

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique



Thèse de DOCTORAT

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Par

Nasreddine AMOURA

Ingénieur et Magistère en Génie Mécanique, ENP

Thème

Identification et caractérisation des défauts
en milieux axisymétriques par la méthode
des équations intégrales duales

Soutenue le : 12 Juillet 2010

Devant le jury :

M. S. LARBI	Professeur	ENP	Président
M. R. AYAD	Professeur	ESIEC, Reims, FRANCE	Examineur
M. A. NOUR	Professeur	Univ. de Boumerdès	Examineur
M. M. HAMMOUTHENE	Professeur	ENP	Examineur
M. A. OUAHSINE	Professeur	UTC, FRANCE	Examineur
M. J.M. ROELANDT	Professeur	UTC, FRANCE	Examineur
M. H. KEBIR	MC	UTC, FRANCE	Directeur
M. S. RECHAK	Professeur	ENP	Directeur
M. B. NECIB	Professeur	Univ. de Constantine	Invité

Année 2010

A mes parents...

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire Roberval (UMR 6253, UTC-CNRS), de l'Université de Technologie de Compiègne dans le cadre d'une convention de cotutelle de thèse ENP-UTC.

Je remercie Monsieur le Professeur Jean-Marc ROELANDT, Directeur du laboratoire Roberval, qui a tout mis en œuvre pour faciliter la réalisation de ce travail et pour avoir accepté d'honorer le jury de sa présence en tant qu'examinateur.

Je remercie Monsieur le Professeur Said RECHAK, Directeur du Laboratoire Génie Mécanique et Développement de l'École Polytechnique d'Alger, pour m'avoir donné l'opportunité de vivre cette expérience très instructive, et qui a su me guider tout au long de ce travail.

Je remercie particulièrement mon ami le Docteur Hocine KEBIR, enseignant chercheur à l'UTC et initiateur de ce travail, qui m'a accueilli comme un ami et un collègue au sein du laboratoire Roberval. De par sa compétence, son appui moral et sa patience, il a su m'informer, me conseiller et me laisser une grande autonomie dans mes initiatives à mener ce travail à terme.

J'adresse mes sincères remerciements à :

- Monsieur le Professeur Rezak AYAD de l'université de Reims et Monsieur le Professeur Abdelkader NOUR de l'université de Boumerdès (Algérie) pour avoir accepté de rapporter ce travail.
- Monsieur le Professeur Brahim NECIB de l'université de Constantine, Monsieur le Professeur Malek HAMMOUTENE de l'ENP, Monsieur le Professeur Abdellatif OUAHSINE de l'UTC et Monsieur le Professeur Salah LARBI de l'ENP pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'examen de ce travail en honorant le jury de leur présence.

J'adresse mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé et encouragé tout au long de ce travail, tant à l'ENP qu'à l'UTC, trop nombreux pour être cités de peur d'en oublier certains.

Table des matières

NOTATIONS	9
RESUMES	11
INTRODUCTON GENERALE	17
CHAPITRE 1 IDENTIFICATION DES FISSURES DANS LES STRUCTURES ENDOMMAGEES	19
1.1 INTRODUCTION	19
1.2 PROCEDES NON DESTRUCTIFS DE CONTROLE DE PIECES MECANIQUES	19
1.3 SUR L'ORIGINE DES FISSURES PAR FATIGUE	20
1.3.1 MODIFICATIONS MICROSTRUCTURALES INDUITES PAR LA DEFORMATION CYCLIQUE	20
1.3.2 AMORÇAGE DES FISSURES	21
1.3.3 PROGRESSION DE LA FISSURE	22
1.3.4 RUPTURE DE LA STRUCTURE	23
1.4 DIFFERENTES APPROCHES EN DIMENSIONNEMENT	24
1.4.1 APPROCHE EN DUREE DE VIE	24
1.4.2 APPROCHE EN TOLERANCE AUX DOMMAGES	25
1.5 CALCUL DE LA DUREE DE VIE EN PROPAGATION	25
1.5.1 LOI DE PARIS	26
1.5.2 LOI DE WALKER	26
1.5.3 LOI DE FORMAN	27
1.5.4 LOI NASGRO	27
1.6 ANALYSE INVERSE ET ALGORITHMES D'OPTIMISATION	29
1.6.1 DEFINITION DE LA FONCTION-COUT	29
1.6.2 METHODES D'ORDRE ZERO	30
1.6.2.1 L'algorithme du simplex	30
1.6.2.2 Les algorithmes évolutionnaires	30
1.6.3 METHODES DE DESCENTES	32
1.6.3.1 Méthode de Newton	33
1.6.3.2 Méthodes de Quasi-Newton	34
1.6.3.3 Méthodes de la sécante	35
1.6.4 PROBLEMES DE MOINDRES CARRES NON-LINEAIRES	36
1.6.4.1 La méthode de Gauss-Newton	36
1.6.4.2 Méthode de Gauss-Newton amortie	36
1.6.4.3 Méthode de Levenberg-Marquardt	36
1.7 REGULARISATION DU PROBLEME INVERSE D'IDENTIFICATION	37
1.7.1 PROBLEMES INVERSES MAL-POSES	37
1.7.2 REGULARISATION AU SENS DE TIKHONOV	37
1.8 CONCLUSION	39

CHAPITRE 2 LA METHODE DES ELEMENTS DE FRONTIERES POUR L'ELASTICITE AXISYMETRIQUE 41

2.1	INTRODUCTION	41
2.2	FORMULATION ELASTOSTATIQUE TRIDIMENSIONNELLE	42
2.2.1	HYPOTHESES	42
2.2.2	SOLUTION FONDAMENTALE AU PROBLEME DE <i>KELVIN</i>	43
2.2.3	THEOREME DE RECIPROCITE DE MAXWELL-BETTI	44
2.2.4	IDENTITES INTEGRALES POUR LES DEPLACEMENTS ET LES CONTRAINTES	45
2.3	FORMULATION ELASTOSTATIQUE AXISYMETRIQUE	46
2.4	FORMULATION INTEGRALE AXISYMETRIQUE HYPER-SINGULIERE ET SOUSTRACTION DES SINGULARITES	51
2.5	TRAITEMENT NUMERIQUE DES EQUATIONS INTEGRALES AXISYMETRIQUES	52
2.5.1	DISCRETISATION DE LA GEOMETRIE	53
2.5.2	DISCRETISATION DES CHAMPS ELASTIQUES	54
2.5.3	DISCRETISATION DE L'EQUATION INTEGRALE	54
2.5.4	EVALUATION NUMERIQUE DES INTEGRALES	55
2.5.5	CONSTITUTION DU SYSTEME A RESOUDRE	55
2.5.6	CALCUL DES DEPLACEMENTS DES POINTS INTERIEURS	56
2.5.7	CALCUL DES CONTRAINTES DES POINTS INTERIEURS	56
2.5.8	CALCUL DES CONTRAINTES DES POINTS DU CONTOUR	56
2.5.9	ORGANIGRAMME DU MODULE BEM-AXI	57
2.6	VALIDATION NUMERIQUE	58
2.6.1	EVALUATION DE LA CONVERGENCE	58
2.6.2	CAVITE SPHERIQUE DANS UNE BARRE CYLINDRIQUE	59
2.6.3	BARRE CYLINDRIQUE ENTAILLEE	61
2.7	CONCLUSION	63

CHAPITRE 3 SIMULATION DE STRUCTURES AXISYMETRIQUES FISSUREE 65

3.1	INTRODUCTION	65
3.2	EQUATIONS INTEGRALES POUR LES STRUCTURES AXISYMETRIQUES FISSUREES	65
3.2.1	EQUATION INTEGRALE EN DEPLACEMENT POUR LES POINTS DE LA FISSURE	66
3.2.2	EQUATION INTEGRALE EN TENSION POUR LES POINTS DE LA FISSURE	66
3.2.3	EQUATION INTEGRALE EN DEPLACEMENT POUR LES POINTS DU CONTOUR	66
3.2.4	EQUATION INTEGRALE EN TENSION POUR LES POINTS DU CONTOUR	67
3.2.5	DEPLACEMENTS ET CONTRAINTES DES POINTS INTERIEURS	67
3.2.6	CONTRAINTES DES POINTS DU CONTOUR	68
3.3	TRAITEMENT NUMERIQUE DES EQUATIONS INTEGRALES DUALES	68
3.3.1	DISCRETISATION DE LA GEOMETRIE	68
3.3.2	DISCRETISATION DES CHAMPS ELASTIQUES	69
3.3.3	DISCRETISATION DES EQUATIONS INTEGRALES DUALES	69
3.3.3.1	Discrétisation de l'équation intégrale en déplacements pour un point de la fissure	69
3.3.3.2	Discrétisation de l'équation intégrale en tensions pour un point de la fissure	70
3.3.3.3	Discrétisation de l'équation intégrale en déplacements pour un point du contour	71
3.3.3.4	Constitution du système d'équations	71
3.4	EVALUATION DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTES	72
3.4.1	METHODE EN DEPLACEMENTS	72
3.4.2	METHODE EN CONTRAINTES	74
3.4.3	METHODES ENERGETIQUES	74
3.4.4	INTEGRALE DE CONTOUR MODIFIEE	75

3.4.5	UN ELEMENT SINGULIER POUR LE FOND DE FISSURE	76
3.5	VALIDATION NUMERIQUE	78
3.5.1	FISSURE EXTERIEURE DEBOUCHANTE DANS UN CYLINDRE CREUX A PAROI EPAISSE	78
3.5.2	FISSURE INTERIEURE DEBOUCHANTE DANS UN CYLINDRE CREUX A PAROI EPAISSE	81
3.5.3	FISSURE CIRCONFERENCELE EXTERIEURE SUR UN CYLINDRE ENTAILLE	82
3.6	CONCLUSION	84

CHAPITRE 4 SIMULATION DE LA PROPAGATION DES FISSURES DANS LES STRUCTURES
AXISYMETRIQUES **85**

4.1	INTRODUCTION	85
4.2	CRITERES POUR LA DIRECTION DE PROPAGATION EN MODE MIXTE	85
4.2.1	CRITERE DE LA CONTRAINTE TANGENTIELLE MAXIMALE	85
4.2.2	CRITERE DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE MAXIMAL	86
4.3	INCREMENT DE PROPAGATION	87
4.4	MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE DE LA PROPAGATION	87
4.5	SYSTEME D'EQUATIONS INCREMENTEE	88
4.6	RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS INCREMENTE	89
4.7	ALGORITHME DE PROPAGATION D'UNE FISSURE AXISYMETRIQUE	90
4.8	EXEMPLES DE PROPAGATIONS DE FISSURES AXISYMETRIQUES	91
4.8.1	FISSURE CIRCONFERENCELE DANS UN CYLINDRE PLEIN EN TRACTION	91
4.8.2	FISSURE CIRCONFERENCELE INTERIEURE DANS UN CYLINDRE CREUX EN TRACTION	91
4.8.3	FISSURE CONIQUE DANS UN CYLINDRE CREUX	92
4.8.4	CAS D'UN TUBE A PAROI EPAISSE ENTAILLE AVEC UNE FISSURE DEBOUCHANTE	92
4.8.5	CAS D'UNE BAGUE A SECTION EN U COMPORTANT UNE FISSURE DEBOUCHANTE	92
4.9	CONCLUSION	94

CHAPITRE 5 LOCALISATION DES FISSURES DANS LES STRUCTURES AXISYMETRIQUES **97**

5.1	INTRODUCTION	97
5.2	FORME GENERALE DE L'ALGORITHME DU SIMPLEX	97
5.3	DETERMINATION DE LA FONCTION-COUT	99
5.3.1	FORME DISCRETE DE LA FONCTION-COUT	99
5.3.2	CONSTITUTION DU VECTEUR A OPTIMISER	100
5.3.3	FONCTION-COUT EN DEFORMATIONS	100
5.4	ALGORITHME D'IDENTIFICATION PAR SIMPLEX	101
5.4.1	VALIDATION NUMERIQUE DE L'ALGORITHME D'IDENTIFICATION	101
5.4.2	INFLUENCE DE LA TAILLE ET DE LA POSITION DE LA SOLUTION INITIALE SUR L'EVOLUTION DU SIMPLEX	104
5.5	LA SEQUENCE QUASI-ALEATOIRE (SQA)	105
5.6	COUPLAGE SQA-SIMPLEX	106
5.7	VALIDATION NUMERIQUE DU COUPLAGE SQA-SIMPLEX	106
5.7.1	CAS D'UNE FISSURE AXISYMETRIQUE CONFINEE DANS UNE BAGUE A SECTION EN U	106
5.7.2	CAS D'UNE FISSURE ANNULAIRE APLATIE DANS UN CYLINDRE CREUX ENTAILLE	111
5.7.3	CAS D'UNE FISSURE CONIQUE CONFINEE DANS UN ANNEAU	111
5.8	STABILITE DE L'ALGORITHME AU BRUIT DES MESURES	116
5.8.1	GENERATION DES VARIABLES GAUSSIENNES	116
5.8.2	APPLICATION AU CAS DE L'IDENTIFICATION D'UNE FISSURE CONIQUE	117
5.9	CONCLUSION	117

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	121
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	123
LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX	127
ANNEXE A	129
ANNEXE B	131
ANNEXE C	161

Notations

$K_{I,II,III}$	Facteurs d'intensité de contrainte en modes I, II et III
K_C	Facteur d'intensité de contrainte critique
G_C	Taux de restitution d'énergie critique
\mathbf{G}	Vecteurs de Galerkin
G, μ	Module de cisaillement
E	Module d'élasticité
ν	Coefficient de Poisson
$\delta a, \Delta a_i$	Incréments de propagation
$\mathbb{F}(x)$	Fonction-coût
∇, \mathbb{G}	Gradient
\mathbb{H}	Hessien
\mathbf{u}	Vecteur des déplacements
\mathbf{t}	Vecteur des tensions
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur des déformations
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
\bar{x}	Centroïde du simplexe
\mathbf{x}	Vecteur des paramètres à identifier
α	Paramètre de régularisation, coefficient de réflexion du simplexe
β	Coefficient de contraction du simplexe
γ	Coefficient d'expansion du simplexe
α^*	Angle de bifurcation de la fissure
$U_{ij}(P, Q)$	Noyaux des déplacements
$T_{ij}(P, Q)$	Noyaux des tensions
$D_{ijk}(P, Q)$	Dérivées des noyaux des déplacements
$S_{ijk}(P, Q)$	Dérivées des noyaux des tensions

Notations

R, Z	Coordonnées du point source
r, z	Coordonnées de la variable champ
$N_i(s)$	Fonctions de forme

الملخص

عدد كبير من العناصر الموجودة في التطبيقات الصناعية يمكن أن تمثل و تدرس كعناصر ذات تناظر محوري. في بيئاتهم وطيلة مدة حياتهم، فإنهم يخضعون لاختبارات الكشف الغير متلف قصد التحقق من سلامتهم من العيوب و التشققات. الموجات فوق الصوتية، موجة فوكو الكهربائية والسوائل المخترقة أو الأشعة السينية هي أساليب مكلفة نسبيا وثقيلة ، إضافة إلى أنها لا تعطي الموقع الدقيق لهذه العيوب. في تقنيات أخرى ، فمن الممكن قياس استجابة العنصر ، لترددات انتقالية أو إجهادات ساكنة أو ديناميكية. و إذا تم استغلال هذه المعلومات عن طريق التكنولوجيا الرقمية، فإنه يمكن تحديد هوية الشرخ أو العيب بأكثر دقة.

تمثل "المشاكل المعكوسة" التي تهتم بتحديد الشروخ في الهياكل الميكانيكية تحديات حقيقية يتم من خلالها تطوير بحوث مكثفة و خاصة باستعمال طريقة عناصر الحدود . في هذا السياق، يهدف هذا العمل إلى تطوير وسيلة فعالة لتحديد وتوصيف الشروخ في الهياكل ذات التناظر المحوري, حيث يتم استخدام الأسلوب المزدوج لعنصر الحدود من أجل حل المسألة المباشرة. ثم اقتران تسلسل شبه عشوائي (SQA) ، وخوارزمية السيمبلكس (Simplex) ، مما يسمح بإعطاء القيمة الدنيا للدالة الوظيفية. نوعية النتائج المشجعة المتحصل عليها تجعل من الاقتران SQA - Simplex ، من أنجع المناهج المناسبة تماما للمسائل الخاصة باستكشاف الشروخ باستعمال طريقة عناصر الحدود المزدوجة.

Résumé

Un nombre important de composants, présents dans les applications industrielles, peuvent être simulés en tant que domaines axisymétriques. Dans leurs environnements, pendant leur utilisation, ils subissent des essais non destructifs permettant de détecter d'éventuels défauts ou fissures. Les ultrasons, le courant de Foucault, les fluides pénétrants ou les rayons X sont des méthodes relativement chères et lourdes. En plus, elles ne donnent pas l'emplacement exact de ces défauts. Le principe de ces méthodes consiste à appliquer un champ (vibration, champs électromagnétique, rayonnement...) au composant et de lire les réponses en certains points « capteurs » judicieusement sélectionnés.

Dans d'autres techniques, il est possible de mesurer la réponse statique, stationnaire ou transitoire, ainsi que les fréquences propres. Si cette information est employée dans une technique numérique, une identité plus précise pour le défaut pourrait être produite. Le problème, ainsi abordé, appartient à la classe des problèmes inverses d'identification. Sur le plan de la simulation numérique, les problèmes inverses d'identification de fissures dans les structures mécaniques sont de véritables défis et conduisent à des activités de recherche importantes et notamment par éléments de frontière.

Dans ce contexte, le présent travail a pour objectif le développement d'une méthode robuste pour l'identification et la caractérisation de fissures dans des structures axisymétriques. La méthode des éléments de frontière duale est utilisée pour la résolution du problème direct. Ensuite, un couplage d'une *séquence quasi-aléatoire* (SQA) et de l'algorithme du *simplex* permet la minimisation de la fonction-coût. Cette dernière est exprimée par la norme quadratique des erreurs entre les déformations calculées et celles mesurées aux points capteurs. Les mesures sont aléatoirement perturbées et la norme résiduelle est régularisée afin de produire un algorithme efficace et numériquement stable.

La qualité des résultats obtenus et les performances intéressantes en temps de calcul font du couplage SQA-simplex, une approche bien adaptée aux problèmes d'identification de fissures axisymétriques.

Mots-clés : Elasticité axisymétrique, éléments de frontière, fissure, rupture, algorithme du Simplex, séquence quasi-aléatoire.

Abstract

Many components used in industrial applications can be simulated as axisymmetric media. In situ, and throughout their lifespan, they undergo non destructive tests to detect any flaws or cracks. Ultrasonic, Eddy current, flux leakage or x-ray tests are quite expensive and resources intensive, yet they don't yield an exact location of the defects. In these methods a specific field is applied to the component in question and a set of sensors, meticulously placed, measure the response. In other techniques, it is possible to measure static response, steady state or transient response and eigenfrequencies. If this information is used in a numerical technique, a more accurate identity for the defect could be produced. Problems dealing with this information are known as inverse identification techniques. Prolific research activity has seen the light dealing with the numerical simulation of inverse problems of cracks identification especially in mechanical structures by the means of boundary elements.

In this context, the present work aims at the development of a robust method for the identification and the characterization of cracks in axisymmetric structures. The dual boundary element method is used to solve the direct problem followed by a coupled quasi-random sequence and the simplex algorithm. This allows the minimization of the cost function, which is expressed as the difference between strains at the boundary sensor points, in the guessed crack shape, and the ones measured in the actual crack identity. A closed loop process that uses the initial measures that are randomly disturbed and the residual norm is regularized to provide an efficient and numerically stable algorithm that leads to a stabilized solution.

The quality of the results and the interesting performances in terms of computing time make the coupled SQA-simplex algorithm, a well adapted approach to axisymmetric crack identification problems.

Keywords: Axisymmetric elasticity, boundary elements, crack, failure, Simplex algorithm, quasi-random sequence.

Introduction générale

Les constructions, dont la forme présente une symétrie de révolution, sont omniprésentes dans notre quotidien (cylindres, conduites, blindages, tours,...), et occupent une partie non-négligeable dans les structures et les machines, que le génie de l'homme ne cesse d'améliorer, afin de leur conférer une bonne intégrité structurale le long de leurs cycles de vie diverses. La connaissance et la maîtrise des phénomènes pouvant altérer le bon fonctionnement de ces structures (dégradation, fragilisation, ruine...) est d'une importance capitale pour l'homme, et peut engendrer des conséquences tragiques aussi bien sur le plan humain qu'économique ou environnemental. Le contrôle périodique des structures a toujours été un outil très efficace pour parer à d'éventuelles défaillances, et plus particulièrement, les techniques de « *contrôle non destructif* » (CND) y occupent une place de choix.

Le développement des procédés de CND a été initié vers les années 1960-70 pour répondre aux demandes de secteurs comme celui du nucléaire, du transport en général et de l'aéronautique en particulier, de l'extraction (plateformes off-shore) et du transport de fluides (oléoducs, gazoducs) des produits énergétiques et enfin du secteur spatial. Réservées initialement à des branches de l'industrie pour lesquelles la sécurité est un souci essentiel, ces techniques ont progressivement évolué pour être appliquées au contrôle de fabrication d'objets et de produits de masse.

Sur un autre plan, celui de la physique mathématique, les modèles théoriques appliqués aux problèmes d'identification ont longtemps été ignorés, en les considérant soit dénués de sens physique, soit reflétant une modélisation inadéquate. La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes est reconnu et motive de nombreuses recherches en mathématiques. Quelques exemples d'application : la construction de méthodes de contrôle non destructif (détection de fissures), l'identification de caractéristiques physiques (paramètres matériau), parties de structures inaccessibles à la mesure, milieux extrêmes où la mesure est impossible, le recalage de modèles avec des données expérimentales, l'identification de sources de bruit, de pollution, à partir de mesures éparses dans l'environnement, l'imagerie (médicale, sismique, ..), la restauration de signaux bruités ou détériorés, l'extraction de signaux faibles dans un signal bruité, le contrôle ou le pilotage d'installations industrielles et la réévaluation de leurs durées de vie à partir d'examens... A tous ces problèmes, on réserve généralement en littérature le qualificatif de « problème inverse » (l'existence, l'unicité et/ou la continuité de la solution par rapport aux mesures ne sont pas toutes vérifiées) pour les distinguer des problèmes bien posés résolus, de manière exacte ou approchée, par des méthodes classiques. Depuis une trentaine d'années, les problèmes inverses ont acquis le droit d'être cités, car leur utilité pratique est incontestable. Les progrès réalisés dans leur régularisation permettent aujourd'hui de présenter un cadre d'analyse cohérent et rigoureux, même si les difficultés pratiques de mise en œuvre demeurent réelles.

D'un point de vue physique ou expérimental, on désigne par problème inverse, toute situation où l'on souhaite évaluer une certaine grandeur x , inaccessible à l'expérience, à partir de la mesure d'une autre grandeur u directement accessible à l'expérience, connaissant un modèle mathématique du problème direct, qui donne explicitement u à partir de x . Dans cette optique, notre travail de recherche a porté sur le développement d'une méthode robuste permettant d'identifier des fissures macroscopiques dans des structures à géométries axisymétriques, en utilisant *la méthode des équations intégrales duales* (MEID) pour la résolution du problème direct et un algorithme itératif d'optimisation pour le problème inverse.

En première étape, nous avons implémenté la formulation axisymétrique de la MEID dans le code de calcul KSP, développé à l'UTC [1], dont une première version permettant la simulation de la propagation des fissures bidimensionnelles en milieux élastiques, plastiques ou viscoplastiques, est utilisée par les étudiants chercheurs du département de Génie des Systèmes Mécaniques de l'UTC. Cette partie nous a permis de caractériser et de propager des fissures sous un chargement axisymétrique de la structure.

Dans la deuxième phase de nos travaux, nous nous sommes intéressés à l'identification de fissures au moyen d'un couplage faisant intervenir une séquence quasi-aléatoire et un algorithme de minimisation

de la fonction-coût, donnée par la norme quadratique de l'erreur entre les mesures expérimentales et théoriques des déformations, en certains points capteurs, sur une partie de la frontière du domaine.

Et sur ce, nous avons décomposé notre mémoire de thèse en cinq chapitres :

Dans le chapitre I, et après avoir introduit le CND comme outil de surveillance de l'intégrité structurale, nous passons en revue les mécanismes de naissance, croissance et propagation des fissures par fatigue. Ensuite nous présentons les méthodes les plus couramment utilisées dans les problèmes de minimisation de fonctions non linéaires. Enfin, la technique de régularisation de Tikhonov pour les problèmes inverses mal-posés est introduite comme outil stabilisateur de l'algorithme d'optimisation.

Le chapitre II est consacré au développement de la formulation en équations intégrales duales appliquée à l'élasticité linéaire axisymétrique. Les équations intégrales pour l'élasticité tridimensionnelle sont intégrées suivant la direction circonférentielle en exploitant la symétrie axiale et en réduisant la dimension du problème d'une unité. Les techniques d'intégration de noyaux singuliers sont utilisées pour évaluer les intégrales singulières inhérentes à la formulation. Enfin, des exemples de calculs, illustrant les subtilités de la méthode à traiter des cas académiques de problèmes élastiques axisymétriques sont présentés

L'adaptation de la MEID au traitement des discontinuités de la matière (fissures) et au calcul des facteurs d'intensité de contraintes, dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, est le sujet du chapitre III. Pour améliorer la précision de l'approche, un élément singulier, adapté aux fonds de la fissure, est introduit. Afin d'illustrer la pertinence de la méthode, plusieurs exemples sont traités, et les résultats confrontés à ceux obtenus analytiquement ou par la méthode des éléments finis.

Le chapitre IV traite de la propagation des fissures, dans des structures à géométrie et à chargement axisymétrique par la MEID. Les tests présentés dans ce chapitre, montrent une parfaite cohérence du chemin de propagation en fonction du chargement. Un accent particulier est mis sur la simplicité de mise en œuvre de l'algorithme de propagation qui, du point de vue numérique, présente un avantage considérable dû au non-remailage de la structure pendant la phase de propagation, ce qui représente un gain substantiel en temps machine et en volume de stockage.

Le dernier chapitre est consacré à la mise en œuvre de l'algorithme d'identification. La technique est basée sur le couplage d'une méthode aléatoire (SQA) avec un algorithme d'optimisation (Simplex), pour l'identification de fissures axisymétriques, dans des structures à géométrie et à chargement axisymétriques. Comme le simplex est un algorithme à convergence lente, et peut ne pas converger vers la solution recherchée (présence de minimums locaux), nous avons introduit une génération de solutions par une séquence quasi-aléatoire permettant de donner une identité à la fissure dans le voisinage de la solution recherchée. L'efficacité de cette démarche est illustrée au travers de multiples tests sur des domaines à géométries et chargements différents. Enfin, nous avons étudié la stabilité de l'algorithme vis-à-vis du bruit des mesures, en introduisant une perturbation aléatoire des mesures aux points capteurs.

Chapitre 1 Identification des fissures dans les structures endommagées

1.1 Introduction

L'identification des fissures dans les structures est l'un des objectifs du contrôle non destructif (CND), auquel sont soumis les composants mécaniques durant la phase d'élaboration ou pendant leurs durées de vie. Dans ce contexte, la simulation du CND joue un rôle croissant pour concevoir et démontrer les performances à moindre coût des méthodes de contrôle.

La simulation est un facteur crucial d'augmentation de la fiabilité d'un contrôle, dans la mesure où elle permet de maîtriser les paramètres mis en œuvre pendant l'inspection. En mécanique du solide, les problèmes d'identification font parti de la classe plus générale des problèmes inverses: identification expérimentale des lois de comportement, identification des singularités en mécanique de la rupture utilisant les informations accessibles expérimentalement, détermination des contraintes résiduelles, optimisation de forme, etc.

1.2 Procédés non destructifs de contrôle de pièces mécaniques

Le CND consiste à mettre en œuvre des méthodes d'investigation pour permettre d'apprécier sans destruction, l'état d'endommagement des pièces mécaniques et de formuler un avis sur leur aptitude à remplir la fonction à laquelle elles sont destinées. Considérée sous cet aspect d'aptitude au bon fonctionnement, la définition suppose une bonne connaissance de tous les phénomènes mis en jeu, en particulier de la nocivité des défauts, de leur évolution dans le temps et des lois générales de la mécanique de la rupture.

L'exécution de cette tâche nécessite une bonne connaissance des techniques d'investigation mises en œuvre, de leur limite et surtout, une adéquation parfaite entre le pouvoir de détection de chaque technique et les critères appliqués pour la mise en œuvre.

Les techniques de CND les plus couramment employées peuvent être classées en deux familles principales, étroitement liées à la localisation de l'anomalie sur la pièce en cours d'examen [2]:

- Les méthodes de surfaces: pour lesquelles le défaut est localisé en surface extérieure et parmi elles: l'examen visuel, le ressuage, la magnétoscopie ou le courant de Foucault.
- Les méthodes volumiques: pour lesquelles le défaut est localisé dans le volume de la pièce et parmi elles: les ultrasons, les rayonnements ionisants, la thermographie ou l'émission acoustique.

L'application de chaque méthode fait intervenir trois éléments distincts (Fig. 1.1):

- *L'élément excitateur*: bien souvent caractérisé par un rayonnement électromagnétique, ou une vibration et un champ magnétique.
- *L'élément perturbateur*: défini par la pièce et éventuellement par le défaut qu'elle contient.
- *L'élément révélateur*: assuré soit par l'œil, soit par un système de capteurs traduisant sous forme de signaux électriques la réaction de la pièce.

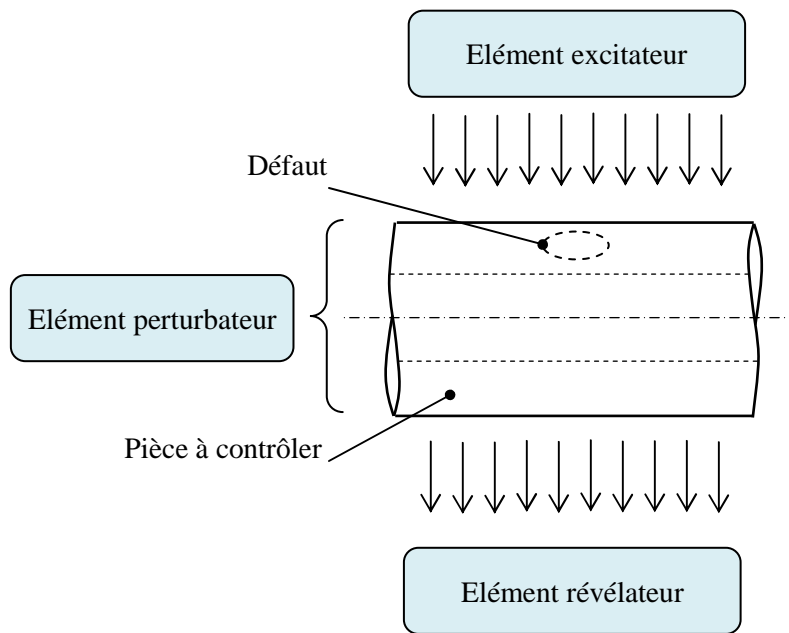


Fig. 1.1 Les trois éléments de base mis en jeu dans un CND

Pour chaque méthode et conformément aux règles de l'assurance qualité, il faut mettre en place une procédure ayant pour objectif d'assurer la fiabilité et la reproductibilité de l'examen, ainsi que la localisation, l'identification et la caractérisation en taille et en nature des défauts, leur classement et présentation, enfin la décision quant à l'affectation du produit avec archivage des résultats et des conditions dans lesquelles a été effectué l'examen. Cela passe, dans chaque cas, par l'élaboration d'un mode opératoire précisant les opérations d'étalonnage, de calibrage, d'acquisition et de traitement des données.

1.3 Sur l'origine des fissures par fatigue

L'expérience industrielle montre que les ruptures de composants ou de structures en fonctionnement normal sont le plus souvent dues à la fatigue. Celle-ci est particulièrement insidieuse du fait de son caractère progressif masqué. L'examen de pièces rompues, associé à des essais interrompus permettant de suivre l'évolution de l'endommagement, conduit à l'analyse de la rupture par fatigue suivant le processus suivant (cas d'un matériau polycristallin) :

- développement de modifications microstructurales qui engendrent un dommage irréversible;
- apparition de microfissures;
- croissance et coalescence de défauts microscopiques pour former des fissures principales;
- propagation stable d'une fissure principale;
- rupture finale.

1.3.1 Modifications microstructurales induites par la déformation cyclique

Le mécanisme le plus représentatif décrit par Wood [3] est illustré par la Fig. 1.2. Dans un matériau polycristallin, lors d'une traction monotone, des lignes de glissement cristallographique émergent à la surface libre du matériau dans les grains favorablement orientés pour le glissement, et ce même si la contrainte macroscopique est inférieure à la limite d'élasticité (Fig. 1.2.a).

Lorsque la direction de sollicitation est inversée, la non-réversibilité du glissement engendre la formation de reliefs à la surface du matériau (Fig. 1.2.b). La répétition de ce processus (Fig. 1.2.c) conduit à la formation d'intrusions (en retrait) et d'extrusions (en relief par rapport à la surface initiale, Fig. 1.2.d). Les intrusions constituent des zones de concentration de contrainte locale favorisant l'apparition de microfissures.

1.3.2 Amorçage des fissures

Dans les polycristaux, la fissure apparaît généralement au sein des bandes persistantes de glissement, sites préférentiels d'amorçage. Dans les alliages industriels, d'autres processus d'amorçage peuvent intervenir en fonction de la microstructure et des conditions de sollicitations. La figure (Fig. 1.3) illustre les différents sites potentiels d'amorçage.

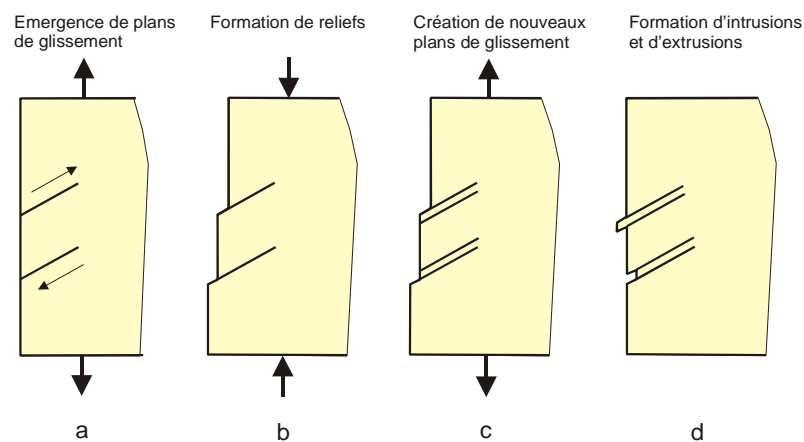


Fig. 1.2 Lignes de glissement cristallographique dans un matériau polycristallin en chargement cyclique

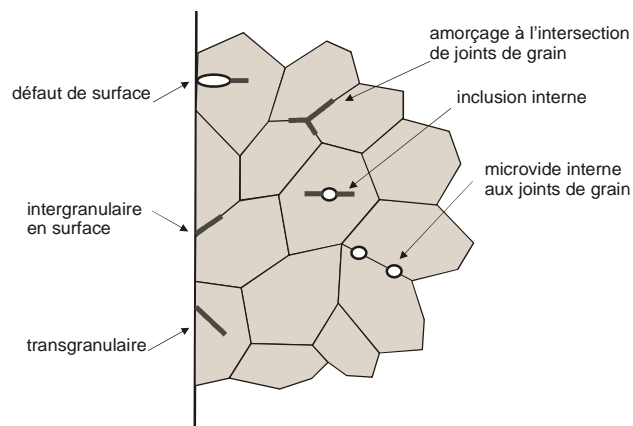


Fig. 1.3 Différents sites d'amorçage de fissures

1.3.3 Progression de la fissure

Après amorçage, les microfissures peuvent se propager sous l'action de sollicitations cycliques, le long de plans de glissement favorables à l'intérieur des grains (Fig. 1.4) [4], pour éventuellement changer de sens à l'interface de deux grains (Fig. 1.5) [5]:

- Lors de la phase de traction, la concentration de la contrainte en tête de fissure produit un glissement le long du plan de la contrainte maximale de cisaillement (Fig. 1.6.b);
- L'écroûissage active d'autres plans de glissement (Fig. 1.6.c), la fissure évolue;
- Des zones de déformations plastiques en traction se sont créées en pointe de fissure et se retrouvent comprimées lorsque le chargement est inversé, des déformations plastiques inverses se produisent alors, et referment partiellement la fissure (Fig. 1.6.d).

Au cours des cycles suivants, certaines de ses fissures vont se propager suivant ces bandes de glissement jusqu'à ce qu'une fissure principale se dégage. Cette fissure principale change alors de direction suivant un plan macroscopiquement distinct. Cette transition d'un régime cristallographique, dit de stade I, à un mode non cristallographique appelé stade II se fait à travers quelques grains (Fig. 1.7).

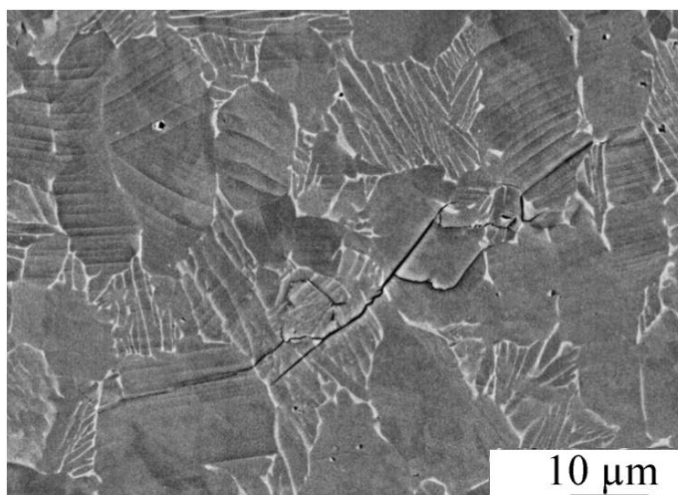


Fig. 1.4 Fissure de fatigue dans un alliage de Titane TA6V. La fissure se propage le long de lignes de glissement.

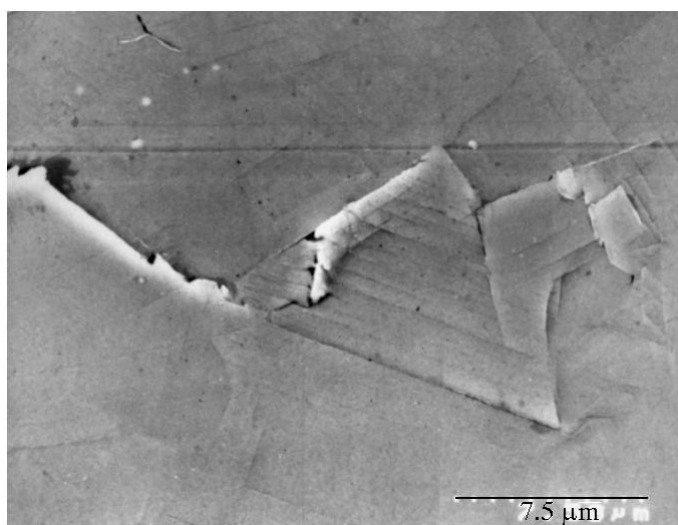


Fig. 1.5 Fissure de fatigue dans un alliage de Nickel N18 à température ambiante. La fissure se propage au croisement de deux plans de glissement.

Au stade I, la taille de la fissure est de l'ordre de quelques dizaines de microns suivant la taille du grain. Cette taille est du même ordre que la dimension de la zone des déformations plastiques. On n'est donc pas en mesure de négliger cette zone, et les conditions d'application de la théorie de l'élasticité linéaire ne sont pas encore réunies. La modélisation de l'évolution de la fissure à ce stade reste très difficile. Le stade II, correspond à l'évolution d'une fissure au delà du millimètre. La zone plastique, en première approximation, est négligeable et la théorie de la mécanique linéaire de la rupture est applicable pour accéder au champ des contraintes au voisinage de la pointe de la fissure [3].

Pour les structures axisymétriques, les expressions en coordonnées polaires des contraintes [6], en théorie de déformation plane, restent valides.

Pour la suite, l'identification des fissures va porter sur celles ayant subi la transition vers le stade II, et qui sont considérées comme étant suffisamment longues pour que le champ des déplacements à la frontière de la structure s'en trouve perturbé.

1.3.4 Rupture de la structure

La rupture brutale de la structure par extension de la longueur de la fissure survient lorsque les conditions de chargement vérifient le critère de rupture considéré. Le plus utilisé fait référence au facteur d'intensité de contraintes critique K en mode I. La rupture se produit lorsque la valeur de K_I atteint une valeur critique K_{IC} caractéristique du matériau et déterminée expérimentalement (K_{IC} est aussi appelé ténacité du matériau). D'autres critères font intervenir l'énergie critique G_c nécessaire à l'avancée de la fissure. Tant que l'énergie fournie au matériau est inférieure à la valeur critique, la fissure est considérée comme stable. Au-delà de la valeur critique, la fissure commence à se propager, théoriquement, sans pouvoir s'arrêter puisque G croît avec la taille de la fissure.

Pour notre étude, nous utiliserons un critère lié aux facteurs d'intensité de contraintes dont les résultats sont satisfaisants pour les matériaux à faible ductilité.

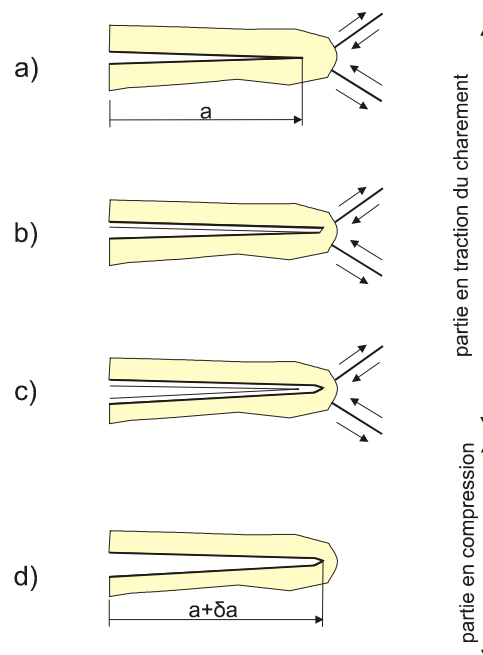


Fig. 1.6 Mécanismes d'ouverture-fermeture

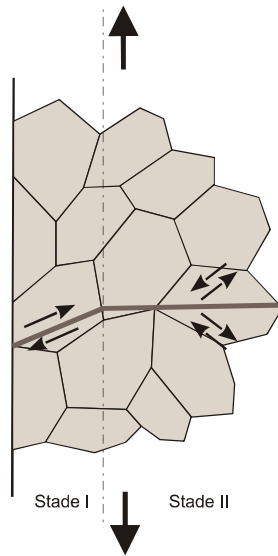


Fig. 1.7 Passage du stade I au stade II

1.4 Différentes approches en dimensionnement

L'objectif d'un dimensionnement d'une structure sollicitée en fatigue est de prédire de façon la plus réaliste sa durée de vie totale, exprimée en nombre de cycles jusqu'à rupture N_f .

Cette durée de vie est la somme du nombre de cycles de sollicitation N_a nécessaires pour amorcer une fissure (vie à l'amorçage) et du nombre de cycles N_p pour atteindre une taille critique préalablement définie (vie en propagation):

$$N_f = N_a + N_p \quad (1.1)$$

Pour l'ingénieur, la durée de vie à l'amorçage est définie, pour une amplitude de contrainte ou de déformation donnée, comme le nombre de cycles requis pour faire naître une microfissure détectable par les techniques de contrôle non-destructifs. Dans ce cas le stade dit "d'amorçage" implique une phase de propagation de fissure de petite dimension. Une fois la fissure amorcée, la fissuration sera décrite par une loi de propagation utilisant les concepts de la mécanique de la rupture afin de déterminer N_p .

1.4.1 Approche en durée de vie

Dans cette approche, le nombre de cycles à rupture est déterminé sur des éprouvettes initialement non fissurées et avec un état de surface contrôlé. On détermine alors le nombre de cycles nécessaire à l'émergence d'une fissure principale (qui peut atteindre 90% de la durée de vie totale) et pour faire propager ce défaut jusqu'à la rupture finale, et ceci en considérant les différents facteurs pouvant affecter la durée de vie (contrainte moyenne, environnement, chargement multiaxial,...). Deux concepts principaux se distinguent dans cette approche:

- **Le concept *Safe Life* (vie sûre)**

Développé durant les années 1950, ce concept repose seulement sur le temps d'amorçage des fissures. La durée de vie est déterminée en appliquant un coefficient de sécurité soit à une durée de vie moyenne, soit à une résistance en fatigue déterminée expérimentalement ou par calcul. Au terme de cette durée de vie, l'élément doit être remplacé, qu'il soit fissuré ou non. Outre la nécessité de réaliser des essais coûteux, ce concept ne fait pas évoluer l'esprit et les modalités des opérations de maintenance, mais cette idée plus précise de la durée de fonctionnement réelle de chaque élément vital, conduit à une augmentation générale de la fiabilité structurelle.

- **Le concept *Fail Safe* (redondance ou sûreté intégrée)**

Introduit dans les années 1960, ce concept implique qu'une défaillance partielle d'un élément n'engendre pas la ruine de la structure, et que celle-ci doit pouvoir supporter le niveau de chargement correspondant, amplifié par un coefficient de sécurité, à des conditions rudes d'utilisation. D'un point de vue maintenance, ceci impose de détecter d'éventuelles ruptures et conduit donc à l'élaboration de programmes d'inspections périodiques.

La figure (Fig. 1.8) illustre les différences de conceptions induites par la prise en compte de ces deux concepts.

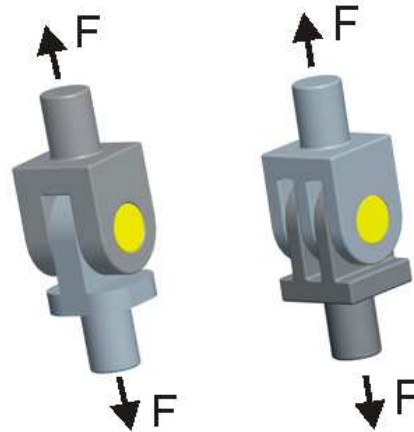


Fig. 1.8 Conceptions *Safe Life* et *Fail Safe*

1.4.2 Approche en tolérance aux dommages

Le concept de tolérance aux dommages appliqué à une structure consiste à garantir, au moyen d'un programme d'inspection spécifique, que tout dommage sera détecté avant qu'il ne devienne critique pour l'intégrité structurelle. En effet, l'application du concept *Fail Safe*, a fait apparaître certaines limitations quant au niveau de l'endommagement et la durée de vie de la structure après rupture du premier chemin d'efforts (Fig. 1.8). Dans ce type d'approche, introduit au début des années 1970, on suppose que tout matériau contient potentiellement un défaut de type fissure, soit préexistant soit créé en service (Fig. 1.9.a). La durée de vie est alors définie comme le nombre de cycles requis pour faire propager ce défaut jusqu'à une taille critique (Fig. 1.9.b) qui dépend de plusieurs critères tels que la ténacité du matériau, la contrainte limite, la déformation admissible etc. On détermine ainsi, soit la durée de vie résiduelle, soit des périodes d'inspection en liaison avec les techniques de contrôle non-destructifs. Le calcul de la durée de vie en propagation se fait au moyen de lois, plus ou moins empiriques, utilisant la Mécanique Elastique Linéaire de la rupture (MELR) en condition de plasticité confinée (i.e. la taille de la zone plastifiée doit être réduite par rapport aux dimensions caractéristiques de la pièce et de la fissure) et le chargement est globalement élastique. Ce type d'approche est largement utilisé dans des applications critiques du point de vue de la fatigue comme la construction aéronautique ou le nucléaire.

1.5 Calcul de la durée de vie en propagation

Pour calculer la durée de vie en propagation, il faut disposer d'une loi de propagation permettant de prédire les cinétiques de croissance des fissures en fonction de l'amplitude du chargement appliqué et des facteurs affectant la propagation. Ces derniers peuvent être d'ordre intrinsèques tels que module et limite d'élasticité, propriétés cycliques et microstructure, ou extrinsèques tels que le rapport de charge R , la température, l'environnement, etc. Une loi de propagation se doit donc de relier la vitesse de propagation à tous ces paramètres.

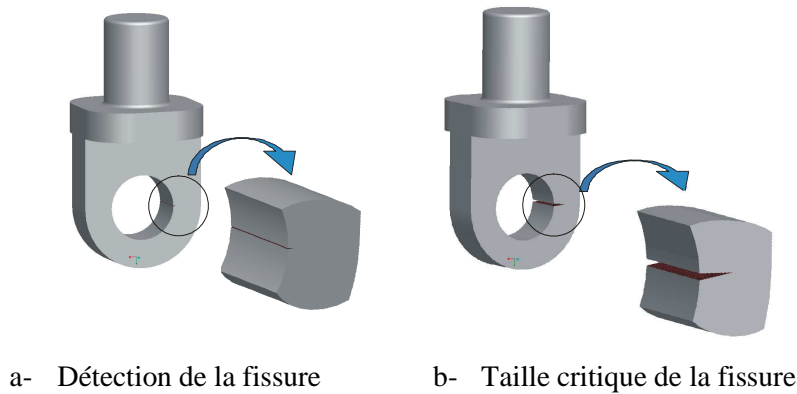


Fig. 1.9 Concept de tolérance aux dommages

On distingue principalement deux types de lois:

- Les lois théoriques développées à partir de modèles qui, si elles intègrent généralement des effets intrinsèques, ont l'inconvénient de rarement prendre en compte l'effet des différents facteurs extrinsèques
- Les lois phénoménologiques (empiriques) dont le but est de décrire le plus simplement possible les variations observées expérimentalement en fonction d'un certain nombre de paramètres.

Dans ce paragraphe on présentera quelques lois empiriques qui sont d'un usage courant en simulation numérique. Une description détaillée des différentes lois de fissuration par fatigue est donnée dans la référence [7].

A rapport de chargement $R = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ constant, la vitesse de propagation est reliée à $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ par la courbe illustrée par la Fig. 1.10. Cette courbe fait apparaître trois régimes de vitesses:

- Le régime du seuil de fissuration $\Delta K < \Delta K_s$. Dans cet intervalle la fissure ne se propage pas (vitesse très faible).
- Un régime linéaire, approximé par la loi de Paris.
- Un régime de propagation accélérée conduisant à une rupture brutale du matériau quand la valeur de ΔK_{\max} approche la valeur critique K_c .

1.5.1 Loi de Paris

Proposé en 1963 par Paris et Erdogan [8], cette loi permet un calcul simple de prédiction de temps de propagation, mais ne précise pas l'influence des paramètres intrinsèques ou extrinsèque sur la propagation. C'est la loi la plus utilisée en pratique, elle est donnée par la formule suivante:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (1.2)$$

Où $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$, C et m sont des coefficients dépendant du matériau.

1.5.2 Loi de Walker

Cette loi est une tentative d'extension de la loi de Paris pour rendre compte de l'effet du rapport de charge sur les vitesses de propagation. Elle est donnée par la formule suivante [9]:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K (1-R)^{m-1})^n \quad \text{pour } R \leq 0$$

$$\frac{da}{dN} = C (K_{\max} (1-R)^{1-m})^n \quad \text{pour } R \geq 0 \quad \text{avec } 0 < m \leq 1$$
(1.3)

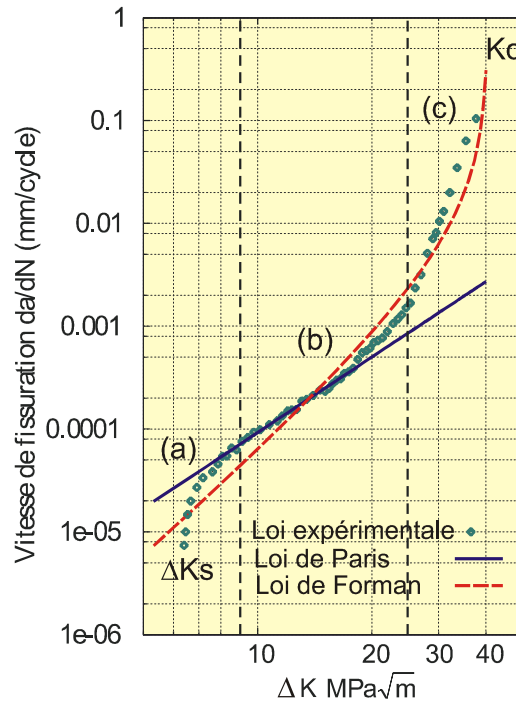


Fig. 1.10 Variation de la vitesse de propagation d'une fissure
 (a): faible vitesse de fissuration (seuil),
 (b): région linéaire (relation de Paris),
 (c): haute vitesse de fissuration (K_C).

1.5.3 Loi de Forman

La loi de Forman[10] constitue une amélioration de la loi de Walker puisqu'elle rend compte de l'évolution asymptotique de la partie supérieure de la courbe de propagation lorsque K_{\max} tend vers K_C :

$$\frac{da}{dN} = C \frac{\Delta K^m}{((1-R) K_c - \Delta K)}$$
(1.4)

Une autre loi de MacEvily-Forman, tente quant à elle de rendre compte de l'ensemble de la courbe de propagation en incorporant la valeur seuil ΔK_S :

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K^2 - \Delta K_S^2) \frac{(1 + \Delta K)}{(K_c - K_{\max})}$$
(1.5)

1.5.4 Loi NASGRO

Développée par Forman et Newman pour le compte de la NASA, elle est utilisée dans le code de prédiction de durée de vie de la NASA (NASGRO [11]). La loi est de la forme:

$$\frac{da}{dN} = C \left[\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right]^m \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{max}}{K_c} \right)^q} \quad (1.6)$$

Où C, m, p et q sont des paramètres dépendants du matériau et ajustés aux résultats expérimentaux. La fonction f qui rend compte des effets de fermeture est donnée par:

$$f = \frac{K_{opt}}{K_{max}} = \begin{cases} \max(R, A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + A_3 R^3) & \text{si } R \geq 0 \\ A_0 + A_1 R & \text{si } -2 \leq R < 0 \\ A_0 - 2A_1 & \text{si } R < -2 \end{cases} \quad (1.7)$$

Les coefficients sont:

$$\begin{aligned} A_0 &= (0,825 - 0,34\alpha + 0,05\alpha^2) \left(\cos \frac{\pi S_{max}}{2\sigma_y} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ A_1 &= (0,415 - 0,071\alpha) \frac{S_{max}}{\sigma_y} \\ A_2 &= 1 - A_0 - A_1 - A_3 \\ A_3 &= 2A_0 + A_1 - 1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

α représente le rapport de confinement entre contrainte plane et déformation plane et S_{max} / σ_y est le rapport entre la contrainte maximale appliquée est la contrainte d'écoulement du matériau. Cette loi rend compte des comportements asymptotiques et intègre l'influence du rapport R par l'intermédiaire de la fonction f .

La formule (1.6) intègre la valeur du seuil pour le rapport R considéré en la valeur de ΔK_{th} :

$$\Delta K_{th} = \Delta K_0 \sqrt{\frac{a}{a+a_0}} \left(\frac{1-f}{(1-A_0)(1-R)} \right)^{-(1+C_s R)} \quad (1.9)$$

- ΔK_0 : valeur du seuil pour R=0;
- a : longueur de la fissure;
- a_0 : longueur intrinsèque de la fissure ($3,81 \cdot 10^{-5}$ m/cycle);
- C_s : coefficient de seuil;

Enfin, la loi NASGRO intègre également l'influence de l'épaisseur sur la valeur critique du facteur d'intensité de contrainte critique K_c :

$$\frac{K_c}{K_{IC}} = 1 + B_k e^{-\left(\frac{A_k t}{t_0} \right)} \quad (1.10)$$

- K_{IC} : ténacité en mode I en contraintes planes;
- A_k et B_k paramètres à ajuster aux résultats expérimentaux;
- t : épaisseur;
- t_0 : épaisseur de référence en déformations planes;

L'intérêt majeur de cette loi c'est qu'elle couvre tout le domaine de propagation, depuis le seuil jusqu'à la rupture et intègre, sur la base de phénomènes physiques, l'influence du rapport de charge R.

Néanmoins, l'identification de l'ensemble des paramètres nécessite un nombre important d'essais, y compris dans le domaine des basses vitesses. On est donc souvent amené à faire des approximations pour obtenir les valeurs des coefficients désirés.

1.6 Analyse inverse et algorithmes d'optimisation

En simulation numérique, le traitement des problèmes d'identification de fissures relève de l'analyse inverse [12]. Ce terme est utilisé pour décrire des problèmes posés avec une information (nécessaire à la résolution d'un problème directe) incomplète a priori. Le problème inverse est exprimé sous une forme relaxée, et l'on cherche juste à minimiser l'erreur entre les données issues de la simulation numérique et les mesures expérimentales.

Les premiers travaux sur les problèmes inverses en mécanique des solides datent de la fin des années 1980, A. Friedman et M. Vogelius [13] ont utilisé la notion de dualité pour résoudre le problème d'identification d'une fissure par des mesures du potentiel électrostatique sur la frontière du domaine. En France, H.D. Bui fut le premier à comprendre l'importance de la dualité dans les problèmes directe et inverse, et à la mettre en pratique [14]. Son intérêt pour les problèmes inverses fut motivé par le fait que les opérations de maintenance des composants nucléaires par EDF nécessitaient, et nécessite encore, beaucoup de recherches et de développements sur les méthodes de CND.

Pour bien poser un problème d'identification, il convient tout d'abord d'analyser le problème et de faire un certain nombre de choix:

Sur les variables à optimiser

Avant de procéder à une analyse inverse, il faut se demander quels sont les paramètres à optimiser.

Sur le domaine d'intérêt

Une fois les variables sélectionnées, il faut attribuer à chacune un intervalle de définition. Cette condition fait appel à l'expérience de l'ingénieur pour donner des ordres de grandeurs des valeurs des paramètres.

Sur la fonction-coût

Il s'agit de définir une fonction rendant compte de la pertinence des solutions potentielles à partir des grandeurs à optimiser. C'est la fonction-coût encore appelée fonction Erreur ou fonction d'adaptation. Elle dépend des objectifs à atteindre. La qualité de la solution dépend en partie de la convenance de sa définition.

Sur l'algorithme d'optimisation

Une fois définie la fonction-coût, reste le choix d'un algorithme de minimisation adapté au problème posé. Il existe, dans la littérature, un grand nombre d'algorithmes itératifs de minimisation de la fonction-coût qu'il est possible de classer dans deux catégories: les méthodes d'ordre zéro et les méthodes à direction de descente.

1.6.1 Définition de la fonction-coût

Soit u un vecteur de \mathbb{R}^n contenant n mesures d'un système physique et \mathbb{L} une application de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n obtenue à partir d'une modélisation du système physique. Le problème inverse consiste à trouver le vecteur de paramètres x_i ($i=1, m$) tel que:

$$\mathbb{L}(x) = u \quad (1.11)$$

Par opposition au problème inverse, le calcul de $\mathbb{L}(x)$ est appelé problème direct et peut être, par exemple, issu de la résolution d'un système d'équations algébriques (Fig. 1.11).

La résolution du problème inverse tel que défini ci-dessus implique que l'application \mathbb{L} soit bijective, donc nécessairement: $m=n$. Alors que dans tous les cas pratiques d'identification de fissures, on a plutôt: $m \ll n$. Une reformulation en termes de minimisation s'impose alors et la nouvelle forme du problème à résoudre est la suivante:

$$\text{Calculer } x^{opt} \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } \begin{cases} \mathbb{F}(x^{opt}) = \min_{x \in \mathbb{R}^m} [\mathbb{F}(x)] \\ \mathbb{F}(x) = \|\mathbb{L}(x) - u\|^2 \end{cases} \quad (1.12)$$

\mathbb{F} est la fonction-coût, définie comme le carré de la norme quadratique des écarts entre les données observées et les données correspondantes calculées.

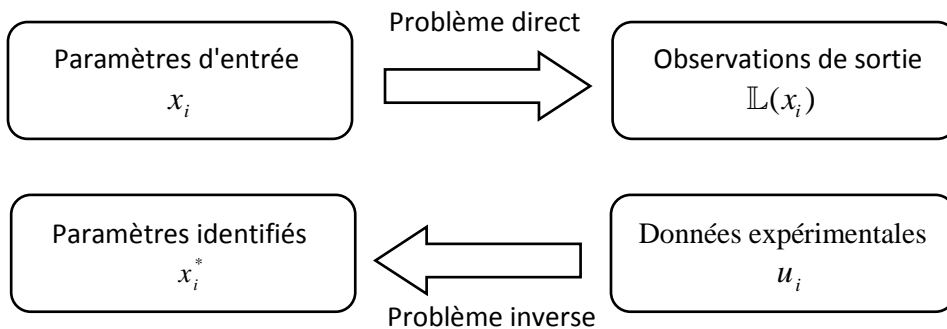


Fig. 1.11 Problème directe et problème inverse

1.6.2 Méthodes d'ordre zéro

Les méthodes d'ordre zéro sont des algorithmes qui ne nécessitent pas le calcul du gradient de la fonction-coût. Leur implémentation ne requiert pas forcément une bonne connaissance du modèle direct, mais elles sont parfois difficiles à paramétrer. Par contre, elles peuvent s'avérer utiles pour la recherche de minima local ou même pour la recherche de minima global.

1.6.2.1 L'algorithme du simplex

L'algorithme du simplex, introduit par Nelder et Mead en 1965 [15], est une méthode d'optimisation non-linéaire qui minimise une fonction dans un espace à plusieurs variables. Cette méthode utilise le concept de *simplex* qui est un polyèdre à $N+1$ sommets dans un espace à N dimensions.

Soit N la dimension de l'espace où la fonction prend ses valeurs. On démarre avec un simplex de cet espace. La première étape consiste à enlever le point du simplex où la fonction est maximale et à le remplacer par la réflexion de ce point par rapport au centre de gravité des N points restants. Si ce point est meilleur, on étire le simplex dans cette direction. Sinon, on est dans une vallée, et on réduit le simplex par une similitude centrée sur le point du simplex où la fonction est minimale. Cette méthode n'utilise que des valeurs ponctuelles de la fonction-coût et ne nécessite pas le calcul du gradient de celle-ci par rapport aux paramètres à identifier. La méthode est détaillée au chapitre V.

1.6.2.2 Les algorithmes évolutionnaires

Les algorithmes évolutionnaires ont été développés en se basant sur les théories de l'évolution et de la génétique [16]. Le vocabulaire associé à cette famille de méthodes est en partie emprunté à ces deux disciplines. Les méthodes génétiques sont des algorithmes stochastiques, dont l'objectif est de générer une suite de groupes de paramètres (populations) à partir d'une solution aléatoire choisie dans le domaine d'étude et dont les éléments (chromosomes) tendent vers ceux du groupe optimal.

L'évolution des éléments vers la solution optimale est réalisée par l'application d'opérateurs génétiques: *sélection, mutation et croisement*, par analogie aux processus génétiques d'évolution de la nature [17]. Les algorithmes génétiques classiques opèrent seulement sur des chaînes binaires, avec des mutations et des croisements simples. Ceci ne s'adapte pas bien aux problèmes d'identification de fissures qui nécessitent des approches plus flexibles. Dans cet objectif, des algorithmes génétiques modifiés ont été développés (appelés aussi: algorithmes évolutionnaires [18]). Ils utilisent des opérateurs de croisements modifiés (simple, arithmétique et heuristique) et de mutations modifiés (uniforme, non-uniforme, dans les bornes). La sélection est effectuée par classement et la probabilité des opérateurs est variable. Les évolutions réalisées par les différents opérateurs sont résumées ci-dessous.

Soit ch le chromosome représentant le vecteur des m variables à optimiser:

$$ch = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m\} \quad (1.13)$$

Avec des contraintes introduites sur les variables (gènes) sous la forme:

$$x_{iG} \leq x_i \leq x_{iD} \quad (1.14)$$

On note $G^n = \{ch_1, \dots, ch_k\}$ une population de k chromosomes à l'étape n de l'algorithme, générée à partir d'une série d'évolutions opérées sur une population initiale G^0 , choisie aléatoirement.

A l'étape $n+1$, la population G^{n+1} est générée en utilisant les opérateurs de sélection, croisement et mutation.

Sélection :

Deux chromosomes (parents) ch_1 et ch_2 sont tirés aléatoirement dans G^n avec une loi de probabilité $\Pi(ch_i)$ proportionnelle à une fonction 'fitness' \mathbb{F} (équation(1.12)), qui est d'autant plus importante que la valeur de la fonction-coût est faible. Certains auteurs proposent pour la loi de probabilité l'expression:

$$\Pi(ch_i) = \frac{1}{\mathbb{F}(ch_i)} \sum_{j=1}^k \mathbb{F}(ch_j) \quad (1.15)$$

Croisement simple:

Cet opérateur produit deux chromosomes (enfants) à partir des deux chromosomes parents sélectionnés, et pour éviter que la solution enfant ne sorte du domaine d'étude, un coefficient $\alpha \in [0, 1]$ est introduit de manière à générer aléatoirement le paramètre i de la façon suivante:

Chromosomes parents:

$$\begin{cases} ch_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m\} \\ ch_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m\} \end{cases} \quad (1.16)$$

Chromosomes enfants:

$$\begin{cases} ch_1^* = \{x_1, \dots, x_i, (\alpha y_{i+1} + (1-\alpha)x_{i+1}), \dots, (\alpha y_m + (1-\alpha)x_m)\} \\ ch_2^* = \{y_1, \dots, y_i, (\alpha x_{i+1} + (1-\alpha)y_{i+1}), \dots, (\alpha x_m + (1-\alpha)y_m)\} \end{cases} \quad (1.17)$$

Croisement arithmétique

Cet opérateur produit deux chromosomes enfants par combinaison linéaire des deux chromosomes parents:

$$\begin{cases} ch_1^* = \alpha ch_1 + (1-\alpha)ch_2 \\ ch_2^* = \alpha ch_2 + (1-\alpha)ch_1 \end{cases} \quad (1.18)$$

Croisement heuristique

Cet opérateur produit un chromosome unique à partir de deux chromosomes parents:

$$ch_3 = \beta(ch_2 - ch_1) + ch_2 \quad (1.19)$$

Où β est un nombre aléatoire compris dans l'intervalle $[0,1]$ et $\mathbb{F}(ch_2) \leq \mathbb{F}(ch_1)$

Les mutations sont des opérateurs qui transforment un chromosome ch en un nouveau ch^* de la manière suivante:

Mutation uniforme

La valeur du paramètre x_i du chromosome original ch est modifiée par une autre valeur aléatoire comprise dans l'intervalle de définition: $x_i^* \in [x_{iG}, x_{iD}]$

$$ch = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m\} \rightarrow ch^* = \{x_1, x_2, \dots, x_i^*, \dots, x_m\} \quad (1.20)$$

Mutation dans les bornes

La valeur du paramètre x_i du chromosome original ch peut prendre uniquement les valeurs limites de son intervalle de définition: $x_i^* = x_{iG}$ ou $x_i^* = x_{iD}$. A l'évidence, cet opérateur n'a d'intérêt et d'efficacité que si la solution est proche des bornes de l'espace de recherche.

Mutation non-uniforme

Cet opérateur de mutation dépend de la valeur du nombre aléatoire généré pour choisir le paramètre x_i^* dans l'intervalle de définition de x_i . Il est utilisé pour ajuster les valeurs des paramètres lorsque la valeur aléatoire générée est 0 ou 1:

$$x_i^* = \begin{cases} x_i + \Delta[t, x_{iD} - x_i] & \text{si la valeur aléatoire vaut 0} \\ x_i - \Delta[t, x_i - x_{iG}] & \text{si la valeur aléatoire vaut 1} \end{cases} \quad (1.21)$$

$$\Delta[t, y] = y \left[\beta \left(1 - \frac{t}{t_{\max}} \right) \right]^b \quad (1.22)$$

Où β est un nombre aléatoire compris dans l'intervalle $[0,1]$, t la génération courante, t_{\max} le nombre maximal de générations et β un paramètre déterminant le degré de non-uniformité.

La figure (Fig. 1.12) représente l'organigramme général d'un algorithme évolutionnaire d'identification de fissure.

1.6.3 Méthodes de descente

Les méthodes de descente ou méthodes de gradient fonctionnent bien pour des problèmes simples mais pas pour des problèmes complexes avec de nombreux paramètres [19]. Elles évoluent pas à pas selon une direction plus ou moins proche de celle du gradient négatif. L'algorithme peut évoluer très vite ou très lentement selon la valeur du pas. De même si la courbure n'est pas la même dans toute les directions, l'évolution est lente. Ces méthodes nécessitent que la fonction-coût soit au moins une fois différentiable. Parmi toutes les méthodes de descentes possibles, certaines sont plus performantes que d'autres [20]. Les plus utilisées pour les problèmes inverses d'identification de défauts sont les méthodes de : Newton, Quasi-Newton, Levenberg-Marquardt et de la sécante [21].

Direction de descente: On dit que d est une direction de descente de la fonction-coût \mathbb{F} si:

$$-\nabla \mathbb{F}.d > 0 \quad (1.23)$$

Si d est une direction de descente, il est évident que pour tout α suffisamment petit, on a:

$$\mathbb{F}(x + \alpha d) < \mathbb{F}(x) \quad (1.24)$$

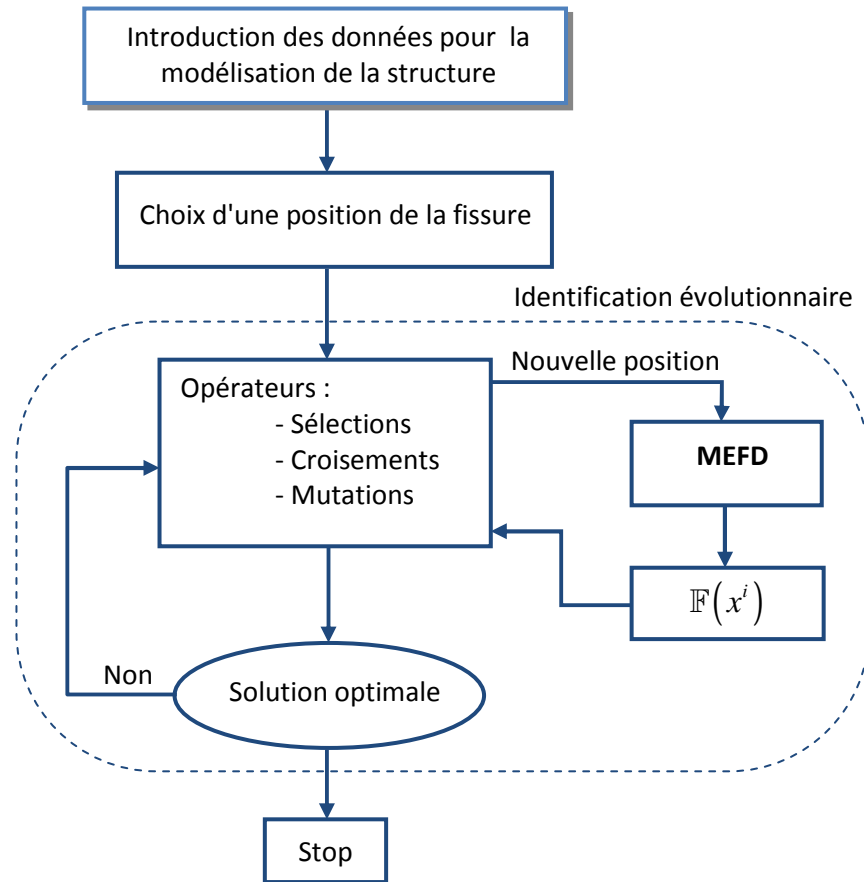


Fig. 1.12 Algorithme de l'identification évolutive

1.6.3.1 Méthode de Newton

La méthode de Newton, appelée aussi méthode de Newton-Raphson, linéarise la fonction-coût (1.12) en la valeur approchée x_c courante du zéro. Sa convergence est rapide au voisinage de la solution recherchée. Malheureusement, cette méthode impose le calcul de la matrice hessienne à chaque pas d'itération, ce qui est très pénalisant en temps de calcul.

Par un développement limité au second ordre, une approximation de la fonction-coût (1.12) peut être définie par:

$$\mathbb{F}_m(x_c + p) = \mathbb{F}(x_c) + \mathbb{G}(x_c)^T p + \frac{1}{2} p^T \mathbb{H}(x_c) p \quad (1.25)$$

Où:

$$\mathbb{G}_i(x_c) = \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x_i} \quad \text{est le gradient de la fonction} \quad (1.26)$$

$$\mathbb{H}_{ij}(x_c) = \frac{\partial^2 \mathbb{F}}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{est la matrice hessienne}$$

La méthode de Newton est une procédure itérative qui applique l'algorithme suivant:

1. $k=0$, initialiser x_k
2. Calculer $\mathbb{G}_k = \mathbb{G}(x_k)$ et $\mathbb{H}_k = \mathbb{H}(x_k)$
3. Résoudre $\mathbb{H}_k p_k = -\mathbb{G}_k$
4. Réactualiser $x_{k+1} = x_k + p_k$
5. Répéter les étapes 2 à 5 jusqu'à vérification du critère de convergence

L'avantage majeur de cette approche est que la convergence est quadratique:

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq c_k \|x_k - x_{k-1}\|^2 \quad (1.27)$$

Si le gradient et le hessien ne peuvent être calculés par dérivation de la fonction-coût, une approximation par différences finies est possible avec les relations suivantes:

$$\mathbb{G}_i(x_c) \approx \frac{\mathbb{F}(x_c + h_i e_i) - \mathbb{F}(x_c - h_i e_i)}{2h_i}, \quad \text{erreur} \leq \frac{\gamma}{6} h_i^2 \quad (1.28)$$

$$\mathbb{H}_{ij}(x_c) \approx \frac{\mathbb{F}(x_c + h_i e_i + h_j e_j) - \mathbb{F}(x_c - h_i e_i) - \mathbb{F}(x_c - h_j e_j) + \mathbb{F}(x_c)}{h_i h_j}, \quad \text{erreur} \leq \frac{5}{6} \gamma h \quad (1.29)$$

Il est intéressant de remarquer que le choix des incréments pour le calcul des expressions (1.28) et (1.29), minimise le nombre d'évaluation de \mathbb{F} , tout en conservant les propriétés de convergence de la méthode.

1.6.3.2 Méthodes de Quasi-Newton

L'application de la méthode de Newton loin de la solution optimale, peut amener le modèle quadratique (1.25) à ne pas représenter, fidèlement, la non-linéarité de \mathbb{F} , ou même engendrer une matrice hessienne non définie positive, et de ce fait rend le modèle quadratique convexe inadapté, puisque l'étape 3 de l'algorithme: $p_k = -\mathbb{H}_k^{-1} \mathbb{G}_k$, donnerait une estimation erronée de la valeur de $x_{k+1} = x_k + p_k$. Pour faire face à ces obstacles, deux familles d'algorithmes (appelés méthodes de Newton modifiées ou de Quasi-Newton) ont été développées dans l'objectif de forcer la convergence à partir de n'importe quel point de départ (la convergence vers un minimum global n'est pas assurée). Elles sont résumées ci-dessous :

- **Méthodes de recherche linéaire**

L'idée dans cette famille d'algorithme est de se donner une direction de descente d_k , et d'appliquer l'algorithme de Newton dans cette direction pour produire une solution acceptable $x_{k+1} = x_k + \lambda d_k$. Le pas retenu λ est obtenu par "backtracking" en remplaçant successivement λ par 1, τ , τ^2 , τ^3 , τ^4 , ..., où τ est un paramètre inférieur à 1 fixé. Il n'est pas nécessaire que λ minimise la fonction: $r(\lambda) = \mathbb{F}(x_k + \lambda d_k)$, mais il faut juste vérifier que:

$$r(\lambda) \leq r(0) + \alpha \lambda r'(0) \quad (1.30)$$

$$r'(\lambda) \geq \beta r'(0), \quad \beta > \alpha \quad (1.31)$$

Où α et β sont des paramètres correctement choisis. Les conditions (1.30) et (1.31) garantissent que les deux séquences soient descendantes et convergent vers un minimum. Cette méthode a l'avantage d'être simple, mais l'inconvénient d'être lente. On peut trouver dans la littérature plusieurs évaluations d'algorithmes qui utilisent une modélisation linéaire (Armijo et Goldstein) ou quadratique (Fletcher) de la ligne, quant ce n'est pas une bisection (Golden section search) ou une autre technique unidimensionnelle [22, 23].

• **Méthodes à région de confiance**

Le principe des méthodes à région de confiance est de remplacer le problème d'optimisation initial par une suite de sous-problèmes d'optimisation, plus simples à résoudre. Dans chaque sous-problème, la fonction-coût est remplacée par une fonction modèle \mathbb{F}_m (1.25), à une valeur courant x_c . La région de confiance est définie comme la région à l'intérieur de laquelle la confiance est donnée à la fonction modèle quant à sa qualité à fournir une bonne approximation de la fonction-coût.

Le problème devient une minimisation sous contrainte puisque le saut en dehors de cette région n'est pas permis:

$$\begin{cases} \min_p \mathbb{F}_c(x_c + p) = \mathbb{F}(x_c) + \mathbb{G}(x_c)^T p + \frac{1}{2} p^T \mathbb{H}(x_c) p \\ \|p\|_2 \leq \delta_c \end{cases} \quad (1.32)$$

Le problème de minimisation sous contrainte ci-dessus est transformé en minimisation sans contrainte en augmentant la matrice hessienne d'un terme supplémentaire:

$$\min_p \mathbb{F}_m^\mu(x_c + p) = \mathbb{F}(x_c) + \mathbb{G}(x_c)^T p + \frac{1}{2} p^T [\mathbb{H}(x_c) + \mu I] p \quad (1.33)$$

$$\text{Dont la solution est : } p(\mu) = -[\mathbb{H}(x_c) + \mu I]^{-1} \mathbb{G}(x_c) \quad (1.34)$$

Où $\mu \geq 0$ est tel que:

$$\|p(\mu)\| = \delta_c \quad (1.35)$$

Pour le cas: $\|p(0)\| \leq \delta_c$, $p(0) = -\mathbb{H}(x_c)^{-1} \mathbb{G}(x_c)$ est le pas approprié.

Les approches pour résoudre l'équation (1.35) en μ donnent les différentes variantes des méthodes des régions de confiance [22].

1.6.3.3 Méthodes de la sécante

L'utilisation des méthodes de Newton, nécessite le calcul du hessien de la fonction-coût non-linéaire. Dans les problèmes inverses d'identification, l'évaluation du hessien est difficile, voir très couteuse par différences finies. Les méthodes de la sécante sont une classe d'algorithmes qui approximent le hessien pour une étape donnée et qui le réactualisent pour l'étape suivante. La meilleure méthode pour réaliser ceci, appelée méthode BFGH (obtenue indépendamment par Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno en 1970, [23]), utilise l'actualisation suivante:

$$\mathbb{H}_k = \mathbb{H}_{k-1} + \frac{y_{k-1} y_{k-1}^T}{y_{k-1}^T p_{k-1}} + \frac{\mathbb{H}_{k-1} p_{k-1} p_{k-1}^T \mathbb{H}_{k-1}}{p_{k-1}^T \mathbb{H}_{k-1} p_{k-1}} \quad (1.36)$$

Avec $y_{k-1} = \mathbb{G}_k - \mathbb{G}_{k-1}$ et $p_{k-1} = x_k - x_{k-1}$; $\mathbb{G}_k = \nabla \mathbb{F}(x_k)$ est le gradient de la fonction-coût.

L'algorithme est initialisé en calculant le hessien, $\mathbb{H}_0 = \nabla^2 \mathbb{F}(x_0)$, par différences finies ou tout simplement, si le calcul est difficile, en posant: $\mathbb{H}_0 = I$.

A part cette étape de réactualisation du hessien, les autres étapes de l'algorithme de Newton restent inchangées, de même que pour les propriétés de convergence.

D'autres méthodes de la sécante permettent de réaliser cette actualisation du hessien, telles que la méthode de Powell–Broyden, la méthode de Davidon–Fletcher–Powell, ou encore la méthode de la sécante définie positive inverse. Mais l'expérience a montré que la méthode de BFGH est l'algorithme, dérivé de la méthode quasi-Newton, le plus performant [24].

1.6.4 Problèmes de moindres carrés non-linéaires

Les méthodes de Newton et de la sécante peuvent être généralisées aux problèmes de moindres carrés non-linéaires, en exploitant leur structure spéciale. Le problème est défini par :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathbb{F}(x) = \frac{1}{2} R^T(x) R(x) \quad (1.37)$$

Où $R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction résiduelle, et $r_i(x)$ les n composantes de $R(x)$. Le Jacobien de R est donné par : $J = (\partial r_i / \partial x_j)$, et donc :

$$\nabla \mathbb{F}(x) = \mathbb{G}(x) = J^T(x) R(x) \quad (1.38)$$

$$\nabla^2 \mathbb{F}(x) = \mathbb{H}(x) = J^T(x) J(x) + \sum_i r_i(x) \nabla^2 r_i(x) \quad (1.39)$$

1.6.4.1 La méthode de Gauss-Newton

Dans cette méthode, le hessien de $\mathbb{F}(x)$ est approximé par $\mathbb{H}_k = J_k^T J_k$, ce qui revient à négliger la contribution de $S(x) = \sum_i r_i(x) \nabla^2 r_i(x)$, ensuite on applique l'algorithme de la section 1.6.3.1.

L'explication logique à cette approximation, est que le terme $S(x)$ est négligeable lorsque la solution est à faible résidu, ou si la fonction résiduelle est à non-linéarité faible. Dans ces cas l'algorithme converge linéairement et parfois de façon quadratique. Par contre, la convergence n'est pas, nécessairement, globale et l'algorithme n'est pas bien défini si J n'est pas à colonnes toutes pleines.

On démontre que le pas de Gauss-Newton, $p_k = -(J_k^T J_k)^{-1} J_k^T R_k$, est une direction de descente. Dans ce cas les modifications globales de convergence, citées en section 1.6.3.2, sont applicables, conduisant aux variantes de Gauss-Newton amortie et de Levenberg-Marquardt.

1.6.4.2 Méthode de Gauss-Newton amortie

Dans cette méthode, la valeur itérée à l'étape $k+1$ est calculée par la relation :

$$x_{k+1} = x_k - \lambda (J_k^T J_k)^{-1} J_k^T R_k \quad (1.40)$$

Où λ est obtenu par une méthode de recherche linéaire unidimensionnelle. Cette méthode est globalement convergente, bien qu'elle soit très lente. En outre, la méthode n'est pas bien définie pour un Jacobien $J(x)$ à colonnes non toutes pleines.

1.6.4.3 Méthode de Levenberg-Marquardt

Cette méthode correspond à l'algorithme de Gauss-Newton modifiée par l'approche en région de confiance. La valeur itérée à l'étape $k+1$ est calculée par la relation :

$$x_{k+1} = x_k + p_k(\mu) \quad (1.41)$$

$$p_k(\mu) = -(J_k^T J_k + \mu I)^{-1} J_k^T R_k$$

Où $\mu \geq 0$ est obtenu par résolution de l'équation $\|p_k(\mu)\| - \delta_k = 0$ sauf pour le cas : $\|p_k(0)\| \leq \delta_c$ quant $\mu = 0$.

Cette modification améliore la convergence de l'algorithme même si J n'est pas à colonnes toutes pleines, et que le terme $S(x)$ dans le hessien est grand. Selon la stratégie adoptée pour le calcul de μ , plusieurs variantes de l'algorithme de Levenberg-Marquardt ont été développées.

1.7 Régularisation du problème inverse d'identification

1.7.1 Problèmes inverses mal-posés

En mécanique, les problèmes inverses d'identification peuvent être répartis en deux classes. Ceux qui, pour toute mesure \mathbf{u} , admettent une solution unique \mathbf{x} continue par rapport à \mathbf{u} , sont dits « *bien posés* ». Ils sont généralement résolus par des méthodes classiques. Ceux du deuxième type sont qualifiés de « *mal posés* » du fait que l'existence, l'unicité et/ou la continuité de la solution par rapport aux mesures ne sont pas toutes vérifiées. Du point de vue physique, cela signifie qu'une mesure \mathbf{u} , compte tenu des incertitudes qui l'accompagnent, peut correspondre à un grand nombre de valeurs de \mathbf{x} fort éloignées les unes des autres.

La sensibilité des problèmes inverses aux incertitudes induit un changement de vision vis-à-vis du concept de solution, car la recherche des solutions *au sens strict* associées par le modèle aux mesures \mathbf{u} n'est plus un objectif suffisant. En effet, tout \mathbf{x} qui reproduit aux incertitudes près, via le modèle physique, la mesure \mathbf{u} est une réponse a priori possible au problème inverse. Un problème inverse, pour un modèle physique et une mesure donnée, peut n'avoir aucune solution au sens strict mais beaucoup de solutions à un niveau d'incertitudes près.

La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à Tikhonov [25], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée,...), de façon que la « *solution régularisée* » obtenue par « *inversion régularisée* » dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre, « proche » du premier et bien posé.

1.7.2 Régularisation au sens de Tikhonov

Le concept de régularisation, développé initialement par Tikhonov et Arsénine [25], a un double objectif [26]:

- i. définir un cadre permettant d'introduire toutes les informations supplémentaires dont on dispose et qui proviennent nécessairement de considérations physiques ou qualitatives *extérieures aux mathématiques*.
- ii. Faire en sorte que la solution obtenue, compte tenu de ces informations supplémentaires, soit stable par rapport aux mesures.

Nous supposons que les ensembles de « paramètres à identifier » \mathbf{X} et de données \mathbf{U} sont des espaces de Hilbert (respectivement \mathbf{X} et \mathbf{U}), ce qui est le cas pour nous, puisqu'il s'agit de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n .

Le problème direct (1.11) est supposé modélisé à l'aide d'un opérateur $\mathbb{L}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{U}$.

Le problème inverse s'écrit :

$$\text{Trouver } \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ tel que } \mathbb{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \text{ (} \mathbf{u} \in \mathbf{U} \text{ donné)} \quad (1.42)$$

Soit un couple $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ choisi, tel que :

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0 \quad (1.43)$$

\mathbf{x}_0 n'étant pas nécessairement unique.

Un opérateur $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \alpha)$ dépendant du paramètre réel positif α , est dit régularisant pour l'équation (1.42) au voisinage de $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ s'il possède les propriétés suivantes :

- Il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \alpha)$ soit défini pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ vérifiant :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq \delta_1 \quad (1.44)$$

- Il existe une fonction $\alpha = \alpha(\delta)$ de la variable δ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) \leq \delta_1$ tel que :

$$\|u - u_0\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|R(u, \alpha(\delta)) - x_0\| \leq \varepsilon \quad (1.45)$$

Autrement dit, un tel opérateur $R(u, \alpha)$ indexé par le paramètre α agit sur un voisinage de u_0 et, par un choix judicieux de α , transforme tout $u \in U$ « voisin » de u_0 en $x = R(u, \alpha)$ « voisin » de x_0 dans X .

La construction d'opérateurs régularisants est possible au moyen du principe de sélection Tikhonov-Arsénine. En effet, supposant que le second membre u en notre possession soit entaché, par rapport au second membre exact u_{exact} , d'un écart ne dépassant pas une certaine valeur δ :

$$\|u - u_{exact}\|_U \leq \delta \quad (1.46)$$

On va chercher donc une solution au problème inverse (1.42) dans le sous ensemble $X_\delta \subset X$ des éléments x vérifiant :

$$\|\mathbb{L}(x) - u\|_U \leq \delta \quad (1.47)$$

Mais il ne suffit pas de prendre pour solution de (1.42) un élément quelconque de U_δ : une telle solution n'est en général pas continue par rapport à δ . Il faut donc adopter un « *principe de sélection* » qui permette, pour tout δ suffisamment petit, de choisir un élément x_δ de X_δ de telle sorte que x_δ dépende continûment de δ . Pour cela, la méthode proposée dans [25] exerce cette sélection par l'intermédiaire d'une *fonctionnelle stabilisatrice* Ω qui doit posséder les propriétés suivantes :

1. Ω est définie sur une partie dense X_1 de X .
2. Ω est non-négative continue.
3. Toute solution de (1.42) appartient à X_1 .
4. Pour tout $d > 0$, l'ensemble $X_{1,d}$ des éléments de X_1 tels que $\Omega(x) \leq d$ est compact sur X_1 .

Il existe une infinité de manière de choisir Ω ; ce choix traduira de façon mathématique le critère de sélection que l'on souhaite utiliser pour limiter le champ des solutions approchées de (1.42). Une fois Ω choisie, on prend pour solution régularisée de (1.42) un élément x_δ qui minimise $\Omega(x)$ sur $X_1 \cap X_\delta$. La propriété de toute solution régularisée x_α est donc de minimiser $\Omega(x)$ sous la contrainte (1.47). Cela revient donc à minimiser le *lagrangien*

$$S_\alpha(x, u) = \alpha \left[\frac{1}{\alpha} \|\mathbb{L}(x) - u\|_U^2 + \Omega(x) \right] = \|\mathbb{L}(x) - u\|_U^2 + \alpha \Omega(x) \quad (1.48)$$

Où $\frac{1}{\alpha}$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte (1.47).

Une manière de choisir α consiste à imposer la condition (critère de Morozov [27]) :

$$\|\mathbb{L}(x) - u\|_U^2 = \delta \quad (1.49)$$

dans laquelle la valeur numérique de δ est fixée « empiriquement » à partir de l'idée qu'on se fait de la qualité des mesures u et du modèle \mathbb{L} . En pratique, on pourra se contenter de choisir α de façon intuitive en se rappelant sa signification de « *paramètre de compromis* ».

En résumé, la résolution de (1.42) par la méthode de régularisation de Tikhonov suit les étapes suivantes :

- Choix de la fonctionnelle stabilisatrice Ω (qui traduit mathématiquement des informations à priori et des considérations qualitatives) et construction de la famille de fonctionnelles $S_\alpha(x,u)$ pour $\alpha > 0$.
- Choix du paramètre de régularisation α , qui doit être strictement positif.
- Recherche par minimisation de $S_\alpha(x,u)$ par rapport à x , de x_α , qui sera une solution régularisée du problème inverse (1.42).

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le contrôle non-destructif comme outil de surveillance de l'intégrité structurelle, suivi d'une revue des mécanismes de naissance, de croissance et de propagation de fissures par fatigue. Ensuite nous avons revu les méthodes les plus couramment utilisées dans les problèmes de minimisation de fonctions non linéaires. Toutes les techniques citées, à part la méthode du simplexe, ont déjà fait l'objet de travaux de recherche utilisant les éléments finies ou les équations intégrales pour la résolution du problème direct. Les méthodes d'ordre zéro ont l'avantage de la simplicité de mise en œuvre mais l'inconvénient de la convergence lente, et permettent d'atteindre le minimum global sans avoir à évaluer le gradient de la fonction-coût, ce qui est pour certains problèmes directs difficile, voir impossible, à calculer. Enfin, nous avons présenté, sommairement, la technique de régularisation de Tikhonov pour les problèmes inverses mal-posés, et qui sera introduite dans le code de calcul d'identification de façon que la solution régularisée obtenue, par inversion régularisée, dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte.

Chapitre 2 La méthode des éléments de frontières pour l'élasticité axisymétrique

2.1 Introduction

Un corps axisymétrique ou de révolution est obtenu par une rotation complète d'une surface plane autour d'un axe (appelé axe de révolution). En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe z est l'axe de révolution et les directions r et θ sont, respectivement, les directions radiale et tangentielle ou circonférentielle (Fig. 2.1). Dans la formulation qui va suivre, les problèmes considérés sont purement axisymétriques (géométrie et variables). Ces types de problèmes peuvent être complètement représentés en analysant n'importe quel plan médian rz . L'avantage de la symétrie axiale réduit une analyse tridimensionnelle en deux problèmes plans découplés, l'un avec deux degrés de liberté par point (radial et axial) et l'autre avec un seul degré de liberté par point (tangential). Les variables sont considérées constantes suivant la direction circonférentielle. De nombreuses structures industrielles ou composants mécaniques sont à géométries axisymétriques ou peuvent être correctement représentés en tant que telles, les réservoirs à pression, les conduites ou les bagues cylindriques par exemple. Certaines structures axisymétriques peuvent subir des chargements non-axisymétriques et nécessitent donc une décomposition en série de Fourier de la distribution circonférentielle des champs élastiques.

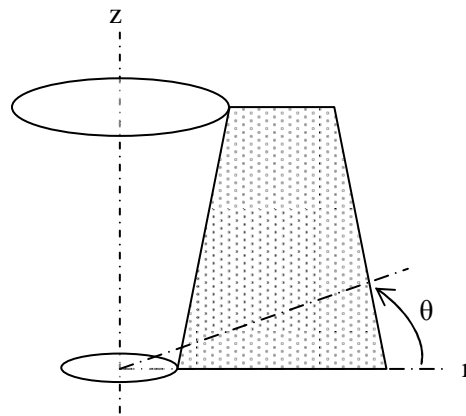


Fig. 2.1 Génération d'un volume axisymétrique à partir d'une surface plane

Les premiers travaux consacrés à la formulation des équations intégrales de frontières pour l'élasticité axisymétrique ont été publiés en 1975 [28, 29]. A la base, on a utilisé l'identité de *Somigliana*, obtenue par l'application du théorème de réciprocité de *Maxwell-Betti* entre le problème axisymétrique actuel et la solution fondamentale, correspondant à un chargement annulaire radial et un autre axial pour une partie du problème, et un chargement circonférentiel annulaire (torsion) pour l'autre partie du problème (Fig. 2.2).

La seconde approche consiste à intégrer les solutions du problème tridimensionnel selon la direction circonférentielle. Les deux approches donnent des solutions identiques et ont été détaillées par Becker [30]. Dans ce chapitre, nous détaillerons la deuxième approche pour sa relative simplicité.

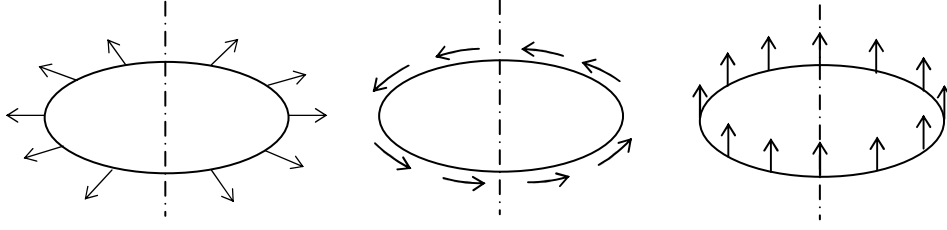


Fig. 2.2 Cas de chargements annulaires

2.2 Formulation élastostatique tridimensionnelle

2.2.1 Hypothèses

Les relations utilisées pour aboutir à une formulation intégrale tridimensionnelle sont :

- L'équation d'équilibre :
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (2.1)$$

- La loi de comportement :
$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

- La relation déformations - déplacements :
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Par substitution de l'équation (2.3) dans (2.2), nous obtenons la relation entre les contraintes et les déplacements:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

L'équation différentielle en déplacement appelée : " équation de Navier " est obtenue en injectant l'équation (2.4) dans l'équation d'équilibre (2.1):

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left(\frac{1}{1-2\nu} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{-f_i}{\mu} \quad (2.5)$$

Laquelle se met sous la forme vectorielle :

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot u) = \frac{-f}{\mu} \quad (2.6)$$

L'équation de Navier (2.6) est l'équation de base pour la formulation intégrale directe. Sa résolution analytique sous cette forme est difficile. Néanmoins, le vecteur déplacement peut être exprimé, en fonction du vecteur de Galerkin G_i , par la relation :

$$u_i = \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_j \partial x_j} - \left(\frac{1}{1-2\nu} \right) \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.7)$$

L'injection de l'équation (2.7) dans (2.6) nous donne une équation bi-harmonique dont la solution analytique est possible :

$$\nabla^4 G_i = \nabla^2 (\nabla^2 G_i) = \frac{-f}{\mu} \quad (2.8)$$

2.2.2 Solution fondamentale au problème de Kelvin

Considérant le cas d'une charge ponctuelle unitaire appliquée en un point P à l'intérieur d'un domaine infini. Nous voulons connaître l'effet de cette charge en n'importe quel autre point Q à la frontière du domaine du problème à résoudre (Fig. 2.3). En d'autres termes, nous voulons savoir de quelle manière le point Q "subit" l'effet de la charge en P .

La solution doit satisfaire aux deux conditions:

1. Toutes les contraintes doivent tendre vers zéro lorsque la distance entre les points P et Q tend vers l'infini.
2. Les contraintes sont singulières au point P (i.e. tendent vers l'infini lorsque la distance $\|PQ\|$ tend vers zéro).

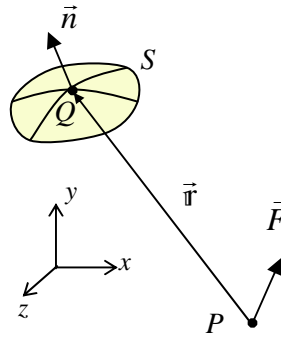


Fig. 2.3 Problème de Kelvin

Cruise [31] a montré que le vecteur de Galerkin suivant, est une solution de l'équation (2.8) et qu'il satisfait aux deux conditions physiques sus-citées:

$$G_i = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} r(P, Q) \quad (2.9)$$

La fonction $r(P, Q)$ est la distance entre les points P et Q . Le point P est communément appelé: "Point source" dont les coordonnées cartésiennes sont représentées par des lettres capitales: $\{X_P, Y_P, Z_P\}$ et le point Q est le "point champs d'intégration" représenté par ses coordonnées: $\{x_Q, y_Q, z_Q\}$. Le vecteur déplacement est alors obtenu en injectant l'équation (2.9) dans l'équation (2.7):

$$u_i = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \left[\frac{1}{r(P, Q)} \right] \left[(3-4\nu) \delta_{ij} + r_{,i} + r_{,j} \right] \quad (2.10)$$

Les dérivées partielles $r_{,i}$ sont définies par:

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - X_i}{r} \quad (2.11)$$

Le vecteur déplacement, équation(2.10), est la solution au problème de Kelvin et constitue le point de départ pour la formulation des éléments de frontières pour l'élasticité linéaire.

Au moyen de la relation (2.4), il est possible de dériver une forme similaire pour les tensions, sachant que :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.12)$$

Il en découle que:

$$t_i = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \right] \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \right] - \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[r_{,j}n_i - r_{,i}n_j \right] \quad (2.13)$$

La dérivée normale est définie par:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i}n_i \quad (2.14)$$

Les vecteurs déplacements et tensions sont décomposés en tenseurs du second ordre comme suit:

$$u_i = U_{ij}(P, Q)\bar{e}_j \quad (2.15)$$

$$t_i = T_{ij}(P, Q)\bar{e}_j \quad (2.16)$$

Où \bar{e}_j est le vecteur unitaire dans la direction cartésienne j . Ces fonctions tensorielles sont connues sous les noms de "Noyaux des déplacements" et "Noyaux des tensions". Le premier indice du noyau indique la direction de déplacement du point Q , causé par une charge unitaire appliquée au point intérieur P selon la direction donnée par le second indice.

Il y a neuf noyaux en déplacements pour la formulation tridimensionnelle:

$$U_{ij}(P, Q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \left[\frac{1}{r(P, Q)} \right] \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} + r_{,j} \right] \quad (2.17)$$

Et neuf autres noyaux en tensions:

$$T_{ij} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \right] \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \right] - \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[r_{,j}n_i - r_{,i}n_j \right] \quad (2.18)$$

2.2.3 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

Le théorème de réciprocité stipule que le travail des efforts extérieurs réels dans un champ de déplacements virtuel, est égal au travail des efforts extérieurs virtuels dans le champ des déplacements réels.

Considérant un corps, de volume Ω et de frontière S , en équilibre sous deux états de chargement différents (Fig. 2.4):

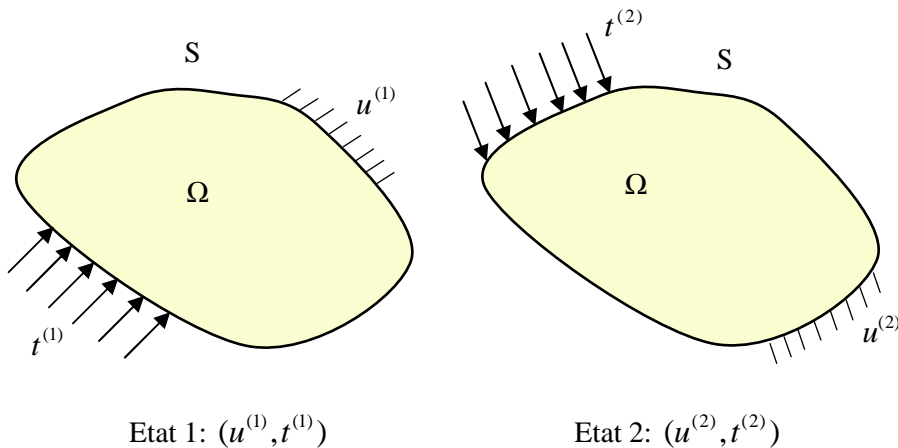


Fig. 2.4 Deux états d'équilibre pour le même domaine

Le principe de réciprocité des travaux virtuels se traduit pour les deux états par la forme intégrale suivante:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} d\Omega \quad (2.19)$$

Remplaçons les déformations par les déplacements de l'équation (2.3):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.20)$$

Le premier terme de l'équation ci-dessus peut être développé comme suit:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(2)}) - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} u_i^{(2)} \right] d\Omega \quad (2.21)$$

L'équation d'équilibre (2.1) est introduite pour remplacer le dernier terme de l'équation (2.21) par le terme des forces de volume.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(2)}) \right] d\Omega + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega \quad (2.22)$$

Le théorème de la divergence (*Théorème de Green*) est alors appliqué au premier terme à droite dans l'équation ci-dessus comme suit:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_S \left[(\sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(2)}) n_j \right] dS + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega \quad (2.23)$$

Ou bien encore en utilisant la définition des tensions, équation (2.12), nous pouvons supprimer les contraintes du terme de droite:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_S \left[t_i^{(1)} u_i^{(2)} \right] dS + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega \quad (2.24)$$

Si l'on revient à l'équation (2.19), la même démarche peut être envisagée pour le terme de droite, pour aboutir au résultat final qui traduit le théorème de réciprocité en fonction des tensions et des déplacements:

$$\int_S \left[t_i^{(1)} u_i^{(2)} \right] dS + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_S \left[t_i^{(2)} u_i^{(1)} \right] dS + \int_{\Omega} f_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega \quad (2.25)$$

En l'absence de forces de volume, l'équation (2.25) se réduit à:

$$\int_S \left[t_i^{(1)} u_i^{(2)} \right] dS = \int_S \left[t_i^{(2)} u_i^{(1)} \right] dS \quad (2.26)$$

Cette dernière équation permet de relier deux problèmes, l'un connu et l'autre inconnu, par des intégrales sur les frontières du domaine considéré.

2.2.4 Identités intégrales pour les déplacements et les contraintes

Afin d'aboutir à une équation intégrale applicable à la frontière, et reliant les déplacements et les tensions du problème actuel (à résoudre) à ceux du problème de *Kelvin*, équations (2.17) et (2.18), on opère les substitutions suivantes dans l'équation (2.26):

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= u_i(Q), & t_i^{(1)} &= t_i(Q) \\ u_i^{(2)} &= U_{ij}(P, Q) \vec{e}_j, & t_i^{(2)} &= T_{ij}(P, Q) \vec{e}_j \end{aligned} \quad (2.27)$$

Avant d'écrire la forme intégrale finale, il ne faut pas oublier que la solution de Kelvin est singulière lorsque la distance entre les points P et Q tend vers zéro. Ceci peut être contourné en entourant le point P par une sphère de rayon ε et de surface S_ε et en examinant la limite de l'intégrale quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\int_{S-S_\varepsilon} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) dS + \int_{S_\varepsilon} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) dS = \int_{S-S_\varepsilon} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) dS + \int_{S_\varepsilon} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) dS$$

Cruse [31] a montré que les intégrales de surface S_ε , ont pour limites:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) dS = 0 \quad (2.28)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) dS = u_i(P) \quad (2.29)$$

Ce qui réduit l'équation intégrale de frontière en déplacement à l'expression suivante:

$$u_i(P) + \int_S T_{ij}(P, Q) u_j(Q) dS = \int_S U_{ij}(P, Q) t_j(Q) dS \quad (2.30)$$

Cette équation est connue sous l'appellation *d'identité de Somigliana* pour les déplacements.

Une forme intégrale similaire pour les contraintes au point P est obtenue en différenciant l'équation en déplacement (2.30) et en substituant dans l'équation (2.2) pour la loi de *Hooke* comme suit:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(P) + \int_S \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial T_{mk}}{\partial x_m} + \mu \left[\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \right] \right\} u_k(Q) dS = \\ \int_S \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial U_{mk}}{\partial x_m} + \mu \left[\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{jk}}{\partial x_i} \right] \right\} t_k(Q) dS \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ou sous une forme plus compacte par l'introduction des noyaux du troisième ordre D_{ijk} et S_{ijk}

$$\sigma_{ij}(P) + \int_S S_{ijk}(P, Q) u_k(Q) dS = \int_S D_{ijk}(P, Q) t_k(Q) dS \quad (2.32)$$

Les noyaux D_{ijk} et S_{ijk} sont donnés par les relations:

$$\begin{aligned} D_{ijk} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \right) \left[(1-2\nu) (\delta_{jk} r_{,i} + \delta_{ik} r_{,j} - \delta_{ij} r_{,k}) + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \\ S_{ijk} &= \frac{\nu}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^3} \right) \left\{ \begin{aligned} &n_i [3\nu r_{,j} r_{,k} + (1-2\nu) \delta_{jk}] + n_j [3\nu r_{,i} r_{,k} + (1-2\nu) \delta_{ik}] \\ &+ n_k [3(1-2\nu) r_{,i} r_{,j} - (1-4\nu) \delta_{ij}] \\ &+ 3 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{jk} r_{,i} + \delta_{ik} r_{,j}) - 5r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.3 Formulation élastostatique axisymétrique

Les équations intégrales de frontières pour les problèmes d'élasticité tridimensionnelle, peuvent être transformées en équations intégrales pour l'élasticité axisymétrique, par un passage aux coordonnées cylindriques (Fig. 2.5) ensuite, une intégration de chaque terme suivant la direction circonférentielle, réduit la dimension du problème à résoudre d'une unité. Enfin l'intégration des noyaux est faite sur un contour curviligne moyennant le changement de la variable d'intégration suivant :

$$dS = r.d\theta.d\Gamma \quad (2.34)$$

Les variables présentes dans la formulation axisymétrique sont:

- u_r, u_z, t_r et t_z : Déplacements et tensions selon les directions, radiale et axiale.
 σ_{rr}, σ_{zz} : Contraintes selon les directions, radiale et axiale.
 $\epsilon_{rr}, \epsilon_{zz}$: Déformations selon les directions, radiale et axiale.
 $\sigma_{rz}, \epsilon_{rz}$: Contrainte et déformation de cisaillement axisymétrique.
 $\sigma_{\theta\theta}, \epsilon_{\theta\theta}$: Contrainte et déformation selon la direction circonférentielle.
 Γ : Frontière curviligne.

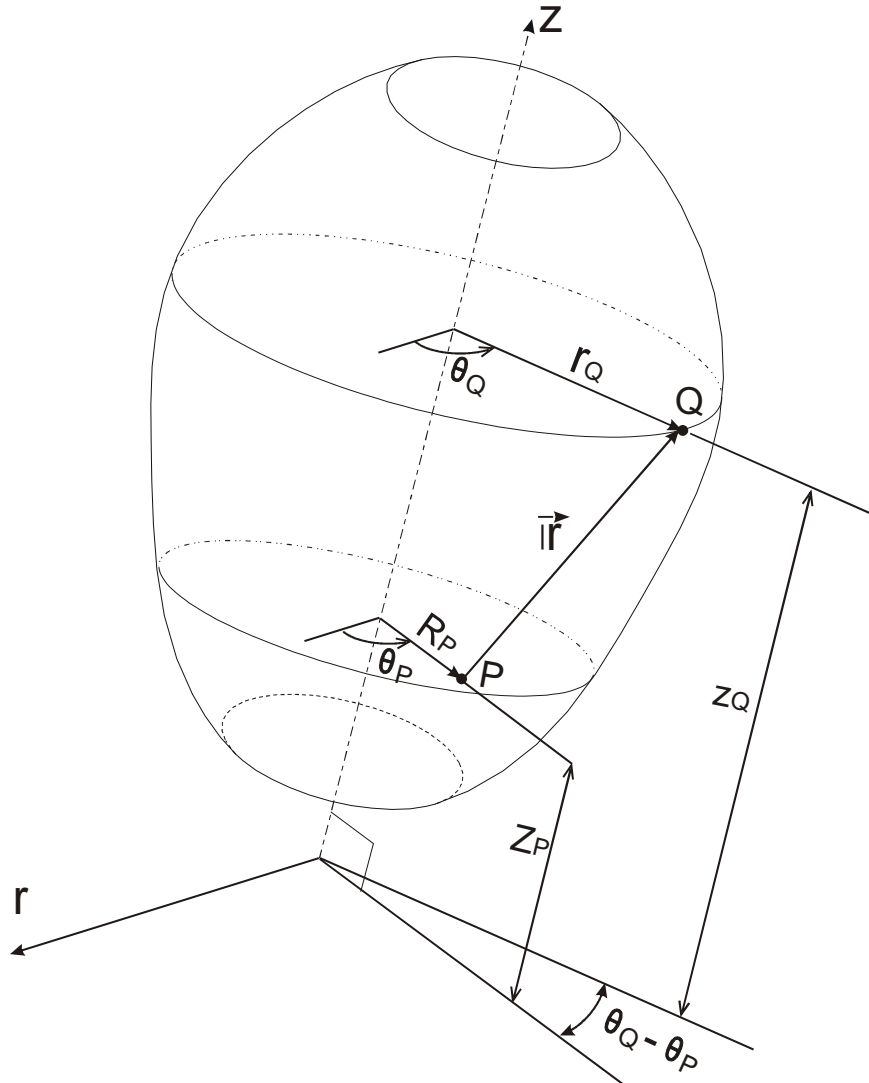


Fig. 2.5 Représentation du domaine en coordonnées cylindriques

Les contraintes et déformations en $r\theta$ et $z\theta$ sont toutes nulles du fait que les champs des déplacements et des tensions induits, ne sont pas axisymétriques.
 Les vecteurs déplacements et tensions sont projetés selon les directions radiale et axiale en considérant l'angle θ_p comme origine de la circonférence (i.e. $\theta_p = 0$):

$$\begin{cases} u_x(P) \\ u_y(P) \\ u_z(P) \end{cases} = \begin{cases} u_r(P) \cos \theta_p \\ u_r(P) \sin \theta_p \\ u_z(P) \end{cases} = \begin{cases} u_r(P) \\ 0 \\ u_z(P) \end{cases}; \quad \begin{cases} t_x(P) \\ t_y(P) \\ t_z(P) \end{cases} = \begin{cases} t_r(P) \cos \theta_p \\ t_r(P) \sin \theta_p \\ t_z(P) \end{cases} = \begin{cases} t_r(P) \\ 0 \\ t_z(P) \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\begin{cases} u_x(Q) \\ u_y(Q) \\ u_z(Q) \end{cases} = \begin{cases} u_r(Q) \cos \theta_Q \\ u_r(Q) \sin \theta_Q \\ u_z(Q) \end{cases}; \quad \begin{cases} t_x(Q) \\ t_y(Q) \\ t_z(Q) \end{cases} = \begin{cases} t_r(Q) \cos \theta_Q \\ t_r(Q) \sin \theta_Q \\ t_z(Q) \end{cases} \quad (2.36)$$

L'équation intégrale de frontière (2.30) s'écrit alors sous la forme développée suivante:

$$\begin{cases} u_R \\ 0 \\ u_Z \end{cases} + \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \cos \theta_Q \\ u_r \sin \theta_Q \\ u_z \end{bmatrix} r_Q d\theta_Q d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r \cos \theta_Q \\ t_r \sin \theta_Q \\ t_z \end{bmatrix} r_Q d\theta_Q d\Gamma(Q) \quad (2.37)$$

Les indices en lettres capitales font référence au point P et ceux en lettres minuscules font référence au point Q .

L'équation intégrale ci-dessus est simplifiée par introduction des noyaux axisymétriques:

$$\begin{cases} u_R(P) \\ u_Z(P) \end{cases} + 2\pi \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{rr}(P, Q) & T_{rz}(P, Q) \\ T_{zr}(P, Q) & T_{zz}(P, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(Q) \\ u_z(Q) \end{bmatrix} r_Q d\Gamma(Q) = 2\pi \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{rr}(P, Q) & U_{rz}(P, Q) \\ U_{zr}(P, Q) & U_{zz}(P, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(Q) \\ t_z(Q) \end{bmatrix} r_Q d\Gamma(Q) \quad (2.38)$$

Avec:

$$\begin{aligned} U_{rr}(P, Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{U_{xx}(P, Q) \cos \theta_Q + U_{xy}(P, Q) \sin \theta_Q\} d\theta_Q \\ U_{rz}(P, Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{xz}(P, Q) d\theta_Q \\ U_{zr}(P, Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{U_{zx}(P, Q) \cos \theta_Q + U_{zy}(P, Q) \sin \theta_Q\} d\theta_Q \\ U_{zz}(P, Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{zz}(P, Q) d\theta_Q \end{aligned} \quad (2.39)$$

Les noyaux des déplacements sont transcrits en coordonnées cartésiennes. Pour effectuer un passage aux coordonnées cylindriques, on utilise les relations suivantes:

$$\begin{aligned} X_p &= R_p \cos \theta_p = R, & Y_p &= R_p \sin \theta_p = 0, & Z_p &= Z \\ x_Q &= r \cos \theta_Q, & y_Q &= r \sin \theta_Q, & z_Q &= z \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$r = \sqrt{(R+r)^2 + (Z-z)^2 - 4Rr \cos^2 \left(\frac{\theta_Q}{2} \right)}$$

En plus, il faut faire un changement de la variable d'intégration et introduire de nouveaux paramètres:

$$\begin{aligned}
 \theta_Q &= \pi - 2\alpha \\
 \bar{z} &= (Z - z) \\
 C &= \sqrt{(R+r)^2 + \bar{z}^2} \\
 A &= \frac{1}{16\pi^2 \mu(1-\nu)} \\
 m &= \frac{2\sqrt{Rr}}{C}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Les noyaux (2.39) s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}
 U_{rr}(P, Q) &= 2A \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(3-4\nu)(1-2\cos^2 \alpha)}{C(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} + \frac{(R-r)^2(1-2\cos^2 \alpha) - 4Rr \cos^4 \alpha}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] d\alpha \\
 U_{rz}(P, Q) &= 2A \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(R-r+2r \cos^2 \alpha)\bar{z}}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] d\alpha \\
 U_{rz}(P, Q) &= 2A \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(R-r-2R \cos^2 \alpha)\bar{z}}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] d\alpha \\
 U_{zz}(P, Q) &= 2A \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(3-4\nu)}{C(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} + \frac{\bar{z}^2}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] d\alpha
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Les intégrales contenant le terme $(1-m^2 \sin^2 \alpha)$ sont transformées en intégrales elliptiques complètes du premier type $K(m)$ et du second type $E(m)$, moyennant les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} d\alpha &= \frac{1}{m^2} [E(m) - (1-m^2)K(m)] \\
 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha &= \frac{E(m)}{1-m^2} \\
 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha &= \frac{1}{m^2} [K(m) - E(m)] \\
 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 \alpha}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha &= \frac{1}{m^4} [(2-m^2)E(m) - 2(1-m^2)K(m)]
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

On abouti alors, à la forme axisymétrique des noyaux des déplacements en fonction des intégrales elliptiques:

$$\begin{aligned}
 U_{rr}(P, Q) &= \frac{A}{R.r.C} \left\{ \left[(3-4\nu)(R^2 + r^2) + 4(1-\nu)\bar{z}^2 \right] K(m) \right. \\
 &\quad \left. + \left[-(3-4\nu)C^2 - \frac{\bar{z}^2}{r^2}(R^2 + r^2 + \bar{z}^2) \right] E(m) \right\} \\
 U_{rz}(P, Q) &= \frac{A\bar{z}}{R.C} \left\{ K(m) - \frac{r^2 - R^2 + \bar{z}^2}{r^2} E(m) \right\} \\
 U_{zr}(P, Q) &= \frac{A\bar{z}}{r.C} \left\{ -K(m) + \frac{R^2 - r^2 + \bar{z}^2}{r^2} E(m) \right\} \\
 U_{zz}(P, Q) &= \frac{2A}{C} \left\{ (3-4\nu)K(m) + \frac{\bar{z}^2}{r^2} E(m) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Les techniques utilisées pour l'évaluation des intégrales elliptiques sont détaillées en annexe A. Les noyaux des tensions sont calculés à partir des noyaux (2.44) en utilisant une approche par la relation déformation – déplacement (2.3) et la loi de Hooke. L'approche par les noyaux des tensions tridimensionnels nécessite des manipulations algébriques ardues pour faire sortir les intégrales elliptiques.

Une transcription de la loi de Hooke en fonction des déplacements se traduit par les relations suivantes pour les noyaux des tensions:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\mu} T_{rr}(P, Q) &= \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{U_{rr}}{r} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} \right) \right] n_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} \right) n_z \\
 \frac{1}{2\mu} T_{rz}(P, Q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} \right) n_r + \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{U_{rr}}{r} + \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} \right) \right] n_z \\
 \frac{1}{2\mu} T_{zr}(P, Q) &= \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{U_{zr}}{r} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} \right) \right] n_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right) n_z \\
 \frac{1}{2\mu} T_{zz}(P, Q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right) n_r + \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{U_{zr}}{r} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) \right] n_z
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Par substitution des noyaux des déplacements dans les équations ci-dessus, on arrive à la forme axisymétrique des noyaux des tensions en fonction des intégrales elliptiques:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\mu} T_{rr}(P, Q) &= T_1 n_r + T_2 n_z \\
 \frac{1}{2\mu} T_{rz}(P, Q) &= T_3 n_z + T_4 n_r \\
 \frac{1}{2\mu} T_{zr}(P, Q) &= T_5 n_r + T_6 n_z \\
 \frac{1}{2\mu} T_{zz}(P, Q) &= T_7 n_z + T_8 n_r
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Avec les termes T_1 à T_8 définis en annexe B.

2.4 Formulation intégrale axisymétrique hyper-singulière et soustraction des singularités

Dans cette section, nous allons voir de plus près, les différentes singularités inhérentes aux équations intégrales axisymétriques en déplacements et en tensions, ainsi que leur traitement [32-39].

Reprenons l'équation intégrale en déplacements, qui peut s'écrire sous la forme suivante:

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} \alpha(Q) U_{ij}(P, Q) t_i(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha(Q) T_{ij}(P, Q) u_i(Q) d\Gamma \quad (2.47)$$

Où : $\alpha(Q) = 2\pi r(Q)$ et $i, j = r, z$.

La charge annulaire unitaire est appliquée au point "source" P , Q le point "champ" d'intégration, $r(Q)$ la distance radiale du point Q à l'axe de symétrie, u_r et u_z les déplacements radial et axial, t_r et t_z les tensions radiale et axiale, et U et T sont les solutions fondamentales axisymétriques en déplacements et en tensions exprimées en fonction des intégrales elliptiques complètes K et E .

Les singularités présentes dans un noyau sont classées par niveau de difficultés rencontrées lors de l'intégration numérique. Plus le degré de singularité augmente, plus lourde est la technique d'intégration numérique appropriée.

Un noyau de l'ordre de r^{-n} est dit

- A singularité faible, si $0 < n < 1$
- A singularité forte, si $n = 1$
- Hyper-singulier, si $n > 1$

Notons qu'un noyau de l'ordre de $\text{Log} r$, présente une singularité faible. Une décomposition des noyaux U et T nous permet de séparer les différents ordres de singularités:

$$\begin{aligned} U_{ij}(P, Q) &= U_{ij}^R(P, Q) + U_{ij}^W(P, Q) \\ T_{ij}(P, Q) &= T_{ij}^R(P, Q) + T_{ij}^W(P, Q) + T_{ij}^S(P, Q) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Les indices supérieurs définissent les ordres des singularité:

- R : Terme régulier.
- W : Terme à singularité faible, $O(\ln r)$
- S : Terme à singularité forte, $O(r^{-1})$

Quand P est sur l'axe de symétrie z , la charge annulaire devient une charge ponctuelle et la résultante selon la direction radiale est nulle. Ce qui se traduit par des noyaux: U_{rr} , U_{rz} , T_{rr} et T_{rz} nuls. Les noyaux restants: U_{zz} , U_{zz} , T_{zz} et T_{zz} se réduisent aux solutions fondamentales tridimensionnelles:

$$\begin{aligned} U_{zj}(P, Q) &= U_{zj}^{3D}(P, Q), & O(r^{-1}) \\ T_{zj}(P, Q) &= T_{zj}^{3D}(P, Q), & O(r^{-2}) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Avec la présence du terme $\alpha(Q)$ dans l'intégrale et comme $u_r(P)=0$, l'intégration des noyaux (2.49) est bornée.

Lorsque le point P approche la frontière Γ , en dehors de l'axe de symétrie, l'équation intégrale (2.47) s'écrit pour une normale continue à la frontière:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i(P) &= \int_{\Gamma} \alpha(Q) U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha(Q) [T_{ij}^R(P, Q) + T_{ij}^W(P, Q)] u_j(Q) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \alpha(Q) T_{ij}^S(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.50)$$

La première et la deuxième intégrale du terme de droite de l'équation ci-dessus contiennent un terme régulier et un autre de singularité faible. Leur intégration est directe moyennant un changement de la variable d'intégration. Le signe sur la troisième intégrale de droite indique une évaluation au sens de la valeur principale de Cauchy.

Une différentiation de l'équation en déplacements (2.47) par rapport aux directions R et Z de la variable P , et une substitution dans la loi de *Hooke* (2.45) nous donne l'équation intégrale en contraintes pour les points intérieurs:

$$\sigma_{ij}(P) = \int_{\Gamma} \alpha(Q) D_{ijk}(P, Q) t_k(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha(Q) S_{ijk}(P, Q) u_k(Q) d\Gamma \quad (2.51)$$

Avec $i, j, k=r, z$, D_{ijk} et S_{ijk} sont des fonctions des dérivés de \mathbf{U} et \mathbf{T} , et par conséquence, des fonctions elliptiques \mathbf{K} et \mathbf{E} .

L'équation intégrale en contraintes contient des termes hyper-singuliers lorsque le point P approche la frontière. En effet, une décomposition des noyaux D_{ijk} et S_{ijk} fait apparaître les singularités suivantes:

$$\begin{aligned} D_{ijk}(P, Q) &= D_{ijk}^R(P, Q) + D_{ijk}^W(P, Q) + D_{ijk}^S(P, Q) & O(\mathbb{r}^{-1}) \\ S_{ijk}(P, Q) &= S_{ijk}^R(P, Q) + S_{ijk}^W(P, Q) + S_{ijk}^S(P, Q) + S_{ijk}^H(P, Q) & O(\mathbb{r}^{-2}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Les derniers termes, avec l'exposant H , sont hyper-singuliers et sont reportés en annexe B.

Lorsque le point P approche la frontière Γ , en dehors de l'axe de symétrie, l'équation intégrale (2.51) s'écrit pour une normale continue à la frontière:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_{ij}(P) &= \int_{\Gamma} \alpha(Q) \left[D_{ijk}^R(P, Q) + D_{ijk}^W(P, Q) \right] t_k(Q) d\Gamma + \oint_{\Gamma} \alpha(Q) D_{ijk}^S(P, Q) t_k(Q) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \alpha(Q) \left[S_{ijk}^R(P, Q) + S_{ijk}^W(P, Q) \right] u_k(Q) d\Gamma \\ &\quad - \oint_{\Gamma} \alpha(Q) S_{ijk}^S(P, Q) u_k(Q) d\Gamma - \oint_{\Gamma} \alpha(Q) S_{ijk}^H(P, Q) u_k(Q) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.53)$$

Le premier et le troisième terme de l'équation ci-dessus sont des intégrales du type Riemann. Le deuxième et le quatrième terme sont fortement singuliers et doivent être évalués au sens de la valeur principale de Cauchy. Le dernier terme de droite est une intégrale impropre et son évaluation est faite au sens des parties finies d'Hadamard.

Une multiplication des deux parties de l'équation (2.53) par les composantes de la normale au point P nous donne l'équation intégrale en tensions:

$$\frac{1}{2} t_i(P) = n_j \oint_{\Gamma} \alpha(Q) D_{ijk}(P, Q) t_k(Q) d\Gamma - n_j \oint_{\Gamma} \alpha(Q) S_{ijk}(P, Q) u_k(Q) d\Gamma \quad (2.54)$$

Et pour le point P sur l'axe de symétrie ($n_r = 0, n_z = \pm 1$), l'équation ci-dessus se simplifie en:

$$\begin{aligned} t_r(P) &= 0 \\ \frac{1}{2} t_z(P) &= n_z \int_{\Gamma} \alpha(Q) D_{zzk}(P, Q) t_k(Q) d\Gamma - n_z \oint_{\Gamma} \alpha(Q) S_{zzk}(P, Q) u_k(Q) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.5 Traitement numérique des équations intégrales axisymétriques

La solution analytique des équations intégrales pour l'élasticité axisymétrique n'est possible que pour des cas académiques à géométries simples (cylindrique ou sphérique). Pour des géométries réelles, le traitement numérique est une démarche incontournable dont la précision dépend généralement de:

- L'erreur sur l'approximation de la géométrie.
- Le nombre d'éléments utilisés (un grand nombre d'éléments n'implique pas, forcément une convergence sûre).
- La représentation des champs élastiques.
- La pertinence des techniques d'intégration numérique utilisées.

2.5.1 Discrétisation de la géométrie

La frontière Γ est discrétisée en N_{elt} segments de droite Γ_m ($m=1, N_{elt}$) (Fig. 2.6). Chaque élément est défini par les nœuds de ses deux extrémités géométriques: N_m^1 et N_m^2 . Les coordonnées d'un point quelconque Q de l'élément sont déterminées par des fonctions de forme linéaires:

$$\begin{aligned} r_Q(s) &= r_{N_m^1} N_1(s) + r_{N_m^2} N_2(s) \\ z_Q(s) &= z_{N_m^1} N_1(s) + z_{N_m^2} N_2(s) \end{aligned} \quad (2.56)$$

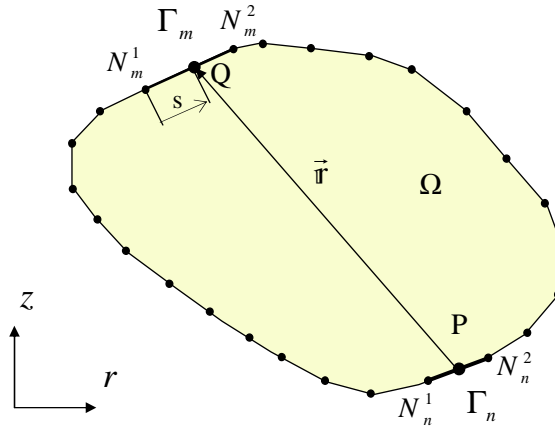


Fig. 2.6 Discrétisation de la frontière du domaine

Avec:

$$N_1(s) = 1 - \frac{s}{L_m} \quad N_2(s) = \frac{s}{L_m} \quad (2.57)$$

L_m étant la longueur de l'élément Γ_m .

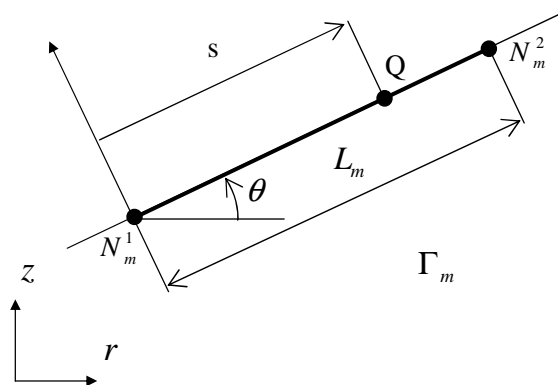


Fig. 2.7 Représentation de l'élément linéaire dans son repère local.

L'élément linéaire (Fig. 2.7) est choisi pour sa simplicité (Jacobien constant). Une fonction d'ordre plus élevé (quadratique ou cubique) peut être envisagée.

2.5.2 Discrétisation des champs élastiques

La formulation des équations intégrales en déplacements n'impose aucune condition sur les fonctions approximant les champs des déplacements et des tensions. Mais comme notre objectif est d'utiliser une formulation duale en tension lors du prochain chapitre, une variation quadratique des champs élastiques est nécessaire. En plus, les points de collocation des deux extrémités ont été déplacés vers l'intérieur de l'élément (Fig. 2.8). Cette procédure nous assure:

- L'existence des valeurs propres de Cauchy et des parties finies d' Hadamard pour les intégrales singulières.
- D'éviter les problèmes de singularités du champ des contraintes en fond de fissure.

Les champs des déplacements et des tensions sont approximés par:

$$u_i(s) = \sum_{l=1}^3 u_i(M_n^l) N_l(s), \quad t_i(s) = \sum_{l=1}^3 t_i(M_n^l) N_l(s) \quad (2.58)$$

Où $M_n^l (l=1,3)$ sont les points de collocation de l'élément Γ_n et $N_l(s)$ les fonctions de forme correspondantes (Fig. 2.9):

$$N_1(S) = \frac{15}{8} - \frac{6}{L_n} s + \frac{9}{2L_n^2} s^2, \quad N_2(S) = -\frac{5}{4} + \frac{9}{L_n} s - \frac{9}{L_n^2} s^2, \quad N_3(S) = \frac{3}{8} - \frac{3}{L_n} s + \frac{9}{2L_n^2} s^2 \quad (2.59)$$

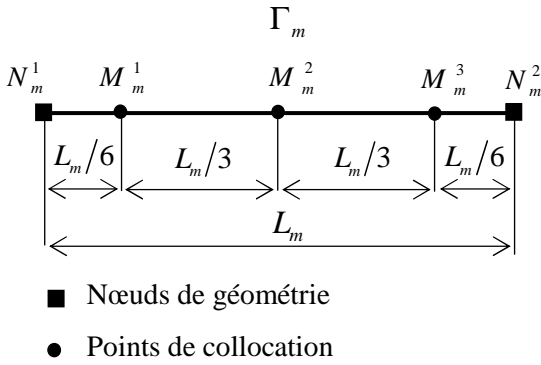


Fig. 2.8 Élément quadratique non conforme

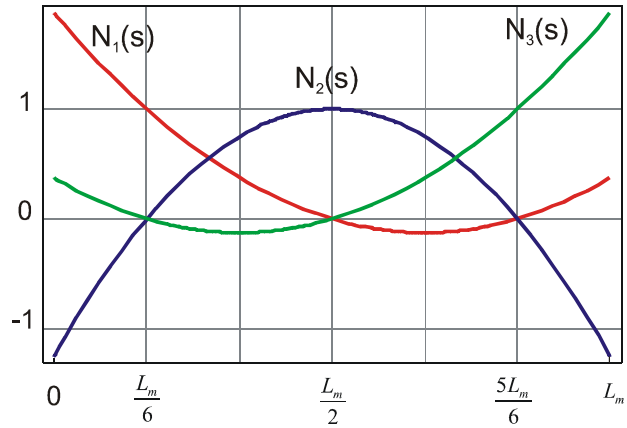


Fig. 2.9 Fonctions de forme de l'élément quadratique non conforme

2.5.3 Discrétisation de l'équation intégrale

L'équation intégrale axisymétrique en déplacements (2.50) appliquée au point de collocation ($P = M_n^k$) de l'élément Γ_n s'écrit:

$$\frac{1}{2} u_i(M_n^k) = \int_{\Gamma} \alpha(Q) U_{ij}(M_n^k, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha(Q) T_{ij}(M_n^k, Q) u_j(Q) d\Gamma \quad (2.60)$$

En faisant une intégration sur chaque élément du contour $\Gamma_m, (m=1, N_{elt})$ on a:

$$\frac{1}{2} u_i(M_n^k) = \sum_{m=1}^{N_{elt}} \int_{\Gamma_m} \alpha(Q) U_{ij}(M_n^k, Q) t_j(Q) d\Gamma_m - \sum_{m=1}^{N_{elt}} \int_{\Gamma_m} \alpha(Q) T_{ij}(M_n^k, Q) u_j(Q) d\Gamma_m \quad (2.61)$$

Et en remplaçant les variables par leurs fonctions d'approximation (2.58), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(M_n^k) = & \sum_{m=1}^{N_{elt}} \int_{\Gamma_m} \alpha(Q)U_{ij}(M_n^k, Q) \left(\sum_{l=1}^3 N_l(s)t_j(M_m^l) \right) d\Gamma_m \\ & - \sum_{m=1}^{N_{elt}} \int_{\Gamma_m} \alpha(Q)T_{ij}(M_n^k, Q) \left(\sum_{l=1}^3 N_l(s)u_j(M_m^l) \right) d\Gamma_m \end{aligned} \quad (2.62)$$

Ou sous une forme plus développée en remplaçant le terme $\alpha(Q)$ par $2\pi r(Q)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(M_n^k) = & 2\pi \sum_{m=1}^{N_{elt}} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left(\int_0^{L_m} U_{ij}(M_n^k, s) N_l(s) r(s) d\Gamma \right) t_j(M_m^l) \\ & - 2\pi \sum_{m=1}^{N_{elt}} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left(\int_0^{L_m} T_{ij}(M_n^k, s) N_l(s) r(s) d\Gamma \right) u_j(M_m^l) \end{aligned} \quad (2.63)$$

En faisant varier le point de collocation M_n^k pour tous les éléments du contour ($n = 1, N_{elt}$), en chaque point de collocation k ($k = 1, 3$) et suivant les deux directions r et z , nous obtenons un système de $(6 \times N_{elt})$ équations à $(12 \times N_{elt})$ variables de la forme :

$$[A]\{u\} = [B]\{t\} \quad (2.64)$$

2.5.4 Evaluation numérique des intégrales

L'évaluation numérique des intégrales des noyaux est la procédure qui consomme la majeure partie du temps de calcul dans une simulation par éléments de frontière. Les coefficients des matrices $[A]$ et $[B]$ doivent être évalués avec précision si l'on veut avoir une solution correcte au problème posé. Le nombre de coefficients (intégrales) à calculer est de $2 \times (6 \times N_{elt} \times 6 \times N_{elt})$, soit $72 \times N_{elt}^2$ coefficients. Dans certains cas, il est possible de les évaluer analytiquement (formulation 2-D [40]), mais en règle générale, le passage par l'intégration numérique est inévitable.

La démarche pour l'intégration numérique est la suivante :

- Pour les termes réguliers des noyaux, une intégration directe par quadrature de Gauss est suffisante.
- Pour les termes à singularité faible, un changement local de la variable d'intégration [41-43] est nécessaire, pour une meilleure précision, avant l'application de la quadrature de Gauss (Annexe C.1).
- Pour les termes à singularité forte et hyper-singuliers, la technique de soustraction de la singularité est utilisée pour l'évaluation de la valeur principale de Cauchy et des parties finies d'Hadamard [34, 35, 38, 39, 44-46] (Annexe C.2 et C.3).

2.5.5 Constitution du système à résoudre

Une fois le système d'équations à résoudre (2.64) est constitué, il faut le conditionner avant de lancer la procédure de résolution. En effet, les coefficients A_{ij} et B_{ij} ne sont pas du même ordre de grandeur.

Pour bien conditionner le système, nous devons multiplier les coefficients de la matrice $[B]$ par $2G$ (G étant le module de cisaillement).

Le système final à résoudre est donc :

$$[A]\{u\} = (2G)[B]\left\{t' = \frac{t}{2G}\right\} \quad (2.65)$$

Le système d'équations est à $(6 \times N_{elt})$ équations à $(12 \times N_{elt})$ variables. Donc, $(6 \times N_{elt})$ de ces variables sont données comme conditions aux limites.

En transposant les variables connues à gauche et celles inconnues à droite, nous obtenons un système de $(6 \times N_{elt})$ équations à $(6 \times N_{elt})$ inconnues de la forme;

$$[\mathbf{K}]\{X\} = \{Y\} \quad (2.66)$$

Après résolution, les valeurs des tensions calculées sont multipliées par $2G$ pour avoir les valeurs réelles.

2.5.6 Calcul des déplacements des points intérieurs

Le champ des déplacements des points intérieurs se calcul par une simple intégration de l'équation (2.47) discrétisée:

$$u_i(M_n^k) = 2\pi \sum_{m=1}^{N_{elt}} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left(\int_0^{L_m} U_{ij}(M_n^k, s) N_l(s) r(s) d\Gamma \right) t_j(M_m^l) - 2\pi \sum_{m=1}^{N_{elt}} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left(\int_0^{L_m} T_{ij}(M_n^k, s) N_l(s) r(s) d\Gamma \right) u_j(M_m^l) \quad (2.67)$$

2.5.7 Calcul des contraintes des points intérieurs

Le tenseur des contraintes d'un point intérieur P est calculé par une simple sommation. L'équation (2.51) discrétisée nous donne:

$$\sigma_{ij}(P) = 2\pi \sum_{m=1}^{N_{elt}} \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left(\int_0^{L_m} D_{ijk}(P, s) N_l(s) r(s) d\Gamma \right) t_k(M_m^l) - 2\pi \sum_{m=1}^{N_{elt}} \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left(\int_0^{L_m} S_{ijk}(P, s) N_l(s) r(s) d\Gamma \right) u_k(M_m^l) \quad (2.68)$$

2.5.8 Calcul des contraintes des points du contour

Le tenseur des contraintes d'un point P sur le contour est calculé par une simple sommation. L'équation (2.53) nous donne:

$$\sigma_{ij}(P) = 2 \left(\begin{array}{l} 2\pi \sum_{m=1}^{N_{elt}} \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left(\int_0^{L_m} D_{ijk}(P, s) N_l(s) r(s) d\Gamma \right) t_k(M_m^l) \\ -2\pi \sum_{m=1}^{N_{elt}} \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left(\int_0^{L_m} S_{ijk}(P, s) N_l(s) r(s) d\Gamma \right) u_k(M_m^l) \end{array} \right) \quad (2.69)$$

2.5.9 Organigramme du module BEM-AXI

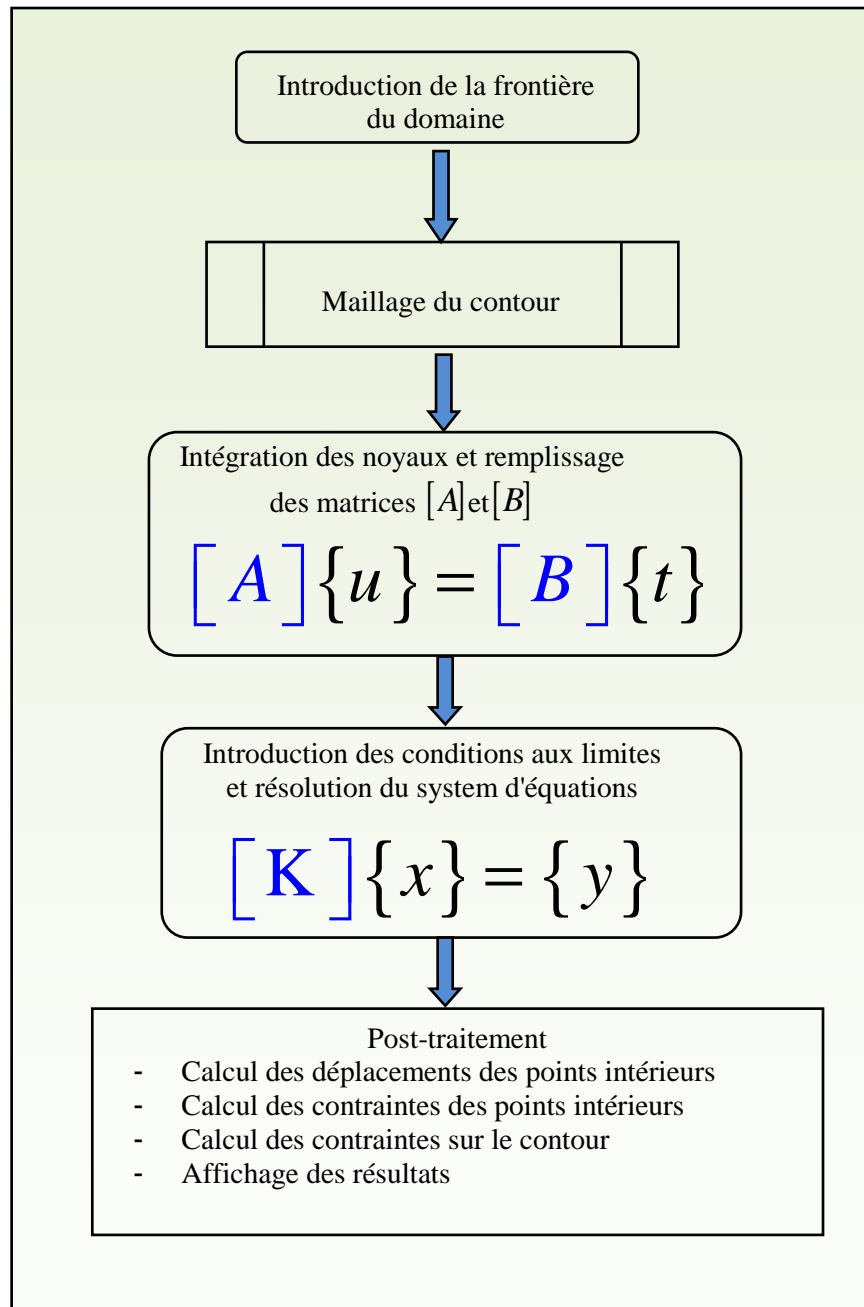


Fig. 2.10 Organigramme du module *BEM-AXI* dans le cas de l'élasticité axisymétrique

2.6 Validation numérique

Dans cette section, trois exemples académiques illustrent la régularité des résultats numériques face aux solutions analytiques.

2.6.1 Evaluation de la convergence

On considère dans cet exemple le cas d'un cylindre creux, à paroi épaisse, de rayon interne R_i , externe R_e et de hauteur H , sous une pression interne P (Fig. 2.11).

La solution analytique du problème est donnée par Timoshenko et Goodier [47]:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \sigma_r = C_3 - \frac{C_4}{r^2} \quad (2.70)$$

Les constantes, C_1 à C_4 , dépendent de la géométrie et du chargement.

Les valeurs numériques considérées sont: $R_i = 3.0$, $R_e = 6.0$, $H = 1.0$, $P = 1.0$, $E = 1.0$ et $\nu = 0.3$.

Les constantes valent alors: $C_1=0.1733$, $C_2=15.6$, $C_3=0.3333$ et $C_4=12.0$

Différents raffinements du maillage sont utilisés pour évaluer la convergence de la méthode des éléments de frontières (BEM), comparée aux éléments finis (MEF) et à la solution analytique (2.70).

Les tableaux 1 et 2 regroupent les valeurs calculées.

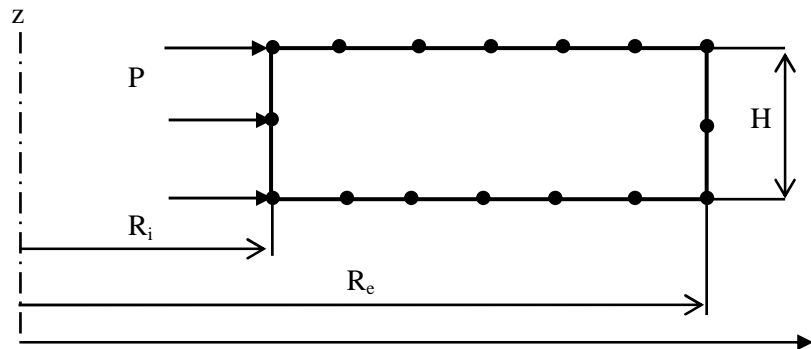


Fig. 2.11 Maillage d'un cylindre à paroi épaisse

Les valeurs reportées dans les tableaux ci-dessus montrent une meilleure convergence de la méthode des éléments de frontières, même pour un maillage grossier (BEM 6 éléments), l'erreur est très faible (inférieure à 0.2%), aussi bien pour le calcul des déplacements que pour celui des contraintes. Ceci représente un avantage considérable en gain de temps machine, lorsqu'on a besoin d'intégrer un calcul par éléments de frontières dans un algorithme itératif nécessitant un grand nombre d'itérations. Le graphe de la Fig. 2.12 est une superposition des valeurs numériques et de la solution analytique.

Tableau 1. Calcul du déplacement radial u_r en fonction du nombre d'éléments du maillage

r	BEM 6 Elts	BEM 10 Elts	BEM 20Elts	BEM 24 Elts	BEM 30 Elts	MEF 38 Elts	Analytique
3,0	5,7211	5,7202	5,7200	5,7200	5,7200	5,7200	5,7200
3,6	4,9578	4,9575	4,9574	4,9574	4,9573	4,9574	4,9573
4,2	4,4428	4,4425	4,4423	4,4423	4,4423	4,4423	4,4423
4,8	4,0830	4,0822	4,0820	4,0820	4,0820	4,0820	4,0820
5,4	3,8258	3,8251	3,8249	3,8249	3,8249	3,8249	3,8249
6,0	3,6407	3,6402	3,6400	3,6400	3,6400	3,6400	3,6400

Tableau 2. Calcul de la contrainte radiale σ_r en fonction du nombre d'éléments du maillage

r	BEM 6 elts	BEM 10 Elts	BEM 20 Elts	BEM 24 Elts	BEM 30 Elts	MEF 38 Elts	Analytique
3,0	-1,0000	-1,0010	-1,0002	-1,0002	-1,0001	-0,9944	-1,0000
3,6	-0,5926	-0,5926	-0,5926	-0,5926	-0,5926	-0,5886	-0,5926
4,2	-0,3469	-0,3468	-0,3469	-0,3469	-0,3469	-0,3451	-0,3469
4,8	-0,1875	-0,1875	-0,1875	-0,1875	-0,1875	-0,1865	-0,1875
5,4	-0,0782	-0,0782	-0,0782	-0,0782	-0,0782	-0,0775	-0,0782
6,0	-0,0002	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000	-0,0005	0,0000

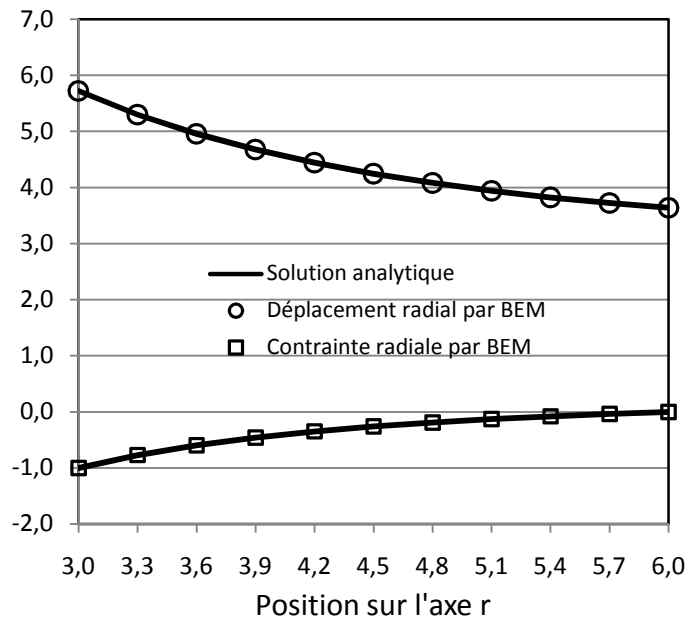


Fig. 2.12 Superposition des résultats Analytique-Eléments de frontières pour le cas du maillage à 10 éléments

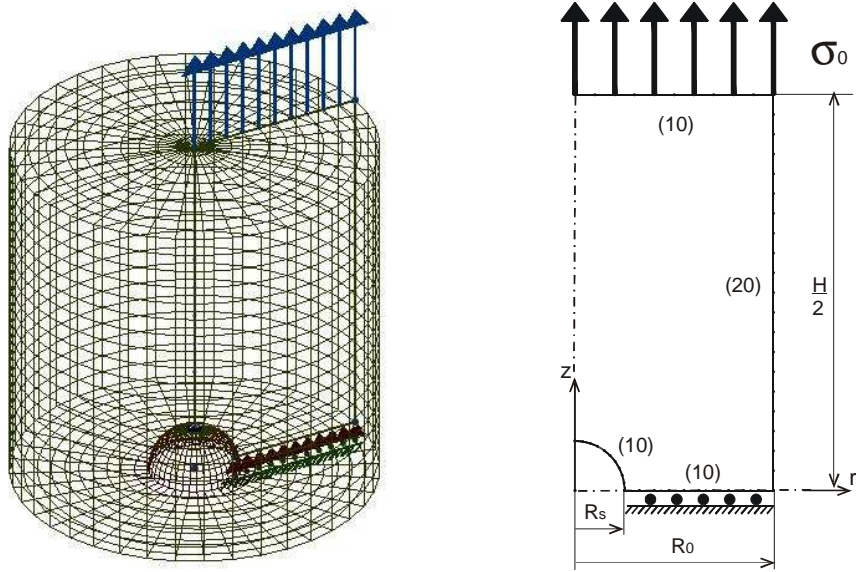
2.6.2 Cavité sphérique dans une barre cylindrique

Dans cet exemple, la concentration de contrainte induite par une cavité sphérique dans une barre cylindrique en traction, est calculée par la méthode des équations intégrales, et les résultats comparés à la solution analytique.

Considérons un cylindre plein de rayon R_0 et de hauteur H , avec une cavité sphérique de rayon R_s centrée sur son axe. Les faces, supérieure et inférieure du cylindre, sont soumises à une tension uniforme σ_0 . Les valeurs numériques considérées sont: $R_0 = 1.0$, $H = 4.0$, $R_s = 0.25$, $\sigma_0 = 1.0$, $E = 1.0$ et $\nu = 0.3$. La solution analytique pour la distribution radiale de la contrainte axiale dans le plan médian $\sigma_z (z = 0)$, est donnée par une formule asymptotique, pour un cylindre de longueur infinie, par Timoshenko et Goodier [47] :

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_0} = 1 + \frac{(4-5\nu)}{2(7-5\nu)} \left(\frac{R_s}{r}\right)^3 + \frac{9}{2(7-5\nu)} \left(\frac{R_s}{r}\right)^5 \quad (2.71)$$

La Fig. 2.13 montre les détails du maillage utilisé pour une moitié du domaine en considérant le plan de symétrie $z=0$. Le graphe de la Fig. 2.14 donne la répartition de la contrainte axiale sur le plan $z=0$.



a- Représentation 3-D

b- Maillage axisymétrique

Fig. 2.13 Maillage en éléments de frontière du problème de la cavité sphérique dans une barre cylindrique

La contrainte axiale maximale a lieu au point de coordonnées: $r = R_s$ et $z = 0$, et a pour valeur, d'après la formule (2.71):

$$(\sigma_z)_{\max} = 2.04545\sigma_0$$

La valeur calculée par extrapolation sur les valeurs nodales de l'élément non conforme est :

$$(\sigma_z)_{\max} = 2.04655\sigma_0$$

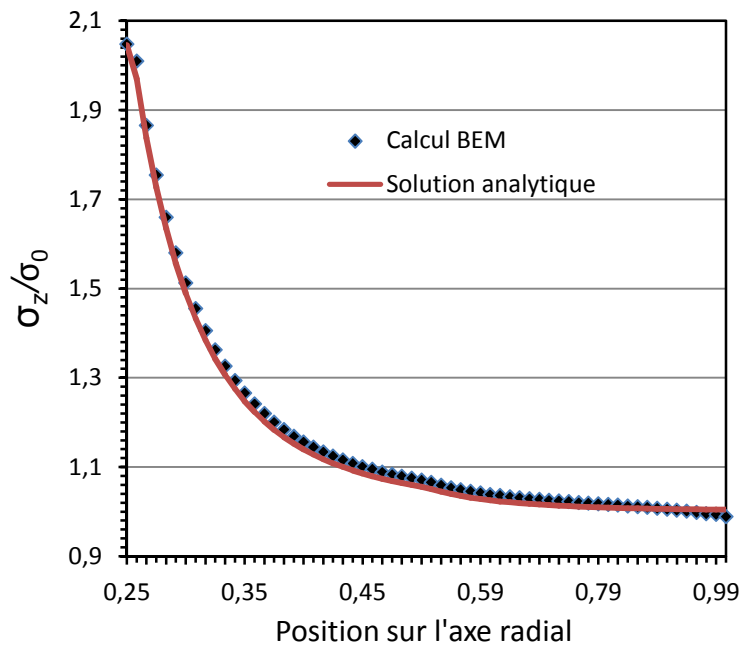


Fig. 2.14 Contrainte axiale sur le plan ($z=0$) pour l'exemple de la cavité sphérique dans une barre cylindrique

2.6.3 Barre cylindrique entaillée

Dans cet exemple, la concentration de contrainte induite par une entaille creusée sur une barre cylindrique en traction, est calculée par la méthode des équations intégrales, et les résultats comparés à ceux obtenus par éléments finis (code ABAQUS 6.7). La barre est de rayon R_0 et de hauteur H , avec une entaille de rayon R_e et R_c pour le collet (Fig. 2.15). Les propriétés mécaniques du matériau sont : $E=70000$ MPa et $\nu=0.3$.

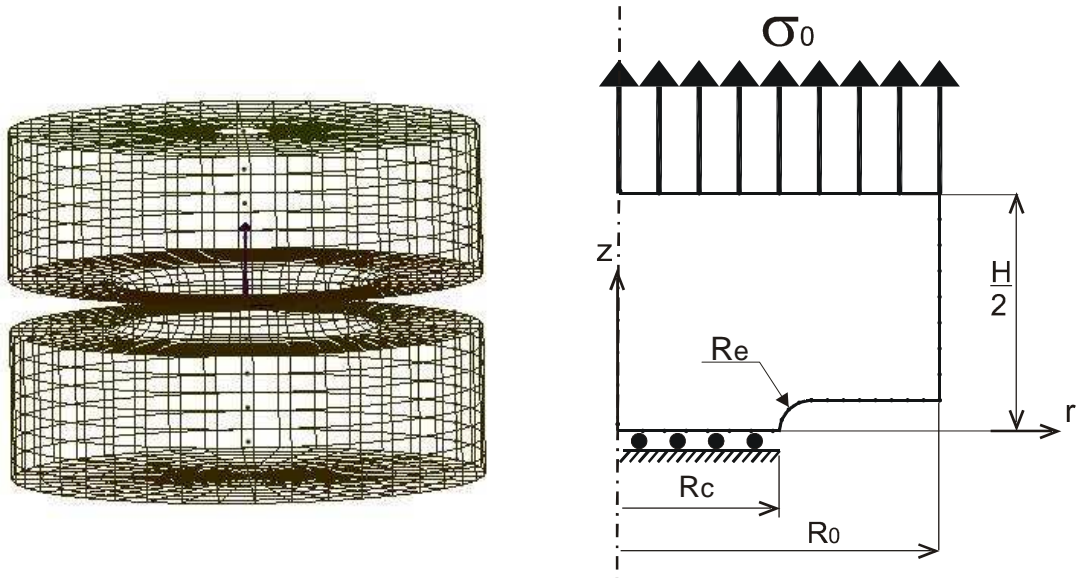


Fig. 2.15 Maillage en éléments de frontière de la barre cylindrique entaillée

Trois configurations géométriques sont traitées et les résultats pour les contraintes, axiale et radiale normalisées (σ / σ_0), reportés sur les figures Fig. 2.16, Fig. 2.17, Fig. 2.18.

Les données géométriques pour les trois cas sont:

- Cas (a): $\frac{R_0}{R_c} = 2.0$, $\frac{R_e}{R_c} = 0.5$, $\frac{H}{R_c} = 3.0$
- Cas (b): $\frac{R_0}{R_c} = 2.0$, $\frac{R_e}{R_c} = 0.2$, $\frac{H}{R_c} = 3.0$
- Cas (c): $\frac{R_0}{R_c} = 2.5$, $\frac{R_e}{R_c} = 0.2$, $\frac{H}{R_c} = 3.0$

Les résultats obtenus au moyen de la MEI (BEM) sont en très bonne corrélation avec ceux obtenus par éléments finis (Élément quadrilatéral, 8 nœuds biquadratique CAX8).

Les concentrations maximales de la contrainte, calculées par éléments de frontières, sont : 7.26 pour le cas (a); 10.50 pour le cas (b) et 16.86 pour le cas (c).

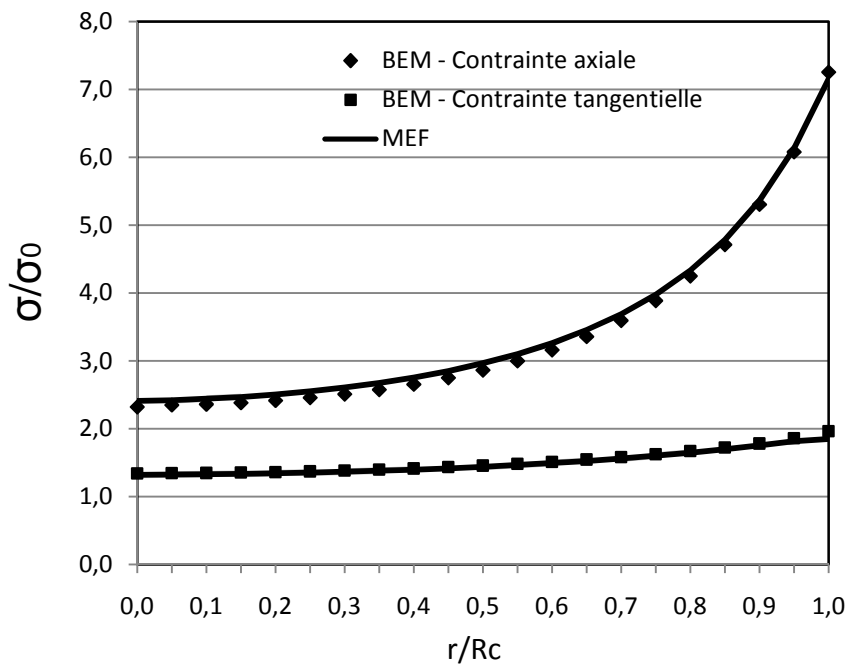


Fig. 2.16 Distribution des contraintes dans la barre entaillée (a).

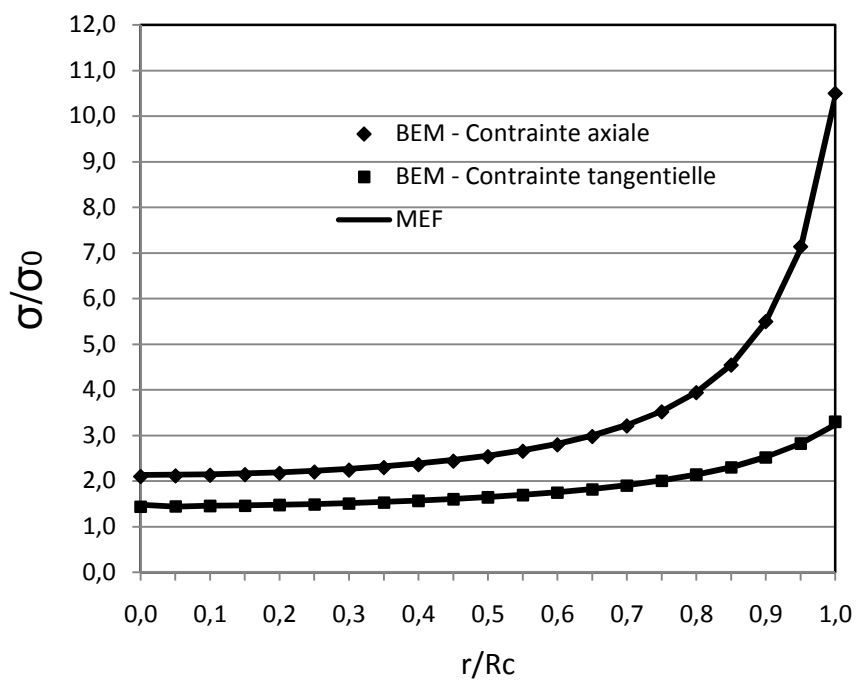


Fig. 2.17 Distribution des contraintes dans la barre entaillée (b).

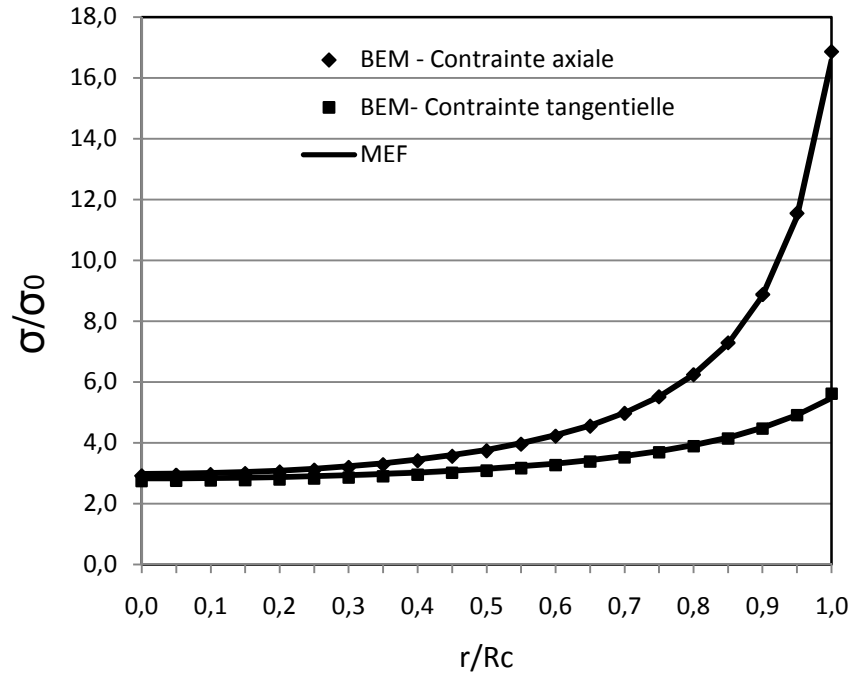


Fig. 2.18 Distribution des contraintes dans la barre entaillée (c).

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une formulation en équations intégrales de frontière appliquée à l'élasticité linéaire axisymétrique. En exploitant la symétrie axiale, les équations intégrales pour l'élasticité tridimensionnelle ont été intégrées suivant la direction circonférentielle réduisant ainsi la dimension du problème d'une unité. Les noyaux axisymétriques, ainsi obtenus, ont été intégrés numériquement, chacun selon son degré de singularité. Pour la discrétisation des champs élastiques, nous avons opté pour un élément quadratique non conforme, assurant aussi bien une continuité de la normale sur la frontière que l'existence des valeurs propres de Cauchy et des parties finies d'Hadamard pour les intégrales singulières. Enfin, des exemples de calcul, illustrant les subtilités de la méthode à traiter des cas académiques de problèmes élastiques axisymétriques, ont montré que l'on pouvait avoir des résultats, en très bon accord avec des solutions analytiques ou par éléments finis, avec des maillages relativement grossiers.

Chapitre 3 Simulation de structures axisymétriques fissurées

3.1 Introduction

Le calcul des structures fissurées utilise les concepts de la mécanique de la rupture et plus particulièrement, la mécanique linéaire de la rupture dans le cas de la rupture fragile. Une fissure est considérée comme une entaille dont le rayon de courbure est très faible, ceci engendre des contraintes infinies au voisinage immédiat du fond de fissure. La théorie de la mécanique de la rupture n'a cessé de se développer depuis que Griffith [48] expliqua la rupture fragile par des considérations énergétiques. Le facteur d'intensité de contraintes, K , a été introduit par Irwin [49] comme une caractéristique de la fissure. En utilisant le développement en variable complexe de Westergaard [6], il a pu déduire des expressions pour les champs des déplacements et des contraintes au voisinage du fond de fissure. Les méthodes analytiques, nécessitant généralement des développements mathématiques laborieux, ont été développées pour un large éventail de problèmes par plusieurs chercheurs dont les travaux [50-52] sont considérés comme des références incontournables quant il s'agit de valider des techniques numériques. Ainsi, certains auteurs ont regroupé les solutions aux différentes configurations de fissures dans les solides, dans des recueils mis à la disposition des ingénieurs et permettant d'estimer l'état de contrainte au voisinage du fond de fissure [53, 54]. Cependant, les méthodes analytiques sont restreintes à des cas dont la géométrie et le chargement sont relativement simples, non représentatifs de la majorité des cas réels complexes. En revanche, les méthodes expérimentales restent de mise en œuvre coûteuse, en temps et en financement.

3.2 Equations intégrales pour les structures axisymétriques fissurées

Les équations intégrales de frontières (2.50) et (2.54) sont valables pour une structure axisymétrique non fissurée. La présence d'une fissure confinée ou débouchante, introduit de nouveaux développements, prenant en charge l'effet de la discontinuité du domaine comme une frontière additionnelle. Et comme le maillage de la géométrie porte sur le plan médian, la fissure est représentée par ses deux lèvres, supérieure et inférieure de normales opposées.

Le domaine élastique considéré Ω est borné par sa frontière S . Une fissure Γ y est représentée par ses deux lèvres Γ^+ et Γ^- , géométriquement confondues et libres de tout chargement, et de normales n^+ et n^- opposées, choisies de sorte que n^+ pointe vers Γ^- et vis versa (Fig. 3.1.b). Ceci pour respecter la convention d'orientation de la normale.

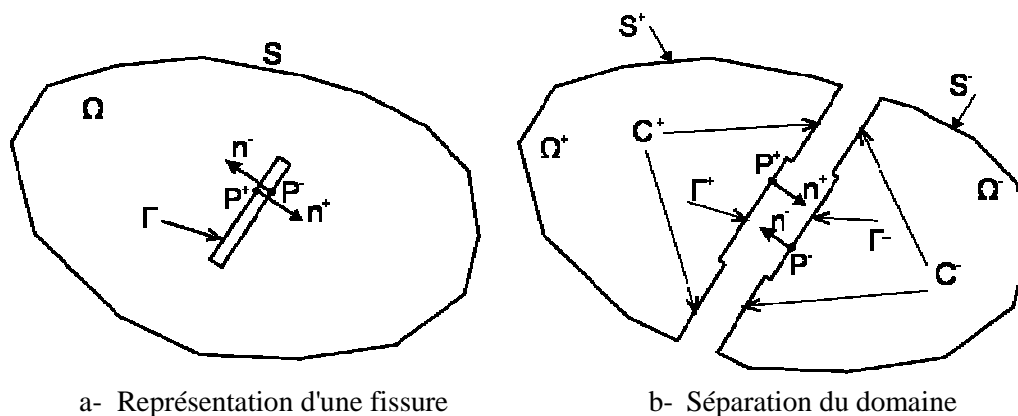


Fig. 3.1 Structure fissurée (Cas où $P \in \Gamma$)

3.2.1 Equation intégrale en déplacement pour les points de la fissure

Décomposons le domaine Ω en deux sous domaines Ω^+ et Ω^- séparés par la fissure Γ et le contour C (Fig. 3.1.b). Nous pouvons écrire pour un point P^+ appartenant à la lèvres Γ^+ de la fissure, l'équation intégrale en déplacement:

$$\frac{1}{2}u_i(P^+) = \int_{S^+ + C^+ + \Gamma^+} \alpha(Q)U_{ij}(P^+, Q)t_j(Q)ds - \int_{S^+ + C^+ + \Gamma^+} \alpha(Q)T_{ij}(P^+, Q)u_j(Q)ds \quad (3.1)$$

De même, pour un point P^- de la lèvres inférieure Γ^- , l'équation intégrale en déplacement s'écrit:

$$\frac{1}{2}u_i(P^-) = \int_{S^- + C^- + \Gamma^-} \alpha(Q)U_{ij}(P^-, Q)t_j(Q)ds - \int_{S^- + C^- + \Gamma^-} \alpha(Q)T_{ij}(P^-, Q)u_j(Q)ds \quad (3.2)$$

L'addition membre à membre des deux égalités (3.1) et (3.2), pour un même point $P = P^+ = P^-$, en tenant compte des orientations des normales sur la partie C du contour, donne:

$$\frac{1}{2}(u_i(P^+) + u_i(P^-)) = \int_{S + \Gamma^+ + \Gamma^-} \alpha(Q)U_{ij}(P, Q)t_j(Q)ds - \int_{S + \Gamma^+ + \Gamma^-} \alpha(Q)T_{ij}(P, Q)u_j(Q)ds \quad (3.3)$$

Ou encore, sachant que $\Gamma = \Gamma^+ + \Gamma^-$:

$$\frac{1}{2}(u_i(P^+) + u_i(P^-)) = \int_{S + \Gamma} \alpha(Q)U_{ij}(P, Q)t_j(Q)ds - \int_{S + \Gamma} \alpha(Q)T_{ij}(P, Q)u_j(Q)ds \quad (3.4)$$

L'équation (3.4) représente l'équation intégrale en déplacement pour les points de la fissure.

3.2.2 Equation intégrale en tension pour les points de la fissure

Un raisonnement analogue à celui de la section 3.2.1, nous permet d'écrire l'équation intégrale en contraintes pour un point $P = P^+ = P^-$ sur les lèvres de la fissure en reprenant l'équation pour les contraintes (2.51):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{ij}(P^+) + \sigma_{ij}(P^-)) &= \int_{S + \Gamma} \alpha(Q)D_{ijk}(P, Q)t_k(Q)ds \\ &\quad - \int_{S + \Gamma} \alpha(Q)S_{ijk}(P, Q)u_k(Q)ds \end{aligned} \quad (3.5)$$

La multiplication des deux membres de l'équation (3.5) par la normale n^+ du point P^+ ou n^- du point P^- nous donne l'équation intégrale en tension:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(t_i(P^+) + t_i(P^-)) &= n_j(P^+) \int_{S + \Gamma} \alpha(Q)D_{ijk}(P, Q)t_k(Q)ds \\ &\quad - n_j(P^+) \int_{S + \Gamma} \alpha(Q)S_{ijk}(P, Q)u_k(Q)ds \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pour une fissure non chargée (i.e. $t_i(P) = 0$), l'équation intégrale en tension se réduit à:

$$n_j(P^+) \int_{S + \Gamma} \alpha(Q)D_{ijk}(P, Q)t_k(Q)ds = n_j(P^+) \int_{S + \Gamma} \alpha(Q)S_{ijk}(P, Q)u_k(Q)ds \quad (3.7)$$

3.2.3 Equation intégrale en déplacement pour les points du contour

Si le point P n'appartient pas aux lèvres de la fissure (Fig. 3.2), mais plutôt au contour S^+ par exemple, l'équation intégrale en déplacement (2.50) s'écrit:

$$\frac{1}{2}u_i(P) = \int_{S^+ + C^+ + \Gamma^+} \alpha(Q)U_{ij}(P, Q)t_j(Q)ds - \int_{S^+ + C^+ + \Gamma^+} \alpha(Q)T_{ij}(P, Q)u_j(Q)ds \quad (3.8)$$

D'un autre coté, et comme P n'appartient pas à Ω^- , le théorème de réciprocité (équation 2.26) nous permet d'écrire une relation intégrale sur le domaine Ω^- , comme suit:

$$\int_{S^-+C^-+\Gamma^-} \alpha(Q)U_{ij}(P,Q)t_j(Q)ds = \int_{S^-+C^-+\Gamma^-} \alpha(Q)T_{ij}(P,Q)u_j(Q)ds \quad (3.9)$$

L'addition membre à membre des deux égalités (3.8) et (3.9), en tenant compte des orientations des normales sur la partie C du contour, donne:

$$\frac{1}{2}u_i(P) = \int_{S+\Gamma} \alpha(Q)U_{ij}(P,Q)t_j(Q)ds - \int_{S+\Gamma} \alpha(Q)T_{ij}(P,Q)u_j(Q)ds \quad (3.10)$$

Ce qui représente, l'équation intégrale en déplacement pour un point du contour du domaine.

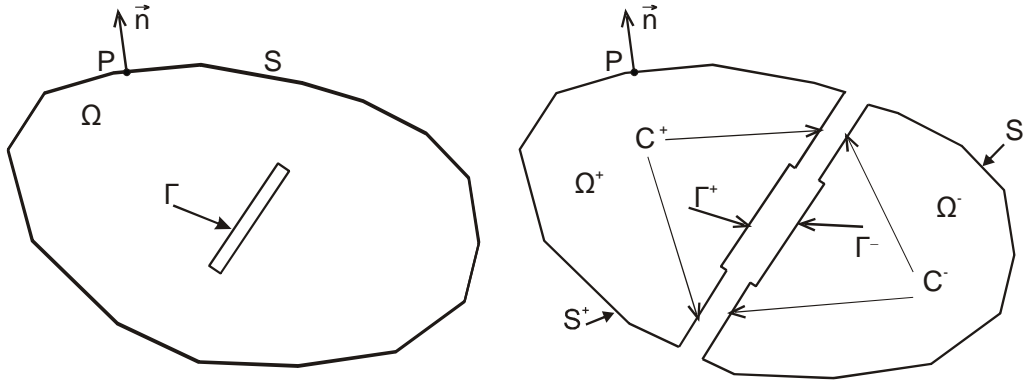


Fig. 3.2 Structure fissurée (Cas où $P \notin \Gamma$)

3.2.4 Equation intégrale en tension pour les points du contour

Un raisonnement analogue à celui de la section précédente, nous permet d'écrire l'équation intégrale en contraintes pour un point P du contour :

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(P) = \int_{S+\Gamma} \alpha(Q)D_{ijk}(P,Q)t_k(Q)ds - \int_{S+\Gamma} \alpha(Q)S_{ijk}(P,Q)u_k(Q)ds \quad (3.11)$$

Ensuite, une multiplication des deux parties de l'égalité ci-dessus par les composantes de la normale au point P, nous donne l'équation intégrale en tension pour un point du contour:

$$\frac{1}{2}t_i(P) = n_j(P) \int_{S+\Gamma} \alpha(Q)D_{ijk}(P,Q)t_k(Q)ds - n_j(P) \int_{S+\Gamma} \alpha(Q)S_{ijk}(P,Q)u_k(Q)ds \quad (3.12)$$

3.2.5 Déplacements et contraintes des points intérieurs

Considérant le point P dans la partie Ω^+ du domaine, l'identité de Somigliana (2.30) s'écrit pour ce point:

$$u_i(P) = \int_{S^++C^++\Gamma^+} \alpha(Q)U_{ij}(P,Q)t_j(Q)ds - \int_{S^++C^++\Gamma^+} \alpha(Q)T_{ij}(P,Q)u_j(Q)ds \quad (3.13)$$

D'autre part, le théorème de réciprocité (équation 2.26), se traduit pour la partie Ω^- du domaine par la relation:

$$\int_{S^-+C^-+\Gamma^-} \alpha(Q)U_{ij}(P,Q)t_j(Q)ds = \int_{S^-+C^-+\Gamma^-} \alpha(Q)T_{ij}(P,Q)u_j(Q)ds \quad (3.14)$$

L'addition membre à membre des deux égalités (3.13) et (3.14) nous donne l'identité de Somigliana pour une structure fissurée:

$$u_i(P) = \int_{S+\Gamma} \alpha(Q)U_{ij}(P,Q)t_j(Q)ds - \int_{S+\Gamma} \alpha(Q)T_{ij}(P,Q)u_j(Q)ds \quad (3.15)$$

Le tenseur des contraintes est obtenu, par différentiation de l'équation ci-dessus par rapport à P et utilisation de la loi de comportement de Hooke (2.45), ce qui donne:

$$\sigma_{ij}(P) = \int_{S+\Gamma} \alpha(Q) D_{ijk}(P, Q) t_k(Q) ds - \int_{S+\Gamma} \alpha(Q) S_{ijk}(P, Q) u_k(Q) ds \quad (3.16)$$

3.2.6 Contraintes des points du contour

Le tenseur des contraintes d'un point P du contour S, est calculé directement à partir de l'équation intégrale en contraintes pour une structure fissurée (3.11):

$$\sigma_{ij}(P) = 2 \left\{ \int_{S+\Gamma} \alpha(Q) D_{ijk}(P, Q) t_k(Q) ds - \int_{S+\Gamma} \alpha(Q) S_{ijk}(P, Q) u_k(Q) ds \right\}$$

3.3 Traitement numérique des équations intégrales duales

3.3.1 Discrétisation de la géométrie

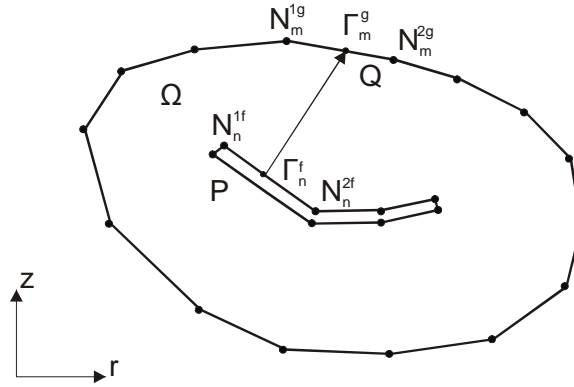


Fig. 3.3 Discrétisation de la géométrie

Le contour de la structure, est discrétisé en N_{elt}^g segments de droite Γ_m^g ($m = 1, N_{elt}^g$). Chaque élément est défini par deux nœuds de géométrie N_m^{1g} et N_m^{2g} (Fig. 3.3). La fissure est discrétisée en $2 \times N_{elt}^f$ segments de droite Γ_m^f ($m = 1, 2 \times N_{elt}^f$), les lèvres Γ^+ et Γ^- contenant N_{elt}^f éléments chacune. Les éléments Γ_{2i+1}^f et Γ_{2i+2}^f ($i = 0, N_{elt}^f - 1$) sont géométriquement confondus et de normales opposées:

$$\vec{n}(\Gamma_{2i+1}^f) = -\vec{n}(\Gamma_{2i+2}^f) \quad (3.17)$$

Les éléments de la fissure sont définis par deux nœuds de géométrie N_m^{1f} et N_m^{2f} . La position du point d'intégration Q sur l'élément de frontière Γ_m^κ ($\kappa = f, g$) est donnée en fonction des nœuds de géométrie par des fonctions de forme linéaires $N_1(s)$ et $N_2(s)$:

$$\begin{cases} x_Q(s) = x_{N_m^{1\kappa}} N_1(s) + x_{N_m^{2\kappa}} N_2(s) \\ y_Q(s) = y_{N_m^{1\kappa}} N_1(s) + y_{N_m^{2\kappa}} N_2(s) \end{cases} \quad (\kappa = f, g) \quad (3.18)$$

3.3.2 Discrétisation des champs élastiques

Les vecteurs, déplacement $\vec{u}(Q)$ et tension $\vec{t}(Q)$ pour n'importe quel point de la géométrie ou de la fissure, sont approximés par des fonctions de forme quadratiques (2.58). Les points de collocation des deux extrémités de l'élément sont décalés vers son centre comme au chapitre précédent. En première approche, le fond de la fissure est discrétisé par le même type d'élément (élément quadratique non conforme). Un deuxième type, d'élément singulier, sera adapté en fond de fissure par la suite (Section 3.4.5).

3.3.3 Discrétisation des équations intégrales duales

3.3.3.1 Discrétisation de l'équation intégrale en déplacements pour un point de la fissure

L'équation intégrale en déplacements (3.4), appliquée à un point de collocation ($P = M_n^{fk}$) de l'élément de fissure Γ_n^f situé sur la lèvres Γ^+ s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(u_i(M_n^{fk}) + u_i(M_{n+1}^{f(4-k)}) \right) = & \int_{S+\Gamma} \alpha(Q) U_{ij}(M_n^{fk}, Q) t_j(Q) ds \\ & - \int_{S+\Gamma} \alpha(Q) T_{ij}(M_n^{fk}, Q) u_j(Q) ds \end{aligned} \quad (3.19)$$

En discrétisant le contour S en N_{elt}^g éléments Γ_m^g ($m = 1, N_{elt}^g$) et la fissure Γ en $2 \times N_{elt}^f$ éléments Γ_m^f ($m = 1, 2 \times N_{elt}^f$), les intégrales sur le contour ($S + \Gamma$) se transforment en des sommations des intégrales sur les éléments:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(u_i(M_n^{fk}) + u_i(M_{n+1}^{f(4-k)}) \right) = & \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \int_{\Gamma_m^g} \alpha(Q) U_{ij}(M_n^{fk}, Q) t_j(Q) ds \\ & + \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \int_{\Gamma_m^f} \alpha(Q) U_{ij}(M_n^{fk}, Q) t_j(Q) ds \\ & - \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \int_{\Gamma_m^g} \alpha(Q) T_{ij}(M_n^{fk}, Q) u_j(Q) ds \\ & - \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \int_{\Gamma_m^f} \alpha(Q) T_{ij}(M_n^{fk}, Q) u_j(Q) ds \end{aligned} \quad (3.20)$$

Et en remplaçant les variables $u_j(Q)$ et $t_j(Q)$ par leurs approximations respectives (2.58), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(u_i(M_n^{fk}) + u_i(M_{n+1}^{f(4-k)}) \right) = & \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \int_{\Gamma_m^g} \alpha(Q) U_{ij}(M_n^{fk}, Q) \left(\sum_{l=1}^3 N_l(s) t_j(M_m^{gl}) \right) ds \\ & + \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \int_{\Gamma_m^f} \alpha(Q) U_{ij}(M_n^{fk}, Q) \left(\sum_{l=1}^3 N_l(s) t_j(M_m^{fl}) \right) ds \\ & - \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \int_{\Gamma_m^g} \alpha(Q) T_{ij}(M_n^{fk}, Q) \left(\sum_{l=1}^3 N_l(s) u_j(M_m^{gl}) \right) ds \\ & - \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \int_{\Gamma_m^f} \alpha(Q) T_{ij}(M_n^{fk}, Q) \left(\sum_{l=1}^3 N_l(s) u_j(M_m^{fl}) \right) ds \end{aligned} \quad (3.21)$$

Soit, en faisant une sommation sur les deux directions radiale et axiale :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \left(u_i(M_n^{fk}) + u_i(M_{n+1}^{f(4-k)}) \right) = & \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_m^g} \left(\alpha(Q) U_{ij}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) t_j(M_m^{gl}) \\
 & + \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_m^f} \left(\alpha(Q) U_{ij}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) t_j(M_m^{fl}) \\
 & - \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_m^g} \left(\alpha(Q) T_{ij}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) u_j(M_m^{gl}) \\
 & - \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_m^f} \left(\alpha(Q) T_{ij}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) u_j(M_m^{fl})
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Où L_m^g et L_m^f sont, respectivement, les longueurs des éléments du contour et de la fissure.

L'équation (3.22) est à $(12 \times N_{elt}^g + 24 \times N_{elt}^f)$ variables.

3.3.3.2 Discrétisation de l'équation intégrale en tensions pour un point de la fissure

L'équation intégrale en tensions (3.6), appliquée à un point de collocation $(P = M_n^{fk})$ de l'élément de fissure Γ_n^f situé sur la lèvres Γ^- s'écrit:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \left(t_i(M_n^{fk}) + t_i(M_{n+1}^{f(4-k)}) \right) = & \int_{s+\Gamma} \alpha(Q) D_{ij\alpha}(M_n^{fk}, Q) t_\alpha(Q) ds \\
 & - \int_{s+\Gamma} \alpha(Q) S_{ij\alpha}(M_n^{fk}, Q) u_\alpha(Q) ds
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Une démarche similaire à celle suivie pour la discrétisation de l'équation en déplacements nous conduit au résultat suivant:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \left(t_i(M_n^{fk}) + t_i(M_{n+1}^{f(4-k)}) \right) = & \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \sum_{l=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 n_j(M_n^{fk}) \int_0^{L_m^g} \left(\alpha(Q) D_{ij\alpha}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) t_\alpha(M_m^{gl}) \\
 & + \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \sum_{l=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 n_j(M_n^{fk}) \int_0^{L_m^f} \left(\alpha(Q) D_{ij\alpha}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) t_\alpha(M_m^{fl}) \\
 & - \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \sum_{l=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 n_j(M_n^{fk}) \int_0^{L_m^g} \left(\alpha(Q) S_{ij\alpha}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) u_\alpha(M_m^{gl}) \\
 & - \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \sum_{l=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 n_j(M_n^{fk}) \int_0^{L_m^f} \left(\alpha(Q) S_{ij\alpha}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) u_\alpha(M_m^{gl})
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Dans le cas d'une fissure non chargée, l'équation en tensions ci-dessus se réduit à:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \sum_{l=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 n_j(M_n^{fk}) \int_0^{L_m^g} \left(\alpha(Q) S_{ij\alpha}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) u_\alpha(M_m^{gl}) \\
 & + \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \sum_{l=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 n_j(M_n^{fk}) \int_0^{L_m^f} \left(\alpha(Q) S_{ij\alpha}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) u_\alpha(M_m^{gl}) \\
 & = \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \sum_{l=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 n_j(M_n^{fk}) \int_0^{L_m^g} \left(\alpha(Q) D_{ij\alpha}(M_n^{fk}, s) N_l(s) ds \right) t_\alpha(M_m^{gl})
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.3.3.3 Discrétisation de l'équation intégrale en déplacements pour un point du contour

L'équation intégrale en déplacements (3.10) appliquée à un point de collocation ($P = M_n^{gk}$) de l'élément de contour Γ_n^g s'écrit:

$$\frac{1}{2}u_i(M_n^{gk}) = \int_{S+\Gamma} \alpha(Q)U_{ij}(M_n^{gk}, Q)t_j(Q)ds - \int_{S+\Gamma} \alpha(Q)T_{ij}(M_n^{gk}, Q)u_j(Q)ds \quad (3.26)$$

Discrétisée, l'équation ci-dessus prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(M_n^{fk}) = & \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_m^g} (\alpha(Q)U_{ij}(M_n^{gk}, s)N_l(s)ds)t_j(M_m^{gl}) \\ & + \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_m^f} (\alpha(Q)U_{ij}(M_n^{gk}, s)N_l(s)ds)t_j(M_m^{fl}) \\ & - \sum_{m=1}^{N_{elt}^g} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_m^g} (\alpha(Q)T_{ij}(M_n^{gk}, s)N_l(s)ds)u_j(M_m^{gl}) \\ & - \sum_{m=1}^{2 \times N_{elt}^f} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_m^f} (\alpha(Q)T_{ij}(M_n^{gk}, s)N_l(s)ds)u_j(M_m^{fl}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

C'est une équation à $(12 \times N_{elt}^g + 24 \times N_{elt}^f)$ variables.

3.3.3.4 Constitution du système d'équations

La discrétisation des champs élastiques a produit $(12 \times N_{elt}^g + 24 \times N_{elt}^f)$ variables, dont la moitié est imposée comme conditions aux limites. La résolution du problème posé, nécessite donc $(6 \times N_{elt}^g + 12 \times N_{elt}^f)$ équations indépendantes. Et comme la fissure est constituée d'éléments géométriquement superposés, appartenant aux deux lèvres; l'écriture de l'équation en déplacements pour un point P^+ conduit au même résultat que pour une équation écrite pour un point P^- , et de ce fait, le système à résoudre n'aura pas de solution unique. Pour surmonter ce problème, l'équation intégrale en déplacement (3.22) est écrite pour les points d'une lèvre de la fissure, et celle en tensions (équation duale) (3.25) pour les points de l'autre lèvre. Ce qui nous donne deux équations indépendantes pour deux points géométriquement confondus.

La constitution du système d'équations à résoudre, consiste à écrire:

- l'équation intégrale en déplacements discrétisée (3.27) pour les trois points de collocation M_n^{gk} ($k = 1, 3$) de chaque élément du contour Γ_n^g ($n = 1, N_{elt}^g$) suivant les deux directions \vec{e}_r et \vec{e}_z .
- l'équation intégrale en déplacements discrétisée (3.22) pour les trois points de collocation M_n^{fk} ($k = 1, 3$) de chaque élément d'une même lèvre de la fissure Γ_n^f ($n = 2\alpha - 1, \alpha = 1, N_{elt}^f$) suivant les deux directions \vec{e}_r et \vec{e}_z .
- l'équation intégrale en tensions discrétisée (3.25) pour les trois points de collocation M_n^{fk} ($k = 1, 3$) de chaque élément, de l'autre lèvre de la fissure Γ_n^f ($n = 2\alpha, \alpha = 1, N_{elt}^f$) suivant les deux directions \vec{e}_r et \vec{e}_z .

Ce qui nous donne un système linéaire de $(6 \times N_{elt}^g + 6 \times N_{elt}^f + 6 \times N_{elt}^f)$ équations à $(12 \times N_{elt}^g + 24 \times N_{elt}^f)$ variables de la forme:

$$[A]\{u\} = [B]\{t\} \quad (3.28)$$

Les coefficients des matrices $[A]$ et $[B]$ ne sont pas du même ordre de grandeur.

En effet, A_{ij} est du même ordre de grandeur que r , alors que B_{ij} est du même ordre de grandeur que $\frac{r}{2G}$ (G étant le module de cisaillement). Pour bien conditionner le système nous devons multiplier les coefficients de la matrice $[B]$ par $2G$. Le système final à résoudre est donc:

$$[A]\{u\} = (2G)[B]\left\{t' = \frac{t}{2G}\right\} \quad (3.29)$$

En transférant les variables connues (imposées comme conditions aux limites, et qui sont au nombre de $(6 \times N_{elt}^g + 12 \times N_{elt}^f)$) d'un coté, et celles inconnues de l'autre, nous obtenons un système linéaire de $(6 \times N_{elt}^g + 12 \times N_{elt}^f)$ équations à $(6 \times N_{elt}^g + 12 \times N_{elt}^f)$ inconnues de la forme:

$$[K]\{x\} = \{y\} \quad (3.30)$$

Après résolution du système, les valeurs des tensions calculées sont multipliées par $2G$ pour retrouver les valeurs correspondantes au problème posé.

3.4 Evaluation des facteurs d'intensité de contraintes

La théorie de la mécanique de la rupture admet des contraintes infinies au voisinage immédiat du fond de la fissure (Fig. 3.4). Donc, le comportement du matériau n'est plus élastique dans cette région, et une loi de comportement plastique serait plus appropriée. La théorie de la mécanique linéaire de la rupture, par contre, suppose que cette zone plastifiée et confinée à la pointe de la fissure est de rayon faible comparé aux dimensions de la fissure.

Les techniques utilisées, pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contraintes, peuvent être classées selon l'approche considérée. A ce titre, trois méthodes sont largement utilisées:

- Méthode en déplacements
- Méthode en contraintes
- Méthodes énergétiques

3.4.1 Méthode en déplacements

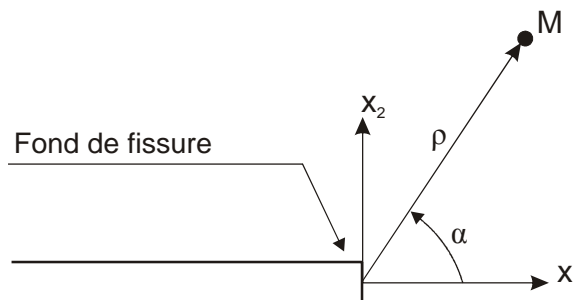


Fig. 3.4 Fond de fissure

Les champs des déplacements et des contraintes au voisinage du fond de fissure sont définis, pour un point $M(\rho, \alpha)$, par les relations suivantes [49]:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{8\mu} \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \left\{ K_I \left[(2\kappa-1) \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} \right] + K_{II} \left[(2\kappa+3) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} \right] \right\} \\ u_z = \frac{1}{8\mu} \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \left\{ K_I \left[(2\kappa+1) \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3\alpha}{2} \right] - K_{II} \left[(2\kappa-3) \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2} \right] \right\} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\alpha}{2} \left[1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\rho}} \sin \frac{\alpha}{2} \left[2 + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \right] \\ \sigma_{rz} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho}} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{3\alpha}{2} \left[1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \right] \\ \sigma_{zz} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\alpha}{2} \left[1 + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\rho}} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \\ \sigma_{\alpha\alpha} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \end{cases} \quad (3.32)$$

Où ρ et α sont les coordonnées polaires du point M dans un repère centré sur la pointe de la fissure. Le paramètre κ est défini par:

$$\kappa = \begin{cases} (3-4\nu) & \text{en déformation plane} \\ (3-\nu) & \text{en contrainte plane} \\ (1+\nu) & \end{cases} \quad (3.33)$$

ν est le coefficient de Poisson et μ le module de cisaillement. Les paramètres K_I et K_{II} sont les facteurs d'intensité de contraintes en mode I et II respectivement. Les termes d'ordres supérieurs en ρ dans les relations (3.31) et (3.32) ont été négligés.

Le saut en déplacement, d'un point P^+ ($\rho, \alpha=\pi$) d'une lèvres de la fissure à un point P^- ($\rho, \alpha=-\pi$) sur l'autre lèvres est calculé à partir des relations (3.31) et en prenant pour l'axisymétrie le coefficient $\kappa=3-4\nu$:

$$u_r(\alpha=\pi) - u_r(\alpha=-\pi) = \frac{4(1-\nu)}{\mu} K_{II} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \quad (3.34)$$

$$u_z(\alpha=\pi) - u_z(\alpha=-\pi) = \frac{4(1-\nu)}{\mu} K_I \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \quad (3.35)$$

Les relations ci-dessus permettent le calcul des facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} , connaissant les déplacements des nœuds des lèvres de la fissure.

Après résolution du problème élastique axisymétrique, les déplacements sont connus en chaque point de collocation des éléments de la fissure y compris ceux des deux éléments de la pointe. Il faut noter que, puisque les résultats pour des valeurs très faibles de ρ devraient être moins fiables du fait de la difficulté à modéliser la singularité du comportement dans cette zone, l'expérience a montré que l'extrapolation sur des valeurs assez larges de ρ donnait de meilleurs résultats.

Les relations (3.34) et (3.35) écrites pour les nœuds de la Fig. 3.5 nous donnent:

$$\begin{cases} K_I(M_2) = u_z(M_2^+) - u_z(M_2^-) = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{L}} \\ K_{II}(M_2) = u_r(M_2^+) - u_r(M_2^-) = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{L}} \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} K_I(M_3) = u_z(M_3^+) - u_z(M_3^-) = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{L}} \\ K_{II}(M_3) = u_r(M_3^+) - u_r(M_3^-) = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{L}} \end{cases} \quad (3.37)$$

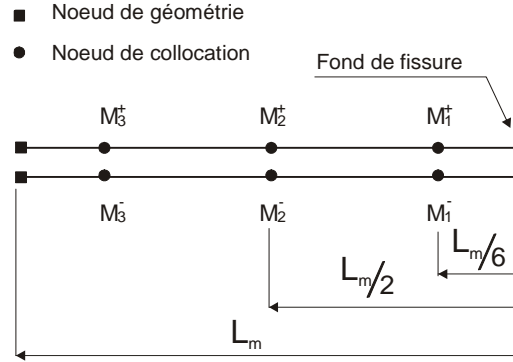


Fig. 3.5 Les nœuds de collocation des deux éléments du fond de fissure

Une extrapolation linéaire, des valeurs des facteurs d'intensité de contraintes, des points M_2 et M_3 vers le fond de la fissure donne:

$$\begin{cases} K_I = \left[5(u_z(M_2^+) - u_z(M_2^-)) - \frac{3\sqrt{15}}{5}(u_z(M_3^+) - u_z(M_3^-)) \right] \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{L}} \\ K_{II} = \left[5(u_r(M_2^+) - u_r(M_2^-)) - \frac{3\sqrt{15}}{5}(u_r(M_3^+) - u_r(M_3^-)) \right] \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{L}} \end{cases} \quad (3.38)$$

3.4.2 Méthode en contraintes

Cette méthode est similaire à celle en déplacements, sauf qu'elle utilise les équations en contraintes (3.32) pour évaluer K_I et K_{II} .

Après résolution du problème, les tenseurs des contraintes sont calculés en certains points sur la ligne en prolongement de la fissure ($\alpha=0^\circ$). Des relations(3.32), nous pouvons déduire:

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{2\pi} \sigma_{zz} \rho^{\frac{1}{2}} \\ K_{II} &= \sqrt{2\pi} \sigma_{rz} \rho^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Une extrapolation des courbes $\sigma_{zz}\sqrt{\rho}$ et $\sigma_{rz}\sqrt{\rho}$, jusqu'au fond de la fissure permet d'approximer les valeurs intrinsèques K_I et K_{II} .

3.4.3 Méthodes énergétiques

Les méthodes énergétiques sont basées sur l'évaluation du taux de restitution d'énergie G . Ce dernier est utilisé pour caractériser le comportement d'une fissure. Il est défini comme le taux de variation de l'énergie de déformation pour un accroissement ∂a de la longueur de la fissure:

$$G = \frac{\partial U}{\partial a} \quad (3.40)$$

Où U est l'énergie de déformation accumulée après application des efforts extérieurs.

Irwin identifia une relation entre G et K comme suit:

$$G_M = \frac{\kappa+1}{8\mu} K_M^2 \quad M = I, II \quad (3.41)$$

Où G_I et G_{II} sont, respectivement, les taux de restitution d'énergie pour les deux modes I et II et κ défini par les relations (3.33). L'avancée du front de fissure est alors prédite en comparant la valeur de K (G), pour une géométrie et un chargement donné, à une valeur critique K_c (G_c) définie comme la ténacité du matériau et dont la valeur est déterminée expérimentalement.

En pratique, la différentielle (3.40) est approximée par une différence finie comme suit:

$$G = \frac{\Delta U}{\Delta a} = \frac{U_2 - U_1}{a_2 - a_1} \quad (3.42)$$

Où U_1 et U_2 sont les énergies de déformation associées aux deux longueurs de la fissure a_1 et a_2 . Deux ou plusieurs calculs sont effectués pour le même problème avec une légère variation de la longueur de la fissure d'un calcul à l'autre.

Le principal avantage de cette méthode énergétique, est lié au fait que le champ des contraintes, en fond de fissure, apporte une contribution mineure dans le calcul de l'énergie de déformation totale de la structure. Donc, un maillage grossier peut être utilisé à cause de la faible dépendance de la méthode des champs des déplacements et des contraintes en fond de fissure [55]. Malheureusement, la précision de la méthode est dépendante de l'incertitude dans le choix de l'incrément (Δa) de la fissure, en plus, au moins deux itérations de calcul sont nécessaires, ce qui rend les temps d'exécution relativement longs.

Une autre méthode énergétique, utilisée pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contraintes, consiste à calculer une intégrale de contour (indépendante du choix du contour) dans le domaine considéré. Cette intégrale a été définie par Rice [52] comme suit:

$$J_k = \int_{\Gamma^*} (W n_k - t_j u_{j,k}) d\Gamma^* \quad (3.43)$$

Où W est la densité de l'énergie élastique, Γ^* est un contour, orienté et ouvert, entourant le fond de fissure, et dont les extrémités reposent sur les lèvres de la fissure, t_j la composante du vecteur des tensions selon la direction x_j définie le long du contour et n_k la normale au contour suivant la direction x_k . L'intégrale J est égale au taux de restitution d'énergie G . Le fait que le calcul de J soit indépendant du choix du contour, cette méthode est largement utilisée en élasticité bidimensionnelle pour calculer K_I [56, 57]. Cependant, en élasticité axisymétrique, l'intégrale J est dépendante du contour [58], sauf pour des régions très proches de la pointe de la fissure, où le champ des contraintes est assimilable au cas des déformations planes.

3.4.4 Intégrale de contour modifiée

La technique a été développée, pour le calcul des facteurs d'intensité de contraintes, en éléments finis par Rybicki et Kanninen [59], ensuite une extension aux éléments de frontière fut introduite par Chen et Farris [60].

Le taux de restitution d'énergie G , pour un accroissement du front de la fissure Δa , est défini cette fois-ci, comme le travail produit par le champ des contraintes le long du front de fissure, et est donné par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} G_I &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_{\Delta a} \sigma_n (u_n^+ - u_n^-) da \\ G_{II} &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_{\Delta a} \sigma_t (u_t^+ - u_t^-) da \end{aligned} \quad (3.44)$$

Où G_I et G_{II} sont les taux de restitution d'énergie pour les deux modes I et II, Δa est la surface produite par l'avancée du front de fissure, $(u_n^+ - u_n^-)$ et $(u_t^+ - u_t^-)$ sont les déplacements en ouverture et en glissement respectivement, et σ_n et σ_t sont les contraintes normales et tangentielles en avant de la fissure.

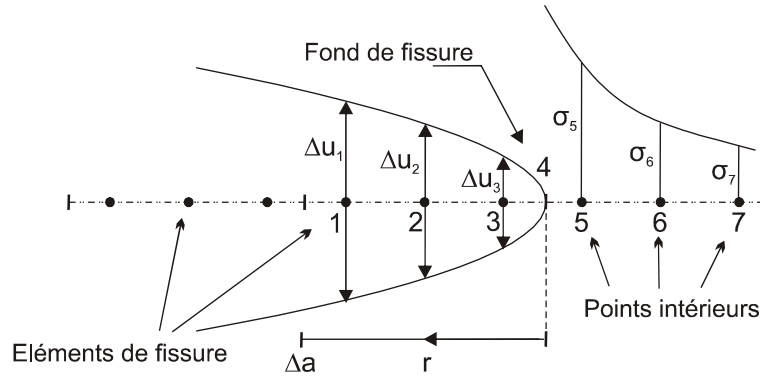


Fig. 3.6 Localisation des points pour le calcul de l'intégrale de contour modifiée

Sur la Fig. 3.6, nous avons représenté une localisation des points où seront pris les valeurs des contraintes et des déplacements. Dans les formules (3.44), les contraintes utilisées sont celles calculées à droite du fond de fissures (points 5, 6 et 7) avant propagation, et les déplacements sont pris aux mêmes points après propagation. Ceci nécessite donc, deux calculs pour deux longueurs différentes de la fissure. En réalité, les déplacements à gauche du fond de fissure (points 1, 2 et 3) sont pratiquement égaux avant et après une faible extension, et les équations (3.44) sont approximées en utilisant les contraintes et les déplacements d'un seul calcul. Cette approximation est connue sous le nom d'intégrale de contour modifiée. En introduisant les fonctions de forme (2.58), pour interpoler les déplacements et les contraintes aux différents points, les intégrales (3.44) sont approximées analytiquement et les facteurs d'intensité de contraintes directement évalués au moyen de la relation (3.41). De Lacerda et Wrobel [61] ont montré que cette technique permettait d'avoir une bonne approximation des facteurs d'intensité de contraintes en élasticité axisymétrique en expérimentant plusieurs formes de fonctions d'interpolation. A noter que l'application de la technique, lorsque le fond de la fissure est proche d'un bord libre, reste difficile et pourrait donner des résultats erronés avec le calcul des contraintes entre le fond de la fissure et le bord de la structure. En plus, et sachant que les contraintes évoluent proportionnellement à $r^{-\frac{1}{2}}$ au voisinage du fond la fissure, une fonction d'une telle singularité ne peut être utilisée dans les intégrales (3.44).

3.4.5 Un élément singulier pour le fond de fissure

Bien que la technique de l'intégrale de contour modifiée, présentée dans la section 3.4.4, donne de très bonnes évaluations des facteurs d'intensité de contraintes pour des fissures confinées, elle reste moins performante, voir inutilisable dans le cas où la fissure est proche du bord de la structure (Fig. 3.7).

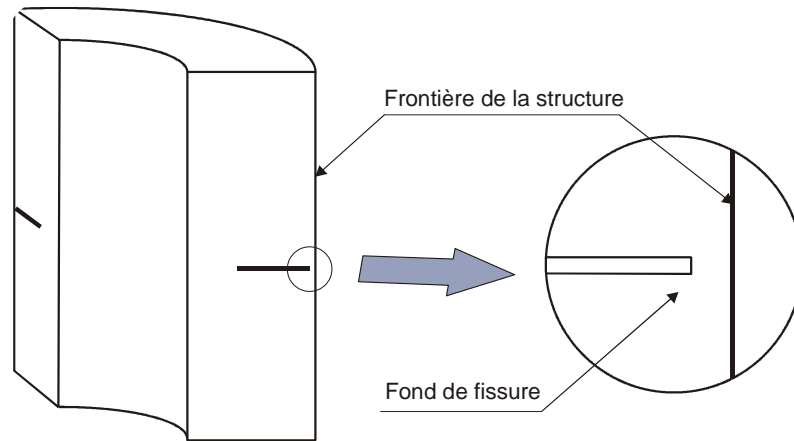


Fig. 3.7 Fissure au voisinage du bord de la structure

Calculer les facteurs d'intensité de contraintes, à partir des déplacements des nœuds de collocation des éléments du front de fissure, serait une approche idéale. La précision sur les valeurs des déplacements en fond de fissure reste faible (erreur >8%) pour les éléments quadratiques non conformes, quelque soit le degré de raffinement utilisé. Ceci est due à la forme polynomiale de deuxième ordre, utilisée comme fonction d'approximation des champs des déplacements, alors que ces derniers évoluent en \sqrt{r} en fond de fissure. L'idée donc est d'inclure ce terme dans une fonction spécifique à l'élément du fond de fissure. Nous allons adapté, dans ce qui va suivre, les fonctions de forme développées par Kebir et al [57] pour l'élasticité bidimensionnelle à l'élasticité axisymétrique (Fig. 3.8). L'élément singulier contient trois nœuds de collocation aux mêmes positions que pour l'élément quadratique et dont les fonctions de forme ont la forme suivante:

$$N_i(s) = a_i + b_i s + c_i \sqrt{s} \quad (i = 1, 3) \quad (3.45)$$

Les valeurs des fonctions aux nœuds sont:

$$\begin{cases} N_1\left(\frac{L_m}{6}\right) = 1, & N_1\left(\frac{L_m}{2}\right) = 0, & N_1\left(\frac{5L_m}{6}\right) = 0 \\ N_2\left(\frac{L_m}{6}\right) = 0, & N_2\left(\frac{L_m}{2}\right) = 1, & N_2\left(\frac{5L_m}{6}\right) = 0 \\ N_3\left(\frac{L_m}{6}\right) = 0, & N_3\left(\frac{L_m}{2}\right) = 0, & N_3\left(\frac{5L_m}{6}\right) = 1 \end{cases} \quad (3.46)$$

Ce qui donne les expressions des fonctions de forme après résolution du système:

$$\begin{cases} N_1(s) = \frac{3}{\sqrt{15} + \sqrt{3} - 6} \left(\frac{1}{2}(\sqrt{15} - 5) + (3 - \sqrt{15}) \frac{s}{L_m} + \sqrt{\frac{2s}{L_m}} \right) \\ N_2(s) = \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{3} - 6} \left(\frac{1}{2}(5\sqrt{3} - \sqrt{15}) + 3(\sqrt{15} - \sqrt{3}) \frac{s}{L_m} - 6\sqrt{\frac{2s}{L_m}} \right) \\ N_3(s) = \frac{3}{\sqrt{15} + \sqrt{3} - 6} \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 3) \frac{s}{L_m} + \sqrt{\frac{2s}{L_m}} \right) \end{cases} \quad (3.47)$$

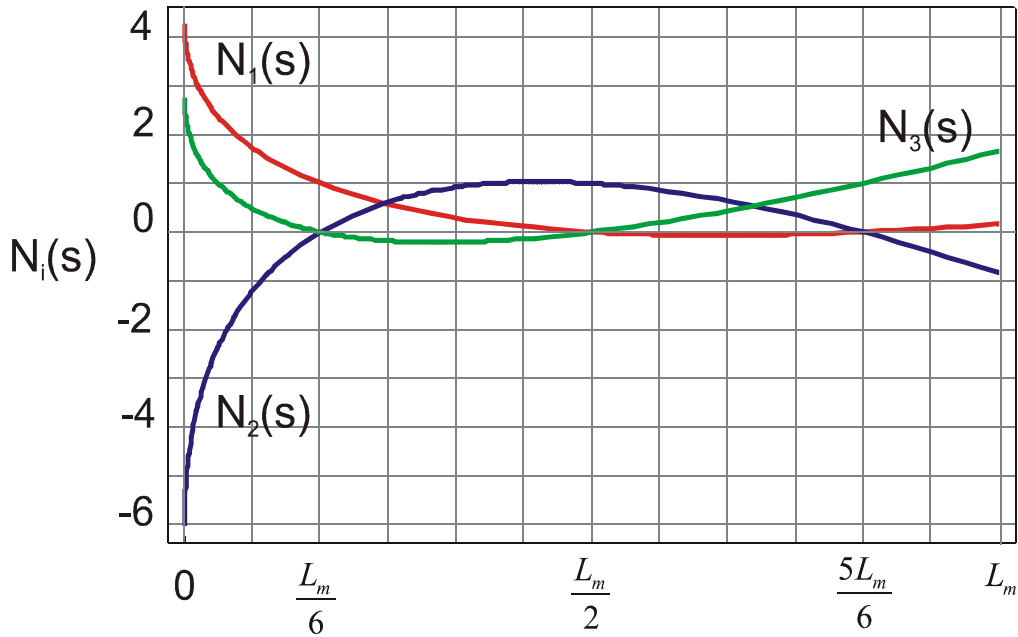


Fig. 3.8 Fonctions de forme pour l'élément singulier

Les déplacements et les tensions sur l'élément de fond de fissure sont alors:

$$u_i(s) = \sum_{k=1}^3 u_i(M_n^{fk}) N_k(s) \quad \text{et} \quad t_i(s) = \sum_{k=1}^3 t_i(M_n^{fk}) N_k(s) \quad (i = 1, 2) \quad (3.48)$$

Où M_n^{fk} ($k = 1, 3$) sont les trois nœuds de collocation de l'élément singulier.

Avec les nouvelles fonctions de forme, introduites pour l'élément singulier, nous avons bien une singularité des déformations en fond de fissure.

En effet:

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\sum_{k=1}^3 u_i(M_n^{fk}) N_k(s) \right]_{s=0} = \sum_{k=1}^3 u_i(M_n^{fk}) \left. \frac{\partial N_k(s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \infty \quad (3.49)$$

L'intégration numérique des noyaux singuliers, aussi bien dans les équations intégrales en déplacements que dans les équations intégrales duales, est pratiquée de la même manière que pour les éléments quadratiques. L'introduction des nouvelles fonctions de forme ne modifie en rien l'ordre des singularités déjà présentes.

Après résolution du système d'équations et récupération des déplacements aux nœuds de collocation des deux éléments constituant le fond de la fissure, les facteurs d'intensité de contraintes sont explicitement calculés par les formules (3.38).

3.5 Validation numérique

Dans un premier temps, nous présentons deux exemples académiques simples afin de comparer les valeurs du facteur d'intensité de contraintes en mode I (K_I) aux valeurs théoriques. Ensuite, un exemple réel est présenté avec une comparaison aux résultats issus de la méthode des éléments finis (Code Abaqus).

3.5.1 Fissure extérieure débouchante dans un cylindre creux à paroi épaisse

Considérons un cylindre creux à paroi épaisse de rayon intérieur R_i et extérieur R_e , et de hauteur H (Fig. 3.9), sous une contrainte de traction $\sigma = 100 \text{ MPa}$. Les propriétés du matériau sont $E=70000$

MPa et $\nu = 0.3$. Le cylindre contient une fissure circonférentielle débouchante vers l'extérieur dont le fond a pour rayon $R_c - a$, perpendiculaire à l'axe de symétrie et à mi-hauteur du cylindre. Pour cet exemple et le suivant, la condition $H \geq 2.5t$ ($t = R_c - R_i$) a été vérifiée comme une condition suffisante pour considérer que le cylindre est de longueur infinie et pouvoir comparer les résultats avec ceux de Tada et al [54]. La valeur de K_I est évaluée pour différents rapports R_i/R_c .

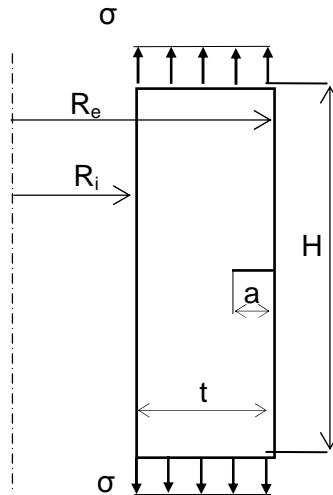


Fig. 3.9 Fissure circonférentielle extérieure débouchante dans un cylindre creux à paroi épaisse

Le graphe de la Fig. 3.10 regroupe les résultats obtenus à l'aide d'un calcul par éléments de frontières (BEM) et ceux donnés par la référence [54], pour un maillage de 36 éléments quadratiques non conformes sur la frontière et 10 éléments quadratiques sur chaque lèvres de la fissure, et ceci pour des valeurs du rapport R_i/R_c égales à 0.2, 0.4 et 0.6.

Les résultats obtenus par la méthode d'extrapolation des déplacements de l'élément singulier en fond de fissure sont très précis. En effet le plus grand écart obtenu par l'élément singulier et ceux de la référence [54] ne dépasse pas 2 % et ceci malgré un maillage grossier de la fissure.

La Fig. 3.11 représente la forme initiale et la forme déformée (2-D et 3-D) du cylindre pour les rapports $R_i/R_c = a/t = 0.4$.

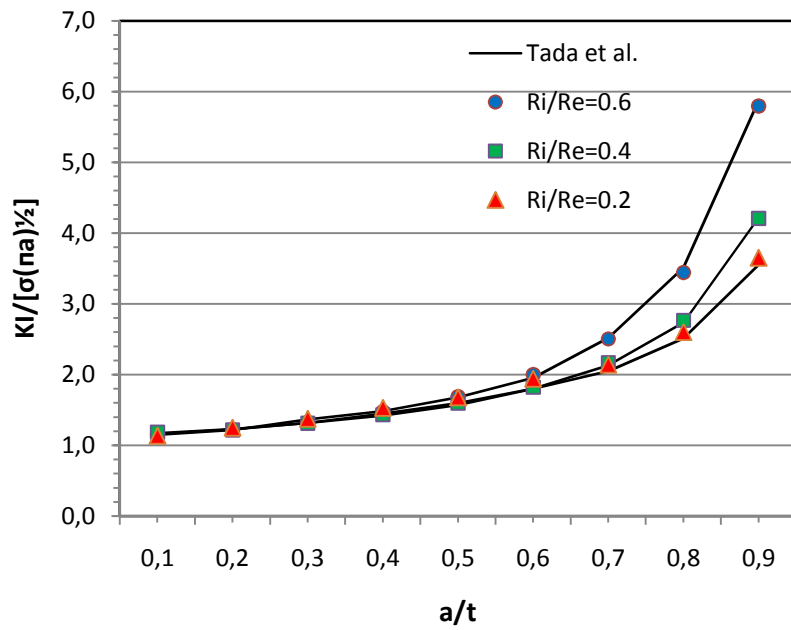


Fig. 3.10 Facteur d'intensité de contraintes K_I pour le cas d'une fissure extérieure débouchante dans un cylindre creux

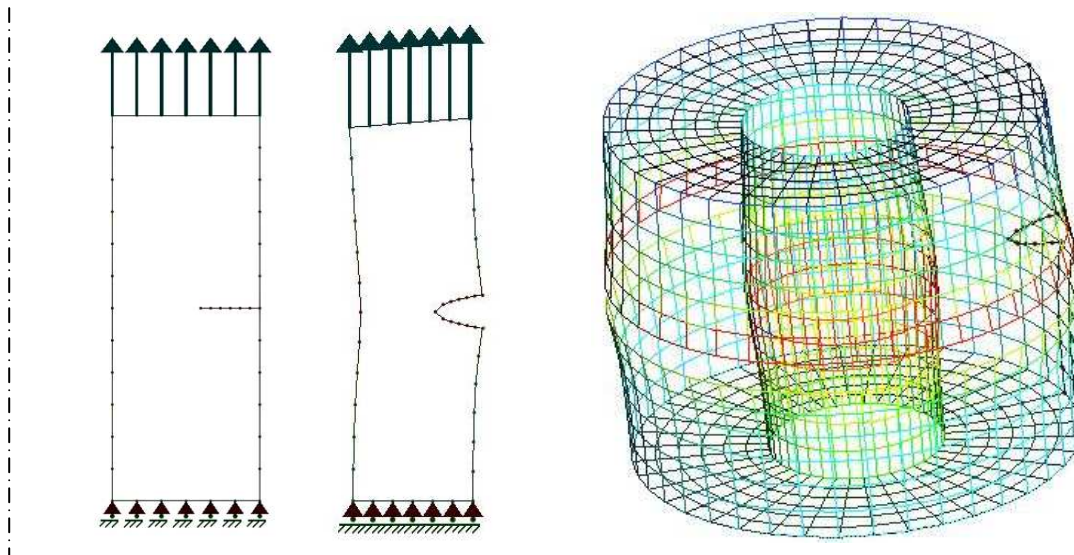


Fig. 3.11 Forme initiale et déformée du cylindre creux avec fissure extérieure débouchante

3.5.2 Fissure intérieure débouchante dans un cylindre creux à paroi épaisse

Considérons un cylindre creux à paroi épaisse de rayon intérieur R_i et extérieur R_e , et de hauteur H (Fig. 3.12) sous une contrainte de traction $\sigma = 1.0 \text{ MPa}$. Les propriétés du matériau sont $E=70000 \text{ MPa}$ et $\nu = 0.3$. Le cylindre contient une fissure circonférentielle débouchante vers l'intérieur dont le fond a pour rayon R_i+a , perpendiculaire à l'axe de symétrie et à mi-hauteur du cylindre. La valeur de K_I est évaluée pour différents rapports R_i/R_e .

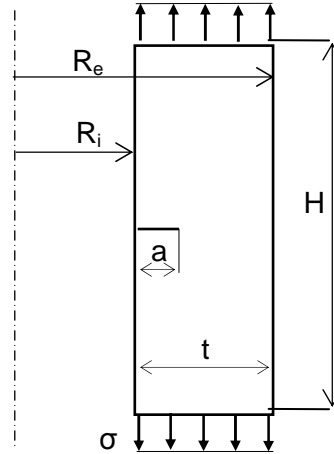


Fig. 3.12 Fissure circonférentielle interne débouchante dans un cylindre creux à paroi épaisse

Le graphe de la Fig. 3.13 regroupe les résultats obtenus à l'aide d'un calcul par éléments de frontières (BEM) et ceux donnés par la référence [54], pour un maillage identique à celui de l'exemple de la section précédente (3.5.1) et aussi pour les mêmes valeurs du rapport R_i/R_e . Pour ce cas aussi, les résultats obtenus par la méthode d'extrapolation des déplacements de l'élément singulier en fond de fissure sont très précis. En effet le plus grand écart obtenu par l'élément singulier et ceux de la référence [54] ne dépasse pas 2% et ceci malgré un maillage grossier de la fissure.

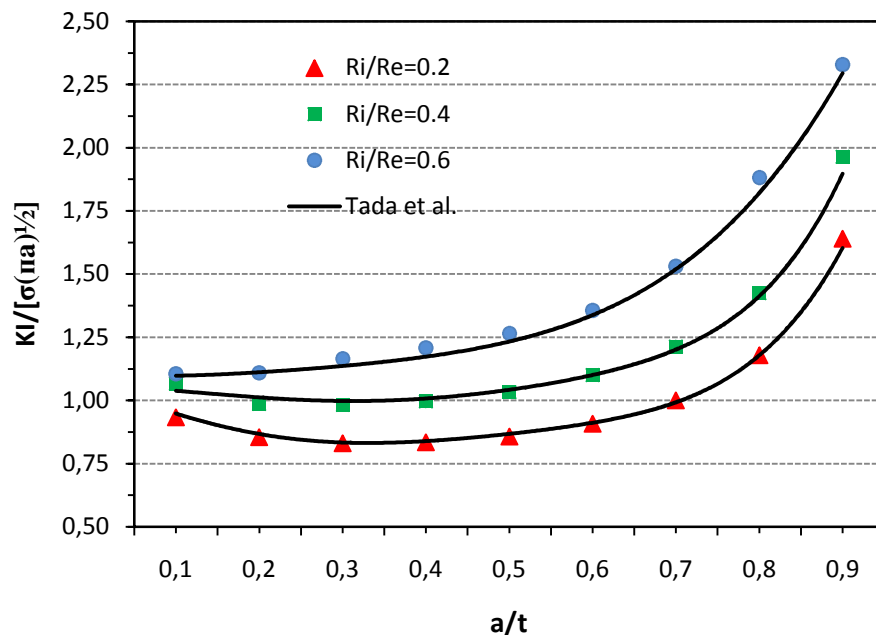


Fig. 3.13 Facteur d'intensité de contraintes K_I pour le cas d'une fissure intérieure débouchante dans un cylindre creux

La Fig. 3.14 représente la forme initiale et la forme déformée (2-D et 3-D) du cylindre pour les rapports $R_i/R_e=a/t=0.4$.

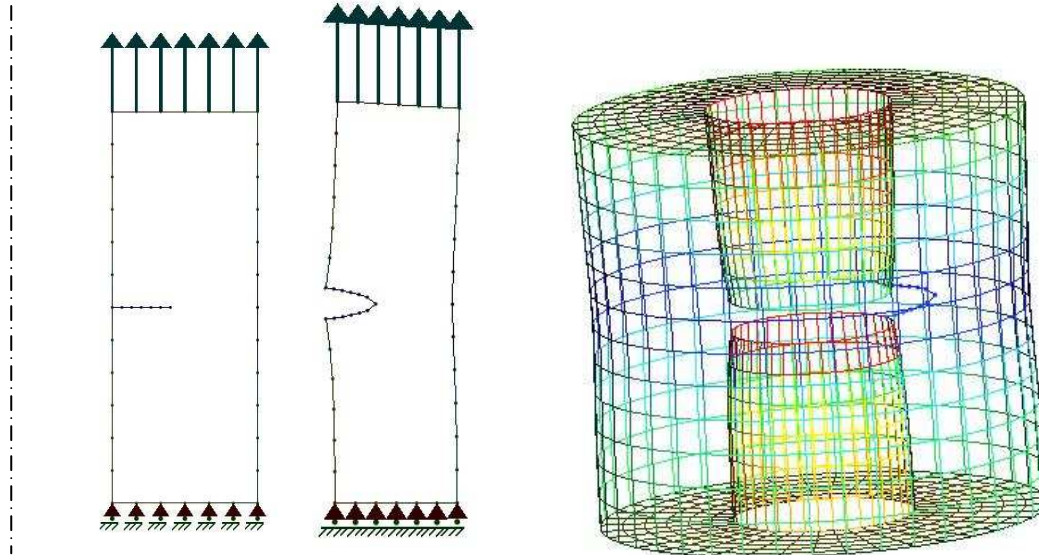


Fig. 3.14 Forme initiale et déformée du cylindre creux avec fissure intérieure débouchante

3.5.3 Fissure circumférentielle extérieure sur un cylindre entaillé

Nous considérons dans cet exemple, un cylindre plein avec une entaille circulaire et contenant une fissure circumférentielle débouchante (Fig. 3.15). Les dimensions sont paramétrées par le rayon R du cylindre. Les propriétés du matériau sont $E=70000$ MPa et $\nu = 0.3$. Le calcul du facteur d'intensité de contraintes en mode I a été réalisé pour différentes valeurs de a/t avec $H/R=2.0$ et $r/R=0.2$.

Le graphe de la Fig.3.16 est une superposition des valeurs de K_I obtenues par éléments de frontières (BEM) et par le logiciel éléments finis Abaqus 6.9 (Elément quadrilatère 8 nœuds CAX8), sachant que ce dernier utilise l'intégrale de contour pour l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte.

Comme, il n'y a pas d'approche analytique à ce type de problème et en l'absence de résultats expérimentaux, nous pouvons déjà affirmer que pour un même degré de précision, l'approche éléments de frontière est la moins gourmande en temps machine et en espace mémoire.

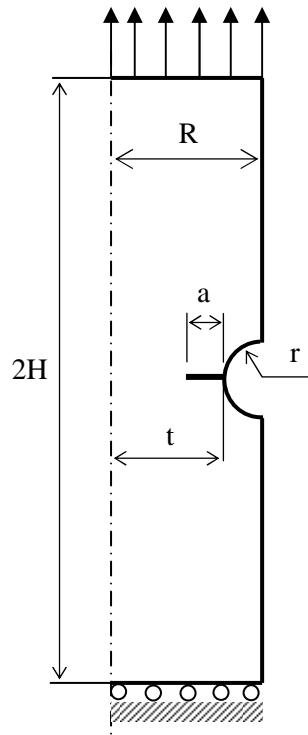


Fig. 3.15 Cylindre plein entaillé avec une fissure circumférentielle débouchante

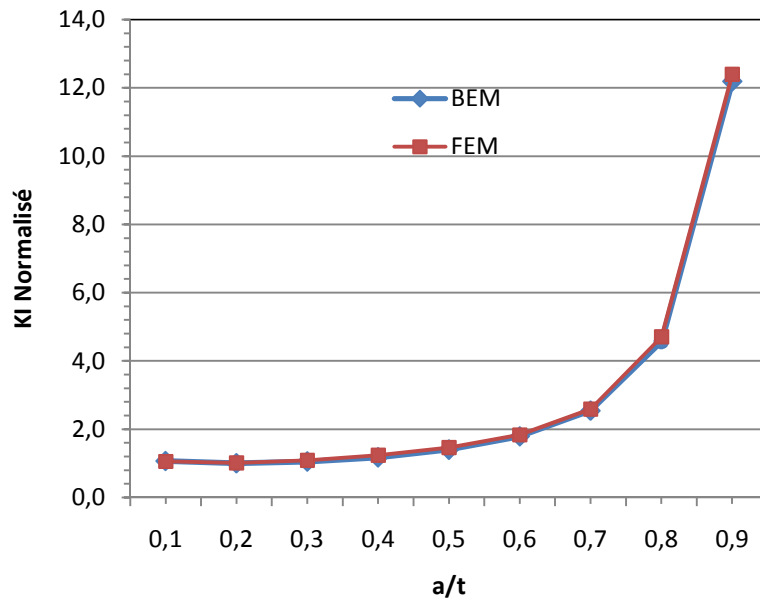


Fig. 3.16 Facteur d'intensité de contraintes K_I pour le cas d'un cylindre plein entaillé et contenant une fissure en fond d'entaille

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que le traitement des structures axisymétriques fissurées est possible au moyen de la méthode des éléments de frontière duale. Après avoir détaillé la procédure de mise en œuvre de la méthode pour l'adapter aux discontinuités de la matière (fissures), nous avons revu les approches utilisées pour évaluer les FIC dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, et nous avons opté pour la méthode d'extrapolation des déplacements en fond de fissure, laquelle est plus adaptée lorsque la fissure est proche du bord de la structure. Et pour améliorer la précision de l'approche, nous avons introduit un élément singulier adapté aux fonds de la fissure et qui permet d'approcher la singularité du champ des contraintes en ces zones d'une meilleure façon. Afin d'illustrer la pertinence de la méthode, nous avons traité deux exemples académiques dont les solutions asymptotiques existent pour KI, et un troisième exemple dont les résultats sont confrontés à ceux obtenus par éléments finis.

Les résultats obtenus pour les trois exemples axisymétriques (évaluation de KI), démontrent la précision de la méthode des éléments de frontières duale à traiter les fissures axisymétriques avec des maillages grossiers, ce qui sera pour nous un avantage considérable lors de l'application de l'algorithme itératif d'identification (réduction du temps machine).

Chapitre 4 Simulation de la propagation des fissures dans les structures axisymétriques

4.1 Introduction

Les fissures dans les structures, dont les contraintes principales varient spatialement, se propagent généralement le long d'une courbe dessinée par le front de la fissure, à la recherche de son chemin de moindre résistance. La prédiction, non seulement de savoir quand et à quel niveau une fissure va se propager mais de son chemin de propagation, est importante dans l'analyse des défaillances potentielles. En axisymétrie (géométrie et chargement), les techniques numériques utilisées pour le traitement des fissures sont similaires au cas des déformations planes. A chaque étape de calcul, les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} sont évalués et la direction de propagation calculée au moyen d'un critère (qui dépend généralement du rapport K_I/K_{II}). Le front de la fissure est ensuite augmenté selon la direction calculée et l'avancée de la fissure correspond à une distance suffisamment grande afin d'éviter les problèmes, d'instabilités numériques pouvant être engendrés par un maillage trop fin. Les techniques se distinguent cependant par la manière d'exécuter chaque étape. Pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contraintes, les éléments finis et les éléments de frontières offrent de multiples voies. Pour le chemin de propagation, les critères se distinguent par ceux qui donnent l'angle de bifurcation et ceux qui donnent la courbure du trajet futur. Et enfin, pour l'avancer du front, on doit faire le choix entre un maillage local ou global avec transfert de champs pour les éléments finis, ou simplement une avancée sans remaillage pour le cas des éléments de frontière. Dans la méthode des équations intégrales duales, l'avancée du front de fissure se traduit, numériquement, par l'ajout de deux éléments singuliers, géométriquement confondus, au prolongement du fond de la fissure.

4.2 Critères pour la direction de propagation en mode mixte

La théorie de la rupture en mode mixte (combinaison des deux modes I et II, voir Fig. 4.1) regroupe, le critère de la contrainte tangentielle maximale [62], le critère du taux de restitution d'énergie maximal [63], le critère de la densité d'énergie de déformation minimale [64] et le critère de la symétrie locale [65]. Dans cette section, seuls le premier et le deuxième critère, sont présentés.

4.2.1 Critère de la contrainte tangentielle maximale

Le critère de la contrainte circonférentielle maximale stipule que la fissure se propage suivant la direction de la contrainte circonférentielle $\sigma_{\alpha\alpha}$, ce qui se traduit par:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha^2} < 0 \quad (4.1)$$

Une dérivation de l'expression de $\sigma_{\alpha\alpha}(r, \alpha)$ dans les équations (3.32) et un arrangement des termes nous donne pour l'angle de bifurcation α^* :

$$K_I \sin \alpha^* + K_{II} (3 \cos \alpha^* - 1) = 0 \quad (4.2)$$

Ou sous une autre expression:

$$\alpha^* = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{1}{4} \left(k \pm \sqrt{k^2 + 8} \right) \right], \quad k = \frac{K_I}{K_{II}} \quad (4.3)$$

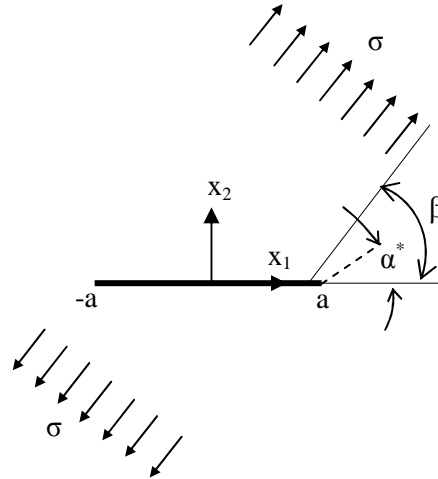


Fig. 4.1 Fissure sous chargement mixte, la direction de propagation est indiquée par l'angle α^*

La comparaison de cette théorie avec les résultats expérimentaux, a montré que ce critère donne une bonne estimation de l'angle de bifurcation et son implémentation dans les codes de calcul reste relativement simple.

4.2.2 Critère du taux de restitution d'énergie maximal

Le critère lié au taux de restitution d'énergie stipule que la fissure se propage de manière à maximiser l'énergie restituée. Ceci revient à dire que la fissure se propage de manière à réduire au minimum l'énergie potentielle du corps, puisque $G = \frac{\partial U}{\partial a} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a}$, traduisant ainsi l'idée thermodynamique selon laquelle les systèmes en équilibre sont au minimum de l'énergie potentielle.

Wu [63] étudia ce problème pour les fissures 2-D sous chargement mixte et formula le critère selon l'idée que la fissure aura tendance à bifurquer selon un angle α^* si les trois conditions suivantes sont réunies:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\alpha^*)}{\partial \alpha} &= 0, & \frac{\partial G^2(\alpha^*)}{\partial \alpha^2} &< 0, & \text{et} & G(\alpha^*) \geq G_C \\ G(\alpha) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\Pi_Z - \Pi) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Où G_C est le taux de restitution d'énergie critique, Π_Z l'énergie potentielle de la fissure après bifurcation et Π l'énergie potentielle de la fissure linéaire.

$G(\alpha)$ ne peut être calculé par des formules analytiques explicites, mais de bonnes approximations peuvent être formulées.

Hussain et al [66] présentèrent en 1974 une formulation de G en utilisant les invariants intégraux. La direction de bifurcation α^* est donnée par la formule de G suivante:

$$G(\alpha) = \frac{(1-\nu^2)}{E} \left(\frac{4}{3 + \cos^2 \alpha} \right)^2 \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{\pi}}{1 + \frac{\alpha}{\pi}} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \left[\begin{aligned} & \left(K_I \cos \alpha + \frac{3}{2} K_{II} \sin \alpha \right)^2 \\ & + \left(K_{II} \cos \alpha - \frac{1}{2} K_{II} \sin \alpha \right)^2 \end{aligned} \right] \quad (4.5)$$

L'implémentation de ce critère dans un code de calcul, pour des résultats comparables, reste relativement difficile par rapport au critère de la contrainte tangentielle maximale. La principale contrainte reste la minimisation de $G(\alpha)$. Donc, et pour la suite de notre étude, nous adopterons le premier critère.

4.3 Incrément de propagation

Le calcul de l'incrément de propagation δa s'effectue de deux façons:

- L'incrément pas à pas : La longueur de la fissure est incrémentée par pas successifs de longueur $(\Delta a)_i$, constants ou variables. Le nombre de cycles correspondant à l'avancée $(\Delta a)_i$, se calcule à partir de sa vitesse de propagation $\bar{v}(\mathbf{K}_{eff})$:

$$(\Delta N)_i = \frac{(\Delta a)_i}{\|\bar{v}(\mathbf{K}_{eff})\|} \quad (4.6)$$

La vitesse de propagation $\bar{v}(\mathbf{K})$ est obtenue par une des lois de fissuration (loi de Paris, loi de Forman ou la loi expérimentale (point par point) et la connaissance du facteur d'intensité de contraintes effectif: $\mathbf{K}_{eff} = \sqrt{\mathbf{K}_I^2 + 2\mathbf{K}_{II}^2}$.

- L'incrément par nombre de cycles: L'avancée de la fissure est suivie par sauts de cycles de valeurs $(\Delta N)_i$. La taille de l'incrément de propagation $(\Delta a)_i$ est donnée par:

$$(\Delta a)_i = \|\bar{v}(\mathbf{K}_{eff})\| (\Delta N)_i \quad (4.7)$$

Le pilotage de l'avancée du front de fissure par nombre de cycle peut être la source de problèmes numériques. En effet, la vitesse de propagation détermine la taille de l'incrément, qui peut varier énormément entre deux étapes, rendant ainsi le maillage local fortement irrégulier et induisant des imprécisions d'ordre numérique; un remaillage local sera alors indispensable.

4.4 Mise en œuvre numérique de la propagation

A chaque étape de propagation i du front de la fissure, et après avoir calculé l'angle de bifurcation α^* , la longueur de la fissure est incrémentée de $(\Delta a)_i$, ce qui se traduit numériquement par un ajout de deux éléments singuliers confondus à l'extrémité de la fissure, orientés selon α^* (Fig. 4.2).

Les coordonnées des deux nœuds de géométrie $N_{2N_{elt}^f+1}^1$ et $N_{2N_{elt}^f+1}^2$ de l'élément singulier $\Gamma_{2N_{elt}^f+1}$ dans le repère local sont:

$$\begin{cases} x(N_{2N_{elt}^f+1}^1) = x(N_{2N_{elt}^f}^1) \\ y(N_{2N_{elt}^f+1}^1) = y(N_{2N_{elt}^f}^1) \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} x(N_{2N_{elt}^f+1}^2) = x(N_{2N_{elt}^f}^1) + (\Delta a)_i \cos \alpha^* \\ y(N_{2N_{elt}^f+1}^2) = y(N_{2N_{elt}^f}^1) + (\Delta a)_i \sin \alpha^* \end{cases} \quad (4.9)$$

N_{elt}^f étant le nombre d'éléments par lèvres de la fissure au pas i .

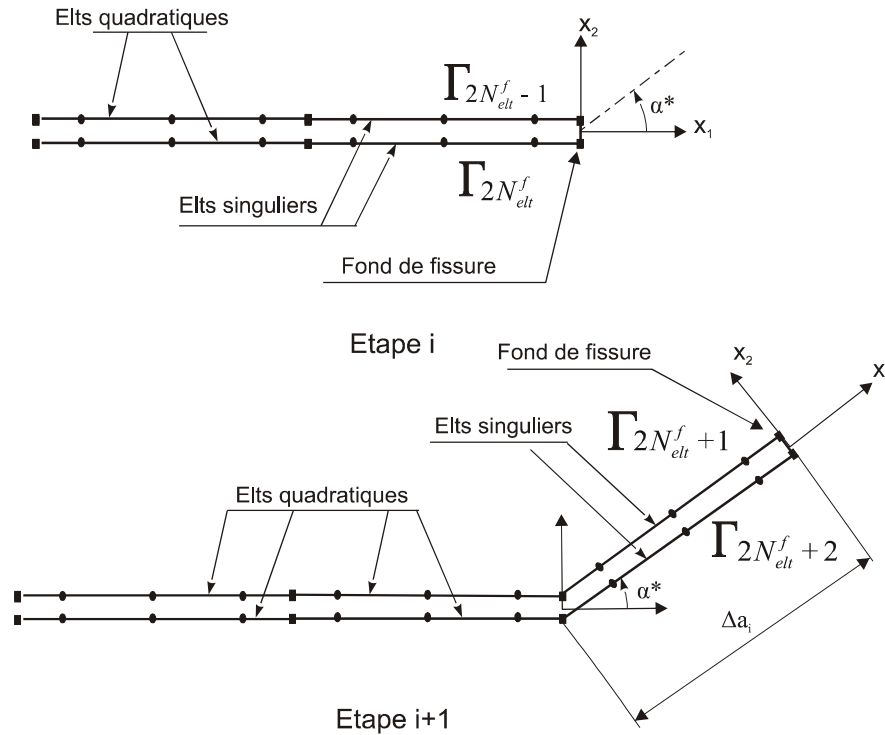


Fig. 4.2 Incrémentation numérique de la fissure

4.5 Système d'équations incrémenté

Un premier calcul élastique est effectué avant propagation afin de calculer les facteurs d'intensité de contraintes et l'angle de bifurcation. Le système linéaire initial à résoudre est de la forme:

$$[A_0]\{u_0\} = [B_0]\{t_0\}$$

Les matrices $[A_0]$ et $[B_0]$ regroupent les intégrales des noyaux et les vecteurs $\{u_0\}$ et $\{t_0\}$ les déplacements et les tensions aux nœuds de collocation.

A chaque pas de propagation, la fissure est incrémentée de deux éléments singuliers qui viennent augmenter le nouveau système à résoudre de 2×6 degrés de liberté supplémentaires. Si l'on considère que les lèvres de la fissure ne sont pas chargées, seules 6 équations sont ajoutées:

- L'équation intégrale en déplacement discrétisée (3.22) pour les trois points de collocation de l'élément singulier $\Gamma(2N_{elt}^f + 1)$ suivant les deux directions.
- L'équation intégrale en tension discrétisée (3.24) pour les trois points de collocation de l'élément singulier $\Gamma(2N_{elt}^f + 2)$ suivant les deux directions.

Seuls les coefficients liés aux deux éléments ajoutés sont calculés, les autres coefficients sont les mêmes qu'à l'étape précédente (Fig. 4.3) à l'exception de ceux des éléments du fond de fissure à l'étape i qui redeviennent des éléments quadratiques à l'étape $i+1$. Donc, le calcul des coefficients touchera les anciens et les nouveaux éléments singuliers uniquement.

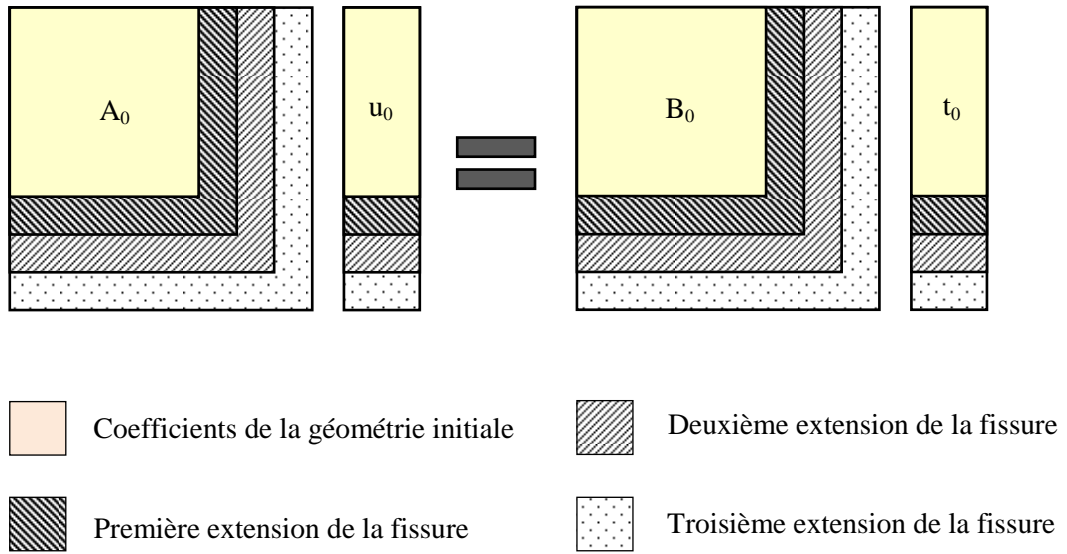


Fig. 4.3 Constitution du système d'équations après propagation de la fissure

4.6 Résolution du système d'équations incrémenté

La constitution du système d'équations à résoudre (calcul des intégrales des noyaux) est la partie la plus longue dans un code de calcul par éléments de frontières. Ceci nous amène à optimiser le temps de calcul, à chaque étape de propagation, en ne calculant que les nouveaux coefficients dus aux éléments ajoutés. Sachant que la taille du système ne cesse d'augmenter au fur et à mesure de l'avancée du front de la fissure (Fig. 4.4).

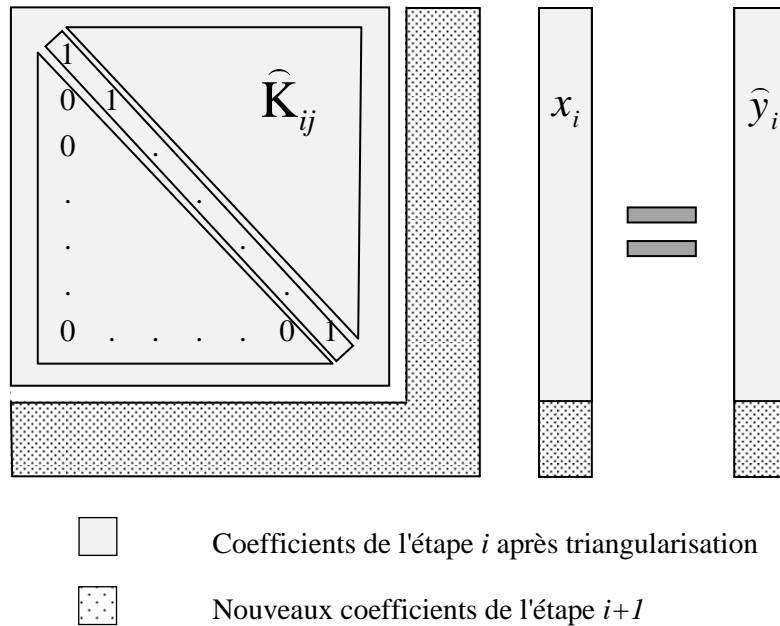


Fig. 4.4 Architecture du système d'équations à l'étape $i+1$ avant triangularisation

La démarche adoptée est la suivante:

A l'étape i :

- Sauvegarder la matrice triangularisée $\widehat{[K]}$;
- Sauvegarder les valeurs des pivots;
- Sauvegarder la ligne et la colonne de chaque pivot maximum;

A l'étape $i+1$:

- Calculer les nouveaux coefficients de la matrice à résoudre (les coefficients correspondants aux éléments singuliers de l'étape $i+1$ ainsi que ceux correspondants aux éléments singuliers à l'étape i qui redeviennent des éléments quadratiques à l'étape $i+1$);
- Réarranger les lignes des nouveaux coefficients, si nécessaire;
- Recalculer les valeurs des nouvelles colonnes en tenant compte de la triangularisation de $\widehat{[K]}$;
- Réarranger les colonnes des nouvelles lignes;
- Triangulariser les nouvelles lignes;
- Calculer les valeurs des inconnus en remontants les lignes.

4.7 Algorithme de propagation d'une fissure axisymétrique

Ce qui suit est une présentation de l'algorithme du module « AxiPropagation » implémenté dans le code KSP:

1. Procéder à un premier calcul élastique de la structure fissurée pour récupérer les déplacements aux nœuds de collocation;
2. Calculer les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} avec les formules (3.38) et les déplacements des nœuds de collocation des deux éléments singuliers en fond de fissure.
3. Calculer l'angle de bifurcation en utilisant le critère de la contrainte tangentielle maximale (4.3).
4. Incrémenté la fissure par un segment de droite de longueur Δa , orienté suivant l'angle de bifurcation calculé à l'étape 3. Ceci se traduit sur le plan numérique par l'addition de deux segments singuliers.
5. Calculer les coefficients dus aux nouveaux éléments.
6. Calculer les coefficients des anciens éléments singuliers qui deviennent des éléments quadratiques.
7. Résoudre le nouveau système d'équations en ne triangularisant que les nouvelles lignes.
8. Répéter les étapes 2 à 7 jusqu'à atteindre le nombre maximum d'incrément.

4.8 Exemples de propagations de fissures axisymétriques

4.8.1 Fissure circonférentielle dans un cylindre plein en traction

Comme premier test, nous considérons un cylindre plein de rayon R en traction. Le cylindre comporte une fissure circonférentielle de rayon intérieur $R-a_0$, avec $a_0=R/3$. La longueur de la portion considérée est $2H=3R$. Les propriétés mécaniques du matériau sont $E=70000$ MPa et $\nu=0,3$. La discrétisation du contour extérieur est réalisée à l'aide de 36 éléments quadratiques non conformes et l'entaille initiale en 6 éléments quadratiques non conformes sur chaque lèvres. La taille de l'incrément de propagation est égal à la taille d'un élément de fissure, soit $a_0/6$. La Fig. 4.5.a est une représentation du maillage de la portion du cylindre considérée et du chargement. La Fig. 4.5.b montre l'ouverture de la fissure avant propagation et les figures Fig. 4.5.c et Fig. 4.5.d, la longueur finale de la fissure après propagation par 10 incréments.

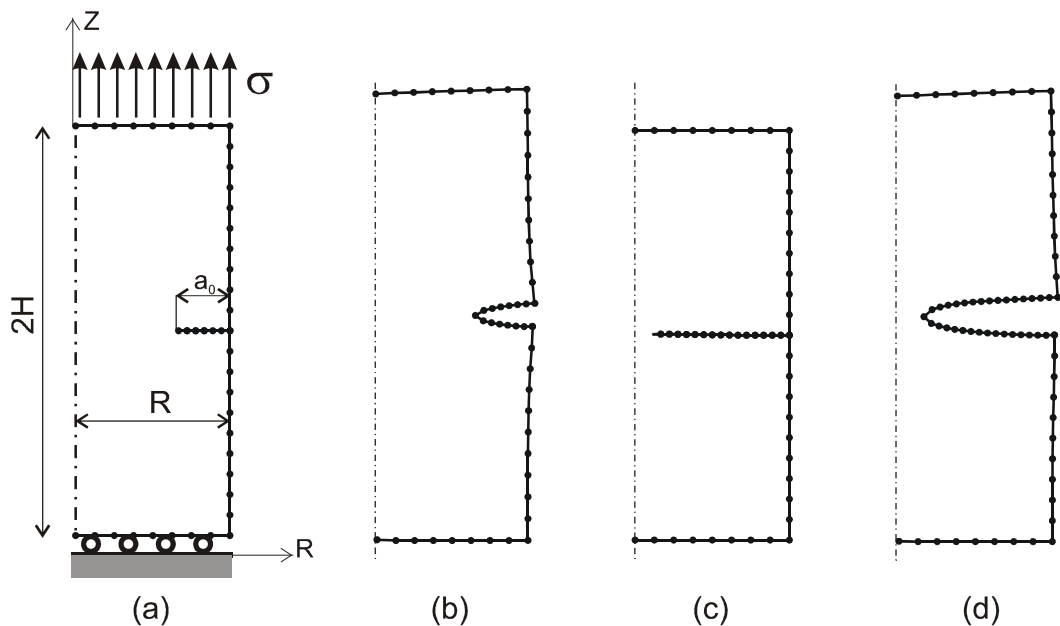


Fig. 4.5 Propagation d'une fissure axisymétrique dans une tige cylindrique

4.8.2 Fissure circonférentielle intérieure dans un cylindre creux en traction

La structure considérée dans cet exemple est un cylindre creux de rayon intérieur R_i et extérieur R_e en traction. Le cylindre comporte une fissure intérieure de rayon extérieur R_i+a_0 , avec $a_0=R/3$. La longueur de la portion considérée est $2H=3(R_e-R_i)$. Les propriétés mécaniques du matériau sont $E=70000$ MPa et $\nu=0,3$. La discrétisation du contour extérieur est réalisée à l'aide de 40 éléments quadratiques non conformes et l'entaille initiale en 8 éléments quadratiques non conformes sur chaque lèvres. La taille de l'incrément de propagation est égal à la taille d'un élément de fissure, soit $a_0/8$. La Fig. 4.6.a est une représentation du maillage de la portion du cylindre considérée et du chargement. La Fig. 4.6.b montre l'ouverture de la fissure avant propagation et les figures Fig. 4.6.c et Fig. 4.6.d, la longueur finale de la fissure après propagation par 10 incréments. Enfin, une représentation 3-D de la déformée de la structure en fin de propagation est illustrée par la Fig. 4.6.e.

4.8.3 Fissure conique dans un cylindre creux

Dans ce test, nous examinerons l'influence de la direction du chargement sur la trajectoire de propagation d'une fissure confinée dans la paroi d'un cylindre creux [67].

Considérons une fissure de longueur $a_0=1$, inclinée à 45° et centrée dans la paroi d'un cylindre creux de rayon intérieur $R_i=40a_0$, d'épaisseur $t=24a_0$ et de hauteur $H=16a_0$. Les propriétés mécaniques du matériau sont $E=70000$ MPa et $\nu=0,3$. La discrétisation de la paroi emploie, 40 éléments quadratiques non conformes sur le contour extérieur, et 8 éléments quadratiques non conformes sur chaque lèvres de la fissure initiale. Trois types de chargement statique sont expérimentés : (a) traction radiale, (b) traction axiale et (c) les deux chargements combinés. La trajectoire obtenue pour chaque type de chargement est montrée sur la Fig. 4.7, pour un total de 40 incréments de la fissure. A chaque pas de calcul, la taille de la fissure est augmentée de deux éléments (un à chaque extrémité) de tailles identiques à ceux utilisés pour mailler la fissure initiale. Des résultats similaires sont introuvables dans la bibliographie pour une comparaison objective. Cependant, il est clair que les trajectoires obtenues sont cohérentes avec les chargements appliqués.

4.8.4 Cas d'un tube à paroi épaisse entaillé avec une fissure débouchante

Nous considérons dans cet exemple un tube à paroi épaisse de rayon intérieur R_i et d'épaisseur $t=R_i/2$, chargé par une pression radiale p_0 . Le tube comporte une rainure extérieure circulaire de rayon $r=t/5$. Une fissure axisymétrique est placée perpendiculairement à l'axe du tube partant du fond de la gorge et pénétrant le tube jusqu'à une profondeur $a_0=r$. La longueur du tube est $2H=8t$ (Fig. 4.8). Les propriétés mécaniques du matériaux sont $E=70000$ MPa, $\nu=0,3$. La discrétisation du contour extérieur est réalisée à l'aide de 46 éléments quadratiques non conformes et l'entaille initiale en 6 éléments quadratiques non conformes sur chaque lèvres. La taille de l'incrément de propagation est égal à la taille d'un élément de fissure, soit $a_0/6$. La Fig. 4.8.a est une représentation du maillage du tube, du chargement et des conditions aux limites sur les deux bords du tube. La Fig. 4.8.b montre l'ouverture de la fissure avant propagation et les figures Fig. 4.8.c et Fig. 4.8.d, la longueur finale de la fissure après propagation par 10 incréments. Enfin, une représentation 3-D de la déformée du tube en fin de propagation est illustrée par la Fig. 4.8.e.

4.8.5 Cas d'une bague à section en U comportant une fissure débouchante

Ce dernier test, concerne la propagation d'une fissure dans une bague à section en U. Exploitant la symétrie de la pièce, seule une moitié de la section et considérée en imposant des conditions de déplacement libre sur le plan $z=0$ (Fig. 4.9.a). Une fissure axisymétrique orientée à 45° et de longueur $a_0=1.0$ est placée de façon que l'une de ses extrémités coïncide avec le coin intérieur du U. Le rayon intérieur de la bague est $R_i=10a_0$, le rayon extérieur $R_e=40R_i$, l'épaisseur de la bague $t=15a_0$ et les hauteurs : $H_1=25a_0$ et $H_2=15a_0$.

Le contour extérieur est discrétisé à l'aide de 40 éléments quadratiques non conformes et l'entaille initiale en 5 éléments quadratiques non conformes sur chaque lèvres. La taille de l'incrément de propagation est égal à la taille d'un élément de fissure, soit $a_0/5$. La Fig. 4.9.a est une représentation du maillage de la moitié de la bague et du chargement appliqué. La Fig. 4.9.b montre l'ouverture de la fissure avant propagation et les figures Fig. 4.9.c et Fig. 4.9.d, la longueur finale de la fissure après propagation par 10 incréments. Enfin, une représentation 3-D de la déformée de la structure en fin de propagation est illustrée par la Fig. 4.9.e.

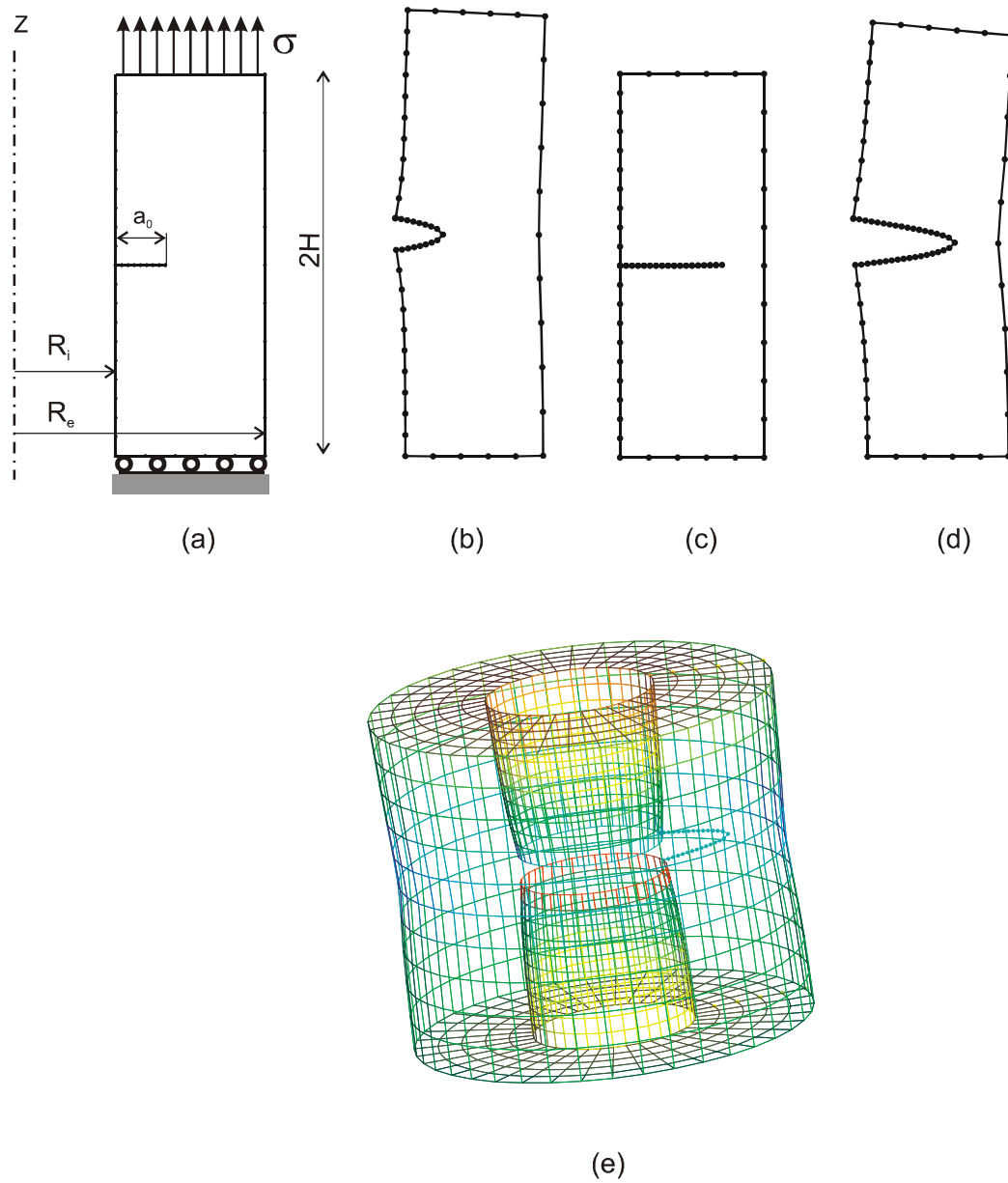


Fig. 4.6 Propagation d'une fissure axisymétrique intérieure dans un cylindre creux

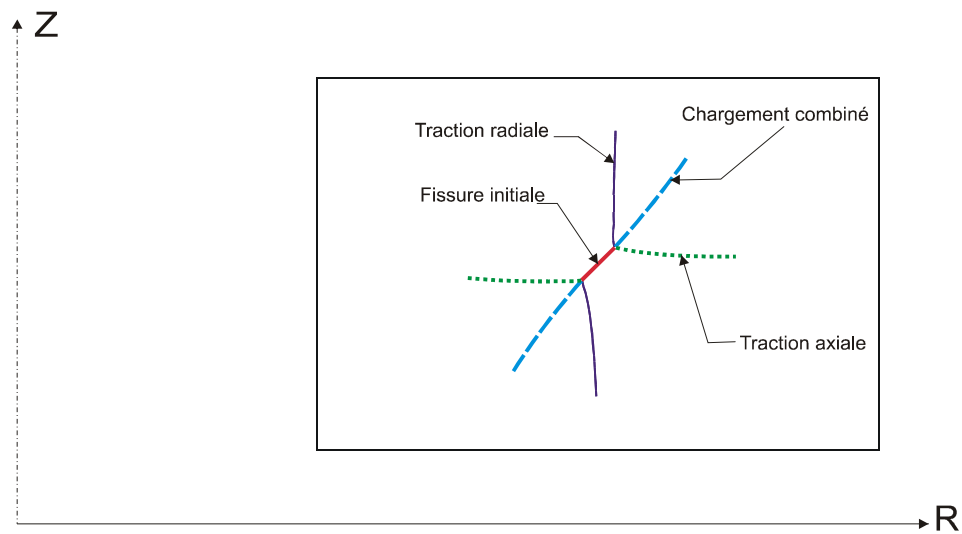


Fig. 4.7 Propagation d'une fissure conique dans un cylindre creux

4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que la propagation des fissures axisymétriques, dans des structures à géométrie et à chargement axisymétriques, est possible au moyen de la méthode des éléments de frontières duale. En effet, tous les tests présentés dans ce chapitre, montrent une parfaite cohérence du chemin de propagation en fonction du chargement appliqué, même si les maillages utilisés restent relativement grossiers. Un autre avantage à mettre au compte de la méthode, c'est la simplicité de mise en œuvre de l'algorithme de propagation qui, du point de vue numérique, présente un avantage considérable dû au non-remailage de la structure pendant la phase de propagation.

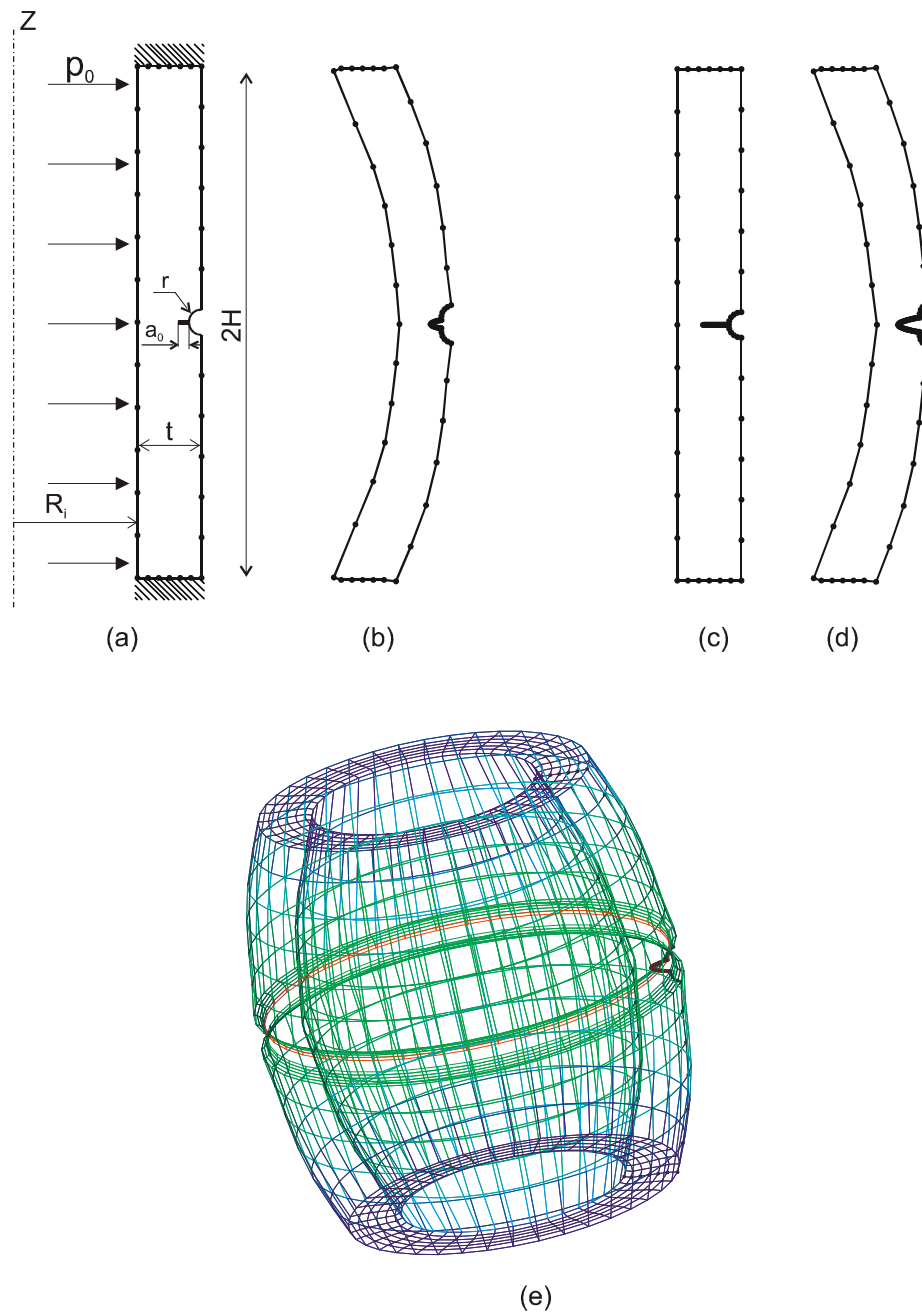


Fig. 4.8 Propagation d'une fissure axisymétrique dans un tube à paroi épaisse entaillé par une gorge de rayon r .

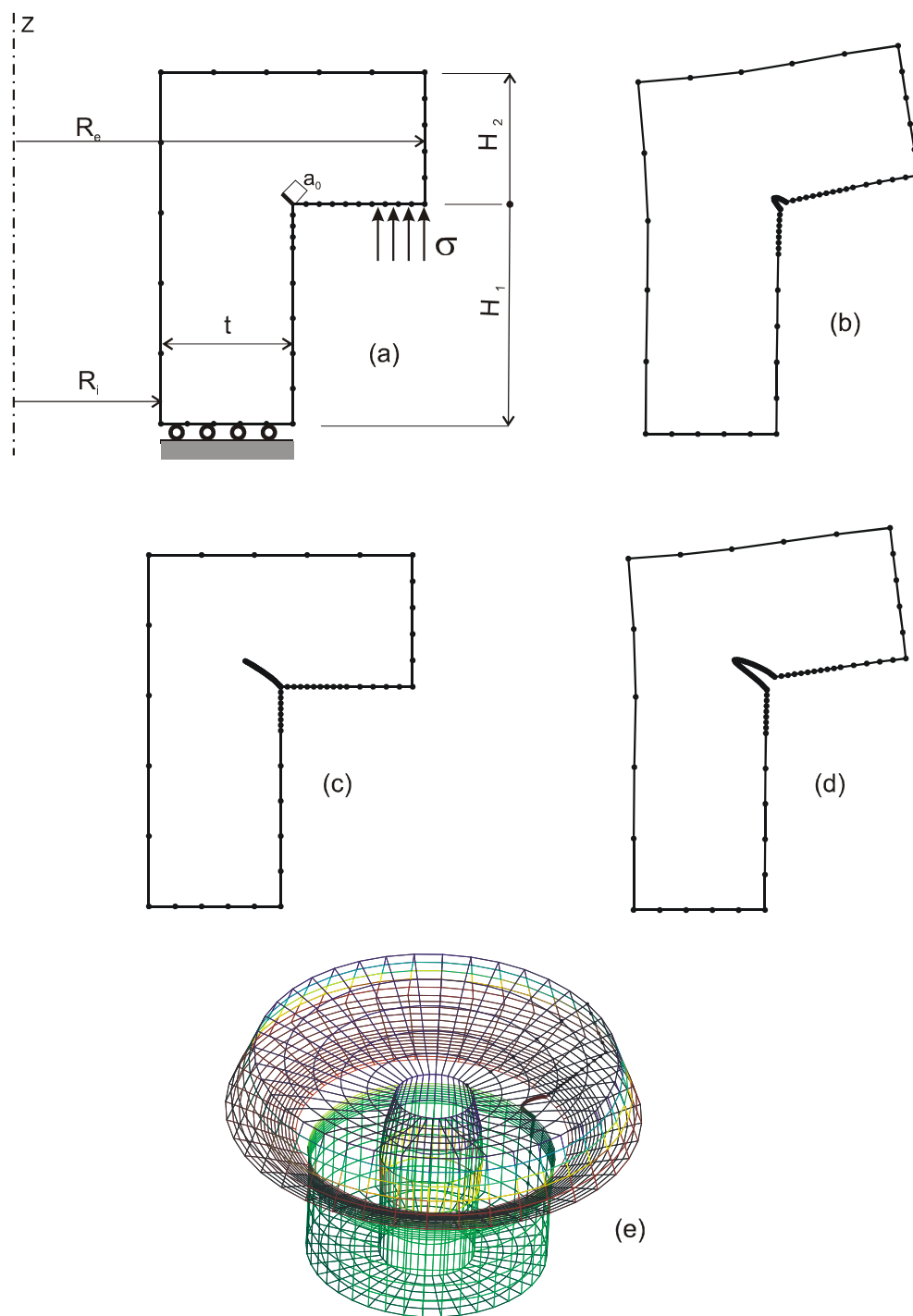


Fig. 4.9 Propagation d'une fissure axisymétrique dans une bague à section en U

Chapitre 5 Localisation des fissures dans les structures axisymétriques

5.1 Introduction

On se propose de présenter, dans ce chapitre, une démarche pour la localisation d'une fissure macroscopique dans une structure axisymétrique. Les hypothèses de départ sont:

- La fissure est considérée à géométrie axisymétrique, ce qui est en soit un cas limite d'endommagement.
- Le chargement est axisymétrique.
- Le matériau isotrope, élastique linéaire.

La localisation de la fissure consiste à appliquer une méthode d'optimisation multi-variables, qui consiste à minimiser une fonction-coût (fonctionnelle) $\mathbb{F}(x_i)$ dans \mathbb{R}^n . La solution $\{x_i\}$, $i=1, n$ regroupe les paramètres géométriques de la fissure.

Les méthodes d'optimisation multi-variables ont été largement appliquées dans différents domaines, afin d'améliorer la conception ainsi que pour les problèmes inverses d'optimisation de formes. Néanmoins, parmi les algorithmes connus, ceux qui peuvent être utilisés dans des conditions réalistes sont limités à cause de la spécificité de ces algorithmes, de leur temps de calcul et surtout de leurs performances en présence du bruit. Depuis les années 60, on s'accorde à affirmer que les variantes de la méthode du simplexe sont robustes au bruit et des résultats théoriques sur la convergence et l'efficacité de ces algorithmes ont pu être établis [68-73].

Globalement, les méthodes d'optimisation sont classées selon l'ordre du gradient de la fonction-coût nécessaire à l'optimisation. Les méthodes dépendantes du premier gradient de la fonctionnelle sont dites du premier ordre (méthodes du gradient), et celles dépendantes du gradient du deuxième ordre sont dites du deuxième ordre (Méthode de Newton par exemple). Dans certains problèmes pratiques, la fonctionnelle à minimiser n'est pas, ou est difficilement différentiable. La seule information disponible concerne certaines valeurs de la fonction dans certains intervalles. Les méthodes qui utilisent uniquement ce type d'information sont dites d'ordre zéro, et l'algorithme du simplexe en fait partie.

5.2 Forme générale de l'algorithme du simplexe

Nous présentons, dans ce qui va suivre, la description de la méthode originale du simplexe de Nelder et Mead [15]. L'algorithme consiste à déplacer un simplexe à n dimensions dans \mathbb{R}^n en utilisant une succession d'opérations élémentaires. Soit $x_i^k \in \mathbb{R}^n$, $i=1, n$ les sommets d'un simplexe, dans une position générale, à l'itération k , et soit $\mathbb{F}(x_i)$ la fonction scalaire à minimiser dans \mathbb{R}^n . Quatre opérations élémentaires sont utilisées pour déplacer le simplexe dans l'hyper-plan: la réflexion, l'expansion, la contraction et la contraction multiple (Fig. 5.1).

L'algorithme procède de la manière suivante:

A chaque itération, le sommet x_m^k pour lequel $\mathbb{F}(x_m^k) = \max\{\mathbb{F}(x_i^k)\}$ est identifié, il représente la solution la plus défavorable à éliminer. Le centroïde \bar{x} des sommets restants est calculé, et le nouveau sommet x_r est calculé par réflexion:

$$x_r = (1 + \alpha)\bar{x} - \alpha x_m^k \quad (4.10)$$

$\alpha > 0$ est le coefficient de réflexion (pris égale à 1 dans [15]), x_r est l'image réfléchie (le symétrique pour $\alpha=1$) de x_m^k à travers le centroïde \bar{x} dans la partie opposée du simplexe.

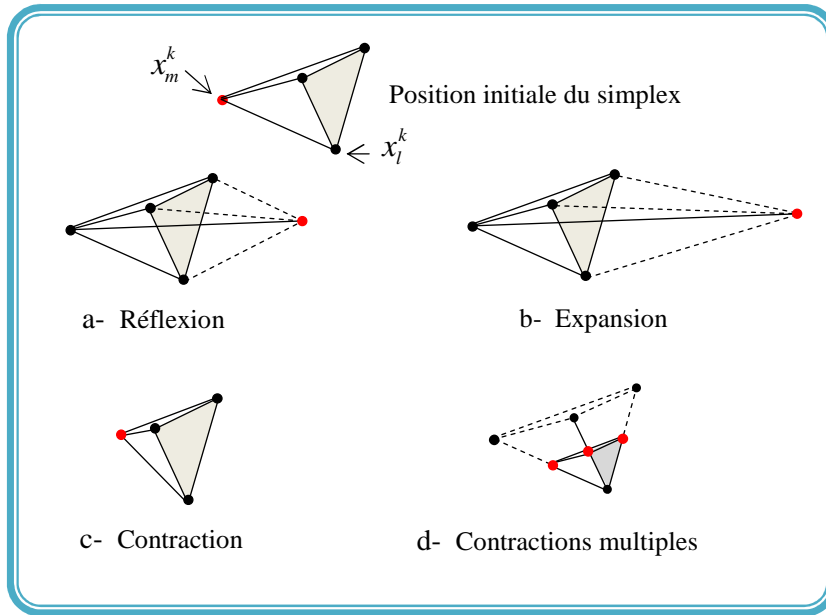


Fig. 5.1 Evolution du simplex dans \mathbb{R}^4

Si $\min\{\mathbb{F}(x_i^k)\} < \mathbb{F}(x_r) < \mathbb{F}(x_m^k)$, x_m^k est remplacé par x_r et l'opération de réflexion est appliquée à nouveau au nouveau simplex. Mais si $\mathbb{F}(x_r) < \min\{\mathbb{F}(x_i^k)\}$, on regarde si x_m^k peut être déplacé dans la même direction. Cette opération donne une expansion du simplex dans la même direction de réflexion, dont le nouveau sommet est calculé par:

$$x_e = \gamma x_r + (1 - \gamma) \bar{x} \quad (4.11)$$

$\gamma > 1$ est le coefficient d'expansion (pris égale à 2 dans [15]). Si $\mathbb{F}(x_e) < \min\{\mathbb{F}(x_i^k)\}$, le sommet x_m^k est remplacé par x_e , sinon l'expansion a échoué et le sommet reprend la position x_r . Maintenant si la réflexion de x_m^k nous donne un nouveau sommet dont la solution est supérieure à toutes les autres, alors on contracte le simplex suivant la ligne reliant les sommets x_r et x_m^k :

$$x_c = \beta x_m^k + (1 - \beta) \bar{x} \quad (4.12)$$

Où $0 < \beta < 1$ est le coefficient de contraction (pris égale à 0.5 dans [15]). x_c : est alors le nouveau sommet à moins que $\mathbb{F}(x_c) > \mathbb{F}(x_r)$, auquel cas, le simplex est réduit de moitié par une contraction multiple centrée au sommet où la fonction est minimale:

$$x_i^{k+1} = \frac{x_i^k + x_l^k}{2} \quad (4.13)$$

Où $\mathbb{F}(x_l^k) = \min\{\mathbb{F}(x_i^k)\}$. La démarche est ainsi répétée jusqu'à satisfaction du critère de convergence, lequel peut être défini comme une valeur prédéfinie de \mathbb{F} . Mais nous verrons, par la suite, qu'un critère de convergence basé sur la seule valeur minimale de \mathbb{F} , n'est pas suffisant pour stopper l'algorithme en cas de convergence sur un minimum local.

5.3 Détermination de la fonction-coût

5.3.1 Forme discrète de la fonction-coût

Identifier un défaut dans une structure sollicitée, de manière statique ou dynamique, revient à identifier une partie de la frontière de la structure. Donc, la frontière doit, forcément, satisfaire à certaines conditions en déplacements ou en contraintes, en réponse au chargement imposé. La présence du défaut entraînera une perturbation des champs des déplacements et des contraintes mesurables en certains points capteurs à la frontière extérieure (Fig. 5.2). La fonction-coût est définie alors, comme une minimisation de la norme quadratique des erreurs enregistrées entre les valeurs des champs mesurées expérimentalement et celles calculées par simulation numérique.

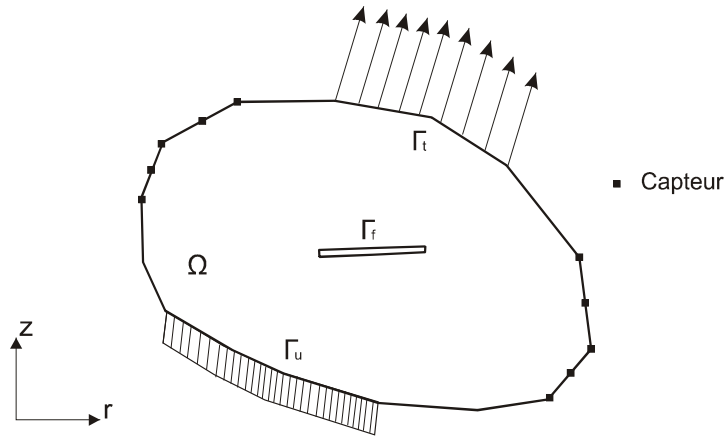


Fig. 5.2 Localisation des capteurs pour les déplacements (déformations)

Dans le cas où le champ mesuré est celui des déplacements, la fonction-coût s'écrit:

$$\mathbb{F}(x^k) = \frac{1}{\mathbb{F}_0} \sum_{n=1}^{N_c} (u_n^{ex} - u_n^k)^2 \quad (4.14)$$

Où x_k est le vecteur regroupant les paramètres géométriques du défaut à l'étape k , u_n^{ex} le vecteur des déplacements mesurés (réels) aux capteurs, u_n^k le vecteur des déplacements calculés par simulation aux mêmes points capteurs à l'étape k , N_c le nombre de capteurs et \mathbb{F}_0 une valeur de référence permettant de normaliser la fonction-coût.

L'équation (4.14) s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^k &= \frac{1}{\mathbb{F}_0} \sum_{n=1}^{N_c} \left\{ u_n^{ex} - u_n^k(r_1^k, z_1^k, r_2^k, z_2^k) \right\}^2 \\ \mathbb{F}_0 &= \sum_{n=1}^{N_c} (u_n^{ex})^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

5.3.2 Constitution du vecteur à optimiser

La frontière à identifier est une surface dont les paramètres géométriques sont choisis de manière à minimiser la fonction-coût. Dans le cas de l'élasticité axisymétrique, la fissure est représentée par un segment de droite. Donc, les paramètres à optimiser sont, soit les coordonnées géométriques des deux extrémités du segment, soit les coordonnées géométriques du centre du segment, sa longueur et son angle d'orientation dans le plan (r,z) (Fig. 5.3). Toute fois, nous pouvons diminuer le nombre de paramètres en fixant, par exemple, l'angle d'orientation ou la longueur de la fissure.

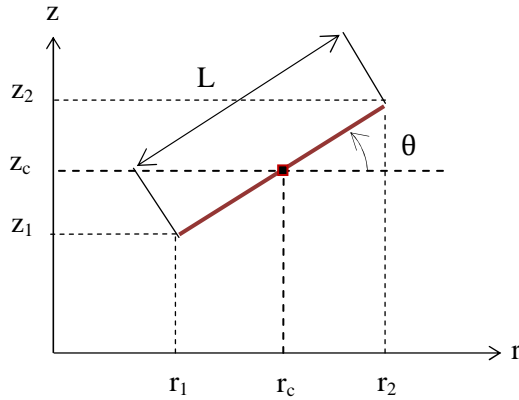


Fig. 5.3 Paramètres géométriques de la fissure

5.3.3 Fonction-coût en déformations

Expérimentalement parlant, il est plus pratique de mesurer les déformations sur la peau extérieure d'une structure axisymétrique que de mesurer les déplacements. De ce fait il est plus commode de transcrire l'équation (4.15) pour les déformations.

Après résolution du problème au moyen de la méthode des éléments de frontières, les champs des déplacements et des tensions sont déterminés aux nœuds de collocation du maillage. Les déformations s'écrivent en fonction des déplacements au moyen de la relation déformation-déplacement pour un problème axisymétrique sans torsion:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (4.17)$$

Une différentiation de l'équation intégrale en déplacement (3.26) pour un point de collocation du contour donne:

$$u_{i,k}(M_n^{gk}) = 2 \int_{S+\Gamma} \alpha(Q) U_{ij,k}(M_n^{gk}, Q) t_j(Q) ds - 2 \int_{S+\Gamma} \alpha(Q) T_{ij,k}(M_n^{gk}, Q) u_j(Q) ds \quad (4.18)$$

Les différentielles des noyaux des déplacements $U_{ij,k}$ et ceux des tensions $T_{ij,k}$ sont évalués en post traitement pour le calcul des contraintes sur le contour, le calcul des déformations s'en suit de façon directe. La déformation circonférentielle (4.16) est calculée directement à partir du déplacement radial. Comme, les seules valeurs accessibles à la mesure sont les déformations $\varepsilon_{\theta\theta}$ et ε_{zz} . La fonction-coût en déformation s'écrit alors:

$$\mathbb{F}^k = \frac{1}{\mathbb{F}_0} \sum_{n=1}^{Nc} \left\{ \left[\varepsilon_n^{ex} \right]_{ii} - \left[\varepsilon_n^k \right]_{ii} \right\}^2, \quad \mathbb{F}_0 = \sum_{n=1}^{Nc} \left(\varepsilon_n^{ex} \right)_{ii}^2 \quad i = \theta, z \quad (4.19)$$

5.4 Algorithme d'identification par simplex

1. Introduction des données de la structure étudiée: Géométrie, conditions aux limites, propriétés mécaniques du matériau.
2. A défaut d'informations expérimentales du champ des déformations aux points capteurs, supposer l'existence d'une fissure x^{ex} pour un premier calcul.
3. Maillage de la géométrie et des deux lèvres de la fissure.
4. Faire une première simulation par éléments de frontières et calculer les champs des déplacements et des déformations sur le contour de la structure.
5. Calculer $\mathbb{F}_0(x^{ex})$, équation(4.19).
6. Faire un nouveau calcul, en conservant la géométrie et les conditions aux limites, et en proposant une nouvelle position aléatoire de la fissure x^0 .
7. Perturber les quatre paramètres de position de la fissure pour créer quatre nouvelles positions:

$$\begin{cases} x^1 = \{r_1^0 + \delta r, z_1^0, r_2^0, z_2^0\} \\ x^2 = \{r_1^0, z_1^0 + \delta z, r_2^0, z_2^0\} \\ x^3 = \{r_1^0, z_1^0, r_2^0 + \delta r, z_2^0\} \\ x^4 = \{r_1^0, z_1^0, r_2^0, z_2^0 + \delta z\} \end{cases} \quad (4.20)$$

8. Lancer l'algorithme de minimisation de $\mathbb{F}(x^k)$ en utilisant le simplex constitué des quatre positions générées et de la solution initiale x^0 .
9. Stopper le processus itératif si l'une des conditions suivantes est vérifiée:
 - a- La différence entre les valeurs de \mathbb{F} pour deux itérations successives est inférieure à une tolérance fixée:

$$\left| \mathbb{F}(x^{k+1}) - \mathbb{F}(x^k) \right| < e_{\mathbb{F}} \quad (4.21)$$

- b- Le nombre maximal d'itérations, fixé, est atteint.

- c- La valeur de \mathbb{F} est inférieure à la tolérance fixée.

$$\mathbb{F}(x^k) < e_{\mathbb{F}} \quad (4.22)$$

La convergence de l'algorithme vers la solution x^{ex} est satisfaite avec la dernière condition (c). Une sortie avec les deux autres conditions est interprétée par une divergence pour la condition (b), et une convergence vers un minimum local pour la condition (a). On doit alors relancer l'algorithme du simplex avec une nouvelle solution initiale.

5.4.1 Validation numérique de l'algorithme d'identification

Afin de montrer le fonctionnement de l'algorithme du simplex, nous reprenons l'exemple du cylindre creux avec une fissure interne inclinée (fissure cône, section 4.8.3). Nous supposons que les déformations, axiales et circonférentielles, ont été mesurées en certains points capteurs sur la circonférence extérieure de la portion du cylindre considérée (Fig. 5.4). Une solution initiale est proposée (au voisinage de la solution exacte pour éviter un minima local) puis perturbée pour initialiser le simplex. La Fig. 5.4.a, donne une description de la géométrie, des conditions aux limites et de la position des capteurs. La position actuelle de la fissure est la position à identifier. Sur la Fig. 5.4.b est illustrée l'évolution de l'algorithme du simplex à partir de la solution initiale proposée.

La convergence vers la solution actuelle s'est faite au terme de 102 itérations pour une valeur de la fonction-coût normalisée inférieure à 10^{-4} .

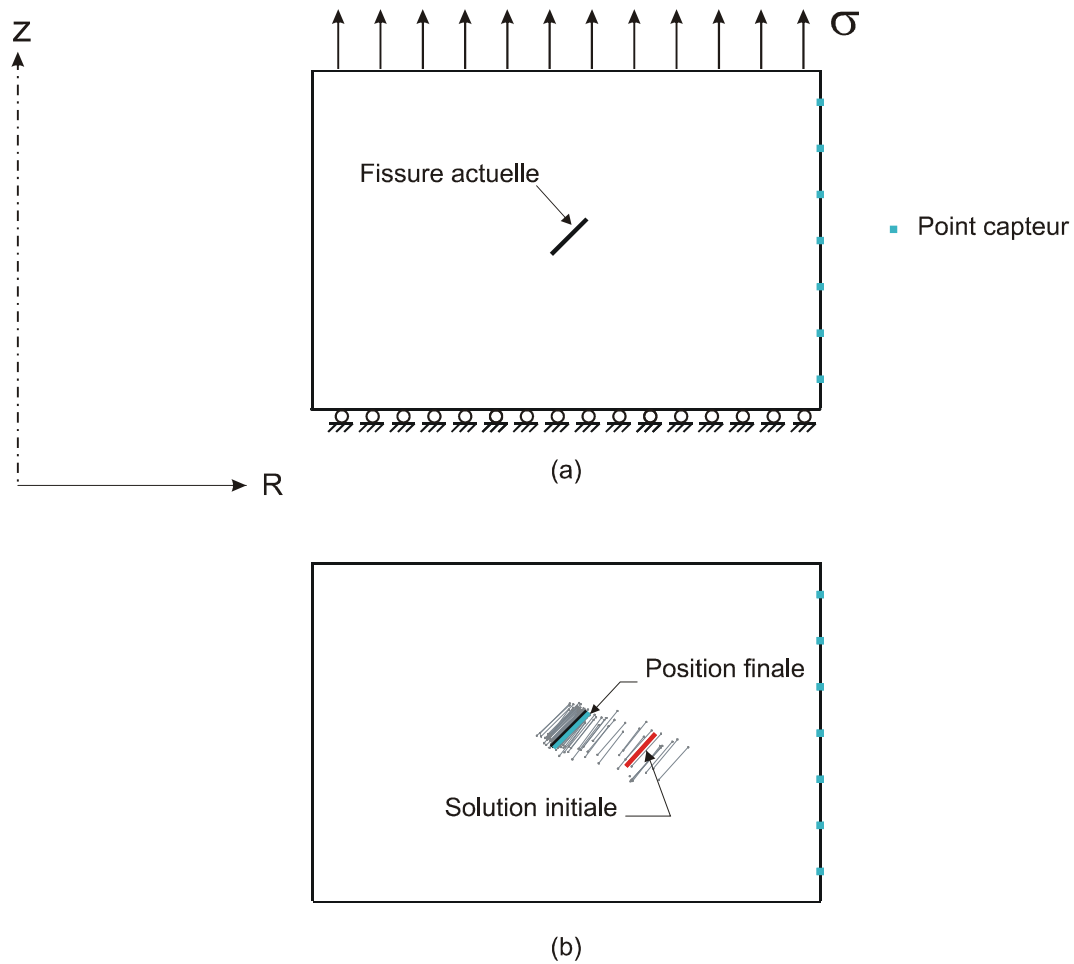


Fig. 5.4 Identification d'une fissure conique dans un cylindre creux

Les graphes des figures Fig. 5.5 et Fig. 5.6 donnent, respectivement, l'évolution de la fonction-coût (fonction erreur) avec l'avancée du simplex, ainsi que la convergence des coordonnées des fissures générées vers la solution actuelle recherchée. A noter que l'allure, en dents de scie, des graphes reflète les étapes du simplex à la recherche de la solution optimale.

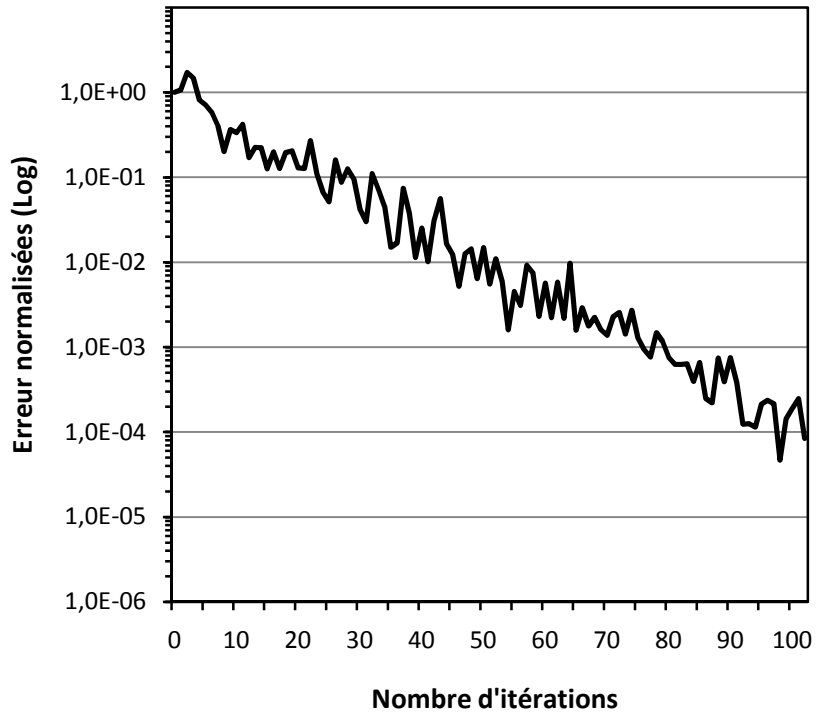


Fig. 5.5 Evolution de la fonction-coût dans l'identification d'une fissure conique dans un cylindre creux.

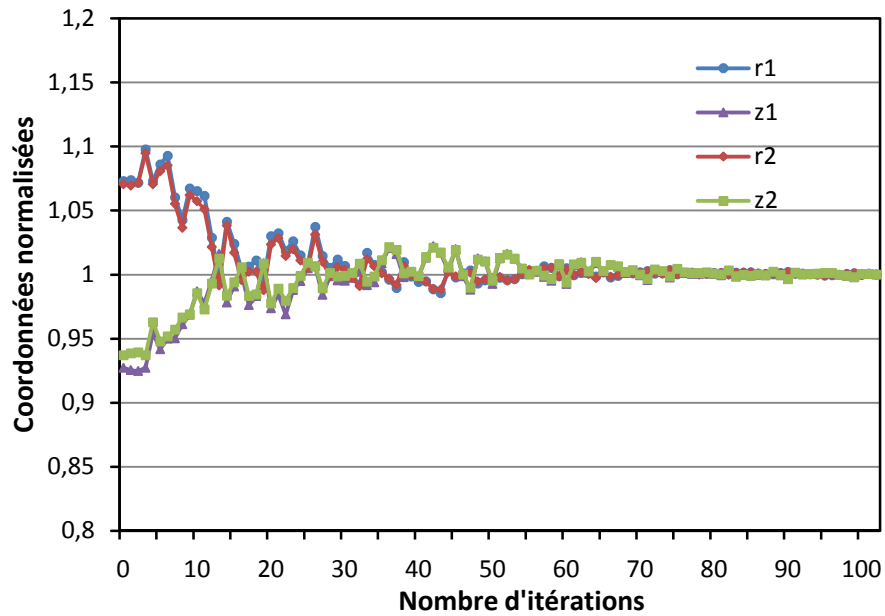


Fig. 5.6 Convergence des coordonnées d'une fissure conique dans un cylindre creux.

5.4.2 Influence de la taille et de la position de la solution initiale sur l'évolution du simplex

L'algorithme du simplex évolue (avance) lorsque la valeur de la fonction-coût change d'une itération à l'autre, ce qui se traduit par une variation des mesures aux points capteurs à chaque modification de la taille ou de la position de la fissure. Ceci n'est pas le cas pour les situations suivantes, où nous avons une convergence sur un minimum local:

1. La taille de la fissure est suffisamment faible pour avoir un effet mesurable aux points capteurs à la frontière de la structure (Fig. 5.7).
2. La position de la fissure est proche de la frontière de la structure en une zone non couverte par les capteurs (Fig. 5.8).
3. Présence d'une partie de la frontière de la structure (domaine non-convexe) entre la fissure actuelle et la solution initiale (Fig. 5.9).

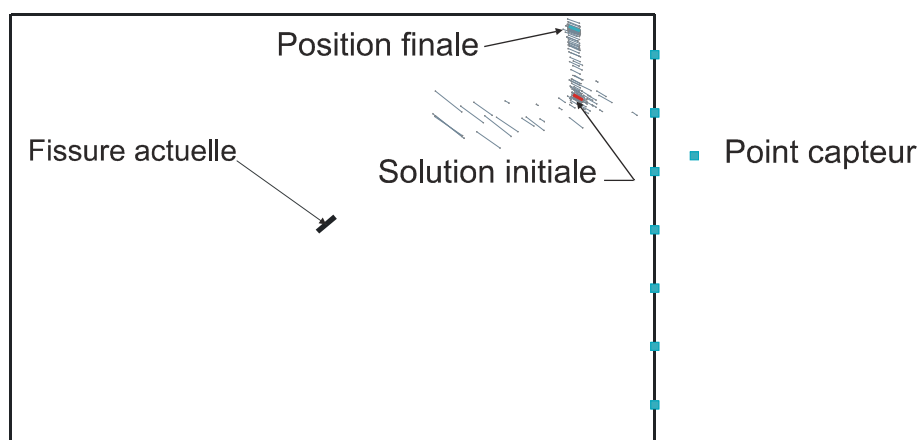


Fig. 5.7 Influence de la taille de la fissure

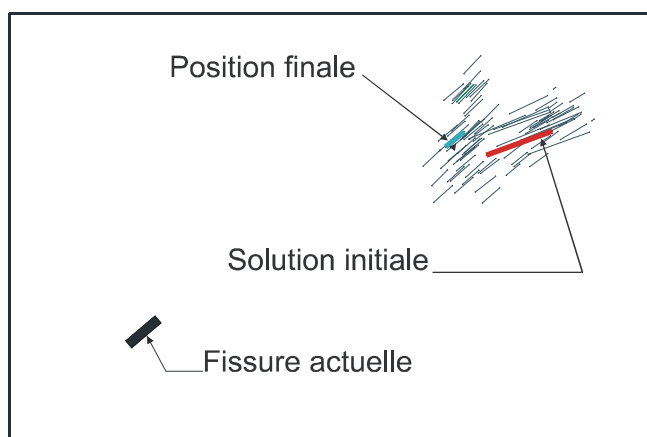


Fig. 5.8 Influence de la position de la fissure par rapport à la position des points capteurs

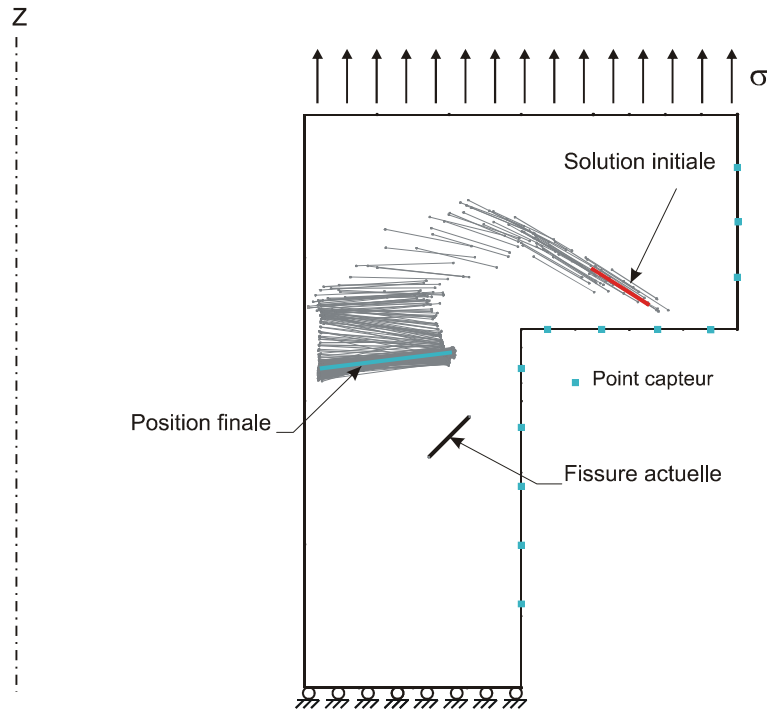


Fig. 5.9 Présence d'une partie de la frontière sur la trajectoire de la fissure

Afin d'améliorer la convergence du simplex, nous développerons dans la section suivante une nouvelle démarche pour le choix de la solution initiale. En effet, la taille et la position de la solution initiale sont deux paramètres qui influencent directement le mode de convergence du simplex et dont le choix doit répondre à un certain nombre de contraintes.

5.5 La séquence quasi-aléatoire (SQA)

L'idée envisagée pour la génération de la solution initiale (identité initiale), dont dépend la convergence du simplex, est de générer un échantillon de vecteurs identités pour la fissure recherchée (identité actuelle), et d'en garder le vecteur qui minimise la fonction-coût (4.19). Le vecteur, ainsi obtenu, servira pour l'amorçage du simplex. La principale condition à laquelle doit se conformer la génération aléatoire de vecteurs identités, est de couvrir uniformément la totalité du domaine considéré, pour s'assurer un minimum local proche du minimum global.

Pour satisfaire cette condition, nous avons choisi une séquence quasi-aléatoire qui possède une grande vitesse de convergence, même si l'indépendance stochastique des vecteurs générés d'une même variable n'est pas respectée. L'indépendance des variables étant la principale condition à respecter. Ces types de séquences sont dites « quasi-aléatoires » pour les distinguer des séquences « pseudo-aléatoires ». Les tirages d'une séquence pseudo-aléatoire vérifient tous les tests statistiques d'indépendance stochastique (χ^2 , Fisher, Kolmogorov-Smirnov...), alors que ceux d'une séquence quasi-aléatoire en vérifient seulement quelques uns.

La séquence est générée par la suite (x_n) , donnée par l'expression suivante [40]:

$$x_n = n\sqrt{p} - \text{Int}(n\sqrt{p}) \quad 0 < x_n < 1 \quad (4.23)$$

Où n est une succession de valeurs entières positives comprises entre 1 et le nombre de tirages souhaités. Le paramètre p est un nombre premier et s'appelle « noyau » de la séquence aléatoire. C'est le paramètre à changer si on veut générer plusieurs variables aléatoires stochastiquement indépendantes. « Int » désigne la partie entière du nombre réel mis entre parenthèses.

La Fig. 5.10 illustre l'homogénéité de la distribution de l'échantillon généré par la SQA sur un domaine convexe pour différentes valeurs de n, et nous pouvons constater qu'un nombre de tirages réduit (n=40 par exemple) est suffisant pour couvrir uniformément la quasi-totalité du domaine. Le même constat est fait pour un domaine non-convexe (Fig. 5.11).

5.6 Couplage SQA-Simplex

Nous avons montré en section 5.4.2, que l'algorithme du simplex ne converge pas vers le minimum global de la fonction-coût, et qu'une convergence vers un minimum local est toujours possible dans l'une des situations mentionnées plus haut, ce qui donne une identité erronée pour la fissure à localiser. La démarche adoptée, pour améliorer la convergence de l'algorithme d'identification, est de coupler les deux méthodes : *SQA-Simplex* selon l'algorithme suivant :

Algorithme d'identification par SQA-Simplex

1. Introduction des données de la structure étudiée: géométrie, conditions aux limites, propriétés mécaniques du matériau.
2. A défaut d'informations expérimentales du champ des déformations aux points capteurs, supposer l'existence d'une fissure x^{ex} pour un premier calcul.
3. Maillage de la géométrie et des deux lèvres de la fissure.
4. Faire une première simulation par éléments de frontières et calculer les champs des déplacements et des déformations sur le contour de la structure.
5. Calculer $\mathbb{F}_0(x^{ex})$, équation(4.19).
6. Utiliser la SQA pour générer un échantillon d'identités $x^k (1 \leq k \leq n)$ couvrant uniformément le domaine étudié, et calculer pour chacune la valeur de $\mathbb{F}(x^k)$.
7. Conserver l'identité x^0 qui correspond à : $\min \mathbb{F}(x^k)$.
8. Perturber les quatre paramètres de position de la fissure pour créer quatre nouvelles positions:

$$\begin{cases} x^1 = \{r_1^0 + \delta r, z_1^0, r_2^0, z_2^0\} \\ x^2 = \{r_1^0, z_1^0 + \delta z, r_2^0, z_2^0\} \\ x^3 = \{r_1^0, z_1^0, r_2^0 + \delta r, z_2^0\} \\ x^4 = \{r_1^0, z_1^0, r_2^0, z_2^0 + \delta z\} \end{cases} \quad (4.24)$$

9. Lancer l'algorithme de minimisation de $\mathbb{F}(x)$ en utilisant le simplex constitué des quatre positions générées et de la *solution aléatoire optimale* x^0 .
10. Stopper le processus itératif si la valeur de \mathbb{F} est inférieure à la tolérance fixée.

5.7 Validation numérique du couplage SQA-Simplex

5.7.1 Cas d'une fissure axisymétrique confinée dans une bague à section en U

Nous reprenons dans ce test l'exemple de la Fig. 5.9. La structure considérée est une bague à section en U avec une fissure conique confinée dans la paroi. La Fig. 5.12.a donne une description du chargement et de la position des capteurs. La symétrie de la section par rapport au plan (r, θ) , nous permet de considérer une seule moitié de la section avec des conditions de fixation qui assurent un déplacement axial nul sur le plan $z=0$. La SQA est appliquée en premier avec un échantillon de 50 identités (Fig. 5.12.b). La position aléatoire optimale est ensuite utilisée pour lancer la minimisation par le simplex (Fig. 5.12.c), et la convergence est obtenue au bout de 100 itérations avec une valeur de la fonction-coût inférieure à 10^{-4} .

Les graphes des figures Fig. 5.13 et Fig. 5.14 donnent, respectivement, les évolutions de la fonction-coût et des valeurs du vecteur identité de la fissure, durant la phase du simplex.

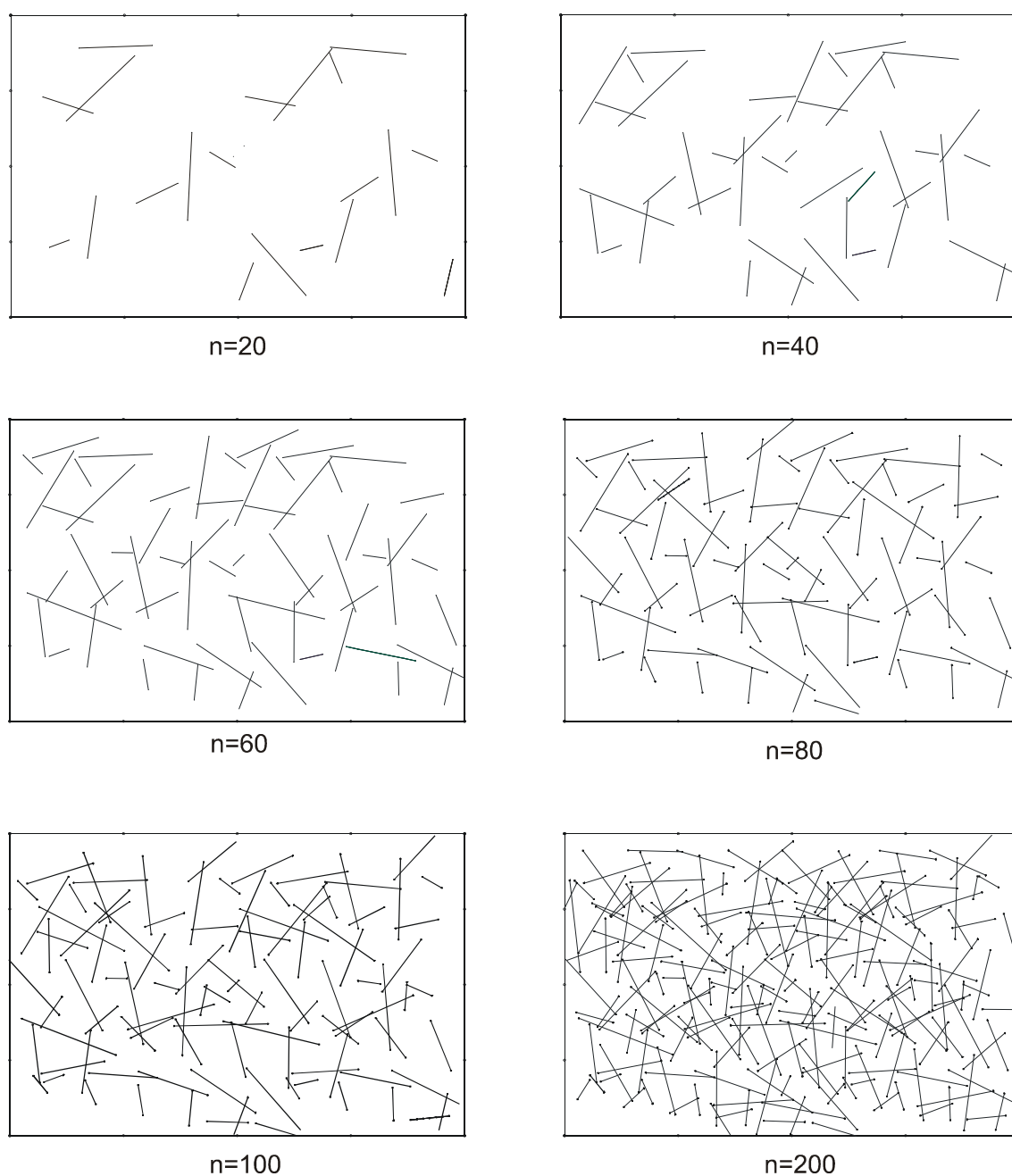


Fig. 5.10 Répartition des identités générées par la SQA sur un domaine convexe pour différents échantillons

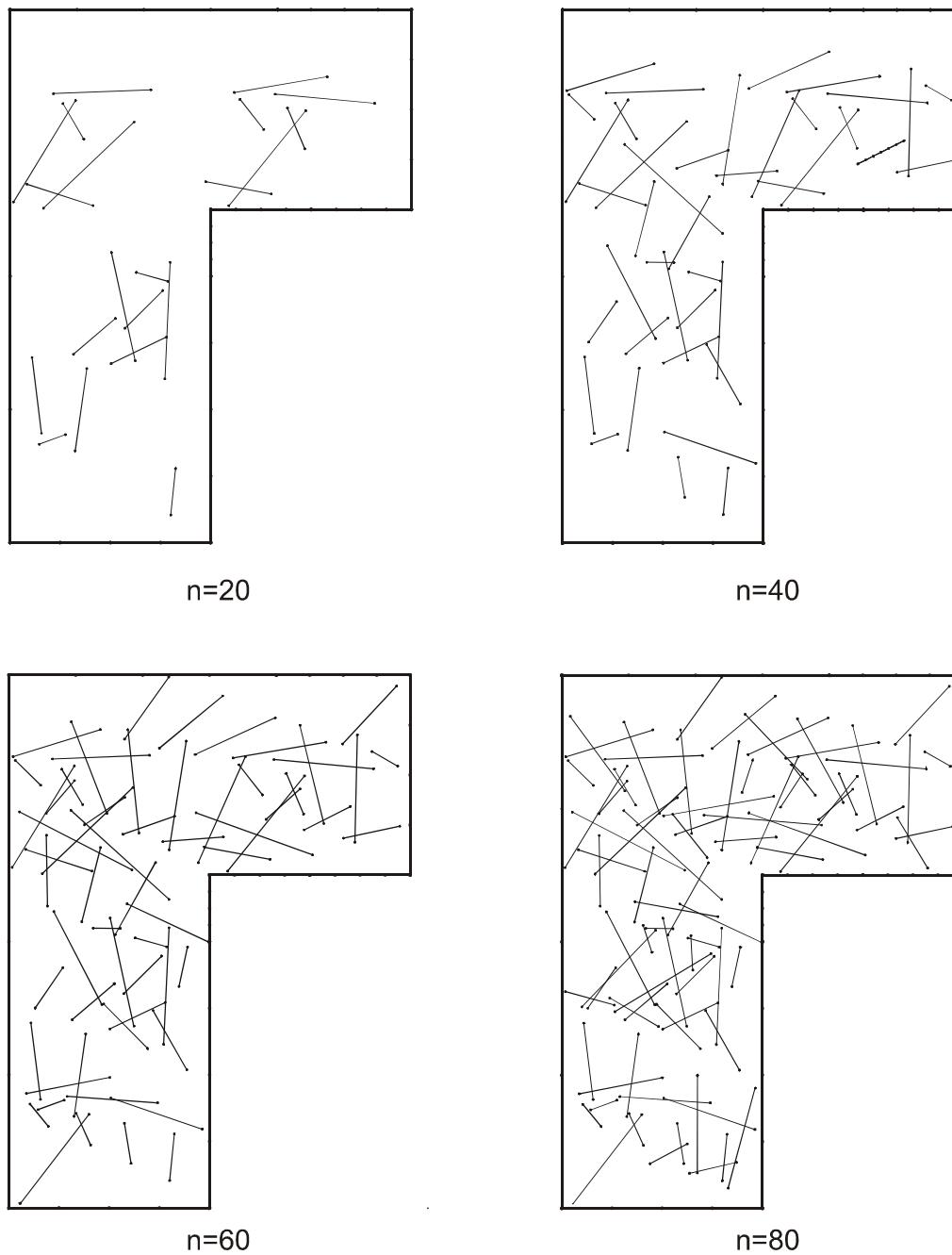


Fig. 5.11 Répartition des identités générées par la SQA sur un domaine non-convexe pour différents échantillons

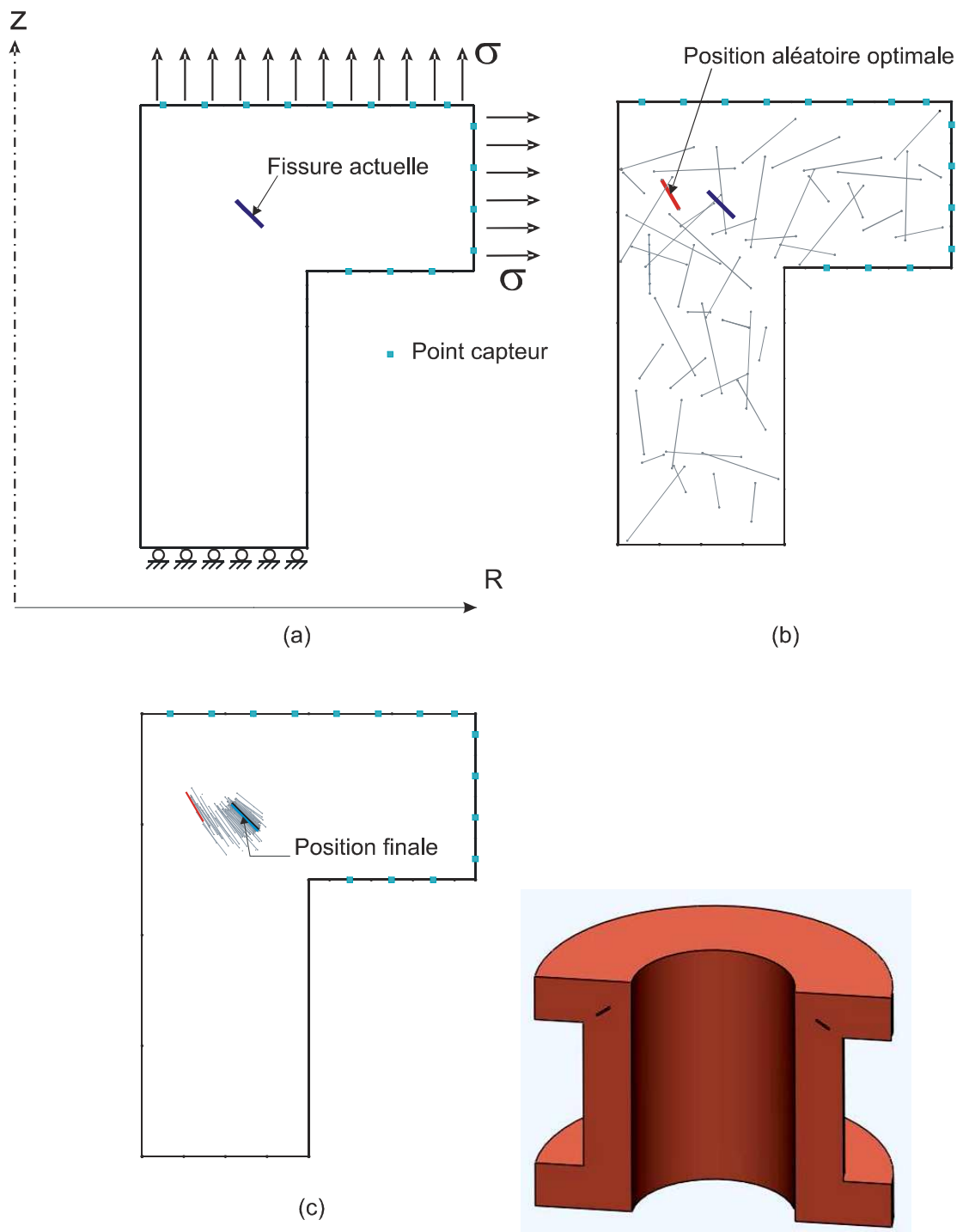


Fig. 5.12 Identification d'une fissure dans une bague à section en U par SQA-Simplex.

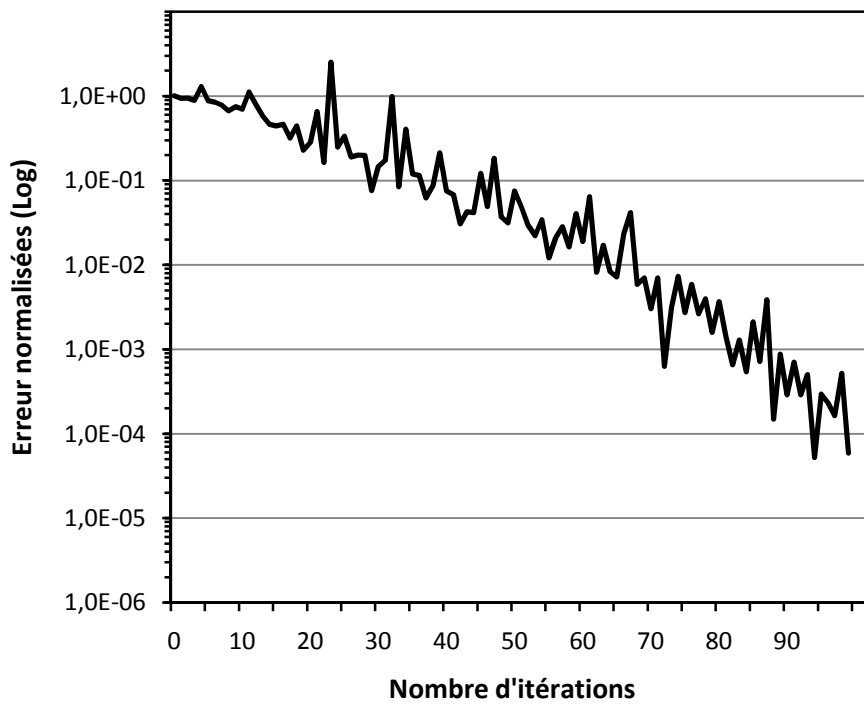


Fig. 5.13 Fonction-coût dans le cas de l'identification d'une fissure dans une bague à section en U par SQA-Simplex.

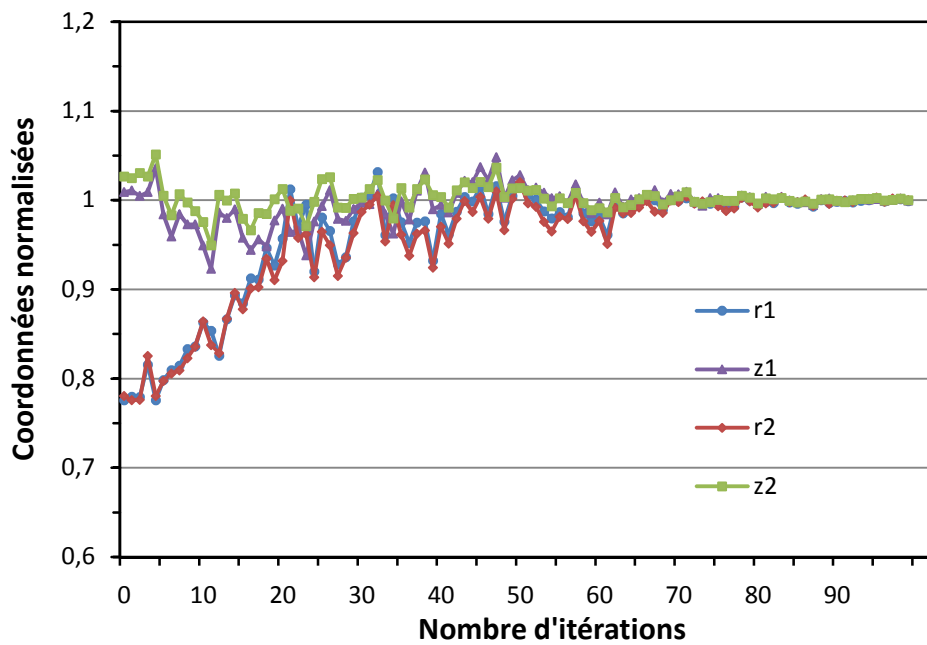


Fig. 5.14 Convergence des coordonnées dans le cas de l'identification d'une fissure dans une bague à section en U par SQA-Simplex.

5.7.2 Cas d'une fissure annulaire aplatie dans un cylindre creux entaillé

Dans ce second test, nous considérons une forme cylindrique d'un usage courant en construction mécanique. La pièce étudiée est de forme cylindrique creuse, contenant une rainure circonférentielle (gorge) en forme de U. Une fissure axisymétrique, annulaire et aplatie, est placée au milieu de la paroi comme indiqué sur la Fig. 5.15.a. Le cylindre est en traction axiale. La SQA est appliquée en premier avec un échantillon de 50 identités (Fig. 5.15.b). La position aléatoire optimale est ensuite utilisée pour lancer la minimisation de la fonction-coût (Fig. 5.15.c), et la convergence est obtenue au bout de 284 itérations avec une valeur de la fonction-coût inférieure à 10^{-4} . Nous remarquons que, comparé au premier exemple (5.7.1), le nombre d'itérations jusqu'à convergence a plus que doublé. Ceci est dû à la présence de l'entaille qui vient amplifier la perturbation des champs, des contraintes et des déformations, déjà fortement perturbés par la présence de la fissure.

Les graphes des figures Fig. 5.16 et Fig. 5.17 donnent, respectivement, les évolutions de la fonction-coût et des valeurs du vecteur identité de la fissure, durant la phase du simplex.

5.7.3 Cas d'une fissure conique confinée dans un anneau [74]

Dans ce troisième test, la forme considérée est un anneau à diamètre extérieur variable, de façon à avoir une gorge à grand rayon de courbure par rapport au second exemple (Fig. 5.18). Une fissure conique est placée au milieu de la paroi au niveau de l'étranglement. L'anneau est en traction axiale. La SQA est appliquée en premier avec un échantillon de 50 identités (Fig. 5.18.a). La position aléatoire optimale est ensuite utilisée pour lancer la minimisation par le simplex (Fig. 5.18.b), et la convergence est atteinte au terme de 225 itérations avec une valeur inférieure à 10^{-4} pour la fonction-coût. A noter que dans cet exemple, le nombre d'itérations à convergence est inférieur à celui de l'exemple précédant et ceci s'explique par le fait que, les champs des contraintes et des déformations sont moins perturbés par un étranglement à grand rayon de courbure que par une gorge à faible rayon intérieur. Les graphes des figures Fig. 5.19 et Fig. 5.20 donnent, respectivement, les évolutions de la fonction-coût et des valeurs du vecteur identité de la fissure, durant la phase du simplex.

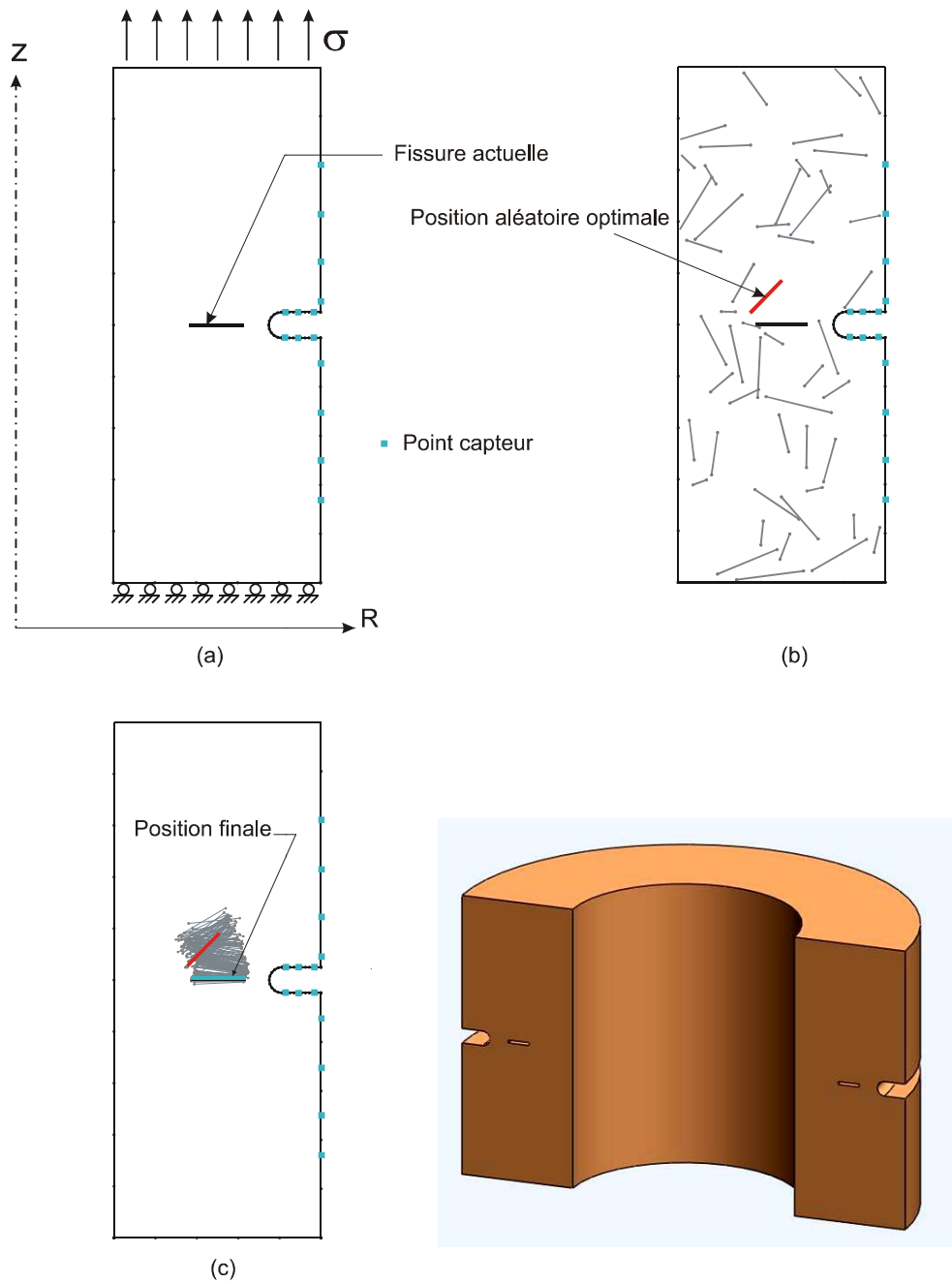


Fig. 5.15 Identification d'une fissure dans un cylindre creux et entaillé par SQA-Simplex.

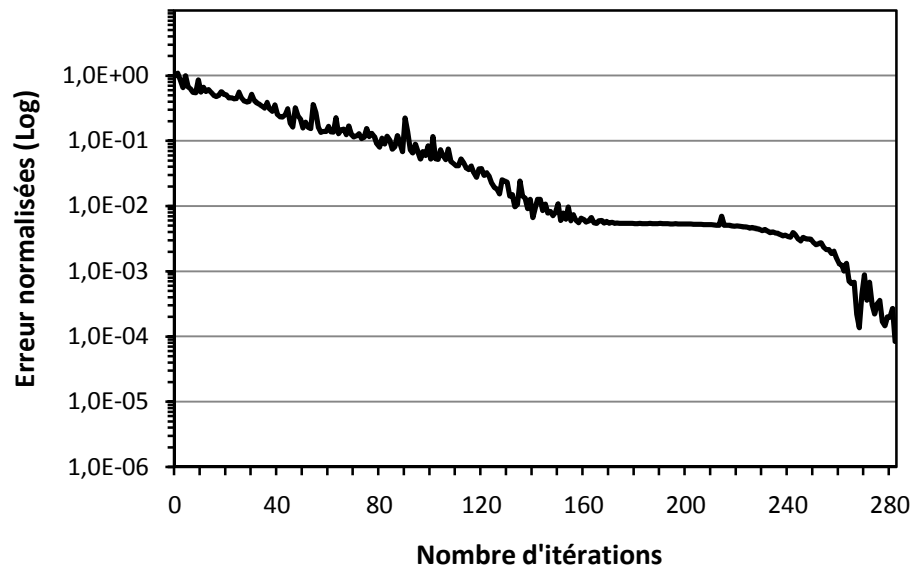


Fig. 5.16 Fonction-coût pour le cas de l'identification d'une fissure dans un cylindre creux et entaillé par SQA-Simplex

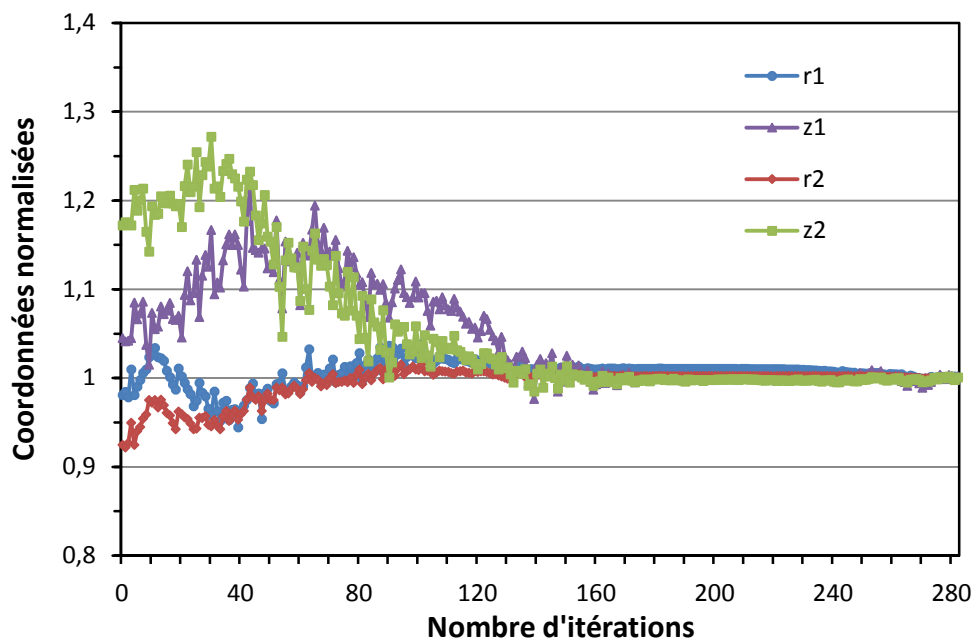


Fig. 5.17 Convergence des coordonnées pour le cas de l'identification d'une fissure dans un cylindre creux et entaillé par SQA-Simplex

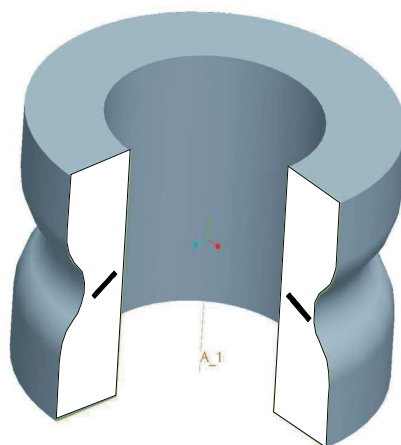
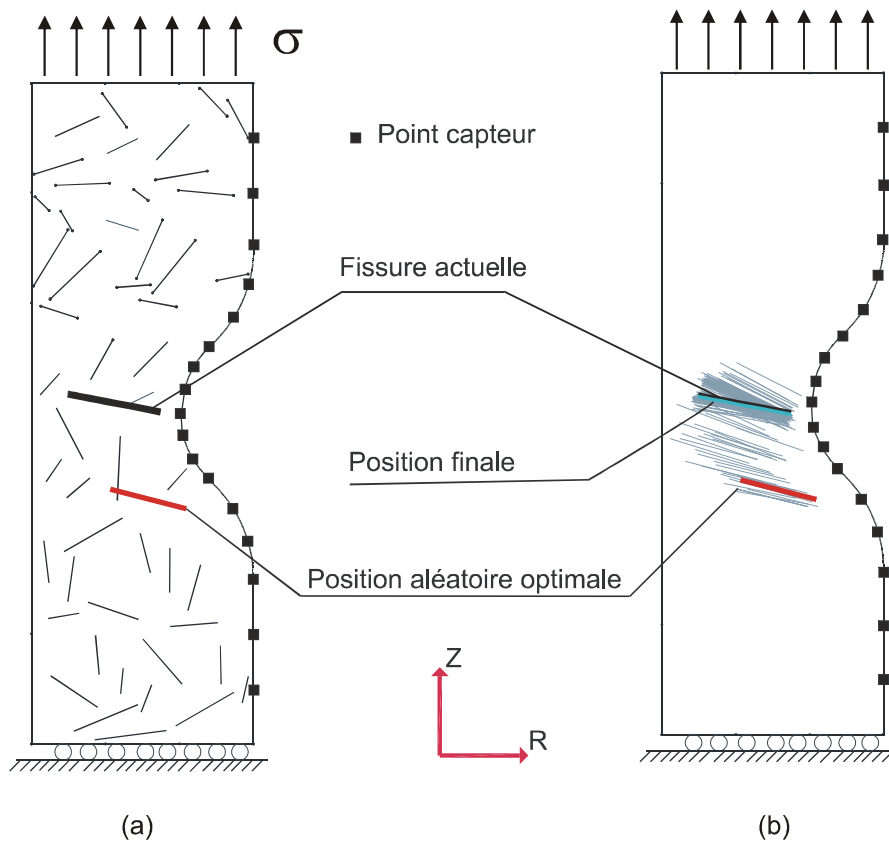


Fig. 5.18 Identification d'une fissure dans un anneau

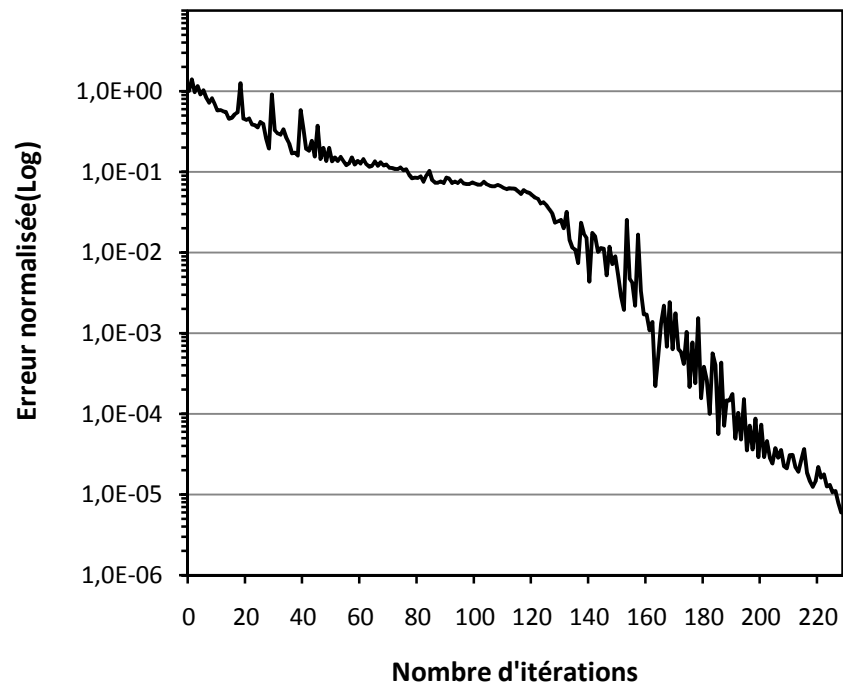


Fig. 5.19 Fonction-coût pour le cas de l'identification d'une fissure dans un anneau par SQA-Simplex

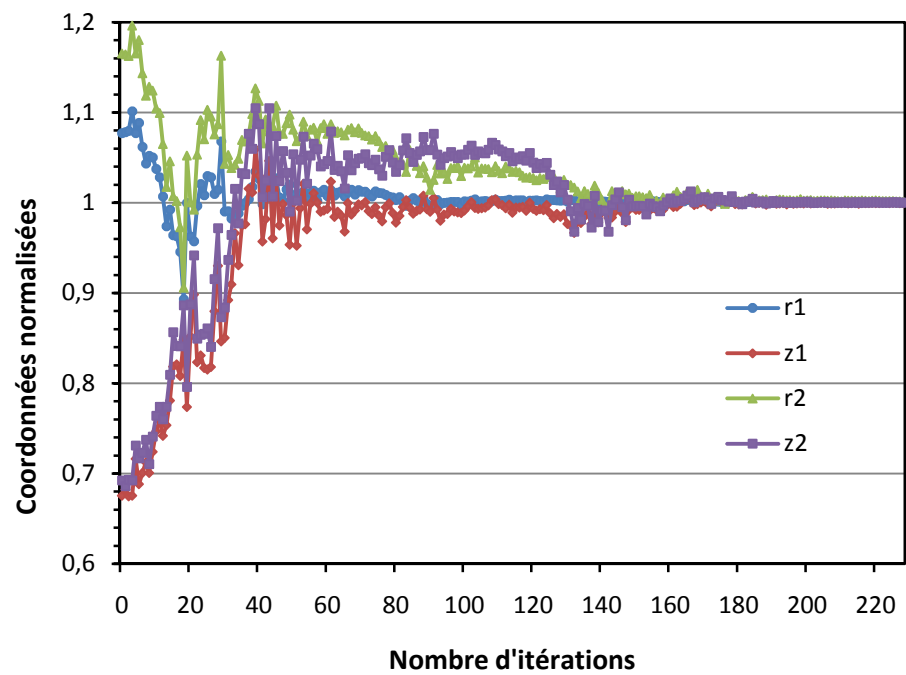


Fig. 5.20 Convergence des coordonnées pour le cas de l'identification d'une fissure dans un anneau par SQA-Simplex

5.8 Stabilité de l'algorithme au bruit des mesures

Un algorithme d'identification de fissures, dont les données ont une origine expérimentale, ne saurait être fiable s'il ne tient pas compte de l'effet, sur sa convergence et sa stabilité, des incertitudes des mesures.

Les origines de ces incertitudes sont nombreuses :

- Les données ont une origine expérimentale, ce qui implique l'existence d'erreurs de mesure.
- Elles sont collectées en nombre fini, même si, dans le modèle mathématique, elles sont décrites par des fonctions.
- L'algorithme d'inversion peut parfois créer une altération des données : discrétisation et interpolation de données initialement continues.
- Le modèle lui-même découle d'une idéalisation de la réalité physique et repose sur des hypothèses simplificatrices, il est donc également une source d'incertitudes.

Les incertitudes des mesures sont introduites, dans le code de calcul, sous forme de bruit généré par une loi aléatoire, dont l'écart type est fixé selon un niveau qui rend compte de la qualité des mesures.

5.8.1 Génération des variables gaussiennes

Une méthode classique pour simuler les variables aléatoires gaussiennes repose sur la constatation que, si (s_1, s_2) sont deux variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0,1]$:

$$X = \sqrt{-2\log(s_1)} \cos(2\pi s_2) \quad (4.25)$$

suit une loi gaussienne centrée et réduite [75].

Pour simuler une gaussienne de moyenne m et d'écart type σ , il suffit de poser

$$X = m + \sigma.g \quad (4.26)$$

Où g est une gaussienne centrée et réduite.

D'une manière plus générale, on peut générer une loi gaussienne X en résolvant l'équation :

$$N(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.27)$$

Où X est une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite.

Une approximation à 10^{-7} près de la fonction de répartition (4.27) est donnée par la formule [76]:

Si $x \geq 0$

$$N(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) \quad (4.28)$$

avec :

$$t = \frac{1}{1 + px} \quad p = 0.2316419$$

$$b_1 = 0.319381530$$

$$b_2 = -0.356563782$$

$$b_3 = 1.781477937$$

$$b_4 = -1.821255978$$

$$b_5 = 1.330274429$$

Le code de calcul KSP utilise la séquence quasi-aléatoire (4.23) comme loi uniforme, et la résolution de l'équation (4.28) pour générer la loi gaussienne.

5.8.2 Application au cas de l'identification d'une fissure conique

Comme test illustrant l'effet du bruit des mesures sur la qualité des résultats, nous reprenons l'exemple relatif à l'identification d'une fissure conique dans un cylindre creux (5.4.1). Les mesures, aux points capteurs, sont bruitées par des incertitudes générées par une loi gaussienne (4.28) selon différents écart-types. Les nuages obtenus pour les identités calculées sont tous concentrés autour des valeurs exactes (Fig. 5.21), ce qui est un bon indicateur de la stabilité de l'algorithme. Les graphes de la Fig. 5.22 montrent la convergence de l'identité perturbée moyenne pour un échantillon de 225 simulations. Notons que les écarts moyens à convergence pour le couple de coordonnées (X_1, X_2) restent du même ordre que ceux imposés aux mesures, alors que ceux du couple (Y_1, Y_2) sont deux fois plus importants (Tableau 3). Ceci s'explique par une plus grande sensibilité des résultats à la direction du chargement (le chargement utilisé pour notre exemple est purement axial). Cependant, et vu que la solution initiale est imposée par la SQA, la convergence de l'identité moyenne est très rapide et un échantillon d'une cinquantaine de simulations suffit (Fig. 5.22).

Ecart-types des perturbations		X1	Y1	X2	Y2
1%	IPM	1,00023	1,00057	1,00021	1,00143
	σ	0,01049	0,02245	0,00965	0,02223
2%	IPM	1,00254	1,00198	1,00232	1,00554
	σ	0,02318	0,04661	0,02157	0,04809
5%	IPM	1,01769	0,99907	1,01797	1,01816
	σ	0,06306	0,11741	0,05818	0,11886

Tableau 3 Identité Perturbée Moyenne (IPM) et écart-types pour différents niveaux de perturbations

5.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une technique, basée sur le couplage d'une méthode aléatoire (SQA) avec un algorithme de minimisation d'une fonction-coût (Simplex), pour l'identification de fissures axisymétriques dans des structures à géométrie et à chargement axisymétriques. Le choix du simplex, comme algorithme d'ordre zéro, nous a permis d'éviter la dérivation des noyaux singuliers présents dans la formulation intégrale du problème direct. Comme le simplex est un algorithme à convergence lente, et peut ne pas converger sur la solution recherchée (présence de minimums locaux), nous avons introduit une génération de solutions par une séquence quasi-aléatoire permettant de donner une position dans le voisinage de la solution recherchée. La position optimale obtenue est ensuite reprise par le simplex pour raffiner la convergence. L'efficacité de cette démarche a été prouvée au travers de multiples tests sur des domaines à géométrie et chargement différents. Enfin, nous avons étudié la stabilité de l'algorithme vis-à-vis des bruits des mesures, en introduisant un bruit de mesure aux points capteurs. Nous avons constaté que, la convergence de l'identité moyenne de la fissure est rapide (50 simulations au plus), et que les écart-types moyens sur les solutions générées sont du même ordre que ceux imposés aux perturbations. Ces résultats viennent conforter l'idée de la stabilité du simplex au bruit [70].

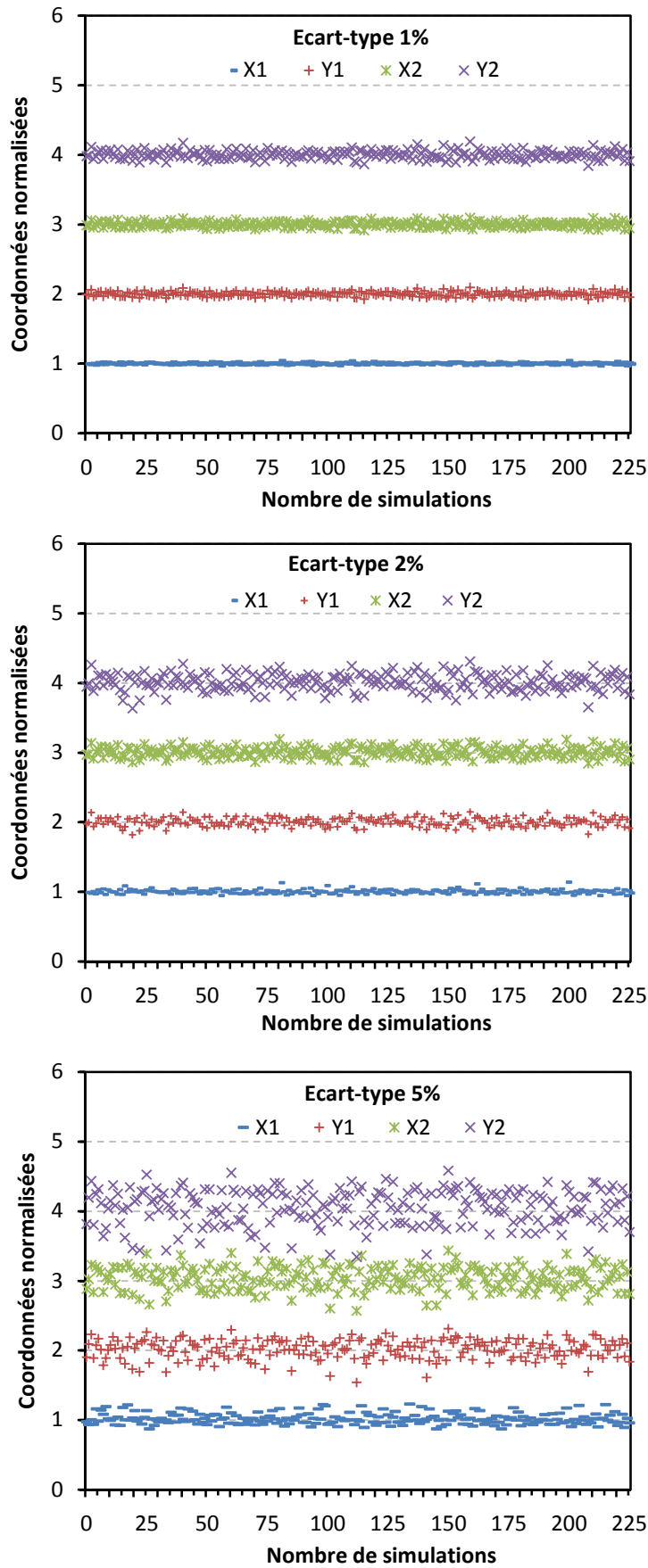


Fig. 5.21 Position des identités pour des mesures perturbées aléatoirement.

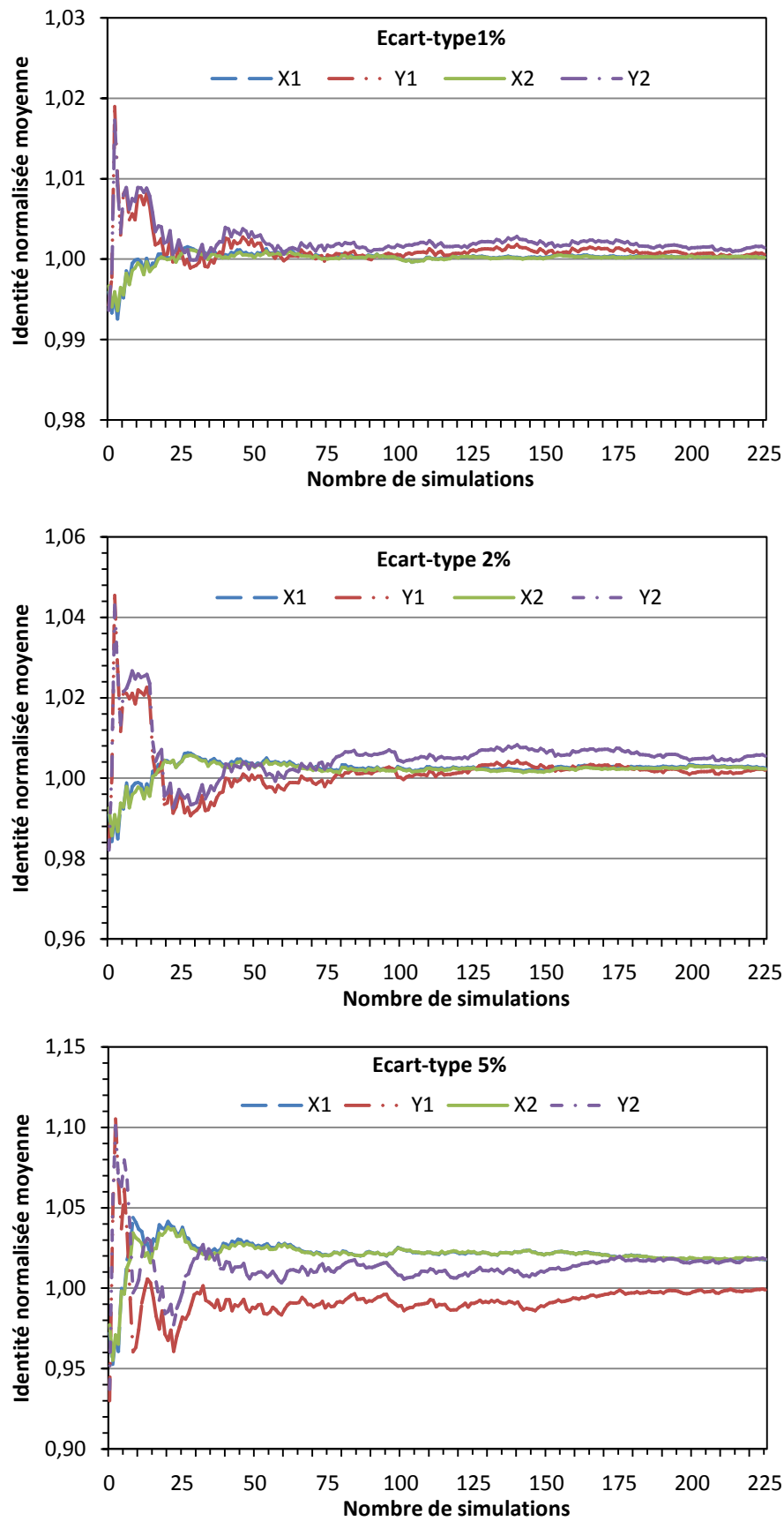


Fig. 5.22 Convergence de l'identité moyenne pour différents niveaux de bruit

Conclusions et perspectives

Dans cette étude, une méthode robuste pour l'identification et la caractérisation des fissures est proposée pour les structures axisymétriques. Pour la résolution du problème direct de la modélisation mathématique, la méthode des équations intégrales de frontières est adaptée pour l'élasticité axisymétrique. L'intérêt de recourir à une telle méthode est dicté d'une part par l'aptitude qu'ont les éléments de frontières à s'adapter aux structures fissurées et à rendre compte, avec une grande précision, du déplacement en fond de fissure, et d'autre part, elle permet de simuler la propagation de fissures sans avoir recours au remaillage de la structure et au transfert de champs. Ce qui est un avantage considérable lorsqu'on a recours aux algorithmes itératifs. Même si la formulation des équations intégrales de frontières, pour l'élasticité axisymétrique, a nécessité des développements analytiques laborieux, elle reste de mise en œuvre simple par rapport à une formulation 3-D.

La résolution du problème axisymétrique direct a permis l'évaluation des facteurs d'intensité de contraintes (FIC) pour différentes configurations de fissures, et de simuler la propagation de fissures axisymétriques. Les exemples traités, aussi bien pour les cas de fissures débouchantes ou confinées, ont montré qu'il est possible d'avoir de très bonnes approximations des FIC par des maillages relativement grossiers, ainsi qu'une bonne cohérence des chemins de propagation par rapport aux chargements appliqués.

La résolution du problème inverse d'identification a nécessité le choix d'un algorithme de minimisation de la fonction-coût, exprimée comme la norme quadratique des erreurs entre les mesures expérimentales des déformations et les valeurs calculées. Le choix d'un algorithme d'ordre zéro (simplex) a permis d'éviter la dérivation des noyaux hyper-singuliers inhérents à la formulation intégrale duale. Le degré de complexité de ces noyaux est tel, que toute tentative de dérivation entraînerait, inévitablement, des erreurs algébriques (annexe B). L'algorithme du simplex possède l'avantage d'être stable au bruit des mesures et les inconvénients d'être à convergence lente et converge souvent sur un minimum local lorsque la solution initiale proposée est relativement éloignée de la solution recherchée (Ce qui est aussi le cas pour les algorithmes de gradient). La difficulté posée était de trouver une autre approche qui donnerait une solution optimale, avec un minimum d'effort de calcul, pouvant servir de point de départ pour le simplex afin qu'il converge vers la solution locale (expérimentale). Le couplage de la méthode du simplex avec une autre méthode aléatoire était une alternative sensée.

Parmi les lois aléatoires permettant de générer des variables stochastiques, la séquence quasi-aléatoire (SQA) s'est avérée très performante. L'uniformité de la répartition de l'échantillon, produit aléatoirement, permet de couvrir la quasi-totalité d'un domaine non-convexe, et c'est l'objectif recherché. L'identité aléatoire optimale est ensuite utilisée pour amorcer le simplex. Le couplage Simplex-SQA est testé pour identifier des fissures axisymétriques sur des domaines convexes et non-convexes et les résultats obtenus sont très encourageants.

Ensuite, la sensibilité des résultats au bruit des mesures est examinée, en perturbant les données par des incertitudes aléatoires, selon une loi gaussienne, dont l'écart-type reflète les conditions expérimentales. Les résultats obtenus sont venus conforter l'idée de la stabilité du simplex au bruit par des écart-types moyens à convergence, sur les solutions générées, du même ordre que ceux imposés sur les perturbations.

Ce qui a précédé, a mis en évidence les avantages de l'algorithme d'identification, il comporte cependant des limitations que l'on peut diviser en deux classes : les limitations des hypothèses et les limitations de formulation. Concernant la première classe, la méthode est valable pour des cas limites de mono-fissure axisymétrique. Dans les cas traités, la fissure identifiée représente le défaut majeur, i.e. soit la structure n'en comporte pas d'autres, soit que leur effet sur les mesures est négligeable (non détectable). Une extension de la méthode aux cas des fissures courbes et aux multi-fissures est une première perspective.

La formulation axisymétrique ne tient pas compte de l'effet d'un chargement non-axisymétrique. L'idée de décomposer le chargement est à exclure du fait de la complexité de la formulation axisymétrique duale. L'algorithme d'identification, étant indépendant du problème direct, son application à une formulation en équations intégrales de frontières tridimensionnelle est une alternative faisable. Le cas 2-D a déjà été formulé et testé avec succès [74].

Enfin, une validation expérimentale de l'algorithme d'identification peut être envisagée sur un dispositif comportant une fissure interne, et équipé de jauges d'extensométrie.

Références bibliographiques

- [1] Kebir H. KSP, Code de calcul par éléments de frontières. Université de Technologie de Compiègne, France; 2006.
- [2] Lambert A, Rivenez J, Waché G. Les contrôles non destructifs. Cahiers Formation CETIM. Senlis, France; 1994.
- [3] Wood W.A. Formation of fatigue cracks. Philosophical Magazine London: Taylor & Francis Ltd; 1958. p. 692-699.
- [4] Le Biavant K. Etude de l'amorçage de fissure de fatigue dans l'alliage de Titane Ti-6Al-4V. Paris: ECP; 2000.
- [5] Rémillieux S. Tenue à la fatigue du N18 à température ambiante Birmingham: IRC; Juin 1992.
- [6] Westergaard H.M. Bearing pressures and cracks. Journal of Applied Mechanics. 1939:A49-A53.
- [7] Bathias C, Pineau A. Fatigue des matériaux et des structures 1. Paris: Hermes, 2008.
- [8] Paris P.C, Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Basic Engineering. 1963:528-534.
- [9] Walker E.K. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 aluminum. Effect of environment and complex load history on fatigue life. Philadelphia: ASTM STP 462, American Society for Testing and Materials; 1970. p. 1-14.
- [10] Forman R.G, Kearney V.E, Engle R.M. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. Journal of Basic Engineering 1967;89(3):459-463.
- [11] NASGRO, Fracture Mechanics and Fatigue Crack Growth Analysis Software V3.0. San Antonio, Texas: Southwest Research Institute; 2009.
- [12] Bui H.D. Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux. Paris: Editions Eyrolles, 1993.
- [13] Friedman A, Vogelius M. Determining cracks by boundary measurements. Mathematics Journal, Indiana University. 1989;38:527-556.
- [14] Bui H.D. Symétrie, dualité et variables conjuguées dans les équations intégrales de frontières. Comptes Rendus de l'Académie des sciences, Paris, France. 1990;311(1):7-13.
- [15] Nelder J.A, Mead R. A Simplex Method for Function Minimization. The Computer Journal 1965;7:308-313.
- [16] Michalewicz Z. Heuristic Methods for Evolutionary Computation Techniques. Journal of Heuristics. 1995;1(2):177-206.
- [17] Burczynski T, Beluch W, Dlugosz A, Orantek P, Nowakowski M. Evolutionary methods in inverse problems of engineering mechanics. International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics. Nagano: Elsevier; 2000.
- [18] Burczynski T, Beluch W. The identification of cracks using boundary elements and evolutionary algorithms. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2001;25:313-322.
- [19] Culioli J.C. Introduction à l'optimisation. Paris: Ellipses, 1999.
- [20] Dennis J.E Jr, Schnabel R.B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.
- [21] Rus G, Gallego R. Optimization algorithms for identification inverse problems with the boundary element method. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2002;26:315-327.
- [22] Bonnans J.F, Gilbert J.C, Lemarechal J.C, Sagastizabal C.A. Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects. Berlin: Springer, 2006.
- [23] Antoniou A, Lu W.S. Practical Optimization: Algorithms and Engineering Applications. Berlin: Springer, 2007.
- [24] Nougier J.P. Méthodes de calcul numérique. Vol 1. Systèmes d'équations. Hermes Sciences, 2001.
- [25] Tikhonov A.N, Arsenin V.Y. Solutions of Ill-posed problems. New York: Winston-Wiley, 1977.

- [26] Bonnet M. Problèmes inverses. Cours Master recherche: Ecole Centrale de Paris; Octobre 2008.
- [27] Morozov V.A. Regularization methods for Ill-Posed Problems. Boca Raton: CRC Press, 1992.
- [28] Kermanidis T. A numerical solution for axially symmetrical elasticity problems. *International Journal of Solids and Structures*. 1975;11:493-500.
- [29] Mayr M. The numerical solution of axisymmetric problems using an integral equation approach. *Mechanics Research Communication*. 1976;3:393-398.
- [30] Becker AA. *The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems*. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [31] Cruse TA. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*. 1969;5:1259-1969.
- [32] Guiggiani M, Krishnasamy T.J, Rudolphi T.J, Rizzo F.J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *Journal of Applied Mechanics*. 1992;59:604-614.
- [33] Cruse TA, Suwito W. On the Somigliana stress identity in elasticity *Computational Mechanics*. 1993;11:1-10.
- [34] Mukherjee S. CPV and HFP integrals and their applications in the boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*. 2000;37:6623-6634.
- [35] Mukherjee S. Finite parts of singular and hypersingular integrals with irregular boundary sources points. *Engineering Fracture Mechanics*. 2000;24:767-776.
- [36] De Lacerda LA, Wrobel LC. Hypersingular boundary integral equation for axisymmetric elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2001;52:1337-1354.
- [37] Mukherjee S. Regularization of hypersingular boundary integral equations: a new approach for axisymmetric elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2002;26:839-844.
- [38] Mukherjee S, Mukherjee YX, Wenjing Y. Cauchy principal value and finite parts of integrals-revisited. *Engineering Fracture Mechanics*. 2005;29:844-849.
- [39] Zozulia VV. Regularization of the divergent integrals. I. General considerations. *Electronic Journal of Boundary Elements*. 2006;4:49-57.
- [40] Kebir H. Approche déterministe et probabiliste de la prévision de la durée de vie de structures aéronautiques à l'aide de la méthode des équations intégrales duales. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France; 1998.
- [41] Telles JCF. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987;24:959-973.
- [42] Bialecki RA, Herding U, Köhler O, Kuhn G. Weakly singular 2D quadratures for some fundamental solutions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1996;18:333-336.
- [43] Johnston PR, Elliott D. Transformations for evaluating singular boundary element integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2002;146:231-251.
- [44] Kutt HR. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-parts Integration. *Numerical mathematics*. 1975;24:205-210.
- [45] Guiggiani M, Casalini P. Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. 1987;24:1711-1716.
- [46] Richardson JD, Cruse TA, Huang Q. On the validity of conforming BEM algorithms for hypersingular boundary integral equations. *Computational Mechanics*. 1997;20:213-220.
- [47] Timoshenko SP, Goudier JN. *Theory of Elasticity*. Tokyo: McGraw-Hill, 1970.
- [48] Griffith A.A. The theory of rupture. *Proceedings of the First International Congress on applied Mechanics*. Delft, Pays-Bas; 1924. p. 55-63.
- [49] Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957;24:361-364.
- [50] Sneddon I. N. The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid. *Proceedings of Royal Society of London*. 1946;187:229-260.
- [51] Lowengrub M. A two-dimension crack problem. *International Journal of Engineering Science*. 1966;4:289.

- [52] Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968;35:379-386.
- [53] Sih G.C. *Handbook of stress-intensity factors*. Bethlehem, Pennsylvania, USA: Lehigh University, 1973.
- [54] Tada H, Paris P.C, Irwin G.R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. New York: American Society of Mechanical Engineers, 2000.
- [55] Becker A.A. *The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems*. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [56] Portela A, Aliabadi M.H. The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1992;33:1269-1287.
- [57] Kebir H, Roelandt J.M, Foulquier J. A new singular boundary element for crack problems, Application to bolted joints. *Engineering Fracture Mechanics*. 1999;62:497-510.
- [58] Broberg B. On determination of the J-Integral for paths close to the crack tip in cases of axial symmetry. Report SM-76-9 from the Graduate Aeronautical Laboratories. Pasadena, California: California institute of Technology; 1976.
- [59] Rybicki E.F, Kanninen M.F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics*. 1977;9:931-938.
- [60] Chen S.Y, Farris T.N. Boundary element crack closure calculation of axisymmetric stress intensity factors. *Computers and Structures*. 1994;50(4):491-497.
- [61] De Lacerda L.A, Wrobel L.C. Dual boundary element method for axisymmetric crack analysis. *International Journal of Fracture*. 2002;113: 267-284.
- [62] Erdogan F, Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*. 1963;85:516-527.
- [63] Wu C.W. Maximum energy release rate criterion. *Journal of Elasticity*. 1978;8:235-257.
- [64] Sih G.C. Introductory chapter: A special theory of crack propagation. *Mechanics of fracture*. Noordhoff, Holland, 1972. p. 21-45.
- [65] Goldstein R.V, Salganik R. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *International Journal of Fracture*. 1974;10:507-523.
- [66] Hussain M. A, Pu S.L, Underwood J. Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. *Fracture analysis: American Society of Testing and Materials, ASTM STP 560*; 1974. p. 2-28.
- [67] Amoura N, Kebir H, Rechak S, Roelandt J.M. Numerical simulation of the behavior of cracks in axisymmetric structures by the dual boundary element method. *Failure Analysis of Engineering Materials and structures: Springer*, 2008. p. 435-443.
- [68] Parkinson J.M, Hutchinson D. An investigation into the efficiency of variants on the simplex method. In: Lootsma FA, editor. *Numerical Methods for Non-linear Optimization*. New York: Academic Press; 1972. p. 115-135.
- [69] Shekarforoush H, Berthod M, Zerubia J. Direct search generalized simplex algorithm for optimizing non-linear functions. *Rapport de recherche INRIA 2535, Université Sophia-Antipolis, FRANCE*; 1995.
- [70] Lagarias J.C, Reeds J.A, Wright M.H, Wright P.E. Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review, Journal on Optimization*. 1998;9:112-147.
- [71] Kolda T.G, Lewis R.M, Torczon V. Optimization by Direct Search: New Perspectives on Some Classical and Modern Methods. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*. 2003;45:385-482.
- [72] Price C.J, Coope I.D. Frames and Grids in Unconstrained and Linearly Constrained Optimization: A Nonsmooth Approach. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review, Journal on Optimization*. 2003;14:415-438.
- [73] Audet C, Dennis J.E. Jr. Mesh Adaptive Direct Search Algorithms for Constrained Optimization. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review, Journal on Optimization*. 2006;17:188-217.

- [74] Amoura N, Kebir H, Rechak S, Roelandt J.M. Axisymmetric and two-dimensional crack identification using boundary elements and coupled quasi-random downhill simplex algorithms. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2010;34:611-618.
- [75] Niederreider H. Random numbers generation and Quasi-Moté Carlo methods. Austrian Academy of Sciences, 1992.
- [76] Lamberton D, Lapeyre B. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, 1992.
- [77] Gao X.W, Davies T.G. *Boundary element programming in mechanics*. Cambridge University Press, 2002.
- [78] Johnston P.R, Elliott D. Transformations for evaluating singular boundary element integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2002;146:231-251.

LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX

Fig. 1.1 Les trois éléments de base mis en jeu dans un <i>CND</i>	20
Fig. 1.2 Lignes de glissement cristallographique dans un matériau polycristallin	21
Fig. 1.3 Différents sites d'amorçage de fissures	21
Fig. 1.4 Fissure de fatigue dans un alliage de Titane TA6V.	22
Fig. 1.5 Fissure de fatigue dans un alliage de Nickel N18 à température ambiante.	22
Fig. 1.6 Mécanismes d'ouverture-fermeture.....	23
Fig. 1.7 Passage du stade I au stade II.....	24
Fig. 1.8 Conceptions <i>Safe Life</i> et <i>Fail Safe</i>	25
Fig. 1.9 Concept de tolérance aux dommages.....	26
Fig. 1.10 Variation de la vitesse de propagation d'une fissure	27
Fig. 1.11 Problème directe et problème inverse.....	30
Fig. 1.12 Algorithme de l'identification évolutionnaire	33
Fig. 2.1 Génération d'un volume axisymétrique à partir d'une surface plane	41
Fig. 2.2 Cas de chargements annulaires	42
Fig. 2.3 Problème de Kelvin.....	43
Fig. 2.4 Deux états d'équilibre pour le même domaine	44
Fig. 2.5 Représentation du domaine en coordonnées cylindriques	47
Fig. 2.6 Discrétisation de la frontière du domaine	53
Fig. 2.7 Représentation de l'élément linéaire dans son repère local	53
Fig. 2.8 Élément quadratique non conforme	54
Fig. 2.9 Fonctions de forme de l'élément quadratique non conforme	54
Fig. 2.10 Organigramme du module <i>BEM-AXI</i> dans le cas de l'élasticité axisymétrique	57
Fig. 2.11 Maillage d'un cylindre à paroi épaisse.....	58
Fig. 2.12 Superposition des résultats Analytique-Eléments de frontières pour le cas du maillage à 10 éléments.....	59
Fig. 2.13 Maillage en éléments de frontière du problème de la cavité sphérique dans une barre cylindrique.....	60
Fig. 2.14 Contrainte axiale sur le plan ($z=0$) pour l'exemple de la cavité sphérique dans une barre cylindrique.....	60
Fig. 2.15 Maillage en éléments de frontière de la barre cylindrique entaillée	61
Fig. 2.16 Distribution des contraintes dans la barre entaillée (a).	62
Fig. 2.17 Distribution des contraintes dans la barre entaillée (b).	62
Fig. 2.18 Distribution des contraintes dans la barre entaillée (c).	63
Fig. 3.1 Structure fissurée (Cas où $P \in \Gamma$).....	65
Fig. 3.2 Structure fissurée (Cas où $P \notin \Gamma$).....	67
Fig. 3.3 Discrétisation de la géométrie.....	68
Fig. 3.4 Fond de fissure.....	72
Fig. 3.5 Les nœuds de collocation des deux éléments du fond de fissure.....	74
Fig. 3.6 Localisation des points pour le calcul de l'intégrale de contour modifiée	76
Fig. 3.7 Fissure au voisinage du bord de la structure	77
Fig. 3.8 Fonctions de forme pour l'élément singulier.....	78
Fig. 3.9 Fissure circonférentielle extérieure débouchante dans un cylindre creux à paroi épaisse	79
Fig. 3.10 Facteur d'intensité de contraintes K_I pour le cas d'une fissure extérieure débouchante dans un cylindre creux.....	80
Fig. 3.11 Forme initiale et déformée du cylindre creux avec fissure extérieure débouchante	80
Fig. 3.12 Fissure circonférentielle interne débouchante dans un cylindre creux à paroi épaisse.....	81
Fig. 3.13 Facteur d'intensité de contraintes K_I pour le cas d'une fissure intérieure débouchante dans un cylindre creux.....	81
Fig. 3.14 Forme initiale et déformée du cylindre creux avec fissure intérieure débouchante.....	82
Fig. 3.15 Cylindre plein entaillé avec une fissure circonférentielle débouchante.....	83

Fig. 3.16	Facteur d'intensité de contraintes K_I pour le cas d'un cylindre plein entaillé et contenant une fissure en fond d'entaille	83
Fig. 4.1	Fissure sous chargement mixte, la direction de propagation est indiquée par l'angle α^*	86
Fig. 4.2	Incrémentation numérique de la fissure	88
Fig. 4.3	Constitution du système d'équations après propagation de la fissure	89
Fig. 4.4	Architecture du système d'équations à l'étape $i+1$ avant triangularisation	89
Fig. 4.5	Propagation d'une fissure axisymétrique dans une tige cylindrique	91
Fig. 4.6	Propagation d'une fissure axisymétrique intérieure dans un cylindre creux.....	93
Fig. 4.7	Propagation d'une fissure conique dans un cylindre creux	94
Fig. 4.8	Propagation d'une fissure axisymétrique dans un tube à paroi épaisse entaillé par une gorge	95
Fig. 4.9	Propagation d'une fissure axisymétrique dans une bague à section en U.....	96
Fig. 5.1	Evolution du simplexe dans \mathbb{R}^4	98
Fig. 5.2	Localisation des capteurs pour les déplacements (déformations)	99
Fig. 5.4	Identification d'une fissure conique dans un cylindre creux.....	102
Fig. 5.7	Influence de la taille de la fissure.....	104
Fig. 5.8	Influence de la position de la fissure par rapport à la position des points capteurs.....	104
Fig. 5.9	Présence d'une partie de la frontière sur la trajectoire de la fissure.....	105
Fig. 5.12	Identification d'une fissure dans une bague à section en U par SQA-Simplex.....	109
Fig. 5.13	Fonction-coût dans le cas de l'identification d'une fissure dans une bague à section en U	110
Fig. 5.14	Convergence des coordonnées dans le cas de l'identification d'une fissure dans une bague à section en U par SQA-Simplex.	110
Fig. 5.15	Identification d'une fissure dans un cylindre creux et entaillé par SQA-Simplex.	112
Fig. 5.16	Fonction-coût pour le cas de l'identification d'une fissure dans un cylindre creux et entaillé par SQA-Simplex	113
Fig. 5.17	Convergence des coordonnées pour le cas de l'identification d'une fissure dans un cylindre creux et entaillé par SQA-Simplex.....	113
Fig. 5.18	Identification d'une fissure dans un anneau.....	114
Fig. 5.19	Fonction-coût pour le cas de l'identification d'une fissure dans un anneau	115
Fig. 5.20	Convergence des coordonnées pour le cas de l'identification d'une fissure dans un anneau par SQA-Simplex	115
Fig. 5.21	Position des identités pour des mesures perturbées aléatoirement.....	118
Fig. 5.22	Convergence de l'identité moyenne pour différents niveaux de bruit	119
Tableau 1.	Calcul du déplacement radial u_r en fonction du nombre d'éléments du maillage	58
Tableau 2.	Calcul de la contrainte radiale σ_r en fonction du nombre d'éléments du maillage.....	59
Tableau 3	Identité Perturbée Moyenne et écart-types pour différents niveaux de perturbations	117

Annexe A

A.1 Intégrale elliptique complète du premier type $K(m)$

L'intégrale elliptique complète du premier type est définie par :

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m^2 \sin(\alpha))^{\frac{1}{2}} d\alpha \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (\text{A.1})$$

Cette intégrale est singulière, lorsque : $m \rightarrow 1, K(m) \rightarrow \infty$,

Une approximation à 10^{-8} de l'intégrale (A.1), au voisinage de 1, peut être donnée par l'expression suivante [77]:

$$K(m) = k_1 - k_2 \text{Log}(m_1) \quad (\text{A.2})$$

Avec :

$$m_1 = 1 - m^2, \quad k_1 = \sum_{i=0}^5 a_i m_1^i, \quad k_2 = \sum_{i=0}^5 b_i m_1^i$$

$a_0 = \text{Log}(4.)$	$b_0 = 0.5$
$a_1 = 0.096578619622$	$b_1 = 0.12499929597$
$a_2 = 0.031559431627$	$b_2 = 0.070148757782$
$a_3 = 0.023761224857$	$b_3 = 0.044983875539$
$a_4 = 0.025962888452$	$b_4 = 0.018751660276$
$a_5 = 0.0066398011146$	$b_5 = 0.0018472341632$

En dehors du voisinage de 1, l'intégrale K est régulière et est approximée par l'expression :

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^n (k_i + 1) \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Avec } k_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - m^2}} - 1 \quad k_i = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - k_{i-1}^2}} - 1 \quad \text{Pour } i \geq 2 \quad \text{et } K(0) = \frac{\pi}{2}, K(1) = \infty .$$

L'ordre n est fixé en fonction de la précision voulue ($n=5$ est suffisant pour avoir une précision de l'ordre de 10^{-12}). La partie logarithmique de $K(m)$ est intégrée moyennant un changement de la variable (voir Annexe C).

A.2 Intégrale elliptique complète du second type $E(m)$

L'intégrale elliptique complète du second type est définie par :

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m^2 \sin(\alpha))^{\frac{1}{2}} d\alpha \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (\text{A.4})$$

Cette intégrale est régulière quelque soit la valeur de m , et peut être approximée par l'expression :

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left[\prod_{i=1}^n (k_i + 1) \right] \left[1 - \frac{m^2}{2} \left(1 + \frac{k_1}{2} \left(1 + \frac{k_2}{2} \left(1 + \frac{k_3}{2} \dots \right) \right) \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

Avec $k_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - m^2}} - 1$ $k_i = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - k_{i-1}^2}} - 1$ Pour $i \geq 2$ et $E(0) = \frac{\pi}{2}$, $E(1) = 1$.

L'ordre n est fixé en fonction de la précision voulue (n=5 est suffisant pour avoir une précision de l'ordre de 10^{-12}).

ANNEXE B

B.1 Dérivation des noyaux U_{ij} et T_{ij} pour l'élasticité axisymétrique

En coordonnées cylindriques, le vecteur de *Galerkin* solution de l'équation de Navier est donné par les équations :

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) G_r = 0 \\ \nabla^2 \nabla^2 G_z = 0 \end{cases} \quad \text{Forces de volume nulles.} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

La solution de (B.1):

$$\begin{cases} G_r = \sqrt{Rr} \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{Q_{+1/2}^{-1}(\gamma)}{8\pi^2 \mu} \\ G_z = \sqrt{Rr} \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{Q_{-1/2}^{-1}(\gamma)}{8\pi^2 \mu} \end{cases} \quad \mu : \text{Module de cisaillement.} \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma = 1 + \frac{(Z - z)^2 + (R - r)^2}{2Rr} = \frac{R^2 + r^2 + (Z - z)^2}{2Rr} \quad (\text{B.3})$$

Le vecteur déplacement résultant du chargement (B.2) est obtenu par introduction de (B.2) dans les équations suivantes :

$$\begin{cases} 2(1 - \nu)U_{rr} = (1 - 2\nu)\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)G_r + \frac{\partial^2 G_r}{\partial z^2} \\ 2(1 - \nu)U_{zr} = -\frac{\partial^2 G_r}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial G_r}{\partial z} \\ 2(1 - \nu)U_{rz} = -\frac{\partial^2 G_z}{\partial r \partial z} \\ 2(1 - \nu)U_{zz} = (1 - 2\nu)\nabla^2 G_z + \frac{\partial^2 G_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_z}{\partial r} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

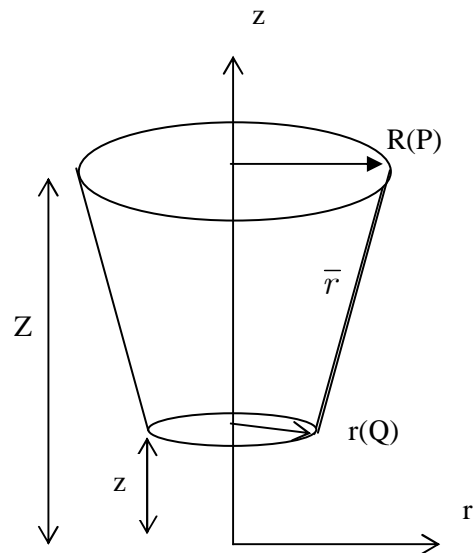
Les déplacements U_{ij} sont donnés en termes des fonctions elliptiques du premier et du second type :

$$\begin{aligned}
 U_{rr}(P, Q) &= \frac{1}{16\pi^2\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{3-4\nu}{\sqrt{Rr}} Q_{\frac{1}{2}}(\gamma) + \frac{(Z-z)^2}{Rr\sqrt{Rr}} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right\} \\
 U_{zr}(P, Q) &= \frac{1}{16\pi^2\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{Z-z}{r\sqrt{Rr}} \left[\frac{1}{2} Q_{\frac{1}{2}}(\gamma) - \left(\gamma - \frac{r}{R}\right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \right\} \\
 U_{rz}(P, Q) &= \frac{-1}{16\pi^2\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{Z-z}{r\sqrt{Rr}} \left[\frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma) + \left(\gamma - \frac{r}{R}\right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \right\} \\
 U_{zz}(P, Q) &= \frac{1}{16\pi^2\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{3-4\nu}{\sqrt{Rr}} Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma) - \frac{(Z-z)^2}{Rr\sqrt{Rr}} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right\}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$Q_{\frac{1}{2}}$ et $Q_{-\frac{1}{2}}$ sont les fonctions de Legendre définies par :

$$\begin{aligned}
 Q_{\frac{1}{2}}(\gamma) &= \gamma \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} K(m) - \sqrt{2(\gamma+1)} E(m) \\
 \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \left[K(m) - \frac{\gamma}{\gamma-1} E(m) \right] \\
 \frac{d^2Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} &= \frac{(\gamma^2+3)E(m) - \gamma(\gamma-1)K(m)}{2(\gamma^2-1)^2\sqrt{2(\gamma+1)}} \\
 Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma) &= \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} K(m) \\
 \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} &= -\frac{1}{2(\gamma-1)} \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} E(m) \\
 \frac{d^2Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} &= \frac{\sqrt{2}}{(\gamma^2-1)^2\sqrt{\gamma+1}} \left[\gamma E(m) - \frac{\gamma-1}{4} K(m) \right] \\
 m &= \frac{2}{\gamma+1}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Les fonctions $K(m)$ et $E(m)$ sont les fonctions elliptiques complètes du premier et du second type.



Les tensions sont obtenues à partir de (B.5) par différentiation et introduction de la loi de Hooke :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\mu} T_{rr}(P, Q) &= \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{U_{rr}}{r} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} \right) \right] n_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} \right) n_z \\
 \frac{1}{2\mu} T_{rz}(P, Q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} \right) n_r + \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{U_{rr}}{r} + \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} \right) \right] n_z \\
 \frac{1}{2\mu} T_{zr}(P, Q) &= \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{U_{zr}}{r} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} \right) \right] n_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right) n_z \\
 \frac{1}{2\mu} T_{zz}(P, Q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right) n_r + \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{U_{zr}}{r} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) \right] n_z
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

B.2 Dérivation des différents termes pour le calcul des noyaux T_{ij}

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{16\pi^2\mu(1-\nu)\sqrt{Rr}} \left\{ (3-4\nu) \left[\frac{-Q_{\frac{1}{2}}}{2r} + \frac{\partial\gamma}{\partial r} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + (Z-z)^2 \left[\frac{-3}{2Rr^2} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{1}{Rr} \frac{\partial\gamma}{\partial r} \frac{d^2Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] \right\} \\
 \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} &= \frac{1}{16\pi^2\mu(1-\nu)\sqrt{Rr}} \left\{ (3-4\nu) \frac{\partial\gamma}{\partial z} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{(Z-z)}{Rr} \left[-2 \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + (Z-z) \frac{\partial\gamma}{\partial z} \frac{d^2Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] \right\} \\
 \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} &= \frac{(Z-z)}{16\pi^2\mu(1-\nu)r^2\sqrt{Rr}} \left\{ \frac{-3Q_{\frac{1}{2}}}{4} + \left(2\gamma - \frac{r}{R} \right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \left(\gamma - \frac{r}{R} \right)^2 \cdot \frac{d^2Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right\} \\
 \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} &= \frac{1}{16\pi^2\mu(1-\nu)r\sqrt{Rr}} \left\{ \frac{-Q_{\frac{1}{2}}}{2} + \left(\gamma - \frac{r}{R} - \frac{(Z-z)}{2} \frac{\partial\gamma}{\partial z} \right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - (Z-z) \left(\gamma - \frac{r}{R} \right) \frac{\partial\gamma}{\partial z} \frac{d^2Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right\} \\
 \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} &= \frac{1}{16\pi^2\mu(1-\nu)\sqrt{Rr}} \left\{ (3-4\nu) \left[\frac{-Q_{-\frac{1}{2}}}{2r} + \frac{\partial\gamma}{\partial r} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] - (Z-z)^2 \left[\frac{-3}{2Rr^2} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{1}{Rr} \frac{\partial\gamma}{\partial r} \frac{d^2Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] \right\} \\
 \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} &= \frac{1}{16\pi^2\mu(1-\nu)\sqrt{Rr}} \left\{ (3-4\nu) \frac{\partial\gamma}{\partial z} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{(Z-z)}{Rr} \left[2 \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - (Z-z) \frac{\partial\gamma}{\partial z} \frac{d^2Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] \right\} \\
 \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} &= \frac{(Z-z)}{16\pi^2\mu(1-\nu)r^2\sqrt{Rr}} \left\{ \frac{3Q_{-\frac{1}{2}}}{4} + \left(2\gamma - \frac{r}{R} \right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \left(\gamma - \frac{r}{R} \right)^2 \cdot \frac{d^2Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right\} \\
 \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} &= \frac{1}{16\pi^2\mu(1-\nu)r\sqrt{Rr}} \left\{ \frac{Q_{-\frac{1}{2}}}{2} + \left(\gamma - \frac{r}{R} - \frac{3(Z-z)}{2} \frac{\partial\gamma}{\partial z} \right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - (Z-z) \left(\gamma - \frac{r}{R} \right) \frac{\partial\gamma}{\partial z} \frac{d^2Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\gamma}{\partial Z} &= \frac{Z-z}{Rr} \\
 \frac{\partial\gamma}{\partial R} &= \frac{R^2 - r^2 - (Z-z)^2}{2R^2r}
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Si l'on pose :

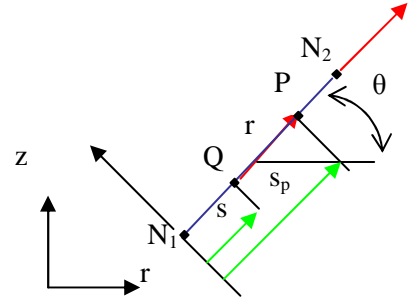
$$R = r_1 + s_p \cos \theta$$

$$r = r_1 + s \cos \theta$$

$$\bar{z} = Z - z$$

$$\bar{r}^2 = (R - r)^2 + \bar{z}^2$$

(B.10) 



Alors :

$$\begin{aligned}
 (R^2 - r^2) &= (s_p - s) \cos \theta [2r_1 + \cos \theta (s_p + s)] = (s_p - s) \cos \theta (R + r) \\
 (R^2 + r^2) + \bar{z}^2 &= s^2 + As + B; \quad A = 4R \cos \theta - 2s_p; \quad B = 4r_1 R + s_p^2 \\
 (R^2 + r^2) &= s^2 \cos^2 \theta + Cs + D \quad C = 2r_1 \cos \theta \quad D = r_1^2 + R^2 \\
 (R^2 - r^2) - \bar{z}^2 &= (s_p - s) [2r_1 \cos \theta + \cos^2 \theta (s_p + s) - (s_p - s) \sin^2 \theta] \\
 &= (s_p - s) [(R + r) \cos \theta - (s_p - s) \sin^2 \theta] \\
 (R^2 - r^2) + \bar{z}^2 &= (s_p - s) [2r_1 \cos \theta + \cos^2 \theta (s_p + s) + (s_p - s) \sin^2 \theta] \\
 &= (s_p - s) [(R + r) \cos \theta + (s_p - s) \sin^2 \theta] \\
 \bar{z}^2 &= (s_p - s)^2 \sin^2 \theta \\
 (R - r)^3 &= (s_p - s)^3 \cos^3 \theta
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

En introduisant les fonctions elliptiques, les équations (B.5) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 U_{rr}(P, Q) &= \frac{A}{R.r.C} \left\{ \left[(3 - 4\nu)(R^2 + r^2) + 4(1 - \nu)\bar{z}^2 \right] K(m) \right. \\
 &\quad \left. + \left[-(3 - 4\nu)C^2 - \frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^2} (R^2 + r^2 + \bar{z}^2) \right] E(m) \right\} \\
 U_{rz}(P, Q) &= \frac{A\bar{z}}{R.C} \left\{ K(m) - \frac{r^2 - R^2 + \bar{z}^2}{\bar{r}^2} E(m) \right\} \\
 U_{zr}(P, Q) &= \frac{A\bar{z}}{r.C} \left\{ -K(m) + \frac{R^2 - r^2 + \bar{z}^2}{\bar{r}^2} E(m) \right\} \\
 U_{zz}(P, Q) &= \frac{2A}{C} \left\{ (3 - 4\nu)K(m) + \frac{\bar{z}^2}{\bar{r}^2} E(m) \right\} \\
 A &= \frac{1}{16\pi^2 \mu (1 - \nu)} \\
 C &= \sqrt{(R + r)^2 + \bar{z}^2}
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

En introduisant les différentes dérivées (B.8) en (B.7), les tensions s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\mu} T_{rr}(P, Q) &= T_1 n_r + T_2 n_z \\
 \frac{1}{2\mu} T_{rz}(P, Q) &= T_3 n_z + T_4 n_r \\
 \frac{1}{2\mu} T_{zr}(P, Q) &= T_5 n_r + T_6 n_z \\
 \frac{1}{2\mu} T_{zz}(P, Q) &= T_7 n_z + T_8 n_r
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{A}{Rr^2 C} \left[2\nu M - \frac{3}{2} N + \frac{B.Fz^{-2}}{2DC^2} \right] K(m) \\
 &\quad + \frac{A}{Rr^2 C} \left[\frac{-2\nu}{D} \left(R^2 S + z^{-2} V + r^4 \right) + \frac{3}{D} \left(R^2 F + z^{-2} M \right) - \frac{2B^2 F^{-2}}{D^2 C^2} z \right] E(m) \\
 T_2 &= \frac{Az}{RrCD} \left[D(2\nu - 3) + \frac{B}{C^2} z^{-2} \right] K(m) + \frac{Az}{RrCD} \left[3z^{-2} - B(2\nu - 3) - \frac{4B^2}{DC^2} z^{-2} \right] E(m) \\
 T_3 &= \frac{A}{RCD} \left[-D(1 - 2\nu) + \frac{H}{C^2} z^{-2} \right] K(m) + \frac{A}{RCD} \left[-z^{-2} + H(1 - 2\nu) + \frac{8FR^2}{DC^2} z^{-2} \right] E(m) \\
 T_4 &= T_2 \\
 T_5 &= \frac{Az}{CD} \left[\frac{D}{r^2} + \frac{2}{C^2} z^{-2} \right] K(m) + \frac{Az}{CD} \left[4(1 + \nu) - \frac{B}{r^2} - \frac{8B}{DC^2} z^{-2} \right] E(m) \\
 T_6 &= \frac{A}{rCD} \left[-D(1 - 2\nu) - \frac{F}{C^2} z^{-2} \right] K(m) + \frac{A}{rCD} \left[-3z^{-2} + F(1 - 2\nu) + \frac{4BF}{DC^2} z^{-2} \right] E(m) \\
 T_7 &= \frac{2Az}{CD} \left[-\frac{z}{C^2} \right] K(m) + \frac{2Az}{CD} \left[(1 - 2\nu) + \frac{4B}{DC^2} z^{-2} \right] E(m) \\
 T_8 &= T_6
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Avec les différentes constantes : A, B, C, D, F, H, M, N, S et V définies par :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{16\pi^2 \mu (1 - \nu)} & B &= R^2 + r^2 + \bar{z}^2 \\
 C &= \sqrt{(R + r)^2 + \bar{z}^2} & D &= r^{-2} = (R - r)^2 + \bar{z}^2 \\
 F &= R^2 - r^2 + \bar{z}^2 & H &= r^2 - R^2 + \bar{z}^2 \\
 M &= 2R^2 + r^2 + 2\bar{z}^2 & N &= 2R^2 + 3\bar{z}^2 \\
 S &= 2R^2 - 3r^2 + 4\bar{z}^2 & V &= 3r^2 + 2\bar{z}^2
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

B.3 Décomposition des Noyaux D_{ijk}

$D_{RRR}, D_{RRZ}, D_{RZR}, D_{RZZ}, D_{ZRR}, D_{ZRZ}, D_{ZZR}, D_{ZZZ},$

Données préliminaires :

$$A = \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)\mu}$$

$$\bar{z}^2 = (Z - z)^2$$

$$B = R^2 + r^2 + \bar{z}^2$$

$$C = \sqrt{(R+r)^2 + \bar{z}^2}$$

$$\bar{r}^2 = \sqrt{(R-r)^2 + \bar{z}^2}$$

$$H = r^2 - R^2 + \bar{z}^2$$

$$F = R^2 - r^2 + \bar{z}^2$$

$$Fd = \frac{F}{r} = (R+r) \cos \theta + \bar{r} \sin^2 \theta$$

$$Hd = \frac{H}{r} = -(R+r) \cos \theta + \bar{r} \sin^2 \theta$$

$$M = 2R^2 + r^2 + 2\bar{z}^2$$

$$N = 2R^2 + 3\bar{z}^2$$

$$S = 2R^2 - 3r^2 + 4\bar{z}^2$$

$$V = 3R^2 + 2\bar{z}^2$$

$$m = \frac{2\sqrt{Rr}}{C}$$

$$1 - m^2 = \frac{\bar{r}^2}{C^2}$$

$$W_1 = R^2 S + \bar{z}^2 V + r^{\bar{4}}$$

$$= \bar{z}^2 V + (R^2 - r^2)^2 + R^2(R^2 - r^2) + 4R^2 \bar{z}^2$$

$$W_2 = R^2 F + \bar{z}^2 M$$

$$K(m) = P_1 + P_2 \ln(1 - m^2) = P_1 + P_2 \ln C^2 - 2P_2 \ln \bar{r}$$

$$\frac{\partial K}{\partial m} = \frac{E(m)}{m(1 - m^2)} - \frac{K(m)}{m}$$

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{E(m) - K(m)}{m}$$

$$\frac{\partial m}{\partial R} = \frac{\sqrt{Rr}}{C} \left[\frac{1}{R} - \frac{2(R+r)}{C^2} \right]$$

$$\frac{\partial m}{\partial Z} = \frac{-2\bar{z}\sqrt{Rr}}{C^3}$$

$$\frac{\partial B}{\partial R} = 2R \quad \frac{\partial B}{\partial Z} = 2\bar{z}$$

$$\frac{\partial C}{\partial R} = \frac{R+r}{C} \quad \frac{\partial C}{\partial Z} = \frac{\bar{z}}{C}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial R} = 2(R-r) \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial Z} = 2\bar{z}$$

$$\frac{\partial M}{\partial R} = 4R \quad \frac{\partial M}{\partial Z} = 4\bar{z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial R} = 4R \quad \frac{\partial N}{\partial Z} = 6\bar{z}$$

$$\frac{\partial S}{\partial R} = 4R \quad \frac{\partial S}{\partial Z} = 8\bar{z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = 4\bar{z}$$

$$\frac{\partial K}{\partial R} = \frac{H}{2Rr^{\bar{2}}} E(m) - \frac{H}{2RC^2} K(m)$$

$$\frac{\partial E}{\partial R} = \frac{H}{2RC^2} [E(m) - K(m)]$$

$$\frac{\partial K}{\partial Z} = \frac{\bar{z}}{r} \left[\frac{\bar{r}^2}{C^2} K(m) - E(m) \right]$$

$$\frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\bar{z}}{C^2} [K(m) - E(m)]$$

$$D_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j}$$

$NTij \quad j=1 \rightarrow$ Terme régulier

$j=2 \rightarrow$ Terme à singularité forte $(\frac{1}{r})$

D_{RRR}

$$U_{RR} = \frac{A}{RrC} \left\{ \left[(3-4\nu)B + \bar{z}^2 \right] K(m) - \left[(3-4\nu)C^2 + \bar{z}^2 \frac{B}{r} \right] E(m) \right\}$$

$$U_{RR} = I.K(m) + II.E(m) \quad I = \text{term1} + \text{term2}$$

$$II = \text{term3} + \text{term4}$$

$$D_{RRR} = \frac{\partial U_{RR}}{\partial R} = AK(m) \left[\frac{\partial I}{\partial R} - I \frac{H}{2RC^2} - II \frac{H}{2RC^2} \right] + AE(m) \left[\frac{\partial II}{\partial R} + I \frac{H}{2Rr^2} + II \frac{H}{2RC^2} \right]$$

$$\text{term1} = \frac{(3-4\nu)B}{RrC} \quad \frac{\partial \text{term1}}{\partial R} = \frac{(3-4\nu)}{RrC} \left[2R - B \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right) \right]$$

$$\text{term2} = \frac{\bar{z}^2}{RrC} \quad \frac{\partial \text{term2}}{\partial R} = \frac{-\bar{z}^2}{RrC} \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right)$$

$$\text{term3} = \frac{-(3-4\nu)C}{Rr} \quad \frac{\partial \text{term3}}{\partial R} = \frac{(3-4\nu)}{RrC} \left(\frac{C^2}{R} - R - r \right)$$

$$\text{term4} = \frac{-\bar{z}^2 B}{RrCr^2} \quad \frac{\partial \text{term4}}{\partial R} = \frac{\bar{z}^2}{RrCr^2} \left(\frac{(R+r)B}{C^2} + \frac{2(R-r)B}{r} - 2R + \frac{B}{R} \right)$$

$$NT1 = \frac{\partial I}{\partial R} = \frac{(3-4\nu)}{RrC} \left[2R - B \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right) \right] - \frac{\bar{z}^2}{RrC} \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right)$$

$$NT2 = -I \frac{H}{2RC^2} = -\frac{H}{2R^2rC^3} \left[(3-4\nu)B + \bar{z}^2 \right]$$

$$NT3 = -II \frac{H}{2RC^2} = \frac{H}{2R^2rC^3} \left[(3-4\nu)C^2 + \frac{\bar{z}^2 B}{r} \right] = \frac{H}{2R^2rC^3} \left[(3-4\nu)C^2 + B \sin^2 \theta \right]$$

$$NT4 = \frac{(3-4\nu)}{RrC} \left[\frac{C^2}{R} - R - r \right] + \frac{\sin^2 \theta}{RrC} \left[\frac{(R+r)B}{C^2} - 2R + \frac{B}{R} \right] + \frac{2B \sin^2 \theta \cos \theta}{RrC} \frac{1}{r} = NT41 + NT42$$

$$NT41 = \frac{(3-4\nu)}{RrC} \left[\frac{C^2}{R} - R - r \right] + \frac{\sin^2 \theta}{RrC} \left[\frac{(R+r)B}{C^2} - 2R + \frac{B}{R} \right]$$

$$NT42 = \frac{2B \sin^2 \theta \cos \theta}{RrC} \frac{1}{r}$$

$$NT5 = I \frac{H}{2Rr^2} = \frac{Hd}{2R^2rC} \left[(3-4\nu) \frac{B}{r} + \bar{z} \sin \theta \right] \quad NT51 = \frac{\bar{z}Hd \sin \theta}{2R^2rC}$$

$$NT52 = \frac{(3-4\nu)BHd}{2R^2rC} \frac{1}{r}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$D_{RRR} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT51 + NT6]E(m) \\ - 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln r + A[NT42 + NT52]E(m)$$

DRRZ

$$D_{RRZ} = \frac{\partial U_{RR}}{\partial Z} = AK(m) \left[\frac{\partial I}{\partial Z} + I \frac{\bar{z}}{C^2} + II \frac{\bar{z}}{C^2} \right] + AE(m) \left[\frac{\partial II}{\partial Z} - I \frac{\bar{z}}{r^2} - II \frac{\bar{z}}{C^2} \right]$$

$$\text{term1} = \frac{(3-4\nu)B}{RrC} \quad \frac{\partial \text{term1}}{\partial Z} = \frac{(3-4\nu)\bar{z}}{RrC} \left[2 - \frac{B}{C^2} \right]$$

$$\text{term2} = \frac{\bar{z}^2}{RrC} \quad \frac{\partial \text{term2}}{\partial Z} = \frac{\bar{z}}{RrC} \left(2 - \frac{\bar{z}^2}{C^2} \right)$$

$$\text{term3} = \frac{-(3-4\nu)C}{Rr} \quad \frac{\partial \text{term3}}{\partial R} = \frac{-(3-4\nu)\bar{z}}{RrC}$$

$$\text{term4} = \frac{-\bar{z}^2 B}{RrCr^2} = \frac{-B \sin^2 \theta}{RrC} \quad \frac{\partial \text{term4}}{\partial Z} = \frac{\bar{z}}{RrCr^2} \left(\frac{\bar{z}^2 B}{C^2} + \frac{2\bar{z}^2 B}{r} - 2\bar{z}^2 - 2B \right)$$

$$= \frac{\sin \theta}{RrC} \left(\frac{\bar{z}B \sin \theta}{C^2} - 2 \sin \theta \bar{z} - \frac{2B}{r} \cos^2 \theta \right)$$

$$NT1 = \frac{\partial I}{\partial Z} = \frac{\bar{z}}{RrC} \left[(3-4\nu) \left(2 - \frac{B}{C^2} \right) - \frac{\bar{z}^2}{C^2} + 2 \right]$$

$$NT2 = I \frac{\bar{z}}{C^2} = \frac{\bar{z}}{RrC^3} \left[(3-4\nu)B + \bar{z}^2 \right]$$

$$NT3 = II \frac{\bar{z}}{C^2} = \frac{-\bar{z}}{RrC^3} \left[(3-4\nu)C^2 + \frac{\bar{z}^2 B}{r} \right] = \frac{-\bar{z}}{RrC^3} \left[(3-4\nu)C^2 + B \sin^2 \theta \right]$$

$$NT4 = \frac{\partial II}{\partial Z} = NT41 + NT42 \quad NT41 = \frac{\bar{z}}{RrC} \left[\left(\frac{B}{C^2} - 2 \right) \sin^2 \theta - (3-4\nu) \right]$$

$$NT42 = -\frac{2B \sin \theta \cos^2 \theta}{RrC} \frac{1}{r}$$

$$NT5 = -I \frac{\bar{z}}{r} = NT51 + NT52 \quad NT51 = -\frac{\bar{z} \sin^2 \theta}{RrC}$$

$$NT52 = -\frac{(3-4\nu)B \sin \theta}{RrC} \frac{1}{r}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$D_{RRZ} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT51 + NT6]E(m)$$

$$- 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42 + NT52]E(m)$$

DRZR

$$U_{RZ} = \frac{A\bar{z}}{RC} \left\{ K(m) - \frac{H}{r} E(m) \right\} \quad U_{RZ} = A[III.K(m) + IV.E(m)]$$

$$D_{RZR} = \frac{\partial U_{RZ}}{\partial R} = AK(m) \left[\frac{\partial III}{\partial R} - III \frac{H}{2RC^2} - IV \frac{H}{2RC^2} \right] + AE(m) \left[\frac{\partial VI}{\partial R} + III \frac{H}{2Rr^{-2}} + IV \frac{H}{2RC^2} \right]$$

$$NT1 = \frac{\partial III}{\partial R} = -\frac{\bar{z}}{RC} \left[\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right]$$

$$NT2 = -III \frac{H}{2RC^2} = -\frac{\bar{z}H}{2R^2C^3}$$

$$NT3 = -IV \frac{H}{2RC^2} = \frac{\bar{z}H^2}{2R^2C^3r^{-2}} = \frac{\bar{z}H_d^2}{2R^2C^3}$$

$$NT4 = \frac{\partial IV}{\partial R} = \frac{\bar{z}}{RCr^{-2}} \left[\frac{(R+r)H}{C^2} + \frac{2(R-r)H}{r^{-2}} + \frac{H}{R} + 2R \right]$$

$$= \frac{\sin \theta}{RC} \left[\frac{(R+r)H_d}{C^2} + \frac{2}{r} (R + H_d \cos \theta) + \frac{H_d}{R} \right]$$

$$NT41 = \frac{\sin \theta}{RC} \left[\frac{(R+r)H_d}{C^2} + \frac{H_d}{R} \right]$$

$$NT42 = \frac{2 \sin \theta}{RC} (R + H_d \cos \theta) \frac{1}{r}$$

$$NT5 = \frac{H_d \sin \theta}{2R^2C}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$D_{RZR} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT5 + NT6]E(m)$$

$$- 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42]E(m)$$

DRZZ

$$D_{RZZ} = \frac{\partial U_{RZ}}{\partial Z} = AK(m) \left[\frac{\partial III}{\partial Z} + III \frac{\bar{z}}{C^2} + IV \frac{\bar{z}}{C^2} \right] + AE(m) \left[\frac{\partial IV}{\partial Z} - III \frac{\bar{z}}{r^{-2}} - IV \frac{\bar{z}}{C^2} \right]$$

$$NT1 = \frac{\partial III}{\partial Z} = \frac{1}{RC} \left[1 - \frac{\bar{z}^2}{C^2} \right]$$

$$NT2 = III \frac{\bar{z}}{C^2} = \frac{\bar{z}^2}{RC^3}$$

$$NT3 = IV \frac{\bar{z}}{C^2} = \frac{-\bar{z}^2 H}{RC^3 r^{-2}} = \frac{-H \sin^2 \theta}{RC^3}$$

$$NT4 = \frac{\partial IV}{\partial Z} = NT41 + NT42$$

$$NT41 = \frac{\sin^2 \theta}{RC} \left(\frac{H}{C^2} - 2 \right)$$

$$NT42 = \frac{H_d}{RC} (2 \sin^2 \theta - 1) \frac{1}{r}$$

$$NT5 = -III \frac{\bar{z}}{r^{-2}} = -\frac{\sin^2 \theta}{RC}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$D_{RZZ} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT5 + NT6]E(m)$$

$$- 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42]E(m)$$

DZRR

$$U_{ZR} = \frac{A\bar{z}}{rC} \left\{ -K(m) + \frac{F}{r^2} E(m) \right\} \quad U_{ZR} = A[V.K(m) + VI.E(m)]$$

$$V = -\frac{\bar{z}}{rC} \quad VI = \frac{\bar{z}F}{rC^2}$$

$$D_{ZRR} = \frac{\partial U_{ZR}}{\partial R} = AK(m) \left[\frac{\partial V}{\partial R} - V \frac{H}{2RC^2} - VI \frac{H}{2RC^2} \right] + AE(m) \left[\frac{\partial VI}{\partial R} + V \frac{H}{2Rr^2} + VI \frac{H}{2RC^2} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{(R+r)\bar{z}}{rC^3} \quad \frac{\partial VI}{\partial R} = -\frac{\bar{z}}{rC^2} \left[\frac{(R+r)F}{C^2} + \frac{2(R-r)F}{r^2} - 2R \right]$$

$$NT1 = \frac{\partial V}{\partial R} = \frac{(R+r)\bar{z}}{rC^3} \quad NT2 = -V \frac{H}{2RC^2} = \frac{\bar{z}H}{2RrC^3}$$

$$NT3 = -VI \frac{H}{2RC^2} = -\frac{\bar{z}HF}{2RrC^3 r^2} = -\frac{H_d F \sin \theta}{2RrC^3}$$

$$NT4 = \frac{\partial VI}{\partial R} = NT41 + NT42 \quad NT41 = \frac{-(R+r)F_d \sin \theta}{rC^3} \quad NT42 = \frac{2 \sin \theta}{rC} (R - F_d \cos \theta) \frac{1}{r}$$

$$NT5 = -\frac{H_d \sin \theta}{2RrC} \quad NT6 = -NT3 = \frac{H_d F \sin \theta}{2RrC^3}$$

$$D_{ZRR} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT5 + NT6]E(m) \\ - 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42]E(m)$$

DZRZ

$$D_{ZRZ} = \frac{\partial U_{ZR}}{\partial Z} = AK(m) \left[\frac{\partial V}{\partial Z} + V \frac{\bar{z}}{C^2} + VI \frac{\bar{z}}{C^2} \right] + AE(m) \left[\frac{\partial VI}{\partial Z} - V \frac{\bar{z}}{r^2} - VI \frac{\bar{z}}{C^2} \right]$$

$$NT1 = \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{1}{rC} \left[\frac{\bar{z}^2}{C^2} - 1 \right] \quad NT2 = V \frac{\bar{z}}{C^2} = -\frac{\bar{z}^2}{rC^3}$$

$$NT3 = VI \frac{\bar{z}}{C^2} = \frac{\bar{z}^2 F}{rC^3 r^2} = \frac{F \sin^2 \theta}{rC^3}$$

$$NT4 = \frac{\partial VI}{\partial Z} = NT41 + NT42, \quad NT41 = \frac{\sin^2 \theta}{rC} \left(2 - \frac{F}{C^2} \right), \quad NT42 = \frac{F_d}{rC} (1 - 2 \sin^2 \theta) \frac{1}{r}$$

$$NT5 = -V \frac{\bar{z}}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{rC} \quad NT6 = -NT3$$

$$D_{ZRZ} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT5 + NT6]E(m) \\ - 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42]E(m)$$

D_{ZZR}

$$U_{ZZ} = \frac{2A}{C} \left\{ (3-4\nu)K(m) + \frac{\bar{z}^2}{r} E(m) \right\} \quad U_{ZZ} = 2A[VII.K(m) + VIII.E(m)]$$

$$VII = \frac{(3-4\nu)}{C} \quad VIII = \frac{\bar{z}^2}{Cr^2} = \frac{\sin^2 \theta}{C} \quad D_{ZZR} = \frac{\partial U_{ZZ}}{\partial R}$$

$$D_{ZZR} = 2AK(m) \left[\frac{\partial VII}{\partial R} - VII \frac{H}{2RC^2} - VIII \frac{H}{2RC^2} \right] + 2AE(m) \left[\frac{\partial VIII}{\partial R} + VII \frac{H}{2Rr^2} + VIII \frac{H}{2RC^2} \right]$$

$$\frac{\partial VII}{\partial R} = -\frac{(R+r)(3-4\nu)}{C^3}, \quad \frac{\partial VIII}{\partial R} = -\frac{\bar{z}^2}{Cr^2} \left[\frac{(R+r)}{C^2} + \frac{2(R-r)}{r^2} \right] = -\frac{\sin^2 \theta}{C} \left[\frac{(R+r)}{C^2} + \frac{2 \cos \theta}{r} \right]$$

$$NT1 = \frac{\partial VII}{\partial R} = -\frac{(R+r)(3-4\nu)}{C^3} \quad NT2 = -VII \frac{H}{2RC^2} = -\frac{H(3-4\nu)}{2RC^3}$$

$$NT3 = -VIII \frac{H}{2RC^2} = -\frac{H \sin^2 \theta}{2RC^3}$$

$$NT41 = -\frac{\sin^2 \theta}{C^3} (R+r) \quad NT42 = -\frac{2 \sin^2 \theta \cos \theta}{C} \frac{1}{r}$$

$$NT5 = VII \frac{H}{2Rr^2} \quad NT51 = 0 \quad NT52 = \frac{(3-4\nu)H_d}{2RC} \frac{1}{r}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$D_{ZZR} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT6]E(m) \\ - 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42 + NT52]E(m)$$

D_{ZZZ}

$$D_{ZZZ} = \frac{\partial U_{ZZ}}{\partial Z} = 2AK(m) \left[\frac{\partial VII}{\partial Z} + VII \frac{\bar{z}}{C^2} + VIII \frac{\bar{z}}{C^2} \right] + 2AE(m) \left[\frac{\partial VIII}{\partial Z} - VII \frac{\bar{z}}{r^2} - VIII \frac{\bar{z}}{C^2} \right]$$

$$NT1 = \frac{\partial VII}{\partial Z} = -\frac{(3-4\nu)\bar{z}}{C^3} \quad NT2 = VII \frac{\bar{z}}{C^2} = \frac{\bar{z}(3-4\nu)}{C^3} \quad NT3 = VIII \frac{\bar{z}}{C^2} = \frac{\bar{z}^3}{C^3 r^2} = \frac{\bar{z} \sin^2 \theta}{C^3}$$

$$NT4 = \frac{\partial II}{\partial Z} = NT41 + NT42 \quad NT41 = -\frac{\bar{z} \sin^2 \theta}{C^3} \quad NT42 = \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta}{C} \frac{1}{r}$$

$$NT5 = -VII \frac{\bar{z}}{r} = NT51 + NT52 \quad NT51 = 0 \quad NT52 = -\frac{(3-4\nu) \sin \theta}{C} \frac{1}{r}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$D_{ZZZ} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT6]E(m) \\ - 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42 + NT52]E(m)$$

B.4 Décomposition des Noyaux S_{ijk}

$S_{RRR}, S_{RRZ}, S_{RZR}, S_{RZZ}, S_{ZRR}, S_{ZRZ}, S_{ZZR}, S_{ZZZ}$,

Données préliminaires :

$$A = \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)\mu}$$

$$\bar{z}^2 = (Z - z)^2$$

$$B = R^2 + r^2 + \bar{z}^2$$

$$C = \sqrt{(R+r)^2 + \bar{z}^2}$$

$$D = 2R^2 + 3r^2$$

$$\bar{r}^2 = \sqrt{(R-r)^2 + \bar{z}^2}$$

$$H = r^2 - R^2 + \bar{z}^2$$

$$F = R^2 - r^2 + \bar{z}^2$$

$$Fd = \frac{F}{r} = (R+r)\cos\theta + \bar{z}\sin\theta$$

$$Hd = \frac{H}{r} = -(R+r)\cos\theta + \bar{z}\sin\theta$$

$$M = 2R^2 + r^2 + 2\bar{z}^2$$

$$N = 2R^2 + 3\bar{z}^2$$

$$S = 2R^2 - 3r^2 + 4\bar{z}^2$$

$$V = 3r^2 + 2\bar{z}^2$$

$$m = \frac{2\sqrt{Rr}}{C}$$

$$1 - m^2 = \frac{\bar{r}^2}{C^2}$$

$$W_1 = R^2S + \bar{z}^2V + r^{-4}$$

$$= \bar{z}^2V + (R^2 - r^2)^2 + R^2(R^2 - r^2) + 4R^2\bar{z}^2$$

$$W_2 = R^2F + \bar{z}^2M$$

$$K(m) = P_1 + P_2 \ln(1 - m^2)$$

$$= P_1 + P_2 \ln C^2 - 2P_2 \ln \bar{r}$$

$$\frac{\partial m}{\partial R} = \frac{\sqrt{Rr}}{C} \left[\frac{1}{R} - \frac{2(R+r)}{C^2} \right] \quad \frac{\partial m}{\partial Z} = \frac{-2\bar{z}\sqrt{Rr}}{C^3}$$

$$\frac{\partial K}{\partial m} = \frac{E(m)}{m(1-m^2)} - \frac{K(m)}{m} \quad \frac{\partial E}{\partial m} = \frac{E(m) - K(m)}{m}$$

$$\frac{\partial K}{\partial R} = \frac{H}{2Rr^{-2}} E(m) - \frac{H}{2RC^2} K(m)$$

$$\frac{\partial E}{\partial R} = \frac{H}{2RC^2} [E(m) - K(m)]$$

$$\frac{\partial B}{\partial R} = 2R \quad \frac{\partial B}{\partial Z} = 2\bar{z}$$

$$\frac{\partial C}{\partial R} = \frac{R+r}{C} \quad \frac{\partial C}{\partial Z} = \frac{\bar{z}}{C}$$

$$\frac{\partial N}{\partial R} = 4R \quad \frac{\partial N}{\partial Z} = 6\bar{z}$$

$$\frac{\partial S}{\partial R} = 4R \quad \frac{\partial S}{\partial Z} = 8\bar{z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = 4\bar{z}$$

$$\frac{\partial K}{\partial Z} = \frac{\bar{z}}{r^{-2}} \left[\frac{\bar{r}^2}{C^2} K(m) - E(m) \right]$$

$$\frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\bar{z}}{C^2} [K(m) - E(m)]$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial R} = \frac{(R-r)}{\bar{r}} \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial Z} = \frac{\bar{z}}{\bar{r}}$$

$$\frac{\partial M}{\partial R} = 4R \quad \frac{\partial M}{\partial Z} = 4\bar{z}$$

$$S_{ijk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

$NT_{ij} \quad j=1 \rightarrow$ Terme régulier

$j=2 \rightarrow$ Terme à singularité forte $O\left(\frac{1}{r}\right)$

$j=3 \rightarrow$ Terme hyper-singulier $O\left(\frac{1}{r^{-2}}\right)$

S_{RRR}

$$S_{RRR} = \frac{\partial T_1}{\partial R} n_r + \frac{\partial T_2}{\partial R} n_z$$

Calcul de $\frac{\partial T_1}{\partial R}$:

$$T_1 = \frac{A}{Rr^2C} \left[2\nu M - \frac{3}{2} N + \frac{B.F\bar{z}^2}{2r^2 C^2} \right] K(m) \\ + \frac{A}{Rr^2C} \left[\frac{-2\nu}{r} (R^2 S + \bar{z}^2 V + r^4) + \frac{3}{r} (R^2 F + \bar{z}^2 M) - \frac{2B^2 F}{r^4 C^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

$$T_1 = \underbrace{(\text{term1} + \text{term2} + \text{term3})}_I K(m) + \underbrace{(\text{term4} + \text{term5} + \text{term6})}_II E(m)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial R} = AK(m) \left[\frac{\partial I}{\partial R} - I \frac{H}{2RC^2} - II \frac{H}{2RC^2} \right] + AE(m) \left[\frac{\partial II}{\partial R} + I \frac{H}{2Rr^2} + II \frac{H}{2RC^2} \right]$$

$$\text{term1} = \frac{2\nu M}{Rr^2C} \quad \frac{\partial \text{term1}}{\partial R} = \frac{2\nu}{Rr^2C} \left[4R - M \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right) \right]$$

$$\text{term2} = \frac{-3N}{2Rr^2C} \quad \frac{\partial \text{term2}}{\partial R} = \frac{-3}{2Rr^2C} \left[4R - N \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right) \right]$$

$$\text{term3} = \frac{BF\bar{z}^2}{2Rr^2C^3r^2} = \frac{BF \sin^2 \theta}{2Rr^2C^3}$$

$$\frac{\partial \text{term3}}{\partial R} = \frac{\sin^2 \theta}{Rr^2C^3} \left(R(F+B) - \frac{3(R+r)BF}{2C^2} - \frac{B}{2R} (F + 2RF_d \cos \theta) \right)$$

$$\text{term4} = \frac{-\bar{z}^2 B}{Rr^2C}$$

$$= \frac{-2\nu}{Rr^2C} \left\{ D\bar{z}^2 + 2\bar{z}^4 + (R^2 - r^2)^2 + R^2(R^2 - r^2) \right\}$$

$$= \frac{-2\nu}{Rr^2C} \left\{ D \sin^2 \theta + 2\bar{z}^2 \sin^2 \theta + (R+r)^2 \cos^2 \theta + \frac{R^2(R+r) \cos \theta}{r} \right\}$$

$$\frac{\partial \text{term4}}{\partial R} = \frac{-2\nu}{r^2} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{D(R+r)\bar{z}^2}{RC^3r^2} - \frac{2D(R-r)\bar{z}^2}{RCr^4} + \frac{8\bar{z}^2}{Cr^2} - \frac{D\bar{z}^2}{R^2r^2C} - \frac{2(R+r)\bar{z}^4}{Rr^2C^3} - \frac{4(R-r)\bar{z}^4}{RCr^4} \\ \frac{2\bar{z}^4}{R^2Cr^2} - \frac{(R+r)(R^2-r^2)^2}{RC^3r^2} - \frac{(R-r)(R^2-r^2)^2}{RCr^4} + \frac{4(R^2-r^2)}{Cr^2} \\ -\frac{(R^2-r^2)^2}{R^2Cr^2} - \frac{R(R+r)(R^2-r^2)}{C^3r^2} - \frac{2R(R-r)(R^2-r^2)}{Cr^4} + \frac{2R^2}{Cr^2} + \frac{R^2-r^2}{Cr^2} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial \text{term4}}{\partial R} = \frac{2\nu}{r^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{D(R+r)\sin^2 \theta}{RC^3} + \frac{2D\sin^2 \theta \cos \theta}{RCr} - \frac{8\sin^2 \theta}{C} + \frac{D\sin^2 \theta}{R^2C} \\ & + \frac{2(R+r)\bar{z}^2 \sin^2 \theta}{RC^3} + \frac{4(R-r)\sin^4 \theta}{RC} \\ & + \frac{2\bar{z}^2 \sin^2 \theta}{R^2C} + \frac{(R+r)^3 \cos^2 \theta}{RC^3} + \frac{2(R+r)^2 \cos^3 \theta}{RCr} - \frac{4(R+r)\cos \theta}{Cr} \\ & + \frac{(R+r)^2 \cos^2 \theta}{R^2C} + \frac{R(R+r)^2 \cos \theta}{C^3 r} + \frac{2R(R+r)\cos^2 \theta}{Cr^2} - \frac{2R^2}{Cr^2} - \frac{(R+r)\cos \theta}{Cr} \end{aligned} \right\}$$

Nous décomposons ce dernier terme pour faciliter son intégration :

$$\frac{\partial \text{term4}}{\partial R} = D\text{term41} + D\text{term42} + D\text{term43}$$

$$D\text{term41} = \frac{2\nu}{Rr^2C} \left\{ \begin{aligned} & \frac{D(R+r)\sin^2 \theta}{C^2} - 8\sin^2 \theta + \frac{D\sin^2 \theta}{R} + \frac{2(R+r)\bar{z}^2 \sin^2 \theta}{C^2} + 4(R-r)\sin^4 \theta \\ & + \frac{2\bar{z}^2 \sin^2 \theta}{R} + \frac{(R+r)^3 \cos^2 \theta}{C^3} + \frac{(R+r)^2 \cos^2 \theta}{R} \end{aligned} \right\}$$

$$D\text{term42} = \frac{2\nu}{r^2C} \left\{ \frac{2D\sin^2 \theta \cos \theta}{R} + \frac{2(R+r)^2 \cos^3 \theta}{R} - 5(R+r)\cos \theta + \frac{R(R+r)^2 \cos \theta}{C^2} \right\} \frac{1}{r}$$

$$D\text{term43} = \frac{4R\nu}{r^2C} \left\{ (R+r)\cos^2 \theta - R \right\} \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{term5} &= \frac{3}{Rr^2Cr^2} (R^2F + \bar{z}^2M) = \frac{3}{Rr^2Cr^2} (R^2F + \bar{z}^2(2R^2 + r^2) + 2\bar{z}^4) \\ &= \frac{3}{Rr^2C} \left(\frac{R^2F_d}{r} + M \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \text{term5}}{\partial R} = D\text{term51} + D\text{term52} + D\text{term53}$$

$$D\text{term51} = \frac{3\sin^2 \theta}{Rr^2C} \left\{ 4R - 4(R-r)\sin^2 \theta - M \left(\frac{(R+r)}{C^2} + \frac{1}{R} \right) \right\}$$

$$D\text{term52} = \frac{3}{Rr^2C} \left\{ RF_d - \frac{R^2(R+r)F_d}{C^2} - 2(2R^2 + r^2)\sin^2 \theta \cos \theta \right\} \frac{1}{r}$$

$$D\text{term53} = \frac{6R}{r^2C} \left\{ R - F_d \cos \theta \right\} \frac{1}{r}$$

$$\text{term6} = \frac{-2B^2F\bar{z}^2}{Rr^2C^3r^4} = \frac{-2B^2F_d \sin^2 \theta}{Rr^2C^3r}$$

$$\frac{\partial \text{term6}}{\partial R} = D\text{term62} + D\text{term63}$$

$$D\text{term62} = \frac{2BF_d \sin^2 \theta}{RC^3 r^2} \left\{ \frac{3(R+r)B}{C^2} + \frac{B}{R} - 4R \right\} \frac{1}{r}$$

$$D\text{term63} = \frac{4B^2 \sin^2 \theta}{RC^3 r^2} \left\{ 2F_d \cos \theta - R \right\} \frac{1}{r}$$

$$NT1 = \frac{1}{Rr^2 C} \left\{ 8R\nu - 2\nu M \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right) - 6R + \frac{3N}{2} \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right) \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 \theta}{C^2} \left[R(F+B) - \frac{3(R+r)BF}{2C^2} - \frac{B}{2R} (F + 2RF_d \cos \theta) \right] \right\}$$

$$NT2 = \frac{-H}{2R^2 r^2 C^3} \left\{ 2\nu M - \frac{3N}{2} + \frac{BF \sin^2 \theta}{2C^2} \right\}$$

$$NT3 = \frac{H}{2R^2 r^2 C^3} \left\{ 2\nu \left[(V + 4R^2)H \sin^2 \theta + (R+r)^2 H \cos^2 \theta + R^2(R+r)H_d \cos \theta \right] \right. \\ \left. - 3R^2 F_d H_d - 3MH \sin^2 \theta + \frac{3BF_d H_d \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT4 = NT41 + NT42 + NT43$$

$$NT41 = D\text{term41} + D\text{term51}$$

$$NT42 = D\text{term42} + D\text{term52} + D\text{term62}$$

$$NT43 = D\text{term43} + D\text{term53} + D\text{term63}$$

$$NT5 = I \frac{H}{2Rr} = NT51 + NT52$$

$$NT51 = \frac{BF_d H_d \sin^2 \theta}{2R^2 r^2 C^3} \quad NT52 = \frac{H_d}{2R^2 r^2 C} \left(2\nu M - \frac{3N}{2} \right) \frac{1}{r}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial R} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT51 + NT6]E(m)$$

$$- 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42 + NT52]E(m) + A[NT43]E(m)$$

Calcul de $\frac{\partial T_2}{\partial R}$:

$$T_2 = \frac{A\bar{z}}{RrCr} \left[r^2 (2\nu - 3) + \frac{B}{C^2} \bar{z}^2 \right] K(m) + \frac{A\bar{z}}{RrCr} \left[3\bar{z}^2 - B(2\nu - 3) - \frac{4B^2}{r C^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

$$T_2 = \underbrace{(\text{term7} + \text{term8})}_{III} K(m) + \underbrace{(\text{term9} + \text{term10} + \text{term11})}_{IV} E(m)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial R} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial III}{\partial R}}_{NT1} - \underbrace{III \frac{H}{2RC^2}}_{NT2} - \underbrace{VI \frac{H}{2RC^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial IV}{\partial R}}_{NT4} + \underbrace{III \frac{H}{2Rr}}_{NT5} + \underbrace{VI \frac{H}{2RC^2}}_{NT6} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{term7} &= \frac{-(3-2\nu)\bar{z}}{RrC} & \frac{\partial \text{term7}}{\partial R} &= \frac{(3-2\nu)\bar{z}}{RrC} \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right) \\
 \text{term8} &= \frac{B\bar{z}^3}{RrC^3r^{-2}} = \frac{B\bar{z} \sin^2 \theta}{RrC^3} & \frac{\partial \text{term8}}{\partial R} &= \frac{\bar{z}^3}{RrC^3r^{-2}} \left[2R - \frac{B}{R} - \frac{2(R-r)B}{r^2} - \frac{3(R+r)B}{C^2} \right] \\
 & & &= \frac{\sin^2 \theta}{RrC^3} \left[2R\bar{z} - \frac{B\bar{z}}{R} - 2\sin \theta \cos \theta B - \frac{3(R+r)B\bar{z}}{C^2} \right] \\
 \text{term9} &= \frac{3\bar{z}^3}{RrCr^{-2}} = \frac{3\bar{z} \sin^2 \theta}{RrC} & \frac{\partial \text{term9}}{\partial R} &= \frac{-3\bar{z}^3}{RrCr^{-2}} \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{2(R-r)}{r^2} + \frac{1}{R} \right) \\
 & & &= \frac{-3\sin^2 \theta}{RrC} \left(\frac{(R+r)\bar{z}}{C^2} + 2\sin \theta \cos \theta + \frac{\bar{z}}{R} \right) \\
 \text{term10} &= \frac{(3-2\nu)B\bar{z}}{RrCr^{-2}} = \frac{(3-2\nu)B \sin \theta}{RrCr} \\
 \frac{\partial \text{term10}}{\partial R} &= \frac{(3-2\nu)\bar{z}}{RrCr^{-2}} \left(-\frac{(R+r)B}{C^2} - \frac{2(R-r)B}{r^2} - \frac{B}{R} + 2R \right) \\
 &= \frac{(3-2\nu) \sin \theta}{RrC} \left(-\frac{(R+r)B}{C^2r} - \frac{2\cos \theta B}{r^2} - \frac{B}{Rr} + \frac{2R}{r} \right) \\
 \text{term11} &= \frac{-4B^2\bar{z}^3}{RrC^3r^{-4}} = \frac{-4B^2 \sin^3 \theta}{RrC^3r} & \frac{\partial \text{term11}}{\partial R} &= \frac{4B\bar{z}^3}{RrC^3r^{-4}} \left(\frac{3(R+r)B}{C^2} + \frac{4(R-r)B}{r^2} + \frac{B}{R} - 4R \right) \\
 & & &= \frac{4B \sin^3 \theta}{RrC^3} \left(\frac{3(R+r)B}{C^2r} + \frac{4B \cos \theta}{r^2} + \frac{B}{Rr} - \frac{4R}{r} \right) \\
 NT1 &= \frac{1}{RrC^3} \left\{ \begin{aligned} &\bar{z}(R+r)(3-2\nu) + (3-2\nu)C^2 \frac{\bar{z}}{R} + 2R\bar{z} \sin^2 \theta - B \sin^2 \theta \frac{\bar{z}}{R} \\ &-2B \sin^3 \theta \cos \theta - 3(R+r)B \sin^2 \theta \frac{\bar{z}}{C^2} \end{aligned} \right\} \\
 NT2 &= \frac{H\bar{z}}{2R^2rC^3} \left\{ (3-2\nu) - \frac{B}{C^2} \sin^2 \theta \right\} \\
 NT3 &= \frac{-1}{2R^2rC^3} \left\{ 3\bar{z}H \sin^2 \theta + B(3-2\nu)H_d \sin \theta - 4H_d \sin^3 \theta \frac{B^2}{C^2} \right\} \\
 NT4 &= NT41 + NT42 + NT43 \\
 NT41 &= \frac{-3\sin^2 \theta}{RrC} \left\{ \frac{(R+r)\bar{z}}{C^2} - 2\sin \theta \cos \theta + \frac{\bar{z}}{R} \right\} \\
 NT42 &= \frac{1}{RrC} \left\{ \begin{aligned} &2(3-2\nu)R \sin \theta - (3-2\nu)(R+r) \sin \theta \frac{B}{C^2} - (3-2\nu) \sin \theta \frac{B}{R} \\ &+ 12(R+r) \sin^3 \theta \frac{B^2}{C^4} + \frac{4B^2 \sin^3 \theta}{RC^2} - 16R \sin^3 \theta \frac{B}{C^2} \end{aligned} \right\} \frac{1}{r} \\
 NT43 &= \frac{2B \sin \theta \cos \theta}{RrC} \left\{ \frac{8B \sin^2 \theta}{C^2} - (3-2\nu) \right\} \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

$$NT5 = \frac{H_d \sin \theta}{2R^2 r C} \left\{ \frac{B \sin^2 \theta}{C^2} - (3 - 2\nu) \right\} \quad NT6 = -NT3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial R} &= A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT5 + NT6]E(m) \\ &\quad - 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42]E(m) + A[NT43]E(m) \end{aligned}$$

Fin du calcul pour S_{RRR} .

S_{RRZ}

$$S_{RRZ} = \frac{\partial T_1}{\partial Z} n_r + \frac{\partial T_2}{\partial Z} n_z$$

Calcul de $\frac{\partial T_1}{\partial Z}$:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{A}{Rr^2 C} \left[2\nu M - \frac{3}{2} N + \frac{B.F\bar{z}^2}{2r C^2} \right] K(m) \\ &\quad + \frac{A}{Rr^2 C} \left[\frac{-2\nu}{r} (R^2 S + \bar{z}^2 V + r^4) + \frac{3}{r} (R^2 F + \bar{z}^2 M) - \frac{2B^2 F}{r C^2} \bar{z}^2 \right] E(m) \end{aligned}$$

$$T_1 = \underbrace{(term1 + term2 + term3)}_I K(m) + \underbrace{(term4 + term5 + term6)}_{II} E(m)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial Z} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial I}{\partial Z}}_{NT1} + I \underbrace{\frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT2} + II \underbrace{\frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial II}{\partial Z}}_{NT4} - I \underbrace{\frac{\bar{z}}{r}}_{NT5} - II \underbrace{\frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT6} \right]$$

$$term1 = \frac{2\nu M}{Rr^2 C} \quad \frac{\partial term1}{\partial Z} = \frac{2\nu \bar{z}}{Rr^2 C} \left[4 - \frac{M}{C^2} \right]$$

$$term2 = \frac{-3N}{2Rr^2 C} \quad \frac{\partial term2}{\partial Z} = \frac{-3\bar{z}}{2Rr^2 C} \left[6 - \frac{N}{C^2} \right]$$

$$term3 = \frac{BF\bar{z}^2}{2Rr^2 C^3 r} = \frac{BF \sin^2 \theta}{2Rr^2 C^3}$$

$$\frac{\partial term3}{\partial Z} = \frac{\sin \theta}{Rr^2 C^3} \left((B + F)\bar{z} \sin \theta + BF_d - \frac{3\bar{z}BF \sin \theta}{2C^2} - BF_d \sin^2 \theta \right)$$

$$\begin{aligned} term4 &= \frac{-\bar{z}^2 B}{RrCr} \\ &= \frac{-2\nu}{Rr^2 Cr} \left\{ D\bar{z}^2 + 2\bar{z}^4 + (R^2 - r^2)^2 + R^2(R^2 - r^2) \right\} \\ &= \frac{-2\nu}{Rr^2 C} \left\{ D \sin^2 \theta + 2\bar{z}^2 \sin^2 \theta + (R+r)^2 \cos^2 \theta + \frac{R^2(R+r)}{r} \cos \theta \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \text{term4}}{\partial Z} = D\text{term41} + D\text{term42} + D\text{term43}$$

$$D\text{term41} = \frac{4\nu}{Rr^2C} \left\{ 2\bar{z} \sin^4 \theta - 4\bar{z} \sin^2 \theta + \frac{1}{2C^2} (\bar{z}(R+r)^2 \cos^2 \theta + R^2(R+r) \sin \theta \cos \theta + D\bar{z} \sin^2 \theta + 2\bar{z}^3 \sin^2 \theta) \right\}$$

$$D\text{term42} = \frac{4\nu \sin \theta}{Rr^2C} \left\{ (R+r)^2 - D \right\} \frac{1}{r}$$

$$D\text{term43} = \frac{4\nu R(R+r) \sin \theta \cos \theta}{r^2C} \frac{1}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \text{term5} &= \frac{3}{Rr^2C\bar{r}^2} (R^2F + \bar{z}^2M) = \frac{3}{Rr^2C\bar{r}^2} (R^2F + \bar{z}^2(2R^2 + r^2) + 2\bar{z}^4) \\ &= \frac{3}{Rr^2C} \left(\frac{R^2F_d}{r} + M \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \text{term5}}{\partial Z} = D\text{term51} + D\text{term52} + D\text{term53}$$

$$D\text{term51} = \frac{6 \sin \theta}{Rr^2C} \left\{ 2\bar{z} \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) - \frac{R^2F_d}{2C^2} - \frac{M\bar{z} \sin \theta}{2C^2} \right\}$$

$$D\text{term52} = \frac{6 \sin \theta}{Rr^2C} \left\{ R^2 + (2R^2 + r^2) \cos^2 \theta \right\} \frac{1}{r}$$

$$D\text{term53} = \frac{-6RF_d \sin \theta}{r^2C} \frac{1}{r^2}$$

$$\text{term6} = \frac{-2B^2F\bar{z}^2}{Rr^2C^3\bar{r}^4} = \frac{-2B^2F_d \sin^2 \theta}{Rr^2C^3\bar{r}}$$

$$\frac{\partial \text{term6}}{\partial Z} = D\text{term61} + D\text{term62} + D\text{term63}$$

$$D\text{term61} = \frac{4BF_d \sin^3 \theta}{Rr^2C^3} \left\{ \frac{3B}{2C^2} - 2 \right\}$$

$$D\text{term62} = \frac{-4B^2 \sin^3 \theta}{Rr^2C^3} \frac{1}{r}$$

$$D\text{term63} = \frac{4B^2F_d \sin \theta}{Rr^2C^3} \left\{ 2 \sin^2 \theta - 1 \right\} \frac{1}{r}$$

$$NT1 = \frac{\partial \text{term1}}{\partial Z} + \frac{\partial \text{term2}}{\partial Z} + \frac{\partial \text{term3}}{\partial Z}$$

$$NT2 = \frac{\bar{z}}{Rr^2C^3} \left\{ 2\nu M - \frac{3N}{2} + \frac{BF \sin^2 \theta}{2C^2} \right\}$$

$$NT3 = \frac{-2\nu}{Rr^2C^3} \left[D\bar{z} \sin^2 \theta + 2\bar{z}^3 \sin^2 \theta + \bar{z}(R+r)^2 \cos^2 \theta + R^2(R+r) \sin \theta \cos \theta \right] \\ + \frac{3 \sin \theta}{Rr^2C^3} \left[R^2F_d + \bar{z}M \sin \theta \right] - \frac{2B^2F_d \sin^3 \theta}{Rr^2C^5}$$

$$NT4 = NT41 + NT42 + NT43$$

$$NT41 = Dterm41 + Dterm51 + Dterm61$$

$$NT42 = Dterm42 + Dterm52 + Dterm62$$

$$NT43 = Dterm43 + Dterm53 + Dterm63$$

$$NT5 = -I \frac{\bar{z}}{r} = NT51 + NT52$$

$$NT51 = \frac{-BF_d \sin^3 \theta}{2Rr^2C^3} \quad NT52 = \frac{\sin \theta}{Rr^2C} \left(\frac{3N}{2} - 2\nu M \right) \frac{1}{r}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial Z} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT51 + NT6]E(m)$$

$$-2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42 + NT52]E(m) + A[NT43]E(m)$$

Calcul de $\frac{\partial T_2}{\partial Z}$:

$$T_2 = \frac{A\bar{z}}{RrCr} \left[r^{-2} (2\nu - 3) + \frac{B}{C^2} \bar{z}^2 \right] K(m) + \frac{A\bar{z}}{RrCr} \left[3\bar{z}^2 - B(2\nu - 3) - \frac{4B^2}{rC^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

$$T_2 = \underbrace{(term7 + term8)}_{III} K(m) + \underbrace{(term9 + term10 + term11)}_{IV} E(m)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial Z} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial III}{\partial Z}}_{NT1} + III \underbrace{\frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT2} + IV \underbrace{\frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial IV}{\partial Z}}_{NT4} - III \underbrace{\frac{\bar{z}}{r}}_{NT5} - IV \underbrace{\frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT6} \right]$$

$$term7 = \frac{-(3-2\nu)\bar{z}}{RrC} \quad \frac{\partial term7}{\partial Z} = \frac{(3-2\nu)}{RrC} \left(\frac{\bar{z}^2}{C^2} - 1 \right)$$

$$term8 = \frac{B\bar{z}^3}{RrC^3r} = \frac{B\bar{z} \sin^2 \theta}{RrC^3} \quad \frac{\partial term8}{\partial Z} = \frac{\sin^2 \theta}{RrC^3} \left[3B + 2\bar{z}^2 - \frac{3\bar{z}^2 B}{C^2} - 2B \sin^2 \theta \right]$$

$$term9 = \frac{3\bar{z}^3}{RrCr} = \frac{3\bar{z} \sin^2 \theta}{RrC} \quad \frac{\partial term9}{\partial Z} = \frac{3 \sin^2 \theta}{RrC} \left(3 - 2 \sin^2 \theta - \frac{\bar{z}^2}{C^2} \right)$$

$$term10 = \frac{(3-2\nu)B \sin \theta}{RrC\bar{r}} \quad \frac{\partial term10}{\partial Z} = \frac{(3-2\nu)}{RrC} \left(2 \sin^2 \theta - \frac{B \sin^2 \theta}{C^2} + \frac{B}{\bar{r}^2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \right)$$

$$\frac{\partial term10}{\partial Z} = Dterm101 + Dterm103$$

$$Dterm101 = \frac{(3-2\nu) \sin^2 \theta}{RrC} \left(2 - \frac{B}{C^2} \right)$$

$$Dterm103 = \frac{(3-2\nu)B}{RrC} (1 - 2 \sin^2 \theta) \frac{1}{\bar{r}^2}$$

$$term11 = \frac{-4B^2 \sin^3 \theta}{RrC^3 \bar{r}} \quad \frac{\partial term11}{\partial Z} = \frac{-4B \sin^2 \theta}{RrC^3} \left(4 \sin^2 \theta + \frac{B}{\bar{r}^2} (3 - 4 \sin^2 \theta) - \frac{3B \sin^2 \theta}{C^2} \right)$$

$$\frac{\partial term11}{\partial Z} = Dterm111 + Dterm113$$

$$Dterm111 = \frac{4B \sin^4 \theta}{RrC^3} \left(\frac{3B}{C^2} - 4 \right)$$

$$Dterm113 = \frac{4B^2 \sin^2 \theta}{RrC^3} (4 \sin^2 \theta - 3) \frac{1}{\bar{r}^2}$$

$$NT1 = \frac{1}{RrC^3} \left\{ (3-2\nu)(\bar{z}^2 - C^2) - \frac{3\bar{z}^2 B \sin^2 \theta}{C^2} - 2B \sin^4 \theta + 2\bar{z}^2 \sin^2 \theta + 3B \sin^2 \theta \right\}$$

$$NT2 = \frac{\bar{z}^2}{RrC^3} \left\{ \frac{B \sin^2 \theta}{C^2} - (3-2\nu) \right\}$$

$$NT3 = \frac{\sin^2 \theta}{RrC^3} \left\{ 3\bar{z}^2 + B(3-2\nu) - \frac{4B^2 \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT4 = NT41 + NT42 + NT43$$

$$NT41 = \frac{\partial term9}{\partial Z} + Dterm101 + Dterm111$$

$$NT43 = Dterm103 + Dterm113$$

$$NT5 = -III \frac{\bar{z}}{\bar{r}^2} = \frac{\sin^2 \theta}{RrC} \left((3-2\nu) - \frac{B \sin^2 \theta}{C^2} \right)$$

$$NT6 = -NT3$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial Z} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT5 + NT6]E(m)$$

$$-2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT43]E(m)$$

SRZR

$$S_{RZR} = \frac{\partial T_3}{\partial R} n_z + \frac{\partial T_4}{\partial R} n_r$$

$T_4=T_2$ donc on dérive uniquement T_3 .

Calcul de $\frac{\partial T_3}{\partial R}$:

$$T_3 = \frac{A}{RCr} \left[-r^{-2} (1-2\nu) + \frac{H}{C^2} \bar{z}^2 \right] K(m) + \frac{A}{RCr} \left[-\bar{z}^2 + H(1-2\nu) + \frac{8FR^2}{r C^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

$$T_3 = \underbrace{(term12 + term13)}_V K(m) + \underbrace{(term14 + term15 + term16)}_{VI} E(m)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial R} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial V}{\partial R}}_{NT1} - V \underbrace{\frac{H}{2RC^2}}_{NT2} - VI \underbrace{\frac{H}{2RC^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial VI}{\partial R}}_{NT4} + V \underbrace{\frac{H}{2Rr^{-2}}}_{NT5} + VI \underbrace{\frac{H}{2RC^2}}_{NT6} \right]$$

$$term12 = \frac{-(1-2\nu)}{RC} \quad \frac{\partial term12}{\partial R} = \frac{(1-2\nu)}{RC} \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} \right)$$

$$term13 = \frac{H\bar{z}^2}{RC^3 r^{-2}} = \frac{H \sin^2 \theta}{RC^3} \quad \frac{\partial term13}{\partial R} = \frac{-\sin^2 \theta}{RC^3} \left[\frac{3(R+r)H}{C^2} + 2H_d \cos \theta + \frac{H}{R} + 2R \right]$$

$$term14 = \frac{(1-2\nu)H}{RCr^{-2}} = \frac{(1-2\nu)H_d}{RCr}$$

$$\frac{\partial term14}{\partial R} = \frac{-(1-2\nu)}{RC} \left(\frac{(R+r)H_d}{C^2 r} + \frac{H_d}{Rr} + \frac{2H_d \cos \theta}{r^{-2}} + \frac{2R}{r^{-2}} \right)$$

$$term15 = \frac{-\sin^2 \theta}{RC} \quad \frac{\partial term15}{\partial R} = \frac{\sin^2 \theta}{RC} \left(\frac{R+r}{C^2} + \frac{1}{R} + \frac{2 \cos \theta}{r} \right)$$

$$term16 = \frac{8RF_d \sin^2 \theta}{C^3 r} \quad \frac{\partial term16}{\partial R} = \frac{-8 \sin^2 \theta}{C^3} \left\{ \frac{3(R+r)F_d R}{C^2 r} - \frac{F_d}{r} + \frac{4RF_d \cos \theta}{r^{-2}} - \frac{2R^2}{r^{-2}} \right\}$$

$$NT1 = \frac{\partial term12}{\partial R} + \frac{\partial term13}{\partial R}$$

$$NT2 = \frac{H}{2R^2 C^3} \left\{ (1-2\nu) - \frac{H \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT3 = \frac{1}{2R^2 C^3} \left\{ H \sin^2 \theta - H_d^2 (1-2\nu) - \frac{8R^2 F_d H_d \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT4 = NT41 + NT42 + NT43$$

$$NT41 = \frac{\sin^2 \theta}{RC^3} \left(R + r + \frac{C^2}{R} \right)$$

$$NT42 = \left\{ \frac{-(1-2\nu)}{RC} \left(\frac{(R+r)H_d}{C^2} + \frac{H_d}{R} \right) + \frac{2\sin^2 \theta \cos \theta}{RC} - \frac{24(R+r)RF_d \sin^2 \theta}{C^5} + \frac{8F_d \sin^2 \theta}{C^3} \right\} \frac{1}{r}$$

$$NT43 = \left\{ \frac{16R^2 \sin^2 \theta}{C^3} - \frac{2(1-2\nu)}{C} - \frac{2(1-2\nu)H_d \cos \theta}{RC} - \frac{32RF_d \sin^2 \theta \cos \theta}{C^3} \right\} \frac{1}{r^2}$$

$$NT5 = V \frac{H}{2Rr^2} = NT51 + NT52$$

$$NT51 = \frac{H_d^2 \sin^2 \theta}{2R^2 C^3} \quad NT52 = \frac{-H_d(1-2\nu)}{2R^2 C} \frac{1}{r}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_3}{\partial R} &= A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT51 + NT6]E(m) \\ &\quad - 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln r + A[NT42 + NT52]E(m) + A[NT43]E(m) \end{aligned}$$

SRZZ

$$S_{RZZ} = \frac{\partial T_3}{\partial Z} n_z + \frac{\partial T_4}{\partial Z} n_r$$

$T_4 = T_2$ donc on dérive uniquement T_3 .

Calcul de $\frac{\partial T_3}{\partial Z}$:

$$T_3 = \frac{A}{RCr} \left[-r^2(1-2\nu) + \frac{H}{C^2} \bar{z}^2 \right] K(m) + \frac{A}{RCr} \left[-\bar{z}^2 + H(1-2\nu) + \frac{8FR^2}{rC^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

$$T_3 = \underbrace{(term12 + term13)}_V K(m) + \underbrace{(term14 + term15 + term16)}_{VI} E(m)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial Z} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial V}{\partial Z}}_{NT1} + V \underbrace{\frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT2} + VI \underbrace{\frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial VI}{\partial Z}}_{NT4} - V \underbrace{\frac{\bar{z}}{r}}_{NT5} - VI \underbrace{\frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT6} \right]$$

$$term12 = \frac{-(1-2\nu)}{RC} \quad \frac{\partial term12}{\partial Z} = \frac{\bar{z}(1-2\nu)}{RC^3}$$

$$term13 = \frac{H\bar{z}^2}{RC^3 r^2} = \frac{H \sin^2 \theta}{RC^3}$$

$$\frac{\partial term13}{\partial Z} = \frac{\sin \theta}{RC^3} \left[2\bar{z} \sin \theta + 2H_d - 2\sin^2 \theta H_d - \frac{3\bar{z}^2 H_d}{C^2} \right]$$

$$term14 = \frac{(1-2\nu)H}{RCr^2} = \frac{(1-2\nu)H_d}{RCr} \quad \frac{\partial term14}{\partial Z} = \frac{-(1-2\nu) \sin \theta}{RC} \left(\frac{H_d}{C^2} - \frac{2}{r} + \frac{2H_d}{r^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{term15} &= \frac{-\sin^2 \theta}{RC} & \frac{\partial \text{term15}}{\partial Z} &= \frac{\sin \theta}{RC} \left(\frac{\bar{z} \sin \theta}{C^2} - \frac{2 \cos^2 \theta}{\bar{r}} \right) \\
 \text{term16} &= \frac{8RF_d \sin^2 \theta}{C^3 \bar{r}} & \frac{\partial \text{term16}}{\partial Z} &= \frac{8R \sin \theta}{C^3} \left\{ \begin{aligned} &\frac{-3F_d \sin^2 \theta}{C^2} + \frac{2 \sin^2 \theta}{\bar{r}} \\ &+ \frac{2F_d(1-2 \sin^2 \theta)}{\bar{r}^2} \end{aligned} \right\} \\
 NT1 &= \frac{\partial \text{term12}}{\partial Z} + \frac{\partial \text{term13}}{\partial Z} \\
 NT2 &= \frac{\bar{z}}{RC^3} \left\{ \frac{H \sin^2 \theta}{C^2} - (1-2\nu) \right\} \\
 NT3 &= \frac{\sin \theta}{RC^3} \left\{ H_d(1-2\nu) - \bar{z} \sin \theta + \frac{8R^2 F_d \sin^2 \theta}{C^2} \right\} \\
 NT4 &= NT41 + NT42 + NT43 \\
 NT41 &= \frac{\bar{z} \sin^2 \theta}{RC^3} - \frac{(1-2\nu)H_d \sin \theta}{RC^3} - \frac{24RF_d \sin^3 \theta}{C^5} \\
 NT42 &= \left\{ \frac{-2\nu}{RC} + \frac{\sin^2 \theta}{RC} + \frac{8R \sin^2 \theta}{C^3} \right\} \frac{2 \sin \theta}{\bar{r}} \\
 NT43 &= \left\{ \frac{8RF_d}{C^3} (1-2 \sin^2 \theta) - (1-2\nu) \frac{H_d}{RC} \right\} \frac{2 \sin \theta}{\bar{r}^2} \\
 NT5 &= NT51 + NT52 \\
 NT51 &= \frac{-H_d \sin^3 \theta}{RC^3} & NT52 &= \frac{(1-2\nu) \sin \theta}{RC} \frac{1}{\bar{r}} \\
 NT6 &= -NT3 \\
 \frac{\partial T_3}{\partial Z} &= A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT51 + NT6]E(m) \\
 &\quad - 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42 + NT52]E(m) + A[NT43]E(m)
 \end{aligned}$$

S_{ZRR}

$$S_{ZRR} = \frac{\partial T_5}{\partial R} n_r + \frac{\partial T_6}{\partial R} n_z$$

Calcul de $\frac{\partial T_5}{\partial R}$:

$$T_5 = \frac{A\bar{z}}{Cr} \left[\frac{-2}{r^2} + \frac{2}{C^2} \bar{z}^2 \right] K(m) + \frac{A\bar{z}}{Cr} \left[4(1+\nu) - \frac{B}{r^2} - \frac{8B}{r C^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

$$T_5 = \underbrace{(\text{term17} + \text{term18})}_{\text{VII}} K(m) + \underbrace{(\text{term19} + \text{term20} + \text{term21})}_{\text{VIII}} E(m)$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial R} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial \text{VII}}{\partial R}}_{\text{NT1}} - \underbrace{\text{VII} \frac{H}{2RC^2}}_{\text{NT2}} - \underbrace{\text{VIII} \frac{H}{2RC^2}}_{\text{NT3}} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial \text{VIII}}{\partial R}}_{\text{NT4}} + \underbrace{\text{VII} \frac{H}{2Rr^2}}_{\text{NT5}} + \underbrace{\text{VIII} \frac{H}{2RC^2}}_{\text{NT6}} \right]$$

$$\text{term17} = \frac{\bar{z}}{Cr^2}$$

$$\frac{\partial \text{term17}}{\partial R} = \frac{-\bar{z}(R+r)}{r^2 C^3}$$

$$\text{term18} = \frac{2\bar{z} \sin^2 \theta}{C^3}$$

$$\frac{\partial \text{term18}}{\partial R} = \frac{-2 \sin^2 \theta}{C^3} \left[\frac{3\bar{z}(R+r)}{C^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \right]$$

$$\text{term19} = \frac{4(1+\nu) \sin \theta}{Cr}$$

$$\frac{\partial \text{term19}}{\partial R} = \frac{-4(1+\nu) \sin \theta}{C} \left(\frac{(R+r)}{C^2 r} + \frac{2 \cos \theta}{r^2} \right)$$

$$\text{term20} = \frac{-B \sin \theta}{r^2 Cr}$$

$$\frac{\partial \text{term20}}{\partial R} = \frac{\sin \theta}{r^2 C} \left(\frac{(R+r)B}{C^2 r} - \frac{2R}{r} + \frac{2B \cos \theta}{r^2} \right)$$

$$\text{term21} = \frac{-8B \sin^3 \theta}{C^3 r}$$

$$\frac{\partial \text{term21}}{\partial R} = \frac{8 \sin^3 \theta}{C^3} \left\{ \frac{3(R+r)B}{C^2 r} - \frac{2R}{r} + \frac{4B \cos \theta}{r^2} \right\}$$

$$NT1 = \frac{\partial \text{term17}}{\partial R} + \frac{\partial \text{term18}}{\partial R}$$

$$NT2 = \frac{-H\bar{z}}{2RC^3} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{2 \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT3 = \frac{-H_d \sin \theta}{2RC^3} \left\{ 4(1+\nu) - \frac{B}{r^2} - \frac{8B \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT4 = NT41 + NT42 + NT43$$

$$NT41 = \frac{2 \sin^3 \theta \cos \theta}{C} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{16 \sin^2 \theta}{C^2} \right)$$

$$NT42 = \left\{ \frac{(R+r)B}{r^2 C^3} - \frac{4(1+\nu)(R+r)}{C^3} - \frac{2R}{r^2 C} + \frac{24(R+r)B \sin^2 \theta}{C^5} - \frac{16R \sin^2 \theta}{C^3} \right\} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$NT43 = \left\{ \frac{16(R^2 + r^2) \sin^2 \theta}{C^3} - \frac{4(1+\nu)}{C} + \frac{(R^2 + r^2)}{r^2 C} \right\} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2}$$

$$NT5 = \frac{H_d \sin \theta}{RC} \left(\frac{\sin^2 \theta}{C^2} + \frac{1}{2r^2} \right)$$

$$NT6 = -NT3$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial R} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT5 + NT6]E(m)$$

$$-2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42]E(m) + A[NT43]E(m)$$

$$T_6 = \frac{A}{rCr} \left[-r^2 (1-2\nu) - \frac{F}{C^2} \bar{z}^2 \right] K(m) + \frac{A}{rCr} \left[-3\bar{z}^2 + F(1-2\nu) + \frac{4BF}{r C^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

Calcul de $\frac{\partial T_6}{\partial R}$:

$$T_6 = \frac{A}{rCr} \left[-r^{-2} (1-2\nu) - \frac{F}{C^2} \bar{z}^2 \right] K(m) + \frac{A}{rCr} \left[-3\bar{z}^2 + F(1-2\nu) + \frac{4BF}{rC^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

$$T_6 = \underbrace{(term22 + term23)}_{IX} K(m) + \underbrace{(term24 + term25 + term26)}_X E(m)$$

$$\frac{\partial T_6}{\partial R} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial IX}{\partial R}}_{NT1} - IX \underbrace{\frac{H}{2RC^2}}_{NT2} - X \underbrace{\frac{H}{2RC^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial X}{\partial R}}_{NT4} + IX \underbrace{\frac{H}{2Rr}}_{NT5} + X \underbrace{\frac{H}{2RC^2}}_{NT6} \right]$$

$$term22 = \frac{-(1-2\nu)}{Cr} \quad \frac{\partial term22}{\partial R} = \frac{(1-2\nu)(R+r)}{rC^3}$$

$$term23 = \frac{-F \sin^2 \theta}{rC^3} \quad \frac{\partial term23}{\partial R} = \frac{\sin^2 \theta}{rC^3} \left[\frac{3(R+r)F}{C^2} + 2 \cos \theta F_d - 2R \right]$$

$$term24 = \frac{-3 \sin^2 \theta}{rC} \quad \frac{\partial term19}{\partial R} = \frac{3 \sin^2 \theta}{rC} \left(\frac{(R+r)}{C^2} + \frac{2 \cos \theta}{r} \right)$$

$$term25 = \frac{(1-2\nu)F_d}{rCr} \quad \frac{\partial term25}{\partial R} = \frac{(1-2\nu)}{rC} \left(-\frac{(R+r)F_d}{C^2 r} + \frac{2R}{r} - \frac{2F_d \cos \theta}{r} \right)$$

$$term26 = \frac{4BF_d \sin^2 \theta}{rC^3 r} \quad \frac{\partial term26}{\partial R} = \frac{-4 \sin^2 \theta}{rC^3} \left\{ \frac{3(R+r)BF_d}{C^2 r} - \frac{2RF_d}{r} + \frac{4BF_d \cos \theta}{r} - \frac{2RB}{r} \right\}$$

$$NT1 = \frac{\partial term22}{\partial R} + \frac{\partial term23}{\partial R}$$

$$NT2 = \frac{H}{2RrC^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{F \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT3 = \frac{1}{2RrC^3} \left\{ 3H \sin^2 \theta - (1-2\nu)F_d H_d - \frac{4BF_d H_d \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT4 = NT41 + NT42 + NT43$$

$$NT41 = \frac{1}{rC^3} (3(R+r) \sin^2 \theta + 8 \sin^4 \theta (R - 2F_d \cos \theta))$$

$$NT42 = \left\{ 6C^2 \sin^2 \theta \cos \theta - (1-2\nu)(R+r)F_d - \frac{12(R+r)BF_d \sin^2 \theta}{C^2} + 8RF_d \sin^2 \theta \right\} \frac{1}{rC^3 r}$$

$$NT43 = \left\{ 2C^2 (1-2\nu)(R - F_d \cos \theta) + 8(R^2 + r^2)(R - 2F_d \cos \theta) \sin^2 \theta \right\} \frac{1}{rC^3 r^2}$$

$$NT5 = NT51 + NT52$$

$$NT51 = \frac{-F_d H_d \sin^2 \theta}{2RrC^3}$$

$$NT52 = \frac{-(1-2\nu)H_d}{2RrC} \frac{1}{r}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_6}{\partial R} &= A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT51 + NT6]E(m) \\ &\quad - 2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42 + NT52]E(m) + A[NT43]E(m) \end{aligned}$$

SZRZ

$$S_{ZRZ} = \frac{\partial T_5}{\partial Z} n_r + \frac{\partial T_6}{\partial Z} n_z$$

Calcul de $\frac{\partial T_5}{\partial Z}$:

$$T_5 = \frac{A\bar{z}^2}{Cr^{-2}} \left[\frac{r^{-2}}{r^2} + \frac{2}{C^2} \bar{z}^2 \right] K(m) + \frac{A\bar{z}}{Cr^{-2}} \left[4(1+\nu) - \frac{B}{r^2} - \frac{8B}{r C^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial Z} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial VII}{\partial Z}}_{NT1} + \underbrace{VII \frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT2} + \underbrace{VIII \frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial VIII}{\partial Z}}_{NT4} - \underbrace{VII \frac{\bar{z}}{r^2}}_{NT5} - \underbrace{VIII \frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT6} \right]$$

$$T_5 = \underbrace{(term17 + term18)}_{VII} K(m) + \underbrace{(term19 + term20 + term21)}_{VIII} E(m)$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial R} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial VII}{\partial R}}_{NT1} - \underbrace{VII \frac{H}{2RC^2}}_{NT2} - \underbrace{VIII \frac{H}{2RC^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial VIII}{\partial R}}_{NT4} + \underbrace{VII \frac{H}{2Rr^2}}_{NT5} + \underbrace{VIII \frac{H}{2RC^2}}_{NT6} \right]$$

$$term17 = \frac{\bar{z}}{Cr^2} \quad \frac{\partial term17}{\partial Z} = \frac{1}{r^2 C} \left(1 - \frac{\bar{z}^2}{C^2} \right)$$

$$term18 = \frac{2\bar{z} \sin^2 \theta}{C^3} \quad \frac{\partial term18}{\partial Z} = \frac{2 \sin^2 \theta}{C^3} \left[3 - \frac{3\bar{z}^2}{C^2} - 2 \sin^2 \theta \right]$$

$$term19 = \frac{4(1+\nu) \sin \theta}{Cr} \quad \frac{\partial term19}{\partial Z} = \frac{4(1+\nu)}{C} \left(\frac{(1 - 2 \sin^2 \theta)}{r^2} - \frac{\sin^2 \theta}{C^2} \right)$$

$$term20 = \frac{-B \sin \theta}{r^2 Cr} \quad \frac{\partial term20}{\partial Z} = \frac{1}{r^2 C} \left(\frac{B \sin^2 \theta}{C^2} - 2 \sin^2 \theta + \frac{B}{r^2} (2 \sin^2 \theta - 1) \right)$$

$$term21 = \frac{-8B \sin^3 \theta}{C^3 \bar{r}} \quad \frac{\partial term21}{\partial Z} = \frac{8 \sin^2 \theta}{C^3} \left\{ \frac{3B \sin^2 \theta}{C^2} - 2 \sin^2 \theta + \frac{4B \sin^2 \theta}{r^2} - \frac{3B}{r^2} \right\}$$

$$NT1 = \frac{\partial term17}{\partial Z} + \frac{\partial term18}{\partial Z}$$

$$NT2 = \frac{\bar{z}^2}{C^3} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{2 \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT3 = \frac{\sin^2 \theta}{C^3} \left\{ 4(1+\nu) - \frac{B}{r^2} - \frac{8B \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT4 = NT41 + NT42 + NT43$$

$$NT41 = \frac{8 \sin^4 \theta}{C^3} \left(\frac{3B}{C^2} - 2 \right) + \frac{\sin^2 \theta}{r^2 C} \left(\frac{B}{C^2} - 2 \right) - \frac{4(1+\nu) \sin^2 \theta}{C^3}$$

$$NT42 = 0$$

$$NT43 = \left\{ \frac{(1-2 \sin^2 \theta)}{C} \left(4(1+\nu) - \frac{B}{r^2} \right) + \frac{8B \sin^2 \theta}{C^3} (4 \sin^2 \theta - 3) \right\} \frac{1}{r}$$

$$NT5 = \frac{-\sin^2 \theta}{C} \left(\frac{2 \sin^2 \theta}{C^2} + \frac{1}{r^2} \right)$$

$$NT6 = -NT3$$

$$\frac{\partial T_5}{\partial R} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT5 + NT6]E(m)$$

$$-2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT43]E(m)$$

Calcul de $\frac{\partial T_6}{\partial Z}$:

$$T_6 = \frac{A}{rCr} \left[-r^{-2} (1-2\nu) - \frac{F}{C^2} \bar{z}^2 \right] K(m) + \frac{A}{rCr} \left[-3\bar{z}^2 + F(1-2\nu) + \frac{4BF}{rC^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

$$\frac{\partial T_6}{\partial Z} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial IX}{\partial Z}}_{NT1} + \underbrace{IX \frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT2} + \underbrace{X \frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial X}{\partial Z}}_{NT4} - \underbrace{IX \frac{\bar{z}}{r}}_{NT5} - \underbrace{X \frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT6} \right]$$

$$T_5 = \underbrace{A(\text{term22} + \text{term23})}_{IX} K(m) + \underbrace{A(\text{term24} + \text{term25} + \text{term26})}_X E(m)$$

$$\text{term22} = \frac{-(1-2\nu)}{Cr}$$

$$\frac{\partial \text{term22}}{\partial Z} = \frac{(1-2\nu)\bar{z}}{rC^3}$$

$$\text{term23} = \frac{-F \sin^2 \theta}{rC^3}$$

$$\frac{\partial \text{term23}}{\partial Z} = \frac{\sin \theta}{rC^3} \left[\frac{3\bar{z}F \sin \theta}{C^2} + 2F_d \sin^2 \theta - 2\bar{z} \sin \theta - 2F_d \right]$$

$$\text{term24} = \frac{-3 \sin^2 \theta}{rC}$$

$$\frac{\partial \text{term24}}{\partial Z} = \frac{3 \sin \theta}{rC} \left(\frac{\bar{z} \sin \theta}{C^2} + \frac{2 \sin^2 \theta}{r} - \frac{2}{r} \right)$$

$$\text{term25} = \frac{(1-2\nu)F_d}{rCr}$$

$$\frac{\partial \text{term25}}{\partial Z} = \frac{(1-2\nu) \sin \theta}{rC} \left(-\frac{F_d}{C^2} + \frac{2}{r} - \frac{2F_d}{r^2} \right)$$

$$\text{term26} = \frac{4BF_d \sin^2 \theta}{rC^3 \bar{r}}$$

$$\frac{\partial \text{term26}}{\partial Z} = \frac{4 \sin \theta}{rC^3} \left\{ \frac{2B \sin^2 \theta}{\bar{r}} + \frac{2BF_d}{r^2} - \frac{4BF_d \sin^2 \theta}{r^2} \right. \\ \left. + 2F_d \sin^2 \theta - \frac{3BF_d \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT1 = \frac{\partial term22}{\partial Z} + \frac{\partial term23}{\partial Z}$$

$$NT2 = \frac{-\bar{z}}{rC^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{F \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT3 = \frac{\sin \theta}{rC^3} \left\{ (1-2\nu)F_d - 3\bar{z} \sin \theta + \frac{4BF_d \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT4 = NT41 + NT42 + NT43$$

$$NT41 = \frac{\sin \theta}{rC^3} \left(3\bar{z} \sin \theta - (1-2\nu)F_d - \frac{12BF_d \sin^2 \theta}{C^2} + 16F_d \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) \right)$$

$$NT42 = \left\{ -6\cos^2 \theta + 2(1-2\nu) + \frac{8B \sin^2 \theta}{C^2} \right\} \frac{\sin \theta}{rCr}$$

$$NT43 = \left\{ -2F_d(1-2\nu) + \frac{8(R^2 + r^2)F_d}{C^2} (1-2\sin^2 \theta) \right\} \frac{\sin \theta}{rC\bar{r}^2}$$

$$NT5 = NT51 + NT52$$

$$NT51 = \frac{F_d \sin^3 \theta}{rC^3}$$

$$NT52 = \frac{(1-2\nu) \sin \theta}{rC} \frac{1}{r}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$\frac{\partial T_6}{\partial Z} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT51 + NT6]E(m)$$

$$-2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42 + NT52]E(m) + A[NT43]E(m)$$

S_{ZZR}

$$S_{ZZR} = \frac{\partial T_7}{\partial R} n_z + \frac{\partial T_8}{\partial R} n_r$$

$T_8 = T_6$ donc on dérive uniquement T_7 .

$$T_7 = \frac{-2A\bar{z}^3}{C^3 r} K(m) + \frac{2A\bar{z}}{Cr} \left[(1-2\nu) + \frac{4B}{r C^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

Calcul de $\frac{\partial T_7}{\partial R}$:

$$T_7 = A \underbrace{(term27)}_{XI} K(m) + A \underbrace{(term28 + term29)}_{XII} E(m)$$

$$\frac{\partial T_7}{\partial R} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial XI}{\partial R}}_{NT1} - \underbrace{XI \frac{H}{2RC^2}}_{NT2} - \underbrace{XII \frac{H}{2RC^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial XII}{\partial R}}_{NT4} + \underbrace{XI \frac{H}{2Rr}}_{NT5} + \underbrace{XII \frac{H}{2RC^2}}_{NT6} \right]$$

$$term27 = \frac{-2\bar{z}^3}{C^3 r} = \frac{-2\bar{z} \sin^2 \theta}{C^3} \quad \frac{\partial term27}{\partial R} = \frac{2 \sin^2 \theta}{C^3} \left(\frac{3(R+r)\bar{z}}{C^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \right)$$

$$term28 = \frac{2(1-2\nu) \sin \theta}{Cr} \quad \frac{\partial term28}{\partial R} = \frac{2(1-2\nu) \sin \theta}{C} \left[\frac{-(R+r)}{rC^2} - \frac{2 \cos \theta}{r^2} \right]$$

$$term29 = \frac{8B \sin^3 \theta}{C^3 r} \quad \frac{\partial term29}{\partial R} = \frac{8 \sin^3 \theta}{C^3} \left(-\frac{3(R+r)B}{rC^2} - \frac{4B \cos \theta}{r^2} + \frac{2R}{r} \right)$$

$$NT1 = \frac{\partial term27}{\partial R}$$

$$NT2 = \frac{H\bar{z} \sin^2 \theta}{RC^5}$$

$$NT3 = \frac{-H_d \sin \theta}{RC^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{4B \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT4 = NT41 + NT42 + NT43$$

$$NT41 = 0$$

$$NT42 = \frac{2 \sin \theta}{C^3} \left\{ 8R \sin^2 \theta - \frac{12(R+r)B \sin^2 \theta}{C^2} - (1-2\nu)(R+r) \right\} \frac{1}{r}$$

$$NT43 = \frac{-4 \sin \theta \cos \theta}{C^3} \left\{ (1-2\nu)C^2 + 8B \sin^2 \theta \right\} \frac{1}{r}$$

$$NT5 = \frac{-H_d \sin^3 \theta}{RC^3}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$\frac{\partial T_7}{\partial R} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT5 + NT6]E(m)$$

$$-2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT42]E(m) + A[NT43]E(m)$$

S_{zzz}

$$S_{zzz} = \frac{\partial T_7}{\partial Z} n_z + \frac{\partial T_8}{\partial Z} n_r$$

$T_8 = T_6$ donc on dérive uniquement T_7 .

$$T_7 = \frac{-2A\bar{z}^3}{C^3 r} K(m) + \frac{2Az}{Cr} \left[(1-2\nu) + \frac{4B}{r C^2} \bar{z}^2 \right] E(m)$$

Calcul de $\frac{\partial T_7}{\partial Z}$:

$$T_7 = A \underbrace{(\text{term27})}_{XI} K(m) + A \underbrace{(\text{term28} + \text{term29})}_{XII} E(m)$$

$$\frac{\partial T_7}{\partial Z} = AK(m) \left[\underbrace{\frac{\partial XI}{\partial Z}}_{NT1} + \underbrace{XI \frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT2} + \underbrace{XII \frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT3} \right] + AE(m) \left[\underbrace{\frac{\partial XII}{\partial Z}}_{NT4} - \underbrace{XII \frac{\bar{z}}{r^{-2}}}_{NT5} - \underbrace{XI \frac{\bar{z}}{C^2}}_{NT6} \right]$$

$$\text{term27} = \frac{-2\bar{z}^3}{C^3 r^{-2}} = \frac{-2\bar{z} \sin^2 \theta}{C^3} \quad \frac{\partial \text{term27}}{\partial Z} = \frac{2 \sin^2 \theta}{C^3} \left(\frac{3\bar{z}^2}{C^2} + 2 \sin^2 \theta - 3 \right)$$

$$\text{term28} = \frac{2(1-2\nu) \sin \theta}{C r} \quad \frac{\partial \text{term28}}{\partial Z} = \frac{2(1-2\nu)}{C} \left[\frac{-\sin^2 \theta}{C^2} - \frac{2 \sin^2 \theta}{r^{-2}} + \frac{1}{r^{-2}} \right]$$

$$\text{term29} = \frac{8B \sin^3 \theta}{C^3 r} \quad \frac{\partial \text{term29}}{\partial Z} = \frac{8 \sin^2 \theta}{C^3} \left(-\frac{3B \sin^2 \theta}{C^2} - \frac{4B \sin^2 \theta}{r^{-2}} + \frac{3B}{r} + 2 \sin^2 \theta \right)$$

$$NT1 = \frac{\partial \text{term27}}{\partial Z}$$

$$NT2 = \frac{-2\bar{z}^2 \sin^2 \theta}{C^5}$$

$$NT3 = \frac{2 \sin^2 \theta}{C^3} \left\{ (1-2\nu) + \frac{4B \sin^2 \theta}{C^2} \right\}$$

$$NT4 = NT41 + NT42 + NT43$$

$$NT41 = \frac{2 \sin^2 \theta}{C^3} \left(8 \sin^2 \theta - \frac{12B \sin^2 \theta}{C^2} - (1-2\nu) + 4 \sin^2 \theta (3-4 \sin^2 \theta) \right)$$

$$NT42 = 0$$

$$NT43 = \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{C} (1-2 \sin^2 \theta) + \frac{8(R^2 + r^2) \sin^2 \theta}{C^3} (3-4 \sin^2 \theta) \right\} \frac{1}{r^{-2}}$$

$$NT5 = \frac{2 \sin^4 \theta}{C^3}$$

$$NT6 = -NT3$$

$$\frac{\partial T_7}{\partial Z} = A[NT1 + NT2 + NT3](P_1 + P_2 \ln C^2) + A[NT41 + NT5 + NT6]E(m)$$

$$-2A[NT1 + NT2 + NT3]P_2 \ln \bar{r} + A[NT43]E(m)$$

Annexe C

C.1 Intégration des noyaux à singularité faible (Logarithmique)

L'intégrale d'un noyau axisymétrique à singularité logarithmique est donnée par :

$$I_w = \int_{-1}^1 f_{ik}^n(s) \ln|s - s_p| ds \quad (C.1)$$

$f_{ik}^n(s)$ est une fonction régulière sur $[-1,1]$, donnée par le produit de la solution fondamentale axisymétrique, une fonction de forme et le Jacobien de la transformation des coordonnées.

Johnson et Elliot et al. [78], ont défini une *transformation monomiale* qui dessine l'intervalle $[0,1]$ sur lui-même, donnée par :

$$u_\alpha(t) = t^\alpha \quad (C.2)$$

En premier, l'intervalle original est scindé au niveau de la singularité :

$$I_w = \int_{-1}^{s_p} f_{ik}^n(s) \ln|s - s_p| ds + \int_{s_p}^1 f_{ik}^n(s) \ln|s - s_p| ds \quad (C.3)$$

Ensuite chaque partie subit une transformation pour ramener les bornes d'intégration à $[0,1]$ en s'assurant que la singularité soit confondue avec la borne inférieure :

$$I_w = (1 + s_p) \int_0^1 \left[f_{ik}^n(s_p - (1 + s_p)u) \ln|s_p - (1 + s_p)u| \right] du \\ + (1 - s_p) \int_0^1 \left[f_{ik}^n(s_p + (1 - s_p)u) \ln|s_p + (1 - s_p)u| \right] du \quad (C.4)$$

Enfin, la transformation monomiale est introduite pour pousser les points d'intégrations vers la borne inférieure :

$$I_w = (1 + s_p) \int_0^1 \left[f_{ik}^n(s_p - (1 + s_p)t^\alpha) \ln|s_p - (1 + s_p)t^\alpha| \right] \alpha t^{\alpha-1} dt \\ + (1 - s_p) \int_0^1 \left[f_{ik}^n(s_p + (1 - s_p)t^\alpha) \ln|s_p + (1 - s_p)t^\alpha| \right] \alpha t^{\alpha-1} dt \quad (C.5)$$

Cette dernière expression est évaluée par la méthode de Gauss classique. L'ordre de la transformation α , définit le degré de confinement des stations de Gauss au voisinage de zéro.

C.2 Intégration des noyaux à singularité forte

L'intégrale d'un noyau à singularité forte $O(r^{-1})$, est définie par l'expression suivante :

$$I_s = \oint_{-1}^1 \frac{f_{ik}^n(s)}{s - s_p} ds \quad (C.6)$$

$f_{ik}^n(s)$ est une fonction dérivable continue sur $[-1,1]$, donnée par le produit de la solution fondamentale axisymétrique, une fonction de forme et le Jacobien de la transformation des coordonnées.

L'évaluation de l'intégrale (C.6) est possible au moyen de la technique de soustraction de la singularité [56] qui permet d'isoler la partie principale au sens de Cauchy.

L'intégrale est transformée à l'aide du premier terme d'une expansion en série de Taylor de la fonction $f_{ik}^n(s)$ au voisinage de la singularité :

$$\int_{-1}^1 \frac{f_{ik}^n(s)}{s-s_p} ds = \int_{-1}^1 \frac{f_{ik}^n(s) - f_{ik}^n(s_p)}{s-s_p} ds + f_{ik}^n(s_p) \int_{-1}^1 \frac{ds}{s-s_p} \quad (C.7)$$

Le premier terme de droite est régulier puisqu'il se comporte comme $\frac{\partial f_{ik}^n(s)}{\partial s}$ au voisinage de s_p et peut être évalué par la méthode Gauss classique. Le second terme de droite est évalué analytiquement :

$$f_{ik}^n(s_p) \int_{-1}^1 \frac{ds}{s-s_p} = f_{ik}^n(s_p) \ln \left(\frac{1-s_p}{1+s_p} \right) \quad (C.8)$$

C.3 Intégration des noyaux hyper-singuliers

L'intégrale d'un noyau hyper-singulier $O(r^{-2})$, est définie par l'expression suivante :

$$I_H = \int_{-1}^1 \frac{g_{ijk}^n(s)}{(s-s_p)^2} ds \quad (C.9)$$

$g_{ijk}^n(s)$ est une fonction continument dérivable sur $[-1,1]$, donnée par le produit de la solution fondamentale axisymétrique, une fonction de forme et le Jacobien de la transformation des coordonnées.

L'évaluation de l'intégrale (C.9) est possible au moyen de la technique de soustraction de la singularité [56] qui permet d'isoler les parties finies d'Hadamard.

L'intégrale est transformée à l'aide des deux premiers termes d'une expansion en série de Taylor de la fonction $g_{ijk}^n(s)$ au voisinage de la singularité :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{g_{ijk}^n(s)}{(s-s_p)^2} ds &= \int_{-1}^1 \frac{g_{ijk}^n(s) - g_{ijk}^n(s_p) - (s-s_p)g_{ijk}^{n(1)}(s_p)}{(s-s_p)^2} ds \\ &+ g_{ijk}^n(s_p) \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s-s_p)^2} + g_{ijk}^{n(1)}(s_p) \int_{-1}^1 \frac{ds}{s-s_p} \end{aligned} \quad (C.10)$$

Le premier terme de droite est régulier puisqu'il se comporte comme $\frac{\partial^2 f_{ik}^n(s)}{\partial s^2}$ au voisinage de s_p et peut être évalué par une quadrature de Gauss classique. Le second et le troisième terme de droite sont évalués analytiquement :

$$g_{ijk}^n(s_p) \int_{-1}^1 \frac{ds}{(s-s_p)^2} = g_{ijk}^n(s_p) \left(\frac{1}{1-s_p} + \frac{1}{1+s_p} \right)$$

$$g_{ijk}^{n(1)}(s_p) \int_{-1}^1 \frac{ds}{s-s_p} = g_{ijk}^{n(1)}(s_p) \ln \left(\frac{1-s_p}{1+s_p} \right)$$