

5/81

2er

U. S. T. H. B.

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE et D'ÉLECTROTECHNIQUE

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

BIBLIOTHÈQUE
D'ÉLECTROTECHNIQUE

ÉTUDE DE LA DISTRIBUTION DU CHAMP
ÉLECTRIQUE À L'INTÉRIEUR DES PARTICULES
DEFORMABLES EN SUSPENSION DANS UN
MILIEU DIELECTRIQUE LIQUIDE

المعهد الوطني للعلوم الهندسية
التكنولوجية
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE

Proposé par :

A. BEROUAL

Docteur Ingénieur à l'E.N.P.A

Etudié par :

N. KHENFER

O. TOUHAMI

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

U. S. T. H. B.

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE et D'ÉLECTROTECHNIQUE

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

ÉTUDE DE LA DISTRIBUTION DU CHAMP
ÉLECTRIQUE À L'INTÉRIEUR DES PARTICULES
DEFORMABLES EN SUSPENSION DANS UN
MILIEU DIELECTRIQUE LIQUIDE

Proposé par :

A. BEROUAL

Docteur Ingénieur à l'E.N.P.A

Étudié par :

N. KHENFER

O. TOUHAMI

Édicaces .

=====

à la memoire de ma mère

à mon père

à mes frères et soeurs

à ma grand - mère

à tous les amis

Nabil.

à la mémoire de mon frère Hocine.

à mes parents .

à mes frères et soeurs .

Omar .

Remerciements .
=====

Nous remercions vivement notre promoteur Mr BEROUAL qui a été pour beaucoup dans la réalisation de ce sujet et pour les moyens en documentation qui ont été mis à notre disposition.

Nous lui ~~serons~~ remercions reconnaissant pour les conseils et encouragements qui nous ont permis de mener à bien l'élaboration de notre sujet .

Que tous les professeurs qui ont contribué à notre formation trouvent ici, l'expression de notre profonde gratitude .

Notations

Les indices (1) et (2) correspondent respectivement au milieu liquide et aux particules impures en suspension :

E_1, E_2	champ électrique dans (1) et (2)
E_{1t}, E_{2t}	composantes tangentielles de E_1 et E_2 .
E_{1n}, E_{2n}	" normales de E_1 et E_2 .
D_1, D_2	vecteurs déplacements dans (1) et (2)
ϕ_1 et ϕ_2	potentiels électriques correspondants à (1) et (2)
U	tension aux bornes des électrodes
ℓ	intervalle entre électrodes
a :	distance focale
σ ;	densité de charge électrique superficielle d'une particule
γ_2 :	conductivité d'une particule
γ_1 :	conductivité du liquide (considérée comme négligeable devant γ_2)
ϵ_1, ϵ_2	Permittivités diélectriques du liquide et des particules .

sommaire

Introduction 1

Notations .

I Position du probleme 3

1.1 Aperçu sur les expressions du champ électrique existantes.

1.2 Déformation des bulles sous l'influence d'un champ électrique.

II Définition du modèle - 9

2.1. Description du modèle

2.2. mise en équation

2.3. Calcul du potentiel électrique.

2.4. Détermination de la tension appliquée aux électrodes

2.5. Équation différentielle définissant le modèle.

III Calcul du champ électrique - 22

3.1. Cas d'une tension continue

3.2. Cas d'une tension impulsionnelle

3.3. Expression du champ électrique à l'intérieur
du diélectrique liquide.

IV Étude de la distribution du champ électrique à l'intérieur de la bulle . - 28.

4.1. Expression du champ électrique dans le cas général.

4.2. Détermination des valeurs extrêmes du champ à l'intérieur
des particules.

4.3. Étude du champ dans le cas pratique d'une goutte d'eau
immergée dans un diélectrique liquide.

V Application : Étude de la déformation de la bulle. 35

5.1. Étude de la forme de la bulle dans le cas général .

5.2. forme de la bulle dans le cas du modèle considéré

VI Conclusion . 38

Introduction .

Dans tout milieu matériel à la température ambiante, l'équilibre thermodynamique prévoit la présence d'espèces chargées susceptibles de transporter le courant électrique et c'est pourquoi il n'existe aucun liquide parfaitement isolant .

En plus de ces porteurs de charges qui déterminent la conductivité des liquides, il peut également exister d'autres qui ne correspondent pas à l'équilibre thermodynamique et qui se forment par photoionisation .

La présence d'impuretés mobiles chargées dans un milieu isolant altère les propriétés électriques de ce milieu car sous l'influence d'un champ électrique, la densité de charge volumique n'est plus nulle. Il s'établit alors une charge spatiale ce qui rend impossible l'utilisation des équations de LAPLACE .

Lorsqu'un liquide isolant est soumis à un champ électrique, chaque particule étrangère (impuretés solides, liquides ou gazeuses), ~~est différente de celle du milieu~~, se charge électriquement pour s'aligner, sous l'influence des forces d'orientation et d'attraction, suivant la ligne de force du champ maximum. Ce qui pourrait être un prélude à la formation d'un pont entre électrodes et précipiter le claquage du liquide isolant dont la formulation mathématique est très complexe .

Parmi les impuretés les plus courantes et jouant un grand rôle dans le mécanisme de claquage : les bulles de gaz et les gouttes d'eau. Ces particules déformables peuvent se comporter différemment selon l'amplitude, la forme et le temps d'application de la tension aux électrodes, ainsi que leurs dimensions. Pour l'étude de ce comportement, il est nécessaire d'analyser la distribution du champ électrique en tout point du milieu liquide .

Le champ électrique E_1 dans un diélectrique liquide en présence de particules en suspensions, dépend du champ électrique E_2 .

Dans la plupart des expressions de E_2 rencontrées dans la littérature (1, 2, 3) on ne voit nullement apparaître la charge de la bulle ou bien les paramètres déterminants sa position par rapport aux électrodes ou bien encore le paramètre temps. Ceci est surtout lié à l'hypothèse selon laquelle la densité de charge superficielle σ est nulle, c'est à dire $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$

Presque tous les travaux effectués sur le comportement d'une bulle sphérique dans un champ électrique uniforme d'intensité inférieure à la valeur critique ont aboutis au même résultat à savoir que la bulle acquiert la forme d'un ellipsoïde de révolution .

Ce n'est qu'en 1979 (4) qu'il a été démontré mathématiquement et vérifié expérimentalement au moyen de la photographie rapide qu'une bulle de gaz ou une goutte de liquide soumise à un champ électrique uniforme ne prend pas nécessairement la forme d'un ellipsoïde de révolution .

Ce n'est que dans le cas particulier où la particule est non chargée ou qu'elle se trouve au milieu de l'intervalle entre électrodes qu'elle prend la forme d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe est confondu avec la direction du champ appliqué aux électrodes (voir figure 1).

Le but de ce travail est de définir un modèle mathématique de la particule déformable immergée dans un milieu liquide isolant soumis à un champ électrique, à partir duquel seront déterminées les expressions du champ électrique à l'intérieur . de cette particule dans le cas où elle acquiert une forme d'ellipsoïde de révolution .

I Position du Problème .

1.1. Aperçu sur les expressions du champ électriques existantes.

Le champ électrique E_1 dans un diélectrique liquide en présence des particules en suspension, dépend du champ électrique E_2 . Dans la plupart des expressions de E_2 rencontrées dans la littérature on ne voit nullement apparaître la charge de la bulle ou bien les paramètres déterminants sa position: par rapport aux électrodes ou bien encore le paramètre temps. Ceci est surtout lié à l'hypothèse selon laquelle la densité de charge superficielle σ est nulle, c'est à dire $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$

Cependant l'expression de E_2 qui, à notre avis, reste valable mais dans un cas particulier où $\frac{a}{Z_1} \ll 1, \frac{a}{Z_2} \ll 1$

où Z_1 et Z_2 étant les distances de la particule par rapport aux deux électrodes, c'est celle qui a été établie par la majorité des auteurs pour le cas d'une forme sphérique [1] sans tenir compte du temps et de la charge.

$$E_2 = \frac{3 \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2 \epsilon_1} E_{moy} \quad \text{avec } E_{moy} = \frac{u}{l}$$

ou bien par DZUWARLI et ses collaborateurs [2] qui ont essayé de faire intervenir le coefficient de polarisation K selon l'axe OZ .

$$E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 K + \epsilon_1 (1 - K)} E_{moy}$$

Cette expression est identique à la précédente pour $K = \frac{1}{3}$

Dans le cas d'une bulle en forme d'ellipsoïde de révolution d'après [3] l'expression de E_2 est $E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 - (\epsilon_1 - \epsilon_2) G_1}$

$$\text{où } G_1 = \frac{1}{S^2 - 1} \left(\frac{S \coth^{-1} S}{(S^2 - 1)^{1/2}} - 1 \right)$$

et $S = \frac{P}{q}$ (P et q demi - axes majeur et mineur)

Cette expression ne peut être valable car elle ne prend pas en consideration le parametre temps .

Une fois que E_2 est connu, on peut determiner l'expression du champ electrique E_1 à l'interieur du liquide .

Dans beaucoup d'expressions obtenues par analogie avec les gaz [5], le champ maximum $E_1 \text{ max}$ dans le cas de particules non chargées, apparait comme fonction uniquement de E_{moy}

$$E_1 \text{ max} = 3 E_{\text{moy}}$$

Pour des particules chargées, certains auteurs se contentent:

- soit d'ajouter le terme du à la charge Q de la particule [6] : $E_{1\text{max}} = 3 E_{\text{moy}} + \frac{Q}{4\pi - \epsilon_1 r^2}$

- soit de faire intervenir le coefficient de polarisation

$$K [2] : E_{1\text{max}} = \frac{1}{K} E_{\text{moy}} + \frac{Q}{4\pi \epsilon_1 r^2}$$

Cette expression se confond avec la precedente pour $K = \frac{1}{3}$

en 1970 GORIATCHKIN [7] donnait une expression pour $E_{1\text{max}}$ en prenant en consideration les permitivités dielectriques des impuretes et du liquide

$$E_{1\text{max}} = \frac{3 \epsilon_2}{\epsilon_2 + 2 \epsilon_1} E_{\text{moy}} + \frac{Q}{4\pi \epsilon_1 r^2}$$

Comme on le demontera, le champ E_2 et par conséquent E_1 , dependent de plusieurs parametres dont la conductivité et les dimensions des particule

- les permitivités dielectriques du liquide et des particules
- l'intervalle entre electrodes
- le temps ainsi que la forme et l'amplitude de la tension appliquée.

L'analyse de E_1 et E_2 est d'un important intérêt pour l'étude de la réaction des bulles à un champ électrique.

1.2. Deformation des bulles dans un champ électrique.

Presque tous les travaux effectués sur le comportement d'une bulle sphérique dans un champ électrique uniforme d'intensité inférieure à la valeur critique ont aboutis au même résultat à savoir que la bulle acquiert la forme d'un ellipsoïde de révolution. Ce n'est qu'en 1979 que Beroual [4] a démontré mathématiquement et vérifié expérimentalement au moyen de la photographie rapide qu'une bulle de gaz ou une goutte de liquide soumise à un champ électrique uniforme ne prend pas forcément la forme d'un ellipsoïde de révolution. Ce n'est que dans le cas très particulier où la particule est non chargée, et qu'elle se trouve au milieu de l'intervalle entre électrodes qu'elle prend la forme d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe est confondu avec la direction du champ (Fig 1).

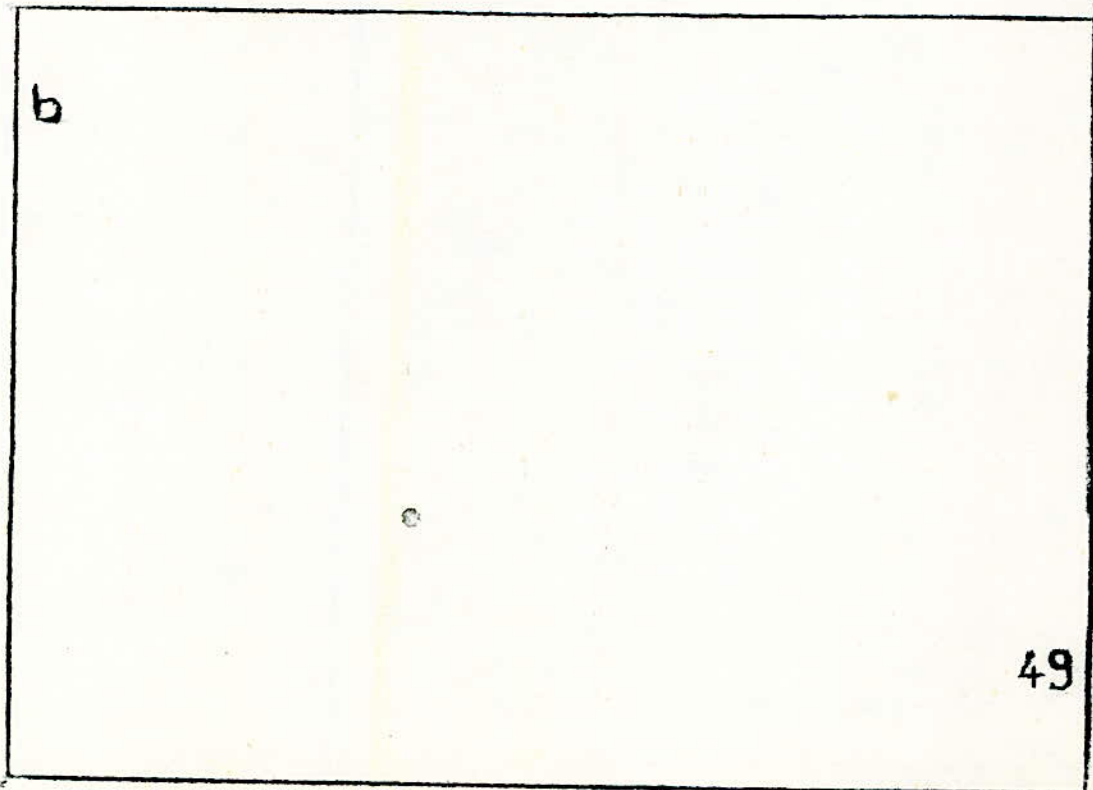
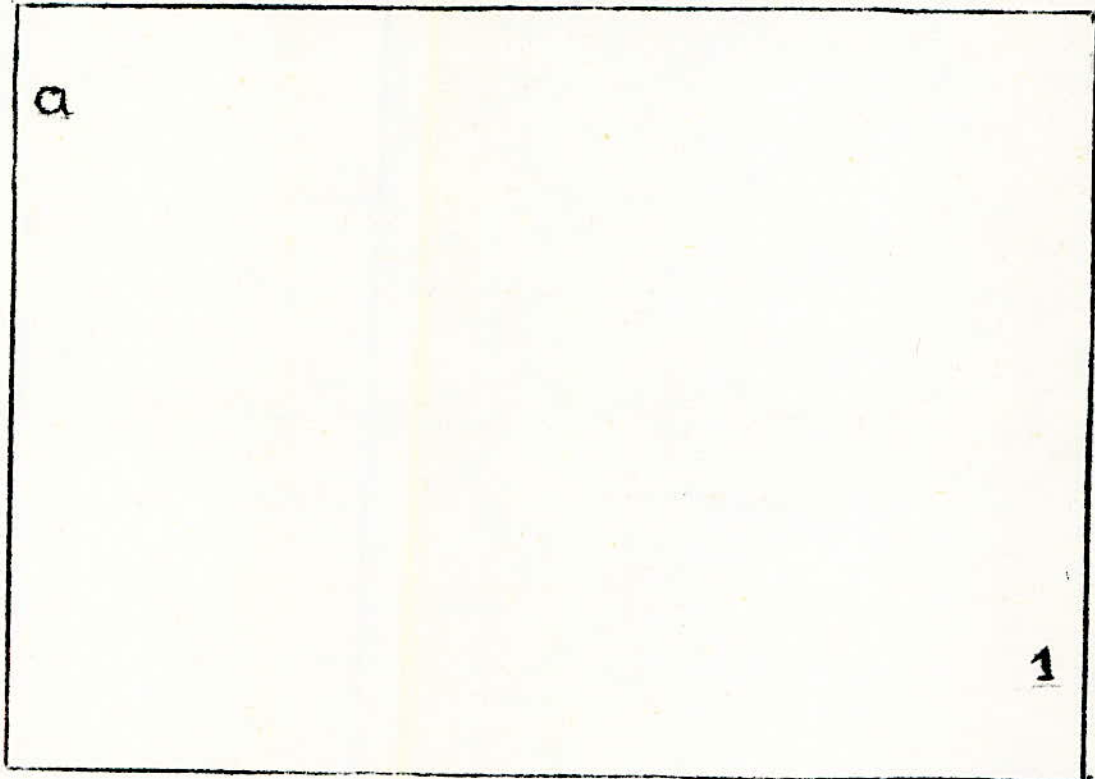
Fig. (1) voir [10]

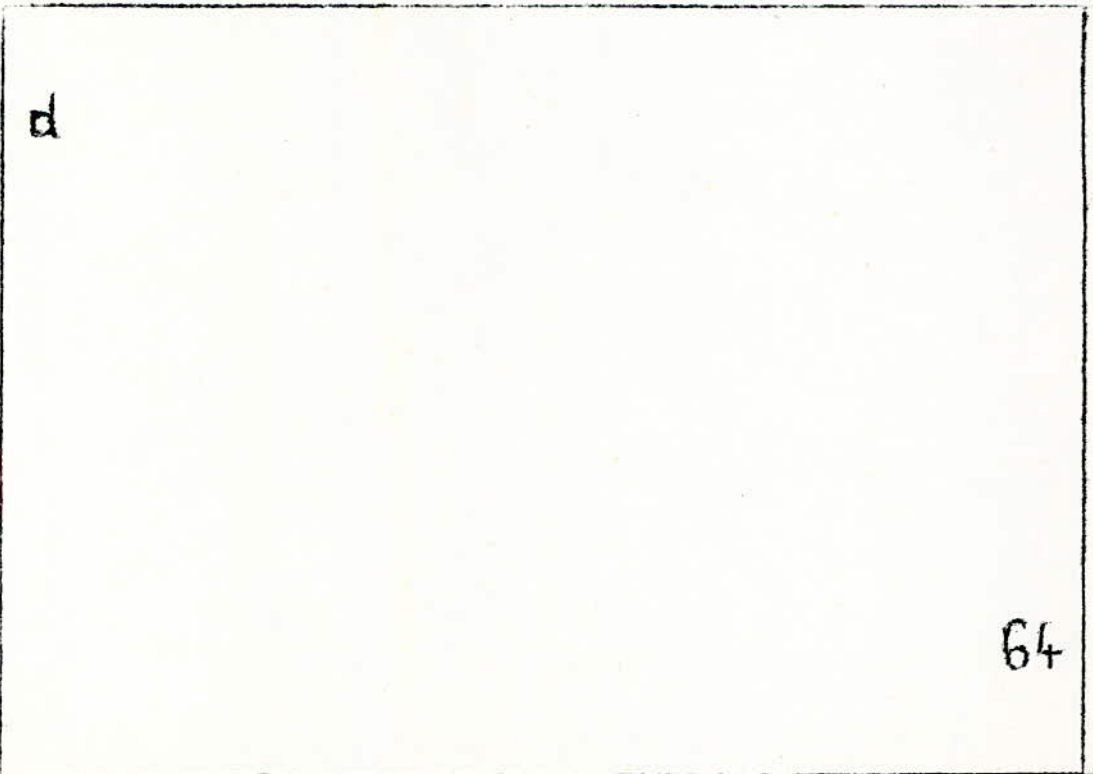
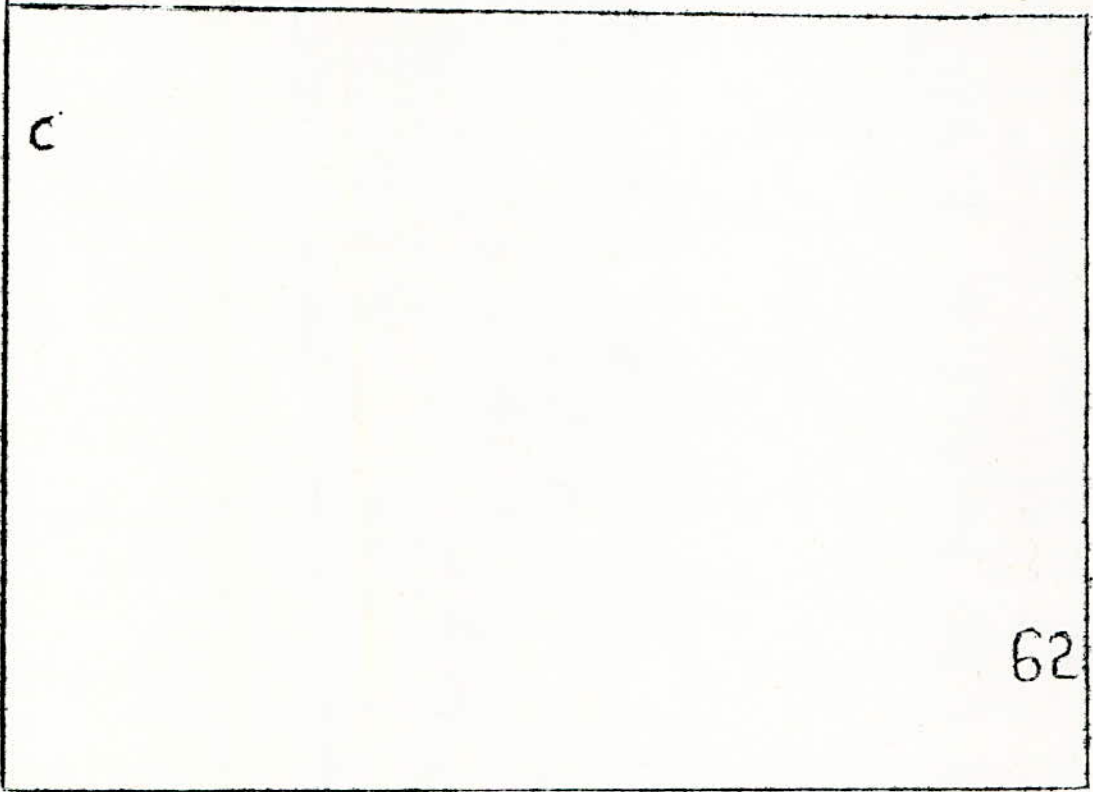
Goutte d'eau immergée dans l'huile de résine .

Intervalle entre électrodes 5 mm. Tension élevée de 0 à 50 Kv en l'espace de 2 s . Dans le circuit on a une résistance de 20 M Ω . Vitesse de la camera 1000 cadres par seconde.

(Les numéros indiqués sur les photos indiquent le numéro du cadre).

fig-1.





e

101

f

109

II Définition du modèle .

2. 1. Description du modèle .

Il est incontestable que le degré de pureté des liquides joue un rôle très important dans le phénomène de claquage. Parmi les impuretés les plus souvent rencontrées les gouttes d'eau et les bulles de gaz. La rigidité diélectrique des liquides isolants dépend beaucoup du comportement de ces bulles de gaz et de liquides . En effet soumise à un champ électrique, une goutte d'eau ou une bulle de gaz peut se comporter différemment, selon ses dimensions par rapport à celles de l'intervalle entre électrodes, de sa conductivité, de sa tension superficielle, de sa charge superficielle, de l'amplitude et de la forme de la tension appliquée aux électrodes Tous ces facteurs qu'on vient de citer influent sur la distribution du champ électrique dans ces bulles qui à son tour influe sur le comportement de ces bulles.

Pour le modèle considéré on supposera que :
 la température est maintenue constante; la conductivité des particules en suspension est de plusieurs fois supérieure à celle du liquide isolant; les électrodes sont planes idéales; la particule a une forme ellipsoïdale; l'influence des couches doubles pouvant se former à la suite d'absorption d'ions sur la tension de surface entre phases est négligeable; le liquide isolant est laminaire .

2. 2. Mise en équations .

Soit une particule diélectrique en forme d'ellipsoïde en suspension dans un milieu isolant et définie telle qu'il est indiqué sur la figure (fig 2.). Pour simplifier on considèrera un système de coordonnées ellipsoïdales (η, θ, Ψ) dont l'origine 0 est fixée au centre de la particule et dont l'axe des Z est orientée dans le sens du champ électrique, ce qui implique une symétrie par rapport à l'axe OZ, donc une indépendance de ϕ_1 de Ψ . Les coordonnées η, θ, Ψ seront telles que :

$$x = a \sin \eta \sin \theta \cos \Psi .$$

$$y = a \sin \eta \sin \theta \sin \Psi .$$

$$z = a \cos \eta \cos \theta$$

où a est la distance de l'origine au foyer de l'ellipsoïde. Les surfaces correspondantes à $\eta = \text{constante}$ sont des ellipsoïdes allongées d'équation

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

où $b = a \sin h\eta$

$c = a \cos h\eta$

Le paramètre θ est identifié par l'asymptôte conique de l'hyperbole et l'axe des Z ; dans le cas où $\theta = 0$, le cône est confondu avec une portion de l'axe des Z (de 0 à $+a$) ; et dans le cas où $\theta = \pi$, on a la même correspondance sur la portion de l'axe des Z de ($-a$, $-\infty$) .

Lorsque η augmente la forme de la particule (ellipsoïde) se rapproche de la forme sphérique ; de la même manière lorsque $\eta \rightarrow \infty$, $\sin h\eta \simeq \cos h\eta$ on obtient une forme sphérique .

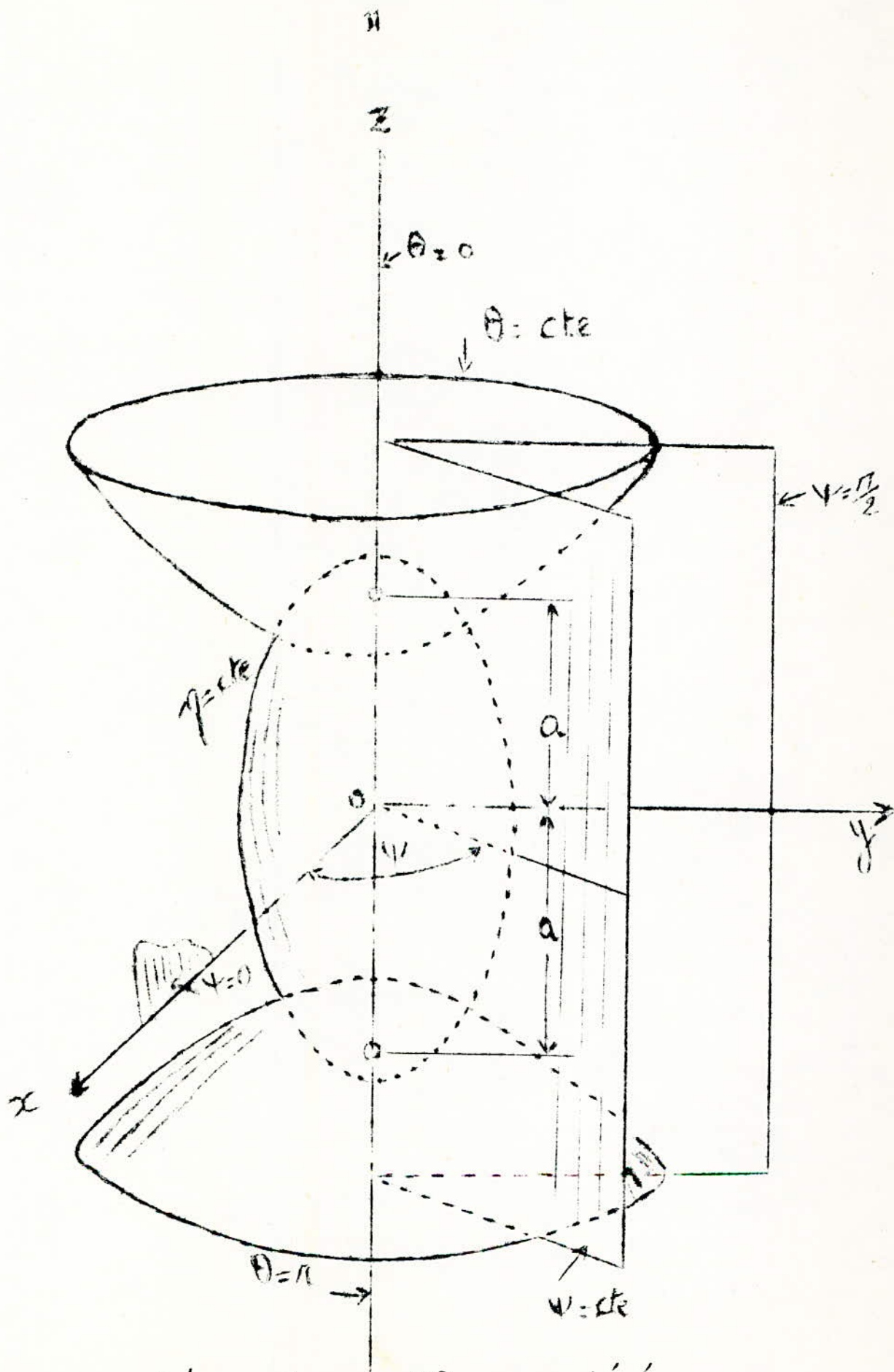


fig 2. schéma du modèle considéré.

En supposant que toutes les hypothèses sont satisfaites, le modèle considéré obéit à l'équation de Laplace.

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \phi = g^{1/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{g^{1/2}}{g_{11}} \frac{\partial \phi_1}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{g^{1/2}}{g_{22}} \frac{\partial \phi_1}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{g^{1/2}}{g_{33}} \frac{\partial \phi_1}{\partial u^3} \right) \right\} = 0$$

$$\text{où } g_{11} = g_{22} = a^2 (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)$$

$$g_{33} = a^2 \sinh \eta \sin \theta (\sinh \eta + \sin^2 \theta)$$

$$u^1 = \eta$$

$$u^2 = \theta$$

$$u^3 = \psi$$

$$\frac{g^{1/2}}{g_{11}} = \frac{g^{1/2}}{g_{22}} = a \sinh \eta \sin \theta$$

$$\frac{g^{1/2}}{g_{33}} = \frac{a \sinh^2 \eta + \sin^2 \theta}{\sinh \eta \sin \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1} \left(a \sinh \eta \sin \theta \frac{\partial \phi_1}{\partial u^1} \right) = a \coth \eta \sin \theta \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + a \sinh \eta \sin \theta \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} =$$

$$\frac{-\coth \eta}{a^2 (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \frac{1}{a^2 (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{g^{1/2}}{g_{22}} \frac{\partial \phi_1}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial}{\partial u^2} \left(a \sinh \eta \sin \theta \frac{\partial \phi_1}{\partial u^2} \right) = a \sinh \eta \cos \theta \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} +$$

$$- a \sinh \eta \sin \theta \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta^2}$$

$$g^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{g^{1/2}}{g_{11}} \frac{\partial \phi_1}{\partial u^2} \right) \right) = \frac{\coth \theta}{a^2 (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} +$$

$$\frac{1}{a^2 (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{g^{1/2}}{g_{33}} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial u^3} \right) = \frac{a (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)}{\sinh \eta \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \psi^2}$$

$$g^{1/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{g^{1/2}}{g_{33}} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial u^3} \right) \right\} = \frac{1}{a \sinh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \psi^2}$$

après simplification nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 = & \frac{1}{a^2 (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left(-\coth \eta \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} + \cot \theta \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} \right) \\ & + \frac{1}{a^2 (\sinh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \cdot \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \psi^2} = 0 \end{aligned}$$

En vertu de la symétrie par rapport à l'axe des Z , ϕ_1 est indépendant de ψ et notre équation se réduit à :

$$\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{a^2 (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left(\coth \eta \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} + \cot \theta \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} \right)$$

D'autre part en supposant la densité de charge superficielle σ différente de 0, on a :

$$\sigma = D_{1n} - D_{2n} \quad (2)$$

avec $D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n}$; $D_{2n} = \epsilon_2 E_{2n}$

de même, nous aurons :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sigma_2 E_2 \cos \alpha \quad (3)$$

La solution de l'équation (1) doit satisfaire les conditions aux limites :

(1) Lorsque $\eta \rightarrow \infty$; $\phi_1 = E_0 x + K = E_0 a \cosh \eta \cos \theta + K$

(2) " $\eta \rightarrow \eta_0$; $E_{1t} = E_{2t}$

(3) " $t = 0$; $\phi_1 = 0$ (ce qui entraîne $K = 0$)

2.3 Calcul du potentiel électrique

L'équation (1) admet pour solutions générales

$$\phi_1 = P_n(\cosh \eta) \cdot P_n(\cos \theta)$$

$$\phi_2 = Q_n(\cosh \eta) \cdot Q_n(\cos \theta) \dots$$

L'intérieur de l'ellipsoïde contient $\cos \theta = 1$ et $\cosh \eta = 1$, aussi $Q_n(\cosh \eta)$ et $Q_n(\cos \theta)$ ne peuvent

figurer dans ϕ_2 donc

$$\phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cosh \eta) \cdot P_n(\cos \theta)$$

à l'extérieur, $Q_n(\cos \theta)$ est de la même façon éliminé, d'où

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [B_n P_n(\cosh \eta) + C_n Q_n(\cosh \eta)] P_n(\cos \theta)$$

où $P_n(\cos \theta)$ et $Q_n(\cosh \eta)$ sont les fonctions de Legendre de 1^{ère} et 2^{ème} espèce définies comme suit:

$$P_0(\mu) = 1$$

$$P_1(\mu) = \mu$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1)$$

$$P_n(\mu) = \frac{1}{n!} (2\mu - 1)(2\mu - 3) \dots \left(\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} \dots \right)$$

De la même façon on définit les polynômes de Legendre du second espèce

$$Q_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} \quad ; \quad Q_1(\mu) = \mu Q_0(\mu) - 1$$

$$Q_2(\mu) = P_2(\mu) \cdot Q_0(\mu) - \frac{3}{2} \mu \quad ; \quad Q_3(\mu) = P_3(\mu) \cdot Q_0(\mu) - \frac{5}{2} \mu^2 + \frac{2}{3}$$

$$Q_4(\mu) = P_4(\mu) \cdot Q_0(\mu) - \frac{35}{8} \mu^3 + \frac{55}{24} \mu$$

Pour $|\mu| > 1$ $Q_0(\mu) = \frac{1}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}$

On utilise maintenant les conditions aux limites pour déterminer les constantes

a) Lorsque $\eta \rightarrow \infty$ les fonctions en Q disparaissent et nous aurons :

$$-E_0 a \cdot \cosh \eta \cdot \cos \theta + K = B_0 + B_1 \cosh \eta \cos \theta + B_2 P_2(\cosh \eta)$$

$$P_2 \cos \theta + \dots + B_n P_n(\cosh \eta) \cdot P_n(\cos \theta)$$

comme les fonctions de Legendre sont indépendantes chaque coefficient est égal à zéro.

$$K - B_0 = 0 \quad ; \quad E_0 a + B_1 = 0 \quad ; \quad B_2 = B_3 = \dots = B_n = 0$$

de là nous aurons : $B_0 = K = 0$; $B_1 = -E_0 a$

d'où les expressions de ϕ_1 et ϕ_2 deviennent :

$$\phi_1 = -E_0 a \cdot \cosh \eta \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} C_n Q_n(\cosh \eta) P_n(\cos \theta)$$

$$\phi_2 = A_0 + A_1 \cosh \eta \cdot \cos \theta + A_2 P_2(\cosh \eta) P_2(\cos \theta)$$

Il reste à déterminer les différents coefficients A_n et C_n .

Pour cela on utilise les autres conditions aux limites.

Lorsque $\eta = \eta_0$ nous aurons $E_{2t} = E_{1t}$ soit

$$\frac{1}{(g_{11})^{1/2}} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} = \frac{1}{(g_{22})^{1/2}} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \quad \text{or } g_{11} = g_{22} \text{ d'où } \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta}$$

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right]_{\eta=\eta_0} = E_0 a \cosh \eta_0 \sin \theta - \sum_{n=0}^{\infty} C_n Q_n(-\cosh \eta_0) P_n'(\cos \theta) \sin \theta$$

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right]_{\eta=\eta_0} = - \sum A_n P_n(-\cosh \eta_0) P_n'(\cos \theta) \sin \theta$$

avec $P_n'(\cos \theta) = \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial (\cos \theta)}$

ainsi nous aurons :

$$- A_1 \cosh \eta_0 - A_2 P_2(\cosh \eta_0) P_2'(\cos \theta) - \dots - A_n P_n'(\cos \theta) P_n(\cosh \eta_0)$$

$$- E_0 a \cosh \eta_0 + C_1 Q_1(\cosh \eta_0) + C_2 Q_2(\cosh \eta_0) P_2'(\cos \theta) + \dots + C_n Q_n(\cosh \eta_0) P_n'(\cos \theta) = 0$$

d'où

$$- A_1 \cosh \eta_0 - E_0 a \cosh \eta_0 + C_1 Q_1(\cosh \eta_0) = 0$$

$$- A_2 P_2(\cosh \eta_0) P_2(\cos \theta) - C_2 Q_2(\cosh \eta_0) P_2'(\cos \theta) = 0$$

$$A_n P_n(\cosh \eta_0) P_n(\cos \theta) - C_n Q_n(\cosh \eta_0) P_n'(\cos \theta) = 0$$

Il vient alors :

$$- A_1 \cosh \eta_0 - E_0 a \cosh \eta_0 + C_1 Q_1(\cosh \eta_0) = 0$$

$$C_1 = \frac{A_1 \cosh \eta_0 + E_0 a \cosh \eta_0}{Q_1(\cosh \eta_0)} \quad \text{avec } Q_1(\cosh \eta_0) \neq 0$$

De meme :

$$C_2 = C_3 = \dots = C_n = 0$$

$$A_2 = A_3 = \dots = A_n = 0$$

- car les fonctions de Legendre sont independantes
- d'autre part :

$$E_{2n} = - \left. \frac{1}{(g_{11})^{1/2}} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_0} = E_2 \cos \alpha$$

où α est l'angle forme par \vec{E}_2 et $\vec{\eta}$ la normale
à la surface $\eta = \eta_0$

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_0} = A_1 \sinh \eta_0 \cos \theta \text{ d'où } E_{2n} = - \frac{A_1 \sinh \eta_0 \cos \theta}{(g_{11})^{1/2}}$$

- ainsi nous aurons :
$$- \frac{A_1 \sinh \eta_0 \cos \theta}{(g_{11})^{1/2}} = E_2 \cos \theta$$

et par suite :

$$A_1 = \frac{E_2 (g_{11})^{1/2} \cos \alpha}{\sinh \eta_0 \cos \theta} \quad \text{- avec } \sinh \eta_0 \cos \theta \neq 0$$

sachant qu'à $\eta = \eta_0$, ϕ_1 et ϕ_2 sont égaux c'est à dire

$$\text{qu'à } \eta = \eta_0 \quad A_0 = k + C_0 Q_0(\cosh \eta_0) = C_0 Q_0(\cosh \eta_0)$$

et qu'à $t=0$; $\phi_2 = 0$ - donc $A_0 = 0$ - d'où $C_0 = 0$.

Les expressions finales sont :

$$\phi_1 = -E_0 a \cosh \eta \cos \theta + \left[\frac{(g_{11})^{1/2} \cos \alpha}{\sinh \eta_0 \cos \theta} E_0 + E_0 a \right] \cosh \eta_0 \frac{Q_1(\cosh \eta) \cos \theta}{Q_1(\cosh \eta_0)}$$

- On pose
$$\beta_0 = \cosh \eta_0 \cdot \frac{Q_1'(\cosh \eta_0)}{Q_1(\cosh \eta_0)} \quad (4)$$

2.4 Determination de la tension appliquée aux électrodes.

par hypothèses, nous aurons :

$$U = \Phi_1(\pi, \bar{z}_1) - \Phi_1(0, \bar{z}_2)$$

où $\bar{z}_1 = -d_1$ et $\bar{z}_2 = d_2$ d_1 et d_2 positifs

-avec $l = d_1 + d_2$; l distance entre électrodes
on sait que $\bar{z} = a \cosh \eta \cos \theta$; d'où les expressions
de d_1 et d_2 :

Pour $(\theta = \pi ; \bar{z}_1 = -d_1)$ on a : $d_1 = a \cosh \eta_1$

Pour $(\theta = 0 ; \bar{z}_2 = d_2)$ on a : $d_2 = a \cosh \eta_2$

-aussi

$$\Phi_1(\pi, d_1) = d_1 - a \cosh \eta_0 \frac{Q_1\left(\frac{d_1}{a}\right)}{Q_1(\cosh \eta_0)} E_0 - (g_{11})^{\frac{1}{2}} \cos \alpha \coth \eta_0 \frac{Q_1\left(\frac{d_1}{a}\right)}{Q_1 \cosh \eta_0} E_2$$

$$\Phi_1(0, d_2) = -d_2 + a \cosh \eta_0 \frac{Q_1\left(\frac{d_2}{a}\right)}{Q_1(\cosh \eta_0)} E_0 - (g_{11})^{\frac{1}{2}} \cos \alpha \coth \eta_0 \left(Q_1\left(\frac{d_2}{a}\right) - Q_1\left(\frac{d_1}{a}\right) \right) E_2$$

on pose :

$$\beta_2 = (g_{11})^{\frac{1}{2}} \cos \alpha \frac{\coth \eta_0}{Q_1 \cosh \eta_0} \left(Q_1\left(\frac{d_2}{a}\right) - Q_1\left(\frac{d_1}{a}\right) \right)$$

et

$$\beta_1 = d_1 + d_2 - \frac{a \cosh \eta_0}{Q_1 \cosh \eta_0} \left[Q_1\left(\frac{d_1}{a}\right) + Q_1\left(\frac{d_2}{a}\right) \right]$$

l'expression de U devient :

$$U = \beta_1 E_0 + \beta_2 E_2 \quad (5)$$

d'où on peut écrire que : $E_0 = \frac{U - \beta_2 E_2}{\beta_1}$; $\beta_1 \neq 0$

$$(6)$$

Dans le cas où $d_1 = d_2$ c'est à dire que la particule se trouve au milieu de l'intervalle nous aurons :

$$-d_1 = d_2 = \frac{l}{2} \quad \text{d'où} \quad Q_1\left(\frac{d_1}{a}\right) = Q_2\left(\frac{d_2}{a}\right) = Q_1\left(\frac{l}{2a}\right)$$

donc $\beta_2 = 0$

$$\beta_1 = l - 2a \cdot \cosh \eta_0 \quad Q_1\left(\frac{l}{2a}\right)$$

$$Q_1(\cosh \eta_0)$$

et l'expression (6) devient :

$$E_0 = \frac{V}{\beta_1}$$

2.5 Équation différentielle définissant le modèle.

En substituant l'équation (6) dans (2) et (3).

et en dérivant (2) par rapport à t nous aurons :

$$E_1 \sinh \eta_0 \cos \theta \left(\frac{1-\beta_0}{\beta_1} \cdot \frac{dV}{dt} - \frac{1-\beta_0}{\beta_1} \beta_2 \cdot \frac{\partial E_2}{\partial t} \right) - (E_2 - \beta_0) \cos \alpha \cdot \frac{\partial E_2}{\partial t}$$

$$= \tau_2 E_2 \cos \alpha$$

soit :

$$E_1 a \sinh \eta_0 \frac{\cos \theta}{(g_{11})^{1/2}} \left(\frac{1-\beta_0}{\beta_1} \right) \cdot \frac{dV}{dt} - \left[\left(\frac{1-\beta_0}{\beta_1} \right) \beta_2 \frac{E_1 a \sinh \eta_0 \cos \theta}{(g_{11})^{1/2}} + \right.$$

$$\left. (E_2 - E_1 \beta_0) \cos \alpha \right] \frac{\partial E_2}{\partial t} = \tau_2 E_2 \cos \alpha$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\tau_2 \cos \alpha \beta_1}{E_1 (1-\beta_0) \beta_2 a \frac{\sinh \eta_0 \cos \theta}{(g_{11})^{1/2}} + (E_2 - E_1 \beta_0) \beta_1 \cos \alpha} =$$

$$a E_1 \sinh \eta_0 \cos \theta (1-\beta_0) \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{(g_{11})^{1/2} \left[(1-\beta_0) \beta_2 E_1 \frac{\sinh \eta_0 \cos \theta}{(g_{11})^{1/2}} + \beta_1 (E_2 - E_1 \beta_0) \cos \alpha \right]}{}$$

d'où on posant:

$$K_A = \frac{\sigma_2 \cos \alpha \beta_1}{\epsilon_1 (1 - \beta_0) \beta_2 \sinh \eta_0 \cos \theta + (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta_0) \beta_1 \cos \alpha}$$

et

$$K_B = \frac{a \epsilon_1 \sinh \eta_0 \cos \theta (1 - \beta_0)}{(g_{11})^{1/2} \left[(1 - \beta_0) \beta_2 \epsilon_1 \sinh \eta_0 \cos \theta + \beta_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta_0) \cos \alpha \right] (g_{11})^{1/2}}$$

on obtient:

$$\boxed{\frac{\partial E_2}{\partial t} + K_A E_2 = K_B \cdot \frac{dU}{dt}} \quad (7)$$

Cette équation différentielle décrit complètement le modèle :

comme on suppose que la particule est un ellipsoïde de révolution, ce n'est le cas que si la charge superficielle est distribuée symétriquement et que la particule se trouve au milieu de l'intervalle entre les électrodes, c'est à dire $d_1 = d_2$ alors $\beta_2 = 0$ et les constantes K_A et K_B se réduisent à :

$$K_A = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta_0}$$

$$K_B = \frac{-a \epsilon_1 \sinh \eta_0}{(g_{11})^{1/2}} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 - \beta_0}{(\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta_0) \beta_1}$$

III Calcul du Champ électrique

La résolution de l'équation différentielle (7) permet de trouver l'expression du champ E_2 à l'intérieur de la bulle et ceci, pour n'importe quelle forme de la tension appliquée aux électrodes. Avant de passer à la résolution il est nécessaire de trouver tout d'abord les conditions c'est à dire $E_2(0)$

Pour cela on utilise la condition suivante :
à $t=0$ $\bar{V}=0$

$$\text{d'où } E_{1n} - E_{2n} = 0$$

ainsi on peut écrire :

$$a \frac{\sinh \eta_0}{(g_{11})^{1/2}} \cos \theta \epsilon_1 (1 - \beta_0) E(0) - \epsilon_2 - \epsilon_1 \beta_0 E_2(0) \cos \alpha = 0$$

$$\text{- avec } E(0) = \frac{U(0)}{\beta_1}$$

$$\text{d'où } E_2(0) = \epsilon_1 a \frac{\sinh \eta_0}{(g_{11})^{1/2}} \cdot \frac{1 - \beta_0}{\beta_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta_0)} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} U(0) \quad (8)$$

- on va considérer suivant la forme de la tension plusieurs cas :

3. 1° Cas d'une tension continue ($U = U_0$)

$$\text{on a : } \frac{dU}{dt} = 0$$

$$\text{l'équation (7) devient alors : } \frac{\partial E_2}{\partial t} + K_A E_2 = 0$$

C'est une équation différentielle sans second membre dont la solution générale est de la forme :

$$E_2 = E_2(0) \exp(-k_A t)$$

en remplaçant $E_2(0)$ d'après (8) on obtient :

$$E_2 = \frac{a \epsilon_1}{(g_{11})^{1/2}} \sinh \gamma_0 \frac{1 - \beta_0}{\beta_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta_0)} \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} U(0) e^{-k_A t}$$

en remplaçant β_0 et β_1 par leurs expressions nous aurons :

$$E_2 = \frac{a \sinh \gamma_0 \epsilon_1 \left(1 - \mu_0 \frac{Q_1'(\mu_0)}{Q_2(\mu_0)} \right)}{(g_{11})^{1/2} \left(l - 2a \mu_0 \frac{Q_1(l/2a)}{Q_2(\mu_0)} \right) (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta_0) \cos \alpha} \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} U_0 e^{-k_A t} \quad (9)$$

3.2 Cas d'une tension impulsionnelle ($U = mt$)

on a : $\frac{dU}{dt} = m$ et $U(0) = 0$ ceci entraîne que

$E_2(0) = 0$, l'équation (7) devient alors

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + k_A E_2 = m k_B$$

équation différentielle avec second membre dont la solution est de la forme :

$$E_2 = E_p + E_s$$

E_p : équation particulière $\bar{E}_p = m k_B / k_A$.

E_s : solution de l'équation sans second membre

$$E_s = C e^{-k_A t}$$

d'où la solution générale

$$E_2(t) = C e^{-k_A t} + m k_B / k_A$$

or à $t=0$ $E_2(0) = 0 = C + m k_B / k_A$ d'où $C = -m \frac{k_B}{k_A}$

finallement $E_2 = \frac{k_B}{k_A} \cdot U \left(\frac{1 - e^{-k_A t}}{t} \right)$

en remplaçant m par U/t E_2 devient :

$$E_2 = k_B \cdot U \cdot \left(\frac{1 - e^{-k_A t}}{k_A \cdot t} \right)$$

soit :

$$E_2 = \frac{a E_1 \sinh \eta_0}{(g_{11})^{1/2}} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 - \beta_0}{\beta_1 (E_2 - E_1 \beta_0)} \cdot U \cdot \frac{1 - e^{-k_A t}}{k_A t}$$

en remplaçant β_0 et β_1 par leurs expressions on obtient la forme générale de E_2 .

$$E_2 = a E_1 \frac{\sinh \eta_0 \cos \theta}{(g_{11})^{1/2} \cos \alpha} \frac{\left(1 - \mu_0 Q_1'(\mu_0) / Q_1(\mu_0) \right) U \left(\frac{1 - e^{-k_A t}}{k_A t} \right)}{\left(l - 2a \mu_0 \frac{Q_1(l/ka)}{Q_1(\mu_0)} \right) \left(E_2 - E_1 \mu_0 \frac{Q_1'(\mu_0)}{Q_1(\mu_0)} \right)} \quad (10)$$

- On remarque (9) et (10) peuvent être mises sous forme

$$E_2 = K' U A(t).$$

où $A(t) = \begin{cases} e^{-k_A t} & ; \text{ pour } U = U_0 \\ \frac{1 - e^{-k_A t}}{k_A t} & ; \text{ pour } U = mt \end{cases} \quad (11)$

Cette fonction $A(t)$ est identique à celle trouvée par Beroual [4] dans le cas général d'un modèle sphérique.

Pour une particule non conductrice ($\sigma_2 \approx 0$) on aura $K_p = 0$ et par conséquent $A(t) = 1, \forall t$,
d'où le champ électrique à l'intérieur de la particule non conductrice.

$$E_2 = K' U$$

3.3) Expression du champ électrique à l'intérieur du diélectrique liquide.

en remplaçant E_0 et E_2 par leurs expressions dans (4) nous aurons :

$$\phi_1 = \frac{U}{B_1} a \cos \theta \left(\cosh \eta \frac{Q_1(\cosh \eta)}{Q_1(\cosh \eta_0)} - \cosh \eta \right) - \coth \eta \cos \theta \frac{Q_1(\cosh \eta_0)}{Q_1(\cosh \eta)} K' U A(t)$$

- calcul de E_{1r}

$$E_{1r} = \frac{1}{(g_{11})^{1/2}} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \text{ soit :}$$

$$E_{1r} = \frac{U a \cos \theta \sinh \eta}{(g_{11})^{1/2} B_1} \left(1 - \cosh \eta \frac{Q_1'(\cosh \eta)}{Q_1(\cosh \eta_0)} \right) + \frac{\cos \theta \coth \eta_0 \sinh \eta}{(g_{11})^{1/2}}$$

$$\frac{Q_1'(\cosh \eta)}{Q_1(\cosh \eta)} K' U A(t)$$

Lorsque $\eta = \eta_0$ l'expression de E_{1r} se réduit à :

$$E_{1r} = \frac{a U}{(g_{11})^{1/2} B_1} \cdot \sinh \eta_0 \cos \theta \left(1 - \mu_0 \frac{Q_1'(\mu_0)}{Q_1(\mu_0)} \right) + \cos \theta \mu_0 \sinh \eta_0 \frac{Q_1'(\mu_0)}{Q_1(\mu_0)} K' U A(t)$$

- avec $\mu_0 = \cosh \eta_0$

soit

$$E_{1r} = \frac{Va \sinh \eta_0 \cos \theta}{(g_{11})^{1/2}} \cdot \frac{U}{\beta_1} (1 - \beta_0) \left(1 + \frac{E_1 \beta_0}{E_2 - E_1 \beta_0} A(t) \right)$$

calcul de E_{1t} :

$$E_{1t} = -\frac{1}{(g_{11})^{1/2}} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta}$$

$$E_{1t} = \frac{a \sin \theta}{(g_{11})^{1/2}} \frac{U}{\beta_1} \left[\coth \eta_0 \frac{Q_1(\cosh \eta)}{Q_1(\cosh \eta_0)} + \cosh \eta_0 \varepsilon_1 \frac{Q_1(\cosh \eta)}{Q_1(\cosh \eta_0)} \frac{1 - \beta_0}{E_2 - E_1 \beta_0} A(t) \right]$$

l'équation générale de E_{1r} nous donne :

$$\vec{E}_1 = \left[\frac{Va \sinh \eta_0 \cos \theta}{(g_{11})^{1/2}} \cdot \frac{U}{\beta_1} (1 - \beta_0) \frac{Q_1'(u)}{Q_1(u_0)} \right] + \frac{\cos \theta \coth \eta_0 \sinh \eta}{(g_{11})^{1/2}} \frac{Q_1'(u)}{Q_1(u_0)} R' u A(t) \vec{a}_\eta + \frac{a \sin \theta}{(g_{11})^{1/2}} \frac{U}{\beta_1} \left[\coth \eta_0 \frac{Q_1'(u)}{Q_1(u_0)} + \cosh \eta_0 \varepsilon_1 \frac{Q_1(u)}{Q_1(u_0)} \frac{1 - \beta_0}{E_2 - E_1 \beta_0} A(t) \right] \vec{a}_\theta \quad (12)$$

Lorsque $\eta = \eta_0$ l'expression de E_{1t} se réduit à :

$$E_{1t} = \frac{a \sin \theta}{(g_{11})^{1/2}} \frac{U}{\beta_1} \left[\cosh \eta_0 \varepsilon_1 \frac{1 - \beta_0}{(E_2 - E_1 \beta_0)} A(t) \right]$$

et :

$$\vec{E}_1 = \frac{a \cos \theta \sinh \eta_0}{(g_{11})^{1/2}} \cdot \frac{U}{\beta_1} (1 - \beta_0) \left[\frac{1 + \frac{E_1 \beta_0}{E_2 - E_1 \beta_0} A(t)}{E_2 - E_1 \beta_0} \right] \vec{a}_\eta + \frac{a \sin \theta}{(g_{11})^{1/2}} \frac{U}{\beta_1} \cosh \eta_0 \left[\frac{E_1 (1 - \beta_0)}{E_2 - E_1 \beta_0} A(t) \right] \vec{a}_\theta$$

D'après ce résultat on croit que E_1 dépend de plusieurs paramètres et en particulier le temps.

Notons que (12) peut être utilisé pour retrouver certains résultats déjà établis et qui ne sont qu'un cas particulier de celle-ci.

Pour faire l'étude générale de \vec{E}_1 on peut fixer η et t et faire varier θ . on peut faire donc une étude graphique

Le champ électrique maximum à la surface $\eta = \eta_0$ de la particule est obtenu pour $\theta = 0$
ainsi d'après (12) $E_{1t} = 0$ et $E_{1max} = E_{1n}$

soit :

$$E_{1max} = \frac{U(1-B_0)}{B_1} \left[1 + \frac{e_1 B_0}{e_2 - e_1 B_0} A(t) \right]$$

IV Étude du champ électrique à l'intérieur de la bulle.

5.1 Expression du champ électrique dans le cas général

comme on l'a vu précédemment, l'expression du champ électrique E_2 à l'intérieur de la particule diélectrique en suspension dans le liquide isolant, peut s'écrire sous la forme.

$$E_2 = k' U f(t)$$

5.2 Détermination des valeurs extrêmes dans le cas $\rho \gg c$.

Pour cela il est nécessaire de fixer certains paramètres ainsi pour $\theta = 0$ $E_2 = E_{2n}$ et $\varphi = 0$ le champ est max son expression est:

$$E_{2 \max} = \frac{\epsilon_1 (1 - \beta_0)}{\beta_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta_0)} f(t) \quad (13)$$

Le paramètre θ étant fixé on fera varier η_0 vers ∞ , nous obtiendrons une particule presque sphérique ceci nous permettra de comparer avec ceux déjà établis auparavant [6]

on peut faire un développement limité de $Q_1(\mu_0)$

$$Q_1(\mu_0) = \frac{\mu_0}{2} \ln \frac{\mu_0 + 1}{\mu_0 - 1} - 1 \quad \text{avec } |\mu_0| \geq 1$$

on fera un changement de variable $x = 1/\mu_0$ avec $|x| < 1$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots \right)$$

d'où $Q_1(x) \approx \frac{x^2}{3}$ $Q_1'(x) = \frac{2}{3} x x'$ où $x' = \frac{d(x)}{dz}$

$x' = -\frac{1}{\mu_0 z}$ d'où $\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)} = 2x$

ainsi $\mu_0 \frac{Q_1'(\mu_0)}{Q_1(\mu_0)} \approx -2$ soit $\beta_0 = -2$

d'où

$$K_A \approx \frac{\sigma_2}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \quad ; \quad K_B = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1}$$

- considérons maintenant l'expression de β_1

$$\beta_1 = l - 2a\mu_0 \frac{Q_1(l/2a)}{Q_1(\mu_0)} \quad Q_1(l/2a) \approx \frac{4a^2}{3l^2}$$

d'où

$$\beta_1 \approx l \left(1 - 8 \left(\frac{a\mu_0}{l} \right)^3 \right) \text{ or } a\mu_0 = c \text{ finalement}$$

$$\beta_1 \approx l \left(1 - 8 \left(\frac{c}{l} \right)^3 \right) \text{ comme on a } l \gg c$$

l'expression de β_1 devient : $\beta_1 = l$

Par suite l'expression de K_B sera $K_B = \frac{3\epsilon_1}{l(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)}$

où en posant $\xi = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$

$$K_B = \frac{3}{2 + \xi} \cdot \frac{1}{l} \quad E_{moy} = \frac{U}{l}$$

en remplaçant dans (13), nous obtenons une valeur extrême de E_2

$$E_{2max}(t) = 3 \cdot \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_{moy} f(t) \quad (14)$$

a) Etude en fonction du temps

Lorsque $t \rightarrow 0$ $A(t) \rightarrow 1$ l'expression (14) devient :

$$E_{2 \max} = 3 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_{\text{moy}}$$

ceci est en accord avec ce qui a été établi dans le cas d'une charge initiale nulle ($Q=0$) [7]

Pour un temps assez long $t \rightarrow \infty$ $A(t) \rightarrow 0$ et

$$E_{2 \max} = 0$$

on dit que la particule se métalise.

b) Etude de $E_2(t)$ en fonction des permittivités :

trois cas particuliers importants sont à considérer

1°) $\epsilon_1 = \epsilon_2$

ce qui signifie que le milieu est pur

dans ce cas $E_{1 \max} = E_{2 \max} = E_{\text{moy}} A(t)$

ce qui signifie que le champ électrique dans un liquide idéalement pur est uniforme.

2°) $\epsilon_1 \ll \epsilon_2$

La permittivité diélectrique de la particule en suspension est très grande devant celle du liquide.

$$E_{2 \max} = 3 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{\text{moy}} A(t)$$

Le cas correspondent à une goutte d'eau immergée dans l'huile de transformateur par exemple ce cas est très rencontré en pratique

$$4.3) \quad \epsilon_2 \gg \epsilon_1$$

La permittivité diélectrique de la particule est très petite devant celle du liquide, dans ce cas :

$$E_{2max} = \frac{3}{2} E_{moy} A(t)$$

en particulier à $t=0$ on retrouve un résultat déjà établi [8]

$$E_{2max} = \frac{3}{2} E_{moy}$$

Cette étude faite, on peut constater que toutes les formules établies auparavant dans le cadre de ce sujet ne sont que des cas particuliers de ce qu'on vient d'établir.

4.3 Étude du champ électrique dans le cas pratique d'une goutte d'eau immergée dans l'huile de transformateur.

Soit une goutte d'eau de permittivité diélectrique relative $\epsilon_{2r} = 80$ et de conductivité $\sigma_2 = 10^{-5} \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ immergée dans une huile de transformateur de permittivité relative $\epsilon_{1r} = 2$ et de conductivité $\sigma_1 = 0$.

Nous avons vu que l'expression de $E_2(t)$ est de la forme :

$$E_2(t) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_{\text{moy}} A(t)$$

d'où son étude revient à celle de $f(t)$ puisque ils ont la même forme.

Pour cela on étudiera d'abord les constantes k_A et k_B puis établir un tableau de $f(t)$ pour les deux formes de la tension

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ H/m}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_{2r} = 708,32 \cdot 10^{-12} \text{ H/m}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{1r} = 17,708 \cdot 10^{-12} \text{ H/m}$$

$$k_A = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} = 1,399 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{k_B}{l} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} = 0,0233$$

$$\text{d'où } E_{2t} = 0,0233 E_{\text{moy}} A(t)$$

$t (\mu s)$		0	10^{-2}	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-1}$	1	5	8
$A_1(t)$	$U = Cte$	1	0,98	0,83	0,57	0,24	0,005	$1,46 \cdot 10^{-5}$
	$U = mt$	1	0,99	0,92	0,76	0,47	0,12	0,09
$E_2(t)$ E_{moy}	$U = Cte$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$4,8 \cdot 10^{-5}$
	$U = mt$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$

Tableau-1-

A(t)

forme de tens

- (1) A(t) pour $U = mt$
- (2) " " " $U = U_0$

$\epsilon_{1r} = 80$ $\epsilon_{1r} = 2$ $\sigma_2 = 10^{-5} \text{ S cm}^{-1}$

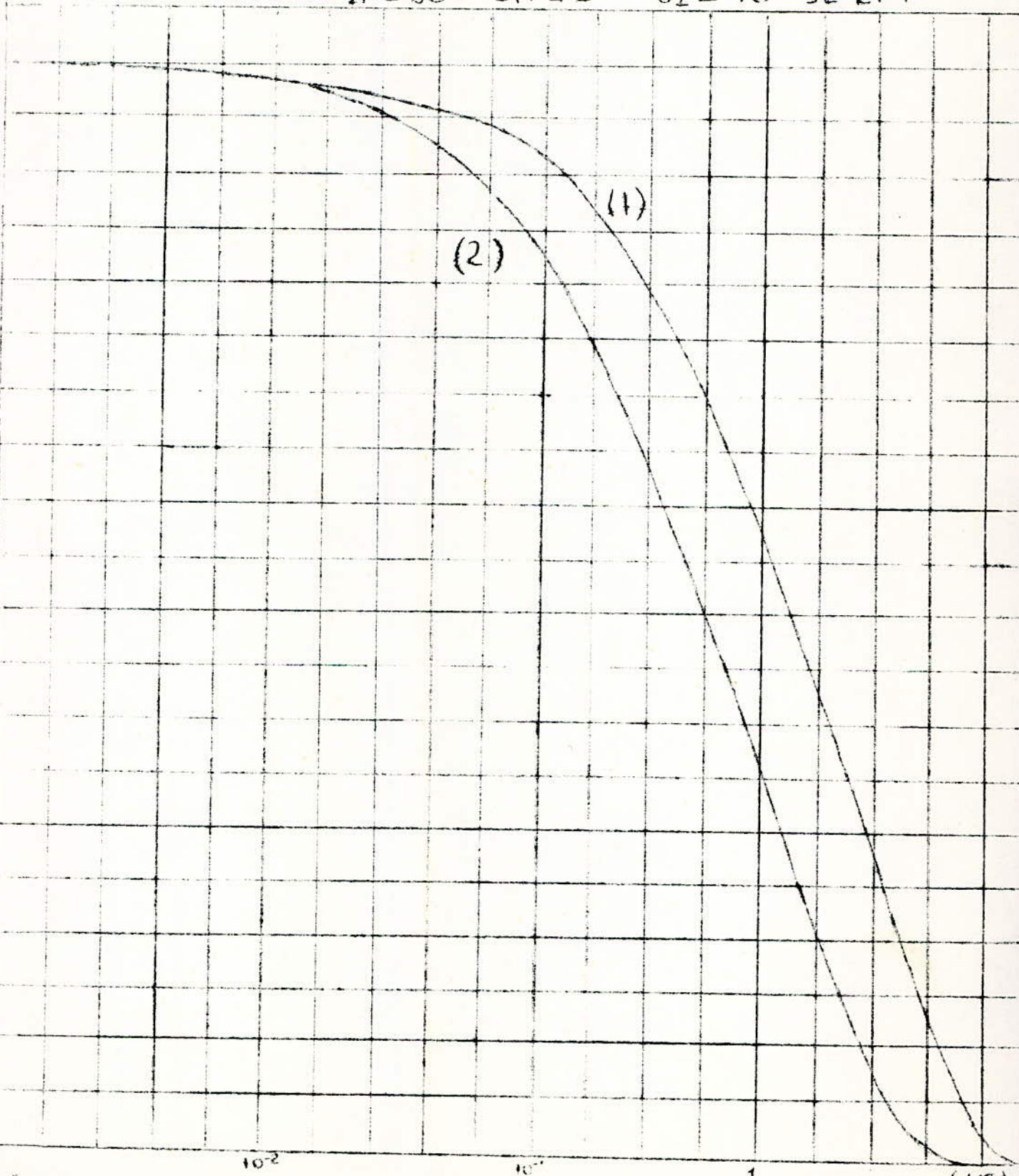


fig 3 courbes A(t) pour une goutte d'eau immergée dans l'huile (1/5)

V Étude de la déformation de la bulle

5.1 forme de la bulle dans le cas général

l'équation de la forme de la bulle dans le cas général est donnée par [4]

$$\mathcal{C}_x - \mathcal{C}_T = \frac{1}{2\sigma_f E_1} \left\{ (E_1 - E_2)^2 E_2^2 \cos^2 \theta + 3(E_2 + E_1) \sigma E_2 \cos \theta + 2(\sigma^2 + \sigma_c^2) \right\}$$

où \mathcal{C}_x : courbure de la bulle en 1 point x .

σ_f : tension de surface en chaque point de la bulle

D'après cette équation on voit que la forme de la bulle dans le cas général n'est plus un ellipsoïde de révolution.

$$\mathcal{C}_x - \mathcal{C}_T = \frac{1}{2\sigma_f E_1} \left\{ (E_1 - E_2)^2 E_2^2 \cos^2 \theta \right\}$$

on peut considérer le point $M(\theta = \frac{\pi}{2})$ au lieu du point quelconque x et cette équation paraît alors plus simple car elle résumerait les courbures en deux points correspondants aux demi-axes majeur et mineur de l'ellipsoïde.

$$\mathcal{C}_N - \mathcal{C}_T = \frac{1}{2\sigma_f E_1} (E_1 - E_2)^2 E_2^2$$

C'est cette équation qui traduit notre modèle.

5.2 Cas du modèle considéré

Dans ce cas l'équation de la forme est donc :

$$C_N - C_T = \frac{1}{20 \rho_f E_1} (E_1 - E_2)^2 E_2^2$$

or $E_2 = K' U f(t)$ d'où

$$C_N - C_T = \frac{1}{20 \rho_f E_1} (E_1 - E_2)^2 K'^2 U^2 f(t)^2$$

- On voit que la forme de la bulle est fonction de tension superficielle, de sa permittivité diélectrique et celle du milieu liquide, de l'intervalle entre électrodes, de l'amplitude et du temps d'application de la tension aux électrodes.

Il est donc question de passage de la bulle dans un état d'instabilité à des dimensions, sont telles qu'elles lui permettent de s'allonger sans joindre les électrodes par un canal.

paramètres dont la concentration et les dimensions des particules influent aussi sur la forme du champ électrique, et donc sur la rigidité diélectrique du liquide isolant.

Le mouvement des particules peut entraîner la formation de ponts .

La considération de la densité de charge superficielle comme fonction du temps a permis de mettre en évidence la dépendance du champ électrique des paramètres t , u , a , δ_2 , ϵ_1 et ϵ_2 .

Ainsi toutes les formules de E_1 et E_2 rencontrées dans la littérature ne sont valables que dans des cas particuliers - elles correspondent à l'état stable du système .

BIBLIOGRAPHIE .

- 1) STRATTON, J.A / 1961/ : THEORIE DE l'electromagnetisme,
Dunod - Paris :
- 2) DZUWARLI, C.M., WIECZCHAJZER, G.W., SZTEJNSZRAJBIER, W.J./-
1961/ SIKY ROZCIAGAJACE DLA TROJOSIOWEJ ELIPSOIDY
OBROTOWEY W POLU ELEKTRYCZNYM.
ARCH , ELEKTROTECH .
- 3) KRASUCKI , Z / 1968/ BREAKDOWN OF COMMERCIAL LIQUID AND
LIQUID - SOLID DIELECTRICS , ALSTON HIGH VOLTAGE
TECHNOLOGY , OF XOVO UNIVERSITY PRESS -
- 4) BERDUAL . RAPORTY POLITECHNIKA WROCLAWSKA INSTITUT
PODSTAW. ELEKTROTECHNIKI
- 5) KOK , J.A / 1961 / . ELECTRICAL BREAKDOWN OF INSULATING.
LIQUIDS, PHILIPS TECHNICAL LIBRARY , EINDHOVEN .
- 6) PANTCHENKOV, G.M, TSABEK, L, K/1969/ COMPORTEMENT D'EMULSION
DANS UN CHAMP ELECTRIQUE .P. 102/ EN RUSSE) .
- 7) GORIATCHKIN . SN / 1970 / ;
ZNIEKSZTALCENIE JEDNORODNEGO. POLA.
ELEKTRYCZNEGO CZASTKAMY ZANIECZYSZCZEN W OLEJU. TRANSFOR-
MATOROWYM. ENERGITIKA 1 / EN RUSSE /.
- 8) MOON ET SPENCER.
FIELD THEORY FOR ENGINEERS .
- 9) PHENOMENES DE CONDUCTION DANS LES LIQUIDES. ISOLANTS .
C N R S PARIS 1970 .
- 10 J.I Skowronski 1968 : Etude des decharges dans les dielec-
triques liquides . - Academie des sciences de Pologne- Wroclan .