

3/96

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT METALLURGIE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة —  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

**Simulation mathématique de  
l'état de contrainte d'un matériau  
en flexion trois (03) points  
monotone**

Proposé par :

Mr M. LARIBI

Etudié par :

Mr Z.A. SAIBI

Dirigé par :

Mr M. LARIBI

PROMOTION

JUIN 1996

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT METALLURGIE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

Simulation mathématique d'un  
matériau sous contrainte en  
flexion trois (03) points  
monotone

Proposé par :

Mr M. LARIBI

Etudié par :

Mr Z.A. SAIBI

Dirigé par :

Mr M. LARIBI

PROMOTION

JUIN 1996

## *Dédicaces*

*A* mes très chers parents;  
mes adorables soeurs;  
mon frère en espérant qu'il fera beaucoup mieux;  
ma grand-mère;  
mes tantes et oncles;

*A* celle et ceux qui me sont chers, mes Amis(e)

*A* la mémoire des miens que je n'ais pas connu

*Je dédie ce modeste travail.*

**Ziriad A. Malek SAIBI**

## *Remerciements*

*Je remercie mon promoteur Mr. M. LARIBI et tiens à lui exprimer ma sincère reconnaissance pour ses diligents conseils.*

*Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à Mr. A. BALI qui a veillé tout au long de ma graduation au bon déroulement de mes études au sein de l'E.N.P, pour ses conseils et sa disponibilité, qu'il trouve ici l'expression de ma plus profonde reconnaissance.*

*Je remercie grandement Mme. K. DJOUADI pour son aide précieuse tout au long de mes études.*

*Je remercie aussi tout les enseignants du département du département Métallurgie qui ont contribué à ma formation.*

*En fin, qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance aux membres de mon jury pour avoir accepté de juger mon modeste travail.*

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE .....	1
-----------------------------	---

## **Chapitre I - ESSAIS MECANQUES ET RELATIONS FONDAMENTALES**

INTRODUCTION .....	6
I.1 - CONTRAINTES ET DEFORMATIONS .....	6
I.2 - CARACTERISATION DES PROPRIETES MECANQUES .....	6
I.2.1 - Essai de traction [1,2] .....	7
I.2.2 - Essai de compression : .....	9
I.2.3 - Essai de dureté : [1] .....	9
I.2.4 - Autres essais : .....	10
I.3 - L'ESSAI DE FLEXION : [1,18,19] .....	10
I.3.1 - Techniques expérimentales : [18] .....	10
I.4 - L'ELASTICITE : [1,3,13] .....	14
I.5 - ETUDE DE L'EFFORT TRANCHANT ET DU MOMENT FLECHISSANT : [3] .....	17
I.5.1 - Relation différentielle d'équilibre : [3,13,15] .....	19
I.5.2 - Contraintes dans les poutres en flexion : .....	19
I.6 - RELATION CONTRAINTE DEFORMATION .....	20
I.6.1 - Equilibre : .....	21
I.6.2 - Les contraintes : .....	22
I.7 - LA DEFORMATION DES POUTRES EN FLEXION : [3] .....	23
I.8 - INTRODUCTION A LA MECANIQUE DE LA RUPTURE : [1,2] .....	25

# **Chapitre II - PRINCIPES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات <b>BIBLIOTHEQUE — المكتبة</b> <b>Ecole Nationale Polytechnique</b>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>28</b>
<b>II.1 - HISTORIQUE .....</b>	<b>28</b>
<b>II.2 - CONCEPT DE BASE .....</b>	<b>30</b>
<b>II.2.1 - Connaissances fondamentales: [4] .....</b>	<b>30</b>
<b>II.2.2 - Concept d'élément fini [5, 7] .....</b>	<b>31</b>
<b>II.3 - FORMULATION MATRICIELLE : [4, 5, 6, 7] .....</b>	<b>31</b>
<b>II.4 - CLASSIFICATION DES TRAITEMENTS NUMERIQUES : [5] .....</b>	<b>34</b>
<b>II.5 - EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES SOLIDES : [3, 4, 5, 6] .....</b>	<b>35</b>
<b>II.5.1 - Relations et équations de champ : [1, 3, 5] .....</b>	<b>35</b>
<b>II.6 - METHODE MATRICIELLE : [5] .....</b>	<b>38</b>
<b>II.6.1 - Equations de base de la mécanique des structures : [3, 5] .....</b>	<b>38</b>
<b>II.6.2 - Théorème de l'énergie : [5, 6] .....</b>	<b>39</b>
<b>II.7 - PROPRIETES DES STRUCTURES DISCRETES : [5, 6, 7] .....</b>	<b>40</b>
<b>II.7.1 - Matrice de rigidité : .....</b>	<b>41</b>
<b>II.7.2 - Méthode des forces : .....</b>	<b>42</b>
<b>II.7.3 - Méthode des déplacements : [4, 5, 6, 7] .....</b>	<b>42</b>
<b>II.8 - FONDEMENT DE LA M.E.F : [5, 6] .....</b>	<b>45</b>
<b>II.8.1 - Méthodes d'approximation universelle : .....</b>	<b>46</b>
<b>II.8.2 - Conditions de convergence : .....</b>	<b>48</b>
<b>II.9 - L'ELEMENT FINI : [4, 5, 6] .....</b>	<b>49</b>
<b>II.9.1 - Le modèle déplacement : .....</b>	<b>49</b>
<b>II.9.2 - Propriétés des éléments de type déplacement : .....</b>	<b>50</b>
<b>II.9.3 - Matrice d'interpolation : .....</b>	<b>51</b>
<b>II.9.4 - Série polynomiales : .....</b>	<b>51</b>
<b>II.9.5 - Élément isoparamétrique : .....</b>	<b>55</b>
<b>II.9.5.1 - Propriétés : .....</b>	<b>55</b>
<b>II.10 - TECHNIQUE DE CALCUL AU NIVEAU GLOBAL : [5, 6, 7] .....</b>	<b>59</b>
<b>II.11 - METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRE : [16] .....</b>	<b>62</b>

# **Chapitre III - SIMULATION MATHÉMATIQUE ET RESULTATS**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>64</b>
<b>III.1 - FORMULATION DU PROBLEME : .....</b>	<b>64</b>
<b>III.2 - PROGRAMME ELEMENTS FINIS : .....</b>	<b>66</b>
<b>III.2.1 - Le maillage : .....</b>	<b>66</b>
<b>III.3 - MISE EN OEUVRE PRATIQUE DE LA M.E.F : .....</b>	<b>69</b>
<b>III.3.1 - Construction effective de la matrice rigidité : .....</b>	<b>71</b>
<b>III.3.1.1 - Calcul des déformations : .....</b>	<b>72</b>
<b>III.3.1.2 - Calcul des contraintes : .....</b>	<b>72</b>
<b>III.3.1.3 - Calcul de la matrice de rigidité élémentaire : .....</b>	<b>73</b>
<b>III.3.2 - Simulation : .....</b>	<b>75</b>
<b>III.4 - MISE EN OEUVRE DE LA SIMULATION, RESULTATS : .....</b>	<b>76</b>
<b>III.5 - INTERPRETATION : .....</b>	<b>85</b>
<b>III.6 - SYNTHESE : .....</b>	<b>90</b>
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>91</b>

## Introduction :

La mise en place de machines, équipements ou infrastructures est généralement précédée par des conceptions faisant l'objet d'essais et de testes afin de s'assurer de leurs efficacité aussi, leurs fiabilité est tributaire du choix des matériaux et de leur tenue en service.

L'étude du comportement des matériaux au laboratoire est déterminante car elle permet de renseigner sur leur état physico-chimique et mécanique (fatigue, usure, corrosion...) et de prévoir les efforts et modifications nécessaires.

Très souvent, les montages expérimentaux sont coûteux et laborieux. Parallèlement les méthodes numériques se développent au même rythme que le matériel informatique et permettent de résoudre beaucoup de problèmes et de comprendre beaucoup de phénomènes complexes.

A cet effet, la simulation mathématique est devenue un outil de recherche incontournable en égard à son prix, à sa reproductibilité, au peu de moyens qu'elle mobilise et à sa vitesse de travail.

Dans cette optique, notre travail consiste à simuler par un modèle numérique le comportement d'un matériau donné lorsque celui-ci est soumis à un essai de flexion trois points monotone. Il s'agit de déterminer l'état de contrainte et de déformation d'une éprouvette normalisée durant le déroulement de l'essai la réponse intérieure du matériau à cette sollicitation extérieure est mise en évidence par l'application de la méthode des éléments finis. La mise en place de cette méthode demande la succession des étapes de formulation mathématique qui consiste principalement en :

- Définition du problème et établissement de l'équation mathématique globale régissant le phénomène étudié,
- Discrétisation du domaine considéré,
- Définition des conditions initiales et aux limites,
- Discrétisation de l'équation différentielle d'équilibre dans le domaine considéré,
- Résolution du système d'équations par une méthode numérique appropriée.

Pour cela, nous avons prévu trois chapitres dont le premier est réservé aux méthodes mécaniques de caractérisation des matériaux qui nous permettent de déboucher sur l'essai de flexion trois points. Nous définissons les équations qui le régissent et les relations entre les déformations et les contraintes appliquées.



Le deuxième chapitre est réservé à la méthode des éléments finis, son rôle, son principe, son application dans des cas similaires, sa formulation et ses étapes de fonctionnement.

Le troisième chapitre traite de l'application de la méthode des éléments finis à un matériau métallurgique soumis à l'essai de flexion trois points afin de déterminer l'évolution des champs de contraintes et de déformations de celui-ci durant l'essai jusqu'à la rupture. Les résultats obtenus font l'objet de comparaisons et de dissensions.

Le travail ainsi présenté est clôturé par une conclusion générale et recommandations.

## Notation principale

Les principales notations utilisées dans ce mémoire sont ci-après. Les autres notations seront définies lors de leur apparition dans le document .

$q^{eT}$  : vecteur des déplacements nodaux de l'élément (e) transposé

$K^e$  : matrice rigidité élémentaire de l'élément (e)

$F^e$  : vecteur des forces nodales de l'élément (e)

$q$  : vecteur des déplacements nodaux

$K$  : matrice rigidité de la structure

$F$  : vecteur des forces nodales d'une structure

$u_i$  : déplacement

$\varepsilon$  : vecteur représentatif des déformations généralisées (  $\varepsilon_{ij}$  )

$\sigma$  : vecteur représentatif des contraintes généralisées (  $\sigma_{ij}$  )

$[...]^T$  : matrice transposée de la matrice

$T$  : travail des forces appliquées

$U$  : énergie de déformation

$Tr$  : trace d'une matrice

$E$  : module d'élasticité

$\nu$  : coefficient de Poisson

$C$  : matrice constitutive du matériau

$u$  : vecteur déplacements généralisés

$f$  : vecteur de force de volume

$D$  : matrice d'opérateurs différentiels

$P$  : vecteur de force de surface

$N$  : matrice cosinus directeur de la normale extérieure à la surface du solide (ni)

$S$  : matrice contraintes-déplacements de l'élément (e)

$V$  : énergie potentielle totale

$V_c$  : énergie potentielle complémentaire

$N$  : matrice des fonctions d'interpolations

$G$  : module de cisaillement

$a$  : vecteur des coordonnées généralisées

$B$  : matrice d'interpolation des déformations

$A$  : matrice d'interpolation des déplacements

$J$  : jacobien

d.d.l : degré de liberté

M.E.F : méthode des éléments finis

# Chapitre I

## **Essais Mécaniques et Relations Fondamentales**

## **I - INTRODUCTION**

Pour être en mesure d'utiliser un matériau de façon rationnelle, l'ingénieur doit d'abord connaître ses caractéristiques fonctionnelles et sa structure, ce qui lui permettra de comprendre, voir prédire, son comportement en service. Afin de caractériser le comportement mécanique d'un matériau soumis à des forces extérieures qui engendrent des contraintes et des déformations, on a recours à un certain nombre d'essais normalisés; ces essais permettent de déterminer des valeurs (limite d'élasticité, résistance à la traction, dureté, etc.) que les ingénieurs utilisent dans leurs calculs. Il existe également des méthodes de caractérisation de la structure des matériaux. Toutes ces méthodes expérimentales permettent d'établir des relations entre structure et propriétés.

### **I.1 - CONTRAINTES ET DEFORMATIONS**

Quand un corps est soumis à l'action de forces extérieures, des contraintes s'établissent, par réaction, à l'intérieur de ce corps. Aux contraintes sont associées des déformations. Tant que le comportement du corps se situe dans le domaine élastique, les relations existant entre les contraintes et les déformations sont définies par la théorie de l'élasticité linéaire des milieux continus. Les deux principales hypothèses de cette théorie sont :

- a) que les propriétés du corps sont homogènes et ne varient pas d'un point à l'autre;
- b) qu'elles sont les mêmes dans toutes les directions - cette seconde hypothèse implique que le milieu est isotrope.

Dans le domaine élastique, les déformations sont entièrement réversibles: quand les forces sont appliquées sur le corps, celui-ci change de forme, mais retrouve sa forme initiale quand les forces extérieures sont retirées.

### **I.2 - CARACTERISATION DES PROPRIETES MECANIQUES**

L'ingénieur ne peut calculer une pièce ni déterminer les charges admissibles sans connaître les caractéristiques mécaniques du matériau qu'il compte utiliser. Entre autre, il doit savoir à partir de quelle charge la pièce commence à se déformer de façon irréversible, entraînant ainsi une déformation de sa géométrie, et à partir de quelle charge il y a risque de rupture. Le but des essais mécaniques est d'obtenir des valeurs des propriétés qui seront utilisables dans les calculs de résistance des matériaux ou qui permettront d'apprécier le comportement d'un matériau en service. En règle générale, pour être valable et donner des mesures significatives les essais mécaniques doivent impliquer des états de contraintes simples et connus, d'interprétation facile et non équivoque. De plus, ils doivent être reproductibles : les résultats obtenus par un laboratoire doivent être universellement utilisables et avoir partout la même signification.

C'est pourquoi des organismes nationaux et internationaux normalisent ces essais.

Citant, à titre d'exemples les organismes de normalisation suivant : l'ASTI (american society for testing & materials, USA), l'ACNOR (association canadienne de normalisation), le BNQ (bureau de normalisation du Québec), l'AFNOR (association française de normalisation) et l'ISO (international standardization organisation). La normalisation des essais porte sur la géométrie des éprouvettes et sur leur prélèvement, sur les machines essais et leurs calibration sur les techniques expérimentales mise en oeuvre et sur le dépouillement et la présentation des résultats.

### **I.2.1 - Essai de traction [ 1 , 2 ]**

L'essai de traction est l'essai mécanique le plus fréquemment utilisé. Il consiste à soumettre une éprouvette du matériau à étudier à une traction et à mesurer l'allongement correspondant.

A cet essai est associée une courbe  $F = f(dl)$ . Elle est obtenue en mesurant la charge imposée et l'allongement, respectivement à l'aide d'un dynamomètre et d'un extensomètre.

En général nous remarquerons trois types de comportement possibles des matériau.

#### **1. Un comportement fragile :**

Le matériau ne présente pas de domaine plastique, la rupture se produit alors que les déformations sont élastiques; le verre, les fontes grises; les aciers bruts de trempe, les céramiques, le béton et la plupart des polymères thermodurcissables, sont des matériaux qui ont un comportement *fragile*

#### **2. Un comportement ductile :**

Une déformation plastique permanente, accompagnée généralement d'un durcissement du matériau, suit à la déformation élastique. De nombreux matériaux présentent ce type de comportement : la majorité des métaux et des alliages : et certains polymères thermoplastiques.

### 3. Un comportement élastique non linéaire :

La déformation élastique (c.-à-d. réversible) n'est pas proportionnelle à la charge qui la provoque. Un tel comportement est caractéristique de certain polymères thermoplastiques et des élastomères.

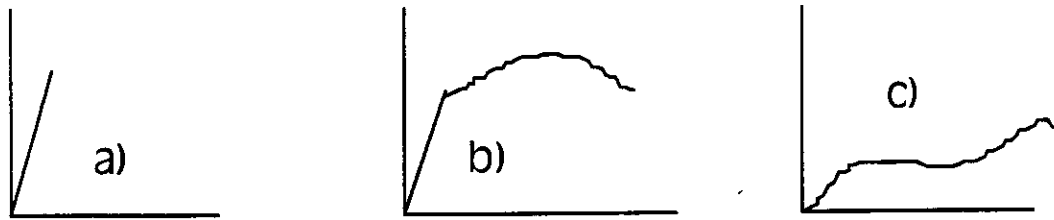


Figure I.1 : Comportement caractéristique en traction : a) Comportement fragile; b) Comportement ductile; c) Comportement élastique non linéaire.

Afin de pouvoir utiliser les courbes de tractions brutes, on doit les modifier de façon que les résultats obtenus ne soient fonction que du matériau étudié et non la géométrie de l'éprouvette. Pour ce faire, on rapporte la charge  $F$  à la section initiale  $S_0$  de l'éprouvette en vue d'obtenir la contrainte maximale  $\sigma$

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (1.1)$$

L'éprouvette comprends toujours entre des repères séparés par une distance  $l_0$ , une section constante  $S_0$ . Et on rapporte l'allongement  $\Delta l$  à la longueur initiale entre repères  $l_0$ , en vue d'obtenir la déformation  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (1.2)$$

L'exploitation de la courbe de traction nous permet d'obtenir les valeurs suivantes des caractéristiques mécaniques d'un matériau.

- La limite élastique  $R_e$ ,
- La résistance à la traction  $R_m$ ,
- L'allongement à la rupture  $A$ ,
- Striction à la rupture  $Z$ ,

### I.2.2 - Essai de compression :

L'essai de compression consiste à soumettre une éprouvette de forme cylindrique à deux forces axiales opposées, en la plaçant entre les plateaux d'une presse. Bien que le principe de l'essai soit assez simple, sa réalisation n'en comporte pas moins deux difficultés qui limite son emploi et l'exploitation des résultats expérimentaux. Si l'éprouvette est trop haute par rapport à son diamètre, il y a risque d'apparition d'instabilité élastique, *le flambage*.

Pour éviter ce problème, le rapport hauteur de l'éprouvette / diamètre de l'éprouvette est maintenu inférieur à 3.

La seconde difficulté provient du frottement entre les faces d'appui de l'éprouvette et les plateaux de la machine d'essai. Ce frottement s'oppose à l'augmentation du diamètre de l'éprouvette quand sa hauteur diminue. Il en résulte des déformations hétérogènes qui confèrent à l'éprouvette une forme de tonneau (déformation en barillet).

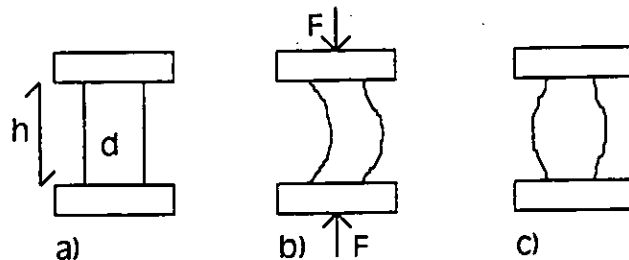


Figure 1.2 : a) Essai de compression,  
b) Flambage de l'éprouvette  
c) Déformation hétérogène causée par les forces de frottement

Les essais de compression sont surtout utilisés pour déterminer la contrainte de rupture des matériaux fragiles (bétons, céramiques), qui, du fait des défauts qu'ils comportent, résistent mal à la traction.

Les matériaux sont souvent très durs, et il est très difficile, voir impossible, de les usiner. Il est donc plus facile d'obtenir des éprouvettes de géométrie simple, à section constante, qui se prêtent bien aux essais de compression. Les autres essais étant pour leurs part des essais qui requièrent des éprouvettes de forme spécifique.

### I.2.3 - Essai de dureté : [ 1 ]

La dureté est la mesure de la résistance d'un matériau à la pénétration. La pénétration met en jeu une série de facteurs dont les principaux sont : les déformations élastique et plastique, le frottement entre les pénétrateurs et le matériau, la géométrie du pénétrateur, ses propriétés mécaniques et la charge qui y est appliquée.



Les mesures de dureté sont simple à mettre en oeuvre et d'exécution rapide; leur reproductibilité est élevée. Ces mesures sont suffisamment sensibles pour détecter et quantifier de faibles modifications de la structure. Dans certaines conditions, les mesures sont faites sur des pièces finis, et les essais de dureté peuvent alors être considérés comme des essais non destructifs.

#### **I.2.4 - Autres essais :**

Il existent de nombreux autres essais que ceux que nous venons de décrire et qui permettent de mesurer et de quantifier les caractéristiques des matériaux soit dans les conditions d'utilisation particulières (essai d'endurance sous charge variables; essais à haute température sous charge constante; essai de fluage; comportement au choc; essai de résilience) soit pour satisfaire à des opérations de mise en forme spécifique (essai d'emboutissabilité, de soudabilité, etc...).

### **I.3 - L'ESSAI DE FLEXION : [ 1, 18, 19 ]**

L'essai de flexion est très souvent pratiqué pour mesurer des caractéristiques telle que le module d'Young et la résistance en flexion. Contrairement aux essais de traction ou compression cet essai est simple à mettre en oeuvre et d'une bonne reproductibilité. Il permet de s'affranchir complètement des problèmes de collage et résistance des talons ainsi que des alignements toujours délicats.

L'essai de flexion de part sa localisation de l'endommagement en surface de l'échantillon, et le choix de la sollicitation de flexion trois (03) points s'avère particulièrement bien adapté pour l'analyse des mécanismes d'endommagement, qui est un facteur essentiel à la compréhension du comportement mécanique d'un matériau quelqu'il soit.

#### **I.3.1 - Techniques expérimentales : [ 18 ]**

Eprouvettes : Les éprouvettes sont de géométrie très simple et ne demande pas un usinage conséquent. Leurs formes est celle d'un parallélépipède. Elle peuvent être entaillée au milieu, ceci ayant pour but de faciliter l'amorçage de la fissuration. Leurs principales caractéristiques sont :

Longueur (L)	:	100 mm
Largeur (b)	:	10 mm
Epaisseur (h)	:	3 mm
Section utile (S)	:	21 mm <sup>2</sup>
Profondeur d'entaille	:	3 mm

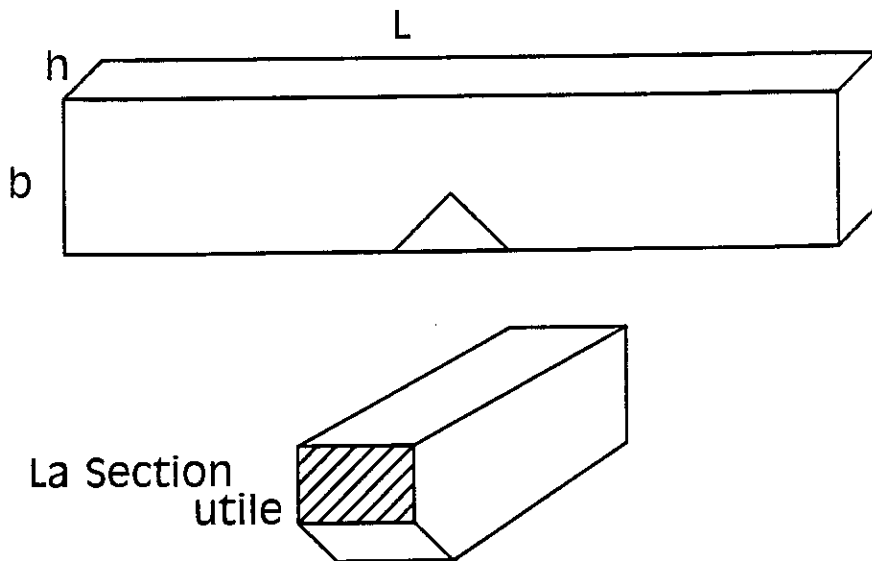


Figure I.3

### I.3.1 - Flexion trois points monotone (NFT 57 - 104 et 105) : [ 18 ]

Les essais de flexion monotone sont réalisés suivant les recommandations de la norme NFT 57 - 104 et 105. L'appareillage est composé d'un ensemble de flexion trois points, instrumenté d'un capteur de déplacement inductifs. La panne centrale de 5 mm ainsi que les appuis latéraux de rayon 2.5 mm sont en acier.

L'enregistrement de l'effort ( P ) en fonction du déplacement (  $\delta$  ) permet une évaluation simple des principales caractéristiques mécaniques du matériau.

Nous nous devons de rappeler, les quelques formules de résistance des matériaux exprimant ces grandeurs mécaniques.

$$E_{app} = \frac{l^3 dP}{4bh^3 d\delta} \quad (1) \quad ; \quad \sigma_x = \frac{2PL}{2bh^2} \quad (2) \quad ; \quad \tau = \frac{3P}{4bh} \quad (3)$$

Certaines conditions de sollicitation doivent être respectées. En effet lors de la sollicitation de flexion, le champ des contraintes n'est pas homogène, et l'effort appliqué engendre non seulement des contraintes normales de traction compression ( 2 ) mais également des contraintes de cisaillement ( 3 ), maximum sur l'axe neutre.

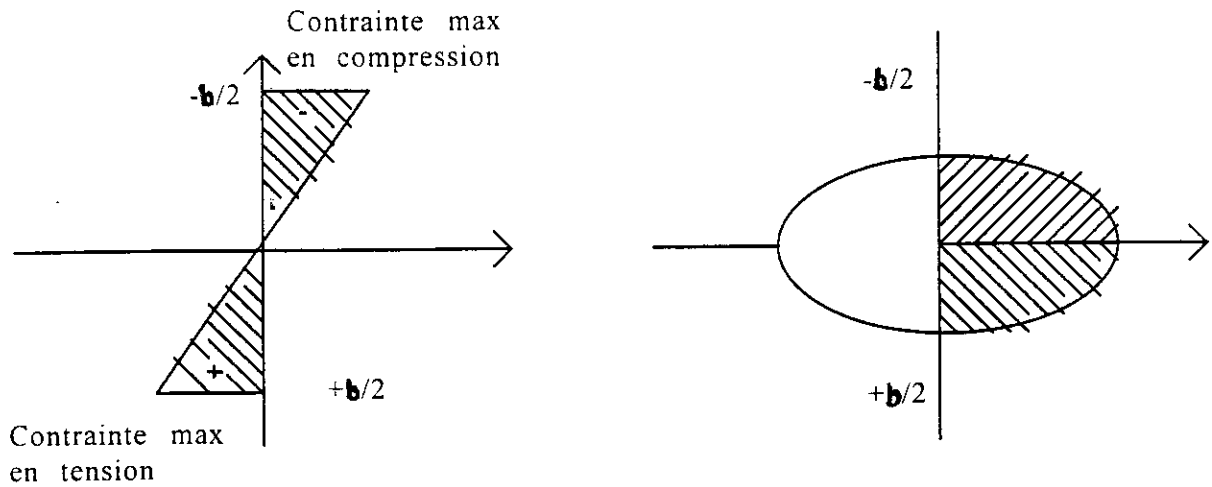


Fig I.4a/Champs de contraintes normales Fig I.4 b/Champs de contraintes de cisaillement

Figure I.4 : Représentation du champs des contraintes en flexion

L'influence de ces contraintes de cisaillement n'est pas négligeable car lors d'un essai de flexion trois points, la flèche totale  $\delta_t$  imposé à l'éprouvette est la résultante des contributions du fléchissement  $\delta_f$  et du cisaillement  $\delta_c$ .

Différents auteurs (Fisher 1981, Timoshenko 1961 [ 13 ]) débattent des effets simultanés de la flexion et du cisaillement en fonction du rapport distance entre appuis / épaisseur de l'éprouvette ( $L/b$ ) et montrent que le module de flexion apparent calculé par la formule (1) et d'autant plus proche du module longitudinal de traction ( $E_{11}$ ) du matériau testé, que la contribution du cisaillement est faible.

Cette contribution est inversement proportionnelle au rapport  $L/h$ , et proportionnelle au rapport d'anisotropie  $E_{11}/G_{12}$ . L'écart entre le module apparent et le module longitudinal réel ( $E_{11}$ ) est donné par :

$$\frac{E_{11}}{E_{app}} = 1 + \alpha \frac{E_{11}}{G_{12}} \left[ \frac{b}{L} \right]^2 \quad \alpha = (12 + 11\nu) / 10(1 + \nu) = 6/5$$

Coefficient d'anisotropie dû à la section réduite de l'effort tranchant

Le rapport  $L/b$  contrôlant les contributions respectives de la flexion et du cisaillement, la rupture se produira soit par flexion, soit par cisaillement selon ce rapport. Pour une valeur suffisamment grande de  $L/b$ , dépendent fortement de la nature du matériau, caractérisé par son rapport d'anisotropie  $E_{11}/G_{12}$ , les effets du cisaillement peuvent être négligés.

Dans ce cas nous aboutirions à un essai de flexion pure, ce dernier permet de diminuer un module de flexion apparent très proche du module longitudinal de traction ( $< 5\%$ ). Les valeurs de résistance en flexion sont généralement supérieures aux valeurs mesurées par essai de traction. Ceci peut s'expliquer en considérant la notion de volume sollicité. Au cours de l'essai de flexion, la répartition du champ de contrainte étant non homogène, le volume de matériau soumis à la contrainte maximale est alors plus faible qu'au cours de l'essai de traction longitudinal. Dans la majorité des cas, les valeurs de résistance en flexion sont associées à un faciès de rupture en traction.

Les conditions expérimentales utilisées pour les essais sont : [ 19 ]

Vitesse de sollicitation	: 2 mm/min à 1 m/s
Température d'essai	: $23 \pm 2^\circ\text{C}$
Humidité	: $50 \pm 10\%$
Rapport portée/épaisseur	: 5 et 20

Tous les essais de caractérisation monotones sont effectués sur un minimum de cinq échantillon.

Au sein de l'éprouvette lors de l'essai de flexion, les contraintes varient de façon *continue* de part et d'autre de l'axe neutre où elles sont nulles; d'un côté, elles sont en compression (côté concave de l'éprouvette) et de l'autre, en tension. La valeur maximale de la contrainte sur les faces extérieurs d'une éprouvette à section rectangulaire est donnée, en valeur absolue par :

$$|\sigma_{\max}| = \frac{3}{2} \left( \frac{FL}{bh^2} \right) \quad (I.3)$$

b : largeur de l'éprouvette  
h : sa hauteur  
F : charge appliquée  
L : distance entre les appuis

L'essai de flexion ne permet généralement pas d'atteindre la rupture des matériaux ductiles. Les essais de flexion sont normalisés et couramment utilisés pour effectuer des contrôles de qualité ou pour déterminer la contrainte de rupture (résistance à la flexion) des matériaux fragiles.

La simplicité du montage de l'éprouvette (absence de problème de fixation) et celle de sa géométrie (peu ou pas d'usinage) constituent les principaux avantages de cet essai.

A travers l'expose des essais aidant à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux nous sommes en mesure d'aborder de façon plus détaillée certaines notions, afin de décrire le comportement d'un matériau soumis à une sollicitation extérieure (une poutre en flexion trois points pour notre cas) nous pouvons opter pour deux approches.

La première consiste à ne considérer que le comportement macroscopique du matériau, mais cela concerne uniquement les phénomènes globaux et permet d'établir les lois de comportement macroscopique.

La seconde approche est microscopique, elle fournit pour sa part des informations sur le comportement du matériau au niveau des atomes ou molécules, éléments constitutifs du matériau. Il va de soi que le comportement macroscopique résulte de l'ensemble de ces mécanismes microscopique, à cet effet il serait intéressant de préciser de façon claire et succincte certaines notions auxquelles notre étude fait appel.

#### 1.4 - L'ELASTICITE : [ 1, 3, 13 ]

Un corps matériel, quel qu'il soit, se compose de petites particules ou molécules entre lesquelles agissent des forces. Ces forces moléculaires s'opposent au changement de forme du corps, que tentent de créer les efforts externes.

Sous l'action des efforts externes les particules du corps se déplacent jusqu'à ce qu'un équilibre s'établisse entre les efforts externes et internes.

Le corps est alors en *état de déformation*.

Pendant la déformation les efforts externes agissent sur le corps créent un travail, et ce travail se transforme complètement ou partiellement, en *énergie potentiel de déformation*.

Si les forces qui créent la déformation du corps diminuent graduellement d'intensité, le corps retrouve, totalement ou partiellement sa forme originale, et pendant cette déformation inverse l'énergie potentielle de déformation, accumulée dans le corps, est restituée sous forme de travail extérieur.

Prenons pour exemple notre barre en flexion trois comme la figure l'indique.

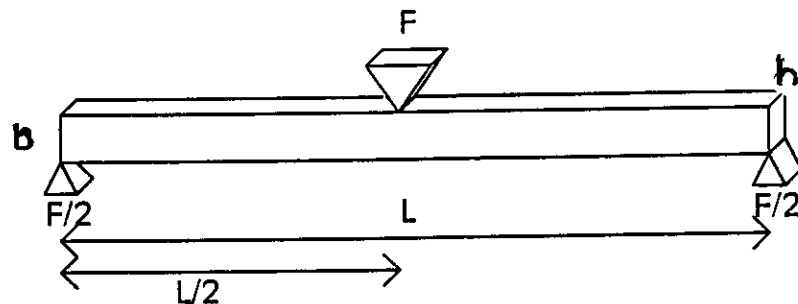


Figure 1.5 : Représentation schématique de l'essai de flexion 03 points

La barre reposant sur deux appuis simple en ses extrémités, elle est sollicité par une charge concentrée de façon perpendiculaire et portée par l'axe de symétrie de la barre. Sous l'action de cette charge la barre s'incurve d'un certain taux, l'axe neutre séparera d'un côté la partie qui se comprime (partie concave de la barre) et de l'autre la partie qui s'allonge.

Le point d'application de la charge se déplace vers le bas et celle-ci crée un travail positif durant sa translation. Lorsque la charge est réduite, la barre retrouve sa forme initiale et l'énergie potentielle de déformation se transforme en travail qui déplace la charge vers le haut.

*L'élasticité* est la propriété physique d'un corps de reprendre sa forme initiale après suppression de la sollicitation. Le corps est parfaitement élastique s'il recouvre complètement sa forme originale après suppression de la sollicitation; il est partiellement élastique si la déformation produite par les forces externes ne disparaît pas complètement après avoir retiré la charge.

Dans le cas d'un corps parfaitement élastique le travail dû aux forces externes, pendant la déformation est entièrement transformé en énergie potentielle de déformation (1). Dans le cas d'un corps partiellement élastique, une partie une partie du travail créé par les forces externes pendant la déformation se dissipe sous forme de chaleur dans le corps pendant la déformation non élastique.

Les expériences montrent que les matériaux de construction en général tel que les aciers, pierre et bois peuvent être considérés comme parfaitement élastique dans certaines limites, dépendant uniquement des propriétés du matériau. [ 1 ]

Supposons connus les efforts externes agissant sur une pièce le problème fondamental se posant à l'ingénieur consiste alors à déterminer le matériau et les traitements nécessaire de manière a ce qu'il approche des caractéristiques d'un corps parfaitement élastique soumis à toutes les conditions de service.

C'est seulement ainsi que l'on peut être certain d'une utilisation continue et sûre de la pièce, et éviter tout dysfonctionnement.

L'élasticité des matériaux est traduis par des constantes nommées constantes d'élasticité, elles représentent la rigidité du matériau et son aptitude à la déformation élastique.

#### **1.4.1 - Rigidité des matériaux : [ 1, 2, 3, 13, 15 ]**

La première partie de la courbe de traction (le domaine de l'élasticité), où la loi de Hooke s'applique pour des faibles valeurs de la déformation  $\epsilon$ . La constante de proportionnalité  $E$  de cette loi, le module d'Young, est une mesure de la *rigidité* du matériau, c'est-à-dire de la propriété qu'a le matériau de se déformé de façon élastique réversible sous l'action d'une contrainte.

---

(1) On néglige ici la faible variation de la température qui accompagne généralement une déformation élastique et l'échange de chaleur correspondant avec le milieu ambiant.

Pour une valeur donnée de la contrainte, un matériau est d'autant plus rigide que sa déformation élastique résultante est faible. Le module d'Young peut varier dans une très large gamme de valeurs. Il existe un rapport d'un million ( $10^6$ ) entre la valeur du module des matériaux les plus rigides (Tungstène, Quartz) et celle du module des matériaux rigides donc les plus élastiques (Caoutchouc, etc...).

Notons que le module d'Young  $E$  n'est pas la seule mesure de rigidité d'un matériau. Elle peut aussi être caractérisée par le module de cisaillement (ou le module de Coulomb) ou par le module de compression volumique  $K$ . Puisque les modules  $E$ ,  $G$ , et  $K$  caractérisent tous la rigidité, il existe des relations entre eux :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (I.4) \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (I.5)$$

La connaissance de l'un des modules ( $E$ ,  $G$  ou  $K$ ) et du coefficient de Poisson  $\nu$  d'un matériau permet donc de calculer les deux (2) autres.

#### **I.4.2 - Loi de Hooke :**

C'est la loi de la déformation élastique ; cette relation linéaire lie l'effort à l'allongement. Le savant anglais Robert Hooke (1) l'énonça en 1678 "Ut tension sic vis" (L'allongement suit la force). On peut exprimer cette loi de la façon suivante :

$$\delta = \frac{1}{k} F \quad (I.6) \quad \delta : \text{déplacement relatif, ou allongement résultant } F : \text{la force appliquée ; } k : \text{la rigidité ;}$$

La rigidité  $k$  est constante pour une géométrie et un matériau donné, à condition que le matériau soit élastique. La loi de Hooke a cependant été généralisée pour permettre d'établir une corrélation entre la déformation et la contrainte. C'est ainsi que pour un matériau élastique isotrope, on a les relations linéaires suivantes :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad (I.7) \quad \gamma = \frac{1}{G} \tau \quad (I.8)$$

Ces deux équations qui sont d'ailleurs une simplification des relations générales de Hooke, ne sont valides que si elles relient une seule composante de contrainte à une seule composante de déformation.

---

(1) Robert Hooke, *De Potentia restituta*, Londres, 1678.

Dans ce qui suit nous allons nous efforcer d'expliciter l'aspect purement physique du phénomène de flexion, et cela en nous basons sur des notions fondamentales de la résistance des matériaux. Pour faire l'analogie entre notre étude qui porte sur la flexion trois points monotone d'une éprouvette et les problèmes que traite la résistance des matériaux, nous assimilerons notre éprouvette à une poutre en flexion sur deux appuis simples en ses extrémités.

Une poutre est une membrure prismatique mince soumise à une ou des charges transversales généralement normales à son axe. La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces de machines.

En réaction aux charges appliquées sur la poutre des forces et des moments internes se développent pour maintenir l'équilibre. On appelle *effort tranchant* (V) la force interne transversale et *moment fléchissant* (M) le moment interne.

#### **I.5 - ETUDE DE L'EFFORT TRANCHANT ET DU MOMENT FLECHISSANT : [ 3 ]**

Soit la poutre illustrée à la figure (I.6) reposant sur deux appuis simples et fixes. Elle supporte une charge concentrée au point B. Nous nous proposons d'étudier (V) et (M).

Afin de déterminer V et M on utilise des équations d'équilibre, qui dans le cas où la poutre est chargée dans le plan xy, sont :

$$(\sum F)_x = 0 \quad (I.9)$$

$$(\sum F)_y = 0 \quad (I.10)$$

$$(\sum M)_z = 0 \quad (I.11)$$

**Note :** En général les conditions d'appui sont telle que les réactions dans la direction x (axe longitudinal de la poutre) soient nulles.



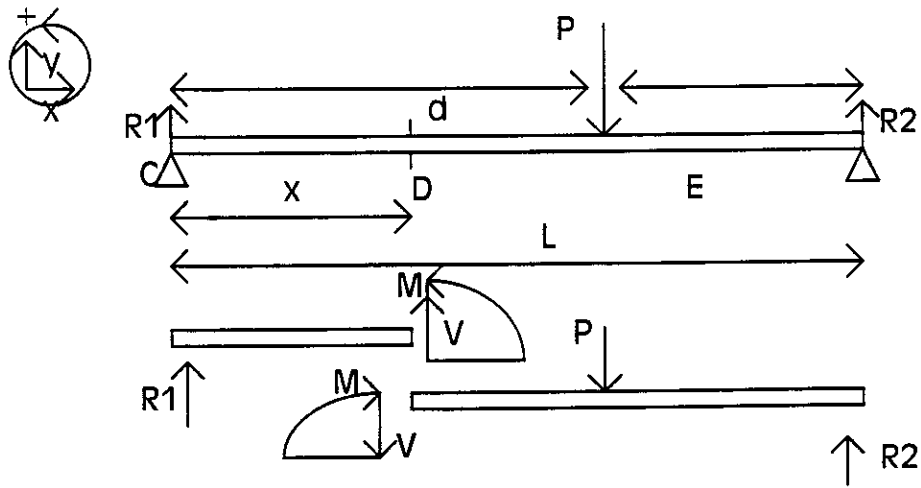


Figure I.6 : Illustration de l'effort tranchant  $V$  et du moment fléchissant  $M$  sur une section D-d quelconque

En appliquant les équations précédemment citées nous obtenons :

$$De(\sum M)_c = 0 : R_1 = \frac{Pb}{L} ; De(\sum F)_y = 0 : R_2 = \frac{Pa}{L}$$

Pour  $0 < x < a$  :

$V$  étant l'effort tranchant donc porté par l'axe  $y$  ;

$$De(\sum F)_y = 0 : V = R_1 = \frac{Pb}{L} \quad (I.12)$$

$$De(\sum M)_D = 0 : M = R_1 x = \frac{Pb}{L} x$$

Nous remarquerons que l'effort tranchant reste constant le long de la charge, tandis que moment fléchissant est proportionnel à  $x$ .

Pour  $a < x < L$  :

$$De(\sum F)_y = 0 : V = -R_1 + P = R_2 = \frac{Pa}{L}$$

$$De(\sum M)_E = 0 : M - R_1 x + P(x-a) = 0$$

$$M = Pa \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad (I.13)$$

## I.5 - Relation différentielle d'équilibre : [ 3, 13, 15 ]

Nous allons maintenant établir les relations générales qui relient l'effort tranchant et le moment fléchissant au chargement appliqué sur la poutre. Considérons un élément de poutre pris entre deux sections très voisines  $mn$  et  $m_1 n_1$  distante de  $dx$ .

Nous supposons que le moment fléchissant et l'effort tranchant sont positifs sur la section  $mn$ , l'influence de la partie gauche de la poutre, sur l'élément est transmise par l'effort  $V$  et le couple  $M$ . De la même manière supposons que sur la section  $m_1 n_1$ , moment fléchissant et effort tranchant soient positifs, l'influence de la partie droite de la poutre sur l'élément étant transmise par un couple et un effort. Si aucune force ne s'exerce sur la poutre entre la section  $mn$  et  $m_1 n_1$ , les efforts tranchants sur ces deux sections, sont égaux (1). Quant aux moments fléchissant on constate d'après l'équilibre de l'élément qu'ils sont différents et que l'accroissement  $dM$  du moment fléchissant est égal aux moment du couple représenté par deux efforts  $V$  égaux et opposés, c'est-à-dire.

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (\text{I.14}) \text{ Relation différentielle d'équilibre}$$

Ainsi sur toutes portion de poutre comprise entre des charges, l'effort tranchant est la dérivée, par rapport à  $x$ , du moment fléchissant.

Lorsqu'une charge concentrée  $P$  s'exerce entre deux sections adjacentes  $mn$ ,  $m_1 n_1$ , l'effort tranchant varie brusquement. Soit  $V$  cet effort sur la section  $mn$  et  $V_1$  sur  $m_1 n_1$ . L'équation d'équilibre de l'élément  $mn$ ,  $m_1 n_1$  nous permet donc d'écrire :

$$V_1 = V - P \quad (\text{I.15})$$

Ainsi la grandeur de l'effort tranchant varie d'une quantité  $P$  lorsqu'on dépasse le point d'application de la charge. D'après l'équation (I.14) on conclut alors qu'au point d'application d'un effort concentré la dérivée  $dM/dx$  varie brutalement.

### I.5.1 - Contraintes dans les poutres en flexion :

L'étude des contraintes dans une poutre en flexion permet de déterminer et de manière efficace sa résistance mais pour cela il faut s'appuyer sur les hypothèses suivantes :

- a/ La poutre est droite avant le chargement.
- b/ Le matériau est élastique, et ses propriétés sont les mêmes en compression et en tension.
- c/ Le matériau est homogène tout le long de la poutre.
- d/ La flexion se produit dans un seul plan qui coïncide avec l'axe principale de la section. En général cela implique que le plan de chargement ou le plan normal sont des plans de symétrie.

---

(1) On néglige le poids de l'élément de la poutre.

Nous aborderons deux types de flexions :

\* Poutre soumise à une flexion *pure* : Dans ce cas l'effort tranchant est nul ( $V=0$ ), par conséquent le moment fléchissant est constant tout le long de la poutre. On peut remarquer les caractéristiques suivantes.

- a) Tous les éléments de longueur se déforment de la même façon, leur assemblage donne à la poutre une courbure constante, ou un *rayon de courbure*.
- b) Pour le moment fléchissant positif, les fibres supérieures se rétrécissent, et les fibres inférieures s'allongent. Il existe un plan transversal dans lequel la longueur des fibres ne change pas : par définition, ce plan est appelé *plan neutre*.

L'axe horizontal formé par l'intersection du plan neutre et de la section transversale de la poutre est appelé *axe neutre*.

Il est d'usage de faire coïncider l'axe des  $x$  avec l'axe neutre avant la déformation. Le rayon de courbure  $\rho$  est, par définition, celui de l'axe neutre.

La déformation normale  $\varepsilon_x$  d'une fibre quelconque située à une distance  $y$  au-dessus de l'axe neutre est donnée par :

$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \quad (\text{I.16})$$

L'équation (I.16) révèle que :

- a) La déformation normale  $\varepsilon_x$  varie linéairement en fonction de  $y$ , ce qui est dû au fait que les sections planes demeurent planes après déformation.
- b) Pour un moment fléchissant positif, les fibres supérieures ( $y > 0$ ) se rétrécissent (déformation négative : compression), et les fibres inférieures s'allongent (déformation positive : tension)

## **I.6 - RELATION CONTRAINTE DEFORMATION**

Selon nos hypothèses de base (I.5.2), la poutre formée d'un seul matériau élastique, dont le module d'élasticité  $E$  est le même en tous points. Et compte tenu du fait que la flexion se produise selon un seul plan  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont nulles, on obtient :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -\frac{E}{\rho} y \quad (\text{I.17})$$

### I.6.1 - Equilibre :

Les équations d'équilibres sont réalisées pour chaque élément infinitésimal ( $dA = dy dz$ ). Il peut avoir trois composantes de contraintes lesquelles contribuent éventuellement à équilibrer le moment fléchissant  $M$ . Les composantes de contraintes  $(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$  agissant sur élément de surface  $dA$ .

$$(\Sigma F)_x = 0, \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (I.18)$$

$$(\Sigma M)_x = 0, \int_A \tau_{xz} y dA - \int_A \tau_{xy} z dA = 0 \quad (I.19)$$

$$(\Sigma F)_y = 0, \int_A \tau_{xy} dA = 0 \quad (I.20)$$

$$(\Sigma M)_y = 0, \int_A \sigma_x z dA = 0 \quad (I.21)$$

$$(\Sigma F)_z = 0, \int_A \tau_{xz} dA = 0 \quad (I.22)$$

$$(\Sigma M)_z = 0, \int_A \sigma_x y dA + M = 0 \quad (I.23)$$

De ces équations il est déduit :

$$\sigma_x = -\frac{M y}{I} \quad \text{avec} \quad M = \frac{E I}{\rho} \quad \text{et} \quad I = \int_A y^2 dA \quad (I.24)$$

Cette contrainte varie de façon linéaire, d'une compression maximale (à la fibre supérieure) à une tension maximale (à la fibre inférieure), en passant par zéro (au plan neutre).

$$\text{On posant } : c = |y|_{\max}; |\sigma_x|_{\max} = \frac{M c}{I} = \frac{M}{S} \quad (I.25)$$

où :  $S = I / c$  est définis comme étant le module de la section.

\* Poutre soumise à une flexion **ordinaire** (contrainte due à l'effort tranchant) :  
Il faut savoir qu'en pratique les poutres soumises à une flexion pure sont rares. Dans une poutre soumise à une charge quelconque, le moment fléchissant passe par un maximum (ou un minimum) lorsque l'effort tranchant est nul.

Nous abordons maintenant l'étude de la contrainte due à l'effort tranchant ( $V$  non nul; flexion ordinaire).

Il est difficile (et en général impossible) d'obtenir la solution exacte pour une poutre droite soumise simultanément à un moment fléchissant  $M$  et à un effort tranchant  $V$ . L'équation (I.24) n'est donc pas strictement

exacte lorsque l'effort tranchant n'est pas nul: la solution est par conséquent approximative. Toutefois, l'erreur due à cette approximation est faible dans la plupart des cas où la longueur de la poutre est beaucoup plus grande que les deux autres dimensions.

### I.6.2 - Les contraintes :

Soit une poutre soumise à un chargement quelconque entraînant une flexion. L'effort tranchant et le moment fléchissant varient tout le long de la poutre et prennent des valeurs  $V_1M_1$  et  $V_2M_2$  de part et d'autre d'une portion de la poutre.

En intégrant l'équation différentielle  $dM / dx = -V$ . On obtient :  $M_1 = M_1 - V\Delta x$ .

Où  $V$  représente la valeur moyenne de l'effort tranchant affectant l'élément de longueur  $\Delta x$ .

L'équation (I.24) fournit la répartition des contraintes normales  $(\sigma_x)_1$  et  $(\sigma_x)_2$ .

$$(\sigma_x)_1 = -\frac{M_1 y}{I}; (\sigma_x)_2 = -\frac{M_2 y}{I} = -\frac{(M_1 - V \Delta x) y}{I}$$

(I.26) (I.27)

Puisque les contraintes normales  $(\sigma_x)_1$  et  $(\sigma_x)_2$  sont différentes sur les faces opposées, les deux sous éléments ne peuvent en équilibre que s'il existe une force interne  $\Delta F_x$  agissant dans la direction longitudinale à leur interface.

Donc pour un sous-élément de section  $A_1$ .

$$\int_{A_1} (\sigma_x)_1 dA - \int_{A_1} (\sigma_x)_2 dA - \Delta F_x = 0 \quad (I.28)$$

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta x} = \frac{V}{I} \int_{A_1} y dA \quad (I.29)$$

L'intégrale représente le premier moment  $Q$  de la sous-section  $A_1$ :

$$Q = \int_{A_1} y dA = A_1 y_1 \quad (I.30)$$

$y_1$  : est la distance entre le centroïde et la sous-section  $A_1$

Le rapport  $\Delta F_x / \Delta x$  représente la force de cisaillement moyenne par unité de longueur, au plan de coupe, est appelé le flux de cisaillement  $q_x$ , il est égal à :

$$q_x = \frac{\Delta F_x}{\Delta x} = \frac{V Q}{I} \quad (I.31)$$

On peut également calculer la contrainte moyenne qui agit au plan de coupe :

$$\tau_{xy} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A y} = \frac{\Delta F_x}{b \Delta x} = \frac{q_x}{b} = \frac{V Q}{I b} \quad (I.32)$$

b: est la largeur de la poutre au plan de coupe considéré.

### I.7 - La déformation des poutres en flexion : [ 3 ]

Lorsqu'une poutre au comportement élastique est soumise à un chargement qui provoque une flexion, son axe longitudinal (axe neutre) se déplace par rapport à sa position d'origine. Ce déplacement (appelé *flèche*), qui se produit selon une direction transversale à l'axe longitudinal, varie en intensité tout le long de la poutre.

La *rigidité de flexion* d'une poutre est caractérisée par l'intensité de la flèche résultante d'un chargement donné. Il arrive souvent que la rigidité soit plus importante que la résistance, dans des calculs concernant une poutre.

#### I.7.1 - Relations différentielles de base :

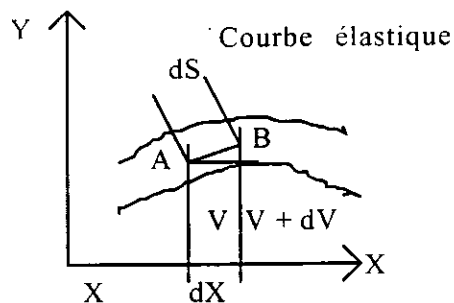


Figure I.7 : Déformation d'une poutre en flexion

La figure (I.7) illustre la déformation que subit une poutre lorsqu'on la soumet à un chargement entraînant une flexion. En général, lorsqu'on veut simplifier l'interprétation de la déformation d'une poutre on considère surtout

le déplacement de son axe neutre. Dans le cas d'une déformation élastique de la poutre on appelle *courbe élastique* l'axe neutre ainsi déformé.

$$\Delta x = \Delta S \cos \varphi \approx \Delta S \quad \text{et} \quad \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx}$$

où  $\varphi$  est la pente de la courbe au point A

De la figure (I.8) on a :

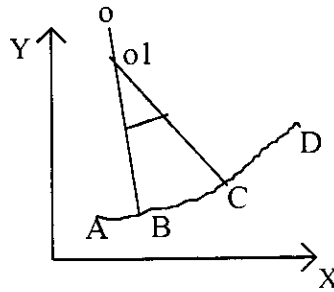


Figure I.8 : Courbure et rayon de courbure

$$\Delta S = (O.B) \Delta \varphi \quad \text{et} \quad d\varphi / dS = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} = \frac{1}{\rho}$$

$$\text{or} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dS} \approx \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2} \quad (\text{I.33})$$

De la relation entre la courbure et le moment fléchissant. Nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (\text{I.34})$$

Plusieurs des méthodes de calcul de la flèche des poutres reposent sur l'équation (I.33). C'est une équation de second degré dont la double intégration permet d'obtenir la flèche  $V$  désirée.

En résumé nous pouvons dire que les réactions internes qui se produisent lorsqu'une poutre n'est sollicitée que selon un seul plan de flexion, et qui sont, l'effort tranchant  $V$  et le moment fléchissant  $M$ , varient le long de la poutre. Il est possible de calculer les réactions internes des poutres si on sectionne celle-ci à l'endroit désiré et qu'on applique les relations d'équilibre statique.

Mais en général, pour l'étude des réactions internes, on se contente principalement de déterminer les valeurs maximales, ou minimales respectives de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

L'étude de la poutre en flexion est d'un intérêt pratique certain, nous avons vu les équations qui permettent de déterminer la répartition des contraintes dans les poutres droites élastiques homogènes soumis à une flexion agissant dans un seul plan, celui-ci coïncidant avec un axe principal de la section de la poutre.

Enfin, bien qu'il soit basé sur une équation apparemment simple (I.33), le calcul de la flèche d'une poutre prend rapidement de l'ampleur. L'évaluation de ces déplacements sollicite des méthodes de calcul très complexes voir très élaborées, c'est d'ailleurs ce qui fera l'objet du prochain chapitre.

Mais il serait profitable à ce stade d'introduire le phénomène de *rupture*, car toute flexion excessive entraîne inexorablement le matériau vers une déformation plastique, qui précède l'endommagement fatal et irrémédiable du matériau, et qui se matérialise par une rupture.

### I.8 - Introduction à la mécanique de la rupture : [ 1, 2 ]

La mécanique de la rupture permet à l'ingénieur qui doit calculer une structure de tenir compte du matériau et d'éviter ainsi toute rupture brutale. *Griffith* proposa sa théorie de la rupture, et depuis d'autre ont effectué des analyses plus raffinées, mais les principes fondamentaux sont restés inchangés.

L'expression de la contrainte critique de rupture de n'importe quel matériau est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{E G_c}{\pi a}} \quad (I.35)$$

$G_c$  : l'énergie nécessaire pour que la fissure se propage d'une longueur unitaire.

$a$  : longueur de propagation de la fissure.

$G_c$  est une énergie qui comprend l'énergie élastique  $W_e$ , l'énergie de surface  $W_s$  et l'énergie de déformation plastique.

L'équation (I.36) de caractériser *le facteur d'intensité de contrainte*,  $K$ , qu'il ne faut pas avec le facteur de concentration de contrainte,  $k$ , ce facteur d'intensité de contrainte est déterminé par l'équation suivante:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} = \sqrt{E G_c} \quad (I.36)$$

\* Pour une éprouvette mince à dimension latérales très grandes

$$K = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} \quad (I.37)$$

\* Pour une éprouvette épaisse avec  $\alpha$  paramètre dépendant de la géométrie de l'éprouvette.



Ce facteur K détermine la valeur de la contrainte pour laquelle une fissure aiguë, présente avant l'essai dans une éprouvette normalisée, se propage brutalement.

En effet, le facteur critique d'intensité de contrainte  $K_c$  d'un matériau permet de calculer la valeur de la contrainte maximale que peut supporter ce matériau lorsque celui-ci renferme des défauts.

Inversement, lorsqu'on connaît la valeur de la contrainte qui agit dans une zone donnée de la pièce, on peut déduire la concentration maximale de défauts tolérés dans cette zone. Ceci sans oublier que l'amélioration de la résistance mécanique d'un matériau s'accompagne le plus souvent d'une diminution de ténacité. C'est pourquoi le spécialiste des matériaux doit savoir faire un compromis entre la *résistance*, *ductilité* et *ténacité*. Il peut y parvenir en agissant sur la microstructure du matériau.

# Chapitre II

## **Principe de la Méthode des Eléments Finis**

## II - Introduction

La méthode des éléments finis (M.E.F) est considérée par tous les ingénieurs comme une méthode de grande valeur. Elle permet d'obtenir des solutions **précises** pour un grand nombre de problèmes jusque là considérés comme insolubles et les efforts intenses et prometteurs de recherche qui lui sont consacrés permettent d'envisager un élargissement conséquent de son champ d'application.

La M.E.F fait partie des techniques de calcul applicables aux structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, nucléaire, génie civil, construction naval, mécanique, etc.

D'autre part, il faut mentionner que la M.E.F appliqué au calcul des structures est une technique à caractère multidisciplinaire car elle met en synergie les connaissances de trois disciplines de base :

**La mécanique des structures** : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité, etc....

**L'analyse numérique** : méthode d'approximation, résolution des systèmes linéaires, des problèmes aux valeurs propres.

**L'informatique appliquée** : techniques de développement des grands logiciels.

On se propose dans cette présentation succincte d'introduire les notions de base nécessaires à la compréhension de cette méthode. Pour cela il est utile d'en faire un bref historique.

### II.1 - HISTORIQUE

Les bases théoriques de la M.E.F reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

Pour les théorèmes énergétique d'élasticité leurs formulations fut effectuée au siècle dernier.

En 1819 *Navier* définissait une méthode d'étude basée sur l'application des conditions d'équilibre et de compatibilité.

En 1864 *Maxwell* et *Castigliano* en 1878 établirent de façon complète les théorèmes de l'énergie. Cependant, les applications de cette formulation au calcul des structures complexes furent pratiquement inexistantes à cause de l'indisponibilité de moyen de calcul.

C'est au début du 20<sup>ème</sup> siècle qu'on été acquis les résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation par *Ritz* en 1908 et *Galerkine* en 1915. En 1943 *Courant* établit les bases de la M.E.F, ceci en montrant que la résolution de certain problèmes de milieu continu était possible

en effectuant une discrétisation spatial du domaine, tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

Puis survient le développement des méthodes matricielle permettant de traiter des problèmes de structure assez complexes. Parmi les contributions les plus importantes *Levy* en 1947 et *Garney* en 1951 se penchèrent sur la méthode des forces, puis encore *Levy* en 1953 pour la méthode des déplacements. En 1954, *Denke* systématisera méthode des forces. Enfin, en 1955, *Argyris* présente une approche unifiée des méthodes déplacements et des forces, puis l'année suivante *Turner* et *Clough* publient une présentation systématique de la méthode des déplacements.

Ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de la M.E.F comme technique de calcul des structures complexes. En figure (II.1) est présenté un synoptique des principaux développements des méthodes d'analyse des structures jusqu'en 1956.

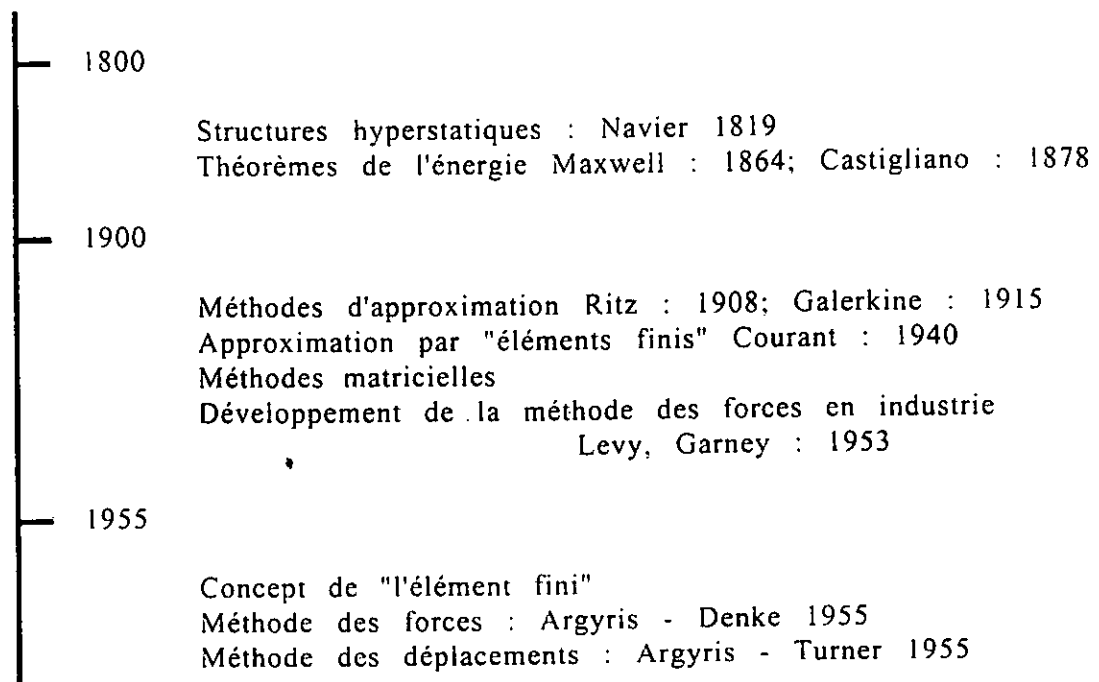


Figure : II.1

Historique des méthodes modernes d'analyse des structures-  
Synoptique des principaux développement jusqu'en en 1956 [ 5 ]

A partir de cette date (1955), la M.E.F va connaître un développement grâce à l'essor informatique. La méthode des déplacements va être choisie de façon quasi universelle comme technique de résolution matricielle.

Par ailleurs, le domaine d'application de la M.E.F limité au début à la statique linéaire s'étendit progressivement à la dynamique linéaire et plus recement à l'analyse non-linéaire avec non-linéarité géométrique et constitutives.

En conclusion, il est certain que, d'une part, la M.E.F se prête programmation sur ordinateur et que, d'autre part, la M.E.F se caractérise par son universalité et son adaptabilité au traitement des problèmes les plus complexes ; d'où l'idée de développer des programmes généraux d'analyse et cela à partir des années 1960, sous l'impulsion d'universités et des groupes industriels.

## II.2 - CONCEPT DE BASE

Un grand nombre de structures utilisées par les ingénieurs sont composées d'une réunion de parties indépendantes reliées entre elles par des points étant communément appelés *noeuds*.

Mais avant de commencer en détail la méthode des éléments finis nous allons revoir les notions de base nécessaires en analyse des structures.

### II.2.1 - Connaissances fondamentales: [ 4 ]

Quelle que soit la cause des forces et déformations internes dans une structure, trois conditions de base doivent être vérifiées, ce sont :

- 1) L'équilibre des forces.
- 2) La compatibilité des déplacements.
- 3) Les lois de comportement des matériaux.

La première condition exprime simplement que les forces intérieures contrebalancent l'action de la charge extérieure appliquée. Bien que la seule utilisation de cette condition soit parfois suffisante pour rendre possible la résolution d'un problème statique, les conditions de compatibilité et de comportement des matériaux étant automatiquement vérifiées, celle-ci ne suffit pas pour l'étude complète des structures hyperstatiques. [4].

Dans ces circonstances la condition de compatibilité doit intervenir séparément; elle exprime le fait que la structure soit convenablement déformée dans son ensemble, c'est-à-dire que les déformations de ses parties sont compatibles.

Avant d'utiliser ces conditions, il est nécessaire de connaître la relation entre charge et déformation pour chaque composant de la structure. Cette relation se réduit dans les problèmes d'élasticité linéaire à la loi de *Hooke*, C'est la troisième condition.

L'utilisation de ses trois conditions est fondamentale pour n'importe quelle méthode d'analyse.

## II.2.2 - Concept d'élément finis [ 5, 7 ]

L'analyse des structures complexes peut s'effectuer en considérant d'abord le comportement de chaque partie indépendantes puis en assemblant ces parties de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfait en chaque noeuds. Pour chacun de ces constituant on dispose de la formulation de la théorie de l'élasticité, ou de modèle théorique qui en sont dérivés (théorie des poutres, plaques et coques).

Il est évident que le concept de structure discrète « élément finis » à été appliqué tout d'abord à des assemblages de poutres. En, effet cette notion de modèle discret est évidente pour de telle structures car.

- On dispose d'un modèle théorique simple à une dimension (théorie des poutres).
- La notion d'élément est intuitive et l'on peut caractériser de façon simple le comportement de chaque élément.
- Les interfaces entre éléments sont simples : ce sont les noeuds de l'assemblage
- Les conditions de compatibilité et d'équilibre au noeuds se formulent de façon simple.

Dans ce cadre la M.E.F étudie un modèle discret du *continuum*. Ce modèle est basé sur une division du domaine continu en sous-domaines de forme géométrique simple que l'on appellera "*élément finis*" interconnectés par des points remarquables appelés "*noeuds*".

De plus, on définit dans chaque élément une approximation adéquate de la solution permettant de résoudre le problème en fonction uniquement des valeurs de la solution au noeuds.

On peut classer, les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments peuvent être distinguées.

- Les éléments unidimensionnels (1D) : barres, poutres rectilignes.
- Les éléments bidimensionnels (2D) : élasticité plane (déformation ou contrainte plane).
- Les éléments tridimensionnels (3D) : éléments de volume ou coques épaisses.
- Les éléments axisymétriques : ils constituent une classe bien particulière tores à section triangulaire ou quadrangulaire coques coniques.

## II.3 - FORMULATION MATRICIELLE : au niveau élémentaire et global : [ 4, 5, 6, 7 ]

On sait maintenant que la vocation primordiale de la M.E.F est de ramener le problème de milieu continu à des problèmes discrets à un nombre fini de paramètres inconnus qui sont déterminés par application des critères énergétiques.

Ces paramètres sont de nature différentes selon la méthode employée. On peut distinguer deux classes de méthodes matricielles.

- 1 - La méthode des déplacements (de rigidité) : dans laquelle les paramètres inconnus les déplacements (ou éventuellement leurs dérivées) aux noeuds.
- 2 - La méthode des forces (de souplesse) : dans laquelle les paramètres inconnus sont les contraintes ou les forces résultantes dans les éléments.

Les méthodes des déplacements et des forces diffèrent par la façon dont les deux conditions de base, d'équilibre et de compatibilité (II.2.1) sont appliquées aux noeuds. Pour la méthode rigidité, les conditions de compatibilité des déplacements sont satisfaites et les équations d'équilibre sont posées et résolues pour obtenir les déplacements nodaux inconnus ; pour la méthode de souplesse, les conditions d'équilibre aux noeuds sont d'abord satisfaites, puis on pose les équations exprimant la compatibilité des déplacements nodaux et on les résous pour obtenir les forces inconnues dans les différentes parties de la structure. Il serait utile de mentionner qu'en plus de ces deux méthodes d'approche, on a aussi utilisé ces dernières années une formulation faisant la mélange des deux. [ 5, 7 ]

La formulation matricielle quelle que soit la méthode, rigidité ou souplesse, passe impérativement par deux niveaux.

- La formulation élémentaire : au niveau de l'élément fini.
- La formulation globale : au niveau de la structure complète.

a) **La formulation élémentaire** : Consiste à rechercher pour chaque élément des expressions matricielles des énergies (de déformation et cinétique) et du travail et des forces appliquées en fonction des inconnues élémentaires ; ici déplacements aux noeuds de l'élément. Ceci nécessite le calcul de matrice caractéristique de l'élément : matrice rigidité.

On a par exemple dans le cas de l'analyse statique, les expressions suivantes en fonction du vecteur  $q^e$  des déplacements au noeuds de l'élément.

- Energie de déformation :  $U_e = \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e$  (II. 1)

- Travail des forces appliquées :  $T_e = q^{eT} F^e$  (II. 2)

b) **La formulation globale** : Consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle des énergies (de déformation et cinétique) et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements inconnus *en tous les noeuds* de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires (matrice rigidité, vecteur forces équivalentes) pour *tous les éléments*.

Dans le cas d'une analyse statique, on a pour une structure complète les expressions suivantes en fonction des vecteurs déplacements au noeuds de la structure complète :

- Energie de déformation :  $U = \frac{1}{2} q^T K q$  (II. 3)

- Travail des forces appliquées :  $T = q^T F$  (II. 4)

A ce stade de la méthode on introduit et met en application le principe des travaux virtuels. On utilisera le principe des travaux virtuels pour déterminer les propriétés de rigidité de divers éléments. Ce principe exprime les relations existantes entre l'ensemble des charges extérieures et les forces intérieures correspondantes, satisfaisant ensemble à la condition d'équilibre, et l'ensemble des déplacements des noeuds et les déformations correspondantes des différentes parties satisfaisant à la conditions de compatibilité. Ce principe peut être posé en termes généraux de la façon suivante : Le travail virtuel des charges extérieures est égal au travail virtuel interne absorbé par la structure. Il est à noter que chacun, des deux systèmes (forces et déplacements) peut être réel ou virtuel, la seule limitation étant imposée par les conditions d'équilibre et compatibilité qui doivent être satisfaites.

Les expressions globales d'énergies de déformations et de travail des forces appliquées permettent d'obtenir par l'application directe du principe des travaux virtuels, le système des équations d'équilibre des noeuds.

On a :

$$\begin{aligned} \forall \delta q \neq 0 \quad \delta U &= \delta T \\ \delta q^T K q &= \delta q^T F \\ &\text{Principe des Travaux Virtuels} \end{aligned}$$

$$\text{d'ou : } K q = F \quad \text{Equation d'équilibre (II. 5)}$$

des noeuds

La résolution de ce système linéaire des équations d'équilibre permet de déterminer le vecteur  $q$  des déplacements inconnus.

En récapitulatif, la formulation globale consiste, d'une part, à obtenir les caractéristiques globales à partir des caractéristiques élémentaires, et d'autre part, à déterminer les inconnues du problème (déplacements aux noeuds) par la résolution des équations d'équilibre



## II.4 - CLASSIFICATION DES TRAITEMENTS NUMERIQUES : [ 5 ]

Nous savons maintenant que la M.E.F dans son application matricielle permet de ramener un problème continu à un système d'équations à nombre fini d'inconnues de déplacements. Ils existent des grandes classes de problèmes de calcul des structures ainsi que les types de traitements numériques qui en résultent. Mais nous limiterons nos notions aux problèmes linéaires classiques, qui fait d'ailleurs l'objet de notre étude.

### a) Les problèmes linéaires classiques :

**Analyse statique linéaire :** Elle consiste à déterminer les déplacements et les contraintes dans une structure à comportement linéaire, sous l'influence d'une charge statique ou à *variation lente*. Il est mentionné précédemment que ce problème se ramenait à la résolution du système linéaire :  $K q = F$ .

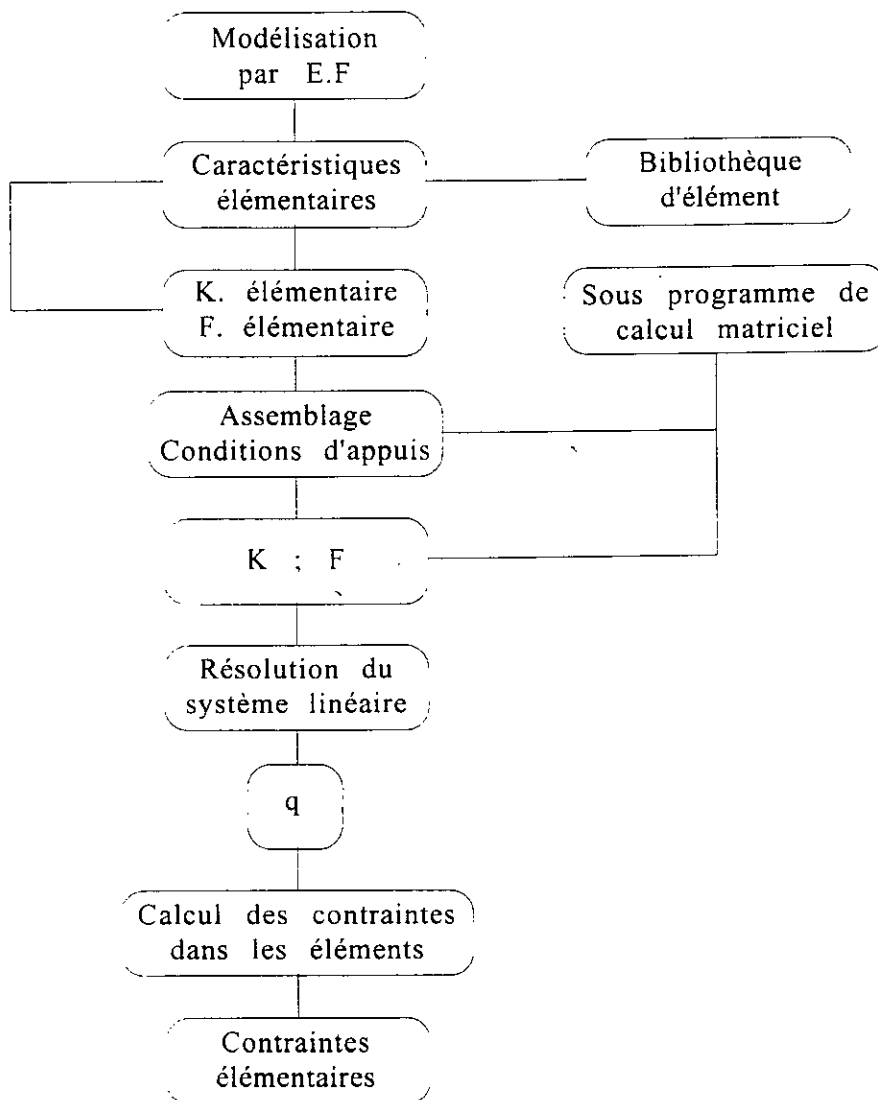


Figure II.2 : Organigramme simplifié pour analyse statique (méthode des déplacements)

## II.5 - EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES SOLIDES : [ 3,4,5,6 ]

Rappel des équations de la mécanique des solides : Le problème type de la mécanique des solides revient à déterminer les deux champs inconnus : Déplacements  $U$ , et contraintes  $\sigma$ , sous l'effet des forces appliquées, force de surface  $\phi$  et force de volume  $f_i$ .

Le phénomène de déformation des corps solides est régi par des équations de champ aux dérivées partielles, avec des conditions mixtes aux limites. Deux approches sont possible, selon que l'on formule complètement le problème en fonction du champ de déplacement et c'est l'approche cinématique, ou dans le champ contraintes et c'est l'approche équilibre.

### II.5.1 - Relations et équations de champ : [ 1,3,5 ]

#### a) Relations cinématiques :(déformations déplacements)

En théorie linéaire d'élasticité :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II. 6})$$

En élasticité à 2 dimensions :

$$u_i = u(x, y) ; u_2 = v(x, y)$$

$$x_i = x ; x_2 = y$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{dv}{dy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \quad (\text{II. 7})$$

Les équations de compatibilité :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{II. 8})$$

En élasticité à 2D :

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II. 9})$$

L'équation d'équilibre est :

$$\sigma_{i,j} + F_i = 0 \quad (\text{II. 10})$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

En élasticité à 2D :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (\text{II. 11})$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \quad (\text{II. 12})$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

**Remarque :**

Les équations de compatibilité sont les conditions d'intégrabilité des déformations qui assurent l'unicité des déplacements. Elles sont obligatoires pour une approche équilibre.

**b) Relation d'élasticité :(contraintes et déformations)**

En comportement élastique on a généralement :

$$\sigma_{ij} = C_{ij,kl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II. 13})$$

$C_{ij,kl}$  :composantes du tenseur élasticité

Pour les matériaux isotropes les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous les deux formes suivantes, connues sous la loi de Hooke :

$$\sigma_{ii} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ii} + 2 \mu \varepsilon_{ii} \quad (\text{II. 14})$$

$$\varepsilon_{kk} = \text{Tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (\text{II. 15})$$

$\lambda, \mu$  coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ii} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ii} \quad (\text{II. 16})$$

$$\sigma_{kk} = \text{Tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (\text{II. 17})$$

Symbole de Kronecker :  $\delta_{ij} = 0$  si  $j \neq i$   
 $\delta_{ij} = 1$  si  $j = i$

c) Conditions aux limites :

Soit un corps solide de surface extérieure  $S$ , ne peuvent exister que deux types de conditions aux limites.

1) Sur une partie  $S_u \subset S$  sont imposés des déplacements  $\overline{U}_i$  :

$$U_i = \overline{U}_i \\ \forall M \in S_u$$

Les conditions (1) sont dites *conditions aux limites cinématiques*. Sur  $S_u$  aucune composante du tenseur des contraintes n'est imposée.

2) Sur une partie complémentaire  $S_\sigma$  ( $S_\sigma \subset S$ ,  $S_u + S_\sigma = S$ ,  $S_u \cap S_\sigma = \emptyset$ ) de  $S$ , sont imposés des efforts extérieurs  $\overline{\phi}_i$ , imposent des valeurs de certaines composantes du tenseur de contraintes par les relations :

$$\sigma_{ij} n_j = \overline{\phi}_i \\ \forall M \in S_\sigma$$

Les conditions (2) sont dites conditions aux limites du type équilibre ou encore statique. Sur  $S_\sigma$  aucun déplacement  $U_i$  n'est imposé.

**Définition :**

Le champ de déplacement cinématiquement admissible :

On appelle champ de déplacement cinématiquement admissible, tout champ  $U_i(M)$  satisfaisant

- Les conditions de continuités
- Les conditions cinématiques, c'est à dire les conditions aux limites sur  $S_u$  soit  $u_i = \overline{u}_i$ .

Champ des contraintes statiquement admissible :

On appelle champ de contraintes statiquement admissible, tout champ de contrainte  $\sigma_{ij}(M)$  satisfaisant les conditions suivantes.

- Les conditions de continuités
- Conditions «statiques» ou de type équilibre.

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (\text{II. 18})$$

conditions aux limites sur  $S_\sigma$ :  $\sigma_{ij} n_j = \overline{\phi}_i$

## II.6 - METHODE MATRICIELLE : [ 5 ]

Nous abordons dans cette partie la base de l'analyse matricielle au niveau global dans le cas des deux méthodes déplacement et force.

### II.6.1 - Equations de base de la mécanique des structures : [ 3, 5 ]

Nous écrivons les équations de base de la mécanique sous leurs formes matricielle.

a) Relations et équations de champ :

$$\text{Relation déformations-déplacements : } \varepsilon = D \cdot u \quad (\text{II. 19})$$

$$\text{Equation d'équilibre : } D^T \sigma + f = 0 \quad (\text{II. 20})$$

Equations constitutives: (loi de Hooke généralisée)

$$\sigma = C \cdot \varepsilon \quad \text{ou} \quad \varepsilon = C^{-1} \sigma \quad (\text{II. 21})$$

**Remarque** : En général, la matrice d'opérateurs différentielles intervenant dans les équations d'équilibre et la transposée de celle des relations déformations-déplacements. On peut donc exprimer les équations d'équilibre en fonction des déplacements (équation de Navier) soient

$$D^T C D \mu + f = 0 \quad (\text{II. 22})$$

b) Conditions aux limites :

- Conditions aux limites cinématiques :

$$u = \bar{u} \text{ sur } S_u$$

- Conditions aux limites type équilibre :

$$N^T \sigma = p \text{ sur } S_p \quad \text{Soit en terme déplacement : } N^T C D \mu = p \text{ sur } S_p$$

**Remarque** : Dans le cas d'effet thermoélastique, les équations de Hooke s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \circ \delta_{ij} \quad (\text{II. 23})$$
$$\beta = \frac{E\alpha}{1-2\nu} \quad \circ = T - T_0$$

## II.6.2 - Théorème de l'énergie : [ 5, 6 ]

Le matériau étant supposé avoir un comportement élastique linéaire nous allons exposer les lois de l'énergie sous leurs formes matricielles, on a donc :

### a) Potentiel de déformation :

$$W|\varepsilon| = W_c|\sigma| = \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon$$

$$W|\varepsilon| : \text{potentiel de déformation} \quad (\text{II. 24})$$

$$W_c|\sigma| : \text{potentiel complémentaire}$$

Le potentiel de déformation  $W$  représente la densité volumique d'énergie

$$\text{de déformation} : W = \frac{du}{dV} \quad (\text{II. 25})$$

### Potentiel de déformation complémentaire :

- Pour tout corps solide en équilibre, l'énergie potentiel complémentaire est stationnaire pour tout accroissement virtuel statiquement admissible du champ des contraintes.
- Pour tout corps solide en équilibre, l'accroissement virtuel de l'énergie complémentaire de déformation  $U_c$  est égal à la somme des travaux des champs virtuels des forces de volume et de surface dans le champ des déplacements réels (travaux virtuels complémentaires).

$$\text{On a donc : } W|\varepsilon| = \frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon .$$

$$W_c|\sigma| = \frac{1}{2} \sigma^T C^{-1} \sigma .$$

### b) Principe des travaux virtuels : [ 5 ]

Pour un corps solide en équilibre et pour tout accroissement virtuel cinématiquement admissible qui satisfait les conditions d'équilibre, sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle totale et réciproquement.

On a donc :

$$\dot{V} = \dot{U} - \dot{T} \text{ avec } V: \text{ énergie potentielle totale} \quad (\text{II. 26})$$

$U$ : énergie de déformation

$T$ : travail des forces appliquées

Soit :

$$V = \int_V W[\varepsilon] dv - \int_V f^T u dv - \int_{S_\sigma} p^T u ds \quad (\text{II. 27})$$

dv: domaine définie par le solide dé formabl

ds: surface exté rieur dusolide

### c) Principes des travaux virtuels complémentaires : [ 5 ]

Pour un solide en équilibre ou pour tout accroissement virtuel statiquement admissible des contraintes et des forces appliquées on a :

$$\delta U_c = \delta T_c \text{ soit } \int_V \varepsilon^T \delta \sigma dv = \int_V u^T \delta f dv + \int_S u^T \delta p ds \quad (\text{II. 28})$$

### d) Théorème de l'énergie potentielle complémentaire : [ 5 ]

Pour un état d'équilibre stable, le champ de contraintes statiquement admissible minimise l'énergie potentielle complémentaire, soit :

$$V_c = U_c + T_c$$

$$\text{ou : } V_c = \int_V W_c [\sigma] dv - \int_{S_u} u^T N^T \sigma ds \quad (\text{II. 29})$$

## II.7 - PROPRIETES DES STRUCTURES DISCRETES : [ 5,6,7 ]

### Notion de structure discrète :

Les formulations matricielles précédemment vues s'applique aux structures discrètes. Une structure discrète est composée d'élément discret (barre, poutre), de forme géométrique simple interconnectés en des points de la structure que l'on appelle "noeuds".

On caractérise le comportement de cette structure par un nombre fini de paramètres inconnus, soit les déplacements aux noeuds, soit les forces dans les éléments.

### a) Théorème 1 de Castigliano : [ 5, 6 ]

**Thm 1** : Soit une structure discrète soumise soumise à un système de forces ponctuelles  $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n)$ . Soient respectivement  $e_i$  et  $q_i$  vecteur unité et le déplacement dans la direction d'application de la force  $F_i$  au noeud  $M_i$ .

Soient les systèmes de déplacement virtuels tel que l'on ait :

$$\delta \bar{u} = \begin{cases} \delta q_i e_i & \text{au noeud } M_i \\ 0 & \text{au autres noeuds} \end{cases}$$

D'après le principe des travaux virtuels on a à l'équilibre :  $\delta U = \delta T$   
 Dans notre cas, c'est-à-dire, un système de forces ponctuelles, le travail des forces appliquées s'écrit simplement :

$$T = F^T q$$

$$\text{d'ou } \delta T = F_i \cdot \delta q_i \quad \text{on a donc } F_i = \frac{\delta u}{\delta q_i}$$

Ou encore si l'on exprime l'énergie de déformation en fonction seulement des déplacements aux noeuds :

$$F_i = \frac{\partial U_{(q_i)}}{\partial q_i} \quad (\text{II. 30})$$

On peut répéter le même raisonnement pour tous les degrés de liberté. On obtient donc N équations qui constituent les équations d'équilibre des noeuds soit :

$$F = \nabla_q U = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial U}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad \text{Gradient du scalaire U par rapport aux } q(i) \quad (\text{II. 31})$$

Ce résultat est connu sous le nom de premier théorème de *Castigliano*.

### II.7.1 - Matrice de rigidité :

Définition : On appelle matrice rigidité d'une structure la matrice K permettant d'exprimer l'énergie de déformation sous une forme quadratique des déplacements.

$$U = \frac{1}{2} q^T K q \quad (\text{II. 32})$$

par application du premier théorème de *Castigliano*.

$$\nabla_q U = K q = F \quad (\text{II. 33})$$

Ce système d'équation représente la forme habituelle des équations d'équilibre des noeuds.



### II.7.2 - Méthode des forces :

Les méthodes matricielles d'analyse des structures peuvent se classer selon le choix des inconnues, en méthodes des déplacements et méthodes des forces. Dans la méthode des déplacements, on formule le problème en fonction des déplacements nodaux généralisés, alors que dans la méthode des forces, c'est en fonction des forces nodales généralisées (forces internes ou réactions d'appuis). Nous commencerons par donner un exposé succinct de la méthode des forces.

**Principe :** La méthode des forces est basée sur une approche énergétique utilisant l'énergie de déformation complémentaire. On distingue différentes phases de calcul.

- Formulation élémentaire : calcul des caractéristiques élémentaires de flexibilité.
- Formulation globale :
  - choix des inconnues hyperstatiques et écriture des équations d'équilibre des noeuds.
  - recherche des conditions de compatibilité des coupures simples.

A ce stade on peut calculer les inconnues hyperstatiques et donc tous les efforts internes en fonction des forces extérieures.

- calcul de la matrice de flexibilité de la structure pour la détermination des déplacements nodaux.

### II.7.3 - Méthode des déplacements : [ 4, 5, 6, 7 ]

**Principe :** Dans la méthode des déplacements, on formule le problème en fonction des déplacements au noeuds. On peut mettre en évidence les étapes suivantes.

**Au niveau élémentaire :** Calcul des matrices de rigidité élémentaire

**Au niveau global :**

- Assemblage des matrices rigidité de manière à satisfaire des équations d'équilibre des noeuds.
- Prise en compte des conditions des déplacements imposés.
- Résolution par rapport aux inconnues de déplacements.
- Calcul des contraintes dans les éléments.

### Au niveau élémentaire :

La structure étant au préalable discrétisé en éléments. On caractérise le comportement de chaque élément *libre* par ses déplacements nodaux, soit le vecteur  $q^e$ . On calcul pour chaque élément sa matrice rigidité élémentaire telle que son énergie de déformation puisse s'exprime sous la forme.

$$U^e = \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e \quad (\text{II. 34})$$

Généralement, les matrices de rigidité sont calculées dans les axes locaux des éléments. Les transformations nécessaires sont alors effectuées pour les calcul des systèmes d'axes globaux.

### Au niveau global :

**Assemblage :** Les matrices de rigidité élémentaires sont utilisées pour calculer la matrice rigidité de la structure complète permettant d'exprimé l'énergie de déformation en fonction des déplacements nodaux de la structure (vecteur  $q$ ) soit :

$$U = \sum_{\text{Elements}} U^e = \sum_{\text{Elements}} \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e = \frac{1}{2} q^T K q \quad (\text{II. 35})$$

On peut obtenir les équations d'équilibre de la structure en appliquant le premier théorème de *Castigliano*.

$$F = \nabla_q U = Kq \quad (\text{II. 36})$$

Cette opération est appelée assemblage.

La règle d'assemblage des matrices rigidité élémentaire consiste pour un noeud donné à additionner les sous-matrices de rigidité nodale des éléments ayant un noeud en commun.

### Prise en compte des conditions de déplacements imposé :

La matrice rigidité de la structure complète obtenue en assemblant les matrices de rigidité d'éléments libres à un nombre de singularité égal au nombre maximum des modes de déplacement d'ensemble possibles. Cette matrice  $K$  de la structure libre est donc semi- définie positive. Les conditions d'appuis si elle sont en nombre suffisant empêchent toute possibilité de déplacement d'ensemble et rendent donc la matrice  $K$  définie positive. Avant de résoudre le système des équations d'équilibre pour déterminer les déplacements inconnus, il faut prendre en compte des conditions de déplacements imposées.

Pour cela, nous écrivons les systèmes des équations d'équilibre en numérotant les degrés de liberté (d. d. l) de façon à pouvoir définir la partition suivante.

$$q = \begin{bmatrix} q_l \\ q_p \end{bmatrix}$$

$q_l$  : déplacements restant ( inconnus )

$q_p$  : déplacements pré écrits ou imposés ( conditions initiales )

$$F = \begin{bmatrix} F_l \\ F_p \end{bmatrix}$$

$F_l$ : Forces appliquées correspondant aux déplacements inconnus ( elles sont connues )

$F_p$ : Forces correspondant aux déplacements imposés ( réactions d'appuis inconnues )

En développant les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} K_{ll} q_l + K_{lp} q_p &= F_l \\ K_{pl} q_l + K_{pp} q_p &= F_p \end{aligned} \quad (\text{II. 37})$$

$$K_{ll} q_l = ( F_l - K_{lp} q_p ) = \bar{F}_l$$

On peut alors calculer le vecteur second membre  $\bar{F}_l$  et résoudre le système précédent (II. 37) qui est défini positif si les conditions de déplacement imposés sont en nombre suffisant. Après résolution du système, on peut calculer les réactions d'appuis.

$$F_p = [K_{pp} - K_{pl} K_{ll}^{-1} K_{lp}] q_p + [K_{pp} K_{ll}^{-1}] F_l \quad (\text{II. 38})$$

Dans le cas particulier de conditions d'appuis de type déplacement nul ( $q_l = 0$ ) les expressions précédentes se simplifient :

$$\begin{aligned} K_{ll} q_l &= F_l \\ F_p &= K_{pl} q_l \end{aligned} \quad (\text{II. 39})$$

d'où  $F_p = K_{pl} K_{ll}^{-1} F_l$

Dans ce cas, la prise en compte des conditions d'appuis et donc très simple il suffit de supprimer dans la matrice de rigidité lignes et colonnes correspondant au d.d.l fixés. Cette est appelée en pratique suppression de d.d.l.

**Résolution du système linéaire**  $K_{ll} q_l = F_l$ .

En pratique, la matrice  $K_{ll}$  auquel on aboutit est de grande taille. Il existe des méthodes de résolution appropriées qui tirent parti du caractère *symétrique* et de la topologie des matrices rigidité.

## Calcul des forces internes et des contraintes dans les éléments :

Après la phase résolution, on connaît les déplacements nodaux de chaque élément. On peut alors calculer les forces nodales internes par relations.

$$F^e = K^e q^e \quad (\text{II. 40})$$

Par ailleurs, il est possible de définir des relations matricielles permettant de calculer les contraintes dans les éléments soit  $\sigma^e$  en fonction de leurs déplacements nodaux, c'est-à-dire  $\sigma^e = S^e q^e$  (II. 41)

Il faut noter que la méthode déplacement est plus universelle que la méthode des forces, puisqu'elle permet plus aisément la résolution de problème dynamique et non linéaire.

## II.8 - FONDEMENT DE LA M.E.F : [ 5, 6 ]

Les structures sont souvent constituées par des milieux continus (plaques, coques, ou élasticité à 3 dimensions) aux géométries les plus diverses pour lesquelles on ne possède pas de solutions analytiques et que les méthodes matricielles traditionnelles ne permettent pas d'analyser. Dans ce cas il faut avoir recours à des techniques numériques basées sur les méthodes d'approximations adéquates, pour discrétiser ces continuum. La M.E.F étant une de ces méthodes, et de loin la plus utilisée, car elle étend les possibilités des méthodes matricielles à un très vaste domaine d'application et permet ainsi l'analyse des structures très complexes.

### Rappels sur les méthodes d'approximations :

**Notion :** Le problème générale de l'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction  $U(M)$  à domaine de définition  $D$  de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit.

$$\text{L'approximation } \tilde{u} \text{ est : } \tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(M) \quad \forall (x,y,z) \quad (\text{II. 42})$$

Les  $\phi_i(x,y,z)$  sont des fonctions choisies et constituent *la base fonctionnelle*. Les coefficients inconnus  $a_i$  sont appelés *coordonnées généralisées*.

On appelle  $\tilde{u}(M)$ , approximation de  $u$  dans la base fonctionnelle  $\phi_i$ .

$$\text{La notation matricielle est } \tilde{U} = [\phi]^T [a] \quad (\text{II. 43})$$

Les fonctions de base de l'approximation doivent satisfaire certaines conditions : continuité, conditions aux limites et complétude.

### Méthode de Galerkin :

$$W_i(M) = \phi_i(M) \text{ donc } \int_D E(m)\phi_i(M) dv = 0 \quad i = 1 \dots N \quad (\text{II. 45})$$

Les N conditions d'orthogonalité conduisent à un système linéaire si l'opérateur L est linéaire.

### Méthodes variationnelles :

**Méthode de Ritz :** Dans certain cas, les lois physiques peuvent s'exprimer sous une forme variationnelle, c'est-à-dire, sous la forme de conditions d'extremum d'une fonctionnelle : énergie potentielle totale  $V(u_i)$ . Il existe des méthodes d'approximation adaptées à de telle formulations variationnelles. Parmi ces méthodes, la méthode de **Ritz** est certainement la plus simple et la plus généralement utilisée. C'est également la plus importante car elle constitue généralement *le fondement des méthodes aux éléments finis* utilisées pour l'analyse des structures.

**Principe :** La solution exacte de problème variationnel est celle qui, appartenant à l'espace des fonctions admissibles et satisfaisant les conditions aux limites cinématiques (du type déplacements imposés), rend extrémale l'énergie potentielle totale.

$\delta v = 0 ; \forall \delta u$  cinématiquement admissible  
avec

$$V(u) = \int_V F(x, \frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^m u}{d^m x}) dv$$

m est l'ordre de cette fonctionnelle, c'est-à-dire, l'ordre maximal de dérivation des déplacements apparaissant dans l'expression du potentiel de déformation.

Dans la méthode de **Ritz**, on cherche la meilleur approximation appartenant au sous-espace de dimension finie N de fonction cinématique admissible engendré par les fonctions de base  $\phi_i(M)$ .

$$\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(M)$$

La meilleur approximation est celle qui, appartenant à ce sous-espace ainsi défini rend extrémale l'énergie potentielle totale :

$$\tilde{V}(\tilde{u}) = \tilde{V}[a_i]$$

La meilleure approximation est donc caractérisée par les N conditions de stationnarité de  $\tilde{V}$  par rapport aux  $a_i$  soient :  $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1 \dots N$

Si l'énergie potentielle totale peut se mettre sous forme quadratique (par rapport aux  $a_i$ ).

Les conditions de stationnarité précédentes conduisent à un système linéaire que l'on peut considérer comme le système d'équations généralisées et si l'on choisit pour coordonnées généralisées les déplacements aux noeuds de la structure, on écrit :

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} q^T K q - q^T F \quad . \quad (\text{II. 46})$$

### II.8.2 - Conditions de convergence :

La méthode de *Ritz* a la propriétés remarquable d'assurer une convergence monotone de l'énergie potentielle totale :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{V}_N^* = V^*$$

avec : -  $V^*$  é nergie potentielle totale correspondant à la solution exacte .

-  $\tilde{V}_N^* ( \neq V^* )$  é nergie potentielle totale correspondant à la solution approché e .

La méthode converge dans la mesure où l'on observe certaines conditions sur le choix des fonctions de base et cela dans le cas de l'approche déplacement. Les conditions nécessaires de convergence de la méthode sont les suivantes :

- 1 - **Complétude** : Les fonctions  $\phi_i(M)$  doivent constituer une base complète de manière à pouvoir évaluer correctement l'énergie potentielle totale.
- 2 - **Admissibilité** : Les fonctions doivent être admissibles, c'est-à-dire :
  - a) satisfaire les conditions de continuité requises par le problème, conditions qui dépendent essentiellement de l'ordre m de la fonctionnelle.
  - b) satisfaire *les conditions aux limites rigides* du problème variationnel, c'est-à-dire, les conditions aux «limites cinématiques» dans le cas d'une approche déplacement.

## II.9 - L'ÉLEMENT FINI : [ 4, 5, 6 ]

La M.E.F peut être considéré comme une extension de la méthode de *Ritz*, elle permet l'analyse de structure complexes par la méthode déplacement, et cela du fait que la méthode de *Ritz* est limitée à des géométrie relativement simples.

Le principe de base de la M.E.F consiste à subdiviser le continuum (structure) en sous-domaine de forme relativement simple appelés ' élément fini '. On définira alors une approximation de la solution non pas pour l'ensemble de la structure, mais pour chacun de ses éléments constitutifs.

Il y a plusieurs sortes de formulation d'élément finis en mécanique des structures. La formulation la plus adaptée au sujet de notre étude est : la formulation déplacement : dans laquelle on se donne une approximation du champ de déplacement, le critère variationnelle étant celui de l'énergie potentielle totale.

### II.9.1 - Le modèle déplacement :

Dans la démarche fondamentale de la M.E.F, il faut distinguer trois aspects que nous allons détailler ci-après dans le cas des modèles déplacements.

- La discrétisation de la structure en éléments.
  - Le choix d'une approximation pour chaque élément.
  - Le choix des coordonnées généralisées « physiques » (déplacements nodaux) pour chaque élément.
- Discrétisation de la structure : (Choix du maillage).

On subdivise la structure ou le milieu continu à étudier en éléments finis de forme géométrique simple, de manière à approximer le mieux possible sa géométrie.

- Approximation du champ des déplacements :

Par ailleurs, il est nécessaire de se donner une approximation du champ des déplacements à l'intérieur de chaque élément (e), soit :

$$[u(M)]^e = [\varphi(M)] [a] \quad M(x,y,z) \in V^e \quad (\text{II. 47})$$

avec :  $[\varphi(x,y,z)]$  matrice de fonctions de base de l'approximation

$[a]^e$  vecteur des coordonnées généralisées de l'élément

- Choix de variables physiques : les déplacements aux noeuds.

La relation de définition de l'approximation élémentaire ne peut pas être utilisée pour résoudre le problème global. En effet, les coordonnées généralisées varient d'un élément à l'autre et il est donc nécessaire d'adopter de nouvelles variables physiques permettant d'assurer la compatibilité des déplacements et d'exprimer les conditions d'équilibre aux noeuds.

Soit  $q^e$  le vecteur regroupant les composantes des déplacements aux noeuds et éventuellement leurs dérivées successives.

Alors :

$$[U(M)]^e = [A(M)]^e [q]^e \quad (\text{II. 48})$$

avec :  $[A]^e$  matrice d'interpolation dont les éléments sont fonction des coordonnées d'espace.

La relation précédente permet de caractériser les déplacements en un point de l'élément en termes d'interpolation des déplacements aux noeuds (et éventuellement leurs dérivées).

**II.9.2 - Propriétés des éléments de type déplacement :**

Certaines propriétés sont nécessaires ou du moins souhaitables au niveau de l'élément afin d'obtenir de **bonnes** solutions au niveau de la structure. En particulier, les conditions de convergence de la M.E.F, qui a été présentée comme une méthode de *Ritz* par morceaux, se déduisent des conditions de convergence de la méthode de *Ritz*, c'est-à-dire, **complétude et compatibilité**.

- **Complétude** : Un élément fini est dit *complet* quand il permet la définition d'un champ de déplacement complet au sens de Ritz, c'est-à-dire quand l'approximation de la solution dans l'élément permet de représenter à la limite n'importe quelle valeur des déformations quand on diminue la taille de l'élément.

Ce critère s'applique d'une part aux états de déformation nulle, c'est-à-dire aux modes rigides, et d'autre part aux états de déformation élastique.

- **Compatibilité** : Un élément fini est dit compatible quand il permet la définition d'un champ compatible au sens de Ritz, c'est-à-dire une continuité  $C^0$  (déplacements continus) pour les problèmes d'élasticité ( $m=1$ ) et une continuité  $C^1$  (déplacements et leurs dérivées premières continus) pour les problèmes de flexion ( $m=2$ ). De part le principe même de la M.E.F, cette condition de continuité s'applique à l'intérieur des éléments et aux interfaces inter-éléments.



- **La convergence** : Les conditions de convergence de la M.E.F se déduisent de celles de la méthode de *Ritz*. Les éléments finis de type déplacement convergent en énergie s'ils satisfont les conditions de complétude et de compatibilité présentées précédemment. De tels éléments sont appelés *éléments conformes*.

### II.9.3 - Matrice d'interpolation :

De ce nous connaissons, nous savons que les éléments type déplacement sont basés sur l'expression du champ déplacement  $u^e$  à l'intérieur des éléments :

$$u^e = A^e q^e \quad ; \quad A^e: \text{matrice d'interpolation de l'élément } e .$$

$q^e$ : vecteur des déplacements nodaux de l'élément  $e$

Ce qui permet d'introduire la notion de *fonction d'interpolation* tel que :

$$U(M) = [N]^T \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(M) u_i .$$

( II . 49 )

$$V(M) = [N]^T \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(M) u_i . \text{ Pour un élément à } n \text{ noeuds .}$$

Les fonctions  $N_i(M)$  sont appelées fonctions d'interpolation ou encore « *shape fonction* » dans la littérature anglo-saxonne. Il est important d'insister sur la signification physique de la fonction d'interpolation.

### II.9.4 - Série polynomiales :

L'approche la plus simple pour décrire le comportement d'un élément consiste à approximer son champ de déplacement par des séries de polynômes dont les coefficients  $a_i$  sont les coordonnées générales de l'approximation.

Dans le cas bidimensionnel, pour chaque composante de déplacement.

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i x^j y^k .$$

Matriciellement : (II. 50)

$$[u(x, y)] = [\varphi_m(x, y)] [a] .$$

m : étant le degré du polynôme .

Le triangle de pascal permet de mettre en évidence le nombre de termes présents dans ce type d'approximation. Pour notre cas.

Le champ étant linéaire  $n=3$ ,  $m=1$ .

Le nombre total de coordonnées généralisées de l'approximation doit être généralement égal au nombre total de déplacements nodaux de l'élément.

### Coordonnées intrinsèques :

Les coordonnées intrinsèques (ou coordonnées naturelles) permettent de définir une transformation du domaine physique de l'élément en un domaine géométrique simple sans dimension dans lequel on peut construire plus aisément les fonctions d'interpolation.

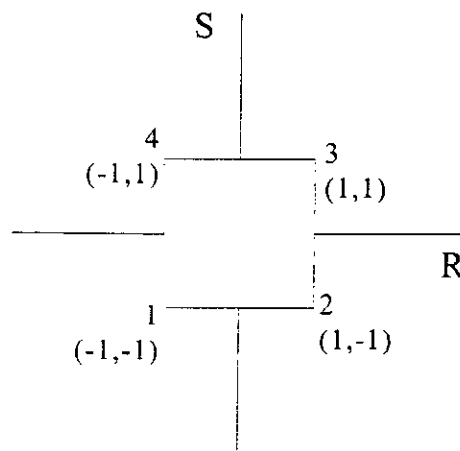
### Coordonnées intrinsèques pour quadrilatères :

Pour les quadrilatères on peut définir un système de coordonnées intrinsèques (r,s) telles que sur les interfaces des éléments on ait :

$$r = \pm 1 \quad \text{ou} \quad s = \pm 1$$

Tout point de l'élément peut être repéré de façon unique par le couple (r,s). On aura en particulier pour les quatres noeuds principaux.

- Noeud 1 : (-1,-1)
- Noeud 2 : (1, -1)
- Noeud 3 : (1,1)
- Noeud 4 : (-1,1)



La relation entre coordonnées intrinsèques et physiques s'écrit ici :

$$X = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) X_i \quad ; \quad Y = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) Y_i$$

Matriciellement :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 N_2 N_3 N_4 & 0 \\ 0 & N_1 N_2 N_3 N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 51}).$$

Les fonctions d'interpolation géométrique dans le cas bidimensionnel et compte tenu de la position des noeuds sont .

$$N_1 = \frac{1}{4} (1-r) (1-s)$$

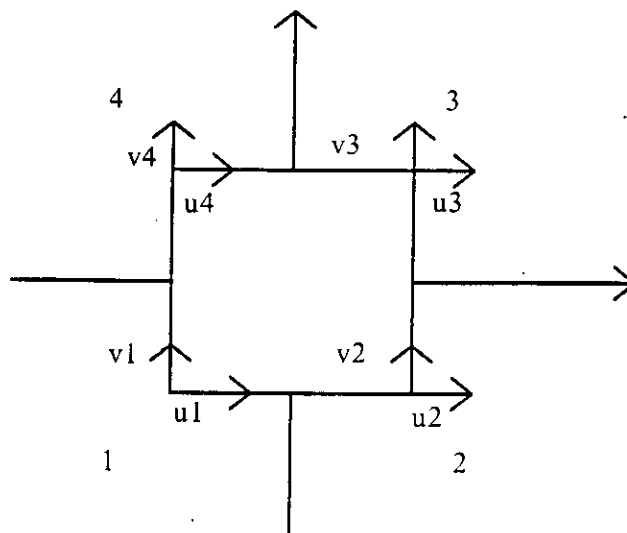
$$N_2 = \frac{1}{4} (1+r) (1-s)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1+r) (1+s)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1-r) (1+s)$$

**Fonctions d'interpolation en coordonnées intrinsèques :**

Cas du quadrilatère :



L'élément étant rectangulaire à 4 noeuds donc à 8 d.d.l. Il est basé sur l'approximation suivante du champ de déplacement :

$$\begin{aligned} U(x,y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (\text{II. 51}) \\ V(x,y) &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{aligned}$$

Le choix de base de l'approximation est évident : en effet, il faut au moins un polynôme complet du premier degré auquel on ajoute un terme supplémentaire symétrique en xy pour obtenir quatre coordonnées généralisées par composantes de déplacement.

En coordonnées intrinsèques cela donne :

$$\begin{aligned} U(r,s) &= a_1 + a_2r + a_3s + a_4rs \quad (\text{II. 52}) \\ V(r,s) &= a_5 + a_6r + a_7s + a_8rs \end{aligned}$$

Les fonctions d'interpolation étant les même que celle vues précédemment. Ainsi le domaine physique du quadrilatère peut être défini par l'interpolation géométrique.

$$X = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) x_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) y_i \quad (\text{II. 53})$$

Les coordonnées intrinsèques permettent de définir facilement l'interpolation des déplacements, soit :

$$u(r,s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) x_i \quad v(r,s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) y_i \quad (\text{II. 54})$$

Les coordonnées intrinsèques permettent de définir facilement l'interpolation des déplacements, soit :

$$u(r,s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) x_i \quad v(r,s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r,s) y_i \quad (\text{II. 55})$$

On voit que dans ce cas les fonctions d'interpolation de la géométrie et des déplacements sont identiques. Elles sont définies par la même expression générale.

$$N_i(r,s) = \frac{1}{2} (1 + r r_i) (1 + s s_i) \quad \text{avec } r_i \text{ et } s_i = +1 \text{ ou } -1 \text{ selon les noeuds .}$$

Cet élément est donc isoparamétrique. Ainsi il est aisé de développer des éléments de quadrilatères en utilisant les coordonnées intrinsèques et les fonctions d'interpolation définies sur la carré.

## II.9.5 - Élément isoparamétrique :

Nous avons vu précédemment que l'utilisation de coordonnées intrinsèques permettaient de définir une transformation entre le domaine physique de l'élément et un domaine simple sans dimension et pour lequel il est aisé de construire les fonctions d'interpolations des déplacements. Ainsi deux types d'interpolation interviennent dans la construction d'un élément fini, *l'interpolation géométrique* et *l'interpolation des déplacements*.

### Définition :

Un élément fini est dit isoparamétrique quand il est basé sur des interpolations identiques pour sa géométrie et son champ de déplacement. On peut donc écrire pour tel élément les relations d'interpolation sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^m N_i(r,s) x_i \\ Y &= \sum_{i=1}^m N_i(r,s) y_i \end{aligned} \right\} \text{interpolation géométrique .}$$

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^m N_i(r,s) u_i \\ V &= \sum_{i=1}^m N_i(r,s) v_i \end{aligned} \right\} \text{interpolation des déplacements .}$$

### II.9.5.1 - Propriétés :

- 1 - Continuité inter-éléments : Si les fonctions d'interpolation satisfont les conditions de continuité requises pour *l'élément parent* (de référence) alors ces conditions de continuité seront également satisfaites pour l'élément isoparamétrique. Cette propriété est évidente s'il y a unicité de la transformation géométrique.
- 2 - complétude : Les états de déformation constante sont correctement représentés dans les éléments isoparamétriques si la condition suivante est respectée.

$$\sum N_i = 1 .$$

Calcul des éléments isoparamétriques :

Pour un quadrilatère :

Les fonctions d'interpolation étant déjà connues.

$$X = [N]^T [x] \quad U = [N]^T [x]$$

$$Y = [N]^T [x] \quad V = [N]^T [x]$$

$$\text{avec : } [N]^T = \frac{1}{4} [(1-r)(1-s), (1+r)(1-s), (1+r)(1+s), (1-r)(1+s)] .$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

On peut écrire la formule de différenciation suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$J : \text{é tant le jacobien de la transformation soit : } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

On peut calculer le jacobien en utilisant les relations d'interpolation géométrique soit par exemple.

Si la transformation géométrique est unique, le Jacobien est non singulier.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i$$

$$\text{On obtient : } J = \begin{bmatrix} N_{1,r} & N_{2,r} & N_{3,r} & N_{4,r} \\ N_{1,s} & N_{2,s} & N_{3,s} & N_{4,r} \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit sous une forme condensé e: } J = \begin{bmatrix} N_r^T \\ N_s^T \end{bmatrix} [X :: Y]$$

$$\text{Dans notre cas : } J = \begin{bmatrix} -(1-s) & (1-s) & (1+s) & -(1+s) \\ -(1-r) & -(1-r) & (1+r) & (1+r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 56})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}$$

On obtient à partir des relations précédentes, l'expression des dérivées des déplacements.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} N_{,r}^T \\ N_{,s}^T \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} N_{,r}^T \\ N_{,s}^T \end{bmatrix} [v]$$

D'ou :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{,r}^T & 0 \\ N_{,s}^T & \\ & N_{,r}^T \\ 0 & N_{,s}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

D'ou l'expression des déformations :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \end{bmatrix}$$

On peut obtenir les deux expressions précédentes de la matrice B d'interpolation des déformations tel que l'on puisse écrire :

$$\varepsilon = B(r,s) q$$

$$\text{avec } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{,r}^T & 0 \\ N_{,s}^T & \\ & N_{,r}^T \\ & & N_{,s}^T \end{bmatrix}$$

Si l'on adopte les nouvelles variables d'espace (r,s), l'expression usuelle de la rigidité devient :

$$K = \int_{V^e} B^T C B dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e B^T C B \det J dr ds \quad (\text{II. 57})$$

Cette matrice de rigidité est alors calculée par intégration numérique dans le domaine (r,s) en utilisant la formule suivante :

$$K = \sum_{ij} W_{ij} e_{ij} B_{ij} C B_{ij} (\det J)_{ij}$$

Avec :  $B(r_i, s_j)$  ;  $e_{ij} = e(r_i, s_j)$  ;  $(\det J)_{ij} = (\det J)_{r_i, s_j}$

$W_{ij}$  : coefficient de pondération au point d'intégration  $(r_i, s_j)$  .

### Intégration numérique :

Le calcul d'une intégrale numérique peut être effectué en utilisant l'une des deux méthodes.

- La méthode de *Newton-cotes*.
- La méthode de *Gauss*.

Nous nous bornerons à l'étude de la méthode de *Gauss*.

### Méthode de Gauss :

Cette méthode est basée sur le principe suivant. On choisit à priori n points d'intégration sans donner leur positions, mais aussi on détermine cette position de façon à minimiser l'erreur.

Ainsi dans le cas de n points d'intégration, nous avons n inconnues supplémentaires. Les positions des points d'intégration  $r_i()$  qui sont déterminées par les conditions de minimum d'erreur.

Ainsi on peut définir un polynôme de degré  $(2n-1)$  satisfaisant  $2n$  conditions, d'une part, le respect des valeurs de la fonction aux points d'intégration  $f(r_i)$ , et d'autre part, les conditions de minimum de l'erreur en fonction de la position des points d'intégration.

Cette méthode permet d'intégrer de façon exacte un polynôme de degré  $2n-1$ .



L'intégrale peut alors être évaluée par la formule :

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr = \sum_{i=1}^n W_i f(r_i) \text{ dans le cas unidimensionnel.}$$

Pour les problèmes bidimensionnels les quadrilatères par exemple, on peut utiliser des méthodes d'intégration numérique déduites directement de la méthode de Gauss dans le cas unidimensionnel. On a vu, que le calcul de la matrice rigidité en coordonnées intrinsèques pouvait se formuler sous la forme suivante.

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds$$

$$\text{Avec } F(r,s) = B^T C B e \det J$$

Si l'on intègre on obtient :

$$K = \int_{-1}^1 \left[ \sum_i W_i f(r_i, s_j) \right] ds = \sum_j W_j \sum_i W_i F(r_i, s_j)$$

$$K = \sum_i \sum_j W_i W_j F(r_i, s_j) .$$

## II.10 - TECHNIQUE DE CALCUL AU NIVEAU GLOBAL : [ 5,6,7 ]

### Méthode de résolution en analyse statique :

#### L'assemblage :

La phase d'assemblage consiste à construire les matrices K et F de la structure complète à partir des matrices caractéristiques des différents éléments  $K^e$  et  $F^e$  préalablement calculées.

Cette méthode d'assemblage peut être approchée par le calcul de l'énergie potentielle totale.

Soit  $V^e$  l'énergie potentielle totale de l'élément e.

$$V^e = \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e - q^{eT} F^e$$

Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaires soit :

$$V = \sum_{\text{elements}} V^e = \sum_{\text{elements}} \left[ \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e - q^{eT} F^e \right]$$

Soit q le vecteur des déplacements nodaux de la structure .

$q^T = [q_1 \dots q_i \dots q_n]$  avec  $q_i$  : sous - vecteur de déplacement au noeuds i

La compatibilité des déplacements de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une matricielle du type.

$$q^e = B^e q \quad (n_e \times 1) = (n_e \times n)(N \times 1)$$

$B^e$  : matrice de localisation ou de connectivité géométrique élémentaire .

$n_e$  : nombre de degré de liberté .

$N$  : nombre de degré de liberté de la structure .

La relation précédente permet de repérer ou de localiser les degrés de liberté de chaque élément dans l'ensemble des degrés de liberté de la structure.

On revient donc à :

$$V = \sum_{\text{elements}} \frac{1}{2} [q]^T [B^e]^T [K^e] [B^e] [q] - [q]^T [B^e] [F^e] \quad (\text{II.58})$$

$$\text{d'ou : } V = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q] - [q]^T [F]$$

Avec :  $[K] = \sum_{\text{elements}} [B^e]^T [K^e] [B^e]$  . Matrice de rigidité de la structure complète .

$[F] = \sum_{\text{elements}} [B^e] [F^e]$  . Vecteurs des forces équivalentes .

### Élément pour élasticité plane :

Les différents éléments utilisables pour les problèmes d'élasticité plane (contrainte et déformation) sont répertoriés.

Lorsque l'on doit choisir un type d'élément pour la résolution d'un problème donné, on arrive généralement au dilemme suivant : ou bien choisir des éléments simples en très grand nombre, ou bien, choisir des éléments d'ordre élevé en nombre restreint ? Des triangles ou des quadrilatères ?

Il n'y a pas de réponse unique. Cependant, on peut faire des constatations très intéressantes sur le comportement respectifs des éléments en résolvant certains cas tests. L'un des tests les plus instructifs pour les éléments plans est celui de la poutre rectangulaire encastree. On en tire les conclusions suivantes.

- Les éléments quadrilatères donnent de meilleurs résultats que les triangles.
- Pour un même nombre de degré de liberté les éléments à champ quadratique ont une meilleure précision que les éléments à champ linéaire.
- Dans certains cas (gradient important), il peut être intéressant d'utiliser les (quadrilatères de préférence) à champ quadratique qui constituent un bon compromis complexité-précision. L'utilisation d'élément à champ cubique n'améliore que très légèrement la précision et n'est que rarement justifiée.

- Choisir les quadrilatères de préférence aux triangles.
- Eviter dans la mesure du possible les éléments allongés.

Dans le cas de forces ponctuelles appliquées aux noeuds de la structure (vecteur P), l'expression de F devient :

$$[F] = [P] + \sum_{\text{elements}} [B^e]^T [F^e] \quad (\text{II. 59})$$

On peut écrire les conditions d'extremum de l'énergie potentielle totale V par rapport au vecteur q :

$$\nabla_q V = [K][q] - [F] = 0 .$$

Ces conditions d'extremum sont en fait les équations d'équilibre des noeuds de la structure et constituent un système linéaire symétrique.

La règle pratique d'assemblage est tel que, l'assemblage de la matrice rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous-matrices de rigidité module de chaque élément les indices de ligne et colonne correspondant à la numérotation des noeuds de cet élément.

L'assemblage des forces équivalentes se fait de façon similaire.

### Prise en considération des conditions sur les déplacements :

Il existe deux types de conditions sur les déplacements nodaux dont la prise en compte nécessite des traitements différents.

- Les relations de dépendance linéaire entre d.d.l.
- Les relations de déplacement imposé et en particulier les conditions d'appuis.

### Déplacements imposés :

Nous avons déjà exposé ces conditions nous en rappelons l'essentiel. Pour cela, effectuons la partition suivante des d.d.l indépendants.

Les équations  $K_{LL} q_L + K_{pL} q_L = F_p$  permettent de calculer les réactions d'appuis.

$$q_n = \begin{bmatrix} q_p \\ q_L \end{bmatrix} \quad q_p: \text{Déplacements prescrits ( connus ) ; } q_L: \text{Déplacements restants ( inconnus ) .}$$

Forces correspondants aux déplacements

$$F_n = \begin{bmatrix} F_p \\ F_L \end{bmatrix} \quad F_p: \text{Imposés (réactions d'appuis imposés) }$$

$F_L$ : Forces appliquées aux d.d.l restants .

$$\overline{K}_{nn} = \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pL} \\ K_{Lp} & K_{LL} \end{bmatrix}$$

Le système d'équation d'équilibre écrit :

$$\overline{K}_{nn} \cdot q_n = \overline{F}_n$$

En développant :  $K_{pp} q_p + K_{pL} q_L = F_p$

$$K_{Lp} q_p + K_{LL} q_L = F_L$$

D'où le système linéaire final à résoudre est :

$$K_{LL} q_L = F_L - K_{Lp} q_p \quad (\text{II. 60})$$

## II.11 - METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRE : [ 16 ]

Ces méthodes permettent la résolution du système des équations d'équilibre.

$$K q = F^{(i)} \quad i = 1 \dots N_p \quad N_p: \text{nombre de cas de charge.}$$

Les méthodes de résolution en analyse statique peuvent se classer en :

### Méthodes itératives :

- Méthode de *Gauss-Seidel*.
- Méthode de relaxation.
- Minimisation de l'énergie potentielle totale par la méthode des gradients conjugués.

### Méthode directes :

- Méthode d'élimination de *Gauss* et ses variantes (factorisation de *Crout*).
- Méthode de factorisation de *Cholesky*.

L'expérience montre que les méthodes directes adoptent des techniques de gestion de données plus ou moins élaborées permettant aujourd'hui la résolution de problème de grande taille avec des performances supérieures à celles des méthodes itératives dans la majorité des cas tout en utilisant au mieux les ressources des ordinateurs disponibles.

# Chapitre III

## **Simulation Mathématique et Résultats**

### **III - INTRODUCTION**

Une bonne analyse d'un phénomène physique quelqu'il soit, doit en général avoir recours à la technique de modélisation mathématique. Cette dernière s'avère être d'une importance primordiale lorsque les modes expérimentaux de l'analyse sont d'une reproductibilité faible et onéreuse.

La modélisation mathématique permet de simuler les phénomènes par le biais des équations mathématiques qui quantifient les différents aspects de ces phénomènes. Les équations mathématiques sortent de leurs dimensions virtuelles par la mise en oeuvre des conditions initiales et des conditions aux limites. Celles-ci (conditions initiales, aux limites) permettent de simuler une analyse ou procédé expérimental réel ou pseudo-réel (car une simulation n'est jamais parfaitement conforme à la réalité).

En somme la modélisation mathématique présente plusieurs avantages :

- 1) Elle permet d'accroître notre compréhension du comportement d'un procédé du point de vue des mécanismes fondamentaux.
- 2) Elle permet d'étudier par simple calcul l'effet des différentes variables d'un procédé.
- 3) Le coût d'une approche numérique peut être beaucoup plus réduit que celui que celui d'une expérience en laboratoire.
- 4) Au cours d'une série d'expérience, un modèle peut aider à décider des conditions opératoires à retenir.
- 5) Elle peut aider à évaluer les résultats d'essais sur les installations.
- 6) Un modèle peut être utilisé pour faire du contrôle de procédé et de l'optimisation.

La nature et la complexité d'un modèle dépend largement du sujet d'étude et de l'assimilation du procédé en question.

Mais le problème crucial de la simulation mathématique réside dans le fait qu'elle est fréquemment arrêtée par une mauvaise compréhension du procédé.

Il est tout aussi difficile de cerner toute les comportements d'un phénomène physique complexe que de le simuler.

Dans ce cas la modélisation mathématique doit être entreprise en étroite liaison avec un travail expérimental, ce dernier point est fondamental pour construire un bon modèle.

#### **III.1 - Formulation du problème :**

En se basant sur les deux chapitres précédents, nous pouvons maintenant présenter la problématique qui fait l'objet de notre étude.

Lorsqu'une éprouvette de flexion est soumise à l'action d'une force extérieure des contraintes s'établissent, par réaction, à l'intérieur de cette éprouvette. Si cette force est suffisamment grande elle est en mesure d'induire des déplacements au sein de cette éprouvette.

Notre étude porte sur le comportement d'une éprouvette sous contrainte en flexion, dans le domaine élastique. Les relations existant entre les contraintes et les déformations sont définies par la théorie de *l'élasticité* linéaire des milieux *continus*.

Dans ce problème nous supposerons que les matériaux satisfont déjà un certain nombre d'exigences. Ce qui permettra à la fois de réduire la complexité des développements mathématiques, et donc réduire la difficulté de l'élaboration du modèle, et de conserver une certaine généralité, ces exigences sont :

- a) Le matériau est continu il n'a ni fissure ni cavité. Cette hypothèse de continuité du matériau nous permet *d'isoler* une partie *infinitésimale* de celui-ci et d'exprimer son comportement selon un système de coordonnées, à l'aide de *fonctions mathématiques continues*. Bien que à l'échelle *atomique*, aucun matériau ne soit vraiment continu, nous nous intéresserons qu'à l'aspect macroscopique, car cette façon de faire donne, en général, de très bons résultats.
- b) Le matériau est homogène, il a donc, les mêmes propriétés en tout point. La plupart des matériaux d'ingénierie satisfont à ce critère, du moins à l'échelle macroscopique. Même les matériaux comme le béton (pas armé) le bois, les plastiques composites, etc, qui s'avèrent peu homogènes, le sont en fait suffisamment pour qu'on puisse utiliser dans leur cas les méthodes de calcul simplifiées qui conviennent aux matériaux homogènes. [ 3 ]
- c) Le matériau est isotrope, il a, en un point donné, les mêmes propriétés dans toutes les directions. La plupart des métaux et des plastiques sont isotropes à l'échelle macroscopique. Les matériaux qui ont des orientations de grain préférentielles (bois, métaux laminés) ne le sont pas.
- d) Aucune force interne n'agit dans le matériau avant l'application des charges externes (le matériau doit être stable). Mais les forces internes (dites résiduelles), sont souvent présentes dans les matériaux ; elles résultent en général du processus de fabrication (coulée, refroidissement, mise en forme, soudage, pliage, etc.). Si ces forces ne sont pas suffisamment faibles pour être jugées négligeables, il faut soit en tenir compte en les mesurant expérimentalement, soit les réduire par des techniques spéciales (traitements thermiques) au cours de la fabrication de la pièce.

Pour notre étude nos matériaux sont considérés continus, homogènes, isotropes et sans aucune force interne dite résiduelle, avant chargement.

L'éprouvette de flexion subira donc un chargement transversal normal à son axe, et son milieu. Ce dernier provoquera des déplacements au sein de l'éprouvette (à partir de sa position d'équilibre).

A ces déplacements on associera des contraintes internes qui résulteront du chargement. Ces contraintes disparaîtront lorsque l'éprouvette retrouvera sa position d'équilibre (initiale).

*Quantifier par simulation mathématique ces déplacements et les contraintes associées, proportionnellement à la charge appliquée, fait l'objet de notre étude.*

L'évaluation des déplacements ainsi que des contraintes dans ce cas permettra de connaître la distribution des déplacements et des contraintes sur l'ensemble de la géométrie de l'éprouvette.

La méthode qui permet de calculer avec une grande précision les déplacements et contraintes est *la méthode des éléments finis*.

Son principe consiste à passer d'un système aux dérivées partielles *continues*, à un système *discret* ; et cela en divisant notre domaine (éprouvette) en sous-domaines de forme géométrique simple, que l'on appellera *éléments finis* interconnectés par des noeuds.

La vocation primordiale de la M.E.F est de ramener le problème de milieux continus à des problèmes discrets à nombre fini de paramètres inconnus. Ces paramètres sont pour la méthode des déplacements (méthode que nous utilisons), les déplacements aux noeuds.

Pour développer un bon modèle, il est utile de suivre les différentes étapes citées ci-dessous.

- 1) Définition du problème, des objectifs et des critères de valeur.
- 2) Etablissement de l'équation mathématique régissant le phénomène étudié (pour notre cas l'équation existe et est démontrée).
- 3) Répartition du domaine considéré en un certain nombre de sous-domaines élémentaires.
- 4) Discrétisation de l'équation différentielle d'équilibre en déformation élastique.
- 5) Assemblage des sous-domaine afin de reconstituer le domaine
- 6) Accompagnement de la modélisation mathématique par les paramètres du système, mise en oeuvre des conditions aux limites.
- 7) Résolution du système d'équations par une méthodes numérique qui tient compte des critères de précision, de stabilité de convergence et d'économie du temps de calcul.
- 8) Application du modèle, interprétation des résultats.

### **III.2 - Programme éléments finis :**

Le principe de la méthode des éléments finis a été exposé dans le chapitre II. Afin d'illustrer la méthode, nous considérons notre étude particulièrement significative en mécanique de la rupture.

Nous traiterons dans ce qui suit, de la déformation plane d'une éprouvette entaillée en V, posée simplement sur deux appuis et soumise à une force P verticale portée par l'axe de symétrie de l'éprouvette.

#### **III.2.1 - Le maillage :**

Le maillage consiste à passé d'un domaine continu à des sous-domaines discrets de forme géométrique simple est dans notre cas **triangulaire**, c'est-à-dire que la forme de chaque sous-domaine est un triangle. Les noeuds



s'alignent sur neuf (09) droites verticales et six (06) droites horizontales. ce qui nous donne quarante (40) quadrilatères qui sont à leurs divisés en deux triangles. L'élément triangulaire nous permet de surpasser le problème de discontinuité de forme qu'engendre l'entaille.

L'éprouvette de flexion à pour dimension :

Longueur (L)	:	100 mm
Largeur (b)	:	10 mm
Epaisseur (h)	:	3 mm
Section utile	:	21 mm
Profondeur d'entaille	:	3 mm

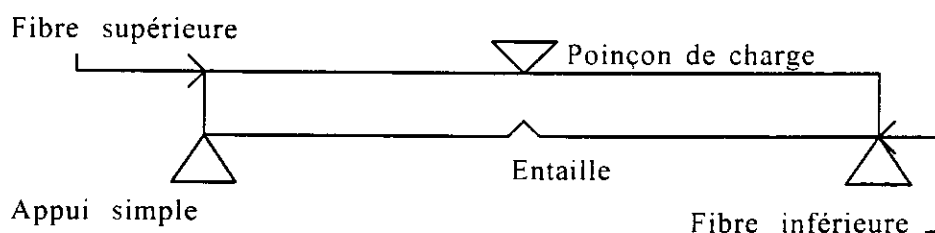


Figure III.1 : Epreuve de flexion points

Comme le montre la figure (III.1) la force ou la charge est appliquée sur l'axe de symétrie ce qui réduit notre étude à une moitié de l'éprouvette, du fait des hypothèses formulées sur les matériaux quant à leurs continuité, homogénéité, isotropie et leur stabilité avant la mise en sous contrainte.

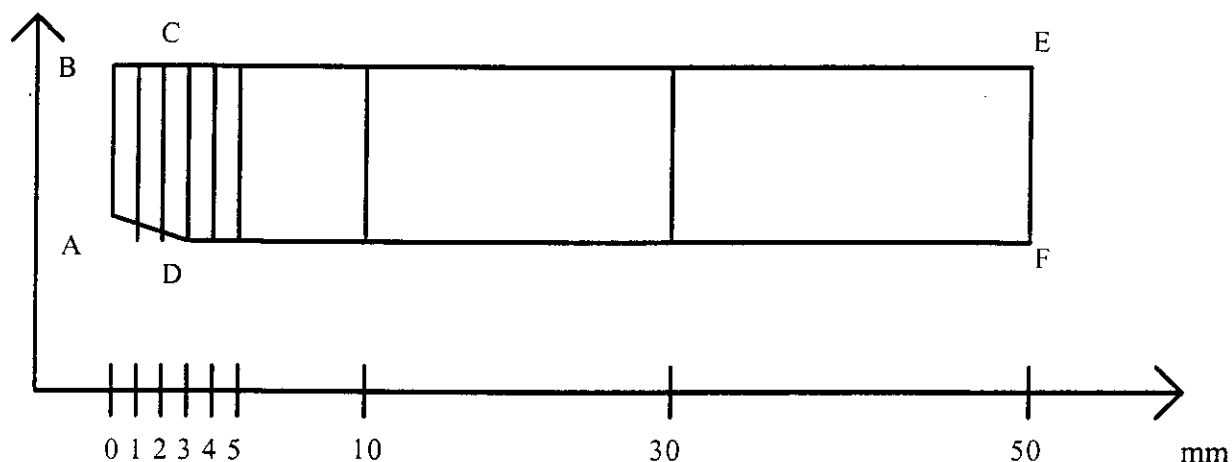


Figure III.2 : Maillage vertical

Comme l'indique la figure (III.2) nous avons concentré les lignes verticales au niveau de l'entaille car c'est une zone à fort gradient de contraintes. il serait donc judicieux d'avoir un nombre assez élevé de noeuds dans cette zone.

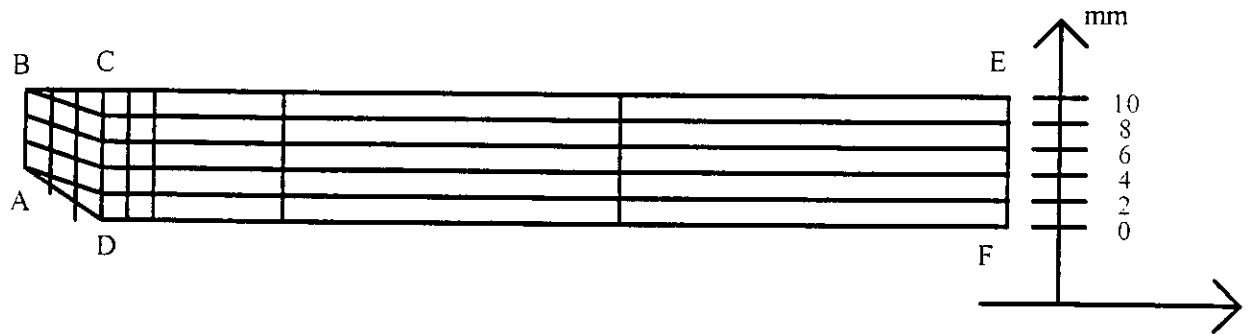


Figure III.3 : Maillage quadrilatéral de l'éprouvette

On divise chaque quadrilatère de la figure (III.3) en deux triangles, la numérotation des noeuds se fait comme l'indique la figure suivante :

La figure (III.4) représente la partie ABCD de l'éprouvette, partie entaillée de l'éprouvette, on constate que la numérotation des noeuds se fait le long des lignes des lignes verticales, et cela afin de faciliter l'aspect calcul de la méthode.

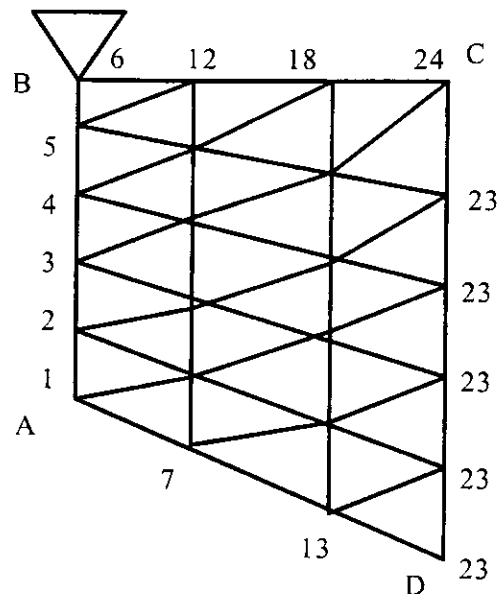


Figure III.4 : Maillage de la partie entaillée et numérotation des noeuds

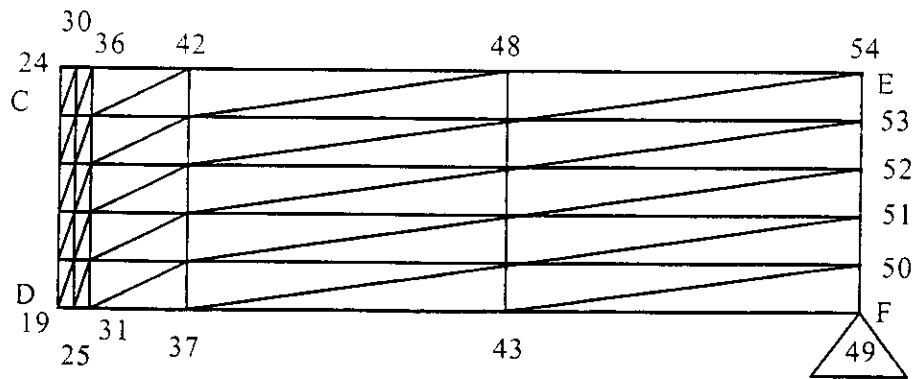


Figure III.5 : Maillage et numérotation des noeuds de la partie CDEF

Les caractéristiques géométrique de ce maillage sont :

Nombre de lignes verticales	: $nv = 09$
Nombre de lignes horizontales	: $nh = 06$
Nombre de noeuds	: $nv \cdot nh = 54$
Nombre de quadrilatères	: $nq = (nv - 1) (nh - 1) = 40$
Nombre de triangles	: $nt = 2 \cdot nq = 80$

### III.3 - Mise en oeuvre pratique de la mef :

Le problème continu consiste à trouver parmi les champs de déplacements admissibles  $u^*_i$ , qui sont des champs continus et continûment dérivables par morceaux, celui qui rend minimale l'énergie potentielle.

$$P = \int_{\Omega} W(\epsilon^*) d\omega - \int_{S_r} T^d_i u^*_i ds \quad (III.1)$$

Nous ne considérons pas ici les forces volumiques.

Lorsque le domaine  $\Omega$  est divisé en élément triangulaire à trois noeuds, le champ de déplacement dans chaque triangle est exprimé en fonction des déplacements des trois noeuds  $i, j, k$ . Donc dans chaque triangle numéroté  $(h)$ , nous prenons le champ de déplacement en fonction affine de  $x_i$ .

$$u_i = a_{ij}^{(h)} x_j + b_i^{(h)} \quad (III.2)$$

Comme inconnues du problème, ce sont les composantes du déplacement des sommets des triangles ou encore des *noeuds* numérotés de 1 à 54.

$$\begin{aligned} & u_1(1) , u_2(1) \\ & u_1(2) , u_2(2) \\ & \cdot , \cdot \\ & \cdot , \cdot \\ & \cdot , \cdot \\ & u_1(54) , u_2(54) \end{aligned}$$

Nous désignons les inconnues dans l'ordre ci-dessus par :

$$v_1 = u_1(1) ; v_2 = u_2(1) ; \dots ; v_{108} = u_2(54) .$$

Les déformations sont constantes dans chaque triangle. Pour le corps élastique linéaire, les contraintes sont également constantes dans chaque triangle et le potentiel P qui pour sa forme continu est égale à :

$$P = \int_{\Omega} W[u_{ij}(\frac{\rho}{k})] dv - \int_{S_T} T_i^d u_i ds \quad (III.3)$$

P : est l'énergie potentielle d'un solide *élastique homogène* soumis à des tractions

$T_i^d$  sur  $S_T$  et des déplacements  $u_i^d$  sur  $S_u$ .

W étant la densité d'énergie élastique et  $\Omega$  le domaine géométrique d'intégration.

Le potentiel P de chaque triangle une fois discrétisée s'écrit :

$$P = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} V_{\alpha} V_{\beta} - R_{\alpha} V_{\alpha} \quad (III.4)$$

La matrice G est appelée *matrice de rigidité*. Elle est symétrique et définie positive, propriétés qui découlent simplement de la loi élastique admise. La matrice de rigidité dépend des constantes élastiques  $E, \nu$  et des coordonnées des noeuds.

Quant aux  $R_{\alpha}$ , ils correspondent à la discrétisation de l'intégrale étendue sur  $S_T$  de (III.3). Les composantes  $R_{\alpha}$  sont proportionnelles aux forces  $F_{\alpha}$  appliquées aux noeuds.

Mais il faut prendre en considération, que certains déplacements sont spécifiés au noeuds

1,2,3,4,5,6,49, les conditions aux limites sur  $S_u$  s'écrivent.

$$V_{\alpha} = V_{\alpha}^d \quad (III.5)$$

et cela pour certains indices.

Dans notre cas les conditions aux limites sur les déplacements sont.

$$\begin{aligned} v(1) &= 0 \\ v(3) &= 0 \\ v(5) &= 0 \\ v(7) &= 0 \\ v(9) &= 0 \\ v(11) &= 0 \\ v(12) &= F : \text{étant la flèche qui résulte de la charge appliquée} \\ v(97) &= 0 \\ v(98) &= 0 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sur les forces appliquées sont :

$$F(12) = -\frac{R_{app}}{2} ; F(98) = \frac{R_{app}}{2}$$

$F(12)$  : est la composante verticale du vecteur force au noeud (6) c'est d'ailleurs le point d'application de la charge, elle est égale à la moitié de la charge appliquée du fait que nous traitons une moitié de l'éprouvette et afin de respecter le principe de *superposition*.

$F(98)$  : est la réaction verticale de l'appui simple au noeud (49), elle contrebalance l'action de la charge appliquée.

Du principe variationnel, on déduit le système suivant.

$$G_{\alpha\beta} V_{\beta} - K_{\alpha} = 0 \quad (III.6)$$

C'est l'ensemble des équations (III.5) et (III.6) qui constituent le système linéaire discrétisé proprement dit. L'existence et l'unicité de la solution se trouve assurée par les propriétés de symétrie et de positivité de la matrice rigidité.

### III.3.1 - Construction effective de la matrice rigidité :

Considérons un triangle particulier (e) de sommets i,j,k. Il s'agit de trouver la contribution du triangle (e) au terme quadratique du potentiel P. C'est ce que fournit la *matrice rigidité élémentaire*  $G^e$  dont la somme étendue à tous les triangles constitue la matrice G.

Le calcul de  $G^e$  comprend trois étapes :

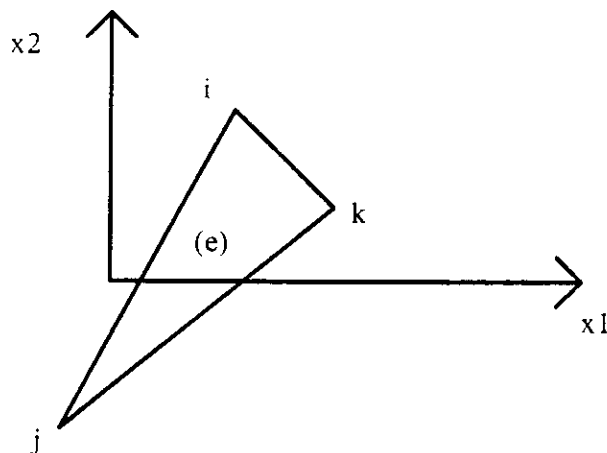


Figure III.6 : Triangle constituant de la maille

### III.3.1.1 - Calcul des déformations :

Les gradients d'une fonction affine de deux variables  $x_1$  et  $x_2$  prenant les valeurs données aux sommets  $i, j, k$  du triangle (e) sont définis, dans le triangle par les relations élémentaires

$$\begin{bmatrix} f,1 \\ f,2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(i) \\ f(j) \\ f(k) \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

où :  $A = \frac{1}{2} (c_3 b_2 - c_2 b_3)$  et les coefficients  $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  sont données par

$$\begin{aligned} b_1 &= x_2(j) - x_2(k) & c_1 &= x_1(k) - x_1(j) \\ b_2 &= x_2(k) - x_2(i) & c_2 &= x_1(i) - x_1(k) \\ b_3 &= x_2(i) - x_2(j) & c_3 &= x_1(j) - x_1(i) \end{aligned}$$

L'aire du triangle est la valeur absolue de  $A$  :

La déformation dans le triangle (e) est alors donnée par.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(i) \\ u_2(i) \\ u_1(j) \\ u_2(j) \\ u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \equiv B^e \{d\}^e \quad (\text{III.7})$$

### III.3.1.2 - Calcul des contraintes :

Nous explicitons les relations de comportement classique en élasticité plane. Nous donnons les relations aussi bien en déformation plane qu'en contrainte plane.

En déformation plane :

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

En contrainte plane :

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{33} = -\lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) / (\lambda + 2\mu)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Dans les deux cas de figure nous posons  $\sigma = D \{ \varepsilon \}$

D : étant une matrice (4, 4).

### III.3.1.3 - Calcul de la matrice de rigidité élémentaire :

$$G^e = \frac{1}{2} \{ u^e \}^T K \{ u^e \} \quad (\text{III.10})$$

avec :  $K = B^{eT} D$

Naturellement il faudra pour passer de  $G^e$  à  $G$  *positionner* correctement les termes de  $G^e$  dans la matrice  $G$ .

Après l'obtention de la matrice de rigidité pour la structure dans son intégralité,  $G^e$  et la prise en compte des conditions aux limites aussi bien sur les déplacements que sur les forces.

Nous obtenons le système décrit par l'équation (III.6).

La résolution du système linéaire se fait par la méthode de décomposition de *Cholesky*.

$$G_{\alpha\beta} = (T^S_{\alpha\beta}) (T_{I\alpha\beta})$$

$T^S$ : Matrice triangulaire supérieure

$T_I$ : Matrice triangulaire inférieure

La résolution:  $(T_I)(Y_\beta) = K_\alpha$

$$(T^S)(V_\beta) = (Y_\beta)$$

Afin de mieux argumenter la mise en oeuvre pratique de la méthode des éléments dans son aspect numérique, nous présentons un organigramme simplifié de notre programme de calcul.

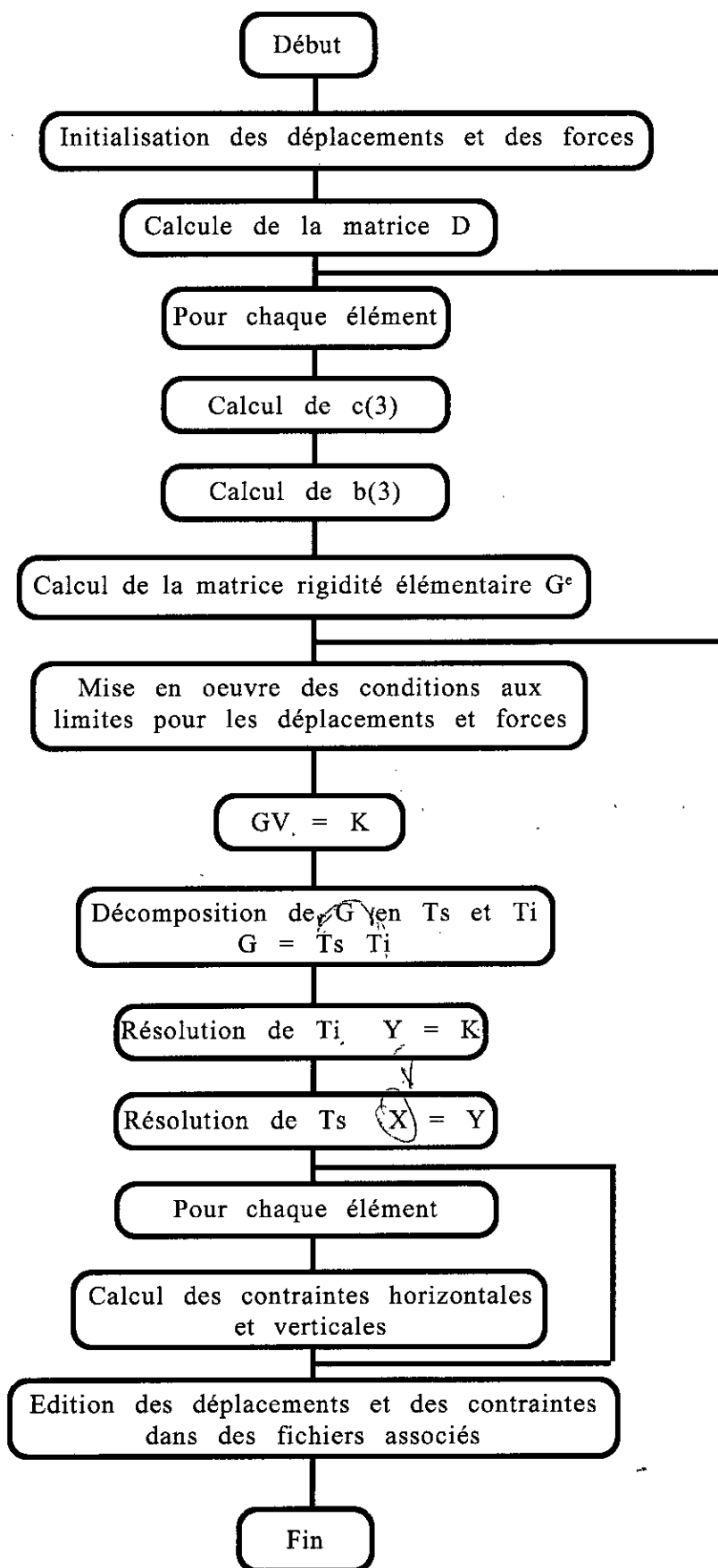


Figure III.6 : Organigramme simplifié du modèle



### III.3.2 - Simulation :

La simulation est la capacité de reproduire les effets d'un phénomène quelconque, le but primordial étant de rapprocher au maximum des résultats expérimentaux. Pour notre cas, nous avons élaboré un modèle numérique (en FORTRAN) qui en mesure de reproduire les déformations et les contraintes associées qui se développent au sein d'une éprouvette soumise à une flexion trois (03) points, sous une charge concentrée, appliquée en son milieu.

Afin de mettre en application notre modèle nous avons choisi des matériaux dont les caractéristiques permettent l'appréciation et le bon fonctionnement du modèle.

#### Acier doux :

- Charge à la rupture en traction et en compression :  $35 \text{ E}+7 \text{ N/M}^2$
- Limite élastique en traction et compression :  $20 \text{ E}+7 \text{ N/M}^2$
- Module de Young  $E=2 \text{ E}+11 \text{ N/M}^2$
- Coefficient de poisson  $p=0.3$

#### Acier mi-dur trempé et revenu à 550 C° :

- Charge à la rupture (trac,comp) :  $8 \text{ E}+8 \text{ N/M}^2$
- Limite élastique (trac,comp):  $6.2 \text{ E}+7 \text{ N/M}^2$
- $E= 2.1 \text{ E}+11 \text{ N/M}^2$
- $p= 0.3$

#### Acier dur trempé et revenu à 450 C° :

- Charge à la rupture (trac, comp) :  $16 \text{ E}+8 \text{ N/M}^2$
- Limite élastique (trac,comp) :  $13.5 \text{ E}+8 \text{ N/M}^2$
- $E=2.2 \text{ E}+11 \text{ N/M}^2$
- $p=0.3$

On notera que pour ces aciers la limite élastique est la même en traction et en compression, deux phénomènes qui interviennent lors de la flexion imposée à l'éprouvette (voir I.3.1).

Etant donné que ces aciers sont plastiques nous bornerons notre étude de simulation au domaine élastique. C'est pourquoi nous vérifions lors de chaque mise en charge que les contraintes n'excèdent pas la limite élastique afin de ne pas aborder le domaine plastique, domaine où notre modèle est inadéquat.

Mais afin de mieux simuler, nous avons us recours à des matériaux *fragiles*, tel que les céramiques qui sont des matériaux qui ne présentent pas de domaine plastique au cours de leurs déformations. La déformation élastique est suivie de la rupture sans transition.

Nous avons choisi deux céramiques dont les caractéristiques sont les suivantes

#### Zircone :

- Charge à la rupture en flexion :  $25 \text{ E}+7 \text{ N/M}^2$
- $E=1.4 \text{ E}+11 \text{ N/M}^2$
- $p=0.29$

**Alumine :**

- Charge à la rupture en flexion :  $22 \text{ E}+7 \text{ N/M}^2$
- $E=2.8 \text{ E}+11 \text{ N/M}^2$
- $p=0.27$

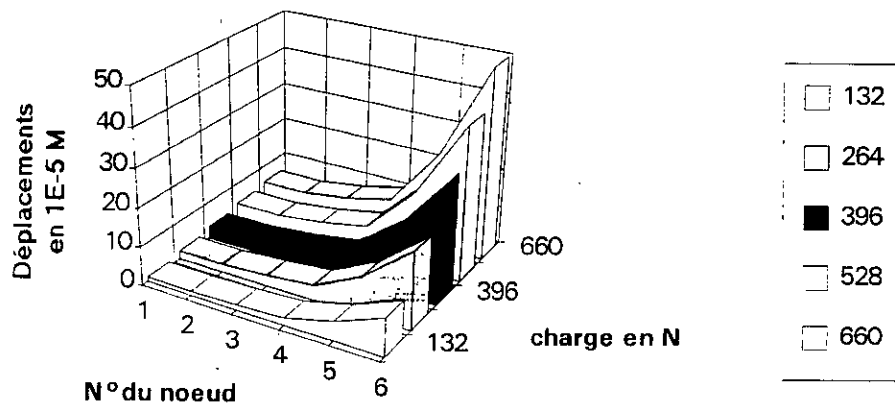
**III.4 - Mise en oeuvre de la simulation, résultats :**

Le mode «expérimental» suivi est une mise en charge monotone concentrée, cela pour des charges croissantes jusqu'à atteindre la limite élastique pour les aciers et la charge à la rupture en flexion pour les céramiques. Lors de l'exécution de programme de calcul les résultats obtenus sont les suivants :

- Le déplacement horizontal et vertical de chaque noeud.
- La contraintes associée à chaque déplacement (horizontal et vertical) pour chaque noeud.

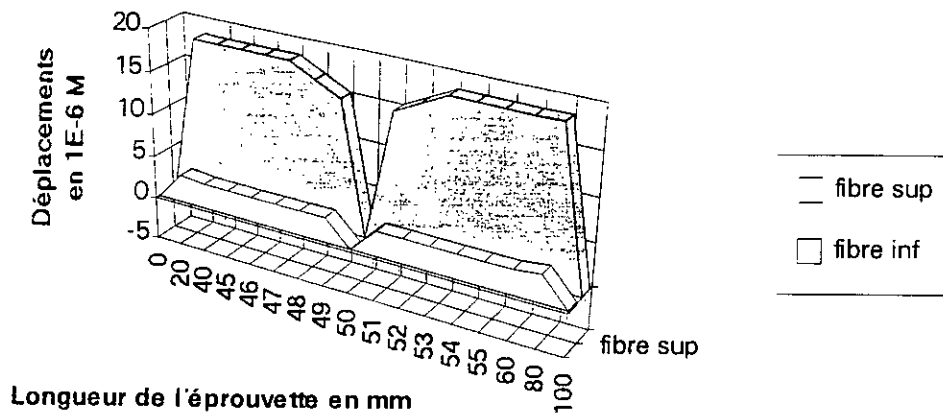
Afin d'illustrer de manières rapides et efficaces les séries de résultats obtenus, nous avons réalisé les graphes suivants.  
Déplacements :

**Graphe 1: Déplacements verticaux des noeuds en fonction de la charge ( Acier dur )**



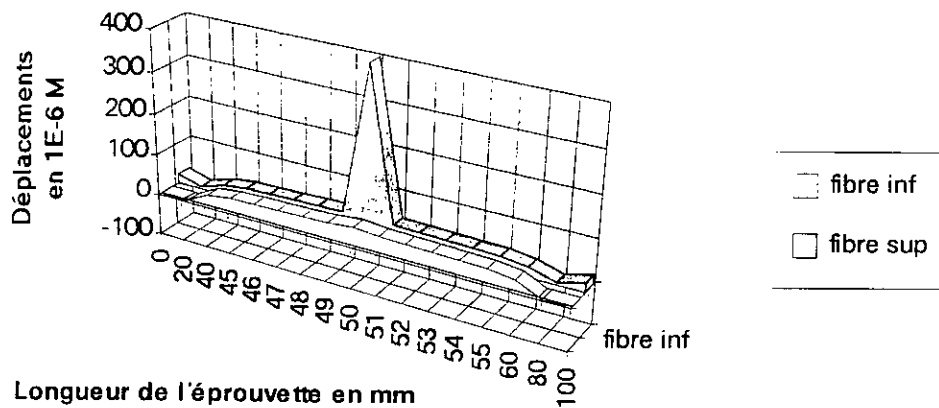
**Graphe 1** : représente les déplacements verticaux des noeuds de l'axe de symétrie lors de différentes mise en charge, la dernière charge représente le maximum de déformation avant la rupture.

**Graphe 2: Déplacements horizontaux des fibres extrémales ( Acier dur )**



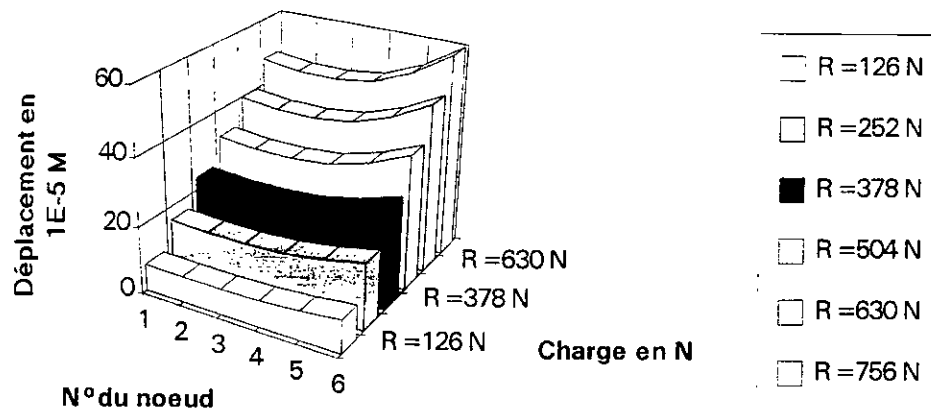
**Graphe 2** : comme son titre l'indique rend compte des déplacements horizontaux tout le long de l'éprouvette et cela pour les deux fibres extrémales (Fig III.1), on constate d'ailleurs que au milieu de l'éprouvette les déplacements sont nuls du fait de l'application de la force sur l'axe de symétrie de l'éprouvette.

**Graphe 3: Déplacements verticaux des fibres extrémales ( Acier dur )**



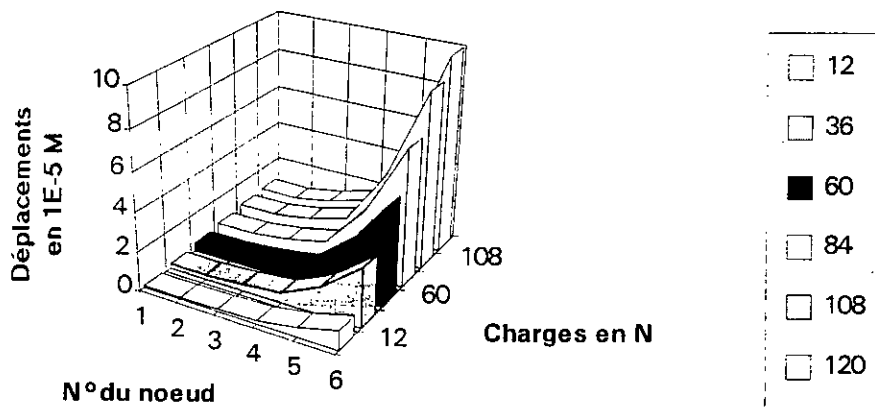
**Graphe 3** : Représente les déplacements verticaux des fibres extrémales, la flèche maximale étant de 0.4mm. Le graphe 2 et 3 représentent des déplacements pour la même mise en charge.

**Graphe4: Déplacements verticaux des noeuds en fonction de la charge ( Acier mi-dur )**



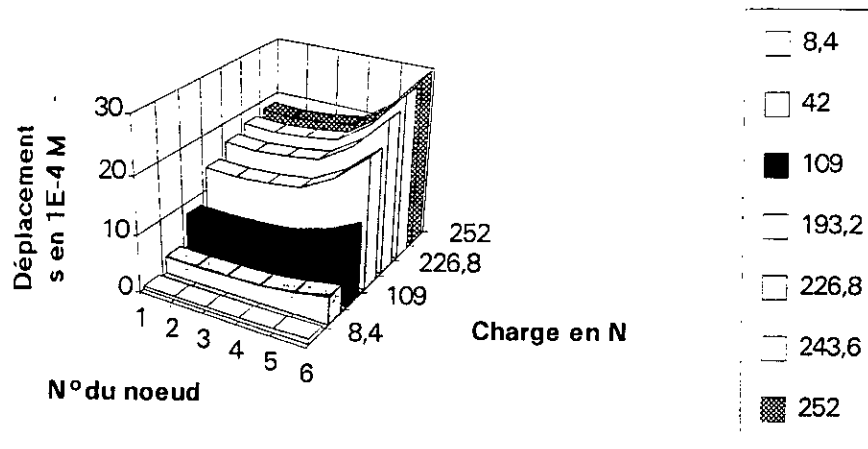
**Graphe 4** : Ce graphe rend compte des déplacements verticaux des noeuds de l'axe de symétrie sous différentes charges, jusqu'à atteinte de la limite élastique.

**Graphe5: Déplacements verticaux des noeuds en fonction de la charge ( Acier doux )**



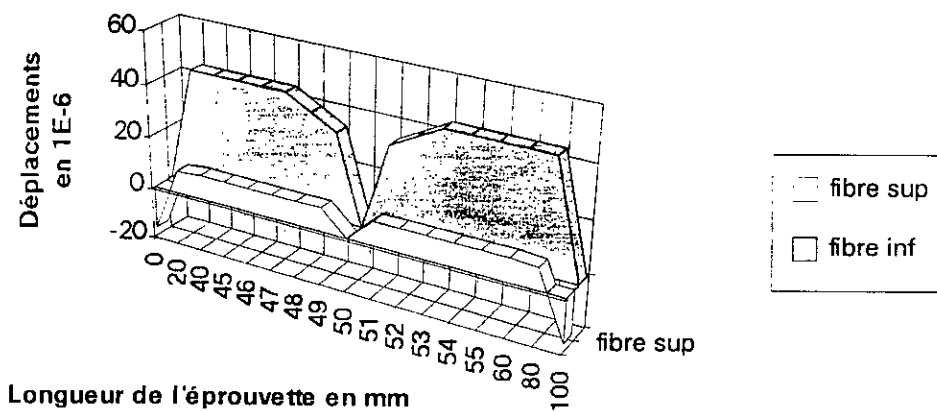
**Graphe 5** : Même graphe que le précédent mais le matériau est de l'acier doux.

**Graphe 6: Déplacements verticaux aux noeuds en fonction de la charge (Zircone)**



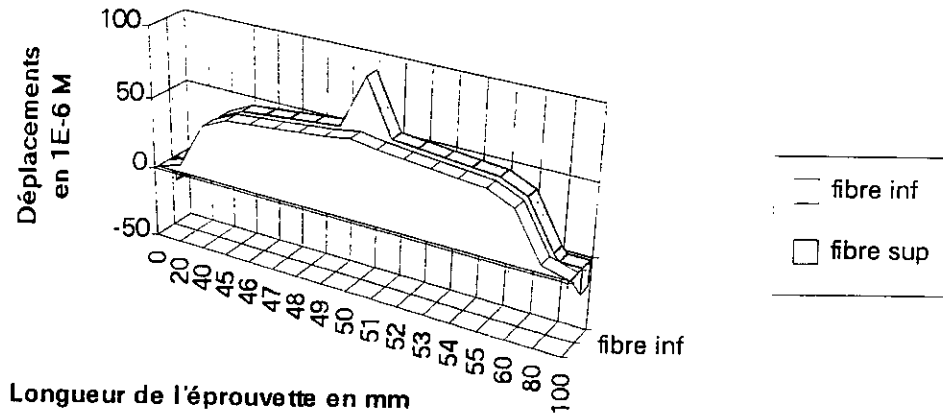
**Graphe 6** : Représente l'état des déplacements verticaux sur l'axe de symétrie en fonction de la charge croissante, on remarquera que les déplacements sont moins importants lorsque l'on approche de la force qui provoque la rupture.

**Graphe 7: Déplacements horizontaux des fibres extrémales (Zircone)**



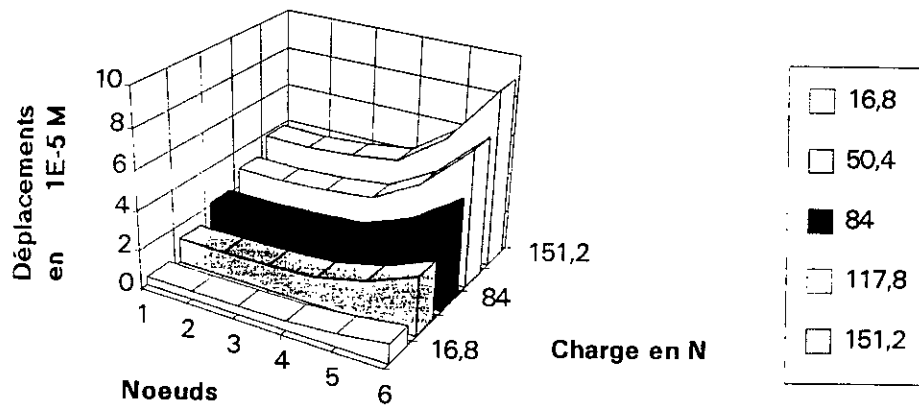
**Graphe 7** : Donne un aperçu sur les déplacements de la fibre supérieure et inférieure tout le long de l'éprouvette.

**Graphe8: Déplacements verticaux des fibres extrémales (Zircone)**



**Graphe 8** : Rend compte des déplacements verticaux des fibres pour une flèche de 0.04mm

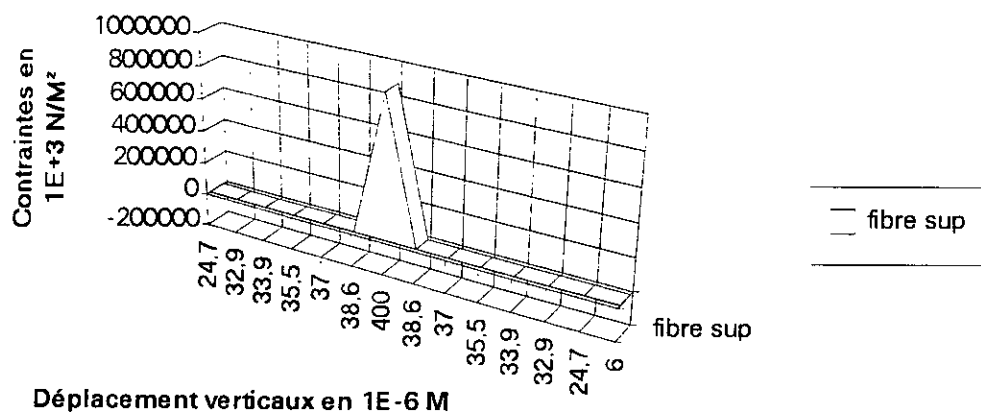
**Graphe9: Déplacements verticaux des noeuds en fonction de la charge (Alumine)**



**Graphe 9** : Représente les mêmes paramètres que le graphe6 pour une autre céramique l'Alumine.

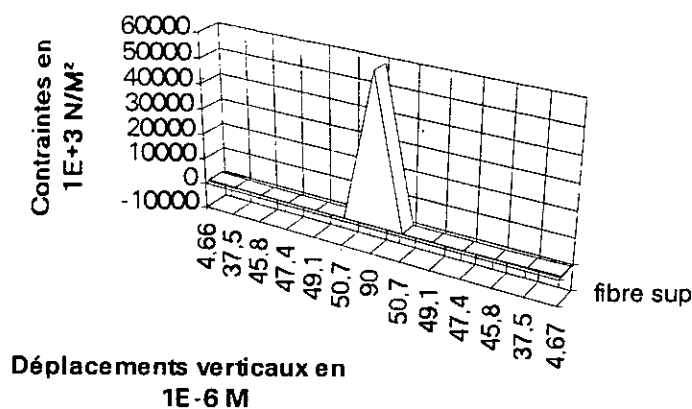
Contraintes associées aux déplacements:

**Graphe 10: Représentation des contraintes sur la fibre sup (Acier dur)**



**Graphe 10 :** Ce graphe associe les contraintes aux déplacements de la fibre supérieure de l'acier dur

**Graphe 11: Contraintes associées aux déplacements de la fibre sup (Zircone)**

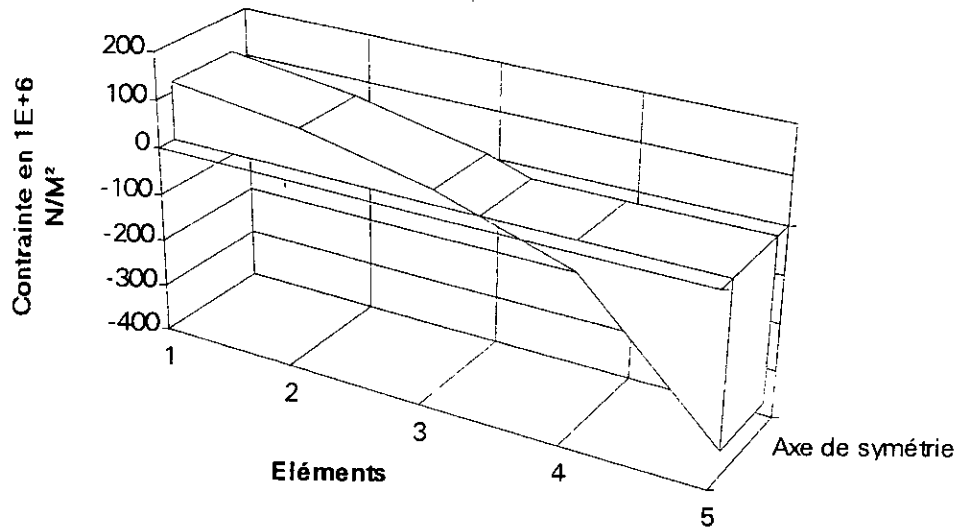


**Graphe 11 :** On associe pour la céramique Zircone les contraintes internes aux déplacements qui les engendrent.

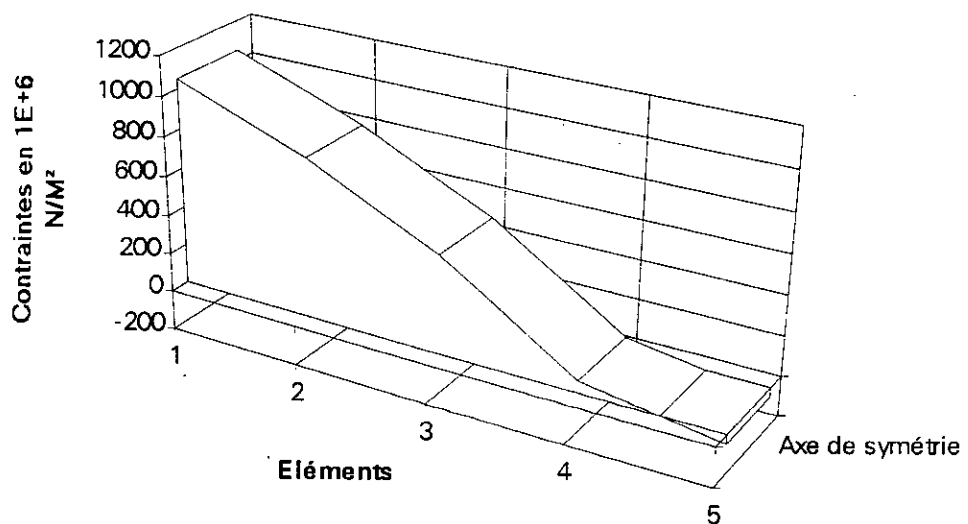
### Contraintes :

Tous les graphes de cette partie graphe 12, 13, 14, 15, 16 exprime la variation de la contrainte en partant de la fibre inférieure vers la fibre supérieure.

**Graphe 12: Variation de la contrainte horizontale le long de l'axe de symétrie (Acier dur)**

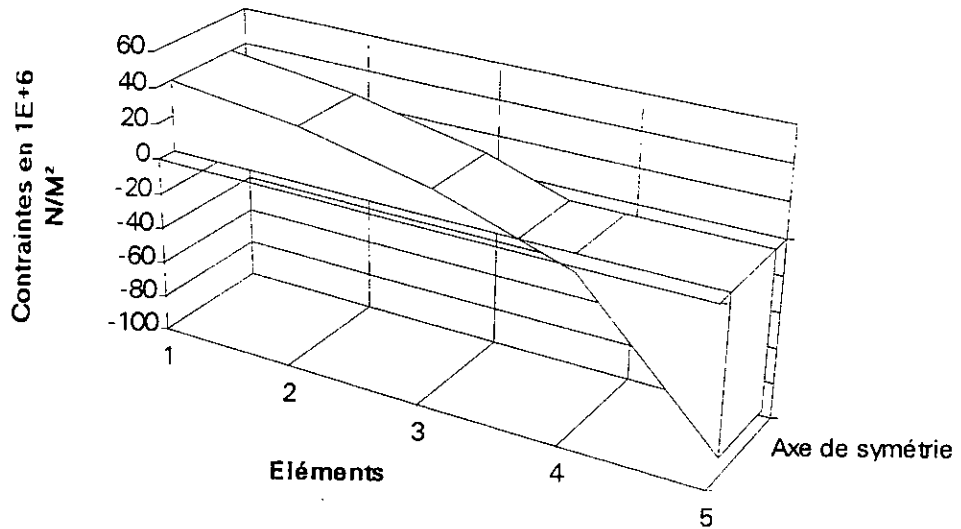


**Graphe 13: Variation de la contrainte horizontale le long de l'axe de symétrie (Acier mi-dur)**

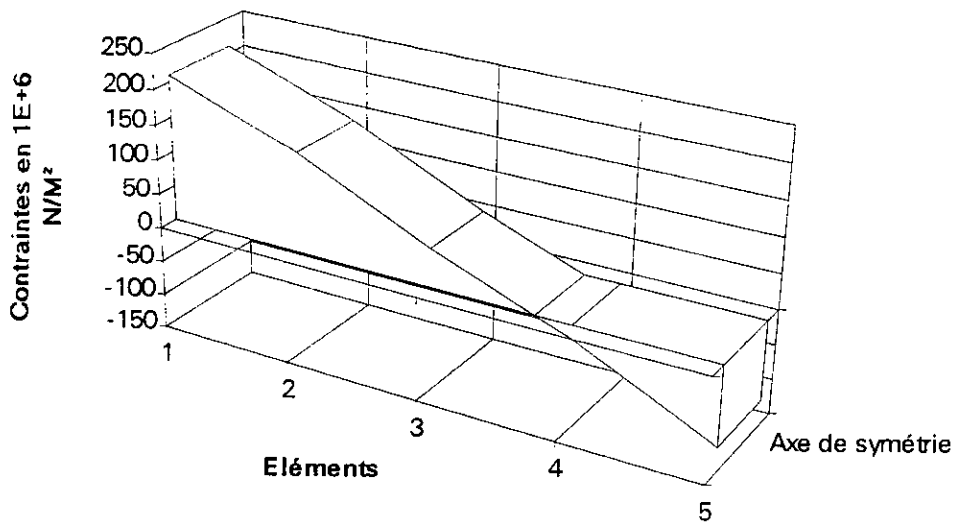




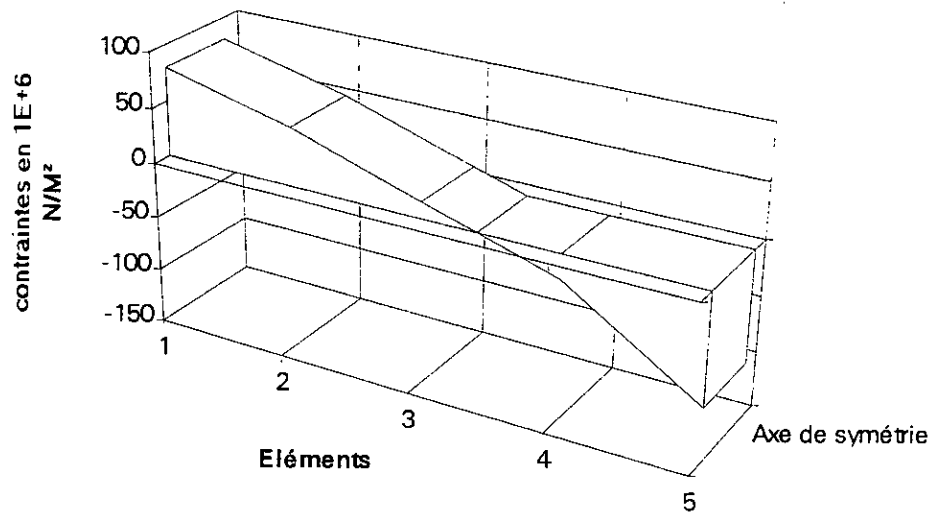
Graphe 14: Variation de la contrainte horizontale le long de l'axe de symétrie (Acier doux)



Graphe 15: Variation de la contrainte horizontale le long de l'axe de symétrie (Zircone)



Graphe 16: Variation de la contrainte horizontale le long de l'axe de symétrie (Alumine)



### III.5 - Interprétation :

#### Graphes déplacements :

Les graphes déplacements interprètent les résultats obtenus lors de la simulation pour différents matériaux (déjà cités), et pour différentes forces appliquées (paramètre de simulation).

**Graphe 1** : Représente les déplacements verticaux des noeuds figurant sur l'axe de symétrie de l'éprouvette et qui sont les noeuds 1.2.3.4.5.6

Les déplacements associés à chaque force appliquée sont illustrés par une courbe. Nous obtenons la superposition de cinq courbes et cela pour cinq forces différentes (F) avec cinq flèches (fl) différentes toujours au noeud 6.

Paramètres de simulation :

- F1=132 N ; fl=0.1 mm
- F2=264 N ; fl=0.2 mm
- F3=396 N ; fl=0.3 mm
- F4=528 N ; fl=0.4 mm
- F5=660 N ; fl=0.5 mm

Les déplacements augmentent proportionnellement à la charge mais décroissent assez vite de la fibre supérieure vers la fibre inférieure.

**Graphe 2** : Sur ce graphe on peut voir les déplacements horizontaux des noeuds 6.12.24.30.36.42.48.54 et les noeuds 1.7.13.19.25.31.43.49 qui sont positionnés respectivement sur la fibre supérieure et inférieure de l'éprouvette. Ceci illustre pour nous la façon par laquelle les noeuds se déplacent horizontalement sur la fibre inférieure plus que sur la fibre supérieure. Ceci n'est dû qu'au fait que l'application de la force se fait sur la fibre supérieure.

Paramètres de simulation:

- F=528 N ; fl=0.4mm

**Graphe 3** : L'illustration des déplacements verticaux des fibres extrémales, se fait selon le même paramètre de simulation que le graphe 2. Les déplacements sont très proches entre les deux fibres sauf qu'au point d'application de la force sur la fibre supérieure, le déplacement est plus important puisque la flèche maximale est en ce point.

Paramètres de simulation : même que graphe 2

**Graphe 4** : Même représentation que le graphe 1, mais le matériau mis en charge est l'acier mi-dur.

Paramètres de simulation:

- F1=126 N ; f1=0.1 mm
- F2=252 N ; f1=0.2 mm
- F3=378 N ; f1=0.3 mm
- F4=504 N ; f1=0.4 mm
- F5=630 N ; f1=0.5 mm
- F6=756 N ; f1=0.6 mm

L'acier mi-dur réagit différemment à la mise en charge puisqu'il distribue le déplacement le long de l'axe de symétrie de façon plus uniforme que l'acier dur.

**Graphe 5** : Même représentation que le graphe 1 mais le matériau mis en charge est l'acier doux.

Paramètres de simulation:

- F1=12 N ; f1=0.01 mm
- F2=36 N ; f1=0.02 mm
- F3=60 N ; f1=0.03 mm
- F4=84 N ; f1=0.04 mm
- F5=108 N ; f1=0.05 mm
- F6=120 N ; f1=0.06 mm

L'acier doux réagit de la même manière que l'acier dur quant au distribution des déplacements d'une charge à l'autre. Ces dernières sont de l'ordre du dixième de celle de l'acier dur.

**Remarque** : Les graphes 1.4.5 représentent les déplacements de ces différents aciers jusqu'à atteinte de la limite élastique. Domaine de *validité* du modèle.

**Graphe 6** : Même représentation que le graphe 1 mais le matériau mis en charge est la céramique Zircon.

Les paramètres de simulation:

- F1=8.4 N ; f1=0.01 mm
- F2=42 N ; f1=0.05 mm
- F3=109 N ; f1=0.13 mm
- F4=193 N ; f1=0.23 mm
- F5=227 N ; f1=0.27 mm
- F6=244 N ; f1=0.29 mm
- F7=252 N ; f1=0.3 mm

La distribution des déplacements est caractérisée par une uniformité, qui se perd avec l'accroissement de la force.

**Graphe 7** : Même illustration que le graphe2 munis par la céramique Zircone

Paramètres de simulation:

-  $F=75.6$  N ;  $fl=0.09$  mm

Même commentaire que graphe2.

**Graphe 8** : Même illustration que la graphe2 mais pour la céramique Zircone.

Paramètres de simulation : Même que graphe7

**Graphe 9** : Même présentation que le graphe1 mais le matériau mis en charge et la céramique Alumine.

Paramètres de simulation:

-  $F1=16.8$  N ;  $fl=0.01$  mm  
-  $F2=50.4$  N ;  $fl=0.03$  mm  
-  $F3=84$  N ;  $fl=0.05$  mm  
-  $F4=117.8$  N ;  $fl=0.07$  mm  
-  $F5=151.2$  N ;  $fl=0.09$  mm

Même commentaire que graphe6

**Remarque** : Les graphes 6 et 9 représentent les déplacements pour les céramiques et cela jusqu'à approché de la limite de rupture en flexion (étant donné qu'elles sont fragiles)

#### **Graphe contraintes associées aux déplacements:**

Les deux graphes qui vont suivre, sont des graphes pour lesquels on associe à tout déplacement la contrainte qu'il engendre.

**Graphe 10** : C'est la présentation des contraintes engendrées par les déplacements de l'éprouvette sous une charge le long de la fibre supérieure de l'acier dur.

Paramètres de simulation:

-  $F=528$  N ;  $fl=0.4$  mm

On remarque par simple visualisation du graphe que c'est pour le point d'application de la force que nous obtenons le déplacement maximal, et par relation de cause à effet nous obtenons la contrainte maximale.

**Graphe 11 :** Même présentation que le graphe10 mais pour la céramique Zircone

Paramètres de simulation:

-  $F=75.6$  N ;  $fl=0.09$  mm

Même commentaire que le graphe10.

**Graphe contrainte :**

Les graphes 12.13.14.15.16 représentent dans leur ensemble la variation de la contrainte horizontale en partant de la fibre inférieure vers la fibre supérieure et cela sur tout le long de l'axe de symétrie.

**Graphe 12 :** Représente la contrainte horizontale qui se développe tout le long de l'axe de symétrie pour l'acier dur.

Paramètres de simulation:

-  $F=396$  N ;  $fl=0.3$ mm

Sur les quatre premiers éléments la contrainte varie linéairement au 5ème élément il y a changement de pente dû à la grande concentration de contrainte au niveau de cet élément, puisqu'il subit directement l'action de la force F  
Sur la fibre supérieure, il y a une compression importante.  
Sur la fibre inférieure, il y a tension.

**Graphe 13 :** Même représentation que le graphe12 mais pour l'acier mi-dur;

Paramètres de simulation:

-  $F=630$  N ;  $fl=0.5$  mm

La compression sur la fibre supérieure est faible, sur la fibre inférieure la tension est très grande, la variation de la contrainte est linéaire sur les trois premiers éléments.

**Graphe 14 :** Même présentation que le graphe12 mais pour l'acier doux.

Paramètres de simulation:

-  $F=96$  N ;  $fl=0.08$  mm

La variation de la contrainte est linéaire sur les quatre(04) premiers éléments, il y a changement de la pente pour l'élément cinq (05) (il subit directement le chargement)

Compression à la fibre supérieure et tension à la fibre inférieure

**Graphe 15 :** Même illustration que le graphe12 pour la céramique Zircone.

Paramètres de simulation:

-  $F=243.6$  N ;  $fl=0.29$  mm

Le module de la contrainte en compression sur la fibre supérieure et en tension sur la fibre inférieure sont presque égales. La variation de la contrainte tout au long de l'axe de symétrie est quasi-linéaire.

**Graphe 16 :** Même illustration que le graphe12 pour la céramique Alumine.

Paramètres de simulation:

-  $F=151.2$  N ;  $fl=0.09$  mm

La variation de la contrainte est linéaire pour les quatre premiers éléments le 5ème étant en réaction directe avec la force. Il y a compression sur la fibre supérieure et tension sur la fibre inférieure.

### III.6 - Synthèse :

#### - Déplacement :

Les déplacements des fibres inférieures et supérieures et des noeuds de l'axe de symétrie permettent d'avoir un aperçu sur les déplacements de tous les autres noeuds. Comme nous pouvons le constater tous les déplacements horizontaux soient-ils ou verticaux sont de l'ordre de la flèche maximale ou moins.

C'est donc des résultats cohérents qui sont en mesure de traduire l'expérience.

Nous noterons que les déplacements décroissent très vite dans les éléments comprimés.

#### - Contrainte-déplacement :

Pour ce cas les graphes illustrent assez bien la théorie qui lie en proportionnalité directe la contrainte au déplacement. Plus le déplacement est grand plus la contrainte est importante. Ceci s'explique de façon claire sur les graphes 10 et 11, et encore mieux sur la fibre supérieure, car elle subit directement l'action de la force appliquée.

#### - Contrainte :

La théorie de la flexion des poutres énonce ceci « La contrainte horizontale pour un poutre en flexion varie linéairement, d'une compression maximale (à la fibre supérieure) à une tension maximale (à la fibre inférieure) en passant par zéro (au plan neutre)». (I.6.1)

Ceci se vérifie sur nos graphes 12.13.14.15.16, à savoir que nous passons d'une contrainte positive (tension) à la fibre inférieure (élément1) à une contrainte négative (compression) à la fibre supérieure dans tous les cas. La linéarité n'est continue que sur les trois premiers éléments, les deux autres subissent l'action de la force qui engendre des contraintes importantes au sein de ces éléments, ce qui change la pente du graphe, sauf pour la céramique *Zircone* où nous observons une linéarité quasi-parfaite.

En se basant sur ce qui a été énoncé en (I.6.1) les contraintes que nous simulons concordent avec l'état de contrainte d'un matériau en flexion.



### Conclusion générale :

Par ce travail, nous avons d'abord montrer l'intérêt de la modélisation mathématique et son application de plus en plus grandissante dans le domaine de la métallurgie.

Les résultats obtenus confirment l'efficacité du modèle numérique proposé. L'application de la méthode des éléments finis dans la simulation du comportement mécanique d'un matériau métallurgique est efficace et les résultats obtenus particulièrement dans le domaine élastique sont satisfaisants.

Le modèle proposé offre une grande liberté de dimensionnement de forme et de nature des matériaux particulièrement ceux qui sont élastiques et fragiles.

Cependant, il serait intéressant de valider le modèle proposé par des essais expérimentaux sur des éprouvettes normalisées et d'étendre son application pour les matériaux plastiques.

Notre but serait également de pouvoir appliquer un modèle similaire mais plus complet sur des matériaux multicouches ou des matériaux traités en surface (projection thermique, plasma, PVD, CVD,...) .

# *BIBLIOGRAPHIE*

- [ 1 ] **JM DORLOT, JP. BAÏLON, J. MASOUNAVE**  
DES MATERIAUX  
Edition de l'école polytechnique de Montréal, Deuxième édition , 1985
  
- [ 2 ] **J. BARRALIS, G. MAEDERS**  
Précis de métallurgie, Edition Nathan , 6ème édition , 1991
  
- [ 3 ] **A. BAZERGUI, T. BUI-QUOC, A. BIRON, G. MEINTYRE, C. LABERGE**  
Résistance des matériaux , Edition de l'école polytechnique de Montréal  
Edition corrigée , 1987
  
- [ 4 ] **L. ROCKEY, R. EVANS, W. GRIFFITHS, D. NETHERCOT**  
Introduction à la méthode des éléments finis , Edition Eyrolles , Paris  
, 1979
  
- [ 5 ] **JF. IMBERT**  
Analyse des structures par éléments finis, 3<sup>ème</sup> édition  
Cépaduès-édition, 1991
  
- [ 6 ] **G. DHATT, G. TOUZOT**  
Une présentation de la méthode des éléments finis, 2<sup>ème</sup> édition  
Edition Maloine, 1984
  
- [ 7 ] **JL. BATOZ, G. DHATT**  
Modélisation des structures par éléments finis, édition Hermès  
Paris, 1990
  
- [ 8 ] **M. KERGUIGNAS, G. CAIGNAERT**  
Résistance des matériaux, 4<sup>ème</sup> édition, Edition Dunod, 1977
  
- [ 9 ] **MA. BRADAI**  
Etude mathématique du profil de température et de la structure d'un  
lingot d'AS-7 en refroidissement .
  
- [ 10 ] **N & S. TAI BI**  
Fortran77, 2<sup>ème</sup> édition, Edition Berti, Alger, 1992
  
- [ 11 ] **B. YAVORSKI, A. DETAF**  
Aide-mémoire de physique, 3<sup>ème</sup> édition, Edition Mir. Moscou 1975

- [ 12 ] **HP. LIEURADE**  
La pratique des essais de fatigue, Pyc édition, Paris, 1982
  
- [ 13 ] **S. P. TIMOSHENKO**  
Résistance des matériaux, 3<sup>ème</sup> édition, Dunod, Paris 1968
  
- [ 14 ] **MP. FOURNIER**  
Thèse de doctorat, Comportement sous sollicitation cyclique  
des composites unidirectionnels  
Ecole centrale Lyon, 1992
  
- [ 15 ] **ENCYCLOPEDI E QUILLET**  
Encyclopédie des sciences industrielles, Edition Aristide Quillet  
Paris, 1974
  
- [ 16 ] **J. BEERS**  
The mesurment of crack lenght and shape during fracture & fatigue  
Engineering materials advisory service, Ltd, 1980
  
- [ 17 ] **P. PUGET**  
Thèse de doctorat, Etude des mécanismes de dégradation en fatigue  
des matériaux composites unidirectionnels  
Ecole centrale Lyon, 1988
  
- [ 18 ] **HP. LIEURADE**  
Fatigue & stress of materials and structures, Technologie series, 1989
  
- [ 19 ] **I. LAKHTINE**  
Métallographie et traitements thermiques des métaux  
Edition Mir Moscou, 4<sup>ème</sup> édition, 1986