

15/88

وزارة التعليم العالي

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

2ex

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

الجامعة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

METHODES NUMERIQUES
DE CALCUL DU
CHAMP ELECTROSTATIQUE

Proposé par :

Etudié par :

Dirigé par :

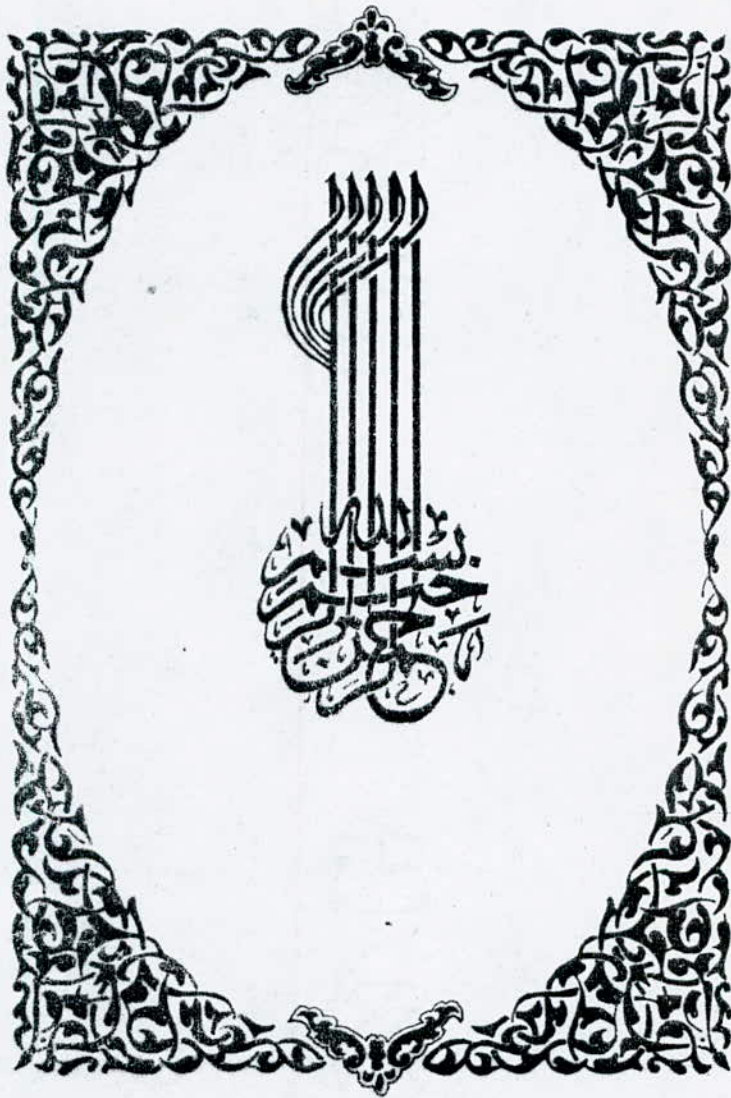
Mr. A. BOUBAKEUR

D. MECHENTEL
et
K. NACEREDDINE

Mme. S. DJEMA

PROMOTION : JANVIER 1988

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

METHODES NUMERIQUES
DE CALCUL DU
CHAMP ELECTROSTATIQUE

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

METHODES NUMERIQUES DE CALCUL DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

Proposé par :

Etudié par :

Dirigé par :

Mr. A. BOUBAKEUR
D. MECHENTEL
et
K. NACEREDDINE

Mme. S. DJEMA

PROMOTION : JANVIER 1988

A NOS PARENTS ,

A NOS PROFESSEURS

REMERCIEMENTS

Nous remercions tout d'abord Madame DJEMA, de nous avoir dirigés et encouragés durant ce projet de fin d'étude.

Nous remercions également Monsieur BOUBAKOUR d'avoir défini les grandes lignes de la partie théorique de ce travail et de participer au jury.

Nous remercions Monsieur TALEB Bouzid pour ses précieux conseils au cours de la programmation informatique.

Nous remercions Monsieur Aboulgasem Hassan de l'université de Stanford pour son aide en matière de documentation.

Nous remercions le personnel du centre de calcul de l'E.N.P. pour sa constante collaboration.

Nous sommes honorés d'avoir monsieur Beroual comme président du jury.

Et nous remercions Madame Ferras pour sa participation au jury.

Nous remercions finalement tous ceux qui ont participé, de près ou de loin, à notre formation.

PLAN DE TRAVAIL

=====

	<i>Page</i>
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I- NOTIONS D'ELECTROSTATIQUE	4
A-CONCEPTS FONDAMENTAUX	6
1-Loi de Coulomb	6
2-Champ électrostatique	6
3-Champ de déplacement	7
4-Conservation du champ électrostatique	7
5-Potentiel électrostatique	8
6-Energie électrostatique	8
7-Equation de Poisson	9
8-Condition de passage entre deux milieux	9
9-Théoreme d'unicité	10
B-METHODES ANALYTIQUES DE CALCUL DU POTENTIEL	10
1-Séparation des variables	10
2-Méthode des images	11
3-Transformations conformes	12
CHAPITRE II- METHODE DES DIFFERENCES FINIES	14
INTRODUCTION	16
I-DISCRETISATION DU DOMAINE	16
2-APPROXIMATION DES DERIVEES PARTIELLES	17
2.1-Approximation du second ordre	17
2.1.1-Cas des distances égales	17
2.1.2-Cas des noeuds de discontinuité	19
2.1.3-Cas des distances inégales	19
2.2-Approximation du sixième ordre	21
2.3-Discussion sur l'erreur	23
2.4-Cas d'un milieu hétérogène	23
3-RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRE	25
3.1-Ecriture des équations	26

	<i>Page</i>
3.2-Méthode directe	27
3.3-Méthode itérative	27
3.2.1-Surrelaxation	28
3.2.2-Critère de convergence	29
4-CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE	29
5-APPLICATION	30
5.1-Cas de deux plaques conductrices infinies	30
5.2-Cas du condensateur	33
5.3-Cas du système pointe-plan	35
CHAPITRE III-METHODE DES ELEMENTS FINIES	36
INTRODUCTION	39
1-PRINCIPE DE LA METHODE	39
2-FORMULATION VARIATIONNELLE	40
2.1-Position du problème	40
2.2-Discretisation du domaine	40
2.3-Critère de Rayleigh-Ritz	42
2.4-Construction des matrices élémentaires	43
2.5-Assemblage des matrices élémentaires	44
2.6-Introduction des conditions aux limites	45
3-RESOLUTION DU SYSTEME & CONVERGENCE	46
4-APPLICATION	47
commentaires et conclusion	54
CHAPITRE IV-METHODE DES CHARGES FICTIVES	55
INTRODUCTION	57
1-PRINCIPE DE LA METHODE	57
2-DISPOSITION DES CHARGES FICTIVES	57
2.1-Champ bidimensionnel	57
2.2-Champ tridimensionnel à symétrie axiale	58
2.3-Champ tridimensionnel de forme quelconque	58
3-CALCUL DE LA TENSION	59
3.1-Principe	59
3.2-Mise en oeuvre de la méthode	60
4-CALCUL DU CHAMP ELECTRO STATIQUE	61
5-EXEMPLE DE CALCUL DES COEFFICIENTS POTENTIELS	61

	<i>Page</i>
CONCLUSION GENERALE63
BIBLIOGRAPHIE65

INTRODUCTION GENERALE

Le développement accéléré de ces dernières années des moyens de calcul, vitesse d'exécution et grande capacité de stocker des informations, avec possibilité d'annexer la mémoire auxiliaire, a permis l'introduction de méthodes d'analyse et de résolution dans différents domaines, de la recherche industrielle au médical en passant par l'organisation de la vie sociale, grâce à l'introduction de la microinformatique .

Dans le domaine de l'électrotechnique, le calcul du champ électromagnétique est nécessaire à la connaissance, de l'énergie emmagasinée dans les systèmes à étudier, du couple pour les machines tournantes ou à traction linéaire et de la tenue électrique de certains matériaux utilisés comme isolants dans les installations électriques .

Aux fréquences industrielles, les équations de Maxwell régissant la répartition et le rayonnement du champ électromagnétique, aboutissent à la résolution d'une équation différentielle du potentiel vecteur ou scalaire suivant que le domaine comporte ou non des courants . Cette équation devient, en haute tension, une équation de répartition du potentiel scalaire et le champ électrique est prépondérant par rapport au champ magnétique. Aussi, les équations qui régissent le champ électrique sont avec une bonne approximation, celle des phénomènes stationnaires; c'est à dire les équations de l'électrostatique .

Notre étude concerne la résolution de l'équation de répartition du potentiel scalaire par des méthodes numériques. Ceci après avoir rappelé dans un premier chapitre, quelques notions d'électrostatique ainsi que les méthodes analytiques de calcul du champ .

Dans un second chapitre, on développera la méthode des différences finies qui est basée sur l'approximation des dérivées partielles par des différences finies .

La méthode des éléments finis qui fera l'objet du troisième chapitre, transforme le problème de résolution de l'équation aux dérivées partielles en un problème de recherche du minimum de la fonctionnelle d'énergie .

Dans le quatrième chapitre, on présentera la méthode des charges fictives qui simule la distribution des charges superficielles par une distribution discrète de charges fictives situées à l'intérieur des conducteurs .

Et en conclusion, dans l'opportunité de l'application de ces méthodes, on fera ressortir les avantages et les inconvénients de l'une par rapport à l'autre avec citation des domaines auxquels elles s'adaptent le mieux .

NOTIONS D'ELECTROSTATIQUE

CHAPITRE I

NOTIONS D'ELECTROSTATIQUE**A-CONCEPTS FONDAMENTAUX**

1. Loi de Coulomb
2. Champ électrostatique
3. Champ de déplacement
4. Conservation du champ électrostatique
5. Potentiel électrostatique
6. Energie électrostatique
7. Equation de Poisson
8. Conditions de passage entre deux milieux différents
9. Théoreme d'unicité

B-METHODES ANALYTIQUES DE CALCUL DU POTENTIEL

1. Séparation des variables
2. Méthode des images
3. Transformations conformes

A-CONCEPTS FONDAMENTAUX DE L'ELECTROSTATIQUE

I. Loi de Coulomb:

Les lois de l'électrostatique sont déduites du postulat affirmant que la force entre deux charges électriques varie avec l'inverse du carré de la distance entre elles.

En 1667, J. PRIESTLEY constata que la force électrique était à peu près inversement proportionnelle au carré de la distance entre deux charges; dans les deux années qui suivirent, J. ROBINSON détermina l'exposant de cette loi avec une précision de 3%; quatre ans plus tard, CAVENDISH put déterminer l'exposant à 1% près; en 1785, COULOMB postulat que l'exposant était exactement égal à 2. Les techniques expérimentales actuelles sont parvenues à un écart, par rapport à 2, inférieur à $2 \cdot 10^{-9}$.

La loi de Coulomb s'exprime par:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{a}_r}{r^2}$$

Où \vec{F} est la force électrostatique
 q_1 et q_2 les valeurs algébriques des charges
 r la distance séparant les deux charges
 \vec{a}_r le vecteur unitaire porté par la direction de r
 ϵ caractérise le milieu où se trouvent les charges
 Le facteur 4π est dû au système d'unité servant à mesurer la force.

2. Champ électrostatique:

Si on place une charge q_t au voisinage d'une charge q , elle subira, en vertu de la loi Coulomb, une force de module:

$$F = \frac{q \cdot q_t}{4\pi\epsilon r^2}$$

Afin de caractériser l'effet de la charge q , on définit le champ électrostatique comme étant le rapport de la force exercée F , sur la charge q ; soit:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{a}_r}{r^2}$$

Le champ E ainsi défini, possède les propriétés suivantes:

- Les lignes de champ partent d'une charge positive pour aboutir vers une charge négative.
- Le champ E est linéaire par rapport à la charge, donc, par le principe de superposition, on peut additionner vectoriellement, les champs dus à un système de plusieurs charges électriques dans un système idéal (ϵ -cte).

3. Champ de déplacement:

L'expression du champ électrostatique, on l'a vu, fait intervenir la permittivité du milieu ϵ . Alors on définit le champ de déplacement par:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

ϵ pouvant être un tenseur (milieux anisotropes), ou une fonction des coordonnées (milieux non homogènes), ou simplement une constante (milieux linéaires). Dans ce qui suit nous considérerons seulement le dernier cas, et ϵ sera la constante diélectrique.

4. Conservation du champ électrique

Le travail élémentaire nécessaire pour amener une charge q de l'infini en un point P , dans le champ de force créé par une charge q , s'exprime par:

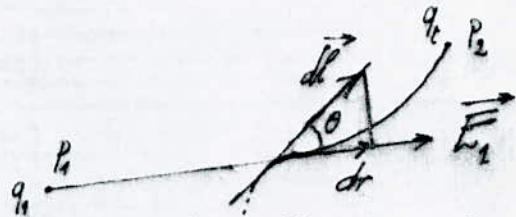
$$dW = - \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(Le signe (-) indique un travail fourni).

le travail total sera :

$$W = - \int_{\infty}^P \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \cos \theta \cdot dr$$

$$W = - \int_{\infty}^{P_2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{dr}{r^2} ; W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon (R_1 R_2)}$$



Ce résultat montre que le travail ne dépend que des positions initiale et finale de la charge q . En particulier, aucun travail n'est nécessaire pour parcourir une trajectoire fermée, d'où en terme de champ:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

5. Potentiel électrostatique:

L'expression du travail, vue précédemment, suggère la définition du potentiel scalaire comme la circulation du champ électrostatique :

$$d\phi = - \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Soit en termes différentiels :

$$\vec{E} = - \text{grad } V$$

Il vient que :

$$\text{Rot } \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (\text{Voir 12.})$$

6. Energie électrostatiques

Le travail requis pour amener une charge q_2 au voisinage d'une autre q_1 , a pour expressions:

$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}}$$

Pour amener une troisième q_3 au voisinage des deux autres, il faudra dépenser un travail $W_{13} + W_{23}$ tel que:

$$W_{13} + W_{23} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon r_{23}}$$

De sorte que l'énergie associée à l'ensemble des trois charges s'écrit:

$$W_c = W_{12} + W_{13} + W_{23}$$

Plus généralement, l'énergie associée à un multipole (Ensemble de n charges discrètes), s'écrit:

$$W_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}} \quad ; \quad i \neq j$$

$$\text{Soit} \quad W_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \quad (\text{Voir 15})$$

Et en passant d'une distribution discrète de charges à une distribution continue, on a:

$$W_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot V \, dv$$

7. Equation de Poisson:

De la relation de définition du déplacement électrique, on peut montrer que le flux de D , à travers une surface quelconque, est égal à la valeur de la charge confinée à l'intérieur de celle-ci. En particulier, pour une surface sphérique centrée sur la charge, on a:

$$\oint_{\text{Sphère}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi} \oint_{\text{Sphère}} \frac{ds}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r^2} q$$

$$\text{Soit: } \oint_{\text{Sphère}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = q$$

Si on utilise la densité volumique de charge $\rho = \frac{dq}{dv}$

on a:

$$q = \int dq = \int \rho dv \quad \text{et} \quad \oint_{\text{Sphère}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int \rho dv$$

Et en vertu du théorème de la divergence: $\text{Div}(\vec{D}) = \rho$

Par ailleurs, on a: $\vec{E} = -\text{grad} V$ et $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\text{d'où: } \text{div}(\vec{D}) = \text{div}(\epsilon \vec{E}) = \epsilon \text{div}(\vec{E}) = \epsilon \text{div}(-\text{grad} V) = \rho$$

$$- \epsilon \text{div}(\text{grad} V) = \rho$$

Cette équation connue sous le nom d'équation de Poisson lie le potentiel V à sa source. Dans le cas particulier où la densité de charge est nulle, on obtient l'équation de Laplace:

$$- \epsilon \text{div}(\text{grad} V) = 0$$

$$\text{Ou encore: } \Delta V = 0$$

Δ étant l'opérateur Laplacien

8. Conditions de passage entre deux milieux différents:

La relation $\vec{E} = -\text{grad} V$, informe que les lignes de champ sont partout perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et que le potentiel V est continu.

Soit deux milieux de permittivité respectives ϵ_1 et ϵ_2

On admet sans démonstration ce qui suit:

a- Les composantes tangentielles du champ électrique qui sont parallèles au plan de séparation, sont continues. Leur valeur doit être la même de part et d'autre de cette surface.

Soit \vec{n} la normale à la surface de séparation, la condition à satisfaire peut se mettre sous la forme:

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

b-La composante normale du champ de déplacement ne sera continue qu'en l'absence de charges de surface sur la surface limite. Cette condition peut se mettre sous la forme:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \mathcal{J}_s$$

Avec \mathcal{J}_s la densité de charge superficielle.

9. Théorème d'unicité: ((1))

Lorsqu'on obtient une solution de l'équation de Laplace pour un problème donné, la question se pose sur son unicité. Pour cela on dispose d'un théorème qui définit les conditions d'unicité de la solutions

"Pour une disposition arbitraire de conducteurs électriques parfaits dans l'espace libre, le champ électrostatique est défini de façon unique en tout point lorsque sont spécifiés le potentiel de chaque conducteur, ou la charge totale de chaque conducteur, ou le potentiel de certains conducteurs et la charge totale sur les autres".

Remarque : Il existe aussi un théorème similaire pour l'équation de Poisson.

B-METHODES ANALYTIQUES DE CALCUL DU POTENTIEL

I. Séparation des variables:

On démontre, en physique mathématique, que la solution de l'équation de Laplace est séparable dans un certain nombre de systèmes de coordonnées. Ceci veut dire que l'on peut exprimer la solution de l'équation de Laplace par le produit de deux fonctions (cas bidimensionnel) ne dépendant chacune que d'une seule variable, à condition que les configurations aient une géométrie compatible avec le système de coordonnées.

Lorsqu'elle est séparable, la solution de l'équation de Laplace s'exprime à l'aide de fonctions spéciales dites fonctions propres de l'équation:

Ce sont les fonctions trigonométriques et hyperboliques dans un système cartésien, les fonctions de Bessel de 1^{ère} et 2^{ème} espèce pour un système cylindrique, et les fonctions de Legendre dans un système sphérique.

Application: résolution de l'équation de Laplace dans un système cartésien bidimensionnel.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

On pose $V(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, puis on remplace dans (1)

$$\frac{\partial^2 (X(x) \cdot Y(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X(x) \cdot Y(y))}{\partial y^2} = Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

En divisant par $X \cdot Y$, on obtient:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (2)$$

L'égalité (2) ne peut être vérifiée que si les deux termes sont constants, soit m^2 cette constante. On aura:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = m^2 \quad \text{d'où} \quad X = A \cosh(mx) + B \sinh(mx)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2 \quad \text{d'où} \quad Y = C \cosh(my) + D \sinh(my)$$

Et, en fin:

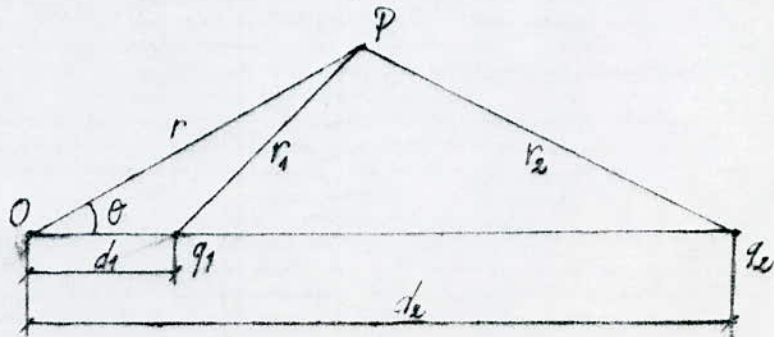
$$V(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

2. Méthode des images:

On sait qu'un objet peut être vu, par réflexion, sur un miroir. On peut donc remplacer aux yeux d'un observateur, le système constitué par l'objet réel et le miroir, par l'image du premier par rapport au miroir.

L'idée en électrostatique, consiste à remplacer, sous certaines conditions, un système composé de charges et de surfaces parfaitement conductrices, par un système d'autres charges, et inversement, On peut dans certains cas, remplacer les effets d'un système de charges par ceux d'un système d'autres charges et de surfaces parfaitement conductrices judicieusement disposées. Le théorème d'unicité tranchera quant à la validité de ce procédé.

Application: Calcul du potentiel dû à deux charges ponctuelles.



Le potentiel au point p s'écrit:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right]$$

En coordonnées sphériques (r, φ, θ) , on a:

$$r_1 = (r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \sin \varphi \cos \theta)^{1/2}$$

$$r_2 = (r^2 + d_2^2 - 2rd_2 \sin \varphi \cos \theta)^{1/2}$$

$$\text{et } V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q_1}{(r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \sin \varphi \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q_2}{(r^2 + d_2^2 - 2rd_2 \sin \varphi \cos \theta)^{1/2}} \right]$$

Si on remplace dans l'expression de V , r par a , d_1 par $\frac{a^2}{d_2}$ et q_1 par $-\left(\frac{a}{d_2}\right)q_2$, on annulera V . Autrement dit $V(r=a, \varphi, \theta) = 0$.

Ceci montre que si les charges sont dans un certain rapport, ainsi que les distances, le système de deux charges ponctuelles peut remplacer l'ensemble formé par la sphère de rayon a et la charge q_1 . Inversement, on peut calculer le potentiel dû à une charge placée à l'intérieur (ou à l'extérieur) d'une sphère conductrice.

3. Transformations conformes:

La méthode des transformées conformes permet de résoudre l'équation de Laplace en utilisant certains résultats de la théorie des variables complexes.

Dans un cas bidimensionnel, soit $z = x + iy$ une variable complexe et soit $W(z) = u + iv$ une fonction complexe. Si z décrit un contour dans le plan $(X, Y) = (Z)$, W décrira un autre contour dans le plan $(U, V) = (W)$; ceci fait correspondre un contour de (Z) à un autre de (W) .

On démontre par ailleurs, qu'une fonction $W(z)$ est analytique (dérivable dans (W)) si et seulement si elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Si on dérive la première relation par rapport à x et qu'on lui ajoute la dérivée de la seconde relation par rapport à y , on obtient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

On arriverait à un résultat similaire pour la variable w .

Ceci montre que les fonctions u et v peuvent être considérées comme des potentiels, ce qui est à la base d'une méthode indirecte de résolution de problèmes d'électrostatique. Disposant de solutions toutes faites, on cherche à résoudre les problèmes qui lui sont associés.

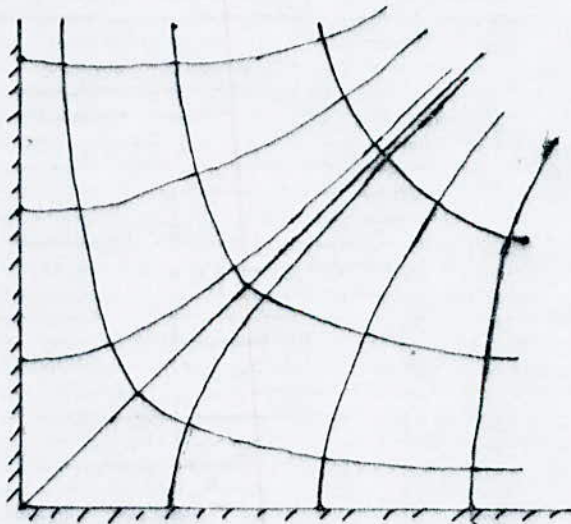
La dénomination de la méthode provient du fait que si la dérivée de la fonction W est unique, elle s'exprime par $\frac{\partial W}{\partial z} = A e^{j\alpha}$ c'est à dire que les deux complexes dW et dz ont des amplitudes proportionnelles et des arguments différents entre eux de α . Aussi, si deux courbes se coupent dans le plan (Z) en formant un certain angle, leurs transformées dans le plan (W) se couperont en faisant le même angle; la transformation est dite conforme parcequ'elle conserve les angles.

Application: la transformation puissance $W=Z^2$

$$\text{Soit } W=z^2, \quad W=(r e^{j\theta})^2 = r^2 e^{2j\theta} = u + jv$$

$$\text{avec } u = r^2 \cos 2\theta \quad \text{et } v = r^2 \sin 2\theta$$

On remarque que si V représente un potentiel, le plan $\theta=0$ sera l'équipotentiel nulle. Aussi, $z=x+iy$ d'où $W=x^2-y^2-2jxy$, on a donc $u=x^2-y^2$ et les équipotentiels $x^2-y^2=A(\text{cte})$ forment une famille d'hyperboles.



Distribution du potentiel entre deux plaques formant un angle droit.

METHODE
DES
DIFFERENCES FINIES

CHAPITRE II

METHODE DES DIFFERENCES FINIES

1-DISCRETISATION DU DOMAINE

2-APPROXIMATION DES DERIVEES PARTIELLES PAR DES DIFFERENCES FINIES

2.1-Approximation du second ordre

2.2-Approximation du sixième ordre

2.3-Discussion sur l'erreur

2.4-Cas d'un milieu hétérogène

3-RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

3.1-Ecriture des équations

3.2-Méthode directe

3.3-Méthode itérative

4-CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE

5-APPLICATION

5.1-Cas de deux plaques conductrices parallèles et infinies

5.2-Cas du condensateur

5.3-Cas du système pointe-plan

INTRODUCTION:

La méthode des différences finies est une méthode de résolution numérique des équations aux dérivées partielles, basée sur l'approximation de l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences finies.

Les principales étapes de cette méthode sont:

a-La discrétisation du domaine considéré pour définir les différents noeuds à prendre en considération.

b-L'écriture des équations aux différences finies en chaque noeud issu de la discrétisation du domaine.

c-La résolution du système d'équations obtenues dans l'étape précédente.

Pour le calcul du champ électrique, les équations de base sont celles de Poisson et de Laplace. La résolution de ces équations est souvent limitée à des domaines bidimensionnel lorsque la symétrie des systèmes électriques considérés existe. Et cela, dans le but de réduire la complexité du problème.

I-DISCRETISATION DU DOMAINE:

Soit un domaine Ω borné de \mathcal{R}^2 , la discrétisation de Ω est son quadripage, par des droites verticales et horizontales définies par les équations $x=cte$ et $y=cte$. Ainsi on obtient un réseau de noeuds (i, j) .

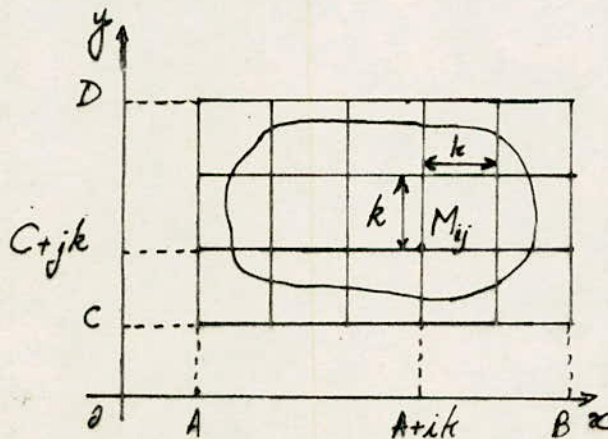


Fig 1

Si l'on considère deux entiers NX et NY, nous obtenons deux paramètres de discrétisation h et k (fig. I), tel que:

$$h = \frac{B-A}{NX} \quad \text{et} \quad k = \frac{D-C}{NY}$$

Nous définissons alors un réseau de points de \mathbb{R}^2 , tel que:

$$E_{hk} = \left\{ M_{ij} \in \mathbb{R}^2 / M_{ij} = (A+ik, C+jk); \begin{matrix} i = 0, \dots, NX \\ j = 0, \dots, NY \end{matrix} \right\}$$

Ceci dans le cas où les noeuds M_{ij} sont situés aux sommets des petits rectangles issus de la discrétisation et de dimensions $h \times k$. Mais, si l'on prend le paramètre de discrétisation h commun aux deux axes, on aura $h=k$ et les noeuds M_{ij} seront situés aux sommets des carrés de côté h. Le réseau de points de \mathbb{R}^2 ainsi défini sera:

$$E_k = \left\{ M_{ij} \in \mathbb{R}^2 / M_{ij} = (A+ik, C+jk), \begin{matrix} i = 0, \dots, NX \\ j = 0, \dots, NY \end{matrix} \right\}$$

2-APPROXIMATION DES DERIVEES PARTIELLES PAR DES DIFFERENCES FINIES;

2.1-Approximation du second ordre:

Dans le développement en série de Taylor de la fonction $V(x,y)$ au voisinage d'un point (x_0, y_0) , on se limitera aux dérivées secondes et on aura donc:

$$(A) \quad V = V(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right] V + \frac{1}{2!} \left[(x-x_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(y-y_0) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (y-y_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] V$$

Ainsi, en considérant les valeurs V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 de la fonction V en cinq points voisins du point (x_0, y_0) où V à la valeur V_0 , on aura un système de cinq équations linéaires et du premier ordre pour déterminer les cinq inconnues:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_0, \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_0, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)_0 \text{ et } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0$$

qui sont les dérivées partielles de V. Mais, en considérant les symétries il suffira de deux points autre que (x_0, y_0) pour déterminer les dérivées premières et de trois ou quatre points pour déterminer les dérivées secondes.

2.1.1-Cas où les distances entre les points sont égales:

Si l'on applique la formule (I) aux points 1, 2, 3, 4 voisins du point 0 comme indiqué sur la figure 2 et pour lesquels $(x-x_0)$ ou $(y-y_0)$ sont égaux à $\pm h$, où h est le pas commun de discrétisation. On obtient alors:

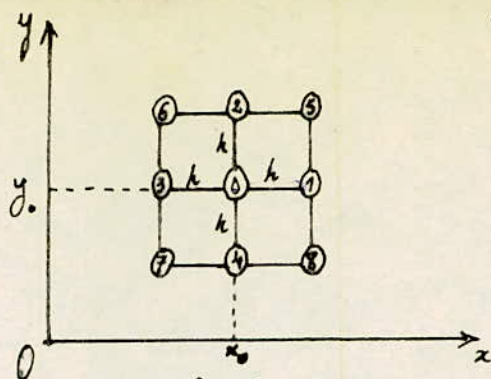


fig 2

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V_0 + h \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 \\
 V_2 &= V_0 + h \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0 \\
 V_3 &= V_0 - h \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 \\
 V_4 &= V_0 - h \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

En combinant ces valeurs, on obtient alors:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_0 &= \frac{1}{2h} (V_1 - V_3) & ; & \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_0 = \frac{1}{2h} (V_2 - V_4) \\
 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2} (V_1 + V_3 - 2V_0) \\
 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2} (V_2 + V_4 - 2V_0)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Le Laplacien de V s'écrit donc:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} [V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0]
 \tag{4}$$

Et l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ prend la forme:

$$4V_0 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4
 \tag{5}$$

Cette formule sera utilisée pour les noeuds situés à l'intérieur du domaine.

De même, en appliquant la formule (I) aux points 5, 6, 7, 8, on obtient:

$$\begin{aligned}
 V_5 &= V_0 + h \frac{\partial V}{\partial x} + h \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\
 V_6 &= V_0 - h \frac{\partial V}{\partial x} + h \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\
 V_7 &= V_0 - h \frac{\partial V}{\partial x} - h \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\
 V_8 &= V_0 + h \frac{\partial V}{\partial x} - h \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

En combinant ces quatre équations, on obtient:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4h^2} (V_5 - V_6 + V_7 - V_8)
 \tag{7}$$

Ainsi, pour une équation aux dérivées partielles du second ordre quelconque, on a la possibilité de remplacer les dérivées premières et secondes par une équation ne contenant que les valeurs de V au point O et aux points voisins.

2.I.2-Cas des noeuds de discontinuité:

Il est possible d'exprimer les dérivées premières en fonction de V pour deux points situés d'un même côté, au lieu de les exprimer en fonction de V en des points disposés symétriquement par rapport au point O .

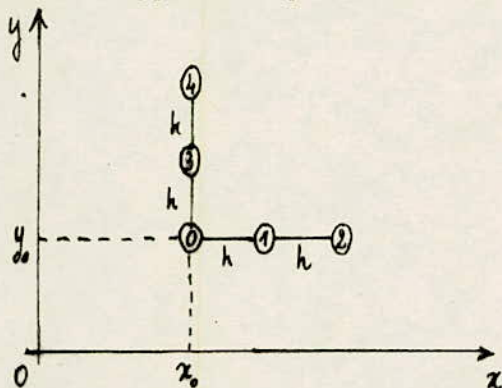


fig 3

Comme indiqué sur la figure 3 et après combinaison des équations de la forme (I) écrites aux points 1, 2, 3 et 4, on obtient:

$$(8) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2h} (-3V_0 + 4V_1 - V_2)$$

$$(9) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2h} (-3V_0 + 4V_3 - V_4)$$

Ces formules seront utilisées lorsque les dérivées premières sont discontinues en O .

2.I.3-Cas où les distances entre les points sont inégales:

Soit λ_1 et λ_2 deux coefficients purement numériques et soit les cas de figure suivants:

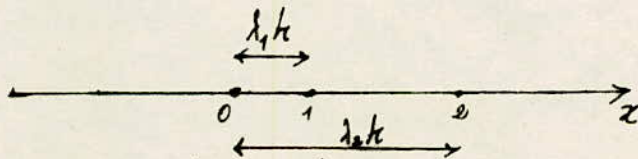


fig 4

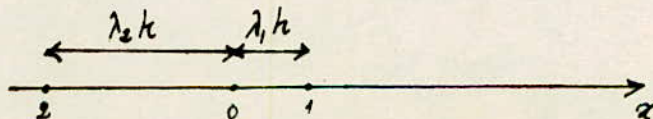


fig 5

Si l'on calcule les dérivées $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0$ au point 0 dans la figure 4, en appliquant la formule (I) avec $(y-y_0)=0$ et $(x-x_0)=\lambda_1 h$ ou $\lambda_2 h$, on aura donc aux points 1 et 2:

$$\begin{aligned} (10) \quad V_1 &= V_0 + \lambda_1 k \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 + \frac{\lambda_1^2 k^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 & \left(\lambda_2^e \right) \\ (11) \quad V_2 &= V_0 + \lambda_2 k \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 + \frac{\lambda_2^2 k^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 & \left(-\lambda_1^e \right) \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre par les coefficients de droite puis en additionnant, on tire:

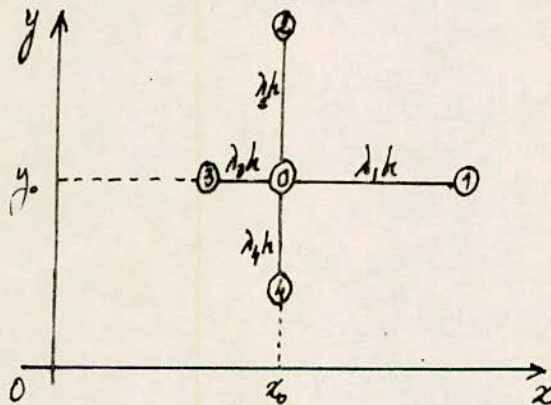
$$(12) \quad k \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} (V_1 - V_0) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (V_2 - V_0) \right]$$

De même que pour $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0$, on aura une formule analogue.

Maintenant, si le point 0 est situé entre les points 1 et 2 comme indiqué sur la figure 5, on remplace seulement λ_2 par $-\lambda_2$ et on aura:

$$(13) \quad k \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} (V_1 - V_0) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (V_2 - V_0) \right]$$

Soit maintenant, le cas de figure suivant:



En appliquant la formule (I) aux points 1, 2, 3 et 4, on aura:

$$(14) \quad \begin{aligned} V_1 &= V_0 + \lambda_1 k \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2} \lambda_1^2 k^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 \\ V_2 &= V_0 - \lambda_2 k \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2} \lambda_2^2 k^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 \\ V_3 &= V_0 + \lambda_3 k \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2} \lambda_3^2 k^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 \\ V_4 &= V_0 - \lambda_4 k \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2} \lambda_4^2 k^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ \frac{1}{\lambda_2} \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ \frac{1}{\lambda_3} \frac{1}{(\lambda_2 + \lambda_4)} \\ \frac{1}{\lambda_4} \frac{1}{(\lambda_2 + \lambda_4)} \end{array} \right.$$

En multipliant par les coefficients de droite et en additionnant membre à membre, on obtient:

$$(15) \quad \frac{1}{2} h^e \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = \left[\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} \left(\frac{V_1}{\lambda_1} + \frac{V_3}{\lambda_3} \right) + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_4} \left(\frac{V_2}{\lambda_2} + \frac{V_4}{\lambda_4} \right) \right] - \left(\frac{1}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_4} \right) V_0$$

Et l'équation de Laplace prendra la forme:

$$(16) \quad \left(\frac{1}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_4} \right) V_0 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} \left(\frac{V_1}{\lambda_1} + \frac{V_2}{\lambda_3} \right) + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_4} \left(\frac{V_2}{\lambda_2} + \frac{V_4}{\lambda_4} \right)$$

Les formules avec des distances inégales sont surtout indispensables pour les points situés au voisinage des limites du domaine.

2.2-Approximation du sixième ordre:

Si l'on développe la fonction $V(x,y)$ en série de Taylor jusqu'aux dérivées sixièmes, on aura:

$$(17) \quad \begin{aligned} V = & V_0 + \frac{1}{1!} \left\{ (x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right\}_0 V + \frac{1}{2!} \left\{ (x-x_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(y-y_0) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (y-y_0) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\}_0 V \\ & + \frac{1}{3!} \left\{ (x-x_0) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3(x-x_0)^2 (y-y_0) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3(x-x_0)(y-y_0)^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + (y-y_0)^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right\}_0 V \\ & + \frac{1}{4!} \left\{ (x-x_0)^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4(x-x_0)^3 (y-y_0) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 6(x-x_0)^2 (y-y_0)^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ & \quad \left. + 4(x-x_0)(y-y_0)^3 \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + (y-y_0)^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right\}_0 V \\ & + \frac{1}{5!} \left\{ (x-x_0)^5 \frac{\partial^5}{\partial x^5} + 5(x-x_0)^4 (y-y_0) \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + 10(x-x_0)^3 (y-y_0)^2 \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} \right. \\ & \quad \left. + 10(x-x_0)^2 (y-y_0)^3 \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + 5(x-x_0)(y-y_0)^4 \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} \right. \\ & \quad \left. + (y-y_0)^5 \frac{\partial^5}{\partial y^5} \right\}_0 V \\ & + \frac{1}{6!} \left\{ (x-x_0)^6 \frac{\partial^6}{\partial x^6} + 6(x-x_0)^5 (y-y_0) \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + 15(x-x_0)^4 (y-y_0)^2 \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} \right. \\ & \quad \left. + 20(x-x_0)^3 (y-y_0)^3 \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + 15(x-x_0)^2 (y-y_0)^4 \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} \right. \\ & \quad \left. + 6(x-x_0)(y-y_0)^5 \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} + (y-y_0)^6 \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right\}_0 V \end{aligned}$$

En prenant un pas de discrétisation commun h et en appliquant cette équation aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 de la figure 2, les valeurs de $(x-x_0)$ et $(y-y_0)$ étant les suivants:

Point	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{1}{k} (x-x_0)$	1	0	-1	0	1	-1	-1	1
$\frac{1}{k} (y-y_0)$	0	1	0	1	1	1	-1	-1

On obtient alors:

$$(18) \quad V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 4V_0 + k^2 \Delta V + \frac{k^4}{12} \left\{ \Delta^2 V - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) V \right\} + \frac{2k^6}{6!} \left\{ \Delta^3 V - 3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta V \right\}$$

$$(19) \quad V_5 + V_6 + V_7 + V_8 = 4V_0 + 2k^2 \Delta V + \frac{k^4}{6} \left\{ \Delta^2 V + 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) V \right\} + \frac{4k^6}{6!} \left\{ \Delta^3 V + 12 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta V \right\}$$

Lorsqu'on néglige les termes en h^4 et h^6 , ces équations donnent:

$$(20) \quad k^2 \Delta V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0$$

Cette équation est la même que celle obtenue dans l'approximation du second ordre.

$$(21) \quad \text{Et} \quad 2k^2 \Delta V = V_5 + V_6 + V_7 + V_8 - 4V_0$$

D'où pour l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, on obtient:

$$(22) \quad 4V_0 = V_5 + V_6 + V_7 + V_8$$

Cette dernière formule s'appelle la formule diagonale tandis que la formule (20) s'appelle la formule normale.

Lorsqu'on tient compte des termes en h^4 et h^6 et en multipliant l'équation (18) par 4 puis, en additionnant membre à membre avec l'équation (19), on obtient:

$$(23) \quad 4(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 = 20V_0 + 6k^2 \Delta V + \frac{k^4}{2} \Delta^2 V + \frac{k^6}{20} \left[\Delta^3 V + 2 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta V \right]$$

Et l'équation de Laplace s'écrit donc:

$$(24) \quad 20 V_0 = 4(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) + V_5 + V_6 + V_7 + V_8$$

En fin on notera dans tous les cas que V_0 est la moyenne pondérée des valeurs de V aux points voisins considérés. Ce sont des expressions de la forme:

$$V_0 = \sum_n b_n V_n \quad \text{avec} \quad \sum_n b_n = 1 \quad \text{et} \quad b_n > 0$$

2.3-Discussion sur l'erreur:

En approximant les dérivées partielles par des différences finies, on aura une erreur qui est égale au reste du développement en série de Taylor et qui dépend du pas de discrétisation h .

Dans l'approximation du second ordre, les premiers termes négligés sont du troisième ordre (en h^3) et dans l'approximation du sixième ordre, les premiers termes négligés sont du septième ordre (en h^7). Ainsi avec une même valeur du pas h , on obtient une meilleure précision dans le second cas que dans le premier.

On notera, de plus, que les formules obtenues sont plus exactes lorsque le pas de discrétisation h est plus petit.

2.4-Cas d'un milieu hétérogène:

Soit deux milieux I et 2 de permittivité respective ϵ_1 et ϵ_2 . A la limite de séparation des deux milieux, les conditions de continuité s'écrivent:

$$(25) \quad V_1 = V_2 \quad \text{et} \quad \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n}$$

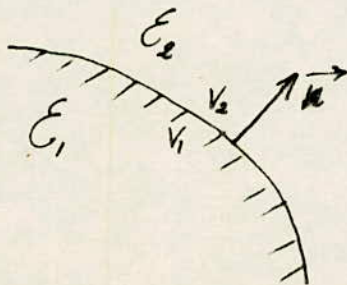


fig 7

La limite entre les deux milieux peut être soit rectiligne soit rectangulaire.

2.4.1-Limite rectiligne:

Considérons le cas où le pas de discrétisation h est commun c'est à dire un maillage carré.

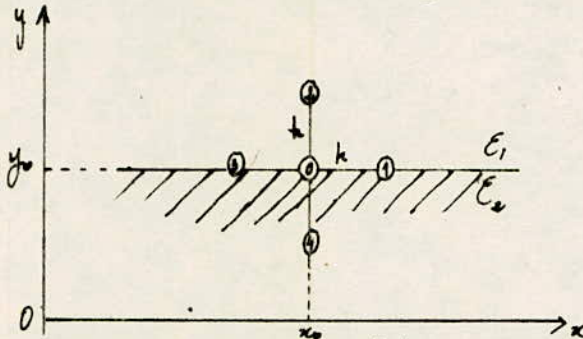


fig 8

En écrivant la formule (1) aux points 1, 2, 3 et 4, on obtient le même système d'équations (2). Après combinaison de ces équations, nous obtenons:

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\text{milieu 1}} &= \frac{1}{2h} (2V_2 + V_1 + V_3 - 4V_0) \\ \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\text{milieu 2}} &= \frac{1}{2h} (4V_0 - 2V_4 - V_1 - V_3) \end{aligned}$$

Et selon la direction de la normale sortante à la surface de séparation des deux milieux, on a:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\text{milieu 1}} \right) &= \epsilon_2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\text{milieu 2}} \right) \\ \text{ou encore:} \\ \epsilon_1 (2V_2 + V_1 + V_3 - 4V_0) &= \epsilon_2 (4V_0 - 2V_4 - V_1 - V_3) \end{aligned}$$

Et finalement:

$$(27) \quad 4(\epsilon_1 + \epsilon_2) V_0 = (V_1 + V_3)(\epsilon_1 + \epsilon_2) + 2\epsilon_2 V_4 + 2\epsilon_1 V_2$$

Quand $\epsilon_1 = \epsilon_2$, cette formule redonne la formule (5) d'un point ordinaire.

2.4.2-Limite rectangulaire:

Comme précédemment, nous considérons un maillage carré et soit le cas de figure suivant:

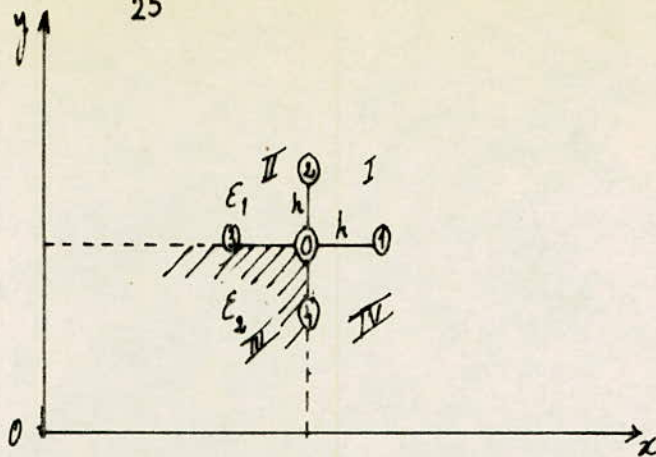


Fig. 9

La méthode consiste à découper le domaine ci-dessus en quatre comme indiqué sur la figure, puis on applique la condition de continuité en considérant les nouveaux domaines deux à deux, sachant que l'écriture de l'équation (I) aux points 1, 2, 3 et 4 redonne le même système d'équations (2) vu au début.

Pour les parties I et II, on a :

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_I = \varepsilon_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{II}$$

(28) d'où: $\varepsilon_1 \left(V_1 - V_0 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = -\varepsilon_1 \left(V_3 - V_0 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)$

Pour les parties II et III, on a :

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{II} = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{III}$$

(29) d'où: $\varepsilon_1 \left(V_2 - V_0 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = -\varepsilon_2 \left(V_4 - V_0 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$

Pour les parties III et IV, on a :

$$\varepsilon_2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{III} = \varepsilon_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{IV}$$

(30) d'où: $-\varepsilon_2 \left(V_3 - V_0 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = \varepsilon_1 \left(V_1 - V_0 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)$

Et enfin, pour les parties IV et I, on a :

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{IV} = \varepsilon_1 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_I$$

(31) d'où: $-\varepsilon_1 \left(V_4 - V_0 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = \varepsilon_1 \left(V_2 - V_0 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$

En additionnant les équations de (28) à (31), on obtient :

$$V_0 (3\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1 V_3 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} (V_3 + V_4)$$

3-RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS :

Après avoir écrit les équations aux différences finies en chaque noeud du maillage et en connaissant les valeurs du potentiel V sur le contour du domaine, on aura donc à résoudre un système de n équations linéaires à n inconnues qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[K][V] = [C]$$

Où $[K]$ est la matrice des coefficients
Et $[C]$ la matrice des conditions initiales.

3.1-Ecriture des équations:

Soit un domaine carré et fermé où le potentiel V est connu sur le contour de ce domaine. Nous prenons un maillage carré de pas h et nous écrivons les équations aux différences finies en chaque noeud. Si l'on suppose qu'à l'intérieur du domaine, il n'y a pas de charges d'espace, l'équation à résoudre sera celle de Laplace.

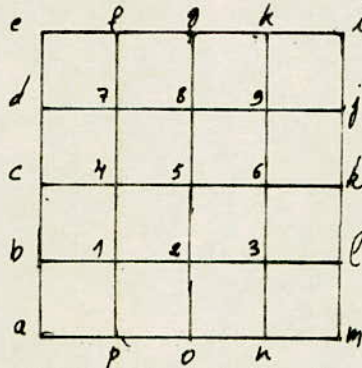


fig 10

Sous forme matricielle, le système à résoudre s'écrit:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_b + V_p \\ V_b \\ V_e + V_n \\ V_c \\ 0 \\ V_b \\ V_d + V_f \\ V_d \\ V_k + V_j \end{bmatrix}$$

Ce système est de la forme:

$$[K] \cdot [V] = [C]$$

Où $[V]$ est le vecteur potentiel à déterminer.

Pour la résolution de ce système, on sépare généralement le problème en deux classes suivant les caractéristiques de la matrice $[K]$.

3.2-Méthode directe:

Si la matrice $[K]$ est de taille réduite et pleine, c'est à dire qu'elle est d'un ordre inférieur à 100 et comporte peu d'éléments nuls, alors on utilise une méthode directe de résolution tel que la méthode de Cramer qui consiste à calculer la matrice inverse de $[K]$ et à lui post-multiplier le vecteur $[C]$. Ainsi, la solution s'écrit:

$$[V] = [K]^{-1} \cdot [C]$$

Ou encore, on utilise la méthode de triangulation qui consiste à transformer le système $[K][V] = [C]$ en un système équivalent $[K'][V] = [C']$ où $[K']$ est une matrice triangulaire supérieure et la solution s'écrit:

$$V_i = \frac{1}{k_{ii}} \left[c_i - \sum_{j=i+1}^n k_{ij} V_j \right]$$

Maintenant, si la matrice K est éparse (creuse) et de taille grande, c'est à dire qu'elle est d'un ordre supérieur à 100 et comporte beaucoup d'éléments nuls, alors les méthodes directes s'avèrent impraticables au sens du temps de calcul qui sera grand et l'occupation mémoire importante.

3.3-Méthode itérative:

Elle consiste à passer d'un estimé $V^{(k)}$ de la solution du système d'équation à un autre estimé $V^{(k+1)}$ de cette solution. Et après un certain nombre d'itérations successives et s'il y'a convergence, la solution pourra donc être atteinte avec la précision désirée.

Une des méthodes itératives est celle de Gauss-Seidel dont le principe est le suivant:

Soit $[K][V] = [C]$ un système de n équations linéaires à n inconnues, $[V]$ et $[K]$ étant non singulière. La matrice $[K]$ peut être décomposer en:

$$K = D - E - F$$

Avec, D : matrice diagonale

E : matrice triangulaire strictement inférieure

F : matrice triangulaire strictement supérieure

Si $K=[k_{ij}]$, $D=[d_{ij}]$, $E=[e_{ij}]$, $F=[f_{ij}]$, on a:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= 0 & \text{si } i \neq j \\ d_{ij} &= k_{ij} & \text{si } i = j \\ -e_{ij} &= k_{ij} & \text{si } i > j \\ -e_{ij} &= 0 & \text{si } i \leq j \\ -f_{ij} &= k_{ij} & \text{si } i < j \\ -f_{ij} &= 0 & \text{si } i \geq j \end{aligned}$$

D'où:

$$KV = (D - E - F)V = C \Rightarrow DV = EV + FV + C$$

Choisissons un vecteur initial $V^{(0)}$. On calcule $V^{(1)}$ par:

$$V^{(1)} = D^{-1}EV^{(0)} + D^{-1}FV^{(0)} + D^{-1}C$$

En effet, la matrice E contient les coefficients des éléments du vecteur V connu à l'ordre i , la matrice F contient les éléments de V connu à l'ordre 0 . On calcule les V_i dans l'ordre croissant de i . A l'itération k , on obtient:

$$V^{(k+1)} = D^{-1}EV^{(k+1)} + D^{-1}FV^{(k)} + D^{-1}C$$

La méthode est convergente si:

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow V^{k+1} \rightarrow V^k \rightarrow V$$

Où V est la solution exacte de $[K][V] = [C]$

3.2.I-Surrelaxation:

Pour accélérer la convergence on remplace le vecteur V obtenu à la $(k+1)$ itération par:

$$V^{(k+1)} = V^{(k)} + \omega [V^{(k+1)} - V^{(k)}]$$

Où ω est le facteur de surrelaxation.

La détermination de la valeur optimum de ω est plus compliquée que la résolution du système linéaire. Cependant, il est possible de procéder par essais et extrapolation. Le facteur ω est toujours compris entre 0 et 2.

3.2.2-Critère de convergence :

Dans le cas général d'une matrice K quelconque non singulière, il existe une condition suffisante de convergence mais, non nécessaire: théorème de Geiringer.

Pour que la relaxation de Gauss-Seidel converge il suffit que les conditions suivantes soient remplies:

$$\sum_{j \neq i} \left| \frac{k_{ij}}{k_{ii}} \right| < 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{j \neq i} \left| \frac{k_{ji}}{k_{ii}} \right| < 1$$

pour $i = 1, n$

4-CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE:

Après avoir calculé le vecteur V solution du système matriciel et cela selon la précision désirée, on passe alors au calcul du champ électrostatique en chaque noeud du maillage.

Partant de l'équation vectorielle $\vec{E} = -\text{grad}V$, on a les composantes du champ électrostatique pour un cas bidimensionnel:

$$\vec{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{et} \quad \vec{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Et si l'on s'intéresse seulement à l'intensité du champ \vec{E} , on a:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

Les dérivées premières $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ et par suite, les composantes du champ E_x et E_y , peuvent être approximées par les équations (3) pour un noeud situé à l'intérieur du maillage qui est supposé carré.

Pour un noeud situé sur les bords du domaine, on approximerà les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ par les équations (8) et (9).

Et dans le cas de deux milieux différents, à la surface de séparation on utilisera la condition (25) et les équations (26) du paragraphe 2.4.

5-APPLICATION:

5.1-Cas de deux plaques conductrices parallèles et infinies:

Considérons un système à géométrie simple constitué par deux plaques parallèles, conductrices et infinies. Chaque plaque est portée à un potentiel VP ou VN différents.

En considérant la symétrie du système, nous nous limiterons d'étudier le champ électrostatique dans un plan perpendiculaire aux deux plaques.

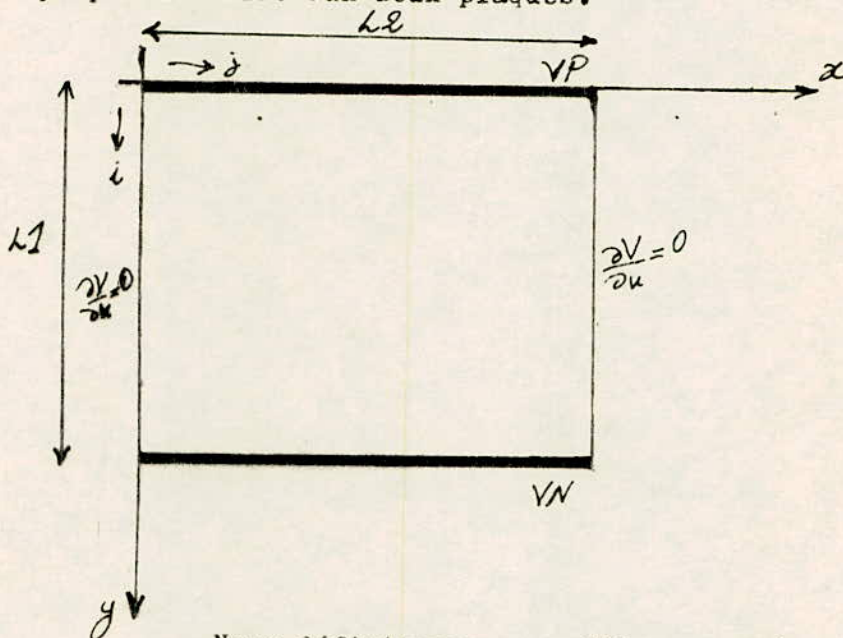


fig 11

Nous définissons un maillage carré avec un pas de discrétisation DX. Celui-ci, nous déterminera le nombre de noeuds à considérer et définis par la ligne i et la colonne j.

Pour une commodité d'écriture, en vue de l'appliquer sur ordinateur, on notera que les lignes i varient de 1 à m et les collones j varient de 1 à n.

Nous considérons qu'à l'intérieur du domaine, l'équation de Laplace est vérifiée. Ainsi en un noeud intérieur au domaine, on a :

$$V_{ij} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1})$$

Avec i variant de 2 à m-1 et j variant de 2 à n-1.

Sur les bords latéraux, on a la condition sur le potentiel $\frac{\partial V}{\partial u} = 0$, donc, pour les noeuds de la colonne j=1, on aura :

$V_{i,1} = \frac{1}{3} (4V_{i,k-1} - V_{i,k-2})$ avec i variant de 2 à $m-1$
 et pour les noeuds de la collone $j=n$, on aura :

$$V_{i,n} = \frac{1}{3} (4V_{i,k-1} - V_{i,k-2}) \quad \text{avec } i \text{ variant de 2 à } m-1$$

Et cela, après application de la formule (8) .

Test de convergence:

$$\text{Soit } \|V\|^2 = \sum_{i,j} V_{i,j}^2$$

$$\text{A l'itération } k, \text{ on a } \|V^{(k)}\|^2 = \sum_{i,j} V_{i,j}^{(k)2}$$

$$\text{A l'itération } k+1, \text{ on aura: } \|V^{(k+1)}\|^2 = \sum_{i,j} V_{i,j}^{(k+1)2}$$

On définit la précision telle que :

$$\varepsilon = \frac{\|V^{(k+1)}\|^2 - \|V^{(k)}\|^2}{\|V^{(k+1)}\|^2}$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$

Pratiquement, on arrête le calcul lorsque $\varepsilon < \varepsilon_m$
 donné est suffisamment petit (de l'ordre de 10^{-10} à 10^{-15})

Pour le champ électrostatique, on utilisera
 les équations (3) pour les noeuds intérieurs du domaine
 et les équations (8) et (9) pour les noeuds situés sur
 le contour du domaine .

Organigramme de résolution:

L'organigramme de résolution comprend les
 parties suivantes:

- Lecture des données et des conditions aux limites .
- Ecriture des équations de la tension aux différents noeuds .
- Résolution du système linéaire .
- Test de convergence puis impression des valeurs de la tension .
- Calcul du champ électrostatique puis, impression de ses valeurs .

Échelle :

1cm

→ 1cm

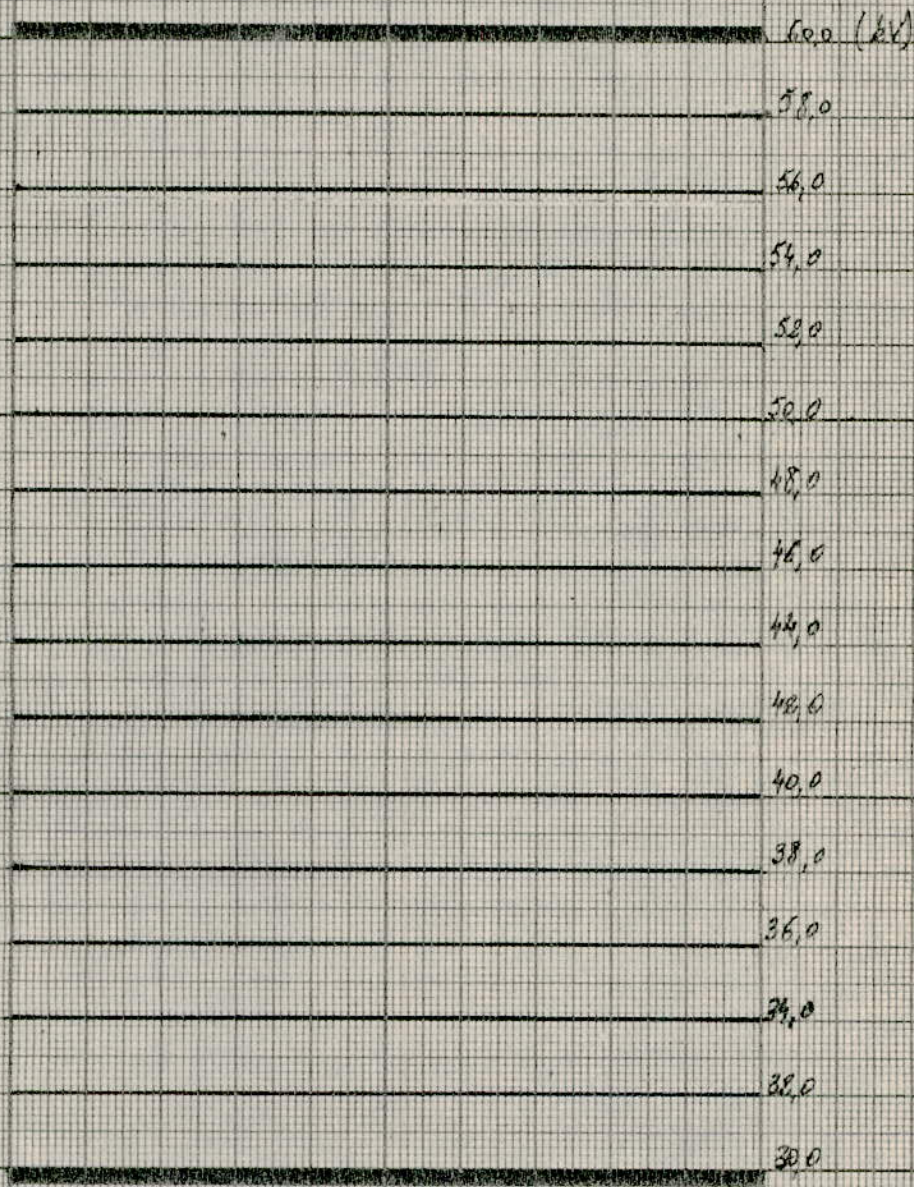


Fig 12. Distribution du potentiel dans un condensateur infini.

Pour le programme, on notera qu'il est inutile d'indicer V à l'ordre de l'itération, car V_{ij}^{k+1} prendra en mémoire la même place que V_{ij}^k .

Pour ce problème, la solution analytique de la tension est:

$$V = \left(\frac{VN - VP}{L1} \right) y + VP$$

Et le champ électrostatique est uniforme et égal à :

$$E = \frac{VP - VN}{L1}$$

Conclusion:

Les équations du potentiel et du champ électrique, utilisées dans cet exemple sont très justes car après un certain nombre d'itérations, on obtient la valeur exacte du potentiel et du champ en chaque noeud. On peut vérifier cela grâce aux méthodes analytiques.

Aussi, les lignes équipotentiellles obtenues sont des droites parallèles aux plaques, comme on pouvait le prévoir.

Il faut noter, en fin, qu'après avoir changer les données du problème à plusieurs reprises, on a remarqué que le nombre d'itération de calcul k dépend beaucoup du pas de discrétisation Δx , du facteur de surrelaxation ω et de la précision du test de convergence ϵ .

5.2-Cas du condensateur:

En utilisant les mêmes notations que celles de l'exemple précédent et en considérant la symétrie du condensateur, nous nous limiterons à étudier ce système dans un quart du domaine contenant le condensateur.

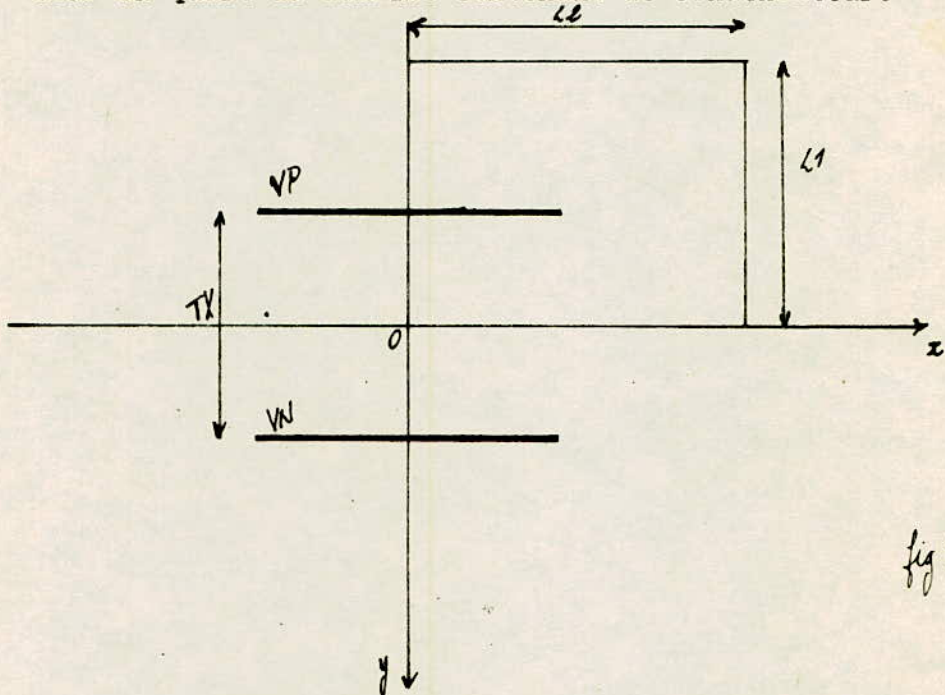


fig 13

On note TX la distance entre les plaques du condensateur.

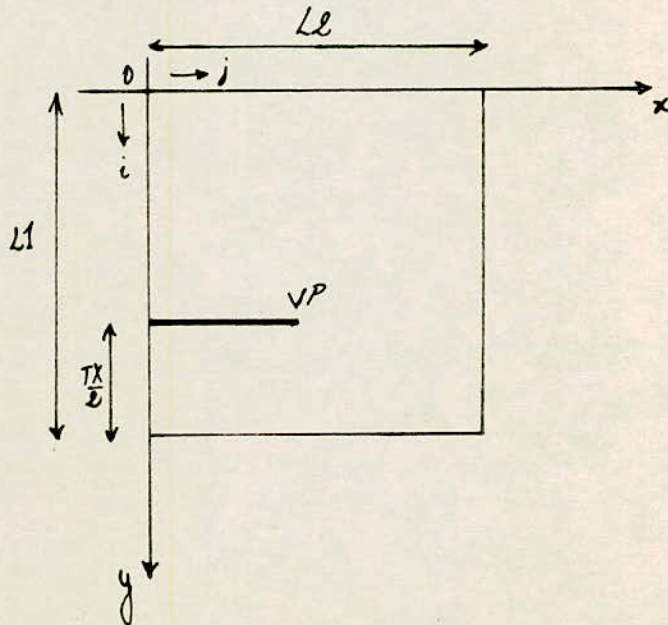


fig 14

Echelle

λ_{cm}
→ λ_{cm}

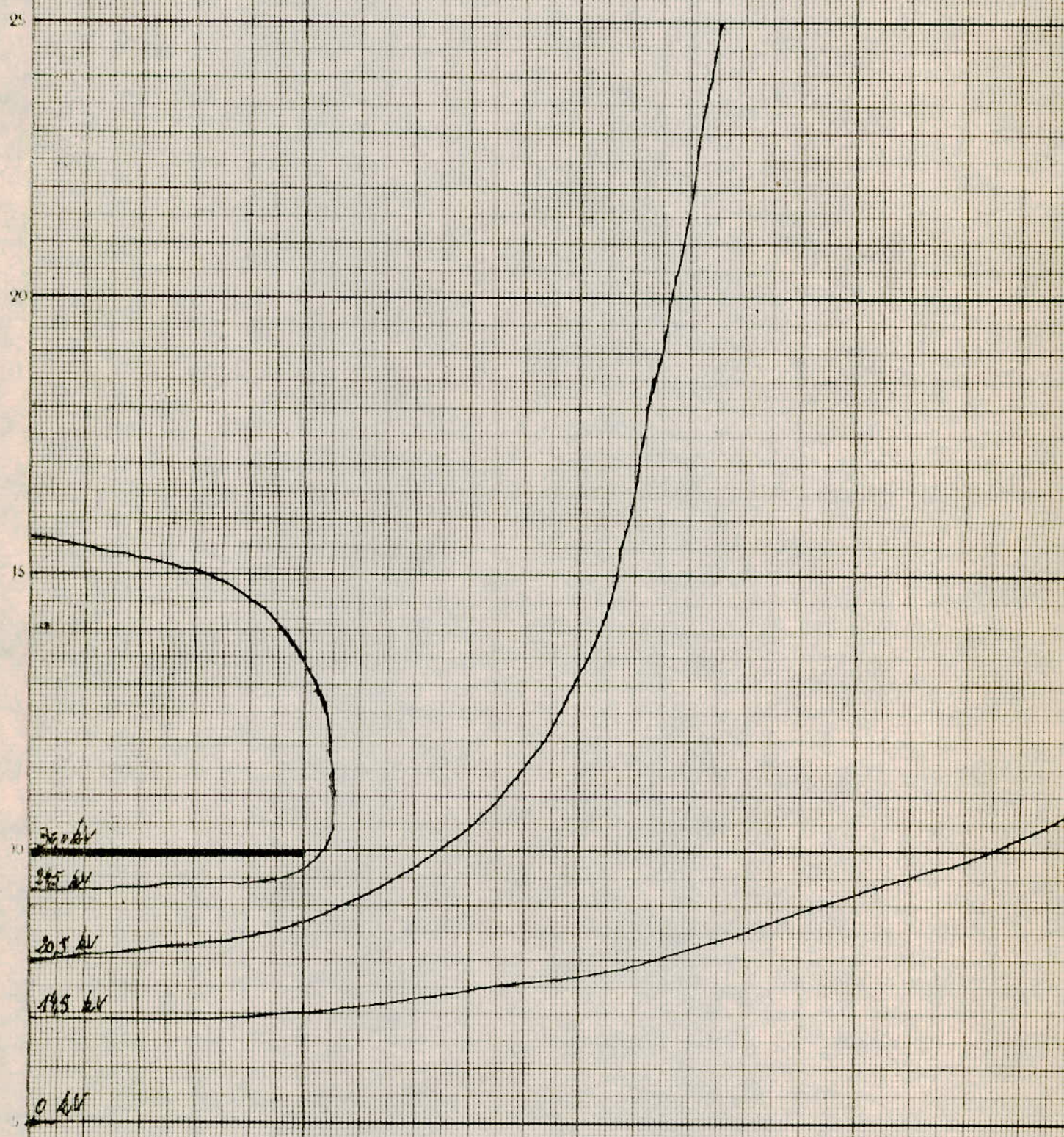


Fig.15 - Distribution du potentiel dans un condensateur plan.

Pour écrire les équations de la tension aux différents noeuds, on utilisera les résultats de l'approximation du sixième ordre, c'est à dire les équations de la forme (24).

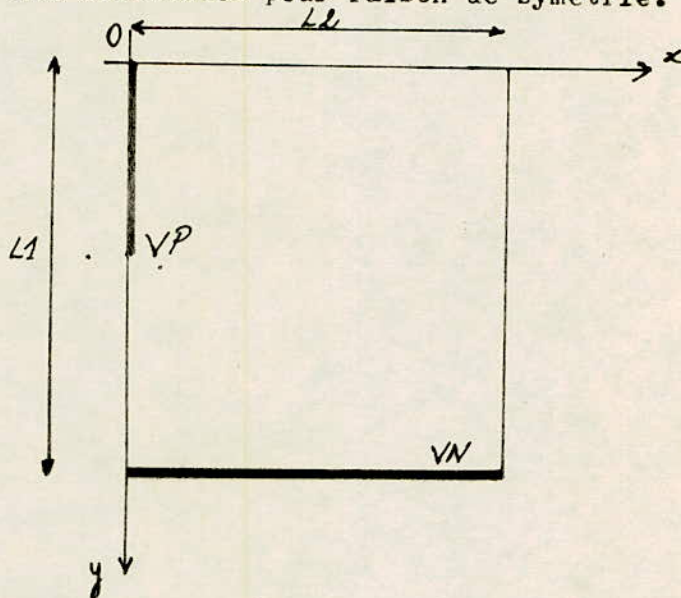
Conclusion:

Les résultats obtenus par ordinateur sont très proches des valeurs réelles du potentiel et du champ de telle sorte que l'allure de quelques équipotentielles tracées, nous montre la non uniformité du champ électrique sur les bords.

Après plusieurs essais, on notera qu'il est indispensable de commencer l'écriture des équations aux différences finies pour les noeuds situés à proximité de la plaque où le potentiel est connu, puis ainsi de suite jusqu'à l'arrivée aux noeuds situés sur le contour.

5.3- Cas du système pointe-plan:

Pour ce système, nous utiliserons aussi les mêmes notations que précédemment et nous étudierons la distribution du potentiel sur la moitié droite du domaine contenant les électrodes pour raison de symétrie.



Remarque:

Comme dans l'exemple précédent, on commencera l'écriture des équations aux différences finies pour les noeuds situés à proximité des électrodes où le potentiel est connu. Aussi, pour une meilleure approximation, on utilisera les équations de la forme (24).

Conclusion:

L'allure des courbes équipotentiellles tracées à partir des résultats de calcul, reflète parfaitement bien la distribution du potentiel. Et cela, en comparant avec les résultats trouvés par certains auteurs pour le même système.

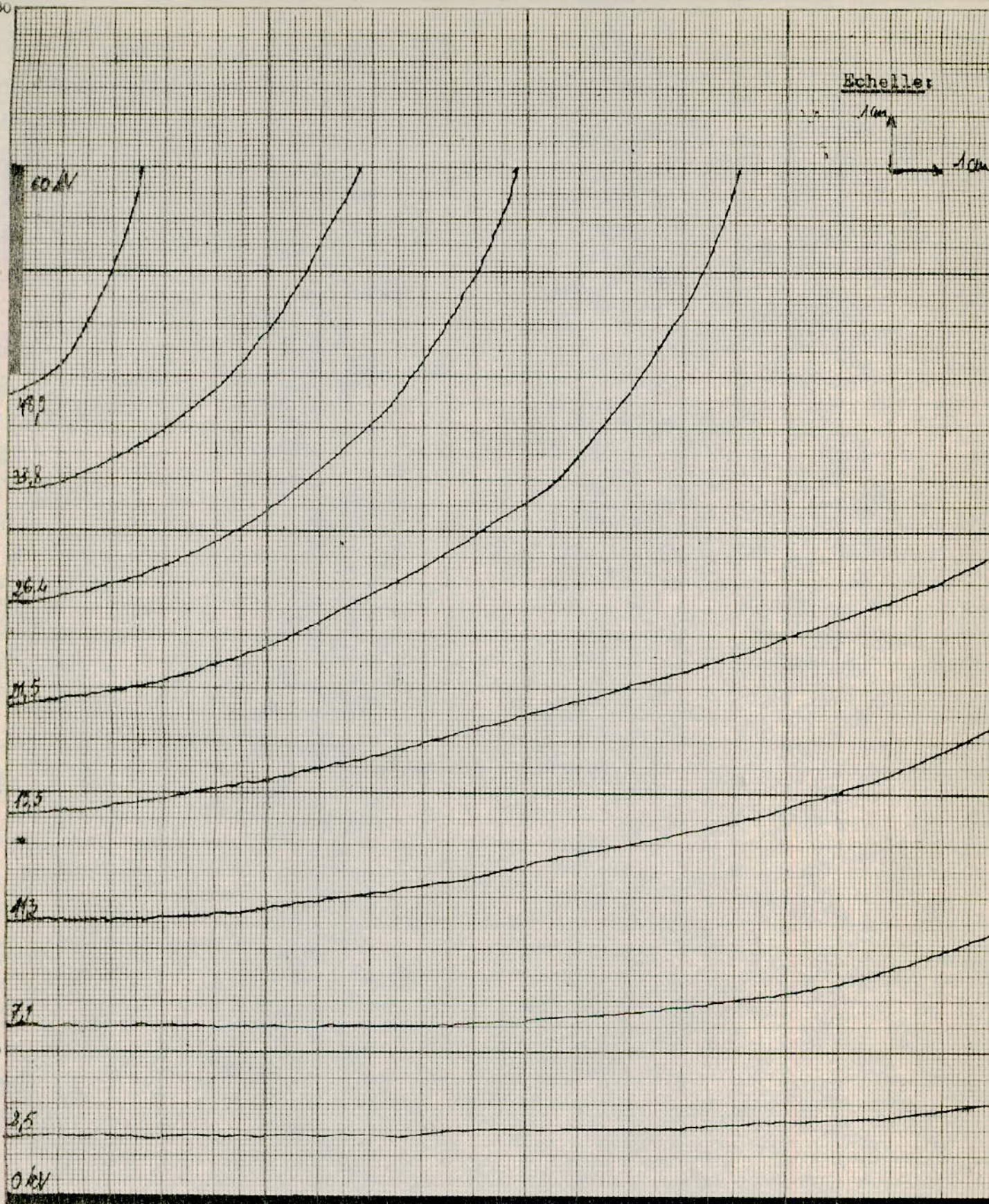


Fig.16 - Distribution du potentiel dans un
système pointe-plan .

METHODE
DES
ÉLÉMENTS FINIS

Il y a dans le principe variationnel quelque chose
de plus d'importance pour nous que son utilité dans les calculs;
il représente une AUTRE FORMULATION de la loi fondamentale de
l'électrostatique.

Edward M. Purcell
prix Nobel de physique

METHODE DES ELEMENTS FINIS**Introduction**

- 1- Principe de la méthode**

- 2- Procédé variationnel**
 - 2-1 Position du problème**
 - 2-2 Discrétisation du domaine**
 - 2-2 Critère de Rayleigh-Ritz**
 - 2-4 Construction des matrices élémentaires**
 - 2-5 Assemblage**
 - 2-6 Conditions aux limites**

- 3- Résolution du système d'équations & convergence**

- 4- Application**

Commentaires et conclusion

Introduction:

La méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle s'applique à divers problèmes linéaires ou non, rencontrés dans les différentes branches de la physique et des sciences appliquées.

Il existe différentes approches à l'approximation par éléments finis, mais la plus utilisée est la méthode variationnelle, car elle est simple à formuler.

On verra dans ce chapitre comment résoudre l'équation de Laplace dans un cas bidimensionnel, moyennant un procédé variationnel.

I Principe de la méthode

la méthode variationnelle établit une correspondance entre la résolution directe de l'équation aux dérivées partielles et la minimisation d'une certaine fonctionnelle.

En ce qui concerne l'équation de Laplace qui correspond à un problème stationnaire, on démontre (Principe des travaux virtuels) que la fonction qui la résout, rend minimale l'énergie potentielle du système considéré : ((9))

$$I(V) = \iint_D \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{C_2} 2V.h. dl \quad (I-I)$$

où:

V est la fonction potentiel

ε : la permittivité du milieu

h : valeur du champ sur la portion de frontière C_2

Comme la fonctionnelle $I(V)$ s'exprime en fonction du potentiel inconnu V , la méthode variationnelle consiste à approcher la solution exacte V_0 par une fonction V dépendant de n paramètres a_i ; ces derniers doivent être déterminés de manière à minimiser la fonctionnelle $I[a_1, \dots, a_n]$ et par là même, résoudre l'équation aux dérivées partielles.

Il faut noter qu'on ne peut pas connaître à priori, la forme de la fonction V qui puisse approcher V_0 dans tout le domaine (D) , c'est pourquoi on le divise en sous-domaines D^e , $e=1, \dots, E$;

pour pouvoir approcher V_0 dans chaque sous domaine, par un polynôme V^e dont les coefficients a_i serviront de paramètres variationnels. Il s'agira ensuite d'appliquer un critère de minimisation dans chaque sous domaine, puis de passer à une formulation globale du problème sous forme d'un système matriciel qu'il faut résoudre par rapport aux paramètres inconnus a_i .

2- Procédé variationnel

2-1 Position du problème:

On se propose de résoudre l'équation de Laplace bidimensionnelle

$$\operatorname{div}(-\varepsilon \operatorname{grad}(v)) = 0 \quad \text{sur } D$$

avec les conditions aux limites:

$$V = g(\ell) \text{ sur } C_1 : \text{condition sur le potentiel.}$$

$$\partial v / \partial n = h(\ell) \text{ sur } C_2 : \text{ " " le champ.}$$

où C_1 et C_2 constituent la frontière C du domaine (fig 2-1)

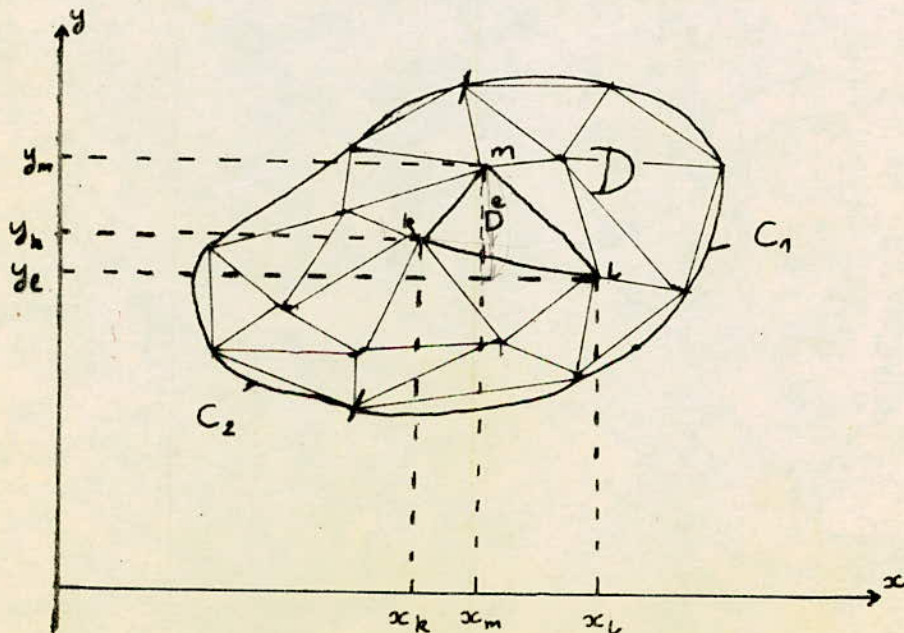
et ε, g, h sont des fonctions données.

2-2-a Discretisation du domaine:

Le domaine (D) va être divisé en éléments D^e , en suivant les règles suivantes ((10))

- Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune si elle existe; cette condition exclut le recouvrement partiel de deux éléments
- L'ensemble de tous les éléments D^e doit constituer un domaine aussi proche que possible de (D), en particulier les vides entre éléments sont exclus.

A la fin on obtient un maillage constitué par E éléments D^e définis chacun par la donnée de ses sommets k, l, m et de leurs coordonnées $(x_k, y_k), (x_l, y_l)$ et (x_m, y_m) : (fig 2-1)



2-2-b Choix des fonctions d'approximation

si la taille des éléments est suffisamment réduite, on peut supposer que la fonction inconnue V_0 varie linéairement à l'intérieur de chacun d'eux et prendre pour fonction approchée un polynôme:

$$V^e(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (2-2-b1)$$

Exprimons ce polynôme en fonction des potentiels des sommets de l'élément :

$$V^e(x_k, y_k) = a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k = V_k$$

$$V^e(x_l, y_l) = a_0 + a_1 x_l + a_2 y_l = V_l$$

(2-2-b2)

$$V^e(x_m, y_m) = a_0 + a_1 x_m + a_2 y_m = V_m$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} V_k \\ V_l \\ V_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

d'où l'expression des a_i :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V_k \\ V_l \\ V_m \end{pmatrix}$$

qu'on injectera dans (2-2-b1):

$$V^e(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V_k \\ V_l \\ V_m \end{pmatrix}$$

pour écrire enfin:

$$V^e(x, y) = (N_k^e(x, y) \quad N_l^e(x, y) \quad N_m^e(x, y)) \begin{pmatrix} V_k \\ V_l \\ V_m \end{pmatrix} \quad (2-2-b3)$$

avec

$$N_k^e(x, y) = \frac{1}{2S^e} [(x_l y_m - x_m y_l) + (y_l - y_m)x + (x_m - x_l)y]$$

$$N_l^e(x, y) = \frac{1}{2S^e} [(x_m y_k - x_k y_m) + (y_m - y_k)x + (x_k - x_m)y]$$

$$N_m^e(x, y) = \frac{1}{2S^e} [(x_k y_l - x_l y_k) + (y_k - y_l)x + (x_l - x_k)y]$$

où $2S^e$ représente le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \end{pmatrix}$

et qui est égal au double de l'aire de l'élément e considéré.

Les fonctions V^e ainsi exprimées possèdent les propriétés suivantes:

$$V^e(x_i, y_j) = \begin{cases} V_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(2-2-b4)

$$V^e(x, y) = 0 \quad \text{à l'extérieur de l'élément } e$$

De la sorte, l'approximation sur tout le domaine (D) sera la somme des approximations élémentaires V^e :

$$V(x, y) = \sum_{e=1}^E V^e(x, y) \quad (2-2-b5)$$

2-3 Critère de Rayleigh-Ritz

L'étape qui vient est essentielle dans la mesure où elle va permettre de discrétiser la forme intégrale (I-I) ce qui mènera plus tard à une écriture matricielle du problème.

Considérons la fonctionnelle d'énergie :

$$I(V) = \iint_D \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{C_2} 2 V \cdot h \cdot dl$$

remplaçons V par l'expression (2-2-b5)

$$I(V) = I(V_1 \dots V_n) = \iint_D \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{e=1}^E V^e(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sum_{e=1}^E V^e(x, y) \right)^2 \right\} dx dy - \int_{C_2} 2 \left(\sum_{e=1}^E V^e(x, y) \right) \cdot h \cdot dl$$

Comme chaque fonction V^e est nulle ailleurs que sur le sous-domaine e où elle est définie (2-2-b4):

$$I(V_1 \dots V_n) = \sum_{e=1}^E \iint_{D^e} \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial V^e(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^e(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \sum_{e=1}^E \int_{C_2^e} 2 V^e \cdot h \cdot dl$$

soit:

$$I(V_1 \dots V_n) = \sum_{e=1}^E I^e \quad (2-3-1)$$

avec

$$I^e = \iint_{D^e} \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial V^e(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^e(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{C_2^e} 2 V^e(x, y) \cdot h \cdot dl \quad (2-3-2)$$

qui représente l'expression de la fonctionnelle dans chaque élément D .

Remarque : le second terme de I^e n'apparaît que si l'élément considéré a un côté sur la frontière où la condition de Neumann a été imposée.

Le critère de Rayleigh-Ritz stipule que la fonctionnelle $I(V_1 \dots V_n)$ est minimum si :

$$\frac{\partial I}{\partial V_i} = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n$$

soit en vertu de (2-3-1)

$$\frac{\partial I}{\partial V_i} = \frac{\partial}{\partial V_i} \left(\sum_{e=1}^E I^e \right) = \sum_{e=1}^E \frac{\partial I^e}{\partial V_i} = 0 \quad (2-3-3)$$

Ce résultat montre que l'énergie est minimum dans le domaine entier, si elle l'est dans chaque sous domaine D , ce qui nous permettra de construire les matrices élémentaires A^e

2-4 Construction des matrices élémentaires

L'expression de la fonctionnelle dans chaque élément est (2-3-2)

$$I^e = \iint_{D^e} \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial v^e(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^e(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{C_2^e} 2 v^e(x,y) \cdot h \cdot dl$$

comme les éléments sont disjoints et en vertu de (2-3-3) I^e sera minimum quand:

$$\frac{\partial I^e}{\partial v_i} = 0 \quad \text{avec } i = k, l, m$$

soit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e}{\partial v_i} &= \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\iint_{D^e} \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^e}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{C_2^e} 2 v^e \cdot h \cdot dl \right] \\ &= \iint_{D^e} \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial v^e}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{C_2^e} 2 \cdot \frac{\partial v^e}{\partial v_i} \cdot h \cdot dl \end{aligned}$$

développons chaque terme de l'intégrand:

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} \right)^2 = 2 \frac{\partial v^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial v^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v^e}{\partial v_i} \right)$$

or, d'après (2-2-b3):

$$v^e(x,y) = N_k^e v_k + N_l^e v_l + N_m^e v_m = (N_k^e \quad N_l^e \quad N_m^e) \begin{pmatrix} v_k \\ v_l \\ v_m \end{pmatrix}$$

d'où

$$\frac{\partial v^e}{\partial v_i} = N_i^e \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[(N_k^e \quad N_l^e \quad N_m^e) \begin{pmatrix} v_k \\ v_l \\ v_m \end{pmatrix} \right] = \left(\frac{\partial N_k^e}{\partial x} \quad \frac{\partial N_l^e}{\partial x} \quad \frac{\partial N_m^e}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} v_k \\ v_l \\ v_m \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} \right)^2 = 2 \cdot \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} & \frac{\partial N_l^e}{\partial x} & \frac{\partial N_m^e}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ v_l \\ v_m \end{pmatrix}$$

de même

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial v^e}{\partial y} \right)^2 = 2 \cdot \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} & \frac{\partial N_l^e}{\partial y} & \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ v_l \\ v_m \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial v^e}{\partial v_i} = N_i^e$$

il vient

$$\frac{\partial I^e}{\partial v_i} = 2 \sum_{j \in e} A_{ij}^e \cdot v_j - 2 b_i^e \quad (2-4-1)$$

avec

$$A_{ij}^e = \iint_{D^e} \varepsilon \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy$$

et

$$b_i^e = \int_{C_2^e} h \cdot N_i^e \cdot dl$$

pour les trois noeuds k, l, m de l'élément, (2-4-1) peut s'écrire

$$(A^e) \cdot (v^e) = (b^e) \quad (2-4-2)$$

où (A^e) est une matrice (3,3) : matrice élémentaire

(v^e) est le vecteur colonne: $\begin{pmatrix} v_k \\ v_l \\ v_m \end{pmatrix}$ } vecteurs élémentaires

(b^e) est le vecteur colonne: $\begin{pmatrix} b_k \\ b_l \\ b_m \end{pmatrix}$ }

Le système (2-4-2) est l'écriture sous forme matricielle du critère de minimisation de la fonctionnelle, sur l'élément e .

2-5 Assemblage des matrices élémentaires

L'application du critère (2-3-3) à chaque élément, conduit à la construction de E matrices élémentaires (A^e).

Ce qui nous intéresse cependant, c'est d'obtenir un système matriciel dont le vecteur solution (V) minimise l'énergie dans tout le domaine (D).

Nous allons, à cette fin étendre les E matrices (A^e) de manière à exprimer (2-4-2) sous forme d'un système d'ordre n faisant intervenir le vecteur global :

$$(V) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

2-5-a Extension des matrices élémentaires

Le système (2-4-2) s'écrit:

$$\begin{matrix} k & l & m \\ \begin{pmatrix} A_{kk}^e & A_{kl}^e & A_{km}^e \\ A_{lk}^e & A_{ll}^e & A_{lm}^e \\ A_{mk}^e & A_{ml}^e & A_{mm}^e \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} v_k \\ v_l \\ v_m \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} b_k \\ b_l \\ b_m \end{pmatrix} \end{matrix}$$

pour faire intervenir le vecteur global $(V) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, il suffit d'étendre la matrice élémentaire (A^e) et le vecteur (b^e) à l'ordre n avec, comme termes non nuls ceux de rang k, l et m, il vient :

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & \dots & k & \dots & l & \dots & m & \dots & n \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ l \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A_{kk}^e & \dots & A_{kl}^e & \dots & A_{km}^e & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A_{lk}^e & \dots & A_{ll}^e & \dots & A_{lm}^e & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A_{mk}^e & \dots & A_{ml}^e & \dots & A_{mm}^e & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \\ v_l \\ \vdots \\ v_m \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_k \\ b_l \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2-5-aI)$$

cette écriture est équivalente à (4-2-I), mais présente l'avantage de faciliter l'assemblage ultérieur.

2-5-b Assemblage

D'après (2-3-3) le minimum de l'énergie potentielle sur tout le domaine (D) s'obtient par addition des contributions de tous les éléments à ce minimum, soit en vertu de (2-5-aI):

$$\sum_{e=1}^E \left((A^e)_{et} \cdot (V) - (b^e)_{et} \right) = 0$$

où $(A^e)_{et}$ et $(b^e)_{et}$ désignent les matrices étendues.

et le système global s'écrit

$$\boxed{(A) \cdot (v) = (b)} \quad (2-5-bI)$$

avec:

$$(A) = \sum_{e=1}^E (A^e)_{et}$$

$$(v) = (v_1, \dots, v_n)^T$$

$$(b) = \sum_{e=1}^E (b^e)_{et}$$

Remarque

la matrice (A) est symétrique, car elle a été construite à partir de matrices (A^e) symétriques (on peut le vérifier immédiatement de l'expression des termes A_{ij} (2-4-I))

2-6-a Introduction des conditions aux limites

Tant qu'on ne tient pas compte des conditions aux limites, la matrice globale (A) est singulière et le système (2-5-bI) admet une infinité de solutions.

On démontre ((9)) que seules les conditions sur le potentiel (Dirichlet) sont à imposer au vecteur solution (v) , on dit qu'elles sont essentielles; les conditions sur le champ (Neumann) sont quant à elles dites naturelles car elles sont automatiquement vérifiées lors de la formulation variationnelle du problème.

2-6-b Réduction du système matriciel

Lorsqu'on impose la condition de Dirichlet sur le potentiel, le vecteur global (v) contiendra des composantes connues; il s'agira de partitionner le système de manière à le résoudre par rapport aux composantes inconnues restantes.

Soit p le nombre de composantes connues, le vecteur (v) peut être écrit :

$$(v) = \begin{pmatrix} (v)_1 \\ (v)_2 \end{pmatrix}$$

où $(v)_1$ est le vecteur à p lignes des potentiels connus

et $(v)_2$ le vecteur à $(n-p)$ lignes des potentiels à déterminer.

le système (2-5-bI), après permutation de quelques lignes et colonnes, s'écrit:

$$\begin{pmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} \\ (A)_{12}^T & (A)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v)_1 \\ (v)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b)_1 \\ (b)_2 \end{pmatrix}$$

avec :

$$(A)_{11} : \text{matrice } (p, p)$$

$$(A)_{12} : \quad // \quad (n-p, p)$$

et

$$(A)_{22} : \text{matrice } (n-p, n-p)$$

Le système (2-5-bI) peut alors être partitionné de la sorte :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A)_{11} (v)_1 + (A)_{12} (v)_2 = (b)_1 \\ (A)_{12}^t (v)_1 + (A)_{22} (v)_2 = (b)_2 \end{array} \right\} \quad (2-6-bI)$$

comme seul le vecteur $(v)_2$ est inconnu, on peut réduire le système à :

$$(A)_{22} (v)_2 = (b)_2 - (A)_{12}^t (v)_1 \quad (2-6-b2)$$

la matrice $(A)_{22}$ n'est pas singulière et le système (2-6-b2) admet une solution unique ((9)).

3) Résolution du système d'équation & convergence

la méthode des éléments finis a été à l'origine du développement d'une multitude de méthodes numériques de résolution de systèmes matriciels sur lesquels elle débouche.

ces méthodes tiennent compte des particularités des matrices qui peuvent être : pleines, creuses, à bandes ...etc

Dans le cas du système (2-6-b2), obtenu par partitionnement de la matrice (A) , on a affaire à une matrice creuse (2-5) et ce qui a été vu (méthode des différences finies) s'applique.

Pour ce qui est de la convergence, elle dépend, entre autres, de la forme de l'équation aux dérivées partielles et du type de fonctions d'approximation choisies.

On démontre ((9)) que pour l'équation de Laplace et pour des éléments triangulaires simples, le choix de polynômes d'approximation linéaires, suffit à assurer la convergence du système (2-6-b2).

données géométriques:

- Table des éléments

ELEMENT Noeud ↘	1	2	3	4
k	1	1	4	4
l	2	3	3	5
m	3	4	5	6

- Table des noeuds

NOEUD → COORD. noeud ↘	1	2	3	4	5	6
x	0	2	2	0	2	0
y	0	0	0.5	0.5	1	1

Ces deux tableaux faciliteront la construction des matrices élémentaires.

d) Choix des fonctions d'approximation par élément:

On a trois inconnues V_k, V_l, V_m , par élément; un polynôme linéaire suffit

$$V^e(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y.$$

et d'après (2-2-b2) et (2-2-b3):

$$V^e(x, y) = (N_k^e(x, y) \quad N_l^e(x, y) \quad N_m^e(x, y)) \times \begin{pmatrix} V_k \\ V_l \\ V_m \end{pmatrix}$$

Pour plus de clarté, les fonctions N_i^e s'écriront désormais

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{25^e} [\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y] \quad (\text{voir 2-2-b3})$$

e) Construction des matrices élémentaires

En vertu de (2-4-1) et de (d) les termes A_{ij}^e auront la forme:

$$A_{ij}^e = \iint_{D^e} (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) \frac{1}{(25^e)^2} x \, dx \, dy$$

et les termes b_i^e sont tous nuls, car $h(e) = 0$

d'où l'expression des matrices et vecteurs élémentaires:

$$(A^e) = \iint_D \frac{1}{(25^e)^2} \begin{pmatrix} \beta_k^2 + \gamma_k^2 & \beta_k \beta_l + \gamma_k \gamma_l & \beta_k \beta_m + \gamma_k \gamma_m \\ \text{Sym} & \beta_l^2 + \gamma_l^2 & \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m \\ & & \beta_m^2 + \gamma_m^2 \end{pmatrix} ds$$

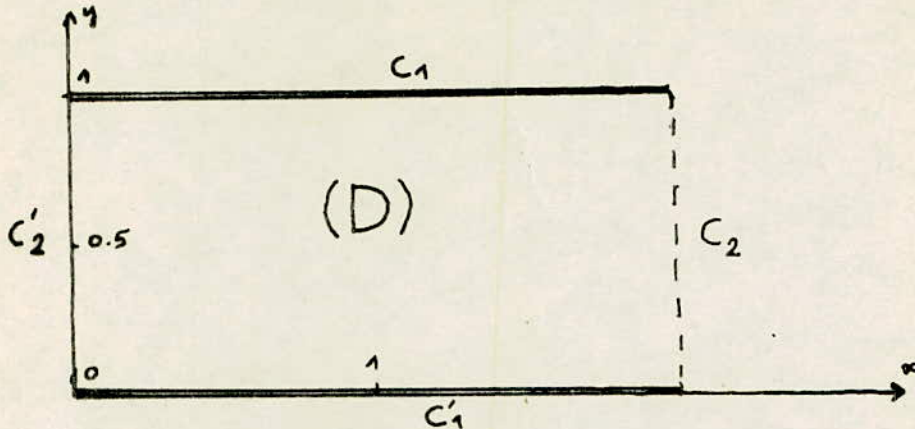
$$\text{et } (b^e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

comme les termes β_i et γ_i sont constants; l'intégration fera

intervenir uniquement une constante $S^e = \iint ds$.

APPLICATION :

Calcul de la distribution de potentiel dans un condensateur plan
(sans effet de bord)



a) Position du problème :

Il s'agit de trouver la répartition de potentiel entre les deux plaques du condensateur, ce qui revient à résoudre l'équation de Laplace :

$$\Delta V = \text{div}(\text{grad}(V)) = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} V = U = \text{cste} \quad \text{sur } C_1 \\ V = 0 \quad \quad \quad \text{sur } C'_1 \end{array} \right\} \quad \text{condition de Dirichlet}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } C_2 \\ \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } C'_2 \end{array} \right\} \quad \text{condition de Neumann}$$

ce cas se déduit de (2-I) en prenant :

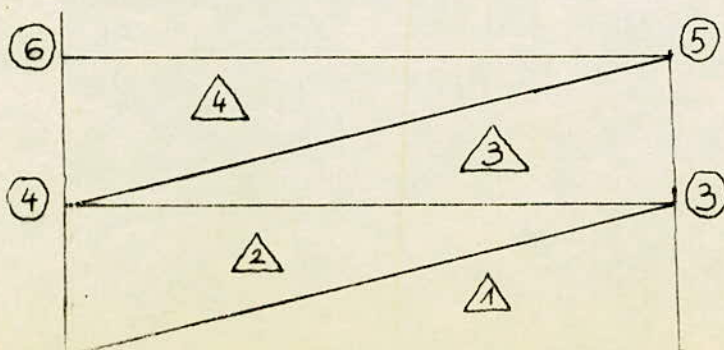
$$\epsilon = \text{cste} = 1 ; h(\ell) = 0 .$$

b) Choix de la fonctionnelle :

En vertu de (I-I) et des particularités du problème, la fonctionnelle s'écrit :

$$I(V) = \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

c) Discrétisation du domaine



\triangle : élément

\circ : noeud

-Exemple de calcul de (A^e) :

soit l'élément (4) défini par les noeuds $(k=4, l=5, m=6)$ et leurs coordonnées (voir tables de données géométriques)

$$(A^{\Delta}) = \frac{1}{4S^{\Delta}} \begin{pmatrix} \beta_4^2 + \gamma_4^2 & \beta_4\beta_5 + \gamma_4\gamma_5 & \beta_4\beta_6 + \gamma_4\gamma_6 \\ \text{sym} & \beta_5^2 + \gamma_5^2 & \beta_5\beta_6 + \gamma_5\gamma_6 \\ & & \beta_6^2 + \gamma_6^2 \end{pmatrix}$$

L'application numérique pour les quatre éléments du domaine donne:

$$(A^{\Delta_1}) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 4.25 & -4.25 & 4 \\ -4.25 & 4.25 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

$$(A^{\Delta_2}) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \\ -4 & -0.25 & 4.25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$$

$$(A^{\Delta_3}) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \textcircled{4} & \textcircled{3} & \textcircled{5} \\ 0.25 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 4.25 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{4} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{5} \end{matrix}$$

$$(A^{\Delta_4}) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \\ -4 & -0.25 & 4.25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{matrix}$$

f) Extension des matrices élémentaires:

Dans cette étape on étend les matrices (A^e) à l'ordre 6 de manière à faire intervenir le vecteur global:

$$(V) = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix}$$

Soit:

$$(A^{(1)})_{et} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ 4.25 & -4.25 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -4.25 & 4.25 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \underline{4} \\ \underline{5} \\ \underline{6} \end{matrix}$$

$$(A^{(2)})_{et} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \underline{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & -0.25 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -0.25 & 4.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ 2 \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$(A^{(3)})_{et} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \underline{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.25 & -0.25 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ 6 \end{matrix}$$

$$(A^{(4)})_{et} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -0.25 & 4.25 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{matrix}$$

g) Assemblage:

la matrice globale (A) s'obtient en additionnant les quatres matrices élémentaires étendues:

$$(A) = (A^{\Delta 1})_{et} + (A^{\Delta 2})_{et} + (A^{\Delta 3})_{et} + (A^{\Delta 4})_{et}$$

soit :

$$(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8.25 & -4.25 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4.25 & 4.25 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 8.5 & -0.5 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & -0.5 & 8.5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -0.25 & 4.25 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

-On remarque bien que (A) est symétrique

- (A) est singulière tant qu'on n'a pas tenu compte des conditions aux limites (on peut vérifier que son déterminant est nul).

h) Introduction des conditions aux limites:

les données du problème imposent :

$$v_1 = v_2 = 0 ; v_5 = v_6 = U$$

Le système global étant:

$$\begin{pmatrix} 8.25 & -4.25 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4.25 & 4.25 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 8.5 & -0.5 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & -0.5 & 8.5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -0.25 & 4.25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on réarrange le vecteur global en mettant en tête ses composantes connues :

$$(V) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{permutations : } \begin{cases} 5 \leftrightarrow 3 \\ 6 \leftrightarrow 4 \end{cases}$$

mais il faudra transformer la matrice (A) pour obtenir un système équivalent.

- Permutation de colonnes

Chaque fois qu'on a permuté deux lignes de (V) on permuera les deux colonnes de (A) d'indice correspondant,

Le système ainsi transformé devient:

$$\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 8.25 & -4.25 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ -4.25 & 4.25 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 0 & 8.25 & -0.5 \\ -4 & 0 & 0 & -4 & -0.5 & 8.5 \\ 0 & 0 & 4.25 & 4.25 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & -0.25 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Permutation de lignes

Pour rendre à la matrice (A) sa symétrie, on fera les mêmes permutations, mais cette fois sur les lignes; on obtient:

$$\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 8.25 & -4.25 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ -4.25 & 4.25 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4.25 & -0.25 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 4.25 & 0 & -4 \\ \hline 4 & -4 & -4 & 0 & 8.5 & -0.5 \\ -4 & 0 & 0 & -4 & -0.5 & 8.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

h) partitionnement du système

D'après (2-6-bI) le système peut se partitionner comme suit:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8.25 & -4.25 & 0 & 0 \\ -4.25 & 4.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 4.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4.25 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8.5 & -0.5 \\ -0.5 & 8.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le système à résoudre s'écrit:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8.5 & -0.5 \\ -0.5 & 8.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit tous calculs faits:

$$\begin{pmatrix} 4.25 & -0.25 \\ -0.25 & 4.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2U \\ +2U \end{pmatrix}$$

1) Résolution & discussion des résultats

la résolution donne:

$$\underline{V_3 = V_4 = U/2}$$

le potentiel réel au milieu du condensateur est:

$$V = E \cdot x = \frac{U}{d} \cdot x ; x = \frac{d}{2} \Rightarrow V = \frac{U}{2}$$

Les résultats concordent parfaitement avec ceux de la méthode analytique, mais il faut remarquer que pour des applications plus compliquées, la précision ne peut être aussi bonne et ce, pour des raisons diverses (voir commentaires sur la méthode)

Commentaires & conclusion

La méthode variationnelle développée ici, quoique de manière rudimentaire, présente l'intérêt de retracer les principales étapes de la méthode des éléments finis, aussi élaborée soit elle. Ces étapes sont en effet communes à toutes les variantes de la méthode, l'une sera plus puissante que l'autre si elle pourra traiter une gamme plus large de problèmes, usant pour cela d'éléments plus complexes et de fonctions d'approximation de degré élevé ce qui nécessite le recours à des techniques de calcul et de programmation très délicates (intégration numérique, stockage ...etc)

Cette complexité ne devrait pourtant pas rebuter l'ingénieur s'il connaît les précieux services que la méthode des éléments finis peut rendre, vu l'inefficacité des méthodes classiques dans la résolution des problèmes qui se posent à l'ingénieur.

METHODE
DES
CHARGES FICTIVES

CHAPITRE IV

METHODE DES CHARGES FICTIVES

1-PRINCIPE DE LA METHODE

2-DISPOSITION DES CHARGES FICTIVES

2.1-Champ bidimensionnel

2.2-Champ tridimensionnel à symétrie axiale

2.3-Champ tridimensionnel de forme arbitraire

3-CALCUL DE LA TENSION

3.1-Principe

3.2-Mise en oeuvre de la méthode

4-CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE

5-EXEMPLE DE CALCUL DES COEFFICIENTS POTENTIELS K_{ij}

INTRODUCTION:

Contrairement aux méthodes des différences finies et éléments finis, la méthode des charges fictives n'exige pas la présence de contour fermé où le potentiel électrique doit être connu. Elle nécessite la connaissance des conditions aux limites des tensions, uniquement sur les électrodes; elle s'applique donc particulièrement bien au calcul des champs électriques dans les installations extérieures.

I-PRINCIPE DE LA METHODE:

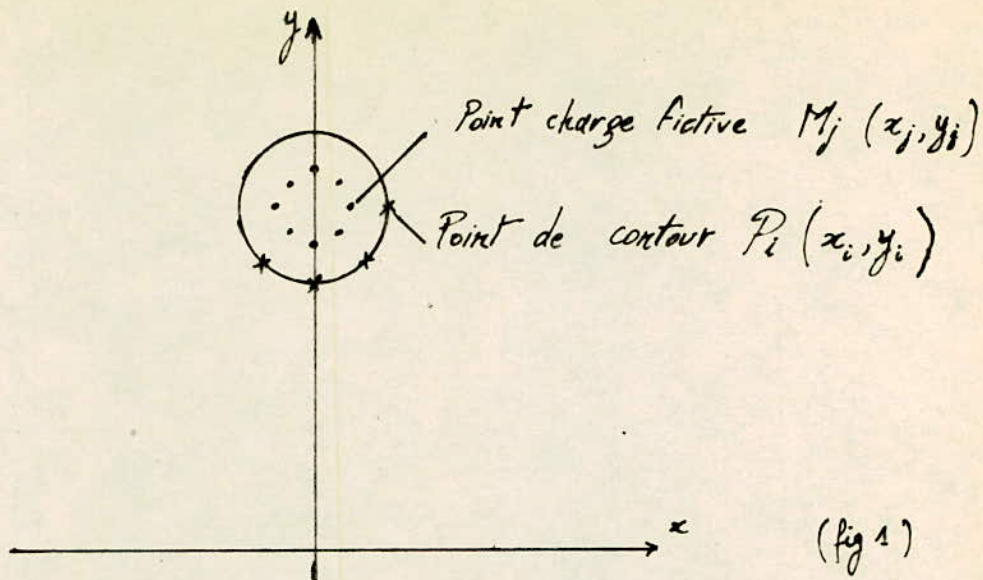
Le principe de la méthode des charges fictives est basé sur la simulation de la distribution superficielle des charges électriques sur la surface des électrodes par une distribution discrète de charges fictives à l'intérieur de ces conducteurs. L'emplacement et la grandeur de ces charges fictives seront déterminées de telle manière que leur effet intégré satisfasse les conditions aux limites de la tension connue sur la surface des électrodes. De plus, la nature discrète de cette méthode impose l'introduction d'un nombre assez élevé de charges fictives pour atteindre une précision raisonnable d'où la nécessité de l'utilisation de l'ordinateur.

2-DISPOSITION DES CHARGES FICTIVES:

Selon la nature du problème, on adopte pour chaque cas, des dispositions spatiales appropriées des charges fictives.

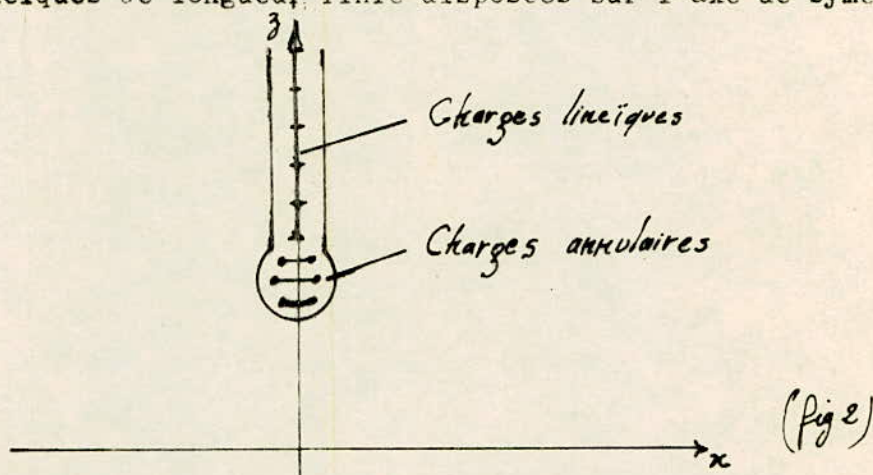
2.1-Champ bidimensionnel:

Pour simuler un champ bidimensionnel, on adopte des charges linéiques de longueur infinie tout au long du conducteur.



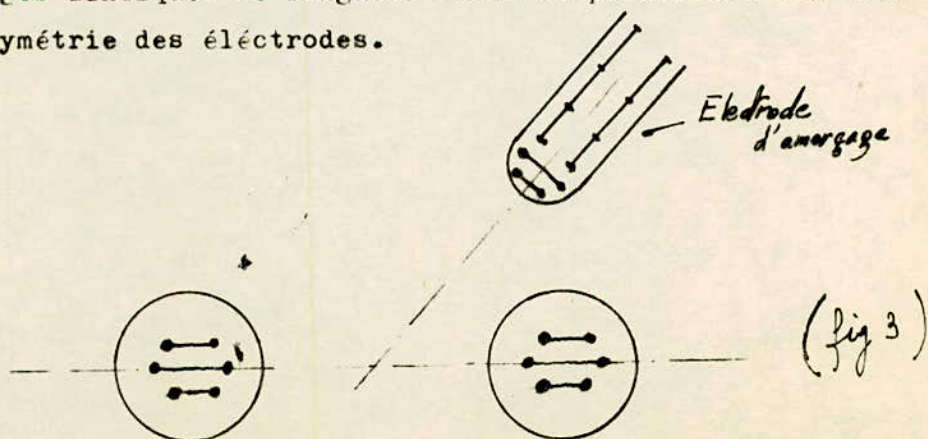
2.2-Champ tridimensionnel à symétrie axiale:

Pour simuler un champ tridimensionnel à symétrie axiale, on adopte des charges annulaires centrées sur l'axe de symétrie combinées avec des charges ponctuelles ou linéiques de longueur finie disposées sur l'axe de symétrie.



2.3-Champ tridimensionnel de forme arbitraire

Pour simuler un champ tridimensionnel de forme arbitraire, on adopte des charges annulaires à densité de charge variable sur la circonférence combinées avec des charges linéiques de longueur finie et parallèles aux axes de symétrie des électrodes.



3-CALCUL DE LA TENSION:

3.1-Principe:

Selon la disposition des charges fictives adoptées on déduit une relation de la forme :

$$U_{ij} = K_{ij} q_j$$

entre le potentiel U_{ij} d'un point P_i de coordonnées (x_i, y_i) dû à la charge q_j se trouvant au point M_j de coordonnées (x_j, y_j) comme indiqué sur la figure I .

Les coefficients K_{ij} sont les coefficients potentiels (voir exemple) et doivent être déterminés pour chaque disposition de charges fictives.

En appliquant le principe de superposition, le potentiel du point P_i dû à toutes les charges fictives introduites, sera donné par l'expression :

$$U_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} q_j$$

n étant le nombre de charges fictives introduites.

Sous forme matricielle, on écrira les relations qui relient tous les potentiels connus sur l'électrode U_i avec toutes les charges fictives q_j (i. et j variant de 1 à n), on aura donc:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & & k_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

ou encore:

$$[K_{ij}] \cdot [q_j] = [U_i]$$

Où K_{ij} est la matrice des coefficients potentiels
 q_j le vecteur des charges fictives introduites
 U_i est le vecteur tension connu sur la surface des électrodes.

3.2-Mise en oeuvre de la méthode:

En premier lieu, on dispose arbitrairement les charges fictives adoptés à l'intérieur des électrodes dont le potentiel est connu. Avec une certaine expérience, on peut réaliser dès le premier essai, une configuration qui ne sera pas trop éloignée de l'optimum auquel on veut arriver.

Ensuite, on écrit les relations qui relient les potentiels connus U_i sur l'électrode avec toutes les charges fictives q_j après avoir calculé les coefficients potentiels K_{ij} . On aura le système matriciel suivant:

$$[U_i] = [K_{ij}] [q_j]$$

Puis, on détermine la valeur des charges en résolvant ce système par rapport à q_j , on aura:

$$[q_j] = [K_{ij}]^{-1} [U_i]$$

Après cela, on choisit n autres points de vérification P_{vi} situés sur le contour des électrodes et on calcule les potentiels de vérification U_{vi} donné par les charges q_j déjà calculées. On aura :

$$[U_{vi}] = [K_{ij}] [q_j]$$

Si les valeurs des potentiels U_{vi} sont très différentes des valeurs des potentiels U_i , on change alors, l'emplacement ou l'arrangement spatial des n charges fictives, on calcule à nouveau les valeurs des charges q_j et on refait la vérification jusqu'à ce que toutes les différences:

$$\Delta U_i = |U_{vi} - U_i|$$

soient inférieures à une quantité ϵ fixée au départ et qui reflète la précision de la simulation effectuée.

Maintenant, en connaissant les coordonnées d'un point P_e situé dans l'espace environnant, on pourra calculer son potentiel U_e après avoir déterminé les coefficients potentiels K_{ej} correspondant à ce point et en tenant compte de la disposition des charges fictives q_j trouvée.

4-CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE:

En appliquant le principe de superposition pour le calcul du potentiel U_e d'un point P_e de l'espace environnant et pour la distribution de charges fictives trouvée, on peut alors déduire le champ électrique de la formule générale:

$$\vec{E}_e = -\text{grad } U_e$$

Dans le cas bidimensionnel, les composantes du champ seront donc:

$$E_{x_e} = -\frac{\partial U_e}{\partial x} \quad \text{et} \quad E_{y_e} = -\frac{\partial U_e}{\partial y}$$

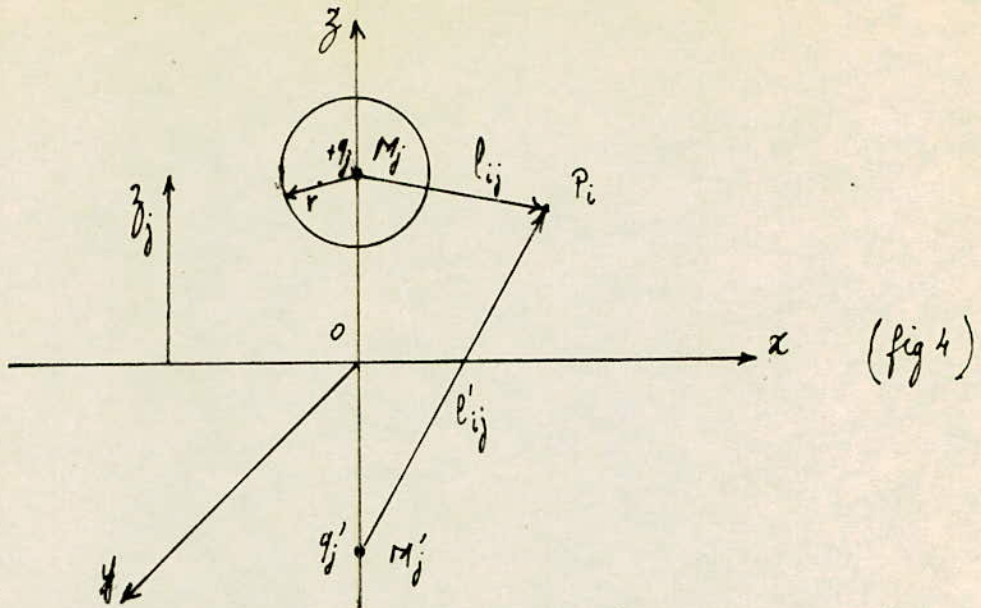
Connaissant les valeurs du potentiel et du champ en un certain nombre de points situés entre les électrodes, il sera donc possible de tracer les lignes équipotentiels et les lignes de champ perpendiculaires à celles-ci.

5-EXEMPLE DE CALCUL DES COEFFICIENTS POTENTIELS K_{ij} :

Soit une charge $+q_j$ ponctuelle et fictive, située à une distance z_j par rapport au plan xy se trouvant au potentiel zéro. Ce plan (souvent c'est la surface de la terre) sera considéré comme plan de symétrie afin d'appliquer la méthode des images.

Nous considérons que la charge q_j est située au centre d'une sphère de rayon r . Après application du théorème de Gauss, le champ électrique dû à cette charge fictive sera égal, sur la surface de la sphère, à:

$$E_r = \frac{q_j}{4\pi r^2}$$



Soit un point P_i situé à une distance l_{ij} par rapport à la charge fictive q_j , on a :

$$l_{ij} = \sqrt{x_i^2 + (z_j - z_i)^2}$$

Le potentiel au point P_i dû à la charge fictive sera :

$$U_{i \text{ fictif}} = - \int_{\infty}^{l_{ij}} E_r dr = \frac{q_j}{4\pi\epsilon l_{ij}}$$

Après considération du plan neutre $z=0$, on introduit la charge image q'_j . Avec $q'_j = -q_j$.

Comme précédemment, le potentiel dû à cette charge au point P_i sera :

$$U_{i \text{ image}} = \frac{-q_j}{4\pi\epsilon l'_{ij}}$$

avec

$$l'_{ij} = \sqrt{x_i^2 + (z_j + z_i)^2}$$

Par le théorème de superposition, on a :

$$U_{i \text{ totale}} = U_{i \text{ fictif}} + U_{i \text{ image}}$$

d'où :

$$U_i = \frac{q_j}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{[x_i^2 + (z_j - z_i)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x_i^2 + (z_j + z_i)^2]^{1/2}} \right]$$

et comme $U_i = K_{ij} q_j$

le coefficient potentiel respectif sera :

$$K_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{[x_i^2 + (z_j - z_i)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x_i^2 + (z_j + z_i)^2]^{1/2}} \right]$$

CONCLUSION GENERALE

La diversité des méthodes numériques amène l'ingénieur à choisir celle qui répond de manière optimale aux exigences de son problème.

Les critères de choix sont essentiellement:

- La rapidité de calcul
- La meilleure précision possible
- Une moindre occupation d'espace mémoire

Les méthodes numériques de calcul du champ électrostatique résolvent le même problème, en se basant sur des considérations différentes.

La méthode des différences finies, s'applique à des systèmes électriques situés à l'intérieur d'un domaine fermé sur la frontière duquel on connaît le potentiel. Elle est précise lorsque la géométrie des électrodes est plane ou présente une symétrie axiale et lorsque le milieu est homogène. Quand la permittivité du milieu varie, l'écriture des équations devient difficile aux interfaces car elle entraîne de nombreuses approximations qui se repercutent sur la précision du calcul.

La méthode des éléments finis, par contre, s'applique très bien à des milieux hétérogènes et pour des configurations d'électrodes, arbitraires, mais exige toujours que le domaine soit fermé et que les conditions aux limites soient spécifiées sur toute la frontière.

La méthode des charges fictives, quant à elle, ne nécessite la connaissance du potentiel que sur les électrodes et résout donc de manière très satisfaisante les problèmes relatifs aux installations extérieures, souvent rencontrés en haute tension. Son inconvénient majeur est la détermination de l'emplacement des charges fictives ainsi que leur nombre élevé, nécessaire à la précision des calculs d'où encombrement de la mémoire d'ordinateur.

Notons enfin que toutes ces méthodes font un usage intensif de l'ordinateur, ce qui exige de l'ingénieur la maîtrise de l'outil informatique.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE
=====

- ((1)) A.VANDER VORST -Électromagnetisme.Champ,forces
et circuits . CABAY,1983 .
- ((2)) ALONSO-FINN - Champ et ondes .Tome II
InterEdition,1977 .
- ((3)) E.M.PURCELL - Électricité et magnétisme .
Armand Collin,1973 .
- ((4)) E.DURAND - Electrostatique et magnétostatique .
MASSON,1953 .
- ((5)) M.BOUMAHRAT-A.GOURDIN - Méthodes numériques appliquées .
O.P.U ,1983 .
- ((6)) A.STROHMEIER - Fortran 77 . Eyrolles,1985 .
- ((7)) P.LIGNELET - Fortran 77 .MASSON,1985 .
- ((8)) M.DREYFUS - Fortran IV . DUNOD,1972 .
- ((9)) A.J.DAVIES - The finite element method:A first
approach . Clarendon press-Oxford,1980 .
- ((10)) G.DHATT-G.TOUZOT -Une présentation de la méthode des
éléments finis . Maloine S.A,1984 .
- ((11)) O.C.ZIENKIEWICZ - The finite element method in
engineering science . McGraw-Hill,London,1971 .
- ((12)) P.SILVESTER - Finite elements in electrical and
magnetic field problems . Willey,1980 .
- ((13)) S.DJEMA - Etude numérique des efforts électromagnétiques
dans les machines à reluctance variable polydiscoides .
Thèse de Docteur Ingenieur ,Paris,1982 .
- ((14)) P.SILVESTER - Finite elements for electrical Engineers .
Cambridge University Press,1983 .

