5/91

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة الجامعات
Ministère aux Universitaires

2Ex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Métallurgie

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Etude Mathématique du Profil de Température et de la structure d'un Lingot d'AS-7 en Refroidissement

Proposé par : M. Laribi

Etudié par : M.A. Bradai

Dirigé par : M. Laribi

PROMOTION Juin 91

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi - El-Harrach - Alger

DEDICACES

Aux êtres qui me sont les plus chers:

Mes parents

pour tous leurs sacrifices.

A la mémoire de mon grand pére

A ma grand-mére

A mes frères,

A mes soeurs,

A ma famille,

A mes amis(es)

A ....

A la mémoire de mon chèr ami MAHDI.OKBA

Je dedie ce modeste travail.

MAQRAN.BRADAY

REMERCIEMENTS

Je remercie très sincèrement mon promoteur Mr. M.LARIBI et tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour m'avoir consacré de son précieux temps et pour ses conseils prodigieux.

Je remercie Mr. M.DAOUADJI de l'université de Blida de m'avoir permis d'effectuer les essais experimentaux au niveau de son laboratoire.

Mes remerciements vont également à Mr. F.HELLAL pour la présidence du jury ainsi qu'à Mr. R.DJELLOULI et Mr. .SADKI pour avoir accepté de juger ce travail.

Que Mrs. M.KATIR, F.BENNAI, K.BOUZIDI, K.BENZIOUCHE ainsi que C.DAHMAS trouvent ici ma reconnaissance pour leur aide et leur soutien moral.

Je remercie tous les enseignants du département de métallurgie qui ont contribué à ma formation.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Actuellement, la métallurgie est une véritable science basée sur le principe de la mécanique chimique et sur nos connaissances concernat la structure de la matière métallique et ses transformations; les phénomènes et opérations sont l'objet de lois, de formules ou de représentations graphiques aboutissant à des matériaux qualifiés par des caractéristiques mécaniques qui en conditionnent les emplois et en detérminent le choix.

La connaissance de l'état structural des matériaux et de leurs comportements permet d'améliorer leurs performances pour une meilleure utilisation et un eventuel developpement.

Par ailleurs l'avénement de l'informatique est d'une grande importance dans l'étude des procédés, la compréhension des phénomènes, l'évaluation des résultats, le contrôle aisé des différents paramètres ainsi que la rapidité d'éxecution.

L'objet de notre travail repose sur les considérations sus-citées et consiste d'une part à suivre l'évolution et la distribution de la température dans un lingot métallique en refroidissement et de detérminer les différentes structures métallographiques résultantes aprés solidification. D'autre part, un modèle mathématique a été établi en vue d'une bonne compréhension, et une meilleure analyse du procédé.

Les essais expérimentaux ont necéssité la mise en oeuvre d'équipements et de matériaux appropriés; la modélisation mathématique a recquis le remaniement et le choix de méthodes de calcul conduisant à une représentation irréfutable du phénomène expérimental.

Le but de notre étude est naturellement varié, il consiste en premier lieu à detérminer les différentes structures liées aux gradients de température pour mieux connaitre le comportement de l'alliage AS-7 surtout lorsqu'on veut developper cet alliage ainsi que son utilisation pour l'élaboration d'autres matériaux.

En second lieu, la mise à disposition d'un modèle mathématique est d'une grande importance. En effet, celui-ci permet de connaitre à moindres frais la distribution de température dans le lingot et de traiter avec promptitude d'autres procéssus similaires.

PREMIER CHAPITRE

MECANISMES DE LA SOLIDIFICATION

I-1: Introduction

Du point de vue thermodynamique, la solidification est définie comme étant une transformation de l'état liquide à l'état solide. Celle-ci est toujours accompagnée d'un changement dans la nature et dans le nombre de phases en présence.

La solidification, comme la plupart des transformations d'état, se fait en deux étapes: une étape de germination et une étape de croissance cristalline des germes. Cette derniére, est exothermique et se produit par conséquent spontanément dés que le métal peut ceder des calories au milieu exterieur. Par côntre, la germination necessite qu'une certaine quantité d'energie libre soit disponible au sein de la phase liquide et elle ne peut avoir lieu que si cette phase se trouve dans un état de déséquilibre thermodynamique.

En fait, tous les métaux et alliages industriels contiennent des impuretés qui favorisent la germination des cristaux. Les premiers germes solides se forment à une température inférieure au point de fusion à cause de la surfusion qui existe même dans les métaux et alliages où on n'a pas eu l'occasion de l'observer car seul un déséquilibre thermodynamique peut provoquer le passage de l'état liquide à l'état solide.

Pour que la solidification puisse continuer, il faut que la température de l'interface liquide- solide soit maintenue au dessous de la température d'équilibre. La chaleur libérée à cette interface doit donc être évacuée en pérmanence par conduction dans le solide ou dans le liquide, sinon l'interface atteint rapidement la température d'équilibre et reste stationnaire. La vitesse de solidification est donc réglée par la vitesse d'évacuation de la chaleur latente de fusion.

I-2: Mécanismes de la solidification dans les lingotiéres

Lorsqu'on coule un métal dans une lingotiére, il se refroidit plus rapidement au contact des parois de celle-ci que vers le centre de la masse liquide. Il en résulte que dans un lingot, les différents points se trouvent à un instant donné à des températures différentes et par suite à des étapes différentes de la solidification.

Aprés la solidification des lingots, on discerne généralement trois zônes différentes:

I-2-1: Zone de la peau

Lorsque le métal liquide vient au contact avec la paroi de la lingotiére, il est trés rapidement refroidi et la formation des premiers germes ne dégage pas suffisament de chaleur pour permettre à la température de remonter immédiatement. La température continuant à baisser, un grand nombre d'impuretés solides présentes dans le métal agissent comme centre de germination, alors qu'elles seraient restées sans effet si le déséquilibre thermodynamique de l'alliage n'avait pas été aussi important. Les trés nombreux cristaux qui prennent ainsi naissance à l'interieur de ce métal fortement surfusionné ne vont pas pouvoir se développer de façon importante et l'on obtiendra une structure à grains trés fins caractéristiques de cette zône péripherique du lingot. Cette zône possède alors une grande plasticité puisque sa température est à peine inférieure de la température du solidus.

En raison de la grande vitesse de solidification du métal, aucune phénomène de diffusion n'a le temps d'avoir lieu à l'interieur de la phase liquide et la composition chimique moyenne de cette région est trés comparable à celle du métal liquide de la coulée.

I-2-2: Zone basaltique:

Ce type de cristallisation est provoqué par l'existence d'un gradient de température élevé dans le métal liquide et d'une surfusion réstreinte.

La péllicule de peau, en se figeant, provoque un dégagement local de la chaleur qui fait remonter sa température et qui retarde le refroidissement de la zône liquide adjacente; celle-ci présente alors une surfusion insuffisante pour que de nouveaux germes puissent prendre naissance. Mais les cristaux de la partie interne de la zône de peau, qui ne peuvent se développer dans les autres directions, peuvent croître dans ce liquide en légère surfusion.

Comme la vitesse de croissance des dendrites se fait plus rapidement suivant certaines directions cristallographiques particuliéres, ceux des cristaux qui ont une direction cristallographique convenablement orientée par rapport au gradient de température vont croître rapidement dans cette direction, au détriment des cristaux moins orientés. Le métal solide sera finalement constitué de cristaux allongés paralléles ayant une direction cristallographique sensiblement commune (direction 100 dans les métaux CC et CFC).

Pendant la solidification, cette région est constituée de dendrites trés allongées de métal relativement pur, entre les branches desquelles est emprisonné du liquide enrichi en impuretés qui se solidifiera à une plus basse température. Une petite partie des eléments d'alliages et impuretés rejetée par la formation des cristaux se répand également dans le liquide en avant du front de solidification constitué par les extrémités de ces cristaux basaltiques, qui se développent simultanément à la même vitesse, mais la composition moyenne de cette région demeure trés voisine de la composition chimique du métal de la coulée. Si le lingot n'est pas trop gros, ou si le métal est trés pur, la cristallisation basaltique peut s'étendre jusqu'au coeur.

Le passage de la zône basaltique à la cristallisation équiaxe s'éxplique à partir des deux faits suivants:

- Le front de solidification de la zône basaltique repousse devant lui un film enrichi en impuretés et en éléments d'alliages.

- La germination peut se produire à l'interieur du liquide dés que celui-ci atteint la température de germination, celle-ci est inférieure à la température du liquidus d'une certaine quantité ΔT représentant la surfusion necéssaire pour que la germination hetérogène se produise dans l'alliage considéré.

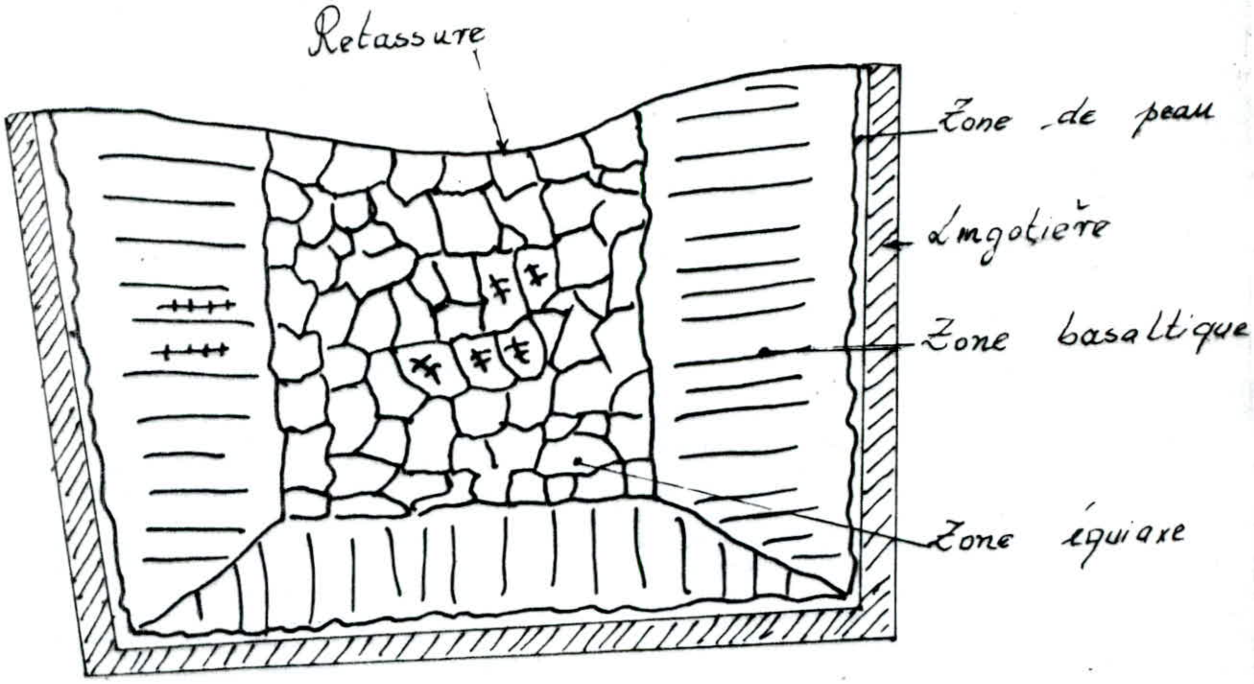
La température de l'interface liquide-solide est trés legérement inférieure à la température du liquidus de la concentration correspondante mais supérieure à la température de germination. Tant qu'il existe dans le métal liquide un gradient thermique suffisant pour que la température réelle demeure en tout point supérieieure à la température de germination. Il ne se forme aucun cristal et la croissance des cristaux dendritiques se poursuit. Lorsque le gradient de température s'abaisse, il arrive un moment où la température existant à une certaine distance de l'interface atteint la valeur de la température de la germination correspondant à la concentration existant en ce point, à partir de ce moment, de nouveaux cristaux prennent naissance dans cette région et leur présence va gêner puis interrompre la croissance des cristaux basaltiques.

Le passage de la cristallisation basaltique à la cristallisation équiaxe est vraisemblablement en relation avec le moment où le lingot se décolle de la lingotiére; en effet, l'existence d'une couche d'air entre la peau du lingot et la paroi interieure de la lingotiére ralentit l'evacuation de la chaleur et diminue le gradient de température existant dans la région interne du lingot.

I-2-3: Zone equiaxe:

La température continuant à baisser dans la partie interne du lingot, toute cette zône se trouve à une température égale à la température de germination, présente dans le métal liquide. La croissance de tous les cristaux va se faire simultanément de façon uniforme dans toutes les directions puisque la solidification est pratiquement isotherme.

Ainsi la zône équiaxe n'existe pratiquement pas dans les métaux purs, mais elle est toujours observée dans les alliages. Elle résulte de l'existence de la surfusion constitutionnelle et de l'uniformisation de la température au coeur du lingot en fin de solidification.



Macrostructure d'un lingot.

DEUXIEME CHAPITRE

ÈTUDE DE LA SOLIDIFICATION DE L´ ALLIAGE AS-7

II-1: Description du diagramme d'équilibre Al-Si

Le diagramme d'équilibre Al-Si est constitué de 2 solutions solides α et β. α est riche en Al et pauvre en Si, tandis que β est riche en Si et pauvre en Al.

Du point de fusion de Al, partent les branches de liquidus et de solidus correspondant au dépôt de la solution α tandis que du point de fusion de Si partent celles concernant la solution solide β. Les 2 branches du liquidus se coupent en E, point correspondant à l'alliage eutectique dont le point de fusion est inférieur à celui de tous les alliages voisins formés des même constituants.

Le diagramme d'equilibre Al-Si est représenté par la figure II.1.

II-2: Etude du refroidissement à 7% de Si

Ces alliages sont appelés hypoeutectiques. La description de leur refroidissement est la suivante:

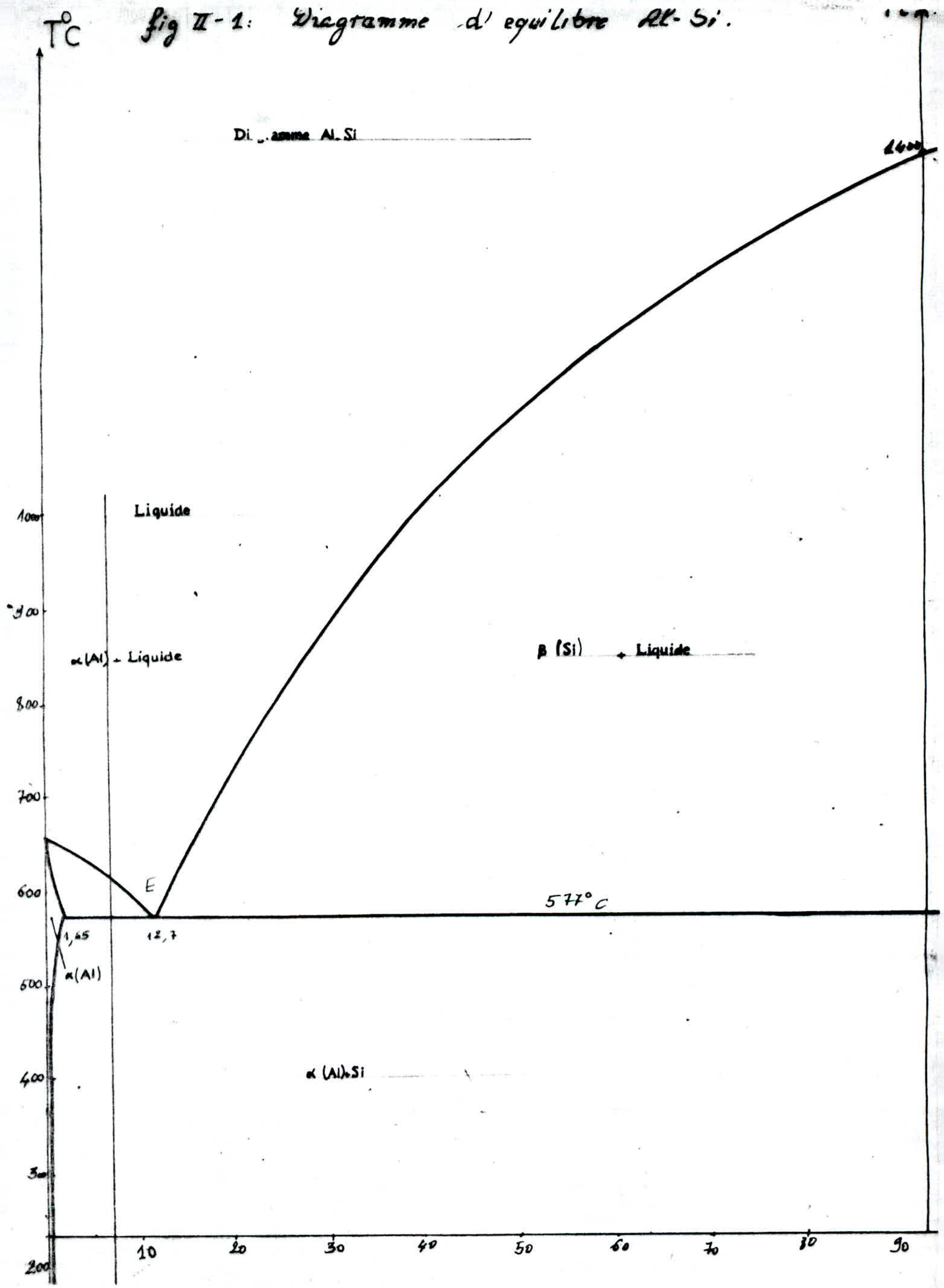
T = 620°C : c'est le début de solidification. Les premiers cristaux apparaissent et ont une composition de 0,75% .

T = Te + ε: L'alliage est diphasé. Il est constitué de cristaux de solution solide α de composition chimique 1,65% et de liquide eutéctique de composition 12,7. Les grains de phase α (1,65%) formés avant l'eutéctique sont dits proeutéctiques .

T = Te :La solution solide proeutéctique ne subit aucune transformation isotherme :

$$\text{Liq (E)} \longrightarrow \alpha\ (1.65\%) + \beta$$

fig II-1: Diagramme d'equilibre Al-Si.



Cette transformation eutéctique est identique à celle de l'alliage eutéctique E, mais elle n'affecte ici qu'une partie de l'alliage. Cependant, dans l'eutéctique, la proportion des phases α et β est la même puisqu'il provient toujours du même liquide E.

$T = Te - \varepsilon$: l'alliage est diphasé. Il comporte des cristaux de solution solide α de composition chimique 1,65 % et des cristaux de solution solide de composition chimique 98%

II-3: <u>Calcul des paramètres α et ΔH</u>

Soitent α la quantité du solide formée durant le refroidissement pendant un intervalle de temps Δt et ΔH l'enthalpie libre correspondante.

Le calcul de α est déterminé à partir du diagramme d'équilibre Al-Si par la méthode des segments inverses tandis que ΔH est donnée par la formule suivante:

$$\Delta H = \alpha . C_p . \Delta T$$

où C_p : Chaleur spècifique (W/ Kg.°C)
ΔT : Intervalle de température (°C)

Les valeurs de la quantité α et de l'enthalpie correspondante ΔH sont calculées réguliérement chaque 10°C et sont représentées dans le tableau N° II.1 suivant:

La masse de l'AS-7 utilisée est égale à: $m = \rho.V$

avec $\rho = 2700\ kg/m^3$: Densité de l'alliage

V = Long x Larg x Haut $=(0.12 \times 0.04 \times 0.03)\ m^3$

Volume du lingot

$$\boxed{m = 0.388\ Kg}$$

T (°C)	Quant. α formée (Kg)	ΔH (W)
620	0,000	0,00
610	$\frac{8-7}{8-1} \times 0{,}388 = 0{,}054$	0,12
600	$\frac{9-7}{9-1{,}5} \times 0{,}388 = 0{,}100$	0,22
590	$\frac{10{,}25-7}{10{,}25-1{,}6} \times 0{,}388 = 0.140$	0,31
580	$\frac{11-7}{11-1{,}64} \times 0{,}388 = 0{,}160$	0,35
570	$\frac{100-7}{100-1{,}64} \times 0{,}388 = 0{,}360$	0,79
560	$\frac{100-7}{100-1{,}5} \times 0{,}388 = 0{,}370$	0,80
550	$\frac{100-7}{100-1{,}25} \times 0{,}388 = 0{,}370$	0,80

N.B: A partir de la température 550°C, les valeurs de α et de ΔH sont pratiquement stables et égales respéctivement à $\simeq$ 0,370 et $\simeq$ 0,80 jusqu'à l'ambiante.

Taleau II.1: Calcul de α et ΔH

TROISIEME CHAPITRE

TECHNIQUES ET RESULTATS EXPERIMENTAUX

III-1: Mesure des températures

III-1-1: Dispositif experimental

Pour la mesure des températures lors de la solidification, nous avons utilisé un dispositif expérimental qui se compose de 4 éléments:

1- Un four de fusion électrique dont la température maximale est de 1200°C. Ce four est utilisé pour la coulée d'alliages dans les moules.

2- Un moule en sable parallélipipédique de dimensions (160 x 80 x 50) mm^3. Il est constitué de 2 chassis et d'un noyau en bois dont les dimensions correspondent à celles de notre lingot. Le sable utilisé ,est constitué de silice pour sa résistance aux températures élevées (réfractairité), d'argile permettant la conservation de l'empreinte du modèle (plasticité) et d'une poudre de carbone poreuse perméable au gaz.

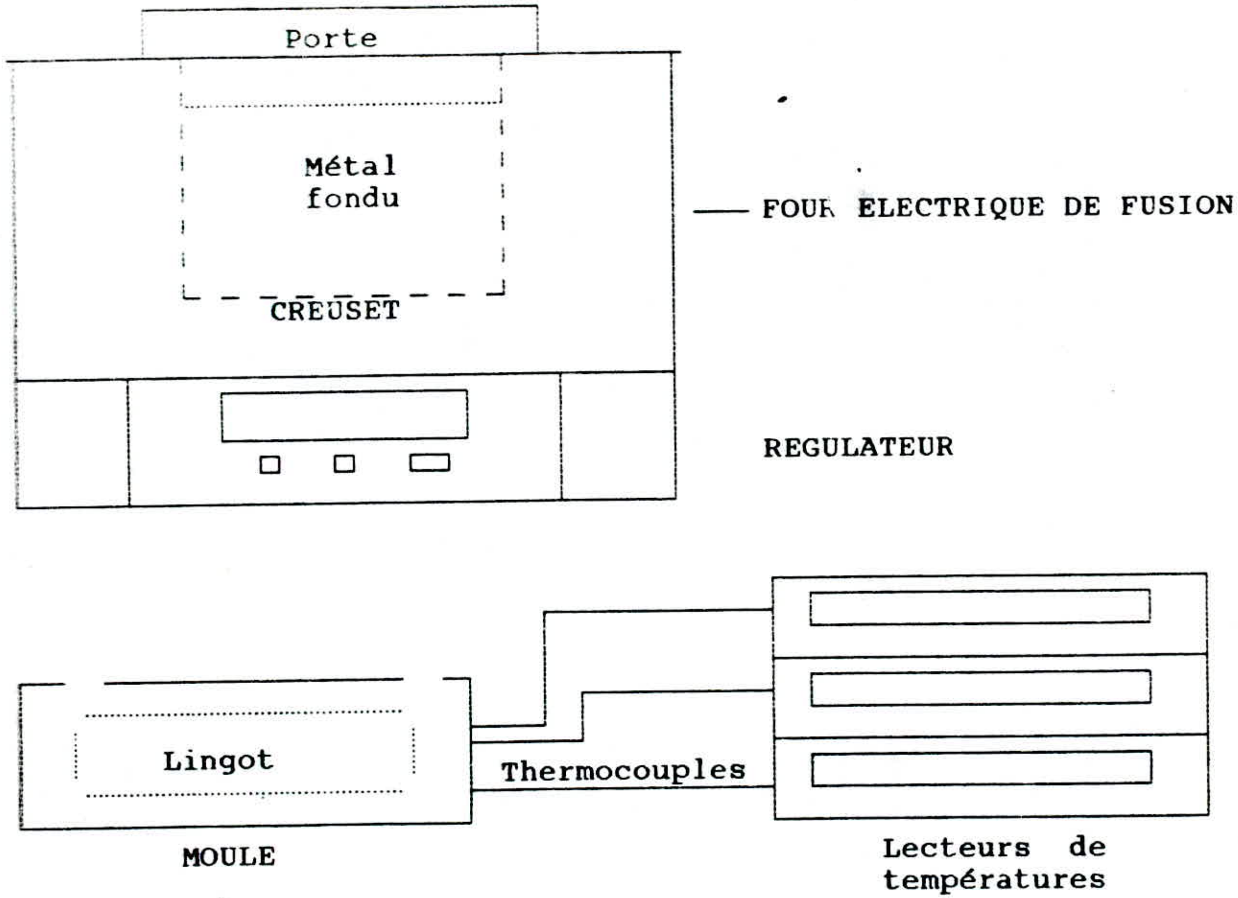
3- Trois (03) lecteurs de températures à affichage digital ayant un temps de réponse très rapide.

4- Six (06) thermocouples en chromel-alumel très fins protegés par des gaines en céramique.

III-1-2: Matériau utilisé

Au cours de nos éssais expérimentaux, nous avons utilisé de l'AS-7.

La composition chimique ainsi que quelques caractéristiques physiques de cet alliage sont donnés respectivement par les tableaux II.2 et II.3 suivants:



Représentation schématique du dispositif experimental

Composition chimique (%)	Fe	Si	Cu	Zn	Mg	Mn	Ni	Pb	Sn	Ti
	0.4-0.5	6.5-7.5	0.05 0.1	0.05 1	0.2-0.4	0.15 0.5	0.05	0.05	0.05	0.1-0.2

Tableau III.1

Caractéristiques physiques de l'AS-7	Densité: ρ (Kg/m^3)	chaleur spécifique C_p (W/ Kg.°C)	Conductivité thermique λ (W/ m^2.°C
	2700	0.22	137

Tableau III.2

III-2: Mode opératoire

L'opération de solidification de l'alliage AS-7 a été éffectué en 3 étapes:

1ère étape: La fusion

Avant d'effectuer cette opération, nous avons juger nécéssaire d'attaquer le creuset en fonte par du graphite pour empêcher la diffusion du fer. Le lingot de l'AS-7 étant introduit dans le creuset. Sa fusion est faite sous une température de 750°C pendant 1 heure.

2ème étape: La coulée

Cette deuxième phase du procéssus consiste à faire couler le produit de la fusion dans un moule. Avant de retirer le liquide du four, nous rajoutons un décrassant pour faire remonter les impuretés à la surface ainsi qu'un dégazant; la crasse est ensuite enlevée avec une louche. Le métal liquide doit être introduit dans le moule sans aucune perturbation, c'est pourquoi il est nécéssaire de prendre les précautions suivantes:

Dans un premier temps, nous avons monté sur une table plate le système chassis-modèle-sable. On pose l'un des 2 chassis sur la table et on place à l'intérieur le modèle de telle manière à ce que ce dernier y soit bien centré. Le volume restant sera ensuite rempli de sable (celui-ci va être damé et l'éxcédent enlevé).

Cependant aprés avoir retourné le chassis, on soupoudre la surface d'une poudre de graphite pour éviter qu'en fin de l'opération les 2 parties du moule ne collent; La deuxième partie constituée uniquement du chassis supérieur étant remplie de sable et préparée de la même façon.

Les 2 parties ainsi constituées sont alors posées l'une sur l'autre et fixées par des vis. Suite à cela nous soulevons la partie supérieur et extrayons le modèle de la partie inférieure qui y laisse ainsi son empreinte.

La coulée du métal fondu est faite alors par le biais de 2 trous préalablement faits et disposés sur la partie supérieur qu'on aura remis à sa place et se trouvant dans la surface contenant l'empreinte.

Le premier trou sert à faire passer le métal fondu et est appelé descente. Le deuxième appelé event permet d'indiquer le niveau de remplissage de l'empreinte et sert aussi à dégager l'air et les gaz qui se trouveraient dans le moule ou dégagés par le métal au cours de la solidification.

Afin d'éviter l'apparition de piqûres ou de souflures à la surface de notre lingot, nous avons utilisé un sable modérement humide.

3ème étape: <u>Le refroidissement</u>

La mesure des températures est effectué au moyen des thermocouples en chromel-alumel. Ces derniers sont introduits soigneusement dans certains points du lingot préalablement choisis (*cf.fig III.x*). Ce choix de points a été fait de manière à être répartis dans tout le volume du lingot. Les fils du couple sont ensuite reliés directement aux lecteurs de température.

Pour des raisons de faisabilité, et vu que nous disposions de trois (03) appareils uniquement, nous avons été contraint de faire 2 coulées.

III-3: Etude métallographique

L'etude de la structure nous permet l'observation détaillé des phases présentes dans l'alliage à étudier.

Pour cela, les échantillons prélevés au niveau des points préconçus par le maillage utilisé dans le modèle mathématique ont fait l'objet d'un enrobage et d'un polissage grossier puis fin leur confèrant une surface plane, dénuée de rugosités et ayant l'aspect d'un miroir.

Dans le but de mettre en évidence les structures métallographiques correspondantes aux différentes zones du lingot, un réactif d'attaque approprié aux alliages d'Aluminium a été utilisé: C'est le réactif de Keller, dont la composition chimique est la suivante:

- Acide fluorydrique........ 1 ml.
- Acide chlorydrique........ 1,5 ml
- Acide nitrique............ 1,5 ml
- Eau distillée............. 95 ml

Le temps d'attaque est d'environ 45 secondes.

Les différentes structures ont été observées à l'aide d'un microscope métallographique doté d'un appareil photographique avec lequel nous avons pris des photographies dans les endroits les plus nets des échantillons.

III-4: Présentation des résultats expérimentaux

La connaissance de l'évolution et de la distribution de la température d'un alliage métallique en refroidissement est d'une importance primordiale. les gradients de température existant lors de ce processus sont à l'origine de la structure finale obtenue.

Ces deux paramètres essentiels et leurs variations ont fait l'objet d'investigations en vue de déterminer les liens qu'il y a entre eux.

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats concernant la distribution de la température des points considérés dans le métal durant le refroidissement ainsi que les structures obtenues dans différentes zones du lingot.

III-4-1: Résultats thermiques

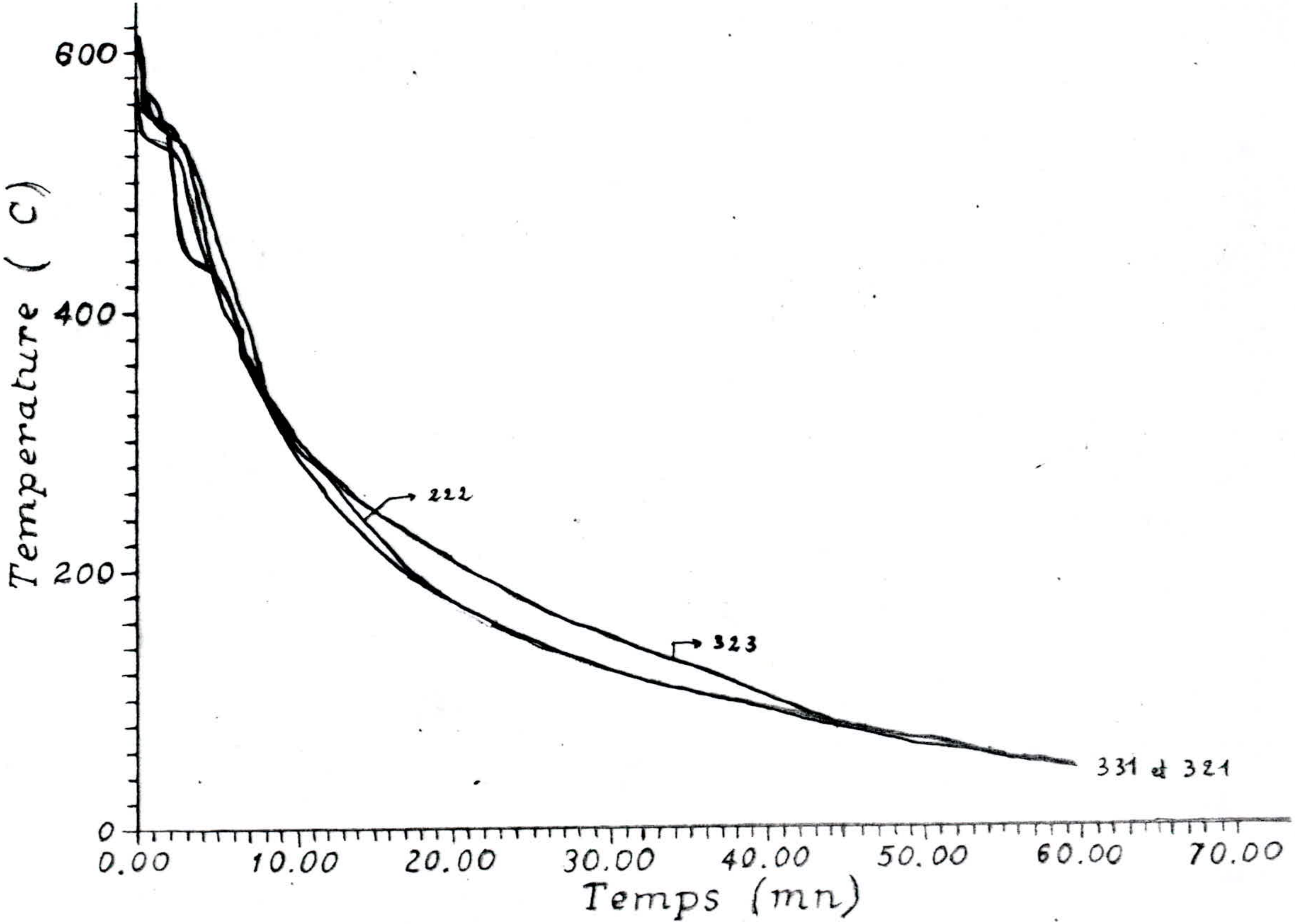
Afin de suivre les variations de la température dans le lingot durant le refroidissement, nous avons choisi six (06) points spécifiques, en l'occurence les points ayant pour coordonnées (321, 331, 323, 122, 222, 412).

La prise de la mesure des températures est effectuée chaque 30 secondes durant les 10 premières minutes à cause de la rapidité du refroidissement, puis chaque minute pendant 10 minutes pour ne relever ces températures que chaque 3 minutes durant la suite du refroidissement.

Nous représentons dans ce qui suit le tableau de valeurs de la distribution de la température des 6 points sus-cités comme indiqué dans le paragraphe précédent.

Iter N°	Temps [mn]	T_{921} [°C]	T_{931} [°C]	T_{929} [°C]	T_{122} [°C]	T_{222} [°C]	T_{412} [°C]
0	0	620	620	620	620	620	620
1	0,5	560	536	568	557	568	560
2	1	549	535	568	545	545	548
3	1,5	548	535	551	539	540	540
4	2	546	543	534	530	535	535
5	2,5	542	535	473	525	532	533
6	3	530	519	452	521	525	525
7	3,5	509	495	439	516	518	510
8	4	483	473	437	512	500	498
9	4,5	460	452	435	504	480	470
10	5	430	430	428	498	460	455
11	5,5	416	412	412	466	443	432
12	6	402	395	395	432	422	415
13	6,5	384	374	381	401	403	400
14	7	371	366	367	372	392	385
15	7,5	357	354	355	353	360	365
16	8	344	340	344	333	340	350
17	8,5	332	327	334	316	327	330
18	9	321	317	322	300	313	312
19	9,5	310	308	314	285	300	297
20	10	301	297	307	271	292	275
21	11	282	278	292	265	283	265
22	12	264	262	278	259	270	260
23	13	250	247	266	254	255	250
24	14	236	233	256	248	240	241
25	15	223	221	247	242	225	229
26	16	212	210	239	238	215	215
27	17	202	200	230	233	200	200
28	18	192	190	223	228	192	190
29	19	183	181	215	223	180	180
30	20	176	174	208	218	170	172
31	25	145	143	174	180	140	141
32	30	122	121	148	154	120	120
33	35	106	105	126	126	102	100
34	40	93	92	100	98	90	93
35	45	78	77	75	76	78	77
36	50	67	67	65	66	67	67
37	55	52	51	50	40	53	52
38	60	40	40	40	40	40	40

Début



600
400
200
0
Temperature (C)
222
323
331 et 321
0.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
60.00
70.00
Temps (mn)

III-4-2: Structures métallographiques

L'étude métallographique est illustrée par des photographies de structures d'échantillons préalablement choisis. Ces échantillons sont ceux contenant les points (122, 222, 322, 422, 522, 132, 232, 332, 432, 532)

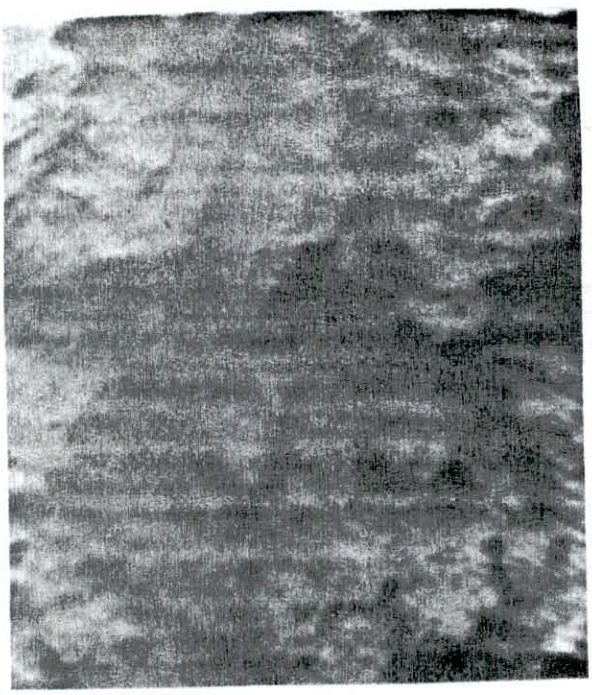


Photo n° 1: Noeud 122

Photo n° 2: Noeud 222

[illegible]

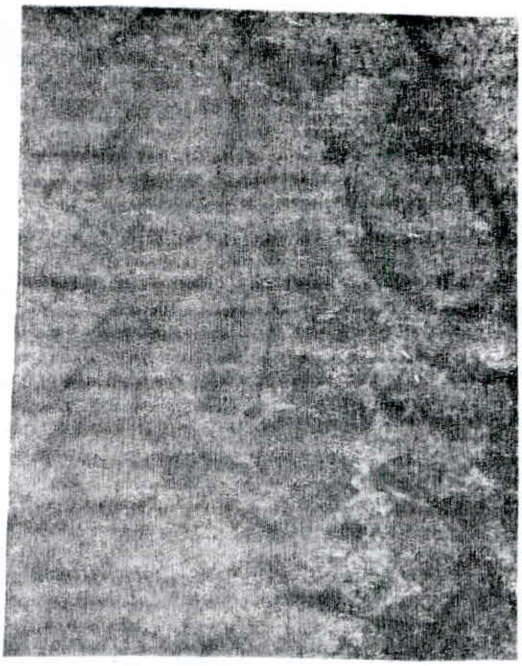


Photo n 3: Noeud 322

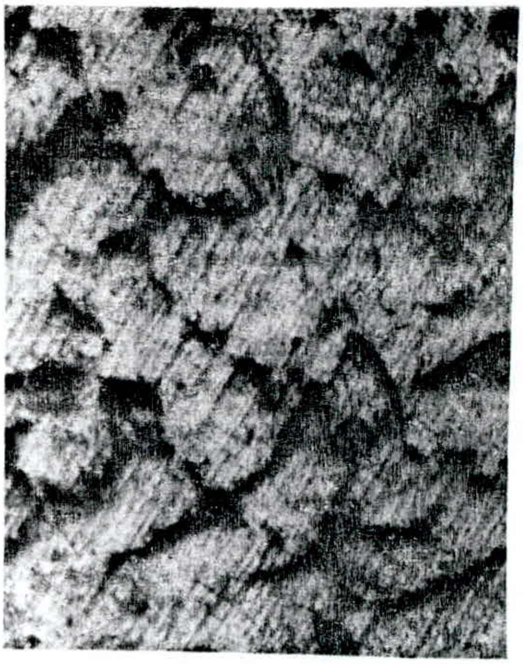


Photo n 4: Noeud 422

Photo n 5: Noeud 522

Photo n 6: Noeud 132

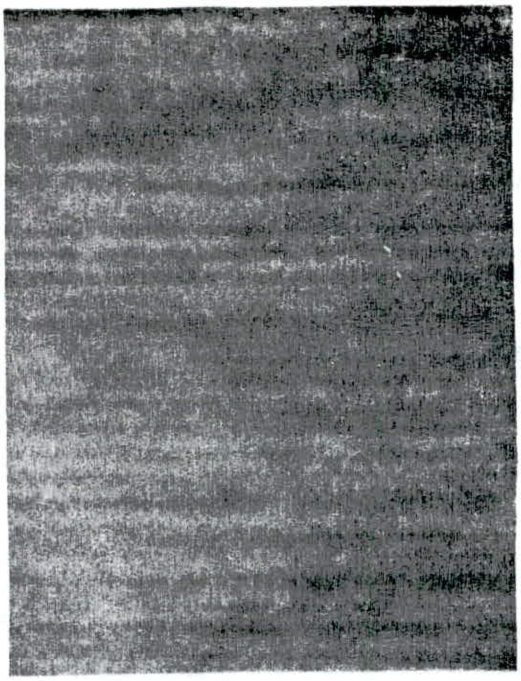


Photo n 7: Noeud 232

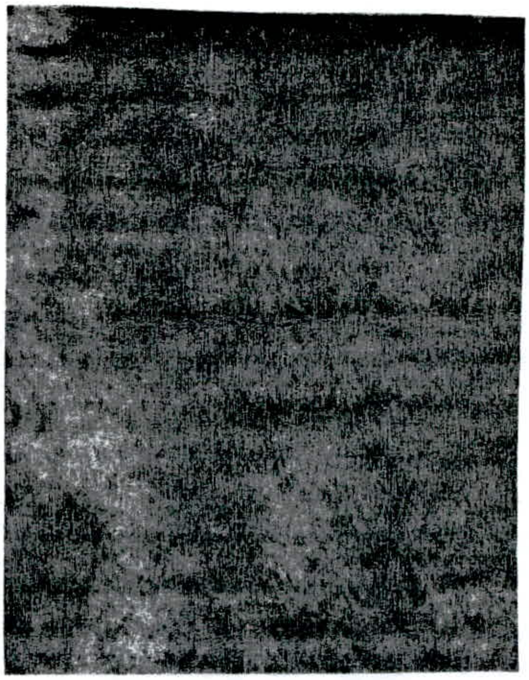


Photo n 8: Noeud 332

Photo n 9: Noeud 432

Photo n 10: Noeud 532

QUATRIEME CHAPITRE

MODELISATION MATHEMATIQUE

IV-1: Introduction

Pour une bonne compréhension ,une meilleure analyse et une étude plus approfondie d'un phénomène physique, il est d'une importance primordiale de faire une modélisation mathématique.

Celle-ci est définie comme étant un ensemble de plusieurs équations, qu'on compléte par des conditions initiales et des conditions aux limites.

La modélisation mathématique présente plusieurs avantages:

1)- Elle peut accroitre notre compréhension du comportement d'un procédé du point de vue des mécanismes fondamentaux.

2)- Elle, permet d'étudier par simple calcul l'effet des différentes variables d'un procédé. Le cout d'une telle approche est beaucoup plus réduit que celui d'expériences en vraie grandeur.

3)- Elle peut aider à évaluer les résultats d'éssais sur les installations.

4)- Au cours d'une série d'expériences, un modèle peut aider à décider des conditions opératoires à retenir.

5)- Un modèle peut être utilisé pour faire du controle de procédé et de l'optimisation.

La nature et la complexité d'un modèle dépend largement du sujet d'étude et de la compréhension du procédé en question.

La modélisation mathématique est fréquemment arrétée par une mauvaise compréhension du procédé. Dans ce cas, elle doit etre entreprise en liaison étroite avec un travail expérimental en profondeur. ce dernier point est fondamental pour construire de bons modèles.

IV-2: Formulation du problème

La détermination de la distribution de la température dans un lingot d'aluminium (AS-7) au cours du refroidissement est un procédé extremement difficile à comprendre. Ceci est du, en grande partie aux différents mécanismes de transmission de chaleur mis en jeu et aux variations des paramètres gouvernant le phénomène. Dans ce cas, la formulation mathématique peut être complexe et nécéssite un temps important. L'avantage primordial de ce modèle est qu'il peut etre utilisé dans un trés grand domaine de variation des variables, en supposant qu'il n' ya pas de changement majeur dans les mécanismes. Ce modèle nécéssite alors la connaissance de paramètres permettant de définir les conditions limites, tel que les coefficients de transfert de chaleur.

En régime transitoire, Les différentes températures à déterminer, dépendent non seulement des trois dimensions spatiales, mais aussi du temps. Elles sont régies par des lois continues appropriées.

La méthode convenable, pour approcher avec une grande précision le processus de transfert de chaleur en régime transitoire est basée sur la téchnique des différences finies.

Son principe consiste à remplacer l'équation différentielle exacte par des équations aux différences finies en remplaçant les dérivées par une approximation algébrique.

Pour développer un bon modèle, il est utile de suivre les différentes étapes citées ci-dessous:

1)- Définition du problème, des objectifs et les critères de valeur.

2)- Etablissement de l'équation mathématique régissant le phénomène étudié.

3)- Répartition du domaine considéré en un certain nombre de volumes élémentaires.

4)- Discrétisation de l'équation différentielle de conduction en régime transitoire et son application pour chaque volume élémentaire.

5)-Accompagnement de la modélisation mathématique par les paramètres du système , les conditions initiales et les conditions aux limites.

6)- Analyse des variables et des différentes relations disponibles pour obtenir un système aussi simple et consistant que possible.

7)- Résolution du système d'équations par une méthode numérique qui tient compte des critères de précision, de stabilité, de convergence et d'économie du temps de calcul.

8)- Evaluation de la validité du modèle.

9)- Application du modèle: interprétation et analyse des résultats.

Dans ce type du modèle, il est nécéssaire de vérifier la correspondance entre résultats calculés et résultats expérimentaux en ayant recours à l'outil informatique.

IV-3: Mécanismes de transfert de chaleur:

Le transfert de chaleur a lieu chaque fois qu'un gradient de température existe à l'interieur d'un milieu. L'energie transferée s'effectue suivant trois modes principaux:

a)- La convection:

La convection caractérise la propagation de la chaleur dans un fluide, gaz ou liquide, dont les molécules sont en mouvement.

Le flux de chaleur échangé entre un corps et l'ambiance à travers une surface entourant un point de la surface de ce corps s'exprime par:

$$q = h.S.(T_{\infty} - T_c) \qquad (IV.1)$$

ou: q : flux de chaleur échangé (W).

S : surface d'échange (m^2).

T_{∞}: température du milieu environnant (°C)

T_c : température de la surface du corps (°C).

h : coefficient de convection ($W/m^2.°C$).

b)- Le rayonnement:

Le rayonnement caractérise l'échange direct entre deux corps à températures différentes séparés par un espace transparent. Le rayonnement thermique est un phénomène éléctromagnétique.

La transmission de chaleur par rayonnement obeit à la loi de Stéfan-Boltzmann.

$$q = \varepsilon.F.\sigma.S.(T_{\infty}^{4} - T_{c}^{4}) \qquad (IV.2)$$

ou: q : flux de chaleur transmis (W).

T_{∞}: température du milieu (°C)

T_{c}: température de la surface réceptrice.

σ : constante de Stéfan égale à $5,73.10^{-8}$ ($W/m^{2}.°K$).

S : aire de la surface émettrice.

ε : coefficient d'émissivité mutuel de rayonnement.

F : facteur d'angle de la surface réceptrice par rapport à la surface émettrice.

c)- <u>La conduction:</u>

La condu--ion est caractérisée par la propagation de la chaleur d'une région à haute température vers une autre à basse température par contact direct des molécules

La relation fondamentale de la transmission de chaleur par conduction à été proposée par J.Fourrier et s'écrit comme suit:

$$dq = -\lambda.A.\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (IV.3)$$

ou: dq: flux de chaleur transmis dans le matériau (W/m)

λ: conductivité thermique du matériau ($W/m^{2}.°C$).

A: aire de la section à travers laquelle s'écoule la chaleur.

$\frac{\partial T}{\partial x}$: le gradient de température dans la section (°C/m).

IV-4: Equation differentielle de conduction en régime transitoire.

L'équation générale définissant la répartition des températures en chaque point du lingot s'obtient en écrivant le principe de la conservation de l'énergie pour l'élément considéré pendant le temps dt.

Tenant compte de la présence des sources internes, le bilan thermique s'établit comme suit:

Quantité de chaleur qui entre + quantité de chaleur dégagée dans la masse par des sources internes = quantité de chaleur qui sort + quantité de chaleur emmagasinée.

Soit un élément élémentaire à une dimension:
Le flux thermique entrant normalement par la face (ABCD) a pour valeur:

$$dq_x = -\lambda . A . \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (IV.4)$$

La flux thermique de la face opposée (A'B'C'D') a pour valeur:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q}{\partial x} dx = -A\,\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})dx \qquad (IV.5)$$

La quantuté de chaleur emmagasinée est égale à:

$$Q_{emm} = \rho . Cp . dx . A . dT \qquad (IV.6)$$

La quantité de chaleur dégagée dans l'élément par les sources internes est égale à:

$$q = \dot{q} . A . dx \qquad (IV.7)$$

En combinant les relations trouvées, on aboutit à l'équation:

$$\lambda . \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} = \rho . C_p . \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{(IV.8)}$$

Dans le cas tridimentionnel, l'équation (III.8) devient:

$$\lambda . \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda . \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda . \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q} = \rho . C_p . \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{(IV.9)}$$

$\dot{q}$: quantité de chaleur dégagée par unité de volume
Elle est donnée par la formule suivante:

$$\dot{q} = -\rho . \alpha . \Delta H . \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{(IV.10)}$$

En remplaçant cette formule dans l'équation (IV.9), on aboutit à:

$$\lambda . \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda . \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda . \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = (\rho . C_p + \rho . \alpha . \Delta H) \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{(IV.11)}$$

où dT: variation de la température de l'élément au cours de la période dt.
- ρ: masse volumique du matériau.
- C_p: chaleur massique.
- α: quantité du solide formé à l'interface liquide/ Solide pour un intervalle de température dT.
- ΔH: chaleur latente de fusion.

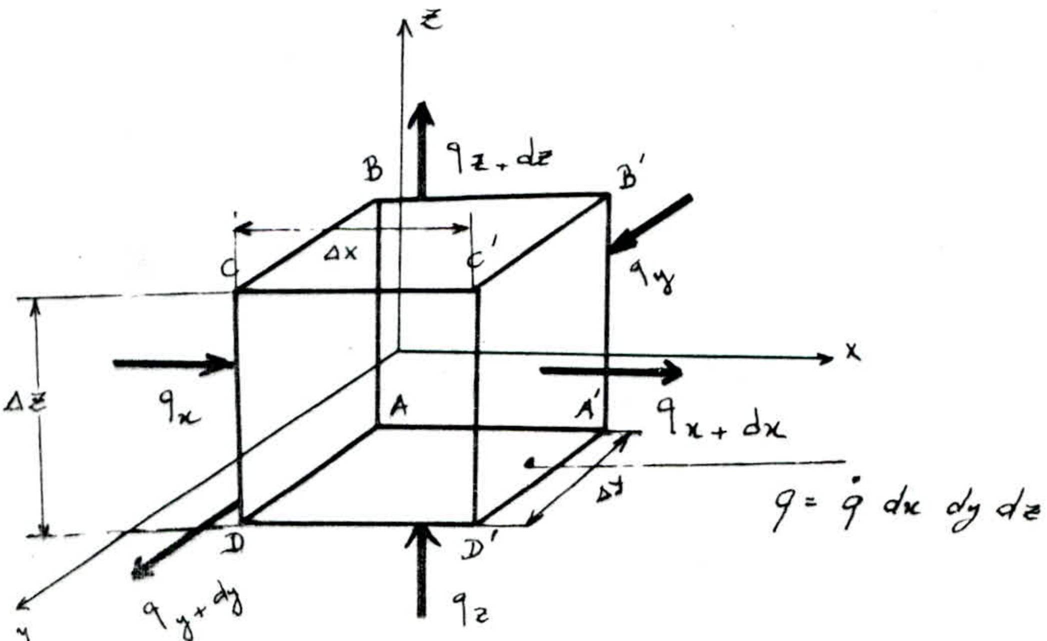


Schéma: transfert de chaleur dans un volume élémentaire à 3 dimensions.

IV-5: Discrétisation de l'équation différentielle

Considérons un noeud **P** du lingot de coordonnés x,y,z. Ce noeud est entouré de six noeuds voisins.

- Deux noeuds suivant la direction x, notés respectivement Est et Ouest.
- Deux noeuds suivant la direction y, notés respectivement Nord et Sud.
- Deux noeuds suivant la direction z, notés respectivement Haut et Bas.

La discrétisation de l'équation s'obtient en intégrant l'équation III-11 suivant le volume de contrôle de la figure (III-1) et suivant un intervalle de temps allant de t à $(t + \Delta t)$.

$$\iiiint (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H) \frac{\partial T}{\partial t} dt.dx.dy.dz = \iiiint \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) dx.dy.dz.dt$$

$$+ \iiiint \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) dy.dx.dz.dt$$

$$+ \iiiint \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial T}{\partial z}) dz.dx.dy.dt$$

$$(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H) \int_O^E \int_S^N \int_B^H \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt.dx.dy.dz =$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_O^E \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) dx.dt.\Delta y.\Delta z + \int_t^{t+\Delta t} \int_S^N \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) dy.dt.\Delta x.\Delta z$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_B^H \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial T}{\partial z}) dz.dt.\Delta x.\Delta y \qquad (IV.13)$$

Le developpement du membre de gauche de l'équation donne:

$$(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H) \int_O^E \int_S^N \int_B^H \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt.dx.dy.dz =$$

$$(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H) (T_P^{t+\Delta t} - T_P^{t}) \Delta x.\Delta y.\Delta z \qquad (IV.14)$$

L'utilisation d la méthode implicite (*cf. parag IV.*) conduit à des equations discrétisées de la forme suivante:

$$(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H) (T_P^1 - T_P^O) \Delta x.\Delta y.\Delta z =$$

$$\frac{\lambda}{\Delta x} \left[(T_E^1 - T_P^1) - (T_P^1 - T_O^1) \right] \Delta y.\Delta z.\Delta t + \frac{\lambda}{\Delta y} \left[(T_N^1 - T_P^1) - (T_P^1 - T_S^1) \right] \Delta x.\Delta z.\Delta t$$

$$+ \frac{\lambda}{\Delta z} \left[(T_H^1 - T_P^1) - (T_P^1 - T_B^1) \right] .\Delta x.\Delta y.\Delta t$$

Aprés developpement, on obtient une equation sous la forme:

$$\left[(\rho.Cp + \rho.\alpha.\Delta H)\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{\Delta t} + 2.\lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x} + 2.\lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y} + 2.\lambda\frac{\Delta y.\Delta x}{\Delta z}\right] T_P^1 = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x}.T_E^1 + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x}.T_O^1 + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y}.T_N^1 +$$

$$\lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y}.T_S^1 + \lambda\frac{\Delta y.\Delta x}{\Delta z}.T_H^1 + \lambda\frac{\Delta y.\Delta x}{\Delta z}.T_B^1 +$$

$$(\rho.Cp + \rho.\alpha.\Delta H)\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{\Delta t}.T_P^0 \qquad \text{(IV.16)}$$

Les indices 1 et 0 représentent respéctivement les instants $(t+\Delta t)$ et t,

On pose:

$$a_P = \left[(\rho.Cp + \rho.\alpha.\Delta H)\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{\Delta t} + 2\lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x} + 2\lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y} + 2\lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z}\right]$$

$$a_E = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x}$$

$$a_O = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x}$$

$$a_N = \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y}$$

$$a_S = \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y}$$

$$a_H = \lambda\frac{\Delta y.\Delta x}{\Delta z}$$

$$a_B = \lambda\frac{\Delta y.\Delta x}{\Delta z}$$

$$b = (\rho.Cp + \rho.\alpha.\Delta H)\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{\Delta t}.T_P^0$$

L'équation (IV.16) s'exprime sous la forme suivante:

$$\boxed{a_P.T_P - a_E.T_E - a_O.T_O - a_N.T_N - a_S.T_S - a_H.T_H - a_B.T_B = b}$$

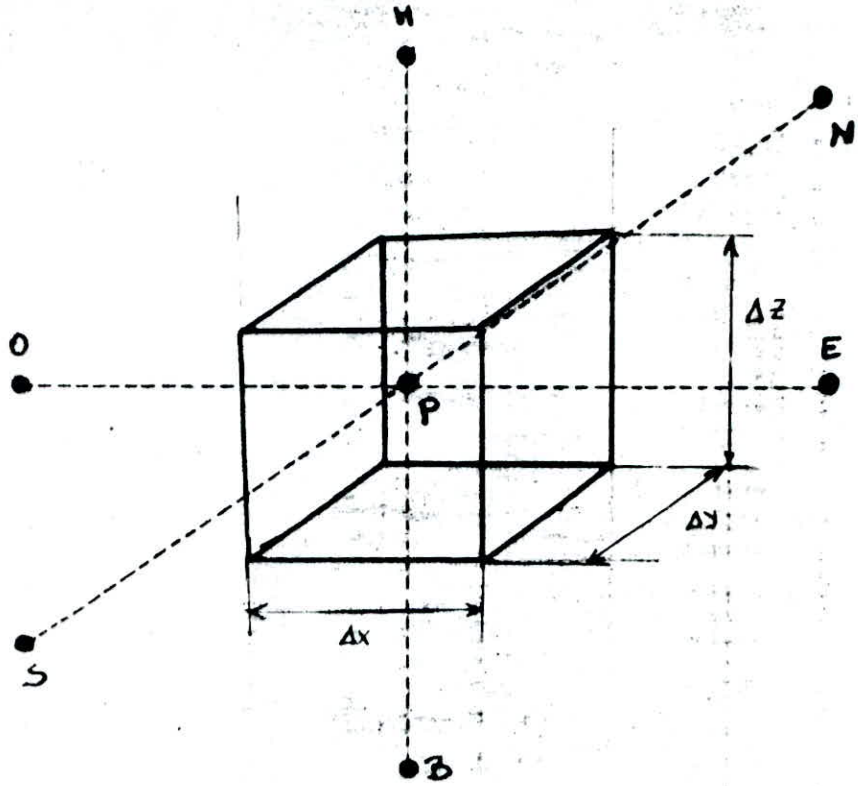


fig III - 1 : Volume de controle du Noeud P.

(IV.17)

IV-6: Discretisation du lingot

Pour des raisons de symetrie, seulement un quart du lingot est pris en considération. les resultats trouvés seront analogues pour les trois autres quarts.

La discrétisation s'effectue comme suit:

a)- Diviser le domaine consideré en un certain nombre d'élements de forme tetraédrique, les centres de chaque tetraédre constituent les noeuds du réseau.

b)- Attribuer à chaque noeud une température plausible, en tenant compte des températures déja connues.

Dans notre cas la discrétisation se fait en considérant cinq (05) noeuds suivant la direction x, trois (03) noeuds suivant la direction y et trois (03) noeuds suivant z.

Pour des raisons de variation des paramètres, soient M, N, et L le nombre de noeuds réspectivement suivant x, y, et z. Soient donc, Δx, Δy et Δz les distances respectives séparant deux noeuds voisins selon x, y, et z.

$$\Delta x = \frac{X}{M - 1} \quad ; \ \Delta y = \frac{Y}{N - 1} \quad \text{et} \quad \Delta z = \frac{Z}{L - 1} \qquad \text{(IV.18)}$$

Ce maillage est représentée par la figure suivante.

⟶ : FLux Convectif

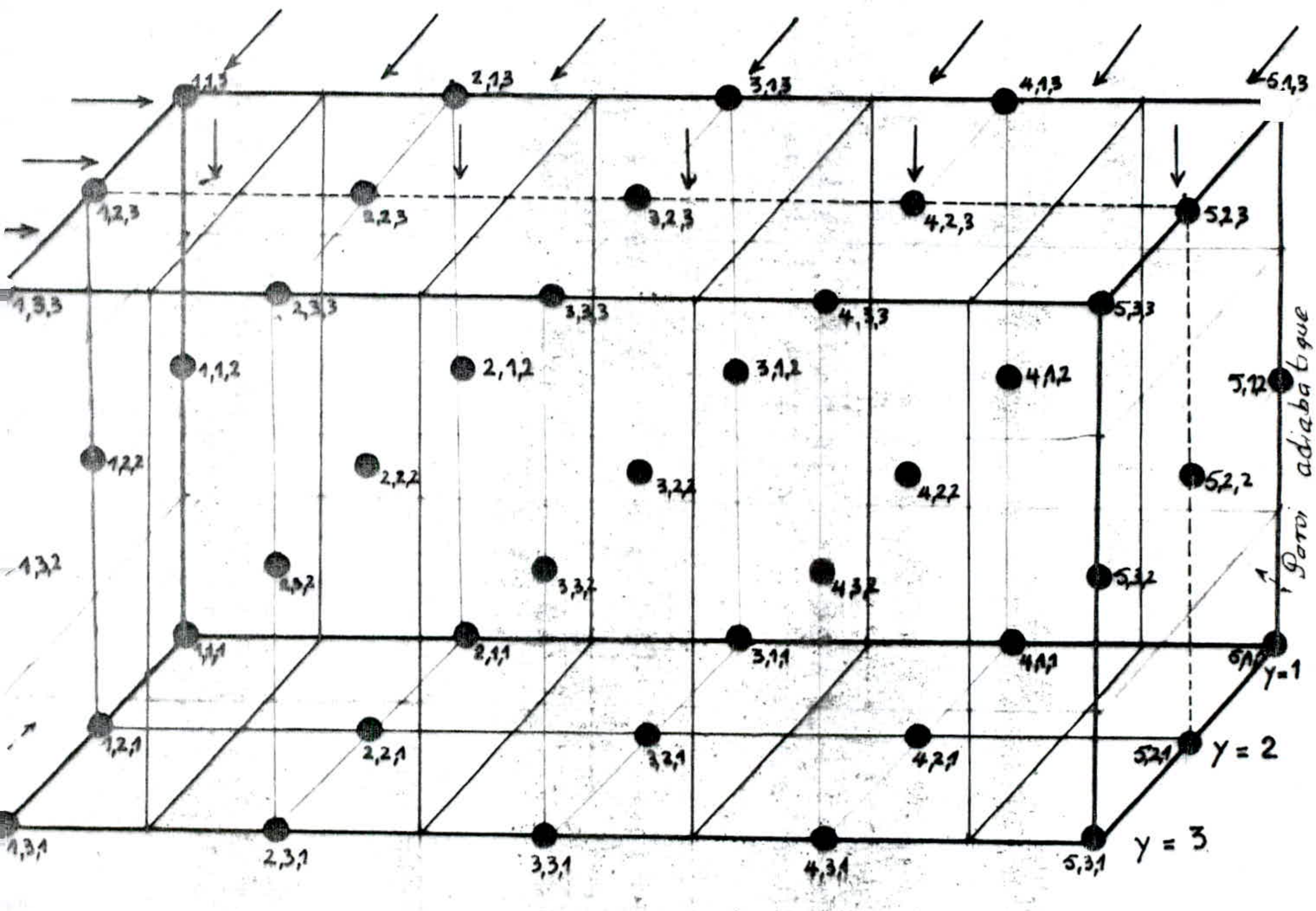


Fig IV.1: Discrétisation du lingot

IV-7: Etablissement du système d'équations

Aprés avoir réparti le lingot en 45 noeuds, on applique en chacun d'eux une équation algébrique obtenue en éffectuant un bilan thermique. On obtient ainsi pour ces 45 noeuds considerés, un système de 45 équations algébriques.

IV-7-1: Conditions initiales

On considère qu'à l'instant initial (t_o = 0), tous les noeuds du lingot sont à la température de 620°C, température de fusion de l'alliage considéré AS-7.

IV-7-2: Conditions aux limites

Au cours du refroidissement, le lingot est soumis au flux convectif provenant du milieu ambiant suivant les trois directions x, y et z. les points situés sur les parois externes sont donc en même temps régis par l'équation de conduction et l'équation de convection.

IV-8: Méthode d'approche

La méthode implicite est d'un grand intéret dans les problèmes transitoires impliquant de grandes valeurs du temps et des pas d'itérations Δt considérables [11, 15]. Cette méthode utilise les différences en arrière, elle est toujours stable c'est à dire que le choix de Δx, Δy, Δz et Δt sont arbitraires [11]. Il faut cependant remarquer que de petites valeurs de Δx, Δy, Δz et de Δt conduisent à des températures plus éxactes car les erreurs dues au remplacement des dérivées par les différences sont alors plus faibles.

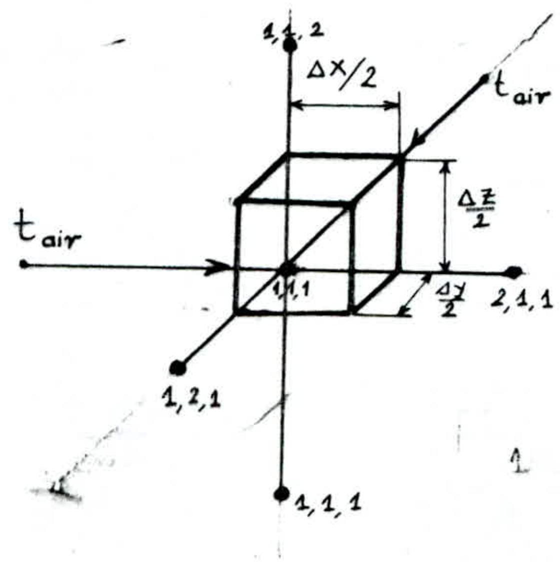
La méthode implicite consiste à éxprimer la température du noeud considéré à l'instant $(t+\Delta t)$ en fonction de sa température à l'instant précédent t et de celles de ses voisins à l'instant $(t+\Delta t)$ [11 , 15]. On est donc amené à résoudre un système d'équations simultanées.

IV-9: Mise en équations

L'ecriture des équations mathématiques des 45 noeuds choisis du lingot, se fait en procédant plaque par plaque (*cf.fig IV.1*).

Noeud P(1,1,1):

Ce noeud est soumis aux flux convectifs suivant x et suivant y, à la température de la paroi du bàs et aux températures des trois noeuds voisins.



Le bilan thermique relatif à ce noeud s'écrit:

$$q_{211} + q_{\infty} + q_{121} + q'_{\infty} + q_{112} + q_{111} = (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).V.\frac{\partial T}{\partial t}$$

ce qui conduit à:

$$- \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}(T_{111}-T_{211}) + h\frac{\Delta y.\Delta z}{4}(T_{\infty}-T_{111}) - \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}(T_{111}-T_{211})$$

$$+ h\frac{\Delta x.\Delta z}{4}(T_{\infty}-T_{111}) - \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}(T_{111}-T_{112}) - \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}(T_{111}-T_{111})$$

$$= (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}(T_{111} - T^{o}_{111})$$

Ce qui revient à ecrire une equation sous la forme (III.16):

$$\left[\frac{h}{4}(\Delta y.\Delta z + \Delta x.\Delta z) + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}\right].T_{111} = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{211}$$

$$\lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}.T_{121} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{112} + \frac{h}{4}(\Delta y.\Delta z + \Delta x.\Delta z).T_{\infty}$$

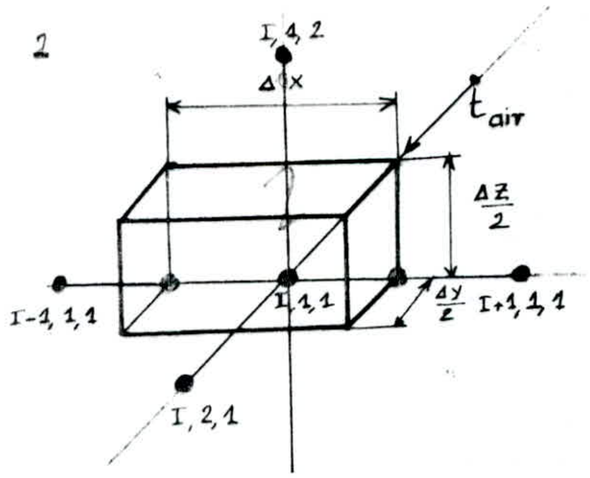
$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}\right].T^{o}_{111} \qquad \text{(IV.19)}$$

En mettant cette équation sous la forme (IV.17), on aboutit à:

$$\boxed{a^{1}_{P}.T_{111} - a^{1}_{E}.T_{211} - a^{1}_{S}.T_{121} - a^{1}_{H}.T_{112} = b^{1}}$$

Noeuds (2,1,1), (3,1,1), (4,1,1):

Ces noeuds sont soumis à un flux convectif suivant y, à la température de la paroi du bàs et aux températures des noeuds voisins. Ils sont régis par la même équation.



En éffectuant un bilan thermique à chaque noeud, on obtient:

$$- \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} (T_{I11} - T_{I-111}) - \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} (T_{I11} - T_{I+111})$$

$$- \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y} (T_{I11} - T_{I21}) + h \frac{\Delta x.\Delta z}{2} (T_{\infty} - T_{I11}) - \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z} (T_{I11} - T_{I12})$$

$$= (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H). \frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t} (T_{I11} - T^{o}_{I11})$$

En mettant cette équation sous la forme (IV.16), on aboutit à:

$$\Big[\frac{h}{2}.\Delta x.\Delta z + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z} +$$

$$+ (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H). \frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t} \Big] .T_{I11} = \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} .T_{I+111}$$

$$+ \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} .T_{I-111} \quad \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y} .T_{I21} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z} .T_{I12} + \frac{h}{2} (\Delta x.\Delta z).T_{\infty}$$

$$+ \Big[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H). \frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t} \Big] .T^{o}_{I11} \qquad \text{(IV.20)}$$

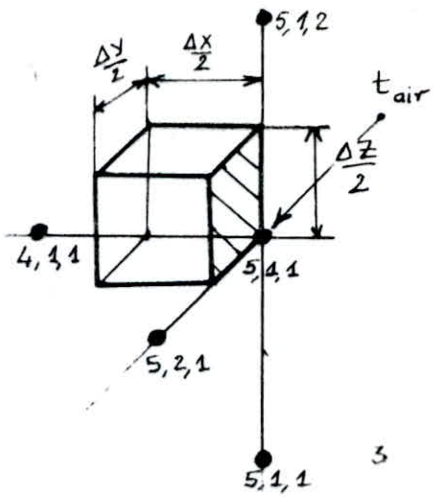
En remplaçant I par ses valeurs, on obtient 3 équations qui s'écrivent sous la forme (IV.17)

$$\boxed{\begin{array}{l} a_P^2 . T_{211} - a_E^2 . T_{311} - a_O^2 . T_{111} - a_S^2 . T_{221} - a_H^2 . T_{212} = b^2 \\ a_P^3 . T_{311} - a_E^3 . T_{411} - a_O^3 . T_{211} - a_S^3 . T_{321} - a_H^3 . T_{312} = b^3 \\ a_P^4 . T_{411} - a_E^4 . T_{411} - a_O^4 . T_{511} - a_S^4 . T_{421} - a_H^4 . T_{412} = b^4 \end{array}}$$

(IV.21)

Noeud (5,1,1):

Ce noeud est soumis à un flux convectif suivant y, à la température de la paroi du bàs, à une face adiabatique et aux températures des noeuds voisins.



$$- \lambda \frac{\Delta y . \Delta z}{4 \ \Delta x} (T_{511} - T_{411}) + h \frac{\Delta x . \Delta z}{4} (T_{\infty} - T_{511}) - \lambda \frac{\Delta x . \Delta z}{4 \ \Delta y} (T_{511} - T_{521})$$

$$- \lambda \frac{\Delta x . \Delta y}{4 \ \Delta z} (T_{511} - T_{511}) = (\rho . C_P + \rho . \alpha . \Delta H) . \frac{\Delta x . \Delta y . \Delta z}{8 \ \Delta t} (T_{511} - T_{511}^{o})$$

Aprés développement, on obtient:

$$\left[\frac{h}{4}.\Delta x.\Delta z + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}\right].T_{511} = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{411} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}.T_{521}$$

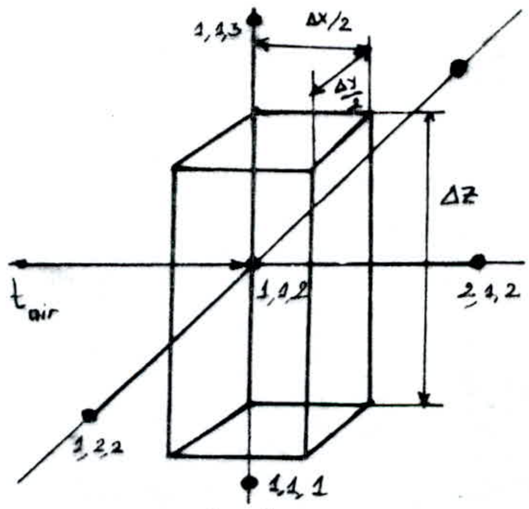
$$+ \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{512} + \frac{h}{4}(\Delta x.\Delta z).T_{\infty} + \left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}\right].T^{0}_{111} \qquad (IV.22)$$

De même:

$$\boxed{a^5_P.T_{511} - a^5_O.T_{411} - a^5_S.T_{521} - a^5_H.T_{512} = b^5} \qquad (IV.23)$$

Noeud (1,1,2):

Il est soumis aux flux convectifs suivant x, y et aux températures des noeuds voisins.



$$- \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x}(T_{112}-T_{212}) + h\frac{\Delta y.\Delta z}{2}(T_{\infty}-T_{112}) - \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y}(T_{112}-T_{122})$$

$$+ h\frac{\Delta x.\Delta z}{2}(T_{\infty}-T_{112}) - \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}(T_{112}-T_{113}) - \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}(T_{112}-T_{111})$$

$$= (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}(T_{112} - T^{0}_{112})$$

ce qui conduit à:

$$\left[\frac{h}{2}(\Delta y.\Delta z + \Delta x.\Delta z) + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}\right].T_{112} = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x}.T_{212}$$

$$\lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y}.T_{122} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{113} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{111} + \frac{h}{4}(\Delta y.\Delta z + \Delta x.\Delta z).T_\infty$$

$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}\right].T^o_{112} \qquad \text{(IV.24)}$$

De la même manière, on écrit cette équation sous la forme (IV.17)

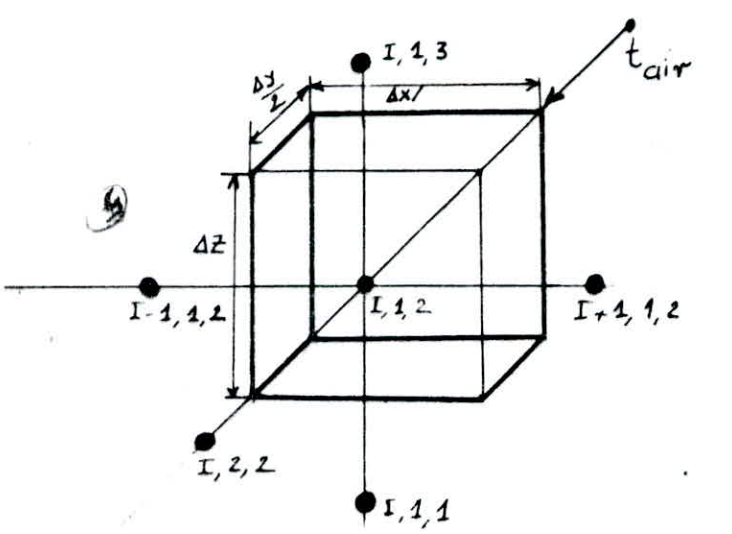
$$\boxed{a^\sigma_P.T_{112} - a^\sigma_E.T_{212} - a^\sigma_S.T_{122} - a^\sigma_H.T_{113} - a^\sigma_B.T_{111} = b^\sigma}$$

(IV.25)

NB: Pour des raisons de commodité et d'espace, on n'écrira pour les noeuds restants que les équations finales.

Noeuds (2,1,2),(3,1,2),(4,1,2):

Ces noeuds sont soumis à un flux convectif suivant la direction x et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[h.\Delta x.\Delta z + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta t} \right].T_{I12} = \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2.\Delta x}.T_{I+112} +$$

$$+ \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2.\Delta x}.T_{I-112} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y}.T_{I22} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{2.\Delta z}.T_{I13} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{2.\Delta z}.T_{I11}$$

$$+ h.(\Delta x.\Delta z).T_{\infty} + \left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t} \right].T^{0}_{I12} \qquad \text{(IV.26)}$$

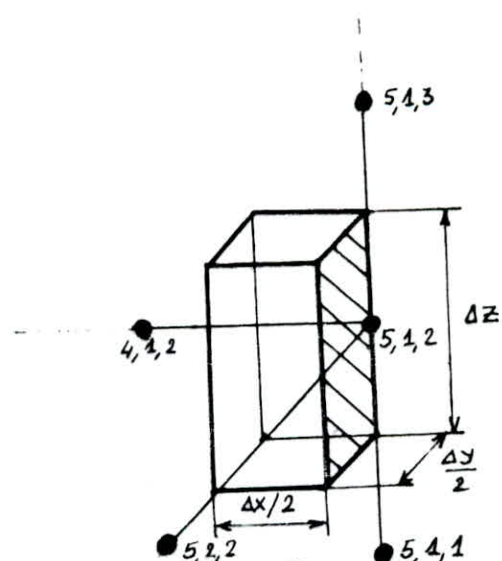
En remplaçant I par ses valeurs, on obtient:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^7_P.T_{212} - a^7_E.T_{312} - a^7_O.T_{112} - a^7_S.T_{222} - a^7_H.T_{213} - a^7_B.T_{211} = b^7 \\ a^8_P.T_{312} - a^8_E.T_{412} - a^8_O.T_{212} - a^8_S.T_{322} - a^8_H.T_{313} - a^8_B.T_{311} = b^8 \\ a^9_P.T_{412} - a^9_E.T_{512} - a^9_O.T_{312} - a^9_S.T_{422} - a^9_H.T_{413} - a^9_B.T_{411} = b^9 \end{array}}$$

(IV.27)

Noeud (5,1,2):

Ce noeud est situé sur une surface adiabatique, il est soumis à un flux convectif suivant y et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\frac{h}{2}.\Delta x.\Delta z + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t} \right].T_{512} = \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x}.T_{412}$$

$$+ \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y}.T_{522} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{513} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{511} + \frac{h}{2}(\Delta x.\Delta z).T_{\infty}$$

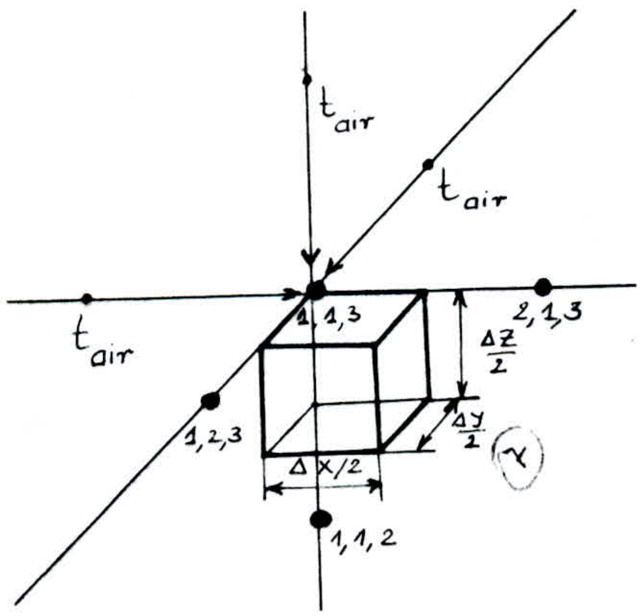
$$+ \left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t} \right].T^{0}_{512} \qquad \text{(IV.27)}$$

$$\boxed{a^{10}_{P}.T_{512} - a^{10}_{O}.T_{412} - a^{10}_{S}.T_{522} - a^{10}_{H}.T_{513} - a^{10}_{B}.T_{511} = b^{10}}$$

(IV.28)

Noeud (1,1,3):

Ce noeud est soumis aux flux convectifs suivant x, y, z et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\frac{h}{4} (\Delta y.\Delta z + \Delta x.\Delta z + \Delta x.\Delta y) + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t} \right].T_{113} = \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{213} +$$

$$\lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}.T_{123} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{112} + \frac{h}{4}(\Delta y.\Delta z + \Delta x.\Delta z + \Delta x.\Delta y).T_{\infty}$$

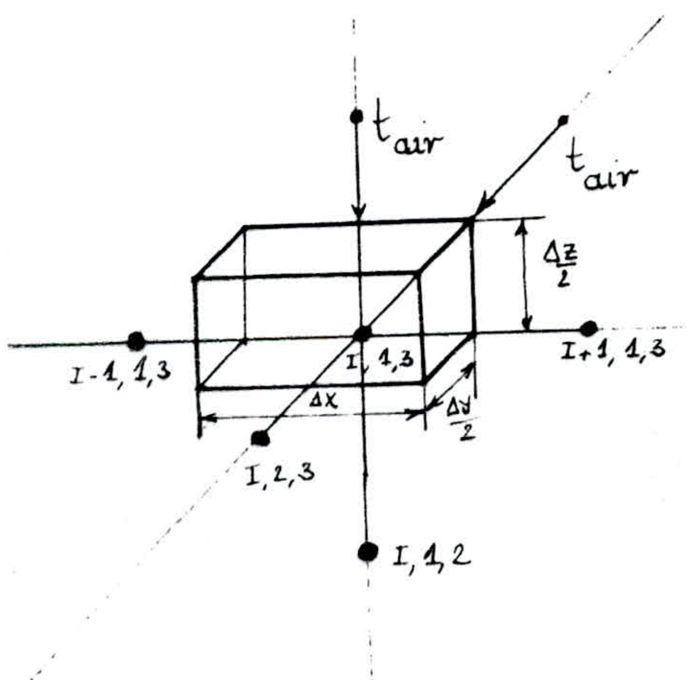
$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t} \right].T^{o}_{113} \qquad \text{(IV.29)}$$

$$\boxed{a_P^{11}.T_{512} - a_E^{11}.T_{213} - a_N^{11}.T_{123} - a_B^{11}.T_{112} = b^{11}}$$

(IV.30)

Noeuds (2,1,3),(3,1,3),(4,1,3):

Ces noeuds sont soumis aux deux flux convectifs suivant y, z et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\frac{h}{2}(\Delta x.\Delta z + \Delta x.\Delta y) + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\,\Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2\,\Delta z} +\right.$$

$$\left.+ (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\,\Delta t}\right].T_{I13} = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4.\Delta x}.T_{I+113} +$$

$$+ \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4.\Delta x}.T_{I-113} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\,\Delta y}.T_{I23} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2.\Delta z}.T_{I12}$$

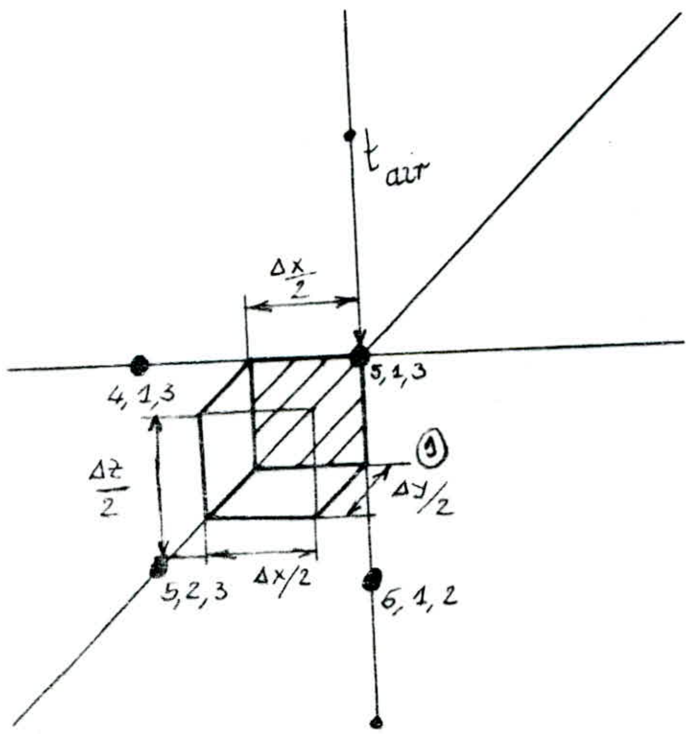
$$+ h.(\Delta x.\Delta z + \Delta x.\Delta y).T_{\infty} + \left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\,\Delta t}\right].T^{0}_{I13}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_P^{12}.T_{213} - a_E^{12}.T_{313} - a_O^{12}.T_{113} - a_S^{12}.T_{223} - a_B^{12}.T_{212} = b^{12} \\ a_P^{13}.T_{313} - a_E^{13}.T_{413} - a_O^{13}.T_{213} - a_S^{13}.T_{323} - a_B^{13}.T_{312} = b^{13} \\ a_P^{14}.T_{413} - a_E^{14}.T_{513} - a_O^{14}.T_{313} - a_S^{14}.T_{423} - a_B^{14}.T_{412} = b^{14} \end{array}}$$

(IV.31)

Noeud (5,1,3):

Le noeud (5,1,3) porté par la face adiabatique est soumis aux flux convectifs suivant y et z et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\frac{h}{4}(\Delta x.\Delta y + \Delta x.\Delta z) + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}\right].T_{513} = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{413}$$

$$\lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}.T_{523} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{512} + \frac{h}{4}(\Delta x.\Delta y + \Delta x.\Delta z).T_{\infty}$$

$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}\right].T^{o}_{513} \qquad \text{(IV.32)}$$

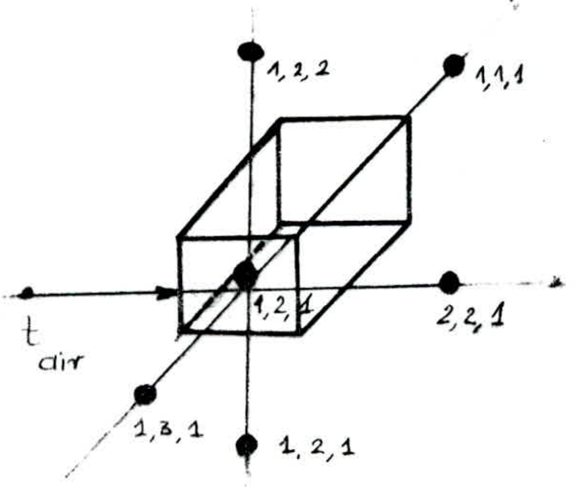
$$\boxed{a_P^{15}.T_{513} - a_O^{15}.T_{413} - a_S^{15}.T_{523} - a_B^{15}.T_{512} = b^{15}}$$

(IV.33)

Dans ce qui suit, seront présentées les équations de la plaque correspondant à y = 2.

<u>**Noeud (1,2,1):**</u>

Ce noeud est soumis à un flux convectif suivant x, à la température de la paroi du bas et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\frac{h}{2}.\Delta y.\Delta z + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\,\Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2\,\Delta z} +\right.$$

$$\left.+ (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\,\Delta t}\right].T_{121} = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta x}.T_{221}$$

$$+ \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\,\Delta y}.T_{111} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\,\Delta y}.T_{131} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2\,\Delta z}.T_{122} + \frac{h}{2}(\Delta y.\Delta z).T_{\infty}$$

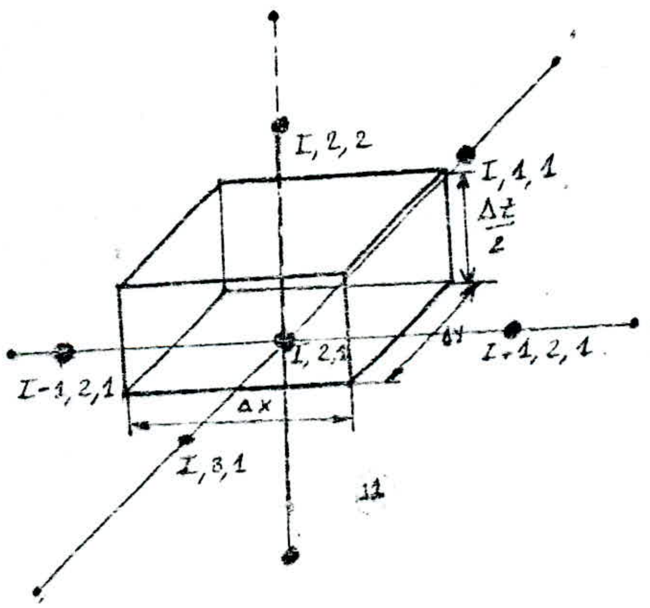
$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\,\Delta t}\right].T^{o}_{121} \qquad \text{(IV.34)}$$

$$\boxed{a_P^{16}.T_{121} - a_E^{16}.T_{221} - a_N^{16}.T_{111} - a_S^{16}.T_{131} - a_H^{16}.T_{122} = b^{16}}$$

(IV.35)

Noeuds (2,2,1),(3,2,1),(4,2,1):

Ces 3 noeuds dépendent de la température de la paroi du bas et des températures des noeuds voisins.



$$\left[\lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z} + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta t}\right].T_{I21}$$

$$\lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2.\Delta x}.T_{I+121} + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2.\Delta x}.T_{I-121} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\,\Delta y}.T_{I11} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\,\Delta y}.T_{I31}$$

$$+ \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z}.T_{I22} + \left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta t}\right].T^{o}_{I21} \qquad (IV.36)$$

$$a_P^{17}.T_{221} - a_E^{17}.T_{321} - a_O^{17}.T_{121} - a_N^{17}.T_{211} - a_S^{17}.T_{231} - a_H^{17}.T_{222} = b^{17}$$

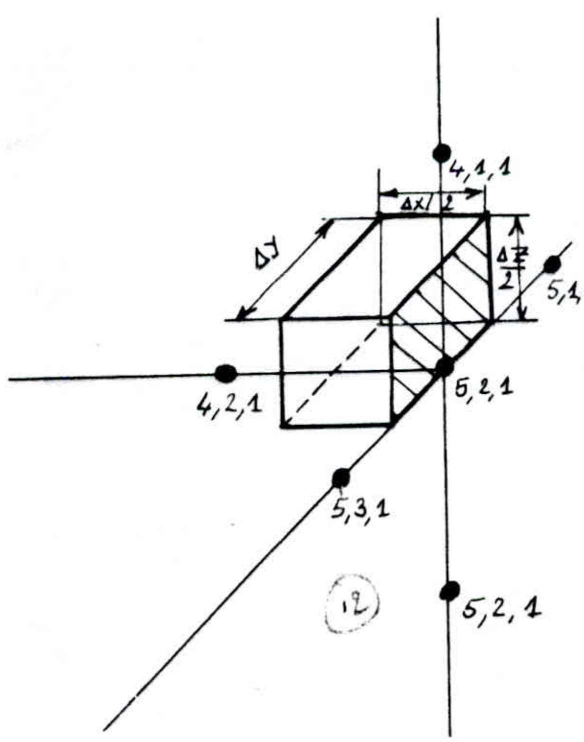
$$a_P^{18}.T_{321} - a_E^{18}.T_{421} - a_O^{18}.T_{221} - a_N^{18}.T_{311} - a_S^{18}.T_{331} - a_H^{18}.T_{322} = b^{18}$$

$$a_P^{19}.T_{421} - a_E^{19}.T_{521} - a_O^{19}.T_{321} - a_N^{19}.T_{411} - a_S^{19}.T_{431} - a_H^{19}.T_{422} = b^{19}$$

(IV.37)

Noeud (5,2,1):

Le noeud (5,2,1) porté par la face adiabatique, est soumis à la température de la paroi du bas et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\lambda\,\frac{\Delta y.\Delta z}{2\;\Delta x} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta z}{2\;\Delta y} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{2\;\Delta z} + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\,\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\;\Delta t}\right].T_{521}$$

$$= \lambda\,\frac{\Delta y.\Delta z}{2\;\Delta x}.T_{421} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta z}{4\;\Delta y}.T_{511} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta z}{4\;\Delta y}.T_{531} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{2\;\Delta z}.T_{522}$$

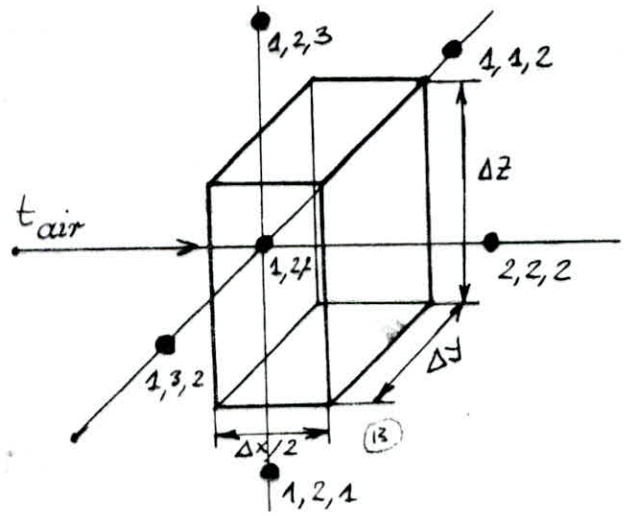
$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\,\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\;\Delta t}\right].T^{o}_{521} \qquad \text{(IV.38)}$$

$$\boxed{a_P^{20}.T_{521} - a_O^{20}.T_{421} - a_N^{20}.T_{511} - a_S^{20}.T_{531} - a_H^{20}.T_{522} = b^{20}}$$

(IV.39)

Noeud (1,2,2):

Ce noeud est soumis à un flux convectif suivant x et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[h.\Delta y.\Delta z + \lambda\,\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z} +\right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\,\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\;\Delta t}\right].T_{122} = \lambda\,\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x}.T_{222} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta z}{2\;\Delta y}.T_{112}$$

$$+ \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta z}{2\;\Delta y}.T_{132} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{2\;\Delta z}.T_{123} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{2\;\Delta z}.T_{121} + h.(\Delta y.\Delta z).T_{\infty}$$

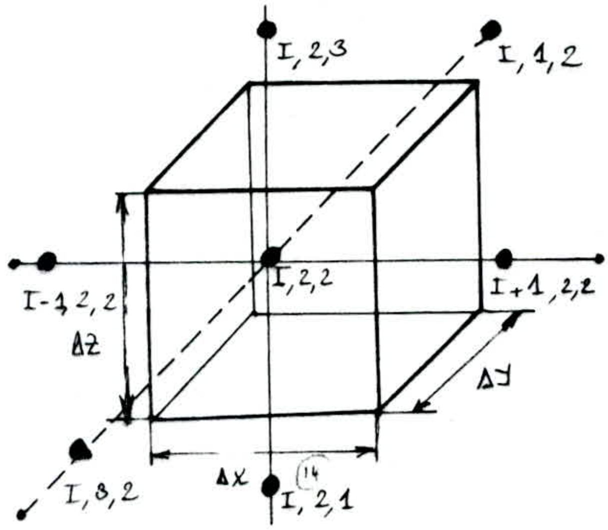
$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\,\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\;\Delta t}\right].T^{o}_{122} \qquad \text{(IV.40)}$$

$$a_P^{21} \cdot T_{122} - a_E^{21} \cdot T_{222} - a_N^{21} \cdot T_{112} - a_S^{21} \cdot T_{132} - a_H^{21} \cdot T_{123} - a_B^{21} \cdot T_{121} = b^{21}$$

(IV.41)

Noeuds (2,2,2), (3,2,2), (4,2,2):

La température de ces noeuds internes dépend seulement des températures des noeuds voisins.



$$\left[2.\lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x} + 2.\lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y} + 2.\lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z} + \right.$$

$$\left.(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{\Delta t}\right].T_{I22} = \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x}.T_{I+122} + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x}.T_{I-122}$$

$$+ \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y}.T_{I12} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y}.T_{I32} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z}.T_{I23} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z}.T_{I21}$$

$$+ \left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{\Delta t}\right].T^o_{I22}$$

(IV.42)

$$a_P^{22}\cdot T_{222} - a_E^{22}\cdot T_{322} - a_O^{22}\cdot T_{122} - a_N^{22}\cdot T_{212} - a_S^{22}\cdot T_{232} - a_H^{22}\cdot T_{223} - a_B^{22}\cdot T_{221} = b^{22}$$

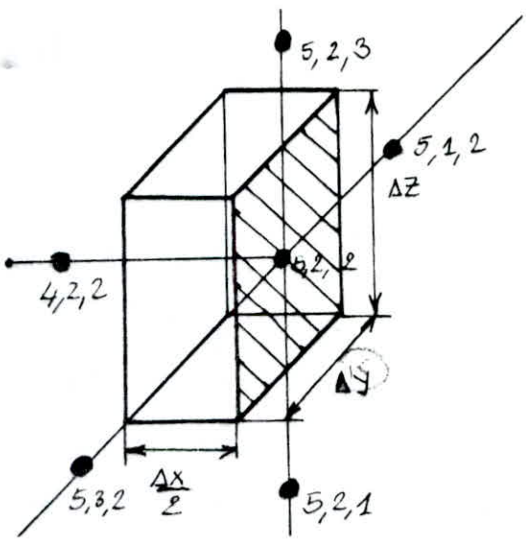
$$a_P^{23}\cdot T_{322} - a_E^{23}\cdot T_{422} - a_O^{23}\cdot T_{222} - a_N^{23}\cdot T_{312} - a_S^{23}\cdot T_{332} - a_H^{23}\cdot T_{323} - a_B^{23}\cdot T_{321} = b^{23}$$

$$a_P^{24}\cdot T_{422} - a_E^{24}\cdot T_{522} - a_O^{24}\cdot T_{322} - a_N^{24}\cdot T_{412} - a_S^{24}\cdot T_{432} - a_H^{24}\cdot T_{423} - a_B^{24}\cdot T_{421} = b^{24}$$

(IV.43)

Noeud (5,2,2):

Ce noeud est porté par une face adiabatique et est soumis aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z} + (\rho.C_P + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta t}\right].T_{522}$$

$$= \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x}.T_{422} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y}.T_{512} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y}.T_{532} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z}.T_{523}$$

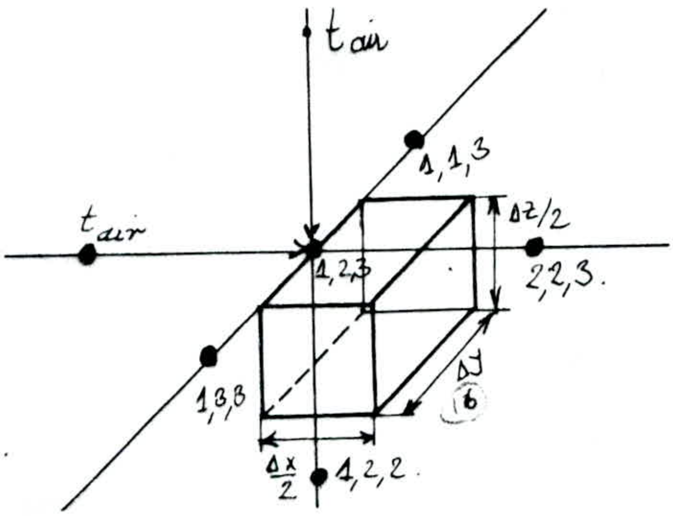
$$+ \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z}.T_{521} + \left[(\rho.C_P + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta t}\right].T^{o}_{522} \qquad \text{(IV.44)}$$

$$a_P^{25}\cdot T_{522} - a_O^{25}\cdot T_{422} - a_N^{25}\cdot T_{512} - a_S^{25}\cdot T_{532} - a_H^{25}\cdot T_{523} - a_B^{25}\cdot T_{521} = b^{25}$$

(IV.45)

Noeud (1,2,3):

Il est soumis aux flux convectifs suivant x et z et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\frac{h}{2}(\Delta x.\Delta y + \Delta y.\Delta z) + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\,\Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{2\,\Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\,\Delta t} \right].T_{123} = \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta x}.T_{223} +$$

$$\lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{4\,\Delta y}.T_{113} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{4\,\Delta y}.T_{133} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{2\,\Delta z}.T_{122}$$

$$+ \frac{h}{2}(\Delta x.\Delta y + \Delta y.\Delta z).T_{\infty} + \left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\,\Delta t}\right].T^{0}_{123}$$

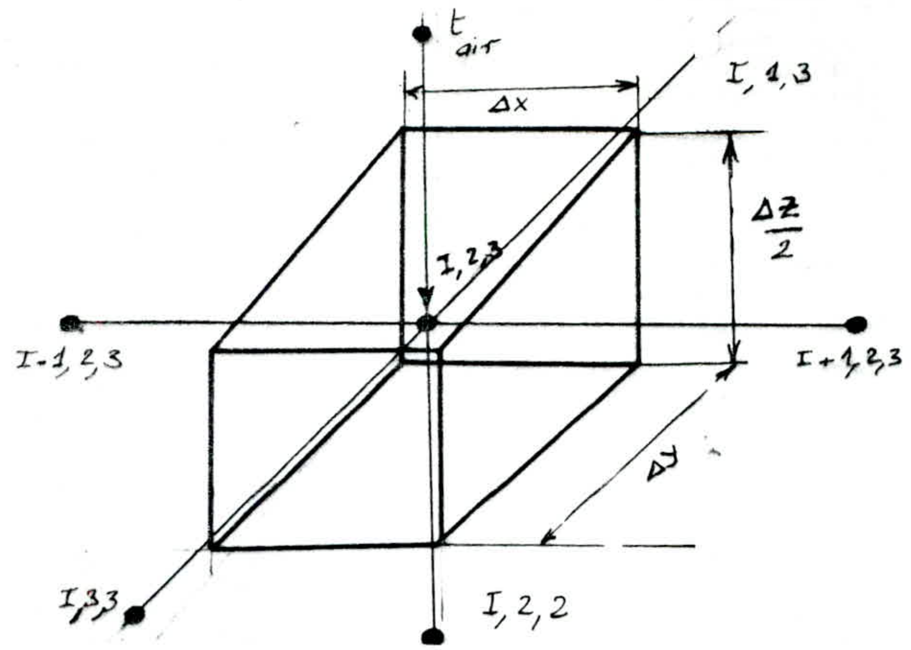
(IV.46)

$$\boxed{a_P^{26}.T_{123} - a_E^{26}.T_{223} - a_N^{26}.T_{113} - a_S^{26}.T_{133} - a_B^{26}.T_{122} = b^{26}}$$

(IV.47)

Noeuds (2,2,3), (3,2,3), (4,2,3):

Ces 3 noeuds sont soumis à un flux convectif suivant z et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[h.\Delta x.\Delta y + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z} + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta t} \right].T_{I23} = \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta x}.T_{I+123}$$

$$\lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta x}.T_{I-123} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\,\Delta y}.T_{I13} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\,\Delta y}.T_{I33} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z}.T_{I22} +$$

$$+ h.(\Delta x.\Delta y).T_{\infty} + \left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta t}\right].T^{0}_{I23} \qquad \text{(IV.48)}$$

$$a_P^{27}.T_{223} - a_E^{27}.T_{323} - a_O^{27}.T_{123} - a_N^{27}.T_{213} - a_S^{27}.T_{233} - a_B^{27}.T_{222} = b^{27}$$

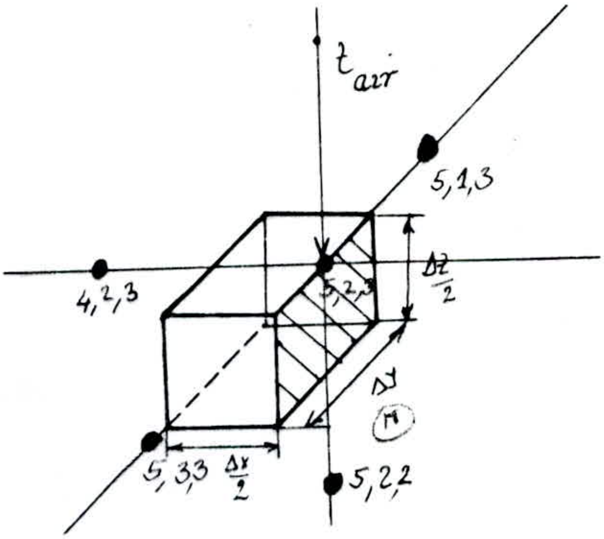
$$a_P^{28}.T_{323} - a_E^{28}.T_{423} - a_O^{28}.T_{223} - a_N^{28}.T_{313} - a_S^{28}.T_{333} - a_B^{28}.T_{322} = b^{28}$$

$$a_P^{29}.T_{423} - a_E^{29}.T_{523} - a_O^{29}.T_{323} - a_N^{29}.T_{413} - a_S^{29}.T_{433} - a_B^{29}.T_{422} = b^{29}$$

(IV.49)

Noeud (5,2,3):

Le noeud (5,2,3) est porté par une paroi adiabatique, il est soumis à un flux convectif suivant z et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\frac{h}{2}.\Delta x.\Delta y + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}\right].T_{523} = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x}.T_{423} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}.T_{513}$$

$$+ \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}.T_{533} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z}.T_{522} + \frac{h}{2}.(\Delta x.\Delta y).T_{\infty}$$

$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}\right].T^{o}_{523} \qquad \text{(IV.50)}$$

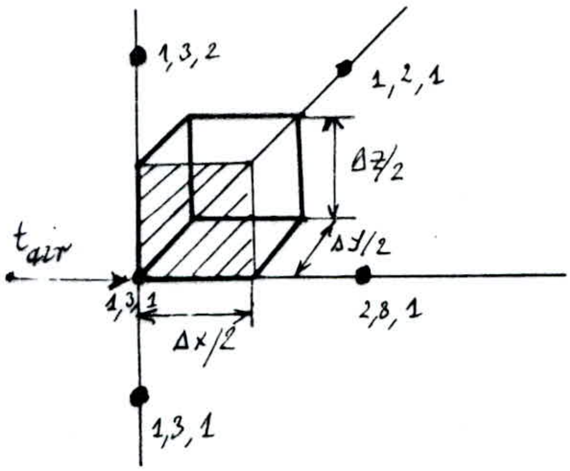
$$\boxed{a_P^{30}.T_{523} - a_O^{30}.T_{423} - a_N^{30}.T_{513} - a_S^{30}.T_{533} - a_B^{30}.T_{522} = b^{30}}$$

(IV.51)

Dans ce qui suit, seront présentées les équations de la plaque correspondant à y = 3.

Noeud (1,3,1):

Ce noeud est porté par une paroi adiabatique, soumis à la température de la paroi du bas, à un flux convectif suivant x et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\frac{h}{4}.\Delta y.\Delta z + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z} + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}\right].T_{131} = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{231} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}.T_{121}$$

$$+ \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{132} + \frac{h}{4}.(\Delta y.\Delta z).T_{\infty} + \left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}\right].T^{o}_{131}$$

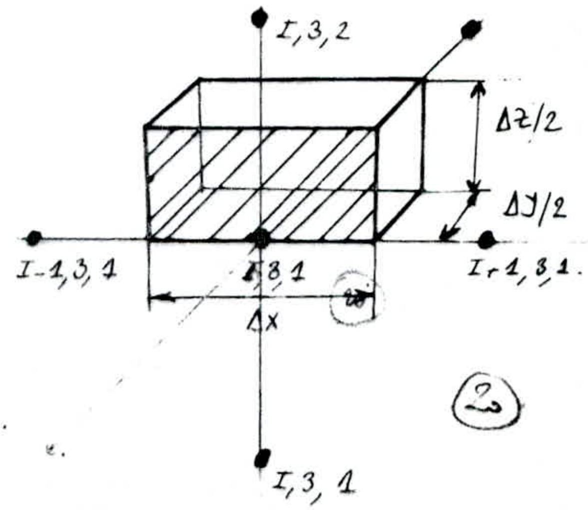
(IV.52)

$$\boxed{a_P^{31}.T_{131} - a_E^{31}.T_{231} - a_N^{31}.T_{121} - a_H^{31}.T_{132} = b^{31}}$$

(IV.53)

Noeuds (2,3,1), (3,3,1), (4,3,1):

Ces noeuds sont situés sur une paroi adiabatique, ils sont soumis à la température de la paroi du bas et aux températures des noeuds voisins



$$\left[\lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z} + (\rho.C_P + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}\right].T_{I31}$$

$$= \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{I+131} + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{I-131} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y}.T_{I21} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z}.T_{I32}$$

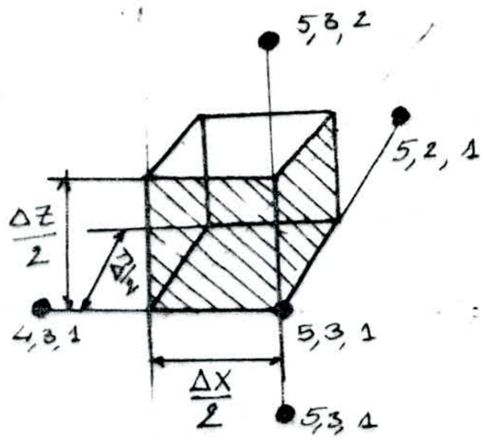
$$+\left[(\rho.C_P + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}\right].T^{O}_{I31} \qquad \text{(IV.54)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
a_P^{32}.T_{231} - a_E^{32}.T_{331} - a_O^{32}.T_{131} - a_N^{32}.T_{221} - a_H^{32}.T_{232} = b^{32} \\
a_P^{33}.T_{331} - a_E^{33}.T_{431} - a_O^{33}.T_{231} - a_N^{33}.T_{321} - a_H^{33}.T_{332} = b^{33} \\
a_P^{34}.T_{431} - a_E^{34}.T_{531} - a_O^{34}.T_{231} - a_N^{34}.T_{421} - a_H^{34}.T_{432} = b^{34}
\end{array}}$$

(IV.55)

Noeud (5,3,1):

Ce noeud qui se situe à l'intersection des 2 parois adiabatiques, sont soumis à la température de la paroi du bas et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z} + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}\right].T_{531}$$

$$= \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{431} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}.T_{521} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{532} +$$

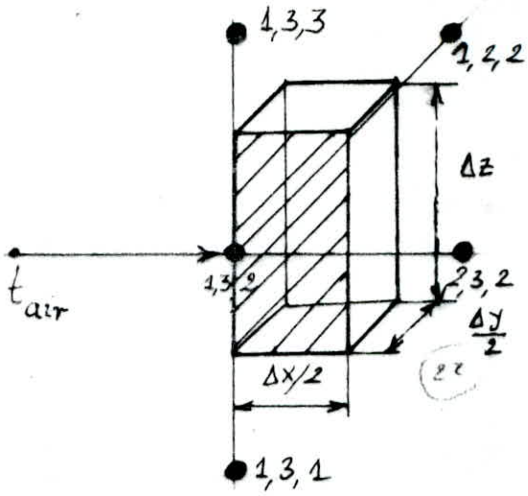
$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}\right].T^{o}_{531} \qquad \text{(IV.56)}$$

$$\boxed{a_P^{35}.T_{531} - a_O^{35}.T_{431} - a_N^{35}.T_{521} - a_H^{35}.T_{532} = b^{35}}$$

(IV.57)

Noeud (1,3,2):

Ce noeud situé sur une paroi adiabatique, est soumis à un flux convectif suivant x et aux températures des noeuds voisins.



$$\Big[\frac{h}{2}.\Delta y.\Delta z + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z} +$$

$$+ (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t} \Big].T_{132} = \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x}.T_{232} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y}.T_{122}$$

$$+ \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{133} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{131} + \frac{h}{2}.(\Delta y.\Delta z).T_{\infty}$$

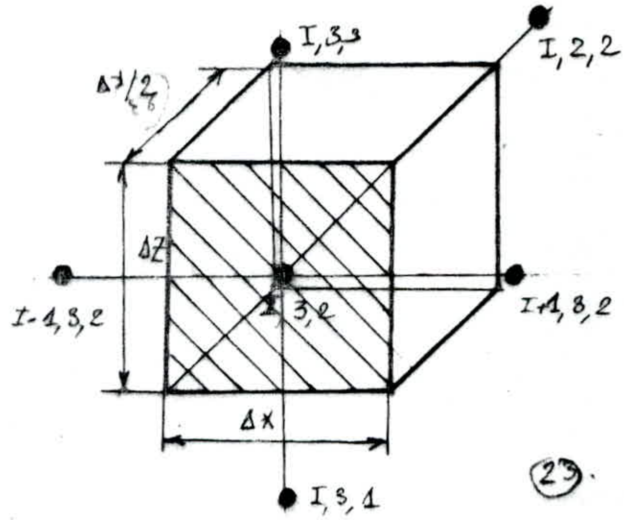
$$+ \Big[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t} \Big].T^{o}_{132} \qquad \text{(IV.58)}$$

$$\boxed{a_P^{36}.T_{132} - a_E^{36}.T_{232} - a_N^{36}.T_{122} - a_H^{36}.T_{133} - a_B^{36}.T_{131} = b^{36}}$$

(IV.59)

Noeuds (2,3,2), (3,3,2), (4,3,2):

Ces noeuds sont soumis à une paroi adiabatique et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\lambda\,\frac{\Delta y.\Delta z}{\Delta x} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z} + (\rho.C_P + \rho.\alpha.\Delta H).\,\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\;\Delta t}\right].T_{I32}$$

$$= \lambda\,\frac{\Delta y.\Delta z}{2\;\Delta x}.T_{I+132} + \lambda\,\frac{\Delta y.\Delta z}{2\;\Delta x}.T_{I-132} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta z}{\Delta y}.T_{I22} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{2\;\Delta z}.T_{I33}$$

$$+ \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{2\;\Delta z}.T_{I31} + \left[(\rho.C_P + \rho.\alpha.\Delta H).\,\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{2\;\Delta t}\right].T^{o}_{I32}$$

(IV.60)

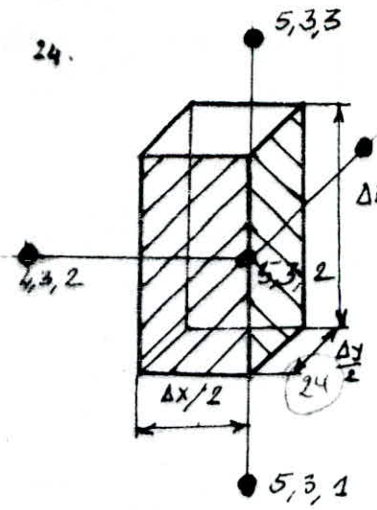
$$\boxed{\begin{aligned}
&a_P^{37}.T_{232} - a_E^{37}.T_{332} - a_O^{37}.T_{132} - a_N^{37}.T_{222} - a_H^{37}.T_{233} - a_B^{37}.T_{231} = b^{37}\\
&a_P^{38}.T_{332} - a_E^{38}.T_{432} - a_O^{38}.T_{232} - a_N^{38}.T_{322} - a_H^{38}.T_{333} - a_B^{38}.T_{331} = b^{38}\\
&a_P^{39}.T_{432} - a_E^{39}.T_{532} - a_O^{39}.T_{332} - a_N^{39}.T_{422} - a_S^{39}.T_{433} - a_B^{39}.T_{431} = b^{39}
\end{aligned}}$$

(IV.61)

Noeud (5,3,2):

Le noeud (5,3,2) est situé à l'intersection de 2 parois adiabatiques et est soumis aux températures des noeuds voisins.

24.



$$\left[\lambda\,\frac{\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta x} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta z}{2\,\Delta y} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{2\,\Delta z} + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\,\Delta t}\right].T_{532}$$

$$= \lambda\,\frac{\Delta y.\Delta z}{2\,\Delta x}.T_{432} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta z}{2\,\Delta y}.T_{522} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{4\,\Delta z}.T_{533} + \lambda\,\frac{\Delta x.\Delta y}{4\,\Delta z}.T_{531}$$

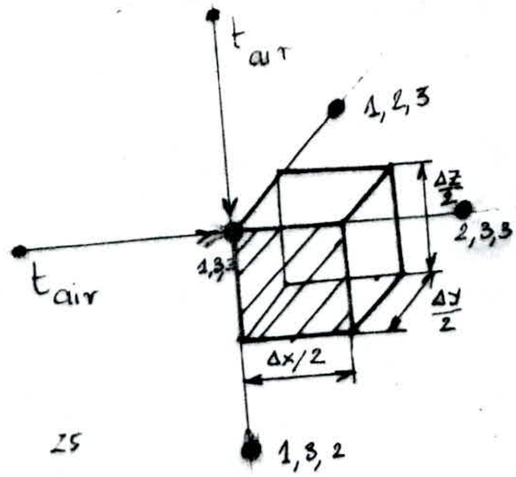
$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\,\Delta t}\right].T^{o}_{532} \qquad \text{(IV.62)}$$

$$\boxed{a_P^{40}.T_{532} - a_O^{40}.T_{432} - a_N^{40}.T_{522} - a_H^{40}.T_{533} - a_B^{40}.T_{531} = b^{40}}$$

(IV.63)

Noeud (1,3,3):

Ce noeud est soumis aux flux convectifs suivant x et suivant z, à une paroi adiabatique et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\frac{h}{4} (\Delta x.\Delta y + \Delta y.\Delta z) + \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H). \frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t} \right].T_{133} = \lambda \frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{233} +$$

$$\lambda \frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}.T_{123} + \lambda \frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta z}.T_{132} + \frac{h}{4}(\Delta x.\Delta y + \Delta y.\Delta z).T_{\infty}$$

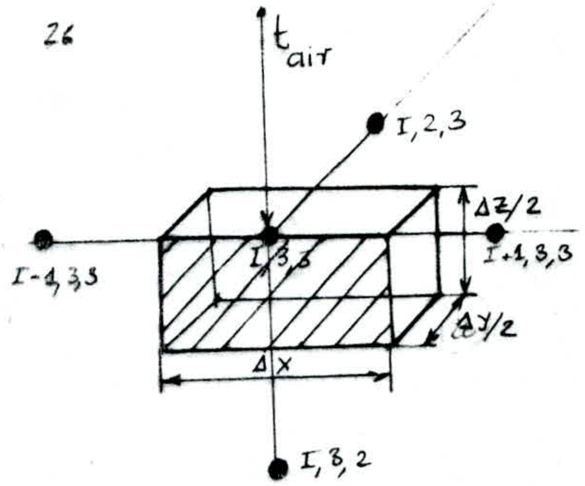
$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H). \frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t} \right].T^{o}_{133} \qquad \text{(IV.64)}$$

$$\boxed{a_P^{41}.T_{133} - a_E^{41}.T_{233} - a_N^{41}.T_{123} - a_B^{41}.T_{132} = b^{41}}$$

(IV.65)

Noeuds (2,3,3), (3,3,3), (4,3,3):

Portés par une paroi adiabatique, ces noeuds sont soumis à un flux convectif suivant z et aux températures des noeuds voisins.



$$\left[\frac{h}{2}.\Delta x.\Delta y + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{2\ \Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}\right].T_{I33} = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{I+133} +$$

$$\lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{I-133} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{2\ \Delta y}.T_{I23} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{2\ \Delta z}.T_{I32} + \frac{h}{2}.(\Delta x.\Delta y).T_{\infty}$$

$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta t}\right].T^{o}_{I33} \qquad \text{(IV.66)}$$

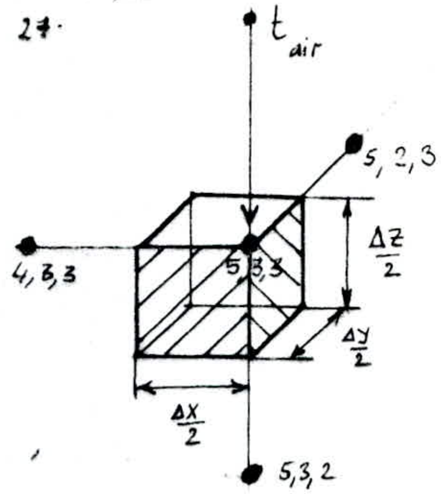
$$\boxed{\begin{array}{l} a_P^{42}.T_{233} - a_E^{42}.T_{333} - a_O^{42}.T_{133} - a_N^{42}.T_{223} - a_B^{42}.T_{232} = b^{42} \\ a_P^{43}.T_{333} - a_E^{43}.T_{433} - a_O^{43}.T_{233} - a_N^{43}.T_{323} - a_B^{43}.T_{332} = b^{43} \\ a_P^{44}.T_{433} - a_E^{44}.T_{533} - a_O^{44}.T_{333} - a_N^{44}.T_{423} - a_B^{44}.T_{432} = b^{44} \end{array}}$$

(IV.67)

Noeud (5,3,3):

Situé à l'intersection de 2 parois adiabatiques, ce noeud est soumis à un flux convectif suivant z et aux températures des noeuds voisins.

27.



$$\left[\frac{h}{4}.\Delta x.\Delta y + \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}\right].T_{533} = \lambda\frac{\Delta y.\Delta z}{4\ \Delta x}.T_{433} + \lambda\frac{\Delta x.\Delta z}{4\ \Delta y}.T_{523}$$

$$+ \lambda\frac{\Delta x.\Delta y}{4\ \Delta z}.T_{532} + \frac{h}{4}.(\Delta x.\Delta y).T_{\infty}$$

$$+\left[(\rho.C_p + \rho.\alpha.\Delta H).\frac{\Delta x.\Delta y.\Delta z}{8\ \Delta t}\right].T^{o}_{533} \qquad \text{(IV.68)}$$

$$\boxed{a_P^{45}.T_{533} - a_E^{45}.T_{433} - a_N^{45}.T_{523} - a_B^{45}.T_{532} = b^{45}}$$

(IV.69)

La mise en equations sous forme matricielle, où les températures à l'instant $(t+\Delta t)$ sont les inconnues à determiner, necessite une conversion des indices I, J, K affectant les températures en un seul indice noté L variant de 1 à 45. Cette conversion est donnée par la formule suivante:

$$L = I + 15.(J + 1) + 5.(K - 1)$$

(IV.70)

Le tableau suivant représente la conversion sus-citée:

T_{IJK}	T_L	T_{IJK}	T_L	T_{IJK}	T_L
T_{111}	T_1	T_{121}	T_{16}	T_{131}	T_{31}
T_{211}	T_2	T_{221}	T_{17}	T_{231}	T_{32}
T_{311}	T_3	T_{321}	T_{18}	T_{331}	T_{33}
T_{411}	T_4	T_{421}	T_{19}	T_{431}	T_{34}
T_{511}	T_5	T_{521}	T_{20}	T_{531}	T_{35}
T_{112}	T_6	T_{122}	T_{21}	T_{132}	T_{36}
T_{212}	T_7	T_{222}	T_{22}	T_{232}	T_{37}
T_{312}	T_8	T_{322}	T_{23}	T_{332}	T_{38}
T_{412}	T_9	T_{422}	T_{24}	T_{432}	T_{39}
T_{512}	T_{10}	T_{522}	T_{25}	T_{532}	T_{40}
T_{113}	T_{11}	T_{123}	T_{26}	T_{133}	T_{41}
T_{213}	T_{12}	T_{223}	T_{27}	T_{233}	T_{42}
T_{313}	T_{13}	T_{323}	T_{28}	T_{333}	T_{43}
T_{413}	T_{14}	T_{423}	T_{29}	T_{433}	T_{44}
T_{513}	T_{15}	T_{523}	T_{30}	T_{533}	T_{45}

Ce système peut en effet s'écrire sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \quad A \quad \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.71)}$$

où **A** est une matrice de 45 x 45 éléments, formée par les coefficients du système et où **T** et **B** sont des matrices colonnes, representant réspectivement les températures à calculer et les entités contenant les températures precédentes ainsi que les conditions initiales et limites.

La matrice A obtenue est une matrice symétrique à sept (07) diagonale... Les autres éléments sont tous nuls.

IV-10: Méthode de résolution

Le principe de la méthode de Gauss utilisée pour la résolution de notre système d'équations consiste à réduire ce système de 45 équations à 45 inconnues à un système triangulaire équivalent pouvant être facilement résolu par substitution.

De façon genérale et pour une opération donnée, l'algorithme s'écrit:

$$a'^{k}_{ij} = a^{k-1}_{ij} - \frac{a^{k-1}_{ik}}{a^{k-1}_{kk}} \cdot a^{k-1}_{kj} \qquad \text{(IV.72)}$$

où a': élément de la matrice réduite

a : élément de la matrice de départ

i : numéro de la ligne de la matrice,

j : numéro de la colonne de la matrice

k : numéro identifiant la ligne du pivot

avec: $\begin{cases} k+1 \leq j \leq n+1 \\ k+1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$ où n = N^{bre} de lignes de la matrice.

Le calcul final des inconnues s'exprime par:

$$T_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}} \qquad \text{(IV.73)}$$

On obtient ainsi:

$$T_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} . T_i \right] \qquad \text{(IV.74)}$$

$i = n-1,\ n-2, \ldots.\ 1$

Le second membre b_1, b_2,...b_n sont appelés respéctivement:

$a_{1,n+1}$, $a_{2,n+1}$, ...$a_{n,n+1}$

En tenant compte de la propriété de symétrie de la matrice A, on peut réduire le nombre d'opérations élémentaires et par conséquent diminuer le temps de calcul.

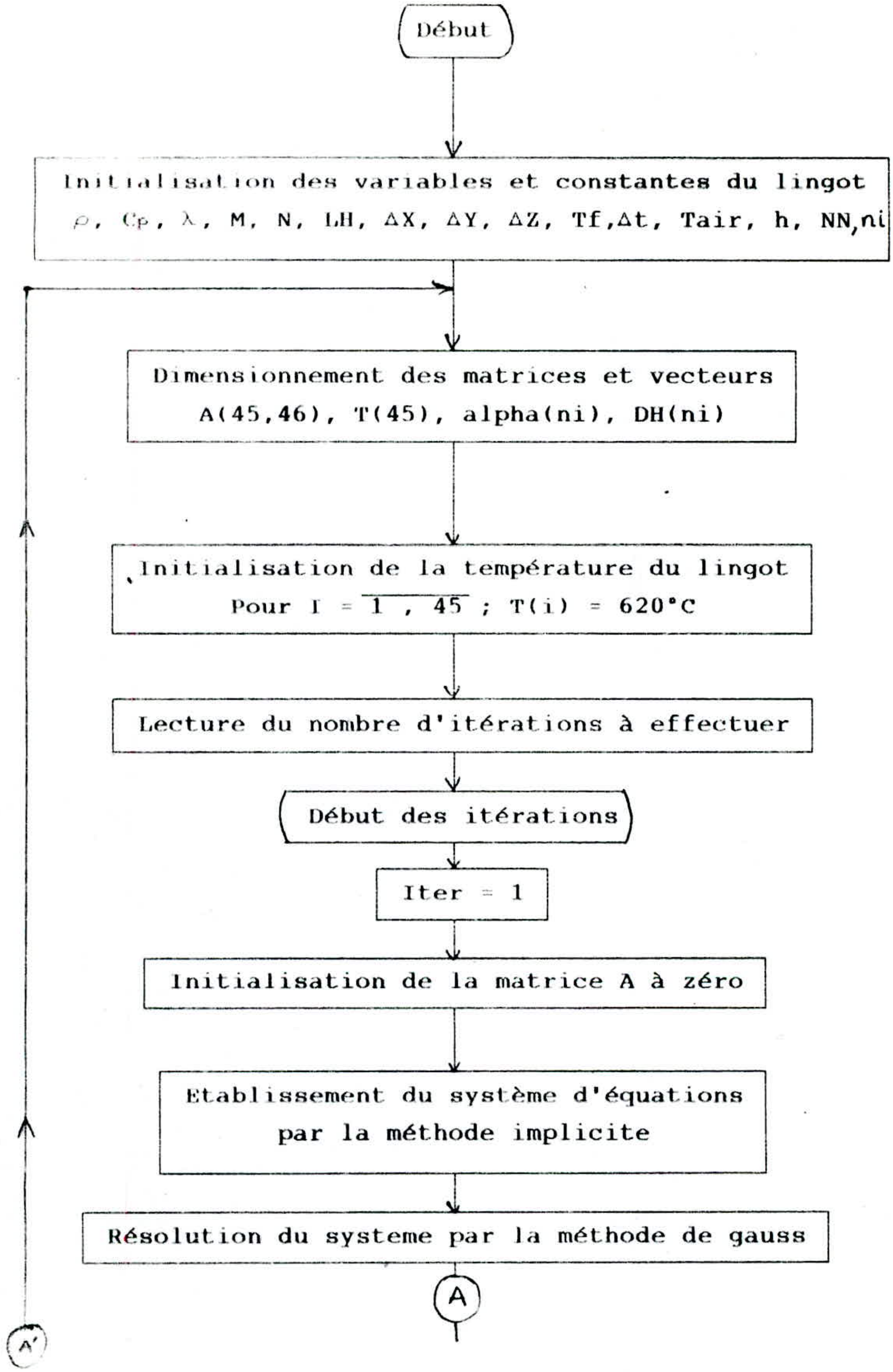
IV-11: Organigramme général et programme élaboré

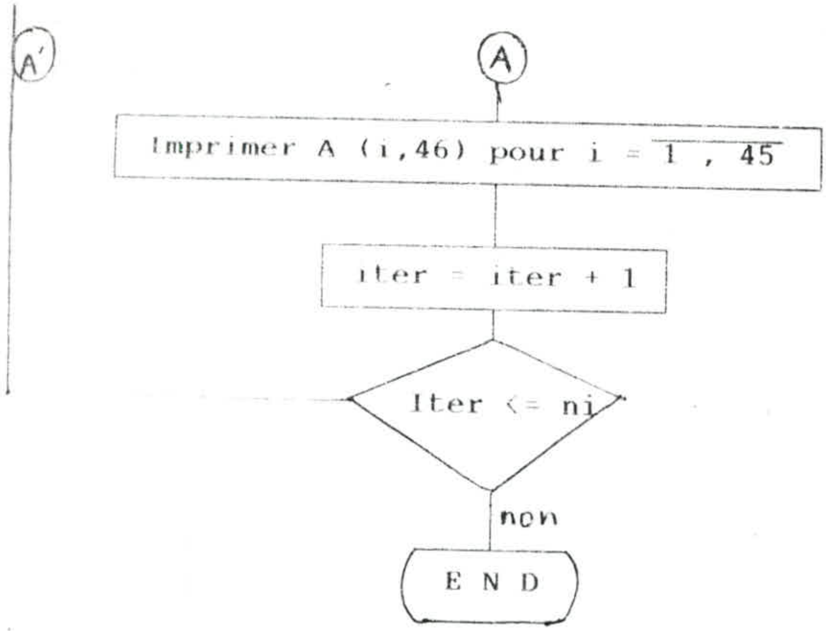
En réalité l'organigramme qui a conduit à l'élaboration du programme informatique de simulation de la distribution de la température d'un lingot parallèlipipédique d'AS-7 au cours du refroidissement est assez complexe. A cet effet, nous avons jugé judicieux de le présenter de maniére sommaire tout en faisant ressortir les étapes essentielles de l'algorithme.

Le langage que nous avons utilisé pour l'ecriture du programme en question est le turbo-basic, qui est un langage trés évolué et hautement stucturé. Il inclut un compilateur qui permet une précompilation du programme avant toute éxecution. Ceci lui confère une assez grande rapidité d'exécution.

Ce programme tient sur **11** K.octets et fait appel à plusieurs sous-programmes.

La structure du programme est représenté par l'organigramme genéral suivant:


Début
Initialisation des variables et constantes du lingot
ρ, Cp, λ, M, N, LH, ΔX, ΔY, ΔZ, Tf, Δt, Tair, h, NN, ni
Dimensionnement des matrices et vecteurs
A(45,46), T(45), alpha(ni), DH(ni)
Initialisation de la température du lingot
Pour I = 1 , 45 ; T(i) = 620°C
Lecture du nombre d'itérations à effectuer
Début des itérations
Iter = 1
Initialisation de la matrice A à zéro
Etablissement du système d'équations
par la méthode implicite
Résolution du systeme par la méthode de gauss
A
A'


A'
A
Imprimer A (i,46) pour i = 1 , 45
iter = iter + 1
Iter <= ni
non
E N D

IV-12: Présentation des résultats numériques

Les résultats numériques obtenus aprés exécution du programme informatique sont représentés par un tableau de valeurs donnant les températures des 45 noeuds chaque 30 secondes pendant les 10 premières minutes, ensuite chaque minute pendant les 10 minutes suivantes puis chaque 5 minutes pour le reste des itérations.

Ces résultats sont affichés en trois (03) lignes de quinze (15) noeuds chacune comme indiqué ci-dessous:

T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 T_9 T_{10} T_{11} T_{12} T_{13} T_{14} T_{15}

T_{16} T_{17} T_{18} T_{19} T_{20} T_{21} T_{22} T_{23} T_{24} T_{25} T_{26} T_{27} T_{28} T_{29} T_{30}

T_{31} T_{32} T_{33} T_{34} T_{35} T_{36} T_{37} T_{38} T_{39} T_{40} T_{41} T_{42} T_{43} T_{44} T_{45}

Nous procéderons ensuite à une représentation graphique de la température de certains noeuds représentatifs jusqu'à l'approche du régime stationnaire.

CINQUIEME CHAPITRE

INTERPRETATION DES RESULTATS DE L'ETUDE

Dans ce qui suit, nous interprétons d'abord les résultats expérimentaux en analysant les structures métallographiques obtenues ainsi que la distribution de la température au niveau de chaque zône, puis les résultats numériques correspondants pour terminer par une étude comparative.

V-1: Interprétation des résultats expérimentaux

L'etude métallographique nous a permis de voir les différentes étapes de la solidification.

Nous observons au voisinage des parois une structure microcristalline, composée de nombreux grains d'Al fins et bien délimités. L'épaisseur de cette zône étant faible, elle est difficilement décelable. Ceci est du d'une part à une grande vitesse de solidification et d'autre part aux conditions de retard important à la germination (voir photos n° 1,6).

Cette étape est limitée par le dégagement de chaleur latente au niveau du front de solidification qui provoque une élévation rapide de la température d'interface. La surfusion diminue, la vitesse de solidification est ralentie, seulement quelques cristaux d'Al se développent dans la direction où le gradient de température est maximal, ils forment ainsi une zône basaltique (voir photos n° 2,7)

Aprés solidification de cette zône, la surfusion est suffisamment faible et la vitesse de solidification suffisamment ralentie pour voir les cristaux de la zône basaltique se transformer en cristaux équiaxes d'orientation quelconque (voir photos n° 5,10).

Dans les courbes donnant la température en fonction du temps, nous remarquons que la vitesse de refroidissement diminue avec le temps suivant 3 tranches. En effet, nous constatons que durant les premières minutes la vitesse de refroidissement est importante puis diminue sensiblement jusqu'à une certaine température pour ensuite devenir insignifiante à l'approche du régime permanent.

D'autre part, la courbe donnant la température du point tel (1,2,3) est plus élevée que celle du point de coordonnées (3,2,1). Ceci est normal car ce dernier se trouve sur la paroi.

Les échanges thermiques entre le métal liquide et le métal solidifié determinent la vitesse du front de solidification, paramètre dont dépend la structure finale de l'alliage.

L'observation sur nos échantillons d'une zône trés mince puis d'une zône basaltique et enfin d'une zône importante de cristaux equiaxes confirme l'existence de différents modes de refroidissement. La largeur respective de chaque zône est directement liée, d'une part aux vitesses de solidification donc aux gradients de température et d'autre part à la composition chimique de l'alliage.

V-2: Interprétation des résultats numériques

La simulation de la distribution de la température dans une pièce parallélépipédique lors du refroidissement est adéquate à cause de la concordance entre les résultats numériques et ceux donnés par l'expérience.

Les courbes de la simulation mathématique présentent un certain décalage avec celles de l'expérience, ceci est du:

- à la concavité des courbes $T = f(t)$.

- à la méthode d'approche en l'occurence les différences finies.

- aux approximations faites sur les conditions aux limites.

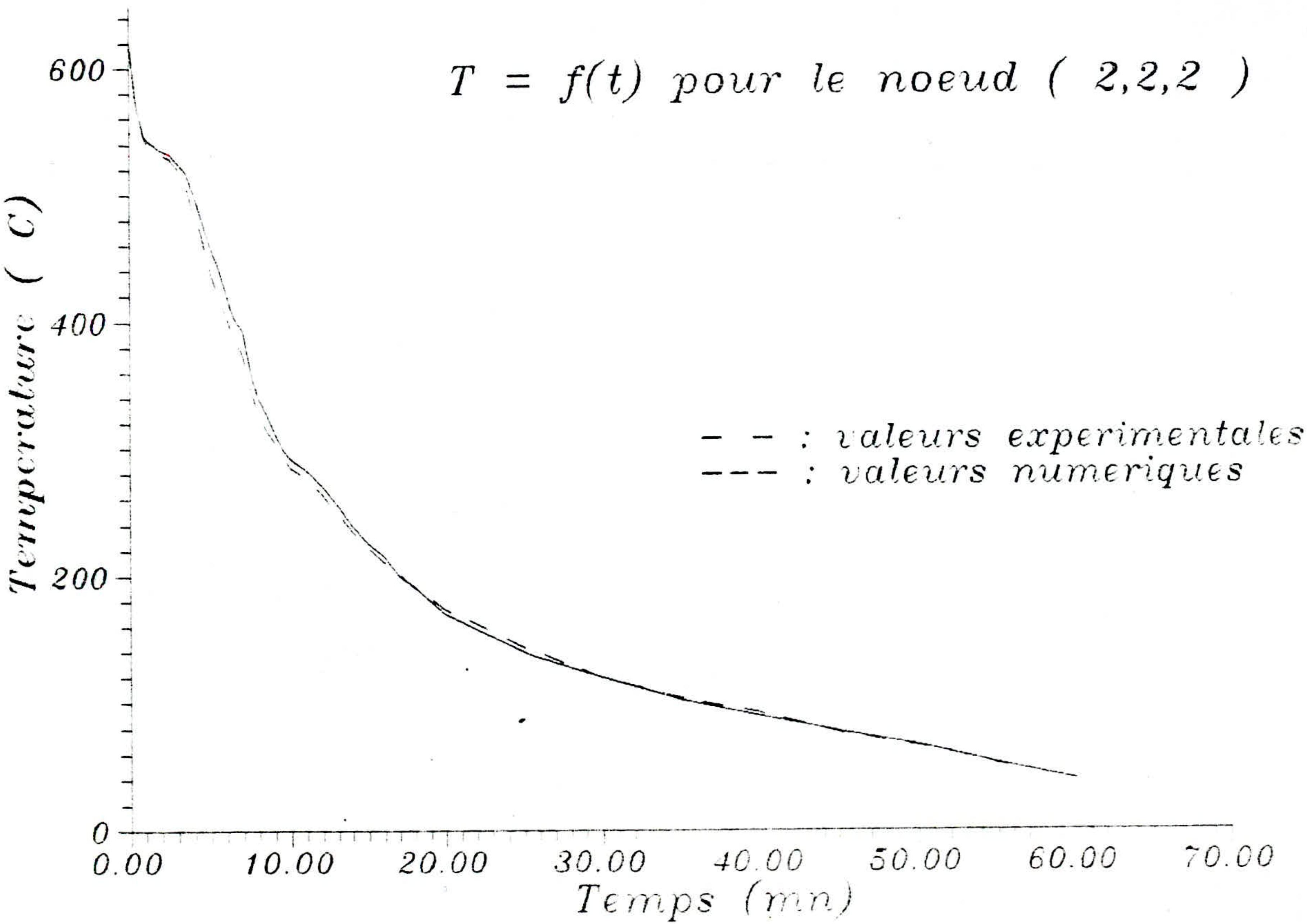
- aux erreurs expérimentales de mesure (thermocouples, lecture de température ...).

V-3: Etude comparative

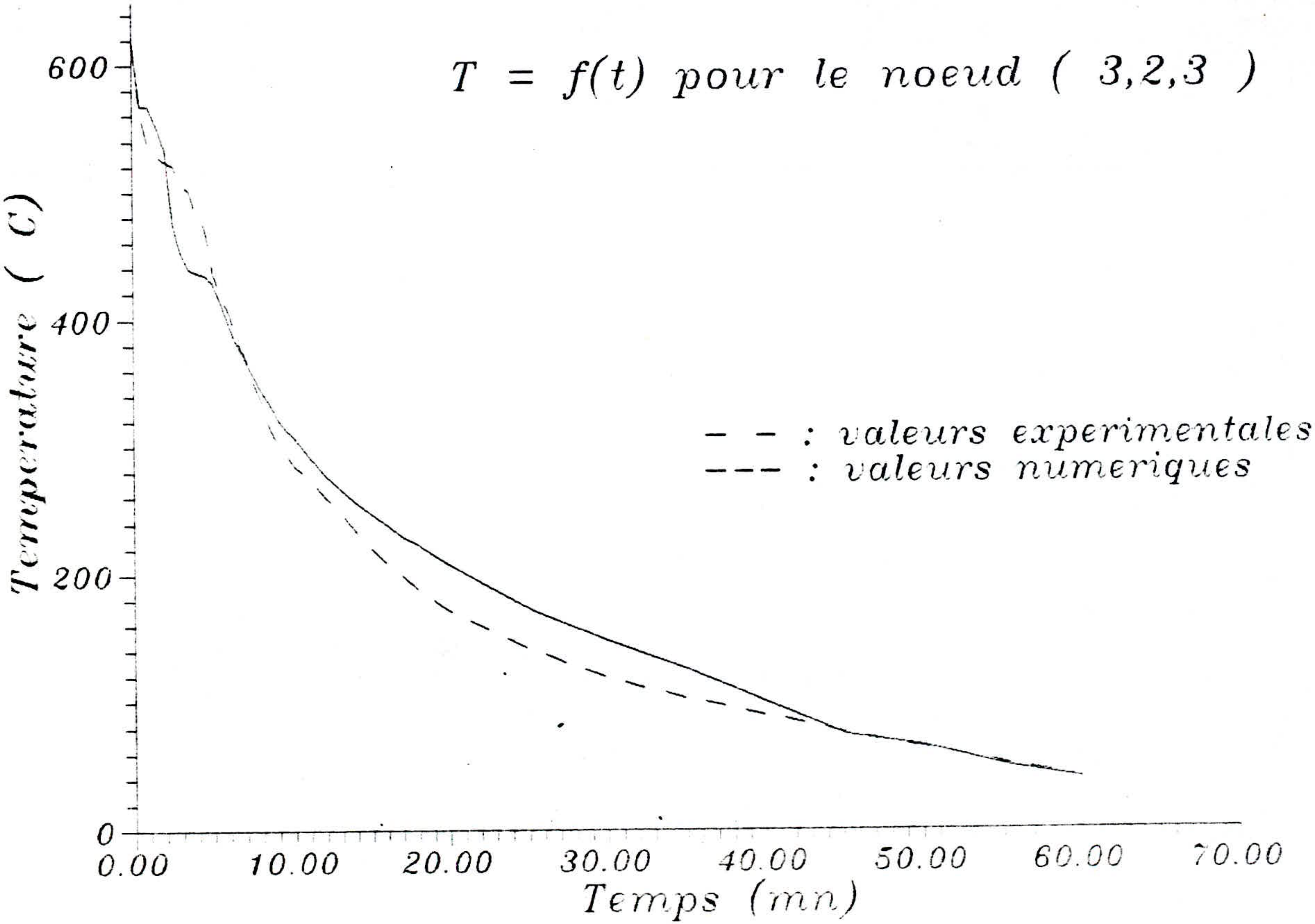
A partir des résultats mathématiques et expérimentaux et leurs représentations simultanées deux à deux sur un même graphique, on a pu conclure ce qui suit:

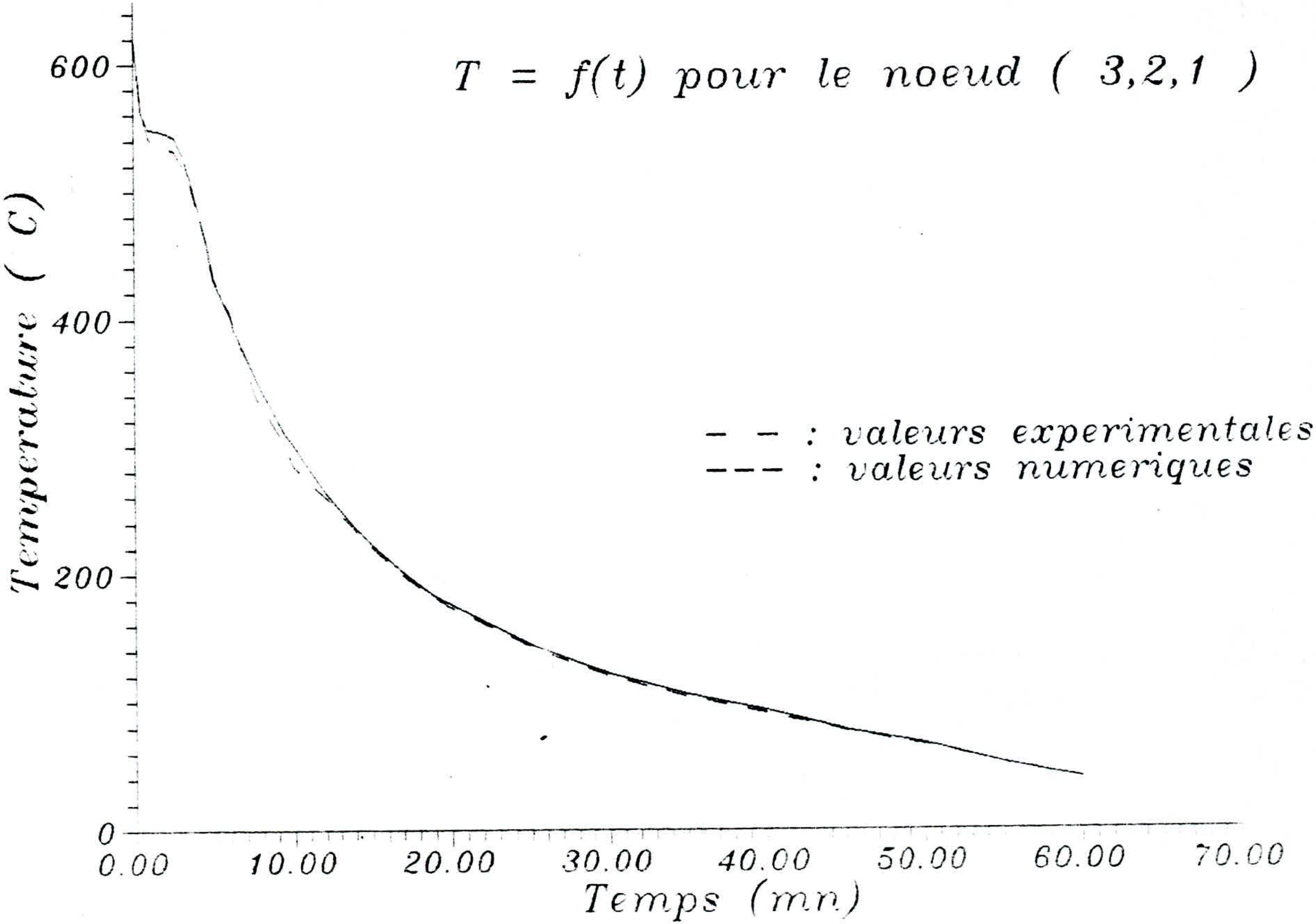
La première constatation montre que les résultats mumériques et expérimentaux obtenus sont assez concordants pour confirmer la validité du programme et l'efficacité des essais expérimentaux.

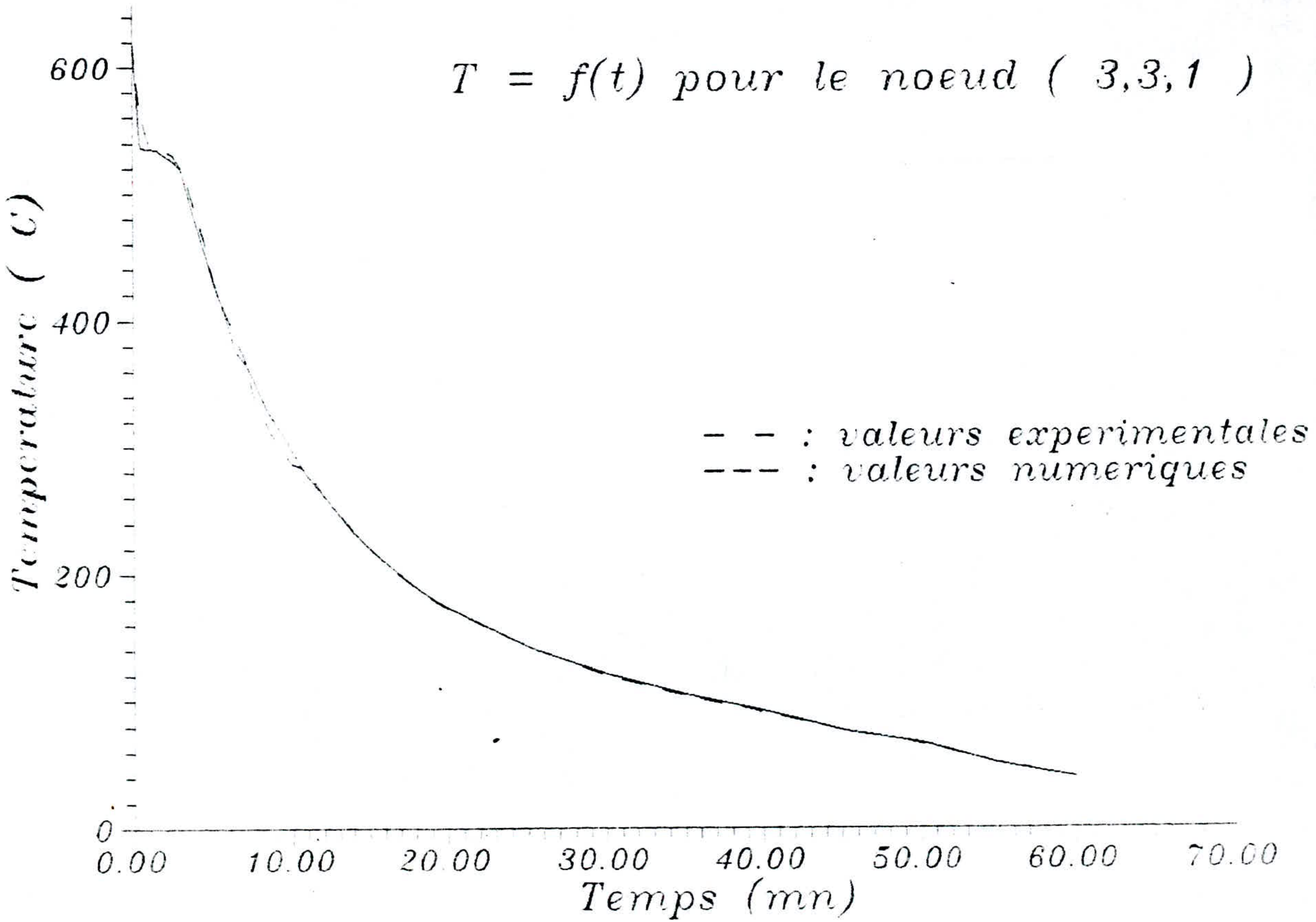
Il est à signaler que les quelques différences et dispersions des résultats sont dues aux erreurs expérimentales de mesure (thermocouples, lecture de température ...) ,à la méthode d'approche en l'occurence les différences finies et aussi à la compléxité du r dèle mathématique.



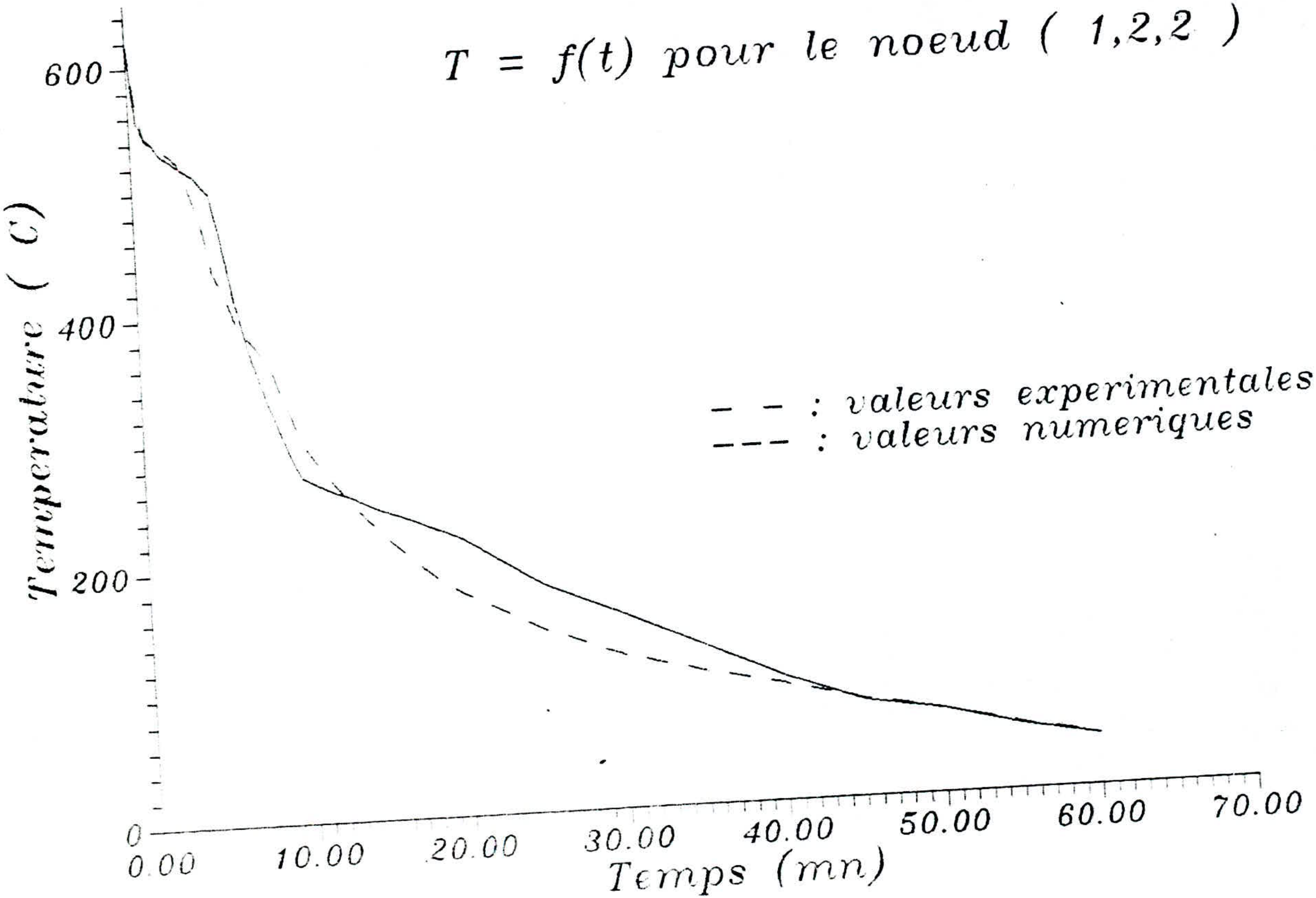
T = f(t) pour le noeud (2,2,2)
- - : valeurs experimentales
--- : valeurs numeriques
Temperature (C)
600
400
200
0
0.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
60.00
70.00
Temps (mn)

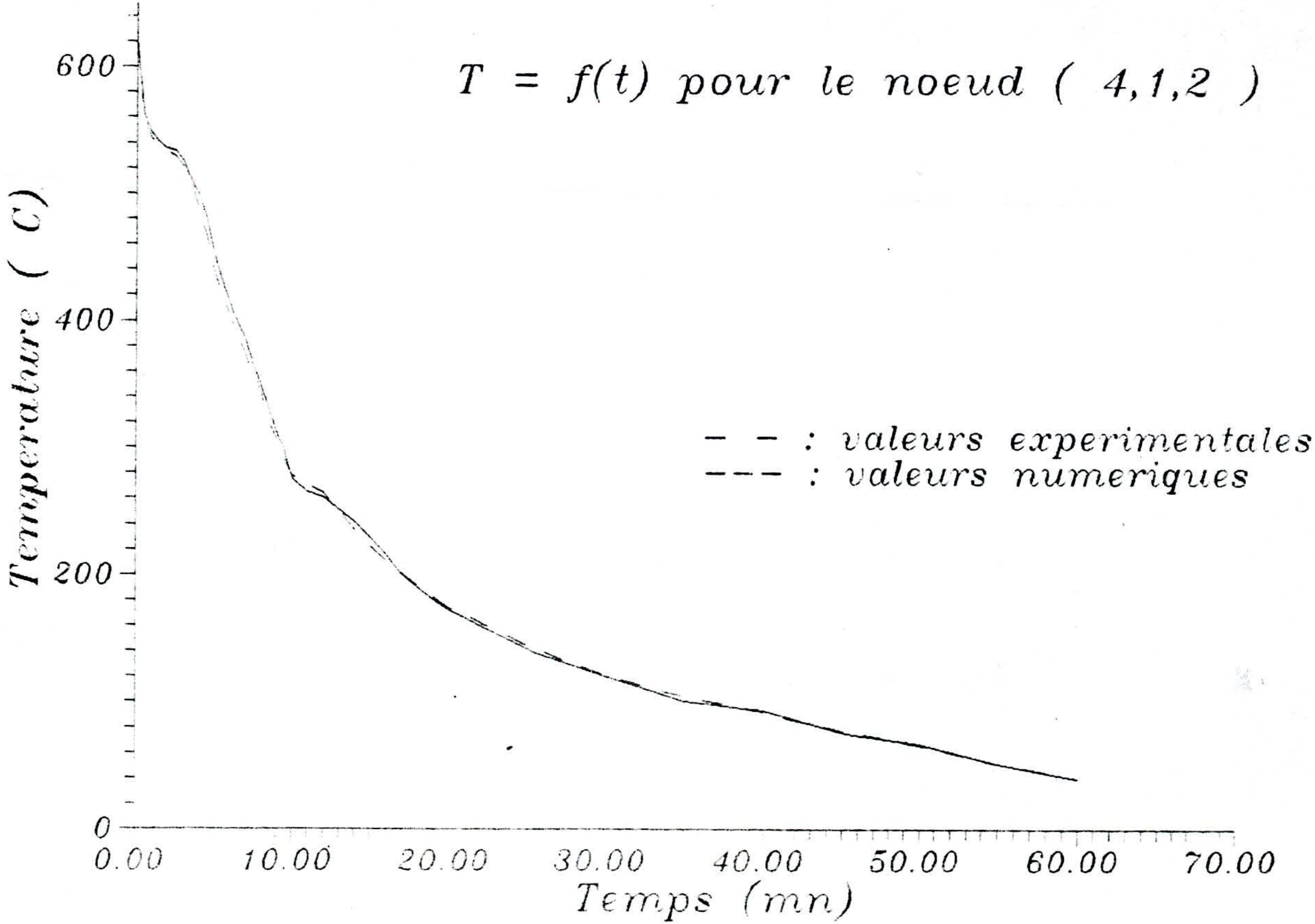

T = f(t) pour le noeud (3,2,3)
– – : valeurs experimentales
--- : valeurs numeriques
Temperature (C)
600
400
200
0
0.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
60.00
70.00
Temps (mn)


T = f(t) pour le noeud (3,2,1)
600
400
200
0
Temperature (C)
- - : valeurs experimentales
--- : valeurs numeriques
0.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
60.00
70.00
Temps (mn)



T = f(t) pour le noeud (3,3,1)
600
400
200
0
Temperature (C)
- - : valeurs experimentales
--- : valeurs numeriques
0.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
60.00
70.00
Temps (mn)


T = f(t) pour le noeud (1,2,2)
— — : valeurs experimentales
——— : valeurs numeriques
Temperature (C)
600
400
200
0
0.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
60.00
70.00
Temps (mn)


T = f(t) pour le noeud (4,1,2)
600
400
200
0
Temperature (C)
- - : valeurs experimentales
--- : valeurs numeriques
0.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
60.00
70.00
Temps (mn)

CONCLUSIONS GENERALES

Notre travail consiste à élaborer un modèle mathématique simulant la distribution de la température dans une pièce parallélipipédique au cours du refroidissement lors d'une coulée dans un moule en sable. Ce travail a été menée en étroite liaison avec les essais expérimentaux en profondeur en vue d'une représentation irréfutable du phénomène en question.

Cette étude a été menée à bien en effet les résultats obtenus ont permis d'abord de mettre en evidence le changement de structure dans le lingot au cours du refroidissement et de montrer que les trois zônes observées sont à l'origine des gradients qui y existent, ceux-ci ont été detérminés expérimentalement et numériquement.

La confrontation des résultats numériques avec ceux de l'expérience en ayant recours à l'outil informatique montre une assez bonne concordance, ce qui permet d'une part de valider le programme élaboré et de l'utiliser avec confiance.

Dans le souci d'élargir son champ d'application, et de l'utiliser pour l'étude de l'évolution et la distribution de la température dans n'importe quel autre alliage, le programme informatique est conçu de manière paramètrable.

Néamoins, nous tenons à préciser que le modèle mathématique élaboré est limité aux géometries parallélépipédiques. Complété et amélioré, celui-ci pourrait faire l'objet d'application dans de nombreux travaux de recherches qui consistent en une meilleure connaissance du comportement des matériaux et de leurs changements d'états et de structures en vue d'un eventuel développement des perspectives pour des applications de pointe.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] F.KREITH
Transmission de la chaleur et thermodynamique.
Int. Textbook. Co. 1967

[2] J.P.HOLMAN
Heat transfer. Mcgraw-HILL company 1972

[3] M.ORFEUIL
Electrochimie Industrielle. DUNOD 1980

[4] J.BARRALIS , G.MAEDER
Précis de métallurgie 1988

[5] B.CHALMERS
Métallurgie physique. Dunod 1963

[6] M.LAPORTE
Algorithmes numériques: Analyse et mise en oeuvre
Eyrolles. Paris 1974

[7] B.CARNAHAN, H.A.LUTHER, J.O.WILKS
Applied numerical methods. John Weley & Sons Co 1969

[8] R.KHIMA
Algorithmes mathématiques et langage basic 1989

[9] C.CHAUSSIN, G.HILLY
Cours de métallurgie. Dunod 1972

[10] D.ABLITZER
Modélisation mathématique des procédés
E.N.S.M.I.M Nancy 1982

[11] B.DE VRIENDT
Transmission de la chaleur T.1 1982

[12] PECHINEY
L'aluminium Eyrolls 1964

[13] L.GUILLET
Précis de métallographie. Masson. Paris 1958

[14] W.H.McADAMS
Transmission de la chaleur. Dunod 1964

[15] S.V.PATANKAR
Numérical heat transfer and fluid flow
Mcgraw.Hill Co. 1982

[16] J.M.SULLIVAN.JR
Non-linear simulation of dendritic solidification of an undercooled melt.
Int.J.Numerical.Meth.Eng. Vol.25 N.2 PP.415-444 1988

[17] M.SALCUDEAN, Z.ABDULLAH
On the numérical modelling of heat transfer during solidification processes
Int.J.Numerical.Meth.Eng. Vol.25 N.2 PP.445-469. 1988

[18] B.VANRYB, R.PRILITS
Basic et GW Basic
Eyrolles. Paris 1985

[19] M.BOUMAHRAT, A.GOURDIN
Méthodes numériques appliquées 1983

[20] M.LARIBI
Etude comparative de la distribution de température d'un pièce cylindrique subissant un traitement thermique en fonction de différents types de chauffage.
Thèse. Magister. E.N.P. Alger 1991

ANNEXE

ter= 0 ALPHA = 0.00 DH = 0 TBAR= 620.00

620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620
620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620
620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620	620

ter= 1 ALPHA = 0.05 DH = .119999997317791 TBAR= 552.62

564	564	560	552	535	567	566	562	553	543	568	567	562	555	549
565	564	560	548	512	567	566	561	552	538	568	567	562	554	547
565	564	559	537	384	567	566	561	549	524	568	567	562	554	544

ter= 2 ALPHA = 0.10 DH = .2199999988079071 TBAR= 529.73

546	545	542	532	516	544	543	537	528	518	543	541	536	528	521
546	545	541	529	493	544	543	537	527	513	543	542	536	528	520
546	545	540	518	369	544	543	537	524	499	543	542	536	527	517

Iter= 3 ALPHA = 0.14 DH = .3100000023841858 TBAR= 523.01

542	541	537	528	511	537	535	530	520	510	535	533	528	520	513
542	541	537	524	488	537	535	530	519	505	535	533	528	519	512
542	541	536	513	366	537	535	530	516	492	535	533	528	518	509

Iter= 4 ALPHA = 0.16 DH = .3499999940395355 TBAR= 519.69

539	538	534	525	509	533	532	526	517	507	531	529	524	516	509
539	538	534	521	486	533	532	526	516	502	531	530	524	516	508
539	538	533	511	364	533	532	526	513	489	531	530	524	515	505

Iter= 5 ALPHA = 0.36 DH = .7900000214576721 TBAR= 516.74

535	535	531	522	506	530	529	524	514	504	528	527	521	513	507
536	535	531	518	483	530	529	523	513	499	528	527	521	513	505
536	535	530	507	362	530	529	523	510	486	528	527	521	512	502

Iter= 6 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 509.06

526	525	522	513	497	523	521	516	507	497	521	520	515	506	500
526	525	521	509	474	523	521	516	506	492	521	520	515	506	499
526	525	520	499	355	523	521	516	503	479	521	520	515	505	496

Iter= 7 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 494.55

509	508	505	496	480	508	507	502	493	484	508	506	501	494	487
509	508	504	492	459	508	507	502	492	479	508	506	501	493	486
509	508	503	482	344	509	507	502	489	466	508	507	501	492	483

Iter= 8 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 474.45

486	486	482	474	459	488	487	482	473	464	488	487	482	475	469
487	486	482	470	438	488	487	482	472	460	489	487	482	474	467
487	486	481	461	328	488	487	482	470	448	489	487	482	474	465

Iter= 9 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 453.53

464	463	460	452	438	467	466	461	453	444	467	466	462	454	449
464	464	460	449	418	467	466	461	452	440	468	466	462	454	447
464	464	459	440	313	467	466	461	449	428	468	466	462	453	445

Iter= 10 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 428.36

437	436	433	426	412	441	440	436	428	420	443	441	437	430	425
437	436	433	422	394	442	440	436	427	416	443	442	437	430	424
437	436	432	414	295	442	440	436	425	405	443	442	437	429	421

Iter= 11 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 410.04

420	419	416	409	396	422	421	417	409	402	423	422	417	411	406
420	419	416	406	378	422	421	417	408	398	423	422	418	411	405
420	419	415	397	283	422	421	417	406	387	423	422	417	410	402

Iter= 12 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 394.42

404	404	401	394	382	406	405	401	394	386	406	405	401	395	390
404	404	401	391	364	406	405	401	393	382	406	405	401	394	389
404	404	400	383	273	406	405	400	391	372	406	405	401	394	386

Iter= 13 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 377.89

387	386	384	377	365	389	388	384	377	370	389	388	384	378	374
387	386	383	374	349	389	388	384	376	366	389	388	385	378	373
387	386	383	367	261	389	388	384	374	357	389	388	384	378	370

Iter= 14 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 363.75

373	372	370	363	352	374	373	370	363	356	374	373	370	364	359
373	372	370	361	336	374	373	370	362	352	375	374	370	364	358
373	372	369	353	252	374	373	369	360	343	375	374	370	363	356

Iter= 15 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 350.04

359	358	356	[illegible]	339	360	359	356	349	343	360	359	356	350	[illegible]
359	358	356	347	324	360	359	356	348	339	360	359	356	350	345
359	358	355	340	242	360	359	355	347	330	360	359	356	349	343

Iter= 16 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 337.09

346	345	343	337	326	347	346	342	336	330	347	346	343	337	333
346	345	343	334	312	347	346	342	335	327	347	346	343	337	332
346	345	342	328	233	347	346	342	334	318	347	346	343	336	330

Iter= 17 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 325.01

333	333	331	325	315	334	333	330	324	318	334	334	330	325	321
334	333	330	323	301	334	334	330	323	315	335	334	330	325	320
334	333	330	316	225	334	334	330	322	307	335	334	330	324	318

Iter= 18 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 313.83

322	322	319	314	304	323	322	319	313	307	323	322	319	314	310
322	322	319	312	290	323	322	319	312	304	323	322	319	314	309
322	322	319	305	217	323	322	319	311	296	323	322	319	313	307

Iter= 19 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 303.05

311	311	308	303	294	312	311	308	302	297	312	311	308	303	299
311	311	308	301	280	312	311	308	302	294	312	311	308	303	298
311	311	308	295	210	312	311	308	300	286	312	311	308	302	297

Iter= 20 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 293.53

302	301	299	294	285	302	301	298	293	287	302	301	298	293	290
302	301	299	292	272	302	301	298	292	284	302	301	298	293	289
302	301	298	286	204	302	301	298	291	277	302	301	298	293	287

Iter= 21 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 275.17

283	282	280	275	267	283	282	279	274	269	283	282	279	275	271
283	282	280	273	255	283	282	279	274	266	283	282	279	275	271
283	282	280	268	191	283	282	279	272	260	283	282	279	274	269

Iter= 22 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 257.72

265	264	262	258	250	265	264	262	257	252	265	264	262	258	254
265	264	262	256	239	265	264	262	256	250	265	264	262	257	254
265	264	262	251	179	265	264	262	255	243	265	264	262	257	252

Iter= 23 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 243.25

250	250	248	244	236	250	249	247	243	238	250	249	247	243	240
250	250	248	242	226	250	249	247	242	235	250	249	247	243	239
250	250	247	237	169	250	249	247	241	229	250	249	247	242	238

Iter= 24 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 229.60

236	236	234	230	223	236	235	233	229	225	236	235	233	229	226
236	236	234	228	213	236	235	233	228	222	236	235	233	229	226
236	236	234	224	159	236	235	233	227	216	236	235	233	229	224

Iter= 25 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 216.89

223	223	221	217	211	223	222	220	216	212	223	222	220	217	214
223	223	221	216	201	223	222	220	216	210	223	222	220	216	213
223	223	221	211	151	223	222	220	215	204	223	222	220	216	212

Iter= 26 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 205.80

212	211	210	206	200	212	211	209	205	201	211	211	209	205	203
212	212	210	205	191	212	211	209	205	199	211	211	209	205	202
212	212	209	201	143	212	211	209	204	194	211	211	209	205	201

Iter= 27 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 195.84

202	201	200	197	190	201	201	199	195	191	201	200	199	195	193
202	201	200	195	182	201	201	199	195	190	201	201	199	195	192
202	201	199	191	136	201	201	199	194	185	201	201	198	195	191

Iter= 28 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 186.21

192	191	190	187	181	191	191	189	186	182	191	191	189	186	183
192	191	190	185	173	191	191	189	185	180	191	191	189	186	183
192	191	190	182	129	191	191	189	184	175	191	191	189	185	182

Iter= 29 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 177.36

183	182	181	178	172	182	182	180	177	173	182	182	180	177	175
183	182	181	177	165	182	182	180	176	172	182	182	180	177	174
183	182	181	173	123	182	182	180	175	167	182	182	180	176	173

Iter= 30 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 170.08

175	175	174	171	166	175	174	173	169	166	174	174	172	170	167
175	175	174	170	158	175	174	173	169	165	174	174	172	169	167
175	175	173	166	118	175	174	172	168	160	175	174	172	169	166

Iter= 31 ALPHA = 0.37 DH = .800000011920929 TBAR= 140.13

144	144	143	141	136	144	144	142	140	137	144	143	142	140	138
145	144	143	140	130	144	144	142	139	136	144	143	142	140	137
145	144	143	137	98	144	144	142	139	132	144	143	142	139	137

Iter= 32   ALPHA = 0.37   DH = .800000011920929   TBAR= 117.69

121	121	120	118	115	121	121	119	117	115	121	120	119	117	116
121	121	120	117	109	121	121	119	117	114	121	120	119	117	115
121	121	120	115	82	121	121	119	116	111	121	120	119	117	115

Iter= 33   ALPHA = 0.37   DH = .800000011920929   TBAR= 101.96

105	105	104	103	99	105	104	103	102	100	104	104	103	102	100
105	105	104	102	95	105	104	103	101	99	104	104	103	101	100
105	105	104	100	71	105	104	103	101	96	104	104	103	101	99

Iter= 34   ALPHA = 0.37   DH = .800000011920929   TBAR= 89.37

92	92	92	90	87	92	92	91	89	87	92	91	90	89	88
92	92	91	89	83	92	92	91	89	86	92	91	90	89	88
92	92	91	87	62	92	92	91	88	84	92	91	90	89	87

Iter= 35   ALPHA = 0.37   DH = .800000011920929   TBAR= 75.26

78	78	77	76	73	77	77	76	75	74	77	77	76	75	74
78	78	77	75	70	77	77	76	75	73	77	77	76	75	74
78	78	77	74	52	77	77	76	74	71	77	77	76	75	73

Iter= 36   ALPHA = 0.37   DH = .800000011920929   TBAR= 64.54

67	67	66	65	63	66	66	65	64	63	66	66	65	64	63
67	67	66	64	60	66	66	65	64	62	66	66	65	64	63
67	67	66	63	45	66	66	65	64	61	66	66	65	64	63

Iter= 37   ALPHA = 0.37   DH = .800000011920929   TBAR= 50.57

52	52	52	51	49	52	52	51	50	49	52	52	51	50	50
52	52	52	50	47	52	52	51	50	49	52	52	51	50	50
52	52	51	49	35	52	52	51	50	48	52	52	51	50	49

Iter= 38   ALPHA = 0.37   DH = .800000011920929   TBAR= 38.99

40	40	40	39	38	40	40	40	39	38	40	40	40	39	38
40	40	40	39	36	40	40	40	39	38	40	40	40	39	38
40	40	40	38	27	40	40	40	39	37	40	40	40	39	38

Fin de toutes les iterations