

où  $\theta_0 = 1$  et dans lequel on supposera que :

$$1 - a_1 z - \dots - a_p z^p \neq 0 \text{ pour } |z| \leq 1 \quad (4.11)$$

et

$$1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q \neq 0 \text{ pour } |z| \leq 1. \quad (4.12)$$

Notre objectif est à présent d'estimer les vecteurs colonnes  $a_p$  et  $\theta_q = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ .

Dans un premier temps, supposons que l'on connaisse la distribution de  $X_t$  pour tout  $t$ . Nous supposons que le processus  $\{X_t\}$  est gaussien, c'est-à-dire que toutes les fonctions de

distributions de  $\{X_t\}$  sont multivariées normales. Cette hypothèse nous permettra d'écrire simplement la fonction de vraisemblance du modèle qui est la probabilité d'observer  $X_T = (X_1, \dots, X_T)$  sous l'hypothèse gaussienne

$$\mathcal{L}(R_T^X) = (2\pi)^{-T/2} |\det R_T^X|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} X_T^T (R_T^X)^{-1} X_T} \quad (4.13)$$

où  $R_T^X$  est la matrice de covariance dont l'élément  $(i, j)$  est donné par  $E(X_i X_j) = r_{|i-j|}^X$

Cette matrice est constituée par la fonction d'autocovariance  $r_h^X$ .

Or, nous avons vu au chapitre précédent que cette fonction d'autocovariance pouvait être exprimée en fonction des paramètres  $a_p, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2$ . On peut donc également exprimer  $R_T^X$  en fonction de ces paramètres:  $R_T^X = R_T^X(a_p, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2)$  et la fonction de vraisemblance du processus gaussien s'écrit :

$$\mathcal{L}(a_p, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2) = \mathcal{L}(R_T^X(a_p, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2)) \quad (4.14)$$

Si  $\{X_t\}$  n'est pas un processus gaussien, on ne connaît pas en général les fonctions de distribution de  $\{X_t\}$  et la fonction de vraisemblance n'est plus disponible. Toutefois, même dans ce cas, on utilisera (4.14) comme une mesure de la qualité de l'ajustement de la matrice de covariance aux données et on considérera cette fonction pour trouver des estimateurs de  $a_p, \theta_q$  et  $\sigma_\varepsilon^2$ . Ces estimateurs sont donnés par la maximisation de  $\mathcal{L}(a_p, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2)$ . Il est alors possible de montrer que, si le processus (4.10) est causal, inversible et défini avec  $\{\varepsilon_t\} \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , alors le processus :

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \hat{a}_i X_{t-1} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \varepsilon_{t-j}, \{\varepsilon_t\} \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad (4.15)$$

est lui-même stationnaire causal et inversible. Il est également possible de démontrer un théorème de normalité asymptotique de ces estimateurs qui sont comme nous l'avons déjà indiqué, asymptotiquement efficaces.

**Théorème :** Si  $X_t$  est un processus causal et inversible de la forme (4.10) avec :

$\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$  et si  $\beta = (a_p, \theta_q)$ , l'estimateur de maximum de vraisemblance est asymptotiquement normal :

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \rightarrow N(0, V(\beta)) \quad (4.16)$$

où la matrice variance-covariance  $V(\beta)$  est une fonction du paramètre  $\beta$  (pour les détails voir Brockwell et Davis (1991) [118], qui coïncide, pour le cas d'un processus autorégressif pur d'ordre  $p$ , avec la matrice de la variance asymptotique des estimateurs Yule-Walker  $\sigma_\varepsilon^2 R_p^{-1}$

En pratique, les estimateurs du maximum de vraisemblance sont trouvés numériquement par

des algorithmes itératifs : on cherche le maximum de la fonction de vraisemblance numériquement (par exemple, par la méthode de Newton-Raphson), démarrant d'une valeur initiale pour le vecteur du paramètre recherché. Cette valeur initiale peut être fournie par les estimateurs de Yule-Walker ou les estimateurs des moindres carrés définis ci-dessus.

Puisque dans l'équation ARMA la partie MA n'est pas observable, pour tous ces estimateurs il faut se servir du concept des résidus. Ceux-ci sont définis (supposant que  $\mu_x = 0$ ) par une itération :

$$e_t(a_p, \theta_q) := X_t - \sum_{k=1}^p a_k X_{t-k} - \sum_{k=1}^q \theta_k e_{t-k} \quad (4.17)$$

avec  $e_t(a_p, \theta_q) = 0, t \leq 0$ , et  $X_t = 0, t \leq 0$ .

Donc :

$$e_1 = X_1, e_2 = X_2 - a_1 X_1 - \theta_1 e_1, \text{ etc...} \quad (4.18)$$

Pour comprendre comment le concept des résidus aide à construire des estimateurs de  $a_p, \theta_q$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  étudions donc les estimateurs des moindres carrés définis par :

$$(\hat{a}_p, \hat{\theta}_q)_{MC} = \operatorname{argmin} \sum_{t=\max(p,q)+1}^T e_t^2(a_p, \theta_q) \quad (4.19)$$

et

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2; MC = T^{-1} \sum_{t=\max(p,q)+1}^T e_t^2(a_p, \theta_q) \quad (4.20)$$

On s'aperçoit que dans la somme des moindres carrés (à minimiser) tout ne dépend maintenant que des valeurs observables.

### 4.1.3. Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et Gauss en 1809, cette technique d'estimation consiste à minimiser la somme des carrés des erreurs sur un certain domaine des paramètres contenant la vraie valeur de  $\theta$ . Elle a été abordée pour le modèle bilinéaire diagonal d'ordre 1 BL(1,0,1,1) par Pham et Tran (1981) [157], ensuite, elle fut généralisée par Guégan et Pham (1987) [158], pour étudier les modèles bilinéaires diagonaux, en utilisant la représentation markovienne Pham (1985) [159]. Cette méthode s'utilise pour tout modèle bilinéaire qui admet une représentation markovienne inversible.

La méthode des moindres carrés, permet de comparer des données expérimentales, généralement entachées d'erreurs de mesure, à un modèle mathématique censé décrire ces données.

Ce modèle peut prendre diverses formes. Il peut s'agir de lois de conservation que les quantités mesurées doivent respecter. La méthode des moindres carrés permet alors de minimiser l'impact des erreurs expérimentales en « ajoutant de l'information » dans le processus de mesure.

Dans le cas le plus courant, le modèle théorique est une famille de fonctions d'une ou plusieurs variables muettes  $x$ , indexées par un ou plusieurs paramètres  $\theta$  inconnus. La méthode des moindres carrés permet de sélectionner parmi ces fonctions, celle qui reproduit le mieux les données expérimentales. On parle dans ce cas d'ajustement par la méthode des moindres carrés. Si les paramètres  $\theta$  ont un sens physique, la procédure d'ajustement donne également une estimation indirecte de la valeur de ces paramètres.

#### **4.1.3.1. Présentation de la méthode**

La méthode consiste en une prescription (initialement empirique), qui est que la fonction  $f(x, \theta)$  qui décrit « le mieux » les données est celle qui minimise la somme quadratique des déviations des mesures aux prédictions de  $f(x, \theta)$ . Si, par exemple, nous disposons de  $N$  mesures  $(y_i)_{i=1, \dots, N}$  les paramètres  $\theta$  « optimaux » au sens de la méthode des moindres carrés sont ceux qui minimisent la quantité :

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i, \theta))^2 = \sum_{i=1}^N r_i^2(\theta) \quad (4.21)$$

où les  $r_i(\theta)$  sont les résidus du modèle, i.e. est l'écart entre la mesure  $y_i$  et la prédiction  $f(x_i, \theta)$  donnée par le modèle.  $S(\theta)$  peut être considéré comme une mesure de la distance entre les données expérimentales et le modèle théorique qui prédit ces données. La prescription des moindres carrés commande que cette distance soit minimale.

Si, comme c'est généralement le cas, on dispose d'une estimation de l'écart-type  $\sigma_i$  du bruit qui affecte chaque mesure  $y_i$ , on l'utilise pour « peser » la contribution de la mesure au  $\chi^2$ . Une mesure aura d'autant plus de poids que son incertitude sera faible :

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - f(x_i, \theta)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \omega_i (y_i - f(x_i, \theta))^2 \quad (4.22)$$

La quantité  $\omega_i$ , inverse de la variance du bruit affectant la mesure  $y_i$ , est appelée poids de la mesure  $y_i$ . La quantité ci-dessus est appelée khi carré ou khi-deux. Son nom vient de la loi statistique qu'elle décrit, si les erreurs de mesure qui entachent les  $y_i$  sont distribuées suivant une loi normale (ce qui est très courant). Dans ce dernier cas, la méthode des moindres carrés

permet de plus d'estimer quantitativement l'adéquation du modèle aux mesures, pour peu que l'on dispose d'une estimation fiable des erreurs  $\sigma_i$ . Si le modèle d'erreur est non gaussien, il faut généralement recourir à la méthode du maximum de vraisemblance, dont la méthode des moindres carrés est un cas particulier.

Son extrême simplicité fait que cette méthode est très couramment utilisée de nos jours en sciences expérimentales. Une application courante est le lissage des données expérimentales par une fonction empirique (fonction linéaire, polynômes ou splines). Cependant son usage le plus important est probablement la mesure de quantités physiques à partir de données expérimentales.

Dans de nombreux cas, la quantité que l'on cherche à mesurer n'est pas observable et n'apparaît qu'indirectement comme paramètre  $\theta$  d'un modèle théorique  $f(x, \theta)$ . Dans ce dernier cas de figure, il est possible de montrer que la méthode des moindres carrés permet de construire un estimateur de  $\theta$ , qui vérifie certaines conditions d'optimalité. En particulier, lorsque le modèle  $f(x, \theta)$  est linéaire en fonction de, le théorème de Gauss-Markov garantit que la méthode des moindres carrés permet d'obtenir l'estimateur non biaisé le moins dispersé. Lorsque le modèle est une fonction non linéaire des paramètres  $\theta$  l'estimateur est généralement biaisé. Par ailleurs, dans tous les cas, les estimateurs obtenus sont extrêmement sensibles aux points aberrants : on traduit ce fait en disant qu'ils sont non robustes. Plusieurs techniques permettent cependant de rendre plus robuste la méthode.

L'exemple le plus simple d'ajustement par la méthode des moindres carrés est probablement le calcul de la moyenne  $m$  d'un ensemble de mesures indépendantes  $(y_i)_{i=1, \dots, N}$  entachées d'erreurs gaussiennes. Autrement dit, on veut estimer  $m$  dans la relation :

$$y_i = m + \epsilon_i \tag{4.23}$$

pour  $i = 1, \dots, N$  et où  $\epsilon_i$  est un bruit blanc.

La prescription des moindres carrés revient à minimiser la quantité :

$$X^2(m) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - m}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \omega_i (y_i - m)^2 \tag{4.24}$$

où  $\omega_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$  est le poids de la mesure  $y_i$ . Statistiquement,  $\sigma_i^2$  s'interprète comme la variance de la variable aléatoire  $\epsilon_i$ . On parle alors de moindres carrés pondérés. Lorsqu'on ne tient pas compte de la pondération, on pose simplement  $\omega_i = 1$  et on parle de moindres carrés ordinaires (MCO).

La quantité  $X^2(m)$ , ou somme des carrés des résidus, est une forme quadratique définie positive. Son minimum se calcule par différenciation :  $\text{grad}X^2(m) = 0$  . Cela donne la formule classique :

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i y_i}{\sum_{i=1}^N \omega_i} \quad (4.25)$$

Autrement dit, l'estimateur par moindres carrés de la moyenne  $m$  d'une série de mesures entachées d'erreurs gaussiennes (connues) est leur moyenne pesée (ou pondérée), c'est-à-dire leur moyenne empirique dans laquelle chaque mesure est pondérée par l'inverse du carré de son incertitude. Le théorème de Gauss-Markov garantit qu'il s'agit du meilleur estimateur linéaire non biaisé de  $m$ .

La moyenne estimée  $m$  fluctue en fonction des séries de mesures  $y_i$  effectuées. Comme chaque mesure est affectée d'une erreur aléatoire, on conçoit que la moyenne d'une première série de  $N$  mesures diffèrera de la moyenne d'une seconde série de  $N$  mesures, même si celles-ci sont réalisées dans des conditions identiques. Il importe de pouvoir quantifier l'amplitude de telles fluctuations, car cela détermine la précision de la détermination de la moyenne. Chaque mesure  $y_i$  peut être considérée comme une réalisation d'une variable aléatoire  $Y_i$ , de moyenne  $\bar{y}_i$  et d'écart-type  $\sigma_i$  . L'estimateur de la moyenne obtenu par la méthode des moindres carrés, combinaison linéaire de variables aléatoires, est lui-même une variable aléatoire :

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i y_i}{\sum_{i=1}^N \omega_i} \quad (4.26)$$

L'écart-type des fluctuations de  $m$  est donné par (combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes) :

$$\sigma(m) = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^{-1/2} = (\omega_i)^{-1/2} \quad (4.27)$$

Sans grande surprise, la précision de la moyenne d'une série de  $N$  mesures est donc déterminée par le nombre de mesures, et la précision de chacune de ces mesures. Dans le cas où chaque mesure est affectée de la même incertitude  $\sigma_i = \sigma_1$  la formule précédente se simplifie en :

$$\sigma(m) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (4.28)$$

La précision de la moyenne s'accroît donc comme la racine carrée du nombre de mesures. Par exemple, pour doubler la précision, il faut quatre fois plus de données ; pour la multiplier par 10, il faut 100 fois plus de données.

#### 4.1.4. Méthode des moments

L'esprit de cette méthode se base sur le calcul des moments pour estimer les paramètres des modèles bilinéaires régis par l'équation du modèle. Mais, vu la complexité des calculs des moments du modèle, l'estimation par cette méthode n'a été obtenue explicitement que pour des cas particuliers dont les moments d'ordres supérieurs existent, comme par exemple le modèle BL(0,0,2,1) (Guégan (1984)) [160].

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'obtenir des estimateurs initiaux, et son inconvénient paraît avec la difficulté des calculs dans des modèles bilinéaires complexes.

#### 4.1.5. Méthode d'autocovariance

Cette méthode utilise la fonction d'autocovariance empirique pour estimer les paramètres des modèles bilinéaires. Elle a été abordée par Kim et Billard (1990) [161]. pour le modèle bilinéaire diagonal d'ordre 1 BL(1,0,1,1) et par Mathews et Moon (1991) [162] pour le modèle bilinéaire BL(p,0,p, 1)

### 4.2. Prédiction.

Pour traiter le problème de la prédiction des valeurs futures  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots$  d'une série chronologique observée jusqu'au temps  $T$ , nous supposons que les observations proviennent d'un processus stationnaire  $ARMA(p, q)$ , causal, de moyenne nulle, et dont on connaît l'ordre  $(p, q)$  ainsi que les coefficients. Bien entendu, en pratique, lorsqu'on est face à  $T$  observations, il faudra ajuster un modèle adéquat, en choisissant non seulement l'ordre, d'après l'observation de la fonction d'autocovariance empirique et les méthodes que nous décrirons dans le prochain chapitre, mais également en estimant les coefficients du modèle par les techniques que nous venons de voir.

#### 4.2.1. Equations linéaires de prédiction.

Nous allons considérer les prédictions linéaires de la série étudiée. Cela signifie que, si on observe les réalisations  $X_1, \dots, X_T$  de la série  $\{X_t\}$ , on cherche à prédire la valeur  $X_{T+h}$  où  $h$  est un nombre positif fixé) à partir d'une combinaison linéaire des observations. Ainsi, en notant  $\hat{X}_{T+h}$  la valeur prévue au temps  $t + h$  de  $\{X_t\}$ , on étudiera les prédictions qui s'écrivent sous la forme :

$$\hat{X}_{T+h} = k_0 + k_1 X_T + \dots + k_T X_1. \quad (4.29)$$

Les coefficients  $k_0, \dots, k_T$  dans cette expression sont choisis de telle sorte que la prédiction  $\hat{X}_{T+h}$  soit la plus proche possible de la véritable réalisation  $X_{T+h}$  du processus en  $T + h$ . Pour mesurer cette erreur de prédiction à minimiser, considérons l'erreur quadratique moyenne :

$$S(k) = E(X_{T+h-k_0} - k_1 X_T - \dots - k_T X_1)^2 \quad (4.30)$$

Les coefficients  $k = (k_1, \dots, k_T)$  dans (4.29) seront choisis tels qu'ils minimisent l'erreur  $S(k)$ . Ces coefficients forment donc la solution d'un système de  $T$  équations correspondantes à chaque dérivée partielle de  $S(k)$ . Ce système peut s'écrire dans la forme suivante :

$$\begin{cases} E[X_{T+h-k_0} - \sum_{i=1}^T k_i X_{T+1-i} = 0] \\ E[(X_{T+h-k_0} - \sum_{i=1}^T k_i X_{T+1-i})X_{T+1-j}] = 0, \quad j = 0, \dots, T \end{cases} \quad (4.31)$$

La première équation donne  $k_0 = 0$ , qui correspond à l'hypothèse que le processus est à moyenne nulle. Quant aux  $T - 1$  équations suivantes, elles peuvent se réécrire (avec  $k_0 = 0$ ) :

$$r_{h-1+j}^X - \sum_{i=1}^T k_i r_{|i-j|}^X = 0, \quad j = 0, \dots, T \quad (4.32)$$

ou encore, en notation matricielle :

$$R_T^X k_T = r_T^X(h) \quad (4.33)$$

Où

$$k_T = (k_1, \dots, k_T)', \quad r_T^X(h) = (r_h^X, \dots, r_{h+T-1}^X) \quad (4.34)$$

et  $R_T^X$  est la matrice  $T \times T$  de covariance dont l'élément  $(i, j)$  est :

$$(R_T^X)_{i,j} = r_{|i-j|}^X, \quad i, j = 1, \dots, T. \quad (4.35)$$

L'équation (4.33) résout le problème de la prédiction. Connaissant la fonction d'autocovariance du processus (qui, en pratique, devra être estimée), la prédiction  $\hat{X}_{T+h}$  est donnée par la relation (4.29) avec des coefficients  $k_T$  tels que :

$$k_T = (R_T^X)^{-1} r_T^X(h) \quad (4.36)$$

où cette inverse de la matrice  $R_T^X$  existe si  $r_0^X > 0$  et  $r_h^X \rightarrow 0$  pour  $|h| \rightarrow \infty$  (ce qui est vérifié pour un processus linéaire).

#### 4.2.2. Algorithme de Durbin-Levinson

Même si, formellement, nous avons trouvé les équations de prédiction, il reste à inverser une matrice  $T \times T$  pour trouver les coefficients de (4.29).

Cette inversion est, pour un processus linéaire, théoriquement toujours possible mais parfois difficile et coûteuse en temps, surtout si le nombre  $T$  d'observations disponibles est élevé.

Dans cette perspective, il est utile de développer des algorithmes qui décrivent une méthode d'inversion plus rapide. On remarque également la similitude formelle entre les équations des coefficients de prédiction (4.33) et les équations de Yule-Walker (4.7). Ces deux systèmes sont résolus par l'inversion de la matrice de covariance qui, dans le premier cas, est de rang  $T$  et dans le deuxième, de rang  $p$ .

En conséquence, les méthodes algorithmiques que nous allons décrire maintenant pourront également être appliquées pour estimer les coefficients d'un modèle autorégressif par les équations de Yule-Walker.

L'idée de l'algorithme de Durbin-Levinson est que, pour prédire la valeur de la série au temps  $T + h$ , on pourrait utiliser une prédiction de la série au  $T + h - 1$ . En remontant ainsi dans l'intervalle de temps de prédiction, cet algorithme propose le schéma de prédiction suivant :

à partir des  $T$  observations, on évalue  $\hat{X}_{T+1}$  à partir des  $T$  observations auxquelles on ajoute  $\hat{X}_{T+1}$ , on évalue  $\hat{X}_{T+2}$ , et ainsi de suite jusqu'à  $\hat{X}_{T+h}$  pour le  $h$  souhaité

Pour la première étape de cette démarche, on trouve, en notant  $\varphi_{Ti} = k_i$  dans (4.29) :

$$\hat{X}_{T+1} = \varphi_{T1}X_T + \dots + \varphi_{TT}X_1. \quad (4.37)$$

L'erreur quadratique moyenne de prédiction a été calculée à la section précédente et est égale à :

$$v_T = E(X_{T+1} - \hat{X}_{T+1})^2 \quad (4.38)$$

$$v_T = r_0^X - \varphi_T^1 r_T^X \quad (4.39)$$

où  $\varphi_T = (\varphi_{T1}, \dots, \varphi_{TT})$ .

L'algorithme de Durbin-Levinson, énoncé ci-dessus, permet d'exprimer les coefficients  $\varphi_T$  en fonction des coefficients  $\varphi_{T-1}$ . Ainsi, pour prédire  $\hat{X}_{T+1}$ , on utilisera les coefficients  $\varphi_T$  trouvés pour cet algorithme. Récursivement pour trouver  $\hat{X}_{T+2}$ , on aura besoin des coefficients  $\varphi_{T+1}$  que l'on calcule à partir de  $\varphi_T$ , et ainsi de suite.

**Théorème :** Si  $\{X_t\}$  est un processus stationnaire de moyenne zéro et de fonction d'autocovariance  $r_h^X$  telle que  $r_0^X > 0$  et  $r_h^X \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow \infty$ , alors les coefficients  $\varphi_{Tj}$  et les erreurs quadratiques moyennes de prédiction  $h_T$  définis par (4.37) et (4.38) satisfont l'algorithme suivant :

• *Etape 1 :*

$$\varphi_{11} = \frac{r_1^X}{r_0^X}, v_0 = r_0^X \quad (4.40)$$

• *Etape T :*

$$1. \varphi_{TT} = [r_T^X - \sum_{i=1}^T \varphi_{T-1,i} r_{T-1,i}^X r_{T-i}^X] v_{T-1}^{-1} \quad (4.41)$$

$$2. \begin{pmatrix} \varphi_{T1} \\ \vdots \\ \varphi_{T,T-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{T-1,1} \\ \vdots \\ \varphi_{T-1,T-1} \end{pmatrix} - \varphi_{T,T} \begin{pmatrix} \varphi_{T-1,T-1} \\ \vdots \\ \varphi_{T-1,1} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

$$v_T = v_{T-1} (1 - \varphi_{TT}^2) \quad (4.43)$$

### 4.2.3. Prédiction d'un processus autorégressif

Supposons que l'on observe T réalisations du processus AR(p) stationnaire causal et de moyenne nulle (4.1). Le prédicteur linéaire de la réalisation suivante, c'est-à-dire au temps  $T + 1$ , est noté  $\hat{X}_{T+1}$  et est défini par (4.29). L'erreur de prévision (4.30) s'écrit dans ce cas :

$$S(k) = E(\sum_{i=1}^T k_i X_{T+1-i} - \varepsilon_{T+1} - \sum_{i=1}^T a_i X_{T+1-i})^2 \quad (4.44)$$

$$S(k) = E(\sum_{i,j=1}^T r_{|i-j|}^X k_j + \sigma_\varepsilon^2 + \varepsilon_{T+1} - \sum_{i,j=1}^T a_i r_{|i-j|}^X - 2 \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T a_i r_{|i-j|}^X k_i) \quad (4.45)$$

La dérivée de S(k) suivant  $k_1, \dots, k_T$  mène au système :

$$(\sum_{i,j=1}^T r_{|i-j|}^X (k_i - a_i) r_{|i-j|}^X) k_i + \sum_{i=1+p}^T k_i r_{|i-j|}^X k_l = 0, \quad l = 1, \dots, T \quad (4.46)$$

et donc à la solution :

$$k = (a_1, \dots, a_p, 0, \dots, 0) \quad (4.47)$$

On peut donc écrire le prédicteur  $\hat{X}_{T+1,p}$  explicitement :

$$\hat{X}_{T+1,p} = a_1 X_T + a_1 X_{T-1} + \dots + a_p X_{T+1-p} \quad (4.48)$$

et l'erreur de prédiction s'est simplifiée dans ce cas d'un processus AR(p)

$$v_p = E(X_{T+1} - \hat{X}_{T+1,p})^2 = \sigma_{\varepsilon,p}^2 \quad (4.49)$$

où  $\sigma_{\varepsilon,p}^2$  est la variance d'innovations du processus AR(p).

On voit alors aussi tout de suite que les premiers éléments non nuls de ce vecteur  $k = (a_1, \dots, a_p, 0, \dots, 0)$  constituent le vecteur de la solution du système d'équations Yule-Walker (4.33) qui est bien de dimension p pour le cas d'un processus AR(p).

### 4.2.4. Prédiction d'un processus ARMA

La prédiction de la partie MA(q) d'un processus ARMA (p, q) nécessite un peu de réflexion supplémentaire car, comme pour le problème de l'estimation des coefficients de la partie moyenne mobile, cette partie n'est pas observable.

De nouveau, on s'en sort en utilisant les résidus  $e_t(a_p, \theta_q)$ , comme définis dans l'équation

(4.17), pour rappel :

$$e_t(a_p, \theta_q) = X_t - \sum_{k=1}^p a_k X_{t-k} - \sum_{k=1}^q \theta_k e_{t-k}(a_p, \theta_q) \quad (4.50)$$

avec  $e_t(a_p, \theta_q) = 0, t \leq 0$ , et  $X_t = 0, t \leq 0$ .

D'après le paragraphe précédent, la partie AR(p) est prédite par :

$$\widehat{X}_{T+1} = \sum_{k=1}^p a_k X_{T+1-k} \quad (4.51)$$

Alors, pour une ARMA (p,q) on utilise comme prédicteur :

$$\widehat{X}_{T+1} = \sum_{k=1}^p a_k X_{T+1-k} + \sum_{j=1}^q \theta_j e_{T+1-j}(a_p, \theta_q) \quad (4.52)$$

puisque les  $\{\varepsilon_t\}$  ne sont pas observables.

L'erreur de prédiction se comporte comme celle de la prédiction de la partie AR(p) :

$$E[(X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1})^2] \approx \sigma_\varepsilon^2, \text{ si } T \text{ est grand.} \quad (4.53)$$

En pratique, on estime le vecteur des coefficients  $(a_p, \theta_q)$  par les estimateurs du maximum de vraisemblance  $(\widehat{a}_p, \widehat{\theta}_q)$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  par  $T^{-1} \sum_t e_t^2(\widehat{a}_p, \widehat{\theta}_q)$  alors que :

$$\widehat{X}_{T+1} = \sum_{k=1}^p a_k X_{T+1-k} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{T+1-j} \quad (4.54)$$

Pour une prédiction de horizon  $h > 1$  il faut remplacer les valeurs inconnues de  $X_{T+h-1}, \dots, X_{T+1}$  par les prédictions précédentes  $\widehat{X}_{T+h-1}, \dots, \widehat{X}_{T+1}$ .

Avec  $e_{T+h-1} = \dots = e_{T+1} = 0$ . L'erreur de prédiction  $E(X_{T+h} - \widehat{X}_{T+h})^2$  augmente avec  $h$ , et elle est approximative égale à  $\sigma_\varepsilon^2 \sum_0^{h-1} b_k^2$  où les  $\{b_k\}$  viennent de la représentation du processus ARMA(p,q). (Pour des détails voir Brockwell and Davis).

### 4.3. Ajustement d'un modèle ARMA

Pour calculer un intervalle de prévision en pratique, il sera nécessaire d'ajuster un adéquat aux données modèle adéquat aux données observées. Le but de cette section est de présenter les outils statistiques les plus utilisés pour atteindre cet objectif. Nous verrons différentes méthodes qui permettront de choisir un modèle ARMA approprié aux données observées, avant de développer des tests d'ajustement pour valider ces choix. Le premier outil permettant de choisir l'ordre d'un modèle ARMA est basé sur l'analyse de la structure d'autocorrélation des données.

#### 4.3.1. Choix de l'ordre d'un modèle par les fonctions d'autocorrélation

Au chapitre précédent, nous avons vu comment estimer la fonction d'autocovariance d'un processus. Le théorème central limite permis de développer un test sur la fonction d'autocorrélation empirique afin de voir si un processus de type "bruit blanc" pouvait être

ajusté aux données. L'objectif de cette section est de généraliser cette procédure de test à la classe des processus ARMA.

#### 4.3.1.1. Autocorrélation d'un modèle MA(q)

Lorsqu'on observe une série chronologique, la fonction d'autocorrélation empirique est un premier outil pour sélectionner l'ordre du modèle qui doit être ajusté aux données. Il est observé sur des exemples de processus à moyenne mobile qu'un test pouvait pratiquement être mis en place pour déterminer si les coefficients d'autocorrélation empiriques sont négligeables ou significativement différents de zéro.

En effet, si un processus stationnaire est de la forme :

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad (4.55)$$

Nous avons observé à la section 3.3.2.1 que sa fonction d'autocorrélation  $r_h^X$  s'annule pour  $h > q$ . De plus, nous avons montré que, pour tout processus linéaire, la fonction d'autocorrélation empirique  $\hat{\rho}_h^X$  est un estimateur asymptotiquement sans biais de  $\rho_h^X$ , et on a le théorème central limite :

$$\sqrt{T}(\hat{\rho}_1^X - \rho_1^X, \dots, \hat{\rho}_h^X - \rho_h^X) \rightarrow N(0, \Sigma) \text{ lorsque } T \rightarrow \infty \quad (4.56)$$

où les éléments de la matrice de covariance asymptotique sont donnés par la formule de Bartlett. En conséquence, si on observe un échantillon  $X_1, \dots, X_T$ , cette propriété permet de construire un intervalle de confiance pour le test :

$$\begin{cases} H_0: X_t \sim MA(q) \\ H_1 \text{ non } H_0 \end{cases} \quad (4.57)$$

Sous l'hypothèse  $H_0$ , le processus  $X_t$  est un  $MA(q)$ . Sous  $H_0$ , la distribution asymptotique de  $\rho_h^X$  est donc donnée par (4.1), et les éléments diagonaux de la matrice de covariance asymptotique sont donnés par :

En d'autres termes, sous  $H_0$ , les coefficients d'autocorrélation empirique  $h > q$  sont asymptotiquement distribués selon une loi normale de moyenne zéro et de variance  $hh/T$ . Cela signifie que, sous  $H_0$ ,  $\rho_h^X$  avec  $h > q$  doit se situer dans l'intervalle de confiance :

$$\left[-1, 96\sqrt{\Sigma_{hh}/T}, 1, 96\sqrt{\Sigma_{hh}/T}\right]$$

avec une probabilité de 0,95. On utilise dans la pratique l'intervalle de confiance plus strict :

$$\left[-1, 96\sqrt{T}, 1, 96\sqrt{T}\right].$$

### 4.3.1.2 Autocorrélation partielle d'un modèle AR(p)

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment généraliser le test précédent au cas des processus autorégressifs. Quelle est la fonction d'autocorrélation d'un processus autorégressif ? Considérons le processus AR(1) suivant :

$$X_t = 0,9 X_{t-1} + \varepsilon_t; \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0; 1) \quad (4.58)$$

La fonction d'autocorrélation théorique de ce processus est donnée par  $\rho_h^X = (0,9)^h$ . Nous constatons que la fonction d'autocorrélation de ce processus ne s'annule pas, mais tend asymptotiquement vers zéro lorsque l'horizon  $h$  augmente. Essayons de voir pour quoi cette fonction ne s'annule pas. L'équation (4.58) montre une corrélation linéaire entre  $X_t$  et  $X_{t-1}$  égale à 0,9. Par ailleurs, (4.4) s'applique également à  $X_{t-1}$ , ce qui permet d'écrire :

$$X_{t-1} = 0,9 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}. \quad (4.59)$$

En insérant cette dernière équation dans (4.58), on obtient alors :

$$X_t = (0,9)^2 X_{t-2} + 0,9 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, 1), \quad (4.60)$$

et on observe qu'il existe une corrélation linéaire de  $(0,9)^2$  entre  $X_t$  et  $X_{t-2}$ . On peut bien entendu répéter ce raisonnement pour comprendre que la structure de l'équation autorégressive implique que la corrélation linéaire entre toutes les données ne s'annule pas. (Pourquoi ce phénomène n'apparaît-il pas pour les processus MA?).

Cette remarque peut également être observée sur les scatter plot. Un scatter plot consiste à représenter les données suivant deux axes représentant  $X_t$  et  $X_{t-1}$ . Ainsi, la pente de droite de régression linéaire ajusté aux données du scatter plot constitue une estimation de la dépendance linéaire entre  $X_t$  et  $X_{t-1}$ , donc la fonction d'autocorrélation au lag 1.

Un exemple de deux scatter plot représentant  $(X_t, X_{t-1})$  et  $(X_t, X_{t-2})$ , avec les droites de régression :

$$X_t = 0,9 X_{t-1} \text{ et } X_t = (0,9)^2 X_{t-2} \quad (4.61)$$

### 4.3.1.3. La fonction d'autocorrélation partielle.

Les observations précédentes montrent que la fonction d'autocorrélation n'est pas l'outil idéal pour analyser un processus autorégressif. On peut trouver un meilleur outil en se basant sur l'observation suivante : pour le processus (4.58), on sait que la corrélation entre  $X_t$  et  $X_{t-1}$  est égale à  $\rho_1^X = 0,9$ . Au lieu d'étudier la corrélation entre  $X_t$  et  $X_{t-2}$ , l'idée est plutôt de considérer la corrélation entre les variables.

$$X_t - 0,9 X_{t-1} X_{t-2} - 0,9 X_{t-1} \quad (4.62)$$

Empiriquement, cela signifie qu'on étudie la corrélation entre  $X_t$  et  $X_{t-2}$  lorsque l'influence linéaire de  $X_{t-1}$  a été ôtée. Un simple calcul montre que, pour le processus (4.58) :

$$\text{Corr}(X_t - 0,9 X_{t-1}; X_{t-2} - 0,9 X_{t-1}) = 0 \quad (4.63)$$

Ce résultat peut à nouveau être observé grâce au scatter plot entre  $X_t - 0,9 X_{t-1}$  et  $X_{t-2} - 0,9 X_{t-1}$ . La corrélation entre  $X_t - 0,9 X_{t-1}$  et  $X_{t-2} - 0,9 X_{t-1}$  est appelée autocorrélation partielle entre  $X_t$  et  $X_{t-2}$ . Il s'agit d'un outil particulièrement utile pour analyser les processus autorégressifs.

Plus généralement, la fonction d'autocorrélation partielle entre  $X_t$  et  $X_{t+h}$  est la corrélation entre  $X_t$  et  $X_{t+h}$  ajustée en enlevant l'information provenant des valeurs intermédiaires  $X_{t+1}; X_{t+2}; \dots; X_{t+h}$ . L'abréviation usuelle de cette fonction est pacf ("partial autocorrelation function").

#### **4.3.1.4. La fonction d'autocorrélation partielle d'un processus autorégressif**

Avant de donner une définition plus formelle de la fonction d'autocorrélation partielle, il est utile de préciser en quoi l'autocorrélation partielle est un outil adapté à l'analyse des processus autorégressifs.

**Théorème :** La fonction d'autocorrélation partielle d'un processus  $X_t \sim AR(p)$  est telle que :

$$\alpha_h^X = 0 \text{ pour tout } h > p. \quad (4.64)$$

Cette proposition montre que l'autocorrélation partielle d'un processus AR joue le même rôle que l'autocorrélation d'un processus MA. En effet :

$$\text{Si } X_t \sim MA(q), \text{ alors } \rho_h^X = 0 \text{ pour tout } h > q \quad (4.65)$$

$$\text{Si } X_t \sim AR(p), \text{ alors } \alpha_h^X = 0 \text{ pour tout } h > p \quad (4.66)$$

Cette observation cruciale nous permettra de construire des tests sur la fonction d'autocorrélation partielle afin de déterminer l'ordre d'un modèle AR exactement comme l'observation de la fonction d'autocorrélation permet de choisir l'ordre d'un modèle MA. Mais il nous faut tout d'abord établir un théorème de normalité asymptotique pour la fonction d'autocorrélation partielle.

#### 4.3.1.5. La fonction d'autocorrélation partielle : définition et normalité asymptotique

La définition formelle de la fonction d'autocorrélation partielle est reliée à l'algorithme de Durbin-Levinson étudié à la section 4.2.2. Cet algorithme est rappelé dans la proposition suivante :

**Théorème :** Si  $\{X_t\}$  est un processus stationnaire de moyenne zéro et de fonction d'autocovariance  $r_h^X$  telle que  $r_0^X > 0$  et  $r_h^X \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow \infty$  alors les coefficients  $\phi_{Tj}$  et les erreurs quadratiques moyennes de prédiction  $h_t$  définis par (4.37) et (4.38) satisfont l'algorithme suivant :

$$\text{Étape 1 : } \phi_{11} = \frac{r_1^X}{r_0^X}, v_0 = r_0^X, \quad (4.67)$$

$$\text{Étape T : 1. } \phi_{TT} = [r_T^X - \sum_{j=1}^{T-1} \phi_{T-1,j} r_{T-j}^X] v_{T-1}^{-1} \quad (4.68)$$

$$2. \begin{pmatrix} \phi_{T1} \\ \vdots \\ \phi_{T,T-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{T-1,1} \\ \vdots \\ \phi_{T-1,T-1} \end{pmatrix} - \phi_{T,T} \begin{pmatrix} \phi_{T-1,T-1} \\ \vdots \\ \phi_{T-1,1} \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

$$3. v_T = v_{T-1} (1 - \phi_{TT}^2) \quad (4.70)$$

Nous pouvons à présent définir la fonction d'autocorrélation partielle comme suit :

Définition. Sous les conditions de la proposition, on définit la fonction d'autocorrélation partielle (pacf)  $\alpha_n^X$  par :

$$\alpha_0^X = 1, \alpha_1^X = \rho_1^X \quad (4.71)$$

et  $\alpha_n^X = \phi_{nn}$

La fonction d'autocorrélation partielle  $\alpha_n^X$  est donc définie par le dernier élément  $\phi_{nn}$  du vecteur

$\phi_{nn} = (\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn})'$  dans l'algorithme de Durbin-Levinson (avec  $n = T$ ).

De suite, l'autocorrélation partielle empirique (pacf empirique) est définie par :

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0^X = 1, \hat{\alpha}_1^X = \hat{\rho}_1^X \\ \text{et} \\ \hat{\alpha}_n^X = \hat{\phi}_{nn} \end{cases} \quad (4.72)$$

où  $\hat{\phi}_{nn}$  décrit le dernier élément du vecteur  $\hat{\phi}_{nn} = (\hat{\phi}_{n1}, \dots, \hat{\phi}_{nn})$  dans l'algorithme de Durbin-Levinson empirique (où les autocovariances  $r_h^X$  sont remplacées par les acf empiriques  $\hat{r}_h^X$  par le théorème de normalité asymptotique des équations de Yule-Walker, on a directement, pour un processus AR(p), un théorème central limite pour les pacf empiriques  $\phi_{hh}$   $h > p$

$\sqrt{T}(\phi_{hh} - \hat{\phi}_{hh}) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$  lorsque  $T \rightarrow \infty$

On peut donc à présent construire des intervalles de confiance pour le test :

$$\begin{cases} H_0: X_t \sim \text{AR}(p) \\ H_1 \quad \text{non } H_0 \end{cases} \quad (4.73)$$

En effet, sous  $H_0$ , la probabilité que la suite des autocorrélations partielles empiriques se trouvent, pour  $h > p$ , dans l'intervalle :  $[-1,96/\sqrt{T}, 1,96/\sqrt{T}]$  avec une probabilité de 0,95. on utilise dans la pratique l'intervalle de confiance plus strict  $[-1,96\sqrt{T}, 1,96\sqrt{T}]$  est approximativement de 0.95.

#### **4.3.1.6. Cas des modèles mixtes ARMA**

Pour choisir l'ordre d'un modèle mixte ARMA, la double observation de l'acf et de la pacf seront nécessaires. D'ailleurs, en pratique il est toujours judicieux de regarder ces deux fonctions, l'acf et la pacf empirique, ensemble pour pouvoir ajuster le modèle le plus parcimonieux possible, c.a.d. éventuellement un modèle AR ou MA pur.

#### **4.4. Critères automatiques.**

Il est fréquent d'être confronté à des données provenant d'enquêtes dans lesquelles les variables explicatives n'ont pas fait l'objet d'un plan d'observation (i.e., échantillonnage en fonction de ces variables explicatives). Même si c'est le cas, des variables doivent souvent être relevées pour leur rôle connu ou supposé dans le phénomène étudié, sans qu'il soit possible de les contrôler. L'analyste est alors confronté à de nombreux modèles possibles, correspondant aux différentes combinaisons de variables explicatives (effets principaux et interactions).

Le test du rapport des vraisemblances (likelihood ratio test) est souvent utilisé pour comparer des modèles deux à deux. Il ne s'applique qu'à des modèles emboîtés (dérivant l'un de l'autre par ajout ou suppression de termes) et il est supposé que les deux modèles comparés ajustent correctement les données (tests globaux, examen des résidus, comparaison des valeurs observées et prédites,...) (Mc Cullagh and Nelder, 1989) [163].

Quand de nombreux modèles doivent être comparés entre eux, le risque de rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie augmente substantiellement. Pour résoudre ce problème, une solution possible (il y en a d'autres) consiste à comparer les modèles en utilisant les critères d'information .

#### **4.4.1. Estimation des paramètres du modèle**

Dans cette section, nous nous intéressons à l'estimation des paramètres du modèle ARMA ( $p$ ,  $q$ ). L'étude sur l'estimation des paramètres du modèle pour les modèles classiques ARMA à une histoire relativement longue. Pour une perspective historique, nous avons évoqué les livres de Priestley (1994) [150], Stoica et al. (1997) [151], Proakis et al. (2007) [152] et d'autres.

#### **4.4.2. Sélection de l'ordre du Modèle**

Une question très importante dans l'utilisation des modèles ARMA est la sélection de l'ordre ( $p$ ,  $q$ ) du modèle (Proakis et Manolakis, 2007) [152].

Dans les sections précédentes, nous avons discuté du problème de l'estimation des paramètres sur l'hypothèse que les ordres des opérateurs de l'ARMA ont été connus a priori.

Dans la pratique, les ordres de ces opérateurs sont presque invariablement inconnus. Et les ordres des modèles constituent, en effet, les paramètres additionnels inconnus pour lesquels des valeurs appropriées doivent être déduites à partir des données. En règle générale, si nous choisissons un modèle avec un si bas ordre, nous obtenons un spectre fortement doux.

Si l'ordre est choisi trop élevé, nous courons le risque de présenter de fausses crêtes de bas niveau dans le spectre. Nous avons mentionné précédemment qu'une indication de la performance du modèle AR est l'ajustement et la variance de l'erreur de prédiction. La variance de l'erreur est, en général, différente pour chacun des estimateurs décrits ci-dessus. La caractéristique de cette erreur de prédiction c'est qu'elle diminue lorsque l'ordre du modèle ARMA augmente. Nous pouvons décider de l'ordre du modèle, en surveillant le taux de diminution et de décider de mettre fin au processus lorsque le taux de d'amortissement est relativement lent.

Cependant, il est évident que cette approche peut être imprécise et mal définie. De nombreuses discussions théoriques et des résultats expérimentaux sur la sélection de l'ordre du modèle ont été donnés dans la littérature [par exemple, les articles de Gersch et Sharpe 1973[164], et Ulrych Bishop 1975[165], Tong 1975 et 1977[166], Jones 1976[167], Nuttall 1976[168], Berryman 1978[169], Kashyap 1980[170], Pukkila 1988 [171] et Rezek et al.

1997[172], les livres de Orfanidis 1985, Marple 1987[173], Wei 1990[174], Priestley 1994[150], Proakis et Manolakis 2007[152]. Cependant, il n'y a aucun résultat défini pour les différents critères de sélection d'ordre des modèles.

En l'absence de toute information préalable concernant le processus physique qui a abouti à des données, il est évident que l'on devrait essayer différents ordres des différents modèles et différents critères. Nous allons maintenant décrire quelques techniques largement utilisées pour déterminer l'ordre des modèles.

#### **4.4.3. Le critère FPE (processus autorégressifs purs)**

Les méthodes étudiées jusqu'à présent pour sélectionner l'ordre d'un modèle autorégressif se basent sur l'observation de la fonction d'autocorrélation partielle empirique. Cette méthode ne consiste en fait qu'à suggérer l'ordre des modèles et nous allons à présent développer des critères automatiques pour le choisir.

En outre, la qualité de l'ajustement dépend de l'ordre choisi. En effet, en ne considérant que l'erreur d'ajustement, on ne peut qu'avoir de meilleurs résultats en prenant un ordre  $p$  plus grand. On sera ainsi tenté de surparamétrer le modèle ajusté.

D'un autre côté, la qualité d'un ajustement dépend également du nombre de paramètres du modèle ajusté : si un ajustement AR(2) convient, il n'est pas conseillé d'ajuster un modèle AR(1000) dans lequel il faudra estimer 1001 paramètres, même si, plus le modèle contient de paramètres, et plus la vraisemblance du modèle n'augmente. Des critères automatiques de sélection de modèles remédient à ce problème en définissant une fonction d'erreur d'ajustement modifiée de telle manière que la surparamétrisation est évitée.

L'idée du critère FPE (Final Prediction Error) est de considérer l'erreur quadratique moyenne de la prédiction d'une valeur de la série. Supposons que l'on observe les réalisations  $X_1 \dots X_T$  d'un processus AR( $p$ ). Après avoir calculé les estimateurs de Yule-Walker de  $a_p = (a_1 \dots a_p)$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  on lui ajuste le modèle :

$$Y_t = \hat{a}_1 Y_{t-1} + \dots + \hat{a}_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (4.74)$$

La prévision au temps  $T + 1$  est donnée par :  $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,

$$Y_{T+1} = \hat{a}_1 Y_T + \dots + \hat{a}_p Y_{T+1-p} \quad (4.75)$$

et son erreur quadratique moyenne est :

$$E(\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1})^2 = \sigma_\varepsilon^2 + E[(\hat{a}_p - a_p)^1 [Y_{T+1-i} Y_{T+1-i}]_{i+j-1}^p (\hat{a}_p - a_p)] \quad (4.76)$$

$$E(\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1}) = \sigma_\varepsilon^2 + E[(\hat{a}_p - a_p)^1 R_p^Y Y_p (\hat{a}_p - a_p)] \quad (4.77)$$

où  $R_p^Y$  est donnée par (4.5).

Par le théorème de normalité asymptotique des équations de Yule-Walker, on a :

$$\sqrt{T}(\hat{a}_p - a_p) \rightarrow N_p(0, \sigma_\varepsilon^2 (R_p^Y)^{-1}) \quad (4.78)$$

Rappelons que si  $Z = (Z_1, \dots, Z_p)$  suit une distribution et  $N_p(\mu, \Sigma)$ , Alors :

$$(X - \mu)^1 \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim \chi_p^2. \quad (4.79)$$

En utilisant ce résultat et (4.78), on peut approximer (4.37) par :

$$E(\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1})^2 \approx \sigma_\varepsilon^2(p) \left(1 + \frac{p}{T}\right) \quad (4.80)$$

De plus, si  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  est l'estimateur de Yule-Walker de  $\sigma_\varepsilon^2$ , on a, pour  $T$  assez grand, l'approximation fournie par le lemme de Fisher :

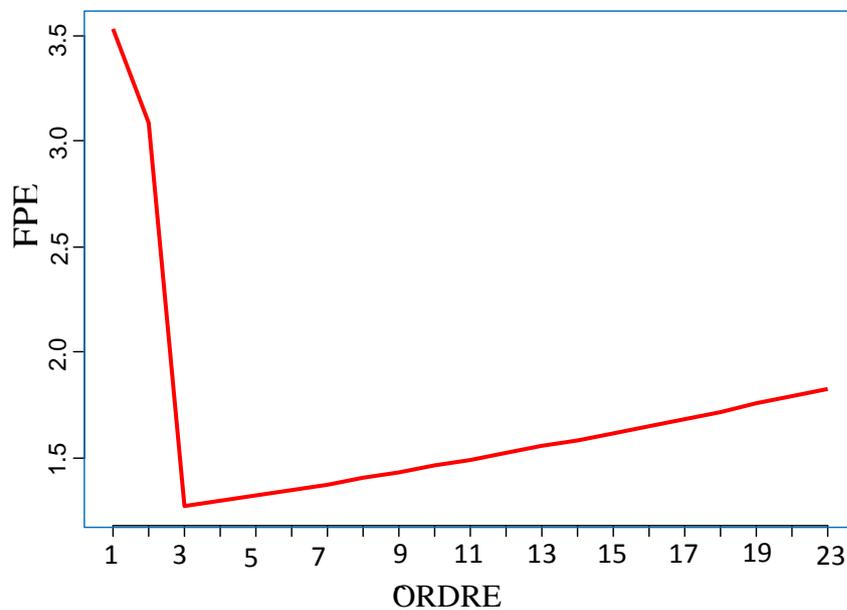
$$T \frac{\sigma_\varepsilon^2(p)}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi_{T-p}^2 \quad (4.81)$$

En remplaçant dans (4.10)  $\sigma_\varepsilon^2$  par l'estimateur  $T \hat{\sigma}_\varepsilon^2(p) \left(1 + \frac{p}{T}\right)$ , on obtient l'estimateur de l'erreur quadratique moyenne de prédiction de  $Y_{T+1}$ :

$$FPE(p) = \hat{\sigma}_\varepsilon^2(p) \frac{T+p}{T-p} \quad (4.82)$$

qu'il faut minimiser en  $p$ .

La fonction  $FPE(p)$  est donc le produit de l'estimateur  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  de la variance du bruit blanc qui est, en général, une fonction décroissante de  $p$  par une fonction croissante de  $p$  fig. (1.1).



**Fig. 1.1:** La fonction FPE d'une série. L'abscisse 1 correspond à l'ordre  $p = 0$ .

#### 4.4.4. Le critère AIC

L'estimation du nombre de paramètres et leurs valeurs numériques pour approprier un modèle à une série de temps est un problème de base. L'estimation des paramètres est basée sur la méthode des moindres carrés non-linéaire, mais l'ordre du modèle est basé sur le critère AIC (Akaike information criteria) qui a attiré une grande attention. Akaike a abordé ce problème en utilisant la mesure d'entropie maximum et le critère d'information de Kullback-Liebler.

Si nous considérons  $N$  observations indépendantes d'une variable aléatoire caractérisée par la fonction de densité de probabilité  $g(x)$ , et la fonction de densité paramétrique  $g(x/\theta)$ , l'espérance log-Likelihood sera :

$$A = E \left[ \log f \left( \frac{x}{\theta} \right) \right] - \left( \frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^n \log f \left( \frac{x_i}{\theta} \right) \quad (4.83)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$  on aura :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \int g(x) \cdot \log \left( \frac{f}{g} \right) dx \text{ Avec une probabilité } = 1$$

En prenant :

$$S \left( g, f \left( \frac{x}{\theta} \right) \right) = \int g(x) \cdot \log f \left( \frac{x}{\theta} \right) dx$$

La différence :

$$I \left[ g, f \left( \frac{x}{\theta} \right) \right] = S(g, g) - S \left[ g, f \left( \frac{x}{\theta} \right) \right]$$

est sensible à la moyenne log-Likelihoods  $\left[ g, f \left( \frac{x}{\theta} \right) \right]$

Ainsi un critère pour définir une bonne estimation est défini en minimisant l'entropie  $H$  :

$$H = - \int g(x) \log f \left( \frac{x}{\theta} \right) dx \quad (4.84)$$

Dans le même ordre d'idées que le critère FPE, le critère AIC propose de minimiser la fonction :

$$AIC(p) = \log \hat{\sigma}_\varepsilon^2(p) + 2 \frac{p}{T}$$

qui est une version pénalisée la fonction de vraisemblance des résidus de prédiction

Soient  $e = (e_{p+1}, \dots, e_T)$  les résidus d'un processus AR(p) gaussien

$$e_t = X_t - \sum_{k=1}^p a_k X_{t-k}, X_{t-k} \sim WN(0, \sigma_{\varepsilon,p}^2) \quad (4.85)$$

Pour calculer la fonction de vraisemblance, on part de :

$$p(a, \sigma_{\varepsilon,p}^2)(e) = (2\pi\sigma_{\varepsilon,p}^2)^{-\frac{T}{2}} \exp \left( -\frac{\sum_t e_t^2}{2\sigma_{\varepsilon,p}^2} \right) \text{ si } T \gg p \quad (4.86)$$

et donc on voit immédiatement, en considérant  $\log FPE(p)$ , que les critères FPE et AIC sont asymptotiquement équivalents.

En pratique, on constate que le critère AIC a tendance à choisir si le vrai modèle est AR(p<sub>0</sub>). Pour obtenir un estimateur consistant de  $p_0$ , on modifie le critère AIC en imposant

une pénalisation plus importante en cas de surparamétrisation :

$$\text{BIC}(p) = \log \hat{\sigma}_\varepsilon^2(p) + \frac{p}{T} \log T \quad (4.87)$$

Cependant, on montre qu'un modèle AR( $\hat{p}$ ) choisi par le critère AIC permet une prédiction avec une plus petite erreur  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2(\hat{p})$  (on dit que ce critère est asymptotiquement efficace : le rapport entre l'erreur de prédiction évaluée au minimum théorique et l'erreur se basant sur la valeur choisie par le critère AIC tend vers 1 si T tend vers l'infini).

Pour le modèle ARMA le critère AIC pour les séries de temps stationnaires, le modèle qui doit être choisi est celui qui minimise

$$\text{AIC}(p, q) = N \ln(\sigma_a^2) + 2(p + q) \quad (4.88)$$

Où N est la dimension de l'échantillon,  $\sigma_a^2$  est l'estimé du maximum de vraisemblance de la variance résiduelle.

#### **4.4.5. Relation entre les différents ordres de modèle.**

Deux critères les plus célèbres pour choisir l'ordre du modèle ont été élaborés par Akaike (1969, 1974) [175,176]. Avec le premier, appelé le critère finale de prévision d'erreur (FPE), l'ordre est choisi pour réduire au minimum l'indicateur de performance :

$$\text{FPE}(p) = \frac{N+p}{N-p} \hat{\sigma}_p^2 \quad (4.89)$$

où N est le nombre d'observations dont le modèle est ajusté,  $\hat{\sigma}_p^2$  et la variance estimée de l'erreur de prédiction linéaire. Selon ce critère, le modèle AR a la propriété d'être conduit à l'estimation de prédiction de la plus petite erreur quadratique moyenne. Si on trace FPE (p), en général le graphique, montre une valeur minimale spécifique définitive de p à laquelle le FPE atteint sa valeur minimale comme ordre appropriée du modèle.

Le deuxième critère proposé par Akaike(1974) [176]est appelé Critère d'information d'Akaike (AIC). Ce critère très général, basée sur des concepts théoriques de l'information, peut être utilisé pour l'identification du modèle statistique dans un large éventail de situations et ne se limite pas au contexte de séries chronologiques.

Quand un modèle comportant p paramètres indépendamment, ces paramètres sont ajustés aux données, et l'AIC est défini par :

$$\text{AIC}(p) = N \cdot \ln \hat{\sigma}_p^2 + (2p) \quad (4.90)$$

Noter que le terme  $\hat{\sigma}_p^2$  diminue et donc  $\ln \hat{\sigma}_p^2$  diminue également à mesure que l'ordre du modèle de l'AR est augmenté. Cependant, 2p augmente de p avec une augmentation de l'ordre P.

Par conséquent, une valeur minimale peut être obtenue. Si nous traçons AIC (p), le graphique, montrera généralement une valeur minimale définie, et l'ordre approprié du modèle est déterminé par cette valeur de p à laquelle l'AIC (p) atteint sa valeur minimale.

Il y a un rapport asymptotiquement équivalent entre l'AIC et FPE, pour les grandes longueurs de données de N,

$$\begin{aligned} \ln[\text{FPE}(p)] &= \ln \left[ \frac{\left(1 + \frac{p}{N}\right)}{\left(1 - \frac{p}{N}\right)} \hat{\sigma}_p^2 \right] \\ \ln[\text{FPE}(p)] &= \ln \left(1 + \frac{p}{N}\right) - \ln \left(1 - \frac{p}{N}\right) + \ln \hat{\sigma}_p^2 \\ \ln[\text{FPE}(p)] &\approx \ln \hat{\sigma}_p^2 + \frac{2p}{N} \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\text{AIC}(p) \approx N \ln[\text{FPE}(p)] \quad (4.91)$$

Le critère AIC a largement remplacé le critère FPE, et il est en général maintenant accepté comme l'une des méthodes les plus fiables pour la détermination de l'ordre. Il a été largement appliqué à des données simulées et réelles avec des résultats très efficaces et est devenu un outil solidement établi dans l'ajustage

de précision des modèles de séries chronologiques. En outre, il existe des critères alternatifs. Akaike (1979) [177] a développé un nouveau critère de détermination de l'ordre, appelé Critère d'information bayésien (BIC), qui est dérivée d'une modification bayésienne du critère AIC. Pour un modèle comportant p paramètres muni de x(n) observations 1 ≤ n ≤ N, le critère BIC prend la forme :

$$\text{BIC}(p) \approx N \ln \hat{\sigma}_p^2 - (N - p) \ln(1 - p/N) + p \ln N + p \ln \left[ p^{-1} \left( \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_p^2} - 1 \right) \right] \quad (4.92)$$

où,  $\hat{\sigma}_x^2$  est la variance de l'échantillon brut des observations, tandis que  $\hat{\sigma}_p^2$  est la variance de l'erreur de prédiction estimé. Lorsque p est faible par rapport à N, nous pouvons utiliser l'approximation :  $-(N - p) \ln(1 - p/N) \rightarrow p$ , de telle sorte que l'approximation :

$$\text{BIC}(p) \approx \text{AIC}(p) + p \cdot (\ln N - 1) + p \ln \left[ p^{-1} \left( \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_p^2} - 1 \right) \right] \quad (4.93)$$

Par conséquent, la différence entre le BIC et l'AIC a pour effet d'augmenter le poids attaché au «terme de pénalité», qui prend en compte le nombre de paramètres AR. Par conséquent, la minimisation du critère BIC conduit généralement à une baisse des commandes de ceux obtenus en minimisant l'AIC.

Shibata (1976) [178] a montré que lorsque le modèle réel est  $(p_0)$ , l'estimation  $\hat{p}$  calculée à partir du critère AIC n'est pas une estimation cohérente de  $p$ , mais plutôt tend à surestimer  $p$ . D'autre part, l'estimation fournie par le critère BIC peut sous-estimer le véritable ordre.

Schwarz (1978) [179] a développé un critère bayésien, appelé critère bayésien de Schwarz (SBC), qui est définie comme suit:

$$SBC(p) = N \cdot \ln \hat{\sigma}_p^2 + p \cdot \ln N \quad (4.94)$$

Le critère SBC est similaire à Akaike BIC en termes de sa dépendance à l'égard de  $\ln N$ . en fait, si nous utilisons les approximatifs ci-dessus pour le BIC, nous pouvons avoir :

$$BIC(p) \approx SBC(p) + p \cdot (\ln N - 1) + p \cdot \left\{ \ln \left[ p^{-1} \left( \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_p^2} - 1 \right) - 1 \right] \right\} \quad (4.95)$$

Il faut noter que la longueur minimale de la description du critère (MDL) (Rissanen, 1978, 1983) [180,181] est également donné par (4.93).

Kashyap (1980) [170] a montré que le critère AIC est généralement statistiquement incompatible quant  $N \rightarrow \infty$ , alors que le critère SBC est statistiquement compatible.

Lutkepohl (1985) [182] a comparé le critère SBC avec d'autres critères de sélection d'ordre dans une étude de simulation et a constaté que SBC choisi le bon modèle pour le plus souvent et conduit, en moyenne, à la plus petite erreur de prédiction quadratique moyenne des modèles AR ajustés.

Certains résultats expérimentaux montrent que pour des longueurs de petite échantillons, l'ordre du modèle AR doit être sélectionné dans la gamme  $N/3$  à  $N/2$  pour donner de bons résultats.

#### **4.4.6. Choix de l'ordre d'un modèle ARMA**

Dans le cas d'un modèle ARMA( $p, q$ ) l'application du concept de l'AIC est toujours possible, mais il n'y a plus une hiérarchie de modèle comme pour les modèles AR( $p$ ), où un modèle AR( $p$ ) est bien un sous-modèle du modèle AR( $p + 1$ ). Donc, la recherche d'un modèle ARMA optimal est plus compliquée parce qu'il y en a deux "dimensions" à augmenter successivement pour trouver l'ordre ( $\hat{p}$ ) optimal. On peut procéder sur plusieurs pistes différentes dont une possibilité est la suivante. Pour chaque  $(p, q)$ ,  $0 \leq p \leq P_0, 0 \leq q \leq Q_0$ , calculer récursivement les estimateurs  $\hat{a}(p, q), \hat{\theta}(p, q), \hat{\sigma}_\varepsilon^2(p, q)$  en partant d'estimateurs

initiaux non nécessairement efficaces (par exemple les estimateurs de Yule-Walker ou les estimateurs de moindres carrés). Chercher le minimum du critère :

$$\text{AIC}(p) = \log \widehat{\sigma}_\varepsilon^2(p) + 2 \frac{p}{T} \quad (4.96)$$

où  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2(p, q)$  dépend de  $\widehat{a}(p, q)$ , et de  $\widehat{\theta}(p, q)$  et celui pour toutes combinaisons possibles de  $(p, q)$  avec  $0 \leq p \leq P_0, 0 \leq q \leq Q_0$ .

(Ici, une augmentation successive en terme de la somme  $p + q$  est une possibilité pour garder le nombre de paramètres à tester le plus petit que possible, c'est-à-dire, chercher pour  $p + q = 0, 1, \dots, P_0 + Q_0$ .

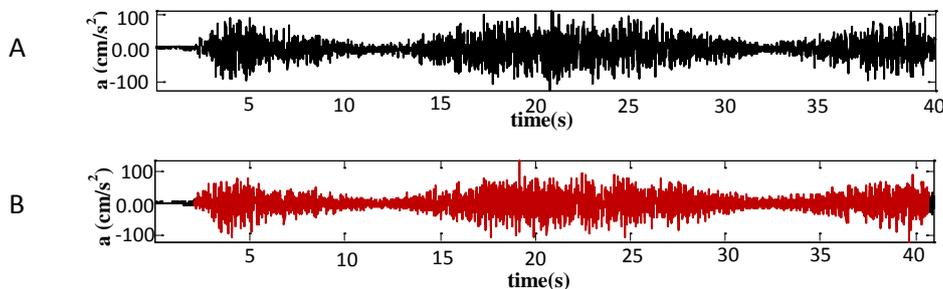
Calculer les estimateurs de maximum de vraisemblances (qui sont efficaces)  $\widehat{a}(p, q), \widehat{\theta}(p, q)$ , dans le modèle choisi  $\text{ARMA}(\widehat{p}, \widehat{q})$ .

#### 4.4.6.1. Exemple de test des critères de sélection d'ordre :

Des signaux d'accélération sont utilisés pour tester quatre critères de sélection d'ordre du modèle.

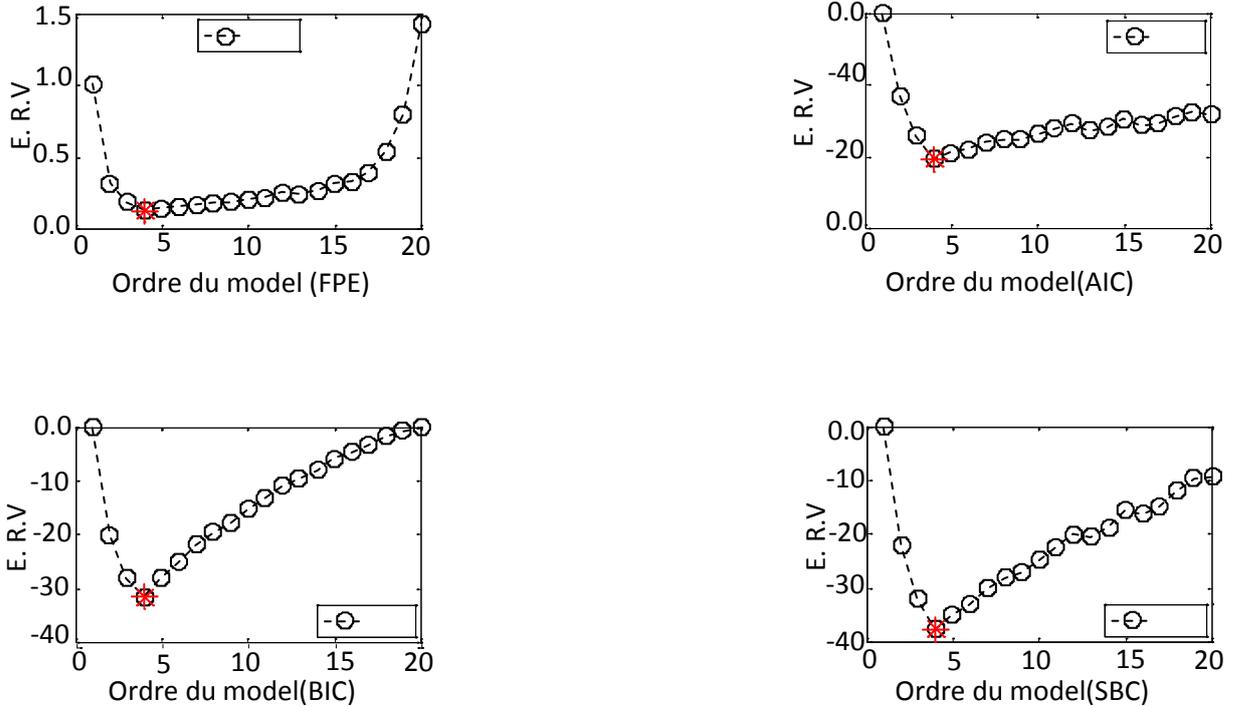
1. L'erreur de prédiction finale Critère (FPE);
2. Le critère d'information d'Akaike (AIC);
3. L'AIC bayésien (BIC);
4. Le critère bayésien de Schwarz (SBC).

Nous donnons ici un exemple de l'analyse effectuée sur deux échantillons de données. Les deux longueurs de données qui sont utilisés, à savoir A et B pour donner une comparaison entre les différents critères, les variances d'erreur de prédiction sont obtenues à l'aide de la méthode d'estimation (méthode de Yull Walker) figure (1.2).

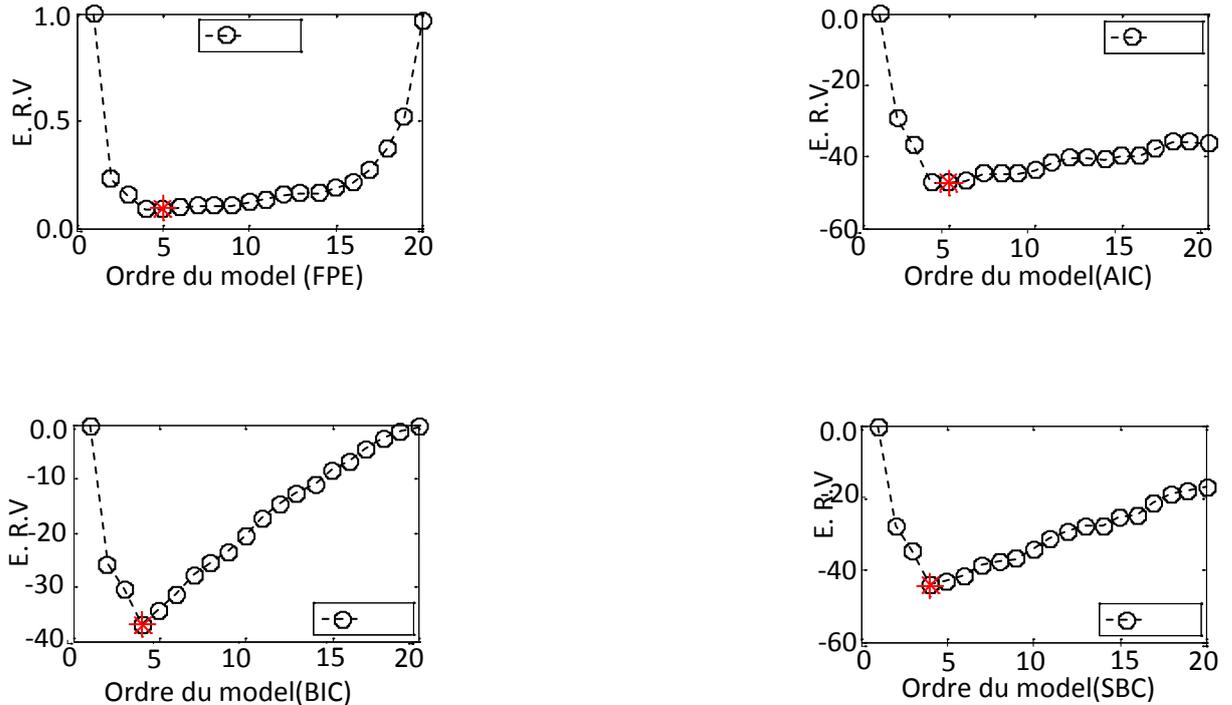


**Figure 1.2: Sorties d'accélération mesurée à partir de la table vibrante  
Longueur de données A et B**

Puis, les ordres optimaux des modèles basés sur les différentes définitions des désaccords d'erreur relatifs de prévision, peuvent être obtenus par les quatre critères ci-dessus. Nous avons tracé le rapport des variances d'erreur de prédiction en fonction de l'ordre du modèle.



**Figure 1.3: Longueur de données A: sélection de modèle d'ordre dans chaque cas de la prédiction finale. Erreur Critère (FPE), le critère d'information d'Akaike (AIC), l'AIC bayésien (BIC) et le critère bayésien de Schwarz (SBC).**



**Figure 1.4: Longueur de données B: sélection du modèle d'ordre dans chaque cas de la prédiction finale. Erreur Critère (FPE), le critère d'information d'Akaike (AIC), l'AIC bayésien (BIC) et le critère bayésien de Schwarz (SBC).**

Les graphiques, montrent généralement une valeur minimale locale déterminée à une valeur particulière à laquelle le critère atteint l'ordre approprié du modèle. Des divers désaccords d'erreur relatifs de prévision selon les quatre critères, pour les ordres optimaux des modèles. Les Figure (1.3) et Figure (1.4) montrent le rapport des variances d'erreur de prédiction dans les deux cas de longueur de données. Le tableau 01 donne les résultats des ordres des modèles optimaux sélectionnés par quatre critères dans le cas de deux longueurs de données.

**Tableau01 : Ordres optimaux sélectionnés dans le cas d'une longueur de données**

Critère	FPE	AIC	BIC	SBC
ordre optimal : longueur de données A	4	4	4	4
ordre optimal : longueur de données B	5	5	4	4

On peut voir qu'il n'y a pas de divergences apparentes des résultats pour les différents critères et la longueur de données différente. Comme le montre le Tableau 2.1 et le Tableau 2.3, les ordres optimaux 4 ou 5 sont fréquemment choisis dans différents cas. Par conséquent, il est conclu, que l'ordre optimal pour les échantillons de données d'accélération de cet essai doit être sélectionné en tant que 4 ou 5.

#### 4.5. Tests sur les résidus.

##### 4.5.1. Théorème central limite pour les résidus.

La qualité de l'ajustement d'un modèle est généralement jugée en comparant les valeurs observées avec les valeurs correspondantes dans le modèle d'ajustement. Si le modèle ajusté est approprié, les résidus doivent se comporter comme un bruit blanc. Les résidus provenant d'un modèle d'ajustement ARMA sont donnés par (cfr. équation 4.17) :

$$e_t = X_t - \sum_{k=1}^p a_k X_{t-k} - \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} \quad (4.97)$$

où  $a_1, \dots, a_{kp}, \theta_1, \dots, \theta_q$  sont les estimateurs de maximum de vraisemblance.

Pour vérifier si les résidus  $\{e_t\}$  forment un bruit blanc, on calcule la suite des autocorrélations empiriques :

$$\hat{\rho}_1^e, \dots, \hat{\rho}_k^e \text{ où } k \gg \hat{p} + \hat{q} \quad (4.98)$$

##### 4.5.2. Le test Portmanteau.

Au lieu de vérifier par une représentation graphique si tous les éléments de la suite  $\hat{\rho}_h^e$  se trouvent dans la bande de confiance :  $[-1, 96\sqrt{1 - s_{hh}(\hat{a}_1; \hat{a}_2)/T}; +1, 96\sqrt{1 - s_{hh}(\hat{a}_1; \hat{a}_2)/T}]$ , il est possible de construire un test qui possède une seule statistique dépendante de  $\hat{\rho}_h^e$   $K \leq h \leq 1$ . Dans ce

contexte, le choix de  $K$  sera crucial. Evidemment on aimerait choisir  $K$  le plus grand possible (pour inclure beaucoup d'éléments du vecteur  $\hat{\rho}^e$  dans le test), mais non seulement cela augmenterait avec  $K$  l'incertitude statistique en estimant les autocorrélations incluses, mais aussi, une valeur  $K$  trop grande causerait-elle des problèmes au niveau de l'estimateur  $\hat{\rho}_K^e$  qui serait formée par trop peu de données (notamment  $T - K$ ). Pour éviter ces effets, on supposera que  $K$  dépend de la taille d'échantillon  $T$  et est tel que :

$$K(T) \approx \sqrt{T}$$

#### **4.6. Prévision de processus non stationnaires**

Dans ce chapitre nous allons finalement résoudre le problème de la construction en toute généralité des prédicteurs pour des processus soit stationnaires, soit non stationnaires à cause de la présence éventuelle d'une tendance ou d'une saisonnalité. Nous allons voir surtout comment l'approche paramétrique de Box-Jenkins, c'est-à-dire la modélisation du type ARMA à un nombre fini des paramètres, est capable de fournir de bons prédicteurs (linéaires) si le nombre d'observations d'une période assez homogène de la fin de notre série est suffisamment grand. Nous comparerons cette approche avec une approche plutôt non paramétrique, le lissage exponentiel, qui est utile pour le cas d'une série de courte durée (ou le cas d'une courte période d'observation à la fin de la série à partir d'une rupture importante de la structure de la série observée).

##### **4.6.1. Analyse de Box-Jenkins**

Cette section a comme but la combinaison des méthodes d'ajustement des modèles ARMA et leur prévision vues aux chapitres précédents avec le traitement des composantes non stationnaires, notamment tendances (ce qui mène aux processus ARIMA) et saisonnalités (processus SARIMA). Nous allons voir comment la modélisation ARMA se généralise pour un processus SARIMA, la prévision de ce processus non stationnaire (après avoir bien identifié le modèle ajusté avec les méthodes de diagnostique) y inclue.

Box and Jenkins (1976) [125] ont promu une méthodologie consistant à modéliser les séries temporelles univariées au moyen des processus ARMA. Ces processus sont parcimonieux et constituent une bonne approximation de processus plus généraux pourvu que l'on se restreigne au cadre linéaire. Les modèles ARMA donnent souvent de bon résultats en prévision et ont bénéficié de la vague de scepticisme quant à l'intérêt des gros modèles économétriques (voir par exemple Ashley (1988)) [183].

La méthodologie de Box et Jenkins peut se décomposer en quatre étapes :

- 1) Transformer la série étudiée de manière à la stationnariser. L'outil utilisé est le graphique des auto-covariances.
- 2) Déterminer une valeur possible pour l'ordre des parties AR et MA au moyen des graphiques d'auto-corrélation et d'auto-corrélation partielle.
- 3) Estimer les paramètres
- 4) Vérifier les qualités prédictives hors échantillon du modèle au moyen de tests.

Cette méthodologie est intéressante dans la mesure où elle fut la première à poser clairement la question de l'adéquation du modèle aux données en particulier en ce qui concerne la spécification dynamique. Elle décrit un enchaînement de procédures de tests et de procédures d'estimation :

1. L'étape 1 cherche à obtenir la stationnarité des données en interprétant le graphique des auto-covariances. Un processus non-stationnaire a ses auto-covariances qui décroissent très lentement à l'inverse d'un processus stationnaire. Nous avons vu dans les chapitres précédents comment la littérature moderne a pu proposer des tests formels de stationnarité.
2. L'étape 2 repose également sur l'interprétation de graphiques pour choisir l'ordre des parties AR et MA. On sait que les auto-corrélations d'un processus MA(q) deviennent nulles à partir de l'ordre  $q + 1$ . Si le graphique des auto-corrélations empiriques chute brusquement après  $h = q$ , on pourra donc dire que l'on est en présence d'un MA(q). Si l'on considère maintenant les auto-corrélation totales d'un AR (p), on sait qu'elles décroissent lentement dans le temps. Mais il n'est guère possible de déduire une valeur de p à partir de l'examen du correlogramme. On cherche donc une transformation du correlogramme qui soit plus interprétable. Il s'agit du graphique des auto-corrélations partielles que l'on a noté PAC. Les auto-corrélations partielles ont la propriété d'être nulles à partir de l'ordre  $p + 1$  pour un processus AR(p).
3. L'étape 3 consiste à estimer le modèle choisi.
4. L'étape 4 consiste à vérifier si le modèle est bien spécifié au moyen de tests de mauvaise spécification.

#### **4.6.1.1. Processus ARIMA**

L'objectif de cette section est d'inclure les composantes non stationnaires de tendance (trend) dans la modélisation des séries chronologiques.

Définition. Soient  $p; q; d \geq 0$ ;  $X_t$  est appelé processus ARIMA(p; d; q) .

Si  $\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$  est un processus ARMA(p; q) stationnaire, c.à.d :

$$A(B) (1 - B)^d X_t = A(B) X_t = \theta(B) \varepsilon_t \quad (4.99)$$

où  $\tilde{A}(z) = A(z) (1 - z)^d$ , donc a une racine  $z = 1$  de l'ordre  $d$  en plus des racines dans  $\{z : |z| > 1\}$ .

Les processus ARIMA sont utiles pour des processus qui ont des corrélations positives et lentement décroissantes car cette propriété des autocorrélations peut être le signe d'une tendance dans la série. En pratique, les modèles ARIMA sont préférés aux modèles AR dont les racines proches du cercle de l'unité. Par exemple, le modèle AR(2) :

$$(1 - 0,815B)(1 - 0,989B)X_t = \varepsilon_t \quad (4.100)$$

possède des racines proches du cercle unité, mais un modèle ARIMA :

$$(1 - aB)(1 - B)X_t = \varepsilon_t \quad (4.101)$$

est plus stable pour l'analyse et la prévision.

Comme premier exemple d'un processus ARIMA, on peut citer la marche aléatoire ("random walk"). Dans ce cas :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.102)$$

Le processus est un processus ARIMA(0,1,0).

$$X_t = a + b t + X_t \quad (4.103)$$

est un exemple de processus ARIMA(0,1,1), car  $(1 - B)X_t = \varepsilon_t$  est un MA(1) (non-inversible) avec moyenne  $b$ ,

#### 4.6.1.2. Processus SARIMA

Si l'on veut en même temps traiter les saisonnalités de période  $s$  (sans supposer une répétition exacte, déterministe, des données), on est amené à définir les processus SARIMA.

Déinition.  $X_t$  est appelé processus SARIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P; D; Q$ ) $_s$  avec période  $s$ , si :

$$Y_t = \nabla^d \nabla_s^D X_t = (1 - B)^d (1 - B_s)^D X_t \quad (4.104)$$

est un processus ARMA stationnaire de la forme :

$$A(B)F(B^s)Y_t = \theta(B)G(B^s)\varepsilon_t, \quad (4.105)$$

où  $A(z)$  est le polynôme générateur d'un AR(p),

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^p a_k z^k \quad (4.106)$$

$$\Theta(z) = 1 + \sum_{k=1}^p \theta_k z^k \quad (4.107)$$

$\Theta(z)$  est le polynôme générateur d'un MA(q),

et où, pour la saisonnalité  $Y_{t-1} Y_{t-s}$ ,

$F(z)$  est le polynôme générateur d'un AR(P)

$$F(z) = 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k z^k \quad (4.108)$$

et G(z) est le polynôme générateur d'un MA(Q)

$$G(z) = 1 + \sum_{k=1}^q \gamma_k z^k \quad (4.109)$$

**Chapitre 5 : Formulation du modèle ARMA et procédure de modélisation application aux séismes**

Comme nous l’avons vue dans les chapitres précédents, le modèle « autorégressif à moyenne mobile » (ARMA) est la combinaison du modèle autorégressif (AR) et le modèle a moyenne glissante (MA) [184].

**5.1. Modèle autorégressif (AR) :**

Soit une série de temps stationnaire  $Z_t$  normalement distribuée avec une moyenne  $\mu$  et une variance  $\sigma^2$ . Le modèle autorégressif d’ordre  $p$  dénote par AR(p) représentant la variable  $Z_t$ , est généralement donnée par l’équation suivante [184] :

$$Z_t = \mu + \varphi_1(Z_{t-1} - \mu) + \dots + \varphi_p(Z_{t-p} - \mu) + a_t \quad (5.1)$$

Où

$Z_t$  : représente la série de temps (variable)

$a_t$  : représente la série de temps indépendante de  $Z_t$ , elle est distribuée avec une moyenne zéro et une variance  $\sigma_0^2$ .

$\varphi_1, \dots, \varphi_p$  : représentent les coefficients autorégressifs.

L’ensemble des paramètres du modèle est :  $\{\mu, \sigma^2, \varphi_1, \dots, \varphi_p, \sigma_p^2\}$  , tous ces paramètres doivent être estimés à partir des données.

Les propriétés principales du modèle autorégressif sont reliées à la valeur de l’espérance mathématique, la variance, l’autocorrélation, l’autocorrélation partielle et les conditions à respecter pour définir les paramètres du modèle [184].

**5.1.1. La valeur de l’espérance et de la variance.**

Les valeurs de l’espérance et de la variance peuvent être résumées de la manière suivante :

$$\begin{cases} E(Z_t) = \mu \\ E(a_t) = 0 \\ \text{Var}(Z_t) = \sigma^2 \\ \text{Var}(a_t) = \sigma_\varepsilon^2 \end{cases} \quad (5.2)$$

Les variances  $\sigma^2$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  sont reliées par la relation suivante :

$$\sigma_a^2 = \sigma^2(1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j \rho_j) \quad (5.3)$$

Où  $\varphi_j$  est le jème coefficient autorégressif et  $\rho_j$  est le coefficient d’autocorrélation correspondant au décalage  $j$ , de la variable  $Z_t$ .

**5.1.2. Fonction d'autocorrélation**

La fonction d'autocorrélation  $\rho_j$  de la variable  $Z_t$  définie par l'équation (5.1), est obtenue par multiplication des deux membres de l'équation (5.1) par  $Z_{t-1}$  puis en prenant l'espérance. Elle satisfait l'équation différentielle connue par équation de Yule-Walker qui a été proposée par Yule (1927) et Welker (1931).

$$\rho_k = \varphi_1\rho_{k-1} + \varphi_2\rho_{k-2} + \dots + \varphi_p\rho_{k-p}, k > 0 \tag{5.4}$$

Cette équation est utilisée couramment pour estimer les paramètres du modèle AR(p), comme il est important de connaître la forme de  $\rho_k$  car elle sert à identifier l'ordre du modèle.

**5.1.3. La fonction d'autocorrélation partielle.**

La fonction d'autocorrélation partielle est une autre forme de représentation de la dépendance des séries. Elle nous aide à identifier le type et l'ordre du modèle. Notons par  $\varphi_j(k)$  le  $j^{\text{ème}}$  coefficient autorégressif dans un modèle AR(K), sachant que  $\varphi_k(k)$  est le dernier coefficient. L'équation différentielle (5.4) donne :

$$\rho_j = \varphi_1(k)\rho_{j-1} + \varphi_2(k)\rho_{j-2} + \dots + \varphi_k(k)\rho_{j-k}, j = 1, \dots, k. \tag{5.5}$$

La fonction d'autocorrélation partielle  $\varphi_k$  est déterminée par la résolution successive de l'équation (5.5) et simultanément pour chaque valeur de  $k=1,2,\dots$ .

**5.1.4. Condition de stationnarité**

Ces conditions sont vérifiées si les racines de l'équation caractéristique, sont à l'intérieure du cercle unitaire (Yevjevich 1972).

$$U^p - \varphi_1U^{p-1} - \varphi_2U^{p-2} - \dots - \varphi_p = 0 \tag{5.6}$$

Donc il faut avoir  $|U_i| < 1, i=1, \dots, p$ , où les  $U_i$  sont les racines de l'équation (5.6)

**5.2. Modèle à moyenne glissante (MA) .**

Soit  $Z_t$  une série de temps, on peut la représenter, à l'aide d'un processus à moyenne glissante d'ordre q, par la formule suivante:

$$Z_t = a_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \tag{5.7}$$

Où  $a_t$  est une variable aléatoire indépendante

Posons  $\theta_0 = 1$  on aura :

$$Z_t = -\sum_{j=0}^q \theta_j a_{t-j} \tag{5.8}$$

Les paramètres du modèle sont : la moyenne  $\mu$ , la variance  $\sigma_a^2$  de la variable indépendante et les coefficients  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ , au total on a  $(q+2)$  paramètres à estimer à partir des données .

**5.2.1. Propriétés du modèle MA(q) .**

Supposons que la moyenne de  $Z_t$  est donnée par :  $E(Z_t) = 0$  .L'auto covariance est déterminée en formant le produit  $Z_t \cdot Z_{t-k}$  puis en prenant l'espérance :

$$\begin{cases} \text{cov}(Z_t Z_{t-k}) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k} & , \text{ si } k \leq q \\ \text{cov}(Z_t Z_{t-k}) = 0 & \text{ si } , k > q \end{cases} \quad (5.9)$$

Pour  $K=0$  ,la variance est de la forme:

$$\text{var}(Z_t) = \gamma_0 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^q \theta_j^2 \quad (5.10)$$

La fonction d'autocorrélation est obtenue en faisant le rapport des équations (5.9) et (5.10) avec la convention  $\theta_0 = -1$  :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}}{\sum_{j=0}^q \theta_j^2} \quad , k \leq q \quad (5.11)$$

L'équation (5.11) il montre que la fonction d'autocorrélation est découpée au décalage  $q$ .

**5.3. Modèle autorégressif à moyenne mobile ARMA (p , q):**

La combinaison des deux modèles AR(p) et MA(q), nous donne un modèle mixte appelé ARMA (p, q), défini comme suit [155]:

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \dots + \varphi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_q a_{t-q} \quad (5.12)$$

Ou bien :

$$Z_t = \sum_{j=0}^p \varphi_j Z_{t-j} - \sum_{j=0}^q \theta_j a_{t-j} , \text{ avec } \theta_0 = -1 \quad (5.13)$$

Les paramètres de ce modèle sont : la moyenne  $\mu, \sigma_a^2, \varphi_1, \dots, \varphi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  soit au total  $(p+q+2)$  paramètres à estimer à partir des données :

**5.3.1. Propriétés du module ARMA (p,q).**

Les propriétés de ce modèle sont bien détaillées dans l'ouvrage de Box et Jenkins (1976) [125].

Les propriétés générales du modèle ARMA sont liées à la covariance entre  $Z$  et  $\varepsilon$  par l'équation :

$$\gamma_{2a}(k) = \text{cov}(Z_{t-k} a_t) \quad (5.14)$$

Qui est différente de zéro pour  $k \leq 0$  ,et égale à zéro pour le reste.

L'auto covariance du processus ARMA (p,q) est définie comme suit :

$$\begin{cases} \gamma_k = \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma_{k-1} - \sum_{i=1}^q \theta_i \gamma_{2a}(k-1), & \text{si } k < q+1 \\ \gamma_k = \sum_{i=0}^p \varphi_i \gamma_{k-1}, & \text{si } k \geq q+1 \end{cases} \quad (5.15)$$

Pour K=0, la variance est donnée par l'équation suivante:

$$\text{var}(Z_t) = \sigma_a^2 + \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma_i - \sum_{i=1}^q \theta_i \gamma_{2a}(-1) \quad (5.16)$$

Et la fonction d'autocorrélation par l'équation :

$$\rho_k = \sum_{i=1}^p \varphi_i \rho_{k-1}, \quad k \geq q+1 \quad (5.17)$$

Les coefficients d'autocorrélation correspondants aux q premiers décalage,  $\rho_1, \dots, \rho_q$  dépendent à la fois des coefficients des processus autorégressif à moyenne glissante, tandis que pour les décalages supérieur,  $\rho_{q+1}, \rho_{q+2}, \dots, \rho_{q+p+1}$  dépendent seulement des paramètres autorégressifs .

### 5.3.1.1. Condition de stationnarité et d'inversibilité.

#### a. Stationnarité :

Un processus stochastique peut être représenté comme un processus  $Z_t$  obtenu en faisant passer un bruit blanc ( $a_t$ ) à travers un filtre linéaire donné par l'équation :

$$Z_t = a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j a_{t-j} \quad (5.18)$$

( $a_t$ ) est une série de variable aléatoires incorréllées avec une moyenne égale a zéro et une variance constate  $\sigma_a^2$ .

L'autocorrélation de l'équation (5.18) est donnée par :

$$\begin{cases} c(k) = E[Z_t \cdot Z_{t+k}] \\ c(k) = E[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_i \Psi_j] \end{cases} \quad (5.19)$$

Comme les variables aléatoires  $a_t$  sont incorréllées on peut écrire :

$$E[a_t \cdot a_{t+k}] = \begin{cases} \sigma_a^2, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

Donc on peut écrire l'équation (5.19) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} c(k) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \cdot \Psi_{j+k} \\ c(0) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^2 \text{ pour } k = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

La fonction d'auto covariance est définie alors comme suit :

$$\begin{cases} c(B) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} c(b) B^k \\ c(B) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{c=-\infty}^{\infty} B^k \end{cases} \quad (5.22)$$

Ou bien simplement

$$c(B) = \sigma_a^2 \Psi(B) \cdot \Psi(B_1) \quad (5.23)$$

Si on substitue  $B$  et  $B^{-1}$  par  $B = \exp(-i2\pi f)$  et  $B^{-1} = \exp(2\pi f)$  le demi spectre énergétique sera défini par :

$$\begin{cases} p(f) = 2\sigma_a^2 4(\exp(-i2\pi f))\Psi(\exp(i2\pi)) & 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \\ \text{Où} \\ p(f) = 2\sigma_a^2 |\Psi(\exp(-2\pi f))| & 0 \leq f \leq 1/2 \end{cases} \quad (5.24)$$

Cependant, la variance du processus est :

$$\sigma_2 = 2\sigma_a^2 \int_0^{1/2} \Psi(\exp(-i2\pi f)) \Psi(\exp(i2\pi f)) df \quad (5.25)$$

Cette intégrale converge lorsque la série infinie  $\Psi(B)$  converge pour  $B$  soit sur ou à l'intérieur du cercle unitaire.

### **b. Inversibilité.**

Un processus ARMA peut être écrit sous la forme suivante :

$$\phi(B)Z_t = E(B)a_t \quad (5.26)$$

On suppose le modèle suivant :

$$\begin{cases} Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \\ \text{Où} \\ Z_t = a_t(1 - \theta_1 B) \end{cases} \quad (5.27)$$

On peut exprimer  $a_t$  en fonction de  $Z_t$  par :

$$a_t = (1 - \theta_1 B)^{-1} Z_t \quad (5.28)$$

Cette série converge lorsque  $|B| \leq 1$ .

### **c. La fonction d'autocorrélation:**

Pour fournir une information sur le choix de l'ordre  $(p, q)$  du processus ARMA qui peut être utilisé pour représenter un enregistrement d'accélération sismique. Il est important de se référer au comportement de la fonction d'autocorrélation théorique  $R(k)$ . La fonction d'autocovariance théorique  $C(k)$  peut être dérivée en multipliant l'équation suivante par  $Z_t$  et prenant l'espérance ;

$$\begin{aligned} Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \dots - \phi_p Z_{t-p} &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \\ c(k) &= \phi_1 c(k-1) + \dots + \phi_p c(k-p) + c_{2a}(k) - \theta_1 c_{2a}(k-1) - \dots - \theta_q c_{2a}(k-q) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Où  $c_{2a}(k) = E[Z_{t-k} a_t]$

La fonction d'autocovariance  $R(k)$  est obtenue en divisant l'équation (IV.29) par  $c(0)$ , qui aura la forme suivante :

$$R(k) = \phi_1 R(k-1) + \dots + \phi_p R(k-p) + R_{2a}(k) - \theta_1 R_{2a}(k-1) - \dots - \theta_q R_{2a}(k-q) \quad (5.30)$$

Le fait que valeurs de  $Z_{t-k}$  sont corrélées seulement aux valeurs du bruit blanc, implique que :

$$c_{2a}(k) = 0 \quad \text{pour } k > 0 \quad (5.31)$$

**d. La fonction d'autocorrélation partielle.**

La fonction d'autocorrélation partielle est une façon de représenter la dépendance de temps d'une série, et elle aide à identifier de type et l'ordre du modèle quand elle est utilisée avec la fonction d'autocorrélation, elle est infinie en extension.

Par conséquent, il est très convenable de décrire le processus (AR) par le nombre de non zéro de la fonction d'autocorrélation.

La fonction d'autocorrélation partielle pourrait être définie par l'équation Yule-Walker (Box et Jenkins)

Si  $k$  est l'ordre d'un processus (AR), utilisant l'équation (5.29) définie dans le paragraphe « fonction d'autocorrélation » pour différents ordres on obtient une équation de forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & R(1) & \cdot & \cdot & R(k-1) \\ R(1) & \cdot & \cdot & \cdot & R(k-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R(k-1) & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ R(k) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Ce système d'équations est le système d'équations de Yule-Walker.

Résolvant ces équations successivement pour  $k = 1, 2, \dots$  on obtient les valeurs de  $\phi_{kk}$  pour chaque  $k$ , et la fonction d'autocorrélation partielle sera définie par l'équation suivante :

$$p(k) = \phi_{kk} \quad (5.33)$$

Où  $k$  représente le décalage

En générale, il est possible de montrer que pour un processus (AR), l'équation (5.33) pourrait être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} p(k) = \phi_{kk} & \text{si } k \leq p \\ p(k) = 0 & \text{si } k > p \end{cases} \quad (5.34)$$

Pour un processus (ARMA) stationnaire et inversible, la fonction d'autocorrélation partielle  $p(k)$  a une variation exponentielle sous forme d'ondes sinusoïdales amorties dépendantes des paramètres (MA) après les premiers  $(p-q)$  décalages.

#### 5.4. Fonction de modulation.

L'estimation de la variance ou de la fonction enveloppe est un problème tresimportant dans la modélisation :

- ✓ Elle contrôle la non-stationnarité du processus,
- ✓ Les paramètres statistiques tels que les valeurs extrêmes de l'accélération et de la réponse structurelle.

La variance de  $(Z_t)$  d'un séisme donné est considérée comme des variables aléatoires, est données par :

$$VAR(Z_t) = E[(Z_t - \mu_t)^2] \quad (5.35)$$

La supposition que  $E(Z_t) = 0$  a été couramment utilisée dans la simulation des séismes.

Elis a utilisé des fenêtres de 2 secondes de dimension avec des intervalles de temps de 0.02 sec, et il avait estimé la variance comme suit :

$$S_Z^2(t) = \left(\frac{1}{100}\right) \sum_{i=t-50}^{t+50} (Z_i)^2 \quad (5.36)$$

$S(t)$  fournit une estimation approximative de la fonction de modulation, cependant cette approche ne fournit pas de critère pour distinguer la stationnarité de la non-stationnarité des données

Pour estimer la fonction de modulation  $f(t)$  d'une série de temps donnée  $Z_t$ , certains utilisent la méthode de Pradwarter , dans cette méthode l'évènement original est divisé en sections d'intervalles égales. La dimension de chaque section est choisie telle qu'on obtient une résolution raisonnable de la fonction de modulation. Dans cette étude ils ont choisi des segments de 0.5 sec où le pas de temps de la série temporelle discrète est de 0.02 sec. Si N est le nombre de les points donnés, K est le nombre de sections et chaque section contient M=25 points donnés, donc :  $N=25 k$  les variables aléatoires utilisées pour estimer la fonction de modulation sont :

$$\begin{cases} S = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^N X_i^2 \\ Y_i = \left(\frac{1}{25}\right) \sum_{L=1}^{25} X_i^2 \\ W_i = \frac{Y_i}{S} \end{cases} \quad (5.37)$$

Où  $X(t)$  est la série de temps obtenue par division de la série de temps donnée  $Z(t)$  par  $f(t)$  définie par :

$$f(t) = \left[ \left(\frac{1}{101}\right) \sum_{t-1}^{t+1} Z_t^2 \right]^{1/2} \quad (5.38)$$

Ainsi  $X(t) = Z(t)/f(t)$ .

La distribution de la variable aléatoire  $W_i$  pourrait être définie en utilisant la transformation de Nataf. Dans ce cas, la distribution de la probabilité de  $W_i$  est :

$$f(w, \nu) = \nu(\nu, w)^{\nu-1} \exp\left(\frac{-\nu.w}{\Gamma(\nu)}\right) \quad (5.39)$$

Avec  $E(w) = 1$ , et  $\text{var}(w) = 1/\nu$

Maintenant il est possible de transformer les variables aléatoires  $W_i$  en variables normales  $U_i$

$$u_i = \varphi^{-1}[F_{W_i}(W_i)] \quad (5.40)$$

Les variables aléatoires  $U_i$  donnent une idée brute sur la stationnarité du processus.

La distribution gaussienne du vecteur :  $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_M \end{bmatrix}$

Peut être représentée comme :

$$f_u(u) = \left(\frac{1}{(2\pi)^M} \cdot \det|c|\right)^{1/2} \exp\left(-\left(U^T \cdot c \cdot \frac{U}{2}\right)\right) \quad (5.41)$$

Où  $|c|$  est la matrice de corrélation avec les composantes  $c_{ij}$  définies comme coefficients de corrélation de la variable aléatoire  $U_i$ .

Comme il est détaillé par Paradolwarter (1987), l'équation suivante est résolue :

$$[c] \cdot [\Phi] = [A] * [\Phi] \quad (5.42)$$

Où  $[\Phi]$  est la matrice des vecteurs propres ; et  $[A]$  est la matrice diagonale des valeurs propres associées  $\lambda_i$ . Les variables aléatoires  $U_i$  sont transformées en  $U_i^*$  par la relation suivante :

$$U_i^* = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{2}} [\Phi]^T \cdot U \quad (5.43)$$

Si  $U_i^*$  sont in corrélées et possèdent une distribution normale, le processus  $X(t)$  est stationnaire, sinon on fait une transformation finale :

$$U_i^* = \sin(U_i^*) \varphi^{-1} [(M + 1)/2M] \quad (5.44)$$

Cette transformation est inversible (selon Paradolwarter), et on aura :

$$\begin{cases} U' = [\Phi] \cdot [A]^{0.5} \cdot U^* \\ W_i'^* = F^{-1} \cdot [\Phi](U_i') \end{cases} \quad (5.45)$$

Les variables aléatoires  $W_i'^*$  sont associées avec des variables aléatoires  $U_i^*$  distribuées parfaitement en donnant des processus stationnaires. Finalement la fonction des modulation approximée  $f(t)$  est donnée par :

$$f(t) = \left(\frac{W_i}{W_i'}\right)^{1/2} \quad (5.46)$$

Où

$$\tau_i = 0.24 + \frac{i-1}{2} \quad (\text{sec}) \quad (5.47)$$

### **5.5. Fonction enveloppe.**

Pour des applications pratiques, il est nécessaire de caractériser la fonction de variance par un nombre minimal de paramètres.

Kozin [89] a utilisé une approche qui consiste à utiliser une interpolation de forme cubique, qui suit les irrégularités de l'accélerogramme mesuré. L'estimation est appliquée en essayant des fonctions de la forme suivante pour un nombre de segments de l'accélerogramme :

$$f(t) = a.t^3 + b.t^2 + c.t + d \quad (5.48)$$

La continuité à l'intersection de ces fonctions est assurée en imposant une condition d'égalité de pentes. Bien que l'estimation cubique peut donner un très bon ajustement aux accélerogrammes, son utilisation est limitée pour des buts pratiques à cause du nombre de paramètres.

Pour obtenir un nombre pratique de paramètres, on peut adopter une fonction relativement simple avec un nombre de paramètres limité.

Turkstra et Al [185] ont utilisés dans une étude préliminaire une fonction lisse de la forme suivante :

$$f(t) = a.t^b \cdot \exp(-c.t) \quad (5.49)$$

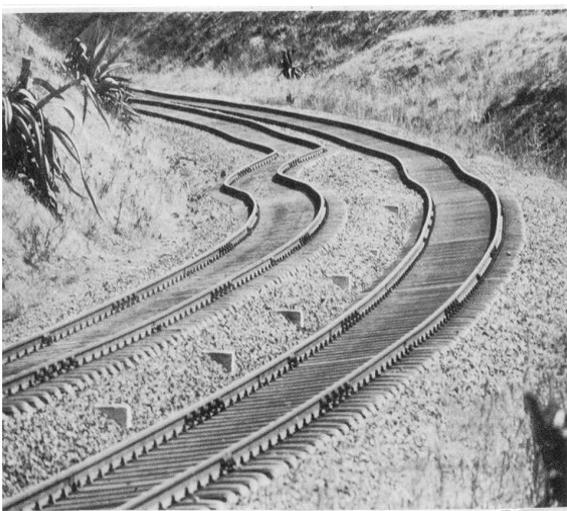
Où a, b, c sont des constantes qu'on détermine par la méthode des moindres carrés. Cette dernière approche est la forme qu'on va utiliser pour ajuster la fonction enveloppe dans notre travail.

## Chapitre 6 : Applications et résultats.

Les tremblements de terre sont dû à des instabilités frictionnelles, dans la lithosphère, liées aux contraintes créées par le mouvement des plaques tectoniques. Ces mouvements localisés sur les failles, aux frontières des plaques, ne sont plus réguliers. Les failles restent bloquées pendant de longues périodes, tandis que le mouvement des plaques se poursuit, de part et d'autres. Lors d'un séisme, la faille cède soudainement à la volonté tenace, lente et continue des contraintes tectonique. Cette rupture se propage avec une vitesse de plusieurs kilomètres par seconde et fait glisser en quelques secondes les deux compartiments de la faille l'un par rapport à l'autre.

En 1980 et 2003, les tremblements de terre sont survenus près de grandes agglomérations comme la ville d'El Asnam et la région de Boumerdes. Le premier tremblement de terre a été provoqué, indiquent les experts, par rupture de faille, le deuxième par la rencontre de la plaque africaine avec le bloc ibérique, un morceau un peu indépendant de la plaque Eurasie. Cette interaction provoque un mouvement nord-ouest de 3-4 mm par an.

Les conséquences sont d'énormes dégâts et de nombreuses personnes tuées. Fautes de prédire les séismes et encore moins de les contrôler nous sommes obligées de les subir. Ce chapitre concerne la modélisation et la prédiction des plus grandes magnitudes du séisme qui a frappé la ville de Chlef le 10/10/1980 et Boumerdes en Mai 2003, par le modèle ARMA figures (2.1) et (2.2).



**Figure (2.1).** Torsion de la voie ferrée Alger- Oran (séisme du 10/10/1980).



**Figure (2.2).** La liquéfaction du sol aux abords de la vallée des Issers (séisme du 21/05/2003).

### 6. 1. Formulation du model ARMA.

Dans cette étude, l'analyse dans le domaine temporel par le biais de modèles ARMA a été adopté [128,1189], Un modèle ARMA peut être représenté à un instant quelconque " t" comme suit :

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \dots - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (6-1)$$

où  $\phi_i, \theta_j$  sont des paramètres constant.

Le membre de gauche de l'équation est appelé partie auto- régressive (AR) d'ordre "P",

Le membre de droite est appelé partie moyenne mobile (MA) d'ordre "q".

$Z_t$  : La séquence de données.

$a_t$  : Variable aléatoire de Gauss.

L'ordre (p, q) du processus ARMA et les coefficients  $\phi_i, \theta_j$  sont estimés sur la base de l'analyse du maximum probablement appliqué.

### 6.2. Simulation du séisme de Chlef.

Les quatre accélérogrammes sismiques enregistrés, montrés dans le tableau 02 ont été choisis pour cette étude figure. (2.3).

**Tableau 02: caractéristiques des séismes réels.**

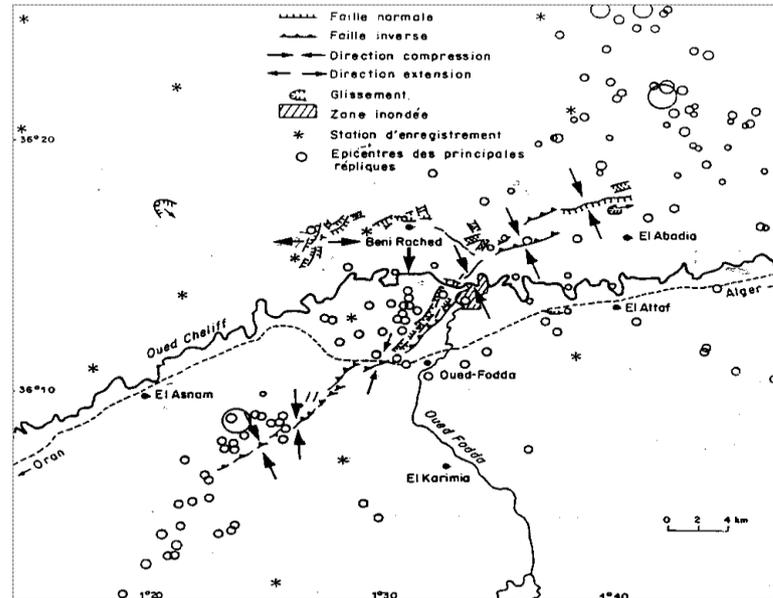
Événement	Chlef 1	Chlef 2	Chlef 3	El-Attaf
Magnitude	5,6	5,6	5,6	5,6
Durée (seconde)	21,14	25,96	21,7	10,06
Accélération max $\times g$	0,186	0,215	0,189	0,089
Nombre de points	1058	1299	1087	504

### 6.3. Procédure de modélisation

Pour identifier la classe du modèle et l'ordre correspondant, on détermine les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle estimées et on les compare aux comportements de celles d'autocorrélation  $R(k)$ . pour une série de temps de moyenne égale a zéro, au décalage k la fonction d'autocorrélation elle est donnée par larelation suivante :

$$R(k) = \frac{C(k)}{C(0)} \quad (6.2)$$

Où :  $C(k) = \left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_{i=1}^{N-K} (Z_t \cdot Z_{t+K})$  ,  $k = 1, 2, \dots k$



**Fig. (2.3) .Les différentes failles observées à Chlef lors du séisme du 10-10-1980 et station d'enregistrement**

Il est important de calculer la variance des coefficients d'autocorrélation estimés comme un critère pour décider que la fonction d'autocorrélation est nulle après un certain décalage  $k$ . Bartlett a déterminé l'erreur standard de l'autocorrélation estimé par la formule suivante :

$$R(k) = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot [1 + 2 \cdot (R^2(1) + \dots + R^2(q))]^{1/2} \quad k > q \quad (6.3)$$

La fonction d'autocorrélation peut être estimée soit par les équations de Yule-Walker soit en essayant successivement des processus autorégressifs (AR) d'ordre  $1, 2, \dots, k$ . Les équations de Yule-Walker sont obtenues par substitution des coefficients d'autocorrélation estimés  $R(k)$ , déterminés à partir de l'équation (6.2), dans l'équation (5.32) puis résolvant ces équations pour les valeurs successives de  $K=1, 2, \dots, k$ . L'utilisation des équations de Yule-walker peut conduire aux problèmes où. Les paramètres sont très proches des valeurs limites de la condition de non-stationnarité. Par conséquent les processus autorégressifs de  $K$  ordres sont adoptés pour estimer la fonction d'autocorrélation partielle.

Encore une fois, les erreurs standards des autocorrélations partielles estimées sont déterminées pour décider si certaines valeurs peuvent être considérées comme nulles au-delà d'un certain décalage  $k$ .

Quenouille a montré que pour un processus autorégressif (AR) d'ordre  $p$ , les estimés de la fonction d'autocorrélation partielle d'ordre  $p + 1$  ou plus ; sont presque indépendantes. La variance est donné par :

$$\text{VAR}[\Phi_{kk}] = \frac{1}{n} \quad k > p + 1 \quad (6.4)$$

En se basant sur les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle estimées et théorique, des sous-classes du processus général ARMA (p,q.) peuvent être sélectionnées pour les recherches futures.

Les sous-classes sélectionnées des modèles ARMA sont utilisées pour modéliser les séries de temps stationnaires. L'idée de l'estimateur de maximum de vraisemblance (maximum likelihood) est toujours utilisée pour l'estimation des paramètres dans les modèles stochastiques :

La fonction du maximum de vraisemblance  $L(\zeta/z)$  est définie comme la fonction qui associe, pour les observations fixées  $Z$ , l'ensemble variable des paramètres  $\zeta$ . Dans cette étude l'ensemble de paramètres  $\zeta$  correspond aux  $(p+q+1)$  paramètres  $(\varphi_i, \beta_i, \sigma_a)$  du modèle (ARMA). Pour un modèle ARMA (p,q) stationnaire et inversible on peut écrire l'expression suivante :

$$a_t = Z_t - \varphi_1 Z_{t-1} - \dots - \varphi_p Z_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_p a_{t-p} \quad (6.5)$$

Avec la supposition que :  $Z_t = 0$ , pour  $t \leq 0$  et  $a_t = 0$  pour  $t \leq 0$  pour n'importe quel ensemble de paramètres  $(\varphi, \theta)$ , les valeurs  $a_t$  peuvent être calculées successivement. Ainsi on construit la fonction suivante :

$$L\left(\frac{\zeta}{Z}\right) = a_t\left(\varphi, \frac{\theta}{Z}\right) \quad (6.7)$$

Les coefficients  $(a_t)$  sont supposés être indépendamment et normalement distribués.

$$p(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left[ \frac{1}{2\pi^2} \cdot \sigma_a^n \right] \exp\left(-\frac{\sum a_t^2}{2}\right) \quad (6.8)$$

Pour tout ensemble de paramètres  $\zeta$ , la distribution de probabilité  $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$  est associée, dans cette étude, à une série donnée  $Z_t$ . La fonction de vraisemblance est donnée par l'équation (6.9).

Il est convenable de travailler avec le logarithme de la fonction de vraisemblance  $L(\zeta/z)$  :

$$L\left(\frac{\zeta}{z}\right) = -n \ln(\sigma) - \frac{S(\varphi, \theta)}{2\sigma} \quad (6.9)$$

Où  $S(\varphi, \theta) = \sum a_t^2$ . En fixant  $\sigma_a$ , L depend seulement de S. Cependant les estimés du maximum de vraisemblance sont les mêmes que ceux des moindres carrés.

Les valeurs des paramètres  $(\varphi, \theta, \sigma)$  qui minimisent la partie résiduelle des carrées sont obtenues en utilisant l'algorithme proposé par Markuardt.

La procédure de modélisation d'un accélérogramme par un modèle ARMA est définie par les étapes suivantes Fig. (2.4):

- a. Calculer la fonction de modulation  $s(t)$  et normaliser l'accélérogramme mesuré.
- b. Calculer les fonctions d'autocorrélation et de corrélation partielle.
- c. Supposer une forme générale analytique et simple de la fonction enveloppe  $s(t)$  puis estimer ses paramètres à l'aide de la méthode des moindres carrés partielle.
- d. Sélectionner un ordre « p » pour la partie autorégressif (AR) et un ordre « q » pour la partie moyenne glissante (MA) de l'équation 1.
- e. Estimer les coefficients  $\varphi_i, i = 1, 2, 3, \dots, p$  et  $\theta_j, j = 1, 2, 3, \dots, q$  sur la base de l'analyse du maximum de vraisemblance.
- f. Evaluer alternativement les ensembles d'ordres du modèle (p, q) sur la base du critère (AIC) [187,188] et puis sélectionner le modèle qui a un AIC (p,q) minimum.

### 6.3.1. Fonction de modulation.

Pour estimer la fonction de modulation  $f(t)$  d'une série de temps donnée  $Z_t$  on utilise la méthode de Pradwarter [189]. Dans cette méthode l'évènement original est divisé en sections d'intervalles égales, la dimension de chaque section est choisie de telle façon qu'on obtient une résolution raisonnable de la fonction de modulation.

Dans cette étude on a choisi des segments de 0,5 sec où le pas de temps de la série temporelle discrète est de 0.02sec. Si N est le nombre de points donnés, k est le nombre de sections et chaque section contient 25 points donnés donc  $N=25 k$ .

#### 6.3.1.1-Détermination de la fonction de modulation.

La première étape dans l'identification du modèle est la détermination de la fonction de modulation pour chaque accélérogramme en utilisant la méthode de Pradwarter [189]. Plusieurs essais ont été faites avec des fenêtres d'observations de : 25, 50, 100 ,200 observations. On a trouvé que la fenêtre de 50 observations est la plus commode.

Les ordonnés de la fonction de modulation sont données par la formule suivante :

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{101} \sum_{t=i-50}^{t=i+50} (Z_t)^2} \quad (6.10)$$

Où  $Z_t, t = 1, 2, \dots, n$  représente l'accélérogramme .

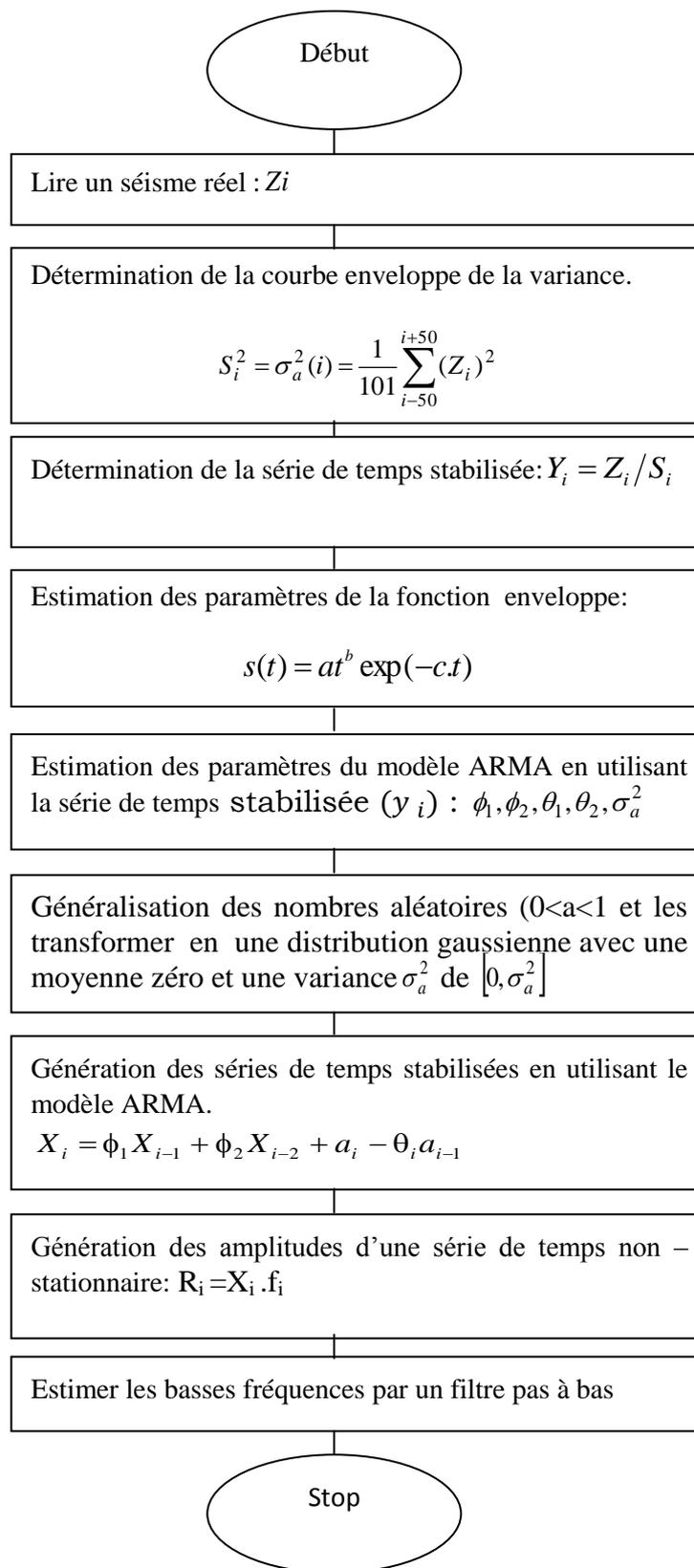


Fig. (2.4). Procédure de modélisation

### 6.3.2- Fonction enveloppe.

Dans la procédure de simulation la fonction enveloppe utilisé est donnée par [190 ,191] :

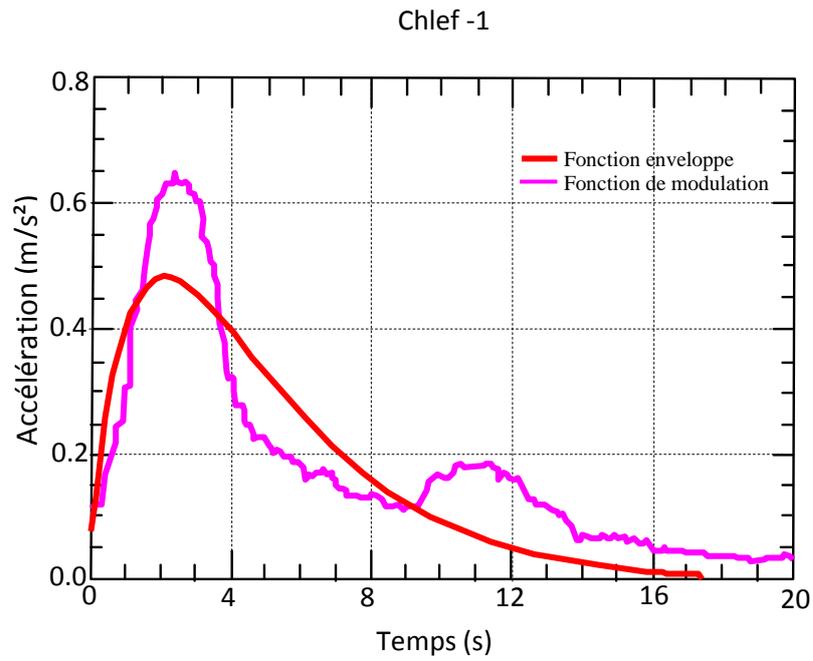
$$s(t) = at^b e^{-ct} \quad (6-11)$$

Les paramètres a, b et c ont été estimés par l'analyse de régression non linéaire, les valeurs de ces constantes sont donnés au tableau 02a.

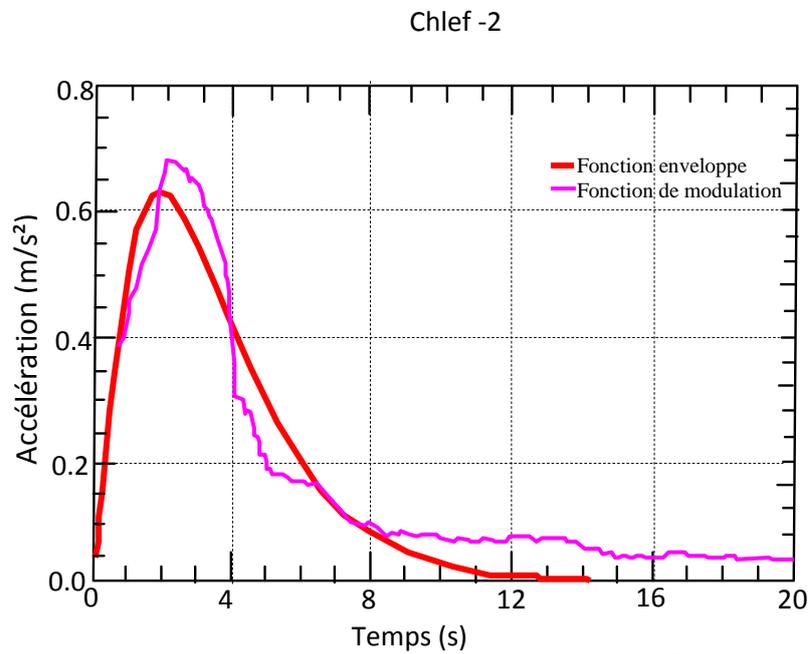
**Tableau 02a: Les paramètres de la fonction Enveloppe.**

Événement	Paramètres fonction Enveloppe		
	a	b	c
Chlef-1	0.5880	0.7397	0.312
Chlef-2	1.2198	1.1077	0.671
Chlef-3	1.1567	0.8810	0.689
Attaf	0.3449	0.3671	0.582

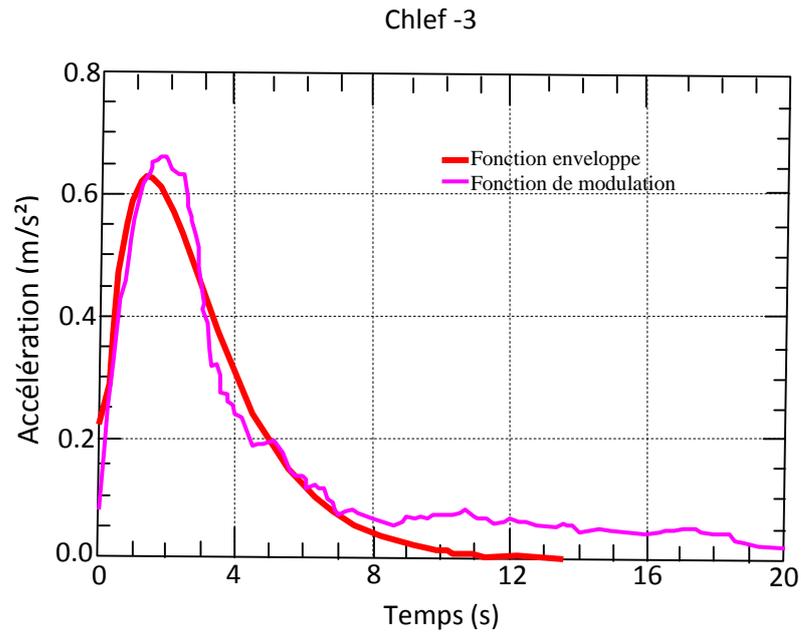
Les figures (2.5), (2.6), (2.7),et(2.8) montrent l'allure des fonctions de modulation et des fonctions enveloppes correspondante aux séismes de chlef1et chlef2.Chlef3 et ElAttaf.



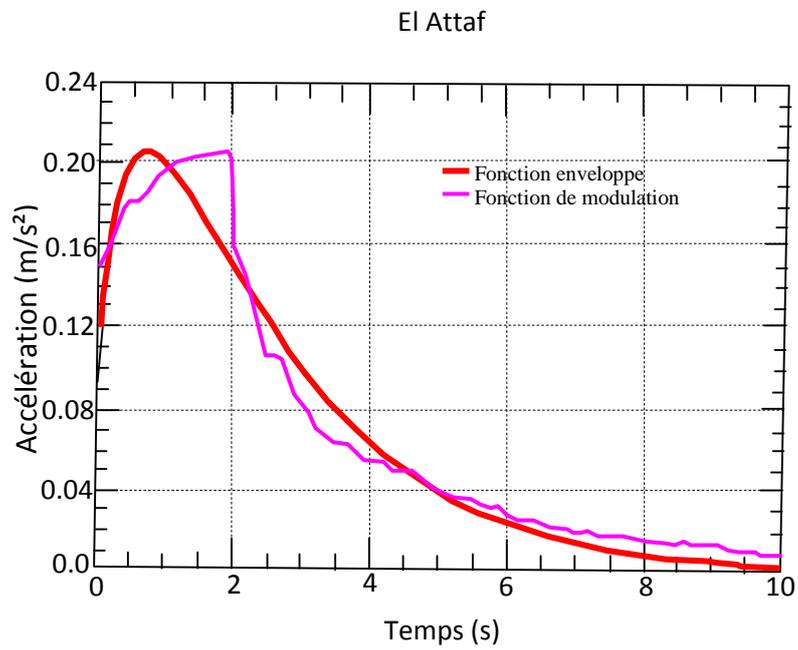
**Fig.(2.5) Fonction de modulation et enveloppe (Chlef-1)**



**Fig.(2.6) Fonction de modulation et enveloppe (Chlef-2)**



**Fig. (2.7) Fonction de modulation et enveloppe (Chlef-3)**



**Fig. (2.8) Fonction de modulation et enveloppe (El Attaf)**

### 6.3.3- Détermination de la série de temps stabilisée :

L'accélérogramme original et la fonction de modulation sont utilisées pour estimer la série de temps d'accélération stabilisée donnée par la formule :

$$Y_i = \frac{Z_i}{S_i} \quad (6.12)$$

$S_i$  : représente les ordonnées de la fonction de modulation

$Z_i$  : représente les valeurs de l'accélérogramme original.

## 6.4- Détermination des modèles ARMA

### 6.4.1- La fonction d'autocorrélation :

Pour fournir une information sur le choix de l'ordre (p,q.) du processus ARMA qui peut être utilisé pour représenter un enregistrement d'accélération sismique, il est important de se référer au comportement de la fonction d'auto corrélation donnée par :

$$\rho_k = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{k-i} ; k \geq q+1 \quad (6.13)$$

$\phi_i$  : représente les coefficients autoregressifs.

$\rho_{k-i}$  : représente les coefficients d'autocorrélation.

Les coefficients d'autocorrélation correspondants aux q premiers décalages  $\rho_1, \dots, \rho_q$  dépendent à la fois des coefficients des processus autorégressif et de la moyenne glissante, tandis que pour les décalages supérieurs  $\rho_{q+1}, \rho_{q+2}, \dots, \rho_{q+p+1}$  ils dépendent seulement des paramètres autorégressifs.

Les figures (2.9), (2.10), (2.11) et (2.12) montrent l'allure des fonctions d'autocorrélations pour les séismes de Chlef1 , Chlef2, Chlef3 et Elattaf.

### 6.4.2- La fonction d'auto corrélation partielle.

La fonction d'auto corrélation partielle est une façon de représenter la dépendance du temps d'une série, elle aide à identifier le type de l'ordre du modèle, quand elle est utilisée avec la fonction d'auto corrélation elle est infinie en extension.

La fonction d'auto corrélation partielle pour différents ordres est définie par les équations de de Yule-Walker .

$$\begin{bmatrix} 1 & R(1) & \dots & R(k-1) \\ R(1) & \cdot & \cdot & R(k-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R(k-1) & 1 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ R(k) \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

k : représente l'ordre du processus.

$\phi_{k1}, \phi_{k2}, \dots, \phi_{kk}$  : représentent les coefficients autorégressifs

La résolution de cette équation pour  $k = 1, 2, 3, \dots, k$  nous donne les valeurs de  $\phi_{kk}$ .

Pour un processus (ARMA) stationnaire et irréversible la fonction d'autocorrélation partielle a une variation exponentielle sous forme d'ondes sinusoïdales amorties dépendantes des paramètres (MA) après le premiers (p- q) décalage.

Le tableau 03 montre les caractéristiques des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle pour les modèles AR, MA et ARMA.

**Tableau 03 : Caractéristiques des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle**

Processus	Auto corrélation	Auto corrélation partielle
AR(p)	Infinie, elle a une forme exponentielle amortie avec/ ou des ondes amorties. $\rho_k = \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_{k-j}$	Finie, présente des pics du décalage 1 au décalage, puis elle se coupe.
MA(q)	Finie, elle présente des pics du décalage 1 au décalage q, puis elle se coupe	Infinie, elle a une forme exponentielle avec/ ou des ondes amorties.
ARMA (p, q)	Infinie, les premiers q-p décalages : irréguliers puis une forme exponentielle amortie avec/ ou des ondes amorties. $\rho_k = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_{k-i}$	Infinie, les premiers q-p décalages : irréguliers puis une forme exponentielle amortie avec/ ou des ondes amorties

Les figures (2.13), (2.14), (2.15) et (2.16) montrent l'allure de ces fonctions d'autocorrélation partielles pour les séismes de Chlef1, Chlef2, Chlef3 et Elattaf.

Ces fonctions d'autocorrélation partielle s'annulent après le décalage  $k = 3$  dans le cas du séisme Chlef-2, et après le décalage  $k = 4$  dans le cas des trois autres séismes ; donc on recommande pour Chlef-2 un modèle ARMA avec  $p - q \leq 3$ , et pour les autres séismes des modèles ARMA avec  $p - q \leq 4$ .

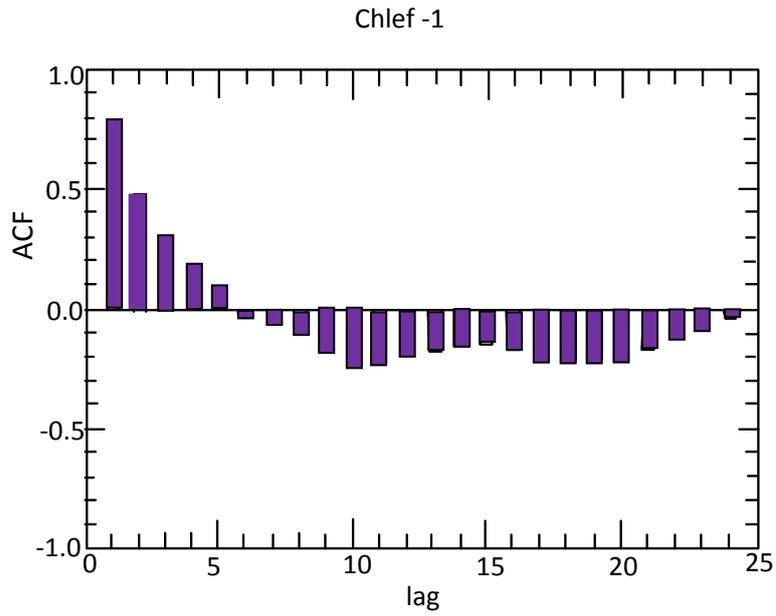


Fig. (2.9) .Fonction d'autocorrelation (Chlef-1)

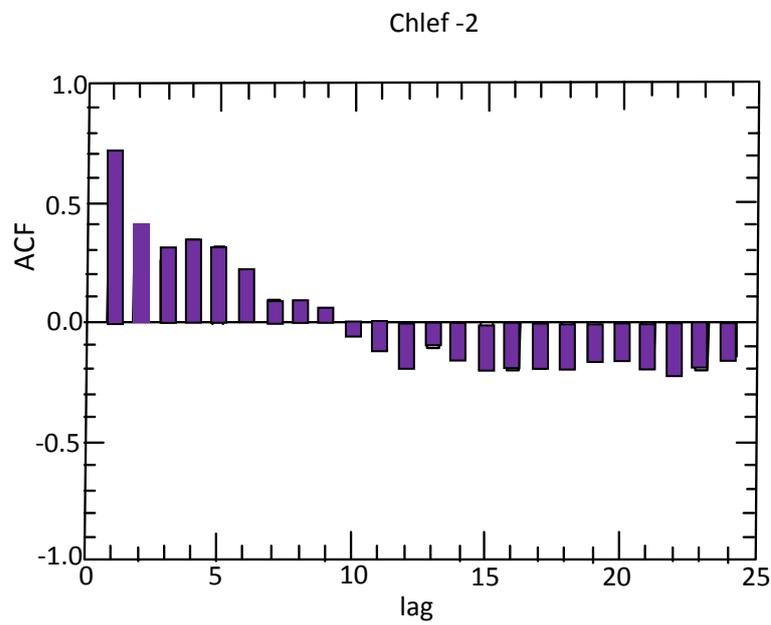
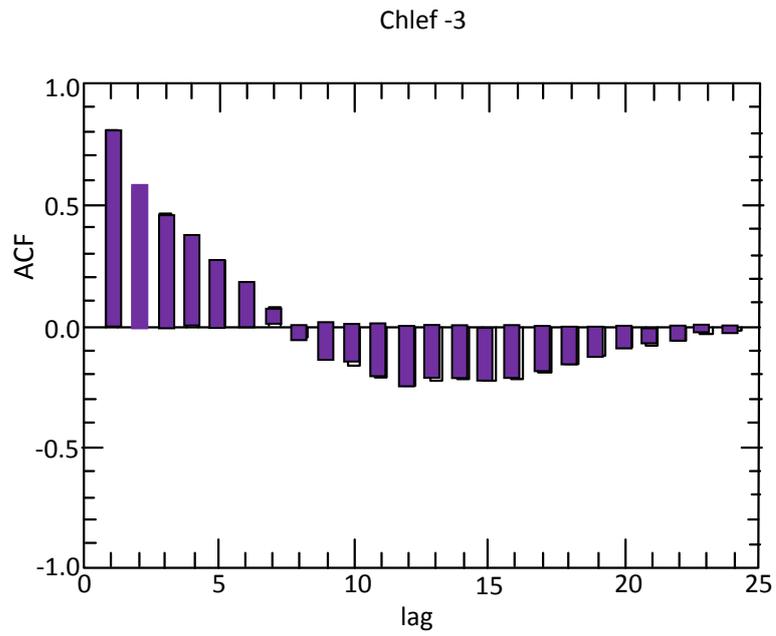
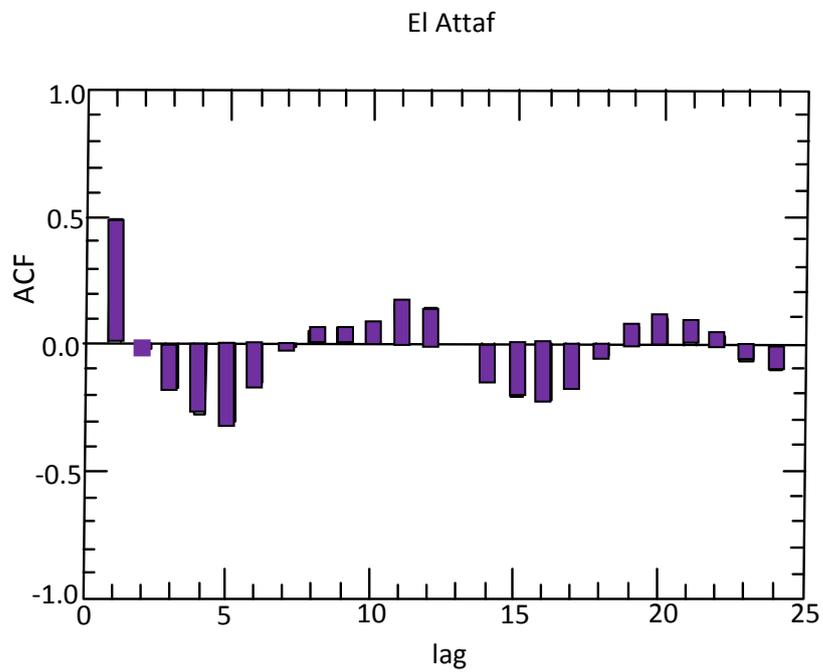


Fig. (2.10) .Fonction d'autocorrelation (Chlef-2)



**Fig. (2.11) .Fonction d'autocorrelation (Chlef-3)**



**Fig. (2.12) .Fonction d'autocorrelation (El attaf)**

L'utilisation des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle suggère les modèles qui peuvent être utilisés. Pour obtenir une bonne estimation des paramètres tous les modèles suggérés par les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle sont appliqués aux 4 séismes à étudier ; et on détermine pour chaque séisme un ensemble de modèles ARMA, leurs paramètres sont estimés par l'estimateur du maximum de vraisemblance.

#### 6.4.3- Le critère AIC

L'estimation du nombre de paramètres et leurs valeurs numériques pour approprier un modèle à une série de temps est un problème de base.

L'estimation des paramètres est basée sur la méthode des moindres carrés non linéaire, mais l'ordre du modèle est basé sur le critère AIC ( Akaike information criteria ) qui a attiré une grande attention .

Le problème du choix d'ordre pour l'ARMA (p, q) modèle a été étudié par Bruzzone et Kaveh [192].

Akaike[176] a abordé ce problème en utilisant la mesure d'entropie maximum et le critère d'information de Kullback-Liebler.

En tenant compte du critère AIC pour les séries de temps stationnaires, le modèle qui doit être choisi est celui qui minimise :

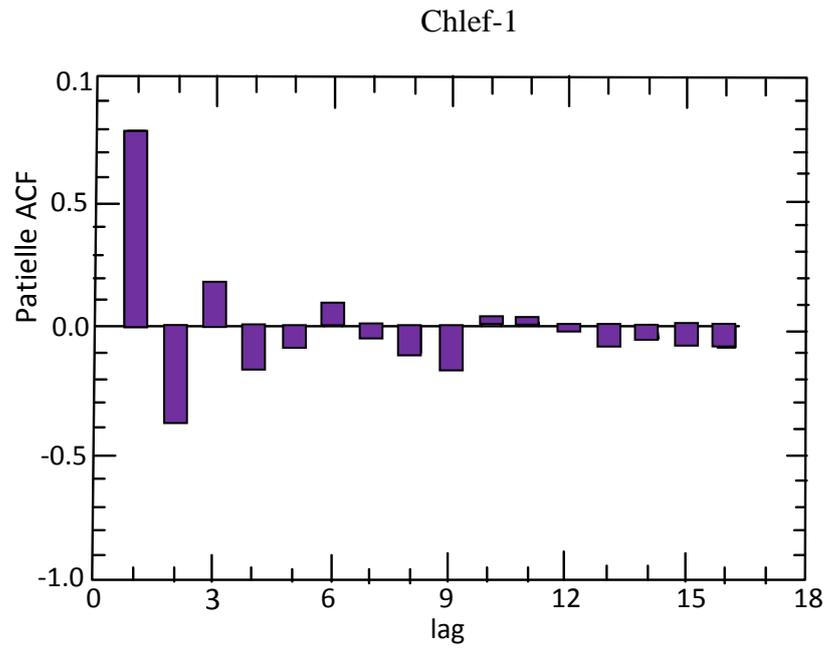
$$AIC(p, q) = N \cdot \ln(\sigma_a^2) + 2(p + q) \quad (6.15)$$

Où N est la dimension de l'échantillon,  $\sigma_a^2$  est estimée du maximum de vraisemblance résiduelle.

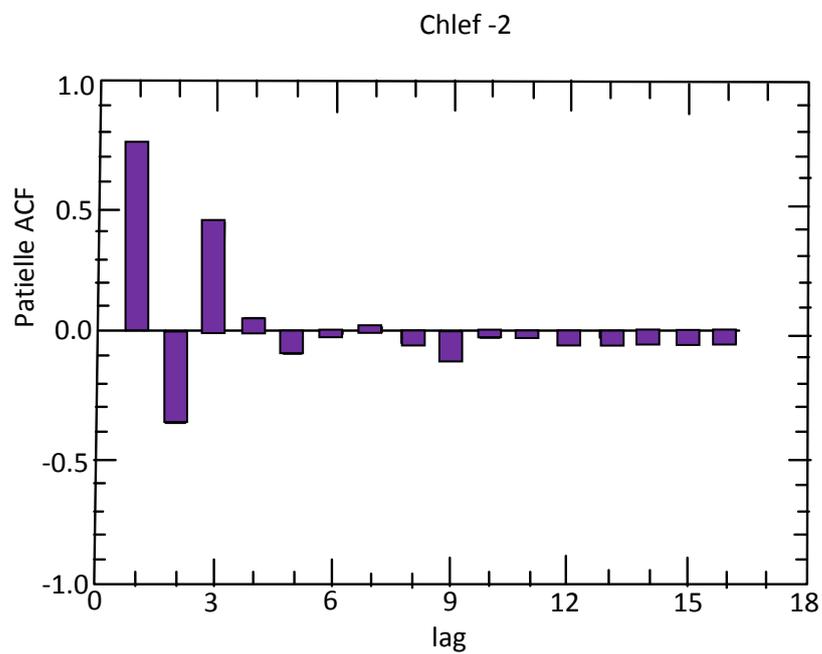
Dans notre cas nous avons pris pour chaque séisme les modèles ARMA(1,1), ARMA (1,2), ARMA(2,1), ARMA(2,2).

Pour sélectionner le modèle final on fait une comparaison entre les modèles proposés pour chaque séisme en utilisant le critère AIC tableau 04.

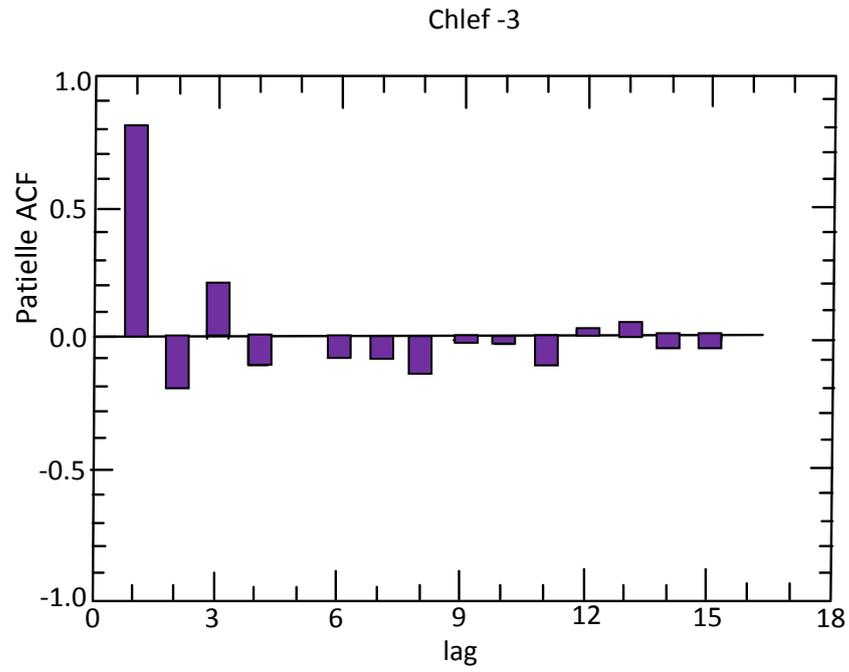
Les paramètres du modèle final pour chaque séisme sont donnés par le tableau 05.



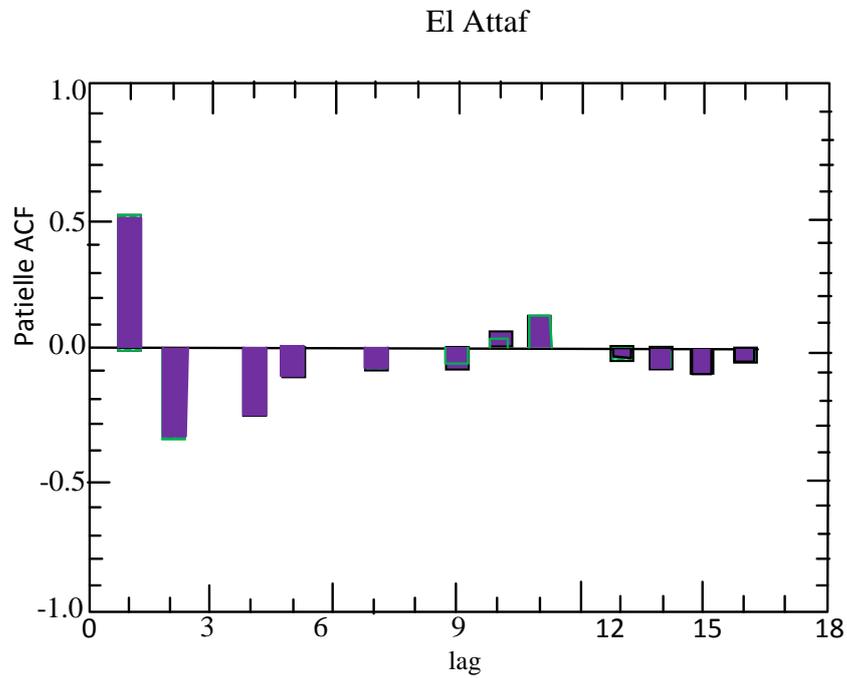
**Fig. (2.13).** Fonction d'autocorrelation partielle (Chlef-1)



**Fig. (2.14) .** Fonction d'autocorrelation partielle(Chlef-2)



**Fig. (2.15).**Fonction d'autocorrelation partielle (Chlef-3)



**Fig (2.16).**Fonction d'autocorrelation partielle (El Attaf)

**Tableau04 : Application des critères AIC aux différents modèles ARMA**

Modèles	AIC (Chlef1)	AIC (Chlef2)	AIC (Chlef3)	AIC (Attaf)
ARMA(1,1)	-1200.1	-1170.3	-1145.5	-238.2
ARMA (1,2}	-1202.1	-1185.5	-1157.9	-241.0
ARMA(2,1)	-1203.0 *	-1190.2*	1158.3*	244.0*
ARMA(2,2).	-1199.7	-1186.5	-1155.0	-239.2

\*Indique le modèle qui a l'AIC minimal.

**Tableau05: Paramètres des modèles retenus.**

Paramètres	(Chlef1)	(Chlef2)	(Chlef3)	(Attaf)
AR(1)	0.657	0.359	0.359	-0.383
AR(2}	0.016.	-0.869	-0.222	-1.111
MA(1)	-0.410	-0.304	0.181	-0433
$\sigma_a$	0.410	0.551	0.559	0.611

#### 6.4.4- Simulation des séismes.

L'hypothèse de base utilisée dans cette analyse est qu'un séisme est supposé comme une réalisation parmi une population de séismes qui peuvent être caractérisés par le processus ARMA.

Pour simuler les séries de temps d'accélération en utilisant l'approche adoptée, on procède, en premier lieu, à la génération d'un bruit blanc caractérisé par une moyenne nulle et une variance égale à la variance estimée. Ce bruit blanc est utilisé pour obtenir des séries de temps stationnaires au moyen du module ARMA déjà défini, puis on multiplie cette dernière série par la fonction enveloppe  $s(t)$ .

Puisqu'un modèle ARMA est une combinaison linéaire des valeurs  $Z_t$  et des valeurs aléatoires gaussiennes  $a_t$ , donc les séismes simulés peuvent être générés par récurrence.

Pour un modèle ARMA(2.1) l'équation de récurrence est donnée par l'équation :

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} \quad (6-16)$$

Pour commencer le calcul des valeurs  $Z_t$  données par l'équation (6-8), il est nécessaire de définir les p premières valeurs de  $Z_t$  ( $Z_0, Z_{-1}$ ); ces valeurs sont supposées nulle.

Les variables aléatoires gaussiennes  $a_t$  possédant une variance  $\sigma_a^2$  sont générées comme un bruit blanc.

Les expériences faites avec ces opérations indiquent que les spectres de Fourier et de réponse établis à partir des séismes simulés atteignent de grandes valeurs pour de petites fréquences, alors que les séismes originaux qui sont filtrés ont des réponses nulles pour des fréquences nulles. Ce problème est commun à tous les modèles développés jusqu'à présent. Pour remédier à ce problème on utilise un filtre pass bas qui élimine la plupart des basses fréquences.

Une comparaison entre les caractéristiques essentielles des séismes réels et celle des séismes simulés est donnée par le tableau 06.

**Tableau 06 : caractéristiques des séismes réels et celle des séismes simulés.**

		Séismes			
		Chlef-1	Chlef-2	Chlef-3	EI- Attaf
Réel	Accélération. Maximale $\times g$	0,186	0,215	0,189	0,089
	Nombre de zéros/sec	9,13	9,28	10,3	17,1
	Durée [sec]	21,14	25,96	21,7	10,06
Simulé	Accélération. Maximale $\times g$	0,079	0,141	0,107	0,061
	Nombre de zéro/sec	8,98	9,02	9,50	18,01
	Durée [sec]	20	20	20	10

Les résultats montrent que Chlef1, Chlef2, Chlef3 et Attaf sont mieux caractérisés par le processus ARMA (2,1) en plus des paramètres des fonctions enveloppes.

Les figures (2.17) et (2.18) montrent quatre accélérogrammes simulés par le modèle ARMA (2,1) comme aux quatre événements considéré.

La figure (2.19) montre l'allure des spectres de réponse des séismes réels et simulés, avec le même nombre de périodes et un coefficient d'amortissement de 5%, on remarque qu'il n'y a pas d'important décalage entre les spectres des séismes réels et ceux des séismes artificiels sauf entre les périodes 1sec et 10sec dans le cas des séismes Chlef-3 et EI-Attaf, à cause de l'existence des basses fréquences résiduelles après filtrage

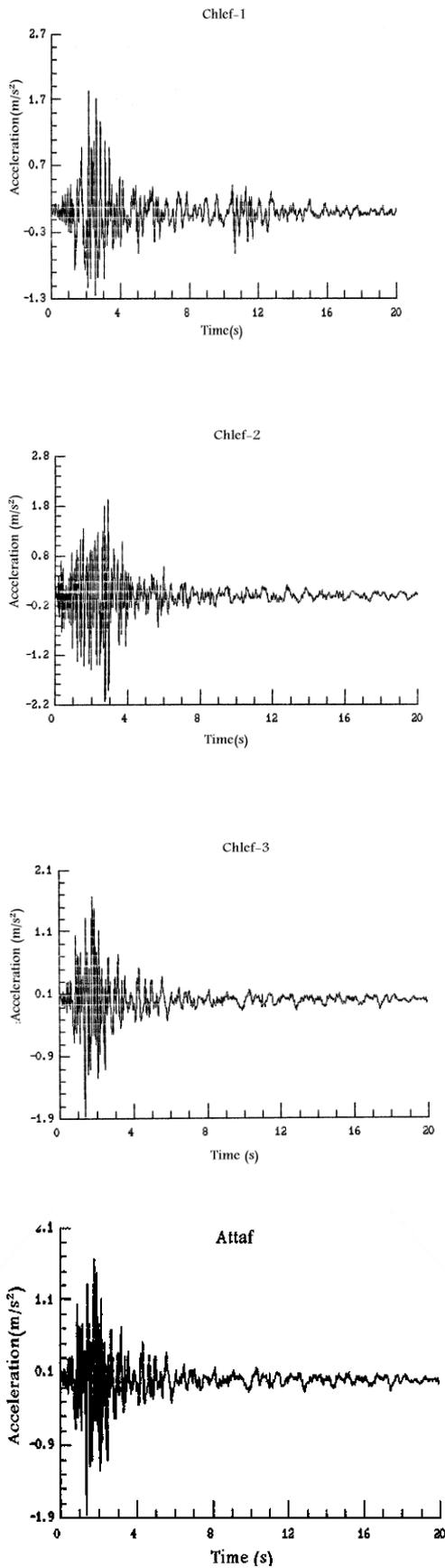


Fig. (2.17) : Séismes Naturels

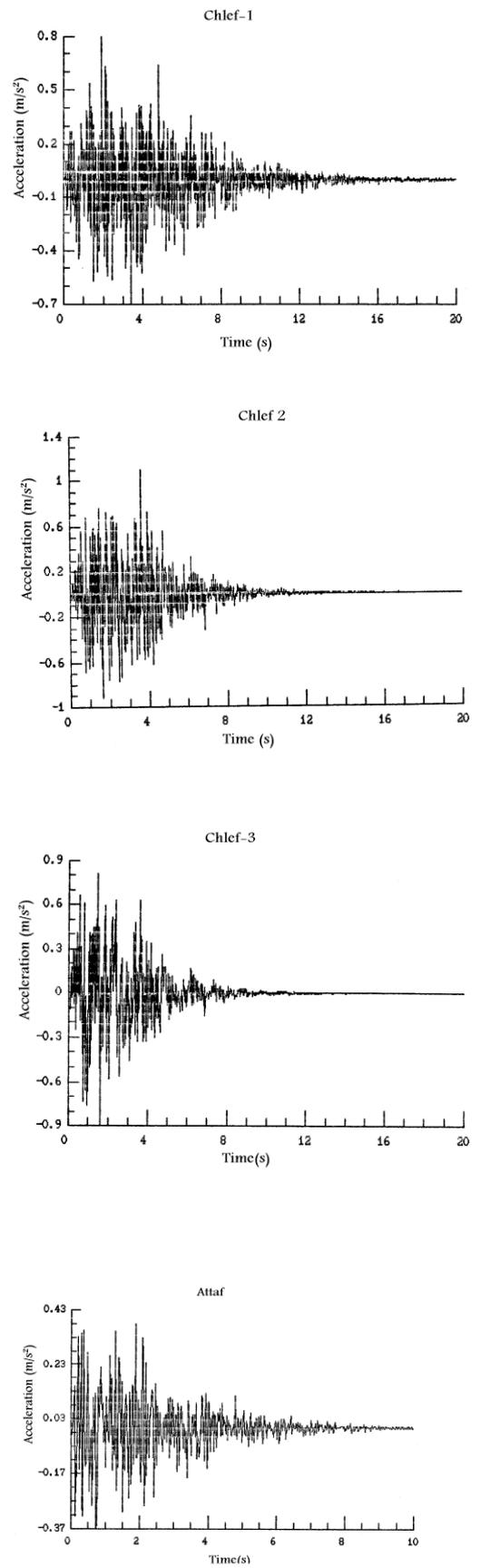
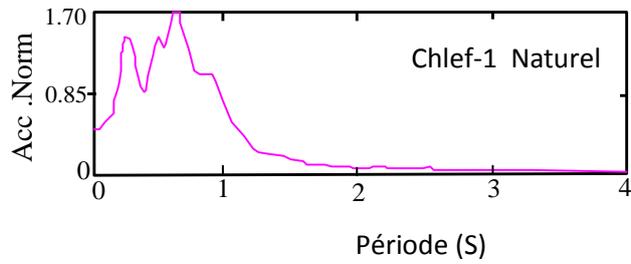
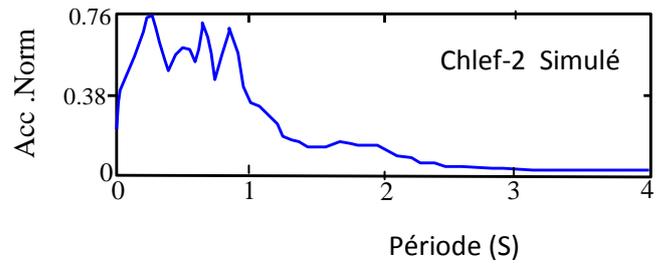


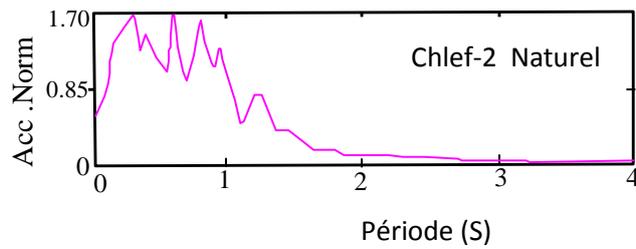
Fig. (2.18) : Séismes Artificiels



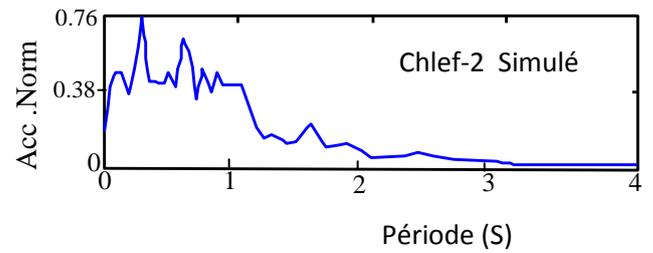
Spectre de réponse des accelerogrammes enregistrées Chlef-1 (1980)



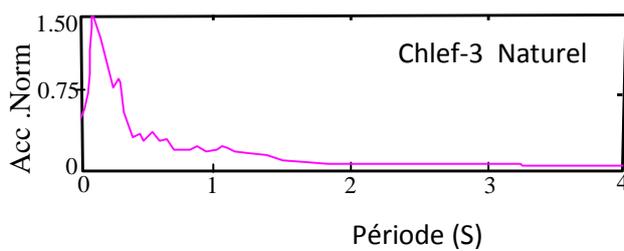
Spectre de réponse des accelerogrammes Simulés Chlef-1



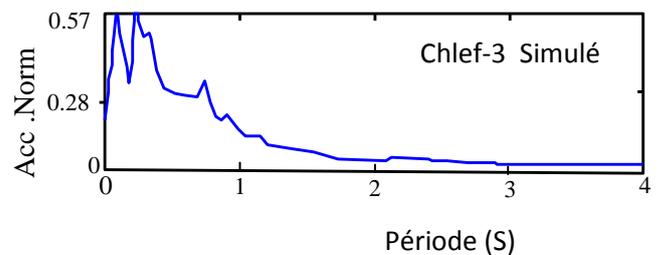
Spectre de réponse des accelerogrammes enregistrées Chlef-2 (1980)



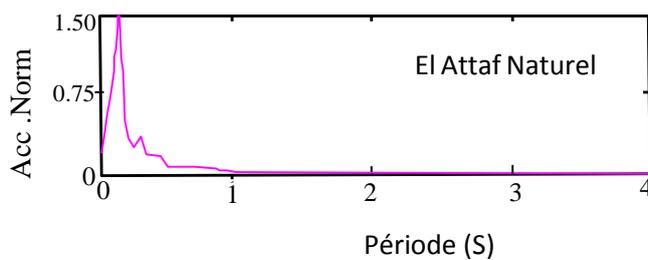
Spectre de réponse des accelerogrammes Simulés Chlef-2



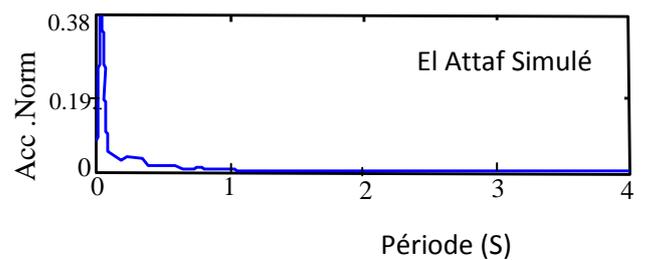
Spectre de réponse des accelerogrammes enregistrées Chlef-3 (1980)



Spectre de réponse des accelerogrammes Simulés Chlef-3



Spectre de réponse des accelerogrammes enregistrées El Attaf (1980)



Spectre de réponse des accelerogrammes Simulés El Attaf

**Fig. (2.19) Spectre de réponse de la série temporelle pour un taux d'amortissement = 0,05**

### 6.5-Méthode d'analyse : calcul de la réponse sismique d'une couche de sol par la méthode des éléments finis.

Le but de cette partie est de présenter une méthode générale d'investigation des effets sismiques sur une couche de sol. L'analyse est divisée en deux parties:

- a) La détermination de la réponse dynamique d'un milieu sableux quand il est excité par un mouvement sismique horizontal prescrit.
- b) La détermination de la réponse dynamique de la même couche quand elle est excitée par des séismes artificiels simulés pour chacun des quatre événements en utilisant la technique ARMA comme il a été expliqué précédemment.

Pour les calculs linéaires et non linéaires (Duncun), on a utilisé le programme ADH (105)

#### 6.5.1. Calcul d'une couche de sol par la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est un outil puissant dans les calculs sismiques cependant l'utilisation de cette méthode demande beaucoup de précautions et de réflexions, suivant le problème à traiter. La loi de comportement joue un rôle majeur dans la réponse sismique du sol.

La discrétisation des équations des ondes dans l'espace pour un modèle d'éléments finis se traduit par l'équation suivante:

$$|M| \{\ddot{u}\} + |C| \{\dot{u}\} + |K| \{u\} = -\{m\} \ddot{y} \quad (6.17)$$

Où

$\{u\}$ ,  $\{\dot{u}\}$  et  $\{\ddot{u}\}$  sont des vecteurs qui représentent respectivement les déplacements, les vitesses et les accélérations par rapport à la base rigide.

$\ddot{y}$  est l'accélération de la base rigide.

$|M|$  est la matrice de masse.

$|C|$  est la matrice d'amortissement.

$|K|$  est la matrice de rigidité.

$|m|$  est un vecteur qui est lié à  $|M|$ .

Pour plus de détails, voir Zienkawiez ou Newmark et Rozenblueth. [193,194].

L'équation (3-1) peut être résolue par plusieurs techniques numériques. La plupart de ces techniques appartiennent à un des groupes principaux suivants :

A- Méthode des modes propres.

B- Intégration directe.

C- Méthode de Fourier.

Toutes ces méthodes donnent lieu à des erreurs dont la source réside dans le choix des hypothèses et des simplifications numériques faites au cours de leur élaboration.

En particulier, ces méthodes diffèrent en ce qui concerne la prise en compte de l'amortissement du système et leur capacité à traiter les fréquences élevées du mouvement. Nous allons présenter brièvement les trois méthodes.

L'équation (6.17) a été résolue par la technique numérique intégration directe .

### 6.5.1.1. Intégration directe :

L'équation (6-17) pour le temps  $(t + \Delta t)$  s'écrit :

$$|M|^{t+\Delta t}\{\ddot{u}\} + |c|^{t+\Delta t}\{\dot{u}\} + |K| \{\Delta u\} = - \{m\}^{(t+\Delta t)}\ddot{y} - {}^tF \quad (6-18)$$

Où :

$t + \Delta t_{\{u\}}$  = Vecteur d'accélération nodales.

$t + \Delta t_{\{\dot{u}\}}$  = Vecteur de vitesses nodales.

$\{\Delta u\}$  = Vecteur d'incrément de déplacement produits entre le temps  $(t)$  et le temps  $(t + \Delta t)$ .

${}^tF$  = Vecteur de force nodale équivalent aux contraintes des éléments au moment  $(t)$ .

L'équation(6.18) représente les équations incrémentales d'équilibre qui doivent être résolues pour chaque étape de temps (Intégration directe).

Différentes méthodes ont été élaborées pour résoudre l'équation (6.18); parmi ces méthodes la méthode Newmark(Newmark [195]), la méthode Wilson [196]) sont les plus répandues.

Le problème commun de toutes les méthodes d'intégration directe est que l'incrément de temps doit être choisi assez petit pour assurer la précision. Quelques méthodes présentent aussi un problème de stabilité et de convergence. Toutefois, la plupart de ces problèmes peuvent être surmontés par la réduction de l'incrément de temps, ce qui peut augmenter considérablement le coût du calcul.

L'amortissement est en général pris en compte par la méthode d'amortissement de Rayleigh (Voir Idriss et Seed[197]).

Dans cette méthode, on admet que la matrice d'amortissement élémentaire, ici, peut être définie comme une combinaison linéaire de la matrice de masse et la matrice de rigidité élémentaire :

$$|c|_e = a |M|_e + b |K|_e \quad (6-19)$$

Où  $a$  et  $b$  sont des constantes qui peuvent être choisies pour contrôler l'amortissement. Cette hypothèse est convenable pour des méthodes d'intégration directe. L'inconvénient de cette méthode est que l'amortissement introduit ainsi est dépendant de la fréquence. L'équation (4-9) montre la relation entre l'amortissement  $\beta$  et la fréquence.

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\omega} + b\omega \right) \beta_0 \quad (6-20)$$

Le choix le plus habituel des constantes de l'équation (4-9) est:  $a = \beta_0 \omega_0$  et  $b = \beta_0 / \omega_0$  où  $\omega_0$  est la fréquence fondamentale de l'ensemble du système d'éléments finis et  $\beta_0$  est l'amortissement à cette fréquence. Ceci nous conduit à :

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega} \right) \beta_0 \quad (6-21)$$

## 6.5.2. Le choix de loi de comportement :

### 6.5.2.1 Loi élastique linéaire :

La loi élastique linéaire dans le cas simplifié d'un matériau homogène isotrope est définie par les deux paramètres indépendants qui sont le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ .

L'utilisation de la loi élastique linéaire pour des études sismiques où on a affaire à des amplitudes de chargement élevées perd sa validité, Néanmoins, en raison de sa simplicité relative, on continue de l'utiliser en apportant une correction par le choix des propriétés du sol qui s'accordent avec le niveau des déformations attendues. Ces propriétés sont estimées dans le cas le plus simple à l'aide des règles fondées sur des études paramétriques (appliquer des coefficients correcteurs aux propriétés initiales du sol).

**6.5.2.2. Les lois non linéaires :** On peut diviser les lois non linéaires en deux catégories :

- a) les lois empiriques basées sur les essais relativement simples de laboratoire, qui sont les lois hyperboliques et la loi de Ramberg-Osgood,
- b) Les lois fondées sur la théorie de l'élasticité ou de l'élastoplasticité. Ces lois permettent de traiter les problèmes bidimensionnels et tridimensionnels.

### 6.5.3. Modèle hyperbolique de Duncan

L'origine des modèles hyperboliques se trouve dans les travaux de Kondner (1963) [198], où le comportement est exprimé sous la forme :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon_1}{a + b \varepsilon_1} \quad (6.22)$$

avec :  $\sigma_1, \sigma_3$  : contraintes principales majeure et mineure,

$\varepsilon_1$  : déformation axiale,

$a, b$  : deux constantes déduites de l'essai triaxial. Elles se déterminent aisément :

$\frac{1}{a}$  est la pente initiale et  $\frac{1}{b}$  est la valeur asymptotique de  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ .

Duncan et Chang (1970) ont complété la loi hyperbolique proposée par Kondner en y introduisant le module tangent initial proposé par Janbu (1963) [199] :

$$E_i = K_{ch} \cdot P_a \left( \frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (6.23)$$

avec :  $K_{ch}, n$  : paramètres obtenus à partir de résultats d'essais triaxiaux,

$P_a$  : pression atmosphérique.

### 6.5.4. Modèle hyperbolique de Hardin et Drnevich.

Hardin et Drnevich (1972) [200] ont construit leur modèle en mettant l'expression hyperbolique proposée par Kondner (1963) sous la forme d'une relation entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et la déformation de cisaillement  $\gamma$  :

$$\tau = \frac{\gamma}{\frac{1}{G_{max}} + \frac{\gamma}{\tau_{max}}} \quad (6.24)$$

avec :  $G_{max}$  : module de cisaillement maximum,

$\tau_{max}$  : résistance au cisaillement maximum, exprimée par la formule suivante dans les conditions d'un essai triaxial :

$$\tau_{max} = \frac{3(p' \sin \varphi' + c' \cos \varphi')}{(3 - \sin \varphi')} \quad (6.25)$$

avec  $p'$  : contrainte moyenne effective, égale à  $p' = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$

$c', \varphi'$  : cohésion et angle de frottement interne.

Les auteurs ont introduit la notion de déformation de cisaillement de référence  $\gamma_r = \frac{\tau_{max}}{G_{max}}$  de

telle sorte que le module sécant est exprimé comme suit :

$$G_{sec} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{G}{G_{max}} = \frac{G_{max}}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}} \quad (6.26)$$

### 6.5.5 Algorithme utilisé pour le calcul non linéaire

L'utilisation des lois non linéaires impose l'utilisation de la méthode d'intégration directe. Pour résoudre l'équation(6.18) dans le cas non linéaire, le module tangent  $E_t$  du sol et la matrice de rigidité change à chaque étape de temps .la méthode utilisée est l'utilisation de la matrice de rigidité qui correspond à l'étape précédente.

L'équation (6.18) devient :

$$M^{t+\Delta t} \{\ddot{u}\}^{(i)} + C^{t+\Delta t} \{\dot{u}\}^{(i)} + K\{\Delta u\}^{(i)} = -\{m\}^{t+\Delta t} \ddot{y}_{-t+\Delta t} F^{(i-1)} \quad (6.27)$$

avec  $i = 1,2,3,4,\dots,n$

Où  ${}^{t+\Delta t} \{\ddot{u}\}^{(i)}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \{\dot{u}\}^{(i)}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \{u\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \{u\}^{(i-1)} + \Delta u^{(i)}$  sont respectivement les valeurs approximatives des accélérations, des vitesses et des déplacements obtenus à l'itération i.

${}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}$  = le vecteur des forces nodales équivalentes aux contraintes dans la configuration correspondante aux déplacements  ${}^{t+\Delta t} u^{(i-1)}$ . Ces contraintes sont calculées pour chaque étape de temps.

Les contraintes sont calculées pour chaque élément de la manière suivante :

a-Calcul du module tangent correspondant aux contraintes obtenues à l'itération précédente  $|\sigma^{(i-2)}|$ .

b- Calcul des contraintes correspondant aux déplacements  ${}^{t+\Delta t} u^{(i-1)} \left| \sigma^{*(i-1)} \right|$

c-On prend  $\sigma^{**(i-1)} = \frac{\sigma^{(i-2)} + \sigma^{*(i-2)}}{2}$  pour le calcul du nouveau module tangent  $E_t$

d- Calcul des contraintes correspondant aux déplacements  ${}^{t+\Delta t} u^{(i-1)}$

### 6.5.6. Choix de l'étape de temps et la dimension de la maille

Dans les problèmes dynamiques traités par la méthode des éléments finis, le choix de l'étape de temps ( $\Delta t$ ) est très important.  $\Delta t$  peut être défini par la formule  $\Delta t < \frac{h}{c}$  - où h = la dimension maximale de la maille et c = la vitesse d'onde dans le sol. La signification physique de cette formule est que l'onde ne doit pas parcourir une distance plus grande que la dimension d'une maille pendant le temps  $\Delta t$ . D'autre part, h doit être choisi d'après le critère :

$$h \leq \frac{\lambda}{10} \text{ où } \lambda = \text{longueur d'onde}$$

Dans le cas où on utilise une loi non-linéaire, les choix de h et  $\Delta t$  influent beaucoup sur la précision et la stabilité de la solution. Ce choix est plus difficile pour un problème

bidimensionnel que pour un problème monodimensionnel. En général, il est préférable de ramener le problème à un modèle monodimensionnel, de résoudre le problème de stabilité et, ensuite, de faire un calcul complet.

### 6.5.7. Maillage utilisé :

On a pris une couche de 10 m de haut et de 10 m de large. Le maillage utilisé pour le calcul d'éléments finis est montré sur la figure (2.20). Comme on le voit sur la figure, il y a 20 éléments et 22 nœuds. Les nœuds sont bloqués verticalement pour une sollicitation horizontale..

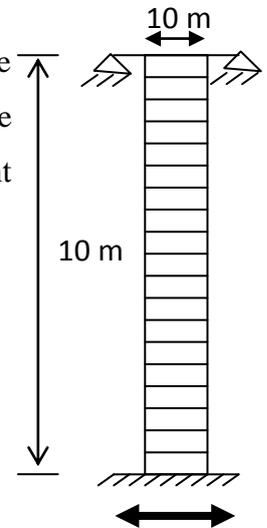


Figure (2.20)  
Maillage

### 6.5.8. Propriétés du sol

On a choisit une couche uniforme de sol avec le module de young

$E = 10^6$  Pascals, le coefficient de poisson  $\nu = 0.3$ , et la densité

$\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$

### 6.5.9. Réponse sismique du profil de sol et résultats :

Les comparaisons entre les réponses sismiques d'une couche semi infinie de sol obtenues à partir de calculs utilisant différentes lois de comportement (La loi linéaire, la loi non linéaire) montrent que la différence entre les réponses est plus accentuée sur les courbes décrivant l'histoire du déplacement.

Les réponses linéaires et non linéaires pour une couche de sol à un instant quelconque  $t$  pour des déplacements et les contraintes de cisaillement sont évaluées à partir des 4 séismes considérés dans cette étude et comparées aux réponses évaluées à partir des séismes artificiels simulés pour les 4 événements sismiques.

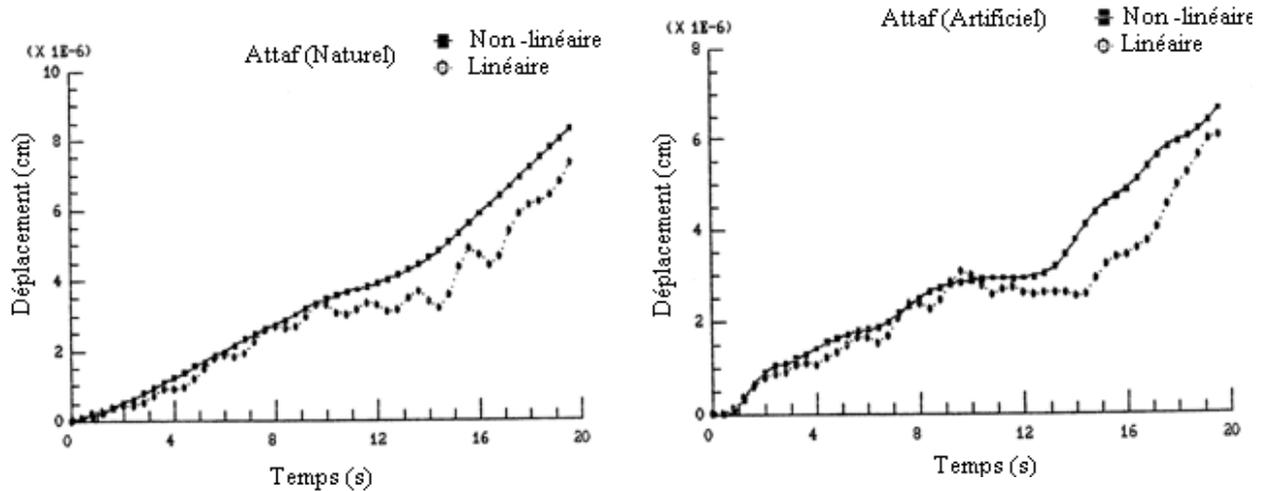
La figure (2.21) montre le déplacement à n'importe quel instant  $t$  pour la couche de sol considérée soumise au séisme d'El Attaf ; les séismes réels et artificiels pour les cas linéaire et non linéaire. On peut observer que le déplacement dans le cas linéaire est légèrement plus faible que le déplacement dans le cas non linéaire. Des résultats similaires sont obtenus pour les autres séismes Figure (2.22). On peut conclure que les séismes artificiels peuvent fournir une estimation raisonnable du déplacement pour les cas linéaires et non linéaires.

La valeur absolue du déplacement croit quand le pic décroît.

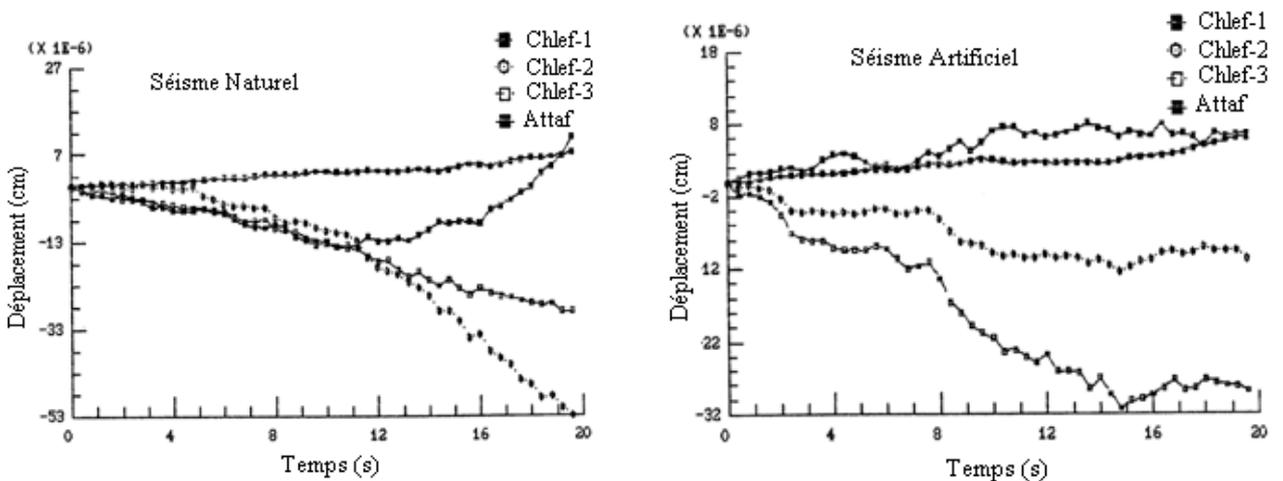
La figure (2.23) montre la contrainte de cisaillement à un instant quelconque pour la couche de sol considérée sujette aux 4 séismes, réels et artificiels dans l'analyse linéaire et non linéaire.

Les observations suivantes concernant ces réponses peuvent être émises.

- 1) Les réponses des contraintes de cisaillement pour n'importe lequel des séismes sont très variables. Cependant la réponse pour le séisme d'ElAttaf réel et artificiel montre un comportement plus doux dans le cas non linéaire.
- 2) La réponse des contraintes de cisaillement pour le cas non linéaire est plus faible que dans le cas linéaire.
- 3) L'analyse linéaire et non linéaire pour les quatre événements sismiques indique que les séismes artificiels peuvent fournir une description acceptable des propriétés des séismes.



**Figure (2-21) : le déplacement de la couche de sol soumise au séisme d'El Attaf pour les séismes réels et artificiels (cas linéaire et non linéaire).**



**Figure (2.22) : résultats de déplacement de la couche de sol soumise aux quatre événements pour les séismes réels et artificiels.**

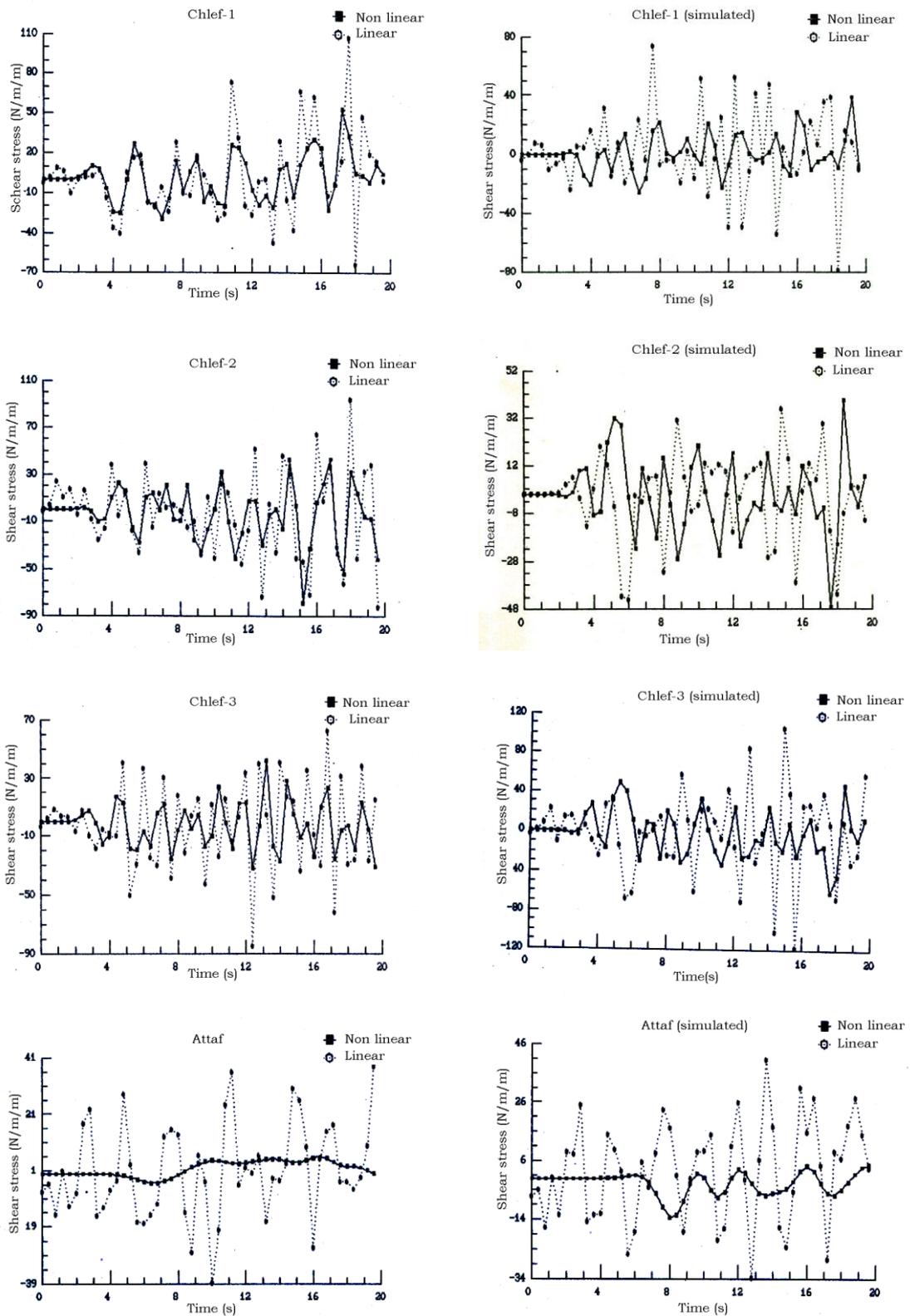


Fig. (2.23) la contrainte de cisaillement à un instant quelconque pour la couche de sol considérée sujette aux 4 séismes, réels et artificiels dans le cas linéaire et non linéaire.

## 6.6 Simulation du séisme de Boumerdes

### 6.6.1. Données sismiques

L'étude repose sur les données recensées en 2003 au cours du tremblement de terre qui a secoué la région de Boumerdes, par le CGS : Centre de Génie Parasismique. Le 21 mai 2003, la date de la plus grande magnitude du tremblement qui a secoué cette région, les secousses ont été répétées continuellement avec des magnitudes différentes. Les experts ont remarqué que dans l'intervalle de temps qui sépare deux heures successives, la région a été secouée plusieurs fois avec une différence, parfois remarquable parfois non, des magnitudes. Le séisme de Boumerdes a été ressenti jusqu'à 250 km de l'épicentre, où les accélérations de l'ordre de 0,02 g ont été enregistrées. Le tableau 7, résume les paramètres du séisme du 21 Mai 2003.

**Tableau 7 : Paramètres du séisme du 21 Mai selon différents centres [201].**

Source	latitude (degré)	Longitude (degré)	Depth(km)	Magnitude	Heure
CRAAG	36.91	3.58	—	6.2 ( $M_I$ )	19:44:31
USGS	36.90	3.71	10	6.8 ( $M_w$ )	19:44:19
CSEM	36.7941	3.9966	10	6.78 ( $M_w$ )	19:44:20
Strasbourg	36.94	3.75	10	6.7 ( $M_{sz}$ )	19:44:25
ETH	37.04	3.74	10	6.78 ( $M_w$ )	19:44:20
CGS	36.81	3.53	—	7.0 ( $M_w$ )	19:44:40

CRAAG: Centre de Recherche en Astronomie, Astrophysique et Géophysique, Algérie.

USGS: United States Geological Survey, USA.

CSEM: Centre Sismologique Euro-méditerranéen.

ETH: Institut Suisse fédéral de technologie

CGS: Centre National de Génie Parasismique, Algérie.

Ainsi, nous avons eu l'idée de construire un échantillon en s'intéressant uniquement à la secousse qui a frappé El affroun.

### 6.6.2. Formulation du modèle ARMA et procédure de modélisation.

Dans cette étude, l'analyse dans le domaine temporel par le biais de modèles ARMA a été adopté (Box & Jenkins, 1976) [125].

Pour chercher le modèle ARIMA(p, d, q) susceptible de représenter notre jeu de données des temps interdéfaillances, nous avons eu recours à la méthode de Box et Jenkins (1970). Cette méthode est constituée de trois étapes distinguées :

1.Étape d'identification : dans cette étape on cherche les valeurs possibles de (p, d, q) à partir des observations, les autocorrélations et les autocorrélations partielles entre ces observations. Généralement, cette étape nous permet de retenir plus qu'un triplet des valeurs (p,d,q).

2.Étape d'estimation : les paramètres des modèles retenus seront estimés, dans cette étape, en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Ces modèles seront soumis, par la suite, à divers tests statistiques afin de vérifier la compatibilité des résultats avec les hypothèses qu'on a supposées.

3.Étape de vérification : Cette étape est composée de plusieurs tests de vérification qui nous permettent de spécifier les bons modèles et de rejeter ceux qui n'ont pas satisfait un ou tous les tests.

Les tests que l'on fait subir au modèle sont de deux types :

Tests concernant les paramètres du modèle et ceux concernant les hypothèses faites sur le processus  $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ .

#### 6.6.2.1. Test concernant les paramètres :

Il s'agit de tester la significativité des coefficients  $\varphi_p$  et  $\theta_q$ , ce qui peut être fait au moyen d'un test de type Student. Soient  $\varphi_p^*$  et  $\theta_q^*$  les estimateurs de  $\varphi_p$  et  $\theta_q$  respectivement,  $V(\varphi_p^*)$  et  $V(\theta_q^*)$  leurs variances; on acceptera la modélisation ARMA(p, q) si :

$$\frac{|\varphi_p^*|}{\sqrt{V(\varphi_p^*)}} \geq 1.96 \text{ et } \frac{|\theta_q^*|}{\sqrt{V(\theta_q^*)}} \geq 1.96$$

#### 6.6.2.2. Test de la nullité de la moyenne des résidus $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}}$

L'hypothèse à tester est : "la moyenne  $m$  des résidus est nulle". Ce test se base sur la moyenne

$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i)^2$  comme statistique de test.

On peut utiliser  $RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i)^2}$  comme estimation de l'écart-type

D'après le théorème de la limite centrale, si  $n$  est assez grand le rapport dit de Student,

$T - statistic = \frac{MSE}{RMSE}$  est approximativement distribué selon la loi normale centrée réduite.

On rejette l'hypothèse que  $m$  est nulle, au niveau de probabilité de 5%, si  $T - statistic < -1.96$  ou  $T - statistic > 1.96$ .

### 6.6.2.3. Test individuel de bruit blanc .

Que le processus des  $(e_t)$  constitue un processus bruit blanc implique que les autocorrélations :

$\rho_1 = \rho_2 = \dots = 0$ . Dans ce contexte nous nous intéressons à tester la nullité d'une autocorrélation de retard  $k$  quelconque. On met ceci en évidence en écrivant l'hypothèse à tester sous la forme  $H_k : \rho_k = 0$ . Si le processus est un bruit blanc et pourvu que  $n$  soit grand, la statistique  $\sqrt{n}\rho_k^*$  a une loi normale centrée réduite. On rejette  $H_k$  au niveau de probabilité de 5% si la statistique  $\rho_k^*$  est en dehors de l'intervalle  $\left[\frac{-1.96}{\sqrt{n}}; \frac{+1.96}{\sqrt{n}}\right]$  l'autocorrélation est dite significative, autrement elle est non significative.

### 6.6.2.4. Test global de bruit blanc : Test portmanteau

Le test global que nous énonçons concerne les  $K$  premières autocorrélations, où  $K$  est choisi à l'avance. On teste l'hypothèse

$$H : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0$$

La statistique de test due à Box et Pierce est de la forme :  $BP = \sum_{h=1}^k (\rho_h^*)^2$

Si le processus est de type bruit blanc et si  $n$  est assez grand, la distribution de  $BP$  est approximativement  $\chi^2$  à  $k-p-q$  degrés de liberté. On rejette l'hypothèse que le processus est de type bruit blanc, au niveau de probabilité de 5%, si la valeur de  $BP$  dépasse le quantile d'ordre 0.95 de la loi  $\chi^2$  à  $K - p - q$  degrés de liberté.

Il se peut que plusieurs modèles franchissent la phase de vérification et qu'il faille choisir dans cet ensemble. Le choix est alors, on le devine, difficile. Il existe cependant un certain nombre de critères de choix. Dans notre cas nous avons utilisé le carré moyen des erreurs MSE et l'erreur absolue moyenne en pourcentage MAPE. L'application du schéma récursif de Box and Jenkins nous a permis, d'éliminer les modèles qui n'ont pas franchi la phase des tests et ceux qui ont satisfait tous les tests mais dont le pouvoir prédictif est insatisfaisant.

Le modèle ARMA utilisé peut être représenté à un instant quelconque " k " comme suit :

$$A_k - \phi_1 A_{k-1} - \dots - \phi_p A_{k-p} = W_k - \theta_1 W_{k-1} - \dots - \theta_q W_{k-q} \quad (6.28)$$

où  $\phi_i, \theta_j$  sont des paramètres constant.

Le membre de gauche de l'équation est appelé partie auto- régressive (AR) d'ordre "P",

Le membre de droite est appelé partie moyenne mobile (MA) d'ordre "q".

$A_k$  : La séquence de données.

$W_k$  : Variable aléatoire de Gauss.

L'ordre (p, q) du processus ARMA et les coefficients  $\phi_i, \theta_j$  sont estimés sur la base de l'analyse du maximum vraisemblance. Les trois accélérogrammes sismiques enregistrés, montrés dans le tableau 08 ont été choisis pour cette étude.

**Tableau 08 : caractéristiques des séismes réels.**

Evénement	Affroun- ew	Affroun n-s	Affroun V
Magnitude	6.8	6.8	6.8
Durée (seconde)	80	80	80
Accélération max $\times g$	0.1644	0.09	0.03
Nombre de points	16001	16001	16001

### 6.6.3. Procédure de modélisation :

L'approche ARMA pour l'analyse des séries chronologiques est uniquement applicable aux séries temporelles stationnaires. Toutefois, l'accélération du mouvement du sol lors d'un séisme n'est pas un processus stationnaire. Cela signifie qu'avant un modèle ARMA est appliqué à une trace sismique, la trace doit être modifiée pour devenir stationnaire.

Les tendances les plus évidentes dans n'importe quelle série chronologique d'un séisme sont incluses dans le contenu d'amplitude. Si les variations sont enlevés, une série stationnaire, qui peut alors être modélisé par un processus ARMA, restera.

La première étape de la procédure de modélisation est d'isoler la période de secousses importantes. Cela implique généralement d'enlever 1% du début de la série, et 2% de la fin de la série. Ceci est dû à la présence de bruit dans les deux côtés extrêmes de la trace, en particulier dans l'extrémité finale de la trace. Cela raccourcit souvent la partie significative de la série temporelle, mais isole la partie importante de la secousse sismique du bruit qui n'est que légèrement au-dessus du niveau de fond. Avec cette série écourtée, l'étape suivante

consiste à enlever la variation d'amplitude. Les tendances dans cette variation peuvent être décrites par l'écart type de l'amplitude en chaque point à l'intérieur de la série. En raison de l'impossibilité du calcul d'écart-type pour un seul point (une seule valeur), il est déterminé pour une fenêtre de temps de 50 points autour de chaque point.

Dans la présente étude, les données digitalisées sont d'abord normalisées. Pour une fenêtre mobile de 100 pas de temps centré sur intervalle de temps "k", la moyenne quadratique  $[S_k]$  est calculée. Un enregistrement  $[Z_k] = [A_k] / [S_k]$  qui a une moyenne nulle et variance unité est ensuite construit et modelé comme un processus stationnaire d'ordre 2 de la forme de l'équation (6.28). La procédure de modélisation d'un accélérogramme par un modèle ARMA est définie par les étapes suivantes :

- a. Calculer la fonction de modulation  $[S_k]$  et normaliser l'accélérogramme mesuré.
- b. Calculer les fonctions d'autocorrélation et de corrélation partielle.
- c. Supposer une forme générale analytique et simple de la fonction enveloppe puis estimer ses paramètres à l'aide de la méthode des moindres carrés partielle.
- d. Sélectionner un ordre « p » pour la partie autorégressif (AR) et un ordre « q » pour la partie moyenne glissante (MA) de l'équation 1.
- e. Estimer les coefficients  $\varphi_i, i = 1, 2, 3, \dots, p$  et  $\theta_j, j = 1, 2, 3, \dots, q$  sur la base de l'analyse du maximum de vraisemblance. Le filtre de Kalman est utilisé pour estimer les coefficients variables dans le temps du modèle ARMA qui s'avère très efficace et précis.
- f. Evaluer alternativement les ensembles d'ordres du modèle (p, q) sur la base du critère (AIC), puis sélectionner le modèle qui a un AIC (p, q) minimum.

#### **6.6.4. L'estimation des paramètres de la fonction enveloppe.**

Le modèle général utilisé dans la procédure de simulation est donnée par l'équation suivante :

$$s(t) = at^b e^{-ct} \tag{6-29}$$

Les paramètres a, b et c ont été estimés par l'analyse de régression non linéaire, les valeurs de ces constantes sont donnés au tableau 09. Ces Coefficients ont été déterminés avec des limites de confiance à 95%:

**Tableau 09. Les paramètres de la fonction enveloppe.**

Événement	Paramètres fonction Enveloppe		
	a	b	c
Affroun ew	3.475 e-8	10.78	0.59
Affroun n-s	8.48 e-8	9.958	0.5285
Affroun V	9.61e-9	10.91	0.6055

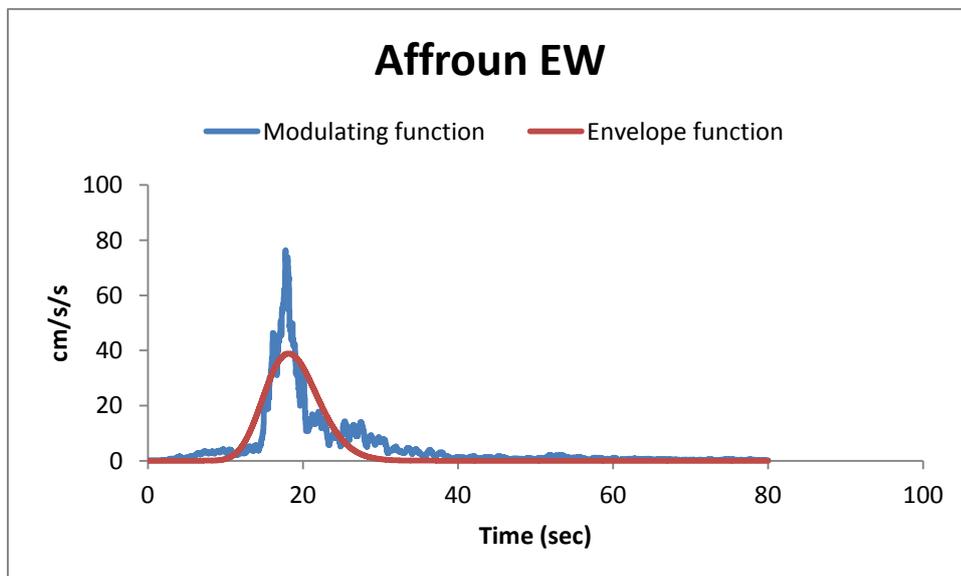
Les conditions de stabilité et d'invisibilités sont vérifiées par les coefficients. Dans cette étude Nous avons généré des séries de tailles  $n = 100$ , pour l'estimateur utilisé nous donnons le SSE le R- carré, le R au carré ajusté et le RMSE tableau 10.

**Tableau 10: SSE- R carré- R au carré ajusté et le RMSE des paramètres de la fonction Enveloppe.**

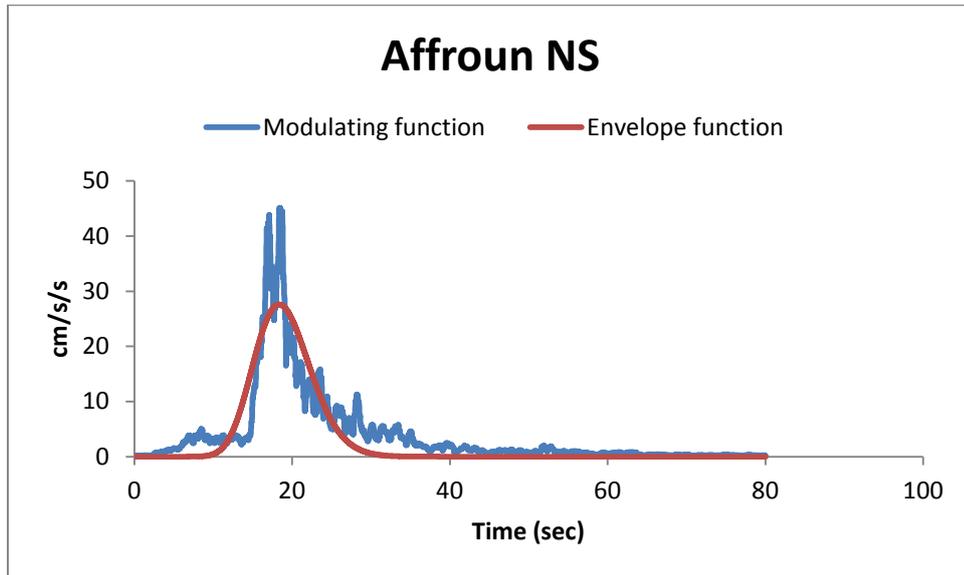
Événement	SSE	R-carré	R au carré ajusté	RMSE
AcAfr-ew	5.642e+05	0.6923	0.6923	5.939
AcAfr-ns	2.29e+05	0.734	0.734	3.783
AcAfr-V	2.674e+04	0.6978	0.6978	1.293

Les meilleurs résultats obtenus au sens des critères statistiques, montrent que les résultats obtenus fournis par l'algorithme d'estimation utilisé sont bonne. Ce qui nous permet à ce stade d'affirmer que les performances de l'algorithme sont bonnes.

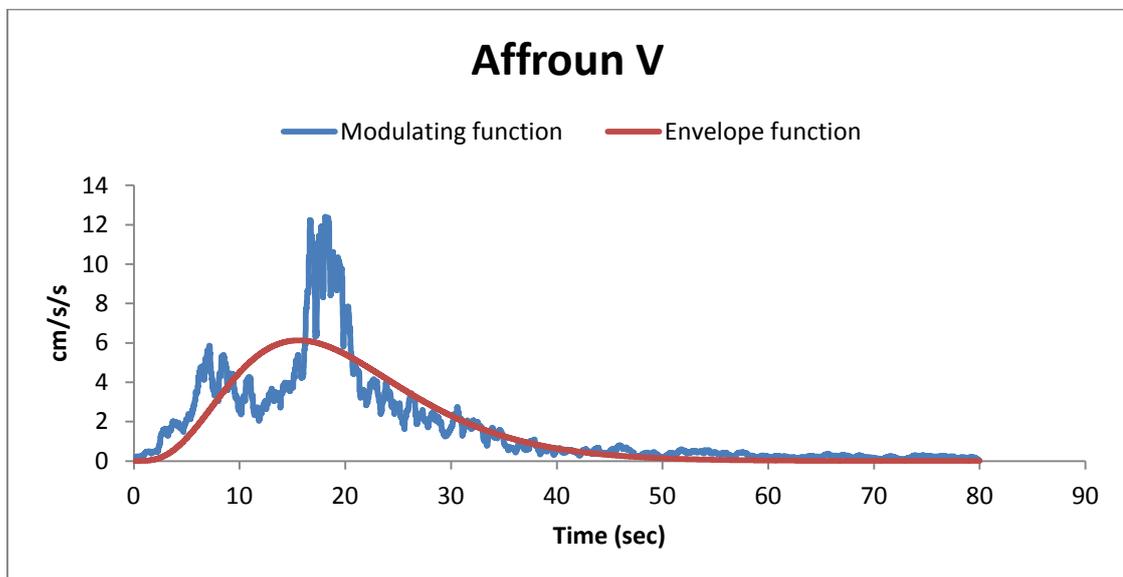
Les figures (3.1), (3.2) et (3.3) montrent l'allure des fonctions de modulation et des fonctions enveloppes correspondante aux séismes de Affroun ew et Affroun n-s et Affroun V.



**Fig.(3.1) Fonction de modulation et enveloppe Affroun ew.**



**Fig. (3.2) Fonction de modulation et enveloppe Affroun ns**



**Fig. (3.3) Fonction de modulation et enveloppe Affroun V**

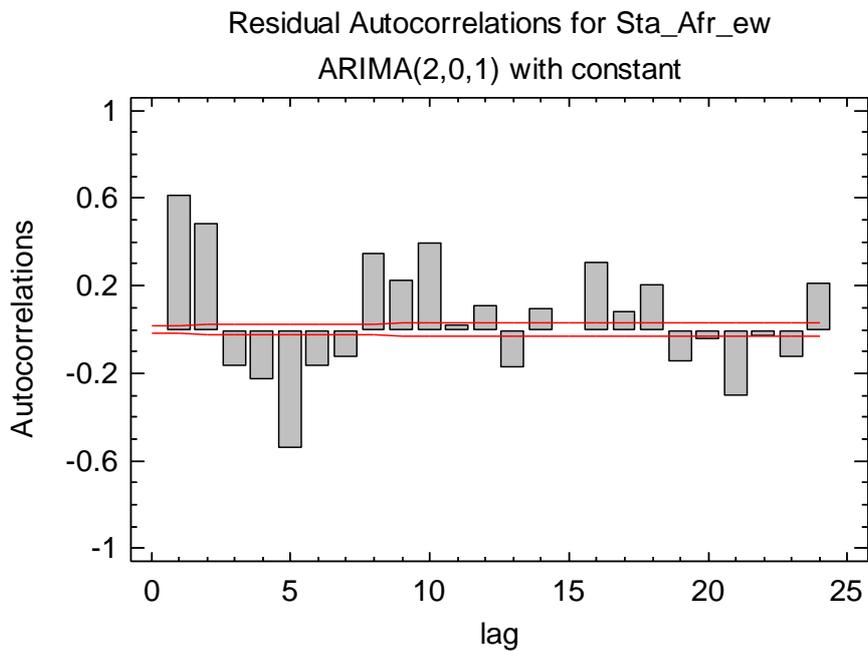
#### 6.6.5. Le model ARMA et ses paramètres

Dans l'évaluation des paramètres du mode ARMA, l'auto-corrélation de la trace sismique est très importante. La relation entre l'auto-corrélation et les paramètres AR peut être considéré comme suit :

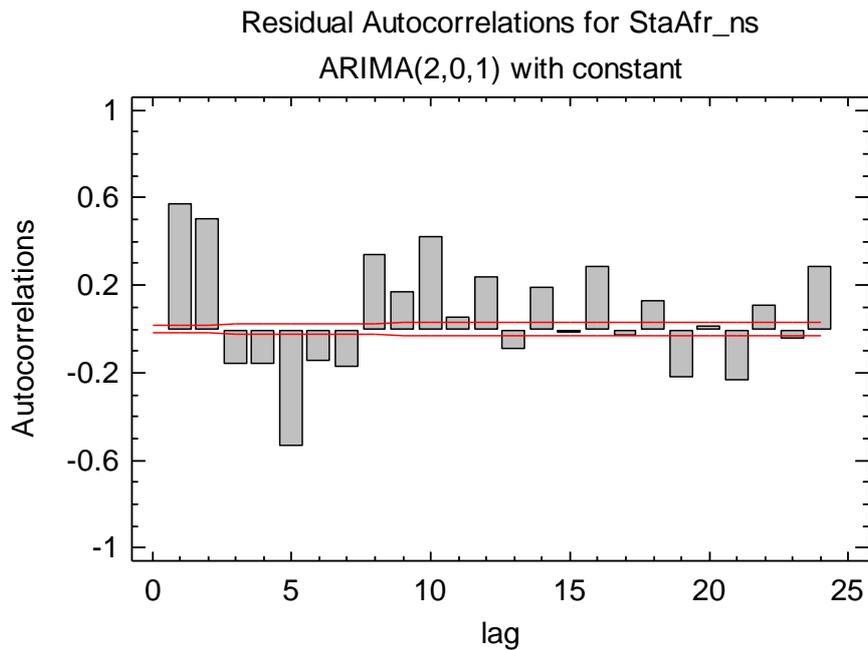
$$\begin{bmatrix} 1 & R(1) & \cdot & \cdot & R(k-1) \\ R(1) & \cdot & \cdot & \cdot & R(k-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R(k-1) & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ R(k) \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

En termes de modèle ARMA, cela signifie que la partie AR du modèle est d'une importance primordiale. Une fois cette partie est identifié la partie MA peut être construite.

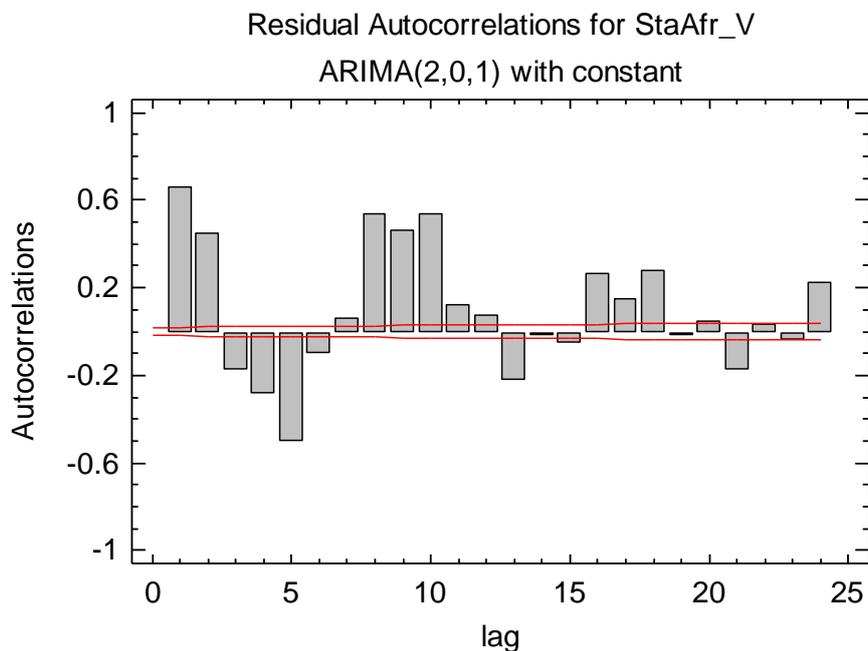
Les figures (3.4), (3.5) et (3.6) montrent l'allure des fonctions d'autocorrélations pour les séismes de Afr-ew , Afr-ns et Afr-V.



**Fig. (3.4) .Fonction d'autocorrelation (Af-ew)**



**Fig. (3.5) .Fonction d'autocorrelation (Af-ns)**



**Fig. (3.6) .Fonction d'autocorrelation (Af-ew)**

### 6.6.6. Qualité de l'ajustement

Les résultats des simulations que nous dressons dans ce paragraphe, ont pour objectif l'évaluation des paramètres du modèle ARMA. Dans tout algorithme d'estimation il est important de choisir judicieusement les valeurs initiales pour avoir une bonne estimation et une convergence rapide.

Dans cette étude le processus simulé suit une loi normale centrée. Cette simulation a été réalisée à partir du générateur de nombres aléatoires existant dans la version 4.0 du logiciel libre Scilab développé par l'INRIA. Dans la cette étude nous considérons le modèle ARMA (p,d,q) définis par l'équation (6.28)

nous avons généré des séries de tailles  $n = 100$  , les caractéristiques de l'échantillonnage sont résumés dans le tableau 11 .

Le tableau 12, résume les résultats statistiques du model retenu pour chaque séisme.

**Tableau11 : Caractéristiques de l'échantillonnage**

Evénement	Data variable	Nombre d'observations	Début indice	Intervalle d'échantillonnage
AcAfr-ew	StaAfr-ew	16001	1,0	1,0
AcAfr-ns	StaAfr-ns	16001	1,0	1,0
AcAfr-V	StaAfr-V	16001	1,0	1,0

Modèle de prévision sélectionné: ARIMA (2,0,1) avec constante.

Nombre de prévisions générées: 12

Nombre de périodes retenues pour la validation: 0

**Tableau12 : Résultats numériques de quelques critères statistiques pour le Séisme Affroun**

	Affroun e-w		Affroun -ns		Affroun -v	
	Estimation	Validation	Estimation	Validation	Estimation	Validation
Statistic	Period	Period	Period	Period	Period	Period
RMSE	0.0537151	validé	0.0568526	validé	0.0784526	validé
MAE	0.0386584	validé	0.0412581	validé	0.0608045	validé
ME	-0.00264327	validé	-0.00142756	validé	-0.000490271	validé

**6.6.6.1. Validation** : Ceci étant dit, l'estimateur de la variance des résidus  $\sigma^2$  joue un rôle particulièrement important.

En premier lieu, la racine carrée de la variance est très proche de l'erreur quadratique moyenne (« Root Mean Squared Error » RMSE). Cette quantité est l'une des plus utilisées pour évaluer l'intérêt prédictif d'un modèle.

L'erreur absolue moyenne (« Mean Absolute Error » MAE) : qui est considérée comme un peu plus fidèle parce que moins affectée par les erreurs de prédiction les plus importantes.

ME : désigne l'erreur moyenne (« Mean Error » ME)

Les valeurs obtenues indiquent que les résultats obtenus fournis par l'algorithme d'estimation utilisé sont bonne.

Les résultats numériques fournis dans le tableau (2.11), indiquent que la moyenne des résidus des deux modèles est significativement nulle puisque la T-statistic en valeur absolue est inférieure à 1.96. Ils indiquent aussi que le pouvoir prédictif des deux modèles est bon puisque la valeur de MAPE est inférieure à 5%. Théoriquement, la performance d'un modèle est très bonne si MAPE est inférieur ou égale à 5 %.

Nous constatons des résultats dressés dans le tableau (2.8) que les statistiques du test des paramètres, en valeur absolue sont acceptables

Les paramètres du modèle final pour chaque séisme sont donnés par les tableaux 13-14 et 15.

**Tableau 13: Les coefficients ARMA et l'écart type du bruit blanc  $\sigma_w$ , data variable Affroun e-w**

Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
AR(1)	1.83702	0.00327104	561.601	0.000000
AR(2)	-0.885359	0.00325891	-271.673	0.000000
MA(1)	-0.752951	0.00598576	-125.79	0.000000
Mean	0.0968597	0.0150192	6.44907	0.000000
Constant	0.00468229			

Retour prévision: oui

Estimation de la variance du bruit blanc = 0.00293897 à 15997 degrés de liberté.

Estimation déviation standard du bruit blanc = 0.0542123

Nombre d'itérations : 7

**Tableau 14 : Les coefficients ARMA et l'écart type du bruit blanc  $\sigma_w$ , data variable: Sta Afr-ns**

Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
AR(1)	1.85064	0.00353756	523.141	0.000000
AR(2)	-0.899059	0.00352571	-255.001	0.000000
MA(1)	-0.636599	0.00573918	-110.922	0.000000
Mean	0.0446677	0.0152852	2.92228	0.003475
Constant	0.00216265			

Retour prévision: oui

Estimation de la variance du bruit blanc = 0.0032688 à 15997 degrés de liberté.

Estimation déviation standard du bruit blanc = 0.0571734

Nombre d'itérations : 5

**Tableau 15 : Les coefficients ARMA et l'écart type du bruit blanc  $\sigma_w$ , data variable: StaAfr-V**

Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
AR(1)	1.80259	0.00363091	496.456	0.000000
AR(2)	-0.888688	0.0036026	-246.679	0.000000
MA(1)	-0.754026	0.00612919	-123.022	0.000000
Mean	0.0143498	0.0126016	1.13873	0.254816
Constant	0.00123553			

Retour prévision: oui

Estimation de la variance du bruit blanc = 0.00616847 à 15997 degrés de liberté.

Estimation déviation standard du bruit blanc = 0.0785396

Nombre d'itérations : 4

Les meilleurs résultats obtenus au sens des critères statistiques, montrent que les résultats obtenus fournis par l'algorithme d'estimation utilisé sont bonne. Ce qui nous permet à ce stade d'affirmer que les performances de l'algorithme sont bonnes.

#### 6.6.7. Critère A.I.C.

En tenant compte du critère AIC pour les séries de temps stationnaires, le modèle qui doit être choisis est celui qui minimise :

$$AIC(p, q) = N \cdot \ln(\sigma_a^2) + 2(p + q) \quad (6.31)$$

Où N est la dimension de l'échantillon,  $\sigma_a^2$  est estimée du maximum de vraisemblance résiduelle.

Dans notre cas nous avons pris pour chaque séisme les modèles ARMA(1,1), ARMA (1,2}, ARMA(2,1), ARMA(2,2). Pour sélectionner le modèle final on fait une comparaison entre les modèles proposés pour chaque séisme en utilisant le critère AIC tableau 16.

Les paramètres du modèle final pour chaque séisme sont donnés par le tableau 17.

**Tableau16 : Application des critères AIC aux différents modèles ARMA**

Modèles	AIC (Affroun ew)	AIC (Affroun n-s)	AIC (Affroun v)
ARMA(1,1)	-4.21635	-4.21958	-3.64068
ARMA (1,2}	-5.11995	-5.29379	-4.78432
ARMA(2,1)	-5.84522*	-5.73424*	-5.09023
ARMA(2,2).	-5.71991	-5.61231	-5.26325*

\*Indique le modèle qui a l'AIC minimal.

**Tableau17: Paramètres des modèles retenus**

Paramètres	Affroun ew	Affroun n-s	Affroun V
AR(1)	1.82986	1.85144	1.80244
AR(2)	-0.879019	-0.900216	-0.888599
MA(1)	-0.7313	-0.634745	-0.754022
$\sigma_a$	0.0543099	0.0571895	0.0785381

**6.6.8. Un exemple de simulation.**

Pour simuler les séries de temps d'accélération, on procède a :

1. La génération d'un bruit blanc caractérisé par une moyenne nulle et une variance égale à la variance estimée.
2. Le bruit blanc est utilisé pour obtenir des séries de temps stationnaires au moyen du modèle ARMA
3. Les séries de temps stationnaires son multiplie par la fonction enveloppe.
4. Les séismes simulés peuvent être générés par récurrence (Puisqu'un modèle ARMA est une combinaison linéaire des valeurs  $A_k$  et des valeurs aléatoires gaussiennes  $a_t$ ).
5. Pour le modèle ARMA (2.1) retenu l'équation de récurrence est donnée par (6.28).
6. définir les p premières valeurs de  $A_k$  ( $A_0, A_1$ ); ces valeurs sont supposées nulle.
7. Calcul des valeurs  $A_k$  données par l'équation (6.28)
8. Les variables aléatoires gaussiennes  $W_k$  possédant une variance  $\sigma_a^2$  sont générées comme un bruit blanc.

Remarque : les expériences faites avec ces opérations indiquent que les spectres de Fourier et de réponse établis à partir des séismes simulés atteignent de grandes valeurs pour de petites fréquences, alors que les séismes originaux qui sont filtrés ont des réponses nulles pour des fréquences nulles. Ce problème est commun à tous les modèles développés jusqu'à présent. Pour remédier à ce problème on utilise un filtre pass bas qui élimine la plupart des basses fréquences.

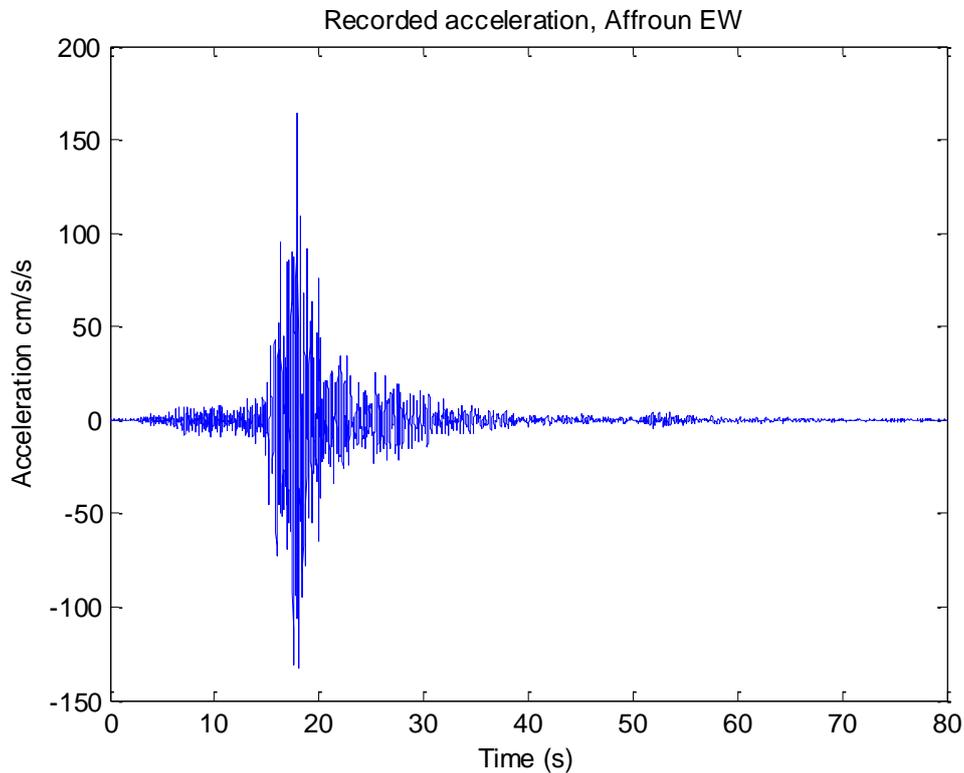
Une comparaison entre les caractéristiques essentielles des séismes réels et celle des séismes simulés est donnée par le tableau 18. Les résultats montrent que Affroun e-w - Affroun n-s – et-Affroun v sont mieux caractérisés par le processus ARMA (2,1) en plus des paramètres des fonctions enveloppes.

Une comparaison entre les caractéristiques essentielles des séismes réels et celle des séismes simulés est donnée par le tableau 18.

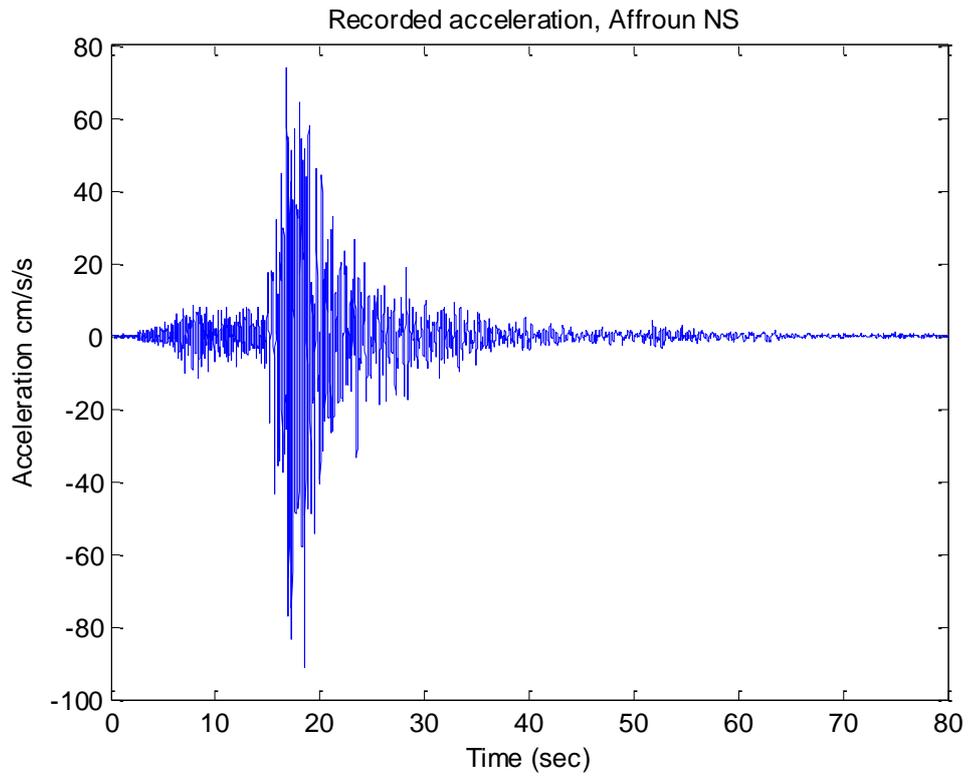
**Tableau 18 : caractéristiques des séismes réels et celle des séismes simulés.**

		Séismes		
		Affroun ew	Affroun n-s	Affroun V
Réel	Accélération. Maximale $\times g$	0.1644	0.09	0.03
	Durée [sec]	80	80	80
Simulé	Accélération. Maximale $\times g$	0.115	0.08	0.022
	Durée [sec]	80	80	80

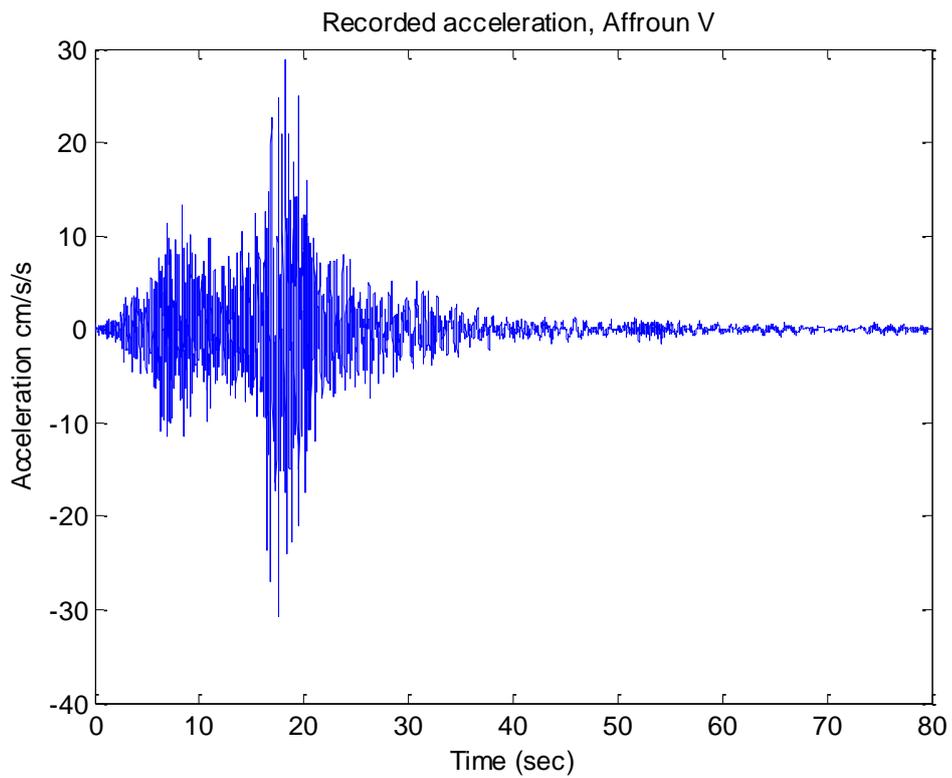
Les figures (3.7) et (3.8) et (3.9) montrent les trois accélérogrammes naturels et les figures (3.10) , (3.11) et (3.12) montrent les trois accélérogrammes simulés par le modèle ARMA (2,1) comme



**Fig. (3.7) : Séisme naturel Affroun-ew**



**Fig. (3.8) : Séisme naturel Affroun-ns**



**Fig. (3.9) : Séisme naturel Affroun-v**

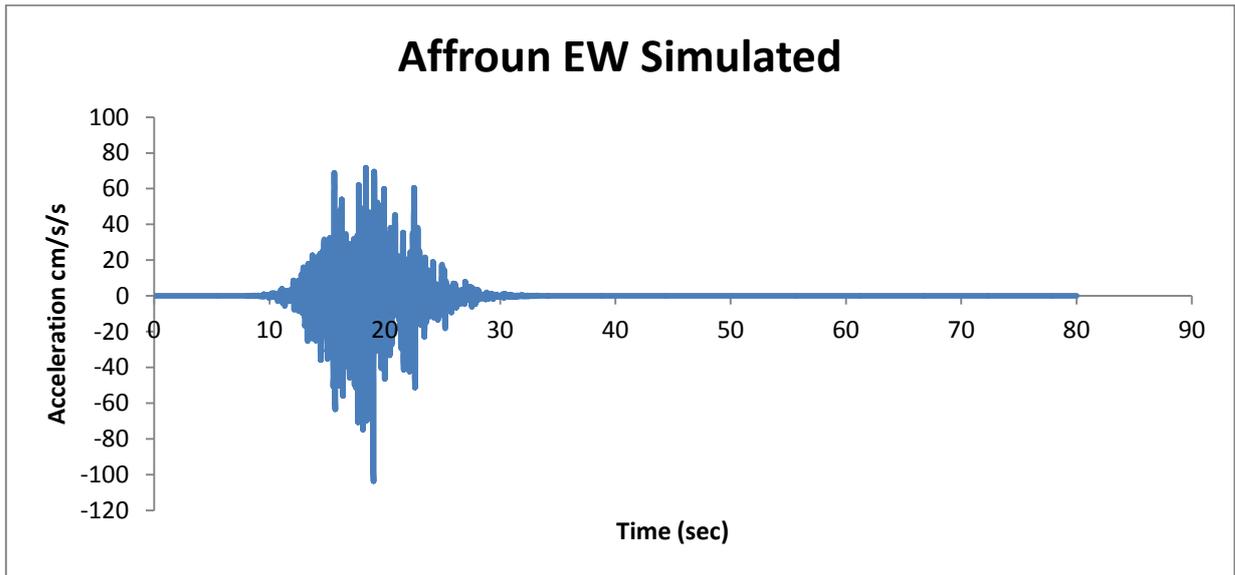


Fig. (3.10) : Séisme simulé Affroun-ew

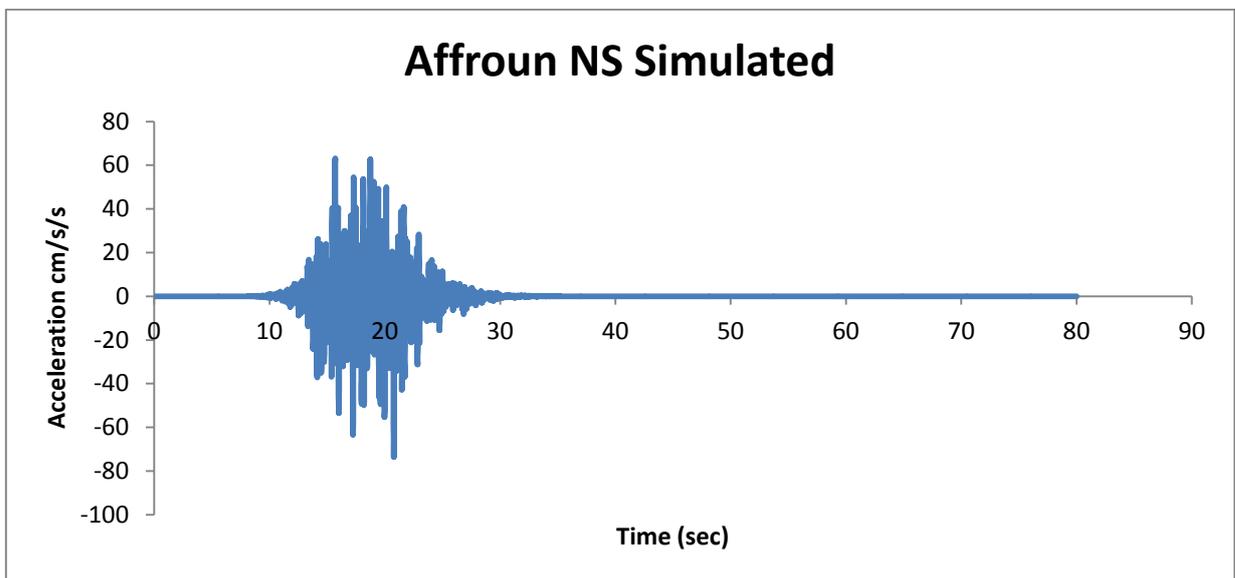
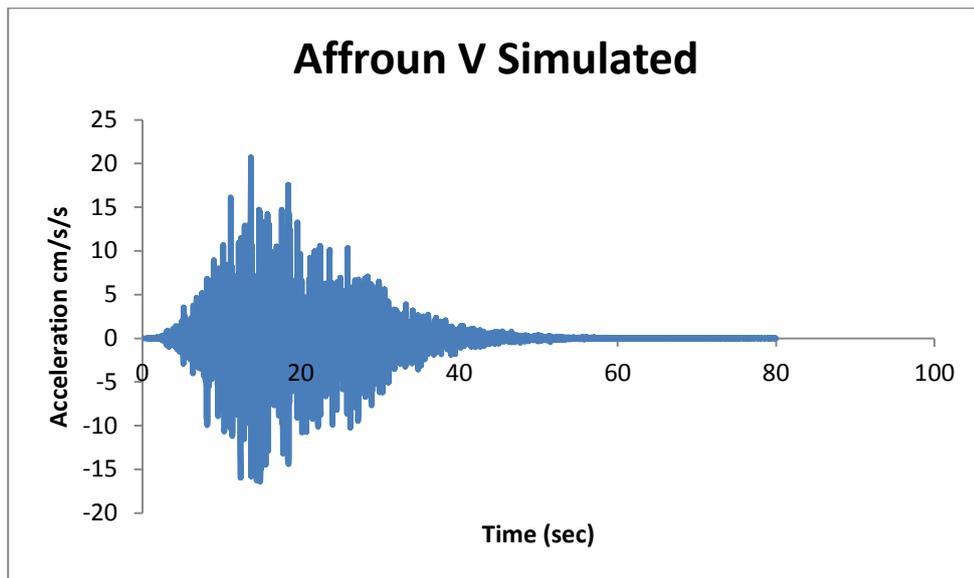


Fig. (3.11) : Séisme simulé Affroun-ns



**Fig. (3.12) : Séisme simulé Affroun-v**

### **6.7. Application du modèle ARMA pour mesurer le potentiel de destruction des séries temporelles d'accélération pour nord de l'Algérie.**

#### **6.7.1-Mesure des dommages.**

Un certain nombre de mesures de dommages ont été utilisées pour résumer l'impact d'un séisme sur des structures linéaires et non linéaires. Les applications de ces mesures ont été faites par Zarah et Hall, Lin et Mahin, Parc, Ang et Wen, le baron et la Veneziano, Casciatti et Faravelli . [202,203,204,205,206], Une comparaison entre les différentes alternatives a été faite par Grigoriu [207], Le moyen commode pour résumer les résultats des mesures de dommage est le spectre de fréquences ou de période du système . Le concept d'énergie est souvent introduit comme paramètre de structure pour évaluer la capacité de la structure à dissiper l'énergie. Pendant chaque alternance le séisme injecte à la structure, une quantité d'énergie. Une partie de cette énergie est transformée au sol et se dissipe par effet d'interaction sol-structure. L'autre partie est dissipée par amortissement sous forme de chaleur. Le surplus (énergie potentielle) est emmagasiné temporairement dans la structure sous forme d'énergie cinétique (mouvement des masses) et d'énergie de déformation élastique des éléments structuraux. A la fin de la réponse toute l'énergie induite est dissipée.

Une seule mesure de la réponse à un séisme est un prédicateur de dommage relativement faible de car la réponse dynamique peut impliquer une variété de modes de défaillance. Dans cette étude, l'accent est mis sur les dommages potentiels des relevés sismiques et les critères

généraux qui sont nécessaires. Dans la présente étude, plusieurs mesures combinées ont été définis comme des «indices de dommages».

Les indices de dommage proposés par les chercheurs sont nombreux et variés et peuvent être définis pour chaque élément (indice local) ou reliés à la structure entière (indice global). Banon [204] a développé un modèle stochastique pour les dommages en béton armé en utilisant l'énergie dissipée et normalisées de rotation cumulative.

Park et al [207] ont introduit un indice de dommages défini comme étant le ratio de la demande de la capacité d'une structure. Dans la forme proposée par Park, l'indice de dommages est exprimé comme une combinaison linéaire du taux de déplacement maximal et du facteur de demande d'énergie :

$$DI = U_{\max}(t) / U_{\max} + \beta \cdot [E_H] / (R_Y \cdot U_{\max}) \quad (6.32)$$

Où  $U_{\max}(t)$  est la déformation maximale sous charge sismique .

$U_{\max}$  le déplacement limite sous charge monotone

$R_Y$  la charge de limite élastique (force de rendement)

$E_H$  est l'énergie hystérétique due à la déformation inélastique

La propriété de structure est un nombre non négatif reflétant le pouvoir absorbant relatif d'énergie d'une structure et peut ne pas être indépendant de l'excitation. Pour le calcul, le développement d'un spectre d'indice de dommages exige des spécifications aussi bien que de la fréquence, de l'atténuation et de la force de rendement d'une structure.

La propriété de la structure est représentée par un nombre, positif  $\beta$  reflétant la capacité relative d'absorption d'énergie de la structure et ne pouvant pas être indépendant de l'excitation;  $\beta$  varie en général, entre 0.05 et 1. Selon ce modèle, la ruine (effondrement) a lieu lorsque cet indice est égal à 1.

Pour le calcul, le développement d'un spectre de dommages exige la spécification de l'indice  $\beta$  ainsi que la fréquence, l'amortissement et la force de rendement d'une structure.

Les réponses ont été obtenues par intégration numérique de l'équation générale en supposant une accélération linéaire dans chaque intervalle de temps [208], Dans cette étude, il est nécessaire de modéliser l'aptitude d'une structure à absorber l'énergie en cédant [209]. À cette fin, un modèle simple bilinéaire est utilisée [210, 211].

Le modèle hystérétique-bilinéaire est caractérisé par trois paramètres: le taux de rendement initial de déplacement, la rigidité initiale élastique, et la rigidité post-élastique.

La plastification a lieu sur l'une des deux lignes qui forment les "courbes enveloppes de plastification".

Lorsqu'une structure entre en plastification, la rigidité élastique change vers la rigidité "post-élastique" qui est généralement définie comme un pourcentage de la rigidité élastique initiale.

Alors que la valeur absolue du déplacement augmente, la force de rappel est donnée par:

$$R(u, t) = K_1 \cdot u(t) \quad ; u(t) \leq u_y \quad (6.33)$$

$$R(u, t) = K_y \cdot (u(t) - u_z) \quad , u(t) > u_y \quad (6.34)$$

Où  $u_z$  est le déplacement au cours de laquelle l'enveloppe du rendement croise l'axe de déplacement. Lorsque le système est en déchargement, la rigidité est prise égale à la rigidité initiale jusqu'à ce que le déplacement atteigne une enveloppe de rendement. La réponse d'un système élasto-plastique peut être évaluée par la fixation de  $K_y = 0$  et dans ce cas:

$$R(u, t) = K_y \cdot u_y \quad \text{et pour } u(t) > u_y. \quad (6.35)$$

### 6.7.2. Les résultats numériques

Les données examinées dans cette étude se composent de deux grands séismes. Bomerdes, 2003, (M = 6,8) digitalisé à 0.02 seconde avec 1299 points de repères, Chlef, 1980 (M=5.6) digitalisés à 0.02 seconde avec 1087 points de repères.

Une série de modèles ARMA ont été adaptés aux enregistrements expérimentaux pour les deux séismes. Un échantillon de 4 dossiers a été généré pour chaque tremblement de terre et utilisé comme entrée pour un système bilinéaire figure (3.13). Les valeurs numériques pour des taux d'amortissements de 0,02 et 0,05 avec des rapports de rendement  $Y = R_y/M.g$  de 0,05, 0,10 et 0,15.

Pour les indices des spectres de dommages, on suppose que  $U_{max}$  est de  $3u_y$  ce qui reflète la valeur moyenne pour les matériaux d'acier, avec  $\beta$  égale à 0,05 dans l'équation (6-32). Les indices du spectre de dommages sont représentés sur les figures (3.14), (3.15) et (3.16) pour les systèmes élasto-plastique. Il est à noter que les spectres d'indices de dommages peuvent être obtenus à partir d'une combinaison de la demande de ductilité et hystérétique des spectres de la demande énergétique.

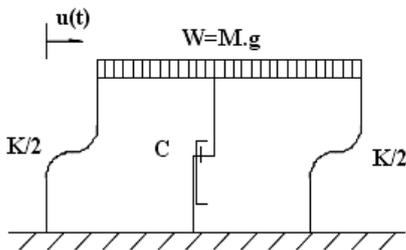
L'indice des spectres de dommages pour des séismes individuels figure (3.14) montre des irrégularités qui peuvent être considérés comme des variations aléatoires.

Les irrégularités dans l'indice des spectres de dommages pour les différents enregistrements d'accélération mesurées peuvent être considérées comme des variations aléatoires, qui ne représentent pas une propriété fiable du processus sismique.

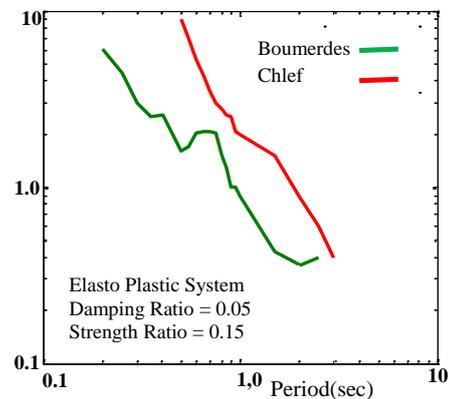
Le logarithme des ordonnées spectrales moyennes des indices de dommages étaient à peu près linéairement liée aux logarithmes de la période initiale.

Si la conclusion de linéarité est confirmée, une amélioration significative de la cartographie des risques structurels sera possible.

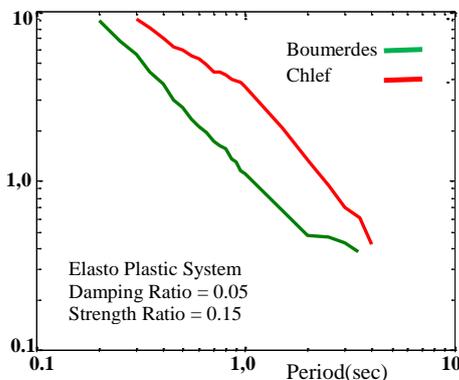
L'indice des dommages moyens diminuent lorsque la période initiale augmente.



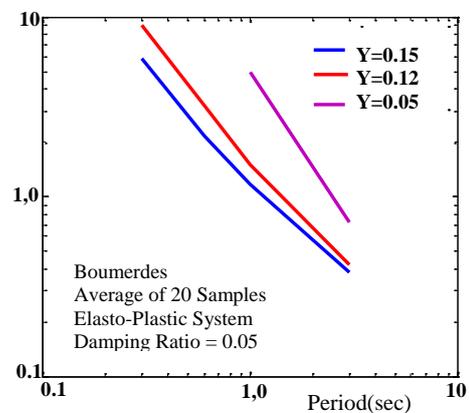
**Fig. (3.13) système d'un seul degré de liberté.**



**Fig. (3.14) Spectre de l'indice de dommages**



**Fig. (3.15) la moyenne des indices des spectres de dommages d'un échantillon de séismes générés.**



**Fig.(3.16) l'indice moyen des spectres de dommages pour un échantillon de séisme simulé de Boumerdes pour un système élasto- plastique et pour différentes valeurs de rapport de force.**

## **Chapitre 7 : Interaction sol-structure .**

### **7.1 Notion d'Interaction Sol-Structure (ISS)**

On entend généralement par interaction sol-structure l'étude du comportement d'une structure soumise à une sollicitation sismique. L'interaction sol-structure traduit la modification du mouvement du sol (ou de la structure) lors d'un séisme du fait de la présence de l'autre composant (structure ou sol).

Cette interaction est bien entendue plus ou moins importante suivant la nature du sol, les caractéristiques de l'ouvrage et son mode de fondation. La nécessité d'étudier la réponse sismique d'un ouvrage, en ne le considérant pas isolément mais comme partie intégrante d'un ensemble comprenant le sol et les structures avoisinantes, rend les analyses d'interaction sol-structure impérieuses pour une part grandissante d'ouvrages importants : ponts, barrages, centrales nucléaires, réservoirs de gaz naturel liquéfié.

La résolution de tout problème de mécanique nécessite une bonne connaissance de ses conditions aux limites. Pour bien comprendre le phénomène d'ISS, il est facile d'imaginer, qu'une structure élancée de type poutre encastree à une extrémité, se comporte de manière totalement différente qu'une poutre dont l'encastrement est remplacé par une rotule avec ressort. Sa rigidité et ses fréquences propres s'en trouvent réduites alors que ses déplacements peuvent être amplifiés.

Le même raisonnement peut être effectué pour un immeuble reposant sur une fondation. La connaissance de la fondation et du sol sous-jacent est essentielle pour bien déterminer le comportement réel de la structure.

La présence de la structure influence le comportement du sol, c'est à dire le comportement qu'il aurait en champ libre. En effet, prenons par exemple deux structures, l'une encastree dans un solide rocher, l'autre reposant sur un sol plus souple. La structure encastree dans le rocher ne va pas influencer le champ libre. Le sol étant très rigide, le fait d'y ajouter une structure ne change rien à son comportement. La masse de la structure ne change rien non plus puisque les efforts d'inerties engendrés par la structure sur la roche rigide n'ont pas d'effet sur celui-ci. Par contre, pour la structure reposant sur le sol souple, trois phénomènes vont intervenir.

### **7.1.1. Les phénomènes physiques dus à l'interaction sol-structures**

#### **7.1.1.1. Interaction cinématique et interaction inertielle.**

Le fait d'excaver et d'inclure une fondation rigide va modifier le champ libre. En effet par cette inclusion le champ de déplacement du sol va s'en trouver changé. Ce phénomène est connu sous le nom d'interaction cinématique.

Le fait d'inclure la masse de la structure va induire des efforts d'inerties supplémentaires à la base de la structure et donc dans le sol, ce qui aura pour conséquence de modifier encore une fois le champ de déplacement. Ce phénomène est connu sous le nom d'interaction inertielle.

#### **7.1.1.2. L'amortissement radiatif.**

Lors de chargement dynamique, en considérant un massif de sol semi infini, l'énergie amenée par le mouvement de la structure est dissipée de deux manières: un amortissement hystérétique (matériel) dû aux non-linéarités présentes dans le sol et dans la fondation, et une dissipation due au rayonnement des ondes dans le milieu semi-infini. Cette dissipation de l'énergie rayonnée par la structure s'appelle l'amortissement radiatif. Ainsi, une influence existe aussi bien du sol sur la structure que de la structure sur le sol. C'est pour cela que nous parlons de problèmes d'interactions entre le sol et la structure.

#### **7.1.1.3. La liquéfaction**

Le phénomène de liquéfaction touche particulièrement les sables lâches saturés. Il provient d'une annulation des contraintes effectives pour un chemin de sollicitation défini en déformation. Dans un état liquéfié, les contraintes effectives disparaissent ce qui implique que les grains de sables semblent flotter dans l'eau. D'un point de vue pratique, la liquéfaction provoque un grand déplacement des couches de sol qui va déstabiliser la structure, mais qui en contrepartie va aussi effectuer un filtrage des ondes sismiques à la manière d'un filtre passe bas [212]. Ce filtrage peut donc engendrer une sollicitation sismique moins importante sur la structure. Au contraire, dans d'autres cas, les déplacements engendrés par cette liquéfaction peuvent être amplifiés et dramatiques pour la structure. Ce phénomène de liquéfaction est donc important à prendre en compte.

### **7.1.2. Fonctions d'impédance.**

Pour une meilleure approximation de la réponse de la structure, on introduit l'effet du sol sur cette dernière, des fonctions reliant les forces et les déplacements à l'interface sol- structure

ont été développés, en particulier pour les problèmes de fondations de machines. Ces fonctions sont appelées fonction d'impédance de la fondation. Les fonctions d'impédance sont définies généralement sous une forme complexe comportant une partie réelle caractérisant la rigidité et une partie imaginaire caractérisant l'amortissement du sol.

Ce genre de fonction d'impédance peut être utilisé dans une analyse dans le domaine fréquentiel. Cependant, l'analyse d'un système compliqué, nécessitant la mise en œuvre d'un grand nombre de degrés de liberté, ne peut être simplifiée que si les fonctions d'impédance sont considérées indépendantes de la fréquence d'excitation. En outre, la résolution dans le domaine fréquentiel ne peut plus être envisagée si l'analyse est étendue au domaine non linéaire.

### 7.1.3. Formulation d'un problème d'interaction sol-structure .

Il est utile de formuler de façon générale le problème d'interaction sol-structure. Cette formulation est orientée vers un traitement par éléments finis du problème tel que le recours aux méthodes numériques est pratiquement inévitable. En générale, l'équation du mouvement s'écrit :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{Q_f\} \quad (7-1)$$

$[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  : Les matrices de masse, amortissement et raideur du système représenté par la fig. (4.1a).

Comme la source de mouvement (foyer du séisme) n'est généralement pas incluse dans le modèle, le vecteur de charge  $\{Q_f\}$  n'a de valeurs non nulles que sur la frontière extérieure du modèle. Le déplacement total de la structure est défini par :

$$\{u\} = \{u_i\} + \{u_f\} \quad (7-2)$$

On décompose le problème en deux sous problèmes :

Problème de réponse du sol en champ libre figure (4-1b) :

$$[M_f]\{\ddot{u}_f\} + [C_f]\{\dot{u}_f\} + [K_f]\{u_f\} = \{Q_f\} \quad (7-3)$$

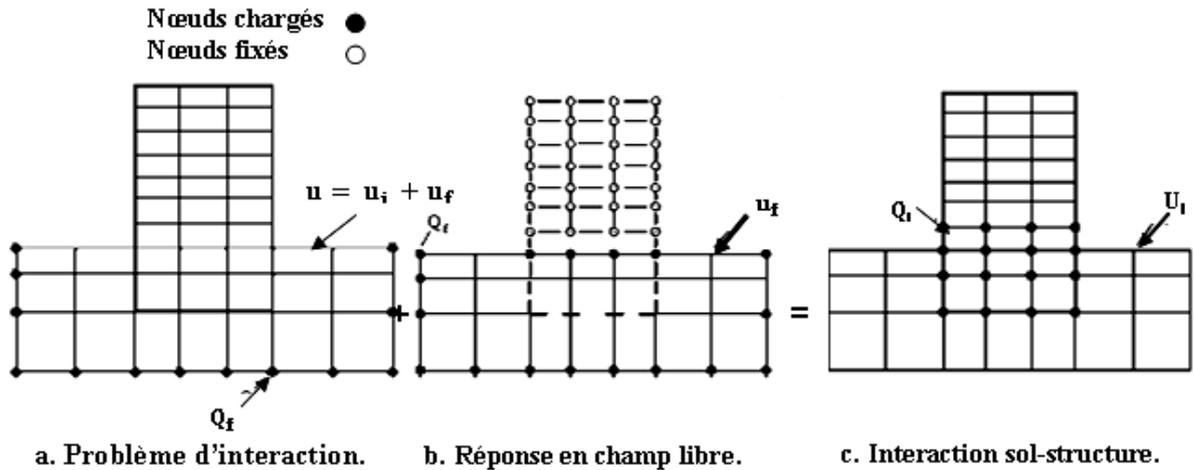
Problème source figure (4-1c) :

$$[M]\{\ddot{u}_i\} + [C]\{\dot{u}_i\} + [K]\{u_i\} = \{Q_i\} \quad (7-4)$$

Tel que  $\{Q_i\}$  est donné par :

$$\{Q_i\} = [[M] - [M_f]]\{\ddot{u}_f\} + [[C] - [C_f]]\{\dot{u}_f\} + [[K] - [K_f]]\{u_f\} \quad (7-5)$$

A partir de cette dernière équation, on conclue qu'il y a interaction dès qu'il y a différence de masse ou de raideur entre le sol et la structure.



**Figure (4-1): Théorème de superposition pour l'interaction sol-structure.**

#### 7.1.4. Les différentes méthodes pour prendre en compte l'ISS

Différentes méthodes existent pour prendre en compte l'ISS. Elles sont décrites et détaillées dans [213, 214,215] ou. Nous allons les présenter brièvement dans ce paragraphe.

##### 7.1.4.1. Les méthodes directes (Méthodes globales)

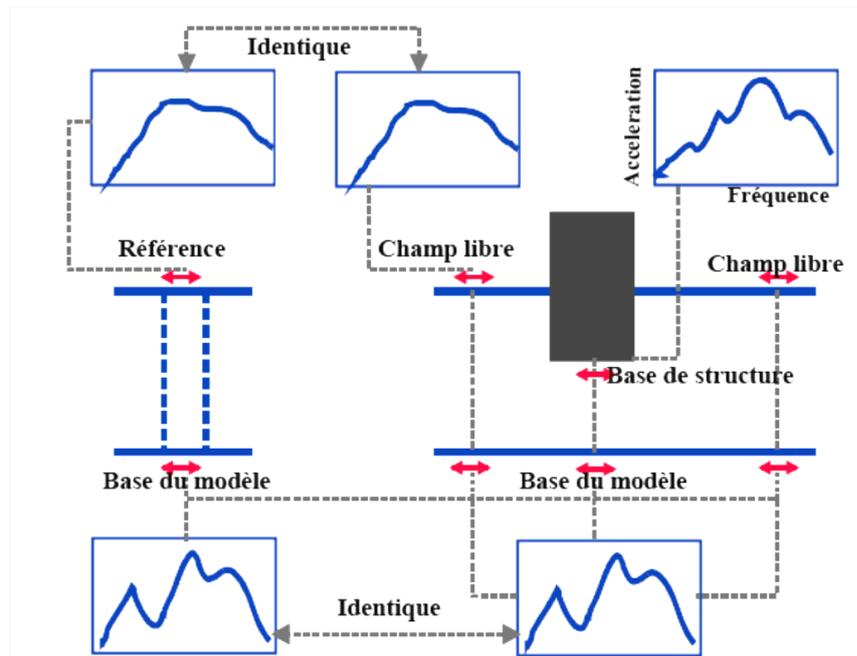
Les méthodes directes consistent à résoudre directement l'équation de la dynamique régissant le comportement du système {sol+fondation+structure}:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{Q\} \quad (7-6)$$

La résolution directe de ce système d'équation utilise les algorithmes classiques de la méthode des éléments finis (méthode de Newton-Raphson et algorithme d'intégration temporelle de Newmark). La mise en œuvre pratique de telles solutions est illustrée sur la figure (4-2).

Cette résolution requiert une bonne connaissance des lois de comportements des matériaux et des frontières entre les différentes parties du système. Par exemple, des lois de contacts, entre la fondation et le sol doivent être prises en compte pour bien reproduire les différentes non linéarités (les problèmes de décollement d'une fondation superficielle qui constituent une non-linéarité géométrique).

La prise en compte de l'ISS nécessite un très grand nombre d'éléments ce qui engendre des temps de calculs contraignants. Il est d'ailleurs assez difficile de définir de manière précise la frontière de ce massif de sol.



**Figure (4-2): Représentation schématique d'un calcul interaction sol-structure méthode globale.**

En effet, une onde frappant cette frontière peut numériquement se réfléchir et venir solliciter une nouvelle fois la structure, alors qu'en réalité, nous l'avons vu, cette onde part à l'infini et emmène avec elle une partie de l'énergie de la structure et du sol (amortissement radiatif). Des frontières absorbantes devront donc être ajoutées aux limites du massif de sol pour tenir compte de cet amortissement.

En théorie, les méthodes globales peuvent être étendues aux cas tridimensionnels et sont susceptibles d'appréhender les comportements non linéaires dus à la loi de comportement d'un des matériaux (sol le plus souvent) ou aux interfaces sol-structure. Si les méthodes globales sont généralement coûteuses du point de vue ordinateur, elles requièrent souvent moins de temps humain que d'autres méthodes approchées exigeant une grande réflexion.

Les méthodes globales ne font intervenir aucune notion de superposition et sont donc théoriquement adaptées aux problèmes non linéaires. Un des avantages principaux des méthodes globales est leur capacité à prendre en compte les hétérogénéités résultant soit des variations de faciès, soit des variations des caractéristiques de sol provenant de non linéarités.

L'expérience montre qu'elles sont généralement mieux adaptées et plus faciles de mise en œuvre pour l'étude d'ouvrages enterrés.

### 7.1.4.2. La méthode des sous-structures

Elle vise à décomposer le problème en la somme de sous problèmes plus simples à résoudre. Dans le cas de fondations rigides cette méthode consiste à utiliser le principe de superposition rapportée dans [216]. Cette démarche est illustrée par la figure (4-3).

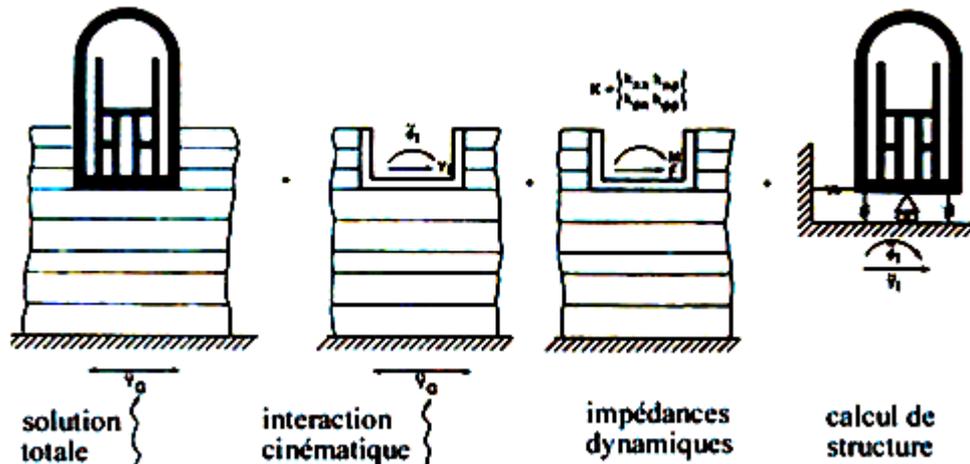


Fig. (4-3) Principe de superposition de Kausel

D'un point de vue pratique, cette méthode consiste à décomposer la résolution du problème en trois étapes successives:

#### a) La première étape.

(i) Nous considérons le milieu {sol+fondation rigide sans masse}. En appliquant la sollicitation sismique à la base de ce milieu nous déterminons l'accélération à laquelle sera soumise la fondation. C'est le calcul de l'interaction cinématique.

(ii) Nous calculons la matrice d'impédance dynamique de la fondation permettant d'obtenir les raideurs ainsi que les termes d'amortissement dans les différentes directions.

(iii) Nous calculons la réponse dynamique de la structure supportée par les ressorts d'impédances trouvés en (ii) et soumise à la sollicitation calculée en (i).

De nombreuses méthodes existent pour résoudre la première étape et notamment la méthode des équations intégrales ou d'éléments frontières [217].

#### b) La deuxième étape.

Elle nécessite le calcul des fonctions d'impédances. L'impédance de la fondation caractérise l'effort résultant sur la fondation sans masse lorsqu'elle est soumise à un déplacement imposé harmonique unitaire.

Le mouvement de la fondation est celui d'une masse posée sur un ressort ayant pour raideur la partie réelle de l'impédance et pour amortissement sa partie imaginaire. Des résultats analytiques pour tout type de fondations sont donnés dans [218,213].

Dans le cas général et pour une fondation possédant six degrés de libertés, la matrice d'impédance reliant les déplacements aux efforts est de dimension  $6 \times 6$ . Cependant, nous pouvons montrer que pour une fondation superficielle, les termes hors diagonaux de la matrice peuvent être considérés comme nuls, ce qui revient à considérer qu'il n'y a pas de couplage entre les différents degrés de liberté.

Par ailleurs, chaque terme de la matrice est composé d'une partie réelle traduisant la raideur du système {sol+fondation} et d'une partie imaginaire traduisant l'amortissement. Cet amortissement provient de la radiation des ondes de la fondation vers l'infini. Ces deux termes peuvent a priori dépendre de la fréquence de la sollicitation).

### **c)La troisième étape.**

Elle est en général résolue avec la méthode des éléments finis permettant de résoudre l'équation de la dynamique d'une structure liée au sol par un système de ressorts et d'amortisseurs.

Ces méthodes sont assez restreintes puisque, comme tout problème de superposition, elles ne sont utilisables uniquement que pour des problèmes linéaires. Cependant de nombreux travaux montrent que cette technique donne de très bons résultats [219].

Les différentes méthodes de sous-structure se différencient par la décomposition en sous modèles du modèle global : on distingue les méthodes dites de frontière et les méthodes de volume.

#### **7.1.4.2. a Méthodes de frontière.**

Le modèle global est décomposé en sous-modèles, illustré à la figure (4-4), tel que la compatibilité des efforts et des déplacements est écrite le long de la frontière séparant les deux sous structure. Les différentes équations d'équilibre s'écrivent (négligeant les termes d'amortissement, pour alléger la présentation).

Structure :

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ss} & k_{sb} \\ k_{bs} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_b \end{Bmatrix} \quad (7-7)$$

Sol :

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_f \\ \ddot{u}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ff} & k_{fa} \\ k_{af} & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_a \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7-8)$$

En absence de structure :

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_f^* \\ \ddot{u}_a^* \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ff} & k_{fa} \\ k_{af} & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f^* \\ u_a^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7-9)$$

$u^*$  : représente le déplacement d'interaction cinématique.

Désignant par :

$$\{u^i\} = \{u\} - \{u^*\} \quad (7-9a)$$

On aura :

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_f^i \\ \ddot{u}_a^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ff} & k_{fa} \\ k_{af} & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f^i \\ u_a^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_b \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

Pour la résolution du problème d'interaction sol-structure par la méthode de sous-structure, on travail dans le domaine fréquentiel, avec la transformé de Fourier  $u = \Sigma \tilde{u}(\omega) e^{i\omega t}$  , on obtient :

$$[-\omega^2 [M] + [K]] \{\tilde{u}_i\} = -\{\tilde{P}\} \quad (7.11)$$

Sous forme condensé :

$$[S_f(\omega)] [\tilde{u}_f^1(\omega)] = \{-\tilde{P}_b(\omega)\} \quad (7.12)$$

$f$  : degré de liberté situés sur la frontière de séparation.

$[S_f]$  : La matrice d'impédance du sol.

Tenant compte de la condition de compatibilité et de la relation (7.9a) ; on aura à la fin :

$$\left[ -\omega^2 \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ss} & k_{sb} \\ k_{bs} & k_{bb} + S_f \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_s \\ \tilde{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ S_f \tilde{u}_f^* \end{Bmatrix}. \quad (7.13)$$

Cette équation définit le mouvement de la structure, en terme de déplacements absolus, lorsque celle-ci est soumise aux forces, résultant du mouvement du champ libre, imposées le long de la frontière, interface ave le sol.

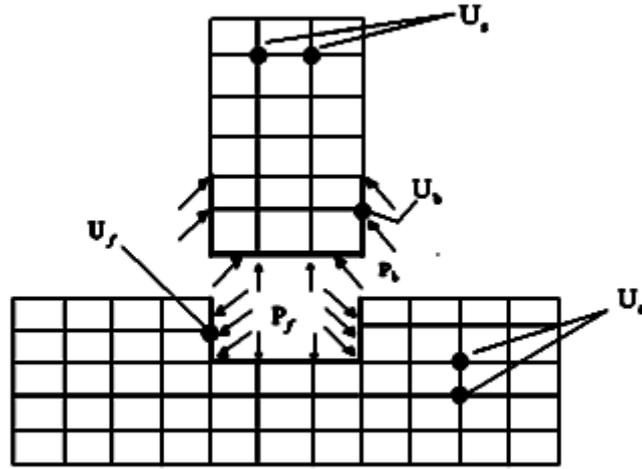


Figure (4.4): Méthode des sous-structures : Méthode de frontière

#### A) Frontière rigide :

Si la fondation est rigide le champ des déplacements de celle-ci peut s'exprimer en termes d'un mouvement de corps rigide défini par rapport à un point quelconque, par exemple son centre :

$$\{ \tilde{u}_b \} [T] \{ \tilde{u}_0 \} \quad (7.14)$$

$[T]$  : est la matrice de transformation.

$\{ \tilde{u}_0 \}$  : le vecteur des déplacements et rotations du centre de la fondation.

De même, les forces nodales  $\{ \tilde{P}_b \}$  sont reliées aux forces et moments appliqués à la fondation en son centre:

$$\{ \tilde{P}_b \} = [T]^T \{ \tilde{P}_0 \} \quad (7.15)$$

Avec ces définitions l'équation (6-7) prend la forme :

$$-\omega^2 [M] + \begin{bmatrix} k_{ss} & k_{sb} \cdot T \\ [T]^T k_{bs} & [T]^T (k_{bb} + S_f) T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_s \\ \tilde{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [T]^T S_f \tilde{u}_f^* \end{Bmatrix} \quad (7.16)$$

L'examen de cette dernière équation montre que la matrice  $K = T S_f T$  est la matrice d'impédance d'une fondation rigide contenant les raideurs complexes de sol, dépendante de la fréquence;  $[T]^T S_f \tilde{u}_f^*$  est le vecteur contenant les résultantes des forces fictives  $S_f \tilde{u}_f^*$ .

Le système étant constitué par la structure reliée aux impédances complexes du sol, l'équation (7-16) montre que la réponse du système peut être obtenue en appliquant, à son support, un mouvement défini par :

$$K^{-1} [T]^T S_f \tilde{u}_f^* = [T]^T S_f \tilde{u}_f^* \quad (7.17)$$

Ainsi, dans l'hypothèse d'une fondation rigide, il est pertinent de scinder le problème global en trois sous-problèmes :

- a) Détermination du mouvement d'une fondation rigide sans masse soumise à la sollicitation sismique; cette étape représente la solution de l'équation (7-9);
- b) Détermination de la matrice d'impédance de la fondation, équation (7-12);
- c) Calcul de la réponse dynamique de la structure reliée à la matrice d'impédance et sujette à son support au mouvement d'interaction cinématique équation (7-16).

Dans la mesure où la fondation est parfaitement rigide, cette démarche est rigoureusement identique à celle conduisant à la résolution du système global en une étape. Cette décomposition est connue sous le nom de théorème de superposition de Kausel et est illustrée sur la figure (4-3). Son intérêt apparaît clairement s'il est possible de simplifier une des trois étapes du calcul.

### **B) Frontière flexible :**

Dans le cas général, la fondation n'est pas infiniment rigide, le problème à résoudre est plus complexe que celui défini par l'équation (7-13). La structure, reliée aux impédances de sol, est soumise à un système de sollicitations multiples à chacune de ses liaisons avec le sol. En principe, la résolution des trois mêmes étapes précédentes est nécessaire :

- Diffraction du champ libre ;
- Impédance ;
- Réponse de la structure.

Mais chacune est plus complexe que dans le cas d'une fondation rigide. En particulier, on ne peut plus avoir recours à des solutions publiées pour la détermination des impédances.

#### **7.1.4.2.b. Méthodes de volume :**

L'interaction entre le sol et la structure est prise en compte, non seulement à l'interface sol structure, mais à tous les nœuds de la structure sous la surface du sol [217](figure (4-5)).

On désigne par  $[A]$  la matrice :  $[A] = [K] - \omega^2 [M]$ , les équations d'équilibre des diverses sous structures sont :

- *Sol* :

$$\begin{pmatrix} a_{ff} & a_{fg} & a_{fb} \\ a_{gf} & a_{gg} & a_{gb} \\ a_{bf} & a_{bg} & a_{bb} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_f \\ u_g \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_f \\ 0 \\ Q_b \end{Bmatrix} \quad (7.18)$$

- *Structure (moins sol excavé):*

$$\begin{pmatrix} a_{ss} & a_{si} \\ a_{is} & a_{ii} - a_{ff} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q_f \end{Bmatrix} \quad (7.19)$$

Pour les limites extérieures du modèle suffisamment éloignées de la structure, le mouvement du champ libre est défini par :

$$\begin{pmatrix} a_{ff} & a_{fg} & a_{fb} \\ a_{gf} & a_{gg} & a_{gb} \\ a_{bf} & a_{bg} & a_{bb} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_f^* \\ u_g^* \\ u_b^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_b \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

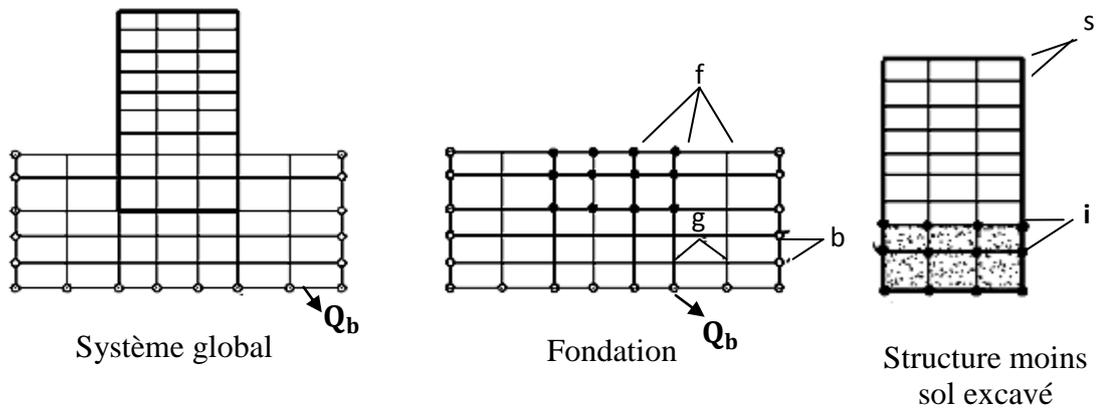
Par soustraction des équations (6-20) et (6-18), et par condensation aux f degrés de liberté, on obtient :

$$\{Q_f\} = [X_f] \{u_f - u_f^*\} \quad (7.21)$$

A la fin, l'équation de mouvement de la structure est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a_{ss} & a_{si} \\ a_{is} & a_{ii} - a_{ff} + X_f \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X_f u_f^* \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

Avec  $[X_f]$  la matrice d'impédance du sol.



**Figure (4-5): Méthode des sous-structures : Méthode de volume**

#### 7.1.4.3. Méthodes hybrides: concept de macroélément.

Les méthodes hybrides consistent à utiliser une combinaison des deux autres méthodes vues plus haut en profitant des avantages de chacune. Ainsi les méthodes hybrides visent à décomposer le système en deux sous-domaines.

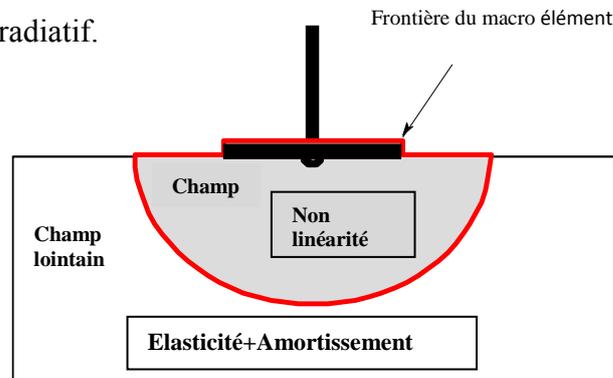
**a. Le premier sous domaine:** le champ lointain est suffisamment loin de la fondation pour être considéré élastique. Son comportement peut alors être régi par les impédances dynamiques.

**b. Le deuxième sous-domaine:** le champ proche est quant à lui considéré comme ayant un comportement non-linéaire. Nous allons même jusqu'à considérer qu'il englobe toutes les non-linéarités et hétérogénéités du problème. Ce domaine fini peut être traité par exemple avec la méthode des éléments finis. Afin de traiter les non-linéarités à l'intérieur de ce champ proche, outre la méthode classique des éléments finis, le concept de macro-élément peut être utilisé. Dans le cas de l'interaction sol fondation, le domaine fini est constitué :

D'une fondation superficielle (de forme quelconque: circulaire, rectangulaire ou filante

D'un volume fini du sol sous-jacent regroupé dans le champ proche figure (4-6). Dans ce volume {sol+fondation} sont donc concentrées toutes les non-linéarités.

Deux types de non-linéarités sont présents: les non-linéarités matérielles qui sont constituées principalement par la plasticité du sol, mais aussi les non-linéarités géométriques composées par le décollement éventuel de la fondation. Le reste du volume du sol, c'est à dire la partie semi-infinie sous le macro-élément constitue le champ lointain. Dans ce volume, aucune non-linéarité n'est présente. Le sol se comporte donc de manière élastique. Par contre, c'est dans ce champ lointain, que vont pouvoir être considérés les dissipations d'énergies dues à l'amortissement radiatif.



**Figure (4-6): Décomposition en champ proche et champ lointain pour la définition de la frontière du macroélément**

## 7.2. Modélisations-Analyse dimensionnelle et lois de similitude

### 7.2.1. Modèles et simulations.

L'observation n'est pas toujours possible ni suffisante pour étudier un phénomène réel. Les causes principales en sont le manque de moyens techniques, financiers ou théoriques. La simulation est alors d'un grand secours pour approfondir l'étude. La simulation est l'expérimentation sur un modèle du phénomène que l'on veut étudier. Le modèle sur lequel s'appuie une simulation est fondé sur une théorie, c'est-à-dire une description abstraite de la réalité. Dans le cas où le problème physique est basé sur une théorie reconnue et éprouvée,

La simulation sert à évaluer ou à vérifier le comportement de l'objet d'étude. De tels modèles servent à dimensionner des ouvrages ou à établir des essais de laboratoire en génie civil. Quand la théorie n'est pas assurée, la simulation permet, par confrontation avec la réalité, de tester sa validité. Les modèles sont de deux types, *numérique* et *analogique*. De tels modèles existent dans beaucoup de disciplines mais nous nous limiterons ici à la description des simulations des phénomènes physiques.

#### **7.2.1.1. Les simulations numériques**

Les modèles numériques sont basés sur une formulation mathématique du problème à l'aide des lois de la physique et d'hypothèses complémentaires. Les résultats sont donnés par des solutions analytiques ou plus fréquemment par des calculs numériques sur ordinateur.

#### **7.2.1.2. Les simulations analogiques**

Les modèles analogiques sont des mécanismes physiques, présentant des analogies avec le phénomène décrit par la théorie. Ils sont utilisés lorsque les modèles numériques n'existent pas, ne sont pas assez performants ou ne sont pas utilisables par manque de calculateurs assez puissants. L'utilisation de conducteurs électriques pour modéliser l'écoulement de l'eau dans un milieu perméable, est un exemple de résolution analogique d'équations différentielles.

Parmi les modèles analogiques, les modèles réduits ont été très tôt et largement utilisés à cause leur ressemblance structurelle avec la réalité. On appelle prototype le corps physique que le modèle réduit représente à une plus petite échelle. Plus généralement, on entendra le mot prototype comme corps physique à modéliser numériquement ou analogiquement. Dans notre cas, le prototype est une fondation à modéliser.

#### **7.2.2. L'élaboration d'un modèle**

L'élaboration d'un modèle, numérique ou analogique, se fait en plusieurs étapes introduisant chacune, erreurs et incertitudes :

- Détermination des phénomènes et des paramètres.
- Définition du prototype : caractéristiques dimensionnelles et structurelles
- Construction d'une théorie
- Réalisation du modèle

Pour un modèle numérique, aussi bien que pour un modèle analogique, la forme des équations

Pour un modèle numérique, aussi bien que pour un modèle analogique, la forme des équations issues de la théorie, donne avant toute résolution numérique et analogique, des renseignements sur les relations entre les variables du problème. L'étude de ces relations fait l'objet de l'analyse dimensionnelle, qui elle-même est à la base des théories de la similitude dimensionnelle.

#### **7.2.2.1. Analyse dimensionnelle**

L'analyse dimensionnelle est l'étude de la forme générale des équations régissant un phénomène physique. Elle s'intéresse aux dimensions des variables intervenant dans les équations scientifiques. La propriété d'homogénéité des équations, c'est-à-dire leur indépendance par rapport au système d'unité, permet, à partir des relations entre les variables dimensionnelles de former un système équivalent de variables sans dimensions qui sont des produits des précédentes. Cette opération permet de réduire le nombre de variables décrivant le problème physique en ne considérant que des paramètres adimensionnels.

#### **7.2.3. Expérimentations dynamiques sur table vibrante**

En génie parasismique, les expérimentations sur modèles réduits présentent un grand intérêt. Elles permettent, en effet, d'analyser sur des dispositifs de dimensions raisonnables des phénomènes aussi variés que la propagation des ondes sismiques [220]. Le comportement dynamique des structures [221] ou l'interaction sol-structure [222].

Les expérimentations sismiques sur les bâtiments peuvent ainsi être réalisées à échelle réduite sur table vibrante. Il est toutefois nécessaire de respecter certaines règles, appelées loi de similitude, afin d'obtenir sur la maquette les mêmes niveaux de contrainte et d'accélération que sur le bâtiment en vraie grandeur (cf. Expérimentations dynamiques sur table vibrante ).

Une première expérimentation de ce type s'est déroulée entre 1990 et 1992 (projet CASSBA: Conception et Analyse Sismique des Structures en Béton Armé). L'objectif de ce projet était d'étudier la réponse sismique d'un bâtiment à murs porteurs de huit étages à l'aide d'essais sur table vibrante [223].

Le projet CAMUS (Conception et Analyse de Murs sous Séismes) a ensuite vu le jour afin de caractériser pleinement la réponse dynamique non linéaire du même type de bâtiment dans d'autres conditions de chargement sismique (CEA, 1997). Outre les expérimentations sur modèle réduit réalisées sur la table vibrante « Azalée » du Commissariat à l'énergie atomique (CEA) et le travail de simulation et d'analyse de l'équipe CAMUS, un concours de prévisions international a été proposé pour modéliser la structure et analyser sa réponse à l'aide de méthodes numériques. Onze équipes différentes (Europe, Canada, États - Unis, Japon) ont participé à ce concours de prévisions et ont présenté leurs résultats lors de la XI e Conférence européenne de génie parasismique (CEA, 1998).

#### 7.2.4. Lois de similitude pour les essais sur table vibrante

Les essais sur modèle réduit (centrifugeuse, table vibrante, soufflerie, etc.) présentent un grand intérêt pratique et économique. Ils nécessitent, toutefois, le respect de règles précises, appelées lois de similitude. Ces lois permettent, par exemple, de retrouver à échelle réduite les mêmes niveaux de contrainte qu'en grandeur réelle sur l'ouvrage prototype. Le comportement du matériau est alors similaire pour la maquette et le prototype. Pour les essais sur table vibrante, en notant  $l^*$  le rapport de réduction sur les distances ( $l^* < 1$ ) et en considérant l'équation dimensionnelle donnant la contrainte due aux forces de pesanteur [221], la condition de similitude sur la masse de la structure, soit  $m^*$ , est la suivante :

$$\sigma^* = \frac{m^* \cdot g^*}{l^{*2}} \text{ d'où } m^* = \frac{\sigma^* \cdot l^{*2}}{g^*}$$

où  $\sigma^*$  et  $g^*$  sont les échelles de similitude sur la contrainte et sur la pesanteur. Comme ces deux échelles valent l'unité (même contraintes et même forces de pesanteur sur la maquette qu'en grandeur réelle), l'échelle de similitude sur la masse vaut donc :  $m^* = (l^*)^2$ . Ceci

donne la condition de similitude suivante pour la masse volumique :  $\rho^* = \frac{m^*}{l^{*3}}$

Si l'échelle des distances est réduite d'un facteur 3 ( $l^* = 1/3$ ), il est donc nécessaire de multiplier la masse volumique par un facteur 3. Il n'est pas possible de modifier la masse volumique du matériau, car celui-ci doit se comporter de la même manière sur la maquette qu'en grandeur réelle. Les structures utilisées pour les essais sur table vibrante sont donc pourvues de masses additionnelles permettant de respecter la condition de similitude sur la masse volumique.

En considérant maintenant la contrainte due à la sollicitation sismique [221], l'équation aux dimensions obtenue s'écrit :

$$\sigma^* = \frac{m^* \cdot \gamma^*}{l^{*2}} \text{ d'ou } \gamma^* = \frac{l^*}{t^{*2}} = 1 \text{ et } t^* = \sqrt{l^*}$$

où  $\gamma^*$  et  $t^*$  sont les échelles de similitude sur l'accélération et sur le temps. En plus de la similitude

de contrainte ( $\sigma^* = 1$ ), il y a donc similitude d'accélération ( $\gamma^* = 1$ ). Il faut, en revanche, respecter un rapport de similitude  $(l^*)^{1/2}$  sur le temps. Les signaux d'accélération utilisés pour les essais sur table vibrante ont donc la même amplitude qu'en grandeur réelle, mais ils doivent être contractés dans le temps. Pour réaliser des essais dynamiques sur table vibrante, il faut ainsi augmenter la masse volumique du modèle réduit d'un facteur  $1/l^*$  et contracter l'échelle des temps d'un facteur  $(l^*)^{1/2}$ . Les fréquences de la maquette seront donc augmentées de  $(1/l^*)^{1/2}$  par rapport à la réalité. Le respect de ces lois de similitude permet d'obtenir sur maquette les mêmes contraintes que pour la structure réelle.

### 7.2.5. Description du model analogique.

Ce modèle est constitué d'un matériau en de 3mm ou 5mm de diamètre et de 60 mm de longueur. Les rouleaux de 3mm sont circulaires, tandis que ceux de 5 mm sont circulaires ou aplatis selon une génératrice. La présence de rouleau aplatis permet d'éviter tout élément de régularité dans l'arrangement géométrique et d'augmenter suffisamment ment le nombre d'orientations de contact possibles

Le matériau est dit analogique dans la mesure, où son comportement est analogue à celui d'un milieu granulaire. Qualitativement, il possède des propriétés mécaniques voisines de celles des milieux pulvérulents, comme les sables et les graviers. Sa principale particularité est d'être bidimensionnelle, ce qui permet de traiter de véritables problèmes "plans", et de simplifier les hypothèses de calcul.

En effet, le milieu présente une forte anisotropie suivant la direction des génératrices des rouleaux. La matrice "contraintes-déformations" devient bidimensionnelle, et identique à celle en "contraintes planes", à trois dimensions. Le matériau permet facilement une analyse fine de la cinématique des particules, l'appréhension du vecteur "contrainte", par un capteur unique (mesurant la contrainte normale et tangentielle) - mesures beaucoup plus délicates à trois dimensions. Il permet enfin de supprimer le frottement sur les parois verticales, (impossible à trois dimensions).

La loi contraintes-déformations, présente les mêmes aspects non linéaires, et correspond aux calculs développés par Duncan. Les modules tangents sont fonction de la contrainte principale mineure.

En plasticité parfaite, on retrouve la même loi de potentiel plastique "non-standard". En outre, le matériau présente les mêmes phénomènes d'érouissage avec déformations déviatoires ; seules les déformations isotropes sont plus faibles.

### 7.2.6. Essais sur modèles réduits

Quelques remarques sur les conditions de similitude, en mécanique des sols.

Si (S) désigne le matériau de la structure et (M), le matériau de la maquette,  $U_s$  une grandeur relative à la structure et  $U_M$ , la grandeur correspondante pour la maquette, on pose :

$$U^* = \frac{U_M}{U_s} \quad (7.23)$$

En désignant par  $X_j$  les coordonnées,  $\sigma_{ij}$  les composantes du tenseur des contraintes,  $\xi_i$  les composantes du déplacement, et  $g_i$  celle la force de masse, les équations de la dynamique s'écrivent :

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} + \rho \left( g_i - \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} \right) = 0 \quad (7.24)$$

( $\rho$  étant la masse volumique)

En modifiant les échelles, le premier terme est multiplié par  $\sigma^* I^{*-1}$  le second par  $\rho^* g^*$  le troisième par  $\rho^* \epsilon^* t^{*-2}$ , l'équation. (7.24) devait rester vérifiée, on obtient les conditions de similitude:

$$\sigma^* = \rho^* g^* I^* \quad (7.25)$$

$$\epsilon^* = g^* t^{*2} \quad (7.26)$$

La condition (7.26), n'intervient que dans les problèmes dynamiques.

Le comportement rhéologique des sols est décrit par les courbes effort-déformation que l'on obtient sur la presse triaxiale.

Dans une similitude, où l'échelle des contraintes est  $\sigma^*$ , et celle des déformations  $\epsilon^*$ , on passe de la courbe effort-déformation du prototype (S), à la courbe effort-déformation du modèle (M), par une affinité de rapport ( $\epsilon^*, \sigma^*$ ).

Cette condition, est pratiquement irréalisable dans les cas des matériaux réels. Elle indiquerait que la courbe intrinsèque du matériau constituant le modèle se déduit de celle du matériau prototype par une homothétie de rapport  $\sigma^*$ , suivant les deux axes de coordonnées; ce qui est une condition expérimentale, pratiquement impossible à réaliser, sauf peut-être pour les matériaux parfaitement pulvérulents, dont la courbe intrinsèque est conservée dans une telle homothétie

On préfère donc, souvent, que la similitude conserve la loi rhéologique du sol, les courbes effort-déformation, du prototype et du 1 modèle, doivent être confondues. Cette condition, sera vérifiée, si le modèle conserve le matériau, les contraintes, et les déformations, on aura donc :

$$\rho^* = 1, \sigma^* = 1, \epsilon^* = 1 \quad (7.27)$$

(3), (4) et (5) Implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} g^* I^* = 1 \\ I^* = g^* t^{*2} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g^* = 1/I^* \\ t^* = I^* \end{array} \right\} \quad (7.28)$$

Les conditions (7.28) , indiquent que pour un modèle au 1/100, la force de masse devra être multipliée par 100, soit,  $g_M = 100 g_S$  tandis que le temps devra être divisé par 100, soit,  $t_M = t_S / 100$  . Beaucoup de chercheurs, utilisent des centrifugeuses pour réaliser l'augmentation des forces de masses. Mais, pour les petits modèles, la diminution importante du temps de chargement crée des problèmes liés à la relation du comportement rhéologique des sols, avec la vitesse de sollicitation.

Il serait souhaitable donc, pour s'assurer du même comportement rhéologique, de se rapprocher de l'échelle des temps réels. Mais plus t se rapproche de l'unité, plus l fait de même, c'est-à-dire que les dimensions du modèle se rapprochent des dimensions réelles, ce qui a peu d'intérêt.

On se rend compte, donc, que les problèmes qui se posent lorsqu'on désire faire la similitude, sont énormes, et sa réalisation, proprement dite, n'a pas encore pu être effectuée. D'un autre côté, les modèles simples, qui n'essayent d'appliquer qu'une similitude "qualitative", ont contribué considérablement à l'évolution de la Mécanique des Sols, grâce, justement à leur simplicité. Le modèle analogique de Schneebeli , appartient à cette catégorie .

### **7.2.7. Dispositif expérimental**

Les essais ont été réalisés sur les tables vibrantes "Vesuve" et "Tournesol" leurs performances en font des appareils très puissants permettant l'étude de différentes maquettes depuis les plus petites jusqu'aux ensembles importants à grande échelle (et dans certains cas sur Vesuve en vraie grandeur)

#### **7.2.7.1. Table vibrante "Vesuve"**

Première table mise en service au laboratoire en 1969, et rénovée en 1976. Mono-axiale horizontale, sa course est de 200 mm. Son plateau, en aluminium, a une charge utile de 20 tonnes. Six paliers mécaniques assurent son guidage jusqu'à 70 Hz. Cette table est principalement utilisée pour réaliser des essais de recherche et développement.

C'est une table vibrante à excitation mono axiale mue par un vérin électro hydraulique ayant une force max. de 350 KN., elle mesure 3.80 m x 3.10 m et peut supporter une masse de 20 t. Six paliers équipés chacun de huit patins à rattrapage de jeu hydraulique assure le guidage horizontal de la table. La surface de glisse des patins revêtue d'une pellicule de téflon confère un coefficient de frottement dynamique de l'ordre de 0.03 à 0.05. Les caractéristiques limites de l'installation sont indiqués fig. (4.7) et tableau 19.



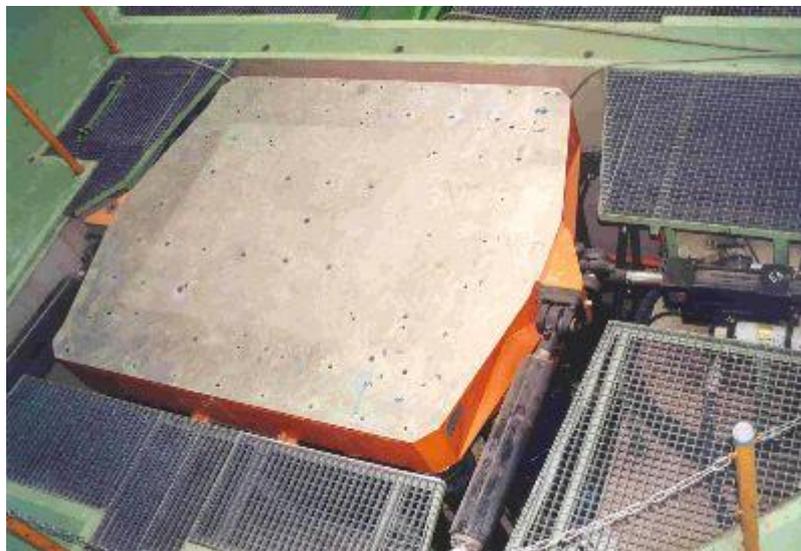
**Fig. (4.7) La table vibrante Vésuve.**

**Tableau19: Caractéristiques de la table Vésuve**

Géométrie et performances de la table Vésuve	
Dimensions de la table	3,8 m x 3,1 m
Masse de la table	4 tonnes
Masse maximale du spécimen	20 tonnes
Hauteur maximale du spécimen	12 m
Axes d'excitations	Mono-axiale
	X
	1 degré de liberté
Force des vérins	350 kN
Déplacement maximum	± 100 mm
Vitesse maximale	Séisme : 1 m/s
	Sinus : 1 m/s
Accélération maximale (specimen : 20 tonnes)	1,2 g
Fréquences d'excitation	0 à 100

**7.2.7.2. Table vibrante "Tournesol" :**

table vibrante opérationnelle depuis 1976, cette table est bi-axiale (horizontale et verticale) permettant des excitations horizontales et verticales pouvant être indépendantes ou simultanées mues par trois vérins hydrauliques ayant une force max de 100 kN. Le plateau en aluminium, de 2 m x 2 m, a une charge utile de 10 tonnes. Sa course est de 250 mm horizontalement et 200 mm verticalement. Cette table étant bi-axiale, elle est principalement utilisée pour réaliser des essais de qualification sismique sur des équipements de taille moyenne. la figure (7.8) et le tableau 20 montre ses caractéristiques limites en biaxial simultané.

**Fig. (4-8) La table vibrante Tounesol.**

**Tableau20: Caractéristiques de la table Tounesol**

géométrie et performances de la table Tournesol	
Dimensions de la table	2 m x 2 m
Masse de la table	1,2 tonnes
Masse maximale du spécimen	10 tonnes
Hauteur maximale du spécimen	12 m
Axes d'excitations	Bi-axiale
	X-Z
	3 degrés de liberté
Force des vérins	X : 100 kN
	Y : 2 x 100 kN
Déplacement maximum	X $\pm$ 125 mm
	Z $\pm$ 100 mm
Vitesse maximale	Séisme : 1 m/s
	Sinus : 0,7 m/s
Accélération maximale (specimen : 100tonnes)	1 g
Fréquences d'excitation	0 à 100 Hz

La première fréquence de résonance des deux tables est supérieure de 200 Hz et leur pilotage est réalisé à partir d'une console de contrôle commande analogique.

Les mesures des déplacements et des accélérations ont été effectuées à l'aide des capteurs de déplacement (LVDT) et de capteurs d'accélération respectivement.

Spécialement pour la mesure des accélérations dans le massif de petits accéléromètres, (piézoélectriques), ont été posés dans des petites "ouvertures" fabriquées de telle façon que le poids spécifique global de l'ensemble "ouverture-accéléromètre", soit le même que le poids spécifique du milieu analogique (c'est-à-dire 2,25 t/m<sup>3</sup>). Pour éviter des glissements probables, la surface extérieure des "ouvertures" est recouverte de rouleaux de 3 mm de diamètre.

### 7.3 - Calcul d'un modèle sol-fondation soumis aux vibrations verticales.

Il s'agit d'un modèle de dimensions données sur la figure (5-1). Le matériau qui remplace le sol est une couche de petits rouleaux. Sur cette couche, on a posé une fondation excentrée en métal. Ce modèle a été soumis à des vibrations verticales (chargement sinusoïdal). Nous avons calculé ce problème à l'aide de la méthode des éléments finis suivie d'une comparaison qualitative avec ce qui a été observé expérimentalement.

Le calcul éléments finis est fait:

- 1° En élasticité linéaire
- 2° Avec la loi hyperbolique de Duncan.

Ensuite, nous avons fait une comparaison entre les résultats obtenus par ces deux méthodes de calcul.

### 7.3.1. Maillage utilisé

Etant donné que le choix de maillage pour un calcul linéaire ne pose pas de problèmes, il a été choisi plus particulièrement en fonction des problèmes de convergence qui se posent dans un calcul non-linéaire. on a pris un maillage avec des éléments à huit nœuds, ce qui permet de choisir une étape de temps DT relativement grande et d'avoir une précision acceptable. Le maillage est montré sur la figure (5-1).

### 7.3.2 - Conditions aux limites

Les nœuds situés aux limites latérales du maillage sont bloqués horizontalement ( $u_y = 0$ ), et les nœuds situés à la base du maillage sont bloqués horizontalement et verticalement ( $U_y = U_z = 0$ ). Etant donné que, dans le modèle de laboratoire, la couche de petits rouleaux a été placée dans un cadre supposé rigide (cadre en bois), ces conditions limites paraissent convenables.

### 7.3.3- Propriétés des matériaux:

Les coefficients de la loi de Duncan pour le matériau utilisé sont donnés dans tableau 21 :

**Tableau21 : coefficients de la loi de Duncan pour le matériau utilisé**

$\emptyset$	c	Kur	n
26.0	0.0	1500	0.65
v	$R_f$	$K_0$	$\rho(\text{kg/m}^3)$
0.25	0.9	0.65	2250

$\emptyset$  : Coefficient de frottement.

C : Cohésion.

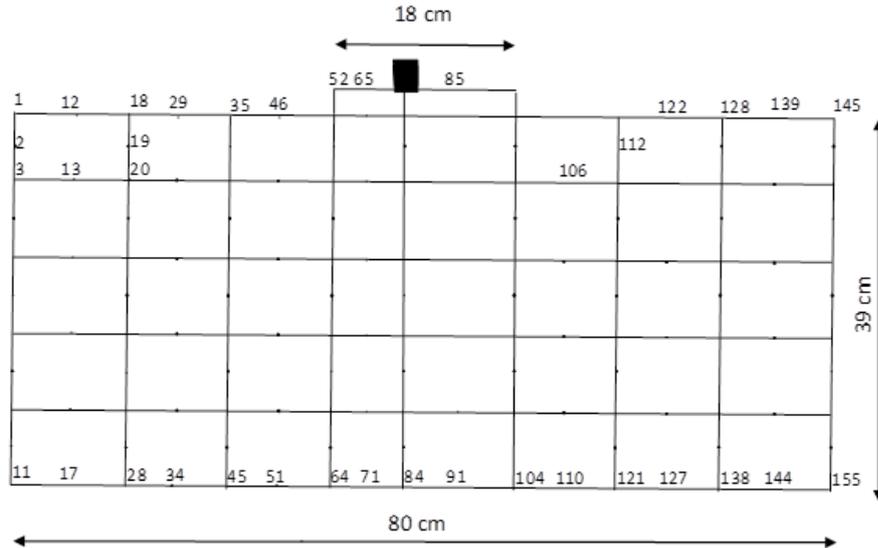
Kur: Coefficient de déchargement.

n: Exposant de la loi hyperbolique.

v : Coefficient de poisson.

$R_f$  : Coefficient de rupture.

$K_0$  : Coefficient de chargement.



**Fig. (5.1) Maillage**

Donc, on a utilisé la loi hyperbolique de Duncan avec les coefficients pour le calcul non-linéaire.

Pour le cas linéaire, on a utilisé pour chaque élément le module  $E_i$  qui correspond à l'état initial des contraintes dans cet élément. Ce module a été calculé en utilisant la formule:

$E_i = K \cdot P_a \left( \frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n$  qui donne le module initial en fonction de la pression latérale ( $\sigma_3$ ) dans la loi de Duncan .

La fondation est en métal, avec les propriétés suivantes:

**Tableau 22 : propriétés mécaniques de la fondation**

Masse ( Kg)	$\rho$ ( Kg/m <sup>3</sup> )	E (Pascals)	$\nu$
1.70	6960	$2 \times 10^{11}$	0.25

Le massif utilisé est un milieu anisotrope, car le module dans le sens X est très grand par rapport aux modules dans les sens y et z ( $E_x = \bar{E} \gg E_y = E_z, = E$ ).

Ecrivons les relations entre les déformations et les contraintes en élasticité linéaire pour un milieu isotrope:

Ecrivons les relations entre les déformations et les contraintes en élasticité linéaire pour un milieu isotrope:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} |\sigma_y - \nu \sigma_z - \nu \sigma_x| \quad (7-1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} |\sigma_z - \nu \sigma_y - \nu \sigma_x| \quad (7-2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} |\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z| \quad (7-3)$$

Pour le massif de petits rouleaux, étant donné que  $\sigma_x = 0$ , et que le module dans le sens de x est plus grand que dans le sens y et z, les équations (7-1), (7-2) et (7-3) deviennent:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} |\sigma_y - \nu \sigma_z| \quad (7-4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} |\sigma_z - \nu \sigma_y| \quad (7-5)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} |-\nu(\sigma_y + \sigma_z)| \quad (7-6)$$

### 7.3.4- Accéléogramme

L'accéléogramme étant sinusoïdal, il a les caractéristiques suivantes:

Amplitude  $1.80 \text{ m/sec}^2$

Fréquence 6 Hz.

### 7.3.5 - Résultats

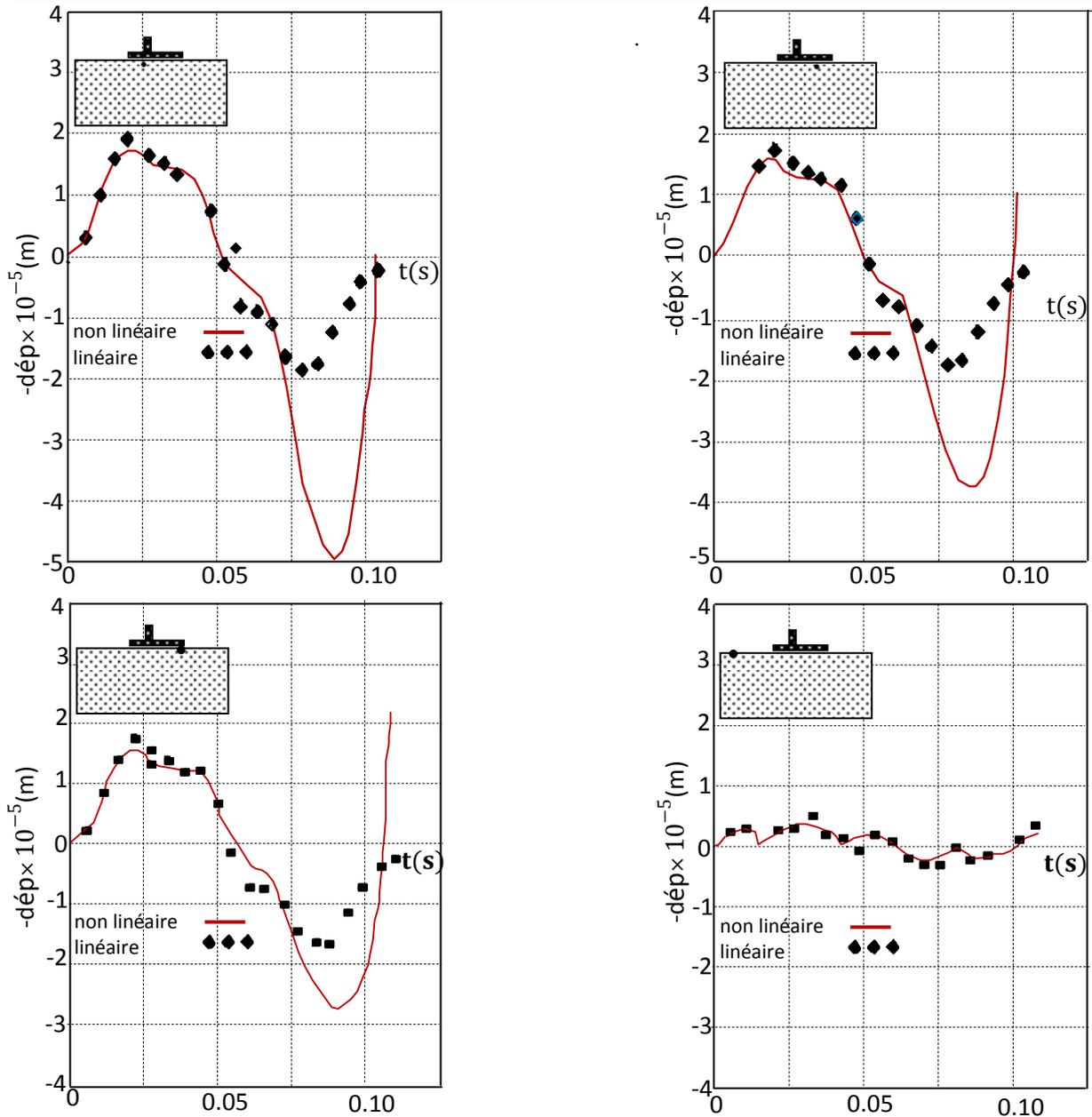
Les figures (5.2) et (5.3) représentent les histoires de déplacement pour différents points situés:

- 1) sur la surface du massif,
- 2) sur une ligne horizontale à 15 cm de la surface.

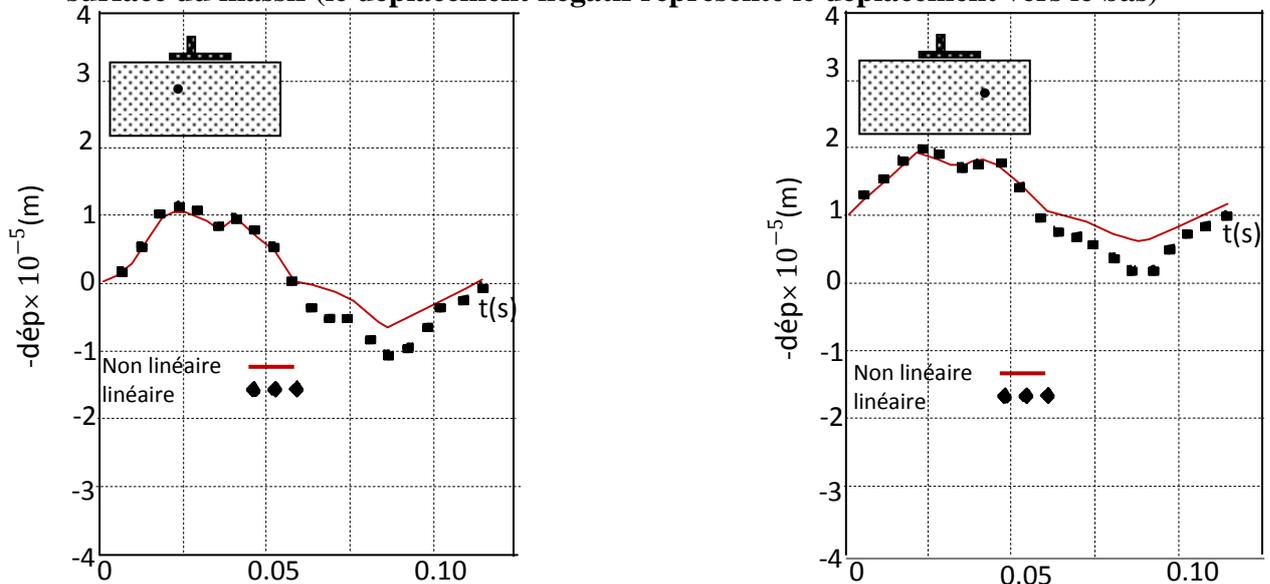
Les figures (5.4) et (5.5) représentent les histoires de contraintes pour les différents points situés sous la fondation et à la limite inférieure de la couche.

On voit que :

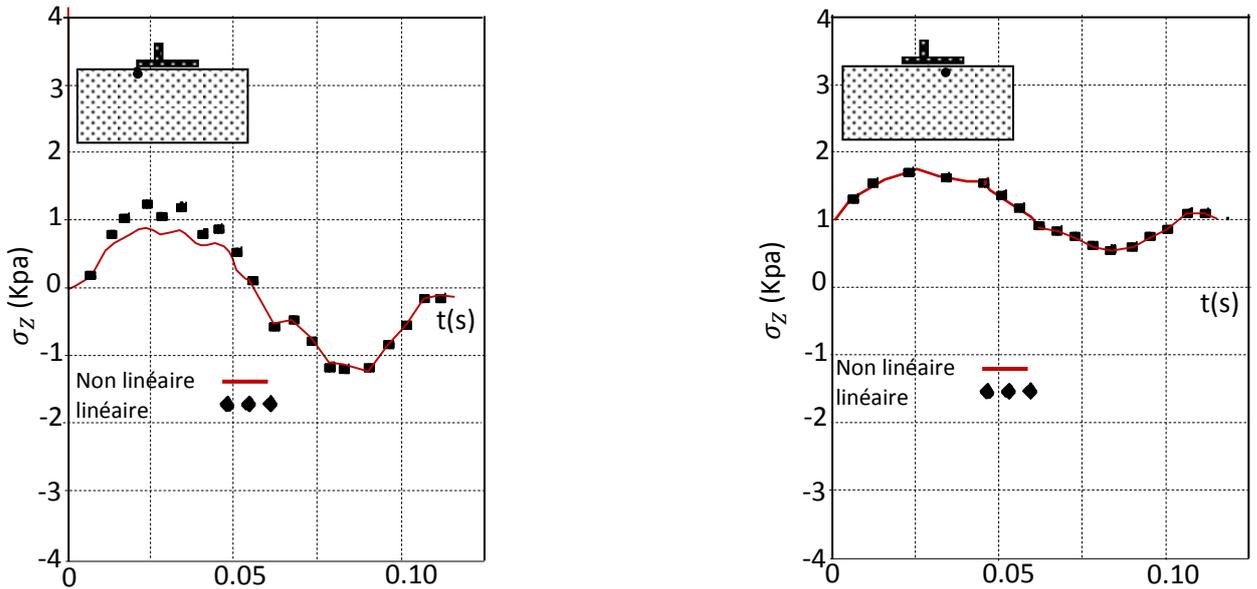
- ✓ Les points éloignés de la fondation subissent de très petites déformations, et le calcul linéaire, et non linéaire, donnent à peu près les mêmes histoires de déplacements pour ces points.
- ✓ Les points situés à proximité de la fondation subissent des déformations plus grandes, et on voit une différence entre les histoires de déplacement obtenues par le calcul linéaire et celles obtenues par le calcul non linéaire.
- ✓ Dans le cas non-linéaire, on obtient des déformations irréversibles pour les points situés à proximité de la fondation.
- ✓ On peut constater que les histoires de contraintes obtenues par le calcul linéaire s'accordent bien avec celles obtenues par un calcul non linéaire.



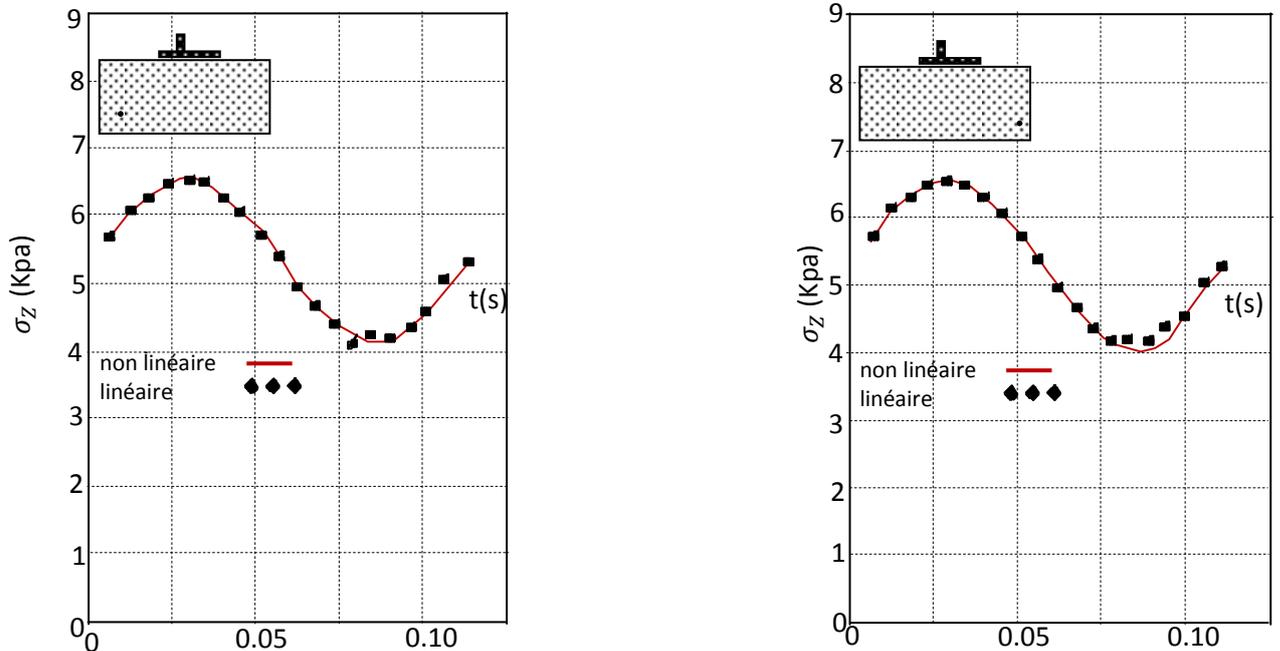
**Fig. (5.2) Histoires de déplacement vertical pour différents points indiqués situé sur la surface du massif (le déplacement négatif représente le déplacement vers le bas)**



**Fig. (5.3) Histoires de déplacement vertical pour différents points indiqués situé sur une ligne horizontale à 15 cm de la surface (le déplacement négatif représente le déplacement vers le bas)**



**Fig. (5.4) Histoires de contrainte verticale pour différents points indiqués situés sous la fondation.**



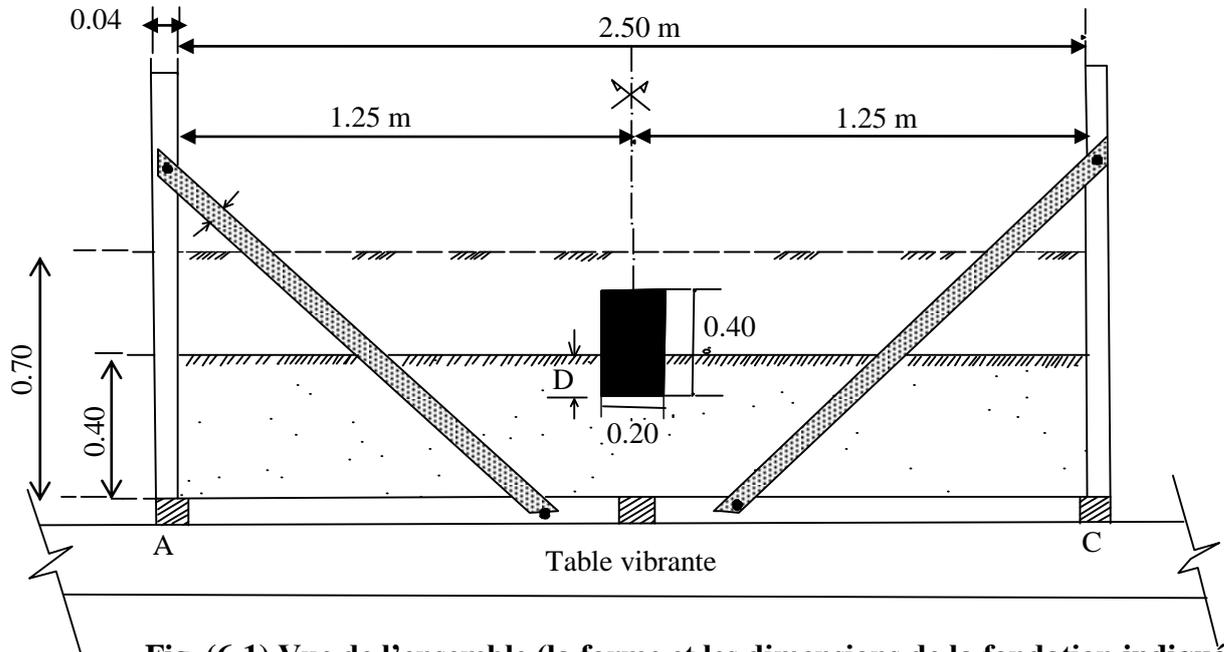
**Fig. (5.5) Histoires de contrainte verticale pour différents points situés à la limite Inférieure de la couche.**

#### 7.4. Calcul des modèles sol-fondation soumis à des vibrations horizontales (Table vibrante).

Dans ce chapitre, nous allons évoquer tout d'abord le dispositif expérimental et les deux catégories d'expériences (interaction sol-structure) effectuées sur les tables vibrantes. Ensuite, nous expliquerons les hypothèses de calcul pour ces deux catégories d'expériences et nous présenterons les résultats du calcul. Enfin, nous ferons quelques comparaisons entre les résultats obtenus par l'expérience et ceux obtenus par le calcul.

### 7.4.1 - Dispositif expérimental.

Le massif a une longueur de 2.50 m, une hauteur variable (0.40 à 0.70 m) selon l'essai. Il est latéralement limité par un cadre se composant de poutres en acier de section U (80 mm × 40 mm × 10 mm) fig. (6-1). Les poutres obliques (quatre au total, deux de chaque côté) ont été posées pour augmenter la rigidité du système.



**Fig. (6-1) Vue de l'ensemble (la forme et les dimensions de la fondation indiquées sur la figure ne sont pas représentatives pour toutes les expériences.**

Le cadre s'appuyant sur trois poutres transversales est fixé rigidement sur la table vibrante. Pour éviter des oscillations transversales indésirables des poutres verticales du cadre, quatre gros câbles précontraints relient assez rigidement ces poutres avec la table.

### 7.4.2 – Expériences

**Premier essai :** Le système (sol-fondation) est soumis à un seul cycle d'accélération horizontale. Pendant ce cycle, l'accélération croît ou décroît approximativement d'une façon linéaire. La figure (6.2) montre le montage utilisé pendant les essais. Les points indiqués sur le modèle sont les points pour lesquels on a relevé les mesures.

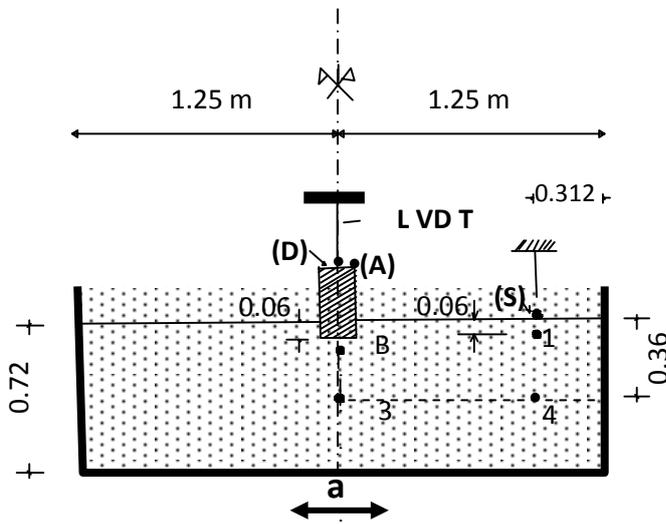
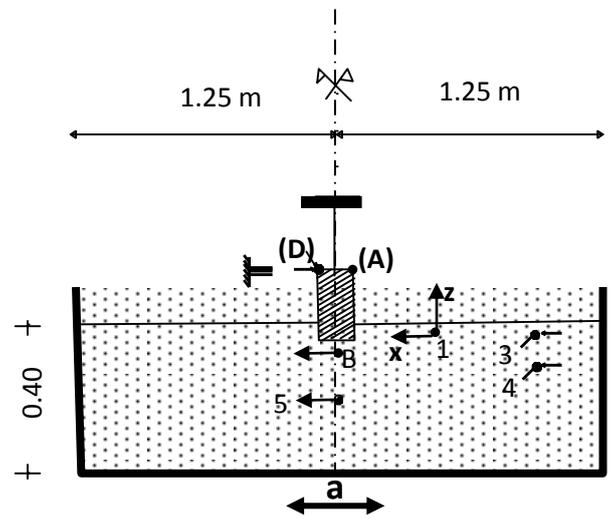


Fig. (6.2). Montage expérimental.

Fig. (6.3). Montage expérimental  
2<sup>ème</sup> catégorie d'expériences

**Deuxième essais :** Le massif est soumis à des excitations sinusoïdales horizontales à la fréquence de 6 Hz. Plusieurs essais à cette fréquence, avec des amplitudes d'accélération différentes, ont été effectués.

La durée de chaque sollicitation est de 15 à 17 secondes, ce qui correspond à 100 cycles d'excitation environ. Le montage utilisé est présenté sur la fig. (6.3).

### 7.4.3- Calcul

Dans une première partie, nous allons présenter un calcul des modes propres du modèle sol-fondation.

Dans une deuxième partie, nous présentons le calcul des première et deuxième catégories d'expériences.

#### 7.4.3.1 – Calcul des modes propres.

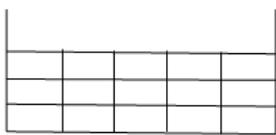
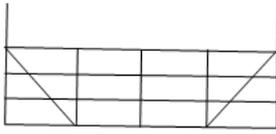
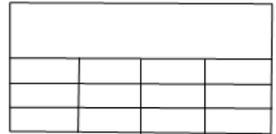
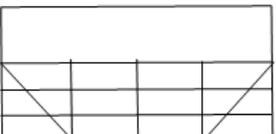
Le calcul des modes propres nous donne :

- ✓ La possibilité d'évaluer les fréquences propres et ainsi les modes propres du système.
- ✓ Les résultats de ce calcul permettent d'éviter une sollicitation ayant une fréquence proche de la fréquence propre du modèle (la résonance).
- ✓ Ils permettent de voir les zones les plus affectées dans le cas de la résonance.

Pour ce calcul :

- ✓ Nous avons utilisé un maillage simple avec une hauteur de 0.72 m pour le massif.
- ✓ Le module de chaque élément était défini en fonction de sa profondeur.
- ✓ La base du modèle était considérée comme rigide. Pour les poutres latérales ainsi que les poutres obliques et horizontales, nous avons utilisé des éléments poutres avec les propriétés des poutres réelles du modèle.
- ✓ Nous avons effectué quatre séries de calculs en changeant la rigidité du cadre du modèle tableau 23.
- ✓ Les calculs étaient faits en contraintes planes.

**Tableau 23 : Description des 4 modèles.**

Type de modèle	description	schéma
Modèle 1	modèle simple, sans poutres obliques	
Modèle 2	modèle avec les poutres obliques.	
Modèle 3	modèle avec une poutre horizontale reliant les poutres latérales en tête.	
Modèle 4	modèle avec les poutres obliques +poutre horizontale.	

#### 7.4.3.2. Présentation des résultats

Le tableau 24 donne les résultats de ces quatre séries de calculs (les fréquences des trois premières fréquences propres associées à chaque mode du modèle utilisé.

**Tableau 24 : Fréquence de chaque modèle pour trois modes.**

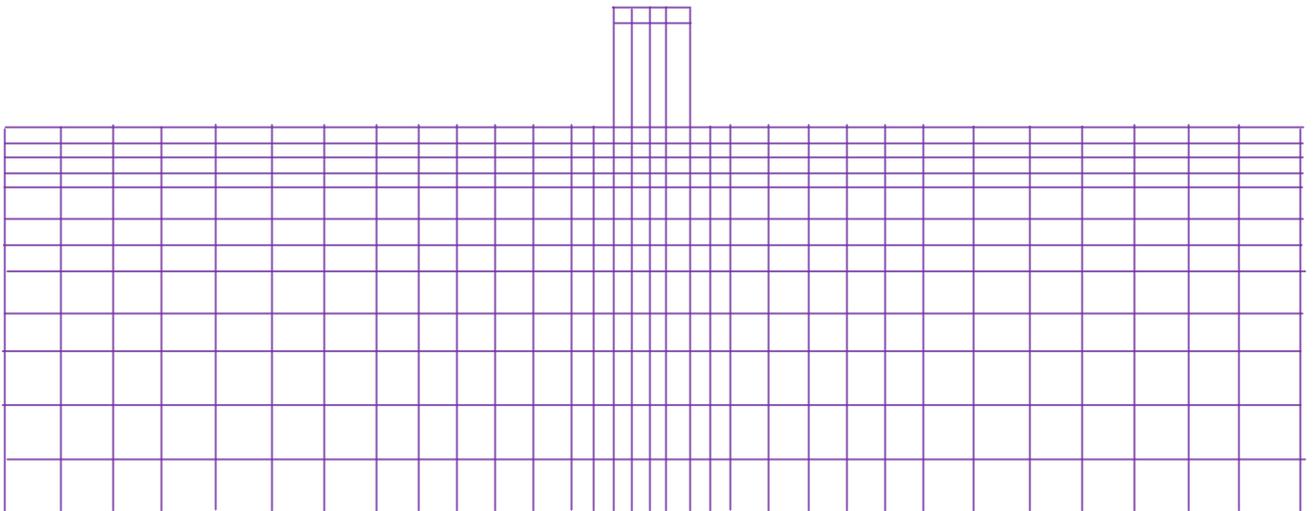
Type de modèle	Fréquence (Hz)		
	1er mode	2ème mode	3ème mode
Modèle 1	16.53	23.15	30.31
Modèle 2	24.7	41.85	47.66
Modèle 3	14.63	24.08	27.30
Modèle 4	24.7	31.13	40.06

Le tableau 23 montre qu'en ajoutant les poutres obliques, les valeurs des fréquences propres augmentent tandis que le fait d'ajouter la poutre horizontale diminue les valeurs des fréquences propres.

#### 7.4.4. Calcul de la première catégorie d'expériences

##### 7.4.4.1 - Le maillage

Le maillage utilisé est montré sur la fig. (6.4). Les dimensions du maillage sont les mêmes que les dimensions du modèle fig. (6.2). On a essayé de prendre des petites dimensions pour les éléments situés à la proximité de la fondation et également pour les éléments proches de la surface. Ces considérations sont justifiées par le mouvement d'ensemble matériaux d'assise - fondations observé pendant l'expérience. D'autre part on a pris en compte le critère :  $h \leq \frac{\lambda}{10}$  pour le choix des dimensions des éléments. Le maillage est constitué de 439 nœuds et de 392 éléments.



**Fig. (6.4) Maillage**

##### 7.4.4.2 - Conditions aux limites

Nous avons supposé que les poutres latérales sont rigides. Donc, les nœuds situés sur les limites latérales du maillage sont bloqués horizontalement ( $U_y = 0$ ). Les nœuds situés sur la base du maillage sont bloqués horizontalement et verticalement ( $U_y = U_z = 0$ ).

#### 7.4.4.3 - Propriétés des matériaux

Le calcul a été fait en élasticité linéaire non homogène. Donc, il fallait définir le module d'Young et le coefficient de Poisson pour chaque élément. Le module E était défini pour chaque élément en fonction de la pression latérale ( $\gamma_3$ ) exercée initialement sur cet élément. Pour définir ainsi les modules, nous avons eu recours à la formule de Jambu (51) utilisée dans la loi hyperbolique de Duncan :  $E_0 = K. P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^n$

Les coefficients de la loi hyperbolique pour le matériau d'assise sont donnés par le tableau 25 :

**Tableau25 : coefficients de la loi hyperbolique.**

K	n	v	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
1000	0.65	0.25	2250

La densité et le coefficient de Poisson pour tous les éléments ont la même valeur:

Les modules deviennent plus forts avec la profondeur et les éléments situés sous la fondation ont des modules plus forts que les autres.

Les propriétés mécaniques utilisées dans le calcul pour les éléments de la fondation sont données par le tableau 26 :

**Tableau26 : propriétés mécaniques de la fondation**

E (Pascals)	v	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
$2 \times 10^{11}$	0.25	6654.

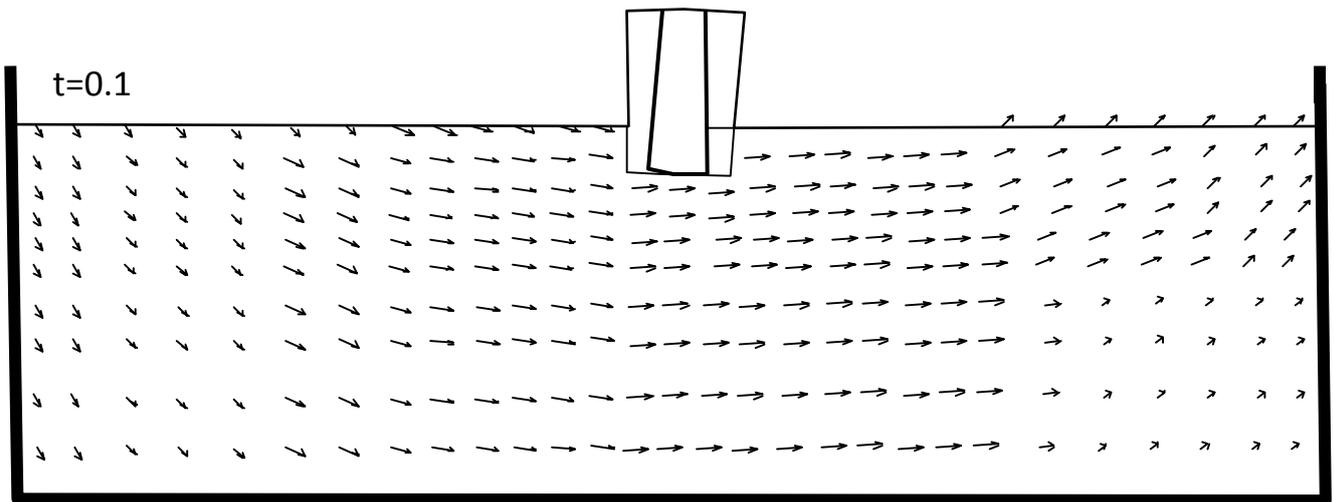
#### 7.4.4.4 - Sollicitation sismique et pas de temps.

Nous avons pris un accélérogramme linéaire dont la sollicitation sismique appliquée au modèle varie de 0 à 1.6 m/s<sup>2</sup> avec  $t \in [0; 0.3s]$ . Cette prise en compte partielle de la sollicitation sismique est due à l'importance du temps de calcul nécessaire pour faire un calcul complet.

Nous avons fait le calcul avec  $DT = 0.001$  secondes. Ce choix du pas de temps remplit la condition  $DT \leq \frac{h}{c}$ .

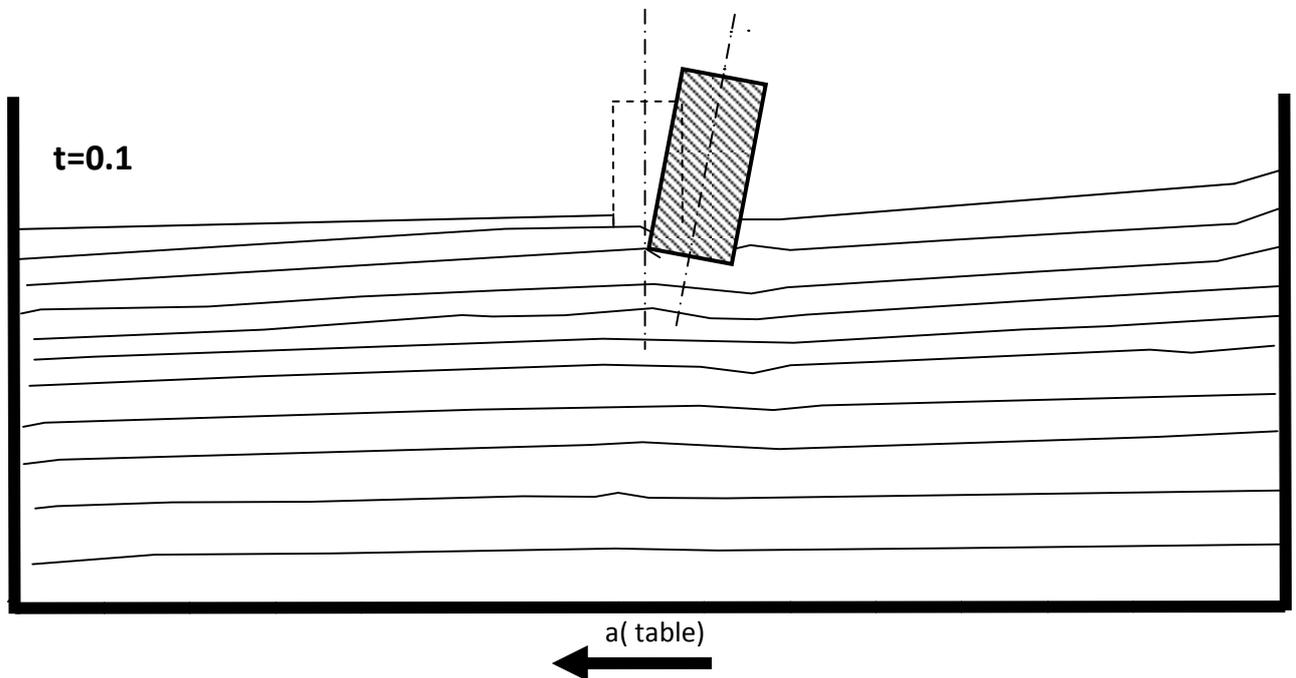
#### 7.4.4.5 Résultats – Discussion.

La figure (6.5) montre le champ des déplacements pour l'ensemble sol-fondation pour  $t = 0.1$  seconde. La figure (6.6) était faite à partir de la figure (6.5). Ces deux figures retracent bien le mouvement du massif, qui rappelle plus ou moins celui d'un liquide.



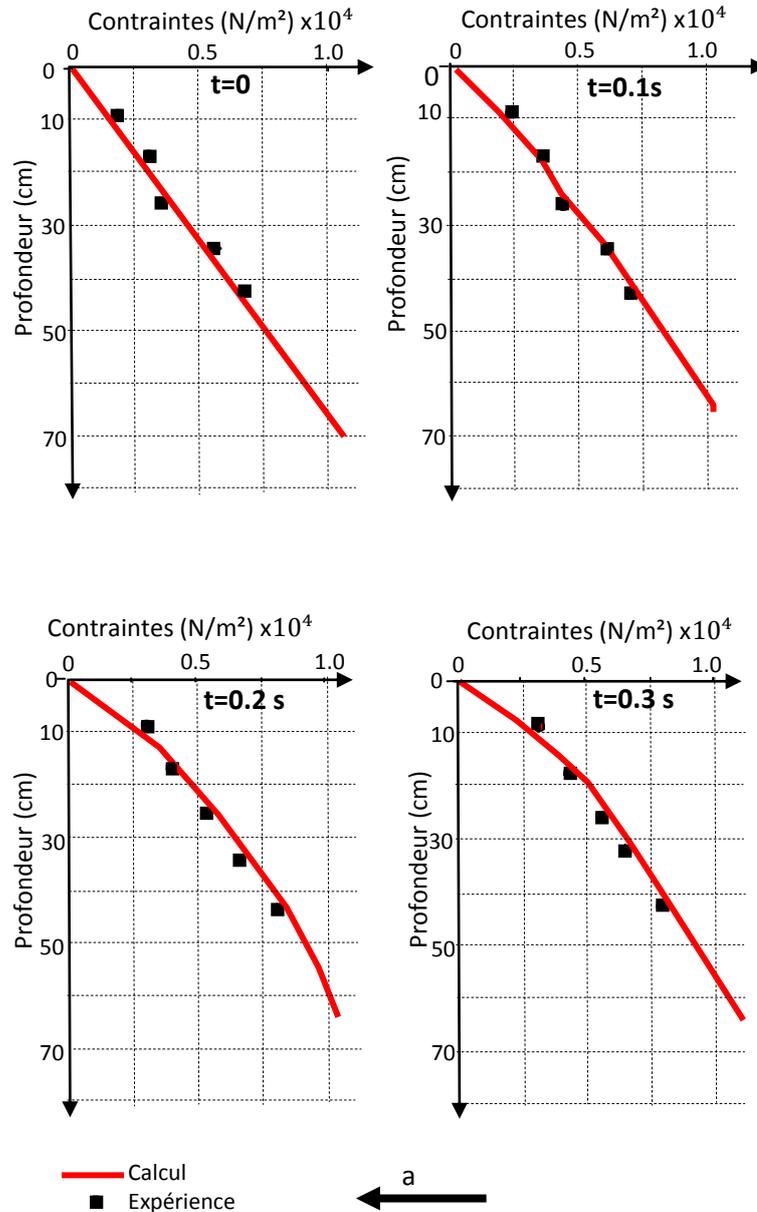
**Fig. (6.5) Champs des déplacements pour  $t=0.1s$**

Expérimentalement, lorsque les déplacements sont très faibles, on ne peut pas les observer. Ce n'est qu'à partir des grandes accélérations imposées (c'est à dire des grandes déformations imposées dans le massif), qu'un certain mouvement commence à apparaître dans le massif.



**Fig. (6.6)-Champs des déplacements pour  $t=0.1$  seconde.**

La figure (6.7) présente une comparaison entre la variation de la distribution des pressions dynamiques exercées sur l'écran, en fonction du temps, obtenue par le calcul et la courbe analogue issue de l'expérience. Il y a une assez bonne concordance entre les deux résultats.



**Fig. (6.7) –Variation de la distribution des pressions dynamiques (totales) exercées sur l'écran, en fonction du temps.**

#### 7.4.5- Calcul de la deuxième catégorie d'expériences

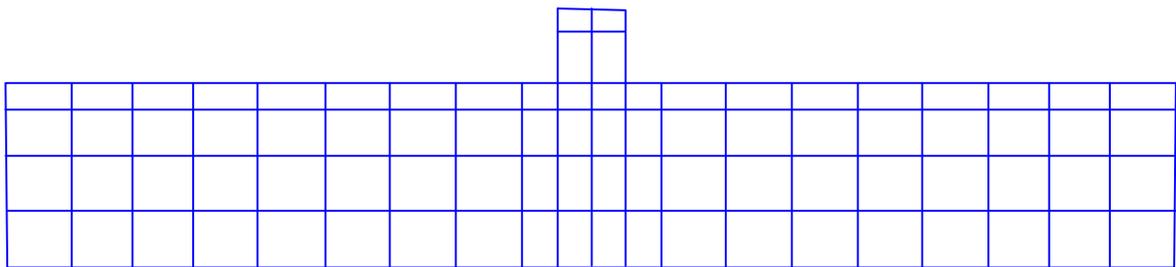
##### 7.4.5.1 - Le maillage utilisé - Conditions aux limites

Les dimensions de ce maillage sont les mêmes que le modèle utilisé dans la deuxième catégorie d'expériences figure (6.3). Comme dans le cas précédent, le maillage est plus fin dans la région autour de la fondation et aussi près de la surface. Nous avons utilisé les éléments à huit nœuds et à 3 points d'intégration. Ce genre d'éléments permet d'utiliser un maillage qui contient moins d'éléments qu'un maillage classique. Etant donné que la place nécessaire dans la mémoire de la machine pour un calcul d'éléments finis dépend du nombre d'éléments du maillage utilisé, cette mesure facilite beaucoup le calcul. D'autre part, en se

référant au critère  $DT \leq \frac{h}{c}$  pour le choix du pas de temps, on peut dire que l'utilisation des éléments à 8 nœuds permet de choisir un pas de temps grand, ce qui diminue le temps de calcul.

Le maillage est constitué de 305 nœuds et de 84 éléments. Les éléments forment cinq groupes dont trois représentent le massif et deux la fondation (6.8).

Les conditions aux limites sont les mêmes que celles du cas précédent. Les nœuds situés aux limites latérales du modèle sont bloqués horizontalement  $U_y=0$ . Les nœuds situés à la base du maillage sont bloqués horizontalement et verticalement ( $U_y = U_z = 0$ ).



**Fig. (6.8) maillage.**

#### **7.4.5.2 - Propriétés des matériaux.**

Le choix de  $E$  et  $\nu$  pour chaque élément était fait de la même façon que dans le calcul de la première catégorie d'expériences.

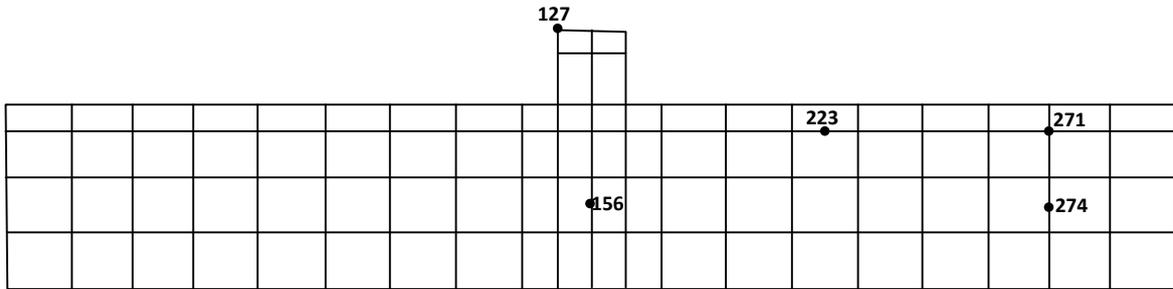
#### **7.4.5.3 - Sollicitation sismique - Pas de temps**

Nous avons utilisé pour le calcul trois accélérogrammes sinusoïdaux avec une fréquence de 6 Hz. Les amplitudes d'accélération de ces accélérogramme sont respectivement 0.1 g, 0.4g et 0.8 g. La durée de chaque sollicitation est 0.333 secondes, ce qui correspond à deux cycles d'excitation.

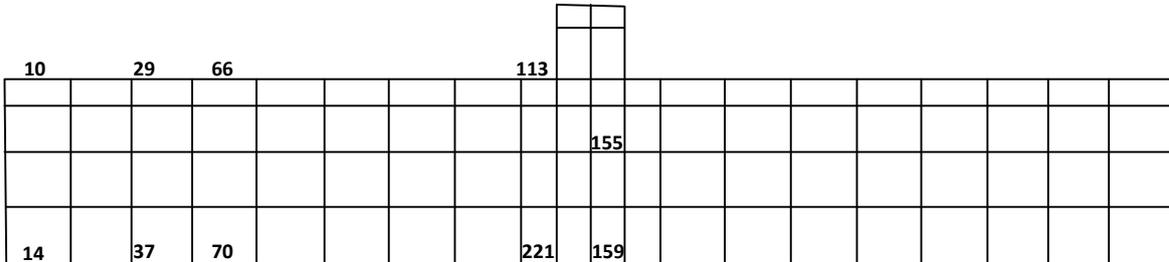
Le pas de temps choisi pour le calcul est  $DT = 0.00166$  sec, ce qui satisfait au critère  $DT \leq \frac{h}{c}$ . Donc 100 pas représentent un cycle excitation.

#### **7.4.5.4 - Résultats - Discussion sur les résultats**

Sur la fig. (6.9) sont indiqués les nœuds pour lesquels on a sorti les histoires d'accélération ou les histoires de déplacement. Sur la figure (6.10), on a visualisé les lignes verticales le long desquelles on a déterminé les variations de déplacement ou d'accélération. Les résultats sont divisés en trois groupes suivant l'amplitude d'accélération appliquée au modèle:



**Fig. (6.9)- Visualisation des nœuds pour lesquels les variations de l'accélération et du déplacement horizontaux sont définies.**



**Fig. (6.10)- Visualisation des lignes verticales le long desquelles on a déterminé les variations de déplacement ou d'accélération (chaque ligne est déterminée par les nœuds qui sont situés à des extrémités).**

#### 7.4.5.5. Résultats pour différentes valeurs de l'accélération ( $A_{max} = 0.1 \text{ g}, 0.4\text{g}, 0.8\text{g}$ ).

La figure (7.1) montre le champ des déplacements pour  $t = 25 \text{ DT}$ .

La figure (7.2) représente la variation de déplacement avec le temps pour le nœud 127 (situé sur la fondation).

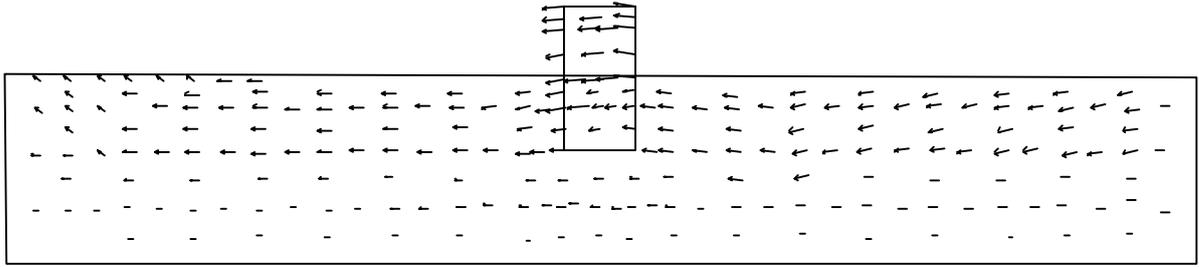
Les figures (7.3) à (7.5) montrent les variations d'accélération horizontale avec le temps pour différents points du maillage.

La figure (7.6) représente les variations de contrainte horizontale le long de la paroi droite pour  $t = 25 \text{ DT}$ .

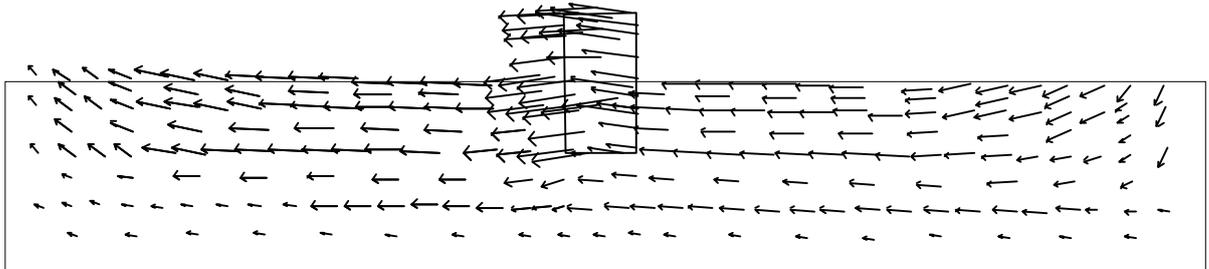
Les figures (7.7) à (7.12) montrent les variations d'accélération et de déplacement horizontal le long des différentes lignes verticales.

Figures (7.13): variations de l'accélération horizontale à la surface du massif pour  $t = 25, 75, 125$  et  $175 \text{ DT}$ .

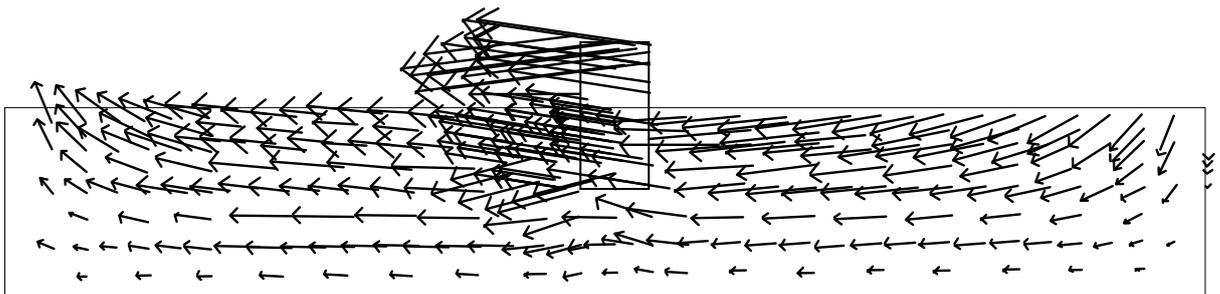
La figure (7.14) représente les iso-accélération pour  $t = 25, 75, 125$  et  $175 \text{ DT}$ .



Champs des déplacements pour  $A_{max} = 0.1g$  (25DT)

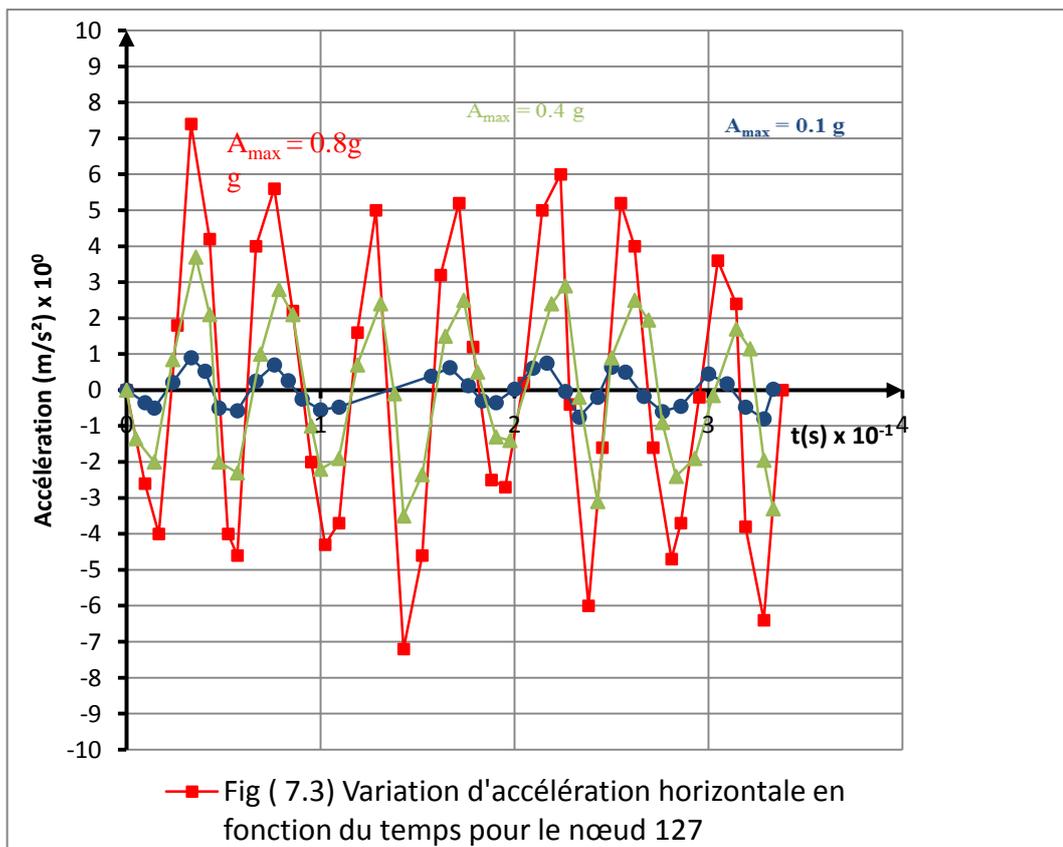
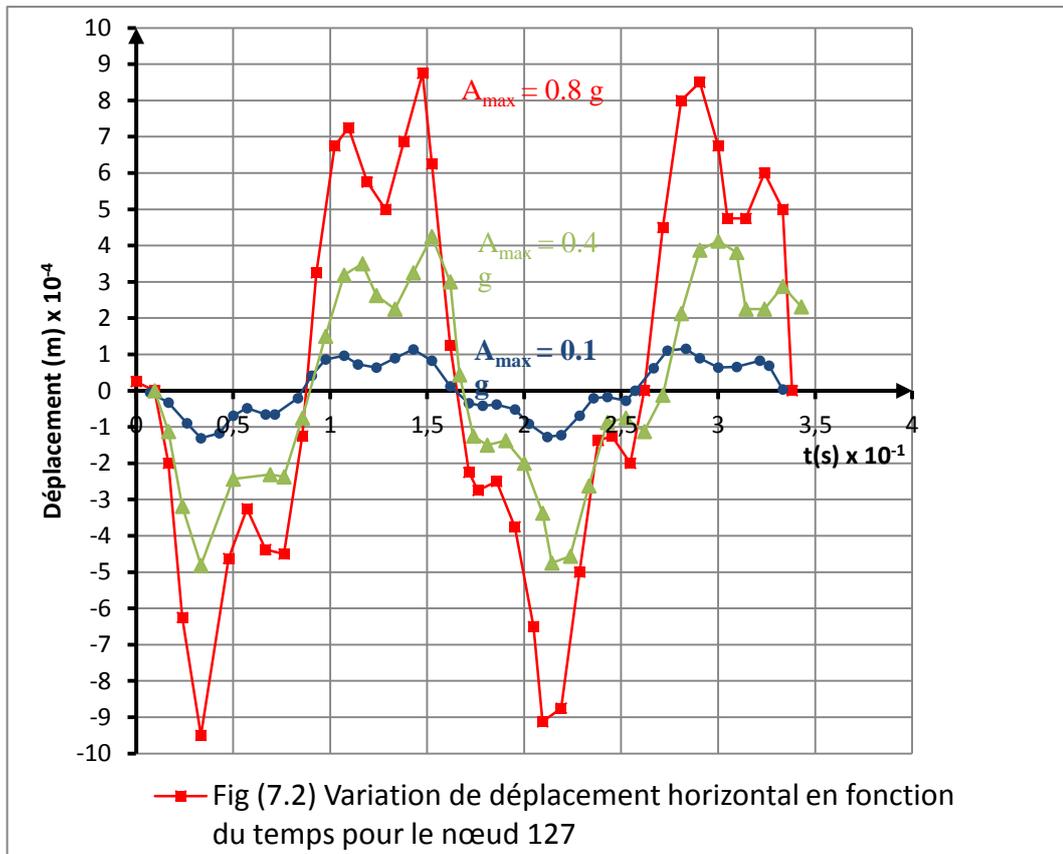


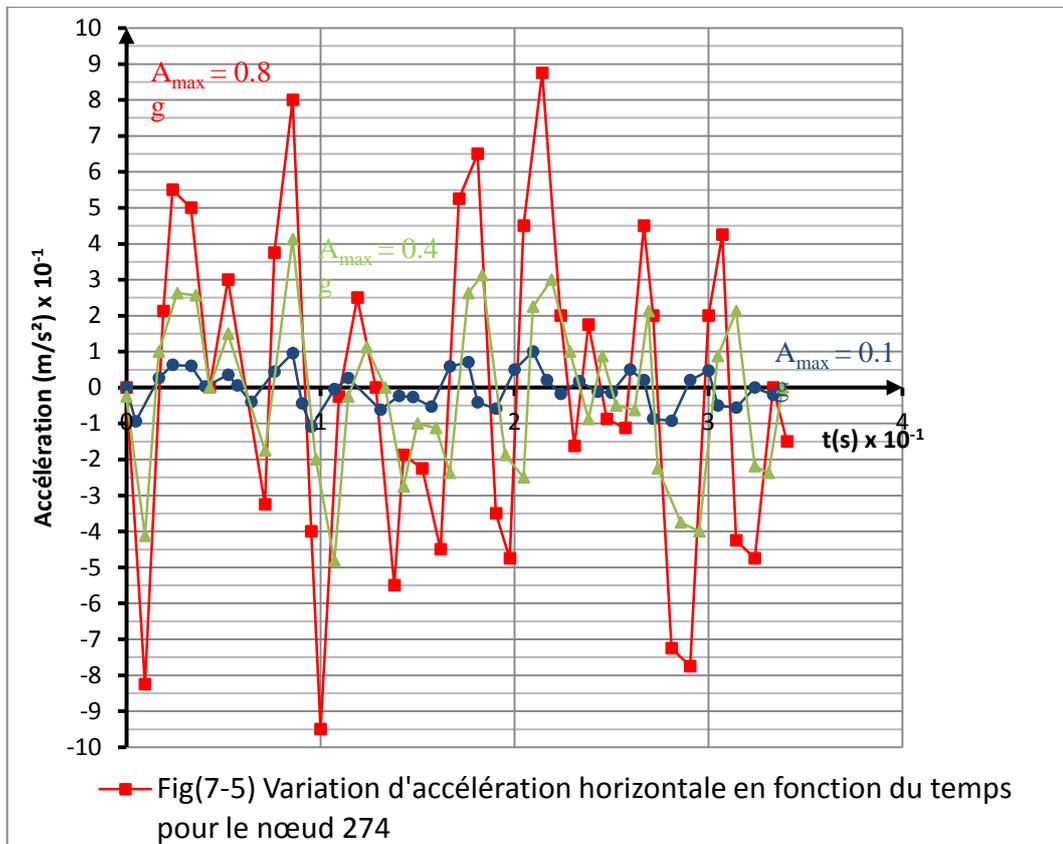
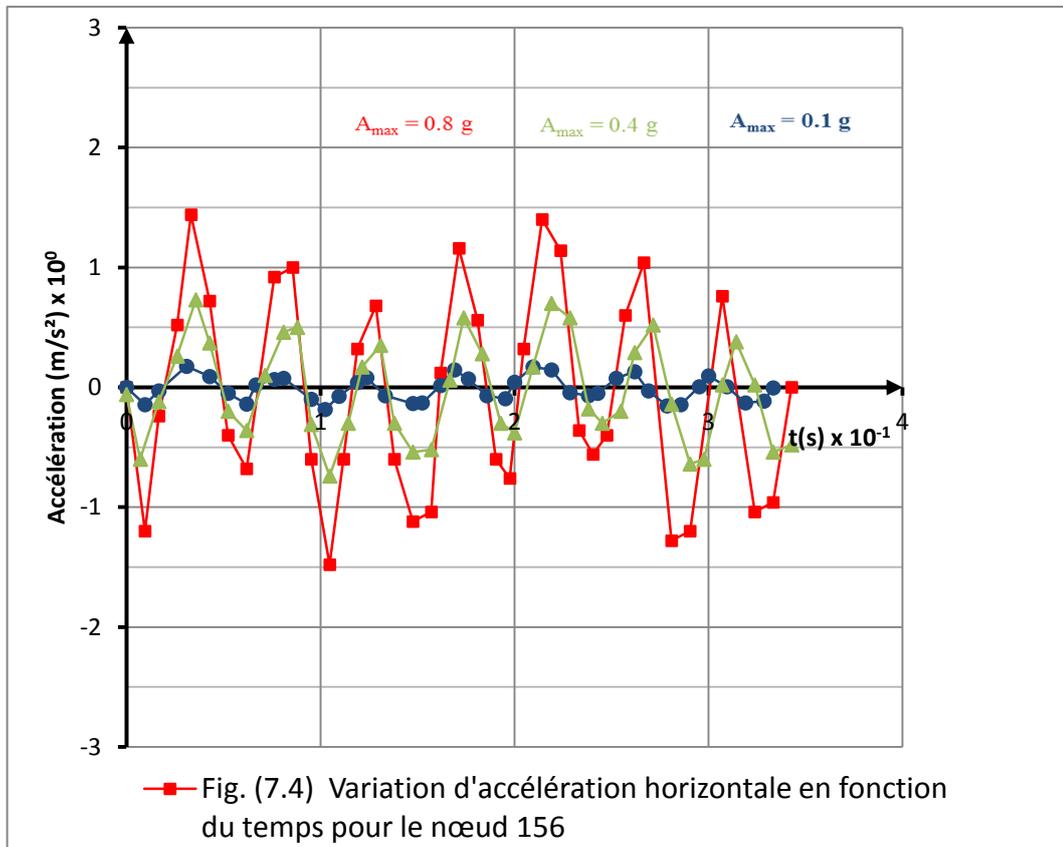
Champs des déplacements pour  $A_{max} = 0.4g$  (25DT)

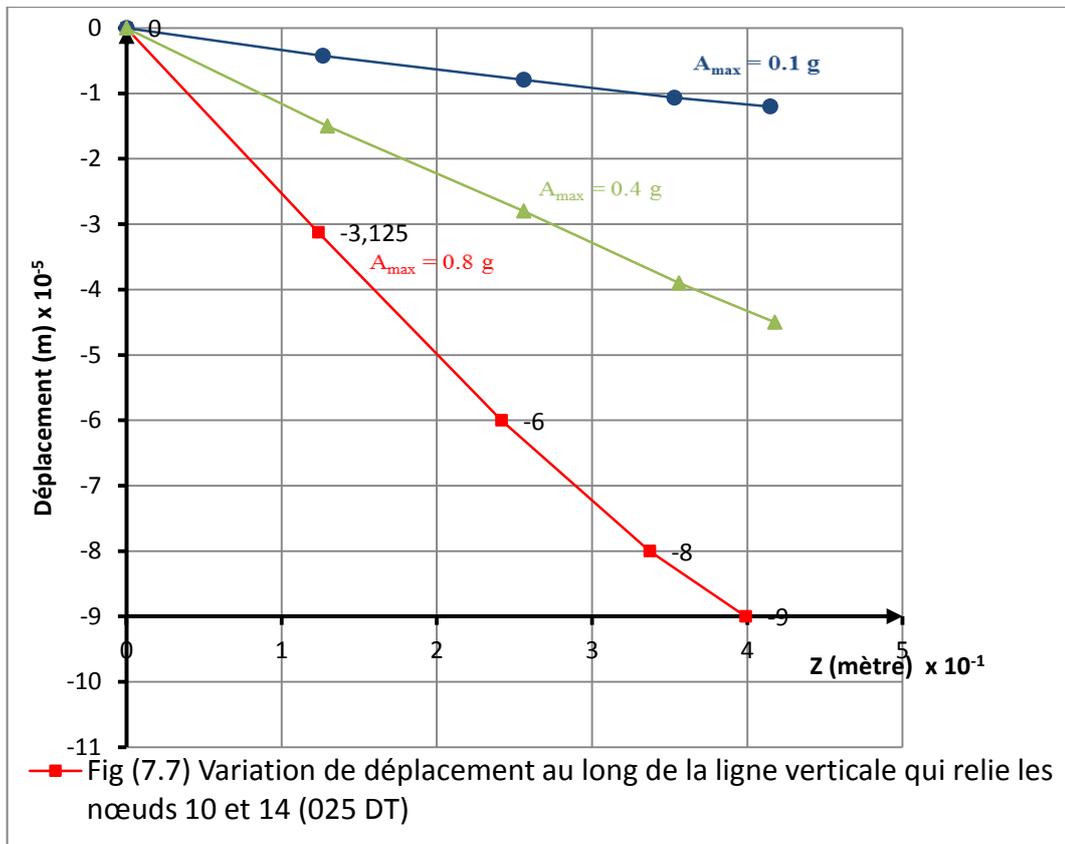
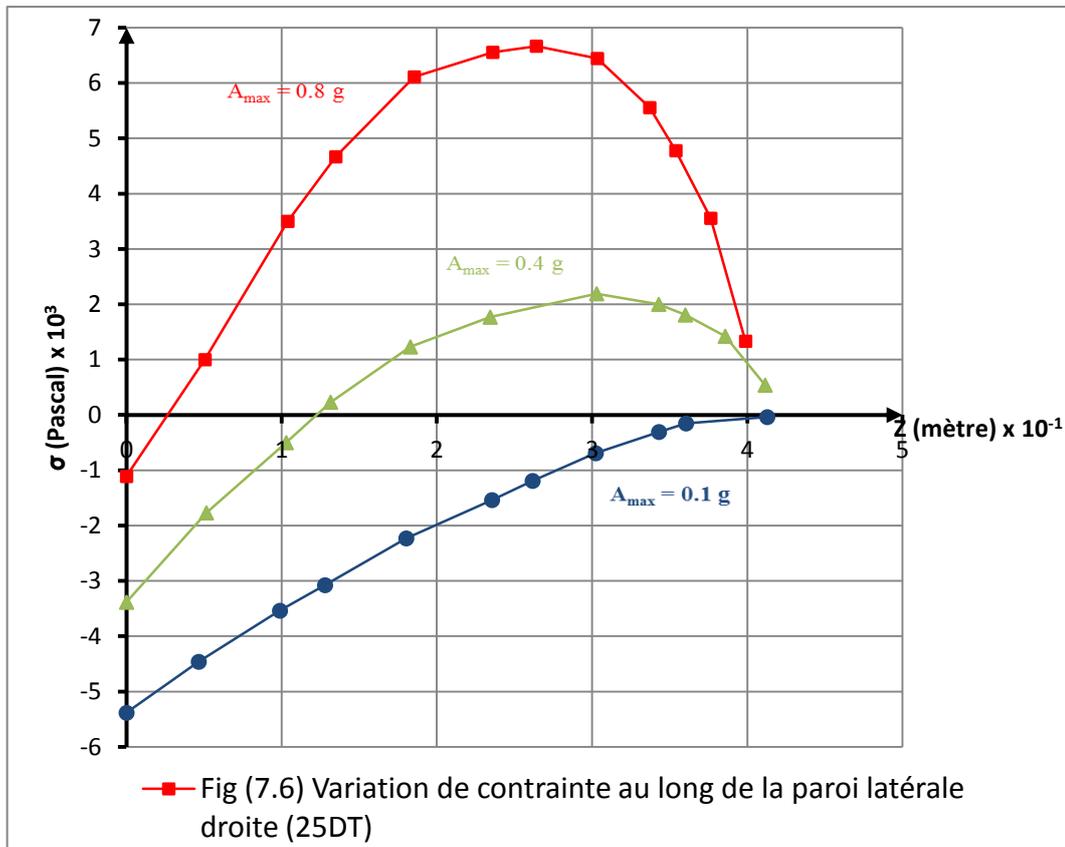


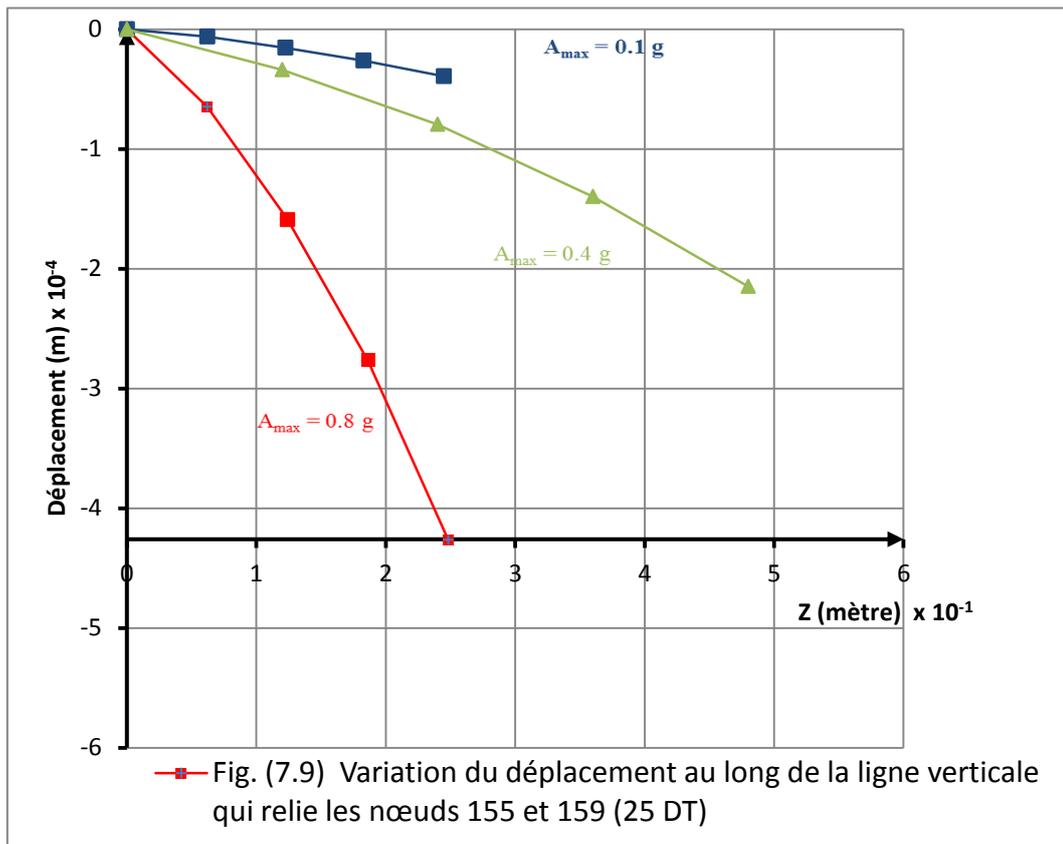
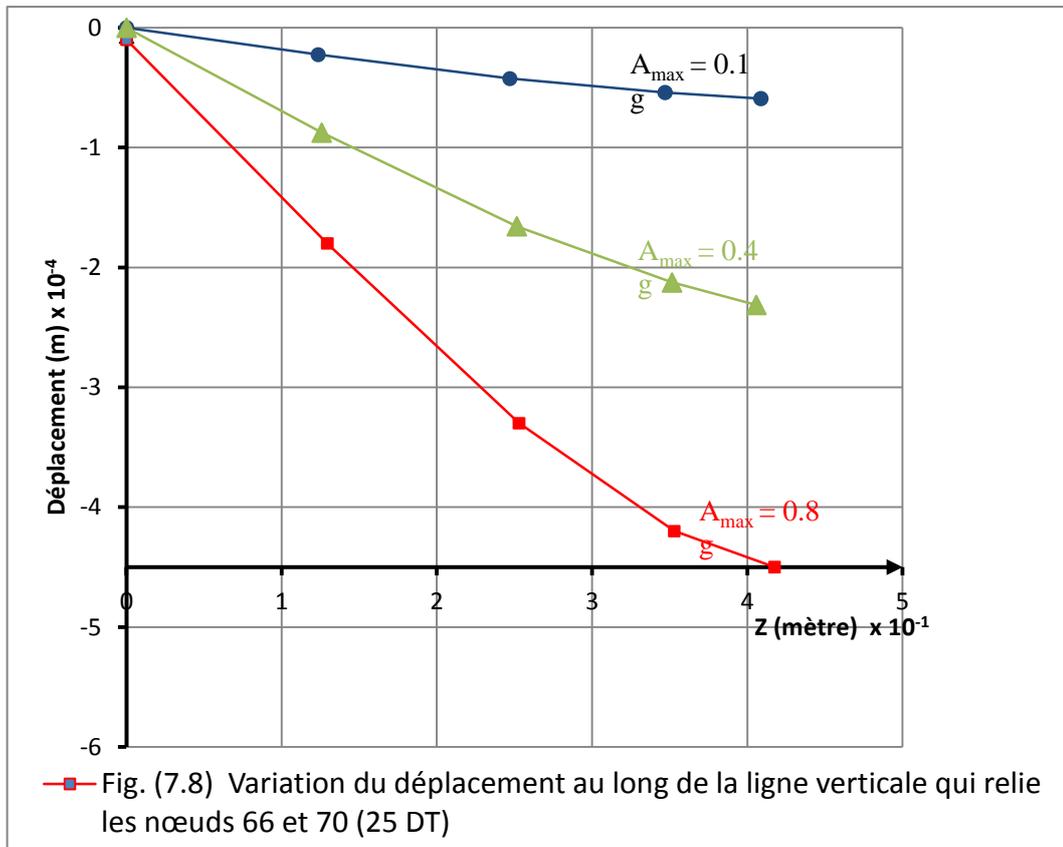
Champs des déplacements pour  $A_{max} = 0.8g$  (25DT)

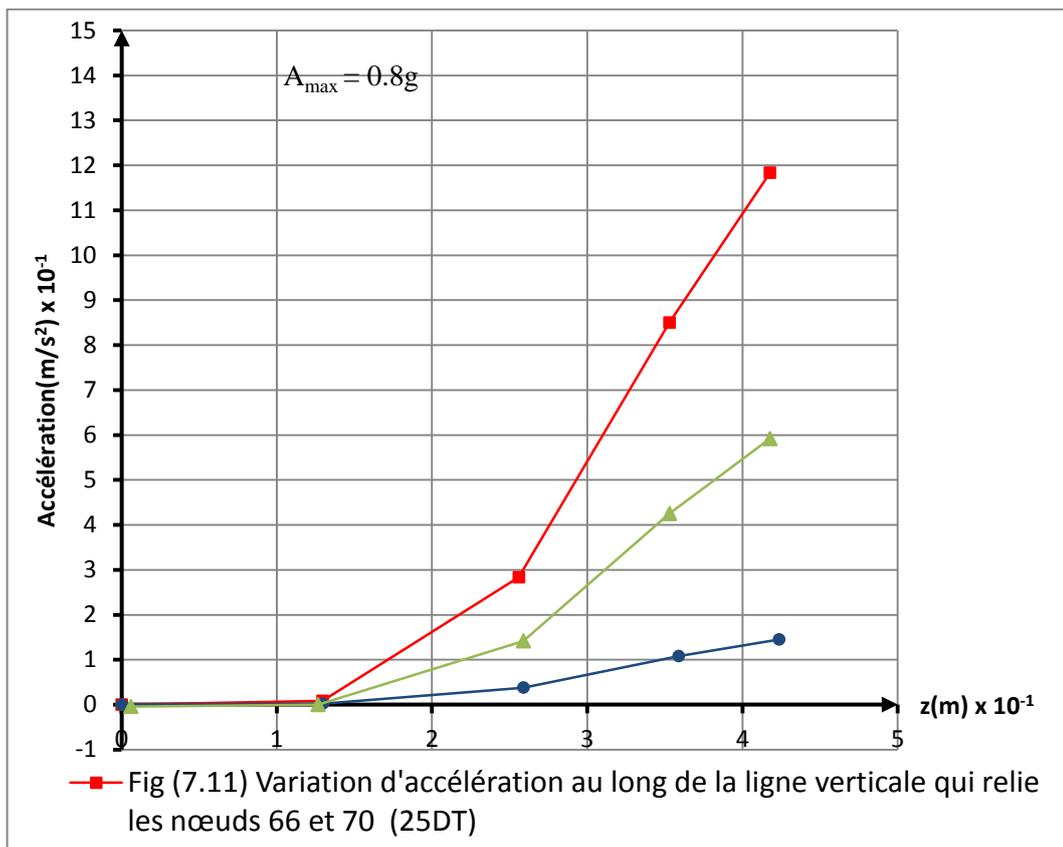
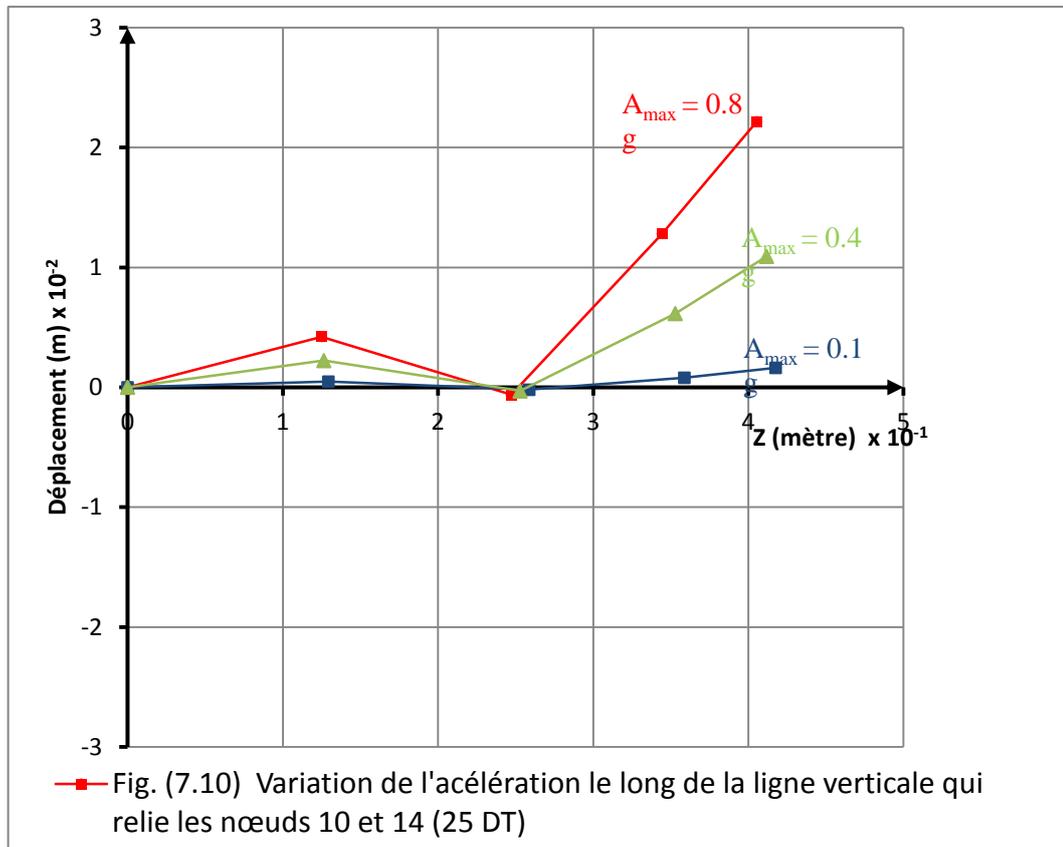
**Fig. (7.1) Champs des déplacements pour différentes accélérations (25DT)**

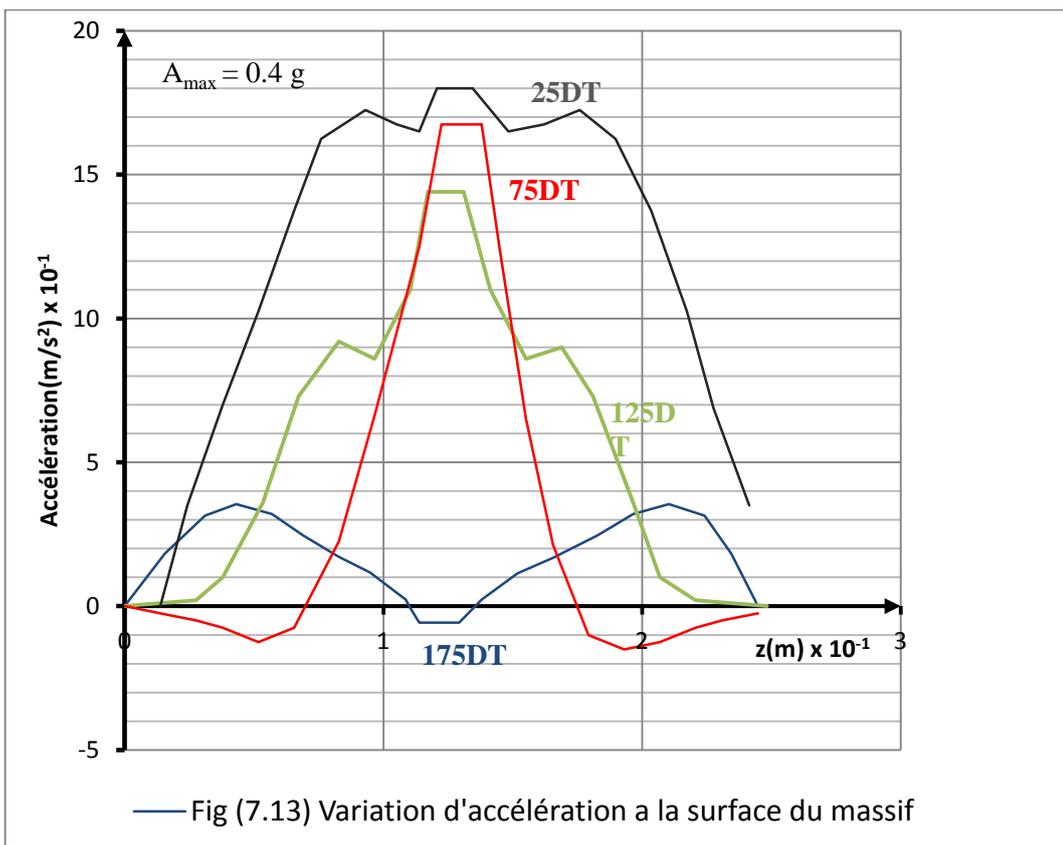
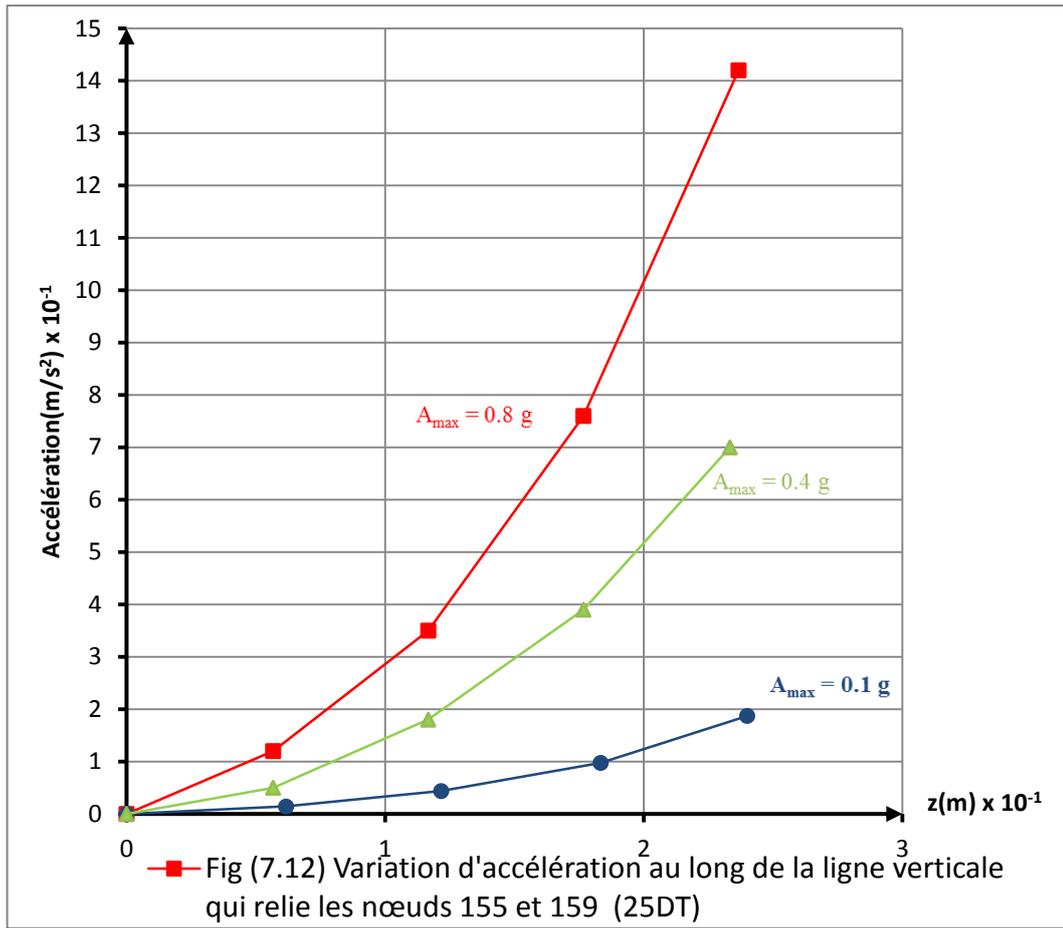












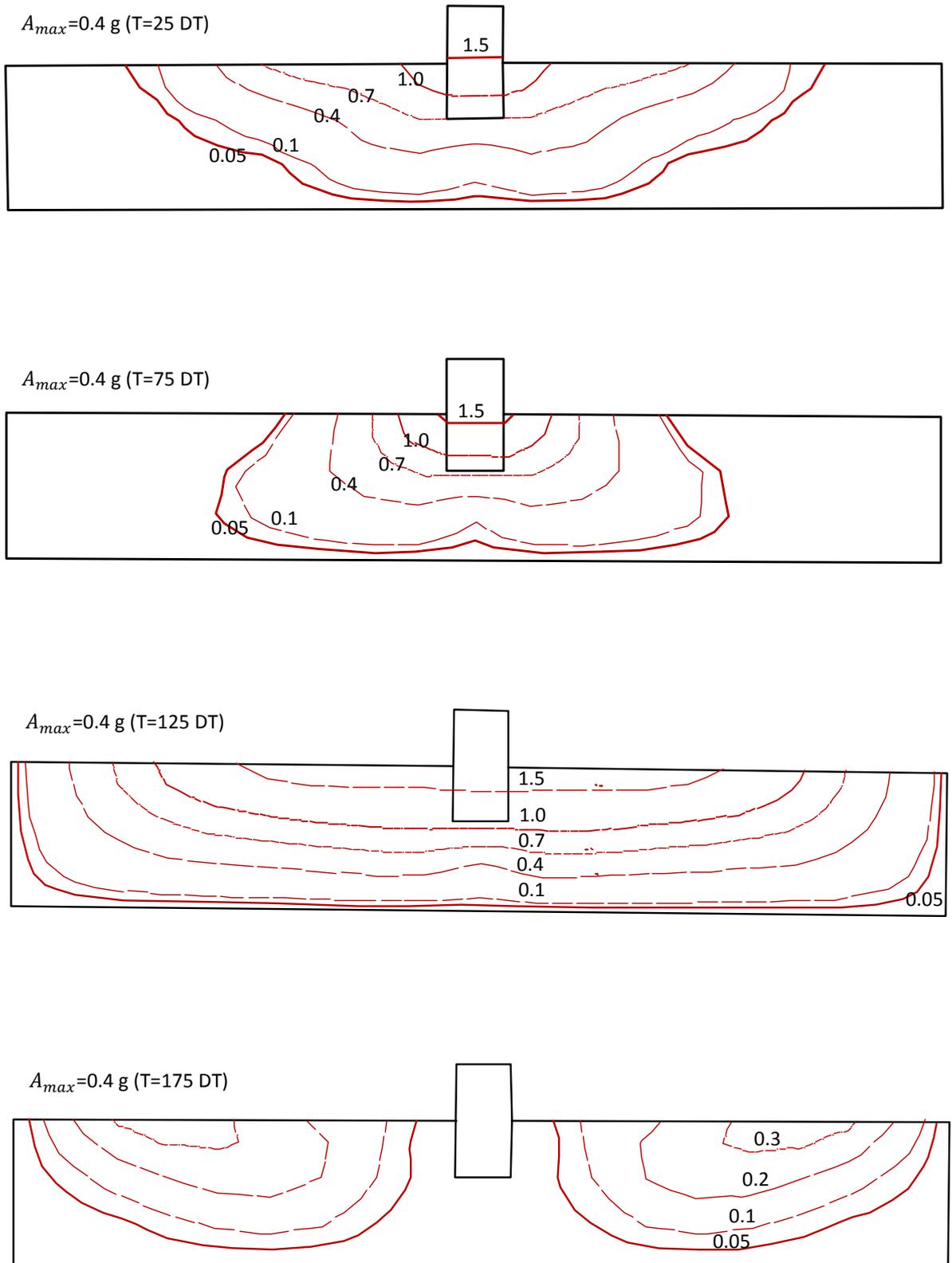


Fig. (7.14) Iso-accelération horizontale.

#### **7.4.6. -Discussion**

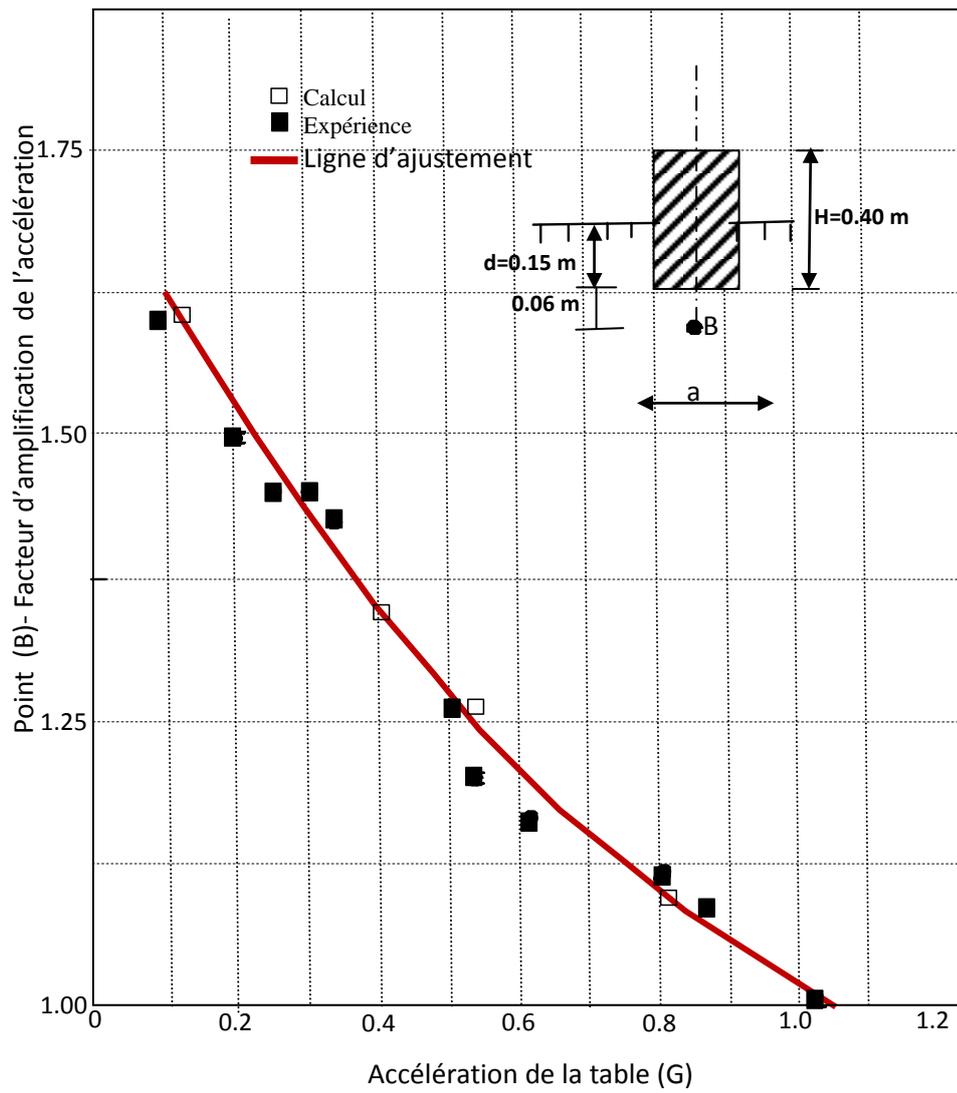
- ✓ Les champs des déplacements et les maillages déformés retracent bien le mouvement du massif observé pendant l'expérience.
- ✓ Ils mettent en évidence l'importance de l'amplitude d'accélération de la base, de l'inertie de la fondation et des effets de bord dans un problème d'interaction sol structure.
- ✓ Les effets de bord deviennent de plus en plus importants quand l'amplitude d'accélération de la base augmente.
- ✓ Dans le cas  $A_{max} = 0.1g$  ; la région centrale du modèle n'est pratiquement pas perturbée par les effets de bord, tandis que dans le cas  $A_{max} = 0.8g$ , elle est fortement perturbée.
- ✓ Les courbes de distribution des contraintes horizontales le long de la paroi latérale (rigide) illustrent bien le changement de la pression latérale dans le cas d'un séisme.
- ✓ Les courbes de variation du déplacement horizontal et de l'accélération horizontale le long des différentes lignes verticales mettent en évidence les effets de bord sur la réponse sismique.
- ✓ Les courbes de distribution de contrainte verticale sous la fondation correspondent bien au mouvement de la fondation.
- ✓ Les iso-accélérations horizontales montrent que l'amplification est très importante autour de la fondation.

#### **7.4.7 Comparaisons avec l'expérience**

La figure (7.15) montre la variation du facteur d'amplification de l'accélération obtenue par l'expérience et par le calcul pour un point situé sous la fondation. La figure (7.16) montre le même phénomène pour un point situé sur la fondation.

D'après les courbes expérimentales et les calculs :

Le facteur d'amplification de l'accélération diminue quand l'amplitude d'accélération de la table augmente



**Fig. (7.15) Variation du facteur d'amplification de l'accélération en fonction de l'accélération de la table pour le point B.**

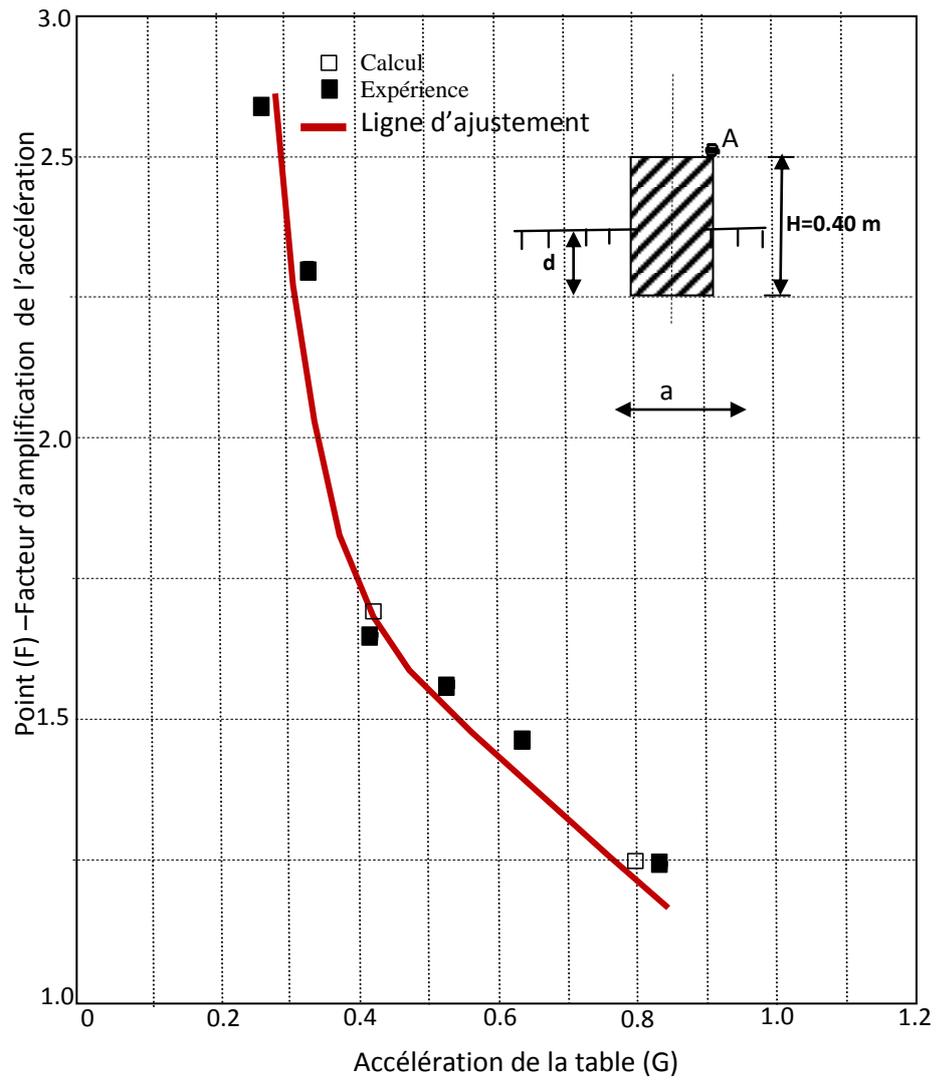


Fig. (7.16) Variation du facteur de l'accélération en fonction de l'accélération de la table pour le point A.

## **Conclusions.**

En raison du manque d'accélérogrammes réels et aussi la nécessité d'une conception dynamique détaillée et précise des structures, des accélérogrammes artificiels sont générés. Cette thèse met l'accent sur l'une des méthodes stochastiques pour générer des accélérogrammes artificiels nommés ARMA modélisation (Auto régressif moyenne mobile).

Les travaux de recherche réalisés comportent deux aspects principaux.

Le premier aspect est la simulation des séismes de Chlef et Boumerdes par le modèle ARMA. De nombreux enregistrements sismiques sont des variables autorégressives et mobiles dans le temps pour leurs séries variant dans le temps, de bruit blanc et d'écart-type. Les séries de temps variables dans le temps sont analysées par simulation.

La méthodologie décrite dans cette étude comporte 3 étapes :

Premièrement, établir le modèle de la série variable dans le temps par l'analyse ;

Deuxièmement, calculer les paramètres du modèle en se basant sur la méthode des moindres carrés ;

Troisièmement, simuler les ondes sismiques par la formule de récurrence présentée.

La simulation des séismes de Chlef et Boumerdes par le modèle ARMA a montré que :

Le modèle ARMA ne peut être utilisé que sur des données stationnaires, les accélérogrammes utilisés doivent être stationnaire. Pour cette raison, une enveloppe de l'écart type est utilisée pour rendre les accélérogrammes dans un état stationnaire.

Pour l'évaluation des paramètres du modèle certaines relations régressives utilisent comme durée totale d'un accélérogramme, la durée significative (durée entre 5 à 95% de l'intensité des airs) pour les fortes secousses, cette durée dépend de la PGA.

L'analyse régressive montre que le paramètre de la durée significative augmente avec la distance de l'épicentre.

Pour la sélection de l'ordre d'un modèle le critère AIC outre sa qualité de convergence forte, nous montrons son efficacité sur deux types de modélisation classiques, ainsi qu'un ajustement possible à la complexité (nombre de paramètres) de ces modèles.

La modélisation des séismes dans le domaine temporel en utilisant le model ARMA (2,1) constitue une approche simple de modélisation des séismes avec un nombre limité de paramètres ;

Les spectres de réponse des séismes artificiels sont très proches de ceux des séismes réels sauf dans le cas des séismes de grandes périodes, cela s'explique par l'existence de basses fréquences résiduelles après filtrage ;

Les séismes artificiels de Chlef et Boumerdes décrits par des modèles ARMA (2,1) procurent une estimation de contrôle raisonnable pour le contenu fréquentiel ; l'amplitude et la durée sont contrôlées par la fonction enveloppe ;

Des irrégularités dans l'indice des spectres de dommages pour différentes accélérations enregistrées peuvent être considérées comme des variables aléatoires, qui ne représentent pas une propriété fiable du processus sismique ;

Les logarithmes des ordonnées moyennes d'indices des spectres de dommages sont liés linéairement aux logarithmes de la période initiale. Si la conclusion de linéarité est confirmée, une amélioration significative de la cartographie structurale de risque sera possible ; la moyenne de l'indice de dommages diminue quand la période initiale augmente.

Le second aspect est l'analyse de l'effet de la non linéarité du sol sur l'interaction dynamique sol-structure. La comparaison entre le calcul linéaire et le calcul non-linéaire (avec loi hyperbolique) d'un modèle sol-fondation soumis à des vibrations verticales confirme que, dans un problème d'interaction dynamique sol-structure, le sol a un comportement fortement non-linéaire dans la zone située à proximité de la structure. Ce comportement non-linéaire du sol provoque l'enfoncement de la fondation dans le sol qui ne peut être calculé qu'à partir d'une loi non-linéaire. Un calcul linéaire du modèle sol-fondation soumis à des vibrations horizontales peut fournir des résultats intéressants. Néanmoins, certains phénomènes provenant du comportement non-linéaire des sols ne peuvent pas être interprétés par un calcul linéaire. Un calcul non-linéaire donne des résultats plus satisfaisants.

**Références bibliographique.**

- [1] Mahin, S.A., and Bertero, V.V., (1981), "An evaluation of inelastic seismic design spectra," *J.St.Div.*, 107, ST9.
- [2] Clough, R.W., Johnston, S.B., (1966), "Effect of stiffness degrading on earthquake ductility requirement," in *Proceedings, Japanese Earthquake Symposium*.
- [3] Newmark, N.M., Hall, W.J., (1969), "Seismic design criteria for nuclear reactor facilities," *Proceedings, 4th World Conference on Earthquake Engineering, Santiago Chile, (1969)*, Vol. II, pp. B5-1 to B5-12.
- [4] Newmark, N.M., Blume, J.A., Kapur, K.K., (1974), "Seismic Design Spectra for Nuclear Power Plants," *J. Power.*, V99, 2.
- [5] Chang, M. K., Kwiatkowski, J. W., Nau, R. F., Oliver, R. M. & Pister, K. K. (1982). ARMA model for earthquake ground motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 651-662.
- [6] Lam, N., Wilson, J. & Hutchison, G. (2000). Generation of synthetic earthquake accelerograms using seismological modelling: A Review. *Journal of earthquake engineering*, 4(3), 321-354.
- [7] Jurkevics, A. & Ulrych, T. J. (1979). Auto regressive parameters for a suite of strong motion accelerograms. *BSSA*, 69(6).
- [8] Proakis, J. & Manolakis, D. G. (1989). Introduction to digital signal processing. *Maxwell & Macmillan*, 944.
- [9] Suzuki, S. Hada, K. & Asano, K. (1998). Simulation of strong ground motion based on recorded accelerograms and the stochastic method. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 17, 551-556.
- [10] Findell, K. L., Koyluglu, H. U. & Cakamak, A. S. (1993). Modelling and simulating earthquake accelerograms using strong motion data from the Istanbul, Turkey region. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 12, 51-59.
- [11] Shinozuka, M., and Deodatis, G. (1991). "Simulation of stochastic processes by spectral representation." *Appl. Mech. Rev.*, 44, 191-203.
- [12] Housner G. W. and Jennings P. C. (1982). *Earthquake Design Criteria*. EERI Monograph Series, Earthquake Engineering Research Institute, Oakland, C.A.
- [13] Tajimi, H. (1960). A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake. 2nd WCEE, Tokyo 2, 781-798.
- [14] Reinsel, G. C. (1997) *Elements of multivariate time series Analysis*. Second edition. Springer Verlag, New York.
- [15] Lütkepohl, H. (2005) *New introduction to multiple time series analysis*. Springer Verlag, Berlin.
- [16] Lütkepohl, H. (1993) *Introduction to multiple time series analysis*. Springer Verlag, Berlin.
- [17] Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991) *Time series : theory and methods*. Springer Verlag, New York.
- [18] Wold, H. (1938) *A study in the analysis of stationary time series*, Uppsala, Almqvist and Wiksell.
- [19] Francq, C., Roy, R. et Zakoïan, J-M. (2005) Diagnostic checking in ARMA Models with Uncorrelated Errors, *Journal of the American Statistical Association* 100, 532-544.
- [20] Francq, C. et Zakoïan, J-M. (1998) Estimating linear representations of nonlinear processes, *Journal of Statistical Planning and Inference* 68, 145-165.
- [21] Engle, R. F. (1982) Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation. *Econometrica* 50, 987-1007.
- [22] Bollerslev, T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307-327.

- [23] Bauwens, L., Laurent, S. et Rombouts, J.V.K. (2006) Multivariate GARCH models : a survey. *Journal of Applied Econometrics* 21, 79–109.
- [24] Bollerslev, T. (1988) On the correlation structure for the generalized autoregressive conditional heteroskedastic process. *Journal of Time Series Analysis* 9, 121–131.
- [25] Jeantheau, T. (1998) Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models, *Econometric Theory* 14, 70–86.
- [26] Breidt, F.J., Davis, R.A. Hsu, N-J, Rosenblatt, M. (2006). Pile-up Probabilities for the Laplace Likelihood Estimator of a Non-invertible First Order Moving Average *IMS Lecture Notes Monograph Series*, Vol 52, 1-19. Davis et Breidt, 2006.
- [27] Chitturi, R. V. (1974) Distribution of residual autocorrelations in multiple autoregressive schemes. *Journal of the American Statistical Association* 69, 928–934.
- [28] Dunsmuir, W.T.M. et Hannan, E.J. (1976) Vector linear time series models, *Advances in Applied Probability* 8, 339–364.
- [29] Hannan, E.J. (1976) The identification and parametrization of ARMAX and state space forms, *Econometrica* 44, 713–723.
- [30] Hannan, E.J., Dunsmuir, W.T.M. et Deistler, M. (1980) Estimation of vector ARMAX models, *Journal of Multivariate Analysis* 10, 275–295.
- [31] Hosking, J.R.M. (1980) The multivariate portmanteau statistic, *Journal of the American Statistical Association* 75, 602–608.
- [32] Hosking, J.R.M. (1981a) Equivalent forms of the multivariate portmanteau statistic, *Journal of the Royal Statistical Society B* 43, 261–262.
- [33] Hosking, J.R.M. (1981b) Lagrange-tests of multivariate time series models, *Journal of the Royal Statistical Society B* 43, 219–230.
- [34] Kascha, C. (2007) A Comparison of Estimation Methods for Vector Autoregressive Moving-Average Models. ECO Working Papers, EUI ECO 2007/12, <http://hdl.handle.net/1814/6921>.
- [35] Li, W. K. et McLeod, A. I. (1981) Distribution of the residual autocorrelations in multivariate ARMA time series models, *Journal of the Royal Statistical Society B* 43, 231–239.
- [36] Reinsel, G.C., Basu S. et Yap, S.F. (1992) Maximum likelihood estimators in the multivariate Autoregressive Moving Average Model from a generalized least squares viewpoint, *Journal of Time Series Analysis* 13, 133–145.
- [37] Moses R.L. .. BEECH A.A., "A comparison of numerator estimators for ARMA spectra", *IEEE Tr.*, vol. ASSP-34, n° 6, pp 1668-1671, Dec. 1986.
- [38] Friedlander B.. "Lattice filters for adaptive processing", *Proc. of the IEEE*, vol. 70, n° 8, pp 829-867, Aug, 1982a.
- [39] Friedlander B., "Lattice methods for spectral estimation", *Proc. of the IEEE*, vol. 70, n° 9, pp 990-1017, Sept, 1982b,
- [40] Newbold P., "The exact likelihood function for a mixed autoregressive moving average process", *Biometrika*, vol. 61, n° 3, pp 423-426, 1974.
- [41] Anderson T W., "Estimation for autoregressive moving average models in the time and frequency domains", *The Annals of Statistics*, vol. 5, n° 5, pp 842-865, 1977.
- [42] Dugre J.P., Scharf L.L., Gueguen C., "Exact likelihood for stationary vector autoregressive moving-average processes". *Signal Processing*. vol. II. pp 105-118, 1986.
- [43] Panuska V., "The stochastic approximation method for identification of linear systems using adaptive filtering", In *Preprints JACC*, Univ. of Michigan, pp 1014-1021, 1968.
- [44] Young P.C. "The use of linear regression and related procedures for the identification of dynamic processes", *Proc. IEEE Symp. on Adaptive Processes*, UCLA, 1968.
- [45] Soderstrom T., "An on-line algorithm for approximate maximum likelihood identification of linear dynamic systems", Report 7308, Dept. of Autom. Control, Lund. Inst. of Techn. Suède, 1973.

- [46]Friedlander B" "A modified prefilter for some recursive parameter estimation algorithms", IEEE Tr., vol. AC-27, n°1, pp 232-235, Feb. 1982c.
- [47]Friedlander B., Porat B., "A spectral matching technique for ARMA parameter estimation", IEEE Tr., vol. ASSP-32, n° 2, pp 338- 343, April 1984.
- [48]Morf M., Lee D.T., "Recursive least-squares ladder forms for fast parameter tracking", Proc. IEEE Conf, on Decision & Control, San Diego, pp 1362-1367, Jan. 1979.
- [49]Lee D.T., Friedlander B., Morf M .. "Recursive ladder algorithms for ARMA modeling", Pres, IEEE Conf. on Decision & Control, Albuquerque, New Mexico, pp 1225-1231, Dec. 1980.
- [50]Benveniste A., Chaure C., "AR and ARMA identification algorithms of Levinson type: an innovations approach", IEEE Tr, vol AC-26. n° 6, pp 1243-1260, Dec. 1981.
- [51]Friedlander B., "Lattice implementation of some recursive parameter estimation algorithms", Int. J. Control, Vol. 37, n° 4, pp 661-684, 1983b.
- [52]Gerch W ., "Estimation for the autoregressive parameters of a mixed autoregressive moving-average time series", IEEE Tr., vol. AC-14, pp 583-588, Oct. 1970.
- [53]Chow J.C .. "On the estimation of the moving-average parameters", IEEE Tr., vol. AC- J 5, pp 268-269, April 1972.
- [54]Cadzow J.A., Chaure C., "AR and Arma identification algorithms of levinson type: an innovation approach" IEEE, Tr,vol. AC-26, n° 6, pp 1243-1260, Dec. 1981.
- [55]Cadzow J.A., "Spectral estimation: an over determined rational model equation approach", Proc. of the IEEE, vol. 70, n° 9, pp 907-939, Sept. 1982
- [56]Stoica P .. Friedlander B., Soderstrom T., "Approximate maximum likelihood approach to ARMA spectral estimation", Int. J. Control, vol. 45, n°4, pp 1281-1310, 1987a,
- [57]Favier G., "Identification d'une représentation gaussienne markovienne Algorithmes de réalisation stochastique", Thèse de Doct. ing .. Univ. de Nice, Juin 1977a.
- [58]Favier G ., "Identification d'une représentation gaussienne markovienne minimale à l'aide d'algorithmes de réalisation stochastique", revue du CETH.EDEC, n° 51, pp 13-42, 1 977b.
- [59]Friedlander B" "Instrumental variable methods for ARMA spectral estimation", Proc. ICASSP, Paris, pp 248-251, May 1982, et dans IEEE Tr., vol. ASSP-31, n°2, pp 404-415, April 1983a
- [60]Stoica P., Soderstrom T., Friedlander B .. "Optimal instrumental variable estimates of the AR parameters of an ARMA process", IEEE Tr., vol. AC-30, n° 11, pp 1066-1074, Nov, 1985,
- [61]Stoica P., Friedlander B" Soderstrom T., "Optimal instrumental variable multistep algorithms for estimation of the AR parameters of an ARMA process", Int, J, Control, vol, 45. N°6, pp 2083- 2107, 1987b,
- [62]Stoica P .. Friedlander B .. Soderstrom T., "Instrumental variable methods for ARMA models", dans "Control and dynamic systems", Academic Press, 1987c. 1
- [63]Cadzow J.A .. Moses R.L.. "An adaptive ARMA spectral estimator", parts 1 & 2. Proc. ASSP workshop on spectral estimation. MC Master Univ., Hamilton, Ontario. Canada, Aug. 1981
- [64]Moses R.L., Cadzow J.A., Beex A,A .. "A recursive procedure for ARMA modeling", IEEE Tr., vol. ASSP-33, n° 4, pp 1188-1196, Oct. 1985.
- [65]Samson C., "A unified approach of fast algorithms for identification" • Int. J. Control, vol. 35, n° 5, pp 909-934, 1982.
- [66]Morf M., "Fast algorithms for multivariable systems", Ph. D. dissertation, Stanford Univ., 1974.
- [67]Wilson G.T" "Factorization of the covariance generating function of a pure moving average process", SIAM J. Numer. Anal" vol. 6, n° 1, pp 1-7, March 1969.
- [68]Wilson G,T .. "The factorization of matrixial spectral densities", SIAM J. Appl. Math., vol. 23, n° 4, pp 420-426, Dec, 1972.

- [69]Friedlander B., "A Kalman algorithm for factoring the spectrum of a moving-average process", IEEE Tr., vol. AC-28, n° II. pp 1051-1055, Nov. 1983c.
- [70]Dickinson B.W., Kailath T., Morf M., "Canonical matrix fraction and state-space descriptions for deterministic and stochastic linear systems", IEEE Tr, vol. AC-19, n° 6, pp 656-667, Dec, 1974.
- [71]Favier G., "Identification d'une représentation gaussienne markovienne minimale à l'aide d'algorithmes de réalisation stochastique", revue du CETH.EDEC, n° 51, pp 13-42, 1977b.
- [72]Favier G" "A comparison of stochastic realization algorithms for identification of ARMA models", 2nd. Int. Conf. on Information Sc. and Sys, Patras, Juillet 1979.
- [73]Favier G. "Filtrage, modélisation et identification de systèmes linéaires stochastiques à temps discret", Ed. du CNRS, 1982b.
- [74]Favier G, Alengrin G., "Algorithmes de filtrage rapide - Application à l'identification des paramètres statistiques d'un modèle ARMA", Colloque GRETS1, Nice, Mai 1979.
- [75]Favier G., Salut G" "Factorisation spectrale et équation de Riccati", Colloque GRETS1, Nice, Mai 1979.
- [76]Tsay, S., Tiao, G., "Consistent estimates of autoregressive parameters and extended sample autocorrelation function for stationary and nonstationary ARMA models", J. Amer. Statist. Ass., vol. 79; n° 385, pp 84-96, March 1984.
- [77]Li S., Dickinson B.W. "An efficient method to compute consistent estimates of the AR parameters of an ARMA model", Proc. IEEE Conf. on Decision & Control, Ft. Lauderdale, FL, pp 1072-1076: Dec. 1985, et aussi dans IEEE Tr., vol. AC-31. n° 3, pp 275-278, March 1986.
- [78]Li S., Dickinson B.W" "Application of the Kalman filter to robust estimation of AR and ARMA models" ,IEEE Tr. vol. ASSP-36, n° 4, pp 502-512, April 1988.
- [79]Durbin J., "Efficient estimation of parameters in moving-average models", Biometrika, vol. 46, pp 306-316, 1959.
- [80]Durbin J., "The fitting of time-series models", Revue Inst.Int. de Stat., vol. 28, n° 3, pp 233-244, 1960.
- [81]Graupe D., KRAUSE D.I., MOORE J.B" "Identification of autoregressive moving-average parameters of time series", IEEE Tr., vol. AC-20. pp 104-110, Feb. 1975,
- [82]Favier G" "Identification of multivariable ARMA models by use of fast algorithms", Proc. ICASSP, Paris, May 1982a.
- [83]Favier G. "Filtrage, modélisation et identification de systèmes linéaires stochastiques à temps discret", Ed. du CNRS, 1982b.
- [84]D. Guegan, *Séries chronologiques non linéaires à temps discret*, Collection statistique mathématique et probabilité, (1993).
- [85]N. Wiener, *Nonlinear problems in random theory*, M.I.T. Press, (1958). National Géographie Institut, <http://www.geo.ign.es/>
- [86]R. R. Moler, *Natural bilinear control processes*, I.E.E.E. Trans. Syst. Sci. Cybern, vol. S.C.C.G, (1970), pp. 192-197.
- [87]G. W. J Granger et A. P. Anderson, *An introduction to bilinear time series analysis*, Vandenhoeck and Ruprecht, Götting, (1978 a).
- [88]R. T. Subba, *On the theory of bilinear time series models*, J.R.S.S, Série B, Vol 43, 2, (1981), pp. 224-255.
- [89]Guegan, *Etude d'un modèle non linéaire, le modèle superdiagonal d'ordre un*, C. R. Acad. sci. Paris ser, 1 293, (1981), pp. 95-98.
- [90]D.Guegan, *Une condition d'ergodicité pour les modèles bilinéaires à temps discret*, C.R.A.S, t. 297, Série I, (1983), pp. 537-540.
- [91] D. Guegan, *Tests de modèles non linéaires*. Proceeding of the third franco belgium meeting of statisticians, J.-P. Florens et al. Eds. FUSL, Brussels, (1984), pp. 45-66.

- [92] R. M. Bhaskara, R. T. Subba et A. M. Walker, *On the existence of some bilinear time séries models*, J. T. S. A. 4, (1983), pp. 95-110. C. Bourin et P. Bondon, *On the identifiability of bilinear stochastic Systems*, IEEE, (1997).
- [93] Pham et L. T. Tran, *On the first order bilinear time séries model*, J.App. Prob, 18, (1981), pp. 617-627.
- [94] D. T. Pham, *Bilinear Markovian représentation and bilinear models*, Soch. Process and their appl, 20, (1985), pp. 295-306.
- [95] D. Guegan, *Représentation l-markovienne et existence d'une représentation affine en l'état des modèles bilinéaires* C.R.A.S. T. Série I. N. 47, (1986), pp. 289-292. D. Guegan, *Différent représentation for bilinear Models*. C.N.R.S. Orsay, France,
- [96] D. Sontag, *Realization theory of discrete-time non linear Systems: Part I. The bounded case*, Vol. cas-26. N 4, April (1979), pp. 342-356.
- [97] D. Guegan et T. D Pham, *Minimalité et inversibilité des modèles bilinéaires à temps discret*, C.R.A.S, 448, (1987 a), pp. 159-162.
- [98] J. Liu et P. J. Brockwell, *On the général bilinear time séries models*, J. Appl.
- [99] R. T. Subba et M. M. Gabr., // *introduction to bispectral analysis and bilinear time séries models*, Lecture note in statistic, N 24, springer, Berlin, (1984). H. Tong, *Non linear Times séries: A Dynamical System Approach*, New York: Oxford univ, Press, (1990).
- [100] D. Guegan et T. D Pham, *A note on the estimation of the the parameters of the diagonal bilinear models by least squares method*, Scand. Journ. of Stat. Theory and Appl, (1987 b).
- [101] W. K. Kim et L. Billard, *Asymptotic properties for the first-order bilinear time séries model*, Comm. Statist.theorymath, 19(4), (1990), pp. 1171-1183. J. S. Kowalik et M. R. Osborne, *Methods for unconstrained optimization prob-lems*, Elseiver, New York, (1968).
- [102] D. Guegan et T. D Pham, *Power of the score test against bilinear time séries models*, Statistica Sinica 2 numéro 1, (1992), pp. 157-169.
- [103] N. Wandji, *Etude de tests paramétriques et non paramétriques asymptotique-ment puissants pour les modèles autorégressifs bilinéaires*, Thèse de doctorat, Université paris 13, (1995).
- [104] Y. Benghabrit et M. Hallin, *Optimal rank based tests against first order superdiagonal bilinear dependence*. J. statist. Plann. Inference, 32, (1992), pp. 45-61.
- [105] Y. Benghabrit et M. Hallin, *Locally asymptotically optimal tests for autoregressive against bilinear sériai dependence*. Statistica Sinica 6, Numéro 1, (1996), pp. 147-169.
- [106] Y. Benghabrit et M. Hallin, *Locally asymptotically optimal tests for AR(p) against diagonal bilinear dependence*, J. statist. Plann. Inference 68, (1998), pp. 47125
- [107] S. Houfaïdi et Y. Benghabrit, *Tests paramétriques asymptotiquement localement "most stringent" pour une hypothèse nulle de modèle AR(1) contre un BL(1,0,2,1)*, deuxième Conférence Internationale de Mathématiques Appliquées et Sciences de l'ingénieurs, EST, Casablanca, Octobre (1998 b)
- [108] Bycroft, G.N., "White Noise Representation of earthquakes", proc. Amer. Soc. Civil Engineers, 1960
- [109] Rosenbluh, E. and Bustamante, J.E., "Disribution of Structural Response to Earthquakes", journal of the Engineering Mechanics Division, 1962.
- [110] Shinozuka, M., and Sato, Y., "Simulation of non-stationary Random Process", Journal of Mechanics Division, 1967.
- [111] Jennings, P.C., Housner, G.W., and Tasi, N.C., "Simulated Earthquake Motions" Earthquake Engineering Reasearch Lab, California 1968.
- [112] Amin, M., and Ang, A.H.s., "Non stationary stochastic model of Earthquake motions" journal of the Engineering Mechanics Division, 1968.
- [113] Saragoni, G.R. and Hart, G.C., « Simulation of Artificiel Earthquake, » 1974

- [114] Deodaltis,G., Shinozuka,M.,and Samaras,E.,”An AR model for Nonstationary Processes” 2ndInternational Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Newyork 1985.
- [115] Lin,Y.K.and Yong Y.,”Evolutionary Kanai –Tajimi Type Earthquake Models”, Florida Atlantic university,1987.
- [116] Shinozuka,M. Deodaltis,G., and Harada,T.,”Digital Simulation of Sismic Ground Motion”, Columbia University, Newyork,1987.
- [117] Robinson,E.A., « Perspective Decomposition of Sismic Traces »1957.
- [118] Liu,S.C., “Synthesis of Stochastic representation of Grounds Motions “, Bell System technical Journal,1970.
- [119] Kozin,F., “Autoregressive Moving Average Models of Earyhquake Data “ 5th WorldCongress, Earthquake Eng., Rome,1973.
- [120] Kozin,F., and Nakajimi,F., “ TheOrder Determination Problem forLinear Time-Varying AR Models”1980.
- [121] Chang,M.K., Kwiatowski, J.W., Nau, R.F., Olivier , R.M., and Pister, K.s.,”ARMA Models for Earthquake GroundMotion (1979)
- [122] Polhemus, N.W., and Cakmak , A.S.,” Simulation ofEarthquake GroundMotions Using Autoregressive Moving Average (ARMA) Models”,1981.
- [123] Moham PS, and Shah C.H., “Representation of non-Stationary GroundMotion Acceleration using Time Varying Model”,thefourth International Conference on Structural Society and Reliability, Japan,1985.
- [124] Kitagawa ,C., Gerch ,A.,” A Smoothing Priors Varying AR Coefficient Modeling of Non stationary Covariance timeSeries”1985.
- [125] Box G. E. P., Jenkkins G. M. (1976), Time series analysis forecasting and control, San Francisco, Holden Day.
- [126] Brockwell P. J., DavisR. A. (1991), Time Series : Theory and Methods. 2nd Edn. New York : Springer-Verlag.
- [127] Beran, J. (1994), On a class ofM-estimators for long-memory Gaussian models. Biometrika, Vol. 81 (4) 755-766.
- [128] Deniau C., Doukhan P., Oppenheim G., Renaulte E. (2000), Théorèmes limites et longue mémoire en statistique, Statistical Inference For stochastic Processes 3, Special issue .
- [129] Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M. S. (2003), Theory and applications of long-range dependence, Basel (Suisse), Birkhäuser.
- [130] Robinson P. M. (2003), Time series with Long memory, Oxford, Oxford University Press.
- [131] Hurst H. E. (1951), Long- time storage capacity of reservoirs, Transactions of the American Society of Civil Engineers 116, 770-799.
- [132] Hosking J. R. M. (1984), Modelling persistence in hydrological time series using fractional differencing, Water Resources Research 20, 1898-1908.
- [133] Mandelbrot B. B. (1962), Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs de Paul Lévy, Comptes Rendus Académie des Sciences 254, 3968-3970.
- [134] Lo A. (1991), Long- time memory in stock market prices, Econometrica 59, 1279-1313.
- [135] Willinger W., Taqqu M. S., Teverovsky V. (1999), Stock market prices and Long memory dependence, Finance and stochastic 3, 1-13.7.
- [136] Hassler U., Wolters J. (1995), Long memory in inaction rates : international evidence, Journal of Business and Economic statistics 13, 37-45.
- [137] Graf W. L (1983)., The arroyo problem : paleohydrology and paleohydraulics in the short term, Gregory K. G. (ed.), Background to paleohdrology, New York, wiley, 279-302.

- [138] Beran, J., Terrin, N. (1996), Testing for a change of the long-memory parameter. *Biometrika*, Vol. 83 (3), 627-638.
- [139] Taqqu M. S., Willinger W., Sherman R., Wilson D. (1997), Self-similarity through high-variability : statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level, *IEEE/ACM Transactions on Networking* 5 (1), 71-96.
- [140] Wagenmakers E. J., Farrel S., Ratcliff R. (2004), Estimation and interpretation of  $1/f$  noise in human cognition, *Psychonomic Bulletin and Review* 11 (4), 579-615.
- [141] Torre K., Dellignieres D., Lemoine L. (2007), Detection of long-range dependence and estimation of fractal exponents through ARFIMA modeling, *British J. Math. Statist. Psych.* 60, 1, 85-106.
- [142] Luis A. Gil-Alana, 2004. "Deterministic Seasonality versus Seasonal Fractional Integration," Faculty Working Papers 07/04, School of Economics and Business Administration, University of Navarra.
- [143] Mishra T. K. (2008), Stochastic demographic dynamics and economic growth : An Application and Insights from the World Data, *Historical Social Research (Section .Cliometrics.)*, Association Française de Climétrie (AFC), Vol. 33 (4), 9-190.
- [144] Gourieroux, A., & Monfort, A. (1995). *Séries temporelles et modèles dynamique* (2 ed.). Paris : Economica.
- [145] Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (1991). *Time Series : Theory and Methods* (Second ed.). New York : Springer.
- [146] Brahimi ,M., "The use of ARMA Models for Earthquake Response", Polytechnic University, USA., 1989.
- [147] Kalman, *A New Approach to Linear Filtering and Prédiction Problems* Transaction of the ASME, Journal of Basic Engineering, 82, march (1960).
- [148] J. D. Hamilton, *Time séries analysis*, Princeton: Princeton University Press, (1994).
- [149] Hudson, M.B., Skyers, B.D., LEW, M. 1996. Vertical strong ground motion characteristics of the Northridge Earthquake. Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Mexico, Paper No. 728.
- [150] Priestley, M. B., 1994, *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press, London.
- [151] Stoica, P. and Moses, R.L., 1997, *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [152] Proakis, J. G. and Manolakis, D. G., 2007, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, 4th ed., Pearson Prentice Hall.
- [153] D. Guegan, *Etude d'un modèle non linéaire, le modèle superdiagonal d'ordre un*, C.R. Acad. sci. Paris ser, 1 293, (1981), pp. 95-98.
- [154] R. T. Subba, *On the theory of bilinear time séries models*, J.R.S.S, Série B, Vol 43, 2, (1981), pp. 224-255.
- [155] R. T. Subba et M. M. Gabriel," *introduction to bispectral analysis and bilinear time séries models*, Lecture note in statistic, N 24, springer, Berlin, (1984).
- [156] Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (1996). *Introduction to Time Series and Forecasting*. New York : Springer.
- [157] T. Pham et L. T. Tran, *On the first order bilinear time séries model*, J.App. Prob, 18, (1981), pp. 617-627.
- [158] D. Guegan et T. D Pham, *Minimalité et inversibilité des modèles bilinéaires à temps discret*, C.R.A.S, 448, (1987 a), pp. 159-162.
- [159] D.T. Pham, *Bilinear Markovian représentation and bilinear models*, Soch. Process and their appl, 20, (1985), pp. 295-306.
- [160] D. Guegan, *Tests de modèles non linéaires*. Proceeding of the third franco-belgium meeting of statisticians, J.-P. Florens et al. Eds. FUSL, Brussels, (1984), pp. 45-66.

- [161] W. K. Kim et L. Billard, Asymptotic properties for the first-order bilinear time series model, *Comm. Statist.theorymath*, 19(4), (1990), pp. 1171-1183. J. S. Kowalik et M. R. Osborne, *Methods for unconstrained optimization prob-blems*, Elseiver, New York, (1968).
- [162] V. J. Mathews et T. K. Moon, Parameter estimation for a bilinear time séries model, *IEEE*, E7, 22, (1991).
- [163] Mc Cullagh and Nelder J.A, (2010), *Generalized Linear Models*, Second Edition (Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability)
- [164] Gersch, W. and Sharpe, D. R., 1973, Estimation of power spectra with finite order autoregressive models, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 18, 367-369.
- [165] Ulrych, T. J. and Bishop, T. N., 1975, Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 13(1):1
- [166] Tong, H., 1977, More on Autoregressive Model Fitting with Noisy Data by Akaike's Information Criterion, *IEEE Transactions on Information Theory*, 409-410.
- [167] Jones, J. H., 1976, Autoregression order selection, *Geophysics*, 41, 771-773.
- [168] Nuttall, A. H., 1976, Spectral analysis of a univariate process with bad data points via maximum entropy and linear predictive techniques, Technical report 5303, Naval Underwater System Center, New London, CT, USA.
- [169] Berryman, J. G., 1978, Choice of operator length for maximum entropy spectral estimation, *Geophysics*, 43, 1384-1391.
- [170] Kashyap, R.L., 1980, Inconsistency of the AIC rule for estimating the order of AR models, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 25 (5), 283-295.
- [171] Pukkila, T. M. and Krishnaiah, P. R., 1988, On the use of autoregressive order determination criteria in univariate white noise tests, *IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(5), 1396-1403.
- [172] Rezek, A. and Roberts, S. J., 1997, Parametric model order estimation: a brief review, *Model Based Digital Signal Processing Techniques in the Analysis of Biomedical Signals* (Digest No. 1997/009), *IEE Colloquium*, 16, 3, 1-3.
- [173] Maple, S. L., 1987, *Digital Spectral Analysis with Applications*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.
- [174] Wei, W. W. S., 1994, *Time Series Analysis*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, CA.
- [175] Akaike, H., 1969, Fitting autoregressive models for prediction, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 21, 243-247.
- [176] Akaike, H., 1974, A new look at the statistical model identification, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 19, 716-723.
- [177] Akaike, H., 1979, A Bayesian extension of the minimum AIC procedure of autoregressive model fitting, *Biometrika*, 66.s.
- [178] Shibata (1976): "Selection of the Order of an Autoregressive Mode by Akaike Information Criterion", *Biomertica*, 63, pp.117-126.
- [179] Schwarz, G., 1978. Estimating the dimension of a model, *Annals of Statistics*, 6, 461-464.
- [180] Rissanen, J., 1978, Modeling by shortest data description, *Automatica*, 14(5), 465-471.
- [181] Rissanen, J., 1983, A universal prior for integers and estimation by minimum description length, *Annals of Statistics*, 11, 416-431.
- [182] Lutkepohl, H., 1987, Comparison of criteria for estimating the order of a vector autoregressive process, *Journal of Time Series analysis*, 6, 35-52.
- [183] Ashley , R. (1988). On the relative worth of recent macroeconomic forecasts, *International Journal of Forecasting* 4, 363-376.

- [184] Salas, J.D., Delleur, J.W., Jevch, V., Yev and Lane, W.L. (1980) » Applied Modeling of hydrologic Time series
- [185] Turkstra, C.J., Tallin, A.G., Brahim, M., Kim, H.J., (1987) "The use of ARMA models to measure damage potential in seismic records," National Center for Earthquake Engineering Research Report No. NCEER-88-0032.
- [186] Kozin, F., (1988), "Autoregressive Moving Average Models of Earthquake Records," Probabilistic Engineering Mechanics.
- [187] Akaike, H., (1974), "A new look at statistical model identification," IEEE Trans. Auto. Control Vol. AC-19, 716-723.
- [188] Kozin, F., Nakajimi, F., (1980), "The Order Determination Problem for Linear Time Varying AR Models," IEEE Trans. Auto. Control, AC-25 (2).
- [189] Pradlwarter H.J and Schueller G.I. (1997) , "On Advanced MCS Procedures in Stochastic Structural Dynamics," Journal of Nonlinear Mechanics, Vol. 32, No.4, pp. 735 - 744.
- [190] Brahim, M., and Berri, S., (2006), "The Use of ARMA Models in Earthquake Response Spectra," 14th International Conference on Nuclear Engineering July 17-20, 2006 , Miami, Florida, USA Volume 3: Structural Integrity; Nuclear Engineering Advances; Paper no. ICONE14-89023 pp. 7-13 doi:10.1115.
- [191] Brahim M , Berri, S and Menasri, A (2009), "The Use of Stochastic Models to Measure Damage Potential in Acceleration Time Series, " 17th International Conference on Nuclear Engineering (ICONE17) July 12-16, 2009, Brussels, Belgium, Paper no. ICONE17-75349 pp. 97-100 doi:10.1115/ICONE17-75349.
- [192] Bruzzone, S. P. & Kaveh, M. (1980). On some suboptimum ARMA spectral estimator. IEEE, Trans. Acoustics, speech and signal processing, 28(6), 753-755.
- [193] Zienkiewicz, O.C., - "The finite Element method in Engineering Science," Mc Graw-Hill, London, 1971.
- [194] Newmark, N.M., Rosenbluth, E. - "Fundamental of Earthquake Engineering," Prentice-Hall, Int. Englewood Cliffs, N.J. 1971.
- [195] Newmark, N.M. - "A Method of computation for structural Dynamics," Jour. Engin., Mech. Div., ASCE, n° EM3, pp. 67-94, July 1959.
- [196] Bath, K.J., and Wilson, E.L. - "Stability and Accuracy Analysis of Direct. Integration Methods," International Journal of Earthquake Engineering and structural Dynamics, vol. 1, pp. 283-291, 1973.
- [197] Idriss, I.M. et Seed, H.B. (1974, a) - seismic Response by Variable Damping Finite elements". J. Geot. Engng. Div. ASCE, Vol. 100, N° GTI, Jan., pp. 1 - 13.
- [198] Kondner R.L. (1963). Hyperbolic stress-strain response : cohesive soils. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 89, pp. 115-143.
- [199] Janbu N. (1963), Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests. Proceedings of European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering (ECSMFE), Wiesbaden, Vol. 1, p. 19-25.
- [200] Hardin B.O., Drnevich V.E. (1963). Shear modulus and damping in soils : design equations and curves. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol 98, N° SM7, pp. 667-691.
- [201] Laouami N., Slimani A, Bouhadad Y, Chatelain JL, and Nour A. (2006), Evidence for fault-related directionality and localized site effects from strong motion recordings of the 2003 Boumerdes (Algeria) earthquake: Consequences on damage distribution and the Algerian

- seismic code. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 26 (2006) 991–1003.
- [202] Zarah, T.F., and Hall, W.J., (1984), "Earthquake Energy Absorption in SDFS Structures," *J.St.Div., ASCE*, Vol. 110,
- [203] Lin, J., and Mahin, S.A., (1985), "Effect of Inelastic behavior on the Analysis and design of Earthquake Resistant Structures," Rep. No. UCB/EERC 85-08, Univ. California, Berkeley.
- [204] Park, Y.T., Ang, H.S., and Wen, Y.K., (1984), "Seismic Damage Analysis and Damage-Limited Design of R-C Buildings, " St. Res. Series No. 516, Dep. Of Civil Engineering, University of Illinois, Urbans.
- [205] Banon, H., and Veneziano, D.,(1982), "Seismic Safety of Reinforced Concrete Members and Structures." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, No2, pp179-194.
- [206] Casciatti, F., and Faravelli, L., (1982), Seismic Risk for Structural Frames, "Proceedings, VII Symposium on Earthquake Engineering, University of Roorkee, Vol. 1, pp 197-201.
- [207] Grigoriu, M., (1987), "Damage Models for Seismic Analysis, " Dept. of Civil Engineering., Cornell University.
- [208] Clough, R.W., Penzien, J.,(1993),*Dynamics of Structures*,McGraw-Hill, New York.
- [209] Turkstra, C.J., Tallin, A.G., Brahimi, M., Kim, H.J.,(1987)"The use of ARMA models to measure damage potential in seismic records," National Center for Earthquake Engineering Research Report No. NCEER-88-0032.
- [210] Riddel, R., Newmark, N.M., (1979), "Force deformation models for nonlinear behavior," Proc. ASCE, 105, (12).
- [211] Clough, R.W., Johnston, S.B., (1966), "Effect of stiffness degrading on earthquake ductility requirement," in Proceedings, Japanese Earthquake Symposium.
- [212] Bühler, M. et Cudmani, R. (2005). Numerical investigation of the seismic behaviour of structures on soft and liquefiable soils considering the non-linear soil-foundation-structure interaction. 250th anniversary of the 1755 Lisbon earthquake.
- [213] Pecker, A. (1984). *Dynamique des sols*. Presse, ENPC, Paris, France.
- [214] Wolf, J. (1988). *Soil-Structure-Interaction Analysis in time domain*. Prentice Hall International .Series, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [215] Crémer, C. (2001). *Modélisation du comportement non linéaire des fondations superficielles sous séismes*. Thèse de doctorat, LMT Cachan - ENS, Cachan, France.
- [216] Kausel, E., Whitman, A., Murray, J. et Elsabee, F. (1978). The spring method for embedded foundations. *Nuclear Engng. and Design*, 48.
- [217] Chebli, H., Othman, R., Clouteau, D., Arnst, M. et Degrande, G. (2008). 3d periodic be-fe model for various transportation structures interacting with soil.*Computers and geotechnics*,35:22–32.
- [218] Gazetas, G. (1991). *Foundation Engineering Handbook*, Chapter 15. Fang H-Y (ed.), van Nostrand Reinhold: New York.
- [219] Ptilakis, D., Dietz, M., Wood, D. M., Clouteau, D. et Modaressi, A. (2008). Numerical simulation of dynamic soil-structure interaction in shaking table testing. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 28:453–467.
- [220] Semblât J.-F., Luong M.P. (1998), Propagation d'ondes en milieu centrifugé : caractérisation, dispersion, atténuation, *Revue française de Géotechnique*,83, pp. 17-28.
- [221] Buland p. (1995), Les lois de similitude pour les essais sur table vibrante. Application à

la maquette CASSBA, Les modèles réduits en génie civil, AUGC, pp. 95-105.

[222] Pitilakis K . , H atzidimitrioud., Bard P . Y . , Manosg.,Jongmans D. (1994), Euroseistest Volvi-Thessaloniki -A European test site for engineering seismology,earthquake engineering and seismology, Earthquakeresistant construction and design, éd. Savidis, Balkema,Rotterdam.

[223] Gantenbeine., Quenval J . - C . , Buland P. (1994), Maquette CASSBA - Essais sismiques, Annales de l'institut du bâtiment et des travaux publics, 523,pp. 54-67.

## Annexe

### Notations et Rappels

Nous introduisons ici des rappels et des notations communes aux différentes parties de ce manuscrit.

### Notations

- $E$  : Espérance mathématique.
- $\text{cov}(X, Y)$  : Covariance de  $X$  et  $Y$
- $V(X)$  : variance de  $X$ .
- $\rho(A)$  : Rayon spectral de la matrice  $A$ .
- $\otimes$  : Produit de Kronecker.
- $\|A\| = \max(\sum_1^p |a_{ij}|)$  : Norme d'une matrice  $A$
- $0_m$  : Matrice nulle d'ordre  $m$ .
- $X \sim E$  :  $X$  suit la loi  $E$ .
- $\text{Var}E$  : Variance des erreurs.
- $\text{Var}D$  : Variance des données.
- $A'$  : Transposé de  $A$ .
- $(X|Z)$  :  $X$  sachant (conditionnellement à)  $Z$ .
- **Modèle** : Un modèle est une structure mathématique pouvant représenter le système étudié. Cette structure doit comporter des éléments d'ajustement.
- **Structure du modèle** : représente la connaissance à priori que l'utilisateur souhaite placer dans le modèle.
- **Modèle quantitatif** : Un modèle est quantitatif lorsque les fonctions qui définissent les équations sont spécifiées analytiquement. Dans un modèle quantitatif, une suite d'opération permet le calcul de la valeur numérique des fonctions du modèle à partir de leurs arguments [et des entrées du système] l'équation différentielle d'un système est un modèle quantitatif

(domaine temporel), de même que la fonction de transfert d'un système différentiel à coefficients constants (domaine symbolique de Laplace).

- **Les systèmes aléatoires** : sont régis par des modèles stochastiques ; la valeur d'une variable aléatoire ne peut être calculée à un instant  $t$ .

- **Modèle paramétrique** : Un modèle quantitatif est paramétrique lorsque son expression analytique comporte un nombre fini de constantes non précisées numériquement appelés paramètres.

L'expression générale d'un modèle paramétrique est:  $X_t = f(t, a_1, a_2, \dots, a_k)$  avec variable explicative du modèle. Les paramètres représentent les constantes d'ajustement du modèle aux mesures.

- **Modélisation** : Opération par laquelle on établit un modèle d'un phénomène, afin d'en proposer une représentation qu'on peut interpréter, reproduire et simuler. Par ailleurs, modèle est synonyme de théorie, mais avec une connotation pratique : un modèle, c'est une théorie orientée vers l'action à laquelle elle doit servir. En clair, elle permet d'avoir un aperçu théorique d'une idée en vue d'un objectif concret.

## Rappel

### Loi de Pearson VI (Devroye 1986) .

Les fonctions de Pearson ont été créées pour représenter des distributions unimodales. Il en existe douze. Elles ont été inventées par Karl Pearson à la fin du XIX<sup>E</sup> siècle et au début du XX<sup>E</sup> siècle, ci-dessous nous donnons la définition de la loi de Pearson VI. La densité de probabilité  $f$  de Pearson VI, pour  $x \in [a, \infty)$ , est définie par :

$$f(x) = C(x - a)^b h. x^{-d} \quad d > b + 1 > 0, a > 0$$

Où  $C$  est la constante de normalisation.

### La loi gamma (Giard 1995) [2].

La loi Gamma est définie pour  $0 < x < \infty$  et se caractérise par deux paramètres positifs, le paramètre de forme  $a$  et le paramètre d'échelle  $\beta$ . Sa densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp^{-x/\beta}}{\int_0^{\infty} \exp^{-t} t^{\alpha-1} dt}$$

**Loi bêta (Giard 1995).**

Cette loi est définie pour  $a < x < b$  et se caractérise par deux paramètres de forme positifs  $v$  et  $\omega$ . Sa densité est la suivante :

$$f(x) = \frac{(x-a)^{v-1}(b-x)^{\omega-1}}{\left[ \int_0^1 (1-t)^{\omega-1} dt \right] (b-a)^{v+\omega-1}}$$

**Rayon spectral**

Le Rayon spectral d'une matrice  $A$  est égal à  $\sup (\lambda_i)$ , où les  $\lambda_i$  pour  $i = 1, \dots, k$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$

**Produit de Kronecker**

Le produit de Kronecker (ou tensoriel) de deux matrices  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$  et  $B$  est :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11B} & a_{12B} & a_{1nB} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1B} & a_{m2B} & a_{mnB} \end{pmatrix}$$

**Biais**

Soit  $\theta$  le paramètre à estimer et  $T$  un estimateur, c'est-à-dire une fonction des  $X_i$ , où les  $X_i$  sont des variables aléatoires, à valeurs dans un domaine acceptable pour  $\theta$ . La quantité  $E[T] - \theta$  s'appelle le biais.

**Les critères usuels de validation d'une méthode de prévision (Mélard (1990)) .**

Le propre des techniques prédictives et prévisionnelles est d'envisager d'une façon ou d'une autre ce qui devrait être, selon l'idée qu'on se fait d'une réalité. Seulement voilà, il y aura toujours des écarts entre nos résultats et cette facétieuse réalité.

Les prévisionnistes sont de grands consommateurs d'indicateurs qui permettent, soit avec recul, soit en temps réel, de valider ou non leurs choix de techniques et de paramètres (coefficients de régression, constante d'un lissage exponentiel...). Toute prévision et prédiction chiffrée, qu'elle sorte d'un cerveau ou d'un ordinateur, devrait être confrontée a posteriori à la réalité.

Des erreurs peuvent être commises en amont de l'analyse mais on ne s'intéressera ici qu'aux écarts entre modèle et observations. Peut-être par esprit de vengeance, les statisticiens les traitent de « résidus » (du moins dans le cadre des régressions). Comment mesurer ces écarts ?

Dans le domaine des statistiques, il existe toujours cette fâcheuse multiplicité des mesures : dispersions, distances, tendances, écarts... Tous ces indicateurs peuvent être mesurés avec des tas d'instruments .

Le plus simple : on considère les écarts algébriques [réels – prévus] comme la distribution d'une variable, pour laquelle on calcule divers indicateurs de dispersion descriptifs (écart-type, par exemple). Mais ce ne sont pas les meilleurs outils de mesure : à titre d'illustration, s'il existe un biais se traduisant par une erreur de prévision systématiquement égale à +1 sans autre erreur, l'écart-type des écarts est égal à zéro... En revanche, l'observation de la série d'écarts et de leur somme permet de détecter un tel biais contrairement aux indicateurs ci-dessous, calculés sur des carrés ou des valeurs absolues. Il ne faut donc pas négliger cette partie du travail qui peut s'appuyer sur des graphiques.

Voici cinq indicateurs propres aux mesures d'écarts sur variables quantitatives.

La somme des carrés des résidus (SCR ou Sum of Squared Errors). Comme on mesure des carrés, on majore l'importance des grosses erreurs.

Le carré moyen des erreurs ou erreur quadratique moyenne (MSE pour Mean Square Error) : c'est la moyenne arithmétique des carrés des écarts entre les prévisions et les observations.

C'est la valeur à minimiser dans le cadre d'une régression simple ou multiple (voir méthode des moindres carrés). La méthode est fondée sur la nullité de la moyenne des résidus. Mais la moyenne de leurs carrés n'est généralement pas nulle. Cette moyenne n'est autre que la variance résiduelle que l'on cherche à minimiser (théorème de König).

La formule de calcul change selon le contexte puisque la somme des carrés est divisée par un nombre de degrés de liberté. Si l'on écrit  $MSE = SCR / n$  dans le cas d'une série chronologique, MSE devient  $SCR / (n - 2)$  lorsque l'on observe les résidus d'une régression simple et  $SCR / (n - k - 1)$  dans le cas d'une régression multiple ( $k =$  nombre de variables explicatives).

Si l'on compare deux estimateurs sans biais, le meilleur est bien sûr celui qui présente le MSE le plus faible.

L'erreur-type (RMSE) : racine carrée du précédent.

L'erreur absolue moyenne (MAE pour Mean Absolute Error) : moyenne arithmétique des valeurs absolues des écarts.

Ces quatre indicateurs servent surtout à comparer plusieurs modèles ou prévisions par rapport à une série d'observations, ou encore plusieurs méthodes entre elles. L'indicateur suivant permet aussi la comparaison entre séries d'écarts.

L'erreur absolue moyenne en pourcentage (Mean Absolute Percentage Error, alias MAPE) : moyenne des écarts en valeur absolue par rapport aux valeurs observées. C'est donc un pourcentage et par conséquent un indicateur pratique de comparaison. Hélas, petit inconvénient, le MAPE ne peut s'appliquer qu'à des valeurs strictement positives.

Il permet donc de juger si le système de prévision des ventes est bon, mais il est inefficace pour apprécier la qualité d'estimations de résultats qui peuvent être soit des bénéfices soit des pertes (ça tombe bien, il est un peu stupide de prévoir directement).

Supposons qu'on dispose de  $n$  prévisions  $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$  qui correspondent aux données  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , et donc de  $n$  erreurs de prévisions  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Les critères suivants sont utilisés pour juger de la validité de la méthode de prévision.

### **Erreur moyenne**

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i$$

### **Variance**

$$var = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2$$

### **Ecart type ("standard déviation: std")**

$$std = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2}$$

**Carré moyen des erreurs** ("Mean Square Error")

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i)^2$$

**Erreur quadratique moyenne** ("RootMean Square Error")

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i)^2}$$

**Erreur absolue moyenne en pourcentage** ("Mean Absolute Percentage Error"]

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|e_i|}{y_i}$$

Remarque : il faut que les  $y_i$  soient positives.

**T-statique**

$$\text{T - statique} = \frac{\text{biais}}{\text{RMSE}}$$