

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

en vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état

SUJET

Contribution à l'étude de la machine

asynchrone a rotor massif lisse

par la méthode des éléments finis

Proposé par :

Mme. S. DJEMA

Etudié par :

BOUZID KARIM

DARSOUNI ABDELWAHEB

Dirigé par :

Mme. S. DJEMA

PROMOTION :

JUIN 1986



- REMERCIEMENTS -

Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à notre promoteur, Madame DJEMA pour la confiance qu'elle nous a témoigné, son dévouement et son aide précieuse qu'elle nous a apporté durant tout notre travail.

Nous adressons également nos plus vifs remerciements à Monsieur ZAIM pour nous avoir prodigué d'utiles conseils, comme nous remercions Monsieur BOUHRIT pour nous avoir cédé sa réservation sur le "VAX".

Que tous les professeurs qui ont contribué à notre formation trouvent ici le témoignage de toute notre profonde gratitude.

Nos respects vont également au Président ainsi qu'aux membres de Jury qui nous feront l'honneur d'apprécier notre travail.

La Dactylographie de ce travail est due à Melle MOUNSI Hamida qu'elle trouve ici l'expression de nos sincères remerciements.

- DEDICACES -

A mon père

A ma mère

A Assia

A mon frère Nourredine

A mes soeurs

A tous mes amis

Je dédie ce travail

ABDELOUAHER.

A mes parents

A mes frères et soeurs

A DJ. APIDI

A tous mes amis

Je dédie ce modeste travail

KARIM.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

S O M M A I R E

INTRODUCTION

CHAPITRE I : METHODES DE CALCUL:.....

 I.1 - Discretisation du domaine par éléments finis.....

 I.2 - Méthode variationnelle.....

 I.3 - Approximation des potentiels.....

CHAPITRE 2 : MISE EN PLACE DE L'OUTIL INFORMATIQUE.....

 2.1 - Application à la M.R.V. polydiscoide.....

 2.2 - Méthode variationnelle appliquée au potentiel-
 vecteur.....

 2.3 - Mise en forme du programme.....

CHAPITRE 3 : MODELISATION DE LA MACHINE A ROTOR MASSIF LISSE.....

 3.1 - Choix du domaine d'application.....

 3.1.1 - Présentation de la machine à rotor massif
 lisse.....

 3.1.2 - Hypothèses simplificatrices.....

 3.1.3 - Domaine à étudier.....

 3.2 - Définition des paramètres dimensionnels et élec-
 trique pour le programme.....

 3.2.1 - Modèle choisie pour le programme.....

 3.2.2 - Grandeurs électriques.....

 3.3.- Application de la méthode variationnelle.....

 3.3.1 - Equation à résoudre.....

 3.3.2 - Choix de la fonctionnelle.....

 3.3.3 - Conditions aux limites.....

 3.4 - Résolution du système.....

 3.4.1 - Minimisation de la fonctionnelle dans un
 élément

 3.4.2 - Algorithme de résolution.....

CONCLUSION.....

ANNEXE.....

BIBLIOGRAPHIE.....

المدرسة الوطنية-المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

La conception des machines électriques modernes, que ce soit celle des machines traditionnelles ou celle des dispositifs nouveaux est toujours basée sur une répartition optimale du champ magnétique essentiellement dans l'entrefer de la machine. Si les hypothèses habituelles: Absence de saturation et simplification de la géométrie des trajets de flux ont permis jusqu'à ces derniers temps une approche satisfaisante. Les problèmes que l'on rencontre aujourd'hui ne permettent en général plus ces hypothèses et il devient nécessaire de tenir compte entre autres paramètres de l'état de saturation et des formes géométriques des circuits électriques et magnétiques de la machine. L'industrialisation des machines spéciales travaillant en régime saturé est une réalité présente vu les découvertes de matériaux magnétiques ayant une perméabilité élevée et vu les progrès de l'électronique de puissance pour la partie commande.

Le choix du modèle pour la machine, la définition de la méthode et l'écriture du programme ne vont pas sans quelques difficultés à cause des géométries complexes et de la structure de la machine où intervient différentes caractéristiques suivant les parties concernées, conductivité, perméabilité, permittivité.

Les méthodes mathématiques d'analyse ne permettent pas dans le général de faire cette étude et l'on doit plus souvent avoir recours aux méthodes numériques.

L'une des principales méthodes numériques développée au cours de ses dix dernières années est la méthode aux éléments finis dont le principe fondamental est la minimisation d'une fonctionnelle représentant l'énergie du système dans un domaine discrétisé en éléments de dimension finie dans lesquels la fonction inconnue est représentée par une approximation polynomiale.

Le travail réalisé au cours de ce projet se divise en deux parties essentielles:

-La première partie concerne l'étude de la méthode variationnelle appliquée à la machine à réluctance variable polydiscoidale avec la mise en place au niveau du VAX de l'E.N.P, d'un programme de calcul pour la répartition du potentiel-scalaire et son adaptation à la résolution du potentiel-vecteur.

-La deuxième partie est consacrée à une modélisation de la machine asynchrone à rotor massif lisse. On y développera l'algorithme de résolution de la méthode variationnelle avec des hypothèses simplificatrices classiques pour l'étude en bidimensionnel d'un domaine où existent des courants. La définition des

paramètres dimensionnels et électriques du programme est un état
délicat et importante pour une approche concrète de la machine
réelle par le modèle proposé.

CHAPITRE 1

METHODES DE CALCUL

Nous allons présenter dans ce chapitre le principe de la méthode variationnelle, appliquée aux éléments finis. Le principe de base, est de remplacer la résolution de l'équation différentielle décrivant le phénomène physique par la minimisation d'une fonctionnelle à l'intérieur du domaine étudié.

Les équations de MAXWELL dans un domaine ne présentant pas de courant s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{H} &= \nu (\vec{\nabla} \times) \vec{B} \end{aligned}$$

I. MODELISATION DE LA MACHINE

L'étude de conception d'une machine électrique se base sur la modélisation de la machine en fonction de paramètres dimensionnels et électriques pour l'application d'une méthode numérique adéquate.

La définition de ce domaine d'étude D, est très délicate et essentielle pour tirer du calcul effectué dans ce domaine, des conclusions correctes quant au fonctionnement de la machine. Supposons cette étape franchie, nous y reviendrons au chapitre (III), le problème posé est de résoudre les équations de MAXWELL dans D, pour connaître la répartition du potentiel en chaque point du domaine, afin de calculer l'énergie électrique de la machine.

$$W_m = \int_0 \phi I \cdot d\phi$$

I : courant d'excitation

ϕ : flux total à travers la surface utile de la machine.

Ce qui permettra de calculer le couple d'origine électrique

$$C_m = \frac{dW_m}{-d\theta}$$

θ : position du rotor par rapport au stator :

variable mécanique d'optimisation de la machine sera la conclusion apportée à la comparaison entre plusieurs machines modélisées par différents paramètres dimensionnels et électriques, à pertes joules et fer égales.

2. DISCRETISATION DU DOMAINE PAR ELEMENTS FINIS

La discrétisation d'un domaine en éléments finis i , consiste à passer d'un problème de fonctions continues à la création d'un nombre fini d'inconnues aux différents noeuds N du domaine choisi.

À l'intérieur de chaque élément i , on suppose que la fonction étudiée reste constante.

Le maillage est constitué de quadrilatères dont les sommets forment les noeuds. Un programme permet de donner une description spatiale de chaque noeud par ses coordonnées.

Le découpage peut avoir n'importe quelle forme à condition de délimiter les éléments i dans le même matériau lorsque le domaine comporte des parties non homogènes. La grandeur à calculer doit être continue aux interfaces des arêtes, séparant deux milieux de permittivité différentes.

3. METHODE VARIATIONNELLE

Les éléments finis permettent l'application de la méthode variationnelle dont le principe de base est de remplacer la résolution de l'équation différentielle décrivant le phénomène physique dans un domaine, par la minimisation d'une fonctionnelle à l'intérieur du domaine étudié et par la vérification de conditions aux limites sur la surface entourant le domaine.

a) Principe de calcul : Nous avons une certaine fonctionnelle \mathcal{F} de V et de ses dérivées partielles que nous écrivons :

$$\mathcal{F} = \int_D F(V, \vec{\nabla} V) dD$$

où D est le domaine où V est définie.

La condition nécessaire est suffisante pour que \mathcal{F} soit stationnaire est que, pour toute variation δV arbitraire de la variable d'essai V , la variation correspondante $\delta \mathcal{F}$ de \mathcal{F} soit nulle.

$$\delta \mathcal{F} = \int_D \left(\frac{\partial F}{\partial V} \delta V + \frac{\partial F}{\partial V'_x} \delta V'_x + \frac{\partial F}{\partial V'_y} \delta V'_y + \frac{\partial F}{\partial V'_z} \delta V'_z \right) dD = 0 \quad (1)$$

explicitons les différents termes :

$$\delta V'_x = \delta \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta V)$$

$$\delta V'_y = \delta \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\delta V)$$

$$\delta V'_z = \delta \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (\delta V)$$

Nous écrivons alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta V) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} (\delta V) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} (\delta V) \vec{k} = \vec{\nabla} (\delta V)$$

$$\frac{\partial F}{\partial V'_x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial V'_y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial V'_z} \vec{k} = \vec{g}$$

(où \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont les vecteurs unitaires selon les axes x , y et z)

En utilisant les notations ci-dessus, l'équation (1) devient :

$$\delta \mathcal{F} = \int_D \left(\frac{\partial F}{\partial V} \delta V + \vec{g} \cdot \vec{\nabla} (\delta V) \right) dD \quad (2)$$

on peut écrire :

$$\int_D \vec{g} \cdot \vec{\nabla} (\delta V) dD = \int_D \vec{\nabla} \cdot (\vec{g} \delta V) dD - \int_D \delta V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dD$$

ce qui donne :

$$\int_D \vec{g} \cdot \vec{\nabla} (\delta V) dD = \int_S \delta V \vec{g} \cdot \vec{n} dS - \int_D \delta V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dD$$

où S est la surface qui entoure le domaine D

En remplaçant cette expression en (2) on a :

$$\delta \mathcal{F} = \int_D \left(\frac{\partial F}{\partial V} - \vec{v} \cdot \vec{g} \right) \delta V \, dD + \int_S \delta V \vec{g} \cdot \vec{n} \, dS$$

L'intégrale sur le domaine D et celle sur la surface S sont indépendantes, et pour que $\delta \mathcal{F}$ soit nulle il faut que :

$$\int_D \left(\frac{\partial F}{\partial V} - \vec{v} \cdot \vec{g} \right) \delta V \, dD = 0 \quad (3)$$

$$\int_{S(D)} \delta V \vec{g} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (4)$$

Pour que V est arbitraire, pour que l'expression (3) soit nulle, il faut que :

$$\frac{\partial F}{\partial V} - \vec{v} \cdot \vec{g} = 0 \quad (5)$$

soit

$$\frac{\partial F}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial v_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} \right) = 0 \quad (6)$$

cette expression est l'équation d'Euler. La fonctionnelle \mathcal{F} doit être telle que son intégrand F appliqué à l'équation ci-dessus (5) conduise à une expression vérifiée dans le domaine D.

Examinons maintenant l'expression (4), et supposons que S comporte :

- S_1 où $\delta V = 0$ (condition naturelle de DIRICHLET). (4) est automatiquement vérifiée, sur la surface où la fonction V a une valeur fixée.
- S_2 , qui est la surface (S - S_1 .)

Étant donné que δV est arbitraire, pour que (4) soit nulle il faut que :

$$\vec{g} \cdot \vec{n} = 0 \quad (7)$$

soit

$$\frac{\partial F}{\partial v_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} n_y + \frac{\partial F}{\partial v_z} n_z = 0$$

avec $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$, normale à S, dirigée vers l'extérieur du domaine D.

En conclusion :

Donc, chercher la fonction V qui rend J^1 extrémale revient à écrire que :

- l'équation d'EULER (6) est vérifiée dans le domaine D , et que en tout point de la surface S .
- Ou bien V est fixé (condition de DIRICHLET)
- Ou bien $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ condition de NEWMANN.

3. APPROXIMATION DE LA GRANDEUR A MESURER

La variation linéaire de V dans un triangle quelconque représenté sur la figure (1) est de la forme :

$$V(x,y) = a + b \cdot x + c \cdot y \quad (8)$$

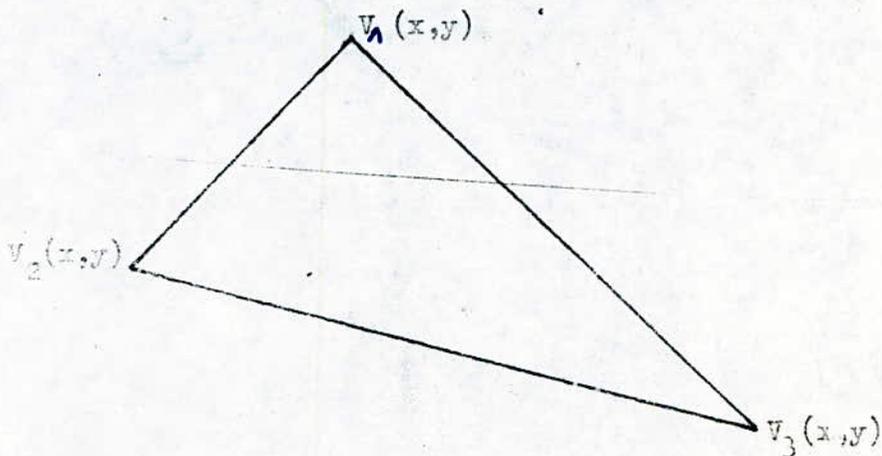


Fig. (1)

Les valeurs de potentiels aux noeuds 1, 2, 3 doivent vérifier l'équation (8), ce qui nous permet de calculer a , b et c par le système suivant :

$$V_1 = a + b \cdot x_1 + c \cdot y_1$$

$$V_2 = a + b \cdot x_2 + c \cdot y_2$$

$$V_3 = a + b \cdot x_3 + c \cdot y_3$$

b et c étant donné par :

$$b = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & V_1 & y_1 \\ 1 & V_2 & y_2 \\ 1 & V_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{et } c = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & V_1 \\ 1 & x_2 & V_2 \\ 1 & x_3 & V_3 \end{vmatrix}$$

où

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

soit le double du triangle

$$V(x,y) = \sum_{l=1,2,3} \frac{1}{D} (P_l + q_l \cdot x + r_l \cdot y) V_l$$

où

$$P_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3$$

$$q_1 = y_2 - y_3$$

$$r_1 = x_3 - x_2$$

Les autres termes étant obtenus par permutation circulaire des indices.

Une étude plus détaillée de la méthode variationnelle appliquée au potentiel-vecteur sera traitée dans le chapitre (II), et qui nous permettra de mettre en forme le programme.

CHAPITRE 2

MISE EN PLACE DE L'OUTIL
INFORMATIQUE

La géométrie du problème posé est tridimensionnelle, ce qui rend la résolution de ce dernier compliquée. On adopte alors une hypothèse simplificatrice qui ramène cette résolution dans un domaine bidimensionnelle. Ainsi, on suppose que la longueur de la machine est infinie ce entraîne :

- Les effets d'extrémités sont négligeable.
- La variation suivant l'axe oz est nulle.

1. LA M.R.V. POLYSCOIDE

1.1. DESCRIPTION DE LA M.R.V. POLYDISCOIDE

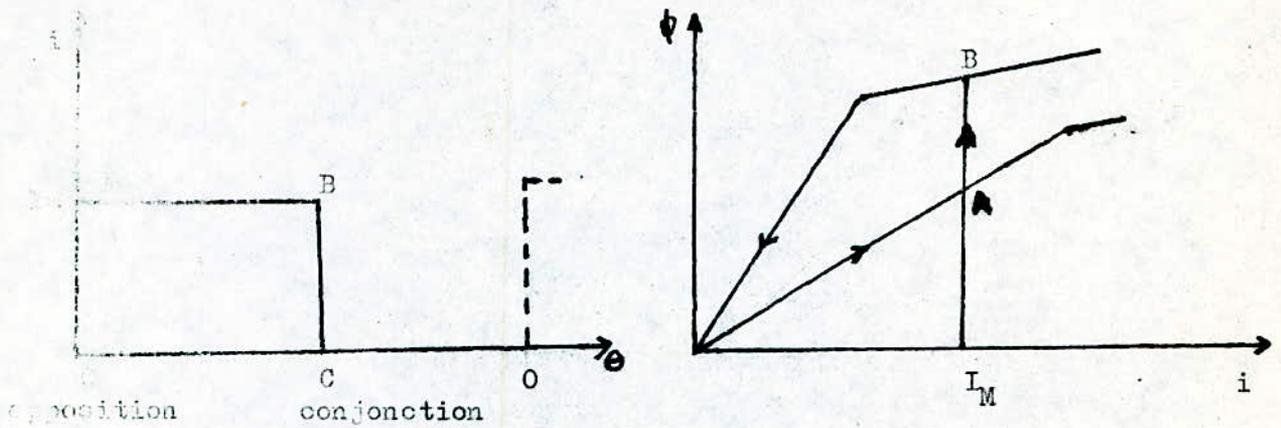
Elle se compose d'un empilement de disques comprenant un grand nombre de secteurs circulaires en matériau magnétique maintenus dans une gaine isolante et plongée dans un champ magnétique parallèle à l'axe des disques. Elle présente des disques fixes (stator) et des disques mobiles (rotor) en série alternée, dans lesquels sont logés des plots magnétiques à intervalles réguliers. Les rotors sont fixés à l'arbre de rotation du système. Le rotor est lui même composé de la même matière isolante dont la permittivité doit être très proche de celle de l'air. Les disques fixes et mobiles sont séparés par un entrefer minimum. Ils sont plongés dans un champ magnétique créé par des bobines extérieures non couplées entre elles (fig. 1). Le sens du flux est axial.

Lorsque les plots sont en conjonction, la réluctance du système est minimum, et lorsque les plots sont en opposition, la réluctance du système est maximum. La MRV polydiscoidale est donc constituée par le couplage mécanique de n machines élémentaires : chaque machine élémentaire comporte un disque fixe et un disque mobile séparés par un entrefer.

1.2. MODE DE FONCTIONNEMENT

Les disques mobiles sont en mouvement par rapport aux disques fixes. Lorsque les plots sont en opposition, on crée, à l'aide d'un courant inducteur i dans la bobine un champ magnétique, ce qui engendre un flux ϕ . Les plots, fixes et mobiles vont s'attirer de manière à minimiser la réluctance du système. Lorsque les plots sont en conjonction, on coupe le courant, les plots continuent leur trajectoire sous l'effet de l'énergie cinétique acquise jusqu'à ce qu'ils soient de nouveau en opposition et le cycle recommence.

Le cycle est représenté sur les figures (1.1) et (1.2) .



La surface hachurée représente l'énergie recueillie lors d'un cycle, dans le volume utile de la machine.

$$W = \int_{\text{cycle}} i d\phi$$

1.3. DIMENSIONNEMENT DE LA M.R.V. POLYDISCOÏDE

Pour l'application au calcul numérique, on choisit un domaine qui comporte un plot magnétique fixe et un plot magnétique mobile. Ce domaine élémentaire sera suffisant pour le calcul du flux et le couple moteur (Fig. (1.3))

Pour dimensionner la machine, on considère un domaine de longueur unité : la maille élémentaire où $l = 1$ (Fig. 1.4).

Les paramètres de la maille qui seront introduits dans le programme de calcul, sont définis comme suit :

$\lambda = \frac{l_1}{l}$: largeur de la maille

$\rho = \frac{g}{l}$: entrefer relatif

$\beta = \frac{l_2}{l_1}$: rapport air-fer permet de calculer la largeur du plot de la maille : $S \times \lambda$

$\gamma = \frac{l_3}{l_1}$: rapport des largeurs relatives des disques, permet de calculer la largeur des disques de la maille.

2. METHODE VARIATIONNELLE APPLIQUEE AU POTENTIEL VECTEUR \vec{A}

2.1. EQUATIONS A RESOUDRE

La mise en place du programme pour l'étude des machines à rotor massif, consiste à adopter un programme calculant une répartition de potentiel-scalaire magnétique dans un domaine où $\vec{J} = 0$ dans une première étape.

Les équations à résoudre sont alors :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= 0 \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Le milieu est défini par $\vec{B} = \mu(\vec{H})\vec{H}$

Le phénomène de saturation du matériau magnétique nous emmène à la résolution d'équation non linéaire, où seules les méthodes numériques peuvent être appliquées.

On pose :

$$\vec{H} = - \text{grad} V$$

V : potentiel scalaire magnétique

Le problème sera de résoudre :

$$\text{div } \mu(\vec{H}) (- \text{grad} V) = 0$$

soit :

$$\Delta V = 0$$

2.2. CHOIX DE LA FONCTIONNELLE

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la recherche d'une solution stable A , à une fonction de A et de ses dérivées vérifiées dans le domaine D , et des conditions sur la surface S entourant D qu'impose le problème physique à résoudre, revient à rendre extrémale une fonctionnelle de A et de ses dérivées.

La fonctionnelle choisie pour le calcul de la distribution des potentiels dans la maille élémentaire définie au paragraphe (1), est la fonction d'état :

$$\mathcal{W} = \int_D \left[\int_0^B \vec{h} \cdot d\vec{b} \right] dD \quad (2.1)$$

$$E = \int_0^B \vec{h} \cdot d\vec{b} \quad \text{énergie du système}$$

$$\vec{h} \cdot d\vec{b} = h_x db_x + h_y db_y$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\begin{cases} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial A_x} = \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)} = -\frac{\partial F}{\partial B_y} \\ \frac{\partial F}{\partial A_y} = \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)} = \frac{\partial F}{\partial B_x} \end{cases}$$

Si on connaît une fonction d'état, le choix du chemin d'intégration n'est pas arbitraire. On peut intégrer soit sur le chemin 1 soit sur le

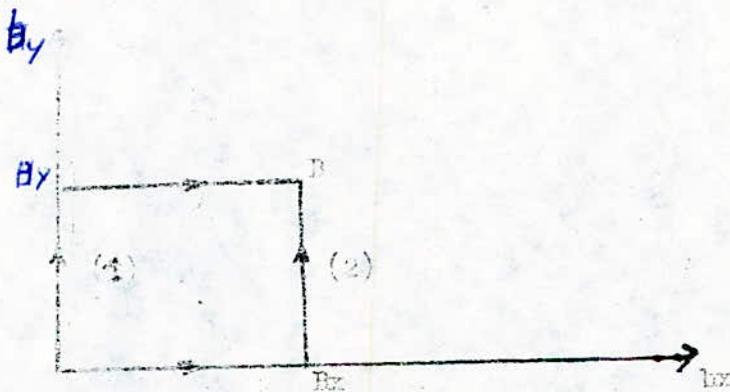


Fig. (2.1)

$$\frac{\partial F}{\partial B_x} = \frac{\partial}{\partial B_x} \left[\int_0^{B_x} h_x(b_x, B_y) db_x + \int_0^{B_y} h_y(0, b_y) db_y \right] = h_x(B_x, B_y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^{E_x} h_x(bz, 0) dbx + \int_0^{E_y} h_y(E_x, by) dby \right] = H_y(E_x, E_y)$$

remplaçons ces expressions dans l'équation d'EULER, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial A} \left[\int_0^E \vec{h} \cdot d\vec{b} \right] + \frac{\partial}{\partial x} (H_y(E_x, E_y)) - \frac{\partial}{\partial y} (H_x(E_x, E_y)) = 0$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} (H_y(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y} (H_x(x, y)) = 0 \quad (2.2)$$

En conclusion :

La minimisation de la fonctionnelle (2.1) est bien équivalente à l'équation de MAXWELL dans un domaine où il n'y a pas de densité de courant :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0$$

Les conditions aux limites seront sur $S = S_1 + S_2$:

- Soit, $\vec{A} = 0$: condition de DIRICHLET, \vec{A} imposé sur S_1

- Soit, $\left(\frac{\partial F}{\partial A_x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial A_y} \vec{j} \right) (n_x \vec{i} + n_y \vec{j}) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial A_x} \cdot n_x + \frac{\partial F}{\partial A_y} \cdot n_y = 0$

soit :

$$E_x \cdot n_y - H_y \cdot n_x = 0$$

Cette expression traduit la condition de NEWMANN sur la surface S_2 du domaine, l'équation

$$\vec{E} \wedge \vec{n} = 0$$

est implicitement vérifiée

2.2. APPROXIMATION DE \vec{A} DANS UN ELEMENT DU DOMAINE

Comme nous avons vu au paragraphe (1.3), la variation linéaire du potentiel vecteur dans un triangle quelconque est de la forme :

$$A(x, y) = a + b \cdot x + c \cdot y \quad (2.3)$$

Il faut que sur l'élément

$$b_y = - \frac{\partial A}{\partial x} = -b$$

$$b_x = \frac{\partial A}{\partial y} = c$$

Les valeurs des potentiels aux nœuds 1, 2, 3 doivent vérifier l'équation

On veut donc nous permettre de calculer a, b et c par le système suivant :

$$\begin{cases} A_1 = a + b \cdot x_1 + c \cdot y_1 \\ A_2 = a + b \cdot x_2 + c \cdot y_2 \\ A_3 = a + b \cdot x_3 + c \cdot y_3 \end{cases}$$

soit :

$$a = \frac{1}{D} [A_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) - x_1(A_2 y_3 - A_3 y_2) + y_1(A_2 x_3 - A_3 x_2)]$$

$$b = \frac{1}{D} [(A_2 y_3 - A_3 y_2) - A_1(y_3 - y_2) + y_1(A_3 - A_2)]$$

$$c = \frac{1}{D} [(A_3 x_2 - A_2 x_3) - x_1(A_3 - A_2) + A_1(x_3 - x_2)]$$

alors :

$$A(x, y) = \frac{1}{D} [A_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + A_2(y_1 x_3 - x_1 y_3) + A_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (A_1(y_2 - y_3) + A_2(y_3 - y_1) + A_3(y_1 - y_2))x + (A_1(x_3 - x_2) + A_2(x_1 - x_3) + A_3(x_2 - x_1))y]$$

soit :

$$A(x, y) = \sum_{n=1,2,3} \frac{1}{D} (p_n + q_n \cdot x + r_n \cdot y) A_n \quad (2.A)$$

2.2. SPÉCIFICATION DE LA FORMULATION VARIATIONNELLE

Comme nous l'avons vu, résoudre l'équation

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0$$

est équivalent à minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{F} = \iint_D \left[\int_0^{\vec{E}, \vec{D}} \vec{H} \cdot d\vec{s} \right] dx dy$$

sur le domaine D

On minimise la fonctionnelle \mathcal{F} par rapport aux potentiels vecteurs aux

c.a.d. :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{H}} = 0$$

La discrétisation du domaine nous ramène à une fonctionnelle qui est l'addition de la fonctionnelles individuelles \mathcal{F}_i des triangles soit :

$$\mathcal{F} = \sum_{\text{triangles}} \mathcal{F}_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} = \sum_{\text{triangles } i} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial A_k} = 0$$

Dans le triangle t_i :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial A_k} = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial B_x} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial A_k} + \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial B_y} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial A_k}$$

Ce qui donne, en choisissant le chemin d'intégration convenable

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial A_k} = \iint_{t_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial B_x} \left[\int_0^{B_x} h_x(x, y) dx + \int_0^{B_y} h_y(0, y) dy \right] \frac{\partial B_x}{\partial A_k} + \frac{\partial}{\partial B_y} \left[\int_0^{B_x} h_x(x, 0) dx + \int_0^{B_y} h_y(B_x, y) dy \right] \frac{\partial B_y}{\partial A_k} \right\} dx dy$$

donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} = \iint_{\Omega} \left[h_x(x, y) \frac{\partial B_x}{\partial A_k} + h_y(x, y) \frac{\partial B_y}{\partial A_k} \right] dx dy$$

cette expression peut s'écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} = \iint_{t_i} \vec{K} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial A_k} dx dy \quad (2.5)$$

Comme nous traitons un cas isotrope

$$K_x = \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$K_y = \frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\vec{K} = \sqrt{(\vec{I} \cdot \vec{I})} \cdot \vec{B}$$

$$\sqrt{(\vec{I} \cdot \vec{I})} = \frac{I}{\rho(I \cdot I)}$$

et dans l'expression (2.4), nous avons :

$$K_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \sum_{n=1,2,3} \frac{I}{D} (r_{nA})$$

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\sum_{n=1,2,3} \frac{1}{D} (q_n \cdot A_n)$$

ce qui nous donne

$$\vec{B} = \sum_{n=1,2,3} \frac{1}{D} \left[r_n A_n \vec{i} - q_n A_n \vec{j} \right]$$

et

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{1}{D} (r_n \cdot \vec{i} - q_n \cdot \vec{j})$$

et

$$\vec{H} = \sum_{n=1,2,3} \frac{J}{D} \left[r_n A_n \vec{i} - q_n A_n \vec{j} \right]$$

Nous avons alors sous forme matricielle

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial A} = \iint_{ti} \frac{J}{D} \left[\sum_n r_n A_n - \sum_n q_n A_n \right] \begin{bmatrix} r_n \\ -q_n \end{bmatrix} dx dy$$

comme la minimisation est extensible aux deux autres noeuds et que l'invariant F ne dépend pas des coordonnées nous pouvons écrire

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial A} = \frac{J}{D} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \iint_{ti} dx dy$$

L'intégrale étant égale à l'aire du triangle S , dont la valeur $S = \frac{D}{2}$

ce qui donne :

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial A} = \frac{J}{2D} \begin{bmatrix} r_1 & -q_1 \\ r_2 & -q_2 \\ r_3 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

après calcul nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{H}}{\partial A_1} \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial A_2} \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial A_3} \end{bmatrix} = \frac{J}{2D} \begin{bmatrix} r_1^2 + q_1^2 & r_1 r_2 + q_1 q_2 & r_3 q_1 + q_3 q_1 \\ r_2^2 + q_2^2 & & r_3 r_2 + q_3 q_2 \\ r_3^2 + q_3^2 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

que nous notons $[S] [A]$

Cette numérotation est utilisée pour un triangle quelconque. En réalité ces noeuds numérotés 1, 2 et 3 auront la numérotation correspondant au maillage utilisé. La matrice $[3.3]$ obtenue ci-dessus est alors assemblée dans une matrice globale dans les lignes et colonnes qui correspondent aux numéros réels des noeuds.

Nous appelons $[SS]$ la matrice globale qui est la contribution de tous les triangles à la répartition de \vec{A} dans le domaine (eq. 2.6) et sa dimension est $[K.N]$; le vecteur inconnu des potentiels aux k noeuds est appelé $[AA]$

Le système que nous avons à résoudre est de la forme :

$$[SS] [AA] = 0 \quad (2.7)$$

2.3 RÉSOLUTION DU SYSTEME

Pour résoudre le système (2.7), on introduit les conditions aux limites de DIRICHLET sur les frontières où le potentiel est donné. La résolution du système est faite par la méthode d'approximations successives, qui peut être résumer comme suit :

- 1 - On choisit A initial en chaque noeud
 - 2 - Avec A , on calcule B dans chaque élément
 - 3 - avec B , on obtient ∇
 - 4 - Avec ∇ on calcule tous $S(3,3)$ puis on les assemble en $[SS]$
 - 5 - On résout $[SS] [AA] = 0$
 - 6 - Avec les nouveaux potentiels A aux noeuds on revient à "2" jusqu'à ce que la méthode converge, c'est à dire :
on effectue un test d'arrêt des itérations : $\frac{|A_n - A_{n-1}|}{|A_n|} \leq \epsilon$
- Si oui : Fin
 - Si non : on revient à "2"

3. MAIJE EN FORME DU PROGRAMME

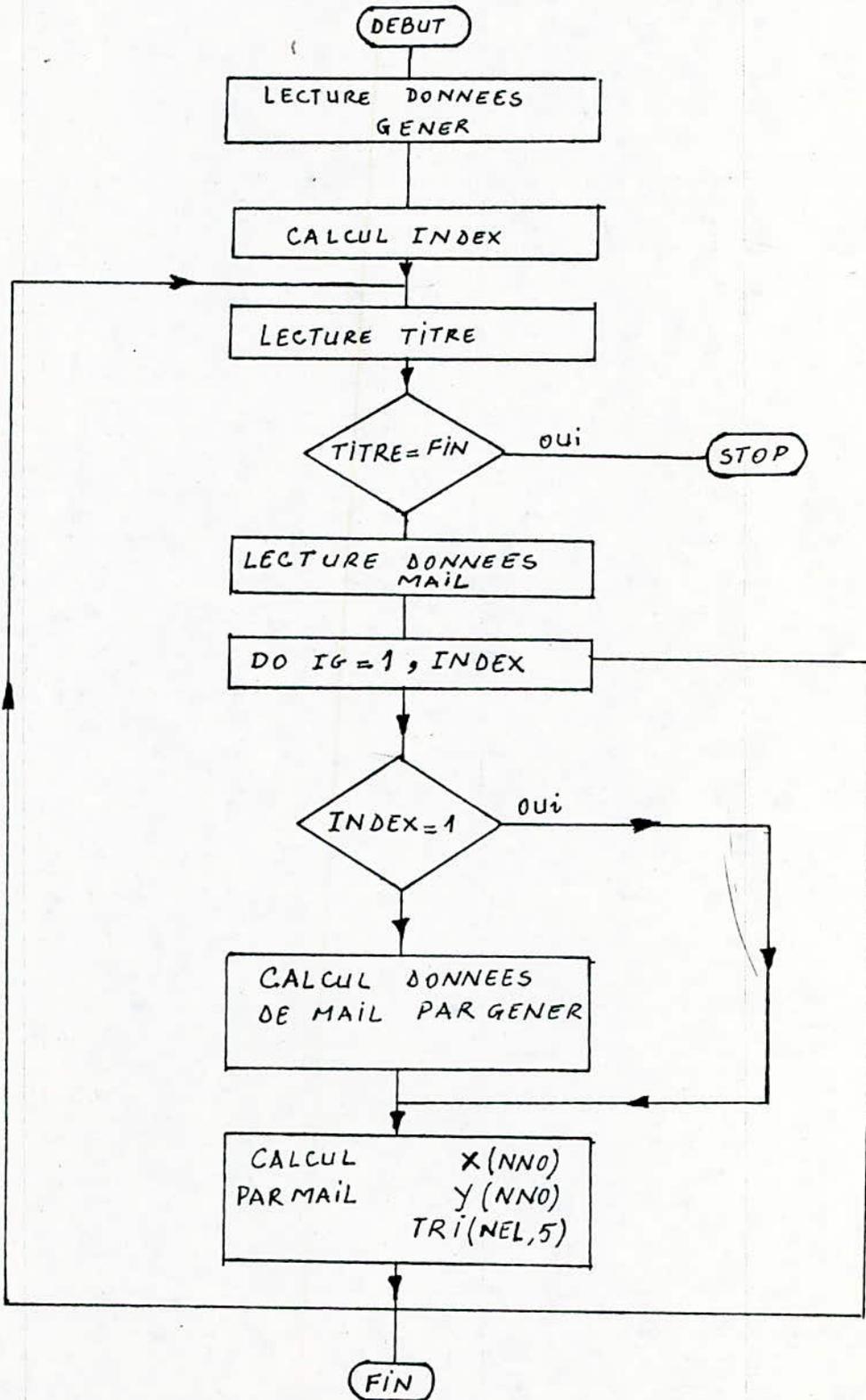
Pour le calcul informatique, nous avons utilisé le système MF.30 qui est constitué par deux parties essentielles

- MF.30 MAILLE : Ce programme permet de construire les données du maillage
- MF.30 CHAMP : Il effectue la résolution du système $[SS] [AA] = 0$ à partir des données de MAILLE et des conditions électriques de fonctionnement.

3.1. FONCTIONNEMENT DES PROGRAMMES

3.1.1. LE PROGRAMME EF 30 MAILLE

Il calcule les tableaux tri, X, Y. Le tableaux TRI décrit la composition de tous les elements du maillage, il donne les quatre noeuds de l'élément et le numéro du matériau qui le compose. Tandis que X et Y fournissent les coordonnées des noeuds de la maille.



Le fonctionnement de ce programme est résumé par diagramme B :

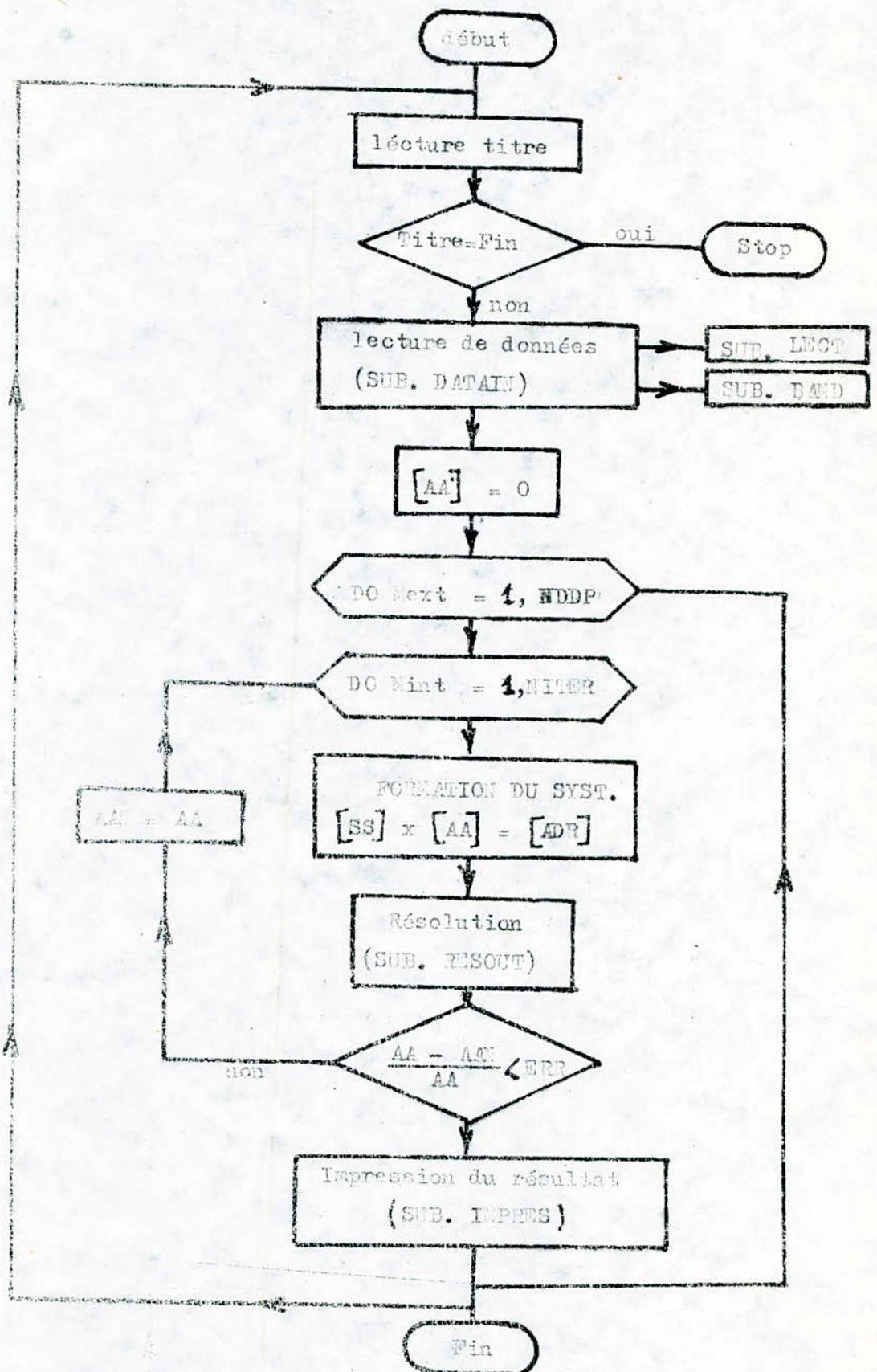


Diagramme B

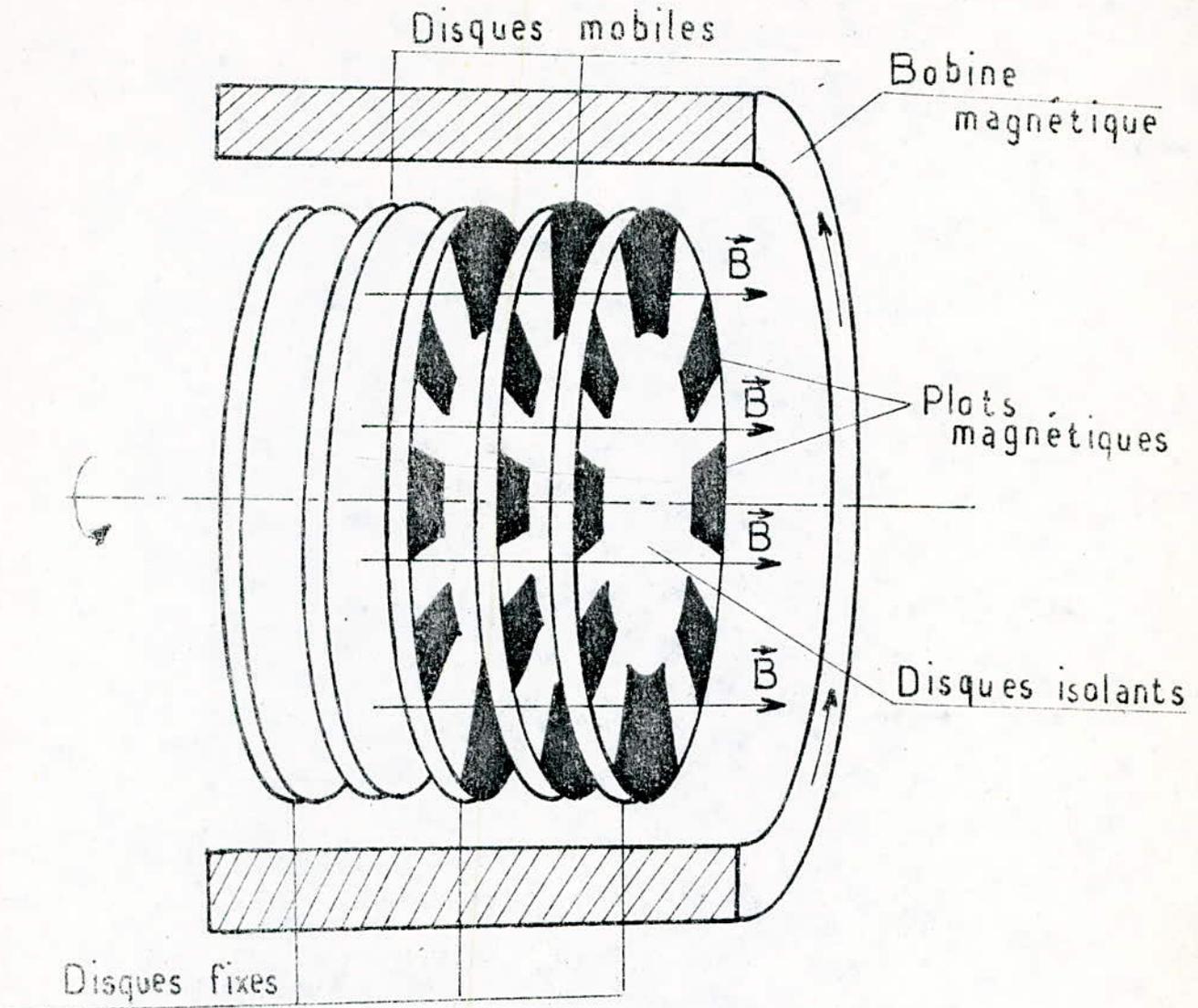


Fig 1

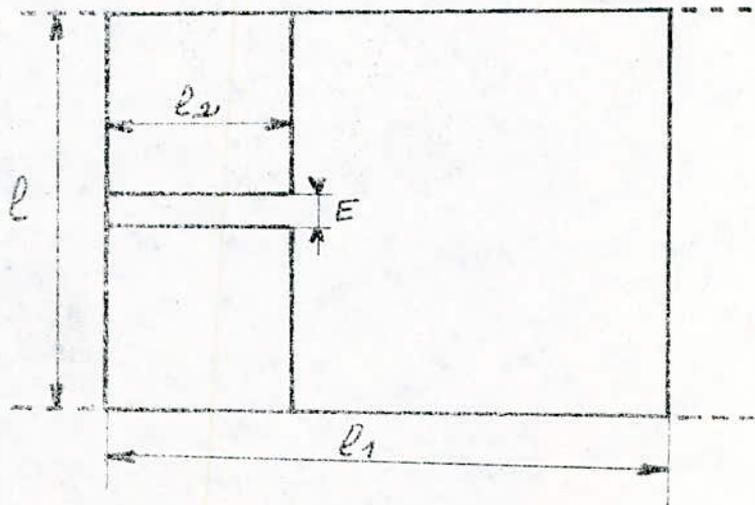


Fig 1.3

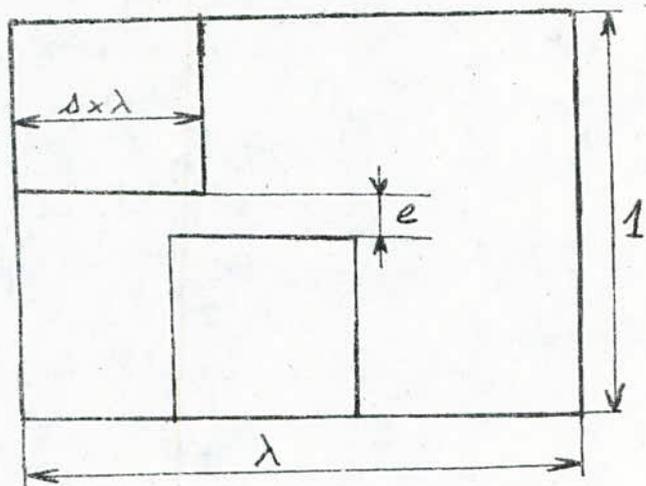


Fig 1-4

CHAPITRE 3

MODELISATION DE LA MACHINE A ROTOR
MASSIF LISSE

Nous aborderons dans ce chapitre la résolution de l'équation de répartition de \vec{A} dans un domaine où il y a une densité de courant \vec{J} . En plus des équations de MAXWELL, plusieurs autres équations seront utiles pour le calcul et qui seront présentées au paragraphe (3).

3.1 - CHOIX DU DOMAINE D'APPLICATION

3.1.1 - Présentation de la machine asynchrone à rotor massif

La théorie de la machine asynchrone à rotor massif lisse est assez complexe, les raisons sont à la fois électriques et magnétiques. Les courants induits dans le rotor ne restent pas rectilignes sous les pôles mais tendent à se fermer avant d'avoir atteint les extrémités de la machine, ce qui augmente la résistivité du matériau.

Quand au flux du stator, il se réfracte sur les nappes rotoriques sans pénétrer profondément dans le fer (Fig. 1.1.)

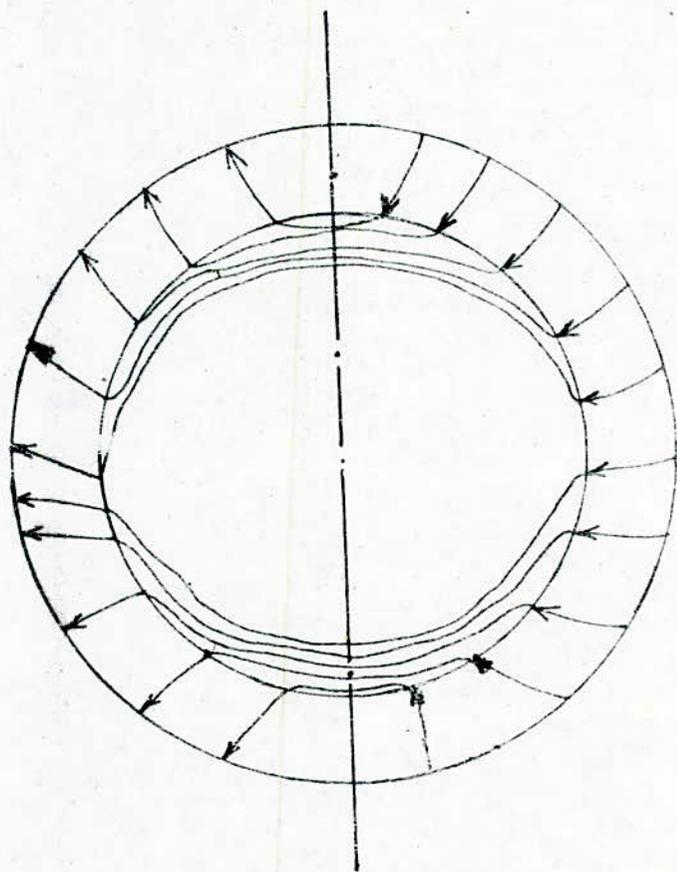


fig 1.1

3.1.2 - Hypothèses simplificatrices

L'analyse du comportement de la machine à rotor massif lisse conduit à la résolution des équations de MAXWELL dans un domaine tridimensionnel, ceci nous amène à adopter des hypothèses simplificatrices qui sont les suivantes:

a) On considère la machine avec un axe infinie : pas d'effet de bout, ce qui ramène le problème à traiter en bidimensionnel.

b) La perméabilité du stator est infinie : on ramène donc le champ statorique à un champ tangentiel créé par une densité de courant \vec{J}_s équivalente à la répartition volumique \vec{J} dans le stator.

c) on suppose que le flux engendré par l'enroulement statorique est sinusoïdal, c'est à dire qu'on se limite au premier harmonique d'espace de la densité superficielle du courant \vec{J} à la surface du stator.

d) La résistivité du stator suivant l'axe de la machine est infinie par suite de son feuilletage.

e) Le rayon du stator est très grand devant l'épaisseur de l'entrefer et les répartitions de champ étant périodique, cela permet de ramener l'étude de la machine dans un domaine de coordonnées cartésiennes l'assimilant à une répartition linéaire infinie de pas polaire.

Généralement le modèle théorique choisi pour l'étude de cette machine est représenté sur la fig. (1.2)

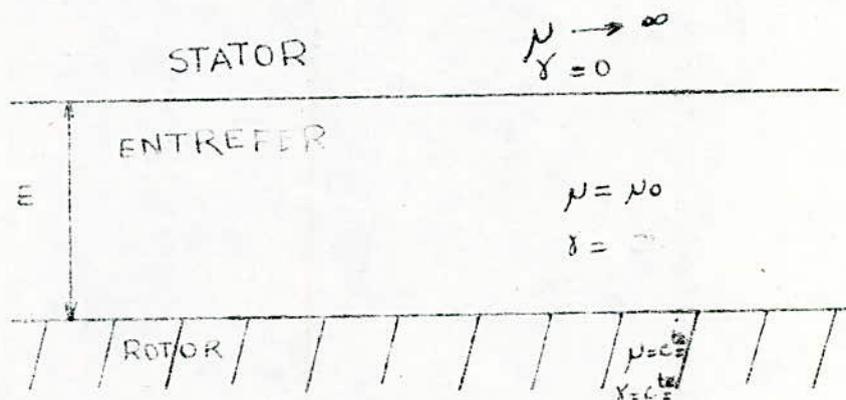


Fig 1.2

3.1.3 - DOMAINE A ETUDIER

Pour appliquer la méthode des éléments finis au problème posé, nous choisissons le domaine représenté à la figure (1.3.)

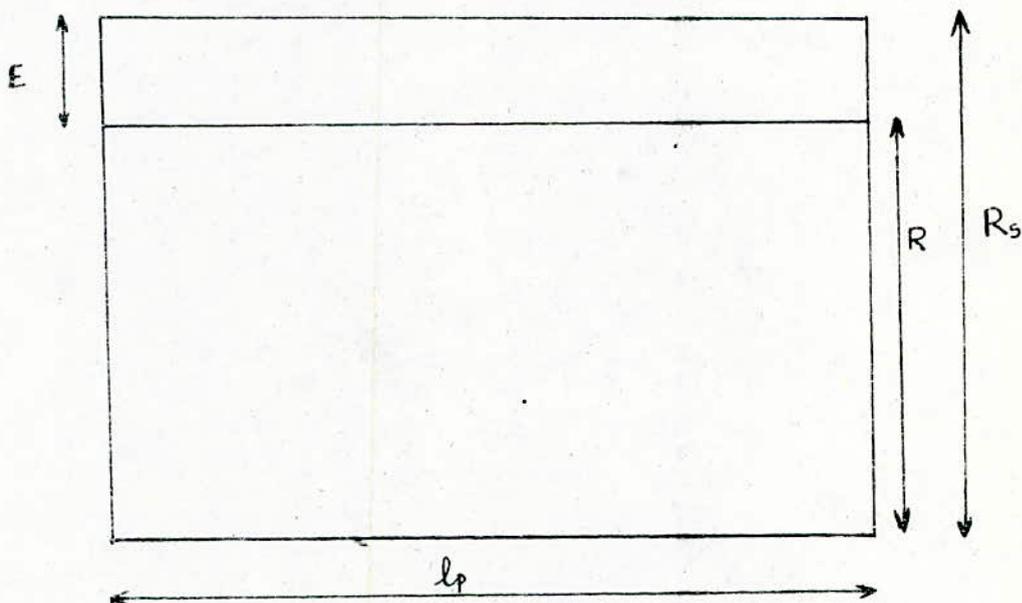


Fig 1.3

et où :

- R_s : représente le rayon du stator
- R : représente le rayon du rotor
- E : représente l'entrefer
- l_p : représente le pas polaire

La machine que nous étudions est bipolaire, ce qui nous amène à réduire le domaine d'étude à un seul pas polaire, du fait de la symétrie du problème.

La partie stator est réduite à la surface de séparation stator-entrefer, en raison de sa perméabilité qui est infinie.

3.2 - DEFINITION DES PARAMETRES DIMENSIONNELS ET ELECTRIQUES POUR LE PROGRAMME

Pour une généralisation de l'étude, au niveau des machines de différents volumes, on définit des paramètres sans dimension qui seront introduits dans le programme, et qui permettent de

revenir simplement aux dimensions réelles de la machine.

3.2.1 - MODELE CHOISI POUR LE PROGRAMME

Toutes les dimensions de la machine seront ramenées à une machine ayant un rayon statorique $R_s = 1$. Ceci nous fera comparer des machines différentes par unité de longueur axiale de la machine.

Soit la maille élémentaire aux paramètres réduits fig. (2.1)

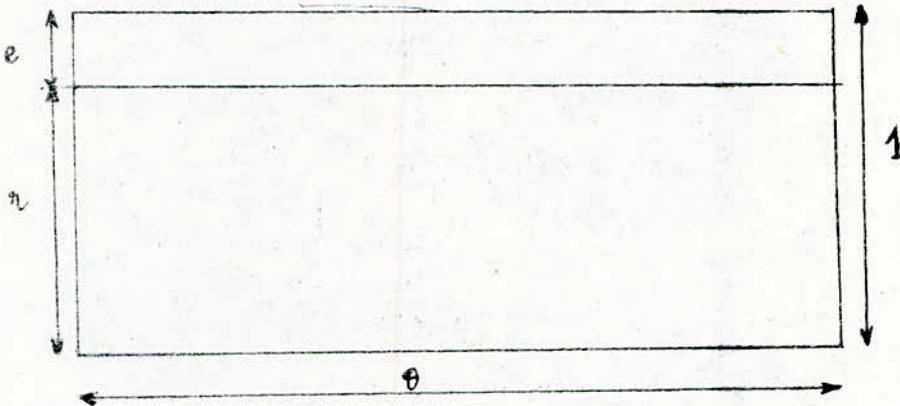


Fig 2.1

Où

- θ : Représente le pas polaire = $\frac{l_p}{R_s}$
 r : Représente le rayon rotor = $\frac{R}{R_s}$
 e : Entrefer relatif = $\frac{E}{R_s}$

2.2 - GRANDEURS ELECTRIQUES

Les grandeurs électromagnétiques seront introduites dans le programme par l'intermédiaire d'unités réduites.

a) Champ magnétique

La valeur du champ de saturation H_c diffère avec le matériau utilisé. On définit un vecteur sans dimension :

$$\vec{h} = \frac{\vec{H}}{H_c}$$

Le passage du régime linéaire au régime saturé se traduit par le test :

- $h \leq 1$ régime linéaire
 $h > 1$ régime saturé.

b) Perméabilité magnétique

On utilise la perméabilité relative comme grandeur

réduite :

$$\mu_n = \frac{\mu}{\mu_0}$$

où :

μ : Perméabilité absolue fonction de \vec{H}
 μ_0 : Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$

L'introduction de la perméabilité du matériau magnétique pour la recherche des distributions de potentiel dans les machines peut être faite par méthode graphique.⁽¹⁾

Les courbes $\mu(\vec{H})$ pour différents matériaux, fournies par le constructeur seront tabulées et introduites dans le programme.

Pour le calcul, on considère la courbe $\mu(\vec{H})$, on découpe l'axe des H en intervalles réguliers ΔH . Les droites d'abscisses H_{j+1} et H_j coupent la courbe en P_{j+1} et P_j . Entre ces deux points, la courbe est approximée par la corde $P_{j+1} P_j$. Tous les H_j et B_j correspondants sont lus et les pentes calculées par :

$$m_j = \frac{B_{j+1} - B_j}{\Delta H}$$

Pour une excitation magnétique H, la perméabilité correspondante sera calculée par l'algorithme suivant :

1) Trouver l'intervalle où H est situé, soit à calculer l'indice :

$$J = H/\Delta H + 1$$

2) En utilisant les tableaux H_j , B_j , m_j , la valeur de B correspondante est donnée par :

$$B = (H - H_j) m_j + B_j$$

3) La perméabilité au P sera :

$$\mu = \frac{B}{H}$$

c) Potentiel et flux

Le courant d'excitation pour la machine ainsi que le flux correspondant sont donnés par les formules :

$$I = \int_0^{R_s} H_y \cdot dy$$

$$\Phi = \int_0^{lp} B_y dx$$

$$\text{avec } B_y = \mu_0 \mu_r H_y$$

on définit un vecteur champ sans dimension :

$$\vec{h} = \frac{\vec{H}}{H_c}$$

où :

$$\vec{h}_y = \frac{\vec{H}_x}{H_c}$$

$$h_y = h_y \cdot H_c$$

soit pour la maille élémentaire où :

$$R_s = 1$$

et

x et y sont définies par :

$$x = X \cdot R_s$$

$$y = Y \cdot R_s$$

soit pour I et Φ en introduisant \vec{h} :

$$I = \int_0^1 H_c \cdot h_y \cdot R_s dY$$

$$\Phi = \int_0^{\theta} \mu_0 \mu_r H_c h_y \cdot R_s dX$$

Les grandeurs réduites calculées par le programme sont définies par :

$$v = \int_0^1 h_y \cdot dY$$

$$\mathcal{F} = \int_0^{\theta} \mu_r h_y dX$$

Les grandeurs ~~magnétiques~~ réelles s'en déduisent comme suit :

$$I = H_c R_s \cdot v \quad (A) \quad (2.1.)$$

$$\Phi = \mu_0 H_c R_s \cdot \mathcal{F} \quad (Wb/m^2) \quad (2.2.)$$

L'énergie magnétique récupérée par cycle est comme nous l'avons déjà noté :

$$W_m = \int_{\text{CYCLE}} I d\Phi$$

Soit d'après (2.1) et (2.2)

$$W_m = \mu_0 H c^2 R_s^2 \int_{1,0}^{\nu} d\mathcal{F}'$$

Le résultat fourni par le programme concerne un pas polaire. Si

p = nombre de paires de pôles $W_t = W_m \times p$

3.3. APPLICATION DE LA METHODE VARIATIONNELLE

Pour l'utilisation de la méthode variationnelle, on utilise les équations de MAXWELL, tout en supposant que le champ magnétique est quasi stationnaire :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

qui seront complétées par les équations suivantes :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (4)$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (5)$$

$$\vec{H} = \mu (|\vec{B}|) \vec{B} \quad (6)$$

3.3.I - Equation à résoudre

Les équations (5) et (6) substituées à l'équation (1) nous donnent :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

avec : $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V$

avec : $-\text{grad } V = 0$

d'où : $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7)$

c'est l'équation de diffusion qui sera utilisée pour la résolution du potentiel vecteur \vec{A} et où :

\vec{J} : représente la densité volumique du courant induit dans le rotor.

γ : conductivité du matériau composant le rotor.

3.3.2 - Choix de la fonctionnelle

Comme nous l'avons vu, la recherche d'une solution stable \vec{A} , à une fonction de \vec{A} et de ses dérivées vérifiée dans le domaine D, revient à rendre extrémale une fonctionnelle de \vec{A} et de ses dérivées.

La fonctionnelle choisie pour le calcul de la répartition du potentiel vecteur \vec{A} dans la maille élémentaire est :

$$F = \int_{\Omega} \left[\int_0^B \nu \vec{B} \cdot d\vec{B} + \frac{\gamma}{2} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] d\Omega \quad (8)$$

$$- \int_0^B \nu \vec{B} \cdot d\vec{B}$$

: représente l'énergie électromagnétique emmagasinée par le champ magnétique.

$$- \frac{\gamma}{2} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

: représente l'énergie accumulée par les courants induits du rotor.

Nous pouvons mettre la fonctionnelle définie plus haut sous la forme suivante:

$$F = \int_{\Omega} \left[\int_0^B \nu \vec{B} \cdot d\vec{B} + \frac{\gamma}{2} \vec{A} \cdot \frac{\vec{A} - \vec{A}_0}{\Delta t} \right] d\Omega$$

où

Δt : représente l'intervalle de temps

A_0 : valeur du potentiel vecteur au moment précédent t.

a - La minimisation de F conduit à la résolution de l'équation d'EULER, soit dans le cas bidimensionnel :

$$\frac{\partial F}{\partial A} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial A'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial A'_y} \right) = 0 \quad (9)$$

Explicitons ces termes :

$$\frac{\partial F}{\partial A_x} = - \frac{\partial F}{\partial B_y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_y} = \frac{\partial F}{\partial B_x}$$

L'intégrand F est :

$$F = \int_0^B \nu \vec{B} \cdot d\vec{B} + \frac{\gamma}{2} \vec{A} \cdot \frac{(\vec{A} - \vec{A}_0)}{\Delta t}$$

$$\text{où : } F = \int_0^B \sqrt{B} \cdot d\vec{B} - \frac{\vec{J} \cdot \vec{A}}{2}$$

De la relation $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ on tire :

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} \Rightarrow A = B_x \cdot y$$

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} \Rightarrow A = -B_y \cdot x$$

d'où :

$$\frac{\partial F}{\partial B_x} = H_x(B_x, B_y) - \frac{J}{2} \cdot y$$

$$\frac{\partial F}{\partial B_y} = H_y(B_x, B_y) + \frac{J}{2} \cdot x$$

En remplaçant ces termes dans l'équation (9) :

$$\frac{\partial}{\partial A} \left[\int_0^B \sqrt{B} \cdot d\vec{B} - \frac{\vec{J} \cdot \vec{A}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(H_y(B_x, B_y) - \frac{J}{2} \cdot x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(H_x(B_x, B_y) + \frac{J}{2} \cdot y \right) = 0$$

La minimisation de la fonctionnelle choisie conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} H_y(B_x, B_y) - \frac{J}{2} - \frac{\partial}{\partial y} H_x(B_x, B_y) - \frac{J}{2} = 0$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x} H_y(B_x, B_y) - \frac{\partial}{\partial y} H_x(B_x, B_y) = J$$

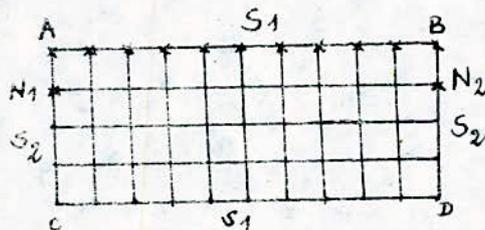
soit,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}$$

La minimisation de la fonctionnelle est bien équivalente à l'équation de MAXWELL, dans un domaine où il y a une densité volumique de courant.

3.3.3 - Condition aux limites vérifiées sur la surface entourant le domaine.

Comme nous l'avons vu au chapitre (I)



Sur la partie S nous imposons la condition de DIRICHLET $\delta \vec{A} = 0$, soit un potentiel \vec{A} connu ; que nous calculons au paragraphe suivant.

sur tous les noeuds AB, et pour la partie CD, $A = 0$ en tous les noeuds

* Sur la partie S_2 : les conditions périodiques nous imposent des potentiels vecteur égaux sur les noeuds situés en vis à vis, soit :

$$\vec{A}_{N1} = \vec{A}_{N2}$$

C) Calcul du potentiel vecteur à la surface séparation stator-entrefer

Pour le calcul du potentiel vecteur, on utilise les conditions aux limites.

La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique à la surface de séparation stator-entrefer s'écrit :

$$\vec{H}_{Te} - \vec{H}_{Ts} = \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{se}$$

du fait que la perméabilité du stator est supposée infinie, on a : $\vec{H}_{Ts} = 0$

de la relation $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ on tire :

$$\vec{B}_e = \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial z} \\ -\frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \end{cases}$$

avec : $\vec{B}_e = \mu_0 \text{rot} \vec{A}$

ainsi :
$$\left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) = \mu_0 (H_{Te})_{z=R_s}$$

sachant que la densité superficielle de courant équivalente à la surface du stator a pour forme :

$$J_s = J_m \cos \left(\omega t - \frac{x}{k} \right)$$

où

J_m : valeur maximum de la densité superficielle du courant à la surface du stator

$k = \frac{\text{rayon du rotor}}{\text{nombre de paire de pôle}}$

donc :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) = \mu_0 J_m \cos \left(\omega t - \frac{x}{k} \right)$$

d'où

$$\vec{A} = \mu_0 \int J_m \cos \left(\omega t - \frac{x}{k} \right) dy$$

enfin:

$$A = \mu_0 R_s J_m \cos\left(\omega t - \frac{z}{k}\right)$$

c'est la valeur du potentiel vecteur pour $y=R_s$, c'est à dire la valeur de A à la surface de séparation stator-entrefer.

3.4. RESOLUTION DU SYSTEME

La résolution numérique adoptée concerne les problèmes bidimensionnels; Elle est basée sur les principes de la méthode variationnelle que nous avons déjà vu.

Les inconnues étant les potentiels aux noeuds; C'est par rapport à ces derniers que la minimisation de la fonctionnelle est faite.

3.4.1. MINIMISATION DE LA FONCTIONNELLE DANS UN ELEMENT

On minimise la fonctionnelle par rapport aux potentiels vecteurs aux k noeuds c'est à dire:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A_k} \Big|_{k=1,2,3} = 0$$

d'où:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A_k} \Big|_{k=1,2,3} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial A_k} \left(\int_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{B} \right) + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial A_k} \left(\frac{\vec{A} \cdot (\vec{A} - \vec{A}^0)}{2} \right) \right\} d\Omega = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A_k} \Big|_{k=1,2,3} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial A_k} \left(\int_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{B} \right) \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial A_k} \left(\frac{\vec{A} \cdot (\vec{A} - \vec{A}^0)}{2} \right) d\Omega = 0$$

soit le premier terme:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial A_k} \left(\int_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{B} \right) \right) d\Omega$$

cette expression a été calculée au chapitre 2 et qui a donné:

$$\iint_{\Omega} \left(\nabla \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial A_k} \right) dx dy = \partial [S][A]$$

où:

$$[S][A] = \frac{1}{2D} \begin{bmatrix} q_1^2 + r_1^2 & q_1 q_2 + r_1 r_2 & q_1 q_3 + r_1 r_3 \\ & q_2^2 + r_2^2 & q_2 q_3 + r_2 r_3 \\ & & q_3^2 + r_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

soit le deuxième terme:

$$\int_{\Omega} \frac{\gamma}{\Delta t} \left\{ \frac{\partial}{\partial A_K} \left(\frac{\vec{A} \cdot (\vec{A} - \vec{A}^0)}{2} \right) \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\gamma}{\Delta t} \left(\frac{\vec{A} \cdot \partial \vec{A}}{2 \partial A_K} - \frac{\vec{A}^0 \cdot \partial \vec{A}}{2 \partial A_K} + \frac{\vec{A} \cdot \partial \vec{A}}{2 \partial A_K} \right) d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\gamma}{\Delta t} \left(\frac{\vec{A} \cdot \partial \vec{A} - \vec{A}^0 \cdot \partial \vec{A}}{2 \partial A_K} \right) d\Omega$$

NOUS pouvons écrire cette expression sous la forme matricielle suivante:

$$\frac{\gamma}{\Delta t} [T][A] - \frac{\gamma}{2\Delta t} [T][A^0]$$

où:

$$[T][A] = \int_{\Omega} \frac{\vec{A} \cdot \partial \vec{A}}{\partial A_K} d\Omega$$

$$[T][A^0] = \int_{\Omega} \frac{\vec{A}^0 \cdot \partial \vec{A}}{\partial A_K} d\Omega$$

avec:

$$[T] = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{où } \Delta \text{ est l'aire du triangle}$$

Le système à résoudre est alors:

$$\partial [S][A] + \frac{\gamma}{\Delta t} [T][A] - \frac{\gamma}{\Delta t} [T][A^0] \quad (4.1)$$

la résolution de (4.1) passe par une méthode itérative dont nous énonçons le principe au paragraphe suivant.

3.4.2. ALGORITHME DE RESOLUTION

L'algorithme de résolution est basé sur une méthode numérique qui doit s'adapter à la méthode des éléments finis. Pour cela nous avons choisi la procédure de CRANK-NICOLSON QUI EST donnée par:

$$[A]^{n+1} = [A]^n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{[A]}^{n+1} + \dot{[A]}^n)$$

où:

$\dot{[A]}^{n+1}$ est la dérivée de $[A]$ à la $(n+1)$ ième itération

$\dot{[A]}^n$ est la dérivée de $[A]$ à la (n) ième itération

Les dérivées $\dot{[A]}^{n+1}$ et $\dot{[A]}^n$ sont données par:

$$\dot{[A]}^{n+1} = \frac{([A]^{n+1} - [A]^n)}{\Delta t}$$

$$\dot{[A]}^n = \frac{([A]^n - [A]^{n-1})}{\Delta t}$$

La minimisation de la fonctionnelle \mathcal{F} peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A_k | k=1,2,3} = 0 &= \partial [S][A] + \frac{\gamma}{\Delta t} [T] ([A] - [A]^0) \\ &= \partial [S][A] + \gamma [T] \dot{[A]} \end{aligned} \quad (4.2)$$

En appliquant la méthode de CRANK-NICOLSON, l'équation (4.2) devient:

$$\partial [S][A]^{n+1} + \gamma [T] \dot{[A]}^{n+1} + \partial [S][A]^n + \gamma [T] \dot{[A]}^n = 0$$

$$\partial [S]([A]^{n+1} + [A]^n) + \gamma [T] (\dot{[A]}^{n+1} + \dot{[A]}^n) = 0$$

enfin:

$$[A]^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2} \dot{[S]} + \dot{[T]} \right) = [A]^n \left(\dot{[T]} - \frac{\Delta t}{2} \dot{[S]} \right) \quad (4.3)$$

L'algorithme de résolution se déroule comme suit:

- 1°) on prend une valeur initiale $[A]^0$ en chaque noeud
- 2°) avec $[A]^0$ on calcule $B^0, \dot{v}^0, [S]^0$
- 3°) On résout le système (4.3) d'où $[A]^1$
- 4°) avec les nouveaux potentiels $[A]$ aux noeuds on revient à "2°)" jusqu'à ce que la méthode converge.

(C)ONC(LUS)ION

Notre travail nous a permis de confirmer l'interêt de l'application de la méthode variationnelle à un domaine décrit par éléments finis, que ce soit pour la résolution des systèmes linéaires ou non linéaires.

L'adaptation du programme mis en place pour le calcul de la répartition du potentiel vecteur, peut être exploité même pour des domaines présentant des courants.

Enfin, notre étude nous a permis d'approcher un modèle théorique où nous avons pu lui appliquer la méthode des éléments finis et qui peut être introduit dans le programme mis en place.

Néanmoins, une étude plus approfondie en tridimensionnel et qui tiendra compte des effets d'extrémités, permettra d'approcher d'une manière concrète la répartition du potentiel vecteur, ainsi que d'autres grandeurs.

Nous souhaitons une continuité de ce travail vue l'importance de la méthode appliquée.

ANNEXE

```

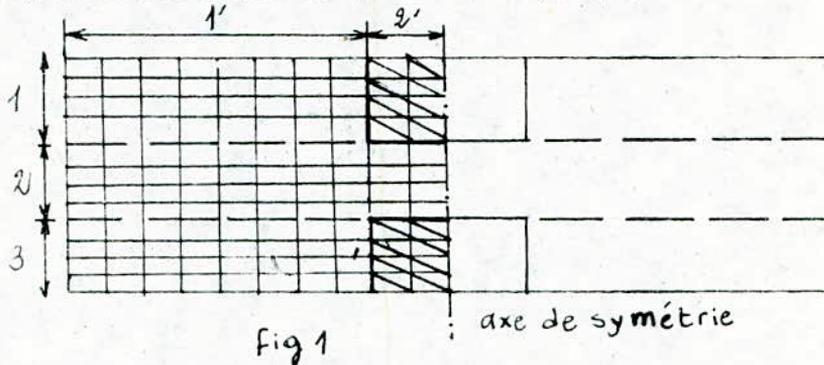
DIMENSION H(14),B(14),P(14)
OPEN(5,FILE='D0',STATUS='OLD')
OPEN(6,FILE='RES',STATUS='NEW')
READ(5,10)(HH)
READ(5,11)(H(I),I=1,14)
READ(5,12)(B(I),I=1,14)
FORMAT(F5.2)
FORMAT(14(F5.2))
FORMAT(14(F5.2))
DO 20 I=1,14
P(I)=B(I)/H(I)
CONTINUE
WRITE(6,30)((H(I),I=1,14),(B(I),I=1,14),(P(I),I=1,14))
FORMAT(80('-',),/,H: ',14(F5.2),/,80('-',),/,B: ',14(F5.2),/,80('-',),/,
1 /P: ',14(F5.2),/,80('-',))
DH=H(2)-H(1)
I=HH/DH+1
PENT=(B(I+1)-B(I))/DH
BB=(HH-H(I))*PENT+B(I)
PER=BB/HH
WRITE(6,40)(HH,PER)
FORMAT(10X,'POUR HH='F5.2,' LA VALEUR DE LA PERMEABILITE EST:'F6.4)
STOP
40
-----
H: 1.00 2.00 3.00 4.00 5.00 6.00 7.00 8.00 9.0010.0011.0012.0013.0014.00
-----
B: 0.80 1.16 1.32 1.44 1.52 1.58 1.62 1.66 1.70 1.72 1.74 1.76 1.78 1.80
-----
P: 0.80 0.58 0.44 0.36 0.30 0.26 0.23 0.21 0.19 0.17 0.16 0.15 0.14 0.13
-----
POUR HH= 6.50 LA VALEUR DE LA PERMEABILITE EST:0.2462
END

```

Mise en place du programme.

Nous donnons ici, l'exemple de l'exploitation d'un seul domaine pour la M.R.V. polydiscoïde.

La maille choisie est représentée sur la fig. (1)



La maille est découpée d'abord en bandes horizontales qui, dans le sens vertical, ne comporte qu'un seul matériau (1,2,3). Ensuite chaque bande est décomposée verticalement en sous parties, où chacune correspond à un matériau (1', 2')

Définition des paramètres pour EF 30 - MAILLE

- NDISQ : numéro disque fichier de sortie
- L₁ : longueur de la maille
- L₂ : longueur du plot
- IPOS : Position des plots (conjonction ou opposition)
- NPP : Nombre de parties principales
- NH : Nombre de divisions horizontales
- IREP : Nombre de noeuds périodiques
- NPS : Nombre de sous-parties
- NV : Nombre de divisions verticales
- NHS : Nombre de divisions horizontales par sous parties
- NMAT : Nombre de milieux
- X : } coordonnées des noeuds
- Y : }

Entrée des données EF 30 MAILLE

1ère carte.

NDISQ				
-------	--	--	--	--

2ème carte

L ₁	L ₂			
----------------	----------------	--	--	--

3ème carte

1	5	10	15	20	25
IPOS	ITITRE(I)				

IPOS = 1: plots conjonction
 IPOS = 2: plots opposition
 ITITRE (I) = 1,2,3 N
 N = Nombre de cas à traiter

4ème carte

1	5	10	15	20
NPP	NH	IREP		

5ème carte

NPS(I)	NV(I)		
--------	-------	--	--

6ème carte

NHS(I,J)	NMAT(I,J)	$X_i(I,J)$	$Y_i(I,J)$
----------	-----------	------------	------------

NMAT (I,J) = 1 : air

NMAT (I,J) = 2 : fer

avec :

I : variant de 1 à NPP

J : variant de 1 à NPS

7ème carte

IPOS	ITITRE(I)		
------	-----------	--	--

test de fin : I titre (I) = 2 (pour 1 seul cas à traiter)

Définition des paramètres de EF 30 CHAMP

NEL : Nbre d'éléments
 NNO : Nbre de noeuds
 IKIND : Potentiel scalaire = 0 Pot.vecteur = 1
 NITER : Nombre d'itérations
 NCOND : Conditions initiales
 NDDP : Nombre de lignes de potentiel imposé
 NPLUX : Nombre de ligne de flux
 NSEQ : Nombre de séquences d'éléments

NPOT : Nombre de séquence de potentiel
 NDEX : Fichier de sortie pour tracer les lignes de flux
 CMUP : Coefficient multiplicateur pour la D.D.P. d'entrée
 ERR : Test d'erreur
 NCON D1 (I) :
 NCON D2 (I) : conditions initiales
 DDP (I,N) : Nombre de DDP
 XMUI : Perméabilité μ_x
 Gx : Coefficient de la courbe non linéaire
 YMUI : Perméabilité
 Gy : Coefficient de courbe non linéaire
 KTRI (I,N) : Tableau de numérotation des éléments + matériaux.

Entrée des données EF 30 CHAMP

1ère Carte

1	5	10	15	20	25	30	35	40	45
NEL	NNO	NDISQ	IREP	IKIND	NITER	NMAT	NCOND	NDDP	
NFLUX	NSEQ	NPOT	NDES	CMUP	ER	R			

2ème Carte

NCOND1	NCOND2	DDP(I,N)							
--------	--------	----------	--	--	--	--	--	--	--

avec : $N=1, NDDP$

3ème Carte : pour chaque milieu

	10	20	30	40
XMUI(I)	Gx	YMUI(I)	Gy	

- BIBLIOGRAPHIE -

- 1- S. DJEMA
Etude numérique des efforts électromagnétiques dans les M.R.V. poly discoïdes. Thèse de docteur-ingénieur - Paris, 1982.
- 2- ASSUMPCAO BASTOS
Calculs des performances intrinseques des machines à reluctance variable polydiscoides par une méthode d'éléments finis. Thèse de docteur-ingénieur, Paris, 1980.
- 3- ZIENKIZWICZ
La méthode des éléments finis.
- 4- P. RAFINEJAD, J.L. coulomb et J.C. SABONNADIÈRE
rev. gen. Electricité (sept 1975) t. 84 N° 9. Elaboration de modèles informatiques interactifs dans les calculs des machines à induction.
- 5- S.C. TADON, A. ARNOR, M.U.K. GHARI
Nonlinéar transient finite element field computation for electrical machines and devices. proc. I.F.E.E. vol. pas 102 N° 5, May 1983.
- 7- Etude de la machine asynchrone à rotor massif lisse
projet de fin d'études ingénieur E.N.P. Juin 1983.