

Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Alger  
U.S.T.A.

2 ex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département d'Electricité

Ingéniorat d'état en électrotechnique



**Approche Géométrique du Problème  
de la Rejection des Perturbations  
( D.D.P )**

**Application à un modèle  
non linéaire de colonne à distiller**

Proposé par :

Mr J.P. GAUTHIER

Etudié par :

BACHA Seddik

IDIR Makhlouf

Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Alger

U.S.T.A.

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**Département d'Electricité**

Ingéniorat d'état en électrotechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

***Approche Géométrique du Problème  
de la Rejection des Perturbations  
( D.D.P )***

***Application à un modèle  
non linéaire de colonne à distiller***

Proposé par :

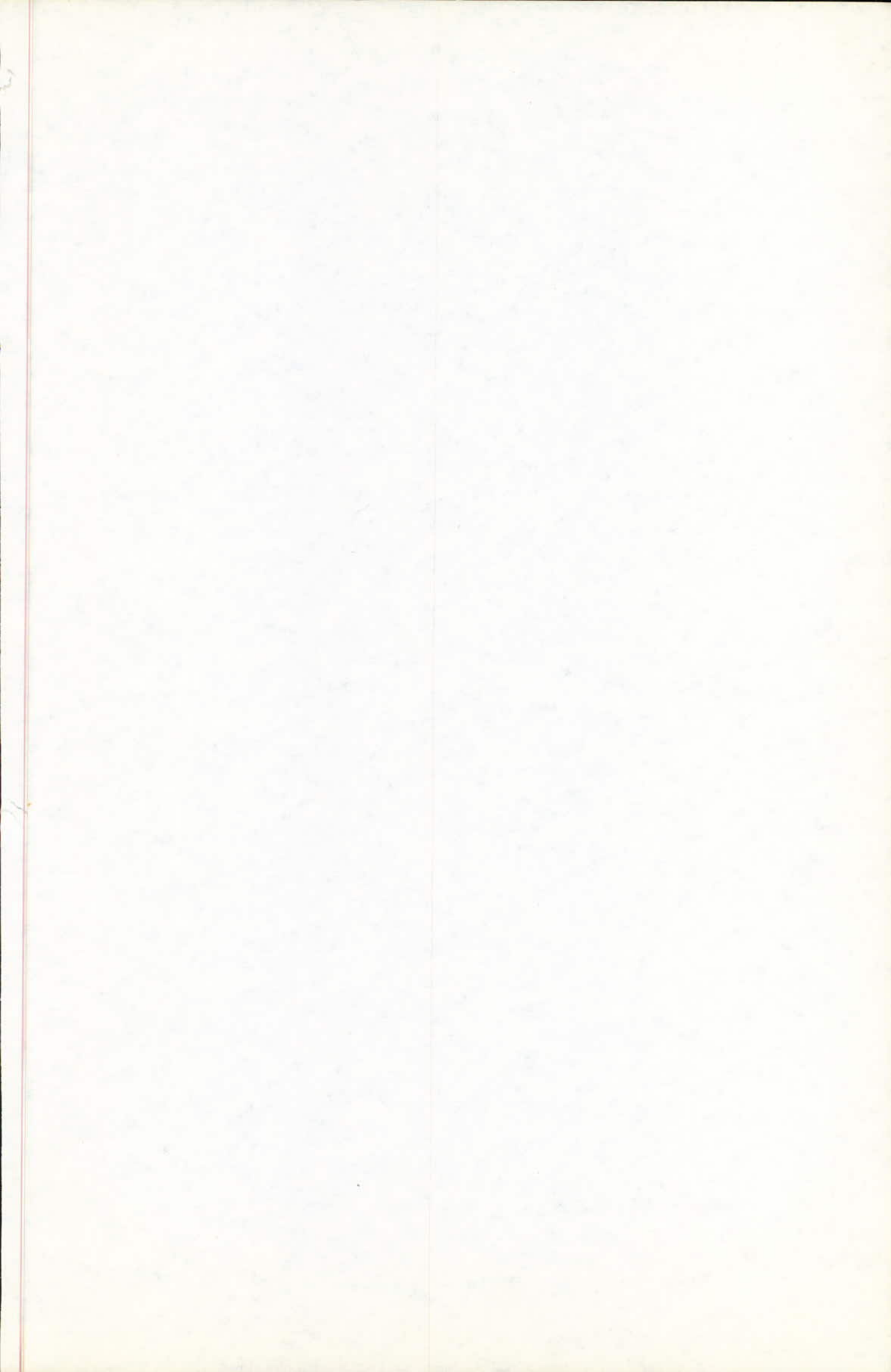
Mr J.P. GAUTHIER

Etudié par :

BACHA Seddik

IDIR Makhlouf

Promotion Janvier 1982



## Dédicaces.

Y wigad yeṣwarzen deg ilas,  
Y wigad iṣṣwagnen ṣeṣ tided,  
Y tdukwan yeṣṣuren ṣ. ṣifexsa,  
Y warrac g. gwassa, irgazen uzekka.

À la mémoire de mon père  
dont le souvenir reste vivant  
en moi, lui qui m'a montré  
la porte de l'école et qui n'a  
pas eu le bonheur de m'en  
voir partir.

Maxluf (makhlouf)

À la mémoire de mon  
grand père et ami Achour,  
qui fut mon premier guide sur  
les sentiers tortueux de  
l'existence, qu'il quitta alors  
que je fus à ma vingtième  
année.

Seddiq (Buhu)

## Remerciements.

Nous exprimons ici notre profonde reconnaissance à M<sup>r</sup> J.P. Gauthier, notre promoteur, pour nous avoir, prodigué d'utiles conseils, mis à notre disposition une documentation complète et pour nous avoir fait bénéficier de ses connaissances qui nous ont permis de cerner, un tant soit peu, le problème que nous avons développé dans ce projet de fin d'étude. Il serait de bon aloi aussi de ne pas oublier tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à notre formation, qu'ils trouvent ici, l'expression de notre sincère gratitude.

makhlouf

Geddig

# Sommaire

Page .

INTRODUCTION ..... .

## PREMIERE PARTIE : MODELISATION.

### Chap. I GENERALITES.

1. distillation et colonnes à distiller ..... 1
- 2 - Equilibre liquide-vapeur ..... 2
- 3 - Modèle de colonne ..... 3

### Chap II: MODELISATION.

1. Equilibre thermodynamique ..... 5
- 2 Bilan materiel ..... 7
- 3 Hypothèses de travail ..... 8
- 4 Mise en equations ..... 9
- 5 Récapitulation ..... 10

### Chap III REDUCTION DE L'ESPACE D'ETAT.

1. Invariance de  $D_1$  ..... 14
- 2 Invariance de  $D_2$  ..... 15

## DEUXIEME PARTIE : DISTURBANCE DECOUPLING PROBLEM.

### Chap I DDP SYSTEMES LINEAIRES ;

- 1 Préparation mathématique ..... 18
- 2 Modèle linéarisé autour d'un point d'équilibre ..... 23

### Chap II OUTILS MATHEMATIQUES NECESSAIRES A L'ETUDE DU DECOUPLAGE NON LINEAIRE

- 1 Généralités ..... 25
- 2 Distributions ..... 29

3. Décomposition locale de l'espace d'état	33
4. Les distributions $\Sigma$ -invariantes et problème de découplage	36

CHAPITRE III : DECOUPLAGE DU MODELE NON LINEAIRE DE COLONNE.

1 Préliminaires	38
2 Recherche de la commande découplante	40
3 Système découplé	47
4 Conclusion	50

CONCLUSION	51
------------	----

BIBLIOGRAPHIE :

## INTRODUCTION

Le but de ce travail est de donner un aperçu assez concis du problème de la réjection des perturbations (D.D.P : Disturbance découpling Problem) dans les systèmes non linéaires en particulier, avec une application à un modèle de colonne à distiller.

Pour rendre accessible ce travail, nous l'avons partagé en deux parties. La première est consacré à la modélisation de la colonne.

La seconde relatara le DDP en général, et dans laquelle on a inséré un chapitre relatif au linéaire, et ceci en raison de la forte analogie (qui devra rester prudente) qui existe avec le non linéaire, le reste étant totalement consacré au découplage du modèle non linéaire de la colonne étudiée.

Une remarque reste néanmoins à faire, pour des raisons d'allègement et dans le soucis de ne pas donner un caractère trop théorique à notre travail, on se limite au strict essentiel du côté mathématique, la bibliographie présentée en fin de mémoire pallie quelque peu à cette "déficience" (voulue).



1ère PARTIE

MODELISATION

## Notations

- $i$  : numéro du composant.
- $j$  : numéro du plateau.
- $n$  : nombre de plateaux.
- $x_{ij}$  : concentration liquide du composant  $i$  dans le plateau  $j$
- $y_{ij}$  : \_\_\_\_\_ vapeur \_\_\_\_\_ au \_\_\_\_\_
- $K_{ij}$  : coefficient d'équilibre liquide-vapeur du composant  $i$  dans le plateau  $j$ .
- $\alpha$  : volatilité relative du produit de tête par rapport au produit de fond (cas binaire)
- $x_j$  : concentration liquide du produit de tête dans le plateau  $j$  (\_\_\_\_\_)
- $y_j$  : \_\_\_\_\_ vapeur \_\_\_\_\_ au \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_)
- $M_j$  : coefficient d'équilibre liquide-vapeur du produit de tête au plateau  $j$   
exprimé en fonction de  $\alpha$  et  $x_j$ . (\_\_\_\_\_)
- $x_F$  : concentration liquide d'alimentation (en produit de tête) (\_\_\_\_\_)
- $L_j$  : débit liquide molaire du plateau  $j$  [moles /  $\tau$ ]
- $L_s$  : débit molaire de reflux du condenseur (liquide) [\_\_\_\_\_]
- $L_F$  : débit molaire liquide d'alimentation. [\_\_\_\_\_]
- $L_B$  : débit liquide de soutirage du rebouilleur (molaire) [\_\_\_\_\_]
- $V_j$  : débit molaire vapeur du plateau  $j$  [\_\_\_\_\_]
- $h_{vj}$  : enthalpie vapeur du mélange au plateau  $j$  [cal / mole]
- $h_{lj}$  : \_\_\_\_\_ liquide \_\_\_\_\_ [\_\_\_\_\_]
- $H_j$  : retenue molaire (liquide) du plateau  $j$ . [moles]
- $H_B$  : \_\_\_\_\_ du rebouilleur. [\_\_\_\_\_]
- $H_D$  : \_\_\_\_\_ du condenseur. [\_\_\_\_\_]

## CHAPITRE I GENERALITES SUR LA DISTILLATION ET LES COLONNES A DISTILLER

### 1 Distillation: et colonnes à distiller

La séparation de mélanges en leurs constituants de base, dans des conditions chimiques appropriées s'appelle distillation ou séparation par distillation.

L'étude de la distillation a pour objectif la recherche des moyens à mettre en œuvre pour séparer les divers constituants d'un mélange et en tirer un ou plusieurs corps sous forme techniquement ou chimiquement pure. Cette opération a lieu dans un système physique de séparation - colonne à distiller - continu progressif, par transfert de matière entre deux phases - la phase vapeur (le constituant le plus volatil) et la phase liquide (le constituant le moins volatil) - travaillant à contre courant.

L'énergie nécessaire pour provoquer cette séparation du mélange en ses divers constituants au degré de pureté désiré, est fournie sous forme de chaleur véhiculée par les phases en présence.

Ce système, que l'on assimile à une machine thermique, comporte deux sources de chaleur, de potentiels différents, situées aux deux extrémités de la colonne et qui assurent le transfert de l'énergie: Le rebouilleur (source chaude) fournira la chaleur qui sera absorbée en partie par le condenseur (source froide).

### Types de colonnes à distiller

Il en existe deux:

- colonne à garnissage
- colonne à plateaux.

Ces deux types se caractérisent par des échanges de matière tout à



#### 4 Modèle de colonne :

Le modèle de colonne avec lequel on travaillera, est une colonne à plateaux, en plus qui présente beaucoup d'avantages, du point de vue modélisation, relativement au modèle à garnissage. De plus il a fait l'objet d'une étude de rejet des perturbations dans le cas linéaire [5].

Dans le souci de permettre une meilleure vision de la chose, on donne dans la fig (A) une description sommaire de la colonne à plateaux.

La fonction du ballon de Flash est d'assurer une alimentation liquide à son point de bulle.

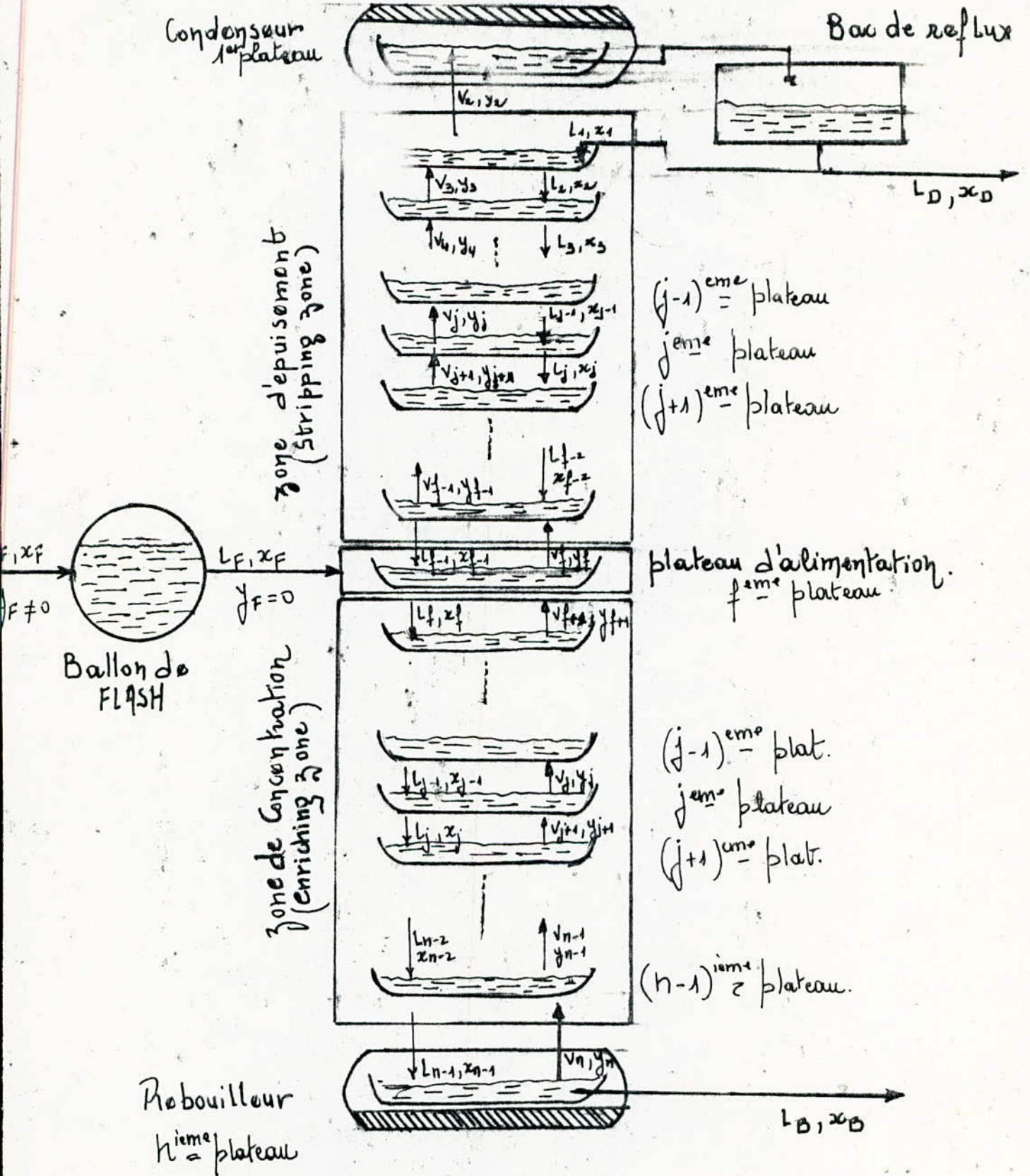


fig 1

1 Equilibre Thermodynamique:1.1. Equilibre liquide vapeur:

a) Cas général: Pour caractériser cet équilibre, on fait appel aux coefficients d'équilibre des différents constituants du mélange, on les définit ainsi:

$$K_{ij} = \frac{y_{ij}}{x_{ij}} \text{ coefficient d'équilibre du constituant } i \text{ dans le plateau } j.$$

Si on se restreint à un plateau, et si le mélange est à  $m$  constituants, le nombre total de variables ( $x_i, k_i, y_i, T, P$ ) sera de  $(3m+2)$  à cela s'ajoutent les  $(m+2)$  équations suivantes.

$$k_i = \frac{y_i}{x_i} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^m y_i = 1$$

L'excès du nombre de variables par rapport au nombre d'équations nous donne le nombre de degrés de liberté du système.

En ramène ainsi le nombre de variable à  $(2m)$  par plateau, soit  $(2m.n)$  pour toute la colonne.

b) Cas binaire: On exprimera les coefficients d'équilibre des deux composants d'un mélange binaire en fonction de la volatilité relative d'un constituant par rapport à un autre et des  $x_{ij}$ .

En général, le distillat et le résidu ont des propriétés physiques et chimiques proches les unes des autres, de là découle l'assertion suivante:

La volatilité relative,  $\alpha$ , d'un constituant par rapport à un autre est considérée comme constante tout le long de la colonne.

Dans ce qui suivra on limitera le raisonnement à un plateau.

Dans un plateau  $j$  quelconque : on pose  $K_1$  le coefficient d'équilibre liquide-vapeur du produit de tête,  $K_2$  celui du produit de fond; alors:

$$\alpha_2 = \frac{K_2}{K_1} \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \frac{K_1}{K_2} = \alpha$$

comme: (1)  $y_1 + y_2 = 1$     et     $x_1 + x_2 = 1$  (2)

(3)  $K_1 = \frac{y_1}{x_1}$     et     $K_2 = \frac{y_2}{x_2}$  (4)

De (1) et (2) on tire :

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{1 - x_1}{1 - y_1} = \frac{1}{K_2}$$

$$\alpha = \frac{K_1}{K_2} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{1}{K_2}$$

$$\alpha = \frac{y_1 (1 - x_1)}{x_1 (1 - y_1)}$$

$$x_1 (1 - y_1) \alpha = y_1 (1 - x_1)$$

$$\Rightarrow y_1 [(1 - x_1) + \alpha x_1] = \alpha x_1$$

On obtient donc:

$$\boxed{y_1 = \frac{\alpha x_1}{1 + (\alpha - 1)x_1}} \quad (2.11)$$

La relation (2.11) permet de ramener le nombre de variables à  $n$  (nombre de plateaux). Pour commodité d'écriture, on adoptera la notation suivante:

$y_1 = y$     et     $x_1 = x$     concentration du produit de tête.

$x_2, y_2$  peuvent être exprimés en fonction de  $x$  et  $y$ .

$$x_2 = 1 - x \quad , \quad y_2 = 1 - y$$

Ce qui se traduira pour la colonne dans son ensemble par:

$$x_{1j} = x_j \quad , \quad x_{2j} = 1 - x_j$$

$$y_{1j} = y_j \quad \quad y_{2j} = 1 - y_j$$



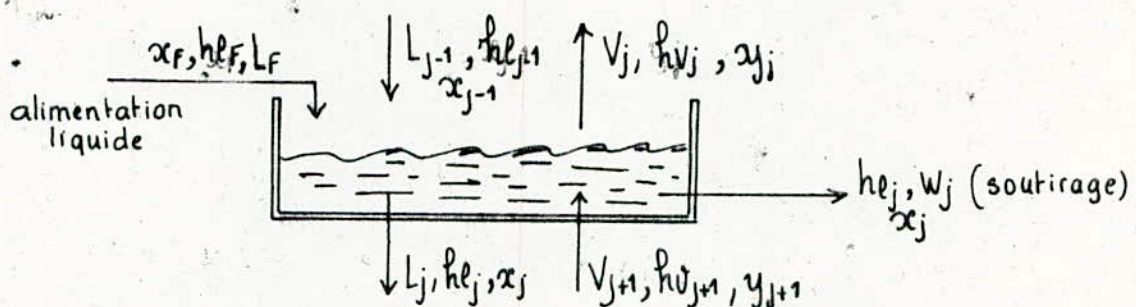
Pour un plateau  $j$  quelconque la relation (211) s'écrira :

$$y_j = \frac{\alpha}{1 + (\alpha - 1)x_j} \cdot x_j = M_j x_j \quad (211)'$$

Cela revient à exprimer  $M_j$  - qui n'est autre que  $K_j$  - en fonction de  $\alpha$  et  $x_j$ .

### 1.2 Bilan thermique:

On établira des équations dans un cas tout à fait général pour un plateau  $j$  quelconque avec alimentation et soutirage.



Il y a conservation de l'énergie, le plateau pris dans son ensemble, tout ce qui entre est égal à ce qui sort.

débits molaires:  $L_F + L_{j-1} + V_{j+1} = V_j + L_j + W_j \quad (212)$

débits calorifiques:  $L_F h_{F, l} + L_{j-1} h_{j-1, l} + V_{j+1} h_{j+1, v} = V_j h_{j, v} + L_j h_{j, l} + W_j h_{j, l}$

### 2 Bilan matériel

Nous procéderons de la même manière que pour le bilan énergétique, soit le même plateau que précédemment. Le modèle que l'on veut établir, étant dynamique, on n'aura pas recours aux équations statiques.

A partir de (212), donnant l'équilibre des débits molaires on établit la relation suivante:

$$(211) \quad H_j \frac{dx_j}{dt} = L_F x_F + L_{j-1} x_{j-1} + V_{j+1} y_{j+1} - L_j x_j - V_j y_j - W_j x_j$$

### 3 Hypothèses de travail:

1. L'étanchéité de la colonne est idéale, d'où l'impossibilité d'échanges parasites de matière avec le milieu extérieur.
2. La colonne est parfaitement isolée thermiquement, (ie): pas d'échanges de chaleur parasites avec l'extérieur et entre les plateaux.
3. La volatilité relative du mélange binaire est constante tout le long de la colonne.
4. Les plateaux  $j=2$  jusqu'à  $j=n-1$  sont parfaitement identiques, il en sera de même avec les retenues molaires qui seront de plus constantes dans le temps.
5. L'idéalité des plateaux est de 100%.
6. La totalité de la vapeur est condensée dans le plateau 1 (Condenseur)
7. L'alimentation se fait exclusivement en liquide (le liquide étant au point de bulle).
8. Le temps mort entre la condensation de la vapeur et le reflux du distillat est négligé. (les constantes de temps hydrauliques sont négligées devant les thermiques)
9. Il n'y a pas de pertes de charge dans la colonne, il en découle que la pression est constante tout le long de celle-ci.

Conséquences directes: De ces hypothèses, on en tirera des conséquences

qui nous seront fort utiles pour la simplification des calculs qui vont suivre:

- Les flux molaires liquides à travers la zone d'épuisement, seront les mêmes idem pour ceux de la zone de rectification.

- Le flux de vapeur est identique tout le long de la colonne.

$$\text{ie): } \left. \begin{array}{l} j \in [2, f-1], L_j = L_s, V_j = V \\ j \in [f, n-1], L_j = L_f + L_s, V_j = V \end{array} \right\} (2.31)$$

## CHAPITRE 3 REDUCTION DE L'ESPACE D'ÉTAT

Les différentes variables d'état de notre système sont les concentrations du produit de tête dans les différents plateaux; les  $x$  devraient d'un point de vue physique être contenus dans  $]0, 1[^m$ , la question que l'on peut se poser est de savoir si le modèle mathématique respecte cette propriété.

Ou encore en d'autres termes, vérifier si la trajectoire de  $x$  dans  $\mathbb{R}^m$  sera contenue dans l'ouvert  $]0, 1[^m$  et ceci quelque soit l'état initial  $x_0 \in ]0, 1[^m$ , l'entrée  $u$ , et le temps  $t$ . L'affirmative reviendrait à montrer que le domaine  $D = ]0, 1[^m$  est positivement invariant.

Voici maintenant deux propositions nécessaires pour montrer l'assertion précédente:

$P_1$ : L'intérieur d'un domaine positivement invariant l'est aussi.

$P_2$ : L'intersection de deux domaines positivement invariants le sera également.

On décompose l'espace d'état initial  $\mathbb{R}^m$  en deux intervalles  $D_1$  et  $D_2$  dont l'intersection sera  $D = [0, 1]^m$ .

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0; i = 1, \dots, m\}$$

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_i \leq 1; i = 1, \dots, m\}$$

### 1. Invariance de $D_1$ :

Soit  $\dot{x}(t) = X_u(x(t))$  l'équation différentielle ordinaire régissant le système (2.5). Le problème de l'invariance se posera aux frontières de  $D_1$  où nous devons trouver le vecteur tangent  $X_u(x)$  dirigé vers "l'intérieur" de

$D_1$ . Cela se traduira par:

Pour tout  $x$  de  $D_1$  tel que  $x_i = 0$ , la  $i$ ème composante de  $X_u(x)$  doit être positive,

ou nulle:

$$(B1) \left\{ \begin{array}{l} \forall j = 1, \dots, m. \quad x_j = 0 \Rightarrow X_u(x)_j \geq 0 \\ \text{avec } x^j = (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_m). \end{array} \right.$$

Appliquons (31) à notre modèle

$V, L_s, \{y_j = M_j x_j^*\}, H, H_B, H_D, \{x_j\}, L_F, x_F$  étant des grandeurs positives ou nulles;

$$j=1: \dot{x}_1 = X_u(x_0^1)|_1 = \frac{L_s}{H_B} M_2 x_2 \geq 0$$

$$2 \leq j \leq p-1: \dot{x}_j = X_u(x_0^j)|_j = M_{j+1} x_{j+1} \frac{V}{H} + x_{j-1} \frac{L_s}{H} \geq 0$$

$$j=p: \dot{x}_j = X_u(x_0^j)|_j = M_{j+1} x_{j+1} \frac{V}{H} + x_{j-1} \frac{L_s}{H} + \frac{L_F x_F}{H} \geq 0$$

$$p+1 \leq j \leq m-1: \dot{x}_j = X_u(x_0^j)|_j = M_{j+1} x_{j+1} \frac{V}{H} + \left(\frac{L_F + L_s}{H}\right) x_{j-1} \geq 0$$

$$j=m: \dot{x}_m = X_u(x_0^m)|_m = \left(\frac{L_s + L_F}{H_B}\right) x_{m-1} \geq 0$$

$\forall x \in D_1, x_i = 0 \Rightarrow \dot{x}_i = X_u(x_0^i)|_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, m, D_1$  est donc positivement invariant

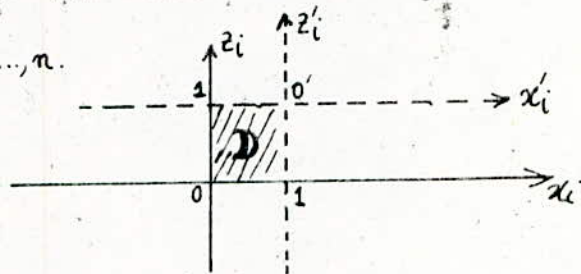
## 2 Invariance de $D_2$ :

On procède tout d'abord à un changement de coordonnées

en posant:  $x'_i = x_i - 1, i = 1, \dots, n$ .

$$z_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$z'_i = (x'_1, \dots, x'_{i-1}, x'_{i+1}, \dots, x'_n)$$



L'invariance se posera aux frontières de  $D_2$  ( $x_i = 1$  ou  $x'_i = 0$ ), où le vecteur tangent devra être dirigé vers l'intérieur de  $D_2$ ;

$$ie): x'_j = 0 (x_j = 1) \Rightarrow X_u(x_0^j) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

$$de plus \dot{x}'_j = \dot{x}_j \Rightarrow X_u(x_0^j) = X_u(x_0^{j'})$$

L'invariance de  $D_2$  se résumera à :

$$x_j = 1 \Rightarrow X_u(x_0^j) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2), x_0^j = (x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Avant d'aller plus loin, montrons la relation suivante:  $M_j x_j - 1 \leq 0, \forall j = 1, \dots, m$ .

$$1 - x_j \geq 0 \text{ car } x \in D_2 \Rightarrow x_j \leq 1.$$

$$\alpha x_j \leq 1 - x_j + \alpha x_j$$

$\Leftrightarrow \alpha x_j \leq 1 + (\alpha - 1)x_j$  ,  $\alpha$  étant comprise entre 0 et 1 :

$$\frac{\alpha x_j}{1 + (\alpha - 1)x_j} \leq 1 \quad ; \quad M_j x_j = \frac{\alpha x_j}{1 + (\alpha - 1)x_j} \Rightarrow M_j x_j - 1 \leq 0, j=1, \dots, n$$

• Vérifions maintenant (32) sur le modèle (25) :

vu que  $M_j x_j - 1 \leq 0$ ,  $x_{j-1} \leq 0$ ,  $j=1, \dots, n$ ,  $x_F \leq 1$  :

$$\text{--- } j=1 \text{ ---} : \dot{x}_1 = X_u(x_0^1)|_1 = \frac{V}{H_D} (M_2 x_2 - 1) \leq 0$$

$$\text{--- } 2 \leq j \leq p-1 \text{ ---} : \dot{x}_j = X_u(x_0^j)|_j = (x_{j-1} - 1) \frac{L_S}{H} + (M_{j+1} x_{j+1} - 1) \frac{V}{H} \leq 0$$

$$\text{--- } j=p \text{ ---} : \dot{x}_p = X_u(x_0^p)|_p = (x_{p-1} - 1) \frac{L_S}{H} + (M_{p+1} x_{p+1} - 1) \frac{V}{H} + \frac{L_F}{H} (x_F - 1) \leq 0$$

$$\text{--- } p+1 \leq j \leq m-1 \text{ ---} : \dot{x}_j = X_u(x_0^j)|_j = (x_{j-1} - 1) \left( \frac{L_S}{H} + \frac{L_F}{H} \right) + (M_{j+1} x_{j+1} - 1) \frac{V}{H} \leq 0$$

$$\text{--- } j=m \text{ ---} : \dot{x}_m = X_u(x_0^m)|_m = (x_{m-1} - 1) \left( \frac{L_S}{H} + \frac{L_F}{H} \right) + (1 - M_n(x_n=1)) \frac{V}{H}$$

$$1 - M_n(x_n=1) = 1 - \frac{\alpha}{1 + (\alpha - 1)} = 0$$

$$\text{d'où : } \dot{x}_m = (x_{m-1} - 1) \left( \frac{L_S}{H} + \frac{L_F}{H} \right) \leq 0.$$

On a ainsi vérifié que  $D_2$  était positivement invariant.

$D_1$  l'étant aussi, alors  $D_1 \cap D_2 = [0, 1]^m$  est positivement invariant ( $P_2$ )

et d'après ( $P_1$ ),  $[0, 1]^m$  p.invariant  $\Rightarrow ]0, 1[^m$  p.invariant.

Conclusion: L'espace d'état peut être considéré comme étant l'ouvert  $D = ]0, 1[^m$  de  $\mathbb{R}^m$ .

(\*) On démontre par l'absurde que  $M_j x_j \geq 0$  pour  $0 \leq x_j \leq 1$ .  
en effet supposons que :

$$M_j x_j < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha x_j}{1 + (\alpha - 1)x_j} < 0 \Leftrightarrow \alpha x_j > 1 + (\alpha - 1)x_j \Leftrightarrow 0 > 1 - x_j$$

$$\Leftrightarrow x_j > 1 \quad \text{ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.}$$

2ème PARTIE

DISTURBANCE

DECOUPLING

PROBLEM

"D.D.P."

## PROBLEME DU REJET DES PERTURBATIONS

(DISTURBANCE DECOUPLING PROBLEM - D.D.P.)

Le D.D.P. consiste à mettre à l'abri la sortie d'un système, des fluctuations pouvant se manifester sur une entrée quelconque.

Ces fluctuations que l'on appelle communément perturbations, sont généralement non mesurables, et confèrent, si leurs effets ne sont annihilés, leurs lois de variation aux grandeurs de sortie.

L'idéal dans un système est la rejection de ces perturbations, c'est à dire, faire en sorte que ces perturbations, aussi aléatoires soient-elles, n'affectent aucunement les grandeurs de sortie, soit donc isoler les sorties de toutes perturbations.

Dans un langage plus mathématique, maintenir identiquement nul tout transfert entre la perturbation et la sortie.

Dans le cas linéaire, le D.D.P. a été abordé une première fois par Wonham [4], par la suite l'approche géométrique a été étendue aux systèmes non linéaires: [10], [11], ..., où un certain nombre de travaux ont été faits depuis quelques années. Nous allons maintenant voir, dans quelle mesure, on peut résoudre le D.D.P., pour le modèle de colonne présenté dans la première partie.

# CHAPITRE I PROBLÈME DU REJET DES PERTURBATIONS DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Quoique notre travail soit principalement axé sur l'étude du DDP dans les systèmes non-linéaires (S.N.L.), on a tout jugé utile d'introduire cette partie relative au DDP dans les systèmes linéaires, qui est importante dans la mesure où elle retrace la première application du DDP qui s'est faite dans un cas linéaire, et à cela s'ajoute la très forte analogie qui existe entre les deux.

C'est pour cela que l'on considère cette partie comme étant un tremplin essentiel pour aborder le DDP dans les S.N.L. Notre ambition sera de permettre à l'éventuel lecteur de cerner, sinon totalement, du moins partiellement le problème du rejet des perturbations dans les systèmes linéaires et de lui ouvrir une voie à l'étude non linéaire.

## 1 Préparation mathématique:

Nous ne présenterons ici que les concepts mathématiques de base, indispensables à la compréhension du découplage linéaire. Les espaces vectoriels considérés seront de dimension finie sur un corps commutatif  $K$  ( $\mathbb{R}$ ) de caractéristique 0.

1.1. Systèmes linéaires: Dans un cas général, un système linéaire se présentera de la forme suivante:

$$(I.1.1) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$



ou :

- A : matrice d'état ( $n \times n$ ) constante
- B : de commande ( $n \times p$ ) "
- C : de sortie ( $m \times n$ ) "
- $x(t)$ : vecteur d'état de dimension  $n$
- $u(t)$ : " de commande " "  $p$ .
- $y(t)$  " de sortie " "  $m$

1.1. Notion d'A-invariance:

Definition: Soit  $M$  un  $K$ -espace vectoriel,  $A$  un endomorphisme dans  $M$  et  $S$  un sous espace vectoriel de  $M$ ; on dira que  $S$  est  $A$ -invariant si:  
 $\forall x \in S, Ax \in S$  en écriture compacte:  $AS \subset S$ .

Cela se traduira par le fait que si  $\{s_i\}_{i=1, \dots, k}$  est la base de  $S$ , alors  $A$  aura la forme:  $A = \left[ \begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right]_k$  dans la base  $\{s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_n\}$  de  $M$ .

1.3 (A, B)-invariance:

Soit le système (1.1).

Definition 1.3.1: Soit  $M$  l'espace d'état,  $V$  un sous-espace de  $M$ ,  $V$  sera dit  $(A, B)$  invariant, si quelque soit l'état initial du système  $(\cdot) x_0 \in V$ , il existe une commande  $u(t)$  telle que  $x(t) \in V, \forall t \geq 0$ .

ie) une commande adéquate maintenant la trajectoire du système dans  $V$ .

De la définition (1.3.1), il en découle quelques propriétés qui viennent compléter cette notion.

On notera  $I(A, B, M)$  l'ensemble des sous-espaces de  $M$ ,  $(A, B)$  invariants, et  $I(A, B, N)$  l'ensemble des sous-espaces  $(A, B)$  invariants contenus dans l'espace  $N$ .

Dans ce qui suivra,  $\mathcal{V}$  désignera un sous espace de  $M$ .

132 Propositions:

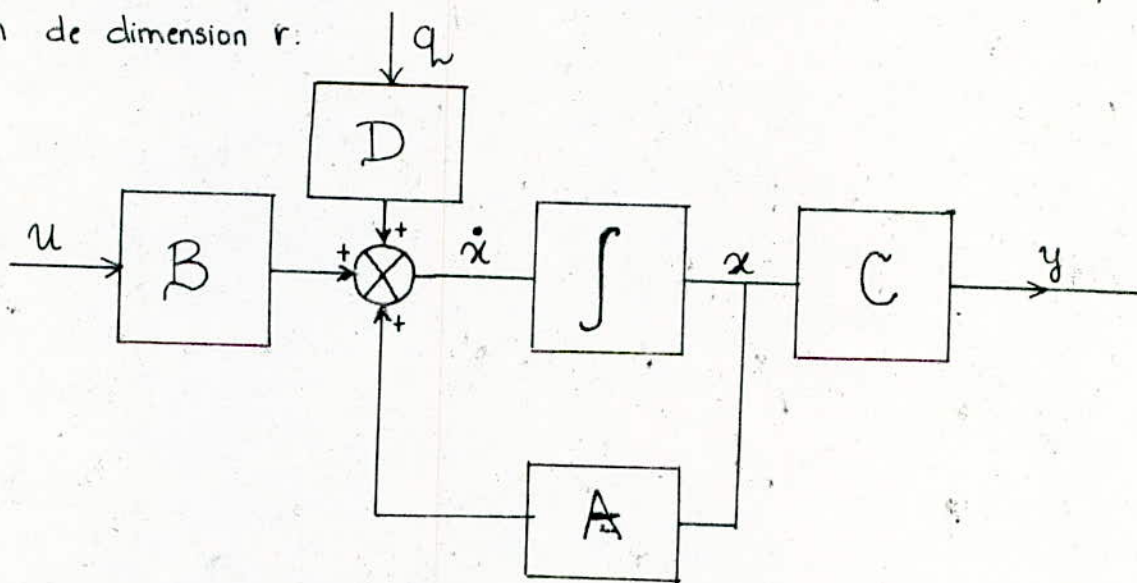
- a) Tout sous espace  $\mathcal{V}$ ,  $A$ -invariant est inclus dans  $I(A, B, M)$ . Ce qui est trivial en effet on le vérifie en appliquant une commande  $u$ .
- b)  $[B], \mathcal{V} \in I(A, B, M)$  ssi  $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}$  où  $\mathcal{B} = \text{Im } B$ .
- c)  $[B], \mathcal{V} \in I(A, B, M)$  ssi il existe une commande linéaire par retour d'état  $u = Fx$  telle que  $\mathcal{V}$  soit  $(A + BF)$ -invariant.

14 Système perturbé

141 Représentation schématique: le système (1.1) perturbé s'écrira comme suit

$$(1.1, 2) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Dq \\ y = Cx \end{cases}$$

Où  $D$  est la matrice de perturbation ( $m \times r$ ) et  $q$ , le vecteur de perturbation de dimension  $r$ :



142 Sous-espace commandable  $R_0$ :

$R_0$  est l'ensemble des états atteignables<sup>(\*)</sup> de l'espace d'état  $M$ ; il est aussi un sous-espace de  $M$ ; si on note  $\mathcal{B} = \text{Im } B$  on le définira de la manière suivante:

$$R_0 = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + A^2\mathcal{B} + \dots + A^{n-1}\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \mathcal{B}$$

et on le note:  $\langle A / \mathcal{B} \rangle$ , et on l'appelle espace commandable de la paire  $(A, \mathcal{B})$ .

(\*) atteignabilité: un état  $x_1$  est dit atteignable à partir de l'origine ( $x(0) = 0$ ), s'il existe une entrée  $u(t)$ ,  $t > 0$  telle que  $x(t) = x_1$

Remarque:  $R_0$  est  $A$ -invariant; en effet:

$$A R_0 = A \sum_{k=0}^{m-1} A^k B = \sum_{k=1}^m A^k B = \sum_{k=0}^{m-1} A^k B = R_0$$

$A R_0 \subset R_0$

(d'après le théorème de Cayley-Hamilton)

$R_0$  sera aussi  $(A, B)$ -invariant (P. 132 a).

14.3. Condition de découplage.

Le système (I.1.2) muni de la commande  $u = Fx$  devient :

$$(I.1.3) \begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x + Dq \\ y = Cx \end{cases}$$

La résolution de ce système donne:

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ C (A + BF)^k D \int_0^t \beta_k(t-\tau) q(\tau) d\tau \right\}; \text{ on s'arrête à } m-1, \text{ par application du théorème de Cayley-Hamilton.}$$

$\beta_k(t-\tau)$  est un scalaire.

$y$  doit être maintenue identiquement nulle, quel que soit la perturbation  $q(t)$ ;

On peut montrer qu'il faut et qu'il suffit, pour cela, de faire en sorte que :

$$C (A + BF)^k D = 0, \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (D \text{ est l'image de } D)$$

Autrement dit :  $(A + BF)^k D \subset \ker(C) \quad k = 0, \dots, m-1 \quad (a)$

Si on note  $R_0 = \langle A + BF, D \rangle$  l'espace commandable de la paire  $(A + BF, D)$

(a) implique  $R_0 \subset \ker(C)$  (b)

Donc si l'on trouve un retour d'état  $F$  satisfaisant (b), le problème de l'isolation de la perturbation est résolu; la condition nécessaire est que :

$$D \subset R_0$$

Théorème de Wonham [4]:

énoncé: Le problème du rejet des perturbations est résolu ssi  $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}^*$  où  $\mathcal{V}^*$  est le plus grand sous espace  $(A, B)$ -invariant contenu dans  $\ker(C)$ .

Preuve: - Si le DDP est résolu, cela veut dire qu'il existe un retour d'état  $u = Fx$ , tel que l'espace commandable  $\mathcal{R}_0$  soit inclus dans  $I(A, B, \ker(C))$ . Comme l'opération d'addition est fermée dans  $I(A, B, K)$ ,  $K$  étant un sous-espace quelconque de  $M$ , alors il existe un élément maximal de  $I(A, B, K')$ .

Notons  $\mathcal{V}^* = \max I(A, B, \ker(C))$ , donc  $\mathcal{R}_0 \subset \max I(A, B, \ker(C))$ .

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{V}^* \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{V}^*$$

- Si  $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}^* = \max I(A, B, \ker(C))$ , alors il existe une commande  $u = Fx$  maintenant la trajectoire de  $x(t)$  dans  $\mathcal{V}^*$  et ceci quel que soit le temps  $t \geq 0$ .

1.5. Algorithme de calcul de  $\mathcal{V}^*$  [4]:

151. Théorème de Wonham [4], [6].

Si l'on pose  $V(0) = \ker(C)$ .

$$V(I) = V(I-1) \cap A^{-1}(\mathcal{B} + V(I-1))$$

si  $k = \dim \ker(C)$ .

$$V^* = V(k) = \max I(A, B, \ker(C)).$$

$$V(I) \subset V(I-1), \quad I = 1, \dots, k.$$

$$\text{et } A^{-1}(\mathcal{B} + V) = \{z \in \mathbb{R}^m \mid Az \in \mathcal{B} + V\}$$

Le théorème suivant apporte une simplification au précédent algorithme:

152 Théorème [4]:  $V^* = V(I)$  ssi  $V(I) = V(I-1)$ .

16 Conclusion:

Le DDP résolu ne signifie pas stabilité du système, cette dernière est sujette à une étude complémentaire: le DDPS (DDP with Stability) qui nous conduit à la notion de sous-espace de commandabilité (Séc).

## 2 Modèle linéarisé autour d'un point d'équilibre. [5]

Sous le titre "Approche géométrique du DDP, application à un modèle de colonne à distiller" a été éditée une publication [5] qui traite le même modèle que le nôtre, mais linéarisé autour d'un point d'équilibre.

Ce modèle linéarisé se présente de la manière suivante :

$$(I.21) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Dq \\ y = Cx \end{cases}$$

En tenant compte des particularités de ce procédé, le système (2) développé aura la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diagonal blocks} & \text{circles} \\ \text{circles} & \text{diagonal blocks} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x$$

Où  $x = {}^t(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  noté par la suite :  ${}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\Delta x_i, i=1, \dots, n$ ; représente l'écart de la concentration du  $i^{\text{ème}}$  plateau par rapport à la concentration au point d'équilibre dans ce même plateau.

Les perturbations :  $q_1 = \Delta L_F$  et  $q_2 = \Delta x_F$ .

Les entrées :  $u_1 = \Delta L_S$ , et  $u_2 = \Delta V$

Les sorties à réguler :  $y_1 = \Delta x_1$ ,  $y_2 = \Delta x_n$

Recherche de  $\mathcal{V}^*$  :

$$\ker(C) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_n = 0 \} \quad (\text{de dimension } n-2)$$

En utilisant l'algorithme (1.5) et en posant  $V_0 = \ker(C)$ .

Au bout de la deuxième itération, on obtient:

$$\mathcal{V}_2 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\} = \mathcal{V}_1^*$$

d'où:  $\mathcal{V}^* = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$  dimension  $m-3$ .

Rejet des perturbations:

La condition de découplage ( $Y_m D \subset \mathcal{V}^*$ ) n'est remplie que pour  $q_2$  (concentration d'alimentation) qui sera rejetée, tandis que  $q_1$  (débit d'alimentation) ne peut être que subie.

Retour d'état linéaire F:

Le retour d'état F doit vérifier:  $(A + BF)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$ , un choix adéquat d'une base de  $\mathcal{V}^*$  donne la forme suivante de F:

$$F = \begin{bmatrix} \underbrace{f_{11} \quad f_{12} \quad f_{13}}_{\text{coef. libres}} \quad \underbrace{0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{\text{coef. fixés}} \quad \underbrace{f_{1,n-1} \quad f_{1n}}_{\text{coef. libres}} \\ \underbrace{f_{21} \quad f_{22} \quad f_{23}}_{\text{coef. libres}} \quad \underbrace{0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{\text{coef. fixés}} \quad \underbrace{f_{2,n-1} \quad f_{2n}}_{\text{coef. libres}} \end{bmatrix}$$

Remarques sur la publication

- Les coefficients libres de la matrice F, ont été choisis nuls, ce qui nous laisse que deux variables  $x_3$  et  $x_{n-1}$  pour piloter le système.
- Dans la partie simulation, de cette publication, il n'a pas été précisé l'influence du point d'équilibre autour duquel la linéarisation s'est faite.
- Par chance, en choisissant nuls, les coefficients libres de F, la stabilité est conservée.

CHAPITRE II Outils Mathématiques Nécessaires à l'étude  
DU DECOUPLAGE NON LINEAIRE

Dans un but d'allègement, nous nous tiendrons à l'essentiel : les notions de variété différentiable, d'espace tangent, d'Algèbre de Lie ne seront que brièvement survolées, par contre nous développerons largement le concept de distribution invariante. Le lecteur désirant aborder d'une manière moins succincte la géométrie différentielle, trouvera un supplément d'informations dans les références bibliographiques [7], [9], [8].

Toutefois, de par même sa simplicité, ce qui suivra, en vu d'être abordé, ne demandera que quelques notions de base en topologie.

### 1 Généralités:

Définition 1.1. On appellera variété  $C^\infty$  différentiable, un espace topologique  $M$ , à base dénombrable, muni d'une famille  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$  où les  $U_i$  sont des ouverts de  $M$ , les  $\varphi_i$  des homéomorphismes (\*) de  $U_i$  dans un ouvert  $W_i$  de  $\mathbb{R}^m$ . (les  $(U_i, \varphi_i)$  sont nommés cartes), tels que:

- (i) Les  $U_i$  forment un recouvrement ouvert de  $M$ .
- (ii) Les cartes de  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$  sont toutes  $C^\infty$  compatibles (\*\*) deux à deux.
- (iii) Toute carte compatible avec les éléments de  $\mathcal{A}$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

- Le nombre  $n$  est la dimension de  $M$

- L'ensemble  $\mathcal{A}$  est appelé Atlas  $C^\infty$  de  $M$ .

(\*) une fonction  $f$  est un homéomorphisme si elle est bijective et si  $f$  et  $f^{-1}$  sont toutes deux continues.

(\*\*\*) Compatibilité: deux cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  seront  $C^\infty$  compatibles ou tout

Definition 1.2:

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  et  $\mathcal{C}_x$  l'ensemble des courbes issues de  $x : t \rightarrow f(t)$ ,  $f(0) = x$  et  $f \in C^\infty$ .

- Soit une carte quelconque  $(U, \varphi)$  telle que  $x \in U$  et deux courbes  $f$  et  $f'$ , nous dirons qu'elles sont équivalentes ssi dans l'ouvert  $\varphi(U)$  de  $\mathbb{R}^m$  on a :

$$\left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\psi'}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{avec } \psi = \varphi \circ f \text{ et } \psi' = \varphi \circ f'.$$

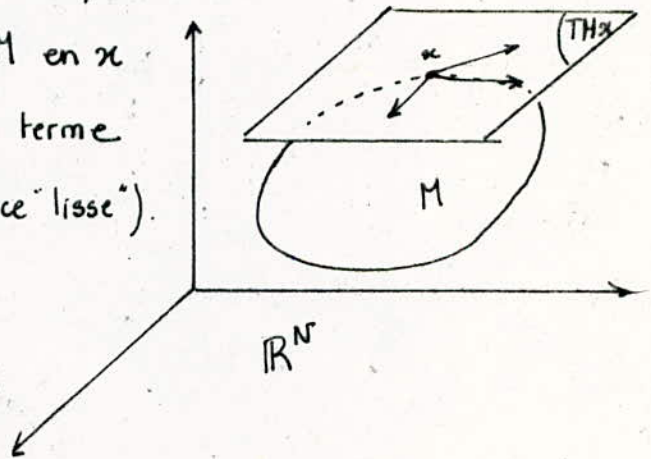
Notons  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence ainsi définie.

L'espace quotient  $\mathcal{C}_x / \mathcal{R}$  est muni d'une structure d'espace vectoriel et on l'appelle "espace tangent à  $M$  en  $x$ " et on note :  $TM_x$  (\*)

- L'ensemble des espaces tangents à la variété  $M$  en tous ses points est nommé "fibré tangent" et on l'écrit  $TM = \bigcup_{x \in M} TM_x$ .

Remarque: Toute variété différentielle  $C^\infty$  de dimension  $m$  est plongée dans un espace Euclidien de dimension  $N = 2m+1$  (Whitney imbedding théorème [9]).

On peut représenter  $TM_x$  comme un plan de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^N$  tangent à  $M$  en  $x$  au sens géométrique classique du terme ( $M$  étant considérée comme une surface "lisse").



simplement compatibles :

si  $U \cap V \neq \emptyset$

1-  $\varphi(U \cap V)$  (resp.  $\psi(U \cap V)$ ) est un ouvert.

2. L'application  $\varphi \circ \psi^{-1}$  de  $\varphi(U \cap V)$  dans  $\varphi(U \cap V)$ , (resp.  $\psi \circ \varphi^{-1}$  de  $\varphi(U \cap V)$  dans  $\psi(U \cap V)$ ) est  $C^\infty$ .

(\*)  $\mathcal{R}$  est indépendante du choix de la carte  $(U, \varphi)$ .



Définition 1.3: Dérivée de Lie: notée  $L_X(\cdot)$ , où  $X$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ , qui en coordonnées locales s'exprime:  $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$

si  $f$  est une 0-forme:  $L_X f = Xf$

En coordonnées locales:  $L_X f = Xf = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$  dérivée de  $f$  selon la direction de  $X$ .

On pourra donc définir la dérivée de Lie en tant que dérivée directionnelle.

Exemple 1.1. Soient  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow f(x) = x_1 x_2 - 1$

et  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur la variété  $\mathbb{R}^3$ :  $X(x) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 0 \frac{\partial}{\partial x_3}$

(on écrira plus simplement  $X = {}^t(x_1 \quad x_2 x_3 \quad 0)$ )

Alors:  $L_X f = Xf = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + 0 \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 x_2 + x_2 x_3 x_1 + 0$

$$L_X f = x_1 x_2 (1 + x_3).$$

Définition 1.4: Soient 2 champs de vecteurs  $C^\infty$  sur une même variété

$M$ , Le crochet de Lie de  $X$  et  $Y$ , noté  $[X, Y]$ , est un nouveau champ de vecteurs tel que: Quelque soit la 0-forme  $f$ , il existe un unique champ de vecteurs,  $[X, Y]$  qui réponde à:

$$L_{[X, Y]} f = L_X L_Y f - L_Y L_X f$$

$$\left. \begin{array}{l} L_{[X, Y]} f = [X, Y] f \\ L_X L_Y f = X \cdot Y f \\ L_Y L_X f = Y \cdot X f \end{array} \right\} \Rightarrow [X, Y] f = X Y f - Y X f$$

d'où:  $[X, Y] = X Y - Y X$  (\*)

Expression du crochet de Lie en coordonnées locales:

$$\text{Si } X = {}^t(X^1, \dots, X^m) \text{ et } Y = {}^t(Y^1, \dots, Y^m) \text{ (i.e.: } X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \text{)}$$

$$X Y = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x_i} (Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) \right)$$

(\*)  $X Y$  n'est pas un produit quelconque, mais la dérivée de  $Y$  selon la direction de  $X$ .

En calculant  $YX$  d'une manière analogue, on obtient alors:

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

d'où 
$$[X, Y] = D_x Y \cdot X - D_x X \cdot Y$$

$D_x X$  et  $D_x Y$  sont les matrices jacobiniennes de  $X$  et  $Y$  (respectivement).

Exemple 1.2:  $M = \mathbb{R}^3$ ,  $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$  et  $Y = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$

$$[X, Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Propriétés:

$$[X, X] = 0$$

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \text{ cartes } [\lambda X, \mu Y] = \lambda \mu [X, Y]$$

$$[X+Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$$

Bilinéarité du crochet de Lie.

On en déduit l'identité de JACOBI:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

—  $\phi$  —

Dans ce qui suivra nous raisonnerons exclusivement en coordonnées locales, étant  $C^\infty$  diff<sup>ble</sup> les cartes  $(U_i, \psi_i)$  détermineront des ouverts  $W_i$  de  $\mathbb{R}^m$  sur lesquels on travaillera.

On travaillera donc exclusivement dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^m$  et  $T\mathbb{R}_x^m$  respectivement  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$

## 2 Distributions:

### 2.1 Quelques définitions:

2.1.1. Système: On appelle système l'objet mathématique  $\Sigma$  ou  $(M, \mathcal{F}, h)$

avec: -  $M$ : une variété  $C^\infty$  connexe nommée espace d'état.

-  $\mathcal{F}$  une famille de champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$  tel que:

$$(1.2.1) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} = \left\{ X_0(x) + \sum_{i=1}^p X_i(x) u_i \right\} = \left\{ \dot{X}_0(x) + X(x) u \right\} \\ u = {}^t(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p: \text{espace d'entrée.} \end{array} \right.$$

et  $X(x) = (X_1(x), \dots, X_p(x))$  matrice  $m \times p$

-  $h$ : fonction  $C^\infty$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}^l$ : l'espace de sortie.

2.1.2 Distribution: une distribution  $\Delta$  est une application de  $M$  dans  $TM$

qui à chaque point  $x$  de  $M$  associe un sous espace  $\Delta(x)$  de  $T_x M$ , elle sera de rang constant  $k$  sur  $M$  si  $\forall x \in M, \dim \Delta(x) = k$ .

-  $\Delta$  est  $C^\infty$  (ou analytique), si pour tout  $x_0$  de  $M$ , il existe un voisinage  $V_0$  de  $x_0$ , et une famille de champs de vecteurs  $C^\infty$  (ou analytiques)  $(X_1, \dots, X_m)$  tels

que:  $\forall x \in V_0, \Delta(x) = \text{span}(X_1(x), \dots, X_m(x))$ .

- Un champ de vecteur  $X$  appartient à  $\Delta$  si  $\forall x \in M, X(x) \in \Delta(x)$ .

- Et si de plus étant donné 2 champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  de  $\Delta$ ,  $[X, Y]$  appartient de nouveau à  $\Delta$ , alors  $\Delta$  sera dite involutive.

2.1.3 Définition: Soit  $\Delta$  une distribution  $C^\infty$  sur  $M$ , une sous variété connexe  $N$  de  $M$  sera une sous variété intégrale maximale de  $\Delta$  (s.v.i.m) si:

(i)  $\forall x \in N, T_x N = \Delta(x)$

(ii) pour toute sous variété  $N'$  de  $M$  vérifiant (i),  $N \subset N' \Rightarrow N = N'$

2.1.4 Définition: Une distribution  $\Delta, C^\infty$  sur  $M$  est intégrable si elle engendre sur  $M$  une partition en sous variétés intégrales maximales de  $\Delta$ .

## 2.2 Théorème de Frobenius [10]

énoncé: Une distribution  $\Delta, C^\infty$ , de rang constant  $k$  sur une variété  $C^\infty, M$  est intégrable si et seulement si elle est involutive.

Conséquences:

- Les sous-variétés intégrales maximales engendrées par  $\Delta$  sur  $M$  sont toutes de même dimension  $k$  (\*).
- Soit l'équation différentielle ordinaire (2.2)  $\dot{x} = X(x)$ ,  $x \in M$ ,  $X \in \Delta$ ; si  $\Delta$  répond au conditions du théorème de Frobenius; alors  $\forall x_0 \in M$ , il existe une et une seule s.v.i.m de  $\Delta$  passant par  $x_0$ , que l'on notera  $N_{x_0}$ , de plus quelque soit l'état initial  $x_0$  de  $M$ , la solution  $x$  de l'équation (2.2) restera indéfiniment dans la sous-variété  $N_{x_0}$  de  $M$ .

Exemple 2.2.1:  $M = ]0, 1[{}^3$ ,  $\Delta = \text{span} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ ,  $\forall X \in \Delta$ , et  $\forall x_0 \in M$ .  
la solution  $x$  de (2.2) sera contenue dans  $N_{x_0}$  ainsi définie:

$$N_{x_0} = \left\{ x \in ]0, 1[{}^3 \mid x_0^3 = x^3 \right\} \quad (\text{fig 2.2.1})$$

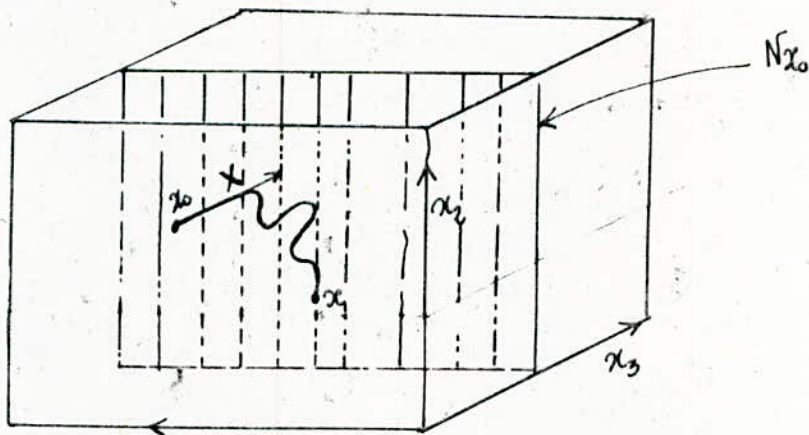


fig 2.2.1.

(\*) La condition de rang constant peut être "court-circuitée" si  $\Delta$  est en plus de  $C^\infty$  analytique, mais dans ce cas les svim de  $\Delta$  n'auront pas forcément la même dimension. (Théorème de Hermann-Nagano [10]).  
Sussman [15] énonce un théorème encore plus fin.

### 2.3 Distributions invariantes :

231 Définition de la  $\mathcal{F}$ -invariance :  $\mathcal{F}$  étant une famille de champs de vecteurs  $C^\infty$ , on dira qu'une distribution  $C^\infty$ ,  $\Delta$  est invariante par rapport à  $\mathcal{F}$  (ou tout simplement  $\mathcal{F}$ -invariante) si :  $\forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \in \Delta \Rightarrow [X, Y] \in \Delta$ .

En écriture condensée :  $[\mathcal{F}, \Delta] \subset \Delta$ .

Exemple 232 : Soient une distribution  $\Delta = \text{span} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$  sur une variété  $M$  de dimension  $n$ , et  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur cette même variété.

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

La condition d'invariance de  $\Delta$  par rapport à  $X$  se traduit par :

$$\left[ X, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \in \text{span} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \quad \forall j = 1, \dots, k$$

qui après calcul donnera :

$$\frac{\partial X^i}{\partial x_j} = 0 \quad \begin{cases} i = k+1, \dots, n \\ j = 1, \dots, k \end{cases}$$

et si l'on pose :  $\underline{x}_1 = (x_1, \dots, x_k)$   
 $\underline{x}_2 = (x_{k+1}, \dots, x_n)$

$$\text{Alors : } X = \begin{pmatrix} X^1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \\ \vdots \\ X^k(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \\ X^{k+1}(\underline{x}_2) \\ \vdots \\ X^n(\underline{x}_2) \end{pmatrix}$$

Remarque : La définition de la  $\mathcal{F}$ -invariance n'est autre que l'extension aux systèmes non linéaires de la  $A$ -invariance.

Nous pourrions ainsi retrouver certains résultats inhérents au linéaire à partir de (231). Soient donc : le champ de vecteurs  $X(x) = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , et  $\mathcal{V}$  un sous espace de  $\mathbb{R}^n$  et  $\{x_1, \dots, x_k\}$  une base de  $\mathcal{V}$ .

On définit la distribution  $\Delta = \text{span} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$  telle que :  $\Delta(x) = \mathcal{V} \subset T\mathbb{R}^n_x$

L'invariance de  $\Delta$  par rapport à  $X(x) = Ax$  s'écrira :

$$\left[ Ax, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \in \text{span} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \quad j = 1, \dots, k$$

autrement dit, les  $(n-k)$  composantes du vecteur  $\left[ Ax, \frac{\partial}{\partial x_j} \right]$  sont nulles pour  $j = 1, \dots, k$ .

$$\text{ie) : } A \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \Leftrightarrow A_{ij} = 0 \quad \begin{cases} i = k+1, \dots, n \\ j = 1, \dots, k \end{cases}$$

On en déduit que dans la base  $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  aura la forme suivante:

$$A = \left\{ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right.$$

Ce résultat a été déjà énoncé.

Definition 2.3.3:

Soit  $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^p$  la famille de champs de vecteurs:

$$\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^p = \left\{ X_0(x) + \sum_{i=1}^p \alpha_i(x) X_i(x) + \sum_{l=1}^p \sum_{j=1}^p X_l(x) \beta_{jl}(x) V_j \right\}$$

Et qui n'est autre que la famille  $\mathcal{F}^p$  définie précédemment et paramétrée par la commande  $u_i = \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^p \beta_{ji} V_j \quad i=1, \dots, p. \quad (\text{II } 2.2)$

- $V_j \in \mathbb{R}$ , indépendante de  $x$
- $\beta = [\beta_{ji}]$  matrice  $p \times p$ ,  $\beta_{ji}$  fonctions  $C^\infty$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}$
- $\alpha_i(x)$  fonctions  $C^\infty$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  et on notera  $\alpha = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ .

Nous dirons alors qu'une distribution  $\Delta$  est  $\Sigma$ -invariante s'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  comme définies ci-dessus, telles que  $\Delta$  soit  $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^p$ -invariante. (\*)

Remarque: Cette définition est l'extension au non linéaire de la  $(A, B)$ -invariance; plus exactement de la définition (1.3.2 c):  $\mathcal{V}$  est  $(A, B)$ -invariant ssi il existe une commande linéaire  $u = Fx$ , telle que  $\mathcal{V}$  soit  $(A + BF)$  invariant.

(\*) Certains auteurs: Hirschorn [13], Nijmeijer [14], poussent l'analogie avec le linéaire, jusqu'à parler de distributions  $(A, B)$ -invariantes, et définiront la  $\Sigma$ -invariance à partir de la définition (1.3.2 b); qui en non linéaire s'écrira:

$\Delta$  est invariante par rapport à la famille  $\mathcal{F}^p = \left\{ X_0(x) + \sum_{i=1}^p X_i(x) u_i \right\}$

ssi: 
$$\begin{cases} [X_0, \Delta] \subset \Delta + \text{span}(X_1, \dots, X_p) \\ [X_i, \Delta] \subset \Delta \end{cases}$$

Cette définition a pour unique avantage de ne pas tenir compte de  $u$ .

### 3 Décomposition locale de l'espace d'état M

Définition 3.1: Un état  $x_1$  est indistinguable de l'état  $x_0$  et on note  $x_1 I x_0$  si  $\forall t_1 \geq 0$ , et quelle que soit l'entrée  $u$ , les solutions  $x_u(t, x_0)$  du système (II.2.1) satisfont à :

$$h(x_u(t_1, x_0)) = h(x_u(t_1, x_1)).$$

Définition 3.2: Un état  $x_1$  est fortement indistinguable d'un autre état  $x_0$  et on écrit  $x_1 SI x_0$ , s'il existe une courbe continue  $\sigma$  de  $[0, 1]$  dans  $M$ , telle que  $\sigma(0) = x_0$ ,  $\sigma(1) = x_1$  et  $\sigma(s) I x_0, \forall s \in [0, 1]$ .

La relation définie ainsi, est évidemment une relation d'équivalence, donc formera une partition en classes d'équivalence sur  $M$ .

Soit  $SI(x_0) = \{x \in M \mid x SI x_0\}$  la classe de  $x_0$ .

Définition 3.3: On appelle fermeture involutive d'une distribution  $\Delta$ , et on la note  $\mathcal{L}(\Delta)$ , la distribution engendrée par l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de  $\Delta$ .

Théorème 3.1: [10], [12].

Soient les fonctions  $M_{ij}(x) = L_{X_i}^{k_{ij}} L_{X_0}^{k_{ij}} h_j(x)$ ,  $k_{ij} \in \mathbb{N}$ .  
et  $d_j = \min(k_{ij})$  tels que  $\mu_{ij} \neq 0$ . ( $i=1, \dots, p$ ).

Alors la distribution  $\Delta^*$  définie comme ci-dessous :

$$\Delta^* = \ker \{ dh_1, dL_{X_0}^{d_1} h_1, \dots, dL_{X_0}^{d_1} h_1, dh_2, \dots, dL_{X_0}^{d_2} h_2, \dots, dh_p, \dots, dL_{X_0}^{d_p} h_p \}$$

est la plus grande distribution  $\Sigma$ -invariante contenue dans  $\ker dh$ .

De plus  $\Delta^* = \mathcal{L}(\Delta^*)$  autrement dit  $\Delta^*$  est involutive.

- o -

$\Delta^*$  étant involutive,  $C^\infty$ , de rang constant sur  $M$ , elle engendrera sur  $M$  une partition en s.v.i.m. (Théorème de Frobenius).

Le Théorème qui suit fera le lien entre la relation d'indistingabilité forte et  $\Delta^*$ .

## 3.2 Théorème de Hermann-Krener: [M] :

La partition de  $M$  en classes d'équivalences par rapport à la relation SI coïncide avec la partition en s.v.i.m. de  $\Delta^*$ .

C'est à dire :  $\forall x_0 \in M : N_{x_0} = SI(x_0)$ . ( $N_{x_0}$  : s.v.i.m de  $\Delta^*$  passant par  $x_0$ ).

si  $\Delta^* = \text{span} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$ , et si nous supposons d'emblée l'existence des  $\alpha_i$  et  $\beta_{ji}$  tels que  $\Delta^*$  soit  $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}$  invariante.

Le système (II 21) s'écrira:

$$\begin{cases} \dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^P \alpha_i(x) X_i(x) + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P X_i(x) \beta_{ji} v_j \\ y = h(x) \end{cases}$$

en posant: 
$$\begin{cases} \tilde{X}_0 = X_0(x) + \sum_{i=1}^P \alpha_i(x) X_i(x) \\ \tilde{X}_j = \sum_{i=1}^P X_i(x) \beta_{ji}(x) \end{cases}$$

On obtient un nouveau système:  $\tilde{\Sigma} = (M, \tilde{\mathcal{F}}, h)$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{X}_0(x) + \sum_{j=1}^P \tilde{X}_j(x) v_j \\ y = h(x) \end{cases}$$

$\Delta^*$  est  $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}$ -invariante d'où:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{X}_0^i(x)}{\partial x_{j'}} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{X}_j^i(x)}{\partial x_{j'}} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i &= k+1, \dots, m \\ j' &= 1, \dots, k \\ j &= 1, \dots, P \end{aligned}$$

De plus comme  $\Delta^* \subset \ker dh \Rightarrow$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_{j'}} = 0 \quad \begin{cases} j' = 1, \dots, k \\ i = 1, \dots, l \end{cases}$$

Si on pose:  $x_1 = (x_1, \dots, x_k)$

$x_2 = (x_{k+1}, \dots, x_m)$



On pourra écrire:

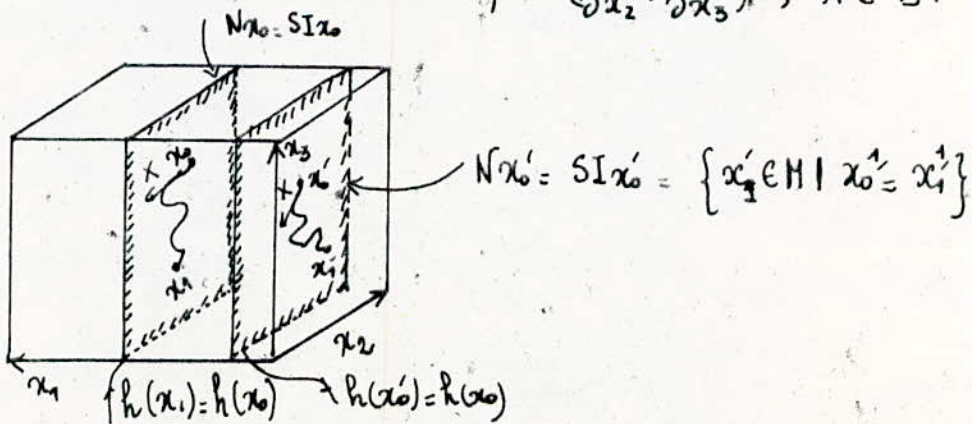
$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= \tilde{X}_0^1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + \sum_{j=1}^p \tilde{X}_j^1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) v_j \\ \dot{x}_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= \tilde{X}_0^2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + \sum_{j=1}^p \tilde{X}_j^2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) v_j \\ &\vdots \\ \dot{x}_k(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= \tilde{X}_0^k(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + \sum_{j=1}^p \tilde{X}_j^k(\underline{x}_1, \underline{x}_2) v_j \\ \dot{x}_{k+1}(\underline{x}_2) &= \tilde{X}_0^{k+1}(\underline{x}_2) + \sum_{j=1}^p \tilde{X}_j^{k+1}(\underline{x}_2) v_j \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(\underline{x}_2) &= \tilde{X}_0^m(\underline{x}_2) + \sum_{j=1}^p \tilde{X}_j^m(\underline{x}_2) v_j \\ y &= h(\underline{x}_2) \end{aligned} \right.$$

On remarque ainsi que la sortie du système  $\tilde{\Sigma}$  ne dépend que des  $(n-k)^{me}$  coordonnées de l'état  $x$ .

Deux états  $x_0$  et  $x_1$  ne différant que par leurs  $k$  premières composantes, évolueront différemment sur  $M$ , mais engendreront les mêmes sorties  $h(x_1) = h(x_0)$  et ceci quelle que soit la fonction d'entrée  $v = {}^t(v_1, \dots, v_p)$ .

Exemple 31:  $M = ]0, 1[{}^3$

$$h(x) = x_1, \quad \Delta^* = \text{span} \left( \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad X \in \Delta^*$$



#### 4 Les distributions $\Sigma$ -invariantes et le problème du rejet des perturbations.

Soit le système perturbé suivant:

$$(4.1) \begin{cases} \dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^p X_i(x) u_i + \sum_{i=1}^r W_i(x) p_i \\ y = h(x). \end{cases}$$

Les perturbations sont supposées non mesurables.

Il faudra appliquer une commande  $u$  au système (4.1) de manière à ce que la perturbation n'affecte aucunement la sortie.

ie) trouver  $u$  telle que :  $h(x_u(t, p)) = h(x_u(t, p')) \quad \forall t \geq 0, \forall p \neq p'$ .

$u$  est dite commande découplante.

Les perturbations n'étant ni mesurables, ni contrôlables, une commande par retour d'état du type (II.2.2) est à envisager:

$$u_i = \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^p \beta_{ji}(x) v_j$$

Notre but sera double: d'un côté découpler la sortie  $y$  de l'entrée perturbante, de l'autre que le système découplé  $\tilde{\Sigma}$  induise sur une variété quotient  $M/\mathcal{R}$  un nouveau système  $\Sigma^*$  indépendant des  $p_i$  et ayant les mêmes applications entrées-sorties que  $\tilde{\Sigma}$ .

#### 4.1. Condition de découplage:

4.1.1 Définition [17]: une distribution  $\Delta$  est régulière si et seulement si la relation d'équivalence  $\mathcal{R}_\Delta$  qu'il lui est associée l'est aussi; ie:

- Le graphe de  $\mathcal{R}_\Delta$  est une variété plongée dans  $M \times M$
- La projection  $(x_1, x_2) \rightarrow x_1$  du graphe de  $\mathcal{R}_\Delta$  est une submersion dans  $M$ .

Théorème 4.1: [18]: Le problème du rejet des perturbations admet une solution globale ssi il existe en  $M$  une distribution  $\Delta$  régulière telle que:

1.  $\Delta$  est  $\Sigma$ -invariante
2.  $W_i \subset \Delta \subset \ker dh \quad i=1, \dots, r$

$\Delta^*$ , la plus grande distribution  $\Sigma$ -invariante contenue dans le noyau de  $dh$  est régulière parce qu'elle admet un nombre suffisant d'intégrales premières [15] (page 387)

Le D.D.P. se résumera donc à :

$$W_i \subset \Delta^*, i=1, \dots, r$$

#### 4.2 Construction de $\Delta^*$ :

Nous pouvons soit nous en tenir au théorème 3.1. dans le cas où les calculs sont simples, ou bien utiliser des méthodes itératives semblables à celle de la recherche de  $\mathcal{V}^*$  (voir partie découplage linéaire (1.5)).

Nous pouvons citer en exemple l'algorithme donné par Nijmeijer [14] :

$$\text{Soient les distributions } \begin{cases} \Delta = X_0 + \text{span}(X_1, \dots, X_p) \\ \Delta_0 = \text{span}(X_1, \dots, X_p) \end{cases}$$

$$\text{et } \Delta^{-1}(\Delta_0 + \mathcal{D}) = \{X \in TM \mid [X, \Delta] \subset \Delta_0 + \mathcal{D}\}$$

Algorithme :

$$\mathcal{D}(0) = \ker dh$$

$$\mathcal{D}(k+1) = \mathcal{D}(k) \cap \Delta^{-1}(\Delta_0 + \mathcal{D}(k))$$

$$\Delta^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{D}(k)$$

CHAPITRE III DECOUPLAGE DU MODELE NON LINEAIRE,  
DE COLONNE

Notre objectif sera de chercher toutes les entrées qui découplent le système (2.5) en faisant abstraction dans un premier temps, des contraintes pouvant affecter ces entrées, puis dans un second temps, d'effectuer un choix, si possible, parmi toutes les commandes obtenues, selon des critères bien précis.

### 1 Preliminaires :

L'espace d'état  $M = ]0, 1[{}^m$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  qui peut être muni d'une structure de variété  $C^\infty$  différentiable, on peut en effet associer à  $M$  un atlas à carte unique  $(]0, 1[{}^m, I)$  avec  $I$  l'application identité.

#### 1.1. Calcul de $\ker(dh)$ :

$$y = h(x) = {}^t(x_1, x_n) = {}^t(h_1(x), h_2(x))$$

$$h_1(x) = (1, 0, \dots, 0) {}^t(x_1, \dots, x_n) = x_1$$

Dans la base canonique de  $TM_x^*$  (\*):

$$dh_1(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_i} dx_i = \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \right) {}^t(dx_1, \dots, dx_n).$$

$$\text{d'où } dh_1(x) = (1, 0, \dots, 0) {}^t(dx_1, \dots, dx_n).$$

$$\ker(dh_1) = \{X \in TM \mid X^1 = 0\}$$

En menant le même raisonnement pour  $h_2$ , on obtient:

$$\ker(dh_2) = \{X \in TM \mid X^m = 0\}$$

$$\text{donc: } \ker(dh) = \ker(dh_1) \cap \ker(dh_2) = \{X \in TM \mid X^1 = X^m = 0\}$$

On peut remarquer dès à présent que  $W_1(x)$  n'est pas inclu dans  $\ker(dh)$  donc ne peut appartenir à  $\Delta^*$ , d'où le fait que l'on ne pourra découpler

(\*)  $TM_x^*$  est le dual de  $TM_x$ , et on le nomme espace cotangent à  $M$  en  $x$ .

par rapport à  $L_f$ , ce résultat était d'une certaine manière <sup>prévisible</sup>, vu que le découplage de  $L_f$  n'était déjà pas possible avec le modèle linéarisé. On est donc contraints de subir les fluctuations du débit d'alimentation; nous supposons donc  $L_f$  régulé, et le système (Q.5) se réécrit de la manière suivante:

$$(Q.5.bis) \begin{cases} \dot{x} = X_0(x) + X_1 u_1 + X_2 u_2 + W q \\ y = h(x) \end{cases}$$

Avec  $X_0(x) = W_1(x) q_1 = W_1(x) \cdot \frac{L_f}{H}$

et  $W \cdot q = W_2 q_2 = {}^t(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \frac{L_f}{H} x_f$ .

### 1.2 Détermination de $\Delta^*$ :

Les calculs pouvant se faire manuellement, nous utiliserons l'énoncé du théorème (3.1), pour la recherche de  $\Delta^*$ .

$$d_j = \left\{ \min_{k_{ij}} \left\{ L_{X_i} L_{X_0}^{k_{ij}} h_j \neq 0, i=1,2 \right\} : j=1,2 \right.$$

$$L_2 h_1(x) = \frac{H}{H_D} (M_2 x_2 - x_1) \neq 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$L_{X_1} h_2(x) = \frac{H}{H_B} (x_{n-1} - x_n) \neq 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

$d_1 = d_2 = 0$  donc d'après le théorème (3.1).

$$\Delta^* = \ker(dh) = \{ X \in TM \mid X^1 = X^n = 0 \}$$

dans la base canonique de  $TM_x$ :

$$\Delta^* = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\}$$

### 1.3 Condition de découplage:

$$W = {}^t(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \Delta^* \text{ car } W^1 = W^n = 0.$$

Nous pouvons donc découpler par rapport aux perturbations de la concentration d'alimentation.

2 Recherche de la commande découplante:

$\Delta^*$  étant  $\Sigma$ -invariante, il existe  $\alpha$  et  $\beta$  (tels que l'on les a définis dans le chapitre précédent) tels que  $\Delta^*$  soit  $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^{\infty}$ -invariante.

ie):  $[\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^{\infty}, \Delta^*] \subset \Delta^*$  (2.1)  
 ce qui équivaut à: (2.)  $\left\{ \begin{array}{l} [X_0 + \sum_{i=1}^2 X_i \alpha_i, \Delta^*] \subset \Delta^* \\ [\sum_{j=1}^2 (\sum_{i=1}^2 \beta_{ji} X_i) v_j, \Delta^*] \subset \Delta^* \end{array} \right.$  (2.2)

2.1. Détermination des  $\alpha_i$

$Z' = [X_0 + X_1 \alpha_1 + X_2 \alpha_2, \Delta^*] \subset \Delta^*$  (2.1)

comme  $\Delta^* = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\}$

(2.1)  $\Leftrightarrow Z' \subset \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\}$

Compte tenu de la bilinéarité du crochet de Lie:

$Z' = [X_0, \Delta^*] + [X_1 \alpha_1, \Delta^*] + [X_2 \alpha_2, \Delta^*]$

Ce qui est équivalent à :

$Z_j = [X_0, \frac{\partial}{\partial x_j}] + [X_1 \alpha_1, \frac{\partial}{\partial x_j}] + [X_2 \alpha_2, \frac{\partial}{\partial x_j}] \in \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\}$   
 $j = 2, \dots, m-1.$

$D_x \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = 0 \Rightarrow Z_j = D_x X_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} + D_x (X_1 \alpha_1) \frac{\partial}{\partial x_j} + D_x (X_2 \alpha_2) \frac{\partial}{\partial x_j}$

$D_x X_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_0^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_0^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X_0^m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_0^m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, D_x X_0 \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_0^i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$

$D_x (X_1 \alpha_1) = \alpha_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_1^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X_1^m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_1^m}{\partial x_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} & \dots & X_1^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^m \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} & \dots & X_1^m \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

$$D_x(\alpha_1 X_1) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \alpha_1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_1^i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} \sum_{i=1}^m X_1^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad j=2, \dots, m-1.$$

par analogie on trouve:

$$D_x(\alpha_2 X_2) \frac{\partial}{\partial x_j} = \alpha_2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_2^i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} \sum_{i=1}^m X_2^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad j=2, \dots, m-1.$$

d'où: 
$$Z_j = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial X_0^i}{\partial x_j} + \alpha_1 \frac{\partial X_1^i}{\partial x_j} + \alpha_2 \frac{\partial X_2^i}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} X_1^i + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} X_2^i \right] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$Z_j = \sum_{i=1}^m Z_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad j=2, \dots, m-1.$$

Pour que  $Z_j \in \Delta^*$ , il faut et il suffit que ses première et dernière composantes soient nulles:  $Z_j^1 = Z_j^m = 0$ ,  $j=2, \dots, m-1$

Ce qui se résume à:

$$\forall j=2, \dots, m-1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_0^1}{\partial x_j} + \alpha_1 \frac{\partial X_1^1}{\partial x_j} + \alpha_2 \frac{\partial X_2^1}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} X_1^1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} X_2^1 = 0 \\ \frac{\partial X_0^m}{\partial x_j} + \alpha_1 \frac{\partial X_1^m}{\partial x_j} + \alpha_2 \frac{\partial X_2^m}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} X_1^m + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} X_2^m = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} X_0^1 = 0, X_1^1 = 0, X_2^1 = \frac{H}{H_D} (M_2 x_2 - x_1) \\ X_0^m = \frac{L_F}{H} \cdot \frac{H}{H_B} (x_{n-1} - x_n), X_1^m = \frac{H}{H_B} (x_{n-1} - x_n), X_2^m = \frac{H}{H_B} (1 - M_n) x_n \end{array} \right.$$

On pose:  $N_j = \frac{\partial M_j x_j}{\partial x_j}$  et en plaçant les valeurs de (4) dans (3):

$$j=2: \left. \begin{array}{l} (M_2 x_2 - x_1) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + N_2 \alpha_2 = 0 \\ (x_{n-1} - x_n) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} + x_n (1 - M_n) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right\} (5.1)$$

$$(5) \quad j=3, \dots, m-2: \left. \begin{array}{l} (M_2 x_2 - x_1) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} = 0 \\ (x_{n-1} - x_n) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} + x_n (1 - M_n) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} = 0 \end{array} \right\} (5.2)$$

$$j=m-1: \left. \begin{array}{l} (M_2 x_2 - x_1) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_{n-1}} = 0 \\ 0 = \frac{L_F}{H} + \alpha_1 + (x_{n-1} - x_n) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{n-1}} + x_n (1 - M_n) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_{n-1}} \end{array} \right\} (5.3)$$

Résolution du système (5):

De prime abord, on remarque que  $\alpha_2$  est indépendante des  $\{x_j\}_{j=3, \dots, n-1}$ , et par conséquent peut s'écrire:

$$\alpha_2 = \alpha_2(x_1, x_2, x_n).$$

Quant à  $\alpha_1$  elle peut se mettre sous la forme:

$$\alpha_1 = \alpha_1(x_1, x_2, x_{n-1}, x_n).$$

a) Calcul de  $\alpha_2$ :

$$\text{pour } j=2: \quad N_2 \alpha_2 + [M_2 x_2 - x_1] \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\alpha_2} = - \frac{N_2 \partial x_2}{M_2 x_2 - x_1}$$

$$\int \frac{d\alpha_2}{\alpha_2} = - \int \frac{d(M_2 x_2)}{M_2 x_2 - x_1} + K(x_1, x_n)$$

$$\ln \alpha_2 = - \ln [M_2 x_2 - x_1] + K(x_1, x_n), \quad \alpha_2 = e^K$$

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{\Lambda_2(x_1, x_n)}{(M_2 x_2 - x_1)}}$$

b) Calcul de  $\alpha_1$ :

Compte tenu du fait que  $\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_{n-1}} = 0$ , la seconde équation de (5.3) devient:  $\frac{LF}{H} + \alpha_1 + (x_{n-1} - x_n) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_{n-1}} = 0$  (5.3')

De plus la seconde équation de (5.1) nous donne avec  $\alpha_2 = \frac{\Lambda_2}{M_2 x_2 - x_1}$ :

$$(x_{n-1} - x_n) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - x_n (1 - M_n) \frac{N_2 \Lambda_2}{(M_2 x_2 - x_1)^2} = 0$$

$$\int d\alpha_1 = \frac{x_n (1 - M_n) \Lambda_2}{x_{n-1} - x_n} \int \frac{d(M_2 x_2)}{(M_2 x_2 - x_1)^2} + K(x_1, x_{n-1}, x_n)$$

$$\alpha_1 = - \frac{x_n (1 - M_n) \Lambda_2}{(x_{n-1} - x_n) (M_2 x_2 - x_1)} + K(x_1, x_{n-1}, x_n)$$

En substituant l'expression de  $\alpha_1$  dans (5.3)':

$$\frac{LF}{H} - \frac{x_n (1 - M_n) \Lambda_2}{(x_{n-1} - x_n) (M_2 x_2 - x_1)} + K + (x_{n-1} - x_n) \left[ \frac{x_n (1 - M_n) \Lambda_2}{(x_{n-1} - x_n)^2 (M_2 x_2 - x_1)} + \frac{\partial K}{\partial x_{n-1}} \right] = 0$$



Après simplification:

$$\frac{LF}{H} + K + (x_{n-1} - x_n) \frac{\partial K}{\partial x_{n-1}} = 0$$

Résolution de l'équation homogène:

$$\int \frac{dK}{K} = - \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1} - x_n} + C'(x_1, x_{n-1}, x_n) \quad ; \quad c = e^{c'}$$

$$\ln K = - \ln |x_{n-1} - x_n| + \ln C$$

$$K = \frac{C(x_1, x_{n-1}, x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

Equation avec second membre, méthode de la variation de la constante:

$$\frac{LF}{H} + \frac{C}{x_{n-1} - x_n} + \frac{(x_{n-1} - x_n)}{(x_{n-1} - x_n)} \frac{\partial C}{\partial x_{n-1}} - \frac{C}{x_{n-1} - x_n} = 0$$

Soit donc :

$$\frac{\partial C}{\partial x_{n-1}} = - \frac{LF}{H}$$

d'où :

$$C = - \frac{LF}{H} x_{n-1} + \Lambda_1(x_1, x_n)$$

$$K = \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \left[ \Lambda_1 - \frac{LF}{H} x_{n-1} \right]$$

On en déduit la forme générale de  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1 = - \frac{x_n (1 - M_n) \Lambda_2(x_1, x_n)}{(x_{n-1} - x_n) (M_2 x_2 - x_1)} - \frac{LF}{H} \frac{x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_n)} + \frac{\Lambda_1(x_1, x_n)}{(x_{n-1} - x_n)}$$

## 22 Détermination des $\beta_{ji}$ :

En développant (2.2):

$$[ (X_1 \beta_{11} + X_2 \beta_{12}) \mathcal{V}_1 + (X_1 \beta_{21} + X_2 \beta_{22}) \mathcal{V}_2, \Delta^* ] \subset \Delta^* \quad (2.2)$$

Moyennant la bilinéarité du crochet de Lie et le fait que  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont des commandes indépendantes de l'état  $x$ , et comme  $\Delta^*$  a une structure d'espace vectoriel; la condition (2.2) se réduit à :

$$\left\{ \begin{aligned} Z'_1 &= [X_1 \beta_{11} + X_2 \beta_{12}, \Delta^*] \subset \Delta^* \quad (221) \\ Z'_2 &= [X_1 \beta_{21} + X_2 \beta_{22}, \Delta^*] \subset \Delta^* \quad (222) \end{aligned} \right.$$

On voit facilement que  $\beta_{11}$  et  $\beta_{21}$  (respectivement  $\beta_{12}$  et  $\beta_{22}$ ) auront les mêmes solutions générales, et cela du fait que (221) et (222) induisent des systèmes d'équations identiques. On se contentera de résoudre (221).

$$Z'_1 = [X_1 \beta_{11} + X_2 \beta_{12}, \Delta^*] \subset \Delta^*$$

$$\Leftrightarrow Z_{1j} = [X_1 \beta_{11}, \frac{\partial}{\partial x_j}] + [X_2 \beta_{12}, \frac{\partial}{\partial x_j}] \in \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\}, j=2, \dots, n-1.$$

sachant que  $D_x \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = 0$

$$Z_{1j} = D_x(X_1 \beta_{11}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} + D_x(X_2 \beta_{12}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$D_x(X_1 \beta_{11}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \beta_{11} \sum_{l=1}^m \frac{\partial X_1^l}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial \beta_{11}}{\partial x_j} \sum_{l=1}^m X_1^l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

$$D_x(X_2 \beta_{12}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \beta_{12} \sum_{l=1}^m \frac{\partial X_2^l}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_j} \sum_{l=1}^m X_2^l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

$$Z_{1j} = \sum_{l=1}^m \left[ \beta_{11} \cdot \frac{\partial X_1^l}{\partial x_j} + \beta_{12} \frac{\partial X_2^l}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta_{11}}{\partial x_j} X_1^l + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_j} X_2^l \right] \frac{\partial}{\partial x_l} \quad j=2, \dots, m-1.$$

La condition (221) implique  $Z_{1j}^1 = Z_{1j}^m = 0, j=2, \dots, m-1$ , autrement dit :

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} \cdot \frac{\partial X_1^1}{\partial x_j} + \beta_{12} \frac{\partial X_2^1}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta_{11}}{\partial x_j} X_1^1 + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_j} X_2^1 &= 0 \\ \text{et} \quad \beta_{11} \frac{\partial X_1^m}{\partial x_j} + \beta_{12} \frac{\partial X_2^m}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta_{11}}{\partial x_j} X_1^m + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_j} X_2^m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad j=2, \dots, m-1. \quad (6)$$

En partant de la relation (6) et en itérant le même processus de calcul que pour les  $d_i$ , on arrive au système d'équations suivant:

$$\begin{aligned}
 \underline{j=2}: & \quad (M_2 x_2 - x_1) \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_2} + N_2 \beta_{12} = 0 \\
 & \quad (x_{n-1} - x_n) \frac{\partial \beta_{11}}{\partial x_2} + x_n (1 - M_n) \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_2}} \right\} (71) \\
 (7) \quad \underline{j=3, \dots, n-2}: & \quad (M_2 x_2 - x_1) \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_j} = 0 \\
 & \quad (x_{n-1} - x_n) \frac{\partial \beta_{11}}{\partial x_j} + x_n (1 - M_n) \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_j} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_j}} \right\} (72) \\
 \underline{j=n-1}: & \quad (M_2 x_2 - x_1) \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_{n-1}} = 0 \\
 & \quad \beta_{11} + (x_{n-1} - x_n) \frac{\partial \beta_{11}}{\partial x_{n-1}} + x_n (1 - M_n) \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_{n-1}} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_{n-1}}} \right\} (73)
 \end{aligned}$$

a) Calcul de  $\beta_{12}$  et  $\beta_{22}$   
 On remarque d'emblee que  $\alpha_2$ ,  $\beta_{12}$  et  $\beta_{22}$  ont la même solution générale:

Soit :

$$\beta_{12} = \frac{\Gamma_{12}(x_1, x_n)}{M_2 x_2 - x_1}$$

$$\beta_{22} = \frac{\Gamma_{22}(x_1, x_n)}{M_2 x_2 - x_1}$$

b) Calcul de  $\beta_{11}$  et  $\beta_{21}$ :

sachant que  $\frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_{n-1}} = 0$ ; l'équation (la seconde) de (73) devient :

$$\beta_{11} + (x_{n-1} - x_n) \frac{\partial \beta_{11}}{\partial x_{n-1}} = 0$$

$$\frac{\partial \beta_{11}}{\beta_{11}} = - \frac{\partial x_{n-1}}{x_{n-1} - x_n}$$

$$\int \frac{d\beta_{11}}{\beta_{11}} = - \int \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1} - x_n} + K'(x_1, x_2, x_n), \quad K = e^{K'}$$

$$\text{d'où } \beta_{11} = \frac{K(x_1, x_2, x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

En se reportant à la 2<sup>ème</sup> equation de (7.1) et connaissant les expressions de  $\beta_{11}$  et  $\beta_{12}$ :

$$(x_{n-1} - x_n) \cdot \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{1}{(x_{n-1} - x_n)} + x_n (1 - M_n) \frac{(-1) N_2 \Gamma_{12}}{(M_2 x_2 - x_1)^2} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial x_2} = x_n (1 - M_n) \Gamma_{12} \frac{N_2}{(M_2 x_2 - x_1)^2}$$

$$\int dK = \Gamma_{12} x_n (1 - M_n) \int \frac{N_2 dx_2}{(M_2 x_2 - x_1)^2} + \Gamma_{11}(x_1, x_n)$$

$$K = - \frac{x_n (1 - M_n) \Gamma_{12}}{(M_2 x_2 - x_1)} + \Gamma_{11}$$

alors:

$$\beta_{11} = \frac{-\Gamma_{12} \cdot x_n (1 - M_n)}{(M_2 x_2 - x_1)(x_{n-1} - x_n)} + \frac{\Gamma_{11}}{x_{n-1} - x_n}$$

On en tire l'expression de  $\beta_{21}$ :

$$\beta_{21} = \frac{-\Gamma_{22} x_n (1 - M_n)}{(M_2 x_2 - x_1)(x_{n-1} - x_n)} + \frac{\Gamma_{21}}{x_{n-1} - x_n}$$

### 2.3 Tableau récapitulatif:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -\frac{(1-M_n)x_n}{x_{n-1}-x_n} \cdot \frac{\Lambda_2(x_1, x_n)}{M_2x_2-x_1} - \frac{LF}{H} \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}-x_n} + \frac{\Lambda_1(x_1, x_n)}{x_{n-1}-x_n} \\
 \alpha_2 &= \frac{\Lambda_2(x_1, x_n)}{M_2x_2-x_1} \\
 (8) \quad \beta_{11} &= -\frac{(1-M_n)x_n}{x_{n-1}-x_n} \cdot \frac{\Gamma_{12}(x_1, x_n)}{M_2x_2-x_1} + \frac{\Gamma_{11}(x_1, x_n)}{x_{n-1}-x_n} \\
 \beta_{12} &= \frac{\Gamma_{12}(x_1, x_n)}{M_2x_2-x_1} \\
 \beta_{21} &= -\frac{(1-M_n)x_n}{x_{n-1}-x_n} \cdot \frac{\Gamma_{22}(x_1, x_n)}{M_2x_2-x_1} + \frac{\Gamma_{21}(x_1, x_n)}{x_{n-1}-x_n} \\
 \beta_{22} &= \frac{\Gamma_{22}(x_1, x_n)}{M_2x_2-x_1}
 \end{aligned}$$

### 3 Système découplé $\tilde{\Sigma}$ :

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = X_0(x) + X_1(x)u_1 + X_2(x)u_2 + Wq \\ y = h(x) \end{cases}$$

En choisissant les commandes:  $u_1 = \alpha_1(x) + \beta_{11}(x)v_1 + \beta_{21}(x)v_2$   
 $u_2 = \alpha_2(x) + \beta_{12}(x)v_1 + \beta_{22}(x)v_2$

On obtient le système découplé:

$$\tilde{\Sigma}: \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{X}_0(x) + \tilde{X}_1(x)v_1 + \tilde{X}_2(x)v_2 + Wq \\ y = h(x) \end{cases}$$

avec:  $\tilde{X}_0 = X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$   
 $\tilde{X}_1 = \beta_{11} X_1 + \beta_{12} X_2$   
 $\tilde{X}_2 = \beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2$

$$\tilde{X}_0(x) = \left[ \begin{array}{l} \frac{H}{H_0} \Lambda_2 \\ (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\Lambda_1}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} + \left[ (M_3 \alpha_3 - M_2 \alpha_2) - \frac{(1 - M_n) \alpha_n}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \right] \frac{\Lambda_2}{M_2 \alpha_2 - \alpha_1} - \frac{LF}{H} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \\ \dots \\ (\alpha_{j-1} - \alpha_j) \frac{\Lambda_1}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} + \left[ (M_{j+1} \alpha_{j+1} - M_j \alpha_j) - \frac{(1 - M_n) \alpha_n}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \right] \frac{\Lambda_2}{M_2 \alpha_2 - \alpha_1} - \frac{LF}{H} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \\ \dots \\ (\alpha_{p-1} - \alpha_p) \frac{\Lambda_1}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} + \left[ (M_{p+1} \alpha_{p+1} - M_p \alpha_p) - \frac{(1 - M_n) \alpha_n}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \right] \frac{\Lambda_2}{M_2 \alpha_2 - \alpha_1} - \frac{LF}{H} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} - \frac{\alpha_p LF}{H} \\ \dots \\ (\alpha_{j-1} - \alpha_j) \frac{\Lambda_1}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} + \left[ (M_{j+1} \alpha_{j+1} - M_j \alpha_j) - \frac{(1 - M_n) \alpha_n}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \right] \frac{\Lambda_2}{M_2 \alpha_2 - \alpha_1} - \frac{LF}{H} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} + \frac{(\alpha_{j-1} - \alpha_j) LF}{H} \\ \dots \\ \frac{H}{H_B} \left[ \Lambda_1 - \frac{LF}{H} \alpha_n \right] \end{array} \right]$$

$$\tilde{X}_1(x) = \left[ \begin{array}{l} \frac{H}{H_D} \Gamma_2 \\ \left[ (M_3 \alpha_3 - M_2 \alpha_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\alpha_n (1 - M_n)}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \right] \frac{\Gamma_2}{M_2 \alpha_2 - \alpha_1} - \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Gamma_1}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \\ \dots \\ \left[ (M_{j+1} \alpha_{j+1} - M_j \alpha_j) - (\alpha_{j-1} - \alpha_j) \frac{\alpha_n (1 - M_n)}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \right] \frac{\Gamma_2}{M_2 \alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\alpha_{j-1} - \alpha_j}{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \Gamma_1 \\ \dots \\ \frac{H}{H_B} \Gamma_1 \end{array} \right]$$

$$\tilde{X}_2(x) = \left[ \begin{array}{c} \frac{H}{H_D} \Gamma_{22} \\ \left[ (M_3 x_3 - M_2 x_2) - (x_1 - x_2) \frac{x_n(1-M_n)}{x_{n-1} - x_n} \right] \frac{\Gamma_{22}}{x_1} - \frac{x_1 - x_2}{x_{n-1} - x_n} \Gamma_{21} \\ \text{---} \\ \left[ (M_{j+1} x_{j+1} - M_j x_j) - (x_{j-1} - x_j) \frac{x_n(1-M_n)}{x_{n-1} - x_n} \right] \frac{\Gamma_{22}}{M_2 x_2 - x_1} - \frac{x_{j-1} - x_j}{x_{n-1} - x_n} \Gamma_{21} \\ \text{---} \\ \frac{H}{H_B} \Gamma_{21} \end{array} \right]$$

Du système découplé  $\tilde{\Sigma}$  on en déduit le système quotient  $\tilde{\Sigma}^*$  ou  $(M/SI, \tilde{\mathcal{F}}^*, h)$ ,  $M/SI$  est une variété  $C^\infty$  différentiable, séparée de dimension 2.

$$\tilde{\Sigma}^* \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{H}{H_D} \left[ \mathcal{L}_2(x_1, x_n) + \Gamma_{22}(x_1, x_n) \mathcal{V}_1 + \Gamma_{22}(x_1, x_n) \mathcal{V}_2 \right] \\ \dot{x}_n = \frac{H}{H_B} \left[ \left( \mathcal{L}_1(x_1, x_n) - \frac{L_F}{H} x_n \right) + \Gamma_{11}(x_1, x_n) \mathcal{V}_1 + \Gamma_{21}(x_1, x_n) \mathcal{V}_2 \right] \\ y = {}^t(x_1, x_n). \end{cases}$$

4 Conclusion:

Parmi toutes les solutions présentées en (8), un tri s'impose et le choix des  $\mathcal{L}_i, \Gamma_{ij}, \nu_j$  sera soumis à plusieurs types de contraintes:

4.1. Condition d'homogénéité: Vu que les différentes grandeurs  $X_0(x), X_1(x), X_2(x), x_j, M_j$  sont sans dimension et que les  $\dot{x}_i, u_1$  et  $u_2$  sont homogènes à l'inverse d'un temps; on doit avoir:

$$[\alpha_1] = [\alpha_2] = [\mathcal{L}_1] = [\mathcal{L}_2] = \left[\frac{1}{T}\right].$$

Les  $\beta_{ij}$  sans dimension d'où la même chose pour les  $\Gamma_{ij}$ .

4.2: Les commandes  $u_1 = \frac{L_s}{H}$  et  $u_2 = \frac{V}{H}$  doivent être positives, car le contraire signifierait physiquement que tout le long de la colonne, la vapeur descend et le liquide monte!

4.3: De par même leur construction:  $\alpha_2, \beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{11}, \beta_{21}$  sont positives, idem pour l'expression:  $-\frac{LF}{H} \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}-x_n} + \frac{\mathcal{L}_1}{x_{n-1}-x_n}$ .  
Si l'état du système est tel que:

4.3.1: \*  $M_2 x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow \mathcal{L}_2, \Gamma_{12}, \Gamma_{22} > 0$

\*  $M_2 x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow \mathcal{L}_2, \Gamma_{12}, \Gamma_{22} < 0$

ie:  $\text{sign}(M_2 x_2 - x_1) = \text{sign}(\mathcal{L}_2) = \text{sign}(\Gamma_{12}) = \text{sign}(\Gamma_{22})$ .

4.3.2:

\*  $x_{n-1} - x_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_1 > \frac{LF}{H} x_{n-1} \geq 0 \\ \Gamma_{11} > x_n (1 - M_n) \beta_{12} \\ \Gamma_{21} > x_n (1 - M_n) \beta_{22} \end{cases}$

\*  $x_{n-1} - x_n < 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_1 < \frac{LF}{H} x_{n-1} \\ \Gamma_{11} < x_n (1 - M_n) \beta_{12} \\ \Gamma_{21} < x_n (1 - M_n) \beta_{22} \end{cases}$



### CONCLUSION

La résolution du problème de la rejection des perturbations dans les systèmes non linéaires, à notre connaissance, n'a jusqu'à présent pas fait l'objet d'applications pratiques.

C'est dans cette optique que nous considérons notre travail comme incomplet, dans la mesure où il est fait abstraction, dans cette étude, de la contrôlabilité et stabilité du système, notions qui restent assez mal connues dans le non-linéaire, en particulier la stabilité qui n'a été étudié que dans des cas particuliers. Ceci dénote que l'approche géométrique du DDP dans les systèmes non linéaires n'est qu'à ses début, et peut faire l'objet de nombreux travaux.

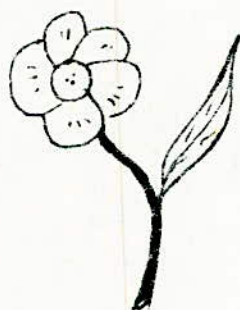
A cela vient s'ajouter le fait que les résultats présentés en fin de mémoire sont tout à fait généraux, quoique la quasi-totalité des contraintes sur la commande découplante y figure, il reste le problème de la particularisation de ce résultat, selon les exigences de la pratique, ce qui est loin d'être trivial et qui peut faire l'objet d'une étude à part.

Compte tenu de tout cela, nous sommes conscients que notre travail reste à compléter et ne peut représenter qu'une ébauche bien timide aux applications du D.D.P. dans les systèmes non linéaires.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Mention, G. Gobron, J. Mercier : "Distillation, étude théorique"  
Techniques de l'ingénieur - génie chimique T.3.
- [2] G. Bornard : "Contribution à l'étude des modèles de colonnes à distiller" - Thèse d'état, université de Grenoble (1971).
- [3] G. Bornard - JP Gauthier : "Modélisation dynamique des colonnes à distiller" - (\*).
- [4] W.M. Wonham : "Linear multivariable control. A geometric approach."  
(1974)
- [5] T. Takamatsu, I. Hashimoto, Y. Nakai : "A geometric approach to multivariable control," System design of a distillation column."  
Automatica . vol 15 pp 387-402 (Mars 1979).
- [6] C. Commault, J.M. Dion : "Les sous-espaces (A,B)-invariants et les sous-espaces de commandabilité : Application au rejet des perturbations." (\*)
- [7] V. Arnold : "Equations différentielles ordinaires" ed MIR (1974)
- [8] H. Samelson : "Notes on Lie algebras" Van Nostran Reinholds (1969)
- [9] L. Auslander, R.E. Mackenzie : "Introduction to differentiable manifolds" Dover publication (1977)
- [10] J.P. Gauthier : "Structure des systèmes non linéaires" (à paraître).
- [11] A. Isidori : "Sur la théorie structurelle et le problème de la rejection des perturbations dans les systèmes non linéaires." (\*)
- [12] A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori-Giorgi, S. Monaco : "Non linear decoupling via feedback : a differential geometric approach" I.E.E.E. Trans. Aut. control (1979)

- [13] R.M. Hirschorn: "  $(A, B)$ -invariance distribution and the disturbance problem of decoupling problem of non-linear systems." SIAM J. Control and optimization vol 19 n°1 (Janv. 1981).
- [14] H. Nijmeijer: " Controlled invariance for affine control systems " Stichting Mathematic Centrum (1981).
- [15] Sussman: " Orbits of families of vector-fields and integrability of distributions " T.A.M.S. vol 180 (Juin 1973)
- [16] Haefliger: " Variétés feuilletées " Annales de l'école nationale sup. de Pise (1962).
- [17]: J.P. Serre: " Lie groups and Lie algebras " Willey (1970).



(\*) "Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse de systèmes et le traitement du signal" Vol.1. Editions du CNRS (1981)

Ma qssihet ceterwa ...  
a. d tefk adfel.

