

UNIVERSITE D'ALGERI

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

16/79

— DEPARTEMENT GENIE CIVIL —

1 ex

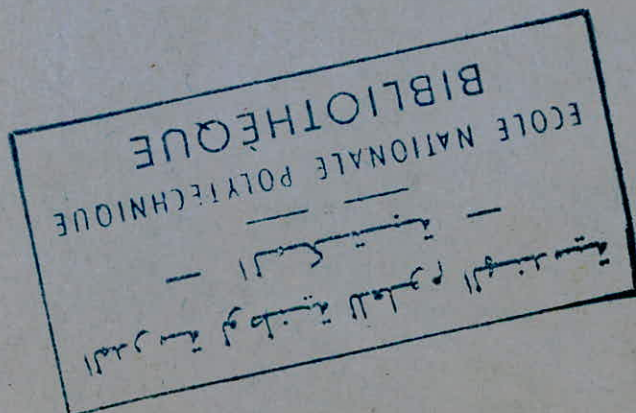
PONT COURBE
EN
BETON PRECONTRAIT
A SECTION CAISSON

4 PLANCHES

TOME 1

Proposé par :

P. BONNEVILLE
Doctorat d'état



Etudié par :

RILI. MOUSSA
BABAAMMI. AHMED

PROMOTION: 74-79

Je dédie ce modeste travail

- A la mémoire de mes très chers regrettés père et ami Duchia messarid.
"Que dieu bénisse leurs ames"
- A ma très chère mère.
- A mes frères et sœurs.
- A tous mes amis.

Remerciements

Je remercie tous les professeurs qui ont contribué à ma formation, sans oublier mesieurs, Zenine et Clavel (anciens instituteurs de l'école d'ador), Benzerga (ancien professeur de Maths au Lycée Okba).

RILI Moussa

R. Moussa

Remerciements

Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce projet trouvent ici notre profonde reconnaissance principalement :

- notre promoteur Monsieur P. Bannelle.
- Monsieur BAALI Mohamed.
- Monsieur KETFI

Je dédie ce modeste travail à ma chère père, ma chère mère, ainsi qu'à tous mes frères et toutes mes sœurs sans oublier mes autres parents.

De même, je dédie ce modeste travail à tous mes amis, principalement ceux affiliés à l'UNJA, cellule de BENI-ISGUEM.

Que tous les étudiants et professionnels qui tentent d'allier leur travail d'étude et professionnel à celui de leur société puissent trouver dans ce modeste travail un encouragement à la poursuite de leurs efforts et de leurs nobles tâches.

Ceux qui oublient leurs sociétés seront oubliés par Dieu le tout-puissant.

Que tous les professeurs qui ont contribué à ma formation, principalement Monsieur F. HEBRAÛT (prof. que j'ai eu le privilège d'avoir eu classe de 4^{ème} AM et que j'ai perdu de vue depuis) trouvent ici ma profonde reconnaissance.

BABAAMMI Ahmed.



Sommaire

I	Introduction - calcul des caractéristiques des Matériaux.	3 → 28
II	Calcul des Efforts M, T, C	35 → 67
III	Valeurs numériques des efforts.	68 → 116
IV	Introduction de la Précontrainte	117 → 126
V	Calculs et Vérifications des Sections Précontraintes	127 → 169
VI	Calcul des Pertes et Chutes de Tension	170 → 179
VII	Calcul des contraintes de cisaillement.	180 → 195
VIII	Vérification du cisaillement, et calcul des armatures dans les âmes de Ponts	196 → 216
IX	Efforts et Ferrailage des Dalles	217 → 246
X	Plaque d'about et Étude des Appuis	247 → 268

I INTRODUCTION

L'ouvrage projeté est un pont courbe en précontraint composé de deux travées identiques, indépendantes, hyperstatiques de degré 1. Ce pont doit franchir une auto-route à double sens de largeur 70 m, pour pouvoir relier cette auto-route et à une route secondaire.

Le pont a été choisi courbe pour que le raccordement entre l'auto-route et la route secondaire soit aisé, et ne nécessite pas de grands détours, et par conséquent de grands espaces. En effet, si l'on adopte un pont droit à la place du pont courbe, les raccordements nécessiteraient de grands espaces de part et d'autre de l'auto-route, et l'on peut même être conduit à détruire des bâtiments déjà en place en bordure de l'auto-route.

Caractéristiques de la courbure du pont :

Le pont a la forme d'un arc de cercle, de rayon égal à 60 m, la longueur d'une travée est égale à 37,37 m. La corde délimitée par les extrémités du pont en entier mesure 70 m, elle sous-tend donc un arc de cercle de $71,38^\circ$.

Forme et dimensions de la section transversale :

La section est choisie de forme caisson pour pouvoir résister aux effets de torsion. on peut l'assimiler donc, à deux parties entières reliées par une dalle supérieure et une dalle inférieure.

Dimensionnement de la section transversale:

- Hauteur totale h_t : elle doit être telle que:

$$\frac{L}{20} - 0,2 \leq h_t \leq \frac{L}{20} + 0,50$$

L étant la longueur d'une travée: $L = 37,37$.

d'où:

$$1,67 \leq h_t \leq 2,37$$

on adopte une hauteur $h_t = 2,00 \text{ m}$.

- épaisseur de l'âme b_0 :

La valeur minimale de b_0 au milieu de la travée est:

$$b_0 \geq 9 \text{ cm} + \frac{h_t}{40}$$

$$b_0 \geq 14 \text{ cm}$$

Mais vu qu'on a de grands effets de torsion et tranchant, on prendra $b_0 = 30 \text{ cm}$ au milieu, et on épaissira l'âme vers l'about où les effets sont encore plus importants.

à 6 m de l'about, on commencera donc à épaissir l'âme jusqu'à atteindre une épaisseur de 60 cm à l'about.

- espacement des axes des deux âmes (a):

l'espacement des portées est très variable: $2,50 \leq a \leq 3,50$

on adopte un espacement $a = 3,00 \text{ m}$.

- épaisseur du hourdis (h_0):

pour un hourdis à goupets sur portées précritées dans le

sens de la portée a a: $h_0 = \frac{a}{16}$

par conséquent, vu que $a = 3,00 \text{ m}$.

$$h_0 = \frac{300}{16} = 18,75.$$

Mais vu que les hourdis résistent à un effort de traction, on adoptera pour le hourdis supérieur une épaisseur de 20 cm, et pour le hourdis inférieur une épaisseur de 25 cm.

Raccordement âme - hourdis :

Les dalles inférieure et supérieure doivent présenter des pentes suffisantes à leur raccordement avec l'âme pour permettre un betonnage facile ; en effet le changement de direction trop brusque du béton lors de son coulage provoque des manques à la jonction et souvent également dans les hourdis eux-mêmes. Aussi, on adoptera un gouset 10 x 60 cm² pour la jonction âme - dalle supérieure ; et un gouset de 30 x 30 cm² pour la jonction âme - dalle inférieure.

APPUIS :

Ils sont constitués de voiles précastrées reliées avec la poutre caisson. Ils ont ainsi des couples de torsion à l'appui pour éviter le renversement du pont. Leur dimensionnement et calcul sont détaillés dans la note de calcul.

Composition du tablier :

Il se compose donc d'une chaussée de 4m comportant une seule voie de circulation, bordée de deux trottoirs de 1m chacun. ceux-ci sont formés de bordures corbes au place et de dalles préfabriquées, ainsi que de corniches dans lesquelles on aue les garde-corps.

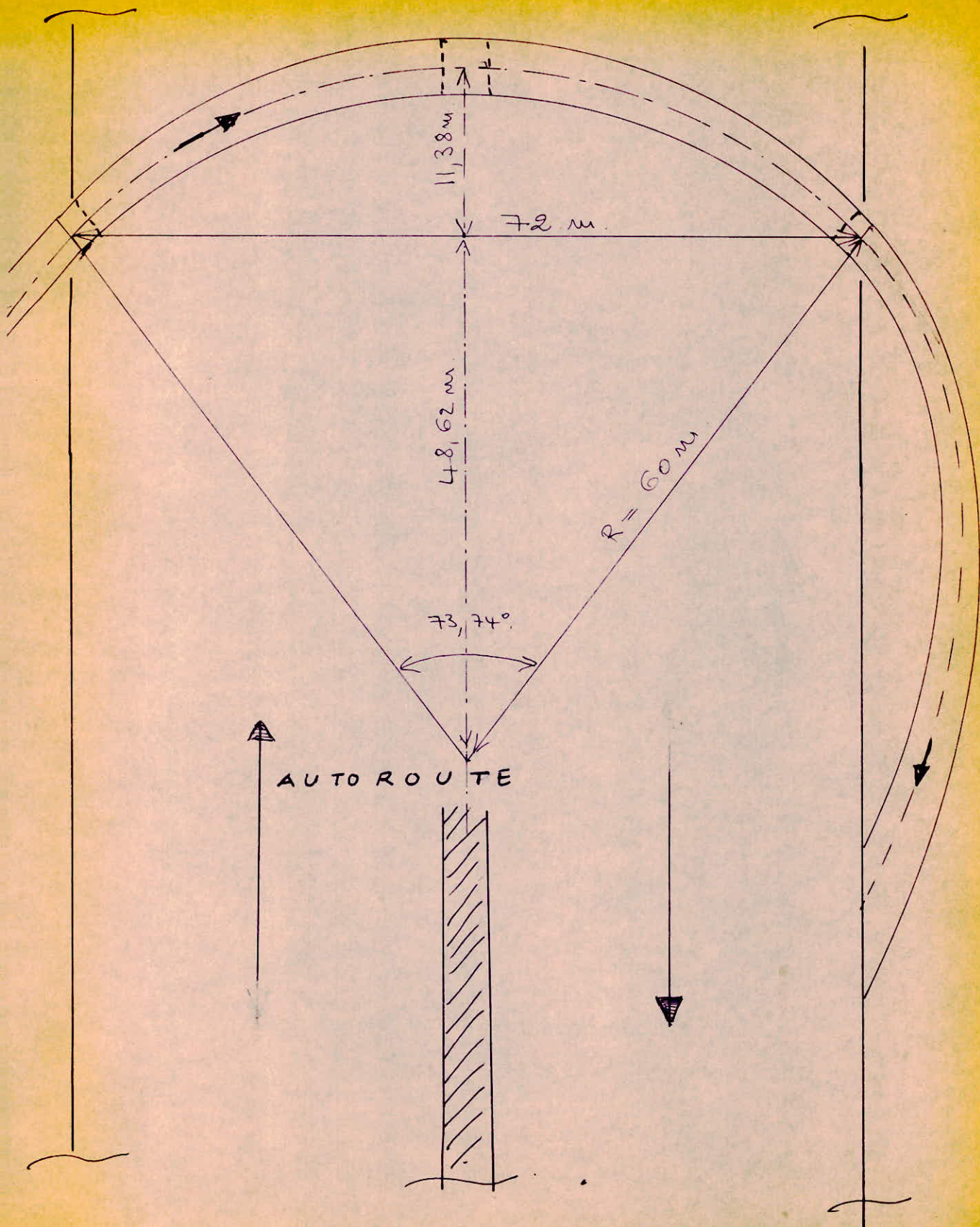
Parties Précontraintes :

Seules les deux parties en T^e sont précontraintes longitudinalement d'après le procédé Freyssinet à câble 12φ8 mm.

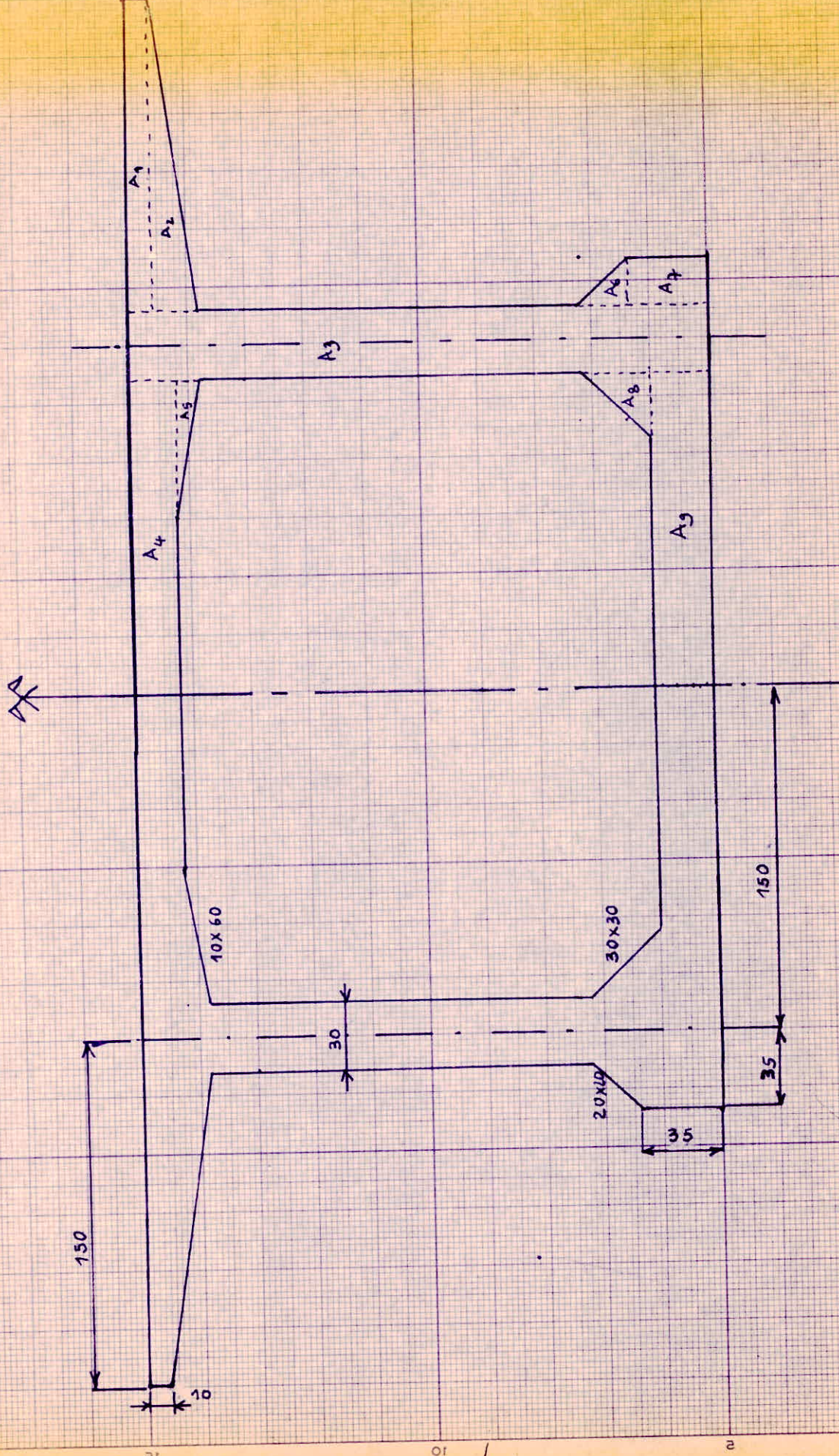
Les dalles supérieures et inférieures, ainsi que les deux courbes ne sont pas précontraintes, elles seront donc calculées d'après les normes du Béton armé.

Phases de construction :

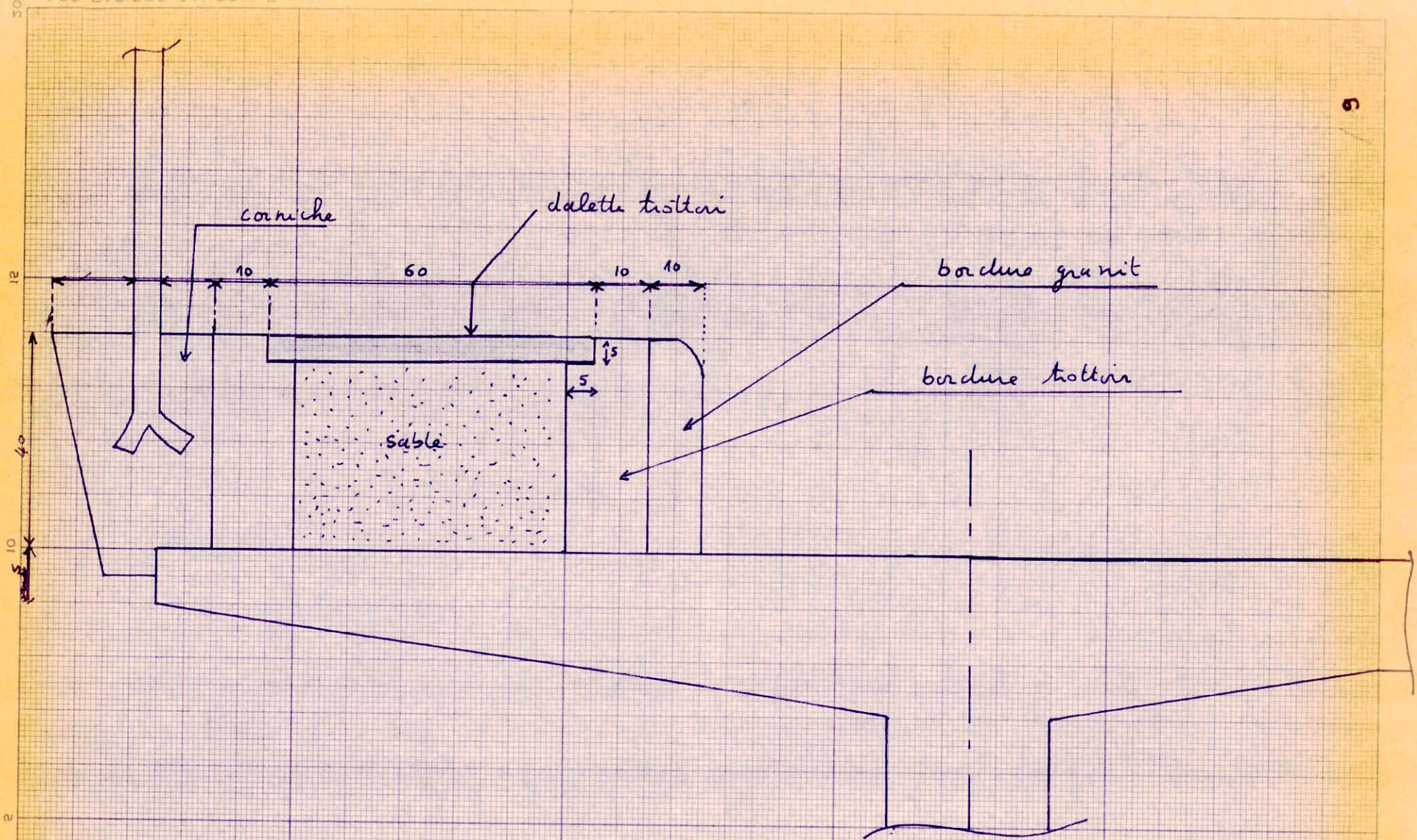
- mise en place des câbles et armatures diverses
- coulage de l'ouvrage en entier sur échafaudage général en acier
- mise en tension des câbles.
ainsi, pas de cette mise en tension des câbles, le poids de la totalité de l'ossature résistante en Béton est réalisée.
- réalisation de la Superstructure constituée par la chaussée et les trottoirs.



echelle 1/500.

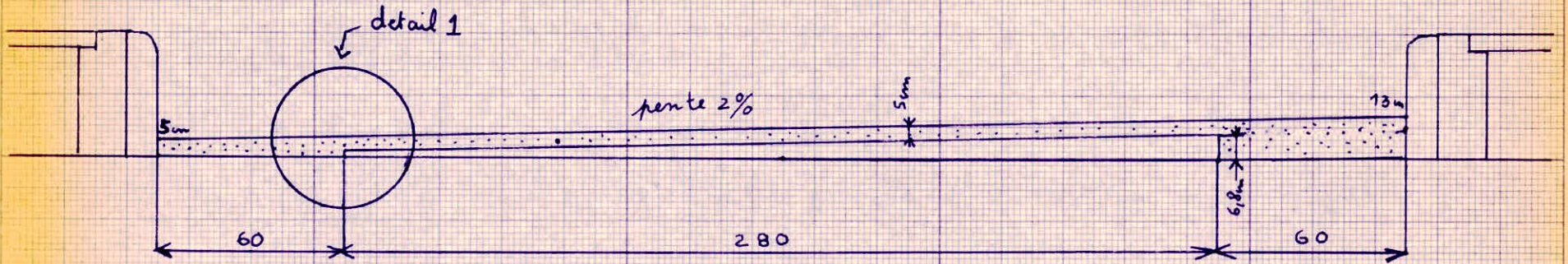
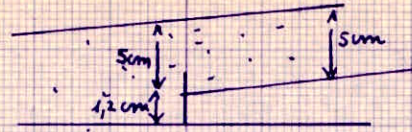



Echelle 1/25



echelle 1/10

detail 1
(non à l'échelle)



 revêtement (gravillon + bitume) de densité $1,8 \text{ t/m}^3$

 pente de béton maigre (2%) de densité $2,2 \text{ t/m}^3$
(renfermé)

echelle 1/20

Calcul des caractéristiques de la section milieu :

Les calculs sont effectués pour un demi-pout, soit la moitié de la poutre caisson.

on a pris pour axe (xx) l'axe supérieure de la section décomposée en triangles et rectangles comme indiqué sur la figure.

A	B _i	y _i	B _i y _i	a _i = y _G - y _i	I _{oi}
B1	1350	5	6750	88,13	11250
B2	1350	16,67	22504,50	76,46	30.000
B3	6000	100	6.10 ⁵	-6,87	2.10 ⁷
B4	2700	10	27.10 ³	83,13	9.10 ⁴
B5	30	23,33	6999	69,80	1666,67
B6	200	158,33	31666	-65,20	4444,44
B7	700	182,50	127750	-89,37	71458,33
B8	450	165	74250	-71,87	22500
B9	3375	187,50	632812,50	-94,37	175781,25

$$\sum B_i = 16425 \text{ cm}^2$$

$$\sum B_i y_i = 1529732$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{\sum B_i y_i}{\sum B_i} = 93,13$$

$y_G = 93,13$ est le centre de gravité de la section milieu brute. \Rightarrow calcul de a_i

par conséquent : $\sum a_i^2 B_i = 77603209,99$

pour calculer I_{oi} , nous rappelons que pour un rectangle : $I_o = \frac{bh^3}{12}$

que pour un triangle : $I_o = \frac{bh^3}{36}$

que pour un cercle : $I_o = \frac{\pi r^4}{64}$

enfin, nous obtenons que : $\sum (I_{oi} + a_i^2 B_i) = 98010310,68 \text{ cm}^4$

représentant le moment d'inertie brut de la section.

en résumé :

$$B_{\text{brut}} = 16425 \text{ cm}^2$$

$$V = 93,13 \text{ cm}$$

$$S_{(xx)\text{brut}} = 1529732 \text{ cm}^3$$

$$V' = 106,87 \text{ cm}$$

$$I_{\text{brut}} = 98010310,68 \text{ cm}^4$$

III Matériaux et contraintes admissibles.

les Betons utilisés pour le béton précontraint ne présentent aucune différence essentielle avec les betons utilisés pour le béton ^{armé} précontraint de bonne qualité. Mais les contraintes admissibles adoptées sont différentes.

Aussi, nous distinguons les contraintes admissibles à prendre en considération dans la partie de béton précontraint (les deux axes de la poutre caisson) et celles à prendre en considération dans la partie de béton armé (dalles supérieure et inférieure, trottoir).

Dosage du Béton :

dosage	ciment.	contrôle	Granulats.
400 kg/m ³	CPA 325	strict.	C _g = 25 mm.

Résistance nominale :

elle est définie comme la moyenne arithmétique des mesures obtenues pour chaque éprouvette diminuée des $\frac{8}{10}$ de leur écart quadratique moyen S .

les mesures sont faites en général par écrasement en compression axiale d'éprouvettes cylindriques de béton de 159,6 mm de diamètre (section droite = 200 cm²) et de 320 mm de hauteur.

la résistance en traction - flexion est en général mesurée sur éprouvettes prismatiques à section carrée de côté b , le moment de rupture étant

$$M_u = \frac{3,6 M}{b^3}$$

nous rappelons que pour un nombre n de mesures (m_1, m_2, \dots, m_n)
la moyenne arithmétique étant $m_a = \frac{\sum m_i}{n}$, l'écart quadratique
moyen sera :

$$s = \sqrt{\frac{\sum (m_i - m_a)^2}{n}}$$

d'où :

$$\sigma_u = \text{résistance nominale en compression} = \sigma_{28} - \frac{8}{10} s$$

$$\sigma_u = \text{résistance nominale en traction} = \sigma_{28} - \frac{8}{10} s$$

Contraintes de compression dans le Béton Précontraint :

1° conditions de Service : la contrainte maximale admissible
en compression ($\bar{\sigma}$) pour le béton est fixée au $\frac{42}{100}$ de la résistance
nominale à 28 jours.

on exige pour notre ouvrage une résistance nominale de
compression égale à 400 kg/cm^2

par conséquent :

$$\bar{\sigma} = 0,42 \cdot \sigma_u$$

$$\bar{\sigma} = 0,42 \cdot 400$$

$$\bar{\sigma} = 168 \text{ kg/cm}^2$$

2° Période de construction : la contrainte maximale
admissible en compression pour le béton au jour j est fixée au
 $\frac{55}{100}$ de la résistance nominale atteinte à ce même jour j

$$\bar{\sigma}_j = 0,55 \sigma_j$$

pour un âge supérieur à 28 jours, on adoptera pour σ_j la
valeur de la résistance à 28 jours.

Contraintes de traction dans le Béton Précontraint :

Les fibres extrêmes de notre poutre précontrainte sont toujours comprimées.

σ et σ' sont toujours positives.

Malheureusement, la contrainte de traction admissible dans le béton précontraint est égale au $\frac{42}{100}$ de la résistance nominale en traction à 28 jours σ'_u soit donc :

$$\bar{\sigma} = 0,42 \sigma'_u$$

en général σ'_u varie entre 25 et 30 kg/cm².

on pourra admettre en première approximation que :

$$\sigma'_u = 7 + \frac{6}{100} \sigma_u.$$

vu que : $\sigma_u = 400 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma'_u = 7 + \frac{6}{100} \cdot 400.$$

$$\sigma'_u = 31 \text{ kg/cm}^2.$$

par conséquent :

$$\bar{\sigma}' = 0,42 \cdot \sigma'_u$$

$$\bar{\sigma}' = 0,42 \cdot 31.$$

$$\bar{\sigma}' = 13,02 \text{ kg/cm}^2.$$

Contrainte de cisaillement dans le Béton Précontraint :

la contrainte maximale de cisaillement admissible dans l'âme de la poutre caisson ($\bar{\tau}$) se calcule en un point donné, compte tenu de la contrainte de compression σ en ce point par la formule de MM. CHALOS et BÉTEILLE

$$\bar{\tau}^2 \leq \frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} (\bar{\sigma} - \sigma) (\bar{\sigma}' + \sigma).$$

avec : $\bar{\sigma}' = 168 \text{ kg/cm}^2$.

$\bar{\sigma} = 13,02 \text{ kg/cm}^2$

ce calcul de $\bar{\sigma}$ se fait au niveau du centre de gravité.

Béton armé :

Le dosage est identique au dosage du béton précontraint car on coule la poutre caisson en même temps.

Résistance nominale :

on exige une résistance nominale σ_n de 300 bars (306 kg/cm^2)

$$\sigma_n = 306 \text{ kg/cm}^2.$$

et une résistance nominale σ'_n de traction égale à 25 bars.

$$\sigma'_n = 25,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Contrainte de compression :

$$\bar{\sigma}_b = (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \epsilon) \sigma_{28}. \quad (\text{CCBA 68 article 9,4})$$

avec : $\alpha = 1$ (classe 325).

$\beta = 1$. (cote strict).

$\gamma = 1$ (car $\frac{h_m}{c_g} = \frac{20}{2,5} = 8 > 4$).

$$\gamma = \begin{cases} 0,30 & \text{compression simple (C.S)} \\ 0,60 & \text{flexion simple F.S} \end{cases}$$

$\epsilon = 1$. en compression simple.

ϵ varie de 0,5 à 1 en flexion simple.

ainsi donc :

en compression simple : $\bar{\sigma}_b = \bar{\sigma}_{b0} = 0,30 \cdot \sigma'_{28}$

$$\bar{\sigma}_b = 0,30 \cdot 300$$

$$\bar{\sigma}_b = 90 \text{ bars.}$$

en flexion simple : $\bar{\sigma}_b = 0,60 \cdot \epsilon \cdot \sigma_{28}$

$$\bar{\sigma}_b = 0,6 \cdot 300 \cdot \epsilon = 180 \epsilon \text{ bars.}$$

par une section rectangulaire : $\epsilon = 1$.

$$\text{d'où : } \bar{\sigma}_b = 180 \text{ bars en F.S.}$$

en resume :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Compression simple : } \bar{\sigma}_b = 90 \text{ bars} = 92 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{flexion simple : } \bar{\sigma}_b = 180 \text{ bars} = 184 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right.$$

a souligner que ces contraintes sont valables dans le calcul des dalles et trottoirs qui sont des sections rectangulaires sollicitées à la flexion simple.

Contrainte de référence de traction dans le Béton armé :

$$\bar{\sigma}'_b = \alpha \cdot \rho \cdot \gamma \cdot \theta \cdot \sigma_{28} \quad (\text{article 9,5 CCBA 68})$$

α , ρ , γ ont les mêmes valeurs que précédemment.

$$\theta = 0,018 + \frac{2,1}{\sigma_{28}} = 0,018 + \frac{2,1}{300} = 0,025.$$

sollicitation pondérée du 1^{er} genre.

d'où : $\bar{\sigma}'_b = 0,025 \cdot 300 = 7,5 \text{ bars.}$

$$\bar{\sigma}'_b = 7,5 \text{ bars} = 7,65 \text{ kg/cm}^2.$$

Contrainte de cisaillement τ_b due à l'effort tranchant, dans le Béton armé :

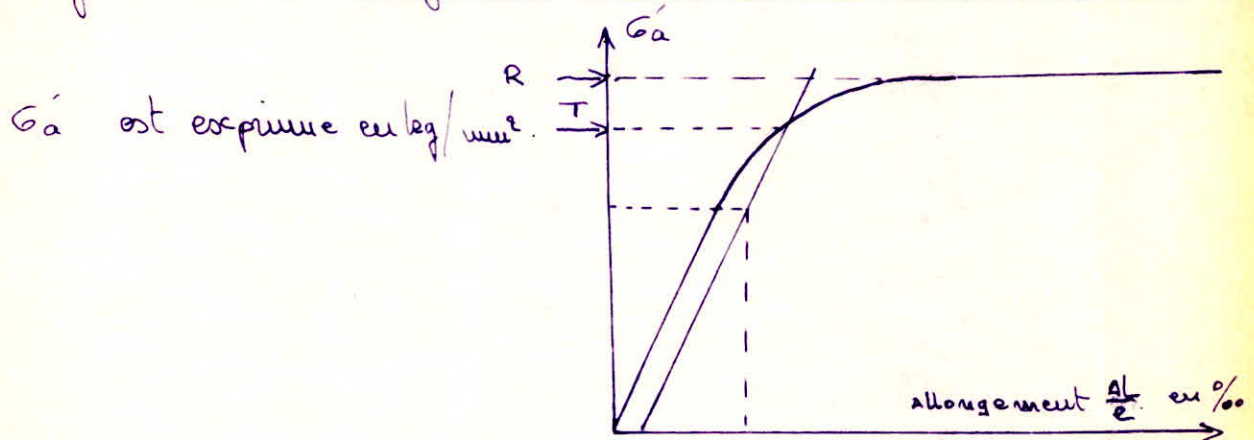
pour notre ouvrage, les dalles supérieures et inférieures en Béton armé sont soumises à des contraintes de cisaillement due à l'effort tranchant. Pour ne pas avoir d'armatures transversales dans ces dalles, il faut que

$$\underline{\tau_b \leq 1,15 \bar{\sigma}'_b}$$

Alimatures de Précontraintes :

après les essais auxquels fut vouée la précontrainte réalisée avec des aciers ordinaires, il est dû à Freyssinet d'avoir bien dégagé la nécessité d'employer des aciers à haute résistance et à haute limite d'élasticité; en effet les aciers doux ordinaires ne pouvaient être tendus qu'à une contrainte d'environ 15 kg/mm^2 , et les distorsions par fluage et retrait du béton et par relaxation de l'acier atteignant facilement une dizaine de kg/mm^2 entraîneraient une diminution de plus des $\frac{2}{3}$ de la précontrainte de béton. Par contre, des aciers à haute résistance peuvent être tendus facilement à 125 kg/mm^2 , et si les distorsions atteignent par exemple 25 kg/mm^2 , la précontrainte de béton conservera encore les $\frac{4}{5}$ de sa valeur initiale.

Diagramme d'allongement - traction d'un acier à haute résistance :



Contrainte de rupture R : elle est définie comme le quotient de de l'effort maximal mesuré dans l'essai de traction, d'une éprouvette par la section moyenne initiale de cette éprouvette.

Contrainte caractéristique de déformation T :

elle est définie comme l'ordonnée du point d'intersection du diagramme

de traction de l'éprouvette avec la droite ayant une pente de 20 kg/mm^2 et passant par le point d'abscisse au maximum et d'ordonnée nulle

Elasticité - allongement : dans la première partie rectiligne du diagramme, il y a proportionnalité entre les contraintes σ_a et les allongements relatifs $\frac{\Delta L}{L}$, c'est la phase élastique, et le coefficient d'élasticité correspondant a en général une valeur moyenne $E_a = 21.000 \text{ kg/mm}^2$.

Contrainte admissible :

La contrainte maximale dans une armature de précontrainte étant toujours atteinte au moment de la mise en tension (à la sortie des organes d'ancrages), c'est cette contrainte σ_{ai} qui ne devra pas dépasser une valeur maximale $\bar{\sigma}_{ai}$

$$\bar{\sigma}_{ai} = T_{MG} - 2,5 S_{TG}$$

avec : T_{MG} = contrainte caractéristique moyenne garantie
 S_{TG} = écart quadratique garanti.

La contrainte maximale en service n'est pas réglementairement limitée car elle est toujours inférieure à la contrainte réalisée à la mise en tension.

Caractéristiques des câbles utilisés dans notre ouvrage :

on utilise des câbles (Freyssinet) à fils parallèles que l'on met en tension à l'aide de vérins prenant appui sur le béton durci. Les câbles sont sous gaine et par conséquent non adhérent au béton, au moment de la mise en tension. Après mise en tension, on bloque les câbles tendus à l'aide de cônes d'ancrages placés aux extrémités et agissant par coinçement conique.

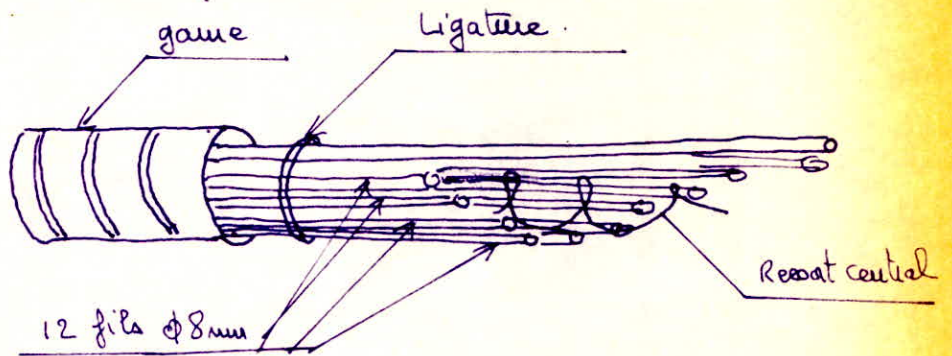
Les fils sont en général, rangés en couronne autour d'un ressort central en fil d'acier de 1,5 mm de diamètre, qui a pour objet d'éviter l'enchevêtrement des fils.

on utilise des câbles de $12 \phi 8$, c'est à dire constitués de 12 fils qui ont pour diamètre 8 mm

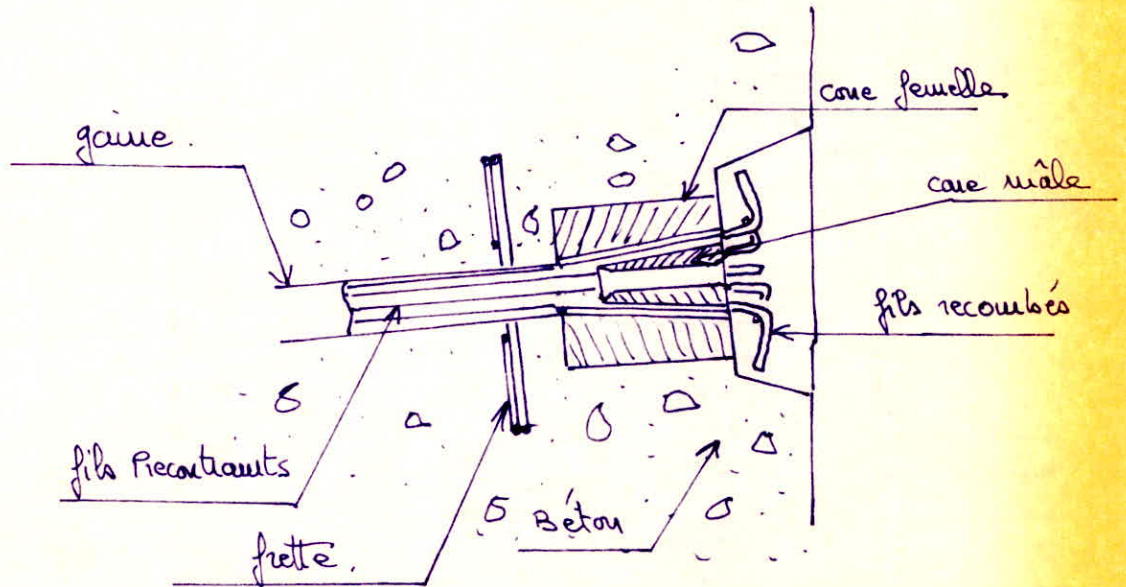
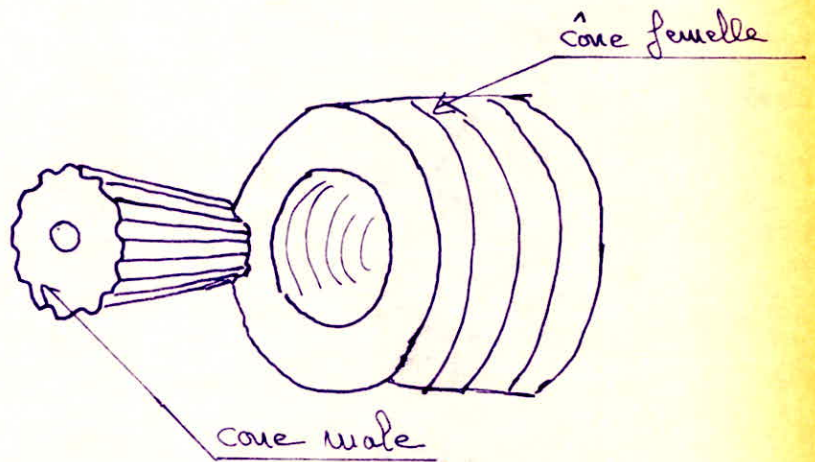
câbles	$12 \phi 8$
diamètre des fils en mm	8
section du câble en mm^2	603
tension maximale en tonne	80
tension utile en service	50 / 55
diamètre de la gaine en mm	43
Cône d'ancrage	Hauteur en mm → 125
	diamètre en mm → 150

La contrainte maximale d'un fil est donc : $\bar{\sigma}_{ai} = \frac{80.000}{603} = 132,67$
 $\bar{\sigma}_{ai} = 132,67 \text{ kg/mm}^2$

cable FREYSSINET
fig (1)



CONES d'ANCRAGE
FREYSSINET
fig (2)



Coupe sur un cône d'ancrage mis en place

Armatures Ordinaires dans le Béton Précontraint :

les armatures autres que les armatures de précontrainte sont appelées armatures ordinaires, quel que soit leur rôle.

Limite d'élasticité nominale :

on définit pour ces aciers la limite d'élasticité nominale σ_{eu} comme la maxime des valeurs des limites d'élasticités mesurées diminuées de 2 fois leur écart quadratique moyen.

pour les aciers à adhérence améliorée qu'on emploie pour les armatures transversales des âmes précontraintes :

$$\begin{aligned} \phi \leq 20 \text{ mm} & \quad \sigma_{eu} = 4200 \text{ kg/cm}^2 \\ \phi > 20 \text{ mm} & \quad \sigma_{eu} = 4000 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Contraintes admissibles :

1° en Période de construction :

$$\bar{\sigma}_a = 0,75 \sigma_{eu}$$

$$\phi \leq 20 \text{ mm} \rightarrow \bar{\sigma}_a = 3150 \text{ kg/cm}^2$$

2° en période de Service :

le cas de sollicitation en service à la traction d'armatures ordinaires ne concerne que les armatures transversales d'âmes (cables et étriers).

la contrainte admissible sera égale à :

$$\bar{\sigma}_a = f'_a \cdot \sigma_{eu}$$

avec :

$f'_a = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^2$ si la section ne comporte pas de reprise de bétonnage.

$f'_a = \frac{z}{\bar{z}}$ dans le cas contraire.

avec : z = contrainte réelle de cisaillement du béton

\bar{z} = contrainte maximale de cisaillement admissible

calculé d'après la formule de M. CHARLOS et BETTELLE.

Contraintes admissibles pour les aciers utilisés en Béton Armé

- contrainte admissible de traction pour les armatures

Parallèles de la dalle : $\bar{\sigma}_a = f_a \cdot \sigma_{eu}$.

σ_{eu} étant la contrainte d'élasticité nominale de l'acier

f_a étant un coefficient égal à $\frac{2}{3}$ pour les sollicitations du premier genre.

on utilise des aciers à haute adhérence de classe FeE40A et 40B.

<u>classes</u>	Fe E 40 A et FeE 40 B	
	$\phi \leq 20$	$\phi > 20$
$\sigma_{eu} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	4200	4000
$\bar{\sigma}_a \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	2800	2670

La valeur de la contrainte admissible définie ci-dessus est fonction des caractéristiques mécaniques de l'acier ; on peut être amené à utiliser pour $\bar{\sigma}_a$ une valeur inférieure afin de limiter la fissuration du béton. (règles CC BA 68 article 49)

la valeur à considérer pour $\bar{\sigma}_a$ est alors limitée à la plus grande des valeurs suivantes exprimées en bars.

$$\sigma_1 = k \frac{\gamma}{\phi} \frac{\tilde{w}_f}{1 + 10 \tilde{w}_f} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = 2,4 \sqrt{\frac{\gamma k \bar{\sigma}_a}{\phi}}$$

avec k coefficient dépendant des conséquences de la fissuration.

$k = 1,5 \cdot 10^6$ si la fissuration est peu nuisible.

$k = 10^6$ si la fissuration est préjudiciable.

$k = 0,5 \cdot 10^6$ si la fissuration est très préjudiciable.

η étant un coefficient de fixation

$\eta = 1$ pour les ronds lisses

$\eta = 1,6$ pour les aciers à haute adhérence.

ϕ diamètre, en millimètre, de la plus grosse des barres tendues.

$\tilde{\omega}_g$ étant le pourcentage de fixation défini par: $\tilde{\omega}_g = \frac{A}{B_g}$
avec A = section totale des barres tendues.

B_g = section d'emboîtement des barres tendues, c'est à dire l'aire de la surface du béton tendu limitée par le contour de la pièce et une parallèle à l'axe neutre et telle que cette aire ait même centre de gravité que les armatures tendues.

Contrainte de traction admissible pour les armatures transversales:

cette contrainte, désignée par $\bar{\sigma}_{at}$, a pour valeur

$$\bar{\sigma}_{at} = f_{at} \cdot \bar{\sigma}_{eu}$$

avec $\bar{\sigma}_{eu}$ = limite d'élasticité nominale de l'acier constituant les armatures transversales.

f_{at} = coefficient ayant les valeurs suivantes si les armatures transversales sont perpendiculaires à la ligne moyenne.

$$f_{at} = 1 - \frac{z_b}{2\bar{\sigma}_b} \quad \text{si } f_{at} \text{ ainsi calculé est supérieur à } \frac{2}{3}$$

$$f_{at} = \frac{2}{3} \quad \text{dans le cas contraire.}$$

Pour pouvoir utiliser ce type d'armatures, il faut que la contrainte de cisaillement z_b soit inférieure aux valeurs suivantes

$$z_b \leq 3,5 \bar{\sigma}_b \quad \text{si } \sigma'_b < \sigma'_{b0}$$

$$z_b \leq \left(4,5 - \frac{\sigma'_b}{\sigma'_{b0}}\right) \bar{\sigma}_b \quad \text{si } \sigma'_{b0} < \sigma'_b \leq 2\bar{\sigma}'_{b0}$$

Résistance minimale du Béton Armé :

d'après le CCBA 68, dans toute pièce constituant une individualité mécanique, la résistance nominale du Béton doit être telle que sa contrainte admissible en compression simple, exprimée en bars, satisfasse à l'inégalité suivante :

$$\bar{\sigma}'_{bo} > 20(1 + 1,25 \psi_d).$$

ψ_d désignant le plus haut coefficient de scellement parmi ceux des aciers utilisés dans la pièce.

$$\psi_d = \frac{1,5}{\sqrt{2}} \cdot \eta_d.$$

$\eta_d = 1,5$ pour les aciers à haute adhérence.

d'où :

$$\psi_d = \frac{1,5}{\sqrt{2}} \cdot 1,5 = 1,7.$$

par conséquent :

$$\bar{\sigma}'_{bo} > 62,5 \text{ bars.}$$

$$\text{a } \bar{\sigma}'_{bo} = 90 \text{ bars.}$$

Ainsi donc, la condition ci-dessus est vérifiée !!!

Tableau récapitulatif des caractéristiques de Matériaux

		Béton Précontraint (âmes de la poutre)	Béton armé (dalle)
Caractéristiques du Béton	dosage lave	400 kg/m ³ EPA 325	400 kg/m ³ CPA 325
	contrainte nominale	$\sigma_u = 400 \text{ kg/cm}^2$ $\sigma'_u = 31 \text{ kg/cm}^2$	$\sigma_u = 300 \text{ kg/cm}^2$ $\sigma'_u = 25,5 \text{ kg/cm}^2$
	contrainte de compression admissible en flexion	$\bar{\sigma}_b = 168 \text{ kg/cm}^2$	$\bar{\sigma}_b = 184 \text{ kg/cm}^2$
	contrainte de traction de référence	$\bar{\sigma}'_b = 13,02 \text{ kg/cm}^2$	$\bar{\sigma}'_b = 7,65 \text{ kg/cm}^2$
	contrainte de cisaillement admissible	$\tau^2 \leq \frac{\bar{\sigma}'_b}{\bar{\sigma}_b} (\bar{\sigma}_b - \bar{\sigma}) (\bar{\sigma}'_b)$	$\tau_b \leq 8,80 \text{ kg/cm}^2$
	module d'élasticité (kg/cm ²)	$E_i = 21000 \sqrt{\sigma_u} = 490.000$ $E_v = 7000 \sqrt{\sigma_u} = 140.000$	$E_i = 21000 \sqrt{\sigma_u} = 364.000$ $E_v = 7000 \sqrt{\sigma_u} = 121.000$
Caractéristiques des Armatures	Nature	cables : haute résistance HR $\rightarrow \sigma_{eu} \approx 14500 \text{ kg/cm}^2$ armature ordinaire : H. adhérence HA $\rightarrow \sigma_{eu} = 4200 \text{ kg/cm}^2$	Haute adhérence $F_{eE} 40A$ $\sigma_{eu} = 4200 \text{ kg/cm}^2$
	diamètre	cables : 12 $\phi 8$ armature ordinaire : $\phi 10$	$\phi \leq 20$
	contraintes admissibles et Tension.	cable $\left\{ \begin{array}{l} T_{max} = 80t \\ T_{service} = 50t \end{array} \right.$ armature ordinaire : $\bar{\sigma}'_a = \rho'_a \sigma'_a$ ou $\rho'_a = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\bar{\sigma}} \right)^2$ $\rho'_a = \frac{2}{3}$	<u>armatures longitudinales</u> $\bar{\sigma}_a = \eta_f \left(2800 + \eta_{cs} (6, \sigma_c) \right)$ avec $\sigma_c = k \frac{M}{\phi} \frac{\omega_s}{1 + \omega_s}$ $\sigma_c = 2,4 \sqrt{\frac{M k \cdot \sigma_b}{\phi}}$ <u>armatures transversales :</u> $\bar{\sigma}_{at} = \rho_{at} \cdot \sigma_{eu}$ $\rho_{at} = 1 - \frac{\tau_b}{9 \bar{\sigma}_b}$ ou $\rho_{at} = \frac{2}{3}$
	module d'élasticité	H. R $\rightarrow E_a = 21 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ HA $\rightarrow E_a = 21 \cdot 10^5$	$21 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$

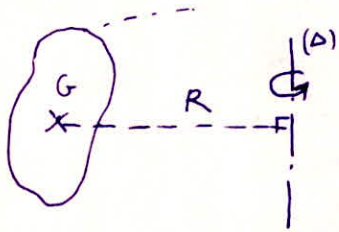
IV Charges permanentes et surcharges

introduction

Pour le calcul du volume de béton de la poutre caisson, on fera appel au théorème de Guldin (de la moyenne) :

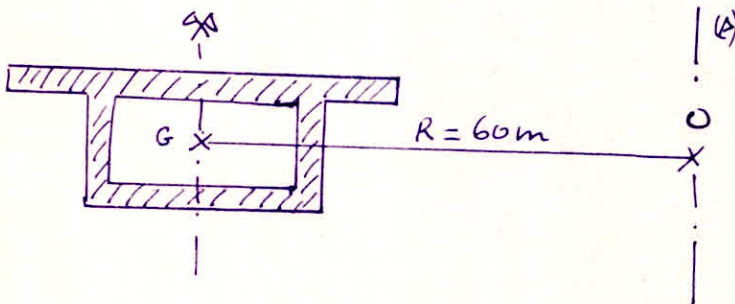
Théorème de Guldin :

Le volume V engendré par une surface (S) tournant autour d'un axe (Δ) situé à une distance R du centre de gravité G de S est donné par: $V = 2\pi R S$ pour une rotation de 2π



$V = \alpha R \cdot S$ pour une rotation de α .

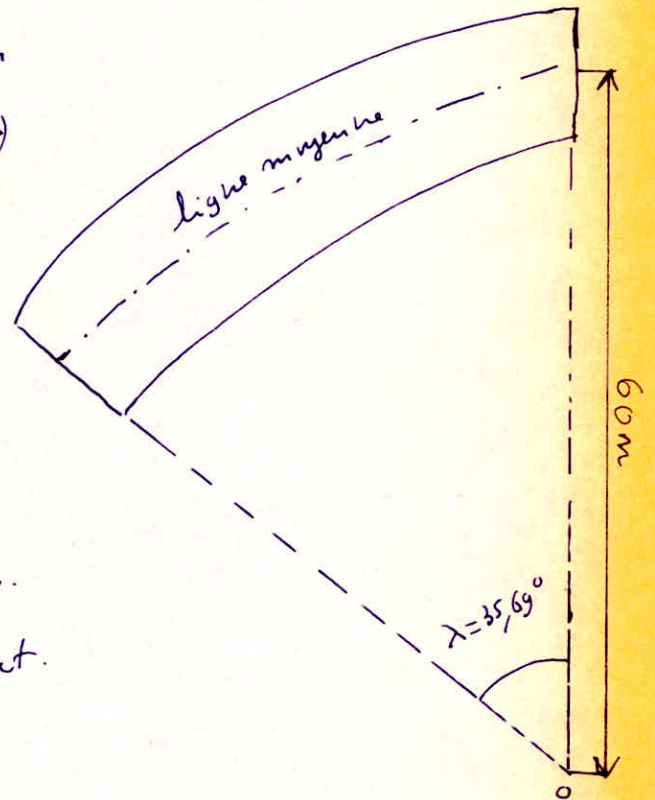
application pour notre poutre caisson



$$V = \lambda \cdot R \cdot S$$

λ = périmètre angulaire en radians.

S = aire de la section du pont.



1) charges permanentes :

a) évaluation de la charge permanente à vide : g_1

Elle est composée uniquement des poids de l'ossature résistante ; c'est à dire des poids du caisson sans la superstructure et le revêtement.

Sat $G_1 =$ le poids du Caisson

et $g_1 =$ charge permanente en service à vide par mètre linéaire

La densité du béton précontraint sera prise égale à $2,5 \text{ t/m}^3$. ($d = 2,5 \text{ t/m}^3$)

Alors on aura: $G_1 = d \times R \times S$

$d =$ densité du béton précontraint

$$d = 2,5 \text{ t/m}^3$$

$\lambda =$ patée angulaire

$$\lambda = 35,69^\circ$$

$R =$ rayon de courbure de la travée

$$R = 60 \text{ m}$$

$S =$ Section du Caisson

$$S = 16425 \times 2$$

$$= 32850 \text{ cm}^2$$

d'où la charge g_1 par mètre linéaire :

$$g_1 = \frac{G_1}{L} = \frac{G_1}{R \times \lambda} \Rightarrow g_1 = \frac{d \times R \times S}{R \times \lambda} \quad g_1 = d \cdot S$$

$$g_1 = 2,5 \times 3,285$$

$$g_1 = 8,2125 \text{ t/m}$$

b) Évaluation de la charge permanente en service: g

Elle est composée du poids du Caisson et du poids de la superstructure. C'est à dire elle est égale au poids du Caisson plus le poids de la superstructure g compris le poids du revêtement.

• coupe transversale de la chaussée (voir figure)

Le revêtement de la chaussée se compose de 2 couches :

- une couche de béton maigre de pente 2% de densité $2,2 \text{ t/m}^3$ (de section S_1)

- une couche de bitume plus gravillon (renformés) de densité $1,8 \text{ t/m}^3$. (de section S_2).

$$S_1 = \frac{1}{2} (1,2 + 6,8) 280$$

$$S_1 = 1120 \text{ cm}^2 = 0,112 \text{ m}^2$$

$$S_2 = \left[\frac{1}{2} (5 + 13) 400 - S_1 \right] = \left[\frac{1}{2} 18.400 - 1120 \right] = 2480 \text{ cm}^2$$

$$S_2 = 0,248 \text{ m}^2$$

• Coupe transversale du trottoir (voir figure)

les différents éléments constituant le trottoir sont :

- Bordures granits de densité $2,5 \text{ t/m}^3$, préfabriquées.
- Bordures trottoirs en béton armé de densité $2,5 \text{ t/m}^3$ coulés sur place.
- Corniches en béton armé de densité $2,5 \text{ t/m}^3$, préfabriquées.
- dalles trottoirs préfabriquées, en béton armé de densité $2,5 \text{ t/m}^3$.
- sable sous dalles de densité $1,6 \text{ t/m}^3$.

• Évaluation des charges permanentes par mètre linéaire de la superstructure

- revêtement :

• 1^{ère} couche (bitume + gravillon) : $0,248 \times 1,8 \cdot 10^3 \text{ ---} \rightarrow 446,4 \text{ kg}$

• 2^{ème} couche (pente de béton maigre) $0,112 \times 2,2 \cdot 10^3 \text{ ---} \rightarrow 246,4 \text{ kg}$

- Bordures granits :

$2 \times 2,5 \cdot 10^3 (40 \cdot 10^{-2} \times 10 \cdot 10^{-2}) \text{ ---} \rightarrow 2000$

- Bordures trottoirs :

$4 \times 2,4 [(5 \cdot 10^{-2} \times 35 \cdot 10^{-2}) + (40 \cdot 10^{-2} \times 10 \cdot 10^{-2})] \cdot 10^3 \text{ ---} \rightarrow 5520$

- corniches :

$2 \times 2,5 \cdot 10^3 \left[\frac{1}{2} (20 + 10) \cdot 10^{-2} \times 45 \cdot 10^{-2} + 40 \times 10 \cdot 10^{-4} \right] \text{ ---} \rightarrow 537,5$

- dalles trottoirs

$2 \times 2,5 \cdot 10^3 (5 \times 60 \cdot 10^{-4}) \text{ ---} \rightarrow 1500$

- Sable :

$2 \times 1,6 \cdot 10^3 (50 \times 35 \cdot 10^{-4}) \text{ ---} \rightarrow 5600$

- garde corps :

$2 \times 58 \text{ ---} \rightarrow 116$

pois de la superstructure + revêtement par m/l = $2808,3 \text{ kg/m}$

= $2,8083 \text{ t/m}$

d'où la charge

permanente en service : $g = g_1 + 2,8083$
 $= 8,2125 + 2,8083$

$g = 11,021 \text{ t/m}$

2 Surcharges

a) caractéristiques du pont:

- largeur chargeable l_s (article 2, 1 page 6 CPC)
elle est déduite de la largeur disponible l_r qui est définie comme la largeur comprise entre deux dispositifs de sécurité ou bordures.

dans notre cas: $l_s = l_r = 4 \text{ m}$.

- nombre de voie N (article 2, 2 CPC)

$$N = \text{partie entière de } \frac{l_s}{3} = \frac{4}{3} \quad N = 1 \text{ voie}$$

- classe du pont (article 3, 2 CPC)

$$\left. \begin{array}{l} N = 1 \text{ voie} \\ l_s = l_r = 4 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pont de 3}^{\text{ème}} \text{ classe.}$$

b) Les surcharges à considérer pour le calcul de notre pont sont:

- surcharge A
- surcharges B (B_L et B_R): la surcharge B_L ne s'applique pas pour un pont de 3^{ème} classe.
- surcharge A.
- surcharges trottoirs.

• surcharge A: c'est une surcharge sur la chaussée, uniformément répartie, son intensité est:

$$A = K A_L \frac{l_0}{l_w}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{pont de 3}^{\text{ème}} \text{ classe} \\ N = 1 \text{ voie} \end{array} \right\} \Rightarrow K = 0,9$$

$$A_L = 230 + \frac{36000}{L+12} \text{ en } \text{kg/m}^2$$

L = longueur à surcharger, selon le cas le plus défavorable (donné par la ligne d'influence de l'effort considéré)

pont de 3^{ème} classe $\Rightarrow l_0 = 2,75$ $l_v = \frac{4}{1} = 4$ m

Le nombre de voies à surcharger (m) : $1 \leq m \leq N = 1$

donc $m = 1$ on a un seul cas.

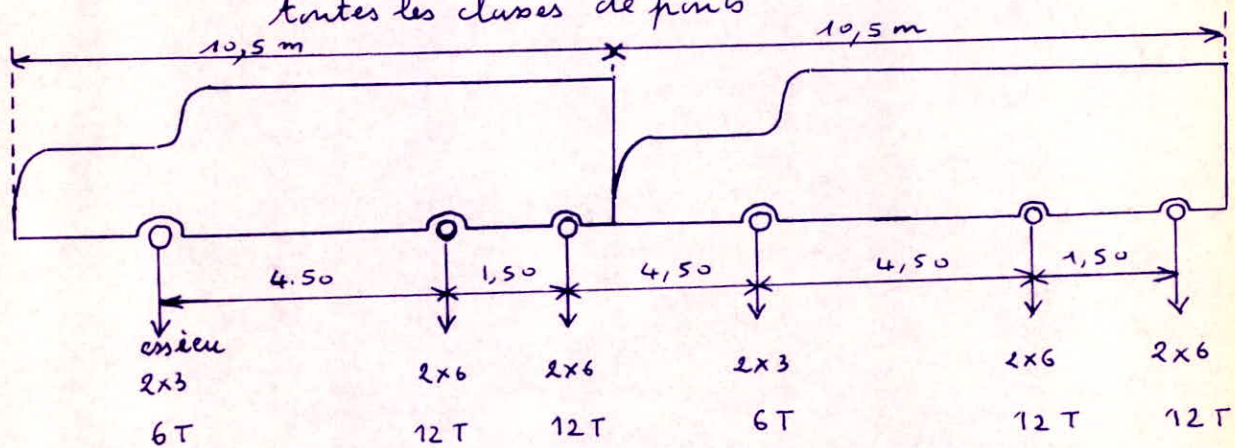
d'où la surcharge A par mètre linéaire est: $A l_v$

c'est à dire $K A_L \frac{l_0}{l_v} \cdot l_v = K A_L l_0$

• Surcharges B : surcharges roulantes et concentrées

- Système B_c :

il est composé de camions types qui s'appliquent à toutes les classes de ponts



chaque convoi se compose de 2 camions

nombre de convois: on disposera sur la chaussée au maximum autant de files ou convois de camions que la chaussée compte de voie de circulation (selon le cas le + défavorable)

pour notre on a une seule voie \Rightarrow un seul convoi.

sens Longitudinal: 2 camions au maximum.

Selon le cas le plus défavorable.

Les surcharges B_c seront pondérées par un coefficient b_c qui est fonction du nombre de convois considérés et la classe du pont

pont de 3^{ème} classe } $\Rightarrow b_c = 1$
1 convoi

- Système B_2

C'est une roue portant une masse de 10 t
Sa surface d'impact sur la chaussée est
un rectangle uniformément chargé dont le côté
transversal mesure 0,60 m et le côté longitudinal
0,30 m. (art 5,3 page 13 C.P.C)

Pour notre cas, pour le calcul des efforts M, T, C
dans les pontes, les surcharges B_2 sont prépondérantes.
Par contre pour le calcul de la dalle supérieure
on considérera B_c et B_r et on prendra les
efforts les plus défavorables.

- Système B_f : ne s'applique pas pour un pont de 3^{ème} classe.

• Surcharges militaires et exceptionnelles:

Elles ne seront pas considérées pour notre pont.

• Surcharges trottoirs (article 13; chapitre II CPC 1976)

La surcharge uniforme à appliquer sur les trottoirs sera
de 150 kg/m² pour la justification des pontes principales de
façon à produire l'effet maximal cherché.

- un seul trottoir surchargé $\rightarrow S_{t_1} = 0,15 \times 1 = 0,15 \text{ t/m.l.}$

- deux trottoirs surchargés : $S_{t_2} = 0,15 \times 1 \times 2 = 0,30 \text{ t/m.l.}$

Remarques.

1. Les surcharges climatiques: le vent et la neige, ne seront
pas considérées dans nos calculs.

2. On suppose que notre pont est implanté dans une
zone de faible sismicité; les efforts dus aux séismes sont
donc négligeables, dans les piliers.

Toutefois, le séisme est reporté par les piliers. Le calcul
des piliers n'est pas l'objet de notre projet.

3. Coefficient dynamique S

Les surcharges B_c, B_t, B_r sont frappées d'un même coefficient de majoration dynamique.

$$S = 1 + \frac{0,4}{1 + 0,2L} + \frac{0,6}{1 + 4 \frac{P}{S}}$$

L = longueur définie suivant l'élément considéré du pont

P = charge permanente défini par le règlement.

S = surcharge maximale B.

a. Calcul de S pour les pontes

pour le calcul des pontes principales (notre cas) on a :

L = portée de la poutre (d'une travée)

P = charge permanente totale d'une travée.

Pour le calcul des Efforts M_{Bc}, T_{Bc}, C_{Bc} dans notre cas, le cas le plus défavorable se présente lorsqu'on dispose un convoi de 2 camions (voir ligne d'influence des efforts M, T, C)

d'où $S_{Bc} = 2 \times 6 + 12 \times 4$ $S_{Bc} = 60t$
 $S_{B_r} = 6t$

d'où $S = 60t$

$L = 2 \times \lambda = 37,37 \text{ m.}$

$L = 37,37 \text{ m}$

$P = g \times 2 \times \lambda = 11,021 \times 37,37$

$P = 411,85t$

d'où

$$S = 1 + \frac{0,4}{1 + 0,2 \times 37,37} + \frac{0,6}{1 + 4 \frac{411,85}{60}} \quad S = 1,07$$

pour le calcul des pontes : $S = 1,07$

b) Calcul de S_0 pour la dalle trottoir et dalle supérieure :

$$S_0 = 1 + \frac{0,4}{1+0,2L} + \frac{0,6}{1+4\frac{P}{S}}$$

$$l_1 = 3 \text{ m}$$

$$l_2 = 4 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = 3 \text{ m} \\ l_2 = 4 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow l_1 = \max [3; 4] = 4 \text{ m}$$

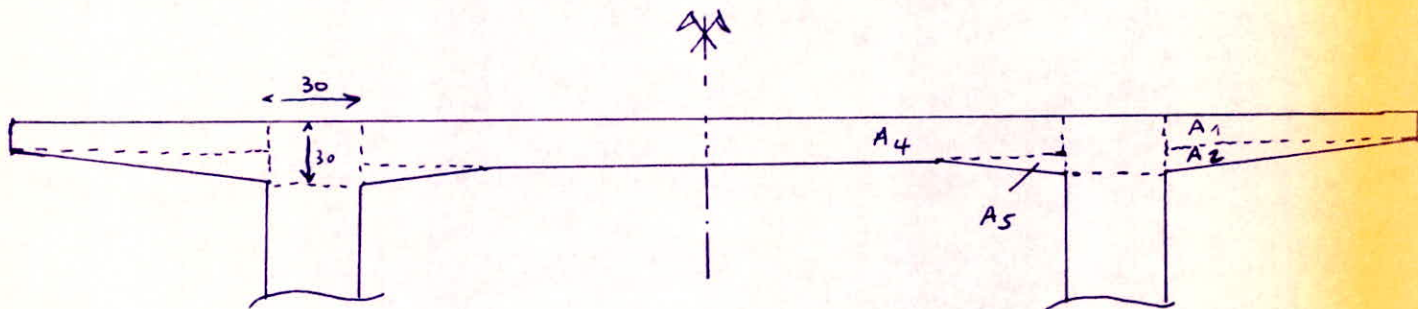
Selon le règlement on prendra $L = \min \{4; 3+3,37\} = 4 \text{ m}$

$$\underline{L = 4 \text{ m}}$$

Surcharge B à disposer sur une longueur $L = 4 \text{ m}$: (disposer le maximum)

$$\left. \begin{array}{l} \bullet B_2 \rightarrow S = 10 \text{ t} \\ \bullet B_c \rightarrow S = 24 \text{ t} \\ \quad \quad \quad (4 \times 6) \end{array} \right\} \underline{S = 24 \text{ t}}$$

Calcul de P: poids de la superstructure plus le poids de la dalle (trottoir + supérieure). correspondant à une longueur de 4 m



• poids de la dalle trottoir + dalle supérieure correspondant à une longueur de 4 m :

$$P_1 = 2,5 \times 4 (A_1 + A_2 + A_4 + A_5 + 4 \times 30 \times 0,30) \times 2$$

$$P_1 = 2,5 \times 4 (0,135 + 0,135 + 0,27 + 0,03 + 0,09) \times 2$$

$$P_1 = 13,2 \text{ t}$$

• poids de la superstructure correspond de 4 m

$$P_2 = 4 \times 2,8$$

$$P_2 = 11,2 \text{ t}$$

$$\text{d'où } P = P_1 + P_2 = 13,2 + 11,2 \quad P = 24,4 \text{ t}$$

$$S = 1 + \frac{0,4}{1 + 0,2 \times 4} + \frac{0,6}{1 + 4 \cdot \frac{24,4}{24}}$$

$$S \approx 1,39. \quad \text{pour les dalles.}$$

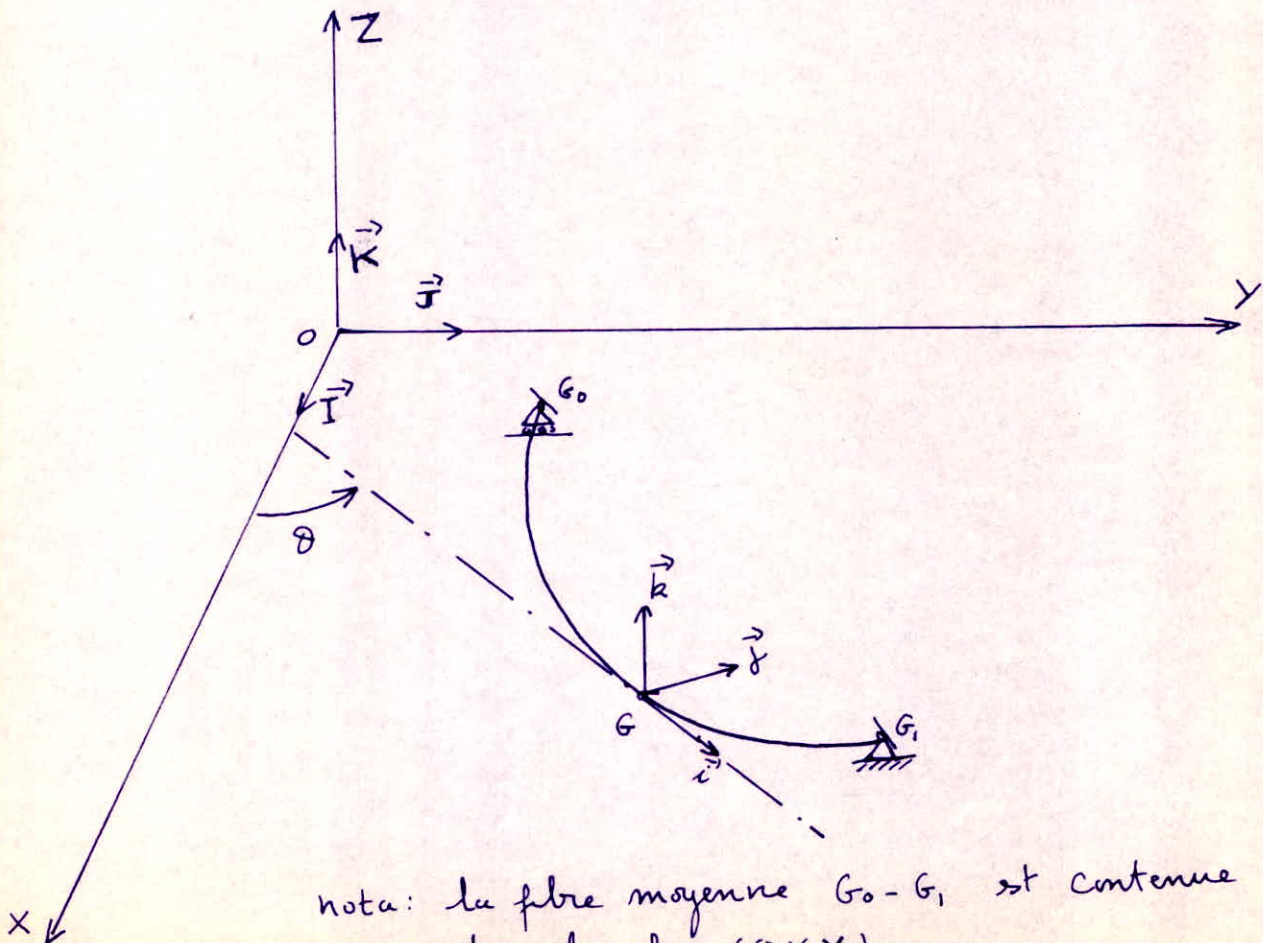
II ETUDE DES EFFORTS

- I. Formules fondamentales pour une poutre courbe sur 2 appuis simples.
- II. Calcul des efforts M, T, C , globaux pour un pont circulaire à une seule travée sur 2 appuis simples.
- III. Répartition des efforts M, T, C globaux transversalement dans le cas d'une poutre courbe à un caisson.

Expressions donnant les efforts M, T, C en une section quelconque du pont

I Formules fondamentales pour une poutre courbe sur 2 appuis simples.

Soit le trièdre direct de référence $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
 A chaque point G de la fibre moyenne G_0-G_1 de la poutre, associons un trièdre direct $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tel que:
 \vec{i} : tangent en G à la fibre moyenne
 $\vec{j} \perp \vec{i}$, $\vec{k} \parallel \vec{K}$ (voir figure ci dessous)



nota: la fibre moyenne G_0-G_1 est contenue dans le plan (OXY) .

dans ce présent chapitre, on déterminera les effets M, T, C en une section quelconque de la poutre courbe dues aux deux systèmes de charges suivants:

- 1) a) forces, appliquées à la fibre moyenne G_0, G_1 ; parallèles à Oz (forces verticales) \vec{F}_i
- b) couples situés dans le plan Oxy ; $\vec{\Gamma}_i$

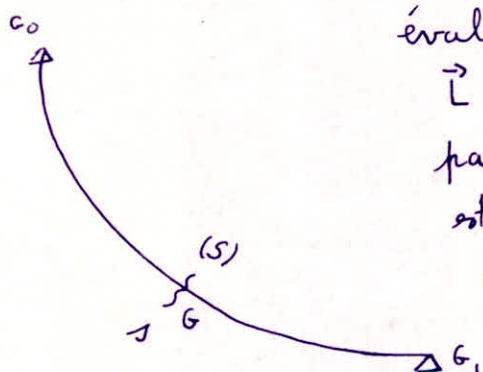
$$\begin{cases} \vec{F}_i = F_i \vec{k} \\ \vec{\Gamma}_i = (\Gamma_i)_x \vec{i} + (\Gamma_i)_y \vec{j} \\ \vec{\Gamma}_i = (\Gamma_i)_t \vec{t} + (\Gamma_i)_n \vec{n} \end{cases}$$

les forces \vec{F}_i et les couples $\vec{\Gamma}_i$ sont appliqués aux points g_i de la fibre moyenne $G_0 - G_1$.
 $g_i (\xi_i, \eta_i)$, l'abscisse curviligne de g_i est σ_i

- 2) a) densité de force verticale: \vec{f}
- b) densité de couple $\vec{\delta}$ contenue dans le plan Oxy .

$$\begin{cases} \vec{f} = f \vec{k} \\ \vec{\delta} = \delta_x \vec{i} + \delta_y \vec{j} \\ \vec{\delta} = \delta_t \vec{t} + \delta_n \vec{n} \end{cases}$$

\vec{f} et $\vec{\delta}$ sont appliqués au point $g (\xi, \eta)$ d'abscisse curviligne σ



évaluons la résultante \vec{R} et le couple \vec{L} , en la section (S) dus à la partie gauche de (S) lorsque la poutre est soumise aux 2 systèmes de charges ci dessus.

$$\vec{R} = \sum_{\sigma_i < \sigma} \vec{F}_i + \int_0^{\sigma} \vec{f}(\sigma) d\sigma$$

or \vec{R} est portée par l'axe Oz , donc l'effet tranchant T dans (S) est R .

Le moment \vec{L} a pour valeur:

$$\vec{L} = \sum_{\sigma_i < \rho} (\vec{F}_i + \vec{F}_i \wedge \vec{g}_i^G) + \int_0^s [\vec{\delta}(\sigma) + \vec{f}(\sigma) \wedge \vec{g}_\sigma^G] d\sigma$$

$$\vec{L} = x \vec{i} + y \vec{j} = C \vec{i} + M \vec{j}$$

- le couple de torsion C est porté par (\vec{i}) tangent à la fibre moyenne
- le moment de flexion M est porté par (\vec{j}) .

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{ds} &= \sum_{\sigma_i < \rho} \frac{d}{ds} (\vec{F}_i + \vec{F}_i \wedge \vec{g}_i^G) + \frac{d}{ds} \left(\int_0^s [\vec{\delta}(\sigma) + \vec{f}(\sigma) \wedge \vec{g}_\sigma^G] d\sigma \right) \\ &= \sum_{\sigma_i < \rho} \left(\frac{d\vec{F}_i}{ds} + \frac{d\vec{F}_i}{ds} \wedge \vec{g}_i^G + \vec{F}_i \wedge \frac{d\vec{g}_i^G}{ds} \right) + \frac{d}{ds} \int_0^s \vec{\delta} d\sigma + \frac{d}{ds} \int_0^s (\vec{f} \wedge \vec{g}_\sigma^G) d\sigma \\ &= \sum_{\sigma_i < \rho} \vec{F}_i \wedge \frac{d\vec{g}_i^G}{ds} + \vec{\delta} + \int_0^s \left[\frac{d\vec{f}}{ds} \wedge \vec{g}_\sigma^G + \vec{f} \wedge \frac{d\vec{g}_\sigma^G}{ds} \right] d\sigma \end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma_i < \rho} \vec{F}_i \wedge \frac{d\vec{g}_i^G}{ds} + \vec{\delta} + \int_0^s (\vec{f} \wedge \frac{d\vec{g}_\sigma^G}{ds}) d\sigma$$

$$\text{or } \frac{d\vec{g}_i^G}{ds} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{g}_\sigma^G}{ds} = \vec{i}$$

$$\frac{d\vec{L}}{ds} = \sum_{\sigma_i < \rho} (\vec{F}_i \wedge \vec{i}) + \vec{\delta} + \int_0^s (\vec{f} \wedge \vec{i}) d\sigma$$

$$\begin{aligned} \text{c'est à dire } \frac{d\vec{L}}{ds} &= \left(\sum_{\sigma_i < \rho} \vec{F}_i + \int_0^s \vec{f} d\sigma \right) \wedge \vec{i} + \vec{\delta} \\ &= T \vec{k} \wedge \vec{i} + \vec{\delta} \\ &= T \vec{j} + \delta_t \vec{i} + \delta_n \vec{j} \end{aligned}$$

donc:

$$\boxed{\frac{dL}{ds} = \delta_t \vec{i} + (T + \delta_n) \vec{j}}$$

$$\text{or } L = C \vec{i} + M \vec{j} \Rightarrow \frac{dL}{ds} = \frac{dC}{ds} \vec{i} + C \frac{d\vec{i}}{ds} + \frac{dM}{ds} \vec{j} + M \frac{d\vec{j}}{ds}$$

$$\text{or } \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{t}}{r} \quad \text{et } \frac{d\vec{f}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{r} \quad r = \text{rayon de courbure}$$

(formules de Frenet)

$$\text{d'où } \frac{d\vec{L}}{ds} = \left(\frac{dC}{ds} - \frac{M}{r} \right) \vec{t} + \left(\frac{dM}{ds} + \frac{C}{r} \right) \vec{f}$$

en comparant la deuxième expression de $\frac{d\vec{L}}{ds}$ avec la première on tire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC}{ds} - \frac{M}{r} &= \gamma_t \\ \left(\frac{dM}{ds} + \frac{C}{r} \right) &= T + \gamma_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dC}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} - \frac{M}{r} &= \gamma_t \\ \frac{dM}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} + \frac{C}{r} &= T + \gamma_n \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$$

donc

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dC}{d\theta} - M &= r \gamma_t \\ \frac{dM}{d\theta} + C &= rT + \gamma_n r \end{aligned}}$$

(1) formules fondamentales

En général le densité de couple $\vec{\sigma}$ est nulle, c'est à dire $\gamma_t = \gamma_n = 0$; les relations fondamentales deviennent dans ce cas:

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \frac{dC}{d\theta} \\ C &= -\frac{dM}{d\theta} + rT \end{aligned}} \quad (1')$$

$$C = -\frac{dM}{d\theta} + rT \Rightarrow \frac{dC}{d\theta} = \frac{d^2M}{d\theta^2} + \frac{dr}{d\theta} T + r \frac{dT}{d\theta}$$

$$\text{or } T = \sum_{\sigma_i < \rho} \vec{F}_i + \int_0^s \vec{f} d\tau \Rightarrow \frac{dT}{ds} = f(s)$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{r d\theta} \Rightarrow \frac{dT}{d\theta} = r \frac{dT}{ds}$$

$$d'au \quad \frac{d^2M}{d\theta^2} + M = r^2 \frac{dT}{ds} + T \frac{dr}{d\theta}$$

$$(2) \quad \boxed{M + \frac{d^2M}{d\theta^2} = r^2 f(s) + \frac{dr}{d\theta} T}$$

formule valable dans le cas particulier où la densité de couple \vec{T} est nulle

avec f : densité de charge.

dans le cas d'une poutre à courbure constante ; c'est à dire d'une poutre circulaire (2) devient :

$$(2') \quad \boxed{M + \frac{d^2M}{d\theta^2} = r^2 f(s)}$$

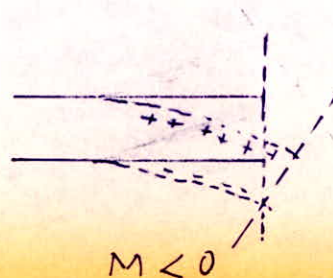
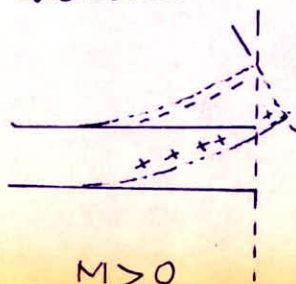
II Calcul des Efforts M, T, C globaux pour un pont circulaire à une seule travée : (sur 2 appuis simples)

10) Généralités

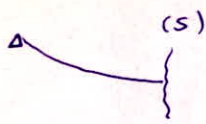
a) convention de signe

-) Moment fléchissant M

dans une section (S), M sera positif s'il tend à faire tendre les fibres inférieures ; M sera négatif dans le cas contraire



- Effort tranchant (T)



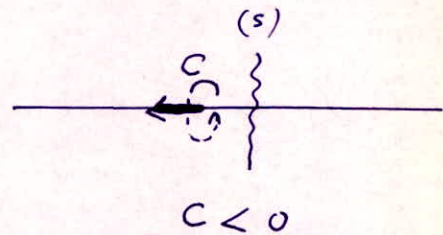
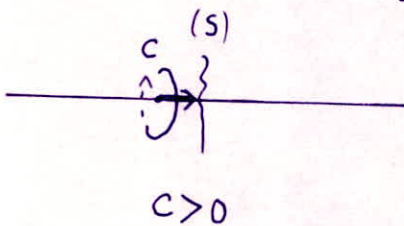
si les forces à gauche de (S) tendent à faire tourner le pontre dans le sens des aiguilles d'une montre ; l'effort tranchant T est positif.

Il sera compté négatif dans le cas contraire.

• Couple de Torsion C

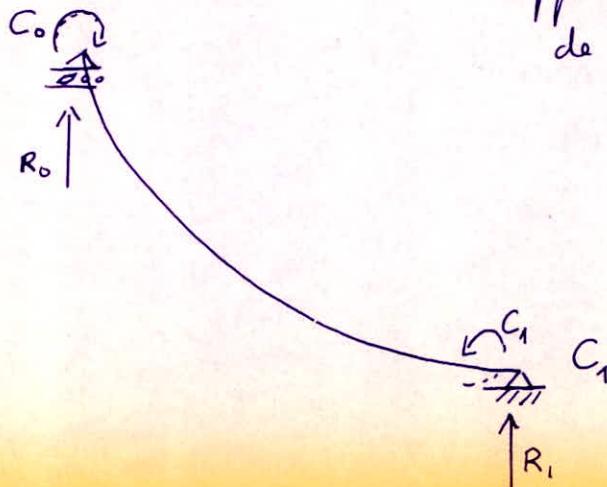
-) si le vecteur \vec{C} couple de torsion dû à la partie gauche de la section (S) est dirigé vers la section (S), le couple de torsion C sera positif.

-) et dans le cas où (\vec{C}) n'est pas dirigé vers (S) C est négatif



2. degré d'hyperstaticité - schéma statique.

• schéma statique:



- 2 appuis simples (le moment de flexion aux appuis est nul)

on a donc 4 inconnues :

- sur l'appui ①

$$R_1 = -T_1$$

$$C_1 = -T_1$$

- sur l'appui ②

$$R_0 = T_0$$

$$C_0 = T_0$$

et nous n'avons que 3 équations de la statique :

1- une équation traduisant la projection des forces sur oz .

2- une équation traduisant la projection des moments sur ox .

3- une équation traduisant la projection des moments sur oy .

Par conséquent : Une travée courbe sur 2 appuis simples est de degré d'hyperstaticité 1.

Ainsi on doit faire appel à une autre équation : équation sur les déformations afin de déterminer les efforts M, T, C pour une telle poutre.

3°) Calcul des efforts M, T, C globaux en une section quelconque de la poutre.

Nous repérons une section de la poutre circulaire par son abscisse angulaire θ comptée à partir de l'appui gauche par exemple (voir figure ci-dessus).

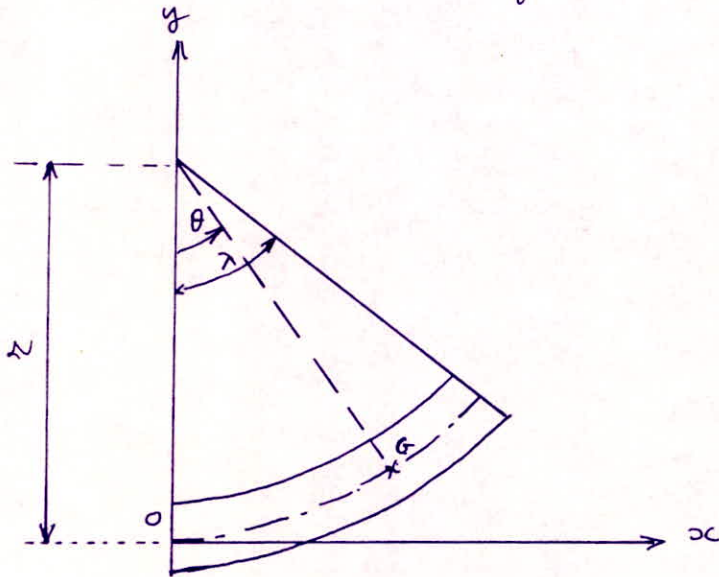
Soit λ la portée angulaire de la travée circulaire, on supposera que $\lambda \neq \pi$.

r = rayon de courbure de la travée circulaire,

Les coordonnées du centre de gravité G d'une section quelconque (S) d'abscisse angulaire θ sont:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r (1 - \cos \theta)$$



Nous allons déterminer dans ce qui suit les effets M, T, C en une section θ de la poutre circulaire, dans les cas où celle-ci est soumise aux différents systèmes de charges suivants:

1. Cas d'une charge P concentrée et centrée.
2. Cas d'une charge P concentrée et excentrée.
3. Cas d'une charge (p) centrée uniformément répartie le long de la poutre.
4. Cas d'une charge (p) excentrée uniformément répartie le long de la poutre.

Pour déterminer les effets M, T, C dans chacun de ces cas, nous allons opérer de la façon suivante:

1^{ère} étape: - déterminer les effets M, T, C en fonction d'une inconnue hyperstatique, T_0 par exemple.

2^{ème} étape - calculer T_0 en utilisant le théorème sur l'énergie $\frac{\partial W'}{\partial T_0} = \delta_3$

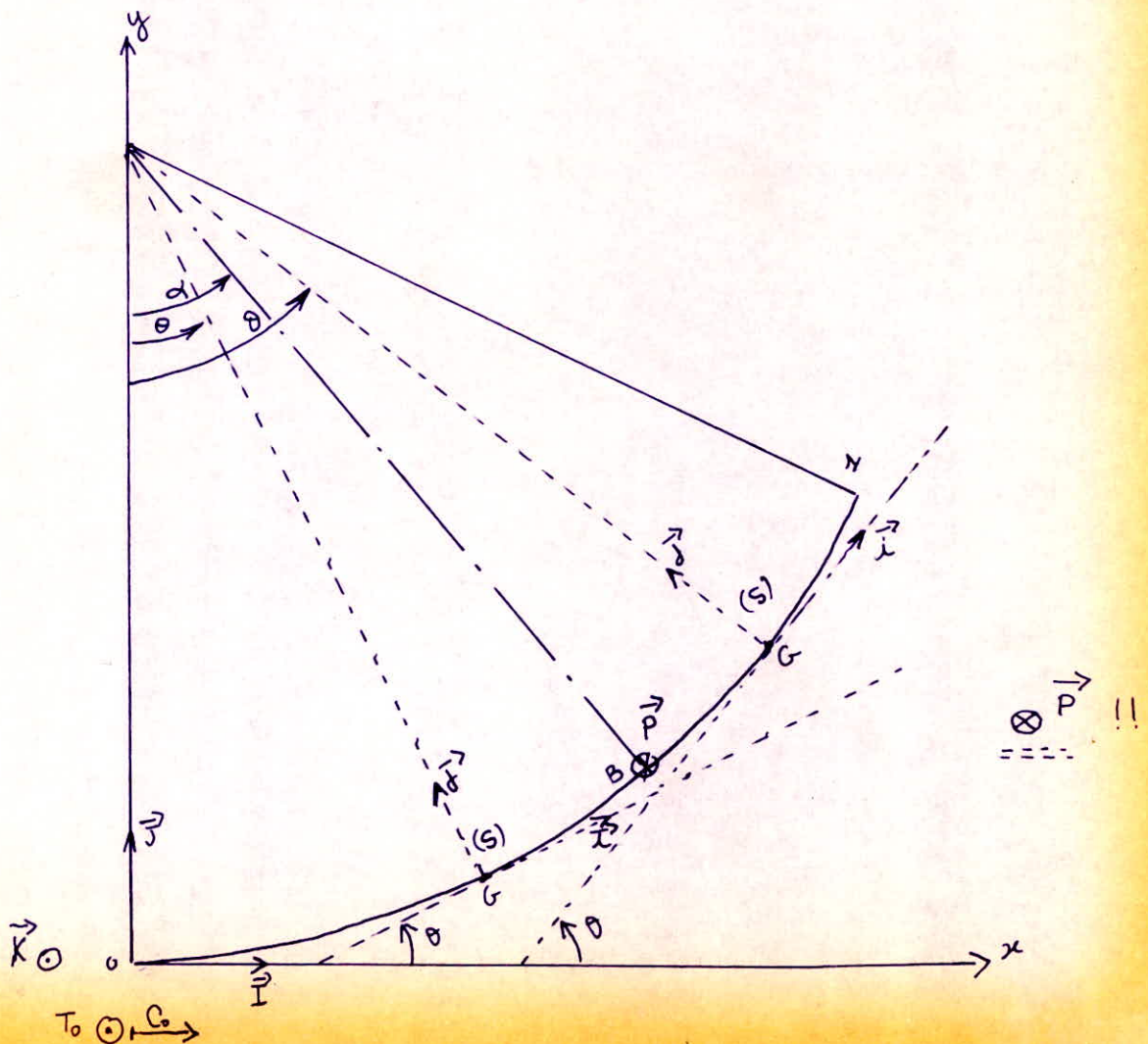
avec s_3 : déplacement de la fibre moyenne en la section d'appui (0).

(dans notre cas $s_3 = 0$, c'est à dire qu'on n'a pas de tassement d'appui)

$$w = \frac{1}{2} \int_0^{\lambda} \frac{C^2}{GK} r d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\lambda} \frac{M^2}{EI} r d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\lambda} \frac{T^2}{G\Omega_n} r d\theta$$

A. Cas d'une charge P concentrique et centrée appliquée au centre de gravité de la section d'abscisse angulaire α .

a) calcul des efforts M, T, C en fonction de l'incidence hyperstatique T_0



1- Effort tranchant T

• sections (S) telles que: $0 \leq \theta \leq \alpha \Rightarrow T = T_0$

• sections (S) telles que $\alpha \leq \theta \leq \lambda \Rightarrow T = T_0 - P$

donc:

$$T = \begin{cases} T_0 & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ T_0 - P & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

2- Moment fléchissant M

• sections (S) telles que $0 \leq \theta \leq \alpha$:

on a: $M = \vec{C}_0 \cdot \vec{j} + (\vec{T}_0 \wedge \vec{OG}) \cdot \vec{j}$ (M est porté par \vec{j})

or $\vec{C}_0 = C_0 \vec{i}$ $\vec{T}_0 = T_0 \vec{k} = T_0 \vec{k}$

$$\vec{OG} = r \sin \theta \vec{i} + r(1 - \cos \theta) \vec{j}$$

d'où $M = C_0 \vec{i} \cdot \vec{j} + [T_0 \vec{k} \wedge (r \sin \theta \vec{i} + r(1 - \cos \theta) \vec{j})] \cdot \vec{j}$

$$M = C_0 \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + T_0 r \sin \theta (\vec{k} \wedge \vec{i}) \cdot \vec{j} + T_0 r (1 - \cos \theta) (\vec{k} \wedge \vec{j}) \cdot \vec{j}$$

or $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ et $\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$

d'où $M = -C_0 \sin \theta + T_0 r \sin \theta \vec{j} \cdot \vec{j} + T_0 r (1 - \cos \theta) (-\vec{i}) \cdot \vec{j}$

soit $M = -C_0 \sin \theta + T_0 r \sin \theta \cdot \cos \theta + T_0 r (1 - \cos \theta) (-\sin(\theta + \frac{\pi}{2}))$

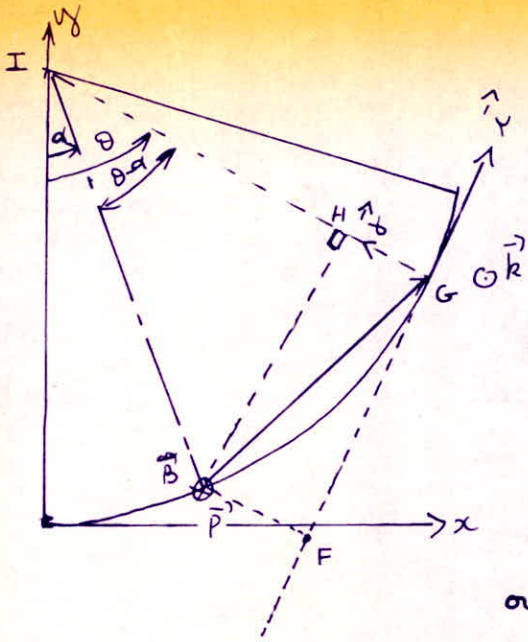
soit $M = -C_0 \sin \theta + r T_0 (\sin \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin \theta)$

c'est à dire $M = -C_0 \sin \theta + r T_0 \sin \theta$ si $0 \leq \theta \leq \alpha$

• sections (S) telles que: $\alpha \leq \theta \leq \lambda$

$$\begin{aligned} M &= \vec{C}_0 \cdot \vec{j} + (\vec{T}_0 \wedge \vec{OG}) \cdot \vec{j} + (\vec{P} \wedge \vec{BG}) \cdot \vec{j} \\ &= -C_0 \sin \theta + r T_0 \sin \theta + (\vec{P} \wedge \vec{BG}) \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

on a # $\vec{P} = -P \vec{k}$



$$\vec{BG} = FG \vec{i} - HG \vec{j}$$

$$\sin(\theta - \alpha) = \frac{FG}{r} \Rightarrow FG = r \sin(\theta - \alpha)$$

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{IH}{r} \Rightarrow IH = r \cos(\theta - \alpha)$$

$$\text{d'où } HG = r - r \cos(\theta - \alpha)$$

$$\vec{BG} = r \sin(\theta - \alpha) \vec{i} + r [1 - \cos(\theta - \alpha)] \vec{j}$$

$$\text{d'où } \vec{P} \wedge \vec{BG} = -Pr \sin(\theta - \alpha) \vec{k} \wedge \vec{i} + (-Pr)(1 - \cos(\theta - \alpha)) \vec{k} \wedge \vec{j}$$

$$\text{or } \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{P} \wedge \vec{BG} = -Pr \sin(\theta - \alpha) \vec{j} + Pr (1 - \cos(\theta - \alpha)) \vec{i}$$

$$\text{d'où } M = -C_0 \sin \theta + r T_0 \sin \theta - Pr \sin(\theta - \alpha) \vec{j} \cdot \vec{j} + Pr (1 - \cos(\theta - \alpha)) \vec{i} \cdot \vec{i}$$

$$\text{soit } M = -C_0 \sin \theta + r T_0 \sin \theta - Pr \sin(\theta - \alpha)$$

conclusion:

$$M = \begin{cases} -C_0 \sin \theta + r T_0 \sin \theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ -C_0 \sin \theta + r T_0 \sin \theta - Pr \sin(\theta - \alpha) & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

Le pont se repose sur 2 appuis simples $\Rightarrow M(\lambda) = M(0) = 0$

$$M(\lambda) = -C_0 \sin \lambda + r T_0 \sin \lambda - Pr \sin(\lambda - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow C_0 = r T_0 - \frac{Pr \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda}$$

portons la valeur C_0 ainsi trouvée en fonction de T_0 dans l'expression de M .

$$M(\theta) = \begin{cases} -\left(r T_0 - \frac{Pr \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda}\right) \sin \theta + r T_0 \sin \theta & \text{si } 0 \leq \theta < \alpha \\ -\left(r T_0 - \frac{Pr \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda}\right) \sin \theta + r T_0 \sin \theta - Pr \sin(\theta - \alpha) & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

$$\text{soit } M(\alpha, \theta) = \begin{cases} +Pr \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \sin \theta & \text{si } 0 \leq \theta < \alpha \\ +Pr \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \sin \theta - Pr \sin(\theta - \alpha) & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

$$\text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \Rightarrow M = \frac{P_2 \sin(\lambda - \alpha) \sin \theta}{\sin \lambda} - \frac{P_2 \sin(\theta - \alpha) \sin \lambda}{\sin \lambda}$$

$$\text{soit } M = \frac{P_2}{\sin \lambda} \sin(\lambda - \theta) \sin \alpha.$$

donc

$$M = \begin{cases} \frac{P_2 \sin(\lambda - \alpha) \sin \theta}{\sin \lambda} & \text{si } 0 < \theta \leq \alpha \\ \frac{P_2 \sin(\lambda - \theta) \sin \alpha}{\sin \lambda} & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

posons:

$$\mathcal{M}(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\sin(\lambda - \alpha) \sin \theta}{\sin \lambda} & \text{si } 0 < \theta \leq \alpha \\ \frac{\sin(\lambda - \theta) \sin \alpha}{\sin \lambda} & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

en fin

$$M(\alpha, \theta) = P_2 \mathcal{M}(\alpha, \theta)$$

Remarque:

Le moment flechissant en une section (θ) quelconque de la poutre sollicitée par une charge concentrée et centrée est indépendant des inconnues hyperstatiques T_0 et C_0 .

3. Couple de torsion C

on avait montré précédemment que dans le cas où la poutre n'est pas chargée par une densité de couple $\bar{\gamma}'$ ($\bar{\gamma}' = 0$):

$$C = -\frac{dM}{d\theta} + \alpha T$$

$$C = -\frac{\partial M}{\partial \theta} + \alpha T$$

d'où

$$C = \begin{cases} -\frac{P_2 \sin(\lambda - \alpha) \omega \theta}{\sin \lambda} + \alpha T_0 & \text{si } 0 < \theta \leq \alpha \\ +\frac{P_2 \omega (\lambda - \theta) \sin \alpha}{\sin \lambda} + \alpha (T_0 - P) & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

b) détermination de l'inconnue hyperstatique T_0 :

Comme c'était dit précédemment on utilisera le théorème de l'énergie interne.

$$\frac{\partial W}{\partial T_0} = 0 \quad \text{deplacement verticale de la fibre moyenne à l'appui (0)}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{C^2}{GK} r d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{M^2}{EI} r d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{T^2}{G\Omega_1} r d\theta$$

C = couple de torsion

M = moment de flexion

I = moment d'inertie de la section autour d'un axe horizontal

E = module d'élasticité longitudinal.

K = moment de rigidité de torsion

G = module d'élasticité transversal.

Ω_1 = section réduite à prendre en compte pour le calcul de déformation de l'effort tranchant

$$\frac{\partial W}{\partial T_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T_0} \left(\int_0^\lambda \frac{C^2}{GK} r d\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T_0} \left(\int_0^\lambda \frac{M^2}{EI} r d\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T_0} \left(\int_0^\lambda \frac{T^2}{G\Omega_1} r d\theta \right)$$

Les déformations dues à l'effort tranchant T sont négligeables, donc

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \left(\int_0^\lambda \frac{T^2}{G\Omega_1} r d\theta \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \left(\int_0^\lambda \frac{M^2}{EI} r d\theta \right) = \int_0^\lambda \frac{\partial}{\partial T_0} \left(\frac{M^2}{EI} r d\theta \right) = 0 \quad \left(\text{car on a vu que } M \text{ est indépendant de } T_0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial T_0} = 0 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \left(\int_0^\lambda \frac{C^2}{GK} r d\theta \right) = \int_0^\lambda \frac{\partial (C^2/GK)}{\partial T_0} r d\theta = \frac{1}{GK} \int_0^\lambda 2C \frac{\partial C}{\partial T_0} r d\theta$$

car pour une poutre circulaire à inertie constante on a :

G = constante

K = constante

$$= \frac{1}{GK} 2r \int_0^\lambda C \frac{\partial C}{\partial T_0} d\theta$$

$$\frac{\partial W}{\partial T_0} = \frac{2\pi}{G \cdot \lambda} \int_0^\lambda c \frac{\partial c}{\partial T_0} d\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\int_0^\lambda c \frac{\partial c}{\partial T_0} d\theta = 0} \quad (3)$$

$$\text{or } \frac{\partial c}{\partial T_0} = \pi \quad (3) \Rightarrow \int_0^\lambda c d\theta = 0 \quad (3')$$

$$0 = \int_0^\lambda c d\theta = \int_0^\alpha c d\theta + \int_\alpha^\lambda c d\theta = \int_0^\alpha \left(\pi T_0 - \frac{P\pi \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \cos \theta \right) d\theta + \int_\alpha^\lambda \left[\pi (T_0 - P) + \frac{P\pi \sin \alpha}{\sin \lambda} \cos(\lambda - \theta) \right] d\theta$$

$$\Rightarrow 0 = - \int_0^\alpha \frac{P\pi \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \cos \theta d\theta + \pi T_0 \alpha + \pi (T_0 - P) (\lambda - \alpha) + P\pi \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda} \int_\alpha^\lambda \cos(\lambda - \theta) d\theta$$

$$\Rightarrow 0 = \pi T_0 \alpha + \pi (T_0 - P) (\lambda - \alpha) - \frac{P\pi \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \int_0^\alpha \cos \theta d\theta + P\pi \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda} \int_\alpha^\lambda \cos(\lambda - \theta) d\theta$$

$$\Rightarrow 0 = \pi T_0 \alpha + \pi T_0 \lambda - \pi T_0 \alpha - \pi P \lambda + \pi P \alpha - \frac{P\pi \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \sin \alpha + P\pi \frac{\sin \alpha \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda}$$

$$\Rightarrow \pi \lambda T_0 + P\pi (\alpha - \lambda) = 0 \Rightarrow T_0 = \frac{P\pi (\lambda - \alpha)}{\pi \lambda}$$

$$\boxed{T_0 = \frac{P(\lambda - \alpha)}{\lambda}}$$

c) Expressions finales des Efforts M, T, C

$$\bullet \quad T = \begin{cases} T_0 & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ T_0 - P & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases} \Rightarrow T = \begin{cases} \frac{P(\lambda - \alpha)}{\lambda} & \text{si } 0 \leq \theta < \alpha \\ \frac{P(\lambda - \alpha)}{\lambda} - P & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} \frac{P(\lambda - \alpha)}{\lambda} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ -\frac{P\alpha}{\lambda} & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

$$\text{posons } \zeta(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ -\frac{\alpha}{\lambda} & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

$$\text{d'où } T(\alpha, \theta) = P \cdot \zeta(\alpha, \theta)$$

$$C = \begin{cases} P_r \frac{(\lambda - \alpha)}{\lambda} - P_r \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \cos \theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ P_r \left(P_r \left(-\frac{\alpha}{\lambda} \right) \right) + P_r \frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \sin \alpha & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

Resumé : charge concentric centrée

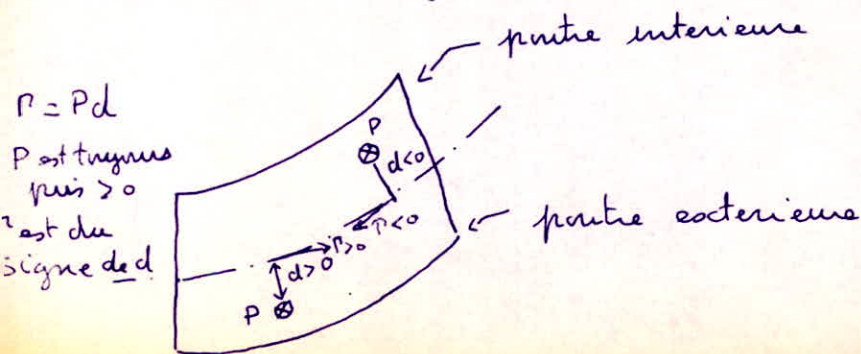
$$\bullet M(\alpha, \theta) = P r M(\alpha, \theta) \quad \text{avec } M(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ \frac{\sin \alpha \sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

$$\bullet T(\alpha, \theta) = P \mathcal{E}(\alpha, \theta) \quad \text{avec } \mathcal{E}(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ -\frac{\alpha}{\lambda} & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

$$\bullet C(\alpha, \theta) = \begin{cases} -\frac{P r \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \cos \theta + P r \frac{(\lambda - \alpha)}{\lambda} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ +\frac{P r \cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \sin \alpha + P r \left(-\frac{\alpha}{\lambda} \right) & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

B. Cas d'une charge P concentric et excentric de (d) par rapport à la fibre moyenne, appliquée en une section (s) d'abscisse angulaire

convention de signe de (d):

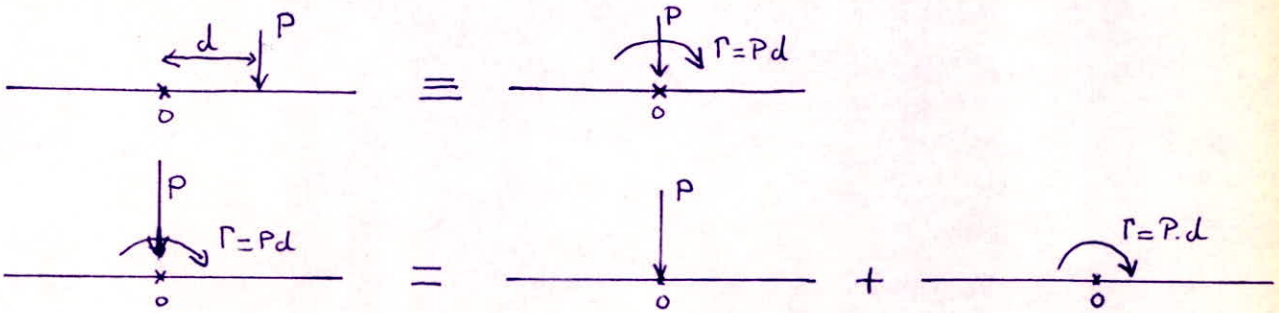


- d sera comptée positif du côté opposé au centre de courbure de la fibre moyenne.
- d sera comptée négatif dans le cas contraire.

Remarque: cette convention de signe est compatible avec celle du couple de torsion.

au centre de gravité de la section (o) sont donc appliqués :

- une charge verticale P
- un couple de torsion $\Gamma = P \cdot d$



Système de charge résultant = Système de charge (1) + Système de charge (2)

Conclusion:

Pour déterminer les efforts en une section quelconque θ de la poutre circulaire, dûs à une charge concentrée excentrée; il suffit de faire la superposition des efforts dûs aux systèmes de charge (1) et (2).

$$\begin{cases} M = M_1 + M_2 \\ T = T_1 + T_2 \\ C = C_1 + C_2 \end{cases}$$

Le système de charge (1) a été déjà étudié précédemment.

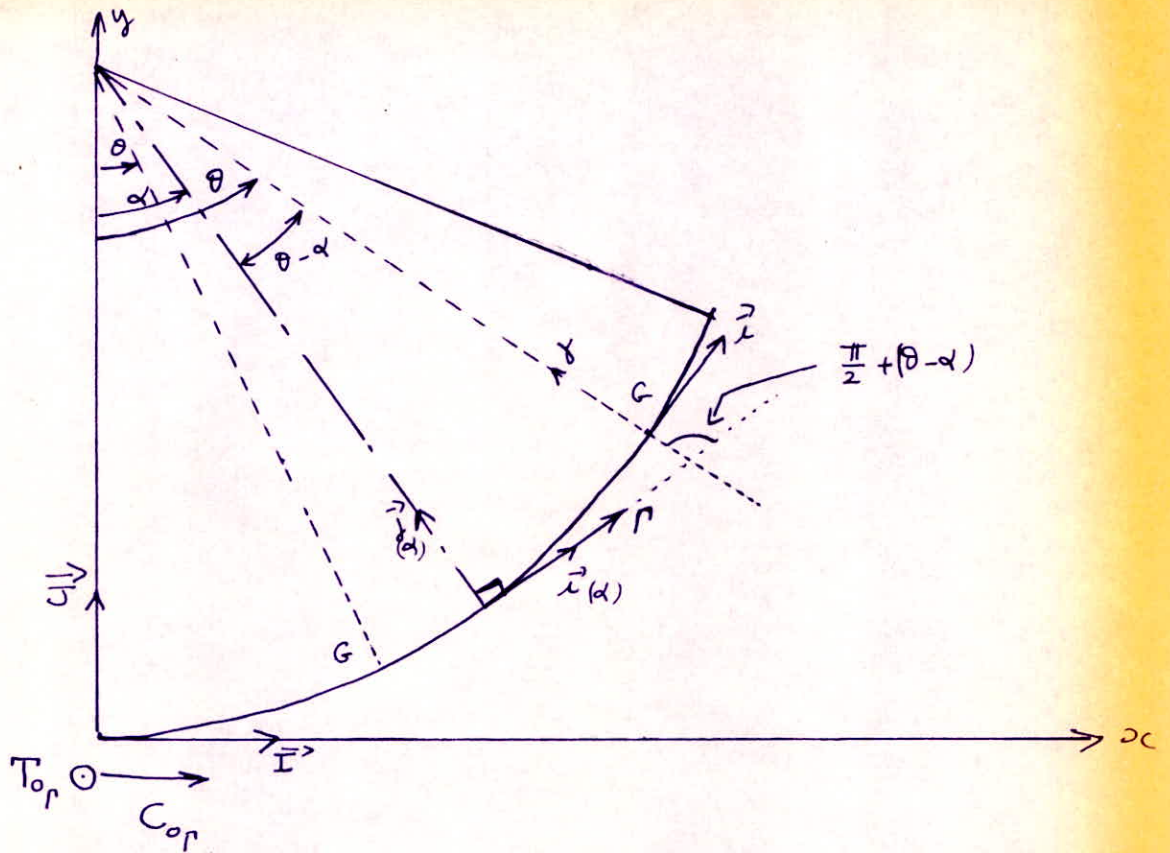
Système de charge (2): Poutre chargée par un couple de torsion $\Gamma = P \cdot d$ concentré

a) Calcul des Efforts M, T, C en fonction des inconnues hyperstatiques T_{op} et C_{op} .

1. Effet tranchant T_2

$$T_2 = T_{op} \quad \forall \theta \in [0, \lambda]$$

2. moment flechissant M_z



note: T_{0p} et C_{0p} : mesure algébrique. (avec leurs signes avec la convention de signes)

$$\begin{cases} \vec{T}_{0p} = T_{0p} \vec{k} \\ \vec{C}_{0p} = C_{0p} \vec{i} \end{cases}$$

- section (S) telles que $0 \leq \theta \leq \alpha$

$$M_z = \vec{C}_{0p} \cdot \vec{j} + (\vec{T}_{0p} \wedge \vec{OG}) \cdot \vec{j}$$

d'où $M_z = -C_{0p} \sin \theta + r T_{0p} \sin \theta$ [voir le calcul de M dans le cas d'une charge centrée]

- Section (S) telles que: $\alpha \leq \theta \leq \lambda$

$$M = -C_{0p} \sin \theta + r T_{0p} \sin \theta + \vec{r} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{r} = r \vec{i}(\alpha)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{j} = r \vec{i}(\alpha) \cdot \vec{j} = r \cos \left[\frac{\pi}{2} + (\theta - \alpha) \right] = -r \sin(\theta - \alpha)$$

d'où $M_z = -C_{0p} \sin \theta + r T_{0p} \sin \theta - r \sin(\theta - \alpha)$

done

$$M_2 = \begin{cases} -C_{op} \sin \theta + T_{op} r \sin \theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ -C_{op} \sin \theta + T_{op} r \sin \theta - \Gamma \sin(\theta - \alpha) & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

$$M_2(\omega) = M_2(\lambda) = 0$$

$$\begin{aligned} M_2(\lambda) = 0 &\Rightarrow -C_{op} \sin \lambda + T_{op} r \sin \lambda - \Gamma \sin(\lambda - \alpha) = 0 \\ &\Rightarrow C_{op} = r T_{op} - \Gamma \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } M_2 = \begin{cases} \Gamma \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \sin \theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ \Gamma \frac{\sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \sin \alpha & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

c'est à dire :

$$M_2 = \Gamma \mathcal{M}(\alpha, \theta). \quad \Gamma = P.d.$$

Le moment flechissant dû à une charge excentrée est aussi indépendant des inconnues hyperstatiques C_{op} et T_{op} .

3. Couple de torsion C_2

$$C_2 = -\frac{\partial M_2}{\partial \theta} + r T_2 \Rightarrow C_2 \begin{cases} -\Gamma \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \cos \theta + r T_{op} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ +\Gamma \frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \sin \alpha + r T_{op} & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

$$\text{alors } C_2 = -\Gamma \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta} + r T_2.$$

b) détermination de l'inconnue hyperstatique T_{op}

$$\frac{\partial W}{\partial T_{op}} = 0 \Rightarrow (3) \int_0^\lambda c \frac{\partial c}{\partial T_{op}} d\theta = 0 \quad (\text{formule déjà démontrée précédemment})$$

$$\text{dans ce cas aussi on a : } \frac{\partial c}{\partial T_{op}} = r \quad (3) \Rightarrow \int_0^\lambda c d\theta = 0$$

$$\int_0^\lambda c d\theta = \int_0^\alpha \left(-\Gamma \frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin\lambda} \cos\theta + 2T_0 r \right) d\theta + \int_\alpha^\lambda \left(\Gamma \frac{\cos\lambda-\theta \sin\alpha + 2T_0 r}{\sin\lambda} \right) d\theta$$

$$= 2T_0 r \alpha - \frac{\Gamma \sin(\lambda-\alpha)}{\sin\lambda} \sin\alpha + 2T_0 r \alpha + \Gamma \frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin\lambda} \sin\alpha$$

$$= 2T_0 r \alpha = 0$$

$$2T_0 r \alpha = 0 \quad \forall \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_0 r = 0}$$

c) expression finales de M, T, C

1) effort tranchant T

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = P \zeta(\alpha, \theta) \quad (\text{systeme de charge (1)})$$

$$T_2 = T_0 r = 0 \quad (\text{systeme de charge (2)})$$

$$T = P \zeta(\alpha, \theta) + 0$$

$$\boxed{T = P \zeta(\alpha, \theta)}$$

Conclusion:

L'effort tranchant T est independant de l'excentrement (d) des charges.

2) moment fléchissant M.

$$M = M_1 + M_2$$

avec $M_1 = P r \mathcal{M}(\alpha, \theta) \quad (\text{systeme de charge (1)})$

$M_2 = P d \mathcal{M}(\alpha, \theta) \quad (\text{" " " (2)})$

d'aut

$$M = (P r + P d) \mathcal{M}(\alpha, \theta) \quad P = P d.$$

$$M = P r \left(1 + \frac{d}{r} \right) \mathcal{M}(\alpha, \theta)$$

$$M = \left(1 + \frac{d}{r}\right) P r \mathcal{C}(\alpha, \theta)$$

posons $\Delta = \left(1 + \frac{d}{r}\right)$: Coefficient d'excentrement de charge.

Conclusion:

Le moment (M) en une section (θ) quelconque d'une poutre circulaire due à une charge excentrée (P) de (d) par rapport à la fibre moyenne est égale au moment due à une charge P centrée multiplié par le Coefficient d'excentrement $\Delta = \left(1 + \frac{d}{r}\right)$.

3 couple de torsion

$$C = C_1 + C_2$$

avec

$$C_1 = -P r \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta} + r P \zeta(\alpha, \theta) \quad (\text{voir charge centrée})$$

\nwarrow (1^{er} système de charge)

$$C_2 = -r \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta} + r T_{0r} \quad (2^{\text{ème}} \text{ système de charge})$$

$T_{0r} = 0$

$$C_2 = -r \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta}$$

$$C = -P r \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta} + r P \zeta(\alpha, \theta) - P d \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta}$$

$$C = -P r \left(1 + \frac{d}{r}\right) \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta} + P r \zeta(\alpha, \theta).$$

on bien

$$C(\alpha, \theta) = \begin{cases} -P r \left(1 + \frac{d}{r}\right) \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \cos \theta + P r \frac{(\lambda - \alpha)}{\lambda} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ + P r \left(1 + \frac{d}{r}\right) \frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \sin \alpha + P r \left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$$

Resumé: charge concentrée excentrée de (d)

• $M(\alpha, \theta) = (1 + \frac{d}{\lambda}) P_2 M_0(\alpha, \theta)$

avec $M_0(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ \frac{\sin \alpha \sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$

• $T(\alpha, \theta) = P_2 \zeta(\alpha, \theta)$

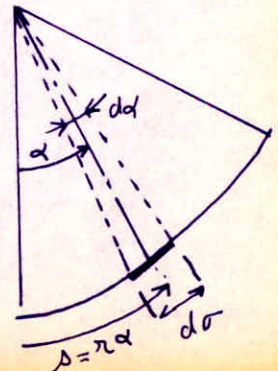
avec $\zeta(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ -\frac{\alpha}{\lambda} & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$

• $C(\alpha, \theta) = \begin{cases} -P_2(1 + \frac{d}{\lambda}) \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \cos \theta + P_2(\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ +P_2(1 + \frac{d}{\lambda}) \frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \sin \alpha + P_2(-\frac{\alpha}{\lambda}) & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \end{cases}$

C - Cas d'une charge (p) centrée, uniformément répartie le long d'une poutre circulaire

a) principe de la méthode de calcul à utiliser:

La charge uniformément répartie, centrée, le long de la poutre, peut être décomposée en une infinité de charges concentrées centrées élémentaires (p dσ).



Ainsi, pour déterminer les effets (M, T, C) en une section (θ), il suffit de considérer la somme des effets dM, dT, dC; élémentaires dus à toutes les charges concentrées élémentaires

$M = \int dM d\alpha \quad T = \int dT d\alpha \quad C = \int dC d\alpha$

5) Calcul de l'effort tranchant T

La charge élémentaire concentrique centrée ($p d\alpha$) appliquée en la section (α) crée un effort tranchant élémentaire dT en la section θ tel que:

$$dT = (p d\alpha) \zeta(\alpha, \theta)$$

or $d\sigma = r d\alpha$.

$$dT = p r d\alpha \zeta(\alpha, \theta) \Rightarrow T = \int_0^{\lambda} p r \zeta(\alpha, \theta) d\alpha$$

T = effort tranchant en la section (θ) dû à la somme de toutes les charges élémentaires ($p d\alpha$) se trouvant le long de la poutre. C'est à dire dû à la charge uniformément, centrée, répartie, le long de la poutre.

$$\zeta(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \text{ ou bien si } \theta \leq \alpha \leq \lambda \\ -\frac{\alpha}{\lambda} & \text{si } \alpha < \theta \leq \lambda \text{ ou bien si } 0 \leq \alpha \leq \theta \end{cases}$$

$$T = \int_0^{\theta} \left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) p r d\alpha + \int_{\theta}^{\lambda} \left(\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}\right) p r d\alpha$$

$$= -p r \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\theta^2}{2}\right) + p r \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{(\lambda - \alpha)^2}{2}\right]_{\theta}^{\lambda}$$

$$= -p r \frac{\theta^2}{2\lambda} + p r \frac{1}{\lambda} \left(0 + \frac{(\lambda - \theta)^2}{2}\right) = p r \frac{1}{2\lambda} \left[-\theta^2 + \lambda^2 + \theta^2 - 2\lambda\theta\right]$$

$$= p r \frac{1}{2\lambda} (\lambda^2 - 2\lambda\theta) = \frac{p r}{2} (\lambda - 2\theta)$$

$$\boxed{T = p r \left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right)}$$

c) calcul du moment fléchissant M

La charge élémentaire concentrique centrée ($p d\sigma$) appliquée en la section (α) créera un moment fléchissant dM élémentaire en la section θ . Tel que:

$$dM = (p d\sigma) r \mathcal{M}(\alpha, \theta)$$

Sous l'effet de la charge uniforme (p); c'est à dire sous l'effet de la somme des charges élémentaires concentriques

centrées $p d\sigma$; on aura:

$$M = \int_0^\lambda dM d\alpha \Rightarrow M = \int_0^\lambda (p d\sigma) r (\mathcal{M}(\alpha, \theta))$$

$$M = \int_0^\lambda p r^2 \mathcal{M}(\alpha, \theta) d\alpha = p r^2 \int_0^\lambda \mathcal{M}(\alpha, \theta) d\alpha$$

$$\mathcal{M}(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \alpha \text{ ou } \theta \leq \alpha \leq \lambda \\ \frac{\sin \alpha \sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} & \text{si } \alpha \leq \theta \leq \lambda \text{ ou } 0 \leq \alpha \leq \theta \end{cases}$$

calcul de $\int_0^\lambda \mathcal{M}(\alpha, \theta) d\alpha$:

$$\int_0^\lambda \mathcal{M}(\alpha, \theta) d\alpha = \int_0^\theta \frac{\sin \alpha \sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} d\alpha + \int_\theta^\lambda \frac{\sin \theta \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} d\alpha$$

$$= \frac{\sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \int_0^\theta \sin \alpha d\alpha + \left(\int_\theta^\lambda \sin(\lambda - \alpha) d\alpha \right) \frac{\sin \theta}{\sin \lambda}$$

$$= \frac{\sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} [-\cos \theta + \cos 0] + \frac{\sin \theta}{\sin \lambda} [\cos(\lambda - \lambda) - \cos(\lambda - \theta)]$$

$$= \frac{1}{\sin \lambda} [-\cos \theta \sin(\lambda - \theta) + \sin(\lambda - \theta) + \sin \theta - \sin \theta \cos(\lambda - \theta)]$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\lambda \mathcal{M}(d, \theta) dd &= -\frac{1}{\sin \lambda} \left[\cos \theta \sin(\lambda - \theta) + \sin \theta \cos(\lambda - \theta) - \sin \theta - \sin(\lambda - \theta) \right] \\
 &= -\frac{1}{\sin \lambda} \left[\sin(\theta + \lambda - \theta) - \sin \theta - \sin(\lambda - \theta) \right] \\
 &= -\frac{1}{\sin \lambda} \left[\sin \lambda - \sin \theta - \sin(\lambda - \theta) \right] \\
 &= \frac{1}{\sin \lambda} \left[\sin(\lambda - \theta) - \sin \lambda + \sin \theta \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{or } \sin(\lambda - \theta) - \sin \lambda &= 2 \sin\left(\frac{\lambda - \theta - \lambda}{2}\right) \cos\left(\frac{\lambda - \theta + \lambda}{2}\right) \\
 &= 2 \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \cos\frac{2\lambda - \theta}{2} = -2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{2\lambda - \theta}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{et } \sin \theta = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'ici } \int_0^\lambda \mathcal{M}(d, \theta) dd &= \frac{1}{\sin \lambda} \left[-2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{2\lambda - \theta}{2} + 2 \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \right] \\
 &= \frac{2 \sin\frac{\theta}{2}}{\sin \lambda} \left[-\cos\left(\frac{2\lambda - \theta}{2}\right) + \cos\frac{\theta}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(\frac{2\lambda - \theta}{2}\right) = -2 \sin\left(\frac{2\lambda - \theta + \theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - (2\lambda - \theta)}{2}\right)$$

$$= -2 \sin\frac{\lambda}{2} \sin\left(\frac{\theta - \lambda}{2}\right) = 2 \sin\frac{\lambda}{2} \sin\left(\frac{\lambda - \theta}{2}\right)$$

$$\int_0^\lambda \mathcal{M}(d, \theta) dd = \frac{2 \sin\frac{\theta}{2}}{\sin \lambda} \left[2 \sin\frac{\lambda}{2} \sin\left(\frac{\lambda - \theta}{2}\right) \right] = \frac{4 \sin\frac{\theta}{2} \left(\sin\frac{\lambda}{2} \sin\frac{\lambda - \theta}{2} \right)}{2 \sin\frac{\lambda}{2} \cdot \cos\frac{\lambda}{2}}$$

$$\int_0^\lambda \mathcal{M}(d, \theta) dd = \frac{2 \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\lambda - \theta}{2}}{\cos\frac{\lambda}{2}}.$$

d'ici

$$M = 2 \mu r^2 \frac{\sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\lambda - \theta}{2}}{\cos\frac{\lambda}{2}}$$

Remarque: On peut retrouver l'équation différentielle établie précédemment pour retrouver ce résultat.

$$M + \frac{d^2 M}{d\theta^2} = r^2 f(\theta) \Rightarrow M + \frac{d^2 M}{d\theta^2} = pr^2$$

$$f(\theta) = -p$$

les solutions de cette équation différentielle sont:

$$M = M_{\text{homogène}} + M_{\text{particulière}}$$

•) solution homogène

$$M + M'' = 0 \Rightarrow M = A \sin(\theta) + B \cos \theta$$

•) solution particulière

vérifions que $M = -pr^2$ est une solution particulière

$$\frac{dM}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 M}{d\theta^2} = 0 \quad M + \frac{d^2 M}{d\theta^2} = -pr^2 + 0 = -pr^2 \quad !!$$

vérifiée

solutions générales:

$$M = -pr^2 + A \sin(\theta) + B \cos \theta$$

détermination des constantes A et B:

$$\left. \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M(\lambda) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -pr^2 + A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \\ -pr^2 + A \sin \lambda + B \cos \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -pr^2 + B = 0 \\ pr^2 + A \sin \lambda + B \cos \lambda = 0 \end{cases}$$

$$B = +pr^2 \Rightarrow -pr^2 + A \sin \lambda + pr^2 \cos \lambda = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{pr^2 (-\cos \lambda + 1)}{\sin \lambda}$$

d'où
$$M = -pr^2 + \frac{pr^2 (-\cos \lambda + 1)}{\sin \lambda} \sin \theta + pr^2 \cos \theta$$

$$= -pr^2 \left[\frac{\sin \lambda + \cos \lambda \sin \theta - \sin \theta - \sin \lambda \cos \theta}{\sin \lambda} \right]$$

$$= \frac{-pr^2}{\sin \lambda} \left[\sin \theta \cos \lambda - \cos \theta \sin \lambda + \sin \lambda - \sin \theta \right] = \frac{-pr^2}{\sin \lambda} \left[\sin(\theta - \lambda) + \sin \lambda - \sin \theta \right]$$

$$M = -\frac{\mu r^2}{\sin \lambda} (\sin(\theta - \lambda) + \sin \lambda - \sin \theta) = -\frac{\mu r^2}{\sin \lambda} [\sin(\theta - \lambda) - \sin \theta + \sin \lambda]$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \lambda) - \sin \theta &= 2 \sin \frac{(\theta - \lambda - \theta)}{2} \cos \frac{(\theta - \lambda + \theta)}{2} \\ &= 2 \sin\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\theta - \lambda}{2}\right) = -2 \sin \frac{\lambda}{2} \cos \frac{2\theta - \lambda}{2} \end{aligned}$$

$$M = -\frac{\mu r^2}{\sin \lambda} \left[-2 \sin \frac{\lambda}{2} \cos \frac{2\theta - \lambda}{2} + 2 \sin \frac{\lambda}{2} \cdot \cos \frac{\lambda}{2} \right] = -\frac{2 \mu r^2 \sin \frac{\lambda}{2}}{\sin \lambda} \left[\cos \frac{\lambda}{2} - \cos \frac{2\theta - \lambda}{2} \right]$$

$$\cos \frac{\lambda}{2} - \cos \left(\frac{2\theta - \lambda}{2}\right) = -2 \sin \left(\frac{\frac{2\theta - \lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}}{2}\right) \sin \left(\frac{\frac{\lambda}{2} - \frac{2\theta - \lambda}{2}}{2}\right) = -2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \left(\frac{\lambda - \theta}{2}\right)$$

d'où

$$M = +2 \frac{\mu r^2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \left(\frac{\lambda - \theta}{2}\right)}{\cos \frac{\lambda}{2}}$$

, aussi en retournant le même résultat

d) couple de torsion C

$$C = -\frac{\partial M}{\partial \theta} + rT$$

$$M = 2 \mu r^2 \frac{\sin \frac{\theta}{2} \sin \left(\frac{\lambda - \theta}{2}\right)}{\cos \frac{\lambda}{2}} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{2 \mu r^2}{\cos \frac{\lambda}{2}} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\lambda - \theta}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\lambda - \theta}{2}\right) \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\mu r^2}{\cos \frac{\lambda}{2}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\lambda - \theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\lambda - \theta}{2} \right] = \frac{\mu r^2}{\cos \frac{\lambda}{2}} \left[\sin \left[\frac{\lambda - \theta}{2} - \frac{\theta}{2} \right] \right]$$

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\mu r^2}{\cos \frac{\lambda}{2}} \sin \left(\frac{\lambda - 2\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\mu r^2}{\cos \frac{\lambda}{2}} \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right)$$

$$\text{et } T = \mu r \left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right)$$

$$\text{d'où } C = -\frac{\mu r^2 \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right)}{\cos \frac{\lambda}{2}} + \mu r^2 \left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right)$$

e) effets Maximums M, T, C sous une charge uniforme (p) centrée :

a) l'effet tranchant est maximum à l'appui :

$$T_{\max} = T(0) = -T(\lambda) = \mu r \frac{\lambda}{2}$$

• moment fléchissant M:

Le moment M, sous une charge uniforme (p) centrée, est maximum à la section milieu $\theta = \frac{\lambda}{2}$.

$$\Rightarrow M_{\max} = M\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{p r^2 \sin^2 \frac{\lambda}{4}}{\cos \frac{\lambda}{2}}$$

• Couple de Torsion C

Le couple de torsion, sous une charge (p) uniforme centrée est maximum aux appuis.

$$C_{\max} = C(0) = -C(\lambda) = -\frac{p r^2}{2} \left[\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} \right]$$

Remarque: pour dériver ces résultats, il suffit de déterminer le maximum d'une fonction à une variable (θ).

Resumé: - charge uniforme (p) centrée tout le long de la poutre circulaire à une travée

$$\bullet T = p r \left(\frac{\lambda}{2} - \theta \right)$$

$$\bullet M = 2 p r^2 \frac{\sin \theta \sin \left(\frac{\lambda - \theta}{2} \right)}{\cos \frac{\lambda}{2}}$$

$$M_{\max} = p r^2 \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{4}}{\cos \frac{\lambda}{2}} = M\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\bullet C = -\frac{p r^2 \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \theta \right)}{\cos \frac{\lambda}{2}} + p r^2 \left(\frac{\lambda}{2} - \theta \right)$$

$$C_{\max} = C(0) = -C(\lambda) = -\frac{p r^2}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} \right)$$

D. Cas d'une charge (p) excentrée, uniformément répartie le long d'une poutre circulaire à une travée.

désignons par (d) l'excentrement de cette charge (p) uniforme par rapport à la fibre moyenne.

Pour établir les expressions M, T, C dus à ce système de charge nous allons utiliser les résultats obtenus pour une charge concentrique excentrée, établis précédemment. Pour se ramener à ce cas, il suffit de remarquer qu'une charge uniforme peut être décomposée en une infinité de charges élémentaires concentriques ($p d\sigma$).

$$(p d\sigma) \text{ charge concentrique excentrée de } (d) \Rightarrow \begin{cases} dM = (1 + \frac{d}{r}) p d\sigma M(\alpha, \theta) \\ dT = p d\sigma T(\alpha, \theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = \int_0^{\lambda} dM \\ T = \int_0^{\lambda} dT \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{effets dus à la superposition de toutes ces} \\ \text{charges élémentaires excentrées.} \end{array} \right\}$$

a) effet tranchant

$$(p r d\alpha) = p d\sigma \quad \rightarrow \quad dT = p r d\alpha T(\alpha, \theta)$$

$$T = \int_0^{\lambda} p r T(\alpha, \theta) d\alpha = \left(\int_0^{\lambda} T(\alpha, \theta) d\alpha \right) \cdot p r$$

$$\text{or } \int_0^{\lambda} T(\alpha, \theta) d\alpha = \left(\frac{\lambda}{2} - \theta \right)$$

$$\text{d'où } T = p r \left(\frac{\lambda}{2} - \theta \right)$$

Remarque :

l'effet tranchant dû à une charge uniforme excentrée est indépendant de l'excentrement.

b) Moment flechissant. M

la charge ($p \, d\alpha = p \, r \, d\alpha$) concentree excentree elementaire creea un moment elementaire dM en la section θ tel que :

$$dM = \left(1 + \frac{d}{r}\right) (p \, r \, d\alpha) \, r \, \mathcal{M}(\alpha, \theta)$$

d'ou le moment M cree par la somme de toutes ces charges elementaires concentrees excentrees, c'est a dire par la charge uniforme (p) excentree de (d) :

$$M = \int_0^\lambda \left(1 + \frac{d}{r}\right) p \, r^2 \, \mathcal{M}(\alpha, \theta) \, d\alpha = \left(1 + \frac{d}{r}\right) p \, r^2 \int_0^\lambda \mathcal{M}(\alpha, \theta) \, d\alpha$$

$$\text{ou } \int_0^\lambda \mathcal{M}(\alpha, \theta) \, d\alpha = 2 \frac{\sin \frac{\theta}{2} \sin \left(\frac{\lambda - \theta}{2}\right)}{\cos \frac{\lambda}{2}}$$

$$M = 2 \frac{\left(1 + \frac{d}{r}\right) p \, r^2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \left(\frac{\lambda - \theta}{2}\right)}{\cos \frac{\lambda}{2}}$$

Conclusion : Le moment flechissant en une section θ due a une charge uniforme (p) excentree tout le long de la partie est egale au moment en la section θ due la meme charge uniforme centree multipliee par le coefficient d'excentrement $\Delta = 1 + \frac{d}{r}$

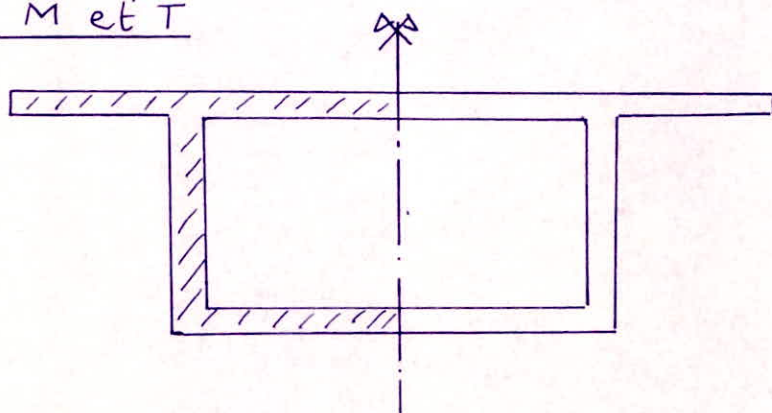
c) Couple de torsion C

$$C = -\frac{\partial M}{\partial \theta} + r \, T = -\left(1 + \frac{d}{r}\right) \frac{p \, r^2 \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right)}{\cos \frac{\lambda}{2}} + p \, r^2 \left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right)$$

$$C = -\left(1 + \frac{d}{r}\right) \frac{p \, r^2 \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right)}{\cos \frac{\lambda}{2}} + p \, r^2 \left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right)$$

III Répartition des efforts M, T, C globaux transversalement dans le cas d'une poutre courbe à un caisson.

1. Efforts M et T



Une poutre caisson se compose de deux poutres en T avec tulons, collées, identiques.

Chaque poutre en T reprend la moitié des efforts tranchants et fléchissants globaux (calculés précédemment)

$$T_{\text{poutre}} = \frac{T}{2}$$

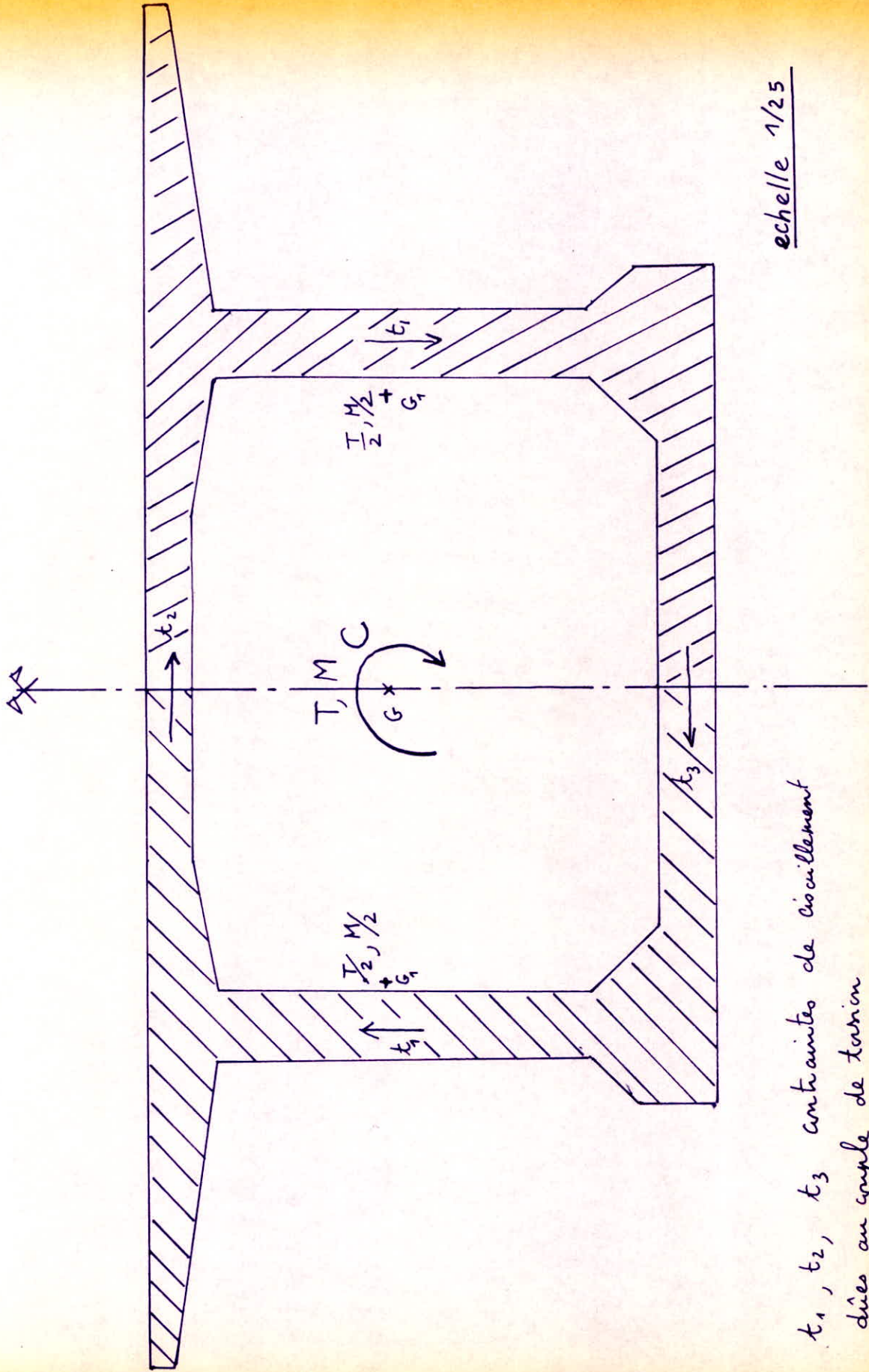
$$M_{\text{poutre}} = \frac{M}{2}$$

2. Couple de Torsion C .

Le couple de torsion crée des contraintes normales et tangentielles dans le cas générale

Cependant pour les poutres caissons très élancées les contraintes normales dues à C sont pratiquement nulles.

Conclusion: Dans le cas des poutres caissons très élancées, le couple de torsion C ne crée que des contraintes de cisaillements (les contraintes normales sont négligeables.)



echelle 1/25

t_1, t_2, t_3 contraintes de cisaillement dues au couple de torsion

G_1 : centre de gravité d'une section d'une partie en T_e avec t_{e1} .

III VALEURS NUMERIQUES
DES EFFORTS

- I Moments fléchissants
- II Efforts tranchants
- III Couples de torsion

I FLEXION LONGITUDINALE

Introduction

Etant donné que les charges permanentes, surcharges A, surcharges trottoirs, sont uniformément réparties le long du pont, c'est à dire que notre pont est chargé symétriquement sous l'effet de ces charges; donc les moments maximums sous l'effet de celles-ci se produira en section milieu. Par contre le moment dû aux surcharges Bc (concentrées et excentrées) ne se produit pas en section milieu. Donc, sous l'effet de la combinaison charges permanentes avec les surcharges Bc, on ne connaît pas à priori la section dangereuse.

L'expérience montre que dans le cas où le moment dû aux charges permanentes est nettement plus important que celui dû aux surcharges Bc dans la même section, la section dangereuse se rapproche de la section milieu; qui est notre cas. Cependant, dans ce qui suit on déterminera la section dangereuse afin de vérifier ce résultat très important.

Moments fléchissants dûs aux charges permanentes pour une poutre:

On a établi précédemment que le moment revenant à une poutre dans une section θ , sous l'effet d'une charge uniformément répartie le long du pont est donné par:

$$M(\theta) = p r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} (\lambda - \theta)}{\cos \frac{1}{2} \lambda}$$

où p = charge uniforme.
 λ = portée angulaire. $\lambda = 35,69^\circ$
 r = rayon de courbure. $r = 60 \text{ m}$.
 θ = position angulaire de la section considérée.

a/. Moments dûs au poids propre sans le poids de la superstructure:

$$M_{g_1} = g_1 r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} (\lambda - \theta)}{\cos \frac{1}{2} \lambda} \quad \text{avec } g_1 = \text{~~8,2125~~ } 8,2125 \text{ t/m.}$$

b/. Moments dûs aux charges permanentes totales: g

$$M_g = g r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} (\lambda - \theta)}{\cos \frac{1}{2} \lambda} \quad \text{avec } g = 11,0210 \text{ t/m.}$$

d'où le tableau suivant donnant M suivant θ .

Section θ	0	$2,86^\circ$	$\theta = 5,73^\circ$	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\lambda}{2}$
$M_{g, \text{ t.x.m.}}$	0	219,04.	401,28	559,22.	747,15.
$M_g \text{ t.x.m.}$	0	293,95	538,50	750,47	1002,65.

Ligne d'influence du moment M dans une section θ

On a vu que le moment dû à une charge P appliquée en (α) dans une section θ est donné par :

$$M(\theta) = P r \mathcal{M}_b(\alpha, \theta).$$

d'où si $P=1$. $M(\theta) = r \mathcal{M}_b(\alpha, \theta)$ c'est l'équation de ligne d'influence de M en une section θ .

$$M(\alpha, \theta) = \begin{cases} r \frac{\sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \Delta \sin \alpha & \text{si } 0 \leq \alpha < \theta. \\ r \frac{\sin \theta}{\sin \lambda} \Delta \sin(\lambda - \alpha) & \text{si } \theta \leq \alpha \leq \lambda. \end{cases}$$

Etude de cette fonction M en fonction de (α) avec θ un paramètre.

$$\frac{dM}{d\alpha} = \begin{cases} r \frac{\sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \cos \alpha & \text{si } 0 < \alpha < \theta \\ -r \frac{\sin \theta}{\sin \lambda} \cos(\lambda - \alpha) & \text{si } \theta < \alpha \leq \lambda. \end{cases}$$

pour notre cas $\lambda = 35,69^\circ$ $r = 60 \text{ m}$.

$$0 < \theta < 35,69^\circ.$$

$$0 < \lambda - \theta < 35,69^\circ$$

d'où

$$r \frac{\sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} > 0 \quad \text{et} \quad r \frac{\sin \theta}{\sin \lambda} > 0.$$

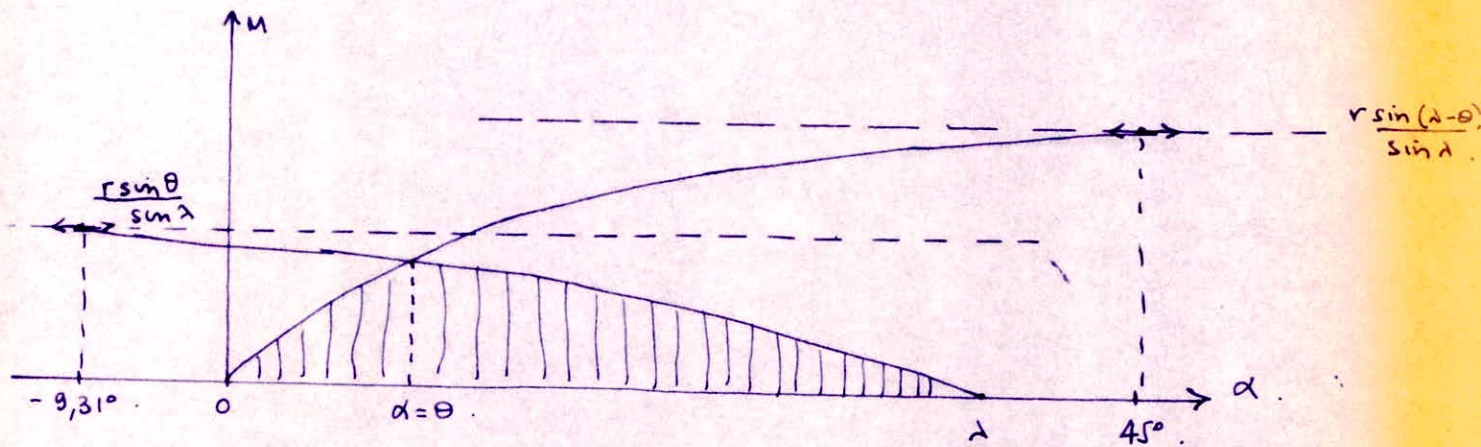
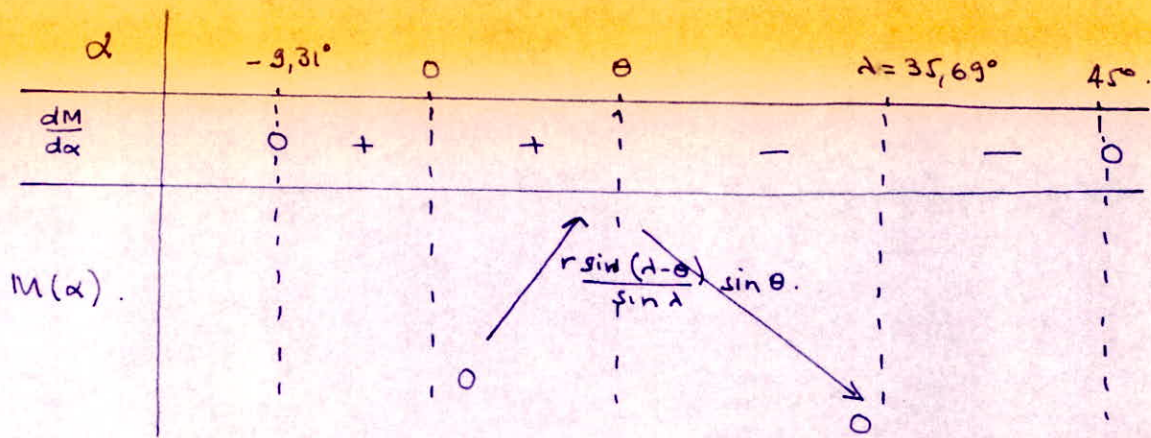
donc la dérivée $\frac{dM}{d\alpha}$ a le même signe que $\begin{cases} \cos \alpha & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \theta \\ -\cos(\lambda - \alpha) & \text{si } \theta \leq \alpha \leq \lambda \end{cases}$

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{si} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{si } \alpha \in [0, \theta[\quad \text{avec } \theta \leq 35,69 \quad \cos \alpha > 0.$$

$$\cos(\lambda - \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda - \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \lambda - \frac{\pi}{2}. \quad \alpha = 35,69 - 45 = -9,31^\circ.$$

d'où le tableau de variation de M(α).



On voit que lorsque la charge $P=1t$ est appliquée en la section θ , alors le moment en la section θ est maximum. C'est à dire que le moment maximum sous l'effet de $P=1t$, en la section θ s'obtient lorsque $\alpha=\theta$

$$M_{\max}(\theta) = r M_b(\alpha, \theta)$$

$$M_{\max}(\theta) = r \frac{\sin(\lambda - \theta) \sin \theta}{\sin \lambda}$$

Le problème est de trouver dans quelle section α -t-on le moment maximum des M_{\max} sous l'effet $P=1$.

il suffit de trouver l'extremum de la fonction $M_{\max}(\theta)$.

$$\frac{dM_{\max}(\theta)}{d\theta} = \frac{r}{\sin \lambda} (\cos \theta \cdot \sin(\lambda - \theta) - \cos(\lambda - \theta) \cdot \sin \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\lambda - \theta) \cdot \cos \theta - \cos(\lambda - \theta) \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\lambda - \theta - \theta) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda - 2\theta) = \sin 0 \Rightarrow \theta = \frac{\lambda}{2}$$

Conclusion :

Sous l'effet d'une charge concentrée centrée P , le moment maximum se produit lorsque celle-ci est appliquée au milieu et la section la plus sollicitée est la section milieu.

Moments dus aux surcharges revenant à une poutre

a/. Surcharges A.

$$A = k A_L \frac{l_0}{l_v}$$

Notre pont comporte une seule voie ; donc le nombre de voie à charger est un car la largeur à surcharger est $n l_v$. avec $1 \leq n \leq N$ a $N=1$.
donc $n=1$

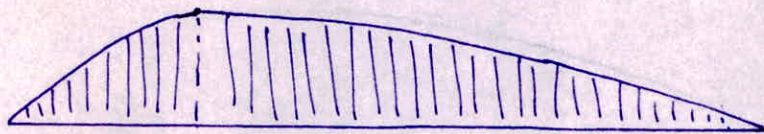
- nombre de voie à charger est 1.
- Pont de 3^e classe } $\Rightarrow k = 0,9$.

Pont de 3^e classe $\Rightarrow l_0 = 2,75$.

$l_v =$ largeur d'une voie $l_v = 4$ m.

$$A_L = 230 + \frac{36000}{L+12} \text{ kg/m}^2.$$

$L =$ longueur à charger pour avoir un moment maximum en section θ .
d'après la ligne d'influence. $L =$ portée du pont.



$$L = r d = 60 \cdot \frac{35,69}{180} \times 3,14.$$

$$L = 37,37 \text{ m.}$$

$$\text{d'où } A_L = 230 + \frac{36000}{37,37+12}$$

$$A_L = 959,19 \text{ kg/m}^2.$$

$$A = 0,9 \times 959,19 \times \frac{2,75}{4} \text{ soit } A = 593,5 \text{ kg/m}^2.$$

On a une seule voie à charger.

$$\text{d'où } A' = A \cdot l_v = 593,5 \times 4$$

$$A' = 2374,0 \text{ kg/m.}$$

$$A' = 2,374 \text{ t/m.}$$

soit en majorant par 1,2

$$q_A = 1,2 \times 2,374$$

$$\underline{q_A = 2,8488 \text{ t/m}}$$

$$M_{q_A} = q_A r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} (\lambda - \theta)}{\cos \frac{1}{2} \lambda}.$$

d'où le tableau suivant :

Section θ	0	2,86	début. de giron 5,730	$\lambda/4$	$\lambda/2$
M_{qA} major	0	75,98	139,20	193,99	259,17

b/. surcharges trottoirs :

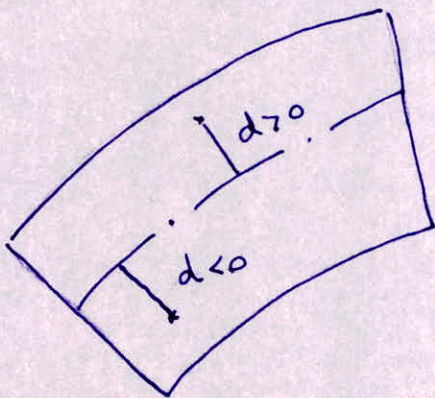
Le moment revenant à une poutre dû à une charge uniforme (p) le long du pont excentré est de :

$$M = \Delta p r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} \theta \cdot \sin \frac{1}{2} (\lambda - \theta)}{\cos \frac{1}{2} \lambda}$$

où $\Delta = 1 + \frac{d}{r} =$ coefficient d'excentrement.

$d =$ distance de la charge uniforme à la fibre moyenne

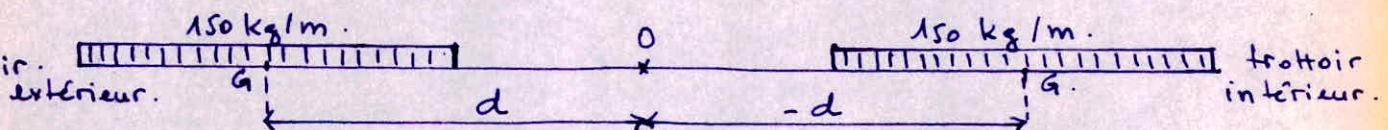
Rappel de convention de signe pour (d) :



soit $q_t =$ surcharge d'un trottoir.

Pour le calcul des poutres principales (qui est notre cas) la surcharge trottoir à considérer est un uniforme de 150 kg/m^2 (pour chaque trottoir). - largeur d'un trottoir = 1 m .

d'où $q_t = 150 \times 1$ $q_t = 150 \text{ kg/m}$.



Trottoir extérieur $\rightarrow M_e = (1 + \frac{d}{r}) q_t r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} (\lambda - \theta)}{\cos \frac{1}{2} \lambda}$

Trottoir intérieur $\rightarrow M_i = (1 - \frac{d}{r}) q_t r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} (\lambda - \theta)}{\cos \frac{1}{2} \lambda}$

$$M = (M_e + M_i) = 2 q_t r^2 \frac{\sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} (\lambda - \theta)}{\cos \frac{1}{2} \lambda}$$

$$0 < \frac{d}{r} < 1$$

$$1 < 1 + \frac{d}{r} < 2$$

$$1 < (1 - \frac{d}{r}) < 2$$

donc le cas le plus défavorable se produit lorsque l'on surcharge les 2 trottoirs.

$$q'_t = 1,2 \times 150 = 180 \text{ kg/m} \quad \text{soit} \quad q'_t = 0,18 \text{ t/m}.$$

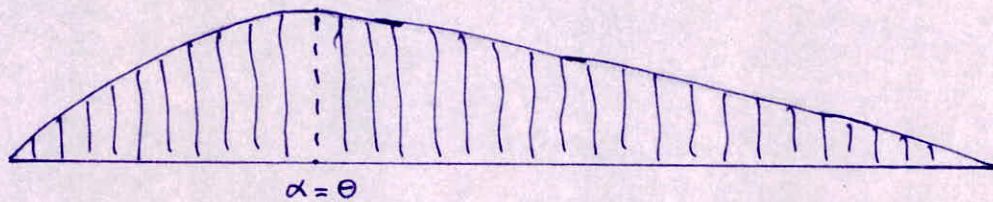
$$M_{q'_t} = 2q'_t \cdot \frac{r^2 \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} (\Delta - \theta)}{\cos \frac{1}{2} \Delta}.$$

d'où le tableau suivant donnant $M(\theta)$ sous l'effet des surcharges de trottoir, la largeur de trottoir à surcharger est donnée par le tracé de la ligne d'influence déterminé précédemment

θ	0	$5,73^\circ$	$\Delta/4$	$\Delta/2$
$M_{q'_t}$ major t.m	0	17,59.	24,51	32,75.

e). Surcharges Bc

Ligne d'influence en section θ de M.



- Disposition

a). Longitudinalement :

d'après la ligne d'influence de M, on doit disposer le maximum de charges.

Selon le règlement, on doit disposer au maximum 2 camions.
 \Rightarrow prenons donc 2 camions.

b). Transversalement :

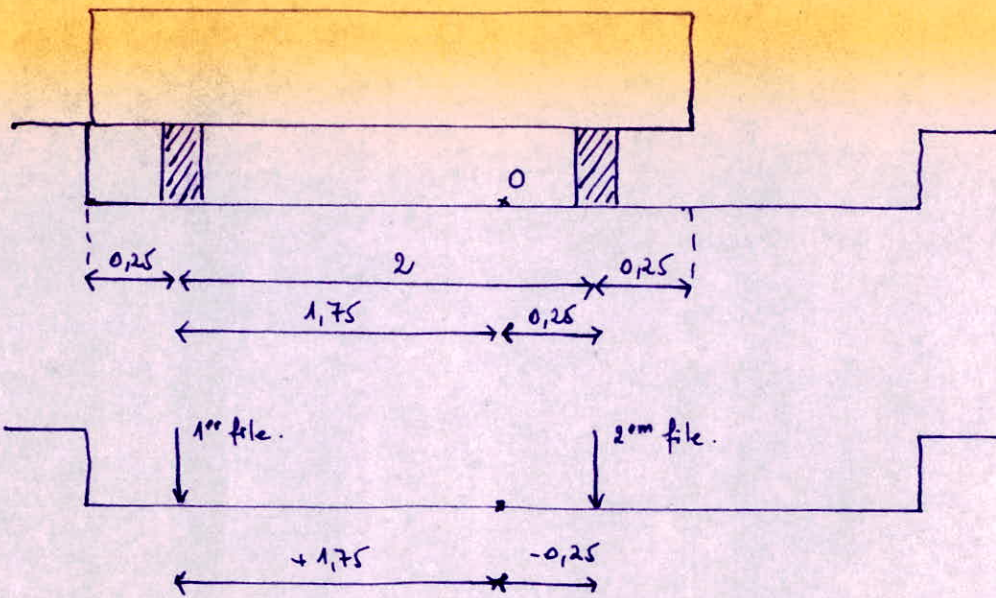
On peut disposer au maximum autant de convois que de voies, selon le cas le plus défavorable. Pour notre cas, le problème du nombre de convois ne se pose pas puisqu'on a une seule voie, nous disposerons donc un seul convoi.

c). Conclusion

Transversalement : 1 convoi.

Longitudinalement : 2 camions.

- Position transversale la plus défavorable des camions :



$d_1 = +1,75 \text{ m}$ = excentrement des charges de la 1^o file de roue (du côté de la poutre extérieure).
 $d_2 = -0,25 \text{ m}$ = excentrement des charges de la 2^o file de roue (du côté de la poutre intérieure).

Moment dû à la 1^o file de roue revenant à une poutre :

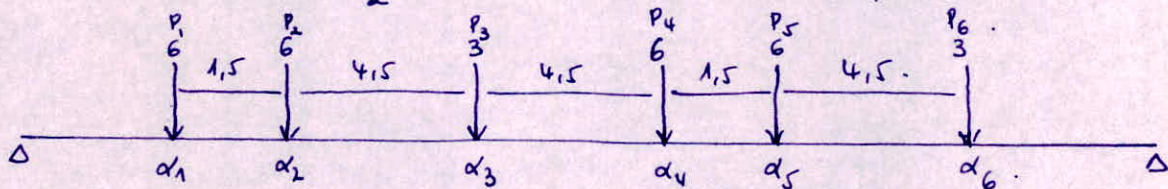
$$M_1 = \frac{1}{2} \Delta_1 \sum P_i r \mathcal{M}_b(\alpha_i, \theta) \quad \text{avec } \Delta_1 = \left(1 + \frac{d_1}{r}\right) \text{ coefficient d'excentrement.}$$

moment dû à la 2^o file de roue revenant à une poutre :

$$M_2 = \frac{1}{2} \Delta_2 \sum P_i r \mathcal{M}_b(\alpha_i, \theta).$$

Moment dû à la 1^o et 2^o file de roue revenant à une poutre :

$$M = M_1 + M_2 = \frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_2) \sum P_i r \mathcal{M}_b(\alpha_i, \theta).$$



$$M = \frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_2) \sum P_i r \mathcal{M}_b(\alpha_i, \theta).$$

Soit $y_i = r \mathcal{M}_b(\alpha_i, \theta)$ ordonnée de la ligne d'influence M en θ .

$$M = \frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_2) \sum_{i=1}^6 P_i y_i.$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \left(1 + \frac{1,75}{60}\right) + \left(1 - \frac{0,25}{60}\right) = \left(2 + \frac{1,5}{60}\right) = 2,025.$$

$$M = \frac{1}{2} 2,025 \sum P_i y_i.$$

$$\boxed{M = 1,0125 \sum P_i y_i} \text{ Moment dû à } B_c \text{ sans majoration par } 1,2 \cdot \delta.$$

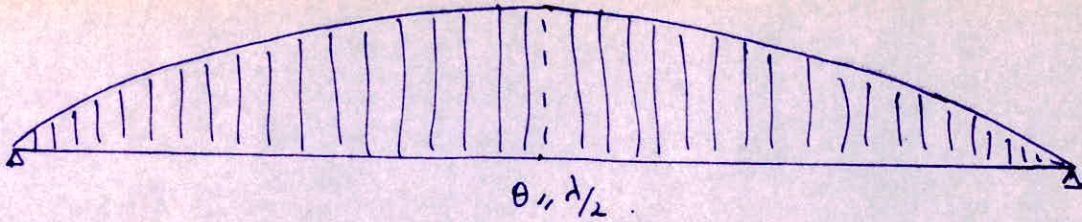
Soit en majorant par $1,2 \times \delta$ ($\delta = 1,07$ coefficient dynamique)

$$M = \frac{1}{2} 2,025 (1,2 \times 1,07) \sum P_i y_i.$$

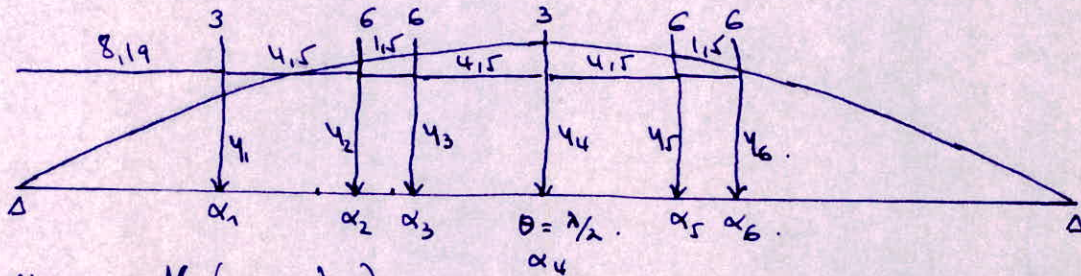
$$\boxed{M = 1,3 \sum P_i y_i} \text{ Moment dû à } B_c \text{ majorée en section } \theta.$$

• section milieu $M(\lambda/2)$.

ligne d'influence.



Après plusieurs essais (à l'aide du programme HP25) la position la plus défavorable pour la section milieu est la suivante :



$$y_i = r M_0(\alpha_i, \lambda/2)$$

i	1	2	3	4	5	6
α_i en °	7,82	12,12	13,56	17,86	22,16	23,59
y_i	4,29	6,62	7,39	9,67	7,37	6,61

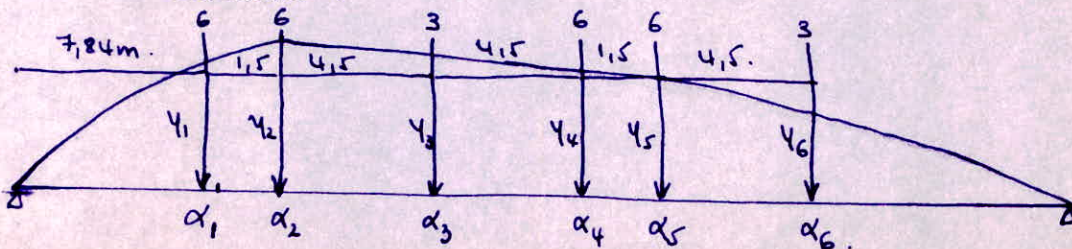
d'où le moment avec majoration revenant à une poutre :

$$M(\lambda/2) = 1,3 [3(4,29 + 9,67) + 6(6,62 + 7,39 + 7,37 + 6,61)]$$

$$M(\lambda/2) = 273 \text{ t/m}$$

• Section $\lambda/4$ $M(\lambda/4)$.

Après plusieurs essais, la position des charges (Bc) la plus défavorable est la suivante :



i	1	2	3	4	5	6
α_i en °	7,44	8,92	13,22	17,52	18,46	23,25
y_i	6,04	7,18	6,10	4,97	4,59	3,44

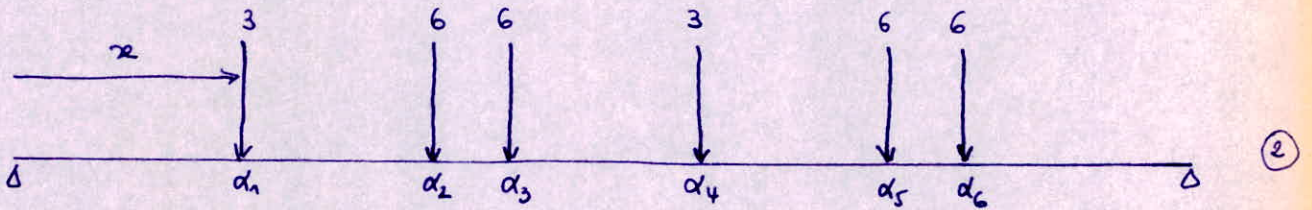
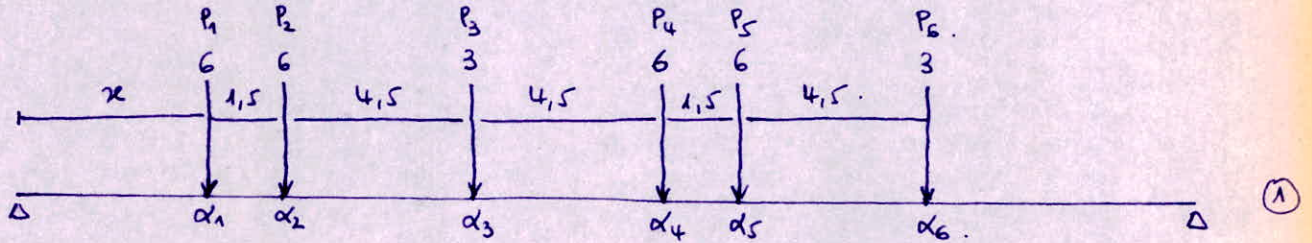
d'où le moment $M(d/4)$ majoré revenant à une poutre

$$M(d/4) = 1,3 [6(6,04 + 7,18 + 4,97 + 4,59) + 3(6,1 + 3,44)]$$

$$M(d/4) = 215 \text{ t.m.}$$

. Section d'appui $M(0) = 0$.

Détermination de la section dangereuse dû aux surcharges B_c :



1^o Méthode : Méthode analytique.

Cette ~~section~~ méthode consiste à déterminer l'expression analytique du moment en une section θ dû aux 6 charges concentrées et puis de déterminer l'extrémum de cette expression. Par superposition des effets on aboutit facilement à la formule suivante :

$$M(\theta) = 1,3 r \sum P_i M_0(\alpha_i, \theta)$$

$$M(\theta) = \begin{cases} 1,3 r \frac{\Delta \sin \theta}{\sin \Delta} \sum_{i=1}^6 P_i \sin(\Delta - \alpha_i) & \text{si } 0 < \theta < \alpha_1 \\ 1,3 r P_1 \frac{\sin \alpha_1 \sin(\Delta - \theta)}{\sin \Delta} + 1,3 r \frac{\sin \theta}{\sin \Delta} \sum_{i=2}^6 P_i \sin(\Delta - \alpha_i) & \text{si } \alpha_1 < \theta < \alpha_2 \\ \dots \\ 1,3 r \sum_{i=1}^{j-1} P_i \frac{\sin \alpha_i \sin(\Delta - \theta)}{\sin \Delta} + 1,3 r \sum_{i=j}^6 P_i \frac{\sin \theta \sin(\Delta - \alpha_i)}{\sin \Delta} & \text{si } \alpha_j < \theta < \alpha_{j+1} \\ \dots \end{cases}$$

$j = 1, \dots, 6.$
 $l = 1, \dots, 6.$

avec

$$\begin{aligned} r\alpha_1 &= r\alpha. \\ r\alpha_2 &= r\alpha + 1,5 \\ r\alpha_3 &= r\alpha + 6. \\ r\alpha_4 &= r\alpha + 10,5 \\ r\alpha_5 &= r\alpha + 12. \\ r\alpha_6 &= r\alpha + 16,5. \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} r\alpha_1 &= r\alpha. \\ r\alpha_2 &= r\alpha + 4,5. \\ r\alpha_3 &= r\alpha + 6. \\ r\alpha_4 &= r\alpha + 10,5 \\ r\alpha_5 &= r\alpha + 15. \\ r\alpha_6 &= r\alpha + 16,5. \end{aligned}$$

Alors cette expression de M est une fonction à 2 variables. Déterminer la section dangereuse revient à déterminer les valeurs de α et de θ pour lesquelles M est maximum. c'est à dire cela revient à déterminer l'extremum d'une fonction à 2 variables. Cela nécessite un calcul très laborieux, car notre fonction est la somme de plusieurs fonctions trigonométriques.

2° Méthode : Méthode graphique.

Elle consiste à tracer la courbe enveloppe de moments maximums, en calculant en plusieurs sections le moment maximum, puis on déduit du graphe la section dangereuse.

3° Méthode : Méthode par approximation successive.

A l'aide de la calculatrice HP25, on peut programmer ($\sum P_i y_i$) le programme nous permet de déterminer pour chaque position θ la position la plus défavorable du convoi, et la valeur correspondant du M_{max} .

Par exemple :

en section	θ_j	→	$M_j \max.$
"	θ_{j+1}	→	$M_{j+1} \max.$
"	θ_{j+2}	→	$M_{j+2} \max.$

si par exemple : $M_j < M_{j+1} < M_{j+2}$.

Alors la section dangereuse se trouve dans l'un des 2 intervalles $]\theta_j, \theta_{j+1}[$ ou $]\theta_{j+1}, \theta_{j+2}[$.

Puis on détermine : $\frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2} \rightarrow M_{max} \left(\frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2} \right) = M_1$.

$\frac{\theta_{j+1} + \theta_{j+2}}{2} \rightarrow M_{max} \left(\frac{\theta_{j+1} + \theta_{j+2}}{2} \right) = M_2$.

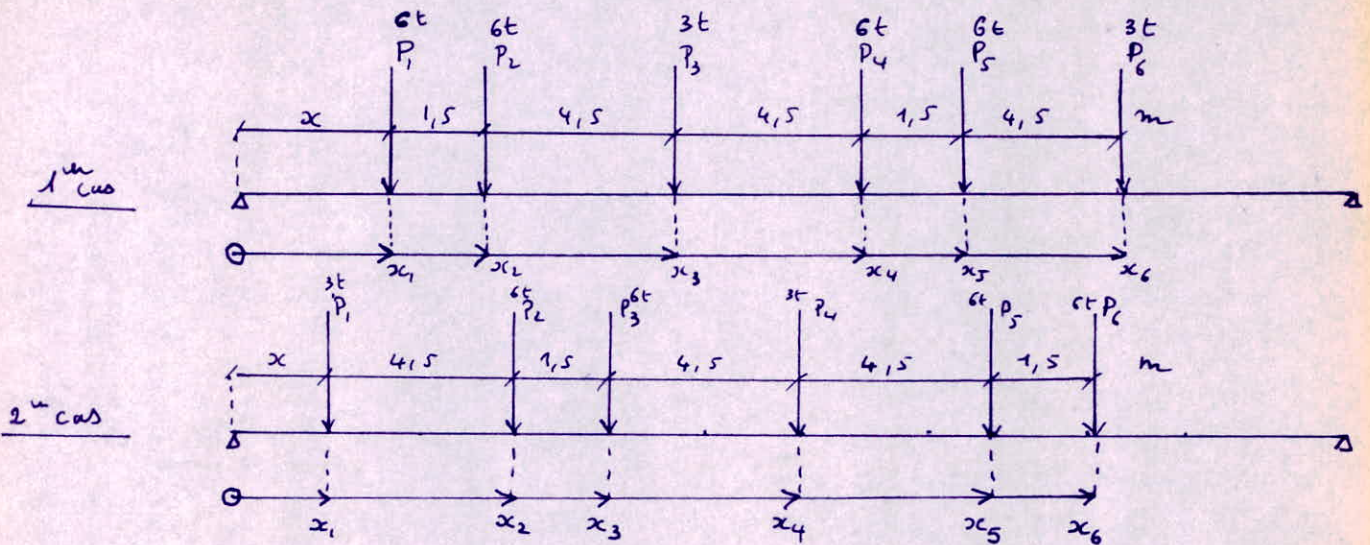
si par exemple :

$M_1 > M_2$, alors la section dangereuse se trouve dans l'un de ces 2 intervalles $]\theta_j, \theta_j + \theta_{j+1}/2[$ ou $]\frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2}, \theta_{j+1}[$.

.....
Ainsi de suite, on répète ces opérations plusieurs fois jusqu'à ce que l'on trouve :

$$M_{\theta-\varepsilon} < M_{\theta \text{ dangereuse}} < M_{\theta+\varepsilon}$$

Programme du calcul de M_{max} revenant à une poutre en une section θ quelconque du pont dû aux surcharges B_c



1 ^{er} cas		2 ^{er} cas	
$P_1 = 6t$	$x_1 = x$	$P_1 = 3t$	$x_1 = x$
$P_2 = 6t$	$x_2 = x + 1,5 m$	$P_2 = 6t$	$x_2 = x + 4,5 m$
$P_3 = 3t$	$x_3 = x + 6 m$	$P_3 = 6t$	$x_3 = x + 6 m$
$P_4 = 6t$	$x_4 = x + 10,5 m$	$P_4 = 3t$	$x_4 = x + 10,5 m$
$P_5 = 6t$	$x_5 = x + 12 m$	$P_5 = 6t$	$x_5 = x + 15 m$
$P_6 = 3t$	$x_6 = x + 16,5 m$	$P_6 = 6t$	$x_6 = x + 16,5 m$

A l'aide du programme ci dessous de la H.P.25, on peut déterminer le moment en une section θ , revenant à une poutre, pour une position du convoi (c'est à dire pour une valeur de x donné).

Ainsi en répétant cette opérations plusieurs fois on arrive à déterminer la position du convoi pour laquelle le moment est maximum en la section considérée.

La ligne d'influence du moment M de la section θ considérée nous renseigne sur les valeurs de x pour lesquelles le moment M sera probablement maximum

Ainsi, on répète ce processus plusieurs fois jusqu'à ce que l'on obtient la section dangereuse θ_s sur Bc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_s - \epsilon < \theta_s < \theta_s + \epsilon \\ \text{avec } M(\theta_s - \epsilon) < M(\theta_s) < M(\theta_s + \epsilon) \end{array} \right.$$

Programme

Pas	Instruction
1	RCL 4
2	ENTER
3	RCL 5
4	+
5	3
6	X
7	gH
8	÷
9	STO 1
10	CHS
11	RCL 0
12	+
13	gX > 0
14	GOTO 16
15	GOTO 30
Pas	Instruction

16	RCL 1
17	≠ sin
18	RCL 3
19	X
20	RCL 2
21	ENTER
22	RCL 0
23	-
24	≠ sin
25	X
26	RCL 6
27	X
28	STO + 7
29	GOTO 00
30	RCL 0
Pas	Instruction

31	≠ sin
32	RCL 3
33	X
34	RCL 2
35	ENTER
36	RCL 1
37	-
38	≠ sin
39	X
40	RCL 6
41	X
42	STO + 7
43	GOTO 00
Pas	Instruction

STOP !!

Execution et Résultat du programme

	2 ^{ème} Cas	1 ^{er} Cas
Z O N T U E X E	$0 = ST07$ $\theta = ST00$ $35,69^\circ = ST02$ $x = ST04$ $\frac{60 \times 1,025}{\sin 35,69} = ST06$	$0 = ST07$ $\theta = ST00$ $35,69^\circ = ST02$ $x = ST04$ $\frac{60 \times 1,025}{\sin 35,69} = ST06$
	$3 = ST03$ $0 = ST05$ R/S $6 = ST03$ $4,5 = ST05$ R/S $6 = ST03$ $1,5 = ST05$ R/S $3 = ST03$ $4,5 = ST05$ R/S $6 = ST03$ $4,5 = ST05$ R/S $6 = ST03$ $1,5 = ST05$ R/S	$6 = ST03$ $0 = ST05$ R/S $6 = ST03$ $1,5 = ST05$ R/S $3 = ST03$ $4,5 = ST05$ R/S $6 = ST03$ $4,5 = ST05$ R/S $6 = ST03$ $1,5 = ST05$ R/S $3 = ST03$ $4,5 = ST05$ R/S
	$M = RCL7$ Sans majoration par 1,2 S $M = 1,2 \cdot 1,07 \cdot RCL7$	$M = RCL7$ Sans majoration par 1,2 S $M = 1,2 \cdot 1,07 \cdot RCL7$

	$\theta_1 = 12^\circ$		$\theta_2 = 14,56^\circ$		$\theta_3 = 15,94^\circ$		$\theta_4 = \frac{16,18 - 15,94}{2} = 16,06$	
	x_m	M t.m	x_m	M t.m	x_m	M t.m	x_m	M t.m
	0	157,34	0	166,8	0	164,84	0	163,88
	6	195,14	6	205,47	6	206,26	6	206,22
	6,56	197,99	8	209,75	10	213,55	10	213,49
	7	197,58	10,05	213,89	10,65	214,55	10,78	214,61
	10	182,50	10,08	213,95	10,68	214,60	10,81	214,65
	16	127,65	10,10	213,99	10,70	214,58	10,84	214,56
	20	85,14	11	210,81	11	213,21	11	213,81
	-	-	13	194,39	16	165,51	16	167,37
	-	-	16	163,09	20	112,46	20	113,29
	-	-	20	109,16	-	-	-	-
	0	134,53	0	125,11	0	123,18	0	122,47
	6	182,74	6	200,03	6	201,20	6	201,02
	6,56	185,66	8	204,58	10	209,64	10	209,82
	7	186,62	10,05	209,01	10,65	210,73	10,78	211,05
	9,0	193,96	10,08	209,08	10,68	210,78	10,81	211,09
	9,5	191,80	10,10	209,12	10,70	210,79	10,84	211,07
	10	192,80	11	208,52	11	210,37	11	210,83
	16	152,91	13	206,43	16	197,77	16	198,49
	20	-	16	194,89	20	145,82	20	147,32
	-	-	20	141,95	-	-	-	-

	$\theta_5 = \frac{16,41 - 15,94}{2} = 16,18^\circ$		$\theta_6 = 16,41^\circ$		$\theta_7 = 16,89^\circ$		$\theta_8 = 18,68 = \frac{\lambda}{2}$	
	x_m	M_{tm}	x_m	M_{tm}	x_m	M_{tm}	x_m	M_{tm}
	0	162,92	0	161,07	0	157,21	0	149,45
	6	206,18	6	206,09	6	205,91	6	205,51
	10	213,43	10	213,30	10	213,03	8	211,84
	10,85	214,55	11,15	214,60	11,65	214,20	8,9	212,40
	10,93	214,66	11,18	214,63	11,68	214,22	9	212,46
	10,95	214,65	11,20	214,56	11,7	214,18	10	212,43
	11	214,42	13	203,58	13	207,07	16	180,09
	16	168,22	16	169,85	16	173,26	20	189,09
	20	114,11	20	115,69	20	118,98	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-
	0	121,75	0	120,37	0	117,48		
	6	200,84	6	200,49	6	199,75		
	10	210,00	10	210,34	10	211,03		
	10,85	211,25	11,15	211,80	11,65	212,44		
	10,93	211,36	11,18	211,83	11,68	212,47		
	10,95	211,37	11,20	211,81	11,7	212,44		
	11	211,29	13	208,47	13	209,49		
	16	199,21	16	200,58	16	202,29		
	20	148,39	20	150,44	20	154,72		
	-	-	-	-	-	-	-	-

d'après les 2 tableaux précédents, on obtient les moments M_{max} (majoration non comprise par $1,2 \times 1,57$) pour les différentes sections choisies :

θ_i	0	$8,92 = \frac{\lambda}{4}$	12°	15,46	15,44	16,06	16,18	16,41	16,89	17,85
M_{max} sans la majoration E.m	0	167,45	197,99	213,99	214,60	214,65	214,66	214,69	214,22	212,46
$1,2 \times 1,57 M_{max}$ t.m	0	215	254,22	274,46	275,55	275,61	275,62	275,58	275,01	273

$$\theta = 16,06^\circ \text{ -----} \rightarrow M_{max} = 275,61 \text{ t.m}$$

$$\theta = 16,18^\circ \text{ -----} \rightarrow M_{max} = 275,62 \text{ t.m} \quad !!!$$

$$\theta = 16,41^\circ \text{ -----} \rightarrow M_{max} = 275,58 \text{ t.m}$$

$$16,06 < \theta_s < 16,41 \Rightarrow 275,58 < M < 275,61$$

On prendra comme section dangereuse θ_s sous B_c : $\theta_s = 16,18^\circ$
 et d'où $M_{Max} = 275,62 \text{ t.m}$ sous les surcharges B_c

Conclusion : Le moment (M) maximum dû aux surcharges B_c est atteint dans la section θ_s telle que $16,06^\circ < \theta_s < 16,41^\circ$; c'est à dire dans une section proche de la section milieu.

Section dangereuse sous B_c prise : $\left\{ \begin{array}{l} \theta_s = 16,18^\circ \\ x = r \theta_s = 0,423 L \end{array} \right. \quad L = 37,37 \text{ m.}$

• Section dangereuse sous la combinaison $g + 1,2 \times 1,57 S_{oc} + 1,2 S_{trafic}$:

Le moment sous les charges permanentes et les surcharges trafic est maximum en la section milieu (0,5L).

Par contre, le moment sous B_c est maximum en la section $\theta_s \approx 16,18^\circ$ ($r\theta_s \approx 0,423L$).

Le moment sera maximum en une section θ telle que: $\theta_s < \theta < \frac{\lambda}{2}$ sous la combinaison $g + 1,2 \times 1,07 S_{B_s} + 1,2 S_{Tot}$.
Pour la déterminer, il suffit de construire la courbe enveloppe des moments maximums sous cette combinaison dans l'intervalle $[\theta_s, \frac{\lambda}{2}]$.

Pour notre cas, vu que le moment maximum dû à B_c entre $\theta_s = 16,18^\circ$ et $\theta = \frac{\lambda}{2}$, ne décroît que légèrement, de la valeur $275,62 \text{ tm}$ à la valeur 273 t.m ; et vu que le moment dû à $g + 1,2 S_{k.o.H}$ ne varie que légèrement de la valeur à la valeur dans le même intervalle $[\theta_s, \frac{\lambda}{2}]$, il sera donc inutile de déterminer la section dangereuse sous la combinaison.

Cependant pour la détermination du nombre de cables on prendra:

$$M\left(\frac{\lambda}{2}\right) = M_{\max B_c} + M_{1,2 \text{ k.o.t}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + M_g\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

On est en sécurité, sans être loin de la réalité.

Tableau récapitulatif des moments fléchissants revenant à une poutre pour les différentes combinaisons (Majorations comprises)

Sections	$\theta = 0$	$\theta = 5,73^\circ$	$\theta = \lambda/4$	$\theta = \lambda/2$
M_{q_1}	0	401,20	559,22	747,15
M_g	0	538,50	750,47	1002,65
M_A	0	139,20	193,99	259,17
M_{tot}	0	17,59	24,51	32,75
M_{Bc}	0	✓	215	275,62!
$M_g + M_{Bc} + M_{tot}$ l.m	0	—	989,98	1311,02
$M_g + M_A + M_{tot}$ l.m	0	—	968,97	1294,57

II EFFORT TRANCHANT

1. Effort tranchant revenant à une poutre sous les charges permanentes

L'effort tranchant revenant à chaque poutre fictive dû à une charge uniforme (p) répartie le long du pont est donné par :

$$T = \frac{1}{2} p r \left(\frac{\lambda}{2} - \theta \right)$$

λ = portée angulaire
 r = rayon de courbure

$\lambda = 35,69^\circ$
 $r = 60 \text{ m}$

a) sous g_1 :

$$T_{g_1} = \frac{1}{2} g_1 r \left(\frac{\lambda}{2} - \theta \right)$$

$g_1 = 8,2125 \text{ t/m}$

b) sous charges permanentes totales : g

$$T_g = \frac{1}{2} g r \left(\frac{\lambda}{2} - \theta \right)$$

$g = 11,021 \text{ t/m}$

d'où le tableau suivant :

θ	0	$2,86^\circ$	$5,73^\circ$	$\lambda/4$	$\lambda/2$
T_{g_1}	76,73	64,41	52,09	38,37	0
T_g	102,96	86,43	69,90	51,50	0

2. Lignes d'influences de l'effort tranchant global :

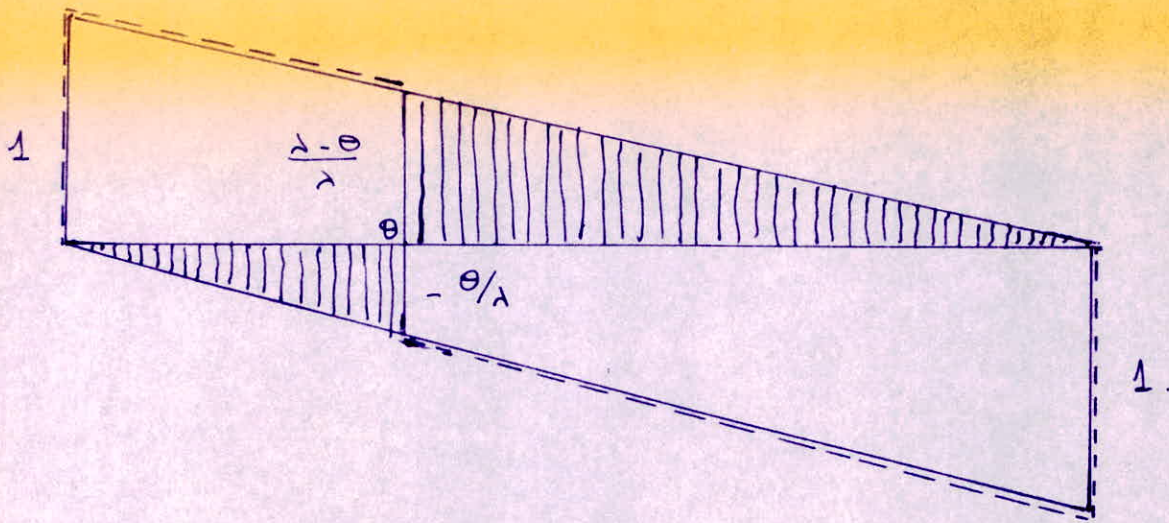
L'effort tranchant global, créé par une charge concentrée P appliquée en α , dans une section θ est donné par :

$$T = P \zeta(\alpha, \theta)$$

Pour obtenir, la ligne d'influence dans la section θ , il suffit de faire $P=1$ et de tracer la courbe correspondante en fonction de α ; (θ paramètre fixé)

L'équation de la ligne d'influence de la section θ est donc :

$$\zeta(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} & \text{si } \theta < \alpha < \lambda \\ -\frac{\alpha}{\lambda} & \text{si } 0 < \alpha < \theta \end{cases}$$



Efforts tranchant revenant à une poutre dûs aux surcharges :

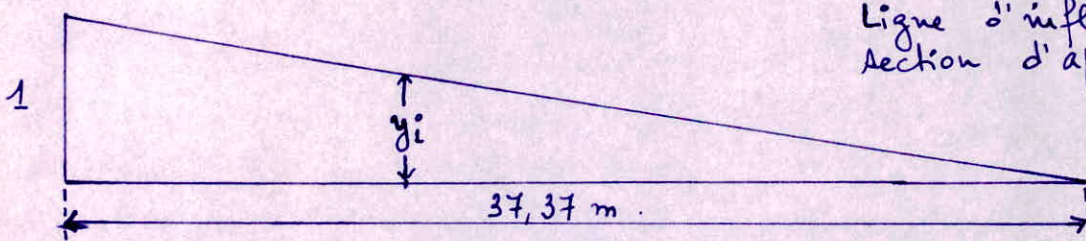
a/ Surcharges A

• Section d'appui

$$A = K A_L \frac{l_0}{l_v} \quad \text{on a vu précédemment que : } \begin{array}{l} K = 0,9 \\ l_0 = 2,75 \\ l_v = 4 \end{array}$$

$$A_L = 230 + \frac{36000}{L+12} \quad \text{Kg/m}^2$$

A_L dépend de la longueur à surcharger L qui dépend de la ligne d'influence de la section considérée.



Ligne d'influence de la section d'appui, de T global.

d'où $L = 37,37 \text{ m}$: cas le plus défavorable.

$$A_L = 230 + \frac{36000}{37,37+12}$$

$$A_L = 959,19 \text{ Kg/m}^2$$

$$\text{d'où } A = 0,9 \times 959,19 \times \frac{2,75}{4} \quad A = 593,5 \text{ Kg/m}^2$$

$$\text{d'où la majoration } q_A = 1,2 \cdot A \cdot l_v = 2848,8 \text{ t/m}$$

L'effort tranchant ne dépendant pas de l'excentrement des surcharges, la largeur à surcharger est égale à la largeur totale du pont cad à l_v .

$$q_A = 2,8488 \text{ t/m}$$

$$\text{d'où l'effort tranchant global : } T = \frac{1}{2} \times 1 \times 37,37 \times 2,8488$$

$$T = 53,33 \text{ t}$$

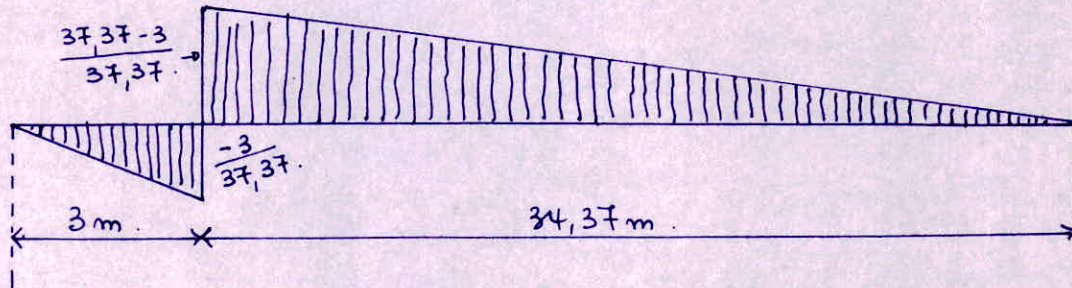
d'où l'effort tranchant revenant à une poutre

$$T_1 = T/2 \quad T_1 = 26,61 \text{ t}$$

• section $x = 3 \text{ m}$, $\theta = 2,86^\circ$

ligne d'influence de la section $\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \text{ m} \\ \text{ou } \theta = 2,86^\circ \end{array} \right.$

d'où



La L du pont à surcharges est d'après la ligne d'influence :

$$L = 34,37 \text{ m} \Rightarrow A_L = 230 + \frac{36.000}{34,37 + 12} \quad A_L = 1006,36 \text{ Kg/m}^2$$

d'où $q_A = 1,2 \times (0,9 \times 1006,36 \times \frac{2,75}{4}) \cdot 4$ (majoration comprise)

$$q_A = 29889 \text{ Kg/m} \quad q_A = 2,9889 \text{ t/m}$$

d'où l'effort tranchant global :

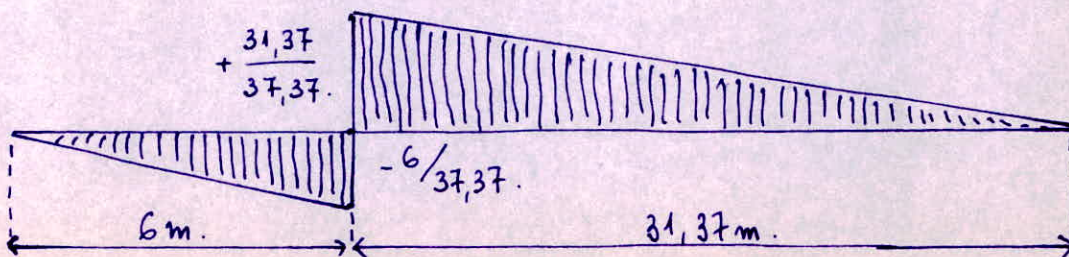
$$T = \frac{1}{2} \times \left(\frac{37,37-3}{37,37} \right) 34,37 \times 2,9889 = 47,24 \text{ t}$$

et d'où l'effort revenant à une poutre :

$$T_1 = T/2 \quad \text{soit } T_1 = 23,62 \text{ t}$$

• section $x = 6 \text{ m}$ $\theta = 5,73^\circ$

ligne d'influence :



$$\left. \begin{array}{l} L = 31,37 \text{ m} \Rightarrow A_L = 230 + \frac{36000}{31,37 + 12} \\ \text{cas le plus défavorable.} \end{array} \right\} A_L = 1060,07 \text{ Kg/m}^2$$

d'où $q_A = 1,2 \left(0,9 \times 1060,07 \times \frac{2,75}{4} \right) \cdot 4$ $q_A = 3148,41 \text{ Kg/m}$

$q_A = 3,1484 \text{ t/m}$ (majoration par 1,2 comprise).

d'où l'effort tranchant global : T.

$T = \frac{1}{2} \left(\frac{31,37}{37,37} \right) \times 31,37 \times 3,1484$

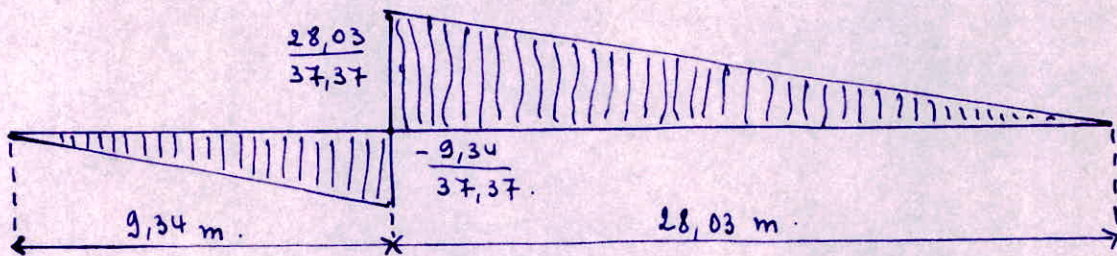
$T = 41,45 \text{ t}$

et l'effort tranchant T_1 revenant à une poutre

$T_1 = \frac{1}{2} T$ soit $T_1 = 20,73 \text{ t}$

Section $1/4$ $\alpha = 1/4$ $\theta = 1/4$

ligne d'influence :



$L = 28,03 \text{ m}$ $\Rightarrow A_L = 230 + \frac{36.000}{28,03 + 12}$
 cas le plus défavorable $A_L = 1129,33 \text{ Kg/m}^2$

d'où $q_A = 1,2 \left(0,9 \times 1129,33 \times \frac{2,75}{4} \right) \cdot 4$ $q_A = 3354,1 \text{ Kg/m}$

soit $q_A = 3,3541 \text{ t/m}$ (majoration comprise).

L'effort tranchant global sera :

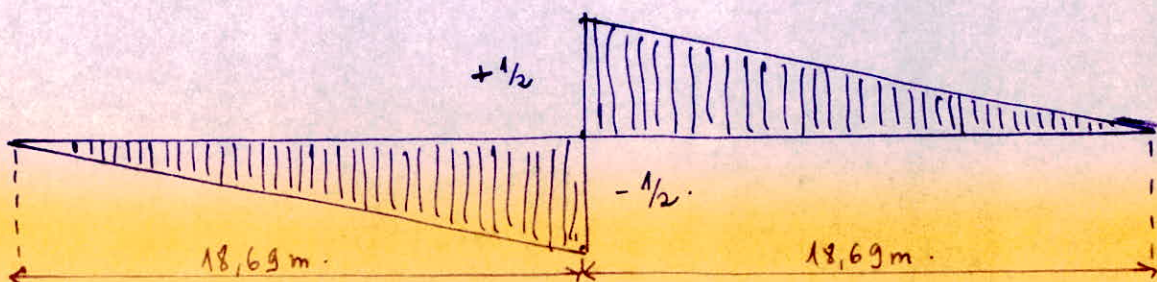
$T = \frac{1}{2} \left(\frac{28,03}{37,37} \right) (28,03) 3,3541$ $T = 35,26 \text{ t}$

et d'où l'effort tranchant revenant à une poutre

$T_1 = T/2$ soit $T_1 = 17,63 \text{ t}$

Section à mi-portée $\alpha = 18,69 \text{ m}$ $\theta = 1/2$

ligne d'influence.



$$L = 18,69 \text{ m} \Rightarrow A_L = 230 + \frac{36000}{18,69+12} \quad A_L = 1403,02 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{d'où } q_A = \frac{1}{2} \left(0,9 \times 1403,02 \times \frac{2,75}{4} \right) \cdot 4 \quad q_A = 4166,9 \text{ kg/m}$$

$$\text{soit } q_A = 4,1669 \text{ t/m}$$

l'effort tranchant global sera :

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) (18,69) 4,1669 \quad T = 19,47 \text{ t}$$

et d'où l'effort tranchant pour une poutre T_1 .

$$T_1 = T/2 \quad \text{soit } T_1 = 9,73 \text{ t}$$

θ	0	$2,86^\circ$	$5,73^\circ$	$\pi/4$	$\pi/2$
T_{ent}	26,61	23,62	20,73	17,63	9,73

b/ Surcharges trottoirs :

On obtient le cas le plus défavorable en chargeant les 2 trottoirs.

Selon le règlement, pour le calcul des poutres principales la surcharge due à un trottoir à considérer est de 150 kg/m^2

Cette surcharge est excentrée, mais on a vu précédemment que l'effort tranchant est indépendant de l'excentrement des charges.

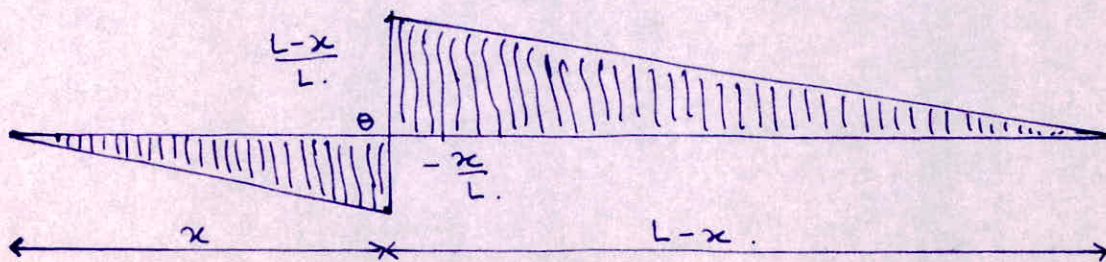
$$T (\text{charges excentrées}) = T (\text{charges de mêmes centrées})$$

les surcharges des 2 trottoirs majorées est :

$$\text{largeur d'un trottoir} = 1 \text{ m} \Rightarrow q_t = \frac{1}{2} (150 + 150) \times 1 \quad q_t = 360 \text{ kg/m}$$

$$\text{soit } q_t = 0,36 \text{ t/m}$$

ligne d'influence d'une section $\left. \begin{matrix} x \\ \theta \end{matrix} \right\}$



On déterminera, l'effort tranchant revenant à une poutre dans les sections : $x=0$, $x=3 \text{ m}$, $x=6 \text{ m}$, $x=L/4$, $x=L/2$.
La longueur des trottoirs à surcharger varie suivant la section considérée ; elle est égale à $(L-x)$.

L'effort tranchant global est égale à la surface du grand triangle multiplié par q_t .

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{L-x}{L} \right) (L-x) q_t$$

d'où l'effort tranchant revenant à une poutre :

$$T_1 = T/2 \quad \text{soit} \quad T_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{L-x}{L} \right)^2 q_t$$

$$T_1 = \frac{1}{4} q_t \left(\frac{L-x}{L} \right)^2 \quad \text{avec} \quad q_t = 0,36 \text{ t/m. (majorée par 1,2)}$$

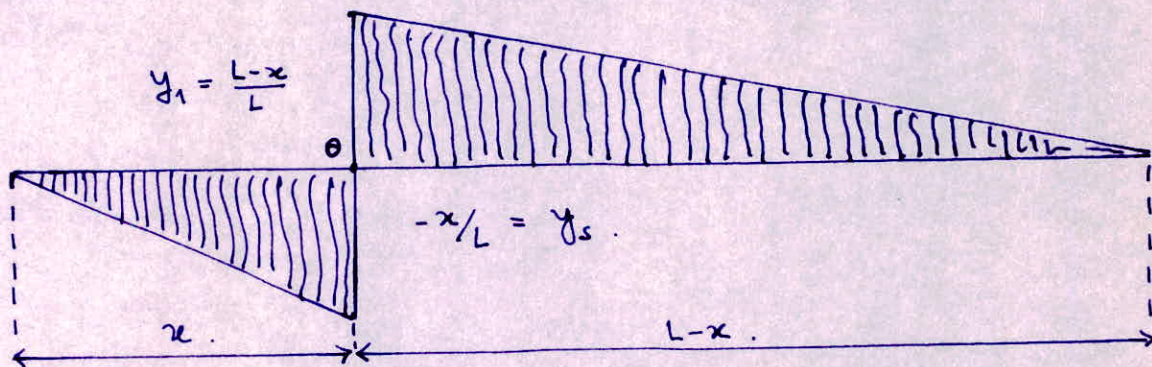
$$L = 37,37 \text{ m.}$$

d'où le tableau suivant :

x m.	0	3	6	$\frac{L}{4} = 9,34$	$\frac{L}{2} = 18,69$
$T_{\text{trout}}(1)$ ent.	3,36	2,84	2,37	1,89	0,75

c/. Surcharges B_c :

ligne d'influence en la section quelconque $\theta(x)$.



$$L = 37,37 \text{ m.}$$

On étudiera les sections :

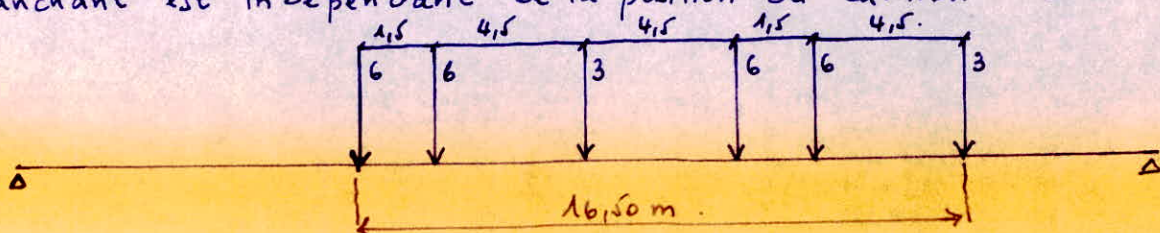
$$x=0, \quad x=3 \text{ m}, \quad x=6 \text{ m}, \quad x=\frac{L}{4} = 9,34, \quad x=\frac{L}{2} = 18,69 \text{ m.}$$

On a vu précédemment, pour avoir le cas le plus défavorable et compte tenu du règlement on doit avoir :

transversalement : 1 convoi.

longitudinalement : 2 camions.

Dans la première partie, on a démontré que l'effort tranchant est indépendant de l'excentrement des charges, c'est à dire que l'effort tranchant est indépendant de la position du camion transversalement.



Pour toutes les sections telles que : $0 < \theta < \pi/2$ on a :

$L - x > 16,50 \text{ m.}$

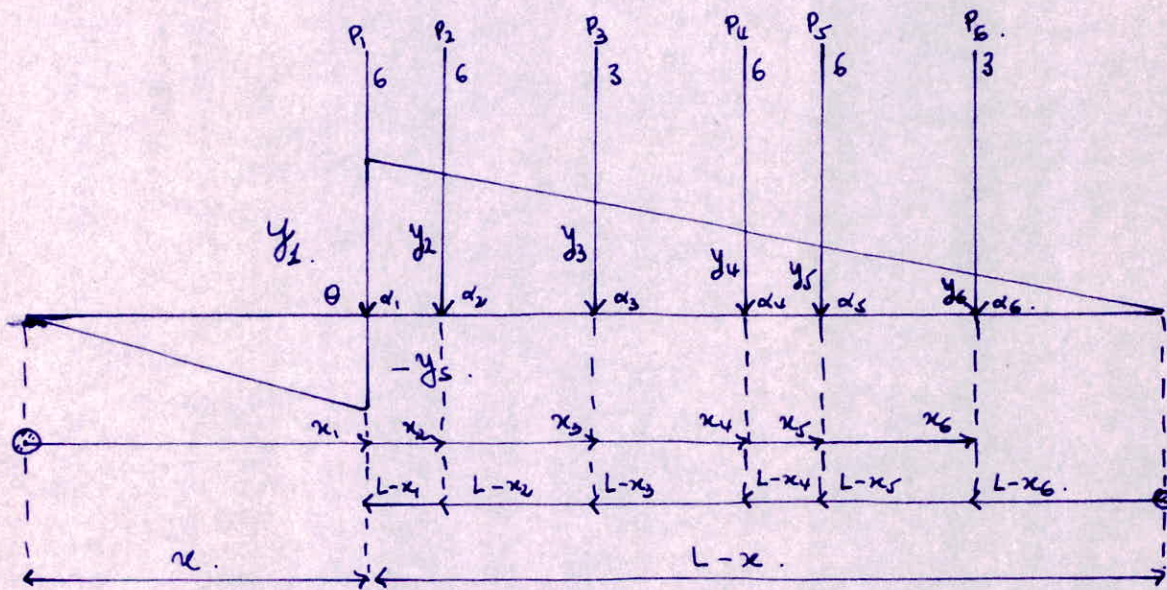
($L = 37,37 \text{ m}$, $x = 0$
 $x = 3 \text{ m.}$
 $x = 6 \text{ m.}$
 $x = 9,34 \text{ m.}$
 $x = 18,69 \text{ m.}$)

$L - x \gg x$

on a égalité seulement pour $x = 18,69 = L/2$.

d'où $\frac{L-x}{L} \gg \frac{x}{L} \Rightarrow |y_1| > |y_5|$

donc, la position défavorable des charges est la même pour toutes les sections :



Vu que la position des charges, et le nombre de charges est la même pour toutes les sections $0 < \theta < \pi/2$; on peut déterminer l'expression des T_{max} .

effort tranchant global dû aux 2 files :

$$T(\theta) = \sum_{i=1}^6 2 P_i \mathcal{G}(\alpha_i, \theta)$$

or $\mathcal{G}(\alpha_i, \theta) = y_i$

$$T(\theta) = 2 \sum_{i=1}^6 P_i y_i$$

effort tranchant revenant à une poutre $T_1(\theta)$.

$$T_1(\theta) = T/2$$

soit $T_1(\theta) = \sum_{i=1}^6 P_i y_i$

$$T_1(\theta) = \sum_{i=1}^6 P_i y_i \quad (\text{sans majoration par } 1,2 \times \delta)$$

or $y_i = \frac{L-x_i}{L}$

$$\text{d'où } T_1(\theta) = \sum_{i=1}^6 P_i \left(\frac{L-x_i}{L} \right) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^6 P_i (L-x_i)$$

avec $x_1 = x \text{ m.}$ $P_1 = 6 \text{ t.}$
 $x_2 = x + 1,5 \text{ m.}$ $P_2 = 6 \text{ t.}$
 $x_3 = x + 6 \text{ m.}$ $P_3 = 3 \text{ t.}$
 $x_4 = x + 10,5 \text{ m.}$ $P_4 = 6 \text{ t.}$
 $x_5 = x + 12 \text{ m.}$ $P_5 = 6 \text{ t.}$
 $x_6 = x + 16,5 \text{ m.}$ $P_6 = 3 \text{ t.}$

$$T_{1 \max}(\theta) = \frac{1}{L} \left[6(L-x) + 6(L-x-1,5) + 3(L-x-6) + 6(L-x-10,5) + 6(L-x-12) + 3(L-x-16,5) \right]$$

$$= \frac{1}{L} \left[30L - 30x - 211,50 \right]$$

c'est à dire

$$T_{\max}(x) = -\frac{30x}{L} + 30 - \frac{211,50}{L}$$

soit avec la majoration $1,2 \times \delta$.

$$T_{\max}(x) = 1,2 \delta \left[-\frac{30x}{L} + 30 - \frac{211,5}{L} \right]. \quad \delta = 1,07. \quad L = 37,37 \text{ m.}$$

d'où le tableau suivant :

Effort tranchant du à B_c pour une poutre.

x m	0	3	6	$L/4 = 9,34$	$L/2 = 18,69$
$T_{\text{majoré}}$ en t.	31,25	28,16	25,07	21,63	12.

Tableau Récapitulatif des efforts tranchants

revenant à une poutre, dû aux combinaisons.
(majorations comprises)

x (m)	0	3	6	$\frac{L}{4} = 9,34$	$\frac{L}{2} = 18,69$
T_g	76,73	64,41	52,09	38,37	0
T_g	102,96	86,43	69,90	51,50	0
T_A	26,61	23,62	20,73	17,63	9,73
T_{trot}	3,36	2,84	2,37	1,89	0,75
T_{bc}	31,25	28,16	25,07	21,63	12
$T_g + Bc + trot$	137,57	117,43	97,34	75,02	12,75
$T_g + A + trot$	132,93	112,89	93	71,02	10,48

III.1 Calcul du couple de Torsion due aux charges Permanentes

on a établi que sous l'effet d'une charge répartie uniforme (p) le long de la poutre, le couple de torsion qu'elle crée en une section θ est donné par:

$$C(\theta) = -pr^2 \frac{\sin(\frac{1}{2} - \theta)}{\cos \frac{1}{2}} + pr^2(\frac{1}{2} - \theta).$$

n étant le rayon du cercle $n = 60 \text{ m}$.

d'autre part, on a établi que :

- la charge permanente (g_1) sans superstructure est égale à

$$g_1 = 8,2125 \text{ t/m.}$$

g_1 nous donnera la valeur du couple en chaque section lors de la mise en tension.

- la charge permanente (g) avec la superstructure est égale à :

$$g = 11,0210 \text{ t/m.}$$

g nous donnera la valeur du couple à considérer dans les vérifications de chaque section en service à charge et service à vide.

Valeurs du couple dans les sections particulières sous la charge permanente

Sections.	Section d'appui $\theta = 0^\circ$	Section demi-gouret $\theta = 2,86^\circ$	Section début gouret $\theta = 5,73^\circ$	Section quart $\theta = 8,92^\circ$	Section milieu. $\theta = 1/2$
C sous g_1 (mise en tension) (t.m)	-309,88	-298,52	-267,14	-213,44	0
C sous g (en service) (t.m)	-415,86	-400,61	-358,49	-286,16	0

III.2. Calcul du couple maximum $C(\theta)$ pour $\theta = \frac{1}{4}$ (section quart de) portée

Sous l'effet des surcharges B_c

pour cela, on peut :

- 1° soit déterminer la position défavorable du convoi d'après le tracé de la ligne d'influence.
- 2° soit utiliser le calculateur HP 25 programmable, et déterminer $C_{max}(\theta = \frac{1}{4})$ par approximations successives comme cela a été fait dans le calcul du moment de flexion sous B_c .

en fait, pour déterminer exactement $C_{max}(\frac{1}{4})$, il faudra combiner les deux méthodes de calcul ; car d'une part, le tracé de la ligne d'influence ne nous renseigne pas sur la position la plus défavorable, mais nous donne une position du convoi proche de la position défavorable ; et d'autre part l'utilisation du programme de la HP-25 nécessite beaucoup d'essais. Par conséquent, à l'aide du tracé de la ligne d'influence, on déterminera les limites de positions défavorables du convoi, puis à l'aide du programme HP 25, et en faisant un nombre d'essais très réduit de par les limites de position, on déterminera avec autant de précision que l'on desire la position défavorable du convoi, c'est à dire la valeur de $C_{max}(\frac{1}{4})$.

Tracé de la ligne d'influence :

Il suffit de poser $P = 1$, $\theta = \frac{1}{4}$ dans l'expression $C(d, \theta, P)$ et de tracer le graphique de la fonction ainsi obtenue.

$$C(d) = \begin{cases} -\frac{\cos \frac{1}{4} \cdot \sin(d-\alpha)}{\sin d} \cdot 0.2 + \frac{2.2}{d}(d-\alpha) & \alpha \geq \frac{1}{4} \\ \frac{\cos(d-\frac{1}{4}) \sin \alpha}{\sin d} - \frac{2.2}{d} \alpha & \alpha \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

soit :

$$C(\alpha) = \begin{cases} -205,74 \sin(35,69 - \alpha) + 3,36(35,69 - \alpha) & \text{pour } \alpha \geq \frac{\pi}{4} \\ 185,95 \sin \alpha - 3,36 \alpha & \text{pour } \alpha \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

posons :

$$C(\alpha) = \begin{cases} C_1 & \alpha \geq \frac{\pi}{4} \\ C_2 & \alpha \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

étude de la fonction $C_2(\alpha) = 185,95 \sin \alpha - 3,36 \alpha$

derivée de $C_2(\alpha)$: $C_2'(\alpha) = 185,95 \cos \alpha - 3,36 \times \frac{180}{\pi}$

$$C_2'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \text{Arc cos } \frac{3,36 \times 180}{\pi \times 185,95} = \text{Arc cos } A$$

Arcos A n'existe pas car $A > 1$.

par conséquent, C_2 ne s'annule pas $\Rightarrow C_2$ a un signe constant.

$$C_2' < 0 \quad \forall \alpha$$

étude de la fonction : $C_1(\alpha) = -205,74 \sin(35,69 - \alpha) + 3,36(35,69 - \alpha)$

$$C_1'(\alpha) = +205,74 \cos(35,69 - \alpha) - 3,36 \times \frac{180}{\pi}$$

$$C_1'(\alpha) = 0 \text{ pour : } \alpha = -\text{Arc cos} \left(\frac{3,36 \times 180}{\pi \cdot 205,74} \right) + 35,69$$

$$\alpha = 15,14^\circ$$

tableau de variation récapitulatif de $C(\alpha)$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$

α	0°	$\frac{\pi}{4}$	$15,14^\circ$	$35,69^\circ$
C'	-		-	+
C	0	-1,16	-2,66	-3,13
				0

- trace de la ligne d'influence pour $\theta = \frac{d}{4}$.

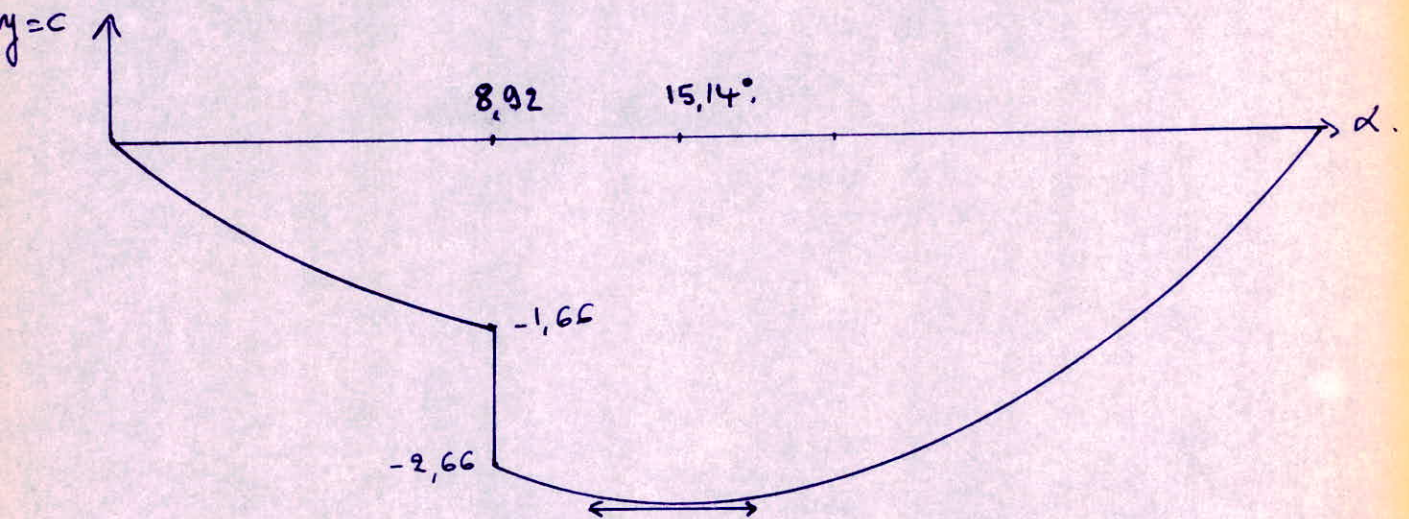
trace de C_1 :

α	1	3	5	7	8	8,92	4	6	2
y	-0,1171	-0,3553	-0,6053	-0,8751	-1,0199	-1,16	-0,4783	-0,7373	-0,2352

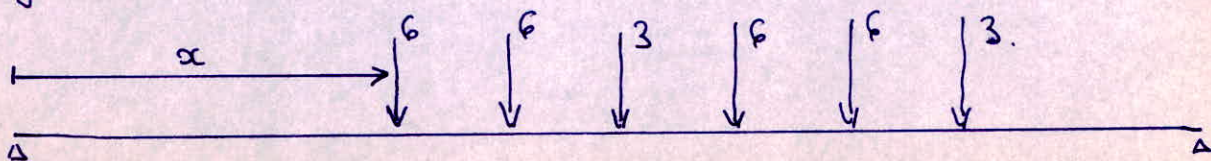
trace de C_2 :

α	8,92	9	10	12	13	14	16	18	20
y	-2,6595	-2,6719	-2,8120	-3,0117	-3,073	-3,1107	-3,1171	-3,0390	-2,8848

α	22	24	26	28	30	32	34	35	35,69
y	-2,6678	-2,3814	-2,0492	-1,6749	-1,2670	-0,8343	-0,3854	0,1577	0



Le tracé de la ligne d'influence ainsi déterminé nous montre qu'il faudra placer le convoi tel que $9,34 < \alpha < 22,35$ (m) de telle manière à ce que les charges concentrées P_i du convoi soient au voisinage de $l = 15,85$ auquel correspond le tracé de la ligne d'influence.



α étant l'abscisse curviligne de la 1^{re} charge, exprimée en mètre.

en utilisant le calculateur HP 25, et en faisant varier la valeur de α entre les limites obtenues, on trouve

α	9,345	9,4	9,5	10	11	12	13	14	15	15,85
$C(\frac{1}{4})$	-89,42	-89,41	-89,39	-89,21	-88,43	-87,10	-85,26	-82,93	-80,15	-77,44

de ce tableau, on déduit que la position la plus défavorable a quelques centimètres près correspond à $\alpha = 9,345$ m. Le caisson se déplaçant de gauche à droite. Le couple maximum par $\Theta = \frac{1}{4}$ est ainsi

$$C_{\max}\left(\frac{1}{4}\right) = -89,42.$$

en tenant compte des coefficients de majoration 1,2 et 8.

on obtient :

$$C_{\max}\left(\frac{1}{4}\right) = -89,42 \times 1,2 \times 1,07 = -114,82 \text{ t.m.}$$

en conclusion :

le couple maximum cre par les surcharges B_c dans la section $\Theta = \frac{1}{4}$ est égal à

$$C_{\max}\left(\frac{1}{4}\right) = -114,82$$

majorations comprises.

Calcul du couple de torsion C_{\max} dans la section d'appui sous l'effet des surcharges B_c :

comme pour le calcul précédent, on déterminera la ligne d'influence puis en faisant un nombre réduit d'essai à l'aide du HP 25, on calculera exactement $C_{\max}(\Theta)$.

trace de la ligne d'influence : il suffira de poser $P = 1$ et $\Theta = 0$ dans l'expression du couple.

$$C(\alpha) = -\frac{\cos 0 \cdot \sin(35,69 - \alpha)}{\sin(35,69)} \Delta L + \frac{2L}{2}(L - \alpha)$$

c.a.d: $C(\alpha) = -208 \sin(35,69 - \alpha) + 3,36(\alpha - \alpha)$

d'où: $C'(\alpha) = +208 \cos(35,69 - \alpha) - \frac{3,36 \times 180}{\pi}$

et $C'(\alpha) = 0$ pour $\alpha = 13,43^\circ$

tableau de variation:

α	0	13,43°	35,69°
C'		-	+
C	-1,5	-4,047	0

Trace de la ligne d'influence:

on utilise le programme suivant:

```

RCL2.
ENTER
RCL0
-
f sin
RCL1
x
CHS
RCL2
ENTER
RCL0
-
RCL3
x
+
    
```

execution:

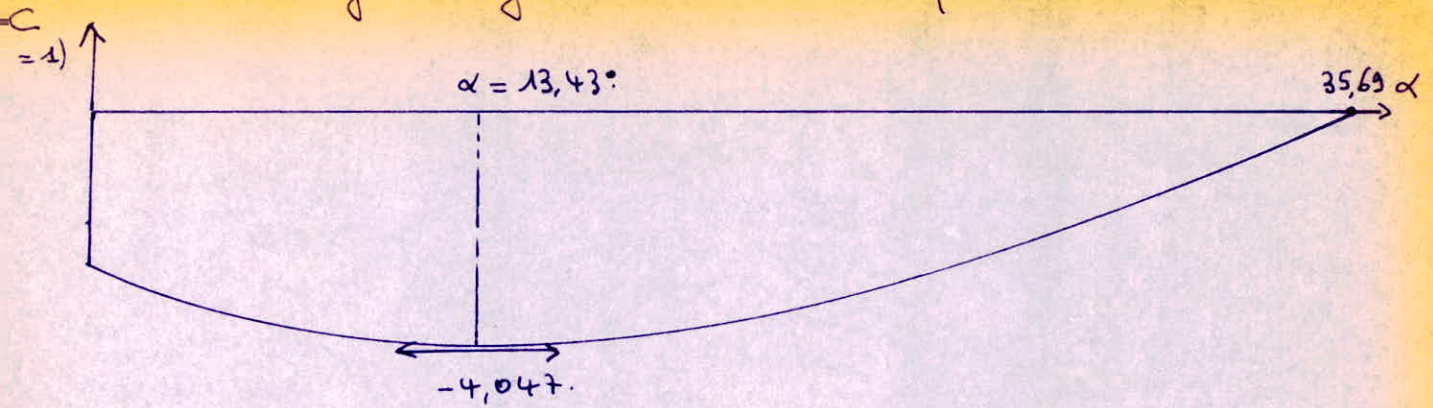
```

alpha -> STO 0
208 -> STO 1.
35,69 -> STO 2.
3,36 -> STO 3.
    
```

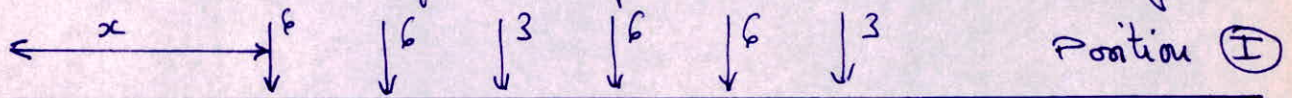
α	0	1	2	4	6	8	10	12	13
y	-1,5	-1,89	-2,25	-2,85	-3,33	-3,68	-3,90	-4,02	-4,046

α	13,43	15	17	19	21	23	25	27	35,69
y	-4,047	-4,02	-3,90	-3,69	-3,42	-3,08	-2,69	-2,25	0.

trace de la ligne d'influence de C pour $\theta = 0$.



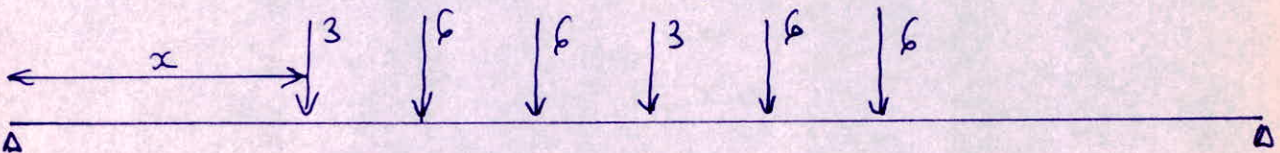
la ligne d'influence ainsi déterminée, nous montre qu'il faudra placer le convoi tel que $x \leq 14,06$ m. de telle manière à ce que les charges concentrées P_i du convoi B_c soient au voisinage de $l = 14,06$ auquel correspond le maximum de la ligne d'influence



en utilisant le HP 25, et en faisant varier x , on obtient les valeurs suivantes du couple correspondant à la position I du convoi.

x	4	6	7	7,5	8	9
$C(0)$	-113	-116,15	-116,64	-116,63	-116,48	-115,68

de même on obtient les valeurs suivantes de $C(0)$ correspondant à la position II du convoi, en fonction de x .



x	4	4,5	5	5,5	6	8	9
$C(0)$	-116,32	-116,51	-116,54	-116,41	-116,12	-113,45	-111,25

par conséquent, le couple de torsion maximum obtenu à la section d'appui sous l'effet des surcharges B_c est,

$$C_{\text{max}}(0) = -116,64$$

il correspond à la position \oplus du courbi avec $x = 7 \text{ m}$.
 en tenant compte des majorations 1,2 et $\delta = 1,07$.

on obtient :

$$C_{\text{max}}(0) = -116,64 \times 1,2 \times 1,07$$

$$C_{\text{max}}(0) = -149,78$$

Calcul du couple de torsion maximum dans la section milieu ($\theta = \frac{1}{2}$)

sous l'effet des surcharges B_c :

pour cela, on peut (comme dans les sections d'appui et du quart) combiner le tracé de la ligne d'influence et le programme HP 25. en faite dans la section milieu, le tracé de la ligne d'influence nous donne directement la position la plus défavorable du courbi.

étude de la ligne d'influence :

en posant $P = 1$ et $\theta = \frac{1}{2}$ dans l'expression de $C(\alpha, \theta)$

on a :

$$C(\alpha, \theta) = \begin{cases} -\frac{2 \Delta \cos \theta \sin(d-\alpha)}{\sin d} + \frac{2r(d-\alpha)}{d} & \alpha \geq \frac{1}{2} \\ +\frac{2 \Delta \sin \alpha \cdot \cos(d-\theta)}{\sin d} - \frac{2r\alpha}{d} & \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

avec $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 1 + \frac{1,75}{60} + 1 - \frac{0,5}{60} = 2,03$.

$\Delta = 2,03$ est l'excentrement le plus défavorable des 2 fils de roues de la surcharge B_c .

on obtient donc :

$$C = \begin{cases} -198,25 \sin(d-\alpha) + 3,36(d-\alpha) & \alpha \geq \frac{1}{2} \\ 198,25 \sin \alpha - 3,36 \alpha & \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

si on fait un changement de repère, et qu'on exprime C dans le nouveau repère $S(\vec{i}, \vec{j})$ avec $S(\frac{\pi}{2})$ on remarque que C est symétrique par rapport à S' .

$$\vec{OM} = \vec{OS} + \vec{SM} \rightarrow \vec{OM} = \frac{d}{2} + \vec{SM} \Rightarrow \alpha = \frac{d}{2} + x$$

d'où : $d - \alpha = \frac{d}{2} - x$.

$$C/S = \begin{cases} -198,25 \sin(\frac{d}{2} - x) + 3,36(\frac{d}{2} - x) & x \geq 0 \\ +198,25 \sin(\frac{d}{2} + x) - 3,36(\frac{d}{2} + x) & x \leq 0 \end{cases}$$

et l'on voit bien que $C(x) = -C(-x)$.

il suffit donc de tracer la ligne d'influence dans $[0, \frac{d}{2}]$ l'autre partie sera déduite par symétrie par rapport à S' .

dans $[0, \frac{d}{2}]$:

$$C = 198,25 \sin \alpha - 3,36 \alpha$$

$$C' = 198,25 \cos \alpha - 3,36 \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$C' = 0 \Rightarrow \alpha = \text{Arc cos } \frac{3,36 \times 180}{\pi \times 198,25} = 13,65$$

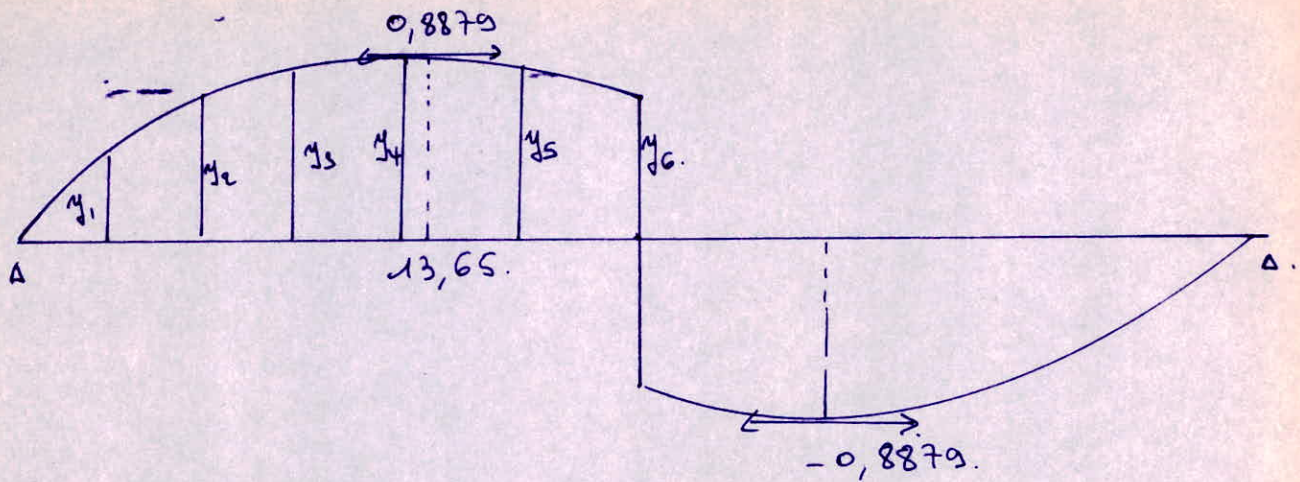
tableau de variation :

α	0°	$13,65^\circ$	$\frac{35,69}{2}$
C'		+	-
		0,8879	
	0		+0,750

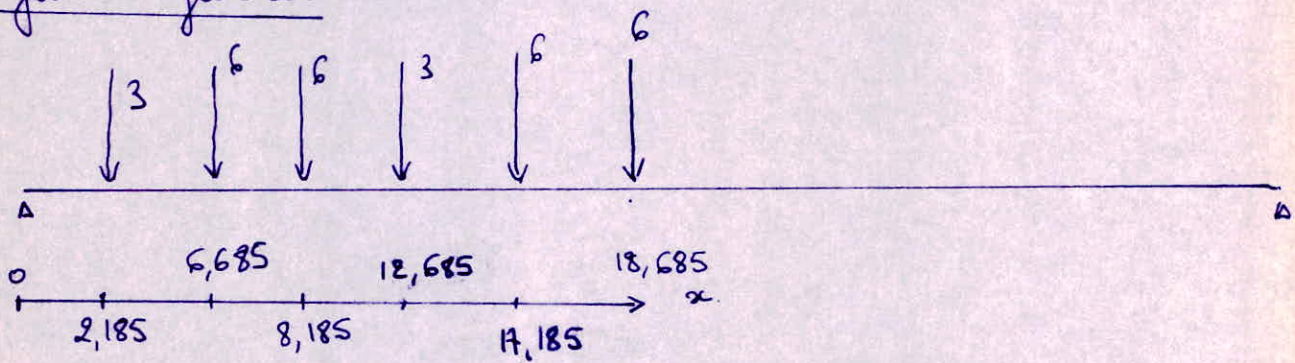
tableau de valeurs

α	2,0865	6,3837	7,8161	12,1133	16,4104	17,8428
η	0,9022	0,5779	0,6796	0,8717	0,8298	0,7499

le tracé de la ligne d'influence du couple pour $\theta = \frac{d}{2}$ est



la position la plus défavorable du convoi est, d'après le tracé de la ligne d'influence.



disposition dans laquelle on a disposé toutes les charges sur la moitié de la poutre.

on obtient ainsi

$$C_{\max} \left(\frac{d}{2} \right) = - \left[3(0,2022 + 0,8717) + 6(0,5779 + 0,6796 + 0,8298 + 0,7499) \right]$$

$$C_{\max} \left(\frac{d}{2} \right) = - 20,25 \text{ t.m.}$$

soit en tenant compte des majorations γ , γ_2 et $\gamma_3 = 1,07$

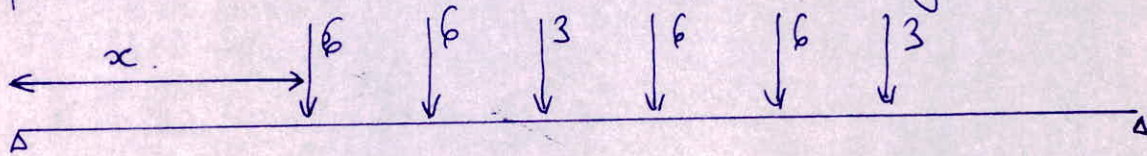
$$C_{\max} \left(\frac{d}{2} \right) = - 26 \text{ t.m.}$$

calcul du couple de torsion maximum à la section début du gousset ($\theta = 5,73^\circ$) sous l'effet des surcharges B_c :

comme pour les sections et calculs précédents, on peut tracer la ligne d'influence du couple, et par suite à l'aide du programme HP 25 déterminer le couple maximum.

en fait, il est plus rapide d'utiliser directement le programme HP 25 quitte à faire un nombre d'essais plus grand.

- position (II) du convoi : se déplaçant de gauche à droite.



introductions en Mémoires:

$$\theta = 5,73^\circ \text{ en sto 0}$$

$$\lambda = 35,69^\circ \text{ en sto 2.}$$

$$\frac{\Delta \cos \theta}{\sin \lambda} = 3,4622 \text{ en sto 6}$$

$$\frac{\Delta \cos(1-\theta)}{\sin \lambda} = 3,0146 \text{ en sto 4.}$$

introduction du programme de calcul de $C(\theta, \alpha)$.

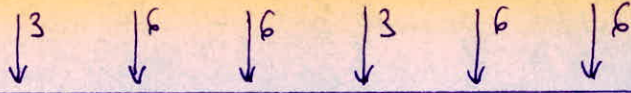
en faisant varier α , on obtient les valeurs suivantes (RCL 7) du couple.

α	0	1	4	5	7	7,5	8	9	10
C	-61,56	-70,47	-78,69	-81,51	-104,82	-105,06	-105,14	-104,83	-103,92

ainsi donc, le couple maximum obtenu avec la position (II)

est :
$$\underline{C = -105,14.}$$

- position (I) : le convoi se déplaçant de droite à gauche.



on obtient les valeurs suivantes du couple de torsion suivant x .

x	5	6	7	8	9
C	-99,58	-99,59	-104,44	-101,59	-101,50

pour la position (I) du convoi, le couple maximum est

$$C = -104,44$$

par conséquent, le couple maximum obtenu dans la section delout du gouset est : $C_{max} = -105,14$ donne par la position (II).

en tenant compte des majorations : 1,2 et $\delta = 1,02$.

$$C_{max}(\theta = 5,73) = -135 \text{ t.m}$$

Calcul du couple de torsion à la section milieu du gouset.
 $(\theta = 2,86^\circ)$ sous l'effet des surcharges B_c .

comme pour le calcul de $C_{max}(\theta = 5,73)$, on utilisera uniquement le programme HP25.

introductions en Mémoires:

$$\theta = 2,86^\circ \text{ en sto } 0$$

$$d = 35,69 \text{ en sto } 2$$

$$\frac{\Delta \cos \theta}{\sin d} = 3,4667 \text{ en sto } 6$$

$$\frac{\Delta \cos(1-\theta)}{\sin d} = 2,9167 \text{ en sto } 4$$

en faisant varier α , on obtient les tableaux de valeurs suivants :

Position (I) du cavoi

α	3	4	5	5,5	6	8
C	-112,29	-113,30	-113,65	-113,58	-113,35	-110,92

position (II) du cavoi

α	3	4,5	5	5,5	7	8	10
C	-77,70	-110,89	-111,80	-112,53	-113,76	-113,66	-111,70

par conséquent, le couple maximum $C(\theta = 2,86^\circ)$ est obtenu par la position (II) du cavoi avec $\alpha = 7,5$ m.

$$C_{\max}(2,86^\circ) = -113,76 \text{ t.m.}$$

en tenant compte des majorations 1,2 et $\delta = 1,07$.

$$C_{\max}(2,86^\circ) = -146,07 \text{ t.m.}$$

tableau récapitulatif des valeurs des couples maximum sous B_c

section	about	deux-gouret	gouret	quat de portée	Milieu.
C_{\max} (t.m)	-149,78	-146,07	-135	-114,82	-26,

on constate ainsi que le maximum-maximum des couples est obtenu dans la section d'about, et vaut : -149,78 t.m.

1.3 Calcul du couple sous l'effet de la surcharge A :

A est une surcharge uniformément répartie, sa valeur est donnée par l'expression :

$$A = K A_L \cdot \frac{p_0}{l_v} \quad \text{kg/m}^2$$

avec : $K = 0,9$; $p_0 = 2,75$; $l_v = 4 \text{ m}$.

et : $A_L = 230 + \frac{36.000}{L+12} \quad \text{kg/m}^2$

L étant la longueur du pont à surcharger.

pour une section (⊖), la longueur L à surcharger pour obtenir le couple maximum en cette section est donnée par la ligne d'influence. dont on a détaillé les calculs dans le paragraphe relatif au calcul du couple sous l'effet des surcharges Bc.

d'autre part, selon le sens transversal, la distance à surcharger, donnée par le règlement, doit être prise égal à : $m l_v$

avec $1 \leq m \leq N$, N étant le nombre de voies que comporte le pont. dans notre cas $N = 1 \Rightarrow$ la largeur à surcharger est l_v .

calcul de A pour les sections : about - demi-goutte - goutte
quat de portée.

pour toutes ces sections, les lignes d'influence précédemment déterminées nous indiquent que, pour obtenir le couple maximum, il faudra surcharger le pont sur toute sa longueur. : $L = 37,37 \text{ m}$.

$$\text{d'où : } A = 0,9 \cdot \left(230 + \frac{36.000}{37,37+12} \right) \times \frac{2,75}{4} = 593,50 \text{ kg/m}^2$$

en surchargeant le pont sur toute sa longueur : $q_A = l_v \cdot A = 2373,99 \text{ kg/m}$
108

soit, en majorant par 1,2 on obtient

$$\underline{q_A = 2,8488 \text{ t/m.}}$$

la valeur du couple sous l'effet d'une surcharge répartie le long de tout le pont est donnée par:

$$C(\theta) = - p r^2 \frac{\sin(\frac{1}{2} - \theta)}{\cos \frac{1}{2}} + p r^2 (\frac{1}{2} - \theta).$$

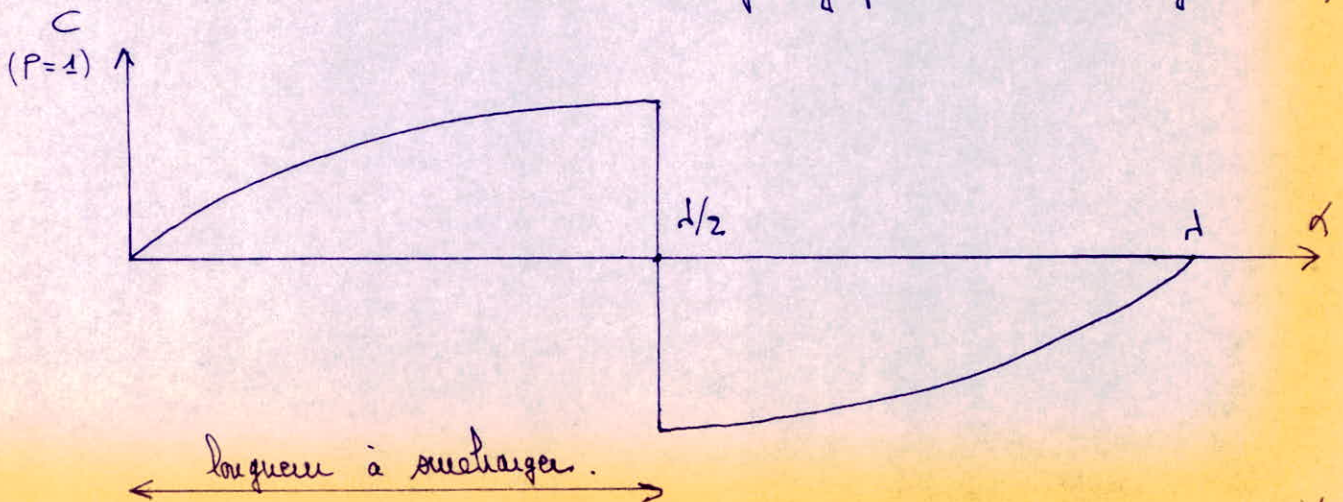
Ainsi, on obtient les valeurs suivantes des couples sous l'effet de la surcharge A.

Sections.	Section appui $\theta=0$	Section milieu du gouset $\theta=2,86^\circ$	Section debut du gouset $\theta=5,73$	Section quart de portée $\theta=8,91^\circ$
Couple sous A. (t.m)	-107,50	-103,55	-92,67	-73,96.

calcul du couple sous l'effet de la surcharge A dans la section MILIEU.

le tracé de la ligne d'influence du couple pour la section milieu nous indique qu'il faudra surcharger la moitié du pont pour obtenir la valeur maximale du couple dans la section milieu.

tracé de la ligne d'influence (voir les calculs détaillés dans le paragraphe de la surcharge B.)



calcul de la valeur de la surcharge A a prendre en consideration
par le calcul du couple relatif à la section milieu

$$A = k \cdot A_L \cdot \frac{P_0}{P_v}$$

avec: $k = 0,9$; $P_0 = 2,75$; $P_v = 4 \text{ m}$; $A_L = 230 + \frac{36.000}{L+12}$
Nous avons vu que $L = \frac{37,37}{2}$.

d'où:
$$A = 0,9 \left(230 + \frac{36.000}{\frac{37,37}{2} + 12} \right) \times \frac{2,75}{4} = 868,24 \text{ kg/m}^2$$

en surchargeant le pont sur toute sa largeur, on obtient:

$$q_A = A \cdot P_v = 868,24 \times 4 = 3472,95 \text{ kg/m}$$

et en tenant compte de la majoration par 1,2, on a

$$q_A = 3472,95 \times 1,2 = 4167,54 \text{ kg/m}$$

soit:
$$q_A = 4,1675 \text{ t/m}$$

calcul de l'expression du couple en une section θ sous l'effet d'une
charge répartie sur la moitié du pont:

le couple $c(\alpha, \theta)$ sous l'effet d'une charge ponctuelle appliquée en α est égal à:

$$c(\alpha, \theta) = \frac{Pz \cos(\alpha - \theta) \sin \alpha}{\sin \lambda} + Pz \left(\frac{-\alpha}{\lambda} \right) \quad \alpha \leq \theta$$

si q est une charge répartie, considérons $P = qz \, dd$ comme étant une charge concentrée appliquée en α .

d'où:
$$dc(\alpha, \theta) = \frac{qz^2 \cos(\alpha - \theta) \sin \alpha}{\sin \lambda} dd + qz^2 \left(\frac{-\alpha}{\lambda} \right) \cdot dd$$

q étant répartie sur la moitié de la portée, il suffit d'intégrer cette

partir entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ pour avoir le couple dans la section $\theta = \frac{1}{2}$ par exemple.

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} \left(\frac{q \cdot r^2 \cos(1-\theta) \sin \alpha}{\sin \alpha} + q r^2 \left(-\frac{\alpha}{1} \right) \right) d\alpha$$

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = \left[-\frac{q \cdot r^2 \cos(1-\theta) \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{q \cdot r^2}{21} \cdot \alpha^2 \right]_0^{1/2}$$

d'où :

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = -q \cdot r^2 \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\sin(1)} + q r^2 \frac{\cos 1/2}{\sin 1} - q r^2 \frac{1}{8}$$

par conséquent, la valeur du couple maximale crée par la surcharge A dans la section milieu est :

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = 4,1675 \left(-\frac{60^2 \cos^2(35,69/2)}{\sin(35,69/2)} + \frac{60^2 \cdot \cos(35,69/2)}{\sin(35,69/2)} - \frac{60 \cdot \pi \cdot 35,69}{180 \cdot 8} \right)$$

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = -9,54 \text{ t.m.}$$

en tenant compte de la majoration par 1,2, on obtient :

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = -9,54 \times 1,2 = 11,44 \text{ t.m.}$$

La surcharge A crée donc un couple de valeur $C = -11,44 \text{ t.m.}$ dans la section milieu.

III.4) Calcul du couple de torsion sous l'effet des surcharges de trottoirs:

cette surcharge de trottoir consiste en une charge uniformément répartie sur le trottoir égale à 150 kg/m^2 .

Surface à surcharger:

- la largeur à surcharger est égale à la largeur du trottoir.
- la longueur à surcharger est déterminée par la ligne d'influence du couple de la section dont on veut calculer le couple sans l'effet de la surcharge de trottoir.

Nombre de trottoirs à surcharger:

si la surcharge est uniformément répartie sur toute la largeur de pont

on a:

$$C(\theta) = \sum P_i r_i^2 \Delta_i \left(\frac{\sin(\frac{1}{2} - \theta)}{\cos \frac{1}{2}} + P_i r_i^2 \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \right)$$

Δ étant un coefficient d'excentrement: $\Delta_i = 1 + \frac{d_i}{2}$
 d étant l'excentrement de la charge répartie.

il est évident que le cas le plus défavorable est obtenu lorsqu'on surcharge les deux trottoirs.

on aura donc: $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta = 1 + \frac{d}{2} + 1 - \frac{d}{2} = 2$.

$$\sum P_i r_i = 150 + 150 = 300 \text{ kg/m.}$$

Valeur du couple de torsion du aux surcharges de trottoirs

dans les sections: about - demi-gauche, gauche, quart.

les lignes d'influence du couple pour ces sections nous indiquent qu'il faudra surcharger le pont sur toute sa largeur pour avoir un effet défavorable.

l'expression du couple pour une charge uniformément répartie sur toute la longueur du pont est :

$$C(\theta) = -p r^2 \Delta \frac{\sin(\frac{1}{2} - \theta)}{\cos \frac{1}{2}} + p r^2 (\frac{1}{2} - \theta)$$

soit $C(\theta) = -150 \cdot 60^2 \cdot 2 \cdot \frac{\sin(\frac{35,69}{2} - \theta)}{\cos \frac{35,69}{2}} + 2 \cdot 150 \cdot 60^2 (\frac{1}{2} - \theta)$

on obtient ainsi les valeurs suivantes des couples dans les sections indiquées, en tenant compte de la majoration par 1,2.

Section.	about $\theta = 0$	deux-gouset $\theta = 2,86$	gouset $\theta = 5,73$	quart $\theta = 8,92$
Couple due par surcharge de trottoir.	-13,58	-13,09.	-11,71.	-9,35.

calcul du couple dans la section milieu :

Comme pour la surcharge A, il faudra surcharger le pont sur sa demi-poutre pour avoir le couple maximum dans la section milieu son expression est donnée par :

$$C(\frac{1}{2}) = -q r^2 \frac{\cos^2(\frac{1}{2})}{\sin \lambda} + q r^2 \frac{\cos \frac{1}{2}}{\sin \lambda} - q r^2 \frac{\lambda}{8}$$

$$C(\frac{1}{2}) = -300 \cdot 60^2 \frac{\cos^2(35,69/2)}{\sin(35,69)} + 300 \cdot 60^2 \frac{\cos(35,69/2)}{\sin 35,69} - 300 \cdot 60^2 \frac{0,6}{8}$$

$$C(\frac{1}{2}) = -1,079 \text{ t.m.} \quad (35,69^\circ = 0,62 \text{ rd})$$

en tenant compte de la majoration par 1,2 :

$$C(\frac{1}{2}) = -1,2948 \text{ t.m.}$$

Tableau Récapitulatif du Couple de Torsion par tête de section caisson, sous l'effet des charges et surcharges.

	section milieu	section quart	section début goussot	section demi-goussot	section d'About.	unité
Sous G, mise en tension.	0	-213,44	-267,14	-298,52	-309,88	t.m.
Sous G. service.	0	-286,16	-358,49	-400,61	-415,86	t.m.
surcharge B _c	-26	-114,82	-135	-146,07	-149,78	t.m.
surcharge A.	-11,44	-73,96	-92,67	-103,55	-107,50	t.m.
surcharge de trottoir.	-1,29	-9,35	-11,71	-13,09	-13,58	t.m.
G + B _c + T _t	-27,29	-410,33	-505,20	-559,77	-579,22	t.m.
G + A + T _t	-12,73	-369,47	-462,87	-517,25	-536,94	t.m.

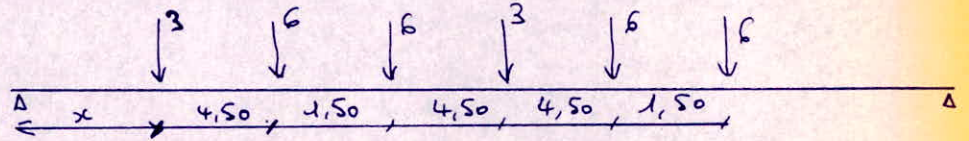
on constate que la surcharge B_c est plus défavorable que la surcharge A.

Organigramme de calcul du couple de Torsion C dans une section Θ , sous l'effet des Surcharges Mobiles B_c :

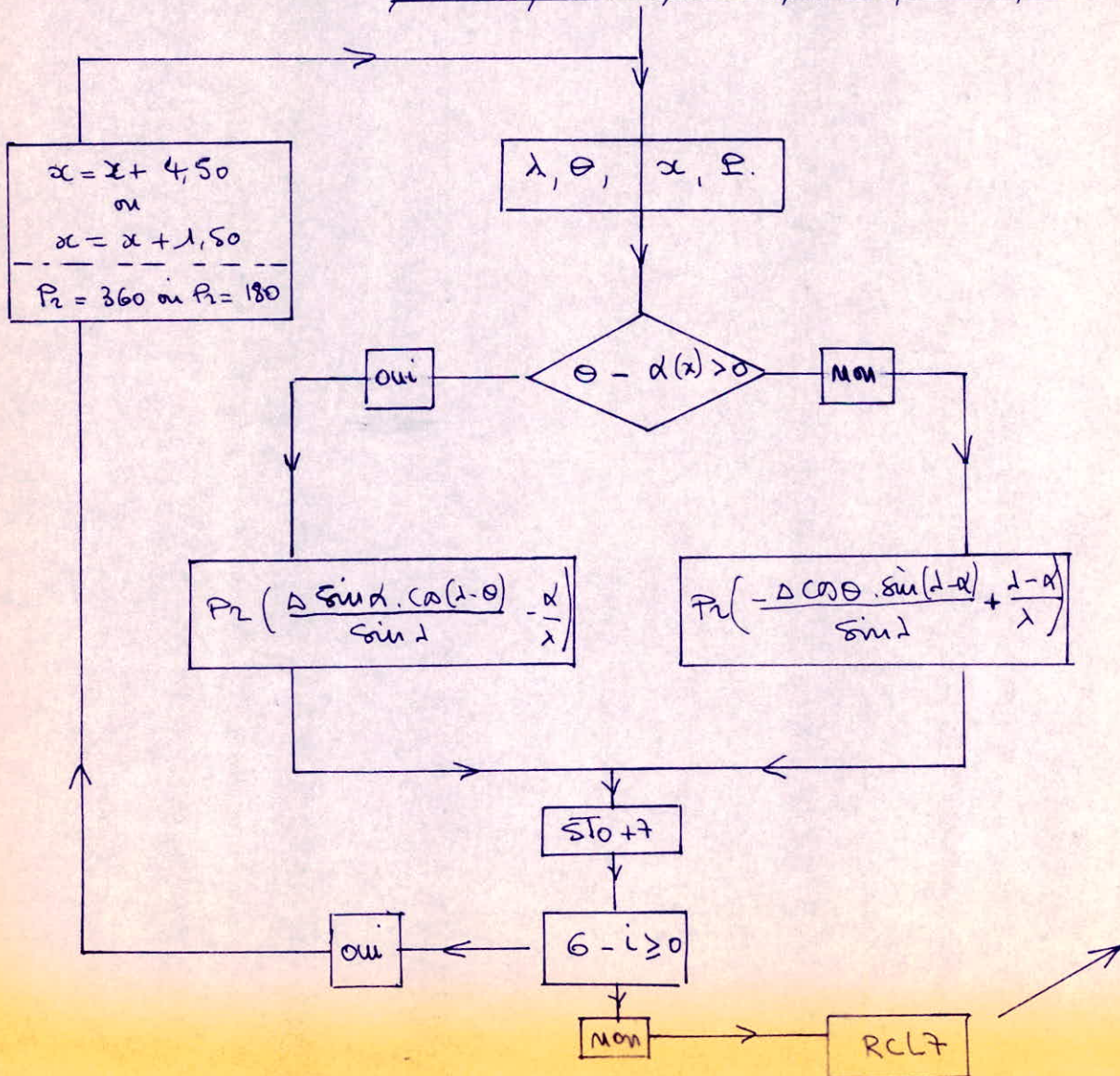
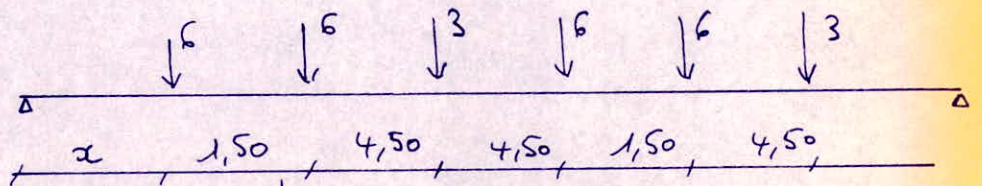
on sait que :

$$C(\alpha, \theta) = \begin{cases} -\frac{P_2 \Delta \cos \theta \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} + P_2 \left(\frac{\lambda - \alpha}{\lambda} \right) \\ + \frac{P_2 \Delta \sin \alpha \cdot \cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} \end{cases}$$

position (I) du Camion :



position (II) du Camion :



Programme de calcul du couple C sous Bc :

1°) Introduction en Mémoires

avant execution :

$$\begin{aligned} \theta &= 5,73^\circ && \rightarrow \text{sto } 0 \\ \lambda &= 35,69^\circ && \rightarrow \text{sto } 2 \\ \frac{\Delta \cdot \cos \theta}{\sin \lambda} &&& \rightarrow \text{sto } 6 \\ \frac{\Delta \cdot \cos (1-\theta)}{\sin \lambda} &&& \rightarrow \text{sto } 4. \end{aligned}$$

pendant l'execution :

Position (I) du canon

$3 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $x \rightarrow \text{sto } 5$
 $6 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $4,5 \rightarrow \text{sto } +5$
 $6 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $4,50 \rightarrow \text{sto } +5$
 $3 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $4,50 \rightarrow \text{sto } +5$
 $6 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $4,50 \rightarrow \text{sto } +5$
 $6 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $1,50 \rightarrow \text{sto } +5$

Position (II) du canon

$6 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $x \rightarrow \text{sto } 5$
 $6 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $1,50 \rightarrow \text{sto } +5$
 $3 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $4,50 \rightarrow \text{sto } +5$
 $6 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $4,50 \rightarrow \text{sto } +5$
 $6 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $1,50 \rightarrow \text{sto } +5$
 $3 \times 60 \rightarrow \text{sto } 3$; $4,50 \rightarrow \text{sto } +5$

2°) programme :

1 | RCL 5
 2 | enter
 3 | 3
 4 | x
 5 | gTT
 6 | $\frac{\circ}{\circ}$
 7 | sto 1
 8 | CHS
 9 | RCL 0
 10 | +
 11 | gx \geq 0
 12 | goto 14
 13 | goto 29
 14 | RCL 1
 15 | f sin
 16 | RCL 4
 17 | x
 | P

18 | RCL 1
 19 | enter
 20 | RCL 2
 21 | $\frac{\circ}{\circ}$
 22 | 2
 23 | x
 24 | -
 25 | RCL 3
 26 | x
 27 | sto +7
 28 | goto 00
 29 | RCL 2
 30 | enter
 31 | RCL 1
 32 | -
 33 | f sin
 34 | RCL 6

35 | x
 36 | CHS
 37 | RCL 2
 38 | enter
 39 | RCL 1
 40 | -
 41 | RCL 2
 42 | $\frac{\circ}{\circ}$
 43 | 2°
 44 | x
 45 | +
 46 | RCL 3
 47 | x
 48 | sto +7
 49 | goto 00

INTRODUCTION DE LA PRECONTRAINTE

- 1- historique de la précontrainte
- 2- principes généraux de la précontrainte
- 3- Différence entre le béton armé et le béton précontraint.
- 4- Avantages du béton précontraint.
- 5- Comment créer la précontrainte

Introduction:

1) L'HISTORIQUE DE LA PRÉCONTRAÎNTE.

La gestation de l'idée de précontrainte fut longue infiniment plus longue que celle du béton armé. Pourtant, dès le début de celui-ci, les yeux avertis des maîtres tels que considérés en entrevoyaient les défauts. De nombreux praticiens cherchant les moyens propres à diminuer les fissurations du Béton tendu songeaient déjà (dès 1888) à une compression du Béton et une tension des aciers pour retarder ces déformations.

Ainsi, C.E.W Doetting, les allemands Woener et Lunder en 1907 tentent des vérifications expérimentales de ces idées, mais après quelques succès initiaux, ces expériences échouent, car elles ne visaient qu'à une amélioration du Béton armé par la mise en tension, dans le but de retarder la fissuration, des armatures ordinaires. Cette mise en tension était obtenue par des procédés divers, mais se trouvait annulée au bout d'un court délai par l'effet d'un phénomène qui était ignoré ou nié: le phénomène était la déformation différée du béton. Il appartenait à M. Freyssinet qui réfléchissait depuis longtemps à la question de discerner et de dire à quelles conditions en dépit de ces déformations différées, des précompressions permanentes exercées à l'aide d'armatures tendues pourraient être conservées. Elles ne pourraient l'être que si l'on pouvait imposer aux aciers un allongement tel que l'allongement résiduel, après raccourcissement différé du Béton restait une fraction importante de l'allongement initial: il fallait donc complètement abandonner les aciers doux et employer des aciers à haute résistance et tendus au maximum.

Du même coup, le rôle de ces aciers se trouvait complètement transformé, d'armature qu'il était auparavant (élément passif se substituant au Béton) l'acier devenait une force à la disposition de l'ingénieur, lui permettant de donner au Béton les propriétés d'un corps homogène et élastique. Ce bond, c'est à M. Freyssinet qu'on le doit. En 1928, après avoir approfondi les lois régissant la physique des Bétons, découvert la déformation lente sous charge, dégagé les lois du retrait, des

déformations, des états hygrométriques, il dépose les Brevets qui consacraient sa découverte.

2) PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA PRÉCONTRAINTÉ

Suivant une définition qu'en a donné M. Freyssinet, précontraindre une construction, c'est y créer artificiellement avant application des charges extérieures ou simultanément avec celle-ci, des contraintes permanentes telles que, composées avec les contraintes dues aux charges permanentes, les contraintes totales résultantes restent en tout point comprises entre les limites de contraintes que la matière peut supporter indéfiniment. Autrement dit, en Béton précontraint, le Béton reste toujours comprimé ou ne subit tout au moins que des contraintes de tractions faibles et jugées alors admissibles.

En vue de fixer immédiatement les idées, nous allons prendre un petit exemple numérique fort simple pour l'application de ce principe.

Soit une section rectangulaire ayant : $b_0 = 25 \text{ cm.}$
 $h_t = 50 \text{ cm.}$

Soumise à un moment $M_e = 8 \cdot 10^3 \text{ kg. m.}$

$$\text{on a : } I = \frac{b_0 h_t^3}{12} = 200.000 \text{ cm}^4$$

Les contraintes résultantes sur les fibres extrêmes sont :

$$G_e = \frac{M_e v}{I} = + 100 \text{ kg/cm}^2 \text{ sur la fibre}$$

$$G'_e = - \frac{M_e v}{I} = - 100 \text{ kg/cm}^2 \text{ " " inférieure.}$$

Cette contrainte de traction sur la fibre inférieure est beaucoup trop élevée. Supposons que l'on applique sur la section une force de compression normale F (Force de précontrainte) $F = 100 \text{ t.}$

si F est centré : la contrainte engendrée par F sera uniformément répartie et l'on aura :

$$G_p = G'_p = 100 \text{ kg.}$$

$$\text{d'où les contraintes résultantes : } \begin{cases} G = G_e + G_p = 100 + 100 = 200 \text{ kg/cm}^2 \\ G' = G'_e + G'_p = 100 - 100 = 0 \end{cases}$$

La contrainte de traction est nulle ce qui est désiré, mais la contrainte de compression est très forte.

• si F est excentrée : appliqué à la limite inférieure du tiers central

on aura alors :
Sur la fibre supérieure $G_p = 0$.
Sur la fibre inférieure $G'_p = 200 \text{ kg/cm}^2$.

$$\text{d'où } G = 100 + 0 = 100 .$$

$$G' = -100 + 200 = 100 .$$

Les contraintes résultantes sont des compressions admises grâce à la valeur F de la précontrainte et à son excentricité e définie comme la distance du centre de gravité de la section étudiée au point de la résultante des forces de précontrainte .

e est compté positive vers le haut et négative vers le bas.

3) DIFFERENCES ENTRE BETON ARMÉ ET BETON

PRÉCONTRAINT

Une poutre en précontrainte se compose comme une poutre en Béton armé de deux matériaux : le béton et l'acier dont l'un le béton travaille à la compression et l'autre l'acier travaille à la traction. Mais l'analogie s'arrête là et le fonctionnement des deux poutres est complètement différent.

Dans la poutre en Béton armé, l'armature fait partie intégrante de la section ; lorsqu'on charge progressivement la poutre, l'acier et le béton s'allongent d'abord ensemble élastiquement en se partageant les efforts élastiques de traction. Le béton tendu en prend la plus grande part jusqu'à ce qu'il entre dans sa phase d'étirage, à ce moment l'effort de traction qu'il peut équilibrer n'augmente plus et c'est l'acier qui supporte la différence ; enfin les allongements connus du métal et du béton étant devenus trop grands pour celui-ci, le béton casse et l'acier supporte toute la traction.

Dans la poutre en Béton Précontraint, l'acier n'est pas une armature : c'est une force créée indépendamment de la charge. Si elle est suffisante, la poutre se comporte sous les charges prévues d'une façon élastique en particulier la fissuration a été éliminée sans que l'on ait eu à limiter les contraintes de l'acier puisque ces contraintes sont acquises avant la mise en service. En d'autres termes, dans le béton armé, l'acier joue un rôle passif, il n'empêche pas les effets destructeurs des charges mais pare après coup à leurs conséquences. Dans le béton précontraint, l'acier joue un rôle actif l'ingénieur crée grâce à lui et à sa volonté les forces qui s'opposent à ces effets destructeurs.

Freyssinet a dit :

" A aucun degré, le béton précontraint n'est du béton amélioré, il n'a avec le béton armé aucune frontière commune "

Entièrement irrationnel, le béton armé est né de l'empirisme et d'expériences qui en démontrant qu'il était possible lui ont fixé d'étroites règles d'emploi.

"Tout au contraire, le Béton Précontraint, application rationnelle de notions de mécanique générales abstraites ne pouvait pas naître d'expériences. Une fois son principe clairement formulé et les propriétés des matériaux à utiliser exactement connus par des essais méthodiques toutes ses possibilités d'application et ses limites peuvent être logiquement déduites...».

Ainsi donc, il convient de remarquer que le Béton Précontraint étant considéré comme un matériau homogène non fissuré, c'est la section totale de Béton uniquement qui sera prise en compte pour la détermination de la position du centre de gravité, pour le calcul de l'aire B et du moment d'inertie I .

4) AVANTAGES DU BÉTON PRÉCONTRAIN

Ayant montré les différences fondamentales qui existent entre le béton armé et le béton précontraint nous pouvons résumer les principaux avantages de ce dernier.

La suppression de la fissuration et le comportement élastique de la section entière constituent de très importants avantages techniques. Ainsi l'hypothèse de Navier et Bernouilli (qui suppose que tous les points d'une poutre qui se trouvent avant déformations dans une section plane se trouvent après déformations dans une section plane perpendiculaire à l'axe déformé) est applicable au Béton Précontraint car cette hypothèse est valable dans la phase élastique. Ce qui est le cas du béton précontraint qui n'entre pas théoriquement dans la phase de fissuration.

Techniquement, la précontrainte facilite la solution des problèmes de construction par ses qualités dont les principales sont les suivantes :

<u>Domaine des calculs</u>	{ Moments résistants triplés du Béton armé. Efforts tranchants : effets réduits à $1/5$ ou $1/10$ du Béton Armé. Déformations réduites à $1/3$ du Béton Armé.
<u>Utilisation pratique</u>	{ Hauteur réduite lorsque le projet l'exige. Aciers : 15 à 20% du Béton armé (Avec la possibilité d'employer des aciers à haute limite élastique). Béton : 50 à 80% du Béton Armé

Il faut signaler en outre un avantage qui appartient spécifiquement à la précontrainte, et qui est la possibilité d'assemblage de blocs et éléments séparés et par conséquent la possibilité d'emploi à grande échelle de la préfabrication. Cependant, le béton précontraint présente un certain nombre de caractères qui lui sont propres :

- Il ne tolère pas la médiocrité.
- Le temps intervient dans la valeur et la distribution des contraintes.
- Il est nécessaire d'examiner toutes les phases de constructions.

5) COMMENT CREER CETTE FORCE DE PRECONTRAINTE

On a deux procédés :

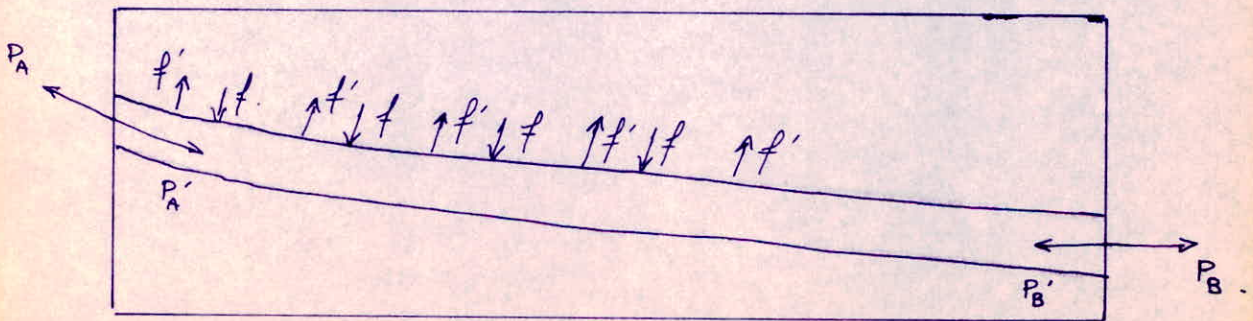
- 1°. Par fils adhérents
- 2°. Par cables (notre cas).

1°. Procédé par fils adhérents :

Soit une pièce fléchie en béton armé, avant le coulage du béton exerçons une traction sur les armatures celles-ci subiront un allongement dû à la traction. Après coulage du béton et durcissement supprimons la traction, l'armature tendra à reprendre sa longueur primitive et comprimera énergiquement le béton en raccourcissant par ce moyen simple, nous aurons réalisé une précontrainte.

2°. Procédé par cables :

Soit une pièce fléchie en béton armé, on dispose des gaines métalliques contenant les cables dans les coffrages, un dispositif d'ancrage est disposé à chaque extrémité du cable. Lorsque le béton a suffisamment durci, les cables sont mis en tension à l'aide de verins puis blocage des ancres. Le cable sera donc tendu le long de toute sa longueur. Supposons que ce cable soit courbe, P_B étant la tension du cable au point où il traverse la section B. Calculons la force de précontrainte exercée par le cable sur la section B.



Actions et réactions cable-béton.

Le cable est en équilibre sous l'action des forces de tension P_A et P_B et

de la somme des forces de contact circulaire f exercées par le béton sur le câble.

$$\vec{P}_A + \vec{P}_B + \vec{F} = 0. \quad (1)$$

De même le béton est en équilibre sous l'effet de \vec{P}_A' et \vec{F}' et \vec{P}_B' .

$$\vec{P}_A' + \vec{P}_B' + \vec{F}' = 0 \quad (2)$$

\vec{P}_A' est égale et opposée à P_A car le câble est tendu à l'ancrage P_A en prenant appui sur la section A. D'autre part il est évident que F' est égale et opposée à F .

Ainsi donc :

$$\vec{P}_A' = -\vec{P}_A$$
$$\vec{F}' = -\vec{F}$$

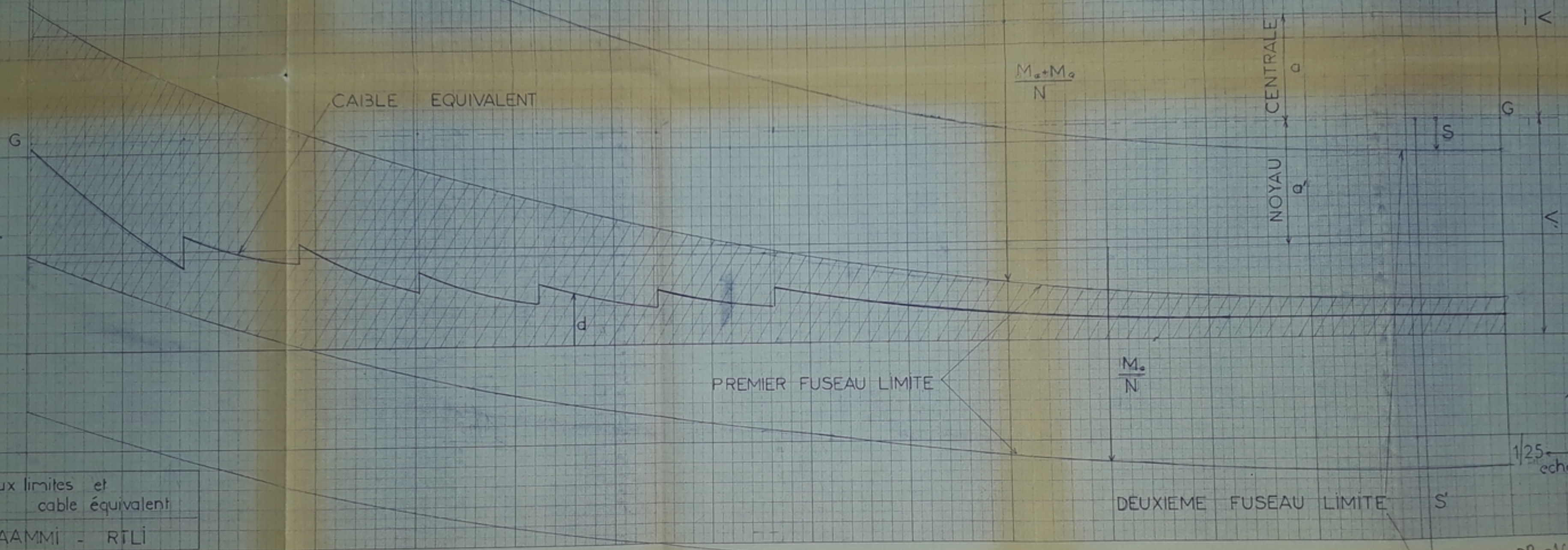
En faisant la différence de (1) et (2) il en résulte que :

$$-\vec{P}_B' = \vec{P}_B$$

En conclusion, dans toute section d'une structure précontrainte par câbles, l'action de chaque câble équivaut à une force de compression appliquée au point de passage du câble dans cette section dirigée suivant la tangente à l'axe du câble et dont l'intensité est égale à la tension du câble en ce point.

d avant disparition du cable
 d apres disparition du cable
 numeros des cables

10367	58.75	52.34	37.87	30.94	28.04	27.97
7.183	40.46	42.48	27.85	21.18	19.57	19.19
	6	5	4	3	2	1



fuseaux limites et
 cable equivalent
 IBAIBAAMMI - RTLI
 non chapite II page 131

1/10
 1/25
 echelle

PB01679
 TONGA

UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

16/79

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

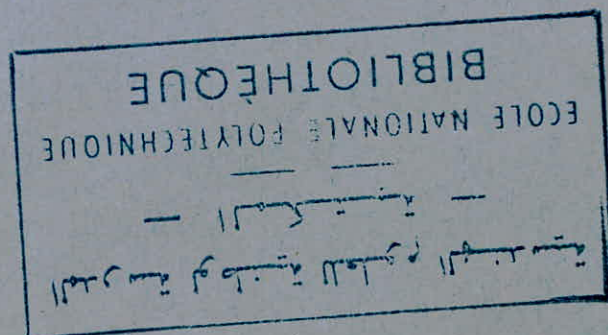
PONT COURBE
EN
BETON PRECONTRAIT
A SECTION CAISSON

4 PLANCHES

TOME 2

Proposé par :

P. BONNEVILLE
Docteur d'état



Etudié par :

RILI. MOUSSA
BABAAMMI. AHMED

PROMOTION: 74-79

CHAPITRE V

Calcul en Precantainte.

- I) Calculs des contraintes dues à la Precantainte.
- II) trace des cables.
- III) Caracteristiques des sections, et excentrement du cable moyen.
- IV) Centre et ligne de Pression.
- V) Fuseaux limites.
- VI) Verification des contraintes dans la section milieu

I) CALCULS des contraintes dues à la précontrainte

1°/ Hypothèse de Navier et Bernoulli :

Comme nous l'avons souligné auparavant, cette hypothèse est applicable au béton précontraint, par conséquent la répartition des contraintes sous l'effet d'un ~~mov~~ mouvement de flexion se fait dans une section quelconque suivant le diagramme linéaire classique. En conséquence les règles habituelles de la résistance des matériaux sont applicables.

2°/ Calcul d'une section travaillant en flexion :

Contraintes élémentaires :

sous poids propre : on a un moment M_G .

$$\text{d'où } \begin{cases} G_G = \frac{M_G}{I} v & \text{fibre supérieure.} \\ G'_G = -\frac{M_G}{I} v' & \text{fibre inférieure.} \end{cases}$$

sous surcharges d'exploitation : on a un moment M_Q .

$$\text{d'où } \begin{cases} G_Q = \frac{M_Q}{I} v & \text{fibre supérieure.} \\ G'_Q = -\frac{M_Q}{I} v' & \text{fibre inférieure.} \end{cases}$$

3. Contraintes dues à la précontrainte :

On applique simplement les formules de calcul relatives à la flexion composée :

Si N est la force normale de précontrainte appliquée à la section avec une excentricité e , le moment de précontrainte a pour valeur $M_p = Ne$. e étant pris avec son signe + et au dessus du centre de gravité, et - au-dessous du centre de gravité, ce qui est conforme à la convention de signe habituelle des moments fléchissants. En effet, un moment positif développe des contraintes de traction sur la fibre inférieure et qui est le cas d'une force de précontrainte exercée vers la fibre supérieure.

On a donc : fibre supérieure : $G_p = \frac{N}{B} + \frac{(N \cdot e) v}{I}$

fibre inférieure : $G'_p = \frac{N}{B} - \frac{(N \cdot e) v'}{I}$

si l'on pose : $i^2 = \frac{I}{B}$ (i = rayon de giration) on peut mettre $\frac{N}{B}$ en facteur on obtient :

fibre supérieure : $G_p = \frac{N}{B} \left(1 + \frac{e \cdot v}{i^2} \right)$

fibre inférieure : $G'_p = \frac{N}{B} \left(1 - \frac{e \cdot v'}{i^2} \right)$

4) Vérification à faire :

Il faut vérifier que dans les états de charges les contraintes totales en tout point de la section (somme algébrique des contraintes élémentaires) restent comprises entre les limites admissibles \bar{G} (valeur maximum de compression) et \bar{G}' (valeur minimale).

Etat de charge :

* Mise en tension : Sous l'effet de la charge permanente sous la superstructure, et de la précontrainte.

fibre supérieure : $G = G_p + G_G$

$G' = G'_p + G'_G$

* Service à vide : Sous l'effet de la charge permanente, superstructure comprise et de la précontrainte.

$G = G_p + G_G$

$G' = G'_p + G'_G$

* Service en charge : Sous l'effet de la charge permanente superstructure comprise, de la précontrainte et de la surcharge d'exploitation.

$G = G_p + G_G + G_Q$

$G' = G'_p + G'_G + G'_Q$

5) CALCUL DU NOMBRE DE CABLES

La section milieu brute a les caractéristiques suivantes (voir calcul de l'excentrement du cable equivalent section milieu).

$$B = 16425 \quad v = 93,13 \quad v' = 106,87 \quad I = 98010310,68 \text{ cm}^4$$

Sous poids propre et surcharges : $M = 1308,41 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}$.

$$\text{fibre supérieure} \quad G = \frac{Mv}{I} = \frac{1308,41 \cdot 10^5 \cdot 93,13}{98010310,68} = 124,33$$

$$G' = -142,67 \text{ Kg/cm}^2$$

Ainsi, sans la précontrainte, la contrainte de traction sur la fibre inférieure sous l'effet du poids propre et des surcharges atteindrait $-142,67$.

Ai l'on veut qu'il n'y ait pas dans ce cas de contrainte de traction, il faut que la précontrainte en service provoque sur cette fibre une compression d'au moins $142,67$.

On devra donc avoir :

$$G_p = \frac{N}{B} \left(1 - \frac{ev'}{i^2} \right) \geq 142,67$$

$$e = d - v' = -14 - 106,87 = -92,87$$

e = excentrement des cables.

$$i^2 = \frac{I}{B} = \frac{98010310,68}{16425} = 5967,14 \text{ cm}^2$$

d'où :

$$F = \frac{142,67 \times 16425}{1 + \frac{92,87 \cdot 106,87}{5967,14}} = 879875,90 \text{ kg}$$

$$\text{soit } \boxed{F = 880 \text{ t}}$$

En utilisant des cables $12 \phi 8$; chacun produira un effort normal de 50 t .

il en faudra donc : $n = \frac{880}{50} = 17,6$. Soit donc $\boxed{18 \text{ cables}}$

Voir figure pour la disposition des cables. On verra que 6 cables seront relevés sur la face supérieure de la poutre et 12 seront relevés à l'about.

II) TRACÉ DES CABLES.

1) Comme nous l'avons écrit précédemment, la force de précontrainte N ayant une excentricité e est introduite pour créer un certain équilibre entre le moment $M_p = N \cdot e$ qu'elle introduit et d'autre part les moments M_G, M_Q respectivement moments des charges permanentes et moment des surcharges d'exploitation. Or, dans une poutre courbe sur appuis simples les moments M_Q et M_G sont maximums, positifs dans la zone centrale de la poutre et vont en s'annulant sur les appuis.

Il conviendrait donc que le moment de précontrainte soit maximal et négatif dans la partie centrale, et diminue en valeur absolue en allant vers les appuis. Ce qui revient à donner aux cables une excentricité maximale dans la partie centrale, et à relever progressivement les cables en allant vers les appuis.

En résumé, nous adopterons les dispositions de cablagés suivantes :

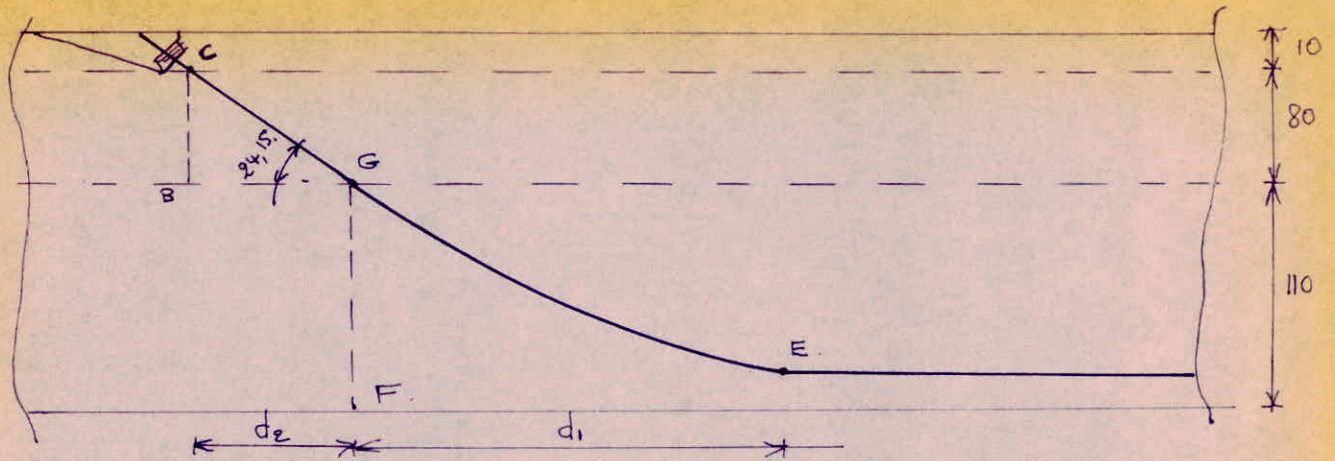
- Dans la partie centrale, la totalité des cables est placée à l'excentricité maximale.

- Entre la poutre centrale et l'appui : on a une zone de relevage des cables, et une suppression des cables qui émergent (6) à la partie supérieure de la poutre.

- A l'appui : les cables restants (12) sortent et sont ancrés dans la plaque d'about suivant une disposition uniforme, et telle que le centre de gravité des cables coïncide ou approche le centre de gravité de la section d'about de façon à avoir un moment de précontrainte faible à l'about.

Tracé d'un cable relevé et émergeant sur la partie supérieure :

Tous les cables présentent une partie parabolique (EG) et vers l'extrémité (point d'émergence) une partie rectiligne [GC] pour que l'effort de précontrainte due à l'ancrage se transmette complètement au cable.



⊙ On a adopté un angle de relevage A standard, à savoir $\alpha = 24,15^\circ$ pour avoir une longueur de câble rectiligne suffisante (195,5 cm).

⊙ Le cône d'ancrage est enfoncé à la partie supérieure, et est, par conséquent suite à l'enfoncement on ne prend en considération que la partie de câble située au dessous du point C. C est tel que $d = 10 \text{ cm}$; d'autre part suite à l'inclinaison des cônes, la distance entre 2 cônes d'ancrage sur la face supérieure est de 1,50m.

2) Distance de disparition d'un câble :

c'est la distance (d) sur laquelle le câble est relevé de son excentricité maximale et jusqu'à sa disparition sur la face supérieure.

$$d = d_1 + d_2 \quad \text{avec} \quad B_G = d_2 = \frac{h}{\text{tg } 24,15} =$$

$$\text{et} \quad EF = d_1 = \frac{2GF}{\text{tg } 24,15} \quad (\text{en vertu de la propriété d'une tangente à une courbe parabolique}).$$

d'autre part l'équation analytique de la fonction parabolique est :

$$y = a \cdot x^2.$$

$$\text{cad :} \quad GF = a \cdot d_1^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{a = \frac{GF}{d_1^2}}$$

$$\text{avec :} \quad GF = h' - d'$$

d' est la distance du câble au parement inférieure de la poutre d' varie selon les câbles.

Tableau récapitulatif du calcul de d et a .

	cables relevés n° 1.	cables relevés n° 2-3-4.	n° 5	n° 6.
d'	22,05	16,75	11,45	6,15
G.F.	87,95	93,25	98,55	103,85
d_1 .	392,31.	415,95	439,59	463,23.
d_2	178,42.	178,42	178,42	178,42.
d (cm).	570,73	594,37.	618,01.	641,65.
a (cm ⁻¹).	$5,71 \cdot 10^{-4}$	$5,39 \cdot 10^{-4}$	$5,10 \cdot 10^{-4}$	$4,84 \cdot 10^{-4}$

3) détermination des points de relevage et d'ancrages des câbles.

zone de relevage de câbles l_0 :

$$\text{généralement : } \frac{l}{4} \leq l_0 \leq \frac{l}{3}$$

$$l \text{ étant la portée : } l = 37,37 \text{ m} \quad \text{d'où : } 9,34 \leq l_0 \leq 12,46 \text{ m.}$$

$$\text{on a choisi } l_0 = 9,49 \text{ m.}$$

par conséquent le relevage du 1^{er} câble débutera à $x = 3,50 \text{ m}$

x étant la distance de ce point à l'origine = milieu de la portée.

en effet, la distance de disparition du 1^{er} câble est $d = 5,70,73 \text{ m}$

$$\text{par conséquent : } l_0 + d + x_1 = \frac{l}{2}$$

$$9,49 + 5,70 + x_1 = 18,69$$

$$\text{d'où : } x_1 = 3,50 \text{ m.}$$

donc le relevage du câble n° ① commencera à $x_1 = 3,50 \text{ m}$
et s'achèvera à $x'_1 = 3,50 + d = 9,20 \text{ m}$.

Relevage du câble n° ②

la distance entre les coques d'ancrages des câbles, à la partie supérieure de la portée, entre le coue ① et le coue ② est $1,50 \text{ m}$.

par conséquent, le relevage du 2^e câble doit être achevé à

$$x'_2 = x'_1 + 1,50$$

$$x'_2 = 9,20 + 1,50$$

$$x'_2 = 10,70 \text{ m.}$$

le relevage du câble n° ② doit être commencé donc à

$$x_2 = x'_2 - d$$

$$x_2 = 10,70 - 5,94$$

$$x_2 = 4,76 \text{ m.}$$

ainsi donc, le relevage du 2^e câble commencera à $x_2 = 4,76 \text{ m}$
et s'achèvera à $x'_2 = 10,70 \text{ m}$.

De même que pour le calcul du câble ① et ②, on déterminera les points début de relevage et fin de relevage de tous les câbles ancrés à la partie supérieure de la poutre.

numeros des câbles .	abaisse du début de relevage / milieu de la poutre : x (m)	abaisse de fin de relevage / milieu de la poutre : x' (m)
①	3,50	9,80
②	4,76	10,70
③	6,26	12,20
④	7,76	13,70
⑤	9,02	15,20
⑥	10,28	16,70

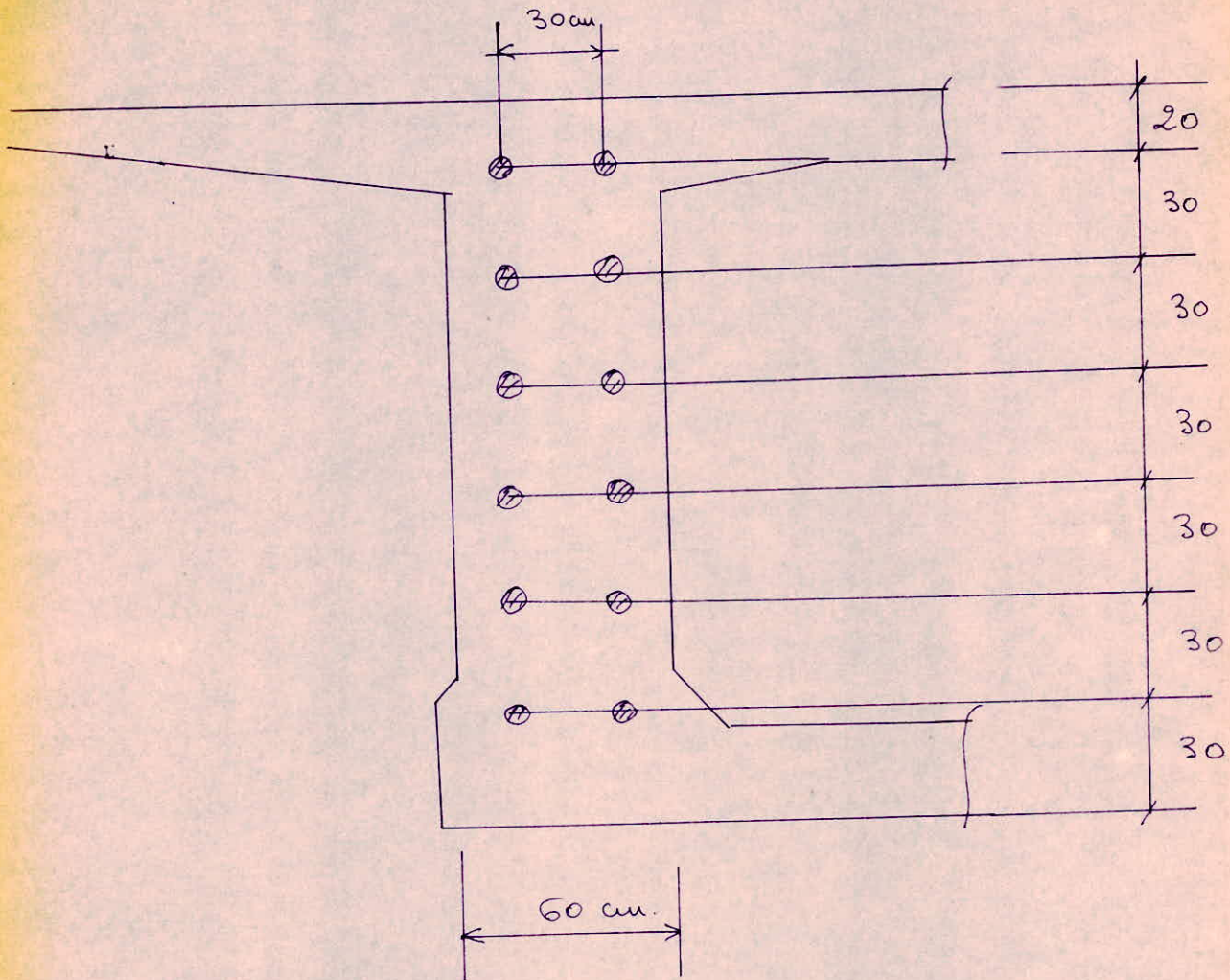
4) Câbles ancrés à l'about :

comme il a été dit précédemment, les câbles restants ⑦ et ⑦' ; ⑧ et ⑧' ; ⑨ et ⑨' ; ⑩ et ⑩' ; ⑪ et ⑪' ; ⑫ et ⑫' seront ancrés dans la plaque d'about, de sorte que le centre de gravité des câbles approche le centre de gravité de la section d'about de façon à avoir un moment de précontrainte presque nul à l'about.

les câbles seront relevés à l'about deux par deux, et ils seront croisés pour avoir un équilibre.

Les cônes d'ancrage ayant un diamètre environ de 25 cm, l'épaisseur de l'âme de la poutre étant égale à 60 cm à l'about, on a choisi la disposition suivante des câbles à l'about.

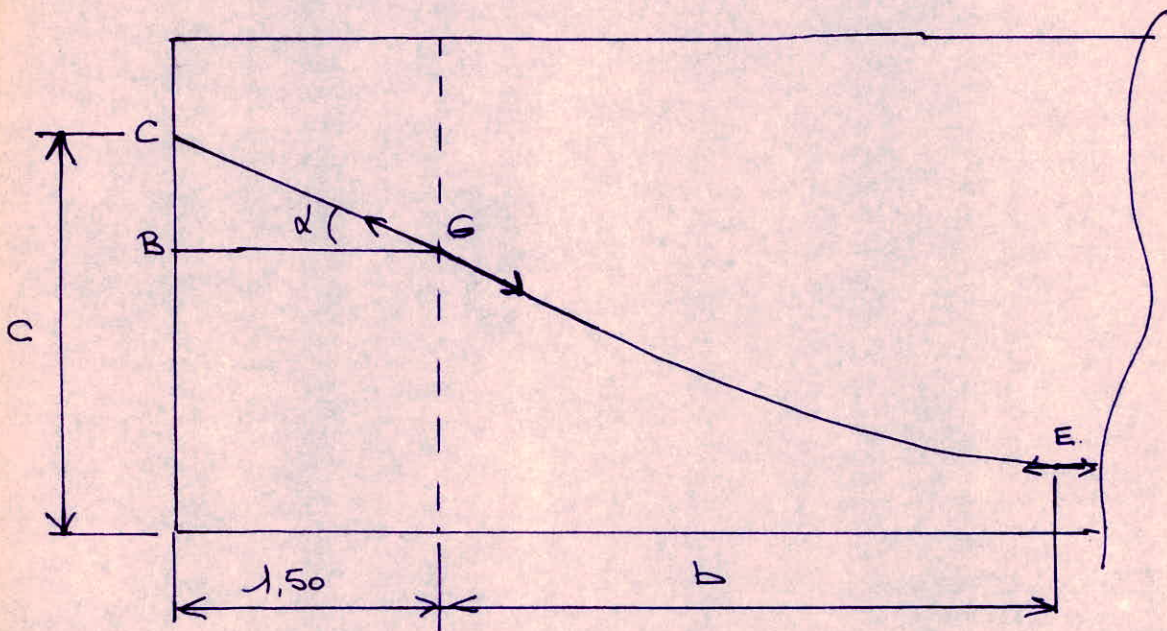
Position des cables à l'about:



echelle 1/20.

d'autre part, pour avoir une résistance notable à l'effort tranchant (effort tranchant réduit moindre) à l'about, le relevage des cables d'about commencera à 7 m de l'about, soit a 1 m du debut du gousset.

5) tracé d'un cable releve à l'about :



le point E est le debut du relevage du cable.

C est le point d'ancrage du cable à l'about.

EG est un tracé parabolique, par contre GC est un tracé rectiligne pour permettre une transmission d'effort convenable entre l'appareil d'ancrage et le cable.

Le point E debut de relevage est le même pour toutes les cables, par consequent :

$$b + 1,50 = 7$$

$$b = 5,50 \text{ m.}$$

d'autre part, la distance c du cable à l'extremite inferieure de la poutre étant choisie precedemment, l'angle α et le coefficient a ($y = ax^2$) seront calculés d'après les conditions

suivantes :

① La pente de la parabole (\overline{EG}) en G doit être égale à la pente du tronçon rectiligne GC

c'est à dire que : $y'(b) = 2ab = \operatorname{tg} \alpha$

② c étant choisi, on doit avoir :

$$c = 1,50 \operatorname{tg} \alpha + ab^2 + d'$$

d' étant l'enrobage du câble. $d' = 6,15 \text{ cm}$.

de ces deux équations, on tire :

$$a = \frac{c - d'}{b^2 + 3b}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2ab$$

Tableau récapitulatif de l'ancrage des câbles à l'about.

Numéros des câbles	c (cm)	b (m)	a (m ⁻¹)	α °
⑦ et ⑦'	180	7	0,0385	22,95°
⑧ et ⑧'	150	7	0,0321	19,44°
⑨ et ⑨'	120	7	0,0256	15,77°
⑩ et ⑩'	90	7	0,0192	11,96°
⑪ et ⑪'	60	7	0,0128	8,04°
⑫ et ⑫'	30	7	0,0064	4,04°

le tracé des cables étant ainsi complètement déterminé, il nous faudra vérifier que c'est un bon tracé, c'est à dire que les contraintes normales dans toutes les sections ne dépassent pas les contraintes admissibles. Pour cela :

(a) - il nous faudra déterminer les caractéristiques :
des sections où un cable disparaît, et des sections particulières (milieu - quart de portée - about).

(b) - on vérifiera que le cable équivalent est
à l'intérieure des deux fusées limites. (cela pour s'assurer que les contraintes sur la fibre supérieure et la fibre inférieure restent comprises entre $\sigma' = 168 \text{ kg/cm}^2$ et $\sigma = 0 \text{ kg/cm}^2$, le long de la portée, en service à vide et en service à charge).

(c) - on effectuera une vérification à la mise
en tension, en service à vide, et en service à charge
de la section milieu

Remarque : la vérification (c) est nécessaire pour pouvoir calculer les contraintes nominales du Béton Recraint pendant les différentes phases de construction.

III) TRACÉ du cable equivalent et calcul des caracteristiques des sections

dans une section de beton precontraint traversee par plusieurs cables on peut remplacer fictivement l'ensemble des forces precontraintes par leur resultante P appliquee en un point E . Ainsi donc, l'ensemble des cables peut donc etre amine pour la section consideree a un cable unique passant au point E tangent a la ligne d'action de P et dont la tension au point E serait egale a la liee de tous les points E le long de la poutre donne le trace du cable equivalent.

dans une section ou un cable disparait a la partie superieure de la poutre, le cable equivalent presente une dent de sie.

Calcul du trace du cable equivalent:

on se contentera pour ce calcul des sections ou on a des cables qui disparaissent et des sections particulieres (section milieu, section quart, section d'about)

soit G le centre de gravite de la section dont on veut calculer le point de passage du cable equivalent.

e l'excentricite de ce cable equivalent par rapport a G , et z l'excentricite de chaque cable.

on a :
$$\sum z N \cos \alpha = e \cdot \sum N \cos \alpha$$

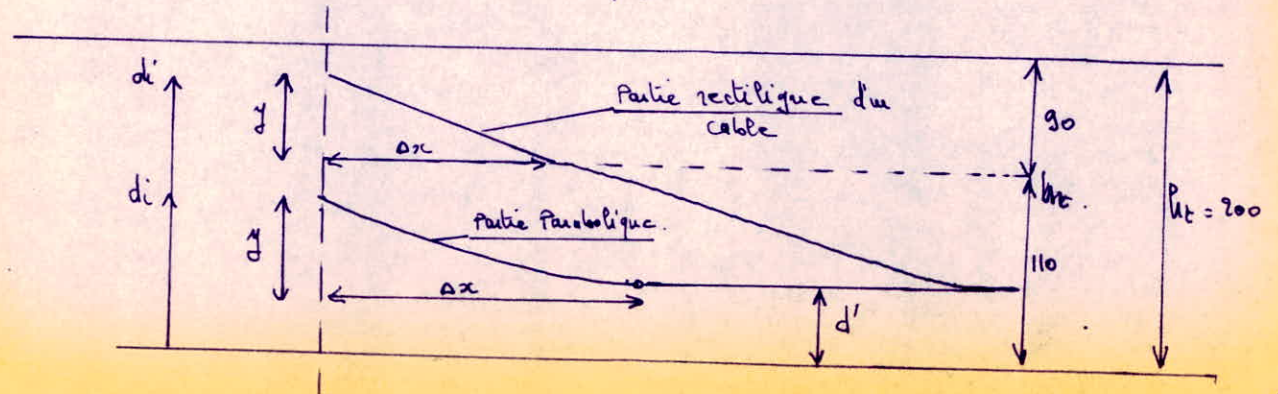
d'où :

$$e = \frac{\sum z \cos \alpha}{\sum \cos \alpha}$$

Remarque : la formule de calcul de e est valable pour e et z comptés a partir de n'importe quel point

dans les tableaux de calcul qui suivent :

a = coefficient parabolique ($y = ax^2$)
 $\alpha = \arctg 2ax$ pour la partie rectiligne parabolique
 $\alpha = 24,15^\circ$ pour la partie rectiligne.
 $y, d_i, z = d_i - y'$; voir figure ci-dessous.



calcul des caractéristiques de la section nette en tenant compte des trous réservés aux câbles de précontrainte.

calcul du centre de gravité (Net): v étant la distance de G à la fibre supérieure.
 v' la distance à la fibre inférieure

ou a :

$$v = \frac{S_{(x)} \text{ net}}{B \text{ net}} = \frac{S_{(x)} \text{ brut} - S_{(x)}(\phi)}{B \text{ brut} - B(\phi)}$$

avec :

$S_{(x)} \text{ brut}$ = moment statique brut de la section par rapport à la fibre supérieure

$S_{(x)}(\phi)$ = moment statique des trous réservés aux câbles par rapport à la fibre supérieure.

$B \text{ brut}$ = section brute.

$B(\phi)$ = section des trous réservés aux câbles.

en tenant compte aussi de l'excentrement des trous (voir calcul de l'excentricité de câble équivalent)

on trouve :

$$B(\phi) = 261,40 \text{ cm}^2$$

$$S(\phi) = y_c \cdot B(\phi) = 49441,20 \text{ cm}^3$$

y_c étant la distance du centre de gravité des trous à la fibre supérieure.

$S_{(x)} \text{ brut}$ et $B \text{ brut}$ étant déjà calculés, on trouve :

$$v = 91,58 \text{ cm}$$

$$v' = 108,42 \text{ cm}$$

calcul du moment d'inertie net de la section :

$$I_G = I_{G_1} + (y_G - y_{G_1})^2 B \text{ brut} - \sum I_{oi} + a_i^2 B_i(\phi)$$

avec :

I_G = moment d'inertie de la section nette.

I_{G_1} = moment d'inertie de la section brute calculé précédemment / G_1

I_{oi} = moment d'inertie propre d'un trou.

$a_i = y_{ci} - y_G$: distance du trou au centre de gravité net.

$B_i(\phi)$ est la section d'un trou.

calcul de l'excentricité du câble équivalent dans la section milieu :

dans cette section, les câbles ne sont pas relevés, ils ont l'excentricité maximale.

$$\text{câble } \textcircled{1} : d' = 22,05$$

$$\text{câbles } \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4} : d' = 16,75$$

$$\text{câbles } \textcircled{5}, \textcircled{7}, \textcircled{7'}, \textcircled{8}, \textcircled{8'}, \textcircled{9}, \textcircled{9'} \} \rightarrow d' = 11,45$$

$$\text{câbles } \textcircled{6}, \textcircled{10}, \textcircled{10'}, \textcircled{11}, \textcircled{11'}, \textcircled{12}, \textcircled{12'} \} \rightarrow d' = 6,15$$

$$\Rightarrow \boxed{\leq d' = 195,50}$$

$$\text{d'où : } d' = \frac{\leq d'}{18} = 10,86 \Rightarrow y_c = 189,14$$

y_c étant la distance du centre de gravité des trous à la fibre supérieure.

calcul du centre de gravité de la section :

$$\boxed{v = \frac{S_{\text{net}}}{B_{\text{net}}} = \frac{S_{\text{brute}} - S(\phi)}{B_{\text{brute}} - B(\phi)}}$$

$B(\phi)$ est la section totale des trous réservés aux câbles.

$$B(\phi) = 18 \cdot \pi \cdot \frac{4,3^2}{4} = 261,40 \text{ cm}^2$$

$S(\phi)$ est le moment statique des trous par rapport à la fibre supérieure.

$$S(\phi) = y_c \cdot B(\phi) = 261,40 \times 189,14 = 49441,20 \text{ cm}^3$$

$$S_{\text{brute}} = 1529732 \text{ cm}^3$$

$$B_{\text{brute}} = 16425 \text{ cm}^2$$

$$\text{d'où : } S_{\text{net}} = 1529732 - 49441,20 = 1480290,80 \text{ cm}^3$$

$$B_{\text{net}} = 16425 - 261,40 = 16163,6 \text{ cm}^2$$

par conséquent :

$$\boxed{v = \frac{S_{\text{net}}}{B_{\text{net}}} = 91,58 \text{ cm.}}$$
$$v' = 108,42 \text{ cm.}$$

calcul de l'excentricité du câble équivalent :

$$e = d' - v' = 10,86 - 108,42$$

$$\boxed{e = -97,56 \text{ cm.}}$$

en tenant compte des résultats trouvés précédemment, et de l'excentrement des câbles, on a :

$$I_G = 98010310,68 + (93,13 - 91,58)^2 \cdot 16425 - \frac{\pi \cdot 4,3^4}{64} \cdot 18$$

$$- 14,52 (\overline{86,37^2} + 3 \times \overline{91,67^2} + 7 \cdot \overline{96,97^2} + 7 \cdot \overline{102,27^2})$$

$$I_G = 95556294,51 \text{ cm}^4$$

Section nette :

$$B_{net} = B_{out} - B(\phi)$$

$$B_{net} = 16425 - 18 \cdot 14,52$$

$$\left(B(\phi) = \pi \frac{4,3^2}{4} = 14,52 \right)$$

$$B_{net} = 16163,64 \text{ cm}^2$$

rayon de giration :

$$i^2 = \frac{I}{B} = \frac{95556294,51}{16163,64} = 5911,81$$

Resume des caractéristiques de la section milieu :

$$B = 16163,64 \text{ cm}^2$$

$$I = 95556294,51 \text{ cm}^4$$

$$v = 91,58 \text{ cm}$$

$$v' = 108,42 \text{ cm}$$

$$i^2 = 5911,81 \text{ cm}^2 ; a = \frac{i^2}{v'} = 54,53 \text{ cm} ; a' = -\frac{i^2}{v} = -64,55$$

$$e = -v' + d' = -108,42 + 10,86 = -97,56 \text{ cm} \text{ (voir calcul de l'excentrement du câble équivalent)}$$

RMQ : dans cette section milieu, les câbles n'étant pas relevés, le centre de gravité des trous est confondu avec le point de passage du câble équivalent.

calcul du rendement :

$$f = \frac{i^2}{v \cdot v'} = \frac{5911,81}{91,58 \cdot 108,42} = 0,59$$

ce qui est supérieur à la moyenne 0,55
la poutre est donc assez élastique.

calcul des caractéristiques de la section quart de poutre :

La section quart de poutre est identique à la section demi-poutre, sauf en ce qui concerne les trous réservés aux câbles de précontrainte.

ainsi donc :

$$\begin{aligned} B_{bout} &= 16425 \text{ cm}^2 \\ S_{(xx) bout} &= 1529732 \text{ cm}^3 \\ I_{bout} &= 98010310,68 \text{ cm}^4 \\ y_{G_1} &= 93,13 \text{ cm} \end{aligned}$$

calcul du centre de gravité de la section nette :

$$v = \frac{S_{net}}{B_{net}} = \frac{S_{bout} - S(\phi)}{B_{bout} - B(\phi)}$$

ce calcul a été détaillé dans le calcul de l'excentricité équivalente des câbles moyens.

on a trouvé : $B(\phi) = 246,87 \text{ cm}^2$

$$S_{(xx)}(\phi) = 45596,89 \text{ cm}^3$$

d'où l'on a déduit que :

$$v = 91,74 \text{ cm} \quad \text{et} \quad v' = 108,26 \text{ cm}$$

calcul du moment d'inertie de la section nette :

$$I_G = I_{G_1} + (y_G - y_{G_1})^2 B_{bout} - \sum I_{oi} + a_i^2 B_i(\phi)$$

pour le calcul de $a_i = y_{ti} - y_G = y_{ti} - v$

// y_{ti} sont données dans le tableau de calcul de l'excentrement du câble équivalent.

on trouve ainsi :

$$I_G = 98010310,68 + (106,87 - 108,26)^2 16425 - 17 \cdot \frac{\pi 4,3^4}{64} - 14,52 \left(18,48^2 + 78,05^2 + 7 \cdot 96,26^2 + 40,38^2 + 7 \cdot 102,11^2 \right)$$

$$I_{Gx} = 95912047,04 \text{ cm}^4$$

Calcul de l'excentricité du câble équivalent dans la
Section quart de portée :

Numero de Cable	a	Ax (cm)	α	y	di	z	cos α	sin α
②	-	42	24,15	16,74	126,74	18,48	0,9125	0,4091
③	$5,39 \cdot 10^{-4}$	308	18,37	51,13	67,88	-40,38	0,9491	0,3151
④	$5,39 \cdot 10^{-4}$	158	9,67	13,46	30,21	-78,05	0,9858	0,1679
⑤	$5,10 \cdot 10^{-4}$	32	1,87	0,52	11,97	-96,29	0,9995	0,0326
6 ⑦ non relevés	-	-	0	-	11,45	-96,81	1	0
7 ⑥ non relevés	-	-	0	-	6,15	-102,11	1	0

$$\sum \cos \alpha_i = 16,8474$$

$$\sum \sin \alpha_i =$$

$$\sum z_i \cos \alpha_i = -1490,84$$

$$\sum d_i = 260,03$$

d'où : $d = \frac{\sum d_i}{17} = 15,30 \Rightarrow y_t = 184,70$ centre de gravité des touts par rapport à la fibre supérieure.

Calcul du centre de gravité de la section :

$$V = \frac{S_{\text{out}}}{B_{\text{out}}} = \frac{S_{\text{out}} - S(\phi)}{B_{\text{out}} - B(\phi)}$$

$$B(\phi) = 17 \cdot \pi \cdot \frac{4,3^2}{4} = 246,87$$

$$S(\phi) = y_t \cdot B(\phi) = 184,70 \times 246,87 = 45596,89$$

$$B_{\text{out}} = 16425 ; S_{\text{out}} = 1529732 \text{ cm}^3$$

par conséquent :

$$V = \frac{S_{\text{out}} - S(\phi)}{B_{\text{out}} - B(\phi)} = \frac{1484134,33}{16178,13} = 91,74$$

$$V = 91,74 \text{ cm} ; V' = 108,26 \text{ cm}$$

Calcul de l'excentricité équivalente du câble moyen :

$$e = \frac{\sum z \cos \alpha}{\sum \cos \alpha} = \frac{-1490,84}{16,8474} = -88,49 \text{ cm}$$

$$e = -88,49 \text{ cm}$$

Section nette :

$$B_{net} = B_{brut} - B(\phi)$$

$$B_{net} = 16425 - 17 \cdot \pi \cdot \frac{4,3^2}{4}$$

$$B_{net} = 16178,13 \text{ cm}^2$$

Rayon de giration :

$$i^2 = \frac{I}{B} = \frac{95912047,04}{16178,13} = 5928,50 \text{ cm}^2$$

Resume des caracteristiques de la section quant de portee :

$$B = 16178,13 \text{ cm}^2 \quad ; \quad I = 95912047,04 \text{ cm}^4$$

$$v = 91,74 \text{ cm} \quad \quad v' = 108,26 \text{ cm}$$

$$i^2 = 5928,50 \text{ cm}^2 \quad ; \quad a = \frac{i^2}{v'} = 54,76 \text{ cm} \quad ; \quad a' = -\frac{i^2}{v} = -64,62$$

$y_t = 184,70$: centre de gravite, par rapport à la fibre superieure des trous.

$e = -88,49 \text{ cm}$: excentricite du cable equivalent.

calcul du rendement de la section :

$$\rho = \frac{i^2}{v \cdot v'} = \frac{5928,50}{91,74 \cdot 108,26} = 0,59$$

ce qui est superieur à la moyenne 0,55

la poutre est donc assez elancee.

Calcul des caractéristiques de la Section d'about :

La section d'about a une queue épaissie pour cause de résistance à l'effort tranchant, et au couple de torsion.

Les calculs du centre de gravité, des sections brute et nette ont donné comme résultats suivants (voir calcul des sections - gousses, et calcul de l'excentrement du câble équivalent).

Section Brute : $B_{brute} = 20037,78 \text{ cm}^2$

Section nette : $B_{net} = 19863,52 \text{ cm}^2$

Moment statique par rapport à l'axe (xx) fibre supérieure

$$S_{brute (xx)} = 1862460,39 \text{ cm}^3$$

$$S_{net (xx)} = 1845905,69 \text{ cm}^3$$

Centre de gravité :

$$V = 92,93 \text{ cm}$$

$$V' = 107,07 \text{ cm}$$

Calcul du moment d'inertie de la section nette :

$$I_G = I_{G_1} + (y_G - y_{G_1})^2 B_{brute} - \sum (I_{oi} + a_i^2 B_i(\phi))$$

$$I_{G_1} = 102305265,2 \text{ cm}^4$$

$$y_{G_1} = 92,95 \text{ cm}$$

$$\sum I_{oi} = 12 \times \pi \frac{4,3^4}{64}$$

$$a_i = y_{ei} - y_G = y_{ei} - v$$

(Les valeurs de y_{ei} sont détaillées dans le calcul de l'excentrement du câble moyen)

insi donc :

$$I_G = 102305265,2 + (92,95 - 92,93)^2 \cdot 20037,78 - 12 \cdot \pi \frac{4,3^4}{64} - 14,52 \left[2 \left(\frac{92,93 - 20}{64} \right)^2 + 2 \left(\frac{92,93 - 50}{64} \right)^2 + 2 \left(\frac{92,93 - 80}{64} \right)^2 + 2 \left(\frac{92,93 - 110}{64} \right)^2 + 2 \left(\frac{92,93 - 140}{64} \right)^2 + 2 \left(\frac{92,93 - 170}{64} \right)^2 \right]$$

$$I_G = 101846945,2 \text{ cm}^4$$

calcul du rayon de giration de la section d'about:

$$i^2 = \frac{I}{B} = \frac{101846945,2}{19863,52} = \underline{5127,34 \text{ cm}^2}$$

Resume des caracteristiques de la section d'about:

$$B = 19863,52 \text{ cm}^2$$

$$I = 101846945,2 \text{ cm}^4$$

$$v = 92,93 \text{ cm}$$

$$v' = 107,07 \text{ cm}$$

$$i^2 = 5928,50 \text{ cm}^2 ; a = \frac{i^2}{v'} = 55,37 \text{ cm}; a' = -\frac{i^2}{v} = -63,80 \text{ cm}$$

$y_c = 95 \text{ cm}$: centre de gravite des trous par rapport à la fibre superieure.

$e = -3,47 \text{ cm}$: excentricite du cable equivalent.

calcul du rendement de la section:

$$\rho = \frac{i^2}{v \cdot v'} = \frac{5928,50}{92,93 \cdot 107,07} = 0,59$$

la poutre est assez elancee car ρ est superieur à 0,55.

calcul de l'excentricité du câble équivalent dans la section d'about

numéro de câble	d_i (mm)	α	z	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
2. (7)	1,8	22,95	72,93	0,9208	0,3900
2. (8)	1,5	19,44	42,93	0,9430	0,3328
2. (9)	1,2	15,77	12,93	0,9624	0,2717
2. (10)	0,90	11,96	-17,07	0,9783	0,2072
2. (11)	0,60	8,04	-47,07	0,9902	0,1398
2. (12)	0,30	4,04	-77,07	0,9975	0,0704

$$\sum \cos \alpha = 11,5844.$$

$$\sum \sin \alpha = 5,6476.$$

$$\sum z_i \cos \alpha_i = -40,20$$

$$\sum d_i = 12,60 \text{ m.}$$

d'où l'on déduit le centre de gravité des tiges :

$$d = \frac{\sum d_i}{12} = \frac{12,60}{12} = 1,05 \text{ m} = 105 \text{ cm} \rightarrow \boxed{y_t = 95 \text{ cm.}}$$

calcul du centre de gravité de la section: $V = \frac{S_{\text{out}}}{B_{\text{out}}} = \frac{S_{\text{out}} - S(\phi)}{B_{\text{out}} - B(\phi)}$

$$B(\phi) = 12 \cdot \pi \frac{4,3^2}{4} = 174,26 \text{ cm}^2 \Rightarrow S(\phi) = y_t \cdot B(\phi) = 16554,70 \text{ cm}^3$$

$$B_{\text{out}} = 20037,78 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad S_{\text{out}} = 1862460,39 \text{ cm}^3$$

d'où : $\boxed{V = 92,93 \text{ cm. et } v' = 107,07 \text{ cm}}$

calcul de l'excentricité équivalente du câble :

$$e = \frac{\sum z \cos \alpha}{\sum \cos \alpha} = \frac{-40,20}{11,5844} = -3,47 \text{ cm.}$$

$$\boxed{e = -3,47 \text{ cm.}}$$

section où le câble n° ① disparaît :

Numero de cable	a	Δx	α	y	d_i	z	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
①	—	—	$24,15^\circ$	—	190	81,88	0,9125	0,4091
②	—	28	$24,15^\circ$	12,55	122,55	14,43	0,9125	0,4091
③	$5,39 \cdot 10^4$	294	$17,50^\circ$	46,59	63,34	-44,78	0,9532	0,3022
④	$5,39 \cdot 10^4$	144	$8,82^\circ$	11,18	27,93	-80,19	0,9882	0,1533
⑤	$5,10 \cdot 10^4$	18	$1,05^\circ$	0,17	11,62	-96,50	0,9998	0,0183
6 ⑦	$5,10 \cdot 10^4$	/	0°	0	11,45	-96,67	1	0
7 ⑥	$5,10 \cdot 10^4$	/	0°	0	6,15	-101,97	1	0

par conséquent : $\sum \cos \alpha_i = 17,77$; $\sum \sin \alpha_i = 1,2021$.

$\sum z_i \cos \alpha_i = -1424,34$; $\sum d_i = 527,19$.

d'où : $d = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{527,19}{18} = 29,29$; $y = 200 - d = 170,71$

calcul du centre de gravité de la section : $V = \frac{S_{bute}}{B_{bute}} = \frac{S_{bute} - S(\phi)}{B_{bute} - B(\phi)}$

$B(\phi) = 18 \cdot \pi \cdot \frac{4,3^2}{4} = 261,40 \rightarrow S(\phi) = y \cdot B(\phi) = 44623,59$

$B_{bute} = 16425 \text{ cm}^2$; $S_{bute} = 1529732 \text{ cm}^3$

d'où : $B_{net} = 16163,60 \text{ cm}^2$; $S_{net} = 1485108,41 \text{ cm}^3$

par conséquent : $V = \frac{1485108,41}{16163,60} = 91,88 \text{ cm}$

$V = 91,88$

$V' = 108,12$

calcul de l'excentricité du câble équivalent :

avant disparition du câble n° ① : $e = \frac{\sum z \cos \alpha}{\sum \cos \alpha} = \boxed{-80,15}$

après disparition du câble n° ① : $e = \frac{-1424,34 - 74,72}{17,77 \cdot 0,9125} = \boxed{-88,93}$

d'où : $\Delta e = \boxed{-8,78}$

Section ou le cable n° 2 disparaît :

Numero du cable	a	Δx	α	y	d _i	z	cos α	sin α
②	5,39 10 ⁴	/	24,15	-	190	81,97	0,9125	0,4091
③	5,39 10 ⁴	28	24,15	12,55	122,55	14,52	0,9125	0,4091
④	5,39 10 ⁴	294	17,59	46,59	63,34	-44,69	0,9533	0,3022
⑤	5,10 10 ⁴	168	9,72	14,39	25,84	-82,19	0,9856	0,1688
⑥	4,84 10 ⁴	42	2,33	0,85	7,00	-101,03	0,9992	0,0407
⑦) ⑧) ⑨) } x 6	-	-	0	0	6x11,45	-96,58	6x1	0
⑩) ⑪) ⑫) } x 6	-	-	0	0	6x6,15	-101,88	6x1	0

par consequent : $\sum \cos \alpha_i = 16,76$; $\sum \sin \alpha = 1,3299$.

$\sum z_i \cos \alpha_i = -1327,27$; $\sum d_i = 514,33$.

d'où : $d = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{514,33}{17} = 30,25 \rightarrow y = 200 - d = 169,75$

calcul du centre de gravite de la section :

$V = \frac{S_{net}}{B_{net}} = \frac{S_{ente} - S(\phi)}{B_{ente} - B(\phi)}$

$B(\phi) = 17 \cdot \pi \frac{7,3^2}{4} = 246,87 \text{ cm}^2 \Rightarrow S(\phi) = y \cdot B(\phi) = 41905,90 \text{ cm}^2$

$B_{ente} = 16425 \text{ cm}^2$ et $S_{ente} = 1529732 \text{ cm}^3$.

d'où : $B_{net} = 16178,13$ et $S_{net} = 1487825,10 \text{ cm}^3$

par consequent : $V = \frac{1487825,10}{16178,13} = 91,97$

$V = 91,97 \text{ cm}$
 $V' = 108,03 \text{ cm}$

calcul de l'excentricite equivalente du cable :

- 1) avant disparition du cable n° ② : $e = \frac{\sum z \cos \alpha}{\sum \cos \alpha} = \frac{-79,19 \text{ cm}}{16,76} \left. \vphantom{\frac{-79,19 \text{ cm}}{16,76}} \right\} e_c = -9,27$
- 2) apres disparition du cable n° ② : $e = \frac{-88,46}{16,76}$

Remarque :

ces calculs ont ete fait en supposant que V et V' ne changent pas avant et apres disparition du cable car la variation est faible ; en effet

avant disparition } $V = 91,97 \text{ cm}$ apres disparition } $V = 91,89$
 du cable n° 2 } $V' = 108,03 \text{ cm}$ du cable n° 2 } $V' = 108,11$ (151)

section où le câble n° ③ disparaît :

numero de cable	a	Δx (cm)	α	y (cm)	d_i (cm)	z	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
③	-	1,78	24,15°	-	190	82,06	0,9125	0,4091
④	-	0,28	24,15°	12,55	122,55	14,61	0,9125	0,4091
⑤	$5,10 \cdot 10^4$ (cm ²)	3,18	17,97°	51,57	63,02	-44,92	0,9512	0,3085
⑥	$4,84 \cdot 10^4$ (cm ²)	1,92	10,53°	17,84	23,99	-83,95	0,9832	0,1828
2.⑦	$0,0385$ (m ⁻¹)	0,51	2,25°	1,00	12,45	-95,49	0,9992	0,0393
2.⑧	$0,0321$ (m ⁻¹)	0,51	1,88°	0,80	12,25	-95,69	1	0,0328
2.⑨	$0,0257$ (m ⁻¹)	0,51	1,50°	0,67	12,12	-95,82	1	0,0262
2.⑩	$0,0193$ (m ⁻¹)	0,51	1,13°	0,50	6,65	-101,29	1	0,0197
2.⑪	$0,0128$ (m ⁻¹)	0,51	0,75°	0,30	6,45	-101,49	1	0,0131
2.⑫	$64,17 \cdot 10^4$ (m ⁻¹)	0,51	0,37°	0,17	6,32	-101,62	1	0,0065

$$\sum \cos \alpha_i = 15,78$$

$$\sum \sin \alpha_i = 1,5847$$

$$\sum z_i \cos \alpha_i = -1215,00$$

$$\sum d_i = 512,04$$

$$\text{d'où : } d = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{512,04}{16} = 32,00 \rightarrow \boxed{y_t = 200 - 32,00 = 167,99}$$

calcul du centre de gravite de la section: $V = \frac{S_{\text{net}}}{B_{\text{net}}}$

$$B(\phi) = 16 \cdot \pi \frac{4,3^2}{4} = 232,35 \rightarrow S(\phi) = y_t \cdot B(\phi) = 39032,48 \text{ cm}^3$$

$$B_{\text{brut}} = 16425 \quad \text{et} \quad S_{\text{brut}} = 1529732 \text{ cm}^3$$

$$\text{d'où : } V = \frac{S_{\text{brut}} - S(\phi)}{B_{\text{brut}} - B(\phi)} = 92,06 \text{ cm}$$

$$\boxed{V = 92,06 \text{ cm}}$$

$$\boxed{V' = 107,94 \text{ cm}}$$

calcul de l'excentricite equivalente du cable :

avant disparition du cable n° ③: $e = \frac{\sum z_i \cos \alpha_i}{\sum \cos \alpha_i} = \frac{-1215,00}{15,78} = -77,00 \text{ cm}$

apres disparition du cable n° ③:

$$e = \frac{-1215,00 - 74,88}{15,78 - 0,9125} = -86,76 \text{ cm}$$

$$\text{d'où : } \boxed{\Delta e = -9,76 \text{ cm}}$$

Section où le câble n° 4 disparaît :

Numéro du câble	a	Δx	α (ent, $2ax$)	$y = \begin{cases} ax^2 \\ x+y, 24,15 \end{cases}$	$d_i = \begin{cases} x+y, d_{i10} \\ x+y, d_i \end{cases}$ (cm)	$Z = d_i - V$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
④	—	—	$24,15^\circ$	—	190	82,03	0,9125	0,4091
⑤	—	28	$24,15^\circ$	12,55	122,55	14,58	0,9125	0,4091
⑥	$4,84 \cdot 10^4$ (cm)	342	$18,32^\circ$	56,61	62,76	-45,21	0,9793	0,3143
2. ⑦	$3,85 \cdot 10^4$ (cm)	201	$4,43^\circ$	15,55	27	-80,97	0,9970	0,0772
2. ⑧	$3,21 \cdot 10^4$	201	$3,64^\circ$	12,97	24,42	-83,55	0,9979	0,0635
2. ⑨	$2,57 \cdot 10^4$	201	$2,96^\circ$	10,38	21,83	-86,14	0,9987	0,0516
2. ⑩	$1,93 \cdot 10^4$	201	$2,22^\circ$	7,80	13,95	-94,02	0,9992	0,0257
2. ⑪	$1,28 \cdot 10^4$	201	$1,47^\circ$	5,17	11,32	-96,65	0,9997	0,0257
2. ⑫	$0,64 \cdot 10^4$	201	$0,74^\circ$	2,59	8,74	-99,23	0,9999	0,0129

par conséquent :

$$\leq \cos \alpha = 14,7591.$$

$$\leq \sin \alpha =$$

$$\leq Z \cos \alpha = -1034,59.$$

$$\leq d_i = 589,33 \text{ cm.} \Rightarrow d = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{589,33}{15} = 39,32 \text{ cm}$$

d'où l'on déduit que : $y = 200 - d = 200 - 39,32 = 160,68 \text{ cm}$.

calcul du centre de gravité de la section :

$$V = \frac{S_{\text{net}}}{B_{\text{net}}} = \frac{S_{\text{aut}} - S(\phi)}{B_{\text{aut}} - B(\phi)}$$

$$B(\phi) = 15 \cdot \frac{\pi(4,3)^2}{4} = 217,83 \Rightarrow S(\phi) = y B(\phi) = 160,68 \times 217,83 = 35000,52 \text{ cm}^3$$

$$B_{\text{aut}} = 17022,12 \text{ cm}^2 \text{ et } S_{\text{aut}} = 1581475,38 \text{ cm}^3$$

$$\text{d'où : } B_{\text{net}} = 16804,29 \text{ et } S_{\text{net}} = 1546474,86.$$

par conséquent :

$$V = \frac{S_{\text{net}}}{B_{\text{net}}} = \frac{1546474,86}{16804,29} = 92,03.$$

$$\left. \begin{array}{l} V' = 107,97 \text{ cm} \\ V = 92,03 \end{array} \right\}$$

calcul de l'excentricité équivalente du câble :

$$e = \frac{\sum Z \cos \alpha}{\sum \cos \alpha}$$

$$\text{avant disparition du câble ④ : } e = \frac{-1034,59}{14,7591} = -70,10 \text{ cm}$$

$$\text{après disparition : } e = \frac{-1034,59 - 74,85}{14,7591 - 0,9125} = -80,12$$

$$\Delta e = -10,02$$

section ou le cable n° 5 disparaît :

Numero du cable	a	Δx (m)	α	Y (cm)	d_i	z	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
⑤	—	1,78	24,15	190	190	82,18	0,9125	0,4091
⑥	—	0,78	24,15	12,55	122,55	14,73	0,9125	0,4091
2.⑦	0,0385 (m ⁻¹)	3,51	15,12	47,43	58,88	-48,94	0,9654	0,2608
2.⑧	0,0321 (m ⁻¹)	3,51	12,70	39,55	51,00	-56,82	0,9755	0,2198
2.⑨	0,02566 (m ⁻¹)	3,51	10,21	31,61	43,06	-64,76	0,9842	0,1773
2.⑩	0,01925 m ⁻¹	3,51	7,70	23,72	35,87	-72,95	0,9910	0,1340
2.⑪	0,01283 m ⁻¹	3,51	5,15	15,81	27,96	-81,26	0,9960	0,0898
2.⑫	64,17 10 ⁻⁴ (m ⁻¹)	3,51	2,58	7,91	14,05	-89,77	0,9990	0,0450

par conséquent : $\sum \cos \alpha_i = 13,65$; $\sum \sin \alpha_i = 2,6716$
 $\sum z_i \cos \alpha_i = -757,27$; $\sum d_i = 750,19$

d'où : $d = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{750,19}{14} = 53,59$ → $y_{\text{tran}} = 146,41 \text{ cm}$

calcul du centre de gravité :

$$V = \frac{S_{\text{net}}}{B_{\text{net}}}$$

$B(\phi) = 14 \cdot \pi \cdot \frac{4,3^2}{4} = 203,31$ → $S(\phi) = y \cdot B(\phi) = 29766,62$
 $B_{\text{net}} = 17907,62$ et $S_{\text{brute}} = 1661804,29$

par conséquent :

$$V = \frac{S_{\text{brute}} - S(\phi)}{B_{\text{brute}} - B(\phi)} = \frac{1661804,29 - 29766,62}{17907,62 - 203,31} = 92,18$$

$$\begin{matrix} V = 92,18 \\ V' = 107,82 \end{matrix}$$

calcul de l'excentricité équivalente du câble :

avant disparition : $e = \frac{\sum z_i \cos \alpha_i}{\sum \cos \alpha_i} = \frac{-757,27}{13,65} = -55,48$
 après disparition : $e = \frac{-757,27 - 74,99}{13,65 - 0,9125} = -65,34$ } ⇒ $\Delta e = -9,86$

Section ou le câble n° 6 disparaît :

numéro de câble	a	Δx	α	$y = \begin{cases} ax^2 \\ x \cdot \tan \alpha \end{cases}$	$d_i = \begin{cases} x \cdot \tan \alpha + 10 \\ ax^2 + d' \end{cases}$	$z = d_i - v'$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
6	—	1	24,15	—	190	82,41	0,9125	0,4091
2. (7)	$3,85 \cdot 10^{-4}$	501	21,20	96,64	108,09	0,50	0,9330	0,3616
2. (8)	$3,21 \cdot 10^{-4}$	501	17,83	80,57	92,02	-15,57	0,9520	0,3062
2. (9)	$2,57 \cdot 10^{-4}$	501	14,44	64,51	75,96	-31,63	0,9684	0,2494
2. (10)	$1,93 \cdot 10^{-4}$	501	10,95	48,44	54,59	-53	0,9818	0,1900
2. (11)	$1,28 \cdot 10^{-4}$	501	7,31	32,13	38,28	-69,31	0,9919	0,1272
2. (12)	$0,64 \cdot 10^{-4}$	501	3,67	16,06	22,21	-85,38	0,9980	0,0640

par conséquent : $\sum \cos \alpha = 8,7400$; $\sum \sin \alpha = 3,0060$.

$\sum z \cos \alpha = -426,76$; $\sum d_i = 927,30$

d'où l'on déduit que : $d_r = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{927,30}{13} = 71,33 \Rightarrow y = 200 \cdot d = 125,21 \text{ cm}$

calcul du centre de gravité de la section :

$$V = \frac{S_{\text{net}}}{B_{\text{net}}} = \frac{S_{\text{bute}} - S(\phi)}{B_{\text{bute}} - B(\phi)}$$

$B(\phi) = 13 \cdot \frac{\pi \cdot 4,3^2}{4} = 188,78 \text{ cm}^2 \rightarrow S(\phi) = y \cdot B(\phi) = 23637,48 \text{ cm}^3$

$B_{\text{bute}} = 18831,26 \text{ cm}^2$ et $S_{\text{bute}} = 1746390,81 \text{ cm}^3$

par conséquent :

$$V = \frac{S_{\text{net}}}{B_{\text{net}}} = 92,41 \text{ cm}$$

$V' = 107,52 \text{ cm}$
 $V = 92,41 \text{ cm}$

calcul de l'excentricité équivalente du câble :

juste avant disparition du câble n° (6) : $e = \frac{\sum z \cos \alpha}{\sum \cos \alpha} = \frac{-426,76}{8,7400} = -48,84$

juste après disparition du câble, en considérant que V et V' restent inchangés.

$$e = \frac{-426,76 - 75,2}{8,7400 - 0,9125} = -64,13$$

le saut, du tracé du câble équivalent, dû à la disparition du câble n° (6) est :

$$\Delta e = e_{\text{après}} - e_{\text{avant}} = -15,29 \text{ cm}$$

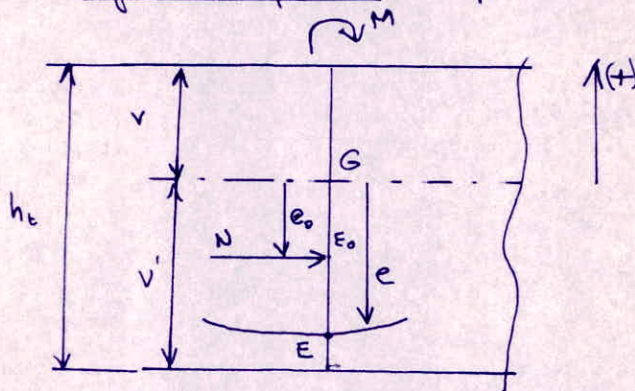
Centre et ligne de Pression :

soit dans une section donnée, E le point de passage du câble moyen fictif ayant une excentricité e , et M le moment de flexion due à une charge quelconque. cette section est équivalente à une section ayant les mêmes caractéristiques géométriques mais soumise uniquement à une force de précontrainte d'excentricité e_0 telle que

$$Ne + M = Ne_0 \Rightarrow e_0 = e + \frac{M}{N}$$

Le point E_0 d'excentricité e_0 est appelé centre de pression, il se déplace le long de la poutre suivant les valeurs de M .

L'ensemble des points E_0 tout le long de la poutre pour un cas de charge donné constitue la ligne de pression correspondante.



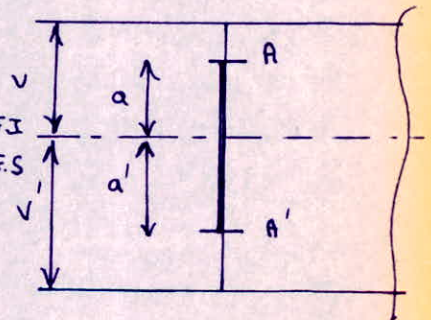
NOYAU CENTRAL : c'est dans une section donnée le domaine à l'intérieur duquel doit se trouver le centre de pression pour que l'on ait aucune traction en n'importe quel point de la section.

soient A et A' les limites de ce domaine :

si E_0 est entre A et A' : σ et $\sigma' > 0$

⊙ si E_0 est en A ou a : $\sigma' = 0$ contrainte nulle sur la FI

⊙ si E_0 est en A' ou a : $\sigma = 0$ contrainte nulle sur la FS



d'autre part :

⊙ $\sigma = \frac{N}{B} + N e_0 \frac{v}{I} = 0$

$$\Rightarrow e_0 = -\frac{I}{B \cdot v} = -\frac{i^2}{v} = a'$$

⊙ $\sigma' = \frac{N}{B} - N \cdot e_0 \frac{v'}{I} = 0 \Rightarrow e_0 = \frac{I}{B \cdot v'} = \frac{i^2}{v'} = a$

les limites du noyau central sont donc : $a = \frac{i^2}{v'}$; $a' = -\frac{i^2}{v}$

FUSEAUX LIMITES :

1^{er} fuseau limite :

c'est le fuseau à l'intérieur duquel doit se trouver le câble équivalent pour qu'il n'y ait pas de traction (quel que soit le cas de charge) sur l'une ou l'autre des fibres externes.

soit : N la force normale de précontrainte ($N = \Sigma P \cos \alpha$), e son excentricité.

M_G le moment du au poids propre ; M_Q le moment du au surcharge.

e_g et e_{g+q} centres de pression du au pd. propre, et au pd propre plus surcharge.

$$m a : \quad N \times e_g = e N + M_G \quad \Rightarrow \quad e_g = e + \frac{M_G}{N}$$

$$N \times e_{g+q} = e N + M_G + M_Q \quad \Rightarrow \quad e_{g+q} = e + \frac{M_G + M_Q}{N}$$

$e < 0$ et M_G, M_Q sont positifs.

par conséquent, on aura :

$$e_g \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{La limite de } e_g \text{ est } a'$$

$$e_{g+q} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la limite de } e_{g+q} \text{ est } a$$

a et a' étant les limites du noyau central.

$$e_g = a' = -\frac{i^2}{v}$$

$$e_{g+q} = a = \frac{i^2}{v'}$$

ainsi donc, les valeurs limites pour l'excentricité de la précontrainte sont :

$$e = a' - \frac{M_G}{N}$$

$$\text{et } e = a - \frac{M_G + M_Q}{N}$$

ce tracé se fera par rapport à la ligne des centres de gravité le long de la poutre.

on se contentera pour le tracé de ce 1^{er} fuseau limite de 3 points (section milieu, section quart, section d'about).

calcul numérique du 1^{er} fuseau limite.

	Section milieu	Section quat	Section d'appui
M.G charges permanente	1002,65 (t.m)	750,47 (t.m)	0
M.Q. Surcharge Bc + trottoir	305,75 (t.m)	239,51 (t.m)	0
$N = \sum F_i \cos \alpha_i$ composante normale de P.	900 (t)	842,37 (t)	579,22 (t)
$\frac{MG}{N}$	111,4 (cm)	89,09 (cm)	0
$\frac{MG+MQ}{N}$ (cm)	145,38	117,52	0
a' (cm)	-64,55	-64,62	-63,80
a (cm)	+54,53	+54,76	+55,37
$e_1 = a' - \frac{MG}{N}$	-175,95 cm	-153,71 cm	-63,80
$e_2 = a - \frac{MG+MQ}{N}$	-90,85	-62,76	+55,37

on peut ainsi tracer (voir figure) le premier fuseau limite avec une approximation suffisante.

vérification des sections milieu - quat - about : les calculs du câble moyen ont donné les excentricités suivantes.

e (excentricité du câble équivalent)	-97,56 cm	-88,49 cm	-3,47
$e_1 < e < e_2$	-175,95 < -97,56 < -90,85 vérifié !!!	-153,71 < -88,49 < -62,76 vérifié !!!	-63,80 < -3,47 < +55,37 vérifié !!!

on vérifie ainsi sur la figure que le câble moyen est à l'intérieur du 1^{er} fuseau limite.

2°: Fuseau Limite :

c'est le fuseau a l'interieur duquel doit se trouver le cable equivalent pour que la contrainte maximale reste inferieure ou egale a la contrainte maximale admissible $\bar{\sigma}$ en compression, sur l'une ou l'autre des fibres extremes et quel que soit le cas de charge.

cette condition s'écrit:

$$\text{sur la fibre superieure: } \sigma_P + \sigma_G + \sigma_Q \leq \bar{\sigma} \quad (\text{service en charge}) \quad (1)$$

$$\text{sur la fibre inferieure: } \sigma'_P + \sigma'_G \leq \bar{\sigma} \quad (\text{service a vide}) \quad (2)$$

avec:

$$\sigma_P = \frac{N}{B} + \frac{Ne}{I} v = \frac{N}{B} \left(1 + \frac{e \cdot B}{I} v \right) = \frac{N}{B} \left(1 + \frac{ev}{i^2} \right)$$

$$\sigma'_P = \frac{N}{B} \left(1 - \frac{ev'}{i^2} \right)$$

$$\sigma_G + \sigma_Q = \left(\frac{M_G + M_Q}{I} \right) v = \frac{M_G + M_Q}{B} \times \frac{v}{i^2}$$

$$\sigma'_G = - \frac{M_G \cdot v'}{I} = - \frac{M_G}{B} \frac{v'}{i^2}$$

e étant compté algébriquement: positif vers le haut -- négatif vers le bas (noter cas)

La condition (1) devient:

$$\frac{N}{B} \left(1 + \frac{ev}{i^2} \right) + \frac{M_G + M_Q}{B} \frac{v}{i^2} \leq \bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{B} \left[\left(1 + \frac{ev}{i^2} \right) + \frac{M_G + M_Q}{N} \frac{v}{i^2} \right] \leq \bar{\sigma}$$

$$\text{d'où: } 1 + \frac{v}{i^2} \left(e + \frac{M_G + M_Q}{N} \right) \leq \frac{\bar{\sigma} B}{N}$$

d'où l'on déduit que :

$$e \leq \left(\frac{\bar{\sigma} B}{N} - 1 \right) \frac{i^2}{v} - \frac{M_G + M_Q}{N}$$

La valeur(s) du membre de droite est positive vers les abuts ou les moments sont nuls; par contre cette valeur est négative dans la partie centrale où les moments M_G et M_Q sont grands.

de même, la condition (2) devient:

$$\frac{N}{B} \left(1 - \frac{ev'}{i^2} \right) - \frac{M_G}{B} \frac{v'}{i^2} \leq \bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad e \geq - \left(\frac{\bar{\sigma} B}{N} - 1 \right) \frac{i^2}{v'} - \frac{M_G}{N}$$

La valeur s' du membre droite est toujours négative.

ainsi donc, les deux valeurs s et s' nous permettent de tracer le deuxième fuseau limité par rapport à ligne des centres de gravité.

Le câble équivalent doit rester dans la zone comme aux deux fuseaux qu'on vient de déterminer.

on se contentera pour notre tracé de ce 2^e fuseau (comme pour le point) de déterminer 3 points, à savoir à faire le calcul pour 3 sections particulières : section milieu, section quart, section d'about.

Calcul numérique du 2^e fuselage limite :

calcul de s et s' , avec $\bar{G} = 0,42 \cdot 6u = 0,42 \cdot 400 = 168 \text{ kg/cm}^2$

	Section milieu	Section quart	Section d'appui
B en cm^2	16163,64	16178,13	19863,52
N en kg	900 10^3	842370	579220
$\frac{i^2}{v}$ en m	64,55	64,62	63,80
$\frac{i^2}{v'}$ en m	54,53	54,76	55,37
M_G ent.m	1002,65 (t.m)	750,47	0
M_Q ent.m	305,75 (t.m)	239,51	0
$\frac{\bar{G} B}{N}$	3,02	3,23	5,76
s en cm.	-14,99	26,58	303,77
s' en m.	-221,56	-211,21	-263,56

Les valeurs de s et s' prises en ordonnées à partir de la ligne GG des centres de gravité permettent de tracer le deuxième fuselage limite avec une approximation suffisante.

on vérifie ainsi (voir figure) que le câble moyen est à l'intérieur du deuxième fuselage limite.

Vérification des sections milieu - quart - about :

excentricité du câble moyen	-97,56 cm	-88,49 cm	-3,47 cm
$s' < e < s$	-221,56 < -97,56 < -14,99 vérifié !!!	-211,21 < -88,49 < 26,58 vérifié !!!	-263,56 < -3,47 < 303,77 vérifié !!!

VI. Verification des contraintes dans la Section Milieu à la Mise en tension, en service à vide, en service à charge

VI.1 Contraintes à la mise en tension, de la section milieu:

VI.1.1 contraintes élémentaires du Béton:

on a avant execution de la superstructure :

$$M_{g_1} = 747,15 \text{ t.m.}$$

par consequent :

la contrainte sur la fibre supérieure : $\sigma_{g_1} = \frac{M_{g_1} \cdot v}{I}$

$$\sigma_{g_1} = \frac{747,15 \cdot 10^5 \cdot 91,58}{95\,556\,294,51} = +71,61 \text{ kg/cm}^2$$

la contrainte sur la fibre inférieure : $\sigma'_{g_1} = -\frac{M_{g_1} \cdot v'}{I}$

$$\sigma'_{g_1} = \frac{747,15 \cdot 10^5 \cdot 108,42}{95\,556\,294,51} = -84,77 \text{ kg/cm}^2$$

VI.1.2 Contraintes dues à la Preccontrainte :

la contrainte des fils des cables au milieu est initialement 115 kg/mm² (voir tableau de calcul à la mise en tension).

la tension de chaque câble est donc :

$$T = 115 \times 603 = 69345 \text{ kg.}$$

par consequent, la force totale de Preccontrainte est :

$$N = 69.345 \times 18 = 1248210 \text{ kg.}$$

car à la section milieu, on a 18 cables.

les contraintes des fibres extremes, dues à la preccontrainte sont :

$$\text{fibre supérieure : } \sigma_p = \frac{N}{B} \left(1 + \frac{e \cdot v}{i^2} \right)$$

$$\text{fibre inférieure : } \sigma'_p = \frac{N}{B} \left(1 - \frac{e \cdot v'}{i^2} \right)$$

e étant l'excentricité du câble équivalent.

en la section milieu, on a vu que $e = + 97,56 \text{ cm}$.

par conséquent :

$$\sigma_p = \frac{12.48210}{16163,64} \left(1 - \frac{97,56 \cdot 91,58}{5911,81} \right) = -39,48 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{fibre supérieure : } \sigma_p = -39,48 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_p = \frac{12.48210}{16163,64} \left(1 + \frac{97,56 \cdot 108,42}{5911,81} \right) = +215,39 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{fibre inférieure : } \sigma'_p = +215,39 \text{ kg/cm}^2$$

VI.1.3. Contraintes résultantes dans les fibres extrêmes de la section milieu lors de la mise en tension :

fibre supérieure :

$$\sigma = \sigma_{g1} + \sigma_p$$

$$\sigma = +71,61 - 39,48$$

$$\sigma = 32,13 \text{ kg/cm}^2$$

fibre inférieure :

$$\sigma' = \sigma'_{g1} + \sigma'_p$$

$$\sigma' = -84,77 + 215,39$$

$$\sigma' = +130,62 \text{ kg/cm}^2$$

Résistance nominale à exiger du béton lors de la mise en tension des câbles :

$$\sigma_j = \frac{\sigma}{0,55} = \frac{130}{0,55} = 237,49 \text{ kg/cm}^2$$

ce qui est admissible, car déjà à 7 jours le béton a une résistance nominale égale à : $\sigma_7 = \frac{2}{3} \sigma_{28}$

C'est à dire : $\sigma_7 = \frac{2}{3} \cdot 400 = 266,67 \text{ kg/cm}^2$

VI.2 Contraintes des fibres extérieures de la section Milieu pendant la deuxième phase.

cette deuxième phase, consiste à construire la super-structure, mais les câbles auront subi entre-temps une chute partielle de tension par retrait, fluage, relaxation,

VI.2.1 Contraintes élémentaires du Béton.

le poids propre étant entièrement réalisé, le moment de flexion dû au poids propre est :

$$M_g = 1002,65 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

par conséquent, les contraintes sur les fibres extrêmes seront :

fibre supérieure :

$$\sigma = \frac{M_g \cdot v}{I} = \frac{1002,65 \cdot 10^5 \cdot 91,58}{95556294,51} = \underline{\underline{96,09 \text{ kg/cm}^2}}$$

fibre inférieure :

$$\sigma' = -\frac{M_g \cdot v'}{I} = -\frac{1002,65 \cdot 10^5 \cdot 108,42}{95556294,51} = \underline{\underline{-113,76 \text{ kg/cm}^2}}$$

VI.2.2 Contraintes dues à la précontrainte :

on peut admettre que la chute partielle de tension des câbles est égale à $\frac{1}{3}$ de la chute totale due à la relaxation des aciers, au retrait et au fluage.

La contrainte dans les câbles sera donc :

$$\sigma_a' = 115 - \frac{1}{3} \cdot (10 + 6 + 16) = \underline{\underline{104 \text{ kg/cm}^2}}$$

soit une tension par câble : $T = 104 \times 603$

$$T = \underline{\underline{62.712 \text{ kg}}}$$

La force totale de précontrainte sera donc : $N = 18 \cdot 62712$
 $N = \underline{\underline{1128816 \text{ kg}}}$ 164

les contraintes dues à la précontrainte pendant cette 2^e phase sont:

fibre supérieure:

$$\sigma_p = \frac{N}{B} \left(1 - \frac{e \cdot v}{i^2} \right) = \frac{1128816,0}{16163,64} \left(1 - \frac{97,56 \cdot 91,58}{5911,81} \right)$$

$$\sigma_p = -35,71 \text{ kg/cm}^2$$

fibre inférieure:

$$\sigma'_p = \frac{N}{B} \left(1 + \frac{e \cdot v}{i^2} \right) = \frac{1128816,0}{16163,64} \left(1 + \frac{97,56 \cdot 108,42}{5911,81} \right)$$

$$\sigma'_p = +194,79 \text{ kg/cm}^2$$

VII 2.3 Contraintes résultantes pendant la 2^e phase:

fibre supérieure:

$$\sigma = \sigma_g + \sigma_p = +96,09 - 35,71$$

$$\sigma = +60,38 \text{ kg/cm}^2$$

fibre inférieure:

$$\sigma' = \sigma'_g + \sigma'_p = -113,76 + 194,79$$

$$\sigma' = +80,03 \text{ kg/cm}^2$$

Contrainte nominale à exiger du Béton lors de la réalisation de la Superstructure:

$$\sigma'_f = \frac{\sigma'}{0,55} = \frac{80,03}{0,55} = \underline{145,51 \text{ kg/cm}^2}$$

ce qui est parfaitement possible, car 7 jours déjà la contrainte nominale vaut 266,67 kg/cm².

VI.3 Contraintes dans le Béton, en service à vide dans la section milieu.

VI 31. Contraintes élémentaires du Béton :

le poids propre étant entièrement réalisé, on a comme pendant la 2^e phase :

$$\begin{aligned} \text{fibre supérieure :} & \quad \underline{\underline{\sigma_g = +96,09 \text{ kg/cm}^2}} \\ \text{fibre inférieure :} & \quad \underline{\underline{\sigma'_g = -113,76 \text{ kg/cm}^2}} \end{aligned}$$

VI 32. Contraintes dues à la Précontrainte

La force de Précontrainte étant en service égale

$$\text{à :} \quad N = 50.000 \times 18$$

$$\underline{\underline{N = 900.000 \text{ kg.}}}$$

les contraintes sur les fibres extrêmes, dues à N sont :

- fibre supérieure :

$$\sigma_p = \frac{9 \cdot 10^5}{16163,64} \left(1 - \frac{97,56 \cdot 91,58}{5911,81} \right)$$

$$\underline{\underline{\sigma_p = -28,47 \text{ kg/cm}^2.}}$$

- fibre inférieure :

$$\sigma'_p = \frac{9 \cdot 10^5}{16163,64} \left(1 + \frac{97,56 \cdot 108,42}{5911,81} \right)$$

$$\underline{\underline{\sigma'_p = +155,31 \text{ kg/cm}^2.}}$$

VI 3.3 Contraintes résultantes en service à vide :

$$\underline{\underline{\text{fibre supérieure :}}} \quad \sigma = \sigma_g + \sigma_p$$

$$\sigma = 96,09 - 28,47$$

$$\boxed{\sigma = 67,60 \text{ kg/cm}^2.}$$

fibre inférieure :

$$G' = G_g + G'_p$$

$$G' = -113,76 + 155,31$$

$$G' = +41,55 \text{ kg/cm}^2$$

on vérifie bien que les contraintes extrêmes sont des compressions, qui ne dépassent pas la contrainte admissible de compression du béton précontraint.

$$\bar{G} = 168 \text{ kg/cm}^2.$$

VI 4 Contrainte résultante dans les fibres extrêmes en service à charge.

VI 4.1. Contraintes élémentaires du Béton :

elles sont égales aux contraintes élémentaires du cas service à vide.

$$\text{fibre supérieure : } G = 96,09 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{fibre inférieure : } G' = -113,76 \text{ kg/cm}^2$$

VI 4.2. Contraintes dues à la Précontrainte :

elles sont égales aux contraintes de précontrainte dans le cas du service à vide.

$$\text{fibre supérieure : } G_p = -28,47 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{fibre inférieure : } G'_p = +155,31 \text{ kg/cm}^2$$

VI 4.3. Contraintes dues aux Surcharges d'exploitation.

le moment dû aux surcharges B_c et de trottoir est égale à : $M_Q = 308,37 \text{ t.m.}$ 167

Les contraintes dues aux surcharges sont donc :

fibre supérieure :

$$\sigma_q = \frac{M_q \cdot v}{I} = \frac{308,37 \cdot 10^5 \cdot 91,58}{95556294,51}$$

$$\underline{\sigma_q = 29,55 \text{ kg/cm}^2}$$

fibre inférieure :

$$\sigma'_q = - \frac{M_q \cdot v'}{I} = \frac{308,37 \cdot 10^5 \cdot 108,42}{95556294,51}$$

$$\underline{\sigma'_q = - 34,99 \text{ kg/cm}^2}$$

Contraintes résultantes dans les fibres extrêmes en service à charge, dans la section milieu.

fibre supérieure :

$$\sigma = \sigma_g + \sigma_p + \sigma_q$$

$$\sigma = 96,09 - 28,47 + 29,55$$

$$\boxed{\sigma = 97,17 \text{ kg/cm}^2}$$

fibre inférieure :

$$\sigma' = \sigma'_g + \sigma'_p + \sigma'_q$$

$$\sigma' = -113,76 + 155,31 - 34,99$$

$$\boxed{\sigma' = 6,56 \text{ kg/cm}^2}$$

tableau récapitulatif des contraintes de flexion dans la section milieu.

	contraintes dans le Béton en kg/cm ²			
	mise en tension		en service	
	1 ^{re} phase	2 ^e phase	à vide	en charge
fibre supérieure	32,13	60,38	67,60	97,17
fibre inférieure	130,62	80,03	41,55	6,56
contrainte de rupture nécessaire	237,49	145,51		231,36

La contrainte de rupture nécessaire pour le béton, pendant la période de construction est donnée par.

$$\sigma_j = \frac{\sigma}{0,55}$$

ceci est valable pour les calculs de la mise en tension.

pendant la période de service, elle est donnée par

$$\sigma_j = \frac{\sigma}{0,42}$$

pour notre ouvrage on a exigé une contrainte nominale de 400 kg/cm², ce qui est largement sécuritaire car la contrainte de rupture nécessaire n'est que de 231,36 kg/cm².

CHAPITRE VI.

CALCULS des PERTES et CHUTES de TENSION.

- I. Fluage du Béton.
- II chute due au retrait du Béton.
- III chute due à la relaxation des aciers.
- IV chute due à l'enfoncement du câne
- V Pertes par frottements.

Calcul des Pertes et Chutes de Tension

Introduction:

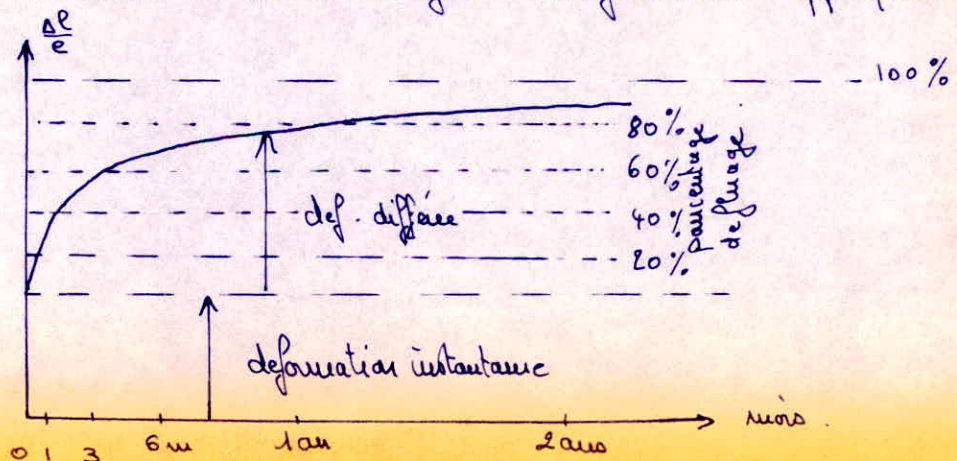
A cause de certaines raisons que nous allons expliquer, les aciers subissent entre l'instant de leur mise en tension et la période de service une chute de tension. Il est très important de connaître cette chute afin d'en déduire la tension initiale à réaliser à la mise en tension.

cette chute de tension est due:

- a - au fluage du Béton.
- b - au retrait du Béton.
- c - à la relaxation des aciers.
- d - à l'enfoncement du cône.
- e - aux frottements des câbles.

I Fluage du Béton:

c'est un phénomène de déformation différée du Béton soumis à une charge indéfiniment appliquée.



OA représente la déformation élastique instantanée au moment de l'application de la charge, et AB la déformation différée due au fluage.

on admet en général que $AB = 2OA$, c'est à dire que la déformation différée est double de la déformation instantanée.

Mais, pour le premier câble tendu, il faudra prendre en considération la suite due au raccourcissement instantané du Béton; par conséquent, pour le 1^{er} câble tendu la déformation du Béton à prendre en compte est égale à $3 \frac{\Delta l}{l}$. par contre, pour le dernier câble tendu, seule entre en jeu la déformation différée égale à $2 \frac{\Delta l}{l}$. on peut donc admettre que la déformation différée moyenne pour l'ensemble des câbles est $2,5 \frac{\Delta l}{l}$

on aura :

$$\frac{\Delta \sigma_a'}{E_a} = 2,5 \cdot \frac{\Delta l}{l} = 2,5 \cdot \frac{\sigma}{E_i}$$

avec E_a = coefficient de l'élasticité de l'acier.

$$E_a = 21 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

E_i = coefficient d'élasticité instantanée du Béton

$$E_i = 42 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

σ est la contrainte moyenne du Béton au niveau des câbles. on peut admettre une

valeur moyenne de $\sigma = 90 \text{ kg/cm}^2$.

par conséquent :

$$\Delta \sigma_a' = 2,5 \cdot \frac{E_a}{E_i} \cdot \sigma = 2,5 \cdot \frac{21 \cdot 10^5}{42 \cdot 10^4} \cdot 90$$

$$\Delta \sigma_a' = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

II Chute due au Retrait du Béton:

Le retrait du Béton occasionne une déformation ou raccourcissement qui est en général évaluée à : $\frac{\Delta L}{L} = 3 \cdot 10^{-4}$.

Pour obtenir une diminution du retrait et des raccourcissements dus aux variations thermiques, on devra rechercher une compacité maximum, et une valeur $\frac{\text{eau}}{\text{ciment}}$ minimum.

Les câbles qui suivent cette même déformation subissent donc de ce fait une chute de tension telle que

$$\frac{\Delta \sigma_a}{E_a} = \frac{\Delta L}{L} \quad , \text{ soit } \Delta \sigma_a = 3 \cdot 10^{-4} \cdot 21 \cdot 10^5$$

$$\Delta \sigma_a \approx 600 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Delta \sigma_a = 6 \text{ kg/mm}^2.$$

III Chute due à la relaxation des aciers:

si un fil d'acier est tendu à une contrainte relativement élevée entre deux points fixes, c'est à dire sous une longueur constante, la contrainte initiale tend à diminuer avec le temps, c'est ce phénomène que l'on appelle la relaxation des aciers.

Le fournisseur doit indiquer les valeurs garanties de la relaxation maximum de l'acier à 120 heures (rel_{120}) et à 1000 heures (rel_{1000}) pour une tension initiale $\sigma_{ai} = 0,8 R_g$ sous longueur constante et sous température constante (+20; ±10).
 R_g étant la contrainte de rupture garantie de l'acier.

en première approximation, il conviendra de prendre en compte dans les calculs une relaxation égale à la plus forte des trois valeurs suivantes

2 fois la relaxation à 120h
1,5 fois la relaxation à 1000h
et 10% de la contrainte initiale au point, σ_{ai} .

dans nos calculs, on adoptera une valeur de 14%.
La contrainte au milieu sera donc en tenant compte de la perte de tension due au fluage, au retrait, et à la relaxation:

$$\sigma_{ai}(1 - 0,14) = (83 + 10 + 6) \Rightarrow \sigma_{ai} = 115 \text{ kg/cm}^2$$

La chute par relaxation sera donc: $115 - 83 = 16 \text{ kg/cm}^2$

Remarque: Dans la vérification de l'ouvrage à la mise en tension, il faudra prendre en compte dans les calculs une contrainte des aciers de cables égale à 115 kg/cm^2 dans la section milieu.
en effet, la chute de tension due à l'enfoncement du cône intervient dès que on place les cônes, et d'autre part, la chute due aux frottements est prise en considération dans la section d'about, et les sections environnantes.

IV Chute par enfoncement du cône:

lorsque après avoir bloqué le cône, on dégaffe le verin, la tension des fils se repète sur l'ancrage, et il se produit un auto-blocage qui a pour effet de provoquer un léger enfoncement du cône entraînant une rentrée correspondante des fils, d'où une chute de tension.

$$\text{si } l^2 + \alpha P_c \geq 350$$

le câble sera considéré comme suffisamment large, et la chute de tension au milieu sera nulle.

Dans le cas contraire, l'enfoncement du câble entraîne une chute de contrainte au milieu du câble qui peut être évaluée approximativement (en kg/mm^2) par la formule suivante :

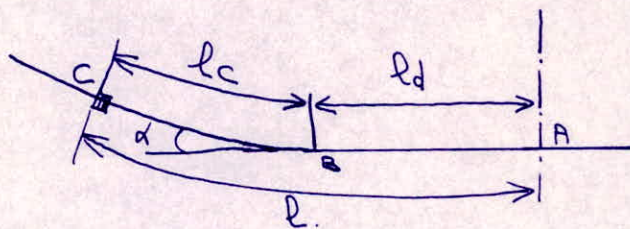
$$\Delta \sigma_a = \frac{350 - (l^2 + \alpha P_c)}{2,5}$$

avec l = demi-longueur du câble en mètres.

α = angle de relevage en degrés.

l_c = longueur de relevage en mètres.

elle comprend la partie parabolique (l_{c1}) et la partie rectiligne (L)



$$l_c = l_{c1} + L$$

Calcul de la longueur l_{c1} :

Le tracé l_{c1} est parabolique, d'équation : $y = ax^2$

$$l_{c1} = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + 4ax^2} dx$$

en posant : $2ax = \sinh t$, on a :

$$l_{c1} = \int \sqrt{1 + (\sinh t)^2} \cdot \frac{\cosh t}{2a} dt = \int \frac{\cosh t \cdot \cosh t}{2a} dt$$

$$l_{c1} = \int \frac{\cosh^2 t}{2a} dt$$

$$\underline{a}, \quad \frac{d^2t}{dt^2} = \frac{1 + \frac{d^2t}{dt^2}}{2}$$

$$l_{c1} = \frac{1}{4a} \int (1 + \frac{d^2t}{dt^2}) dt = \frac{1}{4a} \left[T + \int \frac{d^2t}{dt^2} dt \right]$$

$$P_{c1} = \frac{1}{4a} \left[T + \frac{5 \frac{d^2t}{dt^2}}{2} \right]$$

a, ou a: $5 \frac{d^2t}{dt^2} = 2 \frac{d^2t}{dt^2}$.

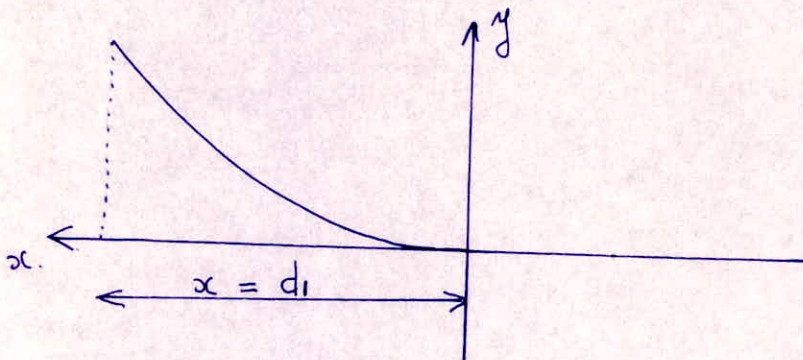
d'ici: $l_{c1} = \frac{1}{4a} \left[t + 5 \frac{d^2t}{dt^2} \right] = \frac{1}{4a} \left[t + 2ax \sqrt{1 + 4a^2x^2} \right]$

d'autre part: $5 \frac{d^2t}{dt^2} + \frac{d^2t}{dt^2} = e^t$.

d'ici: $t = \log. (5 \frac{d^2t}{dt^2} + \frac{d^2t}{dt^2}) = \log. (2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2})$.

d'ici finalement:

$$l_{c1} = \frac{1}{4a} \left[\log(2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2}) + 2ax \sqrt{1 + 4a^2x^2} \right]$$



x est noté d, dans les calculs relatifs au relevage des câbles, sa valeur a été calculée pour chaque câble. De même, a a été calculée précédemment.

Par conséquent la longueur l_c peut être calculée aisément pour chaque câble, en programmant l'expression ci-dessus donnant l_c en fonction de a et x.

programme :

Rcl 0
 enter
 Rcl 1
 x
 2
 x
 sto 2
 gx²
 ↓
 +

↙
 sto 3
 Rcl 2
 x
 Rcl 3
 enter
 Rcl 2
 +
 f log
 +

f
 10/0
 Rcl 0
 0/1

introduction en memoires :

a → sto 0

d_i → sto 1.

d'ou tableau de valeurs donnant l_c.

Numero cable	a	d _i (cm)	l _{c1}	L	l _c
1	5,71.10 ⁻⁴	392,31	405,06	195,5	600,56
2	5,39.10 ⁻⁴	415,95	429,50	195,5	625
3	5,39.10 ⁻⁴	415,95	429,50	195,5	625
4	5,39.10 ⁻⁴	415,95	429,50	195,5	625
5	5,10.10 ⁻⁴	439,59	453,90	195,5	649,4
6	4,84.10 ⁻⁴ (cm)	463,23	478,32	195,5	673,82
7	0,0385 (m ⁻¹)	700	733	138	871
8	0,0321	700	723	141	864
9	0,0256	700	715	144	859
10	0,0192	700	708	147	855
11	0,0128	700	704	149	853
12	0,0064	700	701	150.	851

V Pertes par frottement :

Il s'agit de la perte de tension qui se produit tout le long du câble par frottement dans la gaine et qui fait que pour obtenir une tension donnée dans un câble, au milieu d'une poutre il faut réaliser à l'ancrage une tension de valeur supérieure.

formule simplifiée de perte de tension à cause des frottements :

$$\Delta \sigma_a = 0,4 (\alpha + 0,75 l) \cdot \frac{\sigma_{ai}}{100}$$

numéro des câbles.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	unité
$\frac{1}{2}$ longueur du câble l	9,51	11,01	12,51	14,01	15,51	17,01	20,40	20,33	20,28	20,24	20,22	20,20	m
angle de relevage α	24,15	24,15	24,15	24,15	24,15	24,15	22,95	19,44	15,77	11,96	8,04	4,04	degré
longueur de relevage l_c	6,01	6,25	6,25	6,25	6,48	6,74	8,71	8,64	8,59	8,55	8,53	8,51	m.
contrainte en service au milieu dans le fil σ_a	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	kg/mm ²
chute par fluage	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	kg/mm ²
chute par retrait.	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	kg/mm ²
chute par relaxation.	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	kg/mm ²
contrainte initiale au milieu.	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	kg/mm ²
$l^2 + \alpha l_c$	235,34	272,16	307,44	347,22	397,29	451,87	>350	>350	>350	>350	>350	>350	
perte due au blocage du cône $\frac{350 - (l^2 + \alpha l_c)}{2,5 l}$	4,82	2,83	1,36	0,08	0	0	0	0	0	0	0	0	kg/mm ²
contrainte initiale au milieu avant blocage du cône σ_{ai}	119,82	117,83	116,36	115,08	115	115	115	115	115	115	115	115	kg/mm ²
perte par frottement $\Delta \sigma_a = 0,4 (\alpha + 0,75 l) \frac{\sigma_{ai}}{100}$	14,99	15,27	15,61	15,95	16,46	16,98	17,60	15,96	14,25	12,48	10,67	8,83	kg/mm ²
contrainte à l'ancrage avant blocage du cône σ_{ai}	134,81	133,10	131,97	131,03	131,46	131,98	132,60	130,96	129,25	127,48	125,67	123,83	kg/mm ²

Chapitre VII

CALCUL DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

- A. Contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant
- B. Contraintes de cisaillement dues à la Torsion.
- C. Contraintes de cisaillement résultantes à l'effort tranchant et au couple de torsion.

Calcul des contraintes de Cisaillement

A. Contraintes de cisaillement dues à l'effet tranchant

1. effet tranchant réduit T_R

considérons une section (S) (1-1) où se produit un effet tranchant T.

Soit P_i la force de précontrainte exercée par un câble k^{e} i la force P_i , dont l'inclinaison est α_i , se décompose suivant :

- N_i composante horizontale $N_i = P_i \cos \alpha_i$

- T_{P_i} composante verticale $T_{P_i} = P_i \sin \alpha_i$

ou $P_i = \text{constante} = P$ quelque soit le câble d'où :

$$N_i = P \cos \alpha_i$$

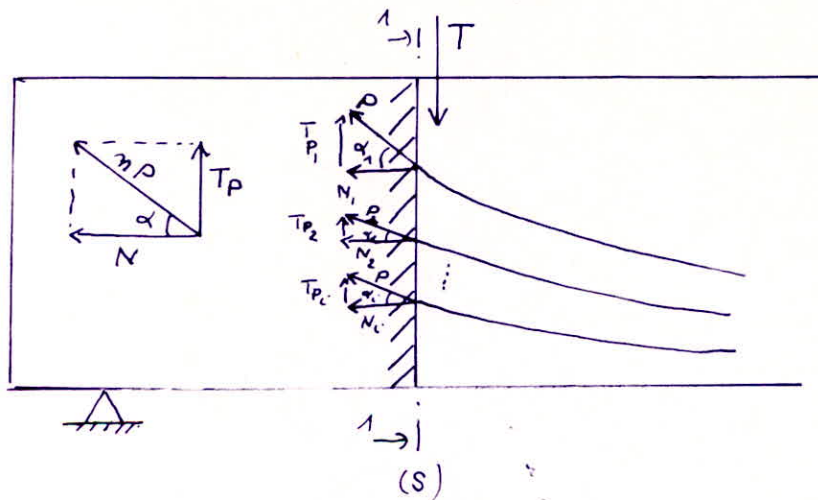
$$T_{P_i} = P \sin \alpha_i$$

Les résultantes, des composantes verticales T_{P_i} , et des composantes horizontales N_i sont :

$$T_P = P \sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i$$

$$N = P \sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i$$

ou (n) câbles dans la section (S)



$T_R =$ effet tranchant réduit dans (S)

dans la section (S), l'effet tranchant se trouve donc réduit et a pour valeur :

$$T_R = T - T_P = T - \sum_{i=1}^{n} P \sin \alpha_i$$

où $T_p = P \sum s_{uidi}$ = effort tranchant dû à la précontrainte

Les sections à vérifier au cisaillements sont :

- section d'about
- section demi-gusset
- section gusset
- section $\frac{\lambda}{4}$
- section $\frac{\lambda}{2}$

a) calcul de l'effort tranchant dû à la précontrainte

• section d'about :

$$\sum s_{uidi} = 2,8238$$

$$\Rightarrow T_p = P \sum s_{uidi}$$

$$= 50 \times 2,8238$$

$$T_p = 141,19 \text{ t}$$

• section demi-gusset: $\theta = 2,86^\circ$

Cable n° i	d'	a m-1	x m	$\alpha = 24,15^\circ$ ou $\alpha = \arctan 2 \alpha$ °	s_{uidi}	w_{uidi}	$y = ax^2$ ou $y = x \tan 24,15^\circ$ en cm	$\left\{ \begin{array}{l} d_i = 110 + y \\ y = x \tan 24,15^\circ \\ d_i = y + d' \\ y = ax^2 \end{array} \right.$
6	6,15	0,0484	0,77	24,15	0,4081	0,9125	34,52	144,52
7-7'	11,45	0,0385	4	17,12	0,2944 x 2	0,9557 x 2	61,66	73,71
8-8'	"	0,0321	"	14,40	0,2487 x 2	0,9686 x 2	51,36	62,81
9-9'	"	0,0257	"	11,62	0,2014 x 2	0,9795 x 2	41,12	52,57
10-10'	6,15	0,0193	"	8,78	0,1526 x 2	0,9883 x 2	30,88	37,03
11-11'	"	0,0128	"	5,85	0,1019 x 2	0,9948 x 2	20,48	26,63
12-12'	"	0,0064	"	2,93	0,0511 x 2	0,9987 x 2	10,24	16,39

$$\sum s_{uidi} = 2,5093$$

$$\sum w_{uidi} = 12,6837$$

$$\sum d_i = 681,60$$

$$T_p = P \sum s_{uidi} = 50 \times 2,5093$$



$$T_p = 125,47 \text{ t}$$

• section gousset

cable $h^2 i$		a	x	$\alpha = 24,15^\circ$ ou $\alpha = \arctg 2ax$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$y = a \sin^2 \alpha$ ou $y = x \operatorname{ctg} 24,15$ en cm	$d_i = 110 + y$ avec $y = x \operatorname{ctg} 24,15$ $d_i = d' + y$ avec $y = ax$
	d'	m ⁻¹	m					
4	-	-		24,15	0,4091	0,9125	34,52	144,52
5	0,051	3,67		20,52	0,3506	0,9365	68,69	80,14
6	0,0484	2,41		13,1	0,2272	0,9739	28,11	34,26
7-7'	0,0385	1		4,50	0,0768x2	0,9970x2	3,85	15,30 x2
8-8'	0,0321	//		3,67	0,0641x2	0,9979x2	3,21	14,66 x2
9-9'	0,0257	//		2,94	0,0513x2	0,9987x2	2,57	14,02 x2
10-10'	0,0193	//		2,21	0,0386x2	0,9993x2	1,93	8,08 x2
11-11'	0,0128	//		1,47	0,0257x2	0,9997x2	1,28	7,43 x2
12-12'	0,064	//		0,73	0,0127x2	0,9999x2	0,64	6,79 x2

$$\Sigma \sin \alpha_i = 1,5253 \quad \Sigma \cos \alpha_i = 14,808 \quad \Sigma d_i = 397,48 \text{ cm}$$

$$T_p = 50 \Sigma \sin \alpha_i = 50 \times 1,5253 \Rightarrow T_p = 76,27 \text{ t}$$

• section $\frac{\lambda}{4}$:

$$\Sigma \sin \alpha_i = 0,8921 \Rightarrow T_p = 50 \times 0,8921$$

$$T_p = 44,61 \text{ t}$$

• section $\frac{\lambda}{2}$

$$\Sigma \sin \alpha_i = 0 \Rightarrow T_p = 0$$

d'où le tableau nous donnant l'effort tranchant T_p dû à la précontrainte :

Sections θ	$\theta = 0$	$\theta = 2,86$	$\theta = 5,73$	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\lambda}{2}$
T_p en t	141,19	125,47	76,27	44,61	0

b) Calcul de l'effort tranchant réduit T_R

La valeur de l'effort tranchant réduit T_R est donnée par :

- à la mise en tension :

$$T_{Ry_1} = T_{g_1} - T_P$$

- en service à vide :

$$T_{Ry} = T_y - T_P$$

- en service en charge :

$$T_{Ry_s} = T_{y_s} - T_P$$

avec :

T_{g_1} = effort tranchant dans la section (S) à la mise en tension (sous charges permanentes sans les superstructures)

T_y = effort tranchant dans la section (S) en service à vide (sous charges permanentes totales)

T_{y_s} = effort tranchant dans la section (S) en service en charge (sous charges permanentes et surcharges).

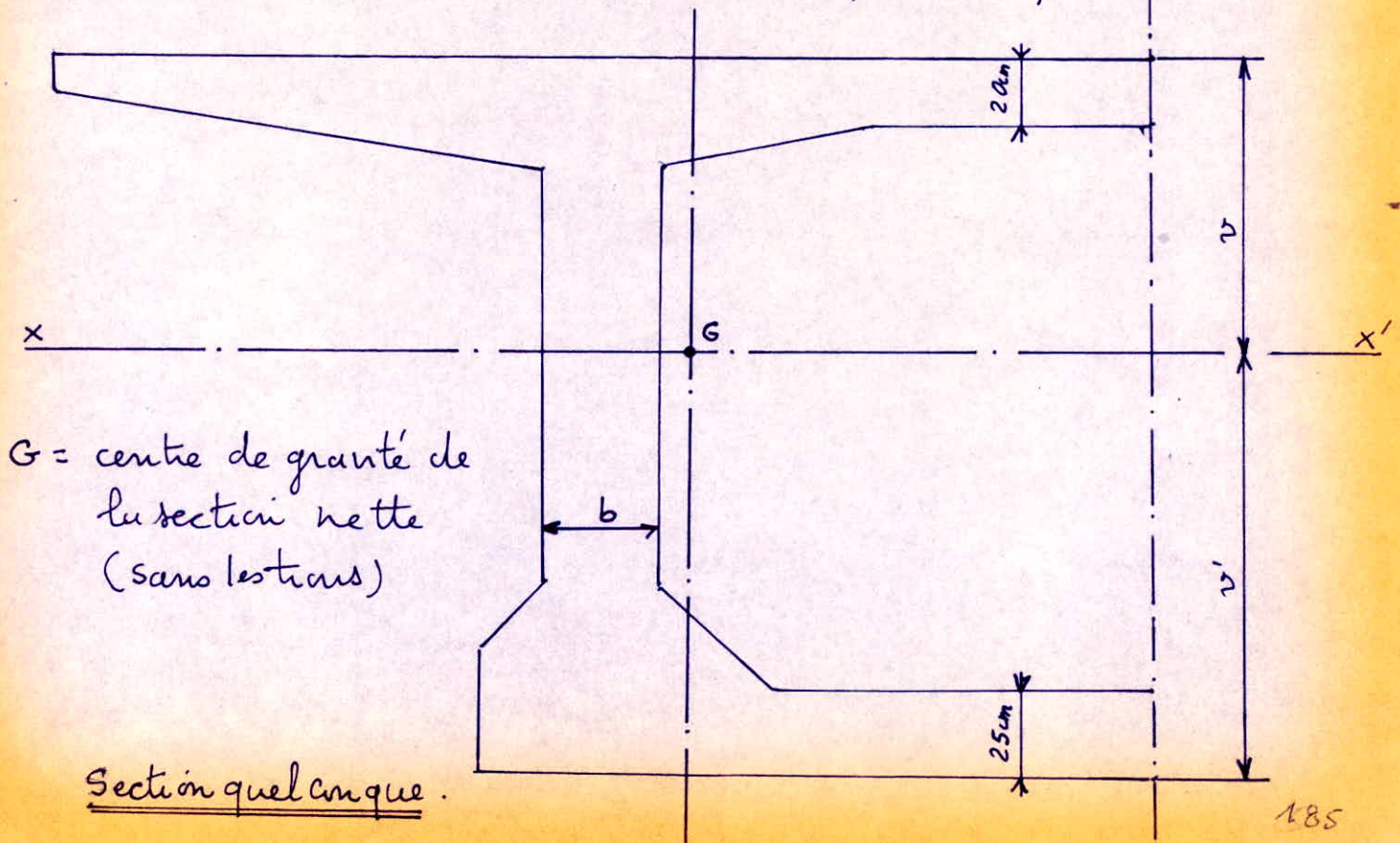
T_P = effort tranchant dû à la précontrainte

Nous vérifierons dans ce qui suit les sections énumérées ci-dessus dans le cas "en service" (à vide et en charge). Une vérification à la mise en tension n'est en général pas nécessaire ; mais elle peut être faite de la même façon.

Tableau donnant l'effort tranchant réduit T_p dans le cas en service (à vide et en charge)

sections	about $\theta = 0$	demi grosset $\theta = 2,86^\circ$	grosset $\theta =$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{2}$
T_g	102,93	86,43	69,90	51,50	0
T_{gs}	137,37	117,43	97,34	75,02	12,75
T_p	141,19	125,47	76,27	44,61	0
$T_{rg \text{ ent service à vide}} = T_g - T_p$	-38,26	-39,04	-6,37	+6,89	0
$T_{rgs \text{ ent service en charge}} = T_{gs} - T_p$	-3,62	-8,04	+21,07	+30,41	+12,75

caractéristiques des sections à étudier pour une poutre :

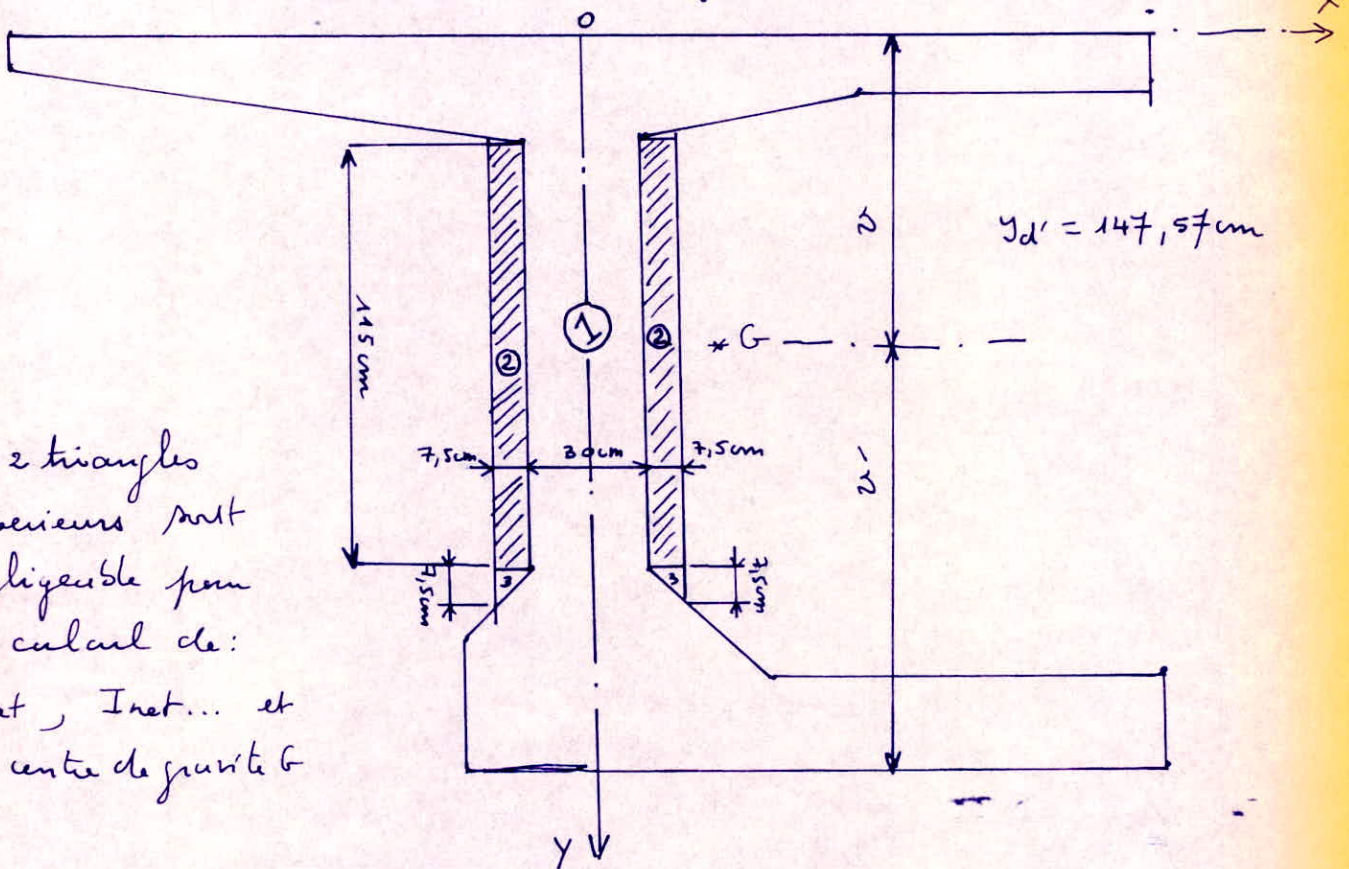


Les caractéristiques des sections, d'about, $\theta = \frac{\lambda}{4}$, $\theta = \frac{\lambda}{2}$, ont été déjà déterminées

a) section demi gâsset

$$\sum d_i = 681,60 = n d' \quad n = 13 \text{ cables} \Rightarrow d' = \frac{681,60}{13} = 52,43 \text{ cm}$$

$$y_{d'} = \text{ordonnée du centre de gravité des tirs} = 200 - 52,43 = 147,57 \text{ cm}$$



Les 2 triangles supérieurs sont négligeables pour le calcul de:

A_{net} , I_{net} ... et le centre de gravité G

i	$A_i \text{ cm}^2$	$Y_i \text{ cm}$	$S_i x \text{ cm}^3$	$I_i \text{ cm}^4$	$a_i \text{ cm}$	$a_i^2 A_i \text{ cm}^4$
①	16425	93,134	152 9732	98010310,68	0,94	14 513,13
② x2	1725	87,50	150 937,50	950 546,87	-4,69	37 943,27
③ x2	56,25	147,5	8296,88	87,84	55,31	17 2079,78
Σ				98960945,44		22 453 6,18

$$I_{brute} = 98960945,44 + 224536,18$$

$$A_{net} = 18017,47 \text{ cm}^2 \quad S_{net} = 1661108,12 \text{ cm}^3$$

$$I_{brute} = 99185481,62 \text{ cm}^4$$

détermination du moment d'inertie net : I_{net}

$$I_{net} = I_{brute} - I_{trous}$$

$$I_{trous} = 13 I_{\phi} + \sum b_i^2 A_{\phi}$$

avec I_{ϕ} : inertie propre d'un trou

$$b_i = d_i - v'$$

$$A_{\phi} : \text{section d'un trou} = \frac{\pi \phi^2}{4}$$

$$v = \frac{\sum S_{i,c}}{\sum A_i} = \frac{S_{net}}{A_{net}} = \frac{166\,1108,12}{180\,17,47}$$

$$\Rightarrow v = 92,19 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow v' = 200 - 92,19 \Rightarrow v' = 107,81 \text{ cm}$$

$$b_i = d_i - 107,81 \text{ cm}$$

$$I_{\phi} = \frac{\pi \phi^4}{64} = \frac{\pi \times 4,3^4}{64} \Rightarrow I_{\phi} = 16,78 \text{ cm}^4$$

$$A_{\phi} = \frac{\pi \phi^2}{4} = \frac{\pi \times (4,3)^2}{4} \Rightarrow A_{\phi} = 14,52 \text{ cm}^2$$

cable	d_i cm	b_i cm	$b_i^2 A_{\phi}$ cm ⁴
6	144,52	36,71	19567,5
7-7'	73,11	-91,42	121352,59 x2
8-8'	62,81	-81,18	95689,59 x2
9-9'	52,57	-70,78	72742,42 x2
10-10'	37,63	-52,24	44307,16 x2
11-11'	26,63	-45	29403 x2
12-12'	16,39	-34,7	17483,39 x2

$$I_{trous} = 13 \times 16,78 + 781523,80$$

$$I_{trous} = 781741,94 \text{ cm}^4$$

d'où

$$I_{net} = 99185481,62 - 781741,94$$

$$I_{net} = 98403739,68 \text{ cm}^4$$

$$\rightarrow \sum b_i^2 A_{\phi} = 781523,80 \text{ cm}^4$$

$$r^2 = \frac{I_{net}}{A_{net}} = 5461,57 \text{ cm}^2$$

Section demi-Gusset

$$I_{net} = 98403739,68 \text{ cm}^4$$

$$A_{net} = 18017,47 \text{ cm}^2$$

$$r^2 = 5461,57 \text{ cm}^2$$

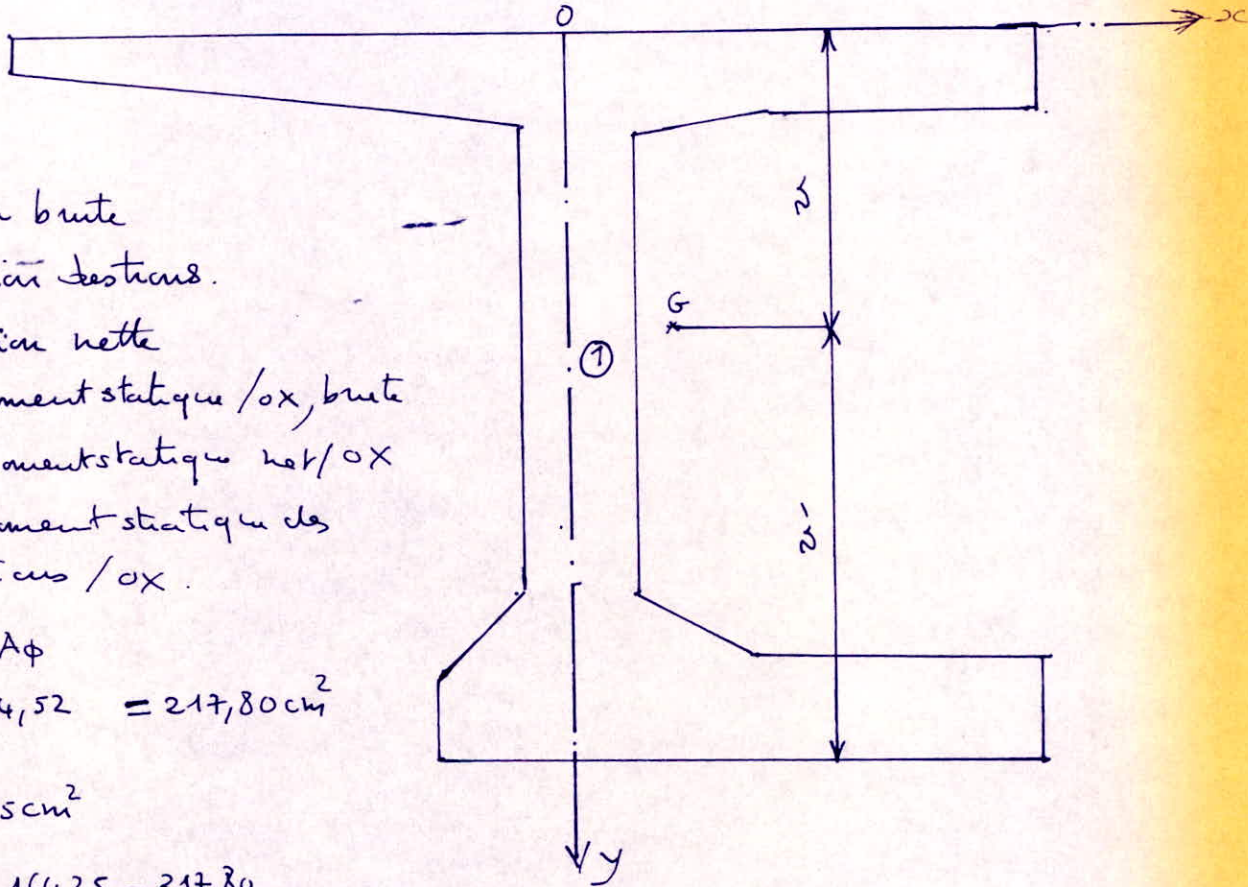
$$\frac{I_{net}}{v} = 1067401,45 \text{ cm}^3$$

$$\frac{I_{net}}{v'} = 912751,50 \text{ cm}^3$$

b) section gusset

$$\sum d_i = 391,48 \text{ cm} = n d' \quad n = 15 \text{ cables} \Rightarrow d' = \frac{391,48}{15} \quad d' = 26,10 \text{ cm}$$

$$y_{d'} = \text{ordonnée du centre de gravité des tirs} = 200 - 26,10 \quad y_{d'} = 173,90 \text{ cm}$$



$A_b \rightarrow$ section brute

$A_t \rightarrow$ section des tirs.

$A_n \rightarrow$ section nette

$S_{bx} \rightarrow$ moment statique / ox, brute

$S_{nx} \rightarrow$ moment statique net / ox

$S_{tx} \rightarrow$ moment statique des tirs / ox.

$$A_t = 15 \times A_\phi$$

$$A_t = 15 \times 14,52 = 217,80 \text{ cm}^2$$

$$A_b = 16425 \text{ cm}^2$$

d'ici $A_n = 16425 - 217,80$

$$A_n = 16207,2 \text{ cm}^2$$

$$S_{tx} = A_t \times y_{d'} = 217,80 \times 173,90 = 37875,42 \quad \rightarrow S_{txc} = 37875,42 \text{ cm}^3$$

$$S_{bx} = 1529732 \text{ cm}^3$$

$$S_{nx} = 1529732 - 37875,42 \quad \rightarrow \quad S_{nxc} = 1491856,58 \text{ cm}^3$$

d'ici $v = \frac{S_{nx}}{A_n} = \frac{1491856,58}{16207,2}$

$$v = 92,05 \text{ cm}$$

$$v' = 200 - v = 200 - 92,05 \quad \rightarrow \quad v' = 107,95 \text{ cm}$$

cable no. i	d_i cm	b_i cm	$b_i^2 A \phi$ cm ⁴
4	144,52	36,57	19418,54
5	80,14	-27,81	11229,71
6	34,26	-73,69	78846,74
7-7'	15,30x	-92,65	124640,01 x 2
8-8'	14,66	-93,29	126367,91 x 2
9-9'	14,02	-93,93	128107,71 x 2
10-10'	8,08	-99,87	144822,73 x 2
11-11'	7,43	-100,52	146714,01 x 2
12-12'	6,79	-101,16	148588,18 x 2

$$A\phi = 14,52 \text{ cm}^2$$

$$I\phi = 16,78 \text{ cm}^4$$

$$b_i = d_i - v' = d_i - 107,95$$

$$I_{brute} = 98010310,68 + (3,13 - 92,05)^2 \times (16425)$$

$$I_{brute} = 98029468,80 \text{ cm}^4$$

$$\sum b_i^2 A \phi = 1747976,09 \text{ cm}^4$$

$$I_{net} = I_{br} - I_{trun} = I_{br} - 15 I\phi - \sum b_i^2 A \phi$$

$$= 98029468,80 - 15 \times 16,78 - 1747976,09$$

$$I_{net} = 96281241,01 \text{ cm}^4$$

$$i^2 = \frac{I_{net}}{A_{net}} = 5940,65 \text{ cm}^2$$

Section gernet

$$I_{net} = 96281241,01 \text{ cm}^4$$

$$A_{net} = 16207,2 \text{ cm}^2$$

$$i^2 = 5940,65 \text{ cm}^2$$

$$\frac{I_{net}}{v} = 1045966,77 \text{ cm}^3$$

$$\frac{I_{net}}{v'} = 891905,89 \text{ cm}^3$$

3. Contraintes de cisaillement

La contrainte maximum de cisaillement due à l'effort tranchant T est donné par:

$$\tau = \frac{TS}{b_0 I}$$

S = moment statique par rapport à l'axe horizontale passant par le centre de gravité, de la partie de la section située au dessus de ce centre de gravité

I = moment d'inertie de section nette

T = effort tranchant considéré

b_0 = épaisseur minimale nette de l'âme (il faut donc déduire le diamètre des cables)

$$\frac{S}{I} = \frac{1}{z}$$

pour un section en T (notre cas)

$$z \approx 0,8 h_t$$

$$z = 0,8 \times 200 \Rightarrow z = 160 \text{ cm}$$

L'expression de τ devient:

$$\tau = \frac{T}{160 \cdot b_0}$$

calcul de b_0 pour les différentes sections à étudier:

• section d'about $\Rightarrow b_0 = 60 - 2 \times 4,3$

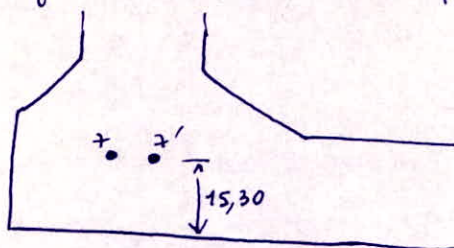
$$b_0 = 51,4 \text{ cm}$$

• section demi-grosset $\Rightarrow b_0 = 45 - 2 \times 4,3$

$$b_0 = 36,4 \text{ cm}$$

• section grosset $\Rightarrow b_0 = 30 - 4,3$

$$b_0 = 25,7 \text{ cm}$$



• section $\frac{\lambda}{4}$ $b_0 = 30 - 4,3$

$$b_0 = 25,7 \text{ cm}$$

• section $\frac{\lambda}{2}$ $b_0 = 30 \text{ cm}$

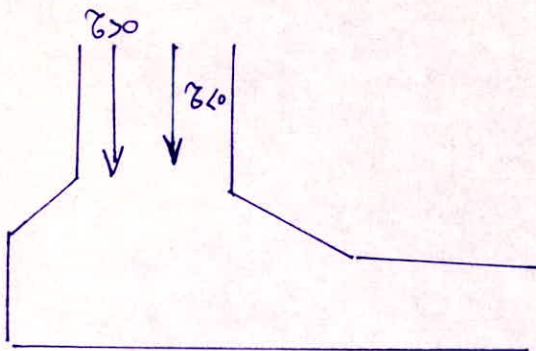
$\tau_{Rg} = \frac{T_{Rg}}{160 \cdot b_0}$ → contrainte de cisaillement maximum dans la section (S) dû à l'effort tranchant réduit en service à vide.

$\tau_{Rgs} = \frac{T_{Rgs}}{160 \cdot b_0}$ → contrainte de cisaillement maximum dans la section (S) dû à l'effort tranchant réduit en service à charge.

d'où le tableau donnant les valeurs de ces contraintes pour les différentes sections à étudier, valable pour les 2 pontes : intérieures et extérieures.

Section θ	about $\theta = 0$	$\theta = 2,86^\circ$	$\theta = 5,73^\circ$	$\theta = \frac{\lambda}{4}$	$\theta = \frac{\lambda}{2}$
b_0 en cm	51,4	36,4	25,70	25,70	30
τ_{Rg} kg/cm ²	-4,65	-6,70	-1,55	+1,68	0
τ_{Rgs} kg/cm ²	-0,44	-1,38	+5,12	+7,40	+2,66

Remarque: Convention de signe pour τ



$\downarrow \tau \Rightarrow \tau < 0 \Rightarrow -$
 $\uparrow \Rightarrow \tau > 0 \Rightarrow +$

B Contraintes de cisaillement dues au couple de torsion C

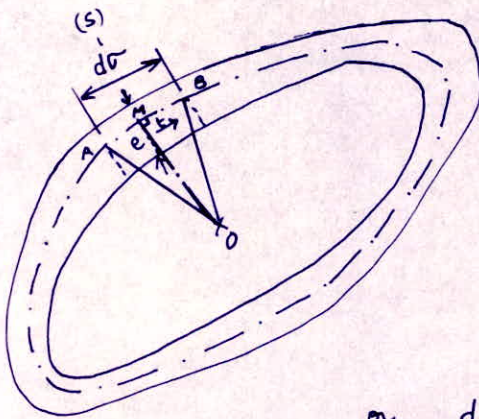
1- Relation entre le couple de torsion C et les contraintes de cisaillement pour une section tubulaire.

a)

Pour les poutres très longues à section tubulaire, les contraintes normales dues au couple de torsion C sont pratiquement nulles ; c'est à dire on a une torsion de St-Venant.

Avec cette hypothèse on aboutit à : $C = G K \frac{d\theta}{dx}$
 Le couple de torsion C , ne crée que des contraintes de cisaillement dans une section donnée.

b)



t : contrainte de cisaillement moyenne en (S)

e : épaisseur de la paroi en (S)

O: centre de torsion

dC = couple élémentaire de torsion dû aux contraintes de cisaillement du triangle dS

on a: — — — ligne moyenne.

$$dC = t e dS \times OM$$

$$\text{or } dS = \text{surface du triangle } OAB \approx \frac{OM d\sigma}{2}$$

$$\text{d'où } dC = 2 t e dS \Rightarrow C = \int_C 2 t e dS.$$

$$C = 2 \oint t e ds$$

$$\phi = t.e$$

$\phi = t.e$ flux de contraintes de cisaillement

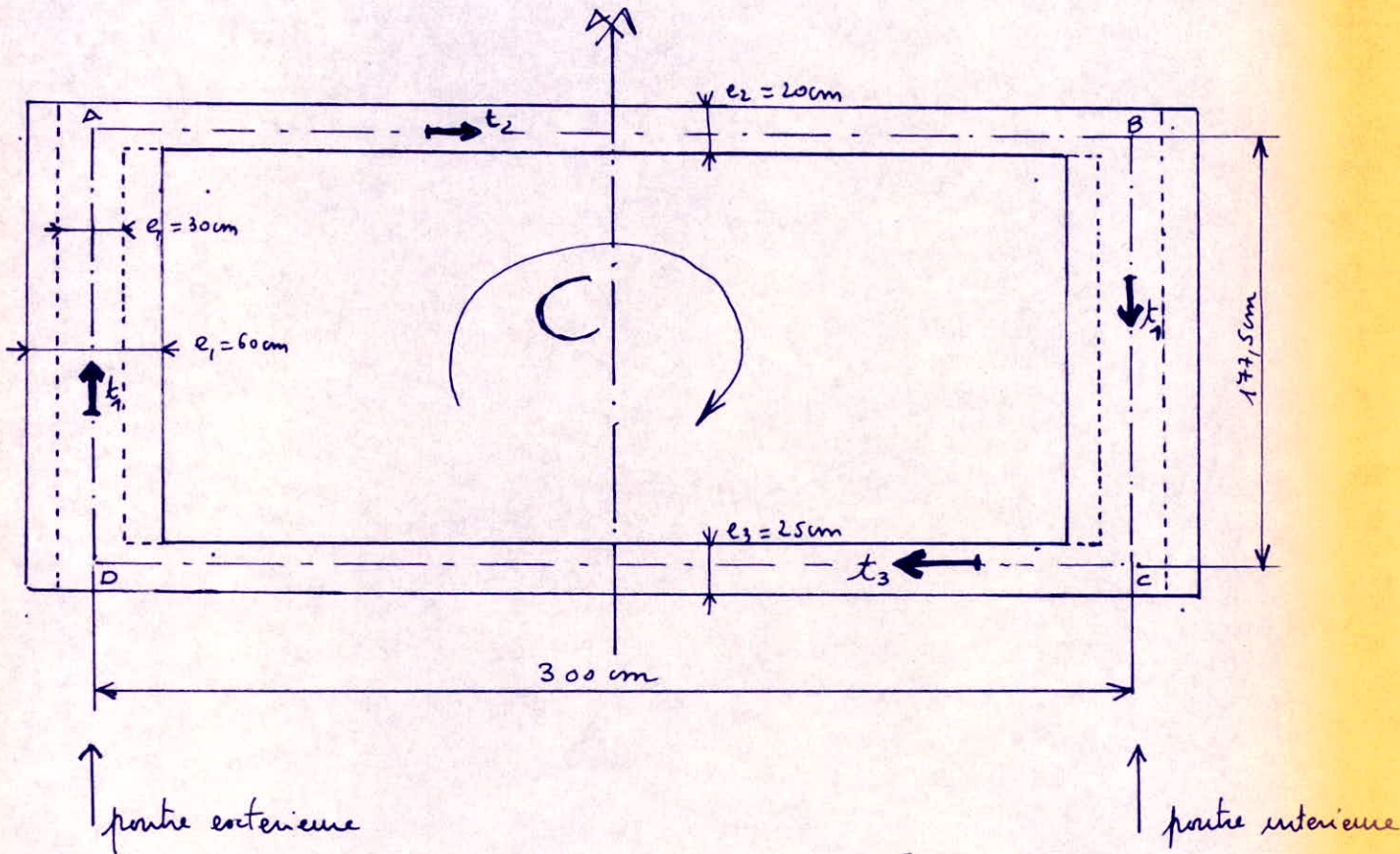
on démontre :

Le flux de contraintes de cisaillement pour une section tubulaire est conservatif.

$\phi = t.e = \text{constante}$
sur tout le contour

Au moyen de ces 2 relations importantes, on peut trouver la répartition des contraintes de cisaillement moyennes sur le ponton

2- Applications - Contrainte de cisaillement moyenne



$$\text{on a } 2 \oint t e ds = C \Rightarrow C = 2 \int_{AB} t_2 e_2 ds + 2 \int_{BC} t_1 e_1 ds + 2 \int_{CD} t_3 e_3 ds + 2 \int_{DA} t_1 e_1 ds$$

$$\text{or } BC = DA \Rightarrow 2 \int_{BC} t_1 e_1 ds = 2 \int_{DA} t_1 e_1 ds$$

d'où

$$C = 2 \int_{AB} t_2 e_2 ds + 4 \int_{BC} t_1 e_1 ds + 2 \int_{CD} t_3 e_3 ds$$

$$\text{or } t_2 e_2 = t_1 e_1 = t_3 e_3 = \phi \quad (\text{on a conservation de fluxe de contraintes de cisaillement})$$

$$d'o\grave{u} \quad C = 2 \left[\int_{AB} \phi ds + 2 \int_{BC} \phi ds + \int_{CD} \phi ds \right]$$

$$= 2 \phi \left[\int_{AB} ds + 2 \int_{BC} ds + \int_{CD} ds \right] = 2 \phi S$$

$$C = 2 \phi S$$

S: aine sectorielle

$$S = 300 \times 177,5 \text{ cm}^2$$

$$S = 53250 \text{ cm}^2$$

$$d'o\grave{u} \quad \tau_1 = \frac{C}{2 S e_1} \quad \tau_2 = \frac{C}{2 S e_2} \quad \tau_3 = \frac{C}{2 S e_3}$$

d'o\grave{u} le tableau donnant les Contraintes de cisaillement τ_1, τ_2, τ_3 pour les différentes sections \u00e0 \u00e9tudier

Sections		$\theta = 0$	$\theta = 2,86^\circ$	$\theta = 5,73^\circ$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
Dimensions en cm	e_1	51,40	36,40	25,70	25,70	30
	e_2	20	20	20	20	20
	e_3	25	25	25	25	25
Service \u00e0 vide C_g kg/cm	τ_1	7,60	10,33	13,10	10,46	0
	τ_2	19,52	18,81	16,83	13,43	0
	τ_3	15,62	15,05	13,46	10,75	0
Service en charge C_{gs} kg/cm	τ_1	10,58	14,44	18,16	14,99	0,85
	τ_2	27,22	26,28	23,72	19,27	1,28
	τ_3	21,75	21,02	18,97	15,41	1,03

Remarque:

Avec la convention de signe des contraintes de cisaillement dans l'ame de parties, adopt\u00e9e pr\u00e9c\u00e9demment, on aura :

partie ext\u00e9rieure $\rightarrow \tau_1 > 0 \rightarrow +$
 partie int\u00e9rieure $\rightarrow \tau_1 < 0 \rightarrow -$

c. Contraintes de cisaillement résultantes dues à l'effort tranchant et au couple de torsion dans les pontes (ames)

soit τ_g^T = contrainte de cisaillement résultante dans la poutre, en service à vide (sous g)

τ_{gs}^T = contrainte de cisaillement résultante dans la poutre, en service à charge (sous $g+1,25$)

on a :

1) poutre extérieure :

$$\begin{cases} \tau_g^T = \tau_{Rg} + t_1 \\ \tau_{gs}^T = \tau_{Rgs} + t_1 \end{cases}$$

2) poutre intérieure

$$\begin{cases} \tau_g^T = \tau_{Rg} - t_1 \\ \tau_{gs}^T = \tau_{Rgs} - t_1 \end{cases}$$

avec $t_1 > 0$!!

d'où le tableau, donnant les valeurs de τ_g^T , et de τ_{gs}^T pour les différentes sections à étudier.

Sections		$\theta=0$	$\theta=2,86$	$\theta=5,73$	$\theta=\frac{\lambda}{4}$	$\theta=\frac{\lambda}{2}$
poutre extérieure k_2/k_1^2	τ_g^T	+2,95	+3,63	+11,53	+12,14	0
	τ_{gs}^T	+10,14	+13,06	+23,28	+22,39	+3,51
poutre intérieure k_2/k_1	τ_g^T	-12,25	-17,03	-14,63	-8,78	0
	τ_{gs}^T	-11,02	-15,82	-13,34	-7,59	+1,85
Contraintes max avec leurs signes k_2/k_1		-12,25	-17,03	+23,28	+22,39	+3,51

Chapitre VIII

VERIFICATION DU CISAILLEMENT

ET

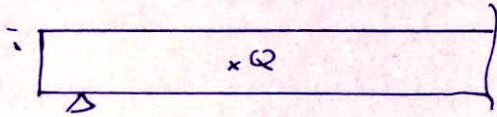
CALCUL DES ARMATURES TRANSVERSALES

DANS LES AMES DES POUTRES

- 1- Rappel de quelques notions concernant le cercle de Mohr
- 2- Vérification des contraintes de cisaillement dans les ames.
- 3- Calcul des armatures transversales dans les ames

Verification du cisaillement et Calcul des Armatures transversales dans les ames

1- Rappel de quelques notions concernant le cercle de Mohr



En chaque point Q d'une section droite d'une poutre est le siège d'un état de contraintes planes.

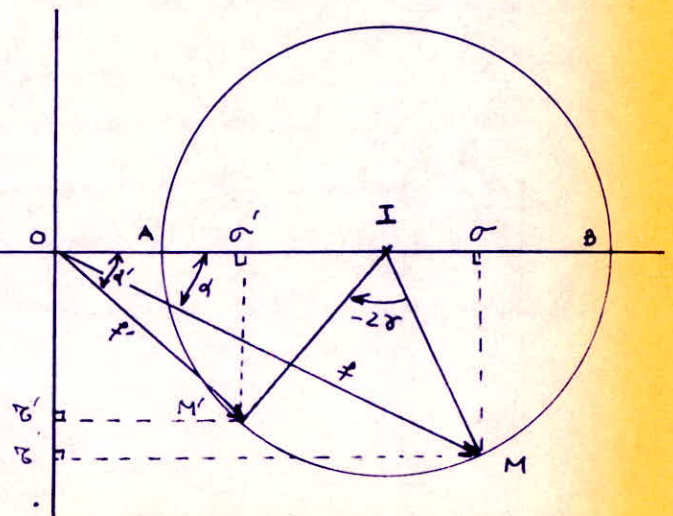
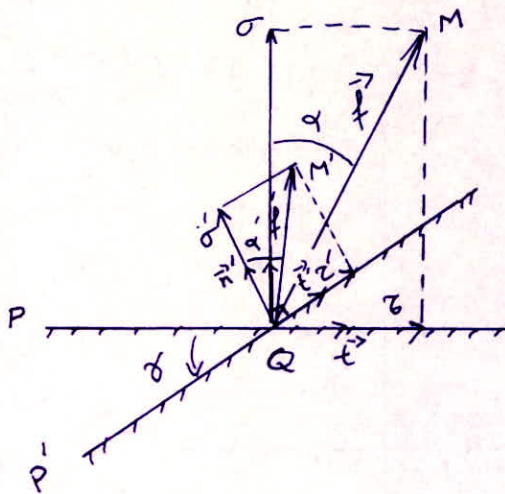
Soit une facette P perpendiculaire au plan de figure et dont la trace P passe par Q .

L'état de contrainte en Q pour cette facette P peut toujours se décomposer en :

- 1) une contrainte normale σ suivant la normale \vec{n} à P

- 2) une contrainte tangentielle τ suivant la trace P (portée par \vec{t})

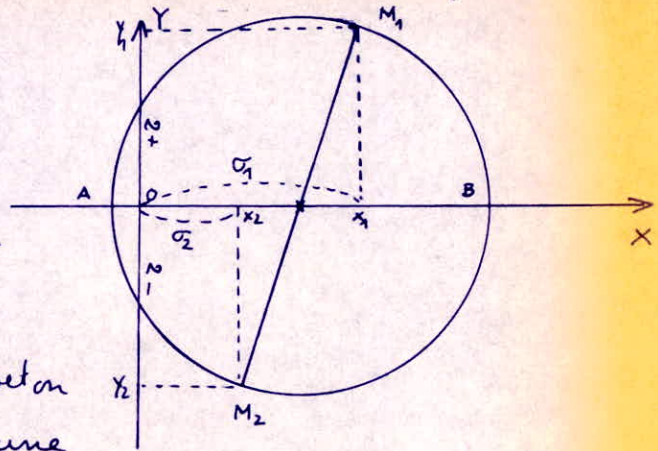
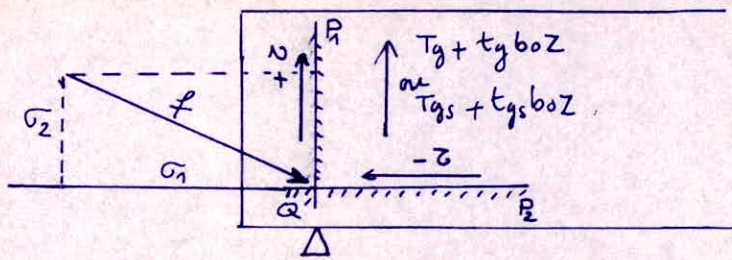
C'est à dire l'état de contrainte pour la position P de la facette est donné : $\vec{f} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \rightarrow M \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}$



pour une autre position de la facette en Q , P' par exemple, l'état de contrainte est donné par :

$$\vec{f}' = \sigma' \vec{n}' + \tau' \vec{t}' \rightarrow M' \begin{pmatrix} \sigma' \\ \tau' \end{pmatrix}$$

Application des propriétés du Cercle de Mohr au béton précontraint



considérons un point Q d'une pièce en béton précontraint ; soumise en ce point à une contrainte de cisaillement τ (due à l'effort tranchant T_g ou T_g et au couple de torsion suivant le cas) et à une contrainte de précontrainte f se décomposant en deux contraintes unitaires normales σ_1 sur P_1 et σ_2 sur P_2 .

Les contraintes de cisaillement $(+\tau, -\tau)$ sont dirigées suivant le sens réel des efforts tangents ($T_g + t_{gs} \cdot b_0 \cdot z$ ou $T_{gs} + t_{gs} \cdot b_0 \cdot z$) qu'exercent la partie gauche sur P_1 et la partie supérieure sur P_2 ; or, dans la rotation P_1 vers P_2 la flèche $(+\tau)$ sur P_1 se trouverait orientée sur P_2 dans le sens inverse à la réalité sur P_2 ; voilà pourquoi il faut alors mettre $(-\tau)$ pour la contrainte de cisaillement telle qu'elle est orientée sur P_2 .

nota: t_g : contrainte de cisaillement due au couple de torsion sous charge permanente dans l'âme.

t_{gs} : contrainte de cisaillement due au couple de torsion sous charge permanente et au charge dans l'âme.

Les plans P_1, P_2 étant perpendiculaires, les points représentatifs correspondant $M_1 (\sigma_1, +\tau)$ $M_2 (\sigma_2, -\tau)$ sont diamétralement opposés sur le Cercle de Mohr.

on a sur le cercle : $OA =$ contrainte principale de traction $= \sigma_1$
 $OB =$ contrainte principale de compression $= \sigma_3$

L'abscisse du point I est: $OI = \frac{OX_1 + OX_2}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

Rayon du cercle:

$$R^2 = \overline{IM_1}^2 = \overline{IX_1}^2 + \overline{XM_1}^2$$

$$\text{or } IX_1 = \frac{OX_1 - OX_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{et } XM_1 = +\tau$$

$$\text{d'où } R^2 = \tau^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

Pour qu'il n'y ait aucune traction au point Q, il faudrait que A soit à droite de O; c'est à dire on doit avoir:

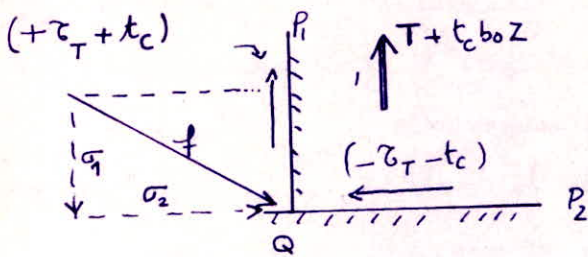
$$OI \geq R \Rightarrow OI^2 \geq R^2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 \geq \tau^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_1 \sigma_2 \geq \tau^2$$

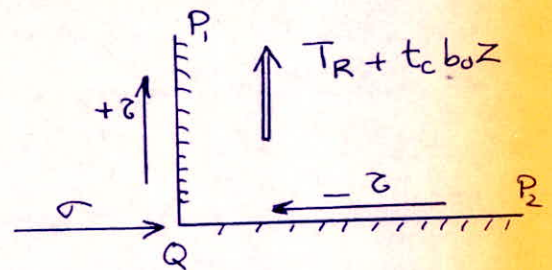
Conclusion:

Il n'y a aucune contrainte de traction en un point (\forall la direction) si s'exerce une contrainte de cisaillement τ lorsque seront exercées en ce point deux contraintes orthogonales σ_1 et σ_2 telles que: $\sigma_1 \sigma_2 \geq \tau^2$

Calcul des contraintes principales σ_1 et σ_2 et Position des plans principaux



\equiv



$$M_1 \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ +\tau \end{pmatrix} \quad M_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau \end{pmatrix}$$

T_R : effort tranchant réduit

$$T_R = T - \sum P \sin \alpha_i$$

$$\tau = \frac{T_R}{b_0 z} + \frac{C}{2se}$$

τ_T : contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant T total non réduit

t_c contrainte de cisaillement due à l'effort C .

$$\tau_T = \frac{T}{b_0 z} \quad t_c = \frac{C}{2se}$$

le plan P_B se déduit de P_A par une rotation suivant un angle δ ; donc on passe sur le cercle de Mohr de M_1 à B par une rotation de -2δ .

les plans principaux P_A et P_B sont perpendiculaires.

À point Q la contrainte principale de traction (n_1) qui s'exerce sur le plan P_A est contenue dans le plan P_B ; tandis que la contrainte principale de compression (n_3) qui s'exerce sur le plan P_B est contenue dans le plan P_A .

La fissuration qui a tendance à se produire dans une direction perpendiculaire à la contrainte principale de traction se produit en principe suivant le plan P_A et suivant une inclinaison δ .

Sur le cercle de Mohr, l'angle φ, M_1, M_2 est égal à 2δ et l'on a:

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2\tau}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2\tau}{\sigma}}$$

2 Vérification des contraintes de cisaillement dans les amses :

on doit vérifier $\tau \leq \bar{\tau}$ pour les sections dangereuses,
avec τ : contrainte de cisaillement résultante dans l'âme
(due à l'effort tranchant et à la torsion)

$$\tau = \tau_{\text{Tranchant}} + \tau_{\text{torsion}}$$

et la valeur de la contrainte $\bar{\tau}$ de cisaillement admissible est
donnée par : $\bar{\tau}^2 = \frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} (\bar{\sigma} - \sigma_G) (\bar{\sigma}' + \sigma_G)$

avec :

σ_G = contrainte de compression au niveau du centre
de gravité -

$\bar{\sigma}$ = contrainte admissible de compression du béton
précontraint

$\bar{\sigma}'$ = contrainte admissible de traction du béton
précontraint

$$\bar{\sigma} = 0,42 \sigma_{28} = 0,42 \times 400 \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = 168 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}' = 0,42 \sigma'_{28} = 0,42 \left(7 + \frac{6}{100} 400 \right) \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma}' = 13,02 \text{ kg/cm}^2$$

• Calcul de σ_G :

- sous la précontrainte :

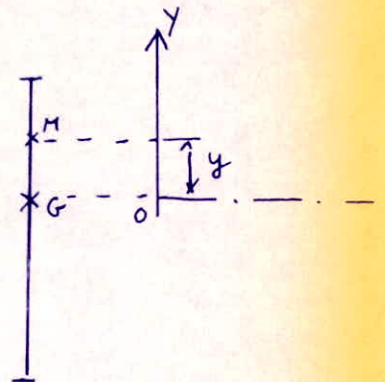
$$\text{on a } \sigma_p(M) = \frac{N}{A_{\text{net}}} \left(1 + \frac{e y}{r^2} \right)$$

- sous M_G

$$\sigma_{p(M_G)} = \frac{M_G}{I} y$$

- sous M_{G+S}

$$\sigma_{M_{G+S}}(M) = \frac{M_{G+S}}{I} y$$



donc au niveau du centre de gravité G : $y = 0$

$$\sigma_p(G) = \frac{N}{A_{\text{net}}} ; \quad \sigma_{M_G}(G) = 0 ; \quad \sigma_{M_{G+S}}(G) = 0$$

en service en charge: $\sigma_G = \frac{N}{A_{net}} + 0 + = \frac{N}{A_{net}}$
 en service à vide: $\sigma_G = \frac{N}{A_{net}} + 0 = \frac{N}{A_{net}}$

Conclusion: Les diagrammes des contraintes normales, en service en charge et en service à vide passent par un même point G. $\sigma_G = \frac{N}{A_{net}}$

$\sigma_G = \frac{N}{A_{net}}$ & le système de charge: en service en charge ou en service à vide

a) section d'about $\sigma = -12,25 \text{ kg/cm}^2$ $A_{net} = 19863,52 \text{ cm}^2$
 $\sum \omega s d_i = 11,5844 \implies N = 50 \times 11,5844 \implies N = 579,22 \text{ t}$
 $\sigma_G = \frac{N}{A_{net}} = \frac{579220}{19863,52} \implies \sigma_G = 29,16 \text{ kg/cm}^2$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{13,02}{168} (168 - 29,16) (13,02 + 29,16) \implies \bar{\sigma} = 21,30 \text{ kg/cm}^2$$

$\sigma = 12,25 < \bar{\sigma} = 21,30 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifiée}$

b) section demi-grueset $\sigma = -17,03 \text{ kg/cm}^2$ $A_{net} = 18017,47 \text{ cm}^2$
 $\sum \omega s d_i = 12,6837 \implies N = 50 \times 12,6837 \implies N = 634,18 \text{ t}$
 $\sigma_G = \frac{N}{A_{net}} = \frac{634180}{18017,47} \implies \sigma_G = 35,20 \text{ kg/cm}^2$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{13,02}{168} (168 - 35,20) (13,02 + 35,20) \implies \bar{\sigma} = 22,28 \text{ kg/cm}^2$$

$\sigma = 17,03 < \bar{\sigma} = 22,28 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifié}$

c) section grueset $\sigma = 23,28 \text{ kg/cm}^2$ $A_{net} = 16207,2 \text{ cm}^2$
 $\sum \omega s d_i = 14,808 \implies N = 50 \times 14,808 \implies N = 740,40 \text{ t}$
 $\sigma_G = \frac{N}{A_{net}} = \frac{740400}{16207,2} \implies \sigma_G = 45,70 \text{ kg/cm}^2$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{13,02}{168} (168 - 45,70) (13,02 + 45,70) \implies \bar{\sigma} = 23,60 \text{ kg/cm}^2$$

$\sigma = 23,28 < 23,60 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifié}$

d) section $\frac{\lambda}{4}$

$$\Sigma \cos \alpha_i =$$

$$\sigma_G = \frac{842370}{16178,13}$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{13,02}{168} (168 - 52,07) (13,02 + 52,07) \Rightarrow \bar{\sigma} = 24,18 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = 22,39 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Rightarrow N = 50x \dots$$

$$\dots \rightarrow \sigma_G = 52,07 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_{net} = 16178,13 \text{ cm}^2$$

$$\rightarrow N = 842,37 \text{ t}$$

$$\tau = 22,39 < \bar{\sigma} = 24,18 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifiée}$$

e) section $\frac{\lambda}{2}$

$$\tau = 3,47 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_{net} = 16163,64 \text{ cm}^2 \quad N = 900 \text{ t}$$

$$\sigma_G = \frac{900 \cdot 000}{16163,64} \dots \rightarrow \sigma_G = 68,37 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{13,02}{168} (168 - 68,37) (13,02 + 68,37) \Rightarrow \bar{\sigma} = 25,07 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = 3,47 < \bar{\sigma} = 25,07 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifiée}$$

Conclusion: La contrainte de cisaillement due à T et C est maximale en la section gusset; et pour que la condition $\tau < \bar{\sigma}$ soit vérifiée il nous faut un béton dont la résistance à la compression à 28 jours est $\sigma_{28} = 400 \text{ kg/cm}^2$

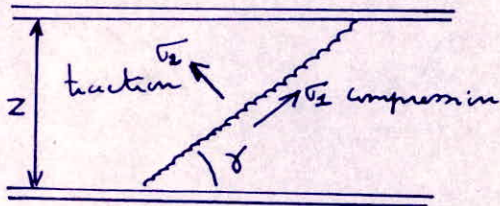
tableau récapitulatif donnant les valeurs de τ et $\bar{\sigma}$ pour les différentes sections étudiées

section	$\theta = 0$	$\theta = 2,86^\circ$	$\theta = 5,73^\circ$	$\theta = \lambda/4$	$\theta = \lambda/2$
$\tau \text{ kg/cm}^2$	12,25	17,03	23,28	22,39	3,47
$\bar{\sigma} \text{ kg/cm}^2$	21,30	22,28	23,60	24,18	25,07

3 Calcul des armatures transversales dans les ailes

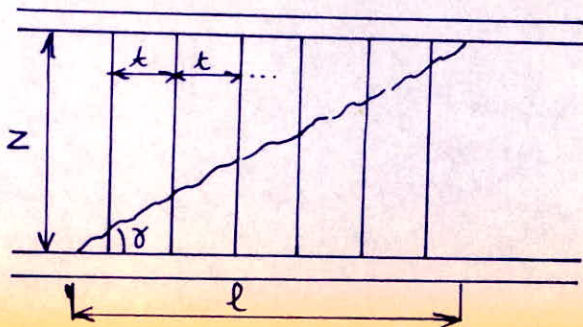
On calculera, dans ce qui suit, les armatures transversales dans les ailes nécessaires pour reprendre l'effort tranchant réduit T_R et l'effort tangent $t_1 b_0 z$ engendré par le couple de torsion; lorsqu'une éventuelle fissure se produit.

On admet qu'une éventuelle fissure peut se produire suivant une direction perpendiculaire à la direction de la contrainte principale de traction, ou ce qui revient au même, parallèle à la direction de la contrainte principale de compression qui fait un angle δ avec la fibre moyenne de la poutre (horizontale en générale, ce qui est aussi notre cas).



nous avons vu que $t_{y2} \gamma = \frac{2\tau}{\sigma}$
(sur le cercle de Mohr)

Soit t l'espacement des armatures (caches et étriers) de section A_t (pour une nappe). C'est sur la longueur l que l'on doit trouver un nombre (n) de cache de section A_t à l'espacement (t) capable de résister à la valeur maximale de l'effort tranchant réduit plus l'effort tangent $t_1 b_0 z$ engendré par la torsion.



on a: $l = \frac{z}{t\gamma}$

$$\begin{matrix} \uparrow T_R \\ + \\ \uparrow t_1 b_0 z \end{matrix}$$

t_1 : contrainte de cisaillement engendré par la torsion dans l'aile.

le nombre de cadre (n) nécessaire est: $m = \frac{l}{t}$ avec $l = \frac{z}{t \gamma}$
 on doit avoir:

$$\boxed{\frac{T_R + t_1 b_0 z}{n A_t} \leq \bar{\sigma}'_a} \quad (1)$$

avec $\bar{\sigma}'_a = p'_a \sigma_{en}$ contrainte admissible de traction des armatures transversales

$p'_a = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\tau}{\bar{\tau}}\right)^2$ si la section ne comporte pas de reprise de bétonnage. (note cas)

ou $p'_a = \frac{2}{3}$ dans le cas contraire.

τ : contrainte résultante de cisaillement du béton (pour notre cas τ est engendré par la torsion et l'effort tranchant)

$\bar{\tau}$: contrainte maximale de cisaillement admissible.

$$(1) \Rightarrow \frac{T_R + t_1 b_0 z}{\frac{l}{t} \cdot A_t} \leq \bar{\sigma}'_a \Rightarrow \frac{T_R + t_1 b_0 z}{\frac{z}{t \gamma} A_t} \leq \bar{\sigma}'_a$$

$$\text{ou } T_R = b_0 z \tau_{TR} \quad \text{d'où} \quad \frac{b_0 z \tau_{TR} + t_1 b_0 z}{\frac{z}{t \gamma} A_t} \leq \bar{\sigma}'_a$$

$$\Rightarrow \frac{b_0 z (\tau_{TR} + t_1)}{z A_t} \cdot t \gamma \leq \bar{\sigma}'_a \quad \text{ou} \quad \boxed{\tau_{TR} + t_1 = \bar{\tau}}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{b_0 \bar{\tau} \cdot t \cdot \gamma}{A_t} \leq \bar{\sigma}'_a \Rightarrow \boxed{t \leq \frac{\bar{\sigma}'_a A_t}{\bar{\tau} b_0 \gamma}} \quad (2)$$

la formule (2) nous donne l'espacement (t) des cadres; toute fois (t) sera limité par la plus petite des valeurs suivantes (d'après l'instruction du 12 aout 1965) :

$$\begin{cases} t = h_t (1,25 - 0,95 \frac{\tau}{\bar{\tau}}) \\ t = b_0 (5 - 2 \frac{\tau}{\bar{\tau}}) \\ t = 4 b_0 \end{cases}$$

L'espacement (t) est limité aussi par le pourcentage minimum d'armatures transversales:

Les armatures transversales seront prises en quantité suffisante pour tenir compte des sollicitations secondaires difficilement accessibles au calcul.

Si le calcul précédent donne pour A_t une section très faible et un espacement (t) assez agrandi, le pourcentage de ces armatures transversales ne devra pas descendre au dessous d'une valeur minimale qui peut être fixée entre 0,1 et 0,2% suivant l'élanement $\frac{h_t}{b_0}$ de la poutre; Ce pourcentage $\omega_{\min t}$ pourra être calculé par la formule:

$$\omega_{\min t} = 0,25 \frac{h_t}{h_t + 3b_0} \%$$

ou bien

$$100 \omega_{\min t} = 0,25 \frac{h_t}{h_t + 3b_0}$$

$$\omega_{\min t} = \frac{A_t}{\bar{t} \cdot b_0} \Rightarrow \bar{t} = \frac{A_t}{\omega_{\min t} b_0}$$

ou bien

$$t = \frac{A_t \times 100}{b_0 \times \frac{0,25 \cdot h_t}{h_t + 3b_0}}$$

Calcul de $\text{tg } \delta$ pour les différentes sections à étudier:

$$\text{tg } 2\delta = \frac{2\tau}{\sigma_c} \Rightarrow 2\delta = \text{arctg } \frac{2\tau}{\sigma_c} \Rightarrow \delta = \frac{1}{2} \text{arctg } \frac{2\tau}{\sigma_c}$$

et d'où

$$\text{tg } \delta = \text{tg} \left(\frac{1}{2} \text{arctg } \frac{2\tau}{\sigma_c} \right)$$

section	$\theta = 0$	$\theta = 2,86^\circ$	$\theta = 5,73$	$\theta = \lambda/4$	$\theta = \lambda/2$
b_0 cm	51,40	36,40	25,70	25,70	30
$\bar{\sigma}$ kg/cm ²	12,25	17,03	23,28	22,39	3,47
$\bar{\sigma}$ kg/cm ²	21,30	22,28	23,60	24,18	25,07
$\bar{\sigma}_G$ kg/cm ²	29,16	35,20	45,70	52,07	68,37
$\tan 2\delta$	0,8402	0,9676	1,0188	0,8600	0,1015
δ °	20,02	22,03	22,77	20,35	2,90
$\tan \delta$	0,3643	0,4046	0,4197	0,3709	0,0506

pour déterminer les armatures transversales, on partage
notre poutre en plusieurs tronçons: (1-2) about - dem-gousset
 $\left\{ \begin{array}{l} (2-3) \text{ dem-gousset - gousset} \\ (3-4) \text{ gousset - } \lambda/4 \end{array} \right.$
 (4-5) $\lambda/4 - \lambda/2$

et dans chaque tronçon on calculera l'espacement
(t) nécessaire.

1°) tronçon 1-2
(about - $\frac{1}{2}$ gousset) (1-2)

a) espacement (t) donné par la contrainte de cisaillement
de la section d'about:

prenons pour les cadres, des armatures ϕ 10 Tor.

$$A_t = 2 \phi 10 = 157 \text{ mm}^2 \quad \bar{\sigma}_{en} = 42 \text{ kg/mm}^2$$

$$\bullet \quad t \leq \frac{\bar{\sigma}'_a A_t}{\bar{\sigma} b_0 \tan \delta}$$

$$f'_a = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{12,25}{21,30} \right)^2 = 0,83 \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma}'_a = 0,83 \times 42 \quad \bar{\sigma}'_a = 34,86 \text{ kg/mm}^2$$

$$t \leq \frac{34,86 \times 157}{12,25 \times 0,3643 \times 51,40}$$

$$t \leq 23,86 \text{ cm}$$

prenons $t = 20 \text{ cm}$

$$\bullet t \leq \begin{cases} h_t (1,25 - 0,95 \frac{t}{8}) = 200 (1,25 - 0,95 \frac{12,25}{21,30}) = 140,73 \text{ cm} \\ b_0 (5 - 2 \frac{t}{8}) = 51,4 (5 - 2 \frac{12,25}{21,30}) = 197,88 \text{ cm} \\ 4b_0 = 4 \times 51,4 = 154,20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$t = 20 \text{ cm} < \begin{cases} 140,73 \text{ cm} \\ 197,88 \text{ cm} \\ 154,20 \text{ cm} \end{cases} \text{ vérifiée !!}$$

$$\bullet t \leq \frac{A_t 100}{b_0 \frac{0,25 h_t}{h_t + 3b_0}} = \frac{1,57 \times 100}{51,4 \frac{0,25 \times 200}{200 + 3 \times 51,4}} = 21,64 \text{ cm}$$

$$t = 20 \text{ cm} < 21,64 \text{ cm} \text{ !! vérifié.}$$

La section about nous impose un espacement $t = 20 \text{ cm}$.

b) espacement (t) imposé par la section (demi-gousset)

$$\bullet t \leq \frac{\bar{\sigma}'_a A_t}{\gamma b_0 t \gamma}$$

$$p'_a = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{17,03}{22,28} \right)^2 \quad p'_a = 0,81 \quad \Rightarrow \bar{\sigma}'_a = 0,81 \times 42 \quad \bar{\sigma}'_a = 34,02 \text{ kg/cm}^2$$

$$t \leq \frac{34,02 \times 157}{17,03 \times 36,4 \times 0,4046} = 21,30 \text{ cm}$$

prenons $t = 20 \text{ cm}$

$$\bullet t \leq \begin{cases} h_t (1,25 - 0,95 \frac{t}{8}) = 200 (1,25 - 0,95 \times \frac{17,03}{22,28}) = 104,77 \text{ cm} \\ b_0 (5 - 2 \frac{t}{8}) = 36,4 (5 - 2 \frac{17,03}{22,28}) = 126,35 \text{ cm} \\ 4b_0 = 4 \times 36,4 = 145,60 \text{ cm} \end{cases}$$

$$t = 20 \text{ cm} < \begin{cases} 104,77 \text{ cm} \\ 126,35 \text{ cm} \\ 145,60 \text{ cm} \end{cases} \text{ vérifié !!}$$

$$\bullet \bullet t \leq \frac{A_t \cdot 100}{b_0 \frac{0,25 h_t}{h_t + 3b_0}} = \frac{1,57 \times 100}{36,4 \frac{0,25 \times 200}{200 + 3 \times 36,4}} = 26,67 \text{ cm}$$

$$t = 20 \text{ cm} < 26,67 \text{ cm} !! \text{ vérifié}$$

La section demi-gousset également nous impose un espacement $t = 20 \text{ cm}$.

donc: pour le tronçon about - (demi gousset) on disposera des étriers de section $A_t = 2 \phi 10$ tor espacés de 20 cm.

2) tronçon (2-34) demi-gousset - gousset - $\lambda/4$

$$A_t = 2 \phi 10 = 157 \text{ mm}^2 = 1,57 \text{ cm}^2$$

a) espacement (t) donné par la section demi-gousset:
on a vu précédemment que $t = 20 \text{ cm}$.

b) espacement (t) donné par la section gousset:

$$\bullet t \leq \frac{A_t \bar{\sigma}'_a}{b_0 \cdot \sigma \cdot \text{tg} \gamma}$$

$$p'_a = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{23,28}{23,60} \right)^2 \quad p'_a = 0,68 \quad \bar{\sigma}'_a = 0,68 \cdot 42 \quad \bar{\sigma}'_a = 28,56 \text{ kg/cm}^2$$

$$t \leq \frac{157 \times 28,56}{25,7 \times 23,28 \times 0,4197} = 17,86 \text{ cm} \quad \text{prenons } t = 15 \text{ cm}$$

$$\bullet t < \begin{cases} h_t \left(1,25 - 0,95 \frac{t}{b} \right) = 200 \left(1,25 - 0,95 \left(\frac{23,28}{23,60} \right) \right) = 62,58 \\ b_0 \left(5 - 2 \frac{t}{b} \right) = 25,7 \left(5 - \frac{2 \times 23,28}{23,60} \right) = 77,80 \\ 4b_0 = 4 \times 25,7 = 102,80 \end{cases}$$

$$t = 15 \text{ cm} < \begin{cases} 62,58 \text{ cm} \\ 77,80 \text{ cm} \\ 102,80 \text{ cm} \end{cases} \quad \text{vérifié !!}$$

$$\bullet t < \frac{A_t \cdot 100}{b_0 \frac{0,25 h t}{h t + 3 b_0}} = \frac{1,57 \times 100}{25,7 \frac{0,25 \times 200}{200 + 3 \times 25,7}} = 33,86 \text{ cm}$$

$$t = 15 \text{ cm} < 33,86 \text{ cm} \quad !! \text{ vérifié.}$$

c) espacement (t) donné par la section $\frac{7}{4}$.

$$\bullet t \leq \frac{A_t \bar{\sigma}'_a}{\rho b_0 t_y \gamma}$$

$$p'_a = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{22,39}{24,18} \right)^2 \quad p'_a = 0,71 \quad \bar{\sigma}'_a = 0,71 \times 42 \quad \bar{\sigma}'_a = 29,82 \text{ kg/mm}^2$$

$$t \leq \frac{157 \times 29,82}{22,39 \times 25,7 \times 0,3709} = 21,94 \text{ cm} \quad \text{prendre } t = 20 \text{ cm.}$$

$$\bullet t \leq \begin{cases} 200 \left(1,25 - 0,95 \times \frac{22,39}{24,18} \right) = 74,07 \text{ cm} \\ 25,7 \left(5 - 2 \frac{22,39}{24,18} \right) = 80,91 \text{ cm} \\ 4 \times 25,7 = 102,80 \text{ cm} \end{cases}$$

$$t = 20 \text{ cm} < \begin{cases} 74,07 \text{ cm} \\ 80,91 \text{ cm} \\ 102,80 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\bullet t \leq \frac{A_t \cdot 100}{b_0 \frac{0,25 \times h t}{h t + 3 b_0}} = \frac{1,57 \times 100}{25,7 \frac{0,25 \times 200}{200 + 3 \times 25,7}} = 33,86 \text{ cm}$$

$$t = 20 \text{ cm} < 33,86 \text{ cm} \quad !! \text{ vérifié}$$

Espacement adopté pour la traction (demi-grosset) - (grosset) - $\left(\frac{7}{4}\right)$:

On prendra comme espacement des étrépis pour ce tronçon, la plus petite valeur des espacements (t) donnés par les sections demi-grosset grosset et $\frac{7}{4}$

$$t = \min [20, 15, 20] \quad t = 15 \text{ cm}$$

3°) trigon $\lambda/4 - \lambda/2$

a) on a vu précédemment que la section $\frac{\lambda}{4}$ nous imposait un espacement $t = 20 \text{ cm}$

b) espacement (t) donné par la section $\frac{\lambda}{2}$

$$\bullet t \leq \frac{A_t \bar{\sigma}'_a}{\tau_b \text{ boty } \gamma} \Rightarrow$$

$$f'_a = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{3,51}{25,07} \right)^2 = 0,99$$

$$\bar{\sigma}'_a = 0,99 \times 42$$

$$\bar{\sigma}'_a = 41,58 \text{ kg/cm}^2$$

$$t = \frac{157 \times 41,58}{3,47 \times 30 \times 0,0506} = 1239 \text{ cm}!!$$

$$\bullet t \leq \begin{cases} 200 \left(1,25 - 0,95 \frac{3,51}{25,07} \right) = 223,70 \text{ cm} \\ 25,7 \left(5 - 2 \cdot \frac{3,51}{25,07} \right) = 121,39 \text{ cm} \\ 4 \times 25,7 = 102,80 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\bullet t < \frac{A_t \cdot 100}{b_o \frac{0,25 h t}{h_t + 3 b_o}} = \frac{1,57 \times 100}{30 \frac{0,25 \times 200}{200 + 3 \times 30}} = 30,35 \text{ cm} \quad \text{prenons donc: } t = 30 \text{ cm}$$

l'espacement (t) nous est imposé par la condition d'armature minimale.

La contrainte de cisaillement résultante décroît rapidement de $22,39 \text{ kg/cm}^2$ en $\lambda/4$ à $3,51 \text{ kg/cm}^2$ en $\lambda/2$.

Pour ce tronçon, on prendra donc comme espacement (t) des étriers :

$$\bullet) \frac{\lambda}{4} - \frac{3\lambda}{8} \quad t = 20 \text{ cm.}$$

$$\bullet) \frac{3\lambda}{8} - \frac{\lambda}{2} \quad t = 30 \text{ cm.}$$

$$\left(\frac{3\lambda}{8} = \frac{\lambda/4 + \lambda/2}{2} \right).$$

Résumé : about - demi-grosset : $t = 20 \text{ cm}$

(demi-grosset) - $\frac{\lambda}{4}$: $t = 15 \text{ cm}$

$\frac{\lambda}{4}$ - $\frac{3\lambda}{8}$: $t = 20 \text{ cm}$.

$\frac{3\lambda}{8}$ - $\frac{\lambda}{2}$: $t = 30 \text{ cm}$

Remarque : à l'about, sur une distance égale à 2 m (hauteur de la poutre), l'espacement $t < t$ donné par le calcul de la plaque d'about. (on prendra $t = 10 \text{ cm}$)

4- Sécurité à la rupture par effort tranchant T_R réduit et par effort tangent t_{boz} engendré par la torsion :

On admet, par principe, que la résistance d'une poutre fléchie vis à vis de l'effort tangent total T ($T = T_R + t_{boz}$ pour notre cas ; $T = T_R$ pour le cas d'une poutre sans torsion) doit être suffisante pour que la rupture ne puisse se produire que sous l'action du moment fléchissant.

La vérification demandée a simplement pour objet de s'assurer que cette condition est bien remplie ; elle a donc un caractère conventionnel et ne prétend pas décrire le mécanisme de rupture par effort tangent c'est à dire par cisaillement.

On suppose que l'âme est fissurée et résiste alors à l'effort tranchant réduit T_R et à l'effort tangent engendré par la torsion (t_{boz}) par un treillis constitué par des billes de béton comprimées et les armatures tendues.

L'inclinaison des fissures est donnée par $\text{tg } 2\delta = \frac{2\tau}{\sigma}$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{2} \text{arctg } \frac{2\tau}{\sigma}$$

- τ et σ sont calculées dans le cas des surcharges majorées par 1,8.
- la contrainte de compression des billes de béton est donnée par :

$$\sigma_b = \frac{2\tau}{\sin 2\delta}$$

- la contrainte des armatures transversales est donnée par :

$$\sigma_a' = \frac{t_{boz} \text{tg } \delta}{A_t}$$

pour que la rupture ne puisse pas se produire par cisaillement, on doit vérifier les 2 conditions suivantes :

1^{ère} condition

$$\sigma_b = \frac{2T}{S \sin 2\alpha} < 0,5 \sigma_{28}$$

2^{ème} condition

$$\sigma_a = \frac{t_{b0} \tau_{tgs}}{A_t} < 1,2 \sigma_{en}$$

Remarque:

T, α, σ sont calculés dans le cas des surcharges majorées par le coefficient 1,8.

Vérifions la sécurité à la rupture par effort tranchant T_R réduit et par l'effort tangent t_{b0} engendré par la tension uniquement dans la section dangereuse : la plus sollicitée par cisaillement ; pour noter c'est la section gousset.

Section gousset: $T_g = 69,90t$ $T_S = T_{BC} + T_{tGH} = 25,07 + 2,37$
 $e = b_0 = 25,7 \text{ cm}$ $T_S = 27,44t$
 $S = 53250 \text{ cm}^2$ $T_p = 76,27t$

$$C_g = -358,49t.m$$

$$C_S = C_{BC} + C_{tGH} = -135,11,71$$

$$C_S = -146,71t.m$$

en service: (combinaison la plus défavorable)

$$T = T_g + 1,8 T_S - T_p \Rightarrow T = 69,9 + 1,8 \times 27,44 - 76,27 \quad T = 43,02t$$

$$C = C_g + 1,8 C_S \Rightarrow C = -358,49 - 1,8 \times 146,71 \quad C = -622,57t.m$$

$$t_1 = \frac{C}{2eS} = \frac{622,57 \cdot 10^5}{2 \times 25,7 \times 53250} \Rightarrow t_1 = 22,75 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{gs} = \frac{T}{b_0 \cdot 0,8ht} = \frac{43,02 \cdot 10^3}{25,7 \times 160} \Rightarrow \tau_{gs} = 10,46 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{d'où} \quad \tau = t_1 + \tau_{gs} = 22,75 + 10,46 \Rightarrow \tau = 33,21 \text{ kg/cm}^2$$

La valeur de σ_G reste inchangée ($\sigma_G = \frac{N}{A_{net}}$) : $\sigma_G = 45,7 \text{ kg/cm}^2$
d'où :

$$\tan 2\delta = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 \times 33,21}{45,7} \Rightarrow 2\delta = 55,47^\circ \Rightarrow \delta = 27,74^\circ$$
$$\sin 2\delta = 0,8238 \quad \tan \delta = 0,5259.$$

1^{ère} condition:

$$\sigma_b = \frac{2\tau}{\sin 2\delta} < 0,5 \sigma_{28} ? \quad \sigma_{28} = 400 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b = \frac{2 \times 33,21}{0,8238} = 80,60 < 0,5 \times 400 = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b = 80,60 \text{ kg/cm}^2 < 200 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifié}$$

2^{ème} condition:

$$\sigma'_a = \frac{t b_0 \tau \tan \delta}{A_t} < 1,2 \sigma_{en} ? \quad \text{acier Haute adhérence}$$
$$\Rightarrow \sigma_{en} = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$t = 15 \text{ cm} \quad b_0 = 25,7 \text{ cm} \quad \tau = 33,21 \text{ kg/cm}^2 \quad \tan \delta = 0,5259 \quad A_t = 1,57 \text{ cm}^2$$
$$\sigma'_a = \frac{15 \times 25,7 \times 33,21 \times 0,5259}{1,57} \approx 4289 \text{ kg/cm}^2$$

$$1,2 \sigma_{en} = 1,2 \times 4200 = 5040 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_a = 4289 \text{ kg/cm}^2 < 5040 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifié}$$

Chapitre IX

EFFORTS ET FERRAILLAGE DES DALLES

- I - dalle supérieures
- II - dalle inférieures
- III - dalle trottoirs

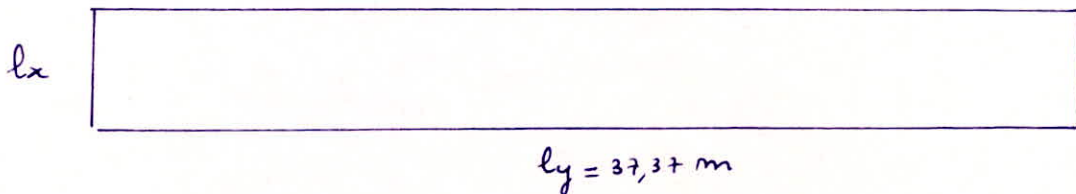
I Dalle supérieure

A - calcul des efforts M, T

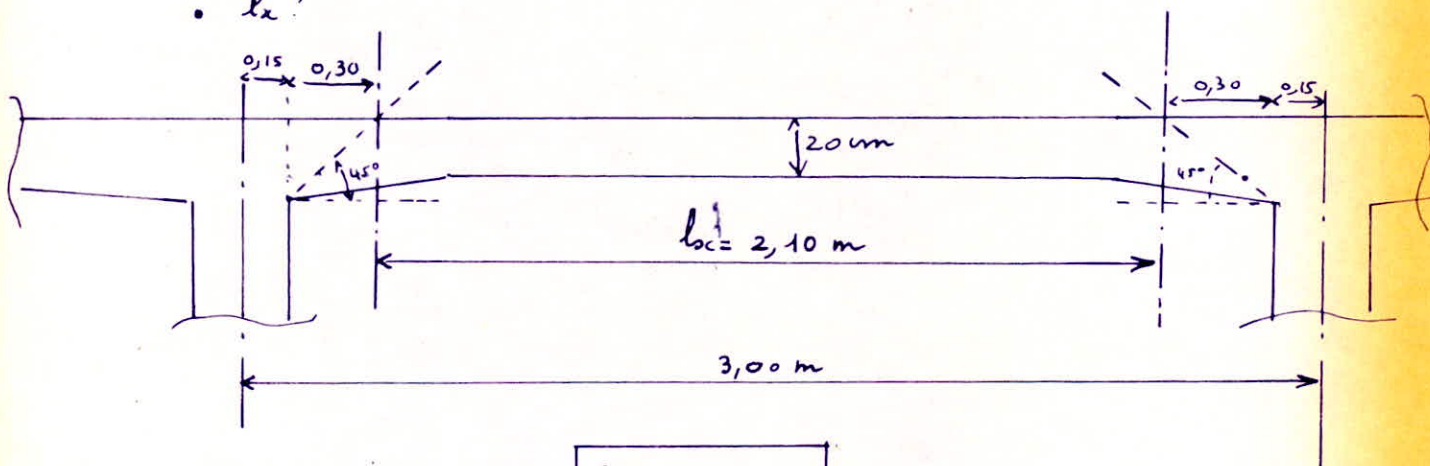
1) dimensions

hypothèse de calcul :

notre dalle est légèrement courbe, pour le calcul des efforts on considérera qu'elle est rectangulaire (afin d'utiliser les abaques Pigeaud) de dimensions $l_x \times l_y$.



- $l_y = 37,37 \text{ m}$
- $l_x ?$



$$\begin{aligned} l_x &= 2,10 \text{ m} \\ l_y &= 37,37 \text{ m} \end{aligned}$$

$$p = \frac{l_x}{l_y} = \frac{2,10}{37,37}$$

$$p = 0,06 < 0,4 \Rightarrow \text{la dalle ne porte que sur le petit côté}$$

2) calcul des effort M, T sous charges permanentes (poids propre de la dalle + poids propre du revêtement)

• poids propre de la dalle:

$$0,20 \times 2,10 \times 37,37 \times 2,5 \text{ ---} \rightarrow 39,2395 \text{ t}$$

$$2 \left(\frac{1}{2} \times 0,05 \times 0,3 \times 37,37 \times 2,5 \right) \text{ ---} \rightarrow 1,4014 \text{ t}$$

- chape de (bitume + gravillon):

$$0,05 \times 2,10 \times 37,37 \times 1,8 \text{ --- --- --- --- ---} \rightarrow 7,0629 \text{ t}$$

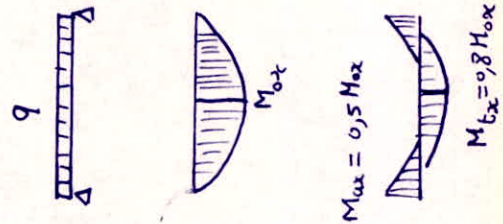
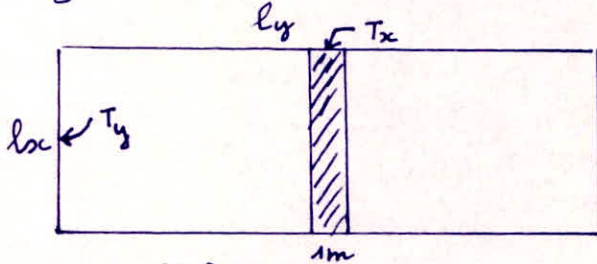
- chape de béton maigre:

$$\frac{1}{2} (0,019 + 0,061) 2,10 \times 37,37 \times 2,2 \text{ --- --- --- --- ---} \rightarrow 6,9060 \text{ t}$$

Soit $G = 39,2395 + 1,4014 + 7,0629 + 6,9060 \quad G = 54,6088 \text{ t}$

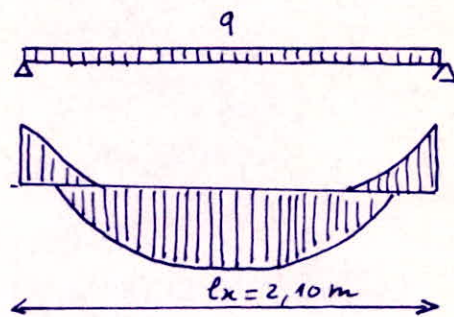
d'où $q = \frac{G}{l_x l_y} = \frac{54608,8}{2,10 \times 37,37} \quad q = 695,86 \text{ kg/m}^2$

$\rho = 0,06 < 0,4$ La dalle ne porte que sur un côté.



moment fléchissant

methode de calcul: si $\rho < 0,4$, sous une charge uniforme la dalle se comporte comme une succession de poutre de largeur un metre



$$q = 695,86 \times 1$$

$$q = 695,86 \text{ kg/m}$$

$$M_{0x} = 1 \cdot q \frac{l_x^2}{8} = 695,86 \frac{2,10^2}{8} = 383,59 \text{ kg/m}$$

$$M_{tx} = 0,8 \cdot 383,59$$

$$M_{max} = 0,5 \cdot 383,59$$

$$M_{tx} = 306,87 \text{ kg/m}$$

$$M_{max} = 191,80 \text{ kg/m}$$

$$M_{ty} = \frac{M_{tx}}{4}$$

$$M_{axc} = M_{ay}$$

• Effort tranchant T

au milieu de l_y : $T_x = \frac{P}{2l_y + l_x} = \frac{54608,8}{2 \times 37,37 + 3,1} \Rightarrow T_x = 710,68 \text{ kg}$

au milieu de l_x : $T_y = \frac{P}{3l_y} = \frac{54608,8}{3 \times 37,37} \Rightarrow T_y = 487,10 \text{ kg}$

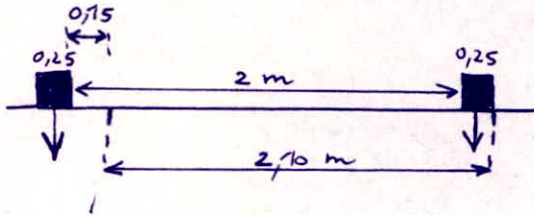
3. Calcul des efforts M, T dus aux surcharges (B_c et B_2)

a) surcharges B_c .

- Moment fléchissant M.

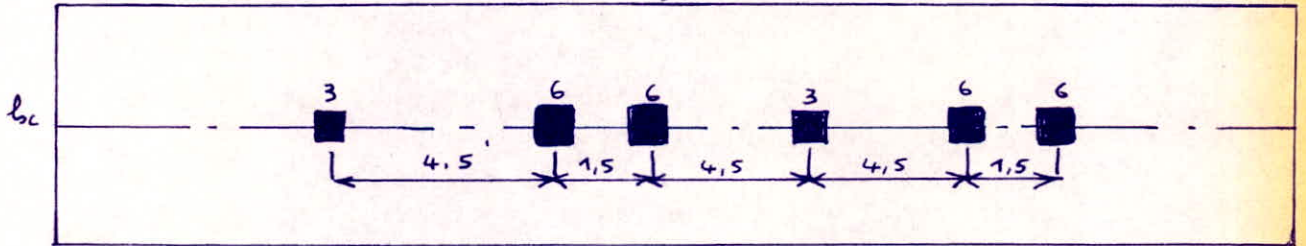
$l_y = 37,37 \text{ m} \Rightarrow 2 \text{ camions}$

$l_x = 2,10 \text{ m} \Rightarrow$ on ne peut avoir qu'une seule file de roues



le cas le plus défavorable se produit lorsque la file de roue est placée au milieu de la dalle

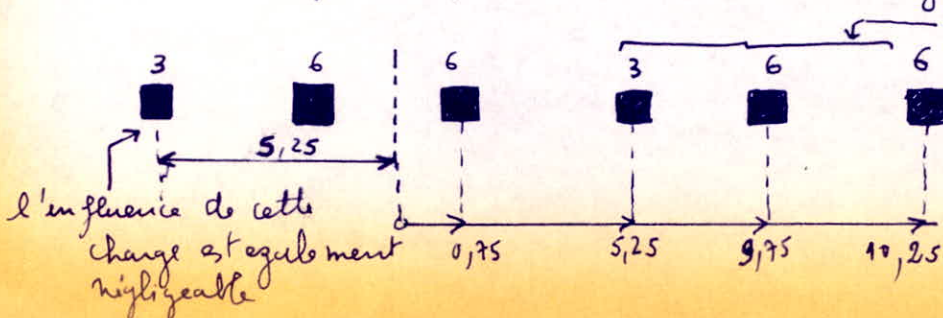
l_y



La bande la plus sollicitée est celle du milieu (à $\frac{l_y}{2}$)

Position défavorable des camions :

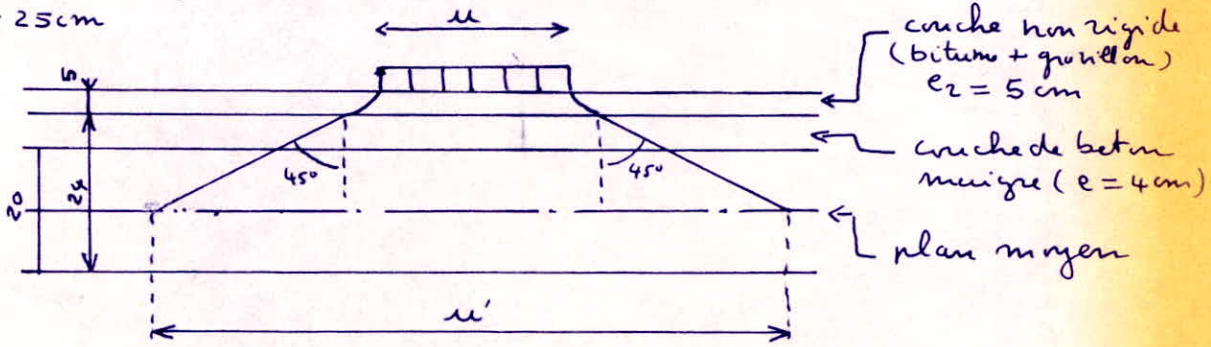
il faut placer les grandes charges au voisinage de $\frac{l_y}{2}$ de façon que l'ensemble des charges soit symétrique.



l'influence de ces surcharges sur la bande milieu est négligeable car elles sont trop éloignées

En faisant cette approximation: négliger l'effet des charges éloignées (voir figure) on peut déterminer facilement les moments dus aux 2 charges restantes à l'aide des abaque de Pigeaud diffusion de charge sur le plan moyen de la dalle:

$$u = v = 25 \text{ cm}$$

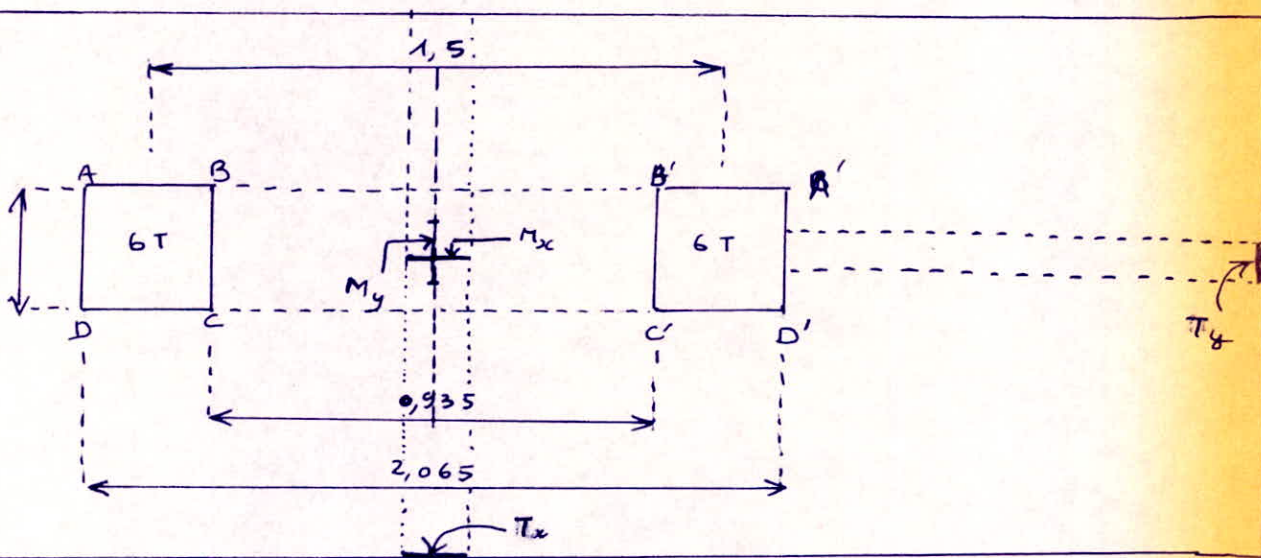


$$u' = u + 2e + 1,5 \times e_2 = 25 + 2 \times 4 + 1,5 \times 5 = 25 + 8 + 7,5 = 40,5 \text{ cm}$$

$$u = v = 25 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$u' = v' = 40,5 \text{ cm}$$

$$u = v = 20 \Rightarrow u' = v' = 31,5 \text{ cm}$$



$$q = \frac{6000}{(0,565)^2}$$

$$q = 18795,52 \text{ kg/m}^2$$

détermination de M en considérant la dalle articulée sur les 4 cotés:

$$\text{sur } S_1 = AA'DD'$$

$$S_2 = BB'CC'$$

$$S = ABCD + A'B'C'D'$$

$$\text{car: } S = S_1 - S_2$$

d'où:

$$M_x = M_{1x} - M_{2x}$$

$$M_y = M_{1y} - M_{2y}$$

• surface S_1 :

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 0,565 \text{ m} \\ v_1 = 2,065 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{u_1}{l_x} = 0,27 \\ \frac{v_1}{l_y} = 0,98 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{abaque de Pigeaud} \\ \text{pour } \rho = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} M_1 = 14,4 \cdot 10^{-2} \\ M_2 = 3,4 \cdot 10^{-2} \end{array}$$

$$M_{1x} = q u_1 v_1 [M_1 + M_2 \cdot \nu] = 18795,52 \times 0,565 \times 2,065 (14,4 \cdot 10^{-2} + 0,15 \cdot 3,4 \cdot 10^{-2})$$

$$M_{1x} = 3269,64 \text{ kgxm / m linéaire}$$

$$M_{1y} = q u_1 v_1 [M_2 + \nu M_1] \Rightarrow M_{1y} = 1219,26 \text{ kgxm / m linéaire}$$

• surface S_2 :

$$\left. \begin{array}{l} u_2 = 0,565 \\ v_2 = 0,936 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{u_2}{l_x} = 0,27 \\ \frac{v_2}{l_y} = 0,45 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{abaque de Pigeaud} \\ \text{pour } \rho = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} M_1 = 17,9 \cdot 10^{-2} \\ M_2 = 8,1 \cdot 10^{-2} \end{array}$$

$$M_{2x} = q u_2 v_2 [M_1 + \nu M_2] \Rightarrow M_{2x} = 1900 \text{ kgxm / m linéaire}$$

$$M_{2y} = q u_2 v_2 [M_2 + \nu M_1] \Rightarrow M_{2y} = 1072 \text{ kgxm / m linéaire}$$

d'où les moments M_x , M_y en supposant la dalle articulée sur les

4 cotés: $M_x = M_{1x} - M_{2x}$

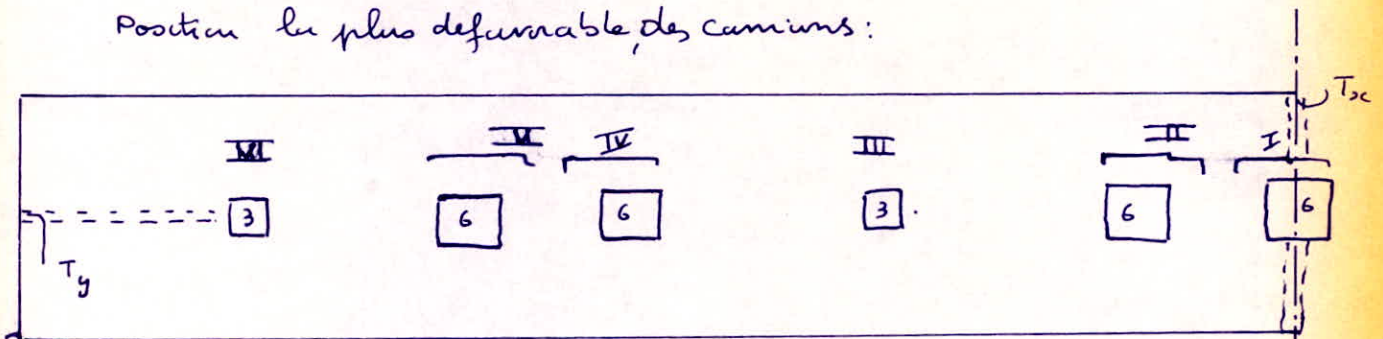
$$M_x = 1369,64 \text{ kgxm / m linéaire}$$

$$M_y = M_{1y} - M_{2y}$$

$$M_y = 147,25 \text{ kgxm / m linéaire}$$

- Effort tranchant T

Position la plus défavorable, des camions:



pour déterminer T_x , T_y ; on considère les systèmes de surcharges I, II, III, IV... et on fera la superposition.

$$\begin{array}{l} T_x = T_x^I + T_x^{II} + T_x^{III} + T_x^{IV} + \dots + T_x^{VI} \\ T_y = T_y^I + T_y^{II} + T_y^{III} + T_y^{IV} + \dots + T_y^{VI} \end{array}$$

$$T^I? \quad u = v = 0,565 \text{ m} \Rightarrow T_u = T_v = \frac{6000}{0,565 \times 3} \Rightarrow T_x^I = T_y^I = 1,25 T_u$$

$$\boxed{T_x^I = T_y^I = 4424,78 \text{ kg}}$$

calcul de $T_x^{II}, T_x^{III}, \dots$ et $T_y^{II}, T_y^{III}, \dots$

Soit $S_1 = u_1 \cdot v_1$ (grand rectangle) } pour chaque
 $S_2 = u_2 \cdot v_2$ (petit rectangle) } systeme de charge
 II, III, \dots

$$T_{u_1}^{II} = \frac{P_1^{II}}{3v_1}$$

$$T_{v_1}^{II} = \frac{P_1^{II}}{2v_1 + u_1}$$

$$T_u^{II} = \frac{T_{u_1}^{II} - T_{u_2}^{II}}{2}$$

$$T_{u_2}^{II} = \frac{P_2^{II}}{3v_2}$$

$$T_{v_2}^{II} = \frac{P_2^{II}}{2v_2 + u_2}$$

$$T_v^{II} = \frac{T_{v_1}^{II} - T_{v_2}^{II}}{2}$$

et $T_x^{II} = 1,25 T_v^{II} \quad T_y^{II} = 1,25 T_u^{II} \quad \dots \text{ etc}$

calcul de P_1 et P_2

• charge de 6 T

$$q = \frac{6000}{(0,565)^2} \quad q = 18795,52 \text{ kg}$$

$$P_1 = q u_1 v_1$$

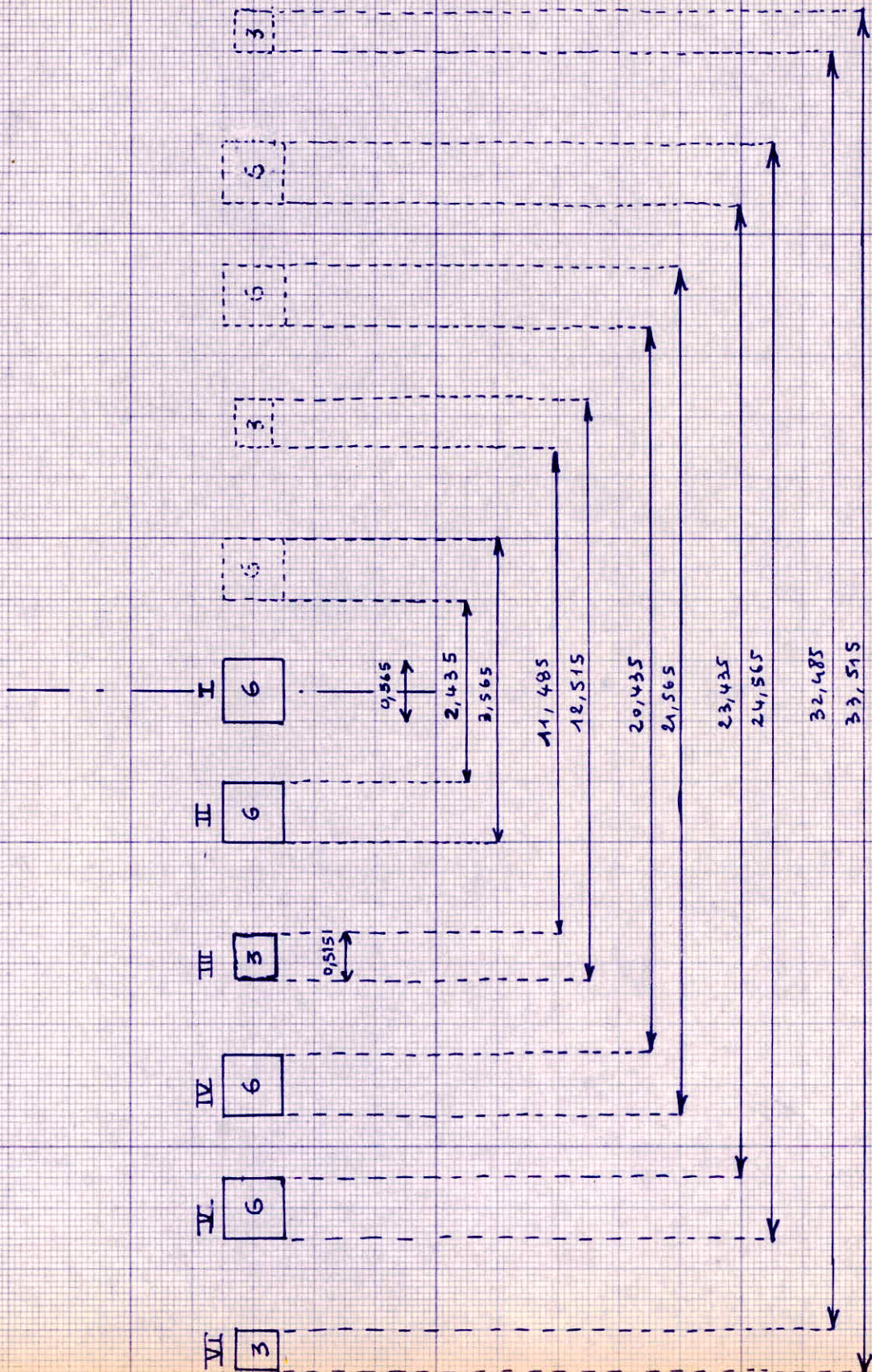
$$P_2 = q u_2 v_2$$

• charge de 3 T

$$q' = \frac{3000}{(0,515)^2} \quad q' = 11311,15$$

$$P_1 = q' u_1 v_1$$

$$P_2 = q' u_2 v_2$$



Effort tranchant T_x , T_y mm mesurés, dans la dalle supérieure des à Bc

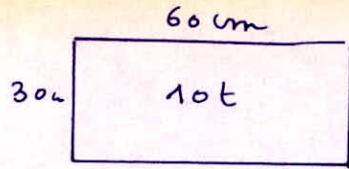
i	Grand rectangle					Petit rectangle					kg	kg	kg	kg
	P_1	u_1	v_1	T_{u1}	T_{v1}	P_2	u_2	v_2	T_{u2}	T_{v2}	T_{u_i}	T_{v_i}	T_x^i	T_y^i
I	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3539,82	3539,82	4424,78	4424,78
II	37858,41	0,565	3,565	3539,82	4919,87	25888,41	0,565	2,435	3539,82	4757,76	0	81,06	101,33	0
III	72902,91	0,515	12,515	1941,75	2853,90	66902,91	0,515	11,485	1941,75	2848,75	0	2,58	3,23	0
IV	229008,8	0,565	21,565	3539,82	5241,08	217008,8	0,565	20,435	3539,82	5237,33	0	1,88	2,35	0
V	260867,25	0,565	24,565	3539,82	5249,37	248867,25	0,565	23,435	3539,82	5246,49	0	1,44	1,80	0
VI	195233,01	0,515	33,515	1941,75	2890,41	189233,01	0,515	32,485	1941,75	2889,72	0	0,35	0,44	0

$$\sum T_x^i = 4533,93 \quad \sum T_y^i = 4424,78$$

$$T_x = 4533,93 \text{ kg} \quad \text{et} \quad T_y = 4424,78 \text{ kg}$$

Remarque: T_x et T_y sont donnés par la 1^{re} charge pres du milieu, l'effet d'autres charges sont pratiquement négligeables (elles sont trop éloignées du milieu)

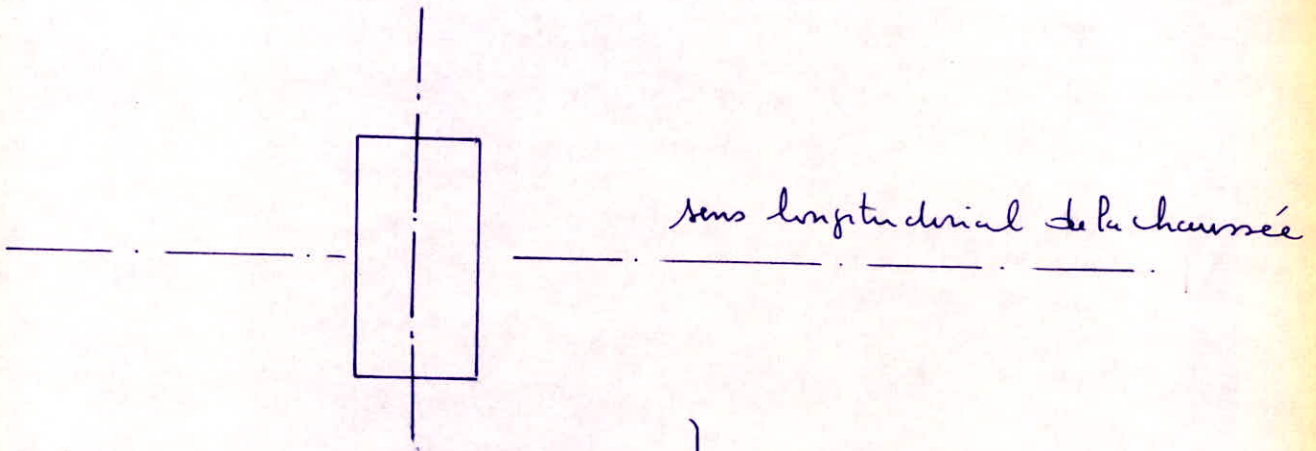
b) sous B_2



$$v' = 60 + 24 + 1,5 \times 5 \quad v' = 61,5 \text{ cm}$$

$$u' = 30 + 24 + 1,5 \times 5 \quad u' = 91,5 \text{ cm}$$

- moment fléchissant M
position défavorable:



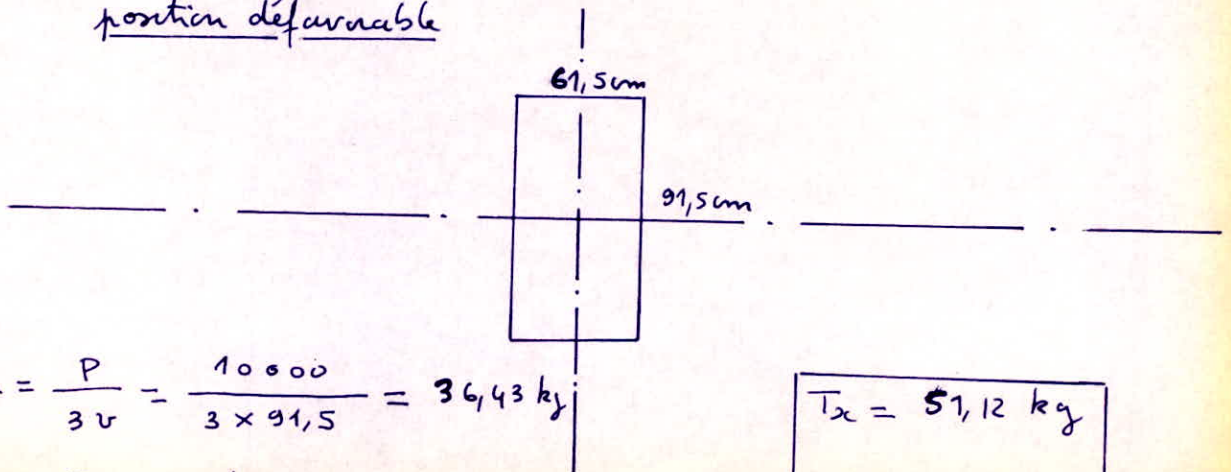
$$\left. \begin{array}{l} v = 61,5 \text{ cm} \\ u = 91,5 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{u}{b_x} = 0,29 \\ \frac{v}{h_x} = 0,44 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{abaque de Pigeaud} \\ \text{pour } f = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} M_1 = 15,65 \cdot 10^{-2} \\ M_2 = 9,9 \cdot 10^{-2} \end{array}$$

$$M_x = 10\,000 (15,65 + 0,15 \cdot 9,9) \cdot 10^{-2}$$

$$M_y = 10\,000 (9,9 + 0,15 \times 15,65) \cdot 10^{-2}$$

$$\begin{array}{l} M_x = 178,50 \text{ kgm/m linéaire} \\ M_y = 1224,75 \text{ kgm/m linéaire} \end{array}$$

- Effort tranchant
position défavorable



$$T_u = \frac{P}{3v} = \frac{10\,000}{3 \times 91,5} = 36,43 \text{ kg}$$

$$T_v = \frac{P}{2v + u} = \frac{10\,000}{2 \times 91,5 + 61,5} = 40,90$$

$$\begin{array}{l} T_x = 51,12 \text{ kg} \\ T_y = 45,54 \text{ kg} \end{array}$$

- Effets tranchants
et Moments défavorables dus aux surcharges B_1 et B_2 pour la dalle supérieure supposée articulée sur les 4 cotés:

	$M_{x_{B_1, m}}$	$M_{y_{B_1, m}}$	$T_{x_{B_1}}$	$T_{y_{B_1}}$
B_1	1369,64	147,25	4533,93	4424,78
B_2	1718,5	1224,75	51,52	45,54
Surch défav	1369,64	1224,75	4533,93	4424,78

- Moments entravés et aux appuis des 2 bandes milieu ($1 \times b_1$ $1 \times b_2$) en considérant la dalle encastree aux 2 extrémités du côté tertiaire et articulée aux 2 autres extrémités:

- sous les surcharges sans majorations:

$$M_{t_{x_s}} = 0,8 M_x = 0,8 \times 1718,5$$

$$M_{a_{x_s}} = 0,5 M_x = 0,5 \times 1718,5$$

$$M_{t_{y_s}} = 0,85 M_y = 0,85 \times 1224,75$$

$$M_{a_{y_s}} = 0,4 M_y = 0,4 \times 1224,75$$

$$M_{t_{x_s}} = 1374,80 \text{ kg m / ml.}$$

$$M_{a_{x_s}} = 859,90 \text{ kg m / m.l.}$$

$$M_{t_{y_s}} = 1041,04 \text{ kg m / ml.}$$

$$M_{a_{y_s}} = 489,90 \text{ kg m / m.l.}$$

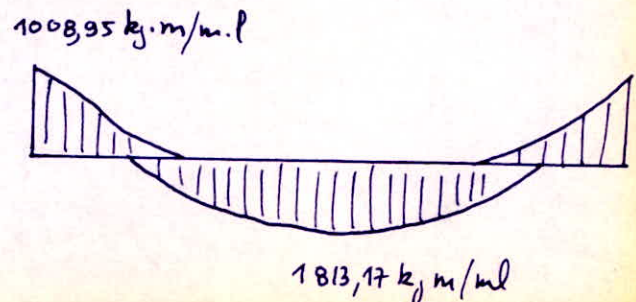
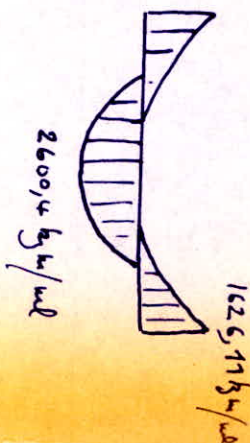
- sous combinaison ($g + 1,2 S$) :

$$M_{t_x} = M_{t_{x_g}} + 1,2 \cdot S \cdot M_{t_{x_s}} = 306,87 + 1,2 \times 1,39 \times 1374,80 \quad M_{t_x} = 2600,95$$

$$M_{a_x} = M_{a_{x_g}} + 1,2 \cdot S \cdot M_{a_{x_s}} = 191,80 + 1,2 \times 1,39 \times 859,90 \quad M_{a_x} = 1626,17$$

$$M_{t_y} = M_{t_{y_g}} + 1,2 \cdot S \cdot M_{t_{y_s}} = 76,72 + 1,2 \times 1,39 \times 1041,04 \quad M_{t_y} = 1813,17$$

$$M_{a_y} = M_{a_{y_g}} + 1,2 \cdot S \cdot M_{a_{y_s}} = 191,80 + 1,2 \times 1,39 \times 489,90 \quad M_{a_y} = 1008,95$$



B Ferraillage de la dalle supérieure:

● Ferraillage due au moment fléchissant M.

- suivant la petite portée l_x

$$M_{lx} = 2600,04 \text{ kJ/m.l.}$$

$$M_{ax} = 1626,11 \text{ kJ/m/m.l.}$$

bande de 1 mètre \Rightarrow section rectangulaire $1 \times h$.

$$A_{tx} = \frac{M_{lx}}{\gamma \overline{\sigma}_a}$$

$$z = \frac{7}{8}(h) = \frac{7}{8}(20-2) = 15,75 \text{ cm}$$

$$A_{tx} = \frac{2600,04}{15,75 \times 2800} = 5,90 \text{ cm}^2 \quad 4 \phi 16 = 8,04 \text{ cm}^2$$

$$A_{tx} = 4 \phi 16 / \text{m.l.}$$

• Chapeaux:

$$A_{ax} = \frac{M_{ax}}{\gamma \overline{\sigma}_a} = \frac{1626,11 \text{ l}^2}{15,75 \times 2800} = 3,69 \text{ cm}^2 \rightarrow$$

$$A_{ax} = 4 \phi 12 = 4,52 \text{ cm}^2$$

$$A_{ax} = 4 \phi 12 / \text{m.l.} \quad t = 30 \text{ cm}$$

- suivant la grande portée l_y

$$M_{ly} = 1813,17 \text{ kJ/m/m.l.} \quad M_{ay} = 1008,95 \text{ kJ/m/m.l.}$$

, on a une section rectangulaire $z = \frac{7}{8}h = 15,75 \text{ cm}$

$$A_{ty} = \frac{M_{ly}}{\gamma \overline{\sigma}_a}$$

$$A_{ty} = \frac{1813,17}{15,75 \cdot 2800} = 4,11 \text{ cm}^2 / \text{m.l.}$$

$$A_{ty} = 3 \phi 16 = 6,03 \text{ cm}^2$$

$$A_{ty} = 3 \phi 16 / \text{m.l.}$$

$$t = 30 \text{ cm}$$

• chapeaux:

$$A_{ay} = \frac{M_{ay}}{\gamma \overline{\sigma}_a} = \frac{1008,95}{15,75 \cdot 2800}$$

$$A_{ay} = 2,29 \text{ cm}^2 / \text{m.l.}$$

$$\Rightarrow 3 \phi 12 = 3,39 \text{ cm}^2$$

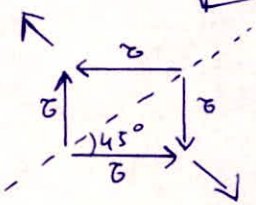
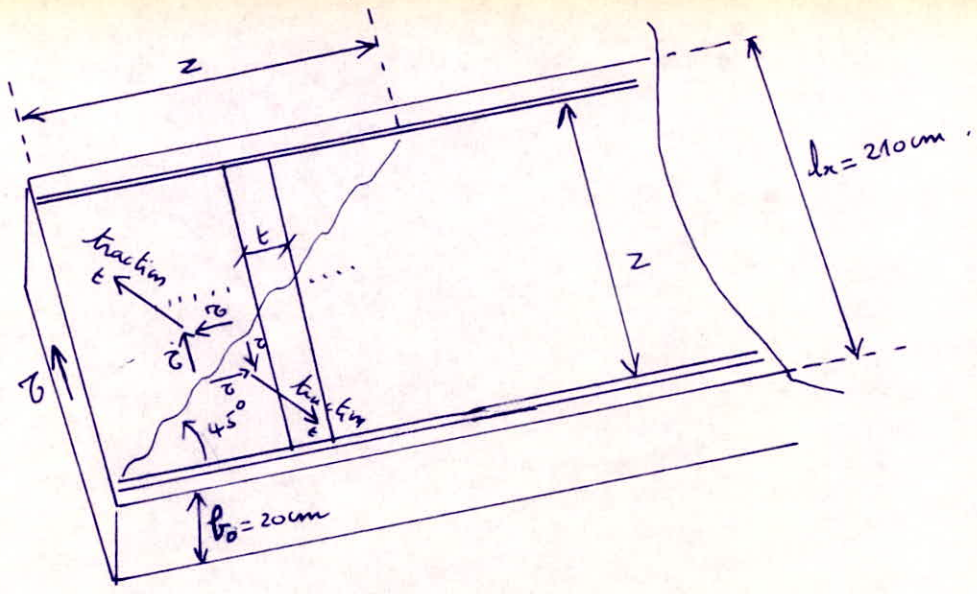
$$A_{ay} = 3 \phi 12 / \text{m.l.}$$

$$t = 40 \text{ cm}$$

● Ferraillage due à la torsion

Tableau récapitulatif d'après les contraintes de cisaillement maximums dues à la torsion dans la dalle supérieure:

Section	$\theta = 0$	$\theta = 2,06^\circ$	$\theta = 5,73$	$\theta = 7,4$	$\theta = 1/2$
$\tau = t_2$ kJ/m ²	27,22	26,28	23,72	19,27	1,28



Le couple de torsion provoque des contraintes de cisaillement longitudinales et des contraintes de cisaillement transversales toutes deux égales à τ et qu'en outre il provoque des contraintes de traction sur des plans inclinés à 45° (voir figure)

Par conséquent, s'il y a fissure du béton, elle se produira dans ces plans.

Cherchons l'espacement (t) des armatures qui doivent reprendre le cisaillement lorsqu'il y a fissure.

designons par A_t : section totale d'armature dans une section droite la fissure sera comblée par un nombre m plans d'armatures:

$$m = \frac{z}{t} \quad \text{c'est une longueur } z \text{ nous avons une section}$$

d'acier $m A_t = \frac{z}{t} A_t$; l'effort dans cette section sous une contrainte

$\bar{\sigma}_{at} < \bar{\sigma}_{at}$ doit équilibrer l'effort tangent due à la torsion $\tau b_o z$, donc on doit avoir:

$$\frac{z}{t} A_t \bar{\sigma}_{at} \geq \tau b_o z \quad \Rightarrow \quad \frac{A_t \bar{\sigma}_{at}}{\tau b_o} \geq t \quad \Rightarrow \quad t \leq \frac{A_t \bar{\sigma}_{at}}{\tau b_o}$$

$b_o =$ épaisseur de la balle. $b_o = 20 \text{ cm}$

$\tau =$ contrainte de cisaillement due au couple de torsion

contrainte admissible de traction pour les armatures transversales

$\bar{\sigma}_{at}$:

$\bar{\sigma}_{at} = f_{at} \sigma_{en}$ ou utilisera des aciers TOR $\Rightarrow \sigma_{en} = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 notre section ne comporte pas de reprise de bétonnage, donc
 $f_{at} = \max\left(\frac{2}{3}, 1 - \frac{\sigma}{9\sigma_b}\right)$ $\frac{2}{3} = 0,67$ $\bar{\sigma}_b = 7,65 \text{ kg/cm}^2$

calcul de $\bar{\sigma}_{at}$ pour les différentes sections à étudier:

sections	$\theta=0$	$\theta=2,86$	$\theta=5,73$	$\theta=\lambda/4$	$\theta=\lambda/2$
$1 - \frac{\sigma}{9\sigma_b}$	0,60	0,62	0,66	0,72	0,98
f_a	0,67	0,67	0,67	0,72	0,98
$\bar{\sigma}_{at}$ kg/cm^2	2814	2814	2814	3024	4116

• espacement (t) des armatures dans le tirant about - gusset:

$$\sigma = \sigma_{max} = \sigma_{about} = 27,22 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{prenons } A_L = 3\phi 16 = 6,03 \text{ cm}^2 \quad b_0 = 20 \text{ cm}$$

$$t = \frac{A_L \bar{\sigma}_{at}}{\sigma_{b0}} = \frac{6,03 \times 2814}{27,22 \times 20} = 31,17 \text{ cm}$$

$$\text{prenons } t = 25 \text{ cm}$$

• espacement (t) des armatures dans le tirant gusset - $\lambda/4$

$$\sigma = \sigma_{max} = 23,72 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{prenons } A_L = 2\phi 16 = 4,02 \text{ cm}^2$$

$$t = \frac{A_L \bar{\sigma}_{at}}{\sigma_{b0}} = \frac{4,02 \times 2814}{23,72 \cdot 20} = 23,85 \text{ cm} \quad \Rightarrow t = 20 \text{ cm}$$

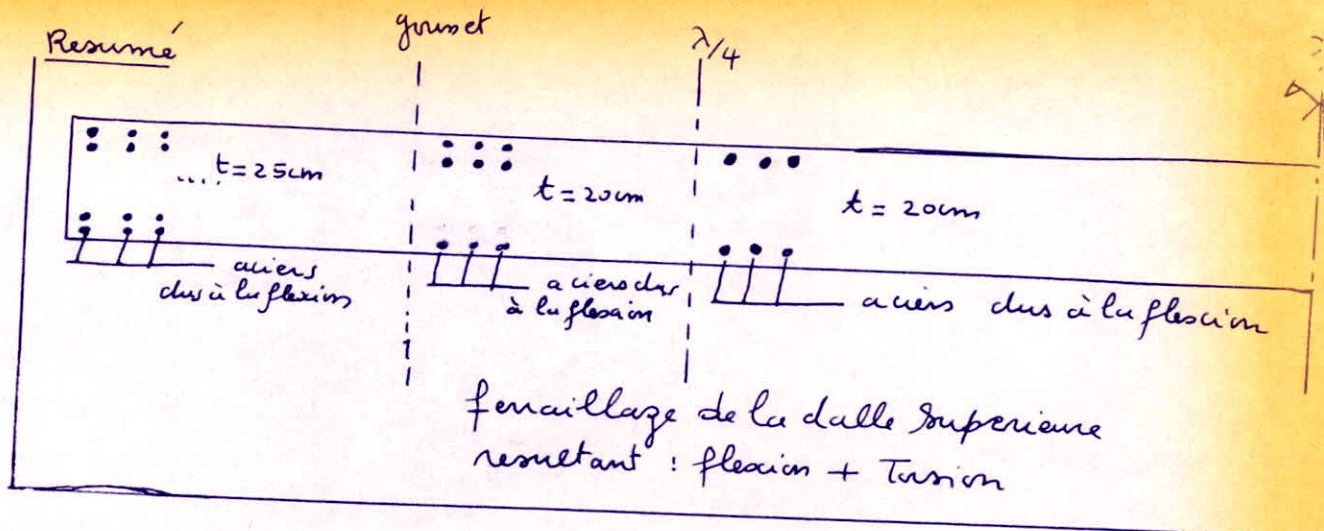
• espacement (t) des armatures dans le tirant $\lambda/4 - \lambda/2$

$$\sigma = \sigma_{max} = 19,27 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{prenons } A_L = 1\phi 20 = 3,14 \text{ cm}^2$$

$$t = \frac{A_L \bar{\sigma}_{at}}{\sigma_{b0}} = \frac{3,14 \times 3024}{19,27 \times 20}$$

$$t = 20 \text{ cm}$$



Verification à l'effort tranchant de la dalle supérieure :

Effort tranchant sans charge permanente: $T_{y_{sc}} = 710,68 \text{ kg}$ $T_{x_{sc}} = 487,10 \text{ kg}$

Effort tranchant sous les surcharges les plus défavorable:

$$T_{x_{sc}} = 4533,93 \text{ kg} \quad T_{y_{sc}} = 4424,78 \text{ kg}$$

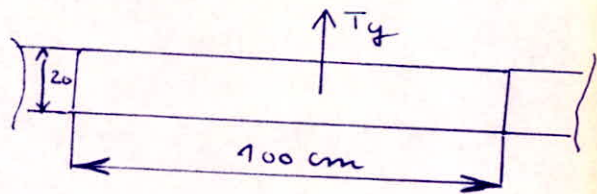
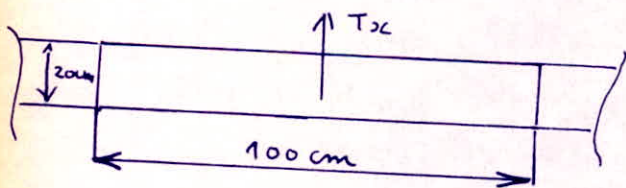
d'où les efforts tranchants sous la combinaison $g + 1,2 \cdot S_{DB_s}$

$$T_x = 710,68 + 1,2 \cdot 1,39 \cdot 4533,93$$

$$T_y = 487,10 + 1,2 \cdot 1,39 \cdot 4424,78$$

$$T_{x_{sc}} = 8273,28 \text{ kg / m. linéaire}$$

$$T_{y_{sc}} = 7867,63 \text{ kg / m. linéaire}$$



dans les dalles et Hourdis, s'il n'y a pas de discontinuité de bétonnage et si $\sigma_b < 1,15 \bar{\sigma}_b$ on ne prévoit pas d'armature transversale.

Pour notre cas la première condition est vérifiée (il n'y a pas de discontinuité de bétonnage).

vérifions la 2^{ème} condition $\sigma_b < 1,15 \bar{\sigma}_b$

pour une section rectangulaire: $\sigma_b = \frac{T}{b z}$ avec $z = \frac{7}{8} h$

$$h = 20 - 2 = 18 \text{ cm}$$

$$z = \frac{7}{8} \cdot 18 = 15,75 \text{ cm}$$

$$b = 100 \text{ cm}$$

$$\sigma_{bx} = \frac{T_x}{b z} = \frac{8273,28}{100 \times 15,75}$$

$$\sigma_{bx} = 5,25 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{by} = \frac{T_y}{b z} = \frac{7867,63}{100 \cdot 15,75}$$

$$\sigma_{by} = 5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{bx} = 5,25 < 8,8 \text{ kg/cm}^2 \quad !! \text{ vérifiée}$$

$$\sigma_{by} = 5 < 8,8 \text{ kg/cm}^2 \quad !! \text{ vérifiée}$$

on ne prévoit pas donc des armatures dues à l'effort tranchant T.

Vérification au poinçonnement : vérification concernant une force localisée

(article 39-53 CCBA) $1,5 \frac{Q}{P_c h_0} < 1,2 \bar{\sigma}_b$

avec B_c : lot : surcharge la plus défavorable

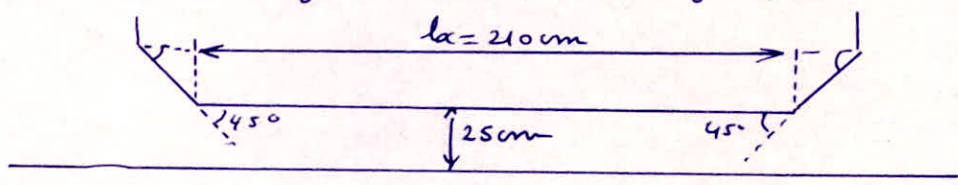
$U = 0,60 \text{ m}$ $V = 0,30 \text{ m}$ $u' = 0,915 \text{ m}$ $v' = 0,615 \text{ m}$ $P_c = 2(u' + v')$

$$1,5 \frac{Q}{P_c h_0} = \frac{1,5 \times 10000}{2(0,915 + 0,615) 0,20 \cdot 10^4} = 2,05 \text{ kg/cm}^2 < 1,2 \times 7,65 = 9,18 \text{ kg/cm}^2$$

$$1,5 \frac{Q}{P_c h_0} = 2,05 \text{ kg/cm}^2 < 9,18 \text{ kg/cm}^2 \quad !! \text{ vérifiée}$$

II Dalle inférieure

La dalle inférieure est également courbe ; pour la détermination des efforts M, T , elle sera considérée rectangulaire de dimensions $l_x \times l_y$ $l_x = 2,10 \text{ m}$ $l_y = 3,7,37 \text{ m}$



$$f = \frac{l_x}{l_y} = \frac{2,10}{3,7,37} = 0,06 < 0,4 \Rightarrow \text{la dalle ne porte que suivant le petit côté } l_x.$$

pour le calcul des moments, on considèrera notre dalle comme une succession de poutres de largeur 1m encastées aux 2 extrémités.

1. Calcul de M, T sous charge permanente (par m.l)

La dalle inférieure n'est soumise qu'à son poids propre et aux contraintes de cisaillement dues à la torsion.

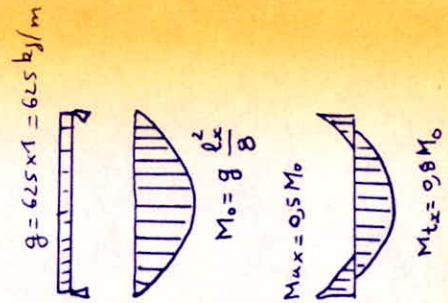
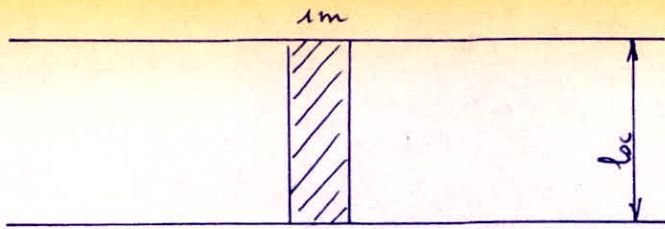
poids propre de la dalle G :

$$G = 2,5 \times 0,25 \times 2,1 \times 3,7,37$$

$$\text{et } g = \frac{G}{l_x \cdot l_y} = 2,5 \times 0,25 \cdot 10^3$$

$$G = 49,05 \text{ t}$$

$$g = 625 \text{ kg/m}$$



$$g = 625 \text{ kg/m}$$

$$M_0 = g \frac{l_x^2}{8} = 625 \cdot \frac{(2,10)^2}{8}$$

$$M_0 \approx 345 \text{ kg.m}$$

$$M_{tx} = 0,8 M_0 = 0,8 \times 45$$

$$M_{ax} = 0,5 M_0 = 0,5 \times 345$$

$$M_{tx} = 276 \text{ kg.m/ml}$$

$$M_{ax} = 172,5 \text{ kg.m/ml}$$

$$M_{ay} = M_{ax}$$

$$\frac{M_{tx}}{4} = M_{ty}$$

2. Ferrailage de la dalle inférieure

a) ferrailage dû à la flexion:

• Selon l_x:

$$M_{tx} = 276 \text{ kg.m} \Rightarrow A_{tx} = \frac{27600}{\frac{7}{8} \cdot R \times 2800} \quad h = 25 - 3 = 22 \text{ cm}$$

$$A_{tx} = \frac{27600}{\frac{7}{8} \times 22 \times 2800} = 0,57 \text{ cm}^2/\text{ml}$$

valen trop faible les conditions d'acier minimum et fragilité du béton ne sont pas vérifiées.

prenons 1 t 12 $t = 25 \text{ cm}^* \Rightarrow A = 4 \text{ T12/ml} = 4,52 \text{ cm}^2/\text{ml}$

$$A_{ax} = \frac{M_{ax}}{\frac{7}{8} h \cdot 2800} = \frac{17250}{\frac{7}{8} \cdot 22 \cdot 2800} = 0,32 \text{ cm}^2/\text{ml}$$

pour des raisons de construction on prendra:

$$A_{ax} = 3 \phi 12 / \text{ml} \quad t = 40 \text{ cm}$$

• Selon l_y: les armatures ne sont pas nécessaire mais on doit prévoir des armatures de répartition.

prenons: $A_{ay} = 1 \phi 12 \quad t = 40 \text{ cm}$

$A_{ty} = 1 \phi 12 \quad t = 40 \text{ cm}$

* condition de non fragilité:

$$A > \frac{6 h^2}{12 \times 0,3 \times \frac{66}{\sigma_e}} \Rightarrow 4,52 \text{ cm}^2/\text{ml} > \frac{100 \left(\frac{7}{8} \cdot 25\right)^2 \cdot 7,65}{12 \times 0,3 \times 25^2 \cdot 4200} = 1,94 \text{ cm}^2/\text{ml!}$$

vérifiée

* condition de section minimum d'acier:

$$\frac{A}{b h t} \geq 0,0006 \Rightarrow \frac{4,52}{100 \times 25} = 0,00181 > 0,0006 \text{ !! vérifiée}$$

b) fermeture due à la torsion:

on avait établi précédemment que l'espacement (t) des aciers reprendent les contraintes de cisaillement est donné par;

$$t = \frac{A_t \bar{\sigma}_{at}}{\tau \cdot b_0}$$

$$b_0 = 25 \text{ cm}$$

$$\bar{\sigma}_{at} = f_a \sigma_{en}$$

$$f_a = \max\left(\frac{2}{3}, 1 - \frac{\tau}{9\tau_b}\right)$$

$$\tau_{en} = 420 \text{ kg/cm}^2$$

Tableau nous donnons τ et $\bar{\sigma}_{at}$ pour les différentes sections à étudier:

Sections	$\theta = 0$	$\theta = 36^\circ$	$\theta = 57,3^\circ$	$\theta = \lambda/4$	$\theta = \lambda/2$
$\tau \text{ kg/cm}^2$	21,75	21,02	18,97	15,41	
$1 - \frac{\tau}{9\tau_b}$	0,68	0,69	0,72	0,78	0,99
f_a	0,68	0,69	0,72	0,78	0,99
$\bar{\sigma}_{at} \text{ kg/cm}^2$	2856	2898	3024	3276	4158

• torsion about-giraset: $\tau = 21,75 \text{ kg/cm}^2$

$$\text{prenons } A_t = 1\phi 16 + 1\phi 20 = 2,01 + 3,14 = 5,15 \text{ cm}^2$$

$$t = \frac{A_t \bar{\sigma}_{at}}{\tau \cdot b_0} = \frac{5,15 \times 2856}{21,75 \times 25} = 27,05 \text{ cm} \Rightarrow \text{prenons } t = 25 \text{ cm}$$

• torsion giraset- $\lambda/4$ $\tau = 18,97 \text{ kg/cm}^2$

$$A_t = 2\phi 16 = 4,02 \text{ cm}^2$$

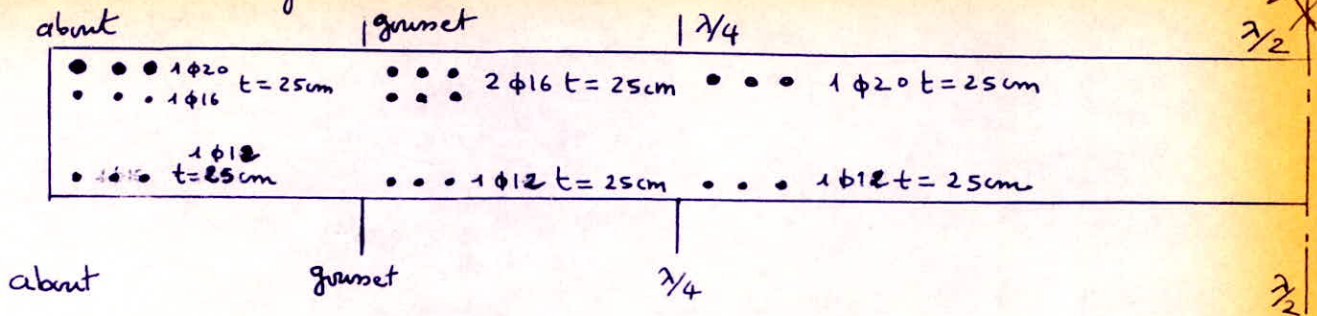
$$t = \frac{A_t \bar{\sigma}_{at}}{\tau \cdot b_0} = \frac{4,02 \times 3024}{18,97 \times 25} = 25,63 \text{ cm} \Rightarrow \text{prenons } t = 25 \text{ cm}$$

• torsion $\lambda/4 - \lambda/2$ $\tau = 15,41 \text{ kg/cm}^2$

$$A_t = 1\phi 20 = 3,14 \text{ cm}^2$$

$$t = \frac{A_t \bar{\sigma}_{at}}{\tau \cdot b_0} = \frac{3,14 \times 3276}{15,41 \times 25} = 26,70 \text{ cm} \Rightarrow \text{prenons } t = 25 \text{ cm}$$

c). Ferrailage restant : Flexion + Torsion :



3. Verification à l'effort tranchant

charge permanente $\Rightarrow G = 49050 \text{ kg}$

La dalle inférieure n'est soumise à aucune surcharge.

$$T_x = \frac{G}{2l_y + l_x} \quad T_y = \frac{G}{3l_y}$$

$$T_x = \frac{49050}{2 \times 37,37 + 2,70}$$

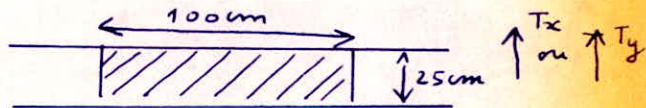
$$T_x = 638,34 \text{ kg/m.l}$$

$$T_y = \frac{49050}{3 \times 37,37}$$

$$T_y = 437,52 \text{ kg/m.l}$$

$$\tau_{bx} = \frac{T_x}{b \cdot z}$$

$$\tau_{by} = \frac{T_y}{b \cdot z}$$

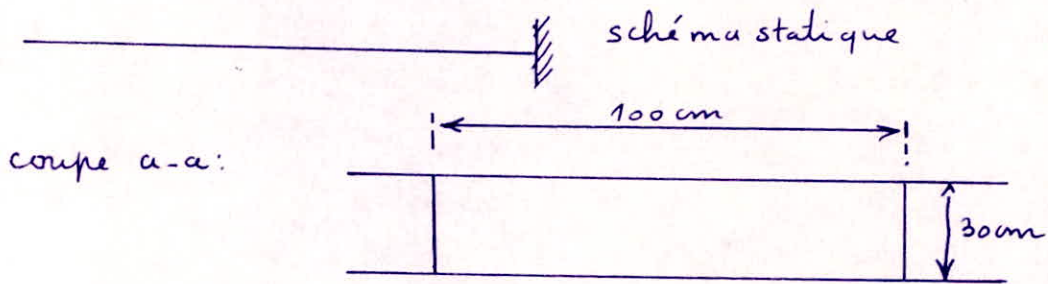
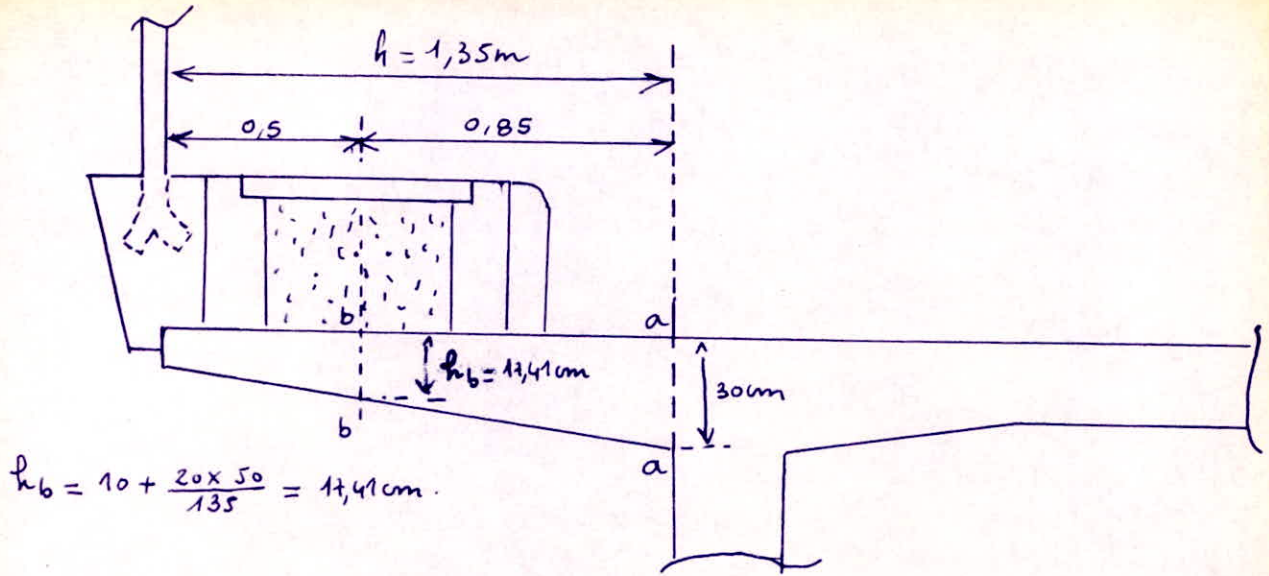


$$\tau_{bx} = \frac{638,34}{100 \cdot \frac{7}{8} \cdot 22} = 0,33 < 1,15 \bar{\sigma}_b = 8,8 \text{ kg/cm}^2 \quad !! \text{ vérifié}$$

$$\tau_{by} = \frac{437,52}{100 \cdot \frac{7}{8} \cdot 22} = 0,23 < 1,15 \bar{\sigma}_b = 8,8 \text{ kg/cm}^2 \quad !! \text{ vérifié}$$

Conclusion: $\tau_b < 1,15 \bar{\sigma}_b$ est vérifié, et comme on n'a pas de reprise de bétonnage lors du coulage de la dalle inférieure c'est à dire on ne prévoit pas d'armature transversale due à l'effort tranchant.

III Dalle trottoir



Pour le calcul des efforts M , T de la dalle trottoir (en console) on considère des consoles de 1mètre de largeur - c'est à dire qu'on déterminera M et T par m. linéaire.

1. Calcul des efforts M et T sous charge permanente :

Le moment fléchissant M et l'effort tranchant sont maximums en la section d'encastrement (a-a).

• section a-a

a) calcul de M par m. linéaire en la section a-a sous la charge permanente :

• moment due au poids des 2 bordures + sable + dalle en (a-a)

$$M_1 = P_1 z_1 \quad P_1: \text{poids des 2 bordures + sable + dalle}$$

2 bordures :	$2 \times 2,4 (5 \times 35 + 40 \times 10) 10^3 10^{-4}$	----->	276 kg
Sable :	$1,6 (50 \times 35) 10^3 10^{-4}$	----->	280
dalette :	$2,5 (60 \times 5) 10^3 10^{-4}$	----->	<u>75</u>
			631 kg

$$P_1 = 631 \text{ kg}$$

$$z_1 = 0,5 + 0,35 = 0,85 \text{ m}$$

$$M_1 = 631 \times 0,85$$

$$M_1 = 536,35 \text{ kg.m / m.l}$$

• moment dû à la bordure gravit en la section (a-a)

$$M_2 = 2,5 \times 40 \times 10 10^3 10^{-4} (0,35 + 0,05) = 100 \times 0,40$$

$$M_2 = 40 \text{ kg.m / m.l}$$

• moment dû à la corniche en (a-a)

$$M_3 = 0,40 \times 0,1 \times 2500 \times 1,30 + 0,45 \times 0,10 \times 2500 \times 1,40 + \frac{1}{2} 0,1 \times 0,45 \times 2500 \times 1,$$

$$M_3 = 370,9375 \text{ kgm. / m.l}$$

• moment dû au poids propre du garde corps en (a-a)

$$M_4 = 58 \times 1,375$$

$$M_4 = 79,75 \text{ kg.m / m.l}$$

• moment dû au poids propre de la console :

$$M_5 = 2500 \times 1,35 \times 0,1 \times \frac{1,35}{2} + 2500 \times \frac{1}{2} 1,35 \times 0,20 \times \frac{1}{3} 1,35$$

$$M_5 = 379,6875 \text{ kgm / m.l}$$

d'où le moment résultant en la section (a-a) dû à la charge permanente :

$$M_g = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 = 536,35 + 40 + 370,9375 + 79,75 + 379,6875$$

$$M_g = 1406,73 \text{ kgm / m.l.}$$

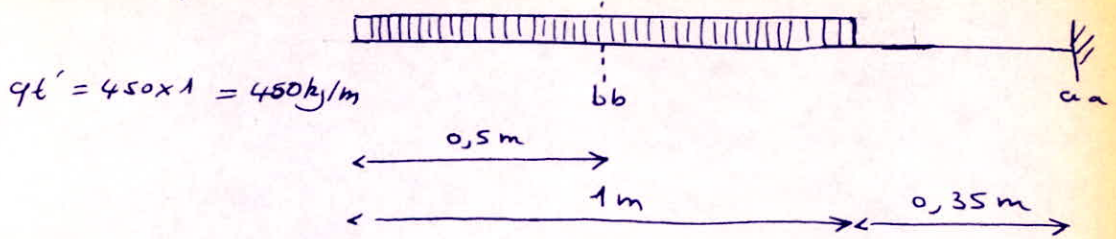
b) Calcul de T par m.linéaire en la section a-a dû à la charge permanente

$$T_g = 631 + 58 + 100 + 2500 (1,35 \times 0,1 + \frac{1}{2} 1,35 \times 0,20) + \frac{537,5}{2}$$

$$T_g = 1732,75 \text{ kg/m.p}$$

2 - Calcul des effets M et T dus aux surcharges

a - surcharge trottoir $q_t = 450 \text{ kg/m}^2$



$$q_t' = 450 \times 1 = 450 \text{ kg/m}$$

• Section a-a:

$$- M_{t_{a-a}} = q_t \times 1 \times 0,85 = 450 \times 1 \times 0,85 \quad M_{t_{a-a}} = 382,50 \text{ kgm/ml}$$

$$\underline{1,2 M_{t_{a-a}} = 459 \text{ kgm/ml}}$$

$$- T_{t_{a-a}} = 450 \text{ kg} \quad \underline{1,2 T_{t_{a-a}} = 540 \text{ kg}}$$

• Section b-b:

$$- M_{t_{b-b}} = q_t \times 0,5 \times \frac{0,5}{2} = 450 \times 0,5 \times \frac{0,5}{2} \quad M_{t_{b-b}} = 56,25 \text{ kgm}$$

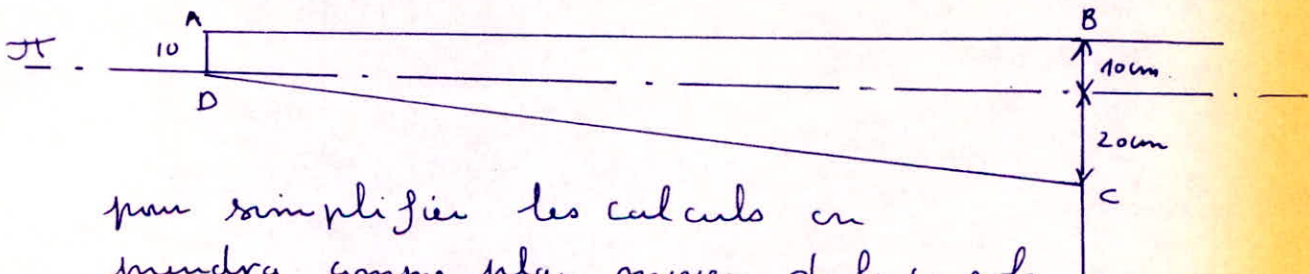
$$\underline{1,2 M_{t_{b-b}} = 67,50 \text{ kgm/ml}}$$

$$- T_{t_{b-b}} = \frac{450}{2} \quad T_{t_{b-b}} = 225 \text{ kg} \quad \underline{1,2 T_{t_{b-b}} = 270 \text{ kg/ml}}$$

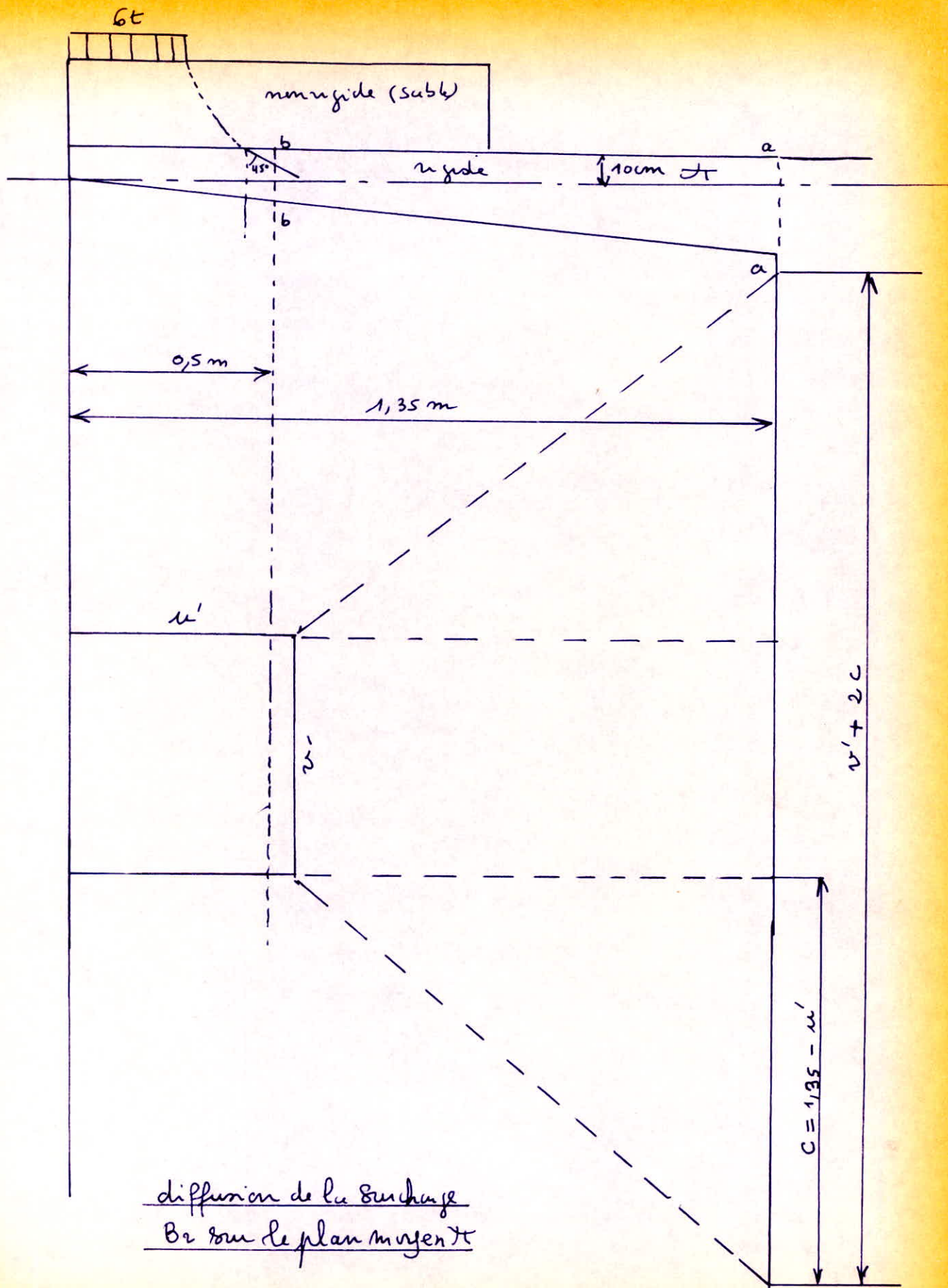
b - surcharge B2: roue isolée de 6t. surface d'impact: $25 \times 25 \text{ cm}^2$

• diffusion de la surcharge B2 sur le plan moyen de la console de 1m de largeur.

plan moyen



pour simplifier les calculs on prendra comme plan moyen de la console le plan TT partageant la section ABCD en 2 sections égales.



$$u = v = 25 \text{ cm} \quad u' = u + \frac{1}{2} (h_0 + 1,5 e_2)$$

$$v' = v + h_0 + 1,5 e_2$$

$$u' = 25 + \frac{1}{2} (10 + 1,5 \times 40) \rightarrow u' = 60 \text{ cm}$$

$$v' = 25 + 10 + 1,5 \times 40 \rightarrow v' = 95 \text{ cm}$$

• Effets M, T par m/l dus à B_2 .

- Section a-a.

$$M_{B_2} = \frac{P}{2c + v'} \left(c + \frac{u'}{2} \right) = \frac{6000}{2(1,35 - 0,6) + 0,95} \left(1,35 - 0,6 + \frac{0,6}{2} \right)$$

$$M_{B_2} = 2571,43 \text{ kgm/ml} \quad 1,2 M_{B_2} = 3085,71 \text{ kgm/ml}$$

$$T_{B_2} = \frac{P}{2xc + v'} = \frac{6000}{2 \times (1,35 - 0,6) + 0,95} = 2448,98$$

$$T_{B_2} = 2448,98 \text{ kgm/ml} \quad 1,2 T_{B_2} = 2938,78 \text{ kg/ml}$$

- Section b-b $c = 0$ $P' = \frac{6000}{0,6} \times 0,5$ $P' = 5000 \text{ kg}$

$$M_{B_2} = \frac{P'}{v'} \left(0 + \frac{u'}{2} \right) = \frac{5000}{0,95} \left(0,6 \right)$$

$$M_{B_2} = 1578,95 \text{ kgm/ml} \quad 1,2 M_{B_2} = 1894,74 \text{ kgm/ml}$$

$$T_{B_2} = \frac{P'}{v'} = \frac{5000}{0,95} = 5263,16 \text{ kg/ml}$$

$$T_{B_2} = 5263,16 \text{ kgm/ml} \quad 1,2 T_{B_2} = 6315,79 \text{ kgm/ml}$$

c. Surcharge Q : surgarde corps.

elle ne crée qu'un moment constant le long de la console:

Section a-a et section b-b

$$M_Q = Q \cdot h_g$$

$h_g =$ hauteur du garde corps

$$Q = 500(1 + b) \text{ N} \quad b = 1 \text{ m}$$

$$\text{d'où } Q = 1000 \text{ N} \Rightarrow Q \approx 102,04 \text{ kg}$$

$$M_Q = 102,04 \times 1$$

$$M_Q = 122,45 \text{ kgm/ml}$$

$$1,2 M_Q = 146,94 \text{ kgm/ml}$$

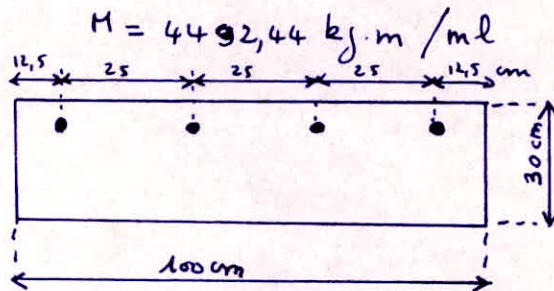
Tableau récapitulatif donnant les efforts par m. linéaire dans les sections a-a et b-b de la dalle trottoir

		g	1,2 S _{Trot}	1,2 Q	1,2 B ₂	1,2 (S _{Trot} + Q) + g	1,2 B ₂ + g	unités
	M	1406,73	459	146,94	3085,71	2012,67	4492,44	kgm/ml
	T	1732,75	540	—	2938,78	2272,75	4671,53	kg/ml
	M	324	67,50	146,94	1894,74	538,44	2210,74	kgm/ml
	T	876,06	270	—	6315,79	1146,06	7191,85	kg/ml

3 Ferraillage de la dalle trottoir

a) acier selon la petite portée :

le moment M est maximum en la section d'encastement a-a



$$M = 4492,44 \text{ kg.m/ml}$$

$$h_t = 30 \text{ cm}$$

$$h = h_t - d = 30 - 2,5 = 27,5 \text{ cm}$$

$$A = \frac{M}{\sigma_a z} \quad \text{pour une section rectangulaire} \quad z \approx \frac{7}{8} h$$

$$A = \frac{4492,44}{2800 \times \frac{7}{8} \cdot 27,5} = 6,67 \text{ cm}^2/\text{ml} \Rightarrow 4 \phi 16 = 8,04 \text{ cm}^2 \text{ (H.A)}$$

$$A = 4 \phi 16 / \text{ml.}$$

$$t = 25 \text{ cm. sur toute la portée de la console.}$$

• Vérification des contraintes σ_a et σ'_b pour la section (a-a)

$$h = 30 - 2 - 0,8 = 27,2 \text{ cm}$$

$$\omega = \frac{100 A}{b h} = \frac{100 \times 8,04}{100 \times 27,2}$$

$$\omega = 0,2955$$

$$\omega = 0,2955 \xrightarrow{\text{tableau}} \varepsilon = 0,9144 \quad k = 43,4$$

$$z = \varepsilon h = 0,9144 \times 27,2$$

$$z = 24,87 \text{ cm}$$

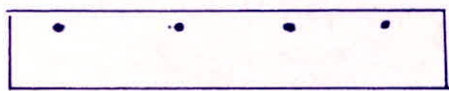
$$\sigma_a = \frac{M}{Az} = \frac{449244}{8,04 \cdot 24,87}$$

$$\sigma_a = 2246,6 \text{ kg/cm}^2 < 2800 \text{ !! vérifié}$$

$$\sigma_b' = \frac{\sigma_a}{k} = \frac{2246,6}{43,4}$$

$$\sigma_b' = 51,76 < 184 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifié}$$

• Verification des contraintes σ_a et σ_b' pour la section b-b



$$h_t = 17,41 \text{ cm}$$

$$h = 17,41 - 2 \cdot 0,8$$

$$h = 14,61 \text{ cm}$$

$$\omega = \frac{100 A}{b \cdot h} = \frac{100 \times 8,04}{100 \cdot 14,61} = 0,550$$

$$\omega = 0,55 \xrightarrow{\text{tableau}} \varepsilon = 0,8894 \quad k = 30,2$$

$$z = \varepsilon h = 0,8894 \cdot 14,61 = 12,99$$

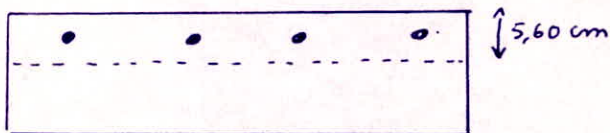
$$\sigma_a = \frac{M}{Az} = \frac{221874}{8,04 \times 12,99}$$

$$\sigma_a = 2124,42 < 2800 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifié}$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_a}{k} = \frac{2124,42}{30,2} = 70,3$$

$$\sigma_b' = 70,35 < 184 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifié}$$

• Verification à la fissuration



pour les 2 sections aa et bb on a :

$$B_f = 5,60 \times 100 - 8,04$$

$$B_f = 551,96 \text{ cm}^2$$

$$\omega_f = \frac{A}{B_f} = \frac{8,04}{554,96}$$

$$\omega_f = 0,0145$$

$$\sigma_1 = k \frac{\eta}{\Phi} \frac{\tilde{\omega}_f}{1 + 10 \tilde{\omega}_f}$$

$$\sigma_2 = 2,4 \sqrt{\frac{1 k \sigma_b}{\Phi}}$$

pour notre cas la fissuration est peu nuisible pour la dalle trottoir
 $\Rightarrow k = 35 \cdot 10^6$ (elle est protégée par la superstructure)

acier haute adhérence $\Rightarrow \eta = 1,6$.

$$\phi = 16 \text{ mm}$$

$$\bar{\sigma}_b = 7,65 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 1,5 \cdot 10^6 \frac{1,6}{16} \frac{0,0145}{1 + 10 \times 0,0145}$$

$$\sigma_1 = 1899,56 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 2,4 \sqrt{\frac{\eta k \bar{\sigma}_b}{\phi}} = 2,4 \sqrt{\frac{1,6 \cdot 1,5 \cdot 10^6 \times 7,65}{16}}$$

$$\sigma_2 = 2570,91 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_a = \min \left\{ \max \{ \sigma_1, \sigma_2 \}; 2800 \right\} \quad \bar{\sigma}_a = 2570,91 \text{ kg/cm}^2$$

Section a-a	$\bar{\sigma}_a = 2246,60 < 2570,91 \text{ kg/cm}^2$!! vérifiée!
Section b-b	$\bar{\sigma}_a = 2124,42 < 2570,91 \text{ kg/cm}^2$!! vérifiée!

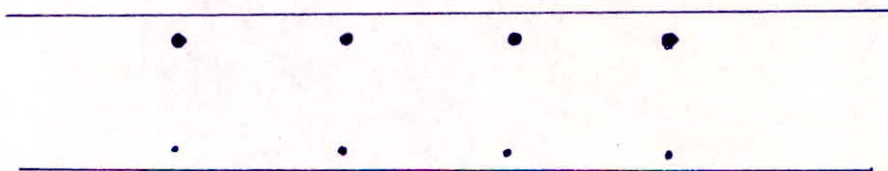
• armatures comprimées :

on a vu précédemment que le béton résiste seul à la compression

$\bar{\sigma}_b < 184 \text{ kg/cm}^2$ vérifiée pour la section (a-a) (M_{\max})
et une section b-b (située à 0,50 de l'extrémité libre de la console)

néanmoins on prévoit des armatures comprimées qui auront pour rôle de répartir les efforts et d'intervenir pour les effets secondaires. On prolongera les aciers tendus de la console

on prendra $4 \phi 16 / \text{ml}$ (acier doux Fe24)



• armatures de répartition

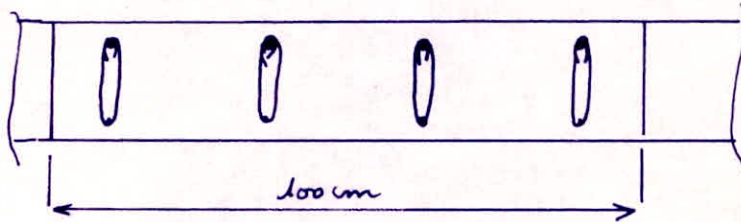
- tendus : 1 t12 $t = 25 \text{ cm}$

- comprimés 1 t12 $t = 50 \text{ mm}$.

b) armature transversale:

l'espacement t des armatures transversales est donné par:

$$t = \frac{A_t z \bar{\sigma}_{at}}{T} \quad \bar{\sigma}_{at} = f_{at} \bar{\sigma}_b \quad \bar{\sigma}_b = 7,65 \text{ kg/cm}^2$$



h_t

h_t $\left\{ \begin{array}{l} 30 \text{ cm section a-a} \\ 17,41 \text{ cm section b-b} \end{array} \right.$

$A_t = 8 \phi 8 / \text{classe Fe 24}$
ml. (acier doux)

• Section b-b $T = 7191,85 \text{ kg}$

$$z = \frac{7}{8} h \quad z = \frac{7}{8} 14,61 \quad z = 12,78 \text{ cm}$$

$$\bar{\sigma}_b = \frac{T}{b z} = \frac{7191,85}{100 \times 12,78} = 5,63 \text{ kg/cm}^2 < 8,80 \text{ kg/cm}^2 \text{ ! vérifiée}$$

le béton seul peut résister à l'effort tranchant, néanmoins pour plus de sécurité on prévoit des armatures transversales

$$f_{at} = 1 - \frac{\bar{\sigma}_b}{9 \bar{\sigma}_b} = 1 - \frac{5,63}{9 \times 7,65} \quad f_{at} = 0,92 \quad \bar{\sigma}_{at} = 2208 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_t = 4,01 \text{ cm}^2/\text{m.l} \quad t = \frac{4,01 \times 12,78 \times 2208}{7191,85} = 15,73 \text{ cm.}$$

$$\bar{t} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,2 h = 0,2 \times 14,61 = 2,92 \text{ cm} \\ h \left(1 - 0,3 \frac{\bar{\sigma}_b}{\bar{\sigma}_b}\right) = 14,61 \left[1 - 0,3 \frac{5,63}{7,65}\right] = 11,38 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$\bar{t} = 11,38 \text{ cm}$$

prenez donc $t = 10 \text{ cm}$.

• Section a-a $T = 4671,53 \text{ kg}$ $z = \frac{7}{8} h = \frac{7}{8} 27,2 \quad z = 23,80 \text{ cm}$

$$\bar{\sigma}_b = \frac{4671,53}{100 \times 23,8} \quad \bar{\sigma}_b = 1,96 < 8,8 \text{ !! vérifiée}$$

$$f_{at} = 1 - \frac{1,96}{9 \times 7,65} \quad f_{at} = 0,97 \quad \bar{\sigma}_{at} = 0,97 \times 2400 \quad \bar{\sigma}_{at} = 2328 \text{ kg/cm}^2$$

$$t = \frac{4,01 \times 23,8 \times 2328}{4671,53} = 47,56 \text{ cm.}$$

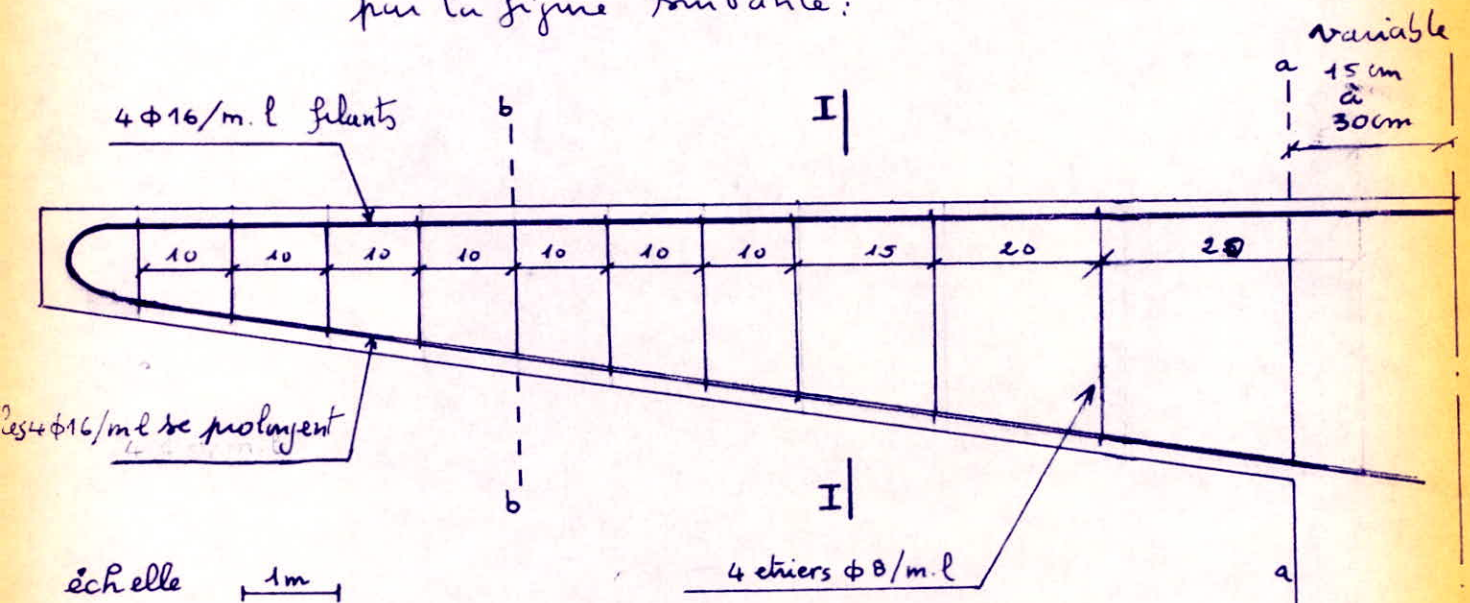
$$\bar{t} = \max \left\{ \begin{aligned} h \left(1 - \frac{0,3 \sigma}{\sigma_b} \right) &= 27,2 \left(1 - \frac{0,3 \cdot 1,46}{7,65} \right) = 25,11 \text{ cm} \\ 0,2 h &= 27,2 \times 0,2 = 5,44 \text{ cm} \end{aligned} \right.$$

$$\bar{t} = 25,11 \text{ cm}$$

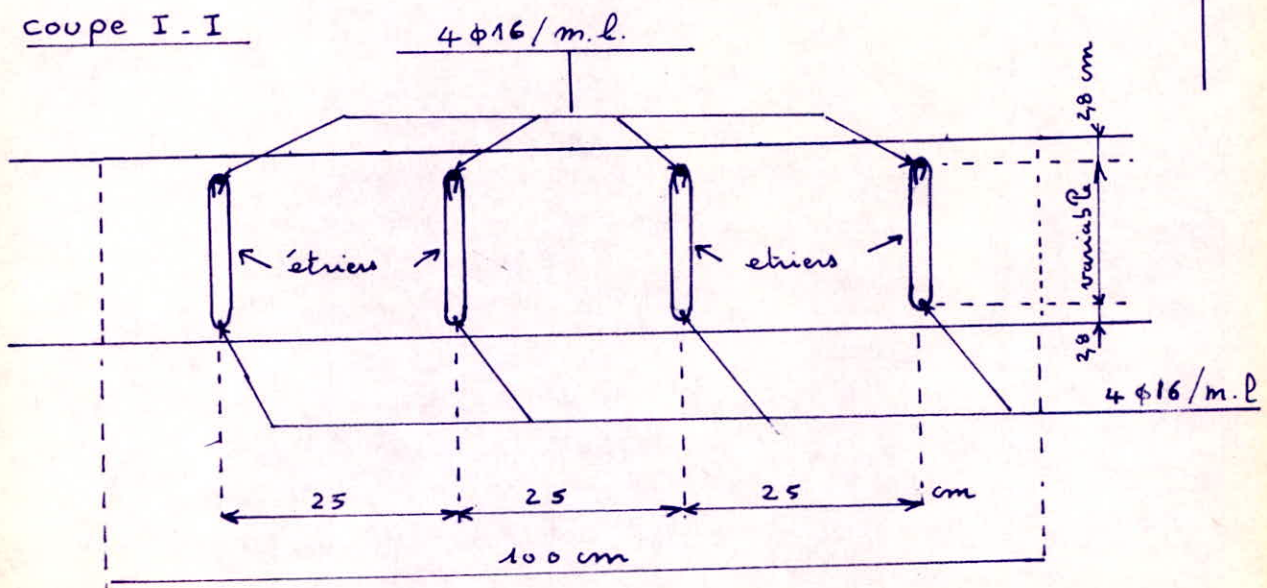
prenons donc $t = 25 \text{ cm}$.

Resumé Armature transversale: $8 \phi 8 / \text{ml}$ en Fe24.

C'est à dire 4 étriers/ml. L'espacement t est donné par la figure suivante:



coupe I - I



Chapitre X PLAQUE D'ABOUT

ET

ETUDE DES APPUIS

- I calcul et Ferrailage de la plaque d'about
- II vérification au renversement
- III Appuis.

Calcul des ABOUTS de la Poutre.

Le rôle du Bloc d'about, que l'on doit prévoir à chaque extrémité de la poutre, est principalement de répartir uniformément les forces localisées, exercées par les cônes d'ancrage sur cette plaque. Ainsi, cette plaque d'about sera préfabriquée et posée ensuite simplement dans le coffrage.

Elle sera préfabriquée pour les raisons suivantes:

- les cônes d'ancrages seront noyés dans cette plaque, et seront placés et inclinés avec autant de précision voulue.
- le béton des plaques étant plus âgé que le béton de la poutre, on peut avancer le délai de la mise en tension des aciers.
- le coffrage de la zone d'about ne sera pas nécessaire.

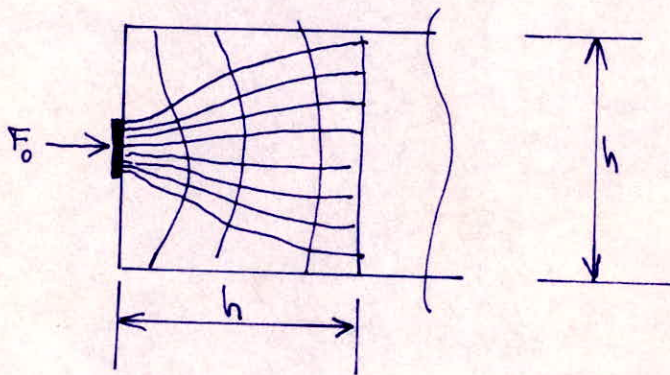
Mais, il est indispensable de prévoir des armatures, dans cette plaque au voisinage des cônes, et dans la zone voisine de cette plaque. (Cela est valable aussi pour les zones d'ancrage des câbles relevés sur la face supérieure de la poutre). Pour résister aux efforts considérables auxquels est soumis le béton.

Contrainte de compression et de traction du Béton:

Sous chaque ancrage, un effort de compression et de frottement valeur initiale F_0 s'exerce sur le béton.

si s est l'aire de la face d'appui de l'ancrage sur le béton, la contrainte du béton sous F_0 sera égale à: $\sigma'_b = \frac{F_0}{s}$

d'autre part, l'application de forces concentrees sur un prisme de beton cree des tractions transversales qui peuvent fissurer le beton. La zone interessee a une largeur egale a la hauteur de la poutre. en effet, la forme des lignes isostatiques qui s'epanouissent a partir de l'ancrage cree des poussées au vide qui produisent dans l'axe de la piece des contraintes transversales de traction.



en fait, en flexion, la plaque d'about forme une poutre transversale soumise a des forces concentrees; et le moment, et l'effort tranchant dus a ces forces peuvent etre calcules par la Statique en un point quelconque de cette poutre.

1°) Contrainte de compression du beton :

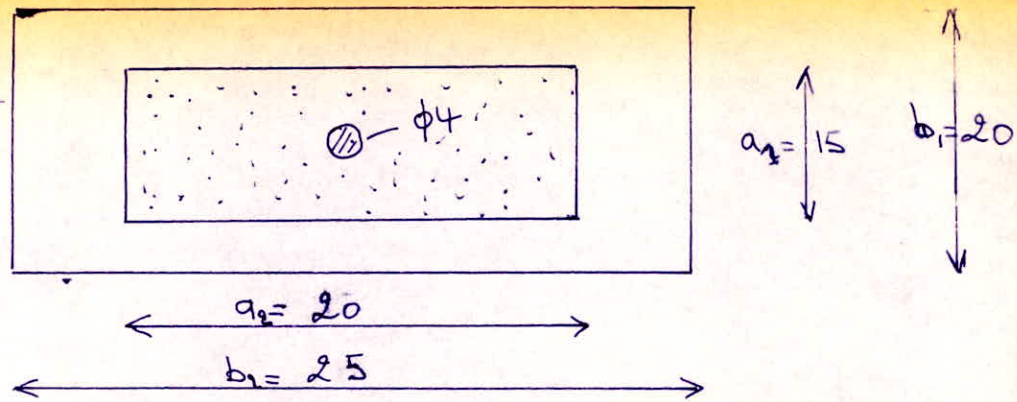
La tension initiale des cables est, compte tenu des pertes calculees precedemment, egale a : $134,81 \text{ kg/cm}^2$

(plus forte valeur pour l'ensemble des cables, voir tableau de calcul de pertes de tension).

d'autre part, l'aire de la surface d'appui de l'ancrage sur le beton

est :

$$S = 20 \times 15 - \frac{4,3^2 \cdot 3,14}{4} = 284,8 \text{ cm}^2$$



La section du câble $12\phi 8$ étant égale à 603 mm^2

La tension initiale est : $F_0 = 134,81 \times 603 \text{ kg}$.

d'où la contrainte du béton est :

$$\sigma'_b = \frac{F_0}{A} = \frac{81290}{284,8} = 285,43 \text{ kg/cm}^2$$

d'autre part, le règlement impose que la contrainte maximale du Béton sous l'ancrage ne doit pas dépasser la valeur suivante :

$$\sigma'_{b \text{ max}} \leq \frac{K}{1,6} \cdot \sigma'_f$$

avec :

$$\sigma'_f = \sigma'_{28} = 400 \text{ kg/cm}^2$$

$$K = 1 + \left(3 - \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} \right) \sqrt{\left(1 - \frac{a_1}{b_1} \right) \left(1 - \frac{a_2}{b_2} \right)}$$

$$K = 1,29$$

d'où :

$$\sigma'_{b \text{ max}} \leq 322,5 \text{ kg/cm}^2$$

par conséquent, on a bien : $\sigma'_b < \sigma'_{b \text{ max}}$

2°) Frettes: elles sont constituées de boucles fermées comme l'indique la figure ci-dessus. Les deux directions de frettes correspondent l'une aux efforts de sens y , l'autre aux efforts de sens z .

elles sont placées juste derrière l'ancrage et elle doivent équilibrer un effort de $\frac{F_0}{25}$.

$$\frac{F_0}{25} = \frac{81290}{25} = 3251,60 \text{ kg.}$$

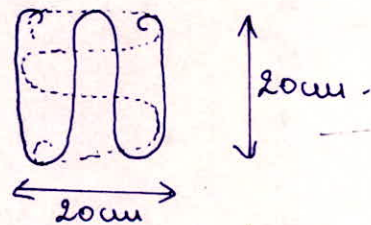
on choisit des armatures FeE 24 lisses. $\Rightarrow \bar{\sigma}_a = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
d'où, la section d'acier est:

$$A_g = \frac{3251,60}{1600} = 2,0$$

par conséquent, on choisira 4 brins de $\phi 8$.

$$\underline{4\phi 8 = 2,01 \text{ cm}^2.}$$

forme de frette:



3°) D'autre part, il apparaît un effort de surface de valeur $0,2 \cdot \left(\frac{a - a'}{a + a'}\right)^3 F_0$.

a et a' sont les distances de l'ancrage au prisme considéré. Il faudra résister au plus grand des efforts correspondants aux différents prismes à l'aide de lames verticales immédiatement derrière les frettes ci-dessus.

Ces lames seront assurées par des rebords d'équerre le long des parements supérieur et inférieur.

on prendra un T12 pour résister à cet effort de surface.

Effort d'éclatement :

pour l'évaluer approximativement, on applique la règle du prisme symétrique. (voir Guyon Tome II).

L'effort résultant est égal à :

$$T_e = 1,37 \frac{F_0}{4} (1 - \gamma) \approx \frac{F_0}{3} (1 - \gamma)$$

avec : $\gamma = \frac{2a_1}{2a}$.
- $2a_1$ est la largeur sur laquelle est répartie l'effort F_0 .
- $2a$ est la largeur du Prisme.

$$\gamma = \frac{15}{30} = 0,5.$$

d'où : $F_e = 1,37 \cdot 2 \cdot \frac{(81 \cdot 290)}{4} \cdot (1 - 0,5) = 2784,83 \text{ kg}$

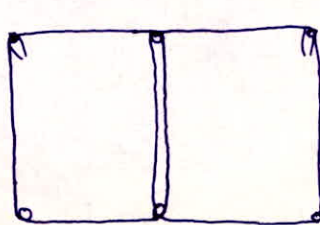
on a pris $2F_0$. car on a assemblé les cônes deux par deux.

pour reprendre cet effort d'éclatement, on placera des lattes en acier à haute adhérence. $\bar{\sigma}_a = 2800$.

La section d'acier nécessaire sera égale à :

$$A_{ed} = \frac{27,8 \cdot 10^3}{2800} = \underline{\underline{9,94 \text{ cm}^2}}$$

on utilisera 2 cadres de 4 brins chacun de T12.



$$8T12 = 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \frac{1,2^2}{4} \approx 10 \text{ cm}^2$$

1 cadre de 4 brins.

4°). En acier de la plaque d'about prefabriquée, l'âme de la poutre sera armée de cadres dont la section serait de l'ordre de 0,3 % de la section de l'âme. ces armatures seraient disposées entre les distances de la face d'appui :

$$d_1 = \frac{h}{3} = \frac{200}{3} = 66,7 \text{ cm et}$$

$$d_2 = \frac{5}{6}h = \frac{5}{6} \cdot 200 = 166,67 \text{ cm.}$$

Section de l'âme : à l'appui, l'âme a une épaisseur de 60 cm, et une hauteur de 200 cm par conséquent :

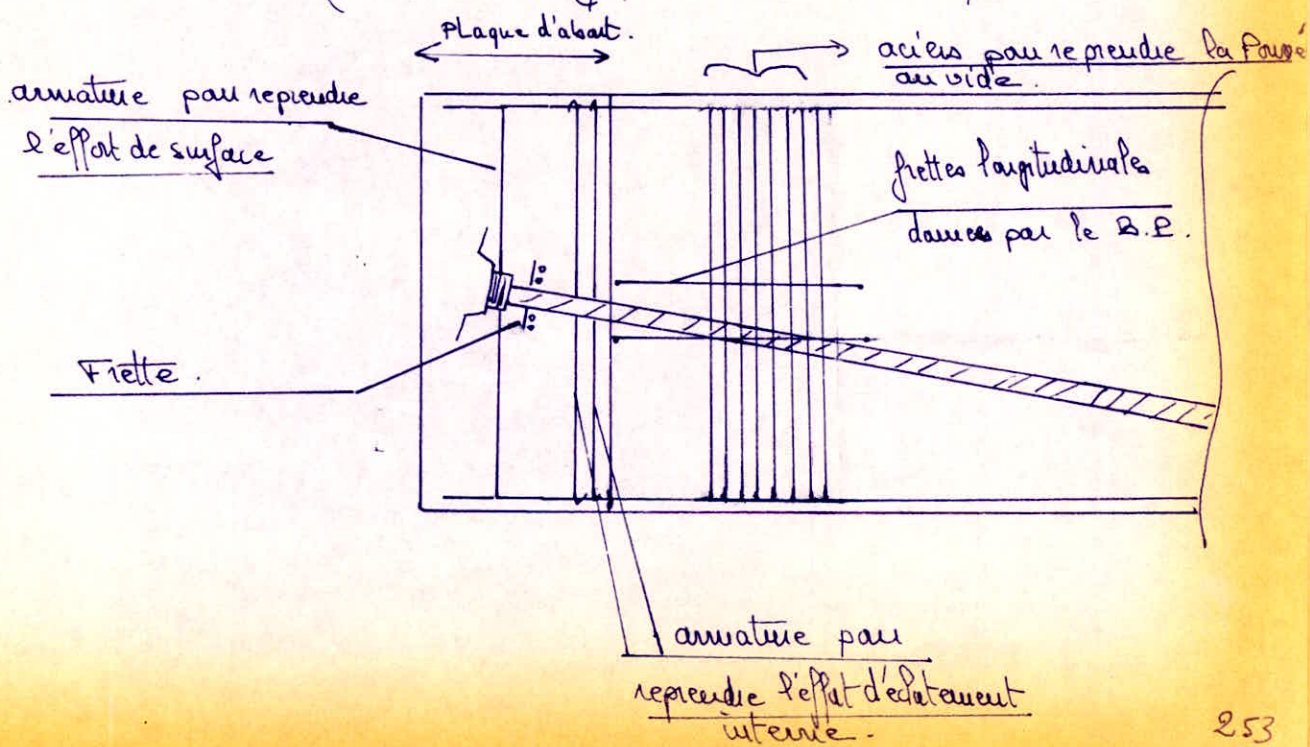
$$A_{\text{âme}} = 60 \times 200 = 12.000 \text{ cm}^2$$

$$0,3 \% \text{ de } A_{\text{âme}} = \frac{0,3 \cdot 12000}{100} = 36 \text{ cm}^2$$

en utilisant des aciers à haute adhérence T12.

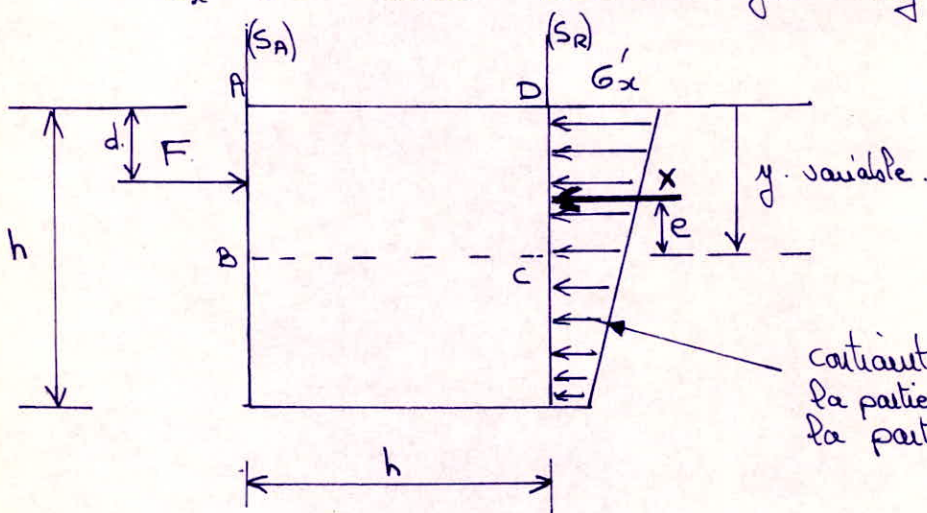
il nous faudra 8 spirales de 4 brins espacées de 12 cm

$$\left(8 \left(4 \cdot \pi \cdot \frac{1,2^2}{4} \right) = 36,19 \text{ cm}^2 \right)$$



Calcul de la zone d'appui d'après le règlement Français du Béton Précontraint :

l'extrémité de la pièce correspondant à la zone de régularisation des contraintes est considérée comme une partie de rivation.
 l'équilibre général de tout élément de cette zone, isolé par un plan de coupe parallèle à l'axe longitudinal de la pièce est obtenu en ajoutant aux effets appliqués sur ses faces extrêmes S_A et S_R un effet tranchant V_x (cisaillements longitudinaux) et un moment flechissant M (contraintes transversales) appliqués au plan de coupe. Il en résulte sur ce plan des contraintes tangentielles τ_x et des contraintes normales de flexion σ_y .



F est la force exercée par l'ancrage du câble sur la face d'about.
 Ainsi donc, l'équilibre de l'élément ABCD conduit aux sollicitations suivantes, sur le plan de coupe BC parallèle à l'axe longitudinal de la pièce, et défini par son ordonnée y .

effet tranchant : $V_x = F - x$

moment flechissant : $M_y = F(y - d) - x e$.

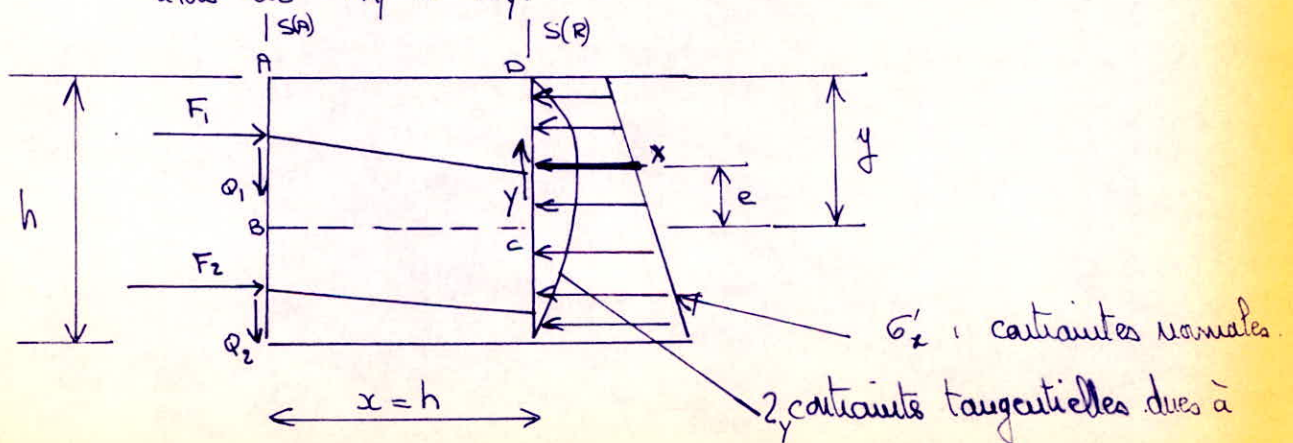
effet normal nul.

Les justifications de stabilité des zones de régularisation des contraintes sont effectuées dans l'état limite d'utilisation correspondant à la phase de mise en œuvre considérée, et consistent :

- une évaluation des contraintes du Béton, c'est à dire des contraintes ci-dessous définies : contrainte tangente Z_x et contrainte de traction ainsi que de la contrainte maximale de compression longitudinale σ_x ,
- la définition d'un ferrailage convenablement distribué pour pouvoir équilibrer M_y et V_x .

2) Forces de Précontrainte concentrees agissant sur la face d'about et inclinées sur l'axe longitudinal de la pièce :

il peut être admis que la largeur de la zone de régularisation des contraintes reste inchangée par rapport au cas où les faces sont parallèles à l'axe longitudinal de la pièce, l'équilibre général de tout élément de cette zone étant étudié comme indiqué ci-dessus. Toutefois, cet équilibre fait intervenir en plus de l'effort tranchant longitudinal V_x et du moment transversal M_y appliqués au plan de coupe, un effort normal transversal N_y . Les contraintes normales σ_y résultent alors de M_y et N_y .



$$\sum_y \sigma'_x = x$$

$$\sum_y Z_y = y ; \sum_{BC} Z_x = V_x$$

$$V_x = (Q_1 + Q_2)$$

L'équilibre de l'élément ABCD conduit aux sollicitations suivantes :

- effet tranchant : $V_x = F_1 - x$

- moment fléchissant : $M_y = F_1(y-d) - x \cdot e - (Q_1 + Y) \frac{x}{2}$

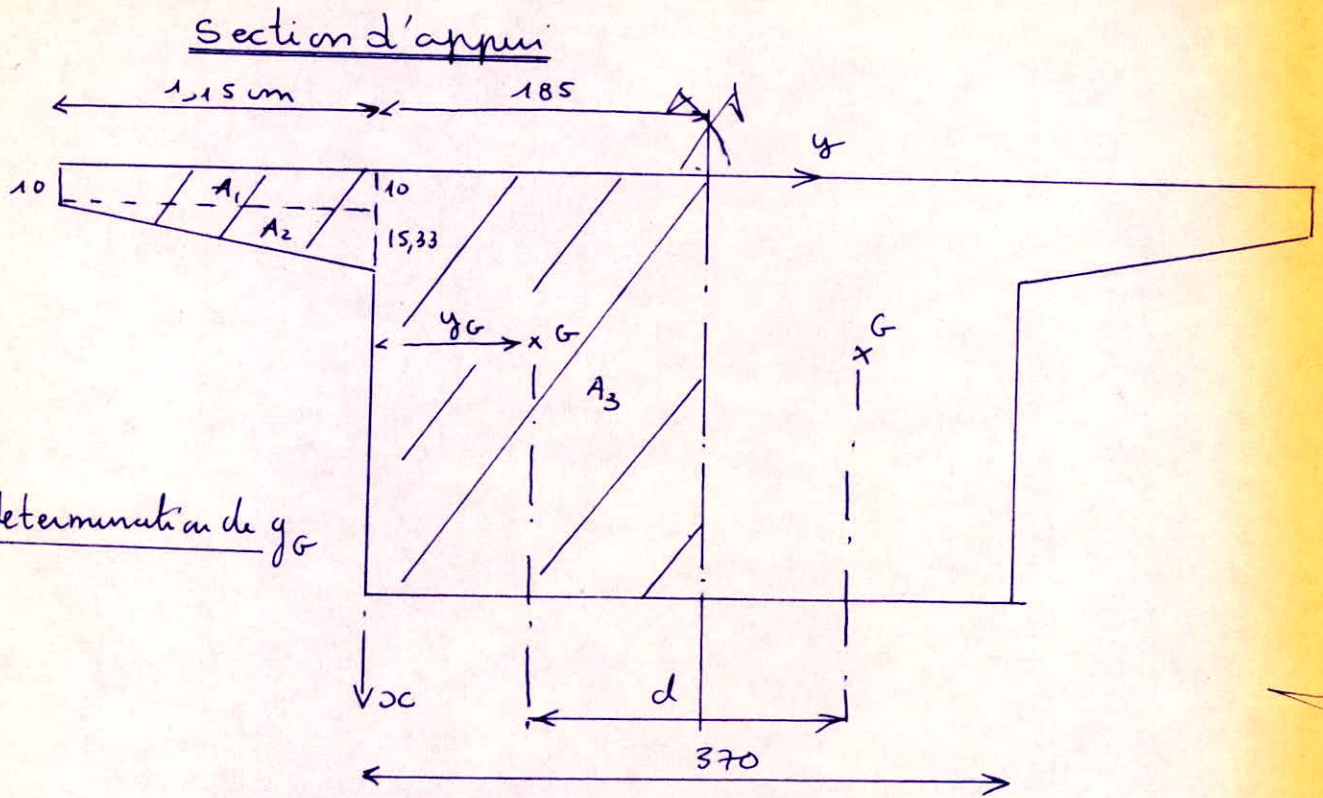
- effet normal : $N_y = Q_1 - Y$

Suivant le niveau considéré, N_y est un effet de compression ou de traction.

Pasque l'inclinaison des forces de précontrainte sur l'axe longitudinal de la pièce est importante, il y a lieu de considérer des plans de coupe

BC obliques

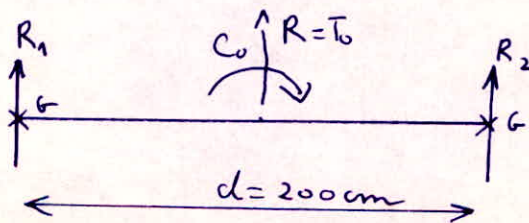
II Vérification au renversement



i	$\text{cm}^2 A_i$	y_i cm	$y_i \cdot A_i \cdot \text{cm}^3$
1	1150	-57,5	-66125
2	881,48	-38,33	-33790,07
3	37000	92,50	3422500
	39031,48		3317584,93

$$y_G = 85 \text{ cm}$$

$$\text{d'où } d = 2(185 - 85) \quad d = 200 \text{ cm}$$



• Calcul des réactions R_1 et R_2

$$R_1 + R_2 = T_0$$

$$(R_1 - R_2) \frac{d}{2} = C_0$$

$$\left. \begin{aligned} R_1 + R_2 &= T_0 \\ R_1 - R_2 &= \frac{2C_0}{d} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_2 &= -\frac{C_0}{d} + \frac{T_0}{2} \\ R_1 &= \frac{C_0}{d} + \frac{T_0}{2} \end{aligned}}$$

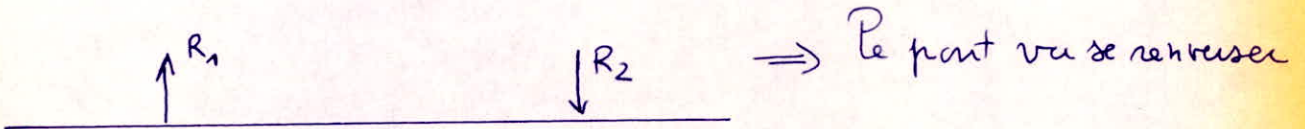
$$\begin{aligned} d &= 2 \text{ m} \\ C_0 &= 579,22 \text{ t/m} \\ T_0 &= 275,04 \text{ t} \end{aligned}$$

$$R_1 = \frac{579,22}{2} + \frac{275,04}{2}$$

$$R_1 = 427,13 \text{ t}$$

$$R_2 = -\frac{579,22}{2} + \frac{275,04}{2}$$

$$R_2 = -152,09 \text{ t}$$



il faut donc attacher le pont d'un côté pour éviter le renversement.

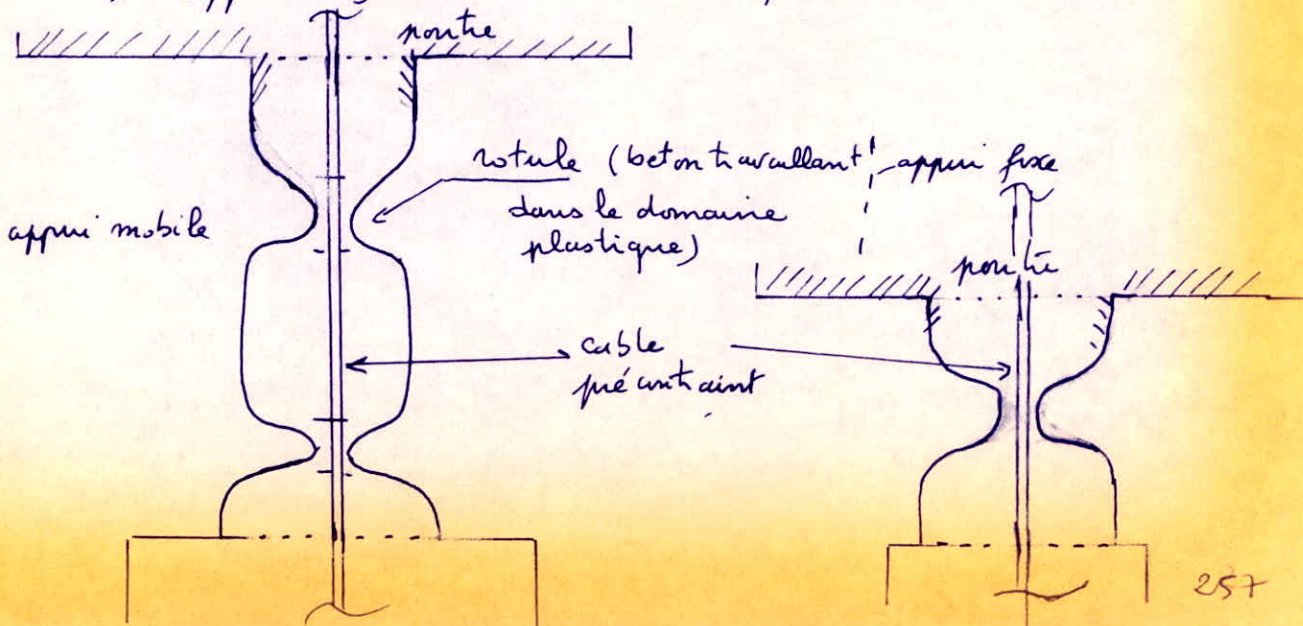
III. Appuis

Les appuis que l'on doit choisir doivent :

- éviter le renversement du pont.
- être des appuis simples (pour que le calcul des efforts soit juste car on avait supposé que le pont repose sur des appuis simples.)

on a 2 sortes d'appuis qui répondent à ces 2 conditions :

- appuis Freyssinet en béton précontraint



• voiles minces en béton précontraint

Pour notre cas, on choisit comme appuis des voiles minces en béton précontraint -

A- Caractéristiques de la section des voiles :

L'épaisseur et la hauteur des voiles doivent être choisies de telle façon que le moment flechissant engendré par les effets secondaires (dilatation - fluage - retrait - rotation ... etc) soit très faible afin que l'hypothèse faite dans la détermination des effets (appuis simples) soit vérifiée.

prenons $L = 370\text{cm}$ $e = 15\text{cm}$ $h = \begin{cases} 100\text{cm} \text{ appuis fixe} \\ 200\text{cm} \text{ appuis mobile} \end{cases}$
 $L = \text{longueur}$.
 $e = \text{épaisseur}$. $h = \text{hauteur}$.

$$I_x = \frac{L e^3}{12} = \frac{370 \cdot 15^3}{12} = 104062,5 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{e L^3}{12} = \frac{15 \cdot 370^3}{12} = 633162,5 \text{ cm}^4$$

$$B = 15 \times 370 = 5550 \text{ cm}^2$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{B} = 11408,33 \text{ cm}^2$$

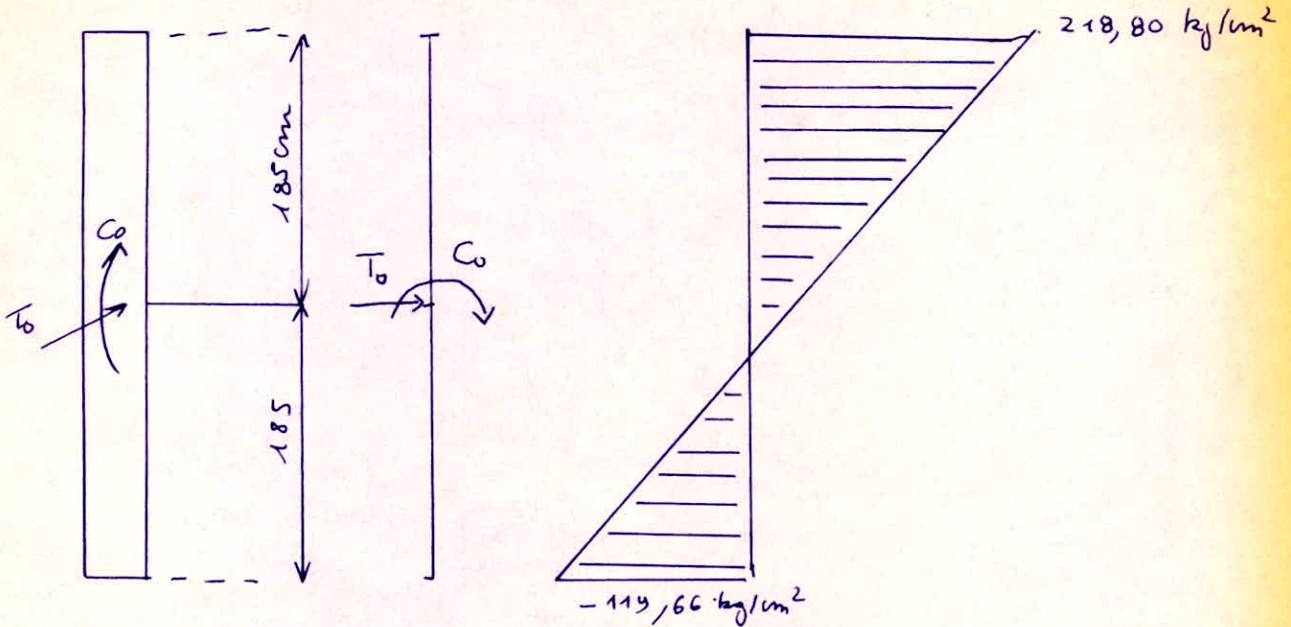
$B = 5550 \text{ cm}^2$	$I_x = 104062,5 \text{ cm}^4$	$I_y = 633162,5 \text{ cm}^4$	$i_y^2 = 11408,33$
-------------------------	-------------------------------	-------------------------------	--------------------

B- Calcul du nombre de cables précontraints

Chaque voile est soumis à une flexion composée :

- $C_0 =$ moment de flexion (M_y)
- $T_0 =$ effort de compression.

contraintes aux fibres extrêmes de la section du voile sous C_0 et T_0



$$\sigma = \frac{T_0}{B} + \frac{C_0 v}{I_{yy}} = \frac{275140}{5550} + \frac{579,2265 \times 185}{633162,50} = 218,80 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma' = \frac{T_0}{B} - \frac{C_0 v}{I_{yy}} = \frac{275140}{5550} - \frac{579,2265 \times 185}{633162,50} = -119,66 \text{ kg/cm}^2$$

• nombre de cable n :

on a: $\sigma_p' = \frac{N}{B} \left(1 - \frac{e v'}{r_y^2}\right)$ contrainte de compression
sur la fibre inférieure dû à l'effet de précontrainte N

$$N = n \cdot 50 \text{ t.} \quad v' = v = 185 \text{ cm} \quad r_y^2 = 11408,30$$

sait $e = -100 \text{ cm}$ l'excentricité des cables (en 1^{ère} approximation)
pour que le voile ne soit pas soumis à une traction il faut

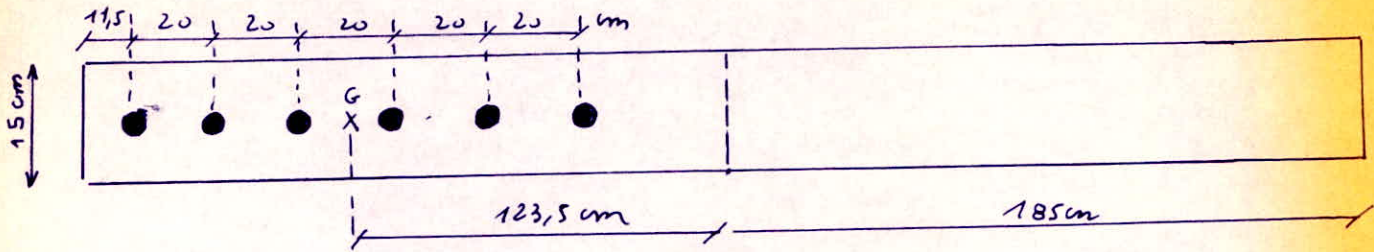
$$\text{que: } \sigma_p' + \sigma' \geq 0 \quad \sigma_p' \geq -\sigma' \quad \sigma_p \geq 119,66 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{50^3 n}{B} \left(1 - \frac{e v'}{r_y^2}\right) > 119,66 \Rightarrow 1050 n \geq \frac{119,66 \times 5550}{1 + \frac{100 \times 185}{11408,33}}$$

$$10^3 50 n \geq 253321,41 \Rightarrow n > 5,07 \text{ cables}$$

prenez $n = 6$ cables.

• disposition:

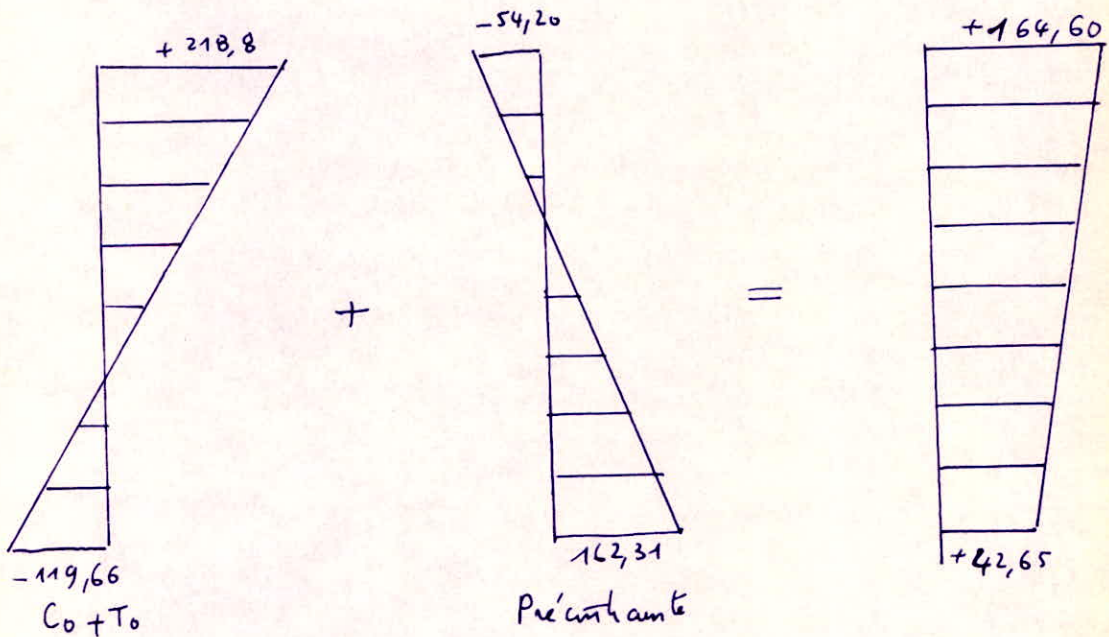


calcul des contraintes extremes pour cette disposition des cables:

$$e = -123,5 \text{ cm.}$$

$$\sigma_p = \frac{6 \times 50 \times 10^3}{5550} \left(1 - \frac{123,5 \times 185}{11408,30} \right) = -54,20 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_p' = \frac{6 \times 50 \times 10^3}{5550} \left(1 + \frac{123,5 \times 185}{11408,30} \right) = +162,31 \text{ kg/cm}^2$$



$$\sigma_{\text{compression}} = 164,20 < 0,42 \cdot 400 = 168 \text{ kg/cm}^2 \text{ !! vérifié}$$

C. Calcul des moments aux extrémités des voiles

α- Rotation et déplacements dans les appuis-

1. Calcul des rotations d'appuis (identiques pour les 2 appuis)

dans le cas d'une poutre circulaire, chargée uniformément, les rotations d'appuis sont données par:

$$\theta = \frac{1}{2} p r^3 \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \left(\frac{(1 - \cos \lambda)(\lambda - \sin \lambda)}{\sin^2 \lambda} \right) - \frac{p r^3}{GK} \left(\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} \right)$$

$\frac{1}{GK}$ est très petit pour une poutre Caisson.
d'où

$$\theta \approx \frac{1}{2} p r^3 \frac{1}{EI} \frac{(1 - \cos \lambda)(\lambda - \sin \lambda)}{\sin^2 \lambda}$$

à l'appui $I = 1,018 \text{ m}^4$ $E = 4,2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$ $\lambda = 35,69 = 0,62$

a) $g = \frac{11,021 \text{ t/m}}{60}$ (charge permanente)

$$\theta_G = \frac{1}{2} 11,021 \times 60^3 \left(\frac{1}{4,2 \cdot 10^6 \times 1,0184} \right) \frac{(1 - \cos 35,69)(0,6229 - \sin 35,69)}{\sin^2(35,69)}$$

$$\theta_G = 0,0061$$

$$M_{\text{surcharge}} \ll M_G \Rightarrow \theta_S \ll \theta_G$$

$$\text{prenons } \theta_S = 0,5 \theta_G$$

$$\text{soit } \theta_G + \theta_S = 1,5 \theta_G = 0,0091.$$

sous charge permanente $\theta_G = 0,0061$.

sous surcharge + charge permanente $\theta_{GS} = 0,0091$.

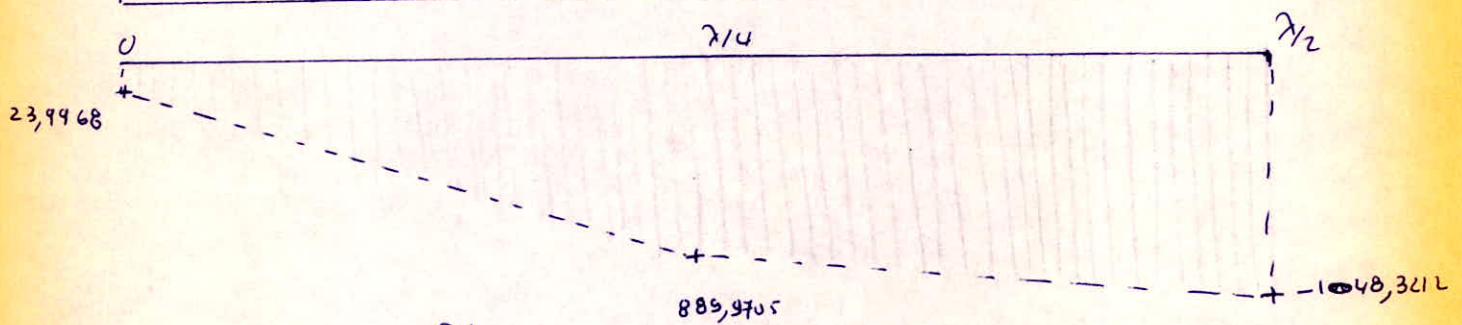
b) rotation sous précontrainte

soit M_p : moment due à la précontrainte

$$\theta_p = \frac{1}{2EI} \int_0^\lambda M_p \text{ doc.}$$

tableau donnant M_p pour les sections : milieu - $\frac{\lambda}{4}$ et about.

Section	N	e	$M_p = Ne \text{ t.m}$
$\lambda/2$	1074,54	-97,56	-1048,3212
$\lambda/4$	1005,73	-88,44	-889,9705
about	691,55	-3,47	-23,9968



$$\int_0^{\lambda} M dx = 2 \int_0^{\lambda/2} M dx \approx 2 \left[\frac{1048,32 + 889,97}{2} + \frac{889,97 + 24}{2} \right] \frac{37,37}{4}$$

$$\approx 26647,24 \text{ t.m}^2$$

d'où $\theta_p = -\frac{1}{2EI} \int_0^{\lambda} M dx = -\frac{1}{2 \times 1,4 \times 10^6 \times 1,018} \times 26647,24$ ($E_G = \frac{1}{3} E$)

$$\theta_p = -0,0093$$

c) rotation sous combinaison (Résultantes)

a vide:

$$\theta_0 = \theta_G + \theta_p = 0,0061 - 0,0093 = -0,0032$$

en charge:

$$\theta_c = \theta_{G-S} + \theta_p = 0,0091 - 0,0093 = -0,0002$$

2. Calcul des déplacements dus à la dilatation (+) - retrait - fluage
pour l'appui mobile - (voie de hauteur 200 cm)

Le retrait, fluage, dilatation sont repris uniquement par l'appui mobile
a - dilatation

On admet en général un coefficient de dilatation thermique de l'ordre 10^{-5} . Ce coefficient est assez difficile à préciser il dépend en particulier de la grosseur et surtout de la nature des granulats -

prenons $\frac{\Delta l_t}{l} \approx 10^{-4}$

$$\Delta l_t = \pm 10^{-4} \cdot l = \pm 10^{-4} \cdot 37,37$$

$$\Delta l_t = \pm 0,0037 \text{ m}$$

b) retrait

$$\Delta r = -3 \cdot 10^{-4} \cdot l = -3 \cdot 10^{-4} \cdot 37,37$$

$$\Delta r = \pm 0,0112 \text{ m}$$

(c'est un phénomène de raccourcissement qui accompagne la prise du ciment ; on peut l'assimiler à l'effet d'un abaissement de température entraînant un raccourcissement Δr ; on prend

en moyenne $\frac{\Delta l}{l} = 3 \cdot 10^{-4}$)

convention de signe: - \rightarrow raccourcissement
 + \rightarrow allongement.

c) fluage

$$\Delta f = -l \frac{\sigma'_m}{E_v}$$

• calcul de σ'_m

σ'_A = contrainte de compression du béton sur la fibre inférieure à l'appui.

σ'_M = contrainte de compression du béton sur la fibre supérieure en la section milieu.

$$3,36 = \frac{9216^3 \times 3,47}{101846945} = 3,36$$

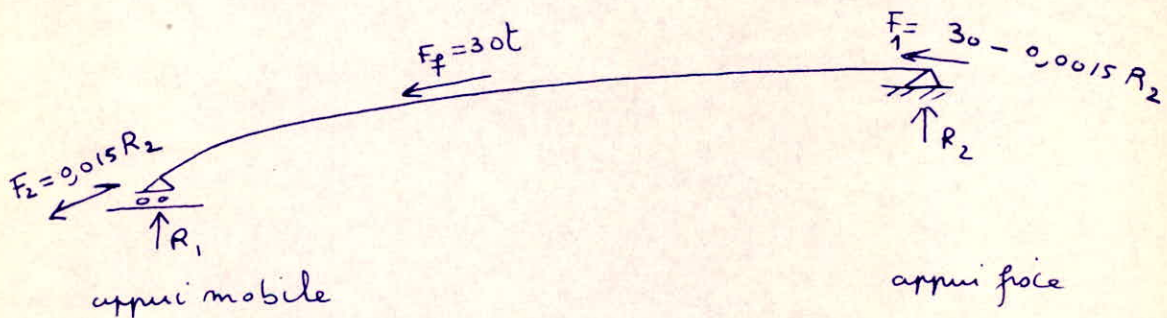
$$2,56 = \frac{7026^6 \times 3,47}{101846945} = 2,56$$

	σ'_A à l'appui	σ'_M au milieu
En service	3,36	41,55
à la mise en tension	2,56	80,03
valeur moyenne	4,30	60,79

d'où $\sigma'_m = \frac{+}{2} = 32,55 \text{ kg/cm}^2 = 325,5 \text{ t/m}^2$
 et le déplacement dû au fluage sur l'appui mobile

$$\Delta_f = -l \times \frac{\sigma'_m}{E} = -37,37 \times \frac{325,5}{1,4 \cdot 10^6} \quad \Delta_f = -0,0087 \text{ m}$$

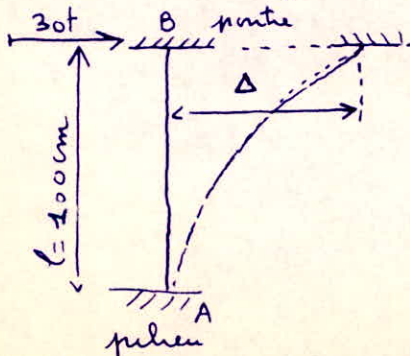
3. déplacement du à la force de freinage sur l'appui fixe



sur l'appui fixe on a $F_1 = 30 - 0,0015 R_2$

Soit $F_1 \approx 30t$ (on est en sécurité).

schéma statique de l'appui fixe



$$\text{on a } M_{AB} = M_{BA} = \frac{6EI\Delta}{l^2}$$

$$30t = T_A = T_B = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} = \frac{12EI\Delta}{l^2 \cdot l}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{T_A \times l^3}{12EI_x}$$

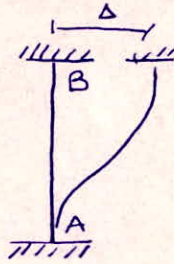
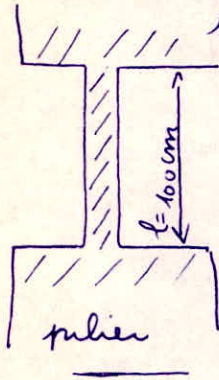
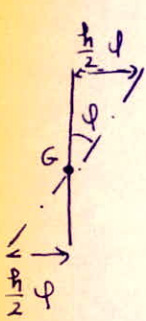
$$I_x = 104062,5 \text{ cm}^4 = 104062,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 = 1,040625 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$E = 4,2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$\Delta = \frac{30 \times 1^3}{12 \times 4,2 \cdot 10^6 \cdot 1,040625 \cdot 10^{-3}}$$

$$\Delta = 5,72 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

β. Moment flechissant dans l'appui fixe: on a adopté des voiles encastées comme appuis; les rotations et déplacements engendrent donc des moments



dans une poutre parfaitement encastée à ses deux extrémités non chargée et dont l'appui B se déplace de Δ par rapport à A, le moment M_{BA} engendré en B par Δ est:

$$M_{BA} = \frac{6EI\Delta}{l^2}$$

dans le cas où la section en B tourne d'un angle φ ; le point B se déplacera de $\Delta = \varphi \cdot \frac{l}{2}$; d'où le moment engendré par une rotation en B, dans la section B:

$$M_{BA} = \frac{6EI \cdot \varphi \cdot \frac{l}{2}}{2l^2} = \frac{3EI\varphi}{l}$$

Conclusion:

$$\text{déplacement } \Delta \Rightarrow M = \frac{6EI\Delta}{l^2}$$

$$\text{rotation } \varphi \Rightarrow M = \frac{3EI\varphi}{l}$$

L'appui fixe est soumis:

- rotation (poids propre, précontrainte, surcharge)
- Force de Freinage.

à noter:

$$\cdot \vartheta_0 = -0,0032 \text{ uniquement}$$

$$M_0 = \frac{3 \times 4,2 \cdot 10^6 \times 1,04 \cdot 10^{-3} \times 0,0032}{1}$$

$$M_0 = 41,93 \text{ t.m.}$$

en charge: Θ + force de freinage.

$$\Theta = -0,0002$$

$$\Delta = \pm 5,72 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$M = M_{\Theta} + M_{\Delta} = \frac{3 \times 4,2 \cdot 10^6 \times 1,04 \cdot 10^{-3} \times 0,0002}{1} + \frac{6 \times 4,2 \cdot 10^6 \times 1,04 \cdot 10^{-3} \times 5,72 \cdot 10^{-4}}{12}$$

$$\text{Soit } M = 17,61 \text{ t.m}$$

Resumé: appui fixe.

$$\left. \begin{array}{l} \text{à vide } M = 41,93 \text{ t.m.} \\ \text{en charge } M = 17,61 \text{ t.m.} \end{array} \right\} M_{\max} = 41,93 \text{ t.m.} \text{ appui fixe}$$

$$M_{\max} = 41,93 \text{ tm} \lll M_{\text{travée}} = 1311,02$$

$$\frac{M_{\max}}{M_{\text{travée}}} = \frac{41,93}{1311,02} = 0,032 = 3,2\%$$

8- appui mobile

L'appui mobile est soumis:

- rotation (poids propre, surcharge, précontrainte)
- déplacement (dilatation, fluage, retrait)
le déplacement dû à la force de freinage est négligeable. ($30 - 0,015 R$).

déplacement total:

$$\Delta = \Delta_{\ell} + \Delta_2 + \Delta_f$$

ou:

$$\Delta = -0,0236 \text{ m.}$$

ou bien $\Delta = -0,0162 \text{ m.}$

$$\Delta = -0,0236 \text{ m} \Rightarrow M_{\Delta} = \frac{6 \times 4,2 \cdot 10^6 \times 1,04 \cdot 10^{-3} \times 0,0236}{2^2} = 154,63 \text{ t.m}$$

$$\Delta = -0,0162 \text{ m} \Rightarrow M_{\Delta} = \frac{6 \times 4,2 \cdot 10^6 \times 1,04 \cdot 10^{-3} \times 0,0162}{2^2}$$

$$M_{\Delta} = 106,14 \text{ tm}$$

donc $M_{\Delta} \begin{cases} 154,63 \text{ t.m} \\ 106,14 \text{ tm} \end{cases}$

• calcul de M_{θ}

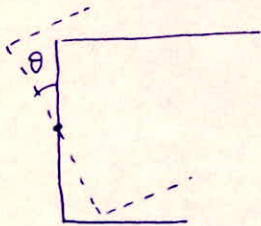
à vide $\theta = -0,0032$ ^{c'est} la précontrainte qui l'emporte

$$M_{\theta_0} = \frac{3 \times 4,2 \cdot 10^6 \times 1,04 \cdot 10^{-3} \times 0,0032}{2} = 20,97 \text{ tm}$$

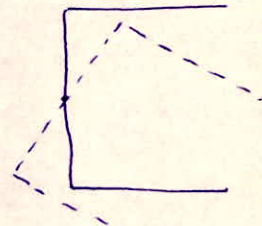
en service $\theta = -0,0002$ c'est la précontrainte qui l'emporte également

$$M_{\theta} = \frac{3 \times 4,2 \cdot 10^6 \times 1,04 \cdot 10^{-3} \times 0,0002}{2} = 1,31 \text{ t.m}$$

• calcul de $M_{\theta} + M_{\Delta}$



à vide ou en service
(la précontrainte l'emporte)



allongement + retrait + fluage

Le retrait et le fluage
l'emporte sur la dilatation
(on a donc recroisement)

donc le moment résultant est la
différence entre M_{Δ} et M_{θ}

$$M = M_{\Delta} - M_{\theta}$$

• à vide:

$$M = \begin{cases} 154,63 - 1,31 = 153,32 \text{ t.m} \\ 106,14 - 1,31 = 104,83 \text{ t.m} \end{cases}$$

• en service en charge:

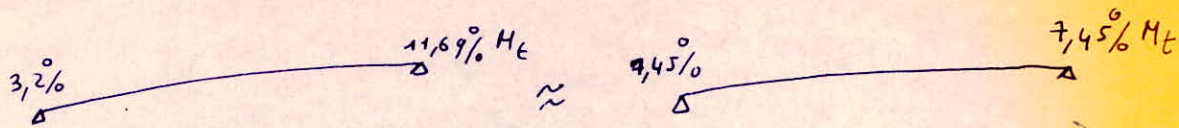
$$M = \begin{cases} 154,63 - 20,97 = 133,66 \text{ tm} \\ 106,14 - 20,97 = 85,17 \text{ tm} \end{cases}$$

d'où le moment maximum sur l'appui mobile:

$$M_{\max} = 153,22 \text{ t.m} \lll 1311,02 \text{ tm}$$

$$\frac{153,32}{1311,02} = 11,69\%$$

5 - conclusion:

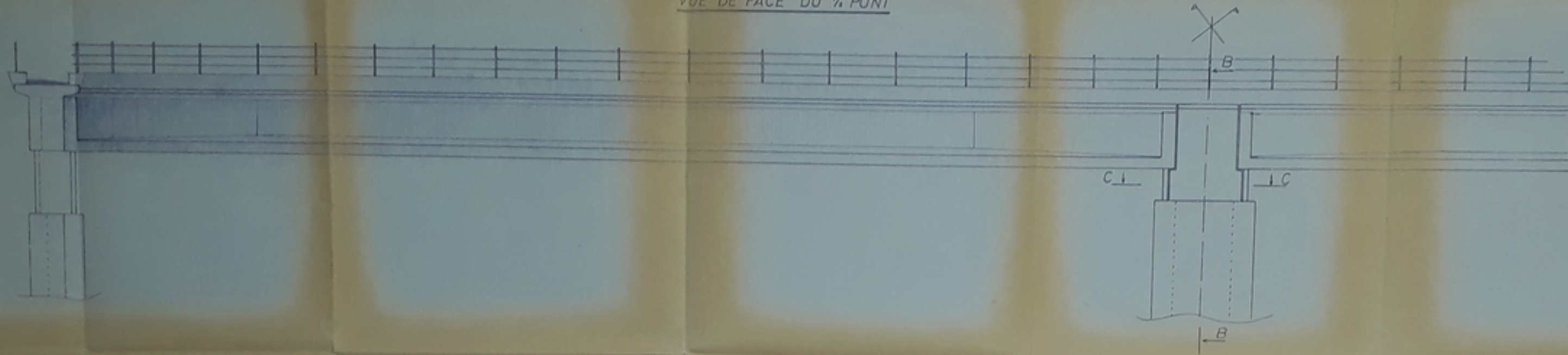


Les moments aux appuis (en prenant des voiles munies) sont faibles.

Par conséquent, ils n'introduisent pas une grande erreur sur les valeurs des moments calculés en supposant que le pont repose sur des appuis simples.

C'est à dire l'effet des moments sur les appuis, sur les moments calculés en prenant des appuis simples est négligeable -

VUE DE FACE DU 1/4 PONT



UNIVERSITE D'ALGER
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

ETUDE D'UN PONT COURBE
EN PRÉCONTRAÎNTE

VUE DE FACE 1/2 PONT ET COUPES

Echelle VUE 1/50 COUPES 1/25

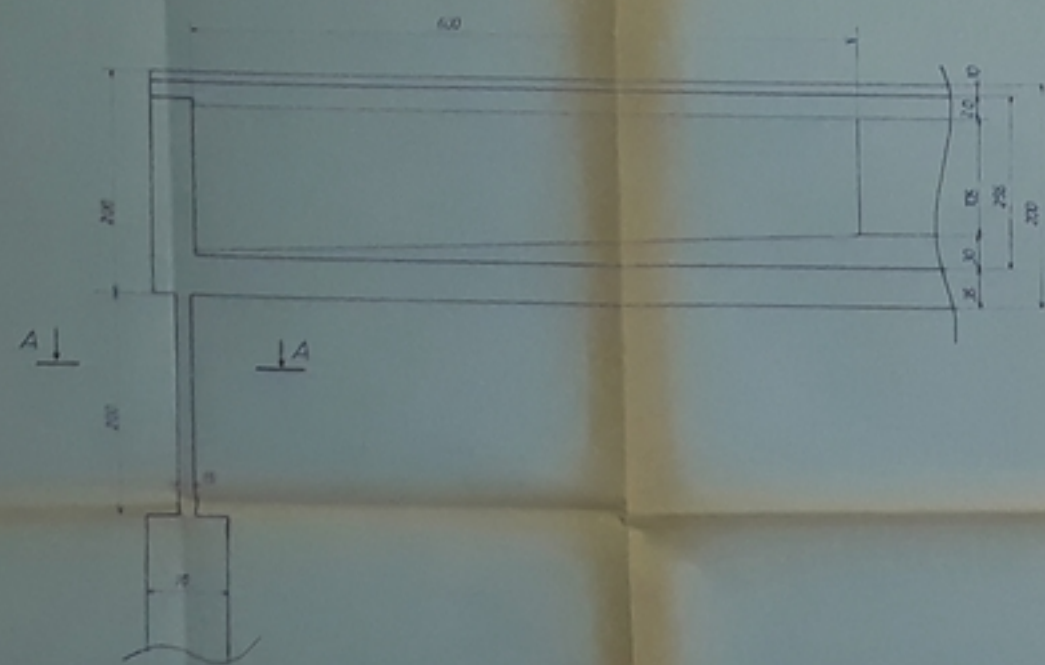
ECEVES-INGÉNIEURS

RUI MOUSSA - BABAAMMI AHMED

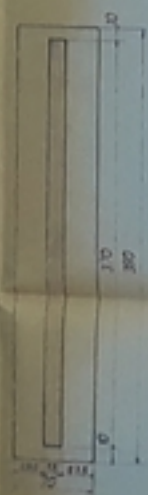
PROMOTEUR P BONNEVILLE

DATE 23 6 79

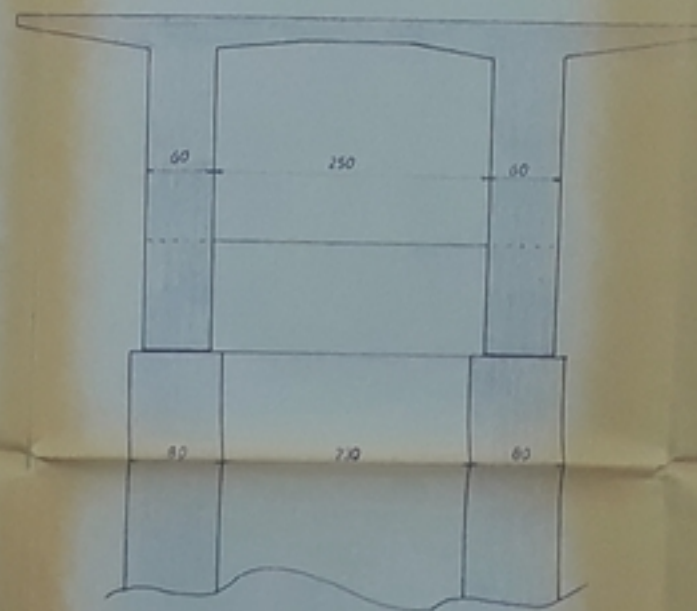
DETAIL ABOUT EXTREME



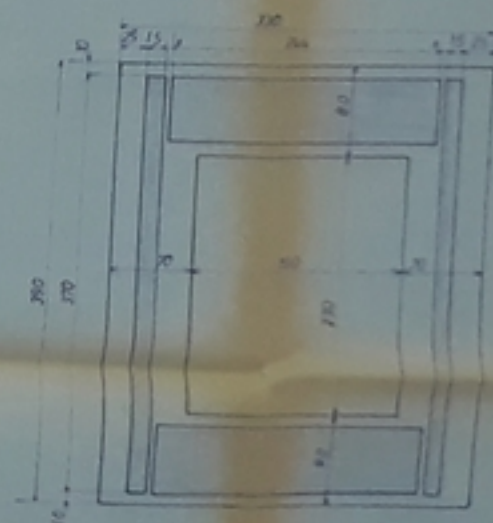
COUPE A-A



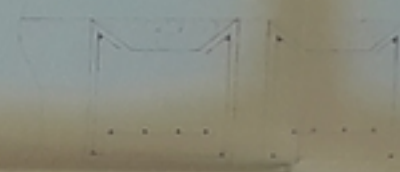
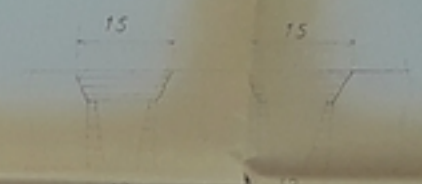
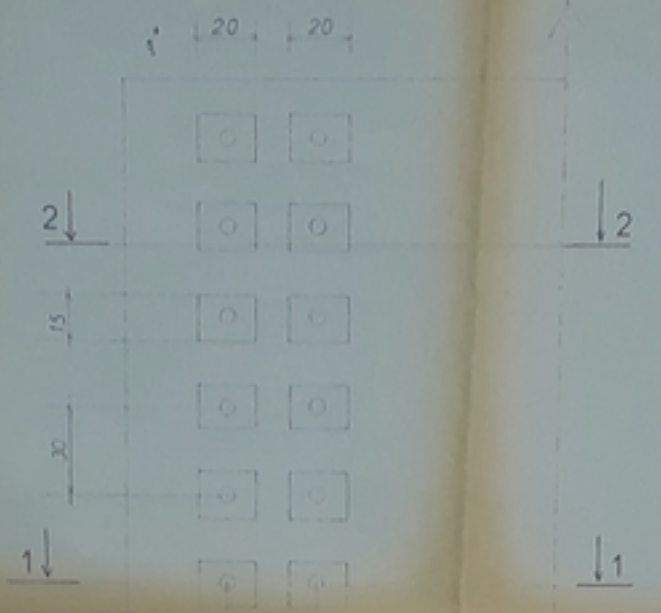
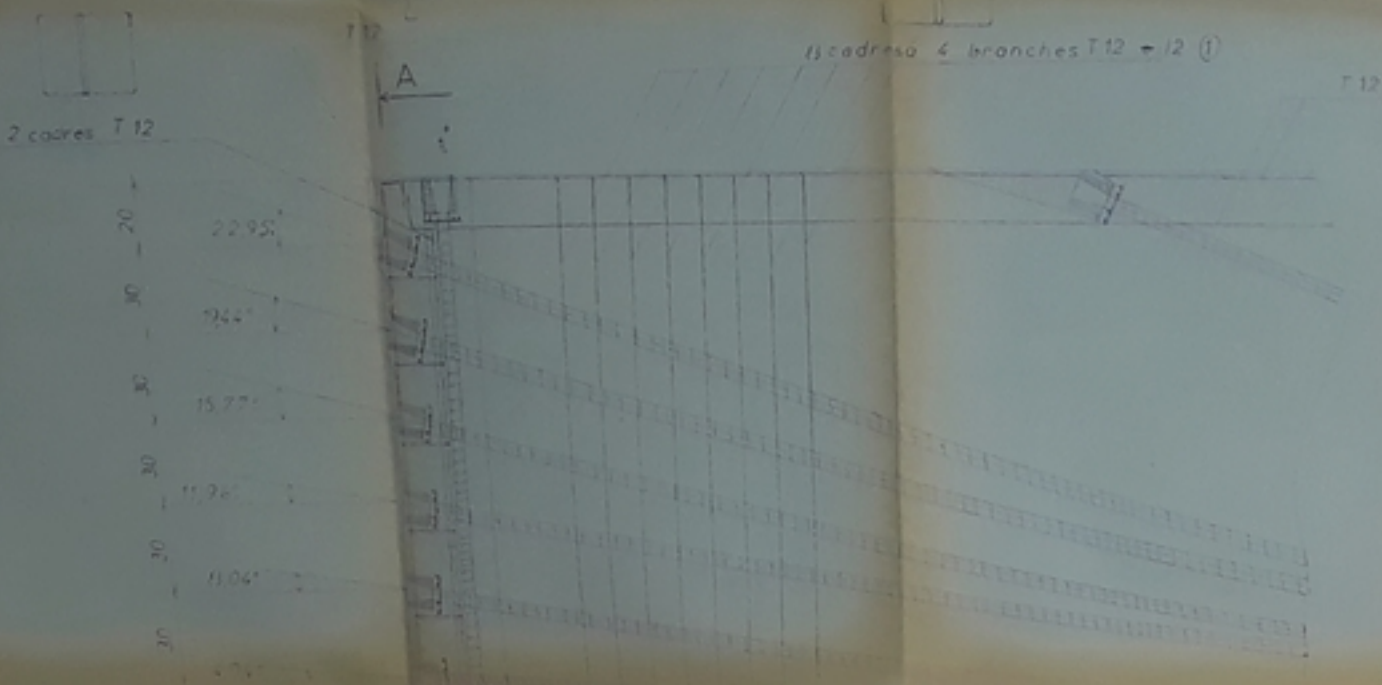
COUPE B-B



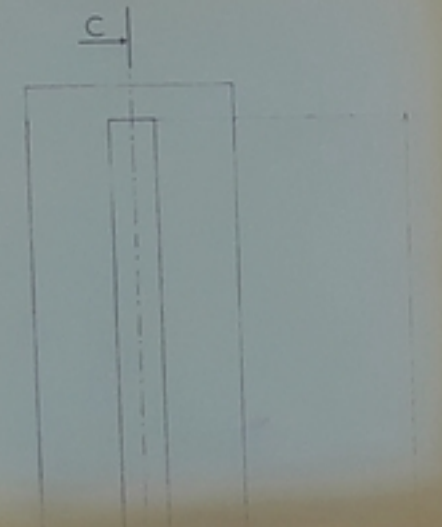
COUPE C-C



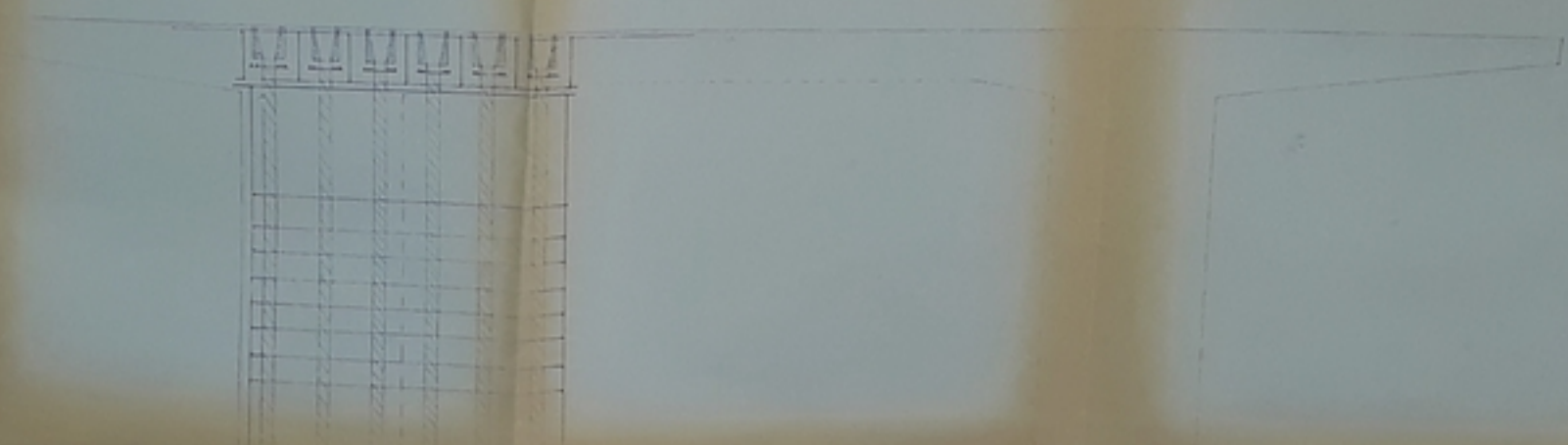
PB 016 F 3
T. 4.



FERRAILLAGE ZONE AIBOUT



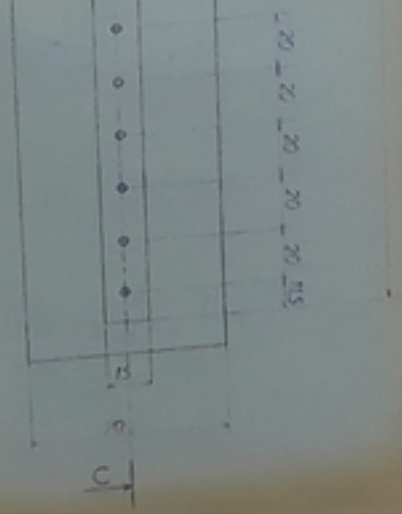
COUPE A-A



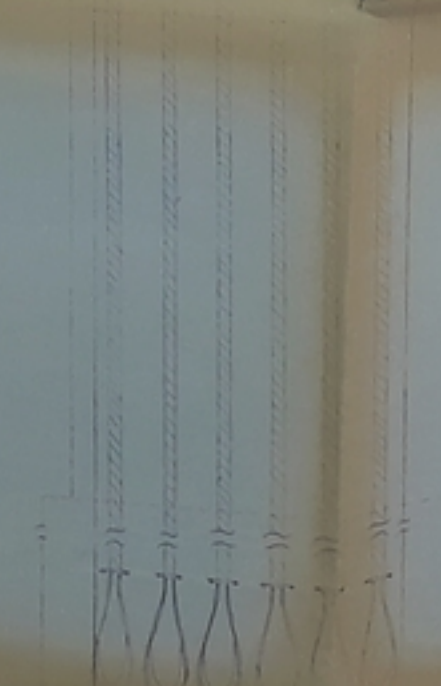
COUPE 1-1

COUPE 2-2

COUPE B-B

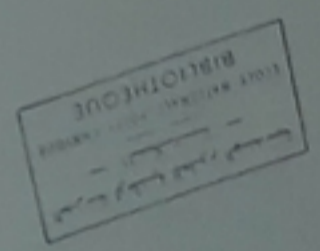
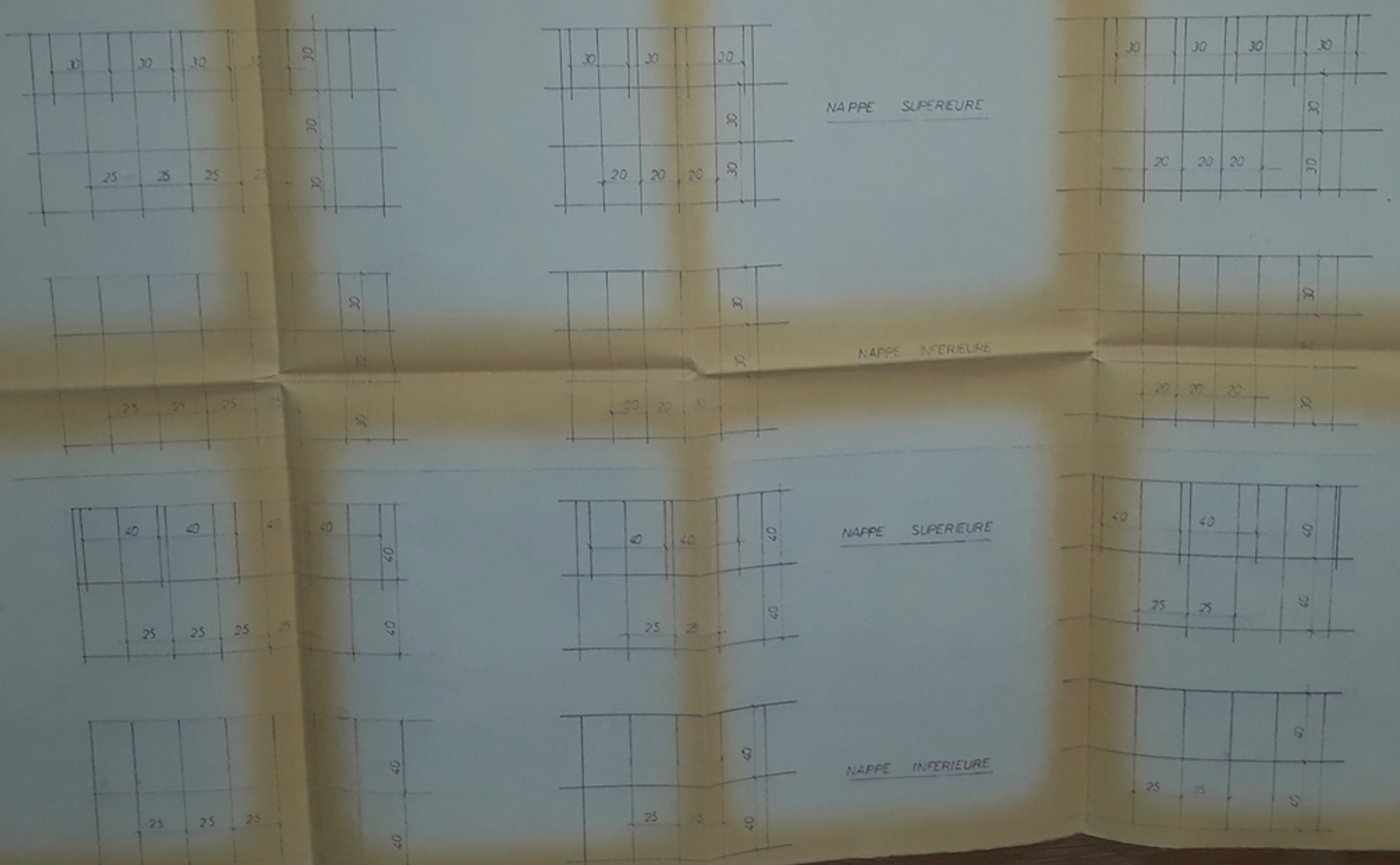
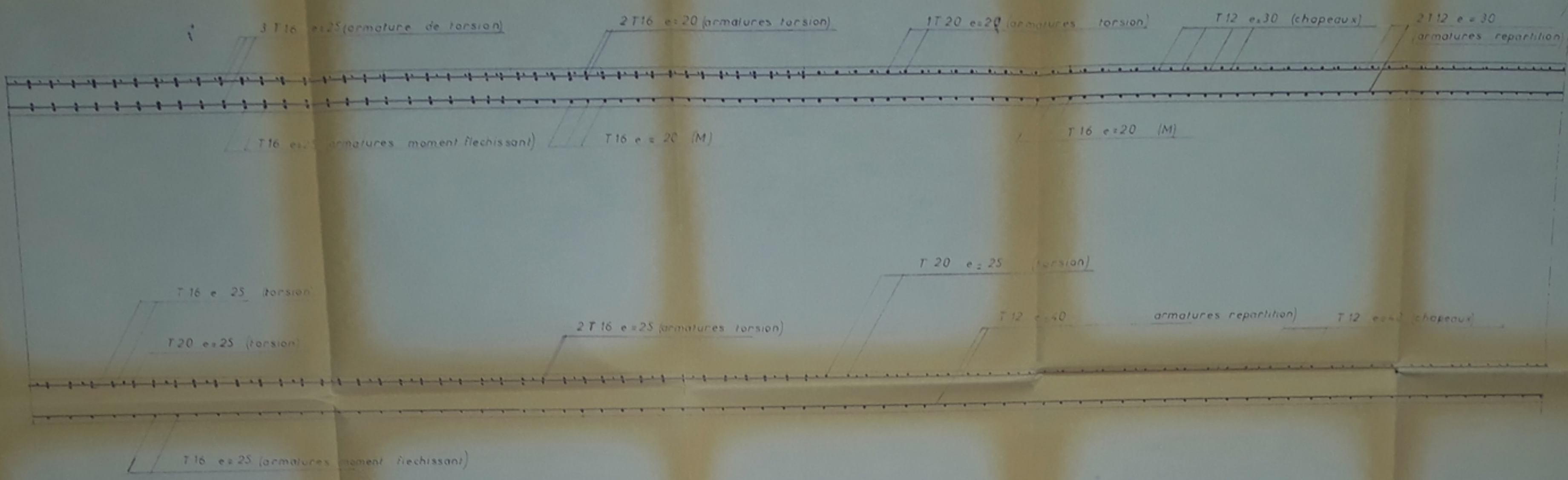


COUPE C-C



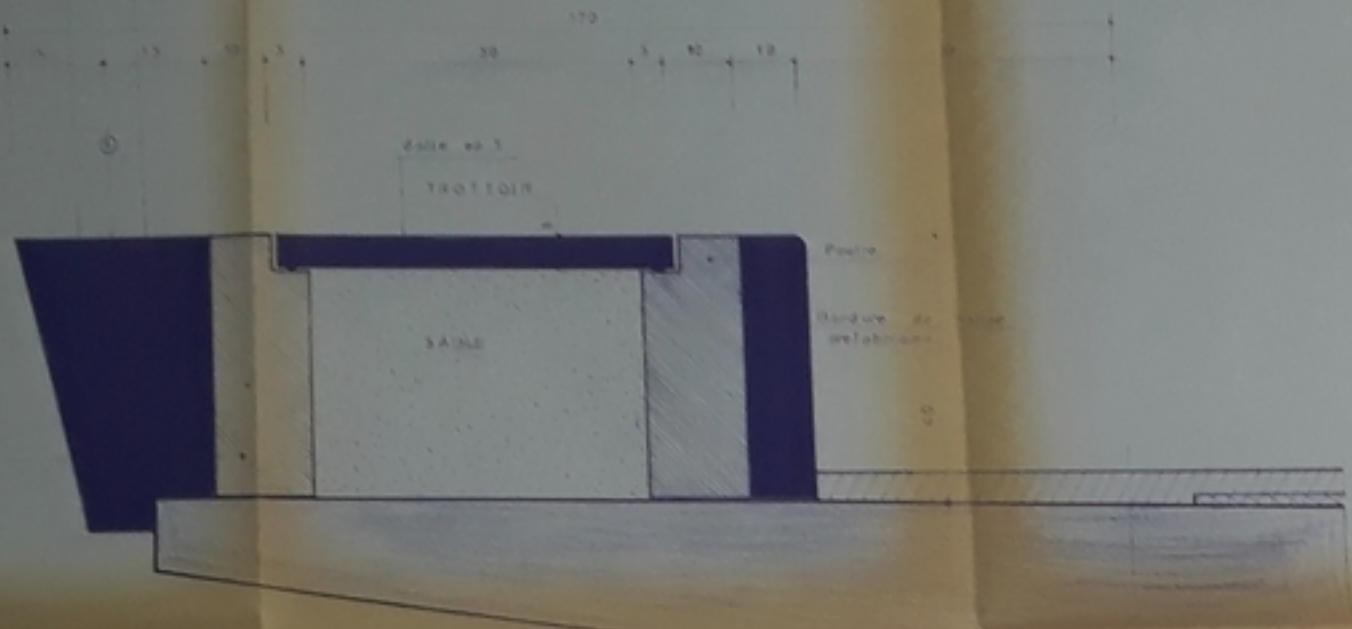
UNIVERSITE D'ALGER
 ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
 ETUDE D'UN PONT COURBE
 EN PRECONTRAITE
 FERRAILLAGE DE L'AIBOUT
 &
 DETAIL DE L'APPUI MOBILE
 ECHELLE 1/10
 ELEVES INGENEURS
 BAIBAAMMI AHMED & RILI MOUSSA
 PROMOTEUR P BONNEVILLE
 DATE 23/06/79

COUPE LONGITUDINALE DE LA DALLE

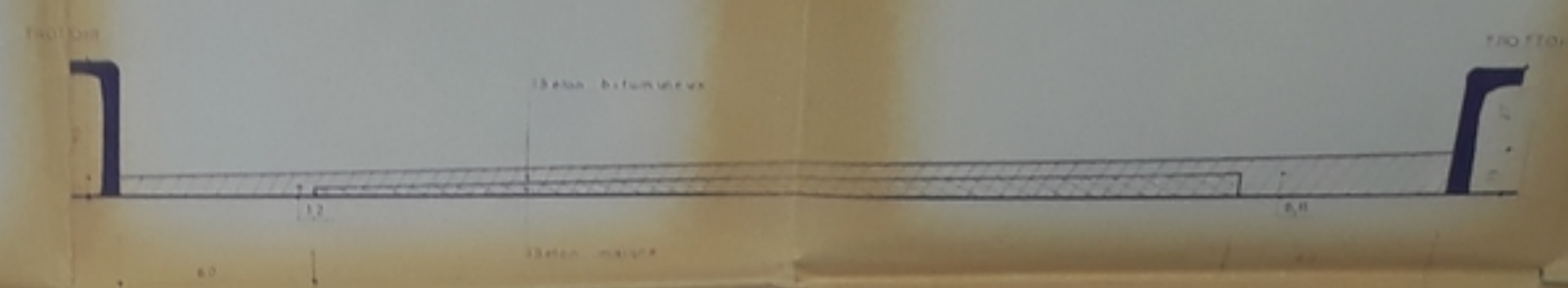


UNIVERSITE D'ALGER
 ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
 ETUDE D'UN PONT COURBE
 EN PRECONTRAINTE
 ARMATURES
 DALLE SUPERIEURE
 &
 DALLE INFERIEURE
 ECHELLE 1/10 & 1/20
 ELEVES INGENIEURS
 BABANMI AHMED &
 PROMOTEUR
 DATE 28/04/99

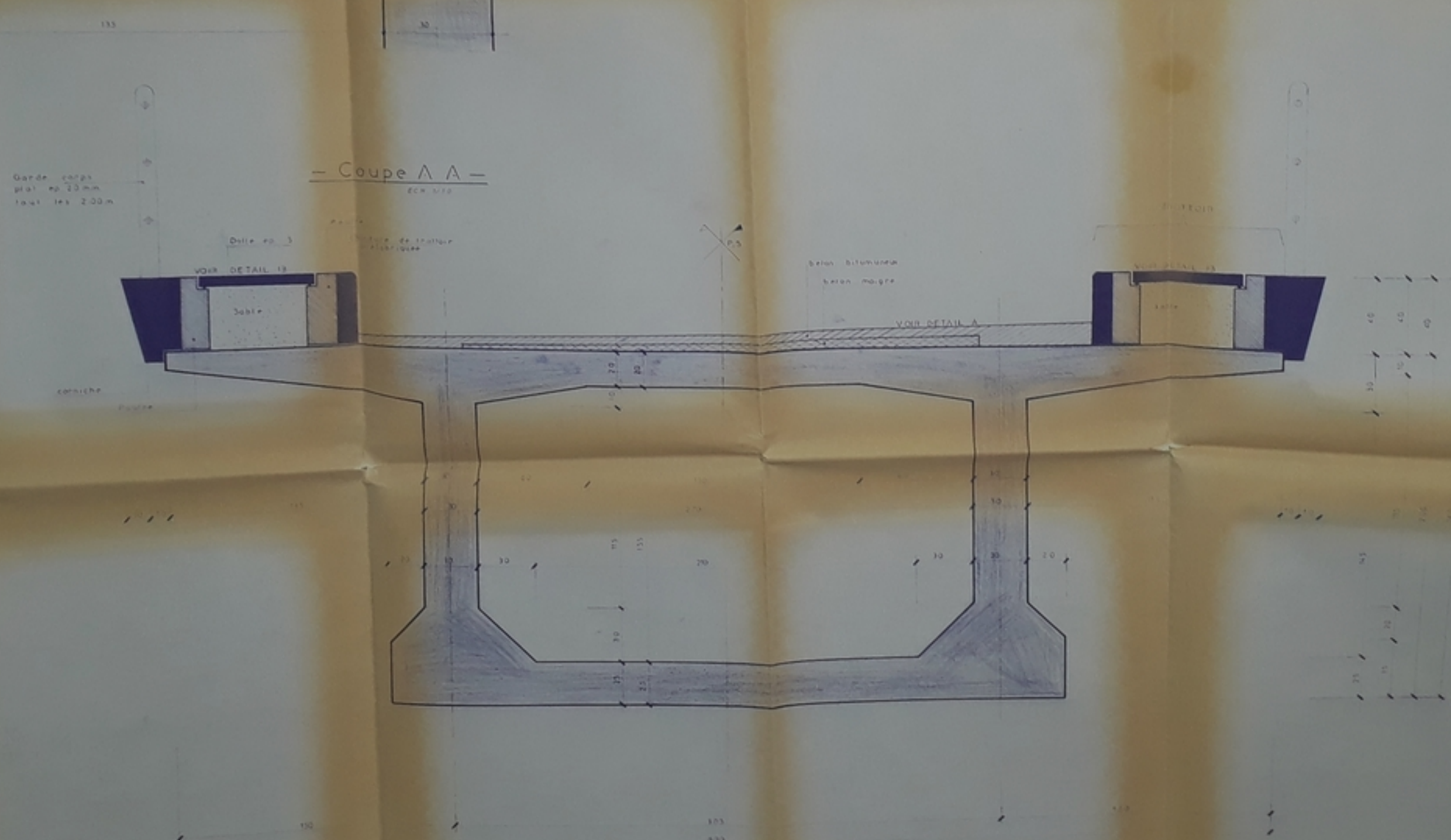
- Detail B -
ECH. 1/10



- Detail A -
ECH. 1/10



- Coupe A A -
ECH. 1/10



-Detail du Garde Corps-

UNIVERSITE D'ALGER
 ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
 Département : GÉNIE CIVIL

ETUDE D'UN PONT COURBE
 EN PRECONTRAÎTE

COUPE TYPE TRANSVERSALE
 ET DETAILS DU TABLIER

ECHELLES : 1-10 - 1-5
 ÉLÈVES-INGÉNIEURS
 RIL MOUSSA, BABAAMMI AHMED
 PROMOTEUR : P. BONNEVILLE
 DATE : 23 6 79

