

4/98

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المركز الوطني للتكنولوجيا
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE METALLURGIE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

MODELISATION MATHEMATIQUE DES CONTRAINTES

RESIDUELLES D'UN MATERIAU TRAITE EN SURFACE

Proposé par :

Mr M. LARIBI

Etudié par :

Mr Y. ISSAAD

Dirigé par :

Mr M. LARIBI

PROMOTION : JUIN 1998

ENP 10, Avenue Hassen Badi — EL-HARRACH- ALGER.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
الكتبة - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE METALLURGIE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

MODELISATION MATHEMATIQUE DES CONTRAINTES
RESIDUELLES D'UN MATERIAU TRAITE EN SURFACE

Proposé par :

Mr M. LARIBI

Etudié par :

Mr Y. ISSAAD

Dirigé par :

Mr M. LARIBI

PROMOTION : JUIN 1998

ENP 10, Avenue Hassen Badi – EL-HARRACH- ALGER.

Dédicaces

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

A

Mon père

Ma mère

Mes frères

Mes grands-parents

Toute ma famille

Tous mes ami(e)s

Je dédie ce modeste travail...

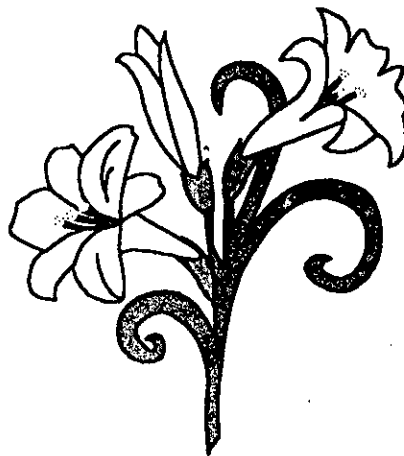
Yacine Issaad

REMERCIEMENTS

*J*e remercie profondément, mon promoteur M. LARIBI qui a été à l'origine de ce travail et, tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses précieux conseils.

Egalement, j'adresse mes vifs et respectueux remerciements à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Enfin, j'exprime ma sincère gratitude à tous les membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de juger ce mémoire.



SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : LES CONTRAINTES RESIDUELLES	3
I.1- Introduction	4
I.2- Les méthodes de détermination des contraintes résiduelles	5
I.2.1- Méthode du trépan	5
I.2.2- Méthode d'enlèvement de couches successif	8
I.2.3- Méthode du trou	9
I.2.4- Méthode de la diffraction des rayons X	13
CHAPITRE II : LES ELEMENTS FINIS	18
II.1- Concept d'élément fini	19
II.2- Formulation matricielle	19
II.3- Classification des traitements numériques	21
II.4- Equations de la mécanique des solides	23
II.5- Application de la méthode matricielle à la mécanique des structures	26
II.6- Propriétés des structures discrètes	28
II.7- Rappels sur les méthodes d'approximation	30
II.8- Résolution d'un système linéaire du type $K \cdot q = F$	33
II.9- Méthodes de résolution des systèmes linéaires	33
CHAPITRE III : LES TRAITEMENTS DE SURFACES	35
III.1- Introduction	36
III.2- Equipements de la projection thermique	37
III.3- Mise en œuvre de la projection thermique	38
III.4- Caractéristiques des matériaux projetés	41

CHAPITRE IV : LA MODELISATION MATHEMATIQUE	43
IV.1- Introduction	44
IV.2- Formulation du problème	44
IV.3- Modélisation mathématique	46
IV.4- Application du modèle proposé	57
IV.5- Résultats et interprétation	59
CONCLUSION GENERALE	65
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	66

INTRODUCTION GENERALE

La mise en place de machines, équipements ou infrastructures est généralement précédée par des conceptions faisant l'objet d'essais et de tests afin de s'assurer de leur efficacité qui est tributaire du choix des matériaux et de leur tenue en fatigue.

L'efficacité de ces matériaux et de leur comportement physico-chimique et mécanique (fatigue, usure, corrosion...) nécessitent des montages expérimentaux qui sont souvent onéreux et laborieux.

Pour cela, souvent, on fait recours aux méthodes numériques qui permettent de résoudre beaucoup de problèmes et de comprendre certains phénomènes complexes.

Aussi, l'avènement des multimatériaux ou produits formés par l'association de matériaux différents, constitue une troisième voie d'évolution des aciers spéciaux au même titre d'ailleurs que tous les métaux et permet deux types d'amélioration sur les matériaux traditionnels :

- Le premier est d'ordre technique, permettant d'associer deux ou plusieurs éléments conduisant à un produit nouveau réunissant les propriétés et avantages de chacun.
- Le deuxième type d'amélioration est d'ordre économique, permettant de limiter l'utilisation du produit performant et coûteux uniquement là où il est indispensable.

Cependant, l'élaboration et la mise en service de ces multimatériaux peut engendrer des contraintes dites « résiduelles » dont la détermination est devenue plus que nécessaire.

Notre travail consiste à modéliser mathématiquement l'état de contraintes au sein de différents multimatériaux réalisés par projection thermique.

La détermination numérique de ces contraintes résiduelles passe impérativement par la connaissance des déformations à tous les niveaux considérés. Pour cela, celles-ci ont été déterminées par la méthode extensométrique d'enlèvement successif de couches.

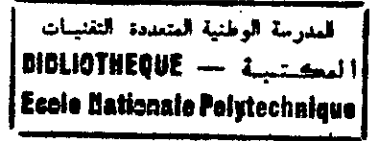
Le modèle numérique proposé est basé sur la discrétisation de la loi de l'élasticité sur différentes épaisseurs de chaque multimatériau considéré moyennant des méthodes appropriées d'établissement des équations et de résolution du système, ainsi que la connaissance des paramètres intrinsèques des matériaux employés.

Pour cela, nous avons prévu quatre chapitres : le premier est réservé aux contraintes résiduelles, avec leurs ordres de grandeur et les méthodes utilisées pour les déterminer.

Le deuxième chapitre traite de la méthode des éléments finis, son rôle, son principe, son application et sa formulation. Alors que, le troisième chapitre concerne les traitements de surfaces où nous nous intéresserons particulièrement à la projection thermique comme traitement d'élaboration des multimatériaux.

Le quatrième chapitre concerne la modélisation mathématique de détermination des contraintes résiduelles avec l'établissement du système d'équations, de la méthode de résolution et la présentation de résultats de certains multimatériaux.

Ce travail sera clôturé par une conclusion générale.



CHAPITRE I

LES CONTRAINTES RESIDUELLES

I.1- Introduction :

Les contraintes résiduelles sont des tensions qui existent dans une structure en l'absence de toute force ou sollicitation mécanique extérieure. Les processus de fabrication sont les causes les plus fréquentes de contraintes résiduelles. Virtuellement toutes les méthodes telles que le moulage, le soudage, l'usinage, le forgeage, l'extrusion, le traitement thermique, chimique ou thermochimique sont génératrices de contraintes résiduelles. Aussi, les contraintes résiduelles ou internes peuvent être introduites plus tard dans la vie de la structure par le montage ou l'assemblage, par des surcharges accidentelles, par des mouvements de sols...

Il est important de connaître l'ordre de grandeur de ces contraintes et leur répartition afin de mieux prévoir leur influence, de choisir les traitements destinés à les atténuer ou même les utiliser judicieusement car les contraintes résiduelles constituent le facteur principal d'endommagement et de mauvaise tenue en fatigue des pièces d'une structure.

Il existe 3 types de contraintes :

- ❖ Les contraintes résiduelles du 1^{er} ordre (σ^I) : Elles sont homogènes sur un très grand domaine du matériau (plusieurs grains : $1/10$ de mm). Les forces internes liées à ces contraintes sont en équilibre dans chaque section et les moments liés à ces forces sont nuls autour de tout axe. Ce type de contraintes est appelé «macrocontraintes». Des variations dimensionnelles macroscopiques résultent toujours d'une modification de l'équilibre des forces et des moments liés à ces contraintes σ^I .
- ❖ Les contraintes résiduelles du 2^{ème} ordre (σ^{II}) : Elles sont homogènes sur de petits domaines du matériau (un grain ou une phase : Donc à l'échelle de quelques dizaines de micromètres). Les forces internes et les moments liés à ces contraintes sont en équilibre dans un assez grand nombre de grains. Les variations dimensionnelles macroscopiques peuvent résulter d'une modification de cet équilibre.
- ❖ Les contraintes résiduelles du 3^{ème} ordre (σ^{III}) : Elles sont inhomogènes sur les petits domaines du matériau (quelques distances interatomiques). Les forces internes et les moments liés à ces contraintes sont en équilibre dans de très petits domaines. Les modifications d'équilibre n'entraînent aucune variation dimensionnelle macroscopique.

Les microcontraintes sont reliées aux déformations introduites par les défauts existants dans la microstructure (joints de grains, de phase, dislocations, précipités) et correspondent à la somme des contraintes σ^{II} et σ^{III} [1].

Dans les matériaux réels, l'état des contraintes résiduelles résulte de la superposition des contraintes I, II, III :

$$\sigma^R = \sigma^I + \sigma^{II} + \sigma^{III} \quad (I.1)$$

Les effets des contraintes résiduelles peuvent s'ajouter ou se retrancher selon leur amplitude, leur signe et leur répartition, aux contraintes de services induites mécaniquement et généralement mieux connues.

Ces contraintes sont d'autant insidieuses qu'elles ne sont généralement pas détectables et encore récemment, il n'existait pas de méthode simple permettant de les mesurer sans détruire la structure, parmi les méthodes utilisées pour la détermination des contraintes résiduelles nous citerons : la méthode du Trépan, par enlèvement de couche, la méthode du Trou, et par rayons X.

1.2- Les méthodes de détermination des contraintes résiduelles :

1.2.1- La méthode du trépan :

Le principe de la méthode du Trépan consiste à isoler mécaniquement par une saignée circulaire, un petit élément de volume dont on désire connaître l'état de contraintes. La différence état initial (avec contraintes résiduelles) - état final (sans contraintes) indique le niveau des contraintes résiduelles. On supposera que le champ de contraintes est uniforme dans l'élément considéré et que $\sigma_z = 0$, z étant la direction de l'épaisseur [2].

Il est important de noter que mesurer une contrainte résiduelle par trépanage consiste à mesurer le retour élastique d'un élément. Ceci implique évidemment que l'on ne peut avoir accès à une précédente déformation plastique éventuelle[2].

De plus, si l'état de contraintes est uniaxial, les contraintes résiduelles ainsi mesurées ne peuvent être supérieures à la contrainte d'écoulement du matériau.

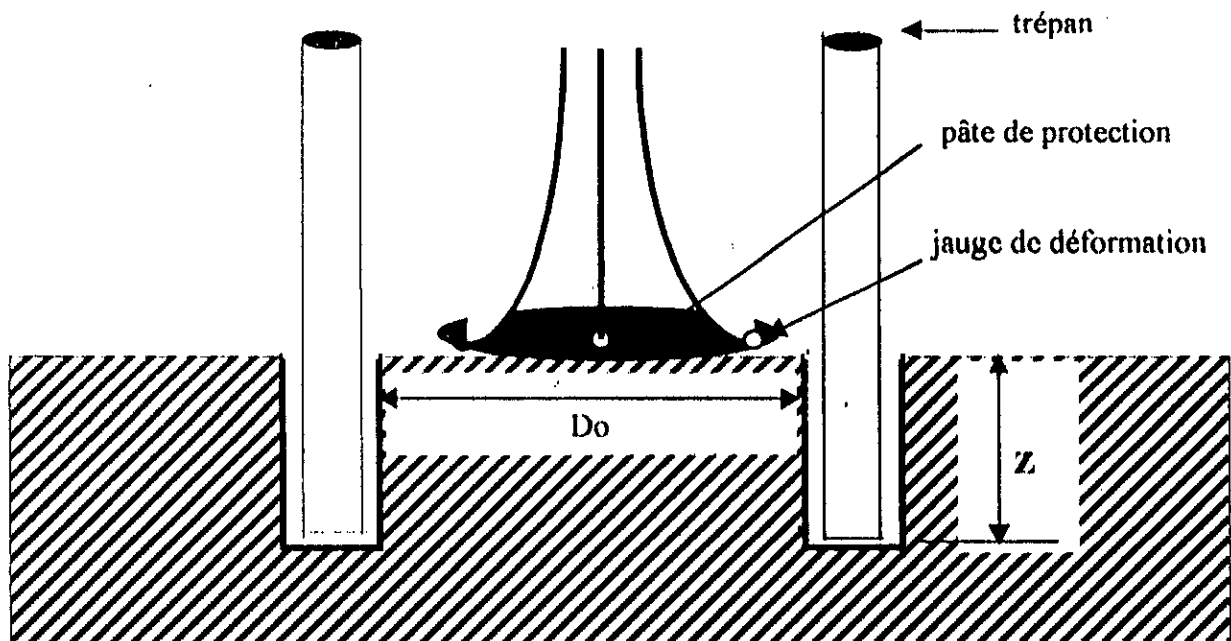
Dans le cas le plus général, déterminer l'état des contraintes résiduelles revient à déterminer les inconnues suivantes :

- ⇒ Une direction principale des contraintes, c'est à dire une direction où la scission sur la face perpendiculaire est nulle ; La direction z étant une direction principale, on en déduit aisément la troisième, orthogonale aux 2 premières.
- ⇒ Les 2 valeurs des contraintes principales dans le plan de la surface de l'élément. Il suffit donc de mesurer les déformations associées au trépanage dans 3 directions arbitraires $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$. Ceci se fait habituellement à l'aide de jauges de déformation tridirectionnelles.

1.2.1.1- Mise en œuvre pratique de la méthode du Trépan :

Une jauge tridirectionnelle est collée à l'endroit où on désire mesurer les contraintes. On pratique ensuite une saignée circulaire autour de la jauge à une profondeur suffisante pour relâcher complètement les contraintes dans la «carotte» (Figure 1).

Le diamètre du trépan doit être suffisamment petit pour assurer la relaxation complète, mais cependant pas trop pour ne pas introduire des contraintes d'usinage qui ne seraient plus négligeables vis à vis des phénomènes mesurés.



D, z
Figure I.1 : Schéma de la méthode du trépan

Le trépanage est mené par pas successifs de 0,5 à 1 millimètre afin d'éviter un échauffement excessif et de permettre l'enlèvement des copeaux. Le centrage de l'outil par rapport à la jauge n'a pas de caractère critique comme dans la méthode du «trou».

Nous avons représenté d'une manière schématique à la figure 2 le signal de relaxation d'une jauge $R(z)$ en fonction de la profondeur trépanée. Il convient de prendre pour profondeur d'usinage minimum la profondeur à partir de laquelle $R(z)$ atteint son palier. Pour un diamètre de trépan de 15 millimètres, ceci correspond à une profondeur d'au moins 7 millimètres.

Si l'on est amené à faire plusieurs mesures sur une pièce, il faut prendre garde à ce que le trépanage en un point ne modifie pas l'état des contraintes en un point voisin. Pratiquement ceci est garanti par un espacement des points de mesures de 70 mm pour un trépan de diamètre extérieur de 20 mm.

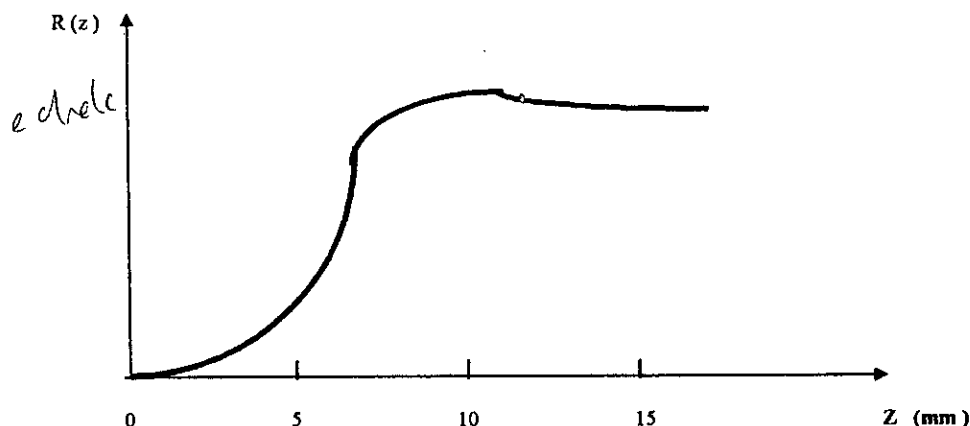


Figure I.2 : Signal de relaxation de la déformation résiduelle en fonction de la profondeur trépanée

I.2.1.2- Notions utilisées pour le dépouillement des mesures de contraintes résiduelles dans la méthode du Trépan [2] :

Les directions principales sont notées 1 et 2 avec les déformations (ϵ_1, ϵ_2) et les contraintes (σ_1, σ_2) principales associées.

Lorsqu'une jauge J_α est collée sur une direction formant un angle α avec la direction principale 1, la déformation ϵ_α indiquée vaut :

$$\epsilon_\alpha = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos 2\alpha \quad (I.2)$$

Si trois jauges A, B, C sont collées, leur relaxation après trépanage donnera $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ et un système d'équations aux trois inconnues $\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha$. Généralement on utilise un groupe de trois jauges (appelé « rosette ») dont la disposition peut varier : $45^\circ - 120^\circ$.

Dans le cas de rosettes à 120° , on a par exemple :

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos 2\alpha \quad (I.3)$$

$$\epsilon_b = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos 2\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (I.4)$$

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos 2\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \quad (I.5)$$

La résolution du système donne :

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(\epsilon_c - \epsilon_b)}{(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)} \quad (I.6)$$

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} + \sqrt{\left[\frac{\epsilon_c - \epsilon_b}{\sqrt{3}}\right]^2 + \left[\frac{2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c}{3}\right]^2} \quad (I.7)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} - \sqrt{\left[\frac{\epsilon_c - \epsilon_b}{\sqrt{3}}\right]^2 + \left[\frac{2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c}{3}\right]^2} \quad (I.8)$$

Les contraintes σ_1 et σ_2 se déduisent par les formules :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) \quad (I.9)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) \quad (I.10)$$

1.2.2- Méthode d'enlèvement de couches successif :

Principe :

Le principe de cette méthode repose sur l'exploitation d'un réarrangement des contraintes qui se produit au sein d'une pièce parallélépipédique lorsqu'on enlève une fine épaisseur en surface.

On peut alors mesurer soit la variation résultant de la courbure de la pièce (méthode de la « flèche »), soit les déformations associées sur la face opposée à l'enlèvement de matière à l'aide de jauges de déformation [3].

Supposons une pièce parallélépipédique dans laquelle règne un état de contraintes quasi plan, c'est-à-dire qu'en tout point, σ_z est très inférieur à σ_x et σ_y .

De plus les contraintes σ_x et σ_y sont supposées être uniformes dans tout plan xy. L'équilibre initial se traduit par la nullité de la résultante des forces et des moments des contraintes résiduelles.

Un enlèvement de couche d'épaisseur e provoque un effort normal et un moment de flexion dans l'épaisseur restante, ce qui se traduit par des variations linéaires des contraintes $\Delta\sigma_x$ et $\Delta\sigma_y$ [2].

La connaissance des déformations principales $\Delta\epsilon_x$ et $\Delta\epsilon_y$ sur la face opposée à l'enlèvement de la couche permet de connaître les expressions $\Delta\sigma_x$ et $\Delta\sigma_y$ et les contraintes σ_x et σ_y qui existaient dans la fine couche de métal enlevé.

Ainsi, de proche en proche, il est possible de déterminer les valeurs σ_x et σ_y dans toute l'épaisseur de métal enlevé.

1.2.2.1- Mise en œuvre pratique de la méthode par enlèvement de couches.

Dans le cas le plus général, l'élément parallélépipédique où l'on désire effectuer les mesures doit être découpé d'un ensemble plus grand, ce qui provoque une certaine relaxation partielle qu'il est nécessaire d'enregistrer.

On procède alors de la manière suivante : deux jauges de déformation sont placées aux faces inférieures et supérieures de l'élément à isoler. La découpe se traduit par deux variations de contraintes sur chacune des faces.

En supposant que les contraintes, qui résultent d'un effort normal ou d'un moment, ont une variation linéaire dans l'épaisseur, il est possible de les calculer à tout niveau. Comme l'ont montré ROSENTHAL, et NORTON[4] ou FRIK et AI[5], ceci est valable si les dimensions L et l de l'élément sont au moins deux fois égales à l'épaisseur h , il en résulte que la méthode ne devrait s'appliquer qu'aux pièces telles que L ou $l \geq 2 h$ [2].

On procède ensuite à la phase de rabotage proprement dite (ce qui élimine naturellement une des deux jauges) par pas de 0,5 ou de 1 mm. On peut employer des méthodes d'érosion chimique ou mécanique [2].

Ces opérations sont naturellement causes d'échauffement de la pièce. Après retour à l'équilibre thermique, on relève à chaque pas la déformation $\Delta \epsilon$ associée.

Le retour à l'équilibre thermique dépend naturellement des dimensions et de la nature de la pièce et des conditions d'usinage ; à titre indicatif, des mesures réalisées par thermocouples ont montré qu'un temps minimum d'une heure était nécessaire entre chaque passe.

Le rabotage est arrêté lorsque l'épaisseur enlevée ne devient plus négligeable par rapport à l'épaisseur restante, c'est-à-dire pratiquement entre 5 et 10 mm [2].

Le dépouillement des données, qui est assez lourd, gagne beaucoup à être calculé sur ordinateur.

1.2.3- La méthode du trou :

Introduction :

La méthode la plus généralement utilisée pour mesurer les contraintes résiduelles est la relaxation des contraintes par la méthode du trou illustrée par la figure 3.

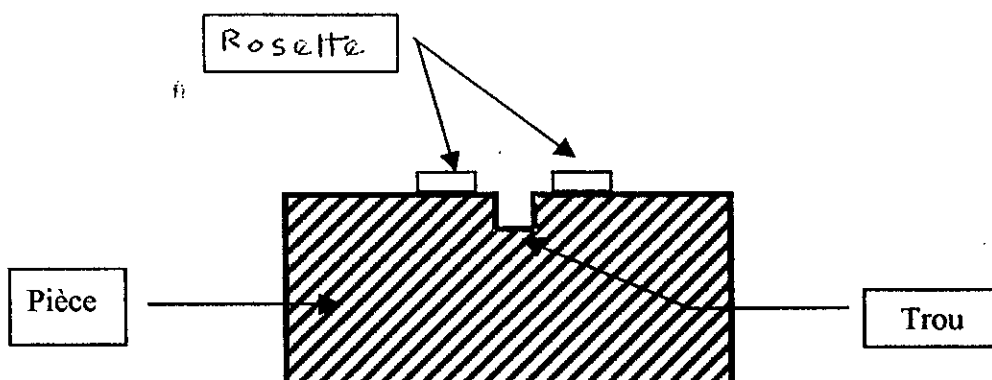


Figure I.3 : Méthode du trou

Le processus de mesure peut se résumer rapidement en six étapes :

- Une rosette spéciale de trois jauges est collée sur la structure à étudier au point où l'on veut déterminer les contraintes résiduelles.
- La rosette est reliée à un pont d'extensomètre statique par l'intermédiaire d'un boîtier de commutation.
- Un dispositif de perçage est fixé sur la structure et centré avec précision sur l'axe de la rosette.
- Après équilibrage du zéro des jauges, un petit trou est percé au centre de la rosette.
- Les mesures des déformations libérées correspondant aux contraintes résiduelles initiales sont effectuées.

I.2.3.1- Principe et théorie de la méthode du trou :

Le perçage d'un trou (même de très petit diamètre) dans un corps possédant des contraintes internes, libère ces dernières à l'emplacement du trou. Ceci est dû au fait que toute ligne perpendiculaire à une surface libre (la surface du trou dans ce cas) est nécessairement un axe principal le long duquel les contraintes de cisaillement et normales sont nulles. La libération de ces contraintes à la surface du trou modifie la contrainte dans la zone immédiatement voisine, entraînant ainsi la modification des déformations locales de surface.

Dans la plupart des applications pratiques, le trou percé est borgne et sa profondeur est :

- a) Approximativement égale à son diamètre.
- b) Faible par rapport à l'épaisseur de la structure.

Malheureusement, la méthode du trou borgne est suffisamment complexe, pour qu'aucune solution ne puisse être obtenue, à partir de la théorie de l'élasticité, sans introduire des coefficients empiriques. Une solution simple peut cependant être obtenue dans le cas particulier du trou débouchant percé dans une plaque mince pour laquelle les contraintes sont uniformes dans l'épaisseur. Pour cette raison la théorie de la méthode sera exposée tout d'abord pour le trou débouchant et étendue ensuite au trou borgne.

I.2.3.2- Théorie du trou débouchant :

La figure I.4a représente une plaque mince soumise à des contraintes résiduelles uniformes σ_x . L'état initial des contraintes en tout point $P (R, \alpha)$ peut s'exprimer en coordonnées polaires par [6] :

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad (I.11)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad (I.12)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha \quad (I.13)$$

La figure I.4b représente la même plaque après perçage d'un petit trou. Les contraintes à proximité du trou sont maintenant assez différentes car σ_r et $\tau_{r\theta}$ doivent être nuls en tout point de la surface du trou. Une solution proposée par G. KIRSCH permet d'écrire les contraintes au point $P(R, \alpha)$ [7].

$$\sigma'_r = \frac{\sigma_x}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{\sigma_x}{2}\left(1 + \frac{3}{r^4} - \frac{4}{r^2}\right)\cos 2\alpha \quad (I.14)$$

$$\sigma'_\theta = \frac{\sigma_x}{2}\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{\sigma_x}{2}\left(1 + \frac{3}{r^4}\right)\cos 2\alpha \quad (I.15)$$

$$\tau'_{r\theta} = \frac{\sigma_x}{2}\left(1 - \frac{3}{r^4} + \frac{2}{r^2}\right)\sin 2\alpha \quad (I.16)$$

Avec : $r = \frac{R}{R_0}$ ($R \geq R_0$)

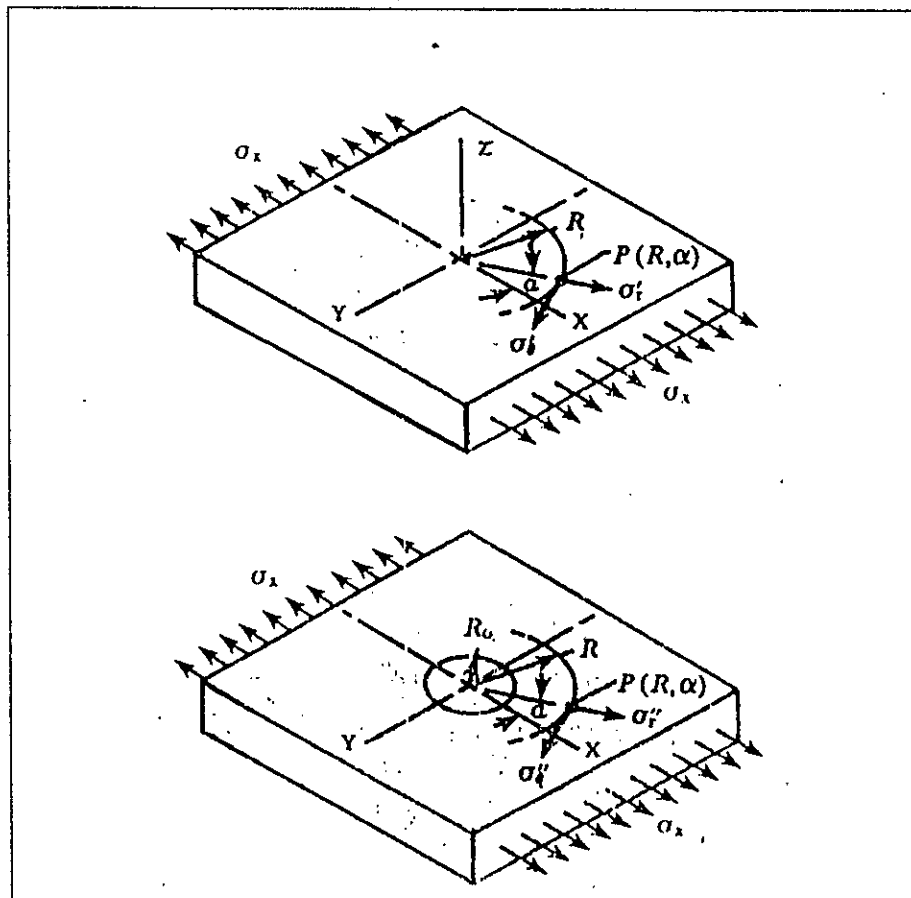


Figure I.4 : Etat de contraintes au point $P(R, \alpha)$ avant et après perçage du trou.

En retranchant les contraintes initiales (avant perçage) des contraintes finales (après perçage), on obtient les variations de contraintes, c'est à dire la relaxation de celles-ci au point $P(R, \alpha)$ due au perçage.

$$\Delta\sigma_r = \sigma'_r - \sigma_r \quad (I.17)$$

$$\Delta\sigma_\theta = \sigma'_\theta - \sigma_\theta \quad (I.18)$$

$$\Delta\tau_{r\theta} = \tau'_{r\theta} - \tau_{r\theta} \quad (I.19)$$

En substituant les équations (I.11, I.12, I.13) et (I.14, I.15, I.16) dans (I.17, I.18, I.19), on obtient les expressions complètes des contraintes résiduelles libérées. Si le matériau est homogène et s'il reste dans le domaine élastique, ces équations peuvent être utilisées pour écrire la loi de HOOKE et connaître les déformations normales au point $P(R, \alpha)$ qui s'écrivent :

$$\varepsilon_r = -\frac{\sigma_x(1+\nu)}{2E} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{3}{r^4} \cos 2\alpha + \frac{4}{r^2(1+\nu)} \cos 2\alpha \right] \quad (I.20)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\sigma_x(1+\nu)}{2E} \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{3}{r^4} \cos 2\alpha - \frac{4}{r^2(1+\nu)} \cos 2\alpha \right] \quad (I.21)$$

Les équations précédentes peuvent alors s'écrire sous une forme plus simple mettant en évidence la variation sinusoïdale des déformations libérées le long d'un cercle de rayon R (tel que : $R \geq R_0$).

$$\varepsilon_r = \sigma_x(A + B \cos 2\alpha) \quad (I.22)$$

$$\varepsilon_\theta = \sigma_x(-A + C \cos 2\alpha) \quad (I.23)$$

La comparaison des équations (I.20, I.21) et (I.22, I.23) permet de définir les coefficients $A, B,$ et C :

$$A = -\frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad (I.24)$$

$$B = -\frac{1+\nu}{2E} \left[\left(\frac{4}{1+\nu} \right) \frac{1}{r^2} - \frac{3}{r^4} \right] \quad (I.25)$$

$$C = -\frac{1+\nu}{2E} \left[-\left(\frac{4\nu}{1+\nu} \right) \frac{1}{r^2} + \frac{3}{r^4} \right] \quad (I.26)$$

1.2.3.3- Théorie du trou borgne :

La base théorique de la méthode du trou a été développée précédemment à partir du petit trou débouchant complètement dans une plaque mince soumise à un état de contrainte uniforme. Une telle configuration est assez éloignée des pièces ou des structures à étudier qui ne sont généralement pas plates ni minces. C'est pour cette raison qu'un trou borgne est généralement percé dans la plupart des applications de la méthode du trou.

Le perçage d'un trou borgne dans un champ de contraintes planes produit localement un état de contraintes très complexes pour lequel il n'existe pas encore de solution exacte à partir de la théorie de l'élasticité.

Comparée à la méthode du trou débouchant, la méthode du trou borgne fait intervenir une variable supplémentaire indépendante ; il s'agit d'une grandeur sans dimension, à savoir le rapport Z / D_0 .

Pour tout état initial de contrainte résiduelle et pour un trou de diamètre donné, les déformations libérées généralement augmentent (à une vitesse décroissante) au fur et à mesure que la profondeur du trou augmente jusqu'à ce que celle-ci soit égale au diamètre du trou ou légèrement plus grande. En conséquence, afin d'avoir un signal maximal, le trou est généralement percé à une profondeur Z telle que $Z / D_0 = 1$. (La norme ASTM E 837-85 spécifie $Z / D_0 = 1,2$ pour la profondeur maximale)[6].

1.2.4- Détermination des contraintes résiduelles par diffraction des rayons X :

1.2.4.1- Diffraction des rayons X :

Un matériau métallique est en général un polycristal formé d'une multitude de grains, chacun d'entre eux étant en fait un monocristal constitué d'un empilement régulier d'atomes métalliques. Cet empilement peut être décrit par des ensembles de plans cristallins définis par une distance interréticulaire d_{hkl} . Facilement mesurable par diffraction des rayons X grâce à la loi de BRAGG :

$$2d_{hkl} \sin \theta = \lambda \quad (I.27)$$

θ : angle de BRAGG

λ : longueur d'onde monochromatique des rayons X.

Il faut noter que si l'on sait mesurer l'angle θ , λ étant connu, on a accès à d_{hkl}

1.2.4.2- Principe de la détermination des contraintes résiduelles par diffraction des rayons X :

Sous l'effet d'une contrainte, la distance d_0 (le matériau sans contrainte) va varier d'une quantité Δd . La mesure de la déformation $\varepsilon = (\Delta d / d_0)$ résultante est reliée par la loi de BRAGG à la mesure du déplacement $\Delta 2\theta$ d'une raie de diffraction correspondant à la famille de plans (hkl) : (Voir figure I.5).

$$\varepsilon = - \cotan \theta_0 \Delta 2\theta \quad (I.28)$$

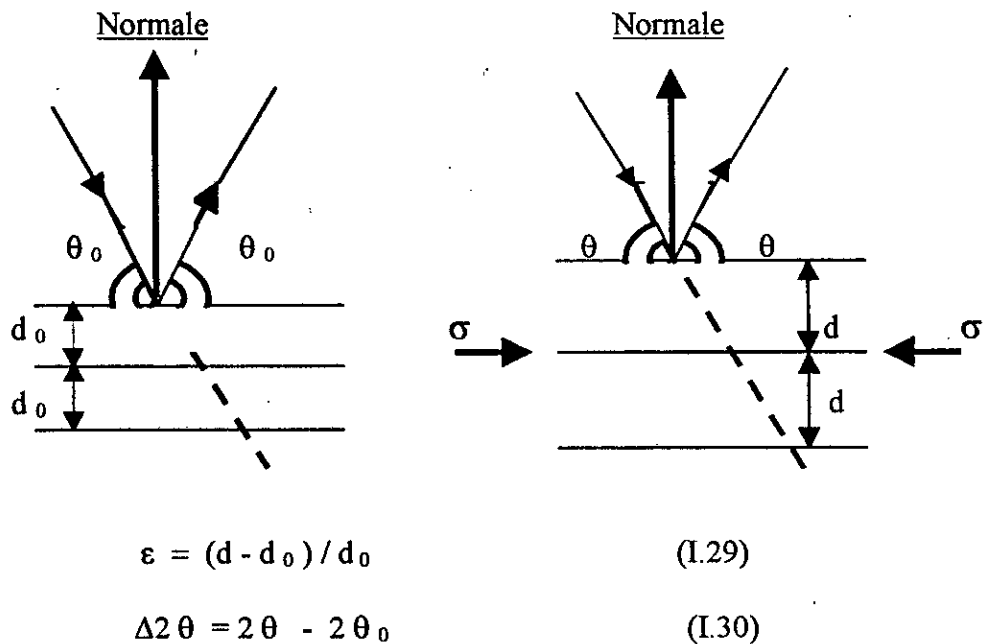
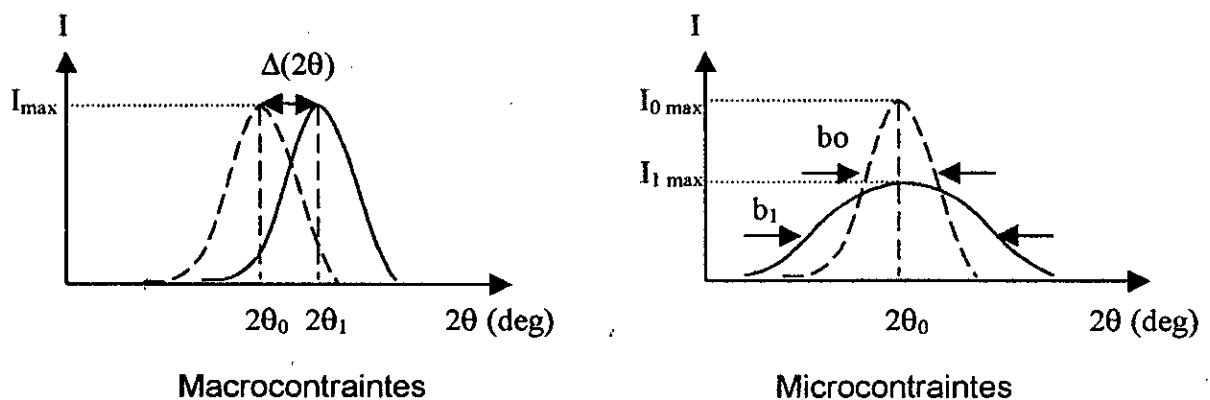


Figure I.5 : Principe de la mesure d'une déformation par diffraction des rayons X

La déformation des plans cristallins peut être observée aux deux échelles macro et microscopiques :

- A l'échelle macroscopique, cette déformation peut être considérée comme uniforme (valeurs de distances interréticulaires passant de d_0 à d) et il y a effectivement dans ce cas simple déplacement du pic de diffraction (figure I.6a).
- à l'échelle microscopique, cette déformation peut ne pas être uniforme (valeurs de distances interréticulaires oscillant autour de d_0) et il y a dans ce cas élargissement du pic de diffraction qui peut être caractérisé simplement par la mesure de la largeur à mi-hauteur b (figure I.6b)



(a)- Déplacement du pic de diffraction
(contraintes résiduelles du 1^{er} ordre I)

(b)- Élargissement du pic de diffraction
(contraintes résiduelles du 2^{eme} ordre
et 3^{eme} ordre).

Figure I.6 : Déplacement (a) et élargissement (b) d'un pic de diffraction

I.2.4.3- Influence des trois ordres de contraintes sur la diffraction des rayons X :

Pour mettre en évidence cette influence, nous allons envisager trois cas :

Un matériau monophasé à gros grains, ce même matériau à petits grains, et un matériau biphasé à petits grains.

Remarquons que la notion de «gros » et «petits » grains est relative à la dimension de la zone irradiée, et est surtout marquée par la continuité (petits grains) ou la discontinuité (gros grains) de l'anneau de diffraction [1, 9].

1. Matériau monophasé à gros grains (anneaux de diffraction discontinus) :

A l'état non contraint, toutes les taches de diffraction liées aux différents grains se trouvent sur l'anneau de diffraction correspondant à la famille de plans hkl choisie. sous l'effet de contraintes résiduelles, on doit observer les phénomènes suivants :

La contrainte σ^I correspond à une déformation globale reliée à une variation de distance interréticulaire d_{hkl} que l'on peut considérer à grande échelle comme homogène. Il correspond à cette variation un déplacement uniforme de l'anneau de diffraction.

L'état de contrainte dans chaque grain est caractérisé par des contraintes de type σ^{II} , que l'on peut considérer comme uniformes dans chaque grain. Chacun étant dans un état de contrainte σ^{II} différent, les taches de diffraction vont être déplacées par rapport à la position moyenne de l'anneau de diffraction.

Les défauts ponctuels et les dislocations introduisent à l'intérieur de chaque grain des variations locales de distances d_{hkl} correspondant aux contraintes σ^{III} .

Ces variations non homogènes conduisent à un élargissement des taches de diffraction.

2. Matériau monophasé à petits grains (anneaux de diffraction continus) :

Sous l'effet de la contrainte σ^I , il y a une variation - comme dans le cas précédent - de distance d_{hkl} que l'on peut considérer comme uniforme à grande échelle et qui entraîne un déplacement de l'anneau de diffraction.

Par contre, à cause de la petite taille de grain, on ne distingue plus les contraintes d'ordre II de celle d'ordre III, et au niveau de la diffraction, l'anneau va être élargi par les effets conjugués des contraintes d'ordre II (niveau du grain) et d'ordre III (niveau cristallin).

3. Matériau biphasé à petits grains (anneaux de diffraction liés à chaque phase continus) :

La contrainte résiduelle macroscopique apparaissant à échelle du matériau est la contrainte σ^I . Cette contrainte correspond à la moyenne des contraintes apparaissant dans chacune des phases, qui sont - suivant la définition donnée des contraintes d'ordre II.

Ces contraintes d'ordre II sont de type macroscopique : en effet, au niveau de la diffraction des rayons X, on étudie le déplacement d'un anneau (ou pic) de diffraction correspondant à l'une ou l'autre phase, déplacement qui est obtenu en considérant la variation de d_{hkl} comme homogène à l'intérieur de la phase α ou de la phase β (α et β sont les deux phases constituant le matériau).

Conclusion :

Le choix d'une méthode de mesure des contraintes résiduelles s'effectuera en fonction des objectifs et des possibilités naturelles de chaque méthode : la méthode du trépan sera préférée dans le cas des pièces présentant de faible gradient dans l'épaisseur, et lorsque l'on désire connaître la contrainte à quelques millimètres sous la surface.

Si l'on désire obtenir des informations sur le gradient des contraintes sur une plus grande épaisseur, la méthode par enlèvement de couches successif sera adoptée, au prix de la rapidité et la simplicité de la première méthode.

Le tableau ci-dessous rassemble les caractéristiques de la méthode du trépan et de la méthode d'enlèvement de couches :

Critères de choix d'une méthode	Méthode du trépan	Méthode d'enlèvement de couches
Hypothèse de base	Champ uniforme en profondeur, $\sigma_z = 0$ sur une surface de diamètre minimum 20 mm.	Champ variable en profondeur, $\sigma_z = 0$ sur un rectangle de côté suffisamment grand par rapport à l'épaisseur ($L, l > 2h$)
Contraintes mesurées sur une pièce avec gradient de contraintes dans l'épaisseur.	Résultat intégrant le gradient dans l'épaisseur de 0 à quelques mm.	Gradient dans toute l'épaisseur des couches enlevées.
Précision	$\pm 30 \text{ N/mm}^2$	$\pm 40 \text{ N/mm}^2$
Degrés de destructivité	Méthode semi-destructive.	Méthode destructive.
Mise en œuvre opératoire	Assez simple	Assez simple
Possibilité de travailler sur site	Oui	Non
Rapidité de mesure	Grande	Peu élevée
Dépouillement des résultats	Assez facile	Assez difficile

Tableau I.1 : Comparaisons entre la méthode du trépan et la méthode d'enlèvement de couches [2].

L'application de la méthode du trou est parfaite si la contrainte est uniforme dans la profondeur. Dans ce cas, les coefficients de calcul sont parfaitement connus et les contraintes sont définies avec une précision raisonnable, en supposant qu'il n'y ait pas d'erreur expérimentale.

La méthode de diffraction des rayons X est une méthode non destructive, pouvant faire des mesures sur des surfaces très localisées ($< 1 \text{ mm}^2$) et donnant des informations sur l'état de déformation de la microstructure, à la fois à l'échelle macroscopique et à l'échelle microscopique. La faible pénétration des rayons X utilisée en diffraction en fait une méthode particulièrement adaptée aux problèmes dans lesquels les couches superficielles des matériaux interviennent.

Les plus récents développements de la technique de diffraction des rayons X vont vers la description de la microstructure d'un matériau par la trace des figures de pôle, à la fois d'intensité (texture), de déformation et de micro-déformation, correspondant à la même famille de plans cristallins.

CHAPITRE II

LES ELEMENTS FINIS

II.1- Le concept d'élément fini :

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses : Barres ou poutres, plaques et coques...

Le concept de structure discrète a été appliqué tout d'abord à des assemblages de poutres. En effet, cette notion de modèle discret est évidente pour de telles structures car :

- On dispose d'un modèle théorique simple à une dimension (théorie des poutres).
- La notion d'élément est intuitive et l'on peut caractériser de façon simple le comportement de chaque élément.
- Les interfaces entre éléments sont simples : ce sont les nœuds de l'assemblage.
- Les conditions de compatibilité et d'équilibre aux nœuds se formulent de façon simple.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, on étudie un modèle discret du **continuum**. Ce modèle est basé sur une subdivision du domaine continu en sous – domaines de forme géométrique simple que l'on appellera «éléments finis» interconnectés en des points remarquables appelés «nœuds»[10].

De plus, on définit dans chaque élément une approximation adéquate de la solution permettant de résoudre le problème en fonction uniquement des valeurs de la solution aux nœuds.

On peut classer, les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments peuvent être distinguées[10, 11, 14] :

- ★ Les éléments unidimensionnels (1D) : barres, poutres rectilignes.
- ★ Les éléments bidimensionnels (2D) : élasticité plane (déformation ou contrainte plane), plaques en flexion.
- ★ Les éléments tridimensionnels (3D) : éléments en volume ou coques épaisses.
- ★ Les éléments axisymétriques : ils constituent une classe bien particulière (tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques coniques).

II.2. Formulation matricielle : (Niveau élémentaire et global) :

Comme nous l'avons cité précédemment, la méthode des éléments finis permettait de ramener les problèmes de milieux continus à des problèmes discrets à un nombre fini de paramètres inconnus qui sont déterminés par application de critères énergiques.

Ces paramètres sont de nature différente selon la méthode employée. On peut distinguer deux classes de méthodes matricielles.

- ★ *La méthode des déplacements* (de rigidité) : dans laquelle les paramètres inconnus sont *les déplacements* (et éventuellement leurs dérivées) aux nœuds.

- ★ *La méthode des forces* (de souplesse) : dans laquelle les paramètres inconnus sont *les contraintes ou les forces* résultantes dans les éléments.

Lorsqu'on utilise ces techniques matricielles, on est amené successivement à s'intéresser à deux niveaux de formulation :

- * La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini.
- * La formulation globale au niveau de la structure complète.

a) La formulation élémentaire :

Elle consiste à rechercher pour chaque élément des expressions matricielles des énergies (de déformation et cinétique), du travail et des forces qui sont appliquées en fonction des inconnues élémentaires : les déplacements aux nœuds de l'élément. Ceci nécessite le calcul de la matrice caractéristique de l'élément : matrice de rigidité [10, 14].

On a par exemple dans le cas de l'analyse statique, les expressions suivantes en fonction du vecteur q^e des déplacements au nœud de l'élément.

- Energie de déformation : $U_e = \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e$ (II.1)

- Travail des forces appliquées : $T_e = q^{eT} F^e$ (II.2)

Tel que :

- q^e : vecteur des déplacements nodaux de l'élément (e).
- q^{eT} : vecteur des déplacements nodaux de l'élément (e) transposé.
- K^e : matrice de rigidité élémentaire de l'élément (e).
- F^e : vecteur des forces nodales de l'élément (e).

b) La formulation globale :

Elle consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle des énergies (de déformation et de cinétique), du travail et des forces appliquées en fonction des déplacements inconnus en *tous les nœuds* de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires (matrice de rigidité, vecteur de forces équivalentes) pour *tous les éléments* [10, 14].

Dans le cas de l'analyse statique, on a pour la structure complète les expressions suivantes en fonction des vecteurs des déplacements aux nœuds de la structure complète :

- Energie de déformation : $U = \frac{1}{2} q^T K q$ (II.3)

- Travail des forces appliquées : $T = q^T F$ (II.4)

Tel que :

q^T : vecteur transposé des déplacements.

K : matrice de rigidité de la structure.

q : vecteur des déplacements nodaux.

F : vecteur des forces nodales d'une structure.

II.3- Classification des traitements numériques :

Nous avons vu précédemment comment le concept d'élément fini et l'utilisation de méthodes matricielles permettaient de ramener le problème continu à un système d'équations à un nombre fini d'inconnues de déplacements. Les problèmes de calcul des structures et des types de traitement numérique qui en résultent se décomposent en différentes grandes classes mais nous limiterons notre étude aux problèmes linéaires classiques.

◆ Les problèmes linéaires classiques :

Analyse statique linéaire :

Elle consiste à déterminer les déplacements et les contraintes dans une structure à comportement linéaire sous l'influence de charges statiques ou à variation lente. Comme nous l'avons mentionné précédemment, ce problème se ramenait à la résolution du système linéaire : $K q = F$.

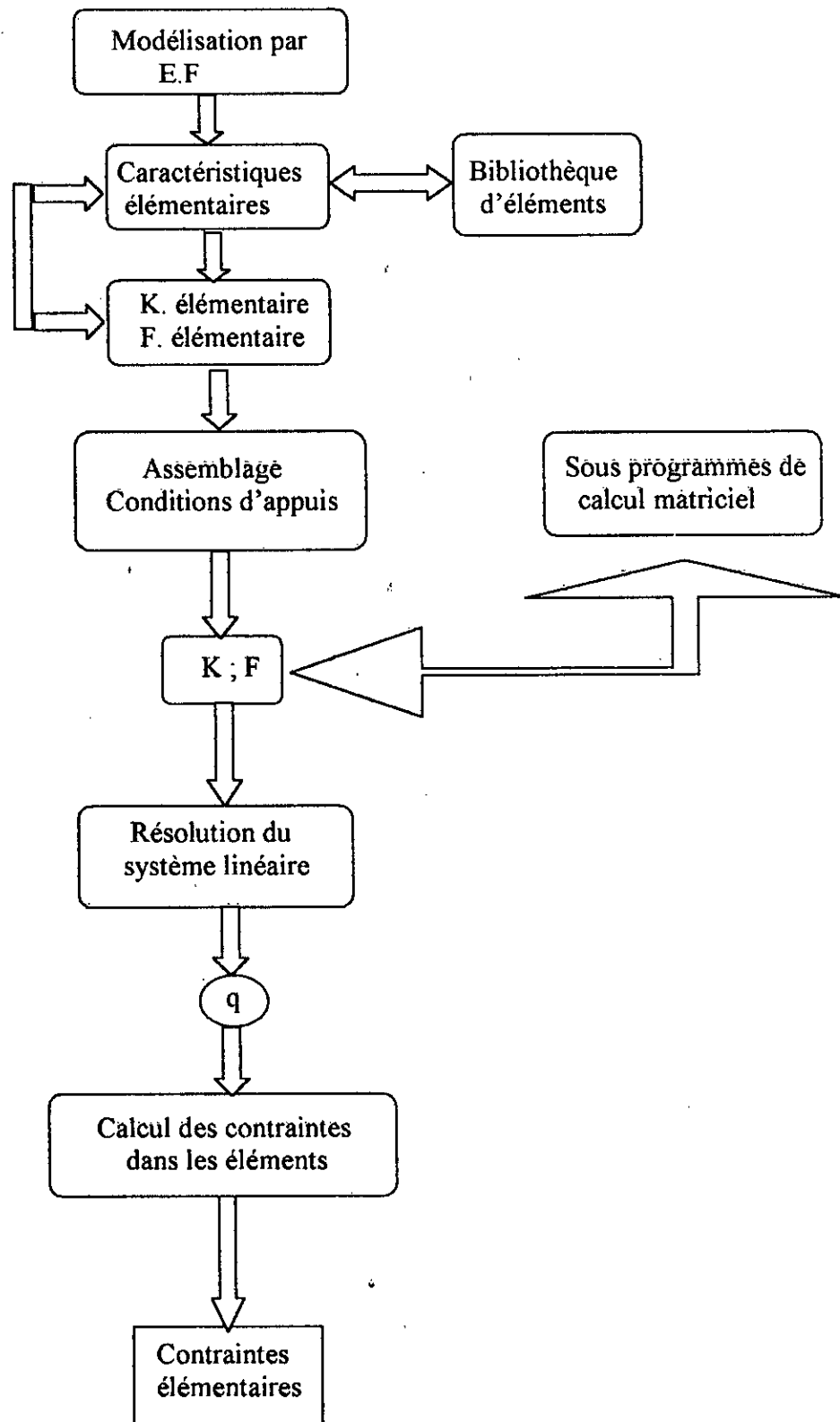


Figure II.1 : Organigramme simplifié pour l'analyse statique (méthode des déplacements) [10].

II.4- Equations de la mécanique des solides :

Rappel : Le problème type de la mécanique des solides revient à déterminer les deux champs inconnus : déplacements u_{ni} et contraintes σ_{ij} sous l'effet des forces appliquées, forces de surface ϕ_i et forces de volume f_i [10, 12].

Le phénomène de déformation des corps solides est régi par des équations de champ aux dérivées partielles avec des conditions mixtes aux limites. Deux approches sont possibles, suivant que l'on formule complètement le problème en fonction du champ de déplacement, c'est l'approche cinématique ou bien en fonction du champ de contraintes appelée approche équilibre.

II.4.1- Relations et équations de champ :

II.4.1.1- Relations cinématiques : (déformations-déplacements)

Dans le cas de théorie linéaire de l'élasticité on a :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.5})$$

Tel que : u : vecteur des déplacements généralisés.
 ε_{ij} : Vecteur représentatif des déformations généralisées.

Dans le cas de l'élasticité à deux dimensions :

$$u_1 = u(x, y) ; u_2 = v(x, y) \quad (\text{II.6, II.7})$$

$$x_1 = x ; x_2 = y \quad (\text{II.8, II.9})$$

$$\varepsilon_{xx} = du/dx \quad (\text{II.10})$$

$$\varepsilon_{yy} = dv/dy \quad (\text{II.11})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (du/dy + dv/dx) \quad (\text{II.12})$$

Equations de compatibilité :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{II.13})$$

Dans le cas de l'élasticité à deux dimensions :

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial^2 x} = 0 \quad (\text{II.14})$$

$$\text{L'équation d'équilibre est : } \sigma_{ij,i} + f_i = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{II.16})$$

Dans le cas de l'élasticité à deux dimensions :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} \quad (\text{II.19})$$

σ : vecteur représentatif des contraintes généralisées.

Remarque :

Les conditions de compatibilité sont les conditions d'intégralité des déformations qui assurent l'unicité des déplacements. Elles sont obligatoires pour une approche équilibre.

II.4.1.2- Relation d'élasticité : (contraintes-déformations) :

Dans le cas de matériaux à comportement élastique linéaire, on a généralement :

$$\sigma_{ij} = C_{ij,kl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.20})$$

$C_{ij,kl}$: composantes du tenseur d'élasticité.

Pour les matériaux isotropes, les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous les deux formes suivantes, connues sous le nom de la loi de hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.21})$$

$$\varepsilon_{kk} = \text{Tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (\text{II.22})$$

λ, μ coefficients de lamé :

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.23, II.24})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II.25})$$

$$\sigma_{kk} = \text{Tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (\text{II.26})$$

E : Module de Young
 ν : Coefficient de Poisson

δ_{ij} : Symbole de Kronecker :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si } j \neq i \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

II.4.1.3- Conditions aux limites :

Soit un corps solide de surface extérieure S , ne peuvent exister que deux types de conditions aux limites :

a) Sur une partie $S_u \subset S$ sont imposés des déplacements \bar{u}_i

$$\text{Et : } u_i = \bar{u}_i \quad \forall M \in S_u \quad (\text{II.27})$$

Les conditions (a) sont dites conditions aux limites cinématiques. Sur S_u aucune composante du tenseur des contraintes n'est imposée.

b) Sur une partie complémentaire S_σ ($S_\sigma \subset S$, $S_u + S_\sigma = S$, $S_u \cap S_\sigma = 0$) de S , sont imposés des efforts extérieurs $\bar{\Phi}_i$. Ces efforts $\bar{\Phi}_i$ imposent les valeurs de certaines composantes du tenseur des contraintes par les relations :

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{\Phi}_i \quad \forall M \in S_\sigma \quad (\text{II.28})$$

Les conditions (b) sont dites conditions aux limites de type équilibre ou encore statiques. Sur S_σ aucun déplacement u_i n'est imposé.

Dans le cas de la mécanique des structures, les conditions aux limites s'écrivent de la façon suivante :

- Conditions aux limites cinématiques : $u = \bar{u}$ sur S_u
- Conditions aux limites type équilibre : $N^T \sigma = p$ sur S_σ

Soit encore en termes de déplacements : $N^T C D u = p$ sur S_σ

Définition :

(a) Le champ de déplacement cinématique admissible :

On appelle champ de déplacement cinématiquement admissible, tout champ $u_i(M)$ satisfaisant :

- Les conditions de continuité.
- Les conditions cinématiques, c'est à dire les conditions aux limites sur S_u soit $u_i = \bar{u}_i$

(b) Le champ de contraintes statiquement admissible :

On appelle champ de contraintes statiquement admissible tout champ de contrainte $\sigma_{ij}(M)$ satisfaisant les conditions suivantes :

- Les conditions de continuité.
- Les conditions «statique » ou de type équilibre, c'est à dire conditions aux limites sur S_σ :

$$\sigma_{ij} n_j = \overline{\Phi}_i \quad (\text{II.29})$$

II.5- Application de la méthode matricielle à la mécanique des structures :**II.5.1- Equations de base de la mécanique des structures :**

Les équations de base de la mécanique des structures s'écrivent de la façon suivante :

- Relation déformations-déplacements : $\varepsilon = D \cdot u$
- Equation d'équilibre : $D^T \sigma + f = 0$
- Equation constitutive : (loi de hooke généralisée)
 $\sigma = C \cdot \varepsilon$ ou inversement : $\varepsilon = C^{-1} \sigma$

Remarque :

- ★ Dans le cas d'un état de contrainte initiale σ_0 , les équations précédentes s'écrivent :

$$\sigma = C \cdot \varepsilon + \sigma_0 \quad \text{ou inversement : } \varepsilon = C^{-1} (\sigma - \sigma_0)$$

- ★ En général, la matrice différentielle intervenant dans les équations d'équilibre est la transposée de celle des relations déformations-déplacements. Donc on peut exprimer les équations d'équilibre en fonction des déplacements (équations de Navier) soient :

$$D^T C D u + f = 0 \quad (\text{II.30})$$

II.5.2- Théorème des énergies :

Nous allons présenter dans ce paragraphe les lois de l'énergie sous leurs formes matricielles, en supposant que le matériau à un comportement élastique linéaire. On a donc :

a) Principe des travaux virtuels :

Pour un corps solide en équilibre et pour tout accroissement virtuel cinématiquement admissible des déplacements, on a :

$$\delta U = \delta T \quad (\text{II.31})$$

$$\text{Soit : } \int_V \sigma^T \delta \varepsilon \, dv = \int_V f^T \delta u \, dv + \int_V p^T \delta u \, ds \quad (\text{II.32})$$

b) Principes des travaux virtuels complémentaires :

Pour un solide en équilibre et pour tout accroissement virtuel statiquement admissible des contraintes et des forces appliquées on a :

$$\delta U_c = \delta T_c \quad (\text{II.32})$$

$$\text{soit :} \quad \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} \, dv = \int_V \mathbf{u}^T \delta \mathbf{f} \, dv + \int_V \mathbf{u}^T \delta \mathbf{p} \, dS \quad (\text{II.33})$$

c) Potentiel de déformation :

Le potentiel de déformation est calculé par la formule suivante :

$$W[\boldsymbol{\varepsilon}] = W_c[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.34})$$

$W[\boldsymbol{\varepsilon}]$: Potentiel de déformation.

$W_c[\boldsymbol{\sigma}]$: Potentiel complémentaire.

Le potentiel de déformation W représente la densité volumique d'énergie de déformation :
 $W = du/dV$.

d) Potentiel de déformation complémentaire :

- Pour tout corps solide en équilibre, l'énergie potentielle complémentaire est stationnaire pour tout accroissement virtuel statiquement admissible du champ des contraintes.
- Pour tout corps solide en équilibre, l'accroissement virtuel de l'énergie complémentaire de déformation U_c est égal à la somme des travaux des champs virtuels des forces de volume et de surface dans le champ des déplacements réels (travaux virtuels complémentaires).

On a donc :

$$W[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.35})$$

$$W_c[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{II.36})$$

e) Théorème de l'énergie potentielle complémentaire :

Pour un état d'équilibre stable, le champ de contraintes statiquement admissible minimise l'énergie potentielle complémentaire, soit :

$$V_c = U_c - T_c \quad (\text{II.37})$$

$$\text{Ou :} \quad V_c = \int_V W_c[\boldsymbol{\sigma}] \, dv - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} \, ds$$

II.6- Propriétés des structures discrètes :

II.6.1- Notion de structure discrète :

Une structure discrète est une structure composée d'éléments discrets (ex : barres, poutres...) de forme géométrique simple interconnectés en des points de la structure, que l'on appellera «nœuds». On caractérise le comportement de cette structure par un nombre fini de paramètres inconnus, soit les déplacements aux nœuds, soit les forces dans les éléments.

Les méthodes matricielles d'analyse peuvent se classer suivant le choix des inconnues, en méthode des déplacements et méthode des forces. Dans la méthode des déplacements, on formule le problème en fonction des déplacements nodaux généralisés alors que dans la méthode des forces, c'est en fonction des forces nodales généralisées (forces internes ou réactions d'appui). Nous commencerons par un bref rappel sur la méthode des forces.

II.6.2- La méthode des forces :

Principe : La méthode des forces est basée sur une approche énergétique utilisant l'énergie de déformation complémentaire. On peut distinguer différentes phases de calcul :

– *Formulation globale :*

- Choix des inconnues hyperstatiques et écriture des équations d'équilibre des nœuds.
- Recherche des conditions de compatibilité des coupures simples.
- Calcul de la matrice de flexibilité de la structure pour la détermination des déplacements nodaux.

A ce stade, on peut calculer les inconnues hyperstatiques et donc tous les efforts internes en fonction des forces extérieures.

– *Formulation élémentaire :* Calcul des caractéristiques élémentaires de flexibilité.

II.6.3- La méthode des déplacements :

Dans la méthode des déplacements, on formule le problème en fonction des déplacements aux nœuds. On peut mettre en évidence les différentes étapes suivantes :

– *Formulation élémentaire :* calcul des matrices de rigidité élémentaires.

– *Formulation globale :*

- Assemblage des matrices de rigidité de manière à satisfaire les équations d'équilibres des nœuds.
- Prise en compte des conditions de déplacements imposés.
- Résolution par rapport aux inconnues de déplacements.
- Calcul des contraintes dans les éléments.

Formulation élémentaire : La structure préalablement discrétisée en éléments. On caractérise le comportement de chaque élément *libre* par ses déplacements nodaux soit le vecteur q^e . On calcule pour chaque élément sa matrice de rigidité élémentaire telle que son énergie de déformation puisse s'exprimer sous la forme :

$$U^e = \frac{1}{2} (q^e)^T K^e q^e \quad (\text{II.38})$$

Généralement, les matrices de rigidité sont calculées dans les axes locaux des éléments. Les transformations nécessaires sont alors effectuées pour les calculer dans le système d'axes globaux [10, 11, 14].

Formulation globale :

Assemblage : Les matrices de rigidité élémentaires sont utilisées pour calculer la matrice de rigidité de la structure complète permettant d'exprimer l'énergie de déformation en fonction des déplacements nodaux de la structure (vecteur q) soit :

$$U = \sum_{\text{Eléments}} U^e = \sum_{\text{Eléments}} \frac{1}{2} (q^e)^T K^e q^e = \frac{1}{2} q^T K q \quad (\text{II.39})$$

Cette opération est appelée règle assemblage des matrices de rigidité élémentaires qui consiste pour un nœud donné à additionner les sous matrices de rigidité nodale des éléments ayant ce nœud en commun.

Dans la démarche fondamentale de la M.E.F, il faut distinguer trois aspects que nous allons détailler ci-après dans le cas des modèles déplacements :

- La discrétisation de la structure en éléments.
- Le choix d'une approximation pour chaque élément.
- Le choix de coordonnées généralisées «physiques» (déplacements nodaux) pour chaque élément.

La discrétisation de la structure (choix d'un maillage) :

On subdivise la structure ou le milieu continu à étudier en éléments finis de forme géométrique simple, de manière à approximer le mieux possible sa géométrie.

Approximation du champ des déplacements :

Par ailleurs, il est nécessaire de se donner une approximation du champ des déplacements à l'intérieur de chaque élément (e), soit :

$$[u(M)]^e = [\varphi(M)] [a]^e \quad M(x, y, z) \in V^e \quad (\text{II.40})$$

avec : $[\varphi(x, y, z)]$ matrice des fonctions base de l'approximation

$[a]^e$ vecteur des coordonnées généralisées de l'élément.

II.7- Rappels sur les méthodes d'approximation :

II.7.1- Notions générales :

Le problème général de l'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction $u(M)$ à domaine de définition \mathcal{D} de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit.

$$\text{L'approximation } u \text{ est : } u(M) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(M) \quad \forall (x, y, z) \quad (\text{II.41})$$

Les $\phi_i(x, y, z)$ sont des fonctions choisies et constituent la base fonctionnelle. Les coefficients inconnus a_i sont appelés coordonnées généralisées.

On appelle $u(M)$, approximation de u dans la base fonctionnelle ϕ_i .

$$\text{On peut écrire en utilisant la notation matricielle : } u = [\phi]^T [a]. \quad (\text{II.42})$$

Le principe des méthodes d'approximation consiste à remplacer la résolution d'un problème continu à un nombre infini d'inconnues : les coordonnées généralisées a_i .

Les méthodes d'approximation peuvent se classer en deux catégories principales, suivant la formulation du problème. En effet, les lois physiques peuvent s'exprimer de deux manières différentes :

- *Sous forme locale*, c'est à dire sous forme d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites associées.
- *Sous forme globale*, où variationnelle (énergétique), c'est à dire sous forme de conditions de stationnarité de fonctionnelle (ou énergies potentielles).

Par ce fait les méthodes d'approximation se classent :

- *Méthodes universelles*, utilisables dans le cas d'une formulation locale du problème (méthode de galerkine, moindres carrés, collocation).
- *Méthodes variationnelles*, utilisables dans le cas d'une formulation variationnelle du problème (méthode de Ritz, kantorovitch, trefftz...).

II.7.2- Méthodes d'approximation universelle :

Soit à résoudre le problème aux limites gouverné par l'équation aux dérivées partielles $L(x) = 0$ dans \mathcal{D} avec des limites associées.

Les fonctions ϕ_i devront constituer une base complète et satisfaire toutes les conditions aux limites. On définit une fonction erreur dans \mathcal{D} par la relation :

$$E(M) = L(u(M)) \quad (\text{II.43})$$

Cette fonction erreur est non nulle. Le problème d'approximation consiste à rechercher les coordonnées généralisées les plus satisfaisantes selon un critère.

- Soit sous une forme d'un minimum d'une norme.
- Soit sous une forme de conditions d'orthogonalité de la fonction erreur avec certaines fonctions de pondérations données $W_i(M)$.

Ainsi les différentes méthodes d'approximation appartenant à cette catégorie peuvent être considérées comme des variantes de la méthode de pondération des erreurs :

$$[E, W_i] = \int_{\mathcal{D}} E(M) W_i(M) dv \quad i = 1 \dots N \quad (\text{II.44})$$

♦ **Méthode de Galerkin :**

On a : $W_i(M) = \phi_i(M) \quad (\text{II.45})$

donc : $\int_{\mathcal{D}} E(M) \phi_i(M) dv = 0 \quad i = 1 \dots N \quad (\text{II.46})$

Les N conditions d'orthogonalité conduisent à un système linéaire si l'opérateur L est linéaire [10, 14].

II.7.3- Méthodes variationnelles :

Dans certains cas, les lois physiques peuvent s'exprimer sous une forme variationnelle, c'est à dire sous la forme de conditions d'extremum d'une fonctionnelle : énergie potentielle totale $V(u_i)$.

Il existe des méthodes d'approximation adaptées à de telles formulations variationnelles. Parmi ces méthodes, la méthode de Ritz est certainement la plus utilisée. C'est également la plus importante car elle constitue généralement le fondement des méthodes aux éléments finis utilisées pour l'analyse des structures [10, 12, 14].

♦ **Méthode de Ritz :**

Principe : La solution exacte du problème variationnel est celle qui, appartenant à l'espace des fonctions admissibles et satisfaisant les conditions aux limites cinématiques (du type déplacements imposés), rend extrémale l'énergie potentielle totale.

$$\delta v = 0 ; \quad \forall \delta u \quad \text{cinématiquement admissible}$$

$$\text{avec : } V[u] = \int_{\mathcal{V}} F(x, du/dx, \dots, d^m u / d^m x) dv \quad (\text{II.47})$$

m est l'ordre de fonctionnelle, c'est à dire, l'ordre maximal de dérivation des déplacements apparaissant dans l'expression du potentiel de déformation. On dit que la solution est caractérisée par un extremum absolu.

Dans la méthode de Ritz, on cherche la meilleure approximation appartenant au sous-espace de dimension finie N de fonction cinématique admissible engendrée par les fonctions de base ϕ_i :

$$u(M) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(M) \quad (\text{II.48})$$

La meilleure approximation est celle qui, appartenant à ce sous-espace ainsi défini, rend extrémale l'énergie potentielle totale : $V[u] = V[a_i]$.

La meilleure approximation est donc caractérisée par les N conditions de stationnarité de V par rapport aux a_i . Tel que : $\partial V / \partial a_i = 0 \quad i = 1 \dots N$

Si l'énergie potentielle totale peut se mettre sous forme quadratique (par rapport aux a_i), les conditions de stationnarité précédentes conduisent à un système linéaire que l'on peut considérer comme le système d'équations généralisées et si l'on choisit pour coordonnées généralisées les déplacements aux nœuds de la structure, on écrit :

$$V = \frac{1}{2} q^T K q - q^T F \quad (\text{II.49})$$

Conditions de convergence de la méthode de Ritz :

Précisons maintenant les conditions de convergence de la méthode de Ritz quant au choix des fonctions base, dans le cas de l'approche déplacement. Les conditions nécessaires de convergence de la méthode sont les suivantes :

1. **Complétude** : Les fonctions $\phi_i(M)$ doivent constituer une base complète de manière à pouvoir évaluer correctement l'énergie potentielle totale.
2. **Admissibilité** : Les fonctions base doivent être admissibles, c'est à dire :
 - a) Satisfaire les conditions de continuité requises par le problème, conditions qui dépendent essentiellement de l'ordre m de la fonctionnelle.
 - b) Satisfaire *les conditions aux limites rigides* du problème variationnel, c'est à dire les conditions aux limites cinématiques dans le cas d'une formulation déplacement.

Choix de variables physiques : les déplacements aux nœuds :

La relation de définition de l'approximation élémentaire ne peut pas être utilisée pour résoudre le problème global. En effet, les coordonnées généralisées varient d'un élément à l'autre et il est donc nécessaire d'adopter de nouvelles variables physiques permettant d'assurer la compatibilité des déplacements et d'exprimer les conditions d'équilibre aux nœuds.

Soit q^e le vecteur regroupant les composantes des déplacements aux nœuds et éventuellement leurs dérivées successives, alors :

$$[u(M)]^e = [A(M)]^e [q]^e \quad (\text{II.50})$$

avec : $[A]^e$ matrice d'interpolation dont les éléments sont fonction des coordonnées d'espace.

La relation précédente permet de caractériser les déplacements en un point de l'élément en termes d'interpolation des déplacements aux nœuds (et éventuellement de leurs dérivées).

II.8- Résolution d'un système linéaire du type $K_{11} q_1 = F_1$:

En pratique, la matrice K_{11} auquel on aboutit est de grande taille. Il existe des méthodes de résolution appropriées qui tirent parti du caractère symétrique et de la topologie des matrices rigidité.

II.8.1- Calcul des forces internes et des contraintes dans les éléments :

Après la phase résolution, on connaît les déplacements nodaux de chaque élément. On peut alors calculer les forces nodales internes par les relations :

$$F^e = K^e q^e \quad (\text{II.51})$$

Par ailleurs, il est possible de définir des relations matricielles permettant de calculer les contraintes dans les éléments soit σ^e en fonction de leurs déplacements nodaux, c'est à dire :

$$\sigma^e = S^e q^e \quad (\text{II.52})$$

Il faut noter que la méthode des forces est aujourd'hui pratiquement abandonnée pour la résolution des structures complexes parce que d'une part, son efficacité numérique est moindre que celle de la méthode des déplacements et, parce que d'autre part, la méthode des déplacements est plus universelle en permettant plus aisément la résolution des problèmes dynamiques et non linéaires [10].

II.9- Méthodes de résolution des systèmes linéaires : [14, 15]

Ces méthodes permettent de résoudre un système des équations d'équilibre :

$$K q = F^{(i)} \quad i = 1 \dots N_P \quad (\text{II.53})$$

Avec N_P : nombre de cas de charge.

Les méthodes de résolution en analyse statique peuvent se classer en :

II.9.1- Méthodes itératives :

- Méthode de Gauss-Seidel.
- Méthode de relaxation
- Minimisation de l'énergie potentielle totale par la méthode des gradients conjugués.

II.9.2- Méthodes directes :

- Méthode d'élimination de Gauss et ses variantes (factorisation de Crout).
- Méthode de factorisation de Cholesky.

Les méthodes directes de résolution en analyse statique sont basées soit sur l'algorithme d'élimination de Gauss ou ses variantes (factorisation de Crout) ou sur l'algorithme de factorisation de Cholesky. Ces méthodes ont en commun une excellente fiabilité ; elles sont particulièrement bien adaptées à la résolution de problèmes avec des cas de charges multiples.

Les méthodes directes adoptent des techniques de gestion de données plus ou moins élaborées permettant aujourd'hui la résolution de problème de grande taille avec des performances supérieures à celles des méthodes itératives dans la majorité des cas tout en utilisant au mieux les ressources de l'ordinateur disponible.

CHAPITRE III

LES TRAITEMENTS DE SURFACES

III.1- Introduction :

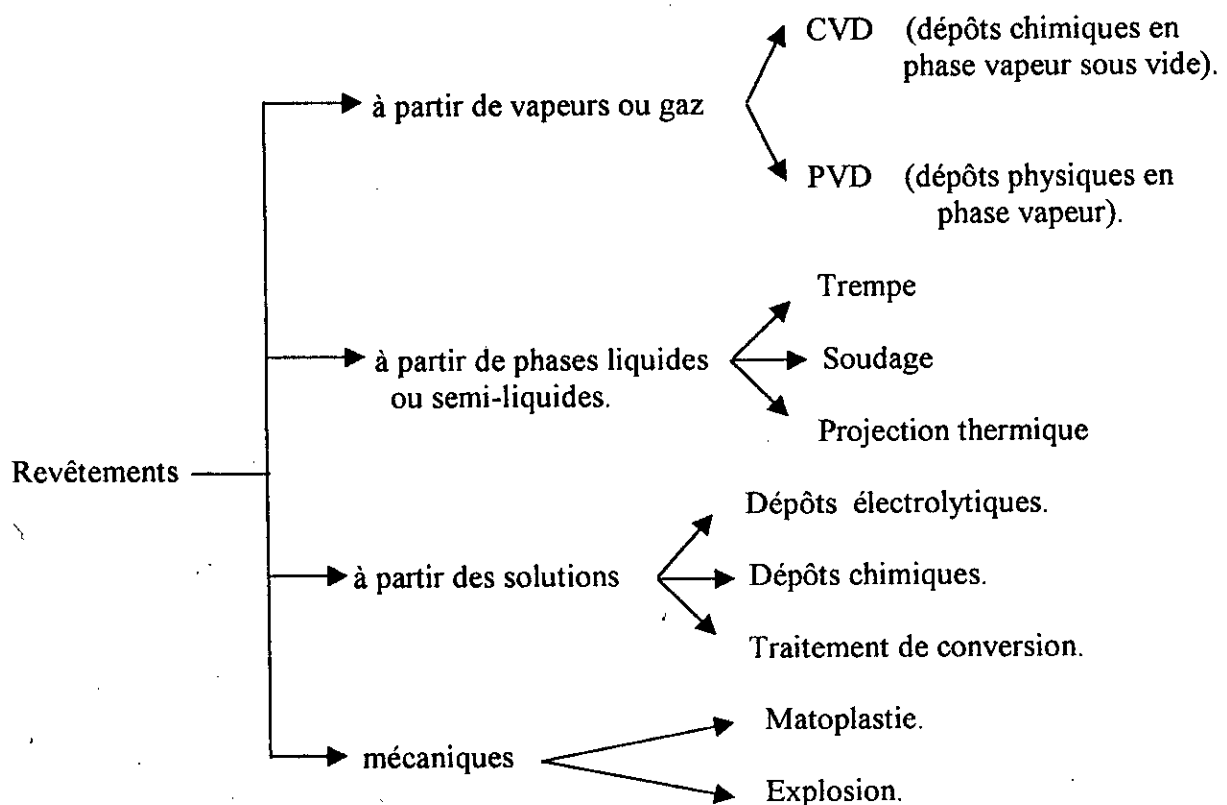
Les matériaux interagissent avec leur environnement au niveau de leur surface externe et sont chimiquement corrodés ou mécaniquement abrasés. La mise en place de couches protectrices, chimiquement inertes ou mécaniquement résistantes peut donc, en consommant de faibles quantités d'une matière éventuellement chère, modifier profondément ces interactions avec l'extérieur et allonger considérablement la durée de vie de matériaux plus ordinaires et, donc, moins coûteux. Ces techniques de traitement de surface peuvent être divisées en deux groupes : sans apport de matière et avec apport de matière.

Parmi les techniques de traitement de surface sans apport de matière, on cite :

- ◆ Les procédés mécaniques tels que : grenailage, sablage, martelage...
- ◆ Les procédés thermiques tels que : la trempe superficielle.

Les techniques avec apport de matière permettent de réaliser divers revêtements. Les procédés les plus utilisés sont [16, 17] :

- ◆ Les dépôts chimiques en phase vapeur (CVD).
- ◆ Les dépôts physiques en phase vapeur (PVD).
- ◆ Les dépôts réalisés à partir de solutions.
- ◆ Le rechargement par soudage.
- ◆ La projection thermique.



Parmi ces techniques, les plus utilisées sont :

- ◆ Les dépôts électrolytiques.
- ◆ Les dépôts chimiques.
- ◆ Les dépôts physiques en phase vapeur (PVD).
- ◆ Les dépôts chimiques sous vide (CVD).

Parmi les moyens disponibles pour réaliser ces traitements de surface, la projection thermique est certainement la technique qui présente le plus de souplesse :

- ◆ Quant au choix du couple substrat / dépôt.
- ◆ Quant à la taille des pièces traitables des plus grandes aux plus petites.
- ◆ Quant au choix du procédé.

III.2- Equipements de projection thermique :

Les appareils de projection thermique peuvent être divisés en deux catégories suivant la source d'énergie utilisée : flamme ou arc électrique.

III.2.1- Projection thermique à la flamme :

C'est une projection qui utilise comme combustible, l'énergie thermique provenant de la combustion de gaz. Les matériaux utilisés sont des métaux, des alliages métalliques et des céramiques, qui se présentent sous forme de fils, de cordons, de poudres ou de baguettes selon l'appareil utilisé.

Pour le fonctionnement des appareils de projection à la flamme, trois types de fluides sont utilisés, à savoir [16, 17, 18] :

- ◆ Un gaz combustible (acétylène, propane, hydrogène ou gaz naturel).
Débit : (500 ÷ 1500) l/h.
Pour une pression de (0,5 ÷ 1,2) bar d'acétylène.
(0,5 ÷ 3) bar de propane.
- ◆ Un comburant (oxygène).
Débit : (1500 ÷ 3800) l/h.
Pour une pression de (1,2 ÷ 3,6) bar d'acétylène.
- ◆ De l'air comprimé, qui doit être filtré pour éviter la présence d'eau, d'huile et de saletés. Dans certains équipements de projections il est remplacé par un gaz neutre (argon ou azote).

Lors d'utilisation des poudres comme matériaux de projection, différents appareils peuvent être utilisés :

- ◆ Torche à gaz.
- ◆ Pistolets à poudre.
- ◆ Pistolets à détonation.

- ◆ Pistolets à fils.

III.2.2- Projection thermique à l'arc électrique :

Dans le cas des appareils utilisant l'arc comme source d'énergie on peut citer les torches à plasma lorsque les matériaux de projection sont des poudres, et les pistolets à arc entre fils lorsqu'ils sont sous forme de fils.

III.3- Mise en œuvre de la projection thermique :

III.3.1- Préparation des surfaces à traiter :

L'opération de préparation de surface est une opération obligatoire et indispensable pour avoir une adhérence du dépôt aussi cohérente que possible. De ce fait les pièces destinées à être revêtues doivent être propres en surface, sans contamination de graisses, huiles, peinture, et aussi dépourvues de tout composé chimique (couche d'oxyde...)

La préparation de surface comprend deux étapes : un nettoyage et une rugosification.

a) Le nettoyage :

Le nettoyage peut se faire en faisant un décapage ou un dégraissage, le décapage a pour but principal d'éliminer de la surface les couches chimiques adhérentes, et aussi à retirer des produits solides incrustés dans les porosités.

b) La rugosification :

La rugosification est une opération qui permet d'obtenir une bonne adhérence des particules en fusion avec les irrégularités de la surface et réaliser ainsi un bon accrochage mécanique.

Cette irrégularité de la surface peut être obtenue soit par un traitement par impact qui consiste à projeter avec force sur le substrat un abrasif (tel que les grenailles métalliques...) en vue de nettoyer la pièce et créer une certaine rugosité à sa surface ou par une préparation mécanique des surfaces suivie d'un traitement par impact ; cette technique d'usinage permet :

- ◆ De diminuer la dimension des pièces afin de laisser une épaisseur suffisante pour le dépôt.
- ◆ D'augmenter les surfaces d'accrochage.
- ◆ De corriger le profil dans le cas de réparation des pièces usées.

III.3.2- Sous couche d'accrochage :

La sous couche d'accrochage est un dépôt intermédiaire, généralement de faible épaisseur (0.05 à 0.2 mm) entre le substrat et le revêtement fonctionnel proprement dit.

Le rôle de la sous couche d'accrochage est d'améliorer l'adhérence et réaliser un rechargement épais. Elle permet de rapprocher les propriétés physico-chimiques entre le substrat et le matériau projeté lorsque les coefficients de dilatation sont très différents.

Les matériaux les plus utilisés comme sous couche d'accrochage sont :

- Le molybdène.
- Les alliages nickel-aluminium (Ni-Al).
- Les alliages nickel-chrome (Ni-Cr).
- Les alliages nickel-chrome-aluminium.

Il existe deux manières différentes de projection :

- ◆ *Projection sans refusion* : ce type de projection utilise une sous couche d'accrochage qui augmente l'adhérence entre le dépôt et le substrat [16].
- ◆ *Projection avec refusion* : ce type de projection ne nécessite pas de couche d'accrochage, car un apport d'énergie calorifique adapté remet en solution l'agglomérat de particules et porte le support à une température élevée, ce qui a pour conséquence la formation d'une zone de diffusion entre le substrat et le dépôt, et de ce fait il représente un bon moyen au revêtement pour s'adhérer au substrat en formant un revêtement étanche [16].

III.3.3- Dépôt :

Les caractéristiques d'un dépôt et sa bonne tenue en service dépendent de sa qualité d'exécution et du processus de fabrication.

Lorsque la pièce est chauffée de manière excessive pendant l'opération de projection, les contraintes du revêtement sont accrues et il y a risque de craquelures ou de séparation. De même, le revêtement peut prendre une couleur sombre ce qui est l'indice d'une oxydation excessive [16].

Pour réaliser un bon dépôt, il faut que ce dernier soit exécuté comme suit :

- Le revêtement doit être effectué par passes successives afin d'éviter tout échauffement nuisible du substrat.
- Il faut procéder à la métallisation dans les heures qui suivent la préparation de surface pour éviter l'interposition d'un voile d'oxyde entre la surface du support et le revêtement.
- La métallisation doit être faite perpendiculairement à la surface ou au maximum avec un angle de 30° de chaque côté de la perpendiculaire pour avoir un bon étalement des particules sur le substrat.

Les tableaux III.1, III.2, III.3 sont des exemples permettant de choisir un matériau en fonction des sollicitations de la pièce à traiter :

Matériaux	Système de projection	Applications
Alliage Ni-Cr 80-20	Flamme poudre Flamme fil Plasma poudre	Sous-couche réservée aux pièces soumises à des températures supérieures à 1260 °C.
Aluminium de nickel	Flamme poudre Flamme cordon Plasma poudre	Sous-couche efficace, tenue en température jusqu'à 1010 °C.
Molybdène	Flamme fil Plasma poudre	Bonne adhérence – coefficient de dilatation faible, tenue en température jusqu'à 1315 °C.
MCrAlY	Plasma poudre	Sous-couche efficace pour des tenues en température jusqu'à 1200 °C. Bonne tenue à la corrosion des moteurs thermiques.

Tableau III.1 : Sous-couche d'acrochage [19].

Matériaux	Système de projection	Applications
Antifriction	Flamme fil	Coussinets divers comme ceux de gros moteurs diesel.
Abradables	Flamme poudre Plasma poudre	Produits permettant de contrôler l'usure de pièces fixes par rapport à des pièces en mouvement. Exemple : stator de turbines à gaz aéronautiques, léchettes de labyrinthes d'huile.
Auto-adhérents	Flamme poudre Plasma poudre	Plusieurs matériaux de ce type utilisés surtout au pistolet flamme poudre pour des réparations de portées de roulements, d'arbres divers.
Aciers non alliés	Flamme fil	Revêtement de portées de vilebrequins.
Aciers alliés	Flamme fil	Revêtement de pièces mécaniques. Tiges de vérins, portées d'arbres, bancs de machines-outils.

.../...

Matériaux	Système de projection	Applications
Molybdène	Flamme fil	Pièces de boîte de vitesses, fourchettes, bagues de synchronisation. Segments de pistons de moteurs thermiques.
Bronze	Flamme fil Flamme poudre	Pièces de boîte de vitesses, (bagues) coussinets, portées d'arbres.
Fluorure de calcium	Plasma poudre	Pièces qui travaillent à haute température.

Tableau III.2 : Revêtement et réparation de pièces mécaniques [19].

III.4- Caractéristiques des matériaux projetés :

Les revêtements sont caractérisés par plusieurs facteurs dont les plus significatifs sont :

- La structure.
- L'adhérence.
- La densité.
- La dureté.
- Les contraintes résiduelles.

Parfois il est nécessaire de connaître aussi les facteurs tels que :

- La résistance à l'usure.
- Le coefficient de frottement.
- Les caractéristiques électriques.
- Les caractéristiques thermiques.

III.4.1- Structure :

En s'écrasant sur le substrat, les particules projetées forment une juxtaposition de couches qui donnent l'allure générale d'un dépôt obtenu par projection thermique. Lors d'une vue au microscope parallèlement au support, la structure du métal après projection apparaît sous forme de gouttelettes rondes, soudées les unes aux autres, pouvant laisser entre elles quelques vides. Lors d'une vue perpendiculaire au support, on trouve au contraire une stratification.

Pour les revêtements réalisés dans l'air, il est généralement admis que ces revêtements s'oxydent. Néanmoins la proportion d'oxygène dans les dépôts reste en général faible.

III.4.2- Adhérence :

Les dépôts projetés adhèrent au substrat par un phénomène mécanique et métallurgique qui demande une préparation soignée de la surface à revêtir.

Pour les matériaux dont l'adhérence est faible et dans le cas où les coefficients de dilatation seraient très différents, des sous couches d'accrochage sont utilisées pour rapprocher les propriétés mécaniques et physico-chimiques entre le substrat et le dépôt.

III.4.3- Densité :

Lors de la projection à chaud dans l'air, les particules du dépôt peuvent laisser entre elles quelques vides. Les revêtements ainsi obtenus sont poreux et cette porosité est plus ou moins importante, mais peut être éliminée par un post traitement tel que :

- Colmatage.
- Imprégnation.
- Peinture.
- Traitement mécanique.
- Traitement thermique.

La densité du dépôt est fonction de la porosité, elle peut être influencée par la dimension des particules et leur vitesse.

L'existence de porosités à l'interface, peut diminuer l'adhérence du revêtement. Un tel dépôt est indésirable dans le cas d'une protection anticorrosion.

III.4.4- Dureté :

Les valeurs de dureté des dépôts projetés à chaud dépendent des paramètres de projection, de la technique élaborée pour les obtenir et des multimatériaux projetés.

III.4.5- Les contraintes résiduelles :

Elles sont généralement dues au retrait du dépôt pendant le refroidissement, les contraintes résiduelles peuvent être la cause d'un écaillage du revêtement et d'une mauvaise adhérence. Pour remédier à ce phénomène, il faut réduire les gradients de température de préchauffage avant la projection et maintenir le plus possible le revêtement à une température basse.

CHAPITRE IV

MODELISATION MATHÉMATIQUE

IV.1- Introduction :

Très souvent, les montages expérimentaux sont coûteux et laborieux. Les méthodes numériques se développent au même rythme que le matériel informatique et permettent de résoudre beaucoup de problèmes et de comprendre beaucoup de phénomènes complexes.

A cet effet la simulation mathématique est devenue un outil de recherche incontournable en égard de son prix, au peu de moyens qu'elle mobilise et à sa vitesse de travail.

La modélisation mathématique s'avère être d'une importance primordiale lorsque les modes expérimentaux de l'analyse sont onéreux et d'une reproductibilité faible, elle permet de simuler les phénomènes par le biais des équations mathématiques qui quantifient les différents aspects de ces phénomènes. Les équations mathématiques sortent de leurs dimensions virtuelles par la mise en œuvre des conditions initiales et des conditions aux limites.

En somme, la modélisation mathématique présente plusieurs avantages :

- Elle permet d'accroître notre compréhension du comportement d'un procédé du point de vue des mécanismes fondamentaux.
- Elle permet d'étudier par simple calcul l'effet des différentes variables d'un procédé.
- Le coût d'une approche numérique peut être beaucoup plus réduit que celui d'une expérience en laboratoire.
- Au cours d'une série d'expérience, un modèle peut aider à évoluer les résultats d'essais sur les installations.
- Un modèle peut être utilisé pour faire un contrôle de procédé et de l'optimisation.

La nature et la complexité d'un modèle dépend largement du sujet d'étude et de l'assimilation du procédé en question, mais le problème crucial de la simulation mathématique réside dans le fait qu'elle est fréquemment arrêtée par une mauvaise compréhension du procédé.

Il est tout aussi difficile de cerner tous les comportements d'un phénomène physique complexe que de le simuler. Dans ce cas, la modélisation mathématique doit être entreprise en étroite liaison avec un travail expérimental, ce dernier point est fondamental pour construire un bon modèle.

IV.2- Formulation du problème :

En se basant sur les trois chapitres précédents, nous pouvons maintenant présenter la problématique qui fait l'objet de notre étude, qui porte sur la détermination des contraintes résiduelles au sein de différents multimatériaux réalisés par projection thermique par la méthode d'enlèvement de couches.

La méthode d'enlèvement de couches consiste à mesurer l'effet de l'enlèvement d'une couche sur le reste de la pièce et de pouvoir ainsi par le calcul remonter à la valeur du champ des contraintes existant à l'origine de la pièce.

Les mécanismes du rééquilibrage restent les mêmes c'est à dire que chaque enlèvement de couche conduit à une flexion dans le domaine élastique de l'épaisseur restante ce qui donne toujours une variation linéaire de la déformation et par voie de conséquence, une discontinuité sur les variations des contraintes lorsque l'on passe d'un matériau à l'autre.

Dans ce problème, nous supposerons que les matériaux satisfont déjà un certain nombre d'exigences. Ce qui permettra à la fois de réduire la complexité des développements mathématiques, et donc réduire la difficulté de l'élaboration du modèle, ces exigences sont :

- Les matériaux sont homogènes, c'est à dire que les propriétés de chaque matériau sont les mêmes en tout point. La plupart des matériaux d'ingénierie satisfont à ce critère, du moins à l'échelle macroscopique.
- Tous les matériaux sont isotropes, c'est à dire, en un point donné, les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions. La plupart des métaux et des plastiques sont isotropes à l'échelle macroscopique.

Pour notre étude, nos matériaux sont considérés homogènes et isotropes.

Pour une meilleure compréhension du modèle mathématique, nous allons donner des notions de base sur l'élasticité, la rigidité des matériaux et la loi de Hooke.

IV.2.1 - L'élasticité :

L'élasticité est la propriété physique d'un corps de reprendre sa forme initiale après suppression de la sollicitation. Le corps est parfaitement élastique s'il retrouve complètement sa forme originale après avoir retiré la charge.

L'élasticité des matériaux se traduit par des constantes nommées constantes d'élasticité, qui représentent la rigidité du matériau et son aptitude à la déformation élastique.

IV.2.2- Rigidité des matériaux :

Dans une courbe de traction, la partie linéaire s'appelle domaine d'élasticité, où la loi de Hooke s'applique pour des faibles valeurs de la déformation ϵ tel que :

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

(IV.1)

La constante de proportionnalité E de cette loi, appelé module de Young, est une mesure de la *rigidité* du matériau, c'est à dire de la propriété qu'a le matériau de se déformer de façon élastique réversible sous l'action d'une contrainte.

Pour une valeur donnée de la contrainte, un matériau est d'autant plus rigide que sa déformation élastique résultante est faible.

Notons que le module de Young E n'est pas la seule mesure de rigidité d'un matériau. Elle peut aussi être caractérisée par le module de cisaillement G ou par le module de compression K , il existe des relations entre eux :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (\text{IV.2, IV.3})$$

IV.2.3- Loi de Hooke :

C'est la loi de déformation élastique, qui lie l'effort à l'allongement par une relation linéaire qui peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\delta = \frac{1}{K} F \quad (\text{IV.4})$$

δ : déplacement relatif ou allongement résultant.
 F : la force appliquée.
 K : la rigidité.

La rigidité K est constante pour une géométrie et un matériau donné, à condition que le matériau soit élastique. La loi de Hooke a cependant été généralisée pour permettre d'établir une corrélation entre la déformation et la contrainte. C'est ainsi que pour un matériau élastique et isotrope, on a la relation linéaire suivante :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad \text{ou bien} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad (\text{IV.5})$$

IV.3- Modélisation mathématique :

Nous allons citer dans cette partie en détail les équations nécessaires pour le déroulement du modèle numérique. Pour cela, envisageons le problème suivant l'axe des x , sachant qu'il en est de même sur l'axe des y .

Lorsque le matériau a, dans la zone usinée, une hauteur $h+dh$, il règne à la côte z une contrainte normale de composante $\sigma_x(z)$ dans la direction x .

Quand la couche dh est enlevée ($dh \ll h$), il y a redistribution des contraintes afin que l'équilibre statique de la pièce soit assuré. Soit $d\sigma_x(z)$ la variation locale, la nouvelle contrainte à la côte z sera donc :

$$\sigma_x(z) + d\sigma_x(z)$$

Il faut noter que l'enlèvement des couches s'effectue, dans le cas d'un matériau conducteur par usinage électrochimique. En effet, ce mode d'usinage offre les avantages suivants [19]:

- Il n'est pas générateur de contraintes d'origine mécanique ou thermique, ce qui est le cas d'usinage par outil coupant ou par électroérosion.
- Il permet une vitesse d'usinage relativement importante, de 0,1 à 1 mm/mn, contrairement à l'attaque chimique (la plupart des céramiques et d'autres matériaux sont résistants aux agents chimiques).

Pour les revêtements non-conducteurs électriques, l'usinage électrochimique est impossible, on utilise dans ce cas l'usinage mécanique et dès qu'une couche conductrice d'électricité est atteinte l'enlèvement de matière est poursuivi en usinage électrochimique en conservant les même jauges pour la mesure des déformations [19].

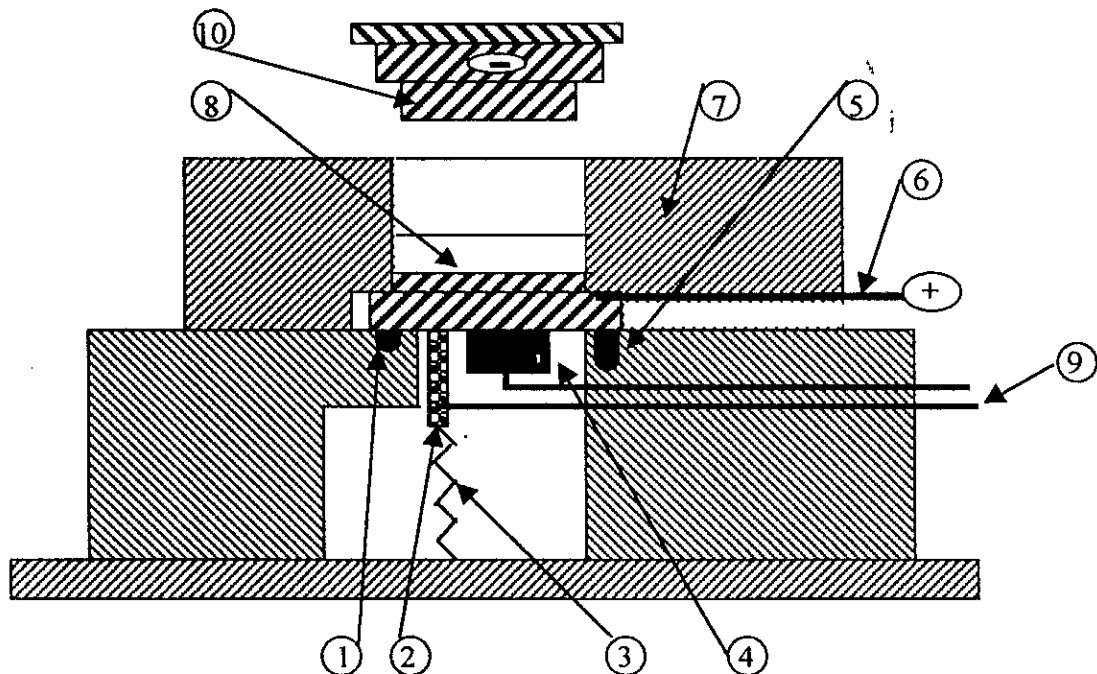
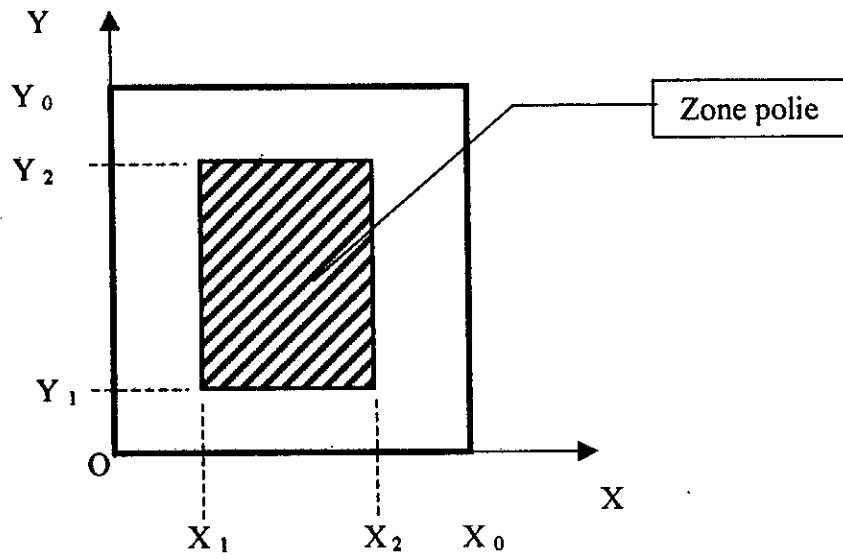
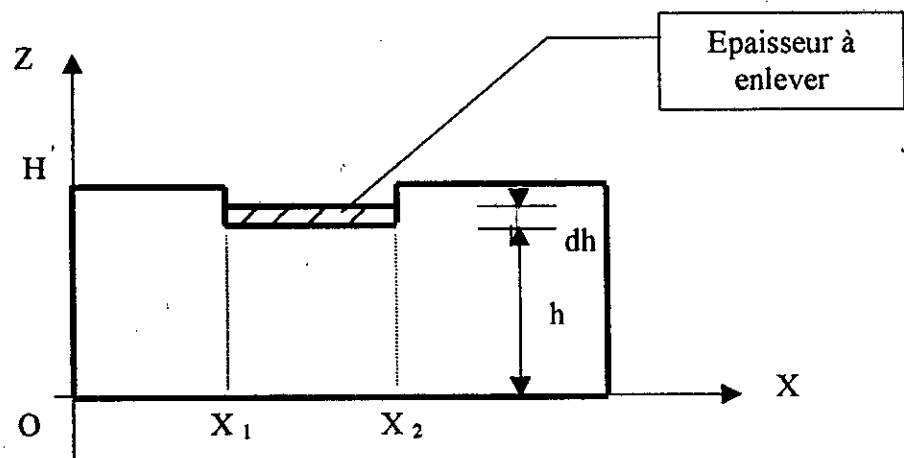


Figure IV.1 : Machine d'usinage électrochimique.

- 1- Joint torique, il protège les jauges de déformation et le capteur de tout contact avec l'électrolyte.
- 2- Le capteur ultrasonore.
- 3 et 9- Fils permettant d'assurer le contact permanent du capteur avec la pièce.
- 4- Les jauges de déformation.
- 5- Vis de pression : bloque la plaque contre l'échantillon.
- 6- Plaque en cuivre, elle assure l'amenée du courant.
- 7- Couvercle.
- 8- Pièce.
- 10- Electrode outil.



(a) Vue de dessus.



(b) Vue de côté.

Figure IV.2 : Schéma de la géométrie de la pièce.

Si S_x est la section droite de normale, l'axe des x , il faut vérifier l'équilibre des efforts normaux avant l'enlèvement de la couche dh , tel que :

$$\int_{S_x} \sigma_x(z) dy dz = 0 \quad (IV.6)$$

Avec :

$$\int_0^H \int_0^{Y_0} \sigma_x(z) dy dz = \int_0^H \int_0^{Y_1} \sigma_x(z) dy dz + \int_0^{h+dh} \int_{Y_1}^{Y_2} \sigma_x(z) dy dz + \int_0^H \int_{Y_2}^{Y_0} \sigma_x(z) dy dz$$

$\sigma_x(z)$ n'est pas une fonction a priori et les intégrales sont convergentes, nous pourrions donc écrire :

$$Y_1 \int_0^H \sigma_x(z) dy dz + (Y_2 - Y_1) \int_0^{h+dh} \sigma_x(z) dy dz + (Y_0 - Y_2) \int_0^H \sigma_x(z) dy dz = 0 \quad (IV.7)$$

On pose :
$$r = \frac{Y_0}{Y_2 - Y_1} \quad 1 \leq r < \infty$$

Puisque, par définition dh est petit, on aura :

$$(r-1) \int_0^H \sigma_x(z) dz + \int_0^h \sigma_x(z) dz + \sigma_x(h) dh = 0 \quad (IV.8)$$

Avec les mêmes principes que précédemment, nous pouvons réécrire la dernière équation après enlèvement de la couche dh comme suit :

$$(r-1) \int_0^H (\sigma_x(z) + d\sigma_x(z)) dz + \int_0^h (\sigma_x(z) + d\sigma_x(z)) dz = 0 \quad (IV.9)$$

Ou encore :

$$(r-1) \int_0^H \sigma_x(z) dz + (r-1) \int_0^H d\sigma_x(z) dz + \int_0^h \sigma_x(z) dz + \int_0^h d\sigma_x(z) dz = 0 \quad (IV.10)$$

Après suppression des termes identiques, l'égalité des équations (IV.8) et (IV.10) donne :

$$(r-1) \int_0^H d\sigma_x(z) dz + \int_0^h d\sigma_x(z) dz = \sigma_x(h) \cdot dh \quad (IV.11)$$

Si nous supposons que la relaxation des contraintes suit une loi linéaire de la forme :

$$d\sigma_x(z) = a \cdot z + b \quad (IV.12)$$

Nous pouvons alors résoudre l'équation (IV.11) qui devient :

$$(r-1) \left(a \frac{H^2}{2} + b \cdot H \right) + a \frac{h^2}{2} + b \cdot h = \sigma_x(h) \cdot dh \quad (IV.13)$$

Soit encore :

$$\frac{1}{2} a (H^2(r-1) + h^2) + b(H(r-1) + h) = \sigma_x(h) \cdot dh \quad (IV.14)$$

Ecrivons maintenant l'équilibre des moments fléchissants avant l'enlèvement de la couche dh :

$$(r-1) \int_0^H \sigma_x(z) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz + \int_0^{h+dh} \sigma_x(z) \left(z - \frac{h+dh}{2} \right) dz = 0 \quad (IV.15)$$

Que l'on peut développer :

$$(r-1) \int_0^H \sigma_x(z) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz + \int_0^h \sigma_x(z) \left(z - \frac{h}{2} \right) dz + \sigma_x(h) \frac{h}{2} dh + \int_0^h \sigma_x(z) \left(-\frac{dh}{2} \right) dz = 0$$

Après l'enlèvement de la couche dh nous aurons :

$$(r-1) \int_0^H (\sigma_x(z) + d\sigma_x(z)) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz + \int_0^h (\sigma_x(z) + d\sigma_x(z)) \left(z - \frac{h}{2} \right) dz = 0 \quad (IV.16)$$

En égalant les relations (IV.11) et (IV.16) et en simplifiant, on obtient l'équation :

$$(r-1) \int_0^H d\sigma_x(z) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz + \int_0^h d\sigma_x(z) \left(z - \frac{h}{2} \right) dz = \sigma_x(h) \frac{h}{2} dh - \frac{dh}{2} \int_0^h \sigma_x(z) dz$$

En multipliant la relation (IV.8) par $\frac{dh}{2}$ on a :

$$(r-1) \frac{dh}{2} \int_0^H d\sigma_x(z) dz + \frac{dh^2}{2} \sigma_x(h) = -\frac{dh}{2} \int_0^h \sigma_x(z) dz \quad (IV.17)$$

On aura donc :

$$(r-1) \int_0^H d\sigma_x(z) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz + \int_0^h d\sigma_x(z) \left(z - \frac{h}{2} \right) dz = \frac{dh^2}{2} \sigma_x(h) + \frac{h dh}{2} \sigma_x(h) + (r-1) \frac{dh}{2} \int_0^H \sigma_x(z) dz \quad (\text{IV.18})$$

Si nous admettons comme précédemment que :

$$d\sigma_x(z) = a z + b \quad (\text{IV.19})$$

la relation (IV.18) s'écrira alors :

$$\sigma_x(h) \frac{(h+dh)}{2} dh + (r-1) \frac{dh}{2} \int_0^H \sigma_x(z) dz = (r-1) \frac{aH^3}{12} + \frac{ah^3}{12} \quad (\text{IV.20})$$

$$\text{On pose : } (r-1) \frac{dh}{2} \int_0^H \sigma_x(z) dz \cong 0 \quad (\text{IV.21})$$

On aura alors :

$$a \cong \frac{6\sigma_x(h)(h+dh)dh}{H^3(r-1)+h^3} \quad (\text{IV.22})$$

$$b \cong \frac{\sigma_x(h)dh}{H(r-1)+h} - \frac{6\sigma_x(h)(H^2(r-1)+h^2)dh}{(H^3(r-1)+h^3)(H(r-1)+h)} \quad (\text{IV.23})$$

Donc :

$$d\sigma_x(z) \cong \frac{6\sigma_x(h)(h+dh)dh}{H^3(r-1)+h^3} z + \frac{\sigma_x(h)dh}{H(r-1)+h} - \frac{6\sigma_x(h)(H^2(r-1)+h^2)dh}{(H^3(r-1)+h^3)(H(r-1)+h)} \quad (\text{IV.24})$$

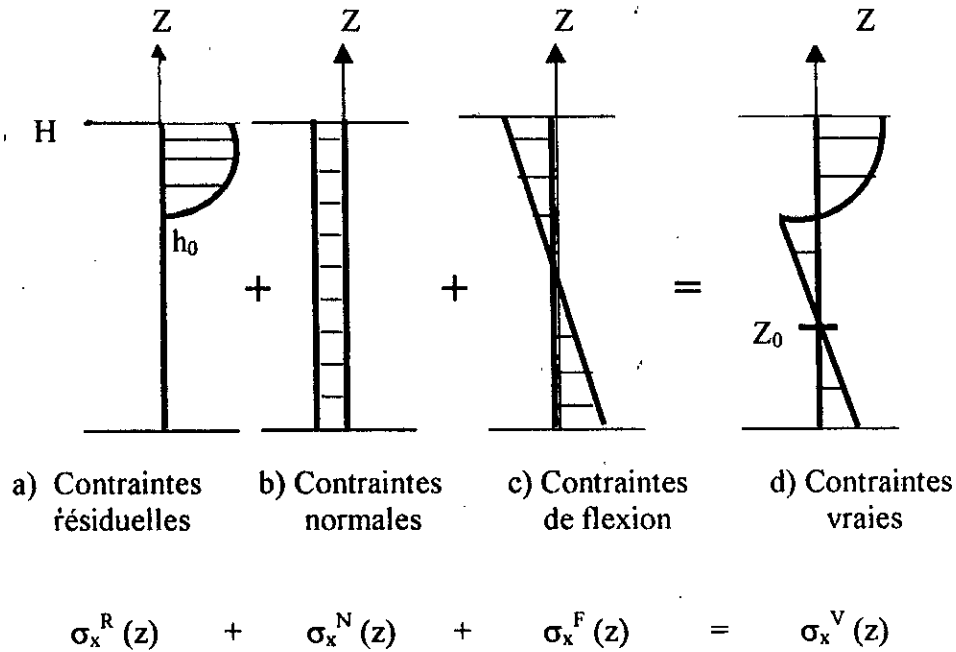


Figure IV.3 : Schéma de cumul des contraintes.

D'après la figure précédente, on peut écrire les équations ci-après :

$$y_0 \int_{h_0}^H \sigma_x^R(z) dz + y_0 \cdot H \cdot \sigma_X^N(z) = 0 \quad (\text{IV.25})$$

$$y_0 \int_{h_0}^H \sigma_x^R(z) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz + y_0 \int_0^H \sigma_X^F(z) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz = 0 \quad (\text{IV.26})$$

Et d'après les notions de la résistance des matériaux, on a :

$$\sigma_X^F(z) = M_y \frac{\left(z - \frac{H}{2} \right)}{y_0 \cdot \frac{H^3}{12}} = M_y \cdot \frac{6(2z - H)}{y_0 \cdot H^3} \quad (\text{IV.27})$$

$$\text{Avec: } M_y = \int_0^H \sigma_X^F(z) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz = - \int_{h_0}^H \sigma_x^R(z) dz \quad (\text{Moment fléchissant}) \quad (\text{IV.28})$$

$$\sigma_X^F(z) = - \left(y_0 \int_{h_0}^H \sigma_x^R(z) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz \right) \frac{6(2z-H)}{y_0 \cdot H^3} \quad (\text{IV.29})$$

$$\sigma_X^N(z) = - \frac{1}{H} \int_{h_0}^H \sigma_x^R(z) dz \quad (\text{IV.30})$$

On pose : $N_X^R = \int_{h_0}^H \sigma_x^R(z) dz$ (IV.31)

$$M_y^R = \int_{h_0}^H \sigma_x^R(z) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz \quad (\text{IV.32})$$

Nous aurons alors :

$$\sigma_X^N(z) = - \frac{1}{H} N_X^R \quad (\text{indépendant de } z) \quad (\text{IV.33})$$

$$\sigma_X^F(z) = - \frac{6(2z-H)}{H^3} M_y^R \quad (\text{fonction linéaire de } z) \quad (\text{IV.34})$$

$$A_X = \int_{h_0}^H \sigma_x^V(z) dz \quad \text{et} \quad B_X = \int_{h_0}^H \sigma_x^V(z) \left(z - \frac{H}{2} \right) dz \quad (\text{IV.35, IV.36})$$

Sachant que : $\sigma_X^V(z) = \sigma_X^N(z) + \sigma_X^F(z) + \sigma_X^R(z)$ on aura :

$$A_X = \int_{h_0}^H - \frac{1}{H} N_X^R dz + \int_{h_0}^H - \frac{6(2z-H)}{H^3} M_y^R dz + N_X^R \quad (\text{IV.37})$$

$$B_X = \int_{h_0}^H - \frac{1}{H} N_X^R \left(z - \frac{H}{2} \right) dz + \int_{h_0}^H - \frac{6(2z-H)}{H^3} M_y^R \left(z - \frac{H}{2} \right) dz + M_y^R \quad (\text{IV.38})$$

Soit en regroupant et en intégrant :

$$A_X = N_X^R \frac{h_0}{H} + N_X^R \frac{6h_0}{H} (h_0 - H) \quad (\text{IV.39})$$

$$B_X = N_X^R \frac{h_0(h_0 - H)}{H} + M_y^R \frac{(3H^2h_0 - 6h_0^2H + 4h_0^3)}{H^3} \quad (\text{IV.40})$$

On pose:

$$\beta = \frac{h_0}{H}, \quad \delta = \frac{6h_0(h_0 - H)}{H^3}, \quad \gamma = \frac{h_0(h_0 - H)}{2H}$$

$$\text{Et } \eta = \frac{(3H^2h_0 - 6h_0^2H + 4h_0^3)}{H^3}$$

$$A_X = \beta \cdot N_X^R + \delta \cdot M_y^R \quad \text{et} \quad N_X^R = \frac{(\eta \cdot A_X - \delta \cdot B_X)}{\rho}$$

$$B_X = \gamma \cdot N_X^R + \eta \cdot M_y^R \quad \text{et} \quad M_y^R = \frac{(\beta \cdot B_X - \gamma \cdot A_X)}{\rho}$$

$$\text{Avec : } \rho = \beta \cdot \eta - \gamma \cdot \delta$$

Ceci permet de calculer aussitôt N_X^R , M_y^R , A_X et B_X .

Sachant que :

$$\sigma_X^R(z) = a.z + b$$

Tel que :

$$a = \frac{6h}{-2h^2 + h \cdot dh + dh^2} \left(\frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) \right) \quad (\text{IV.41})$$

$$b = \frac{h^2 + h \cdot dh + dh^2}{-2h^2 + h \cdot dh + dh^2} \left(\frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) \right) \quad (\text{IV.42})$$

D'où l'équation de la contrainte résiduelle en fonction des déformations suivant l'axe des X :

$$\sigma_X^R = \left(\frac{h^2 + 7h \cdot dh + dh^2}{-2h^2 + h \cdot dh + dh^2} \right) \cdot \left(\frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) \right) \quad (\text{IV.43})$$

Avec le même raisonnement, on retrouve σ_Y^R :

$$\sigma_Y^R = \left(\frac{h^2 + 7h \cdot dh + dh^2}{-2h^2 + h \cdot dh + dh^2} \right) \cdot \left(\frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) \right) \quad (\text{IV.44})$$

Ces équations nous ont permis d'élaborer le modèle numérique qui est écrit en langage basic avec ses différentes instructions (read, print, input, for, next...) s'étalant sur 216 lignes.

L'exécution du modèle nécessite l'entrée des données, qui sont : le nombre de matériaux constituant le multicouches, les caractéristiques de chaque matériau (E, ν), le nombre de passe d'usinage, l'épaisseur de la couche enlevée et les deux déformations (longitudinale et transversale) pour chaque passe. Ces valeurs de déformations sont déterminées par la méthode extensométrique d'enlèvement successif de couches.

Les résultats obtenus par le modèle sont les contraintes résiduelles transversales et longitudinales à différents niveaux de chaque matériau constituant le multicouches considéré.

L'organigramme suivant permet de résumer les différentes étapes de déroulement du modèle proposé.

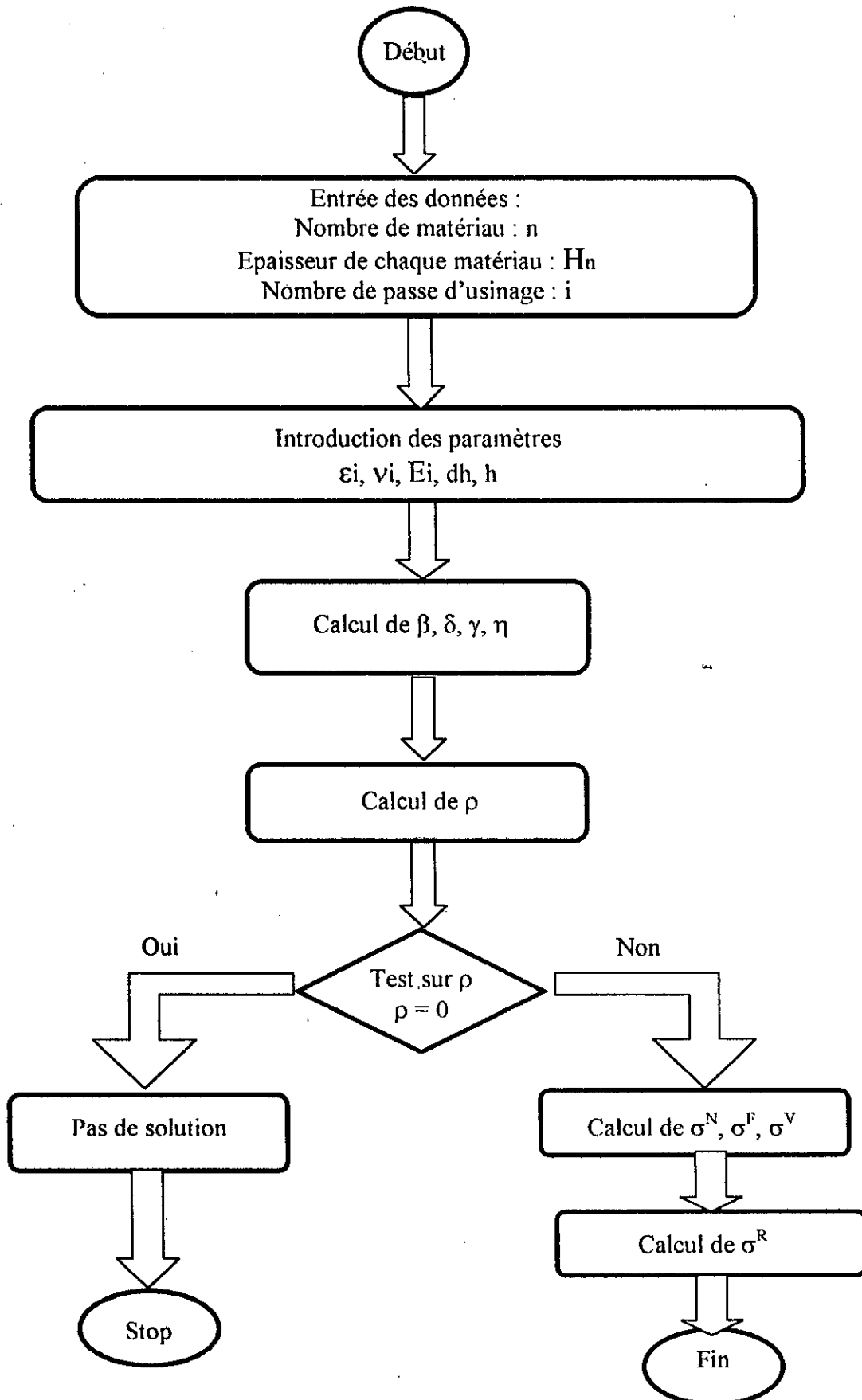


Figure IV.4 : Organigramme simplifié du modèle.

IV.4- Application du modèle numérique proposé :

Le modèle numérique que nous avons élaboré permet le calcul des contraintes résiduelles au sein des multimatériaux. Le multimatériau étant constitué de matériaux différents à épaisseurs différentes, le modèle nécessite la connaissance :

- ⇒ Des déformations dans les deux directions (longitudinale et transversale) ϵ_1 et ϵ_2 .
- ⇒ De l'épaisseur des couches enlevées dh .
- ⇒ Des valeurs des constantes élastiques « E » et « ν » des matériaux constituant chaque couche.

Afin de mettre en application notre modèle nous avons choisi différents substrats, sous-couches d'accrochage, dépôts pour les multimatériaux dont les caractéristiques sont :

Multimatériau N°:1 : 35 CD 4 / Ni Al / Mo

- Substrat : acier 35 CD 4
Module de Young : 220.000 MPa
Coefficient de poisson : 0,285
Epaisseur : 3 mm
- Sous-couche d'accrochage : Ni Al
Module de Young : 70.000 MPa
Coefficient de poisson : 0,3
Epaisseur : 0,2 mm
- Dépôt : Molybdène
Module de Young : 320.000 MPa
Coefficient de poisson : 0,32
Epaisseur : 0,8 mm

Multimatériau N°:2 : AS-13 / Ni Al / Acier

- Substrat : AS-13
Module de Young : 75.000
Coefficient de poisson : 0,3
Epaisseur : 3
- Sous-couche d'accrochage : Ni Al
Module de Young : 70.000
Coefficient de poisson : 0,3
Epaisseur : 0,2
- Dépôt : Acier (55 E et 65 E)
Module de Young : 220.000
Coefficient de poisson : 0,285
Epaisseur : 0,8

Multimatériau N°3 : Fonte / Ni Al / Mo

- Substrat : Fonte
Module de Young : 125.000
Coefficient de poisson : 0,28
Epaisseur : 3
- Sous-couche d'accrochage : Ni Al
Module de Young : 70.000
Coefficient de poisson : 0,3
Epaisseur : 0,2
- Dépôt : Molybdène
Module de Young : 320.000
Coefficient de poisson : 0,32
Epaisseur : 0,8

Notons que l'enlèvement de couches s'effectue en sept passes successives pour les différents dépôts, quatre passes pour les sous-couches d'accrochage et dix passes pour les substrats, afin de mettre en évidence la valeur des contraintes à tous les niveaux.

Le schéma suivant montre les épaisseurs (en mm) de chaque couche enlevée :

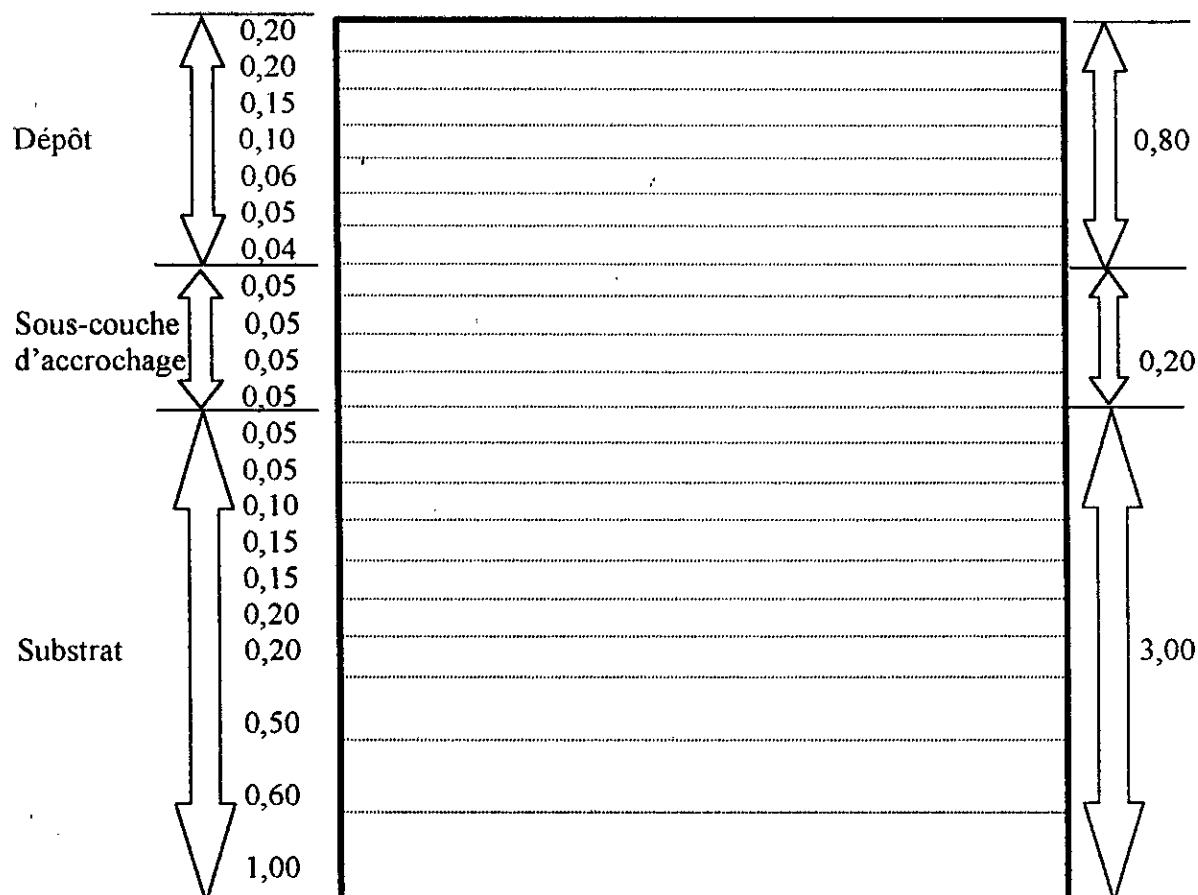


Figure IV.5 : Epaisseurs des couches enlevées.

IV.5- Résultats et interprétation :

IV.5.1- Résultats :

Après introduction des données et des paramètres relatifs à chaque multimatériau, une fois avec sous-couche d'accrochage et une autre fois sans sous-couche. Les valeurs trouvées des contraintes transversales σ_x et longitudinales σ_y à différents niveaux sont représentées dans les tableaux suivants :

Profondeur (mm)	Multimatériau N° 1		Multimatériau N° 2		Multimatériau N° 3	
	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y
0.20	-175,964	-150,276	-55,965	-30,276	-15,965	-25,276
0.40	-146,487	-121,926	-46,487	-42,9263	-14,487	-12,926
0.55	-98,268	-77,940	-98,268	-77,940	-18,268	-37,940
0.65	-10,241	-6,163	-11,201	-7,193	-11,263	-6,360
0.71	89,236	84,925	87,660	80,994	97,523	98,594
0.76	255,635	200,539	250,072	220,750	239,072	223,533
0.80	284,909	236,536	264,927	236,543	243,492	236,762
0.85	291,796	255,387	281,496	265,302	251,695	265,236
0.90	356,334	389,300	300,426	310,333	283,298	281,355
0.95	230,192	252,743	220,225	252,856	212,220	232,763
1.00	-62,228	-49,363	-63,442	-52,280	-42,198	-64,583
1.05	-121,487	-144,492	-132,563	-149,302	-112,587	-128,296
1.10	-345,280	-319,262	-345,293	-319,275	-355,260	-319,259
1.20	-232,778	-209,798	-232,678	-209,858	-232,668	-209,625
1.35	-90,528	-98,299	-90,536	-98,365	-98,534	-98,186
1.50	-70,113	-72,484	-75,263	-72,506	-75,106	-72,631
1.70	-20,269	-26,308	-25,636	-29,305	-25,103	-29,425
1.90	-9,136	-12,790	-19,236	-12,886	-19,129	-12,866
2.40	-2,913	-5,291	-8,842	-5,685	-8,796	-5,304
3.00	9,598	6,495	15,505	6,608	15,538	-4,206
4.00	30,745	15,419	54,625	25,504	27,806	-2,133

Tableau IV.1 : Valeur des contraintes transversales et longitudinales des différents multimatériaux avec sous-couche d'accrochage en fonction de la profondeur.

Nous allons prendre maintenant, le cas où les multimatériaux ne contiennent pas de sous-couches d'accrochage, l'enlèvement de couches s'effectue avec le même nombre de passes et les mêmes épaisseurs des couches enlevées, à la différence que le dépôt est de 1mm.

Les résultats obtenus des contraintes résiduelles transversales σ_x et longitudinales σ_y sont représentés dans le tableau ci-dessous :

Profondeur (mm)	Multimatériau N°: 1		Multimatériau N°: 2		Multimatériau N°: 3	
	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y
0.20	-20,143	-23,620	14,625	-32,154	-80,673	-62,492
0.40	-25,433	-12,328	28,624	-20,635	-54,282	-50,839
0.55	-38,962	-48,506	49,125	-5,698	-35,923	-31,998
0.65	-22,282	-12,538	65,123	1,036	33,642	39,820
0.71	-82,635	-90,128	86,412	63,459	64,425	55,452
0.76	223,438	238,526	112,478	86,655	83,001	72,106
0.80	278,250	253,428	260,148	176,321	114,247	98,042
0.85	382,475	326,854	304,458	264,325	148,300	162,989
0.90	442,530	396,496	395,145	306,548	263,442	256,289
0.95	518,497	316,856	426,248	386,147	376,109	392,632
1.00	385,432	525,984	496,25	449,852	463,040	425,361
1.05	268,539	362,426	575,367	508,964	424,976	421,708
1.10	106,333	252,654	632,225	584,397	320,032	314,069
1.20	-86,326	108,642	453,321	326,149	272,421	208,909
1.35	-160,423	-56,875	226,334	186,47	108,903	96,764
1.50	-27,328	-28,643	53,486	66,147	52,370	45,302
1.70	-12,022	-33,875	-62,478	12,347	32,607	21,430
1.90	25,427	-22,642	-79,631	-30,412	-25,624	-12,425
2.40	27,380	-16,542	-31,067	-10,459	-14,636	-9,632
3.00	30,486	-28,321	-10,179	5,317	-8,467	-6,031
4.00	35,458	-32,050	-8,624	25,196	-6,365	-15,864

Tableau IV.2 : Valeur des contraintes transversales et longitudinales des différents multimatériaux sans sous-couche d'accrochage en fonction de la profondeur.

Afin d'illustrer les séries de résultats obtenus, nous avons réalisé les graphes de variation des contraintes résiduelles en fonction de la profondeur explorée des différents multimatériaux :

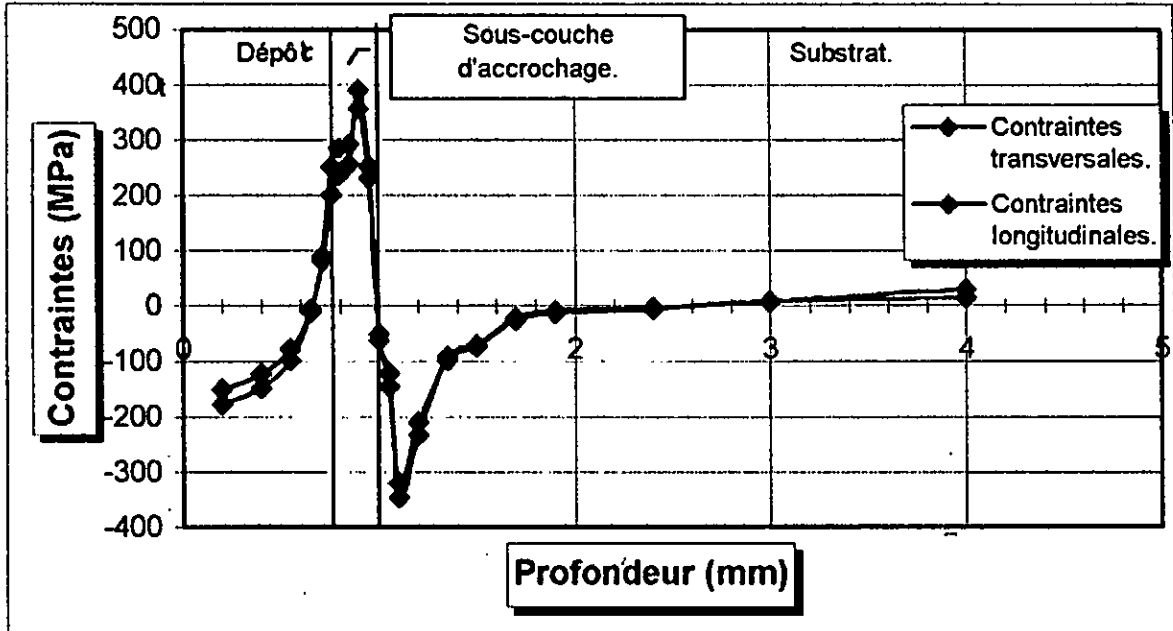


Figure IV.6 : Profil des contraintes résiduelles à différents niveaux du multimatériau N°: 1 avec sous-couche d'accrochage.

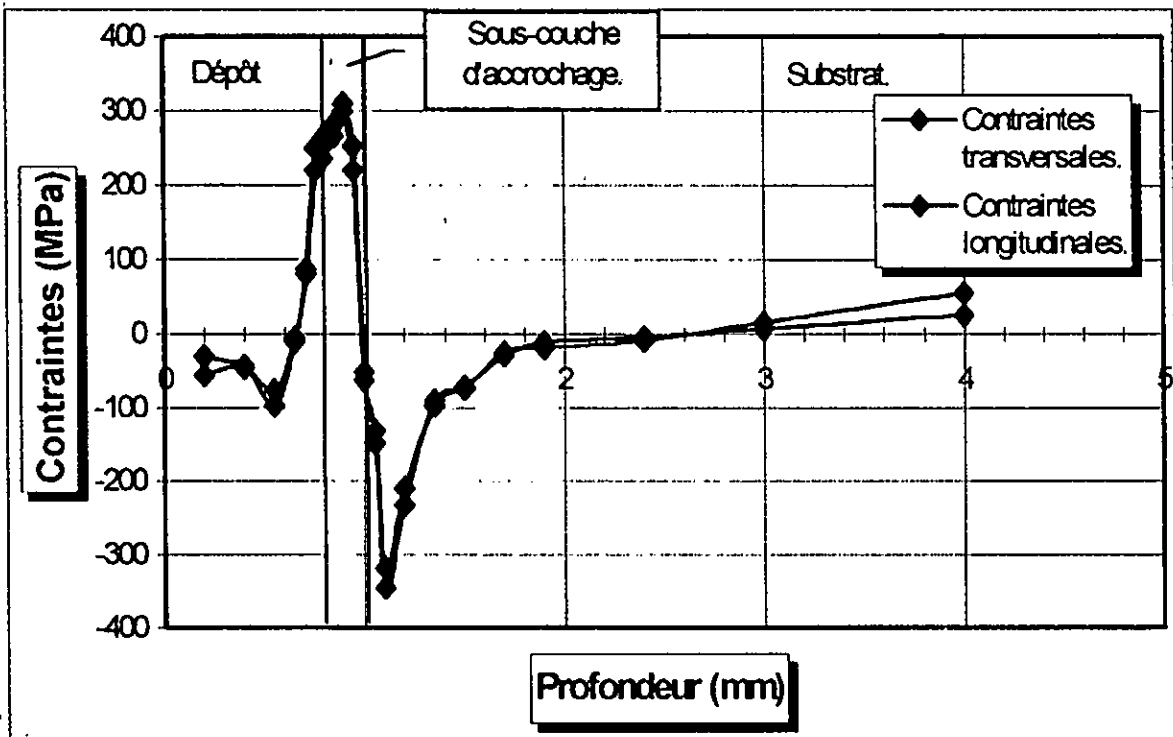


Figure IV.7 : Profil des contraintes résiduelles à différents niveaux du multimatériau N°: 2 avec sous-couche d'accrochage.

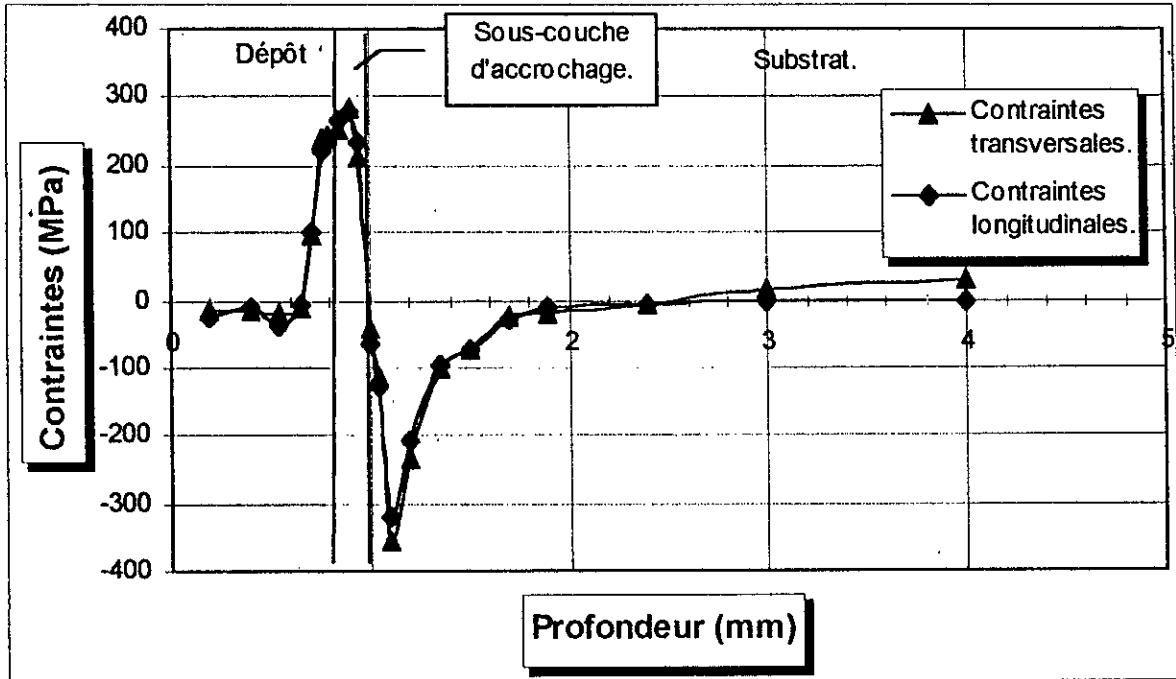


Figure IV.8 : Profil des contraintes résiduelles à différents niveaux du multimatériau N°: 3 avec sous-couche d'accrochage.

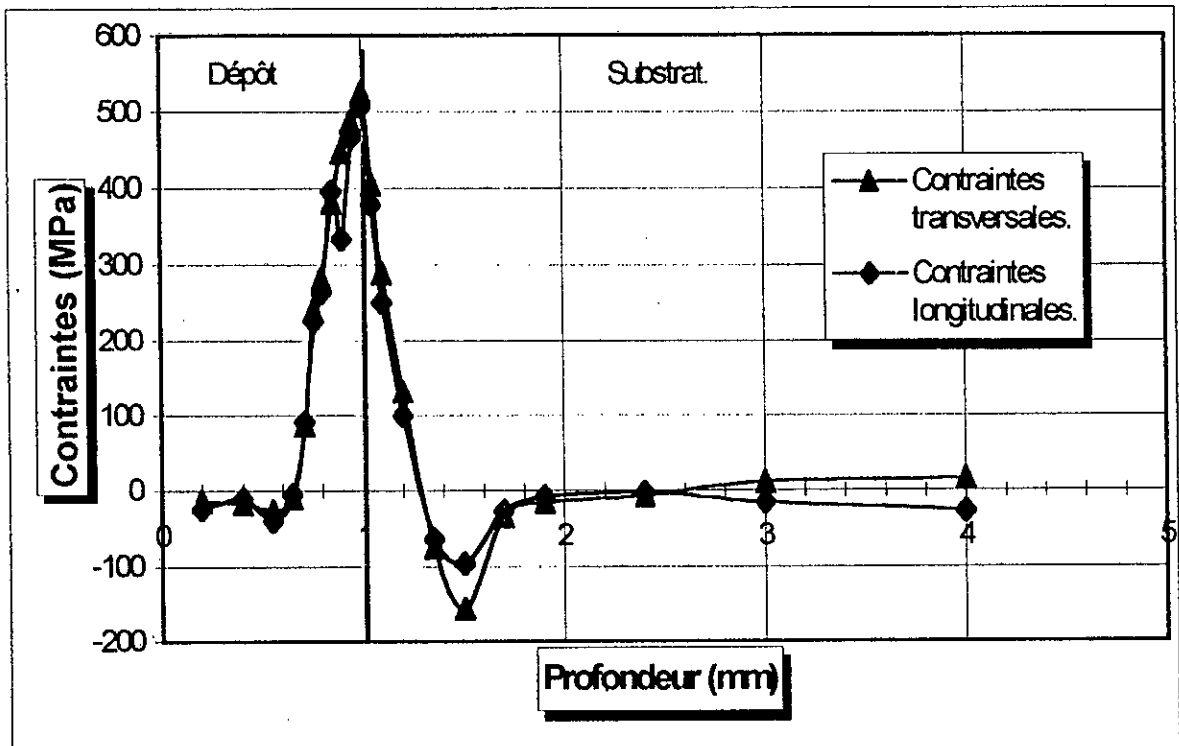


Figure IV.9 : Profil des contraintes résiduelles à différents niveaux du multimatériau N°: 1 sans sous-couche d'accrochage.

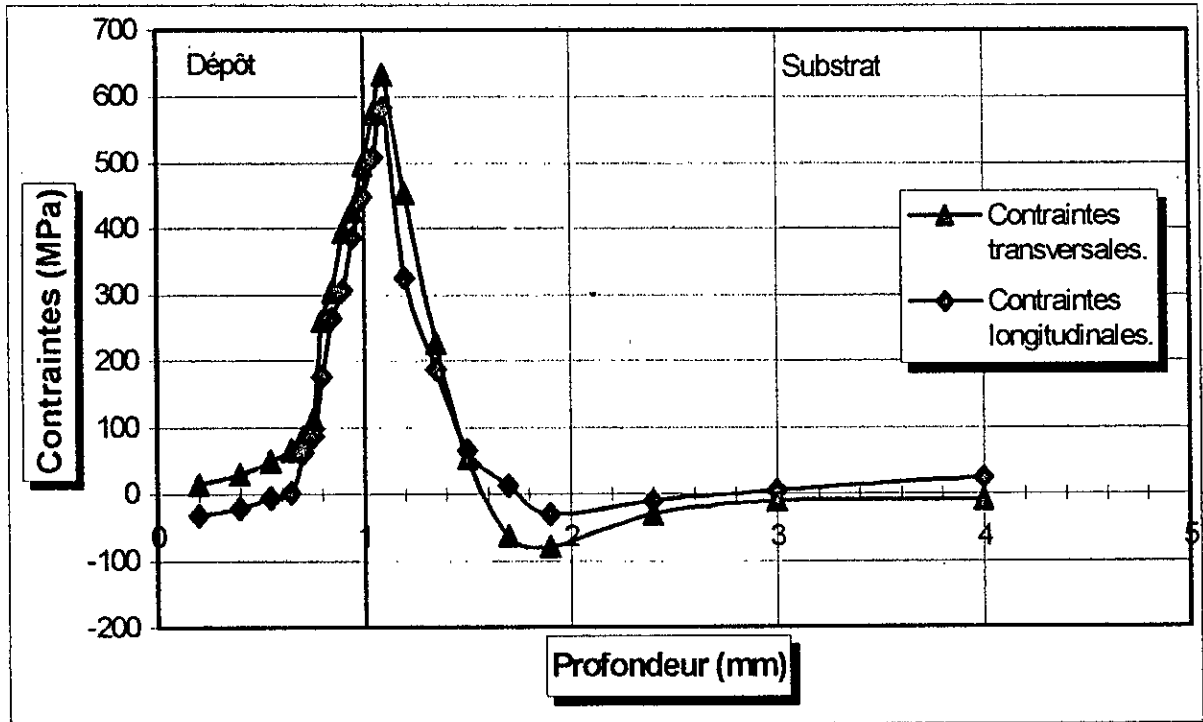


Figure IV.10 : Profil des contraintes résiduelles à différents niveaux du multimatériau N°: 2 sans sous-couche d'accrochage.

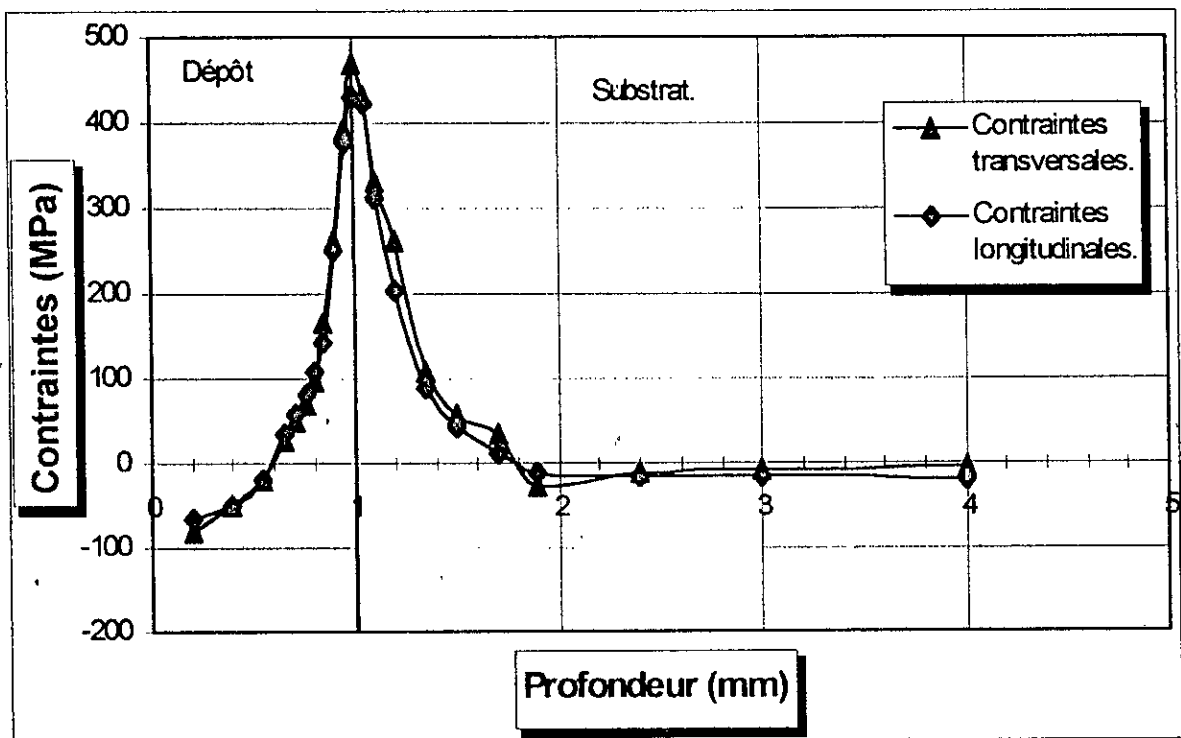


Figure IV.11 : Profil des contraintes résiduelles à différents niveaux du multimatériau N°: 3 sans sous-couche d'accrochage.

IV.5.2- Interprétation :

D'après les courbes précédentes, on remarque que l'ordre de grandeur des contraintes résiduelles dans les différents multimatériaux est pratiquement similaire dans les deux directions transversales et longitudinales.

En général, les contraintes sont plutôt de compression dans le dépôt et de traction dans le substrat en prenant des valeurs de plus en plus faibles lorsqu'on s'éloigne de l'interface.

Au niveau de la sous-couche d'accrochage, on remarque l'existence d'un pic en traction du côté du dépôt et de compression du côté du substrat.

Pour les interfaces contenant une sous-couche d'accrochage, les valeurs des contraintes sont moins élevées en traction et en compression par rapport aux matériaux ne contenant pas de sous-couches.

On peut dire que l'un des effets des sous-couches d'accrochage est de diminuer l'intensité des contraintes, ce qui assure un meilleur équilibre de cette zone de transition.

D'un multimatériau à un autre, l'ordre de grandeur et la nature des contraintes résiduelles sont variés [20].

Ils dépendent, en effet, de plusieurs paramètres tels, la nature chimique des matériaux, leurs propriétés physiques, ainsi que les paramètres de projection utilisés [20].

CONCLUSION GÉNÉRALE

Par ce travail, nous avons d'abord montré l'intérêt de la modélisation mathématique et son application de plus en plus grandissante dans le domaine de la métallurgie. Le modèle proposé permet de calculer les contraintes résiduelles à différents niveaux de matériaux multicouches moyennant la méthode d'enlèvement successif de couches par extensométrie. Cette méthode sert à déterminer les déplacements (déformations) des différentes couches enlevées.

Cette modélisation mathématique s'appuie principalement sur la loi de Hooke, liant les contraintes aux déplacements dans le domaine élastique. Elle nécessite également une discrétisation unidimensionnelle basée sur les dimensions des multimatériaux et des épaisseurs variables des couches étudiées, ainsi que les caractéristiques physiques des différents matériaux en liaison.

Les résultats obtenus sont les profils des contraintes résiduelles dans les différents niveaux, en insistant plus sur la zone interfaciale.

On a remarqué que la nature (compression ou traction) et l'ordre de grandeur des contraintes résiduelles ne sont pas uniformes car, ils dépendent de plusieurs paramètres (nature des matériaux, paramètres de projection...). Aussi, les contraintes transversales et longitudinales sont plus ou moins équivalentes.

L'intérêt de la sous-couche d'accrochage a été également mis en évidence par l'atténuation des valeurs des pics de compression et de traction à l'interface.

Il serait intéressant de pouvoir greffer au modèle proposé d'autres paramètres (paramètres de projection, traitements thermiques...), afin de le rendre plus complet et de varier son application.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]/ **G. MAEDER, J. L. LEBRUN, J. M. SPARUEL** 1987
Détermination des contraintes résiduelles par diffraction des rayons X.
Edition ENSAM- Paris.
- [2]/ **D. KAPLAN** 1983
Les méthodes de mesure de contraintes résiduelles par trépanage
et par enlèvement de couches.
IRSID. RE 1164
- [3]/ **J. F. FLAVENOT, A. NIKU LARI** 1985
La mesure des contraintes résiduelles par la méthode de la flèche.
Mémoire technique du CETIM.
- [4]/ **D. ROSENTHAL, J. T. NORTON** 1983
A method of measuring triaxial residual stresses of plates.
Journal of american welding society n° 24.
- [5]/ **R. P. FRICK, G. A. GURTMAN, H. D. MERIWETHER** 1967
Experimental determination of residual stresses in an orthotropic material.
Journal of materials.
- [6]/ **Mesure des contraintes résiduelles par la méthode du trou.** 1990
NT 47 D, VISHAY MICROMESURES.
- [7]/ **G. KIRSCH** 1983
Determination residual stresses by the hole-drilling strain-sage method.
ASTM Standard E837.

- [8]/ **G. MAEDER, J. L. LEBRUN** 1993
 Eléments de diffraction des rayons X.
 Edition ENSAM- Paris.
- [9]/ **J. F. IMBERT** 1991
 Analyse des structures par éléments finis.
 3^{ème} édition, Cépaduès édition.
- [10]/ **J. L. BATOZ, G. DHATT** 1990
 Modélisation des structures par éléments finis.
 Edition Hermès. Paris.
- [11]/ **G. DHATT, G. TOUZOT** 1984
 Une présentation de la méthode des éléments finis.
 2^{ème} édition, édition Maloine.
- [12]/ **L. ROCKEY, R. EVANS, W. GRIFFITHS, D. NETHERCOT** 1979
 Introduction à la méthode des éléments finis.
 Edition Eyrolles. Paris
- [13]/ **Z. A. SAIBI** 1996
 Simulation mathématique de l'état de contrainte d'un matériau en flexion
 trois points monotone.
 Projet de fin d'étude.
 Département métallurgie, ENP.
- [14]/ **N & S. TAIBI** 1992
 Fortran 77
 2^{ème} édition, édition Berti. Alger
- [15]/ **A. HALLAL** 1995
 Etude du comportement d'un multimatériau réalisé par projection thermique
 d'un acier sur un alliage d'aluminium.
 Projet de fin d'étude.
 Département métallurgie, ENP.

- [16]/ Techniques de l'ingénieur M1645. 1984
Revêtements par projection thermique.
- [17]/ C. DEHMAS. 1994
Etude de l'influence des traitements sur l'adhérence et le comportement mécanique d'un multimatériau réalisé par projection thermique.
Projet de fin d'étude.
Département métallurgie, ENP.
- [18]/ Z. MERZOUGUI. 1997
Réalisation et caractérisation de revêtement au molybdène sur un acier de construction.
Projet de fin d'étude.
Département métallurgie, ENP.
- [19]/ M. LARACINE, M.VANNES. 1987
Adaptation de la méthode d'enlèvement de couches à la détermination des contraintes résiduelles dans le cas des revêtements céramiques épais.
Ecole centrale de LYON.
- [20]/ V.GUIPONT. 1994
Déterminations expérimentales des contraintes résiduelles au sein des matériaux réalisés par brasage.
Application au couple céramique/ métal / acier doux.
Thèse de doctorat.
Ecole centrale de LYON.