

UNIVERSITE D'ALGER
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

2/73

Département Electricité

rea

THESE DE FIN D'ETUDES

ETUDE DU BRUIT D'UN OSCILLATEUR

HYPERFREQUENCE :

"LE KLYSTRON REFLEX"

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية

المكتبة

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE

Etudiée et Présentée par :

M. BAÏT

Dirigée par

M. ROCCHI

Ingénieur E.S.E.

1972 - 73

"A MES PARENTS & A MA FAMILLE"

Qu' il me soit permis d'exprimer mon entière gratitude
à tous les professeurs qui ont collaboré à ma forma-
-tion.

Je remercie M^r Marc ROCCHI pour son aide précieuse
qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de l'éla-
-boration de ce projet, ainsi qu'à toute personne m'ayant
aidé dans la rédaction et la mise en forme de ce docu-
-ment.

TABLE DES MATIERES

	page
Introduction.....	I
Chapitre I Représentation mathématique du bruit	
I-1 Expression mathématique du bruit.....	3
I-2 Fonction de corrélation	3
I-3 Analyse harmonique.....	4
I-4 Les différents bruits.....	5
I-5 Caractérisation de la quantité de bruit.....	7
Chapitre II La modulation B.F	
II-1 Généralités.....	10
II-2 La modulation A.M.....	10
II-3 La modulation de fréquence et de phase.....	12
II-3 La modulation mixte.....	16
II-5 LE Bruit comme une modulation B.F.....	18
Chapitre III Analyse mathématique dans le domaine temps	
III-1 Les différentes moyennes temporelles.....	22
III-2 Variances.....	23
III-3 Relations entre les variances et densités spectrales.....	25
Chapitre IV Oscillateur à klystron réflex	
IV-1 Considérations générales.....	27
IV-2 Fonctionnement.....	27
IV-3 Théorie sommaire.....	29
Chapitre V Etude expérimentale	
V-1 Description du banc de mesure.....	35
V-2 Technique de détection	41
Chapitre VI Méthode de mesure et Résultats	
VI-1 Mesure du bruit A.M.....	46
Courbes expérimentales et discussions des résultats.	
VI-2 LE pont Hyperfréquence passage FM-AM.....	58

Chapitre VII	Notion sur les systèmes linéaires stationnaires62
Chapitre VIII	Mesure dans le domaine temps des instabilités de fréquence	
VIII-1	But de la méthode.....	69
VIII-2	Variances et moments du second ordre..... Moyenne d'Allan, Moyenne d'Hadamard	70
VIII-3	Conclusion	80
CONCLUSION GENERALE.....		81
Bibliographie.....		82

Introduction

Nous nous proposons d'étudier un phénomène important dans la transmission des signaux: le bruit.

On peut définir le bruit comme une perturbation aléatoire d'un signal à transmettre; la grande différence entre le bruit et la modulation B.F., n'est pas tant dans le caractère aléatoire que dans le fait que le bruit brouille l'information alors que la modulation représente l'information. Notons qu'il existe plusieurs types de bruits:

-Bruits dus aux signaux brouilleurs

Dans les radio-recepteurs, les bruits de haute fréquence à l'entrée donnent naissance à la sortie, aux bruits parasites qui rendent la réception imparfaite, voire impossible. Le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ à la sortie dépend du type de modulation.

-Bruits d'impulsions

Les bruits d'impulsion sont de deux catégories : d'origine atmosphérique et d'origine industrielle.

Les bruits atmosphériques sont dus aux décharges atmosphériques et sont formés d'impulsions qui se succèdent de façon intermittente ou continue. Cependant, ces bruits sont pratiquement inexistantes aux hautes et très hautes fréquences.

Les bruits d'origine industrielle se produisent en cas de variation brusque des courants et des charges dans les circuits des installations électriques (ces genres de bruits peuvent être éliminés).

Remarquons que quelle que soit l'origine de ces bruits, ils consistent en une impulsion ou en une succession d'impulsions.

-Bruits de fluctuation

Ces types de bruits sont les plus importants pour cette étude (il est toutefois impossible de les éliminer complètement).

Les bruits qui appartiennent à cette catégorie ont un caractère aléatoire et résultent de la superposition d'un grand nombre d'impulsions élémentaires qui se produisent d'une façon irrégulière; leur énergie moyenne est en général définie et mesurable (dans le haut-parleur du récepteur elles donnent lieu à un souffle continu).

Les bruits de fluctuation comprennent les bruits dus à l'agitation thermique des électrons dans les conducteurs: les électrons libres se trouvent en mouvement continu, désordonné. Ils se déplacent à des vitesses différentes, ayant une valeur moyenne d'autant plus grande que la température du conducteur est plus élevée, car l'état de mouvement des électrons se trouve en équilibre thermique avec l'état de mouvement des molécules.

Le mouvement des électrons, qui constitue le courant électrique dans le conducteur, donne naissance à une tension variable aux extrémités du conducteur. Le mouvement désordonné des électrons à l'intérieur du conducteur, appelé agitation thermique des électrons, est aléatoire et les tensions qui prennent naissance sont des grandeurs à variation aléatoire.

Les bruits produits par les tubes électroniques et les transistors (leur origine réside dans la constitution granulaire de la charge électrique).

Ces bruits sont dus aux fluctuations du courant anodique. Les principales causes des fluctuations du courant anodique sont :

- 1- L'émission aléatoire des électrons qui forment le courant total émis
- 2- La variation aléatoire de la répartition des électrons entre l'anode et les autres électrodes positives, par exemple les grilles écrans.
- 3- La variation de l'émission secondaire des électrodes.
- 4- La variation des courants de grille dus aux ions positifs.

En outre, nous mentionnerons les bruits dus à l'effet magnétique, à l'effet de scintillement de la cathode, les bruits d'origine cosmique etc....

Dans le cas général, le signal à transmettre est une sinusoïde pure et bien que les raisons physiques du bruit soient multiples (comme on vient de le voir), l'analyse qui suit est générale.

Nous nous proposons de montrer que le bruit peut être considéré comme une modulation du signal appelé alors porteuse. Nous en déduisons une méthode de mesure.

Il est bon de préciser que nous nous occuperons du bruit dans un oscillateur hyperfréquence : le " KLYSTRON REFLEXE " .

.../...

CHAPITRE I

REPRESENTATION MATHEMATIQUE DU BRUIT

I.1 Expression mathématique générale du bruit

A partir de maintenant, la porteuse s'écrit : $A_0 \cos \omega_c t$
C'est un signal sinusoïdal pur; ω_c étant fixe, il n'y a plus de dérive en fréquence.

Le signal perturbé s'écrit :

$$V(t) = A_0 \cos \omega_c t + v(t) \quad (I.1)$$

$v(t)$ étant un processus aléatoire stationnaire appelé bruit.

Qu'appelle-t-on processus aléatoire stationnaire ? C'est un processus dont les propriétés statistiques sont invariantes par rapport à un changement arbitraire de l'origine du temps. Dans ce cas, ces propriétés dépendent uniquement des intervalles entre les instants d'observation.

Si p_n est la densité de probabilité de ce processus, alors :

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) \quad (I.2)$$

Ainsi, si on substitue $\tau = -t_1$ dans la relation (I.2), on obtient

$$P_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P_n(x_1, \dots, x_n; 0, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1) \quad (I.3)$$

I.2 La fonction de corrélation

Pour t fixé, $V(t)$ est une variable aléatoire à une dimension : $V(x, t)$.

Elle est complètement décrite par sa densité de probabilité $p(x, t)$.

On peut ensuite s'intéresser aux propriétés à deux instants, alors apparaît le moment

de sorte que
$$\Gamma(t_1, t_2) = E[V(t_1) \cdot V(t_2)]$$
 qui est l'espérance de $V(t_1) \cdot V(t_2)$

$$\Gamma(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(t_1) X_2(t_2) P_{12}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

$X_1(t_1), X_2(t_2)$ sont des réalisations possibles de $V(t_1)$ et $V(t_2)$

Considérons que :

$$E[V(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) x dx = \bar{X}(t) = 0$$

$V(t)$ est stationnaire au sens strict et

$$\Gamma(t_1, t_2) = R_V(t_1 - t_2) \quad (I.4)$$

La covariance s'appelle alors fonction d'autocorrélation.

$$R_V(\tau) = E[V(t) V(t - \tau)] \quad (I.5)$$

Cette moyenne au sens des probabilités, c'est à dire une moyenne d'ensemble qui nécessite la réalisation simultanée d'un grand nombre d'épreuves de la fonction aléatoire

$$R_V(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) V(t - \tau) p(x, x') dx dx' \quad (I.6)$$

x et x' étant les v.a associés à $V(t)$ et $V(t - \tau)$

on note $R_V(\tau) = \overline{V(t) V(t - \tau)}$ (moyenne au sens des probabilités).

L'hypothèse ergotique affirme que la moyenne sur un grand nombre d'échantillons à un instant quelconque t_0 , est égale à la moyenne temporelle faite sur un seul échantillon. On a :

.../...

$$R_v(\tau) = \overline{v(t)v(t-\tau)} = \langle v(t)v(t-\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)v(t-\tau) dt$$

I.3 L'analyse harmonique

Pour passer dans le domaine fréquence, nous utiliserons la transformation de FOURIER de la fonction d'autocorrélation. Précisons tout de suite que l'intérêt de $R_v(\tau)$ n'est pas d'être une fonction certaine et donc de nous donner des renseignements sur la puissance contenue dans le signal.

En général, un signal a un caractère aléatoire. Toutefois, si toute réalisation particulière d'un signal aléatoire est parfaitement déterminée par la connaissance (ou la mesure) d'un nombre fini de paramètres, ce signal est dit certain. D'après la transformation de FOURIER

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (I.8)$$

$S_v(f)$ est la densité spectrale de $V(t)$. Réciproquement, on a :

$$R_v(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(f) e^{2\pi j f \tau} df \quad (I.9)$$

Les propriétés essentielles de $S_v(f)$ sont :

- $S_v(f)$ est une fonction réelle comme $V(t)$
- $S_v(f)$ est paire car $R_v(\tau)$ est paire
- $S_v(f)$ est positive et $|S_v(f)| \leq S_v(0)$

En effet, si $F(f)$ est la transformée de FOURIER, alors

$$|F(f)|^2 = S_v(f) \quad (\text{cf par annexe page 7})$$

donc $S(f)$ est réelle.

Comme $R_v(\tau)$ est une fonction réelle (d'après I.9) alors (I.8) donne

$$S_v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad S_v(f) \text{ est paire.}$$

De plus,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_v(f) df = 2 \int_0^{+\infty} S_v(f) \cos 0 df = R_v(0) = \sigma_v^2 = \langle v^2 \rangle$$

Cet ensemble de relations est fondamental car $\langle v^2 \rangle$ représente par définition, la puissance moyenne du signal $V(t)$. Il convient cependant de faire attention au mot puissance; celui-ci n'est pas toujours lié au mot énergie.

I.4 Les différents bruits

Suivant la forme de la perturbation $V(t)$, on peut distinguer plusieurs sortes de bruits.

Le bruit défini précédemment représente la perturbation apportée au signal total; son étude conduit à la notion de pureté spectrale.

$$v(t) = V(t) + A_c \cos \omega_c t$$

- Si le bruit n'affecte que l'amplitude du signal; on définit le bruit d'amplitude ou bruit A.M (Amplitude Modulation)

on a
$$v(t) = A(t) \cos \omega_c t = [A_c + a(t)] \cos \omega_c t \quad (I.10)$$

$a(t)$ représente le bruit aléatoire.

- Si le bruit n'affecte que la phase, on définit le bruit de fréquence ou bruit FM (Frequency Modulation) on a :

$$v(t) = A_c \cos [\omega_c t + \Phi(t)] \quad (I.11)$$

La phase instantanée est $\psi(t) = \omega_c t + \Phi(t)$

Le bruit de phase est : $\Phi(t)$

La pulsation instantanée est : $\omega_i = \frac{d}{dt} (\phi) = \omega_0 + \dot{\phi} (t)$

Le bruit de fréquence est : $\dot{\phi} (t)$

La forme générale (I.10) est toujours valable. La relation entre $a(t)$ et $V(t)$ ainsi que celle entre $\dot{\phi} (t)$ et $V(t)$, s'établit en passant aux densités spectrales.

La puissance au sens physique n'est contenue que dans $S_v(f)$ et $S_a(f)$ qui s'exprime en Watts/Hz. $S_{\dot{\phi}}(f)$ s'exprime en $(\text{rd/sec})^2/\text{HZ}$ ou HZ (mais la 1^{ère} première forme parle plus; elle montre qu'aux Watts sont associés des HZ)

Comme les détecteurs à diodes ne permettent que d'évaluer le bruit AM, il faudra transformer le bruit FM en bruit AM à l'aide d'un discriminateur.

I.5 Caractérisation de la quantité de bruit

Pour évaluer la quantité de bruit dans le signal perturbé, on raisonne dans l'espace des fréquences (une analyse dans l'espace temporel sera faite pour le bruit FM); le signal pur est la référence et c'est par rapport à elle que l'on chiffre le bruit. Le bruit est $x(t)$ [c'est $V(t)$; $a(t)$ ou $\dot{\phi} (t)$]; le signal perturbé s'écrivant dans le cas général

$$X(t) = x(t) + X_0(t) \quad X_0 \text{ est la porteuse}$$

- Soit on mesure la puissance totale de bruit par rapport à la puissance dans la porteuse

$$N_1 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df}{P_0} \quad (\text{I.12})$$

- Si on ~~mesure~~ ^{mesure} le bruit dans une bande B à la fréquence f_m de la porteuse (on considère toujours le bruit double-bande; ce qui provient du choix des formes de définition de l'intégrale de FOURIER).

$$N (X, f_m, B) = \frac{2 \int_{f_m - B/2}^{f_m + B/2} S_x(f) df}{P_0} \quad (\text{I.13})$$

Expérimentalement, on ne peut mesurer que N_2 ; le procédé de mesure résultant d'une analogie avec la modulation B.F d'un signal H.F (ici la fréquence B.F. sera f_m). Nous étudierons en détail ce problème lors du prochain chapitre, mais auparavant récapitulons les résultats sur les trois sortes de bruits.

$$X(t) = x(t) + X_0(t)$$

.../...

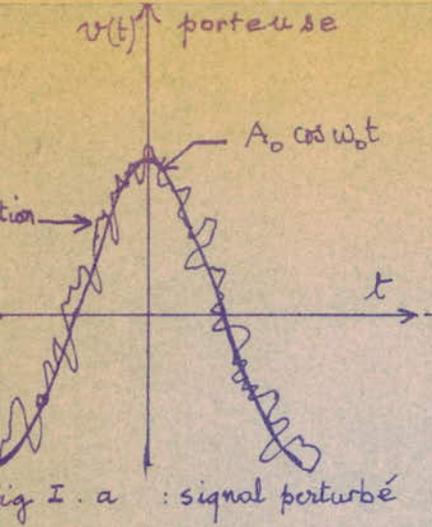


fig I. a : signal perturbé

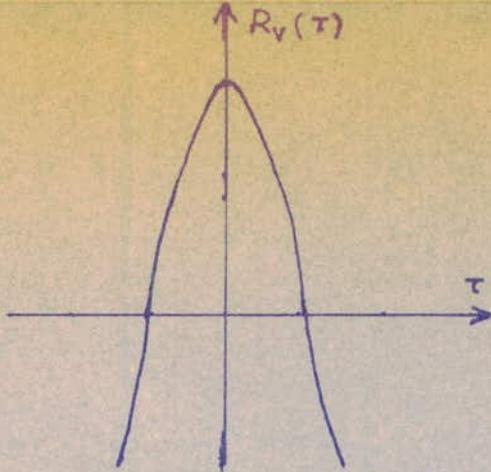


fig I. b : Fonction d'auto-corrélation de $v(t)$

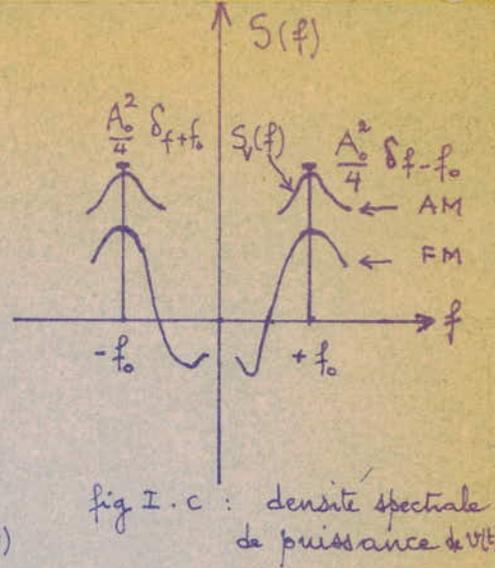


fig I. c : densité spectrale de puissance de $v(t)$

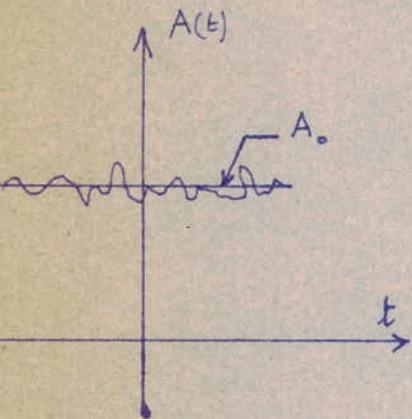


fig I. d : perturbation autour de la composante continue

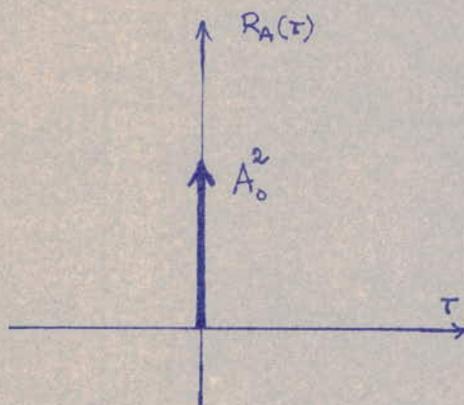


fig I. e : fonction d'auto-corrélation de l'amplitude

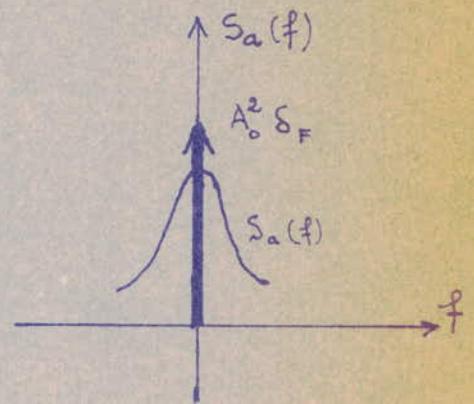


fig I. f : fonction de densité sp. d'amplitude

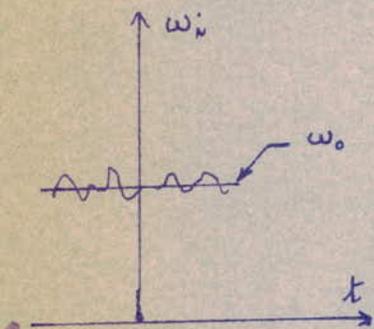


fig I. g : perturbation autour de la fréquence angulaire

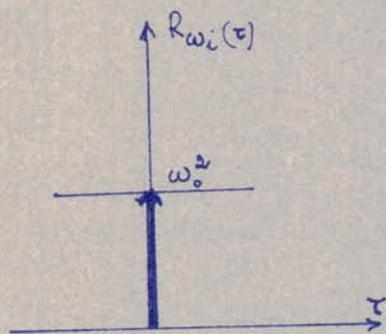


fig I. h : fonction d'auto-corrélation de la fréquence

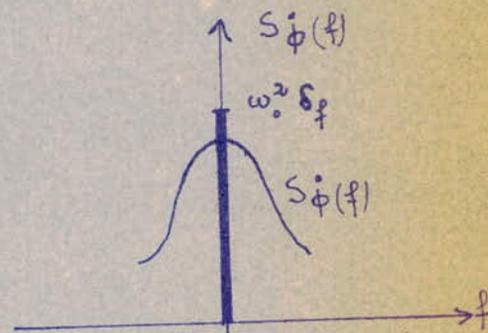
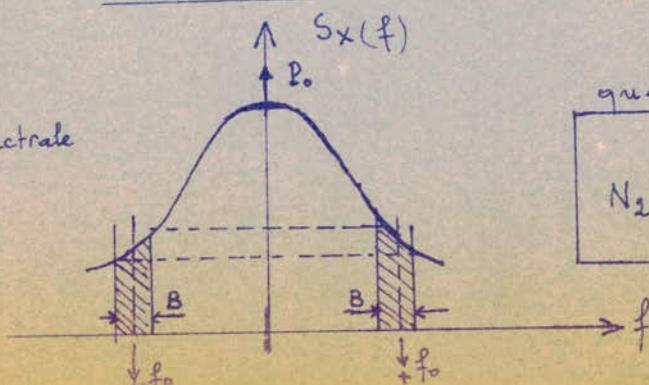


fig I. i : densité spectrale de fréquence

Cas général

fig II. densité spectrale du bruit



quantité de bruit

$$N_2 = \frac{2 \int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} S_x(f) df}{P_0}$$

SIGNAL $X(t)$	BRUIT $x(t)$	Porteuse $X_0(t)$	densité spectrale du bruit	densité spectrale de la porteuse
$v(t) = A_0 \cos \omega_0 t + V(t)$	$V(t)$ ($\langle V(t) \rangle = 0$)	$A_0 \cos \omega_0 t$	$S_V(f)$	$\frac{A_0^2}{4} [\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}]^*$
$\omega_i = \omega_0 + \dot{\Phi}(t)$	$\dot{\Phi}(t)$ ($\langle \dot{\Phi} \rangle = 0$)	ω_0	$S_{\dot{\Phi}}(f)$	$\omega_0^2 \delta_{f_0}$
$\varphi(t) = \omega_0 t + \Phi(t)$	$\Phi(t)$ ($\langle \Phi \rangle = 0$)	$\omega_0 t$	$S_{\Phi}(f)$	—
$A(t) = a(t) + A_0$	$a(t)$ ($\langle a(t) \rangle = 0$)	A_0	$S_a(f)$	$A_0^2 \delta_{f=0}$

* δ représente le pic de Dirac; on note $\delta_{f_0} = \delta(f - f_0)$ et $\delta(f = 0) = \delta(f)$.

REMARQUE

Nous voyons que le bruit de phase, comme la modulation de phase, ne rentre pas dans le cadre de notre caractérisation du bruit car $\delta_{\omega t}(f)$ n'existe pas.

Annexe : Rappel sur les filtres linéaires (cf chapitre II)

Si $X \xrightarrow{F} F(X) = Y$ X et Y sont des f.a.

F est dit linéaire si

- F est une application linéaire, c'est à dire si

$$F(X_1 + X_2) = F(X_1) + F(X_2) = Y_1 + Y_2$$

$$F(\lambda X) = \lambda F(X) = \lambda Y$$

F est stationnaire si

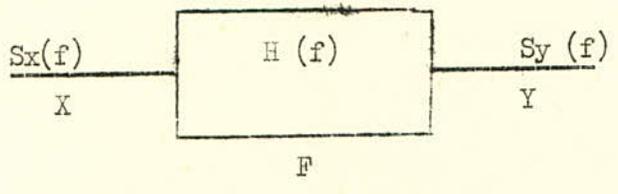
$$Y(t - \tau) = F[X(t - \tau)] \quad \forall \tau$$

alors

$$Y(t) = R(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) R(t - u) du \quad (\text{théorème de convolution})$$

et si $H(f) = T F[R(t)]$ alors $S_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_X(f)$

.../...



Cas particulier

$$V(t) = V(t) * \delta(t)$$
$$S_v(t) = |TF(V(t))|^2$$

.../...

- 9 -

CHAPITRE II

LA MODULATION B F

Cette étude va nous permettre de considérer le bruit comme une modulation B.F, ceci sous certaines conditions que nous allons préciser.

II.1 GENERALITES

Le signal porteur s'écrit $A_c \cos \omega_c t$; la référence de phase étant prise à l'origine des temps.

Il est caractérisé par son amplitude A_c , sa phase $\varphi(t)$ et sa fréquence instantanée $\omega_i = \frac{d\varphi(t)}{dt}$

On peut donc moduler en amplitude, en phase ou en fréquence. La modulation d'amplitude est la plus simple; et c'est elle qui nous intéresse le plus car nos détecteurs ne sont sensibles qu'à la A M

II.2 LA MODULATION D'AMPLITUDE

Dans le cas le plus général, l'amplitude perturbée s'écrit :

$$A(t) = A_c + a(t). \quad ; \quad v(t) = A_c [1 + m f(t)] \cos \omega_c t \quad (II.1)$$

$$m < 1$$

m étant le taux de modulation et est défini par $m = \frac{A_{max} - A_{min}}{2 A_c}$

La condition sur m ($m < 1$) est nécessaire pour que la détection soit possible.

f(t) est une fonction certaine (alors que le bruit est aléatoire) que l'on suppose décomposable en série de FOURIER et paire

$$f(t) = a_c + \sum_1^{\infty} a_n \cos n \Omega t \quad (II.2)$$

Nous reviendrons au cas général par la suite, examinons pour l'instant le cas $f(t) = \cos \Omega t$ $\Omega \ll \omega_c$

a) le signal est alors:

$$v(t) = A_c (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_c t \quad (II.3)$$

$$\text{alors } v(t) = A_c \cos \omega_c t + \frac{A_c m}{2} [\cos(\omega_c + \Omega)t + \cos(\omega_c - \Omega)t] \quad (II.4)$$

donc pour $f > 0$ (en fait le spectre est symétrique / $f=0$)

$$S_v(f) = \frac{A_c^2}{2} \delta_{f_0} + \frac{A_c^2 m^2}{8} [\delta(f_0 + F) + \delta(f_0 - F)] \quad (II.5)$$

avec $\Omega = 2 \pi F$ et $\omega = 2 \pi f_c$

$$N_{2v}(f_n = F) = \frac{A_c^2 m^2}{4} \cdot \frac{2}{A_c^2} = \frac{m^2}{2}$$

$$N_{2v}(f_n = F) = \frac{m^2}{2} \quad (II.6)$$

.../...

Il existe deux raies latérales d'amplitude qui sont à F H Z de la porteuse. Si on s'intéresse au signal A(t) seul, alors pour $f > f_0$

$$a(t) = A_m \cos \Omega t \implies S_a(f) = \frac{A_m^2 m^2}{4} [S_f + \delta.f] \quad (II.7)$$

Finalement, on peut donner une représentation vectorielle de v(t)

$$v(t) = \text{Re} \left\{ A_0 e^{j\omega_c t} + \frac{A_0 m}{2} (e^{j(\omega_c + \Omega)t} + e^{j(\omega_c - \Omega)t}) \right\} \quad (II.8)$$

La modulation est en phase avec la porteuse. $\vec{OA} // \vec{AM}$

La modulation d'amplitude est une opération qui fait correspondre au spectre du signal de modulation rapporté à la fréquence zéro; un spectre identique rapporté à la fréquence porteuse F_0 .

En modulation d'amplitude la largeur du spectre du signal modulé ne dépend pas du taux de modulation.

b) dans le cas général, chaque composante élémentaire de fréquence F_n et d'amplitude $m_n A_0$ (avec $F_n = nF$) donne lieu à deux raies latérales de fréquence $f_0 \pm nF$ et d'amplitude $\frac{m_n A_0}{2}$ on a :

$$N_e = \frac{2}{A_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n^2 A_0^2}{4} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} m_n^2 \quad (II.9)$$

En fait f(t) n'est pas toujours décomposable en série de FOURIER et cette analyse discrète n'est pas toujours possible; néanmoins elle est suffisante pour l'étude expérimentale du bruit A.M.

II.2 LA MODULATION DE FREQUENCE ET DE PHASE

$$v(t) = A_0 \cos[\omega_c t + \Phi(t)]$$

- $\Phi(t)$ caractérise la modulation de phase ou P M
si $\Phi(t)$ est paire et décomposable en série de FOURIER

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \Omega t \quad (II.10)$$

$$v(t) = A_0 \cos[\omega_c t + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \Omega t] = A_0 \cos \Psi(t) \quad (II.11)$$

On définit l'indice de modulation comme $(\Delta \Psi)_{\text{max}}$ raie n

$$(m_n)_P = [(\Delta \Psi)_{\text{raie n}}] = a_n \quad (II.12)$$

- $\dot{\Phi}(t)$ caractérise la modulation de fréquence ou F.M.

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n \Omega t + \pi) \quad (II.13)$$

alors
$$v(t) = A_0 \cos\left[\omega_c t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n \Omega} \cos n \Omega t\right] \quad (II.14)$$

On définit l'indice de modulation comme

$$(m_n)_F = \frac{b_n}{n \Omega} ; (m_n)_F = (m_n)_P \quad (II.15)$$

On passe de la F M à la P M par intégration dans le temps de la pulsation instantanée. La différence réside dans la définition de l'indice de modulation. Dans le cas où la fréquence f_0 est supposée connue, on parle de modulation de phase ou de fréquence instantanée.

.../...

MODULATION A.M.

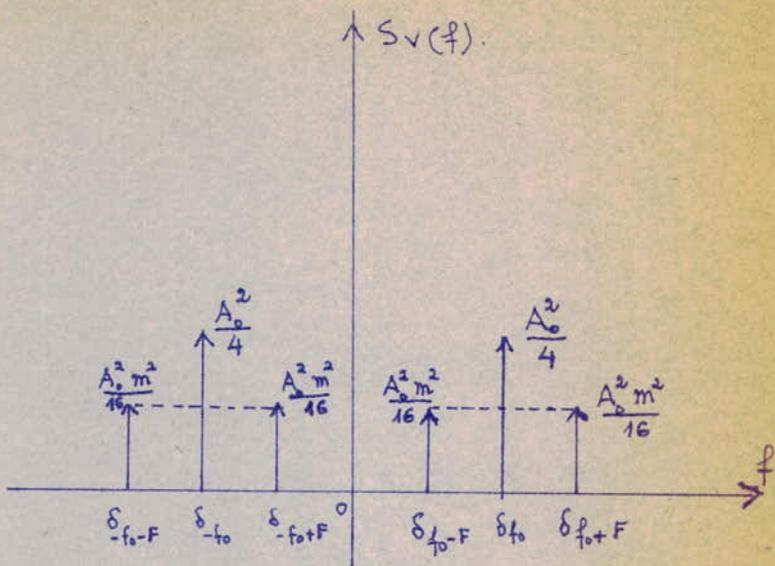
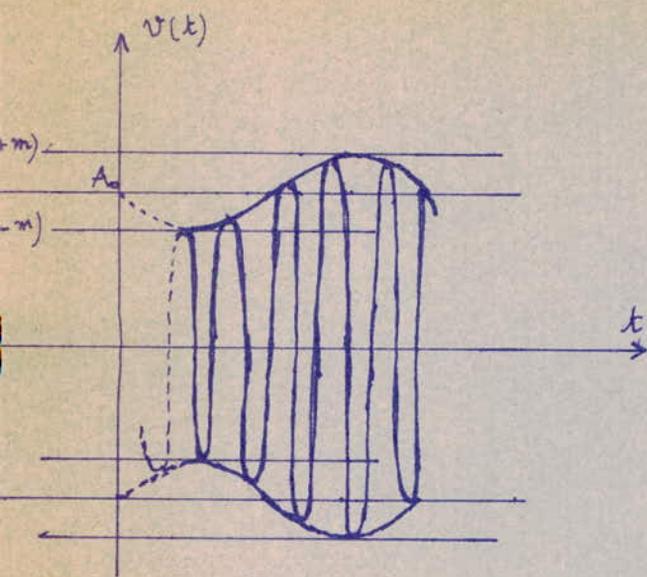


fig III (a) : Représentation de la A.M dans l'espace temps

fig III (b) : fonction de densité spectrale de $v(t)$ [double-bande]

$$\left(N_1 = N_2 (f_m = F) = \frac{m^2}{2} \right)$$

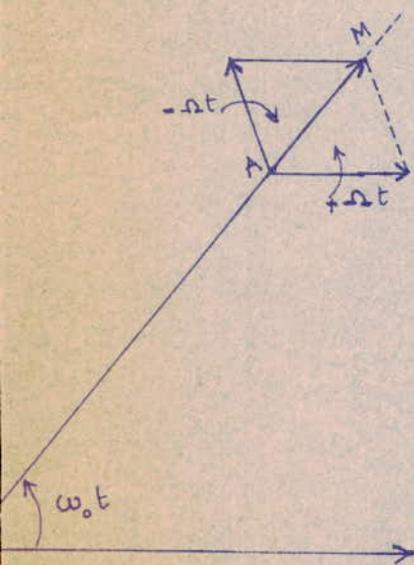


fig III (c) : Représentation vectorielle de la modulation d'amplitude (A.M.)

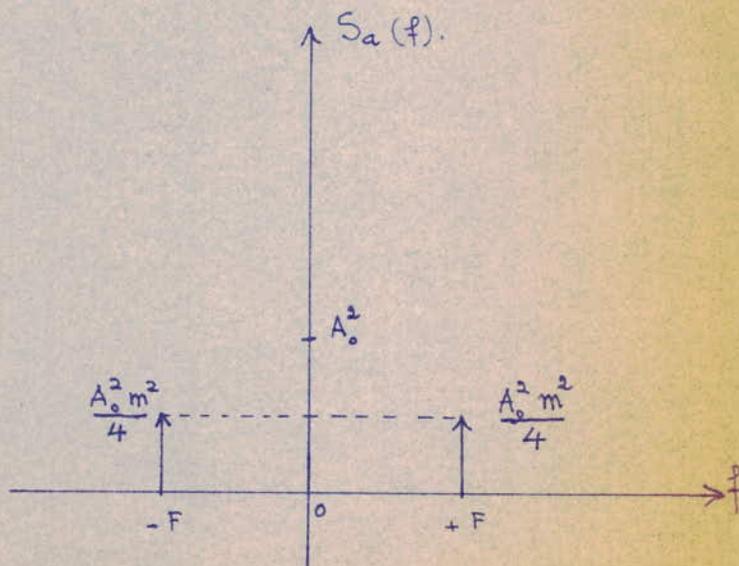


fig III (d) : fonction de densité spectrale de l'amplitude du signal

(ici $N_2 = \frac{m^2}{2}$ aussi)

a) $\dot{\phi}(t) = a \sin \Omega t$

alors que la décomposition spectrale était simple quel que soit m , ce ne sera pas le cas ici et on va voir sous quelle condition la modulation de fréquence se simplifie.

$$v(t) = A_0 \cos(\omega_c t + m \cos \Omega t) \implies v(t) = A_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(m) \cos(\omega_c + n\Omega)t \quad (\text{II.16})$$

avec $J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$

$J_n(m)$ est la fonction de BESSEL d'ordre n de m .

donc
$$S_v(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_0^2 J_n^2}{2} \delta(f + nF) \quad (\text{II.18})$$

La modulation de fréquence par un signal sinusoïdal fait apparaître une infinité de composantes latérales.

Si l'on considère qu'une transmission FM est correcte lorsque l'on néglige les composantes dont l'amplitude est 1% de celle de l'ordre non modulé.

On montre que pour $m = 0,30$, la bande passante à 3 dB est égale à 2 fois la fréquence de modulation.

$$\left\{ \begin{aligned} v(t) &= A_0 \left[J_0(m) \cos \omega_c t + J_1(m) \cos(\omega_c + \Omega)t + J_{-1}(m) \cos(\omega_c - \Omega)t \right] \end{aligned} \right. \quad (\text{II.19})$$

$$\left\{ \begin{aligned} m \leq 0,3 \quad J_0(m) &\simeq 1 \quad J_1(m) \simeq \frac{m}{2} \end{aligned} \right. \quad (\text{II.20})$$

En effet pour

$m = 0,3$; $J_0(m) = 0,9976$; $J_1(m) = 0,1483$; $J_2(m) = 0,0112$; $J_3(m) = 0,0006$

et $\frac{J_2(m)}{J_0(m)} \simeq 1,1\%$; $\frac{J_3(m)}{J_1(m)} \simeq 7\%$ d'où l'on peut écrire (II.19)

de plus on sait que $J_n(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(n \sin \theta) \cos n\theta + \sin(n \sin \theta) \sin n\theta] d\theta$

$$J_n(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(n \sin \theta) \cos n\theta + \sin(n \sin \theta) \sin n\theta] d\theta$$

Si n est pair la deuxième partie de l'intégrale développée est nulle; si n est impair la première partie est nulle.

$$J_0(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n \sin \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta = 1 \implies J_0(m) \simeq 1$$

$$J_1(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(n \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi n \sin^2 \theta d\theta = \frac{n}{2\pi} \cdot \pi$$

et $J_1(m) \simeq \frac{m}{2}$

d'où les résultats de (II.20) pourvu que m soit petit ($m \leq 0,3$) et finalement

$$v(t) = A_0 \cos \omega_c t + \frac{m A_0}{2} \left[\cos(\omega_c + \Omega)t - \cos(\omega_c - \Omega)t \right] \quad (\text{II.21})$$

.../...

MODULATION DE FREQUENCE OU F.M.

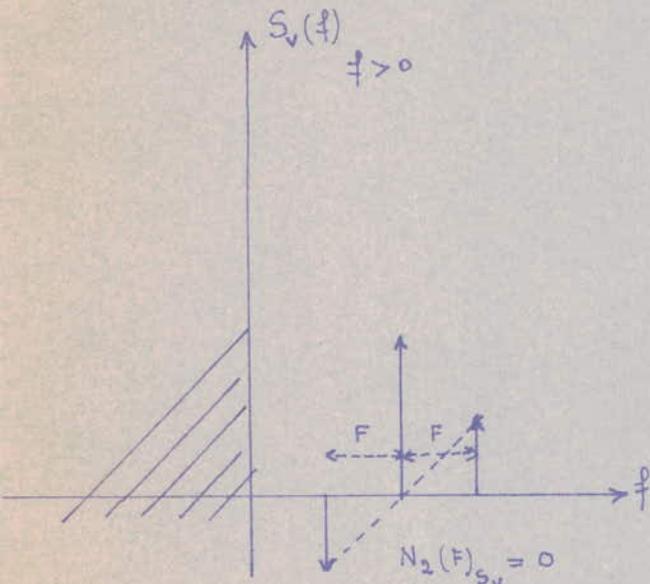


fig IV.(a) : densité spectrale d'un signal modulé en fréquence.

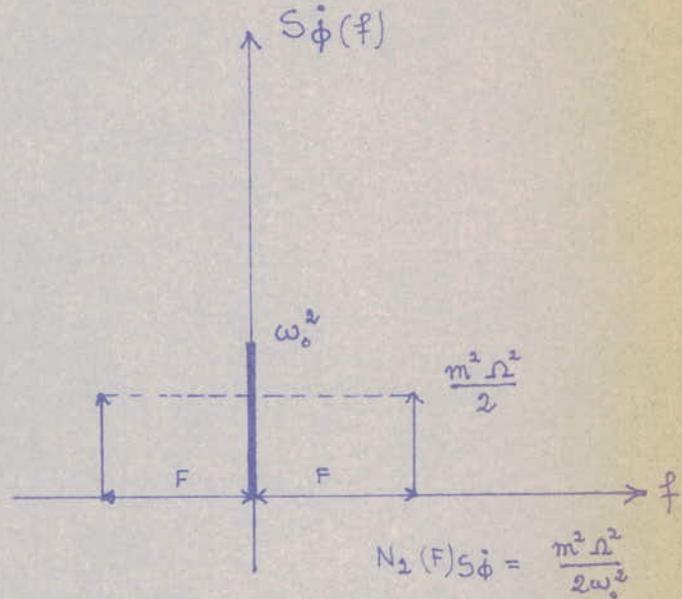


fig IV.(b) : densité spectrale du signal de modulation F.M.

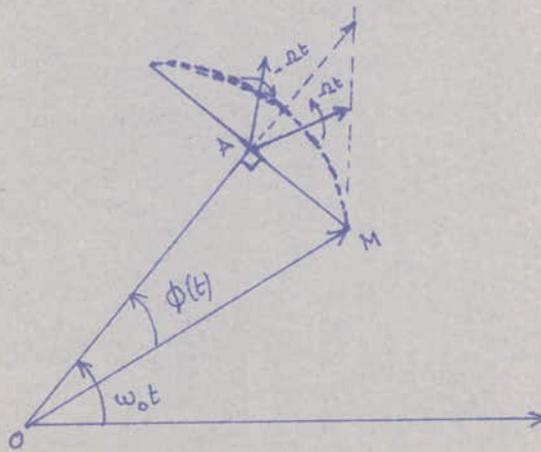


fig IV.(c) : Représentation vectorielle de la modulation de fréquence.

Il n'entre plus en ligne de compte que deux raies latérales d'amplitude

$$+ \frac{n A}{2} \quad \text{et} \quad - \frac{n A}{2} \quad \text{et}$$

$$S_v(f) = \frac{A_0^2}{2} \delta_{f_0} + \frac{A_0^2 n^2}{8} (\delta_{(F_0 + F)} - \delta_{(F_0 - F)}) \quad (\text{II.22})$$

Il est important de remarquer qu'effectivement il n'y a pas de puissance dans les bandes latérales ; cela est évident dans l'expression de $S_v(f)$

$$P_0 = \frac{A_0^2}{2} \quad ; \quad N_2(f_n = F) = \frac{A_0^2 n^2}{8} (1 - 1) = 0 \quad (\text{II.23})$$

Si nous regardons maintenant, non plus le signal complet mais

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \Phi(t) = \omega_c t + n \cos \Omega t \implies \omega_c = \omega_0 - n \Omega \sin \Omega t$$

d'où

$$S_{\dot{\Phi}}(f) = \frac{n^2 \Omega^2}{4} (\delta_F + \delta_{-F}) \quad (\text{II.24})$$

On obtient facilement ce résultat

$$R_{\dot{\Phi}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} n^2 \Omega^2 \sin \Omega t \sin \Omega(t + \tau) dt$$

$$R_{\dot{\Phi}}(\tau) = n^2 \Omega^2 \cos \Omega \tau$$

et, $S_{\dot{\Phi}}(f) = T F [R_{\dot{\Phi}}(\tau)] = \frac{n^2 \Omega^2}{4} (\delta_F + \delta_{-F})$

Nous notons alors qu'il existe bien une puissance dans le signal ; cette puissance s'exprime en Hz^2 . C'est elle qui caractérise le bruit de fréquence.

$$N_2(f_n = F) = \frac{n^2 \Omega^2}{2 \omega_0^2} \quad (\text{II.25})$$

Définition des Hz efficaces

Au signal $\dot{\Phi}(t)$ on associe une puissance moyenne $\langle \dot{\Phi}^2 \rangle = P$

On définit les Hz efficaces par l'égalité

$$(\dot{\Phi}_{\text{eff}})^2 = (\Delta f_{\text{eff}})^2 = \langle \dot{\Phi}^2 \rangle = P \quad (\text{II.26})$$

pour une F.M., on a

$$(\Delta f_{\text{eff}})^2 = \frac{n^2 \Omega^2}{2} = \frac{(\Delta f)^2}{2} \quad (\text{II.27})$$

.../...

à partir de (II.27) on remarque que :
la largeur du spectre en modulation de fréquence est fonction de F et de M.

Finalement nous pouvons comme pour la modulation d'amplitude, donner une représentation vectorielle qui est très significative de la différence entre les deux genres de modulation.

$$v(t) = \text{Re} \left\{ A_0 e^{j\omega_0 t} + \frac{A_0 m}{2} (e^{j(\omega_0 + \Omega)t} - e^{j(\omega_0 - \Omega)t}) \right\} \quad (\text{II.28})$$

La modulation de fréquence se traduit par un vecteur \vec{AM} en quadrature avec la porteuse \vec{OA} alors qu'en A.M. ils sont en phase.

Remarquons pour finir qu'en F.M., en plus de la modulation de phase il existe une légère modulation d'amplitude. Cela provient des approximations faites.

b) dans le cas où $\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\Omega t$
chaque composante anène deux raies latérales de modulation qui dans le spectre $S_v(f)$ sont égales en amplitude mais de signes opposés.
Cette analyse n'est possible que si :

$$m = a_n \leq 0,3 \quad \forall n$$

dans cette hypothèse on a :

$$N_2 (fn = F)_{S_\Phi} = \frac{\Omega^2}{2 \omega_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} (m)^2 \quad (\text{II.29})$$

cette décomposition discrète nous inspirera un modèle pour le bruit.

II.3 LA MODULATION MIXTE

La modulation mixte a pour expression

$$v(t) = A_0 (1 + m_A f(t)) \left[\cos(\omega_0 t + \Phi(t)) \right] \quad (\text{II.30})$$

soit pour une raie de $f(t)$ et une raie de $\Phi(t)$

$$v(t) = A_0 (1 + m_A \cos \Omega_1 t) \cos(\omega_0 t + n_p \cos \Omega_2 t) \quad (\text{II.31})$$

qui s'écrit dans le cas où $m < 0,3$

$$v(t) = A_0 (1 + m_A \cos \Omega_1 t) \left[\cos(\omega_0 t + \frac{n_p}{2} (\cos(\omega_0 + \Omega_2)t - \cos(\omega_0 - \Omega_2)t) \right] \quad (\text{II.32})$$

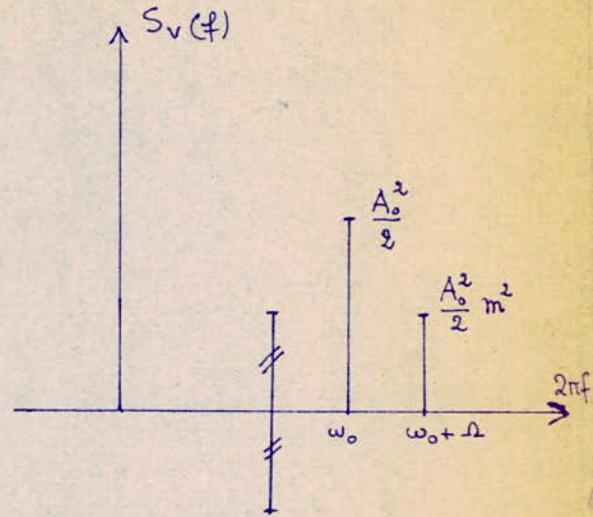
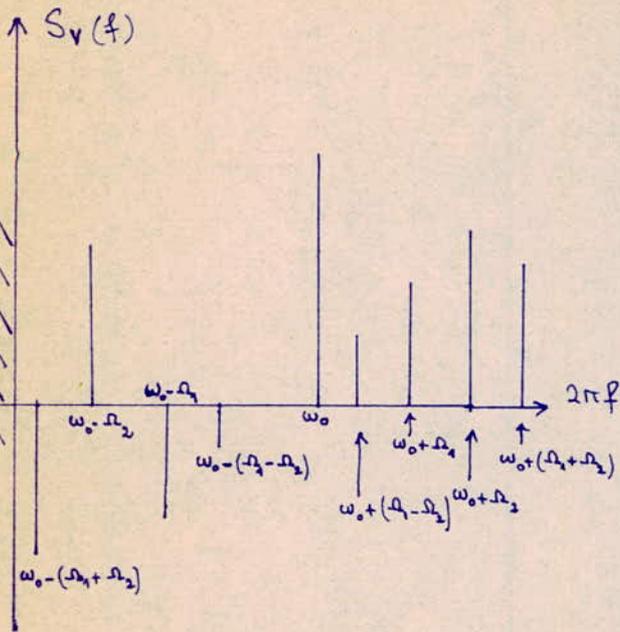
ou

$$v(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + n_p \cos \Omega_2 t) + \frac{A_0 m_A}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_1)t + n_p \cos \Omega_2 t]$$

$$+ \frac{A_0 m_A}{2} \cos [(\omega_0 - \Omega_1)t + n_p \cos \Omega_2 t]$$

.../...

MODULATION MIXTE



attention les intervalles ne ont pas respectés)

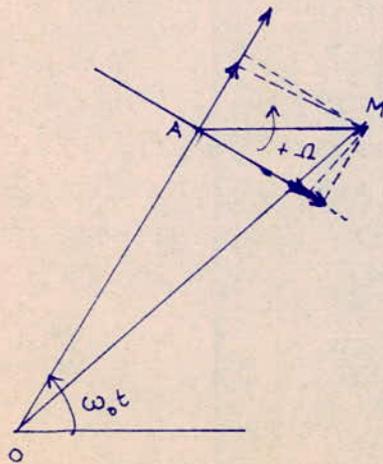


fig V : Représentation vectorielle de la modulation mixte.

et finalement

$$\begin{aligned}
 v(t) = & A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 n_p}{2} \left[\cos(\Omega_2 + \omega_0)t - \cos(\omega_0 - \Omega_2)t \right. \\
 & + \frac{A_0 n_A}{2} \left\{ \left[\cos(\Omega_1 + \Omega_2 + \omega_0)t + \cos[(\Omega_2 - \Omega_1) + \omega_0]t \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \cos[\omega_0 - (\Omega_1 + \Omega_2)]t - \cos[(\Omega_1 - \Omega_2) + \omega_0]t \right\} \\
 & \left. + \frac{A_0 n_A}{2} \left[\cos(\Omega_1 + \omega_0)t + \cos(\omega_0 - \Omega_1)t \right] \right.
 \end{aligned}$$

(II.33)

Les spectres F.M. et A.M. se retrouvent avec en outre deux autres paires de raies latérales à $\Omega_1 + \Omega_2$ et $|\Omega_2 - \Omega_1|$; on note que la puissance est toujours celle de la modulation A.M. comme si il n'y avait pas de F.M.

On peut déjà dans ce cas particulier de modulation sinusoidale faire des remarques sur les relations entre $S_v(f)$ et $S_s(f)$ ou $S_v(f)$ et $S_a(f)$.

On obtient dans les deux cas de modulations :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour une A.M pure} \\ \text{pour une F.M pure} \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_v = \frac{1}{2} \left[S_a(f-f_0) + \frac{A_c^2}{2} \delta_{f_0} \right] \\ S_v = \frac{A_c^2}{2} \left[\delta_{f_0} + S_\phi(f-f_0) \right] \\ = \frac{A_c^2}{2} \left[\delta_{f_0} + \frac{S_\phi(f-f_0)}{\Omega^2} \right] \end{array}$$

mais pour un état mixte, on a une expression compliquée du genre

$$f(S_a, S_v, S_\phi) = 0$$

Nous allons maintenant étudier l'état mixte sous sa forme vectorielle :

$$v(t) = \text{Re} \{ Z(t) \} ; Z(t) \text{ étant l'affixe de } v(t)$$

Pour obtenir une forme simple de $Z(t)$ nous supposons $m_a = m_p < 0,1$ (ce qui est suffisant pour négliger les termes croisés) et de plus $\omega_1 = \omega_2$

$$v(t) = \text{Re} \left\{ A_0 \exp(j\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \left[\exp(j(\omega_0 + \Omega)t) - \exp(j(\omega_0 - \Omega)t) + \exp(j(\omega_0 + \Omega)t) + \exp(j(\omega_0 - \Omega)t) \right] \right\}$$

$$v(t) = \text{Re} \left\{ A_0 \exp(j\omega_0 t) + A_{0m} \exp(j(\omega_0 + \Omega)t) \right\}$$

donc si nous avons affaire à de faibles modulations ; ce qui est vrai pour les bruits que nous avons à mesurer, le vecteur modulation est polarisé circulairement prenant successivement des positions A.M et F.M.

La modulation F.M est celle de modulation d'amplitude minimum :

Ce fait est très important, car nos détecteurs ne sont sensibles qu'à la A.M comme nous l'avons déjà signalé.

La modulation pour $m \leq 0,3$ est une raie pure à la fréquence $f_0 + F$. Dans tous les cas on considère que le bruit dans les conditions de la mesure est une modulation B.F du signal H.F.

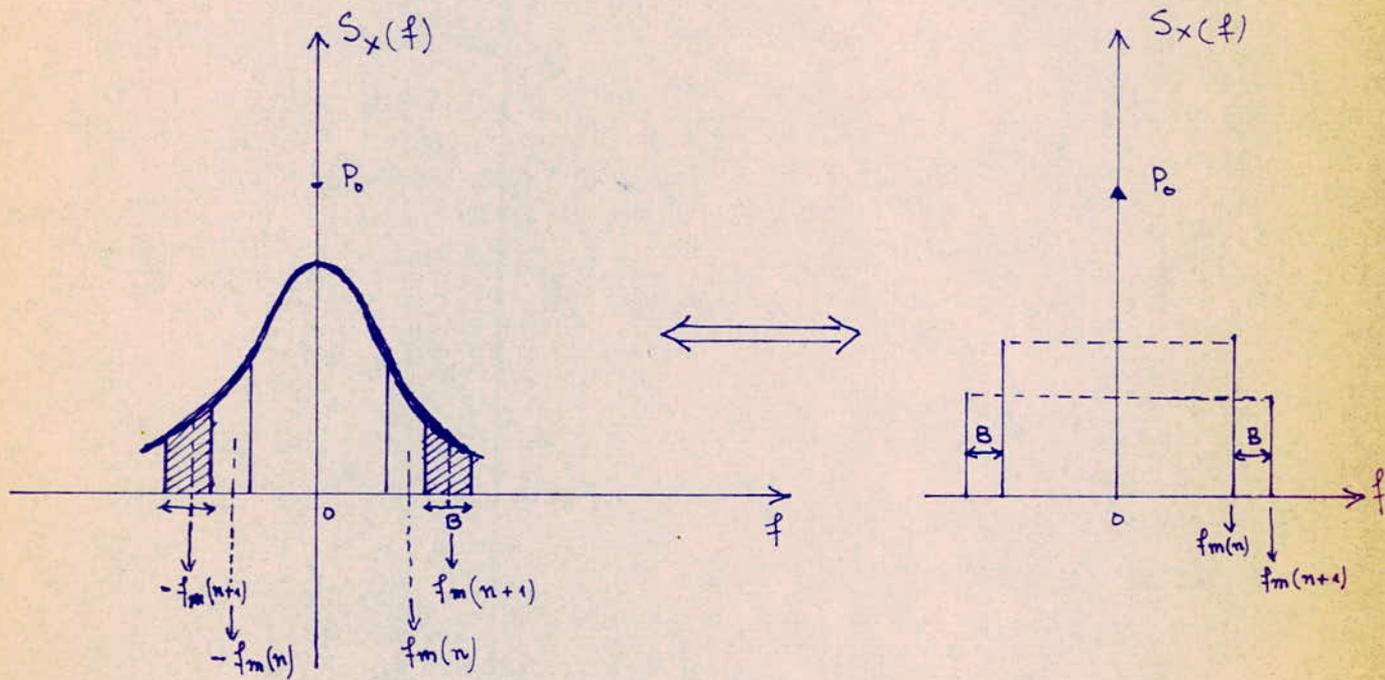
II - 4 - Le bruit comme une modulation B.F.

On cherche à chiffrer le bruit à une fréquence de la porteuse dans une bande passante B.

$$N_2(X, f_m, B) = 2 \frac{\int_{f_m - B/2}^{f_m + B/2} S_x(f) df}{P_0}$$

$X(t)$ étant le signal aléatoire.

EQUIVALENCE BRUIT - MODULATION B.F.



Pour cela on décompose le spectre $S_x(f)$ en tranches de longueur B centrée en $f_m(n)$; n étant un indice entier

$$P_x \text{ (puissance de bruit)} = \sum_{n=0}^{\infty} N_2 (X, B, f_m(n))$$

avec $f_m(n+1) - f_m(n) = B.$

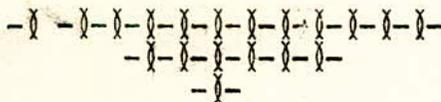
Le niveau de bruit est toujours très faible / la porteuse.

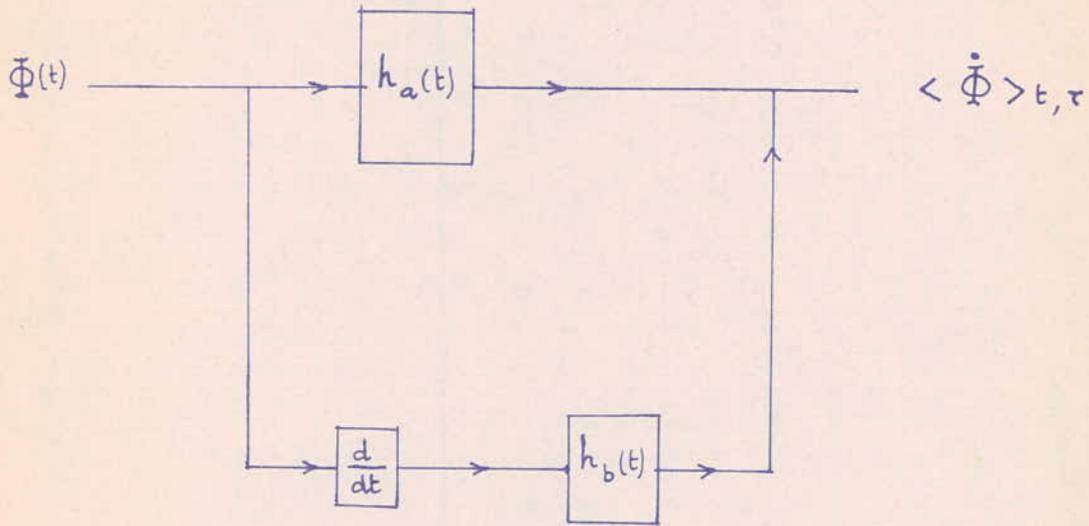
Chaque paire de tranches peut-être assimilée à une source B.F. de modulation et on utilise alors les résultats précédents ; car le bruit est devenu une suite discrète de sources de modulations B.F.

Il peut sembler bizarre que l'on utilise des résultats sur de fonctions certaines pour un phénomène aléatoire. En fait on a basé nos raisonnements sur des puissances moyennes et ce sont les fonctions certaines $R_V(\tau)$ et $S_x(f)$ qui interviennent. Nous avons ainsi établi le modèle qui permet de traiter le bruit comme une modulation. Lorsque l'on fera une mesure, on ne considérera que le bruit dans une bande B à f_m de la porteuse ; c'est-à-dire, que le bruit sera équivalent à une seule source B.F. DE FREQUENCE f_m .

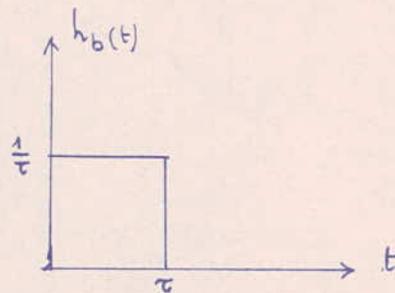
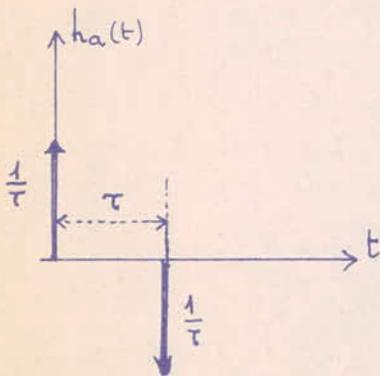
Dans ces conditions :

- Lorsque le bruit sera purement d'amplitude $\vec{OA} // \vec{AM}$; on fera une détection usuelle de A.M à l'aide d'un détecteur à diode
- Lorsque le bruit sera purement de fréquence $\vec{OA} \perp \vec{AM}$; on le transformera en bruit d'amplitude en faisant tourner la modulation par rapport à la porteuse (pont de phase) ou alors en associant au signal F.M un signal A.M (discriminateur) qui est ensuite détecté





$$\frac{d}{dt} h_b(t) = h_a(t)$$



- fig VI . Obtention de $\langle \dot{\Phi} \rangle_{t, \tau}$ à partir de $\Phi(t)$ à l'aide de filtres . -

ANALYSE MATHÉMATIQUE DU BRUIT DE FRÉQUENCE DANS LE DOMAINE TEMPS

Nous nous proposons de jeter les bases théoriques du traitement mathématique du bruit de fréquence dans le domaine temps.

Les mesures classiques se font dans le domaine fréquence et nous avons longuement discuté le principe théorique de la mesure. Le développement des mesures dans le domaine temps vient de l'impossibilité de mesurer le bruit près de la porteuse dans le domaine fréquence ($< 100 \text{ Hz}$). Mais comme il faut finalement donner une puissance de bruit comme résultat final le problème s'est posé de trouver la grandeur temporelle qui donne les relations de passage les plus simples. C'est à quoi tend la méthode de la variance d'HADAMARD.

Expérimentalement on atteint des évaluations statistiques. Afin d'éviter de surcharger ce chapitre, nous développerons ce point de vue plus loin (au chap VIII)

III - 1 - Les différentes moyennes temporelles :

On a toujours
$$\dot{\omega}_i = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \dot{\Phi}(t)$$

Par définition on suppose que la moyenne de $\dot{\Phi}(t)$ sur un temps infini est telle que :

(III.1)
$$\langle \dot{\Phi} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \dot{\Phi}(t) dt = 0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Phi(+T/2) - \Phi(-T/2)}{T}$$

donc
$$\langle \omega_i \rangle = \omega_0 \quad \text{(III.2)}$$

On définit aussi une moyenne sur un temps fini

$$\begin{aligned} \langle \dot{\Phi} \rangle_{t, \tau} &= \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \dot{\Phi}(t) dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \dot{\Phi}(t') dt' \\ &= \frac{\Phi(t+\tau/2) - \Phi(t-\tau/2)}{\tau} \end{aligned} \quad \text{(III.3)}$$

$\dot{\Phi}(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire ; il en est de même de $\langle \dot{\Phi} \rangle_{t, \tau}$

$$\langle \dot{\Phi} \rangle_{t, \tau} = \frac{\Phi(t+\tau/2) - \Phi(t-\tau/2)}{\tau} = \frac{\Phi(t+\tau) - \Phi(t)}{\tau} \quad \text{(III.4)}$$

$$\langle \dot{\Phi} \rangle_{t, \tau} = \frac{\Phi(t+\tau) * \delta_{t+\tau} - \Phi(t) * \delta_t}{\tau}$$

On a représenté fig. III.1 le filtre qui correspond au passage de $\dot{\Phi}(t)$ à $\langle \dot{\Phi} \rangle_{t, \tau}$

.../...

III - 2 - Variances :

A chaque variable aléatoire on peut faire correspondre le moment d'ordre deux ou variance.

Etant donné que $E[\dot{\Phi}] = \langle \dot{\Phi} \rangle = 0$; nous caractérisons $\dot{\Phi}(t)$ par sa variance.

$$\sigma^2(\dot{\Phi}) = E[\dot{\Phi} - E[\dot{\Phi}]]^2 = \langle [\dot{\Phi} - E[\dot{\Phi}]]^2 \rangle = \langle \dot{\Phi}^2 \rangle - (E[\dot{\Phi}])^2$$

$$\sigma^2(\dot{\Phi}) = \langle \dot{\Phi}^2 \rangle \quad \text{(III-5)}$$

σ^2 est la grandeur temporelle qui renseigne sur l'écart de ω_i/ω_0
On a de même

$$\sigma^2(\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}) = \langle \langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{t,\tau} \rangle \quad \text{(III-6)}$$

car $\langle \langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau} \rangle = \frac{\langle \dot{\Phi}(t+\tau/2) \rangle - \langle \dot{\Phi}(t-\tau/2) \rangle}{\tau} = 0$

$\sigma^2(\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau})$ s'exprime en $(\text{rd/sec})^2$

On utilise habituellement une grandeur dérivée pour définir la stabilité en fréquence sur un temps τ de la source c'est :

$$I(\tau) = \frac{\sigma(\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau})}{\omega_0} \quad \text{(III-7)}$$

on dit ainsi qu'une source a une stabilité de 10^{-n} à la fréquence X
(ex : pour un bon quartz vers 100 MHz on peut atteindre 10^{-12})

comme $\omega_i = \omega_0 + \dot{\Phi}(t) \implies \sigma(\langle \omega \rangle_{t,\tau}) = \sigma(\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau})$

$$I(\tau) = \frac{\sigma(\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau})}{\omega_0} = \frac{\sigma(\langle \omega \rangle_{t,\tau})}{\omega_0} \quad \text{(III-8)}$$

(cf annexe page)

III - 3 - Conclusion partielle :

Nous allons dégager dès maintenant l'utilité de la théorie des filtres linéaires pour passer du domaine temps au domaine fréquence.

Cette étude sera développée lors de l'évaluation statistiques des variances
(Ce que nous cherchons c'est évaluer la "puissance" F.M dans une bande B à une fréquence f_m de la porteuse. On cherche, donc à connaître

$S_{\dot{\Phi}}(f_m)$; or $\sigma^2(\dot{\Phi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\Phi}}(f) df$

Nous ne pouvons pas inverser cette formule dans le cas général
Pour atteindre $S_{\dot{\Phi}}(f_m)$ il faut pouvoir calculer l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\Phi}}(f) \delta_{f-f_m} df = S_{\dot{\Phi}}(f_m) \quad \dots/\dots$$

ce qui revient à faire passer $\dot{\Phi}(t)$ dans un filtre infiniment étroit autour de f_m . Le but va donc être de se rapprocher le plus possible de ce filtre idéal, en calculant une variance de mieux en mieux adaptée. En calculant $\sigma^2 \langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}$ au lieu de $\sigma^2(\dot{\Phi})$ on simplifie quelque peu le problème

$$\sigma^2 \langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\Phi}}(f) \left| \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \right|^2 df$$

Donc le filtre associé à $\sigma^2 \langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}$ a pour réponse impulsionnelle

$$H(f) = \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau}$$

On développera tout ceci dans un autre chapitre (§ 8).

III.3 Relations entre variances et densités spectrales

Nous donnerons ici les relations les plus générales avec leur démonstration

$$* \quad \sigma^2 [\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}] = \overline{\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}^2} = \overline{\left[\frac{1}{2} (\Phi(t+\frac{\tau}{2}) - \Phi(t-\frac{\tau}{2})) \right]^2}$$

$$\sigma^2 [\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}] = \frac{1}{\tau^2} \left[\overline{\Phi^2(t+\frac{\tau}{2})} + \overline{\Phi^2(t-\frac{\tau}{2})} - 2 \overline{\Phi(t+\frac{\tau}{2})\Phi(t-\frac{\tau}{2})} \right]$$

d'où

$$\boxed{\sigma^2 [\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}] = \frac{2}{\tau^2} [R_\Phi(0) - R_\Phi(\tau)]}$$

$$** \quad \sigma^2 [\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}] = \frac{1}{\tau^2} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \overline{\dot{\Phi}(s) \dot{\Phi}(s')} ds ds'$$

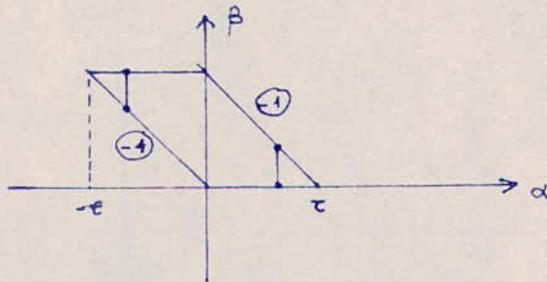
$$\sigma^2 = \frac{1}{\tau^2} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} ds \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} R_{\dot{\Phi}}(s'-s) ds'$$

avec $s-s' = \alpha$ $\beta = s'$

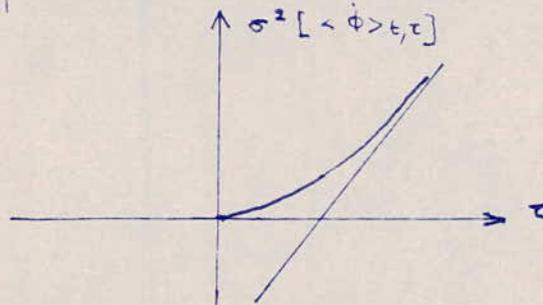
$$\sigma^2 [\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}] = \frac{1}{\tau^2} \int_D R_{\dot{\Phi}}(\alpha) d\alpha d\beta = \frac{1}{\tau^2} \int_{-\tau}^{\tau} (\tau - |\alpha|) R_{\dot{\Phi}}(\alpha) d\alpha$$

$$\boxed{\sigma^2 [\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}] = \frac{2}{\tau^2} \int_0^{\tau} (1 - \frac{\alpha}{\tau}) R_{\dot{\Phi}}(\alpha) d\alpha}$$

Le domaine D est figuré ci-dessous.



Un exemple classique de courbe de bruit F.M. en fonction de τ est la suivante



$$*** \quad \sigma^2 [\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}] = \frac{2}{\tau^2} [R_\Phi(0) - R_\Phi(\tau)]$$

soit $R_\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \Rightarrow R_\Phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\Phi(\omega) d\omega$

d'où $\sigma^2 [\langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_\Phi(\omega)}{(\frac{\omega\tau}{2})^2} \frac{(1 - e^{j\omega\tau})}{2} d\omega.$

.../...

comme $R_{\phi}(\tau)$ est une fonction paire alors :

$$\sigma^2 [\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{\dot{\phi}}(\omega)}{(\frac{\omega\tau}{2})^2} \sin^2(\frac{\omega\tau}{2}) d\omega$$

$$\sigma^2 [\langle \ddot{\phi} \rangle_{t,\tau}] = \frac{2}{\pi\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{\phi}}(\omega) \sin^2(\frac{\omega\tau}{2}) d\omega.$$

On utilise $S_{\dot{\phi}}(\omega) = \omega^2 S_{\phi}(\omega)$

($\phi \rightarrow \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow S_{\dot{\phi}}(\omega) = |\jmath\omega|^2 S_{\phi}(\omega)$; filtre dérivé)

Récapitulons sous forme de tableaux les principaux résultats trouvés.

1°	$\sigma^2 \dot{\phi} = \overline{\dot{\phi}^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) df$
2°	$\sigma^2 \langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} R_{\dot{\phi}}(\tau') [1 - \frac{\tau'}{\tau}] d\tau'$
3°	$\sigma^2 \langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2} df$
4°	$S_{\dot{\phi}}(f) = 4\pi^2 f^2 S_{\phi}(f).$

Domaine fréquence	Domaine temps
densités spectrales	Moyennes
$S_v(f)$	$\langle \dot{\phi} \rangle = \langle \Phi \rangle = 0$
$S_{\dot{\phi}}(f) \quad S_{\phi}(f)$	$\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \dot{\phi}(t) dt$
$S_a(f)$	Variations
	$\sigma^2(\dot{\phi})$ et $\sigma^2(\langle \dot{\phi} \rangle_{t,\tau})$

C H A P I T R E - IV -

=====

OSCILLATEUR A "KLYSTRON REFLEX"

IV-1- Considérations générales :

Le "KLYSTRON REFLEX" fait partie des dispositifs qui réunissent les fonctions d'oscillateur et de modulateur à réactance variable .

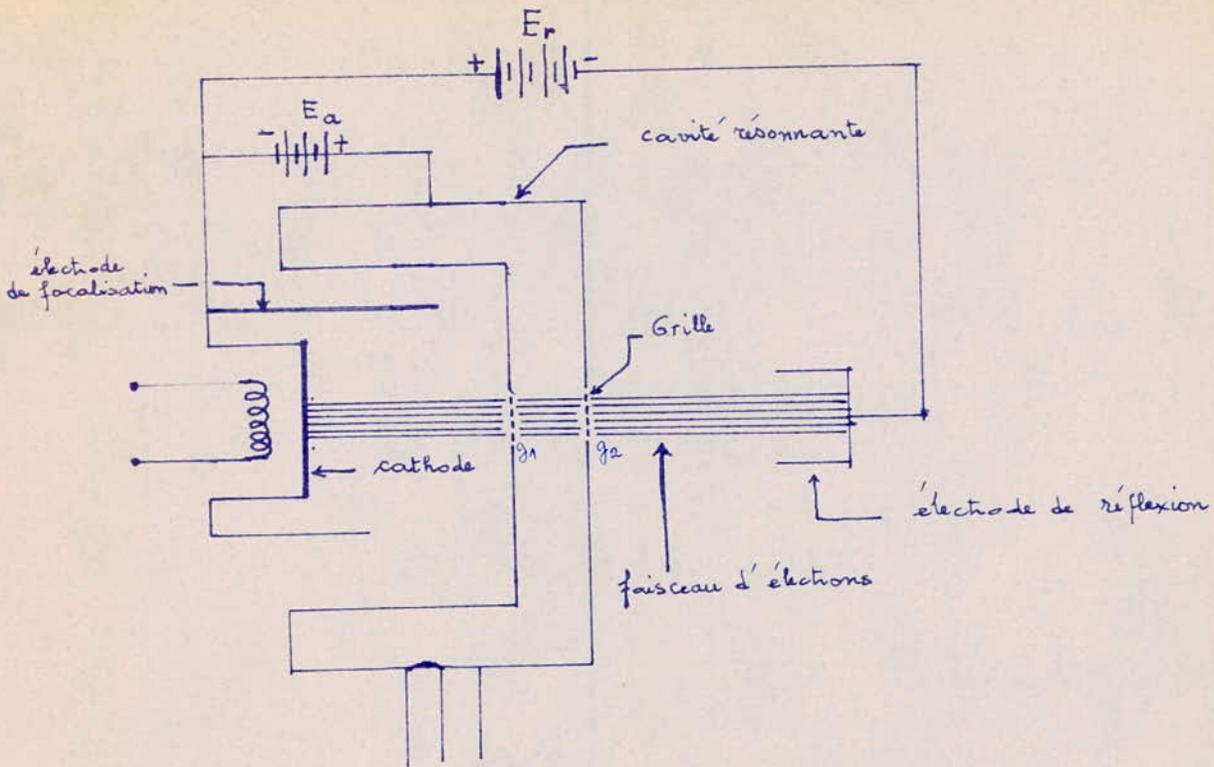
Le "Klystron réflex" constitue le moyen le plus utilisé pour obtenir des oscillations modulées en fréquence; directement dans la bande des Gigahertz (bande X par exemple) à des puissances relativement grandes (30 A 250 mW dans la bande de 3 à 12 Gigahertz et 10mW environ dans la bande 65 à 85 Ghz)

IV-2- Fonctionnement :

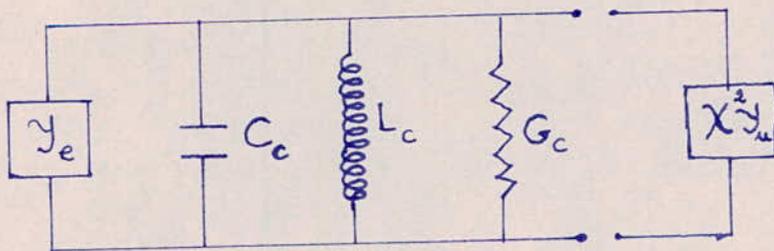
(Cf fig IV.1) . Les électrons émis par la cathode , après avoir été concentrés en faisceau à l'aide d'une électrode de focalisation , passent par des orifices (grilles) pratiqués dans les parois d'une cavité résonnante. Les parois de la cavité se trouvent à un potentiel positif E_a par rapport à la cathode , constituant l'électrode accélératrice. En supposant que, à l'intérieur de la cavité il existe un champ électrique HF , les électrons qui traversent la cavité sont modulés en vitesse par ce champ HF (en effet le champ électrique à l'intérieur de la cavité est tantôt positif, tantôt négatif; donc une fois il ralentit les électrons, une fois les accélère d'où modulation de vitesse). Grâce à la vitesse acquise , ils passent dans l'espace compris entre la paroi de la cavité et l'électrode de réflexion .

..../....

KLYSTRON REFLEXE



- fig IV. 1. Schéma du Klystron réflexe.



- fig IV. 2 circuit oscillant // équivalent à la cavité résonnante.

- Y_e est l'admittance électronique.
- Y_u est l'admittance "charge" couplée à la cavité.
- X^2 est le rapport de transformation.

Du fait que l'électrode de réflexion se trouve à un potentiel négatif par rapport à la cathode ($-E_r$), les électrons sont freinés puis réfléchis. Dans l'espace compris entre la paroi de la cavité et l'électrode de réflexion, et sous l'action du champ uniforme de freinage, les électrons modulés en vitesse sont groupés en paquets (car les électrons qui ont été freinés dans la cavité par le champ H.F vont voir leur vitesse considérablement réduite et les électrons accélérés dans la cavité vont les rattraper \Rightarrow groupements en paquets), dont le centre de gravité se trouve au voisinage des électrons qui traversent la cavité résonnante au moment où le champ H.F passe par zéro, devenant champ de freinage.

Les électrons réfléchis passent de nouveau par les orifices de la cavité et, lorsqu'ils rencontrent à l'intérieur de la cavité un champ de freinage ils cèdent de l'énergie à la cavité résonnante. Si les conditions d'entretien des oscillations sont satisfaites, le système devient oscillateur. On voit que l'énergie cédée par un électron au champ est maximale lorsque l'électron réfléchi rencontre dans la cavité un champ électrique de freinage maximal ce qui arrive lorsque le temps de retour de l'électron est égal à :

$$\frac{3}{4}, 1. \frac{3}{4}, 2. \frac{3}{4}, \dots \dots \dots n \frac{3}{4} \text{ périodes}$$

IV - 3 - Théorie sommaire de fonctionnement du "Klystron Réflexe" :

L'interaction entre le faisceau d'électrons et le champ à l'intérieur de la cavité équivaut à l'introduction d'une admittance, appelée admittance électronique (admittance active), en // sur l'admittance propre Y_c de la cavité (admittance passive), toutes les deux étant définies en nous rapportant à l'espace traversé par le faisceau à l'intérieur de la cavité.

On montre que l'admittance active Y_e a pour expression (*)

$$(IV-1) \quad Y_e = 2\pi m^2 N \frac{I_k}{E_a} \frac{J_1(\pi m N U/E_a)}{\pi m N U/E_a} \frac{-2\pi N + \frac{\pi}{2}}{\uparrow \text{phase}}$$

- où I_k = courant correspondant au faisceau d'électrons
- E_a = la tension continue anodique
- U = Amplitude de la tension H.F à l'intérieur de la cavité correspondant à l'espace parcouru par les électrons
- m = le coefficient de modulation du faisceau
- N = le temps de transit des électrons, aller et retour, entre l'anode et le réflecteur, mesuré en période
- $J_1(z)$ = fonction de Bessel du 1^o ordre d'argument z
- N est donné par la relation

$$2\pi N = k \cdot \omega \frac{\sqrt{E_a}}{E_a + E_r} \quad (IV-2)$$

où k est un coefficient qui dépend de la géométrie du tube ($\omega = 2\pi f$)
 $(-E_r) =$ le potentiel négatif de l'électrode de réflexion.

f GINZTON & HARRISON : " Reflex klystron oscillators "
 Proc. I.R.E. (MARCH 1947) vol 34, page 97.

L'expression (IV-1) peut encore être mise sous la forme

$$\begin{aligned}
 Y_e &= 2 \pi m^2 N \frac{I_k}{E_a} \frac{J_1(z)}{z} \left| -\alpha + \frac{\pi}{2} \right| = Y_{e0} \left| -\alpha + \frac{\pi}{2} \right| \quad (IV-2) \\
 \text{où } Y_{e0} &= 2 \pi m^2 N \frac{I_k}{E_a} \frac{J_1(z)}{z} \\
 z &= \pi m N \frac{U}{E_a} \\
 \alpha &= 2 \pi N = k \cdot \omega \frac{\sqrt{E_a}}{E_a + E_r}
 \end{aligned}$$

Pour comprendre le fonctionnement du Klystron comme oscillateur il importe d'étudier la variation de l'admittance Y_e en fonction de N . De la relation (IV-1) il résulte que l'admittance est une conductance purement négative pour

$$N = N_0 = \frac{3}{4} ; 1 \cdot \frac{3}{4} ; \dots ; n \cdot \frac{3}{4}$$

ce qui concorde avec les remarques faites ci-dessus, selon lesquelles, dans ces conditions, l'énergie cédée par les électrons au champ à l'intérieur de la cavité est maximale.

$$\text{L'argument de l'admittance, } \arg Y_e = -2 \pi N + \frac{\pi}{2},$$

est fonction uniquement de la grandeur N , qui croît lorsque E_r diminue et qui est indépendante de U . Le module de l'admittance, Y_{e0} croît avec N pour de faibles valeurs de la variable z (donc pour U petit).

Il s'ensuit que, lorsque N croît, l'admittance Y_e , correspondant à une certaine valeur U , décrit une spirale en sens inverse du sens trigonométrique, et la conductance passe successivement par des valeurs positives et négatives (fig. IV.3). La variation du module de l'admittance en fonction de U , pour une valeur donnée de N , est déterminée par le facteur $\frac{J_1(z)}{z}$.

Ce facteur a sa valeur maximale égale à 0,5 pour $z = 0$, donc pour $U = 0$ et il diminue lorsque U croît, passant par zéro pour $z = 3,83$.

Sur le diagramme de la (fig. IV.3), la courbe en trait continu représente la variation de l'admittance pour $U = 0$ (au moment de l'amorçage des oscillations). Lorsque la tension U croît, la spirale se contracte ; la courbe à traits interrompus représente la variation de l'admittance pour une certaine valeur U de la tension du réflecteur.

La cavité résonnante est équivalente, en ce qui concerne l'échange de puissance active et réactive qui se produit à l'entrée, à un circuit oscillant parallèle constitué par une capacité C_c , une inductance L_c et une conductance G_c (fig. IV.2) - Le circuit a une fréquence de résonance ω_r et un facteur de qualité Q_c .

En notant par Y_c l'admittance de la cavité, on peut écrire :

$$(IV.4) \quad Y_c = G_c + j \omega_r C_c \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right) \approx G_c + 2j C_c (\omega - \omega_r)$$

La charge couplée à la cavité peut-être représentée par une admittance Y_u ; elle est transformée dans le rapport X^2 à cause du système de couplage entre la cavité et la charge.

L'admittance Y_u , multipliée par X^2 , est constituée, en général d'une partie résistive et d'une partie réactive.

$$X^2 Y_u = X^2 G_u + j X^2 B_u \quad (IV.5)$$

Les admittances Y_c et $X^2 Y_u$ se trouvent en parallèle avec l'admittance électronique Y_e .

On trouve la condition d'oscillation du klystron en régime stationnaire en annulant la somme des admittances Y_c , Y_e et $X^2 Y_u$. On obtient ainsi la relation :

$$Y_c (U, w, N) + Y_e (w) + X^2 Y_u (w) = 0 \quad - IV.6-$$

ou

$$Y_c (U, w, N) = - Y_r (w) \quad (IV.7)$$

où N dépend de w et de E_r , et $Y_r = Y_c + X^2 Y_u$.

En annulant la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation (IV.7), on obtient la fréquence d'oscillation et l'amplitude U de la tension fournie par l'oscillateur en régime stationnaire, pour une valeur donnée de la tension du réflecteur. Lorsque cette tension varie, N varie aussi et simultanément se modifient la fréquence d'oscillation et l'amplitude U de la tension.

En superposant à la tension de polarisation E_{ro} du point normal de service la tension de modulation, on obtient la modulation de fréquence de l'oscillation. Dans le cas où $B_u = 0$ (circuit de charge accordé), la somme des admittances Y_c et $X^2 Y_u$ peut être mise sous la forme :

$$Y_r = Y_c + X^2 Y_u = G_r + j w r C_c \left(\frac{w}{w_r} - \frac{w_r}{w} \right) \approx G_r + j 2 C_c (w - w_r)$$

$$\text{où } G_r = G_c + X^2 G_u \quad (IV.8)$$

On peut expliquer les phénomènes physiques qui ont lieu, à l'aide du diagramme de la (fig. IV.3) construit à partir des relations (IV.7 & IV.8). Sur ce diagramme, la courbe de variation de l'admittance $- Y_r$ avec la fréquence est représenté par la droite δ . L'abscisse (oa) représente la conductance $- G_r$ et l'ordonnée aA, la susceptance $- w r C_c \left(\frac{w}{w_r} - \frac{w_r}{w} \right)$, qui varie presque proportionnellement à l'écart de fréquence par rapport à la fréquence de résonance.

Pour amorcer les oscillations, il est nécessaire que l'admittance totale correspondant à l'admittance $Y_e + Y_r$ soit négative. Par suite le point qui représente Y_e pour $U=0$ doit se trouver à gauche de la droite δ .

Dans ces conditions, une oscillation d'amplitude croissante prend naissance et Z croît. Il s'ensuit que le module de l'admittance Y_e diminue (la courbe correspondante se contracte) tandis que son argument $- 2 \pi N + \frac{\pi}{2}$ reste

constant, de sorte que le point qui représente Y_e se rapproche à mesure que U croît. La construction graphique exprime l'égalité entre les modules et les arguments des admittances Y_e et $- Y_r$ au point A, où sont satisfaites les équations du régime d'oscillation stationnaire (IV.7). La relation entre les arguments conduit à :

$$\arg [-Y_r (w)] = - 2 \pi N + \frac{\pi}{2} \quad (IV.9)$$

Dans une première approximation, on peut considérer N comme étant indépendant de la fréquence et, dans ce cas la fréquence se déduit simplement de la relation (IV.9). L'amplitude U résulte de la relation entre les modules.

.../...

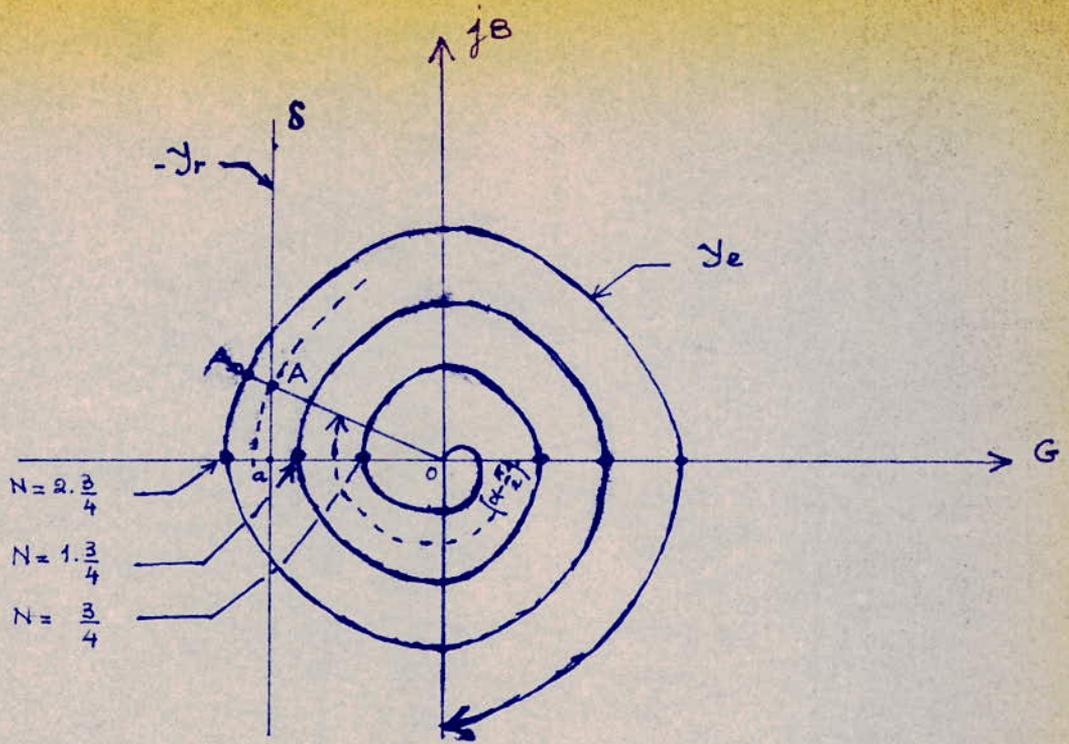


fig V.3. - Courbe décrite par l'admittance électronique Y_e , en fonction de la variation de la tension E_r ; et courbe décrite par l'admittance Y_r en fonction de la variation de fréquence.

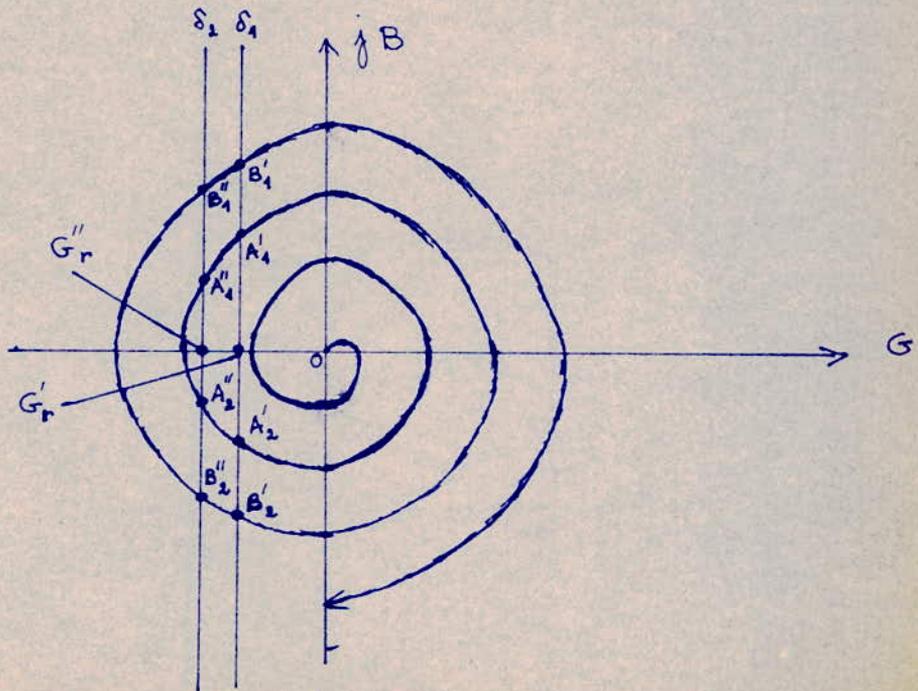


fig V.4. Courbe décrite par l'admittance électronique Y_e et courbes décrites par les admittances $-Y_r$ en deux cas différents :
 - charge de valeur élevée ($A''B''$)
 - charge de valeur réduite ($A'B'$)

Si la tension E_r varie au rythme du signal de modulation, l'angle du rayon vecteur \overline{OA} et, par suite, la distance OA , qui est proportionnelle à $-wr C_c \left(\frac{w}{wr} - \frac{wr}{w} \right)$, se modifient ; on obtient de la sorte la modulation en fréquence de l'oscillation.

Sur le diagramme de la (fig.IV.4), les droites δ_1 et δ_2 représentent les admittances de la cavité résonnante (en changeant de signe) correspond à deux conductances de charges différentes.

De l'analyse de ces diagrammes on peut tirer les conclusions suivantes :

- il existe plusieurs modes d'oscillations, suivant la valeur au voisinage de laquelle se trouve $N : \frac{3}{4}, 1. \frac{3}{4}, 2. \frac{3}{4} \dots\dots\dots$
- les limites de variation de la fréquence en fonction de E_r sont d'autant plus grandes que le mode d'oscillation est plus élevé, par exemple, dans les limites $A_1 A_2$ pour le mode $1. \frac{3}{4}$ et dans les limites $B_1 B_2$ pour le mode $2. \frac{3}{4}$.
- Pour un même mode d'oscillation, les limites de variation de la fréquence sont d'autant plus grandes que la conductance G_r est plus petite (charge plus petite), $A'1 A'2$ pour la conductance $G'r$ et $A''1 A''2$ pour la conductance $G''r$ ($G'r$ $G''r$ et $N = 1. \frac{3}{4}$).
- la pente de la caractéristique de modulation est d'autant plus grande que G_r est plus grand et que le mode d'oscillation est plus élevé.

La tension qui prend naissance est d'autant plus grande que le point qui représente Y_r est plus éloigné de la courbe de l'admittance Y_0 qui correspond à la tension $U = 0$ et à un mode d'oscillation donné.

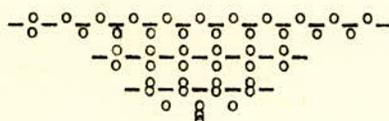
On peut voir que la puissance active cédée par le champ de la cavité à pour valeur

$$P = \frac{E_a I_k}{\pi N} Z J_1(Z) \sin 2 \pi N \quad (IV.10)$$

pour les valeurs de N données par (IV.10), la puissance est négative et, par conséquent, absorbée par la cavité. La puissance est maximale pour les valeurs Z qui laissent le produit $Z J_1(Z)$ maximal (ces valeurs étant les zéros de la fonction $J_0(Z)$).

On peut voir, si l'on trace la courbe de variation de la fréquence en fonction de la tension de réflecteur, que la fréquence varie linéairement avec la tension du réflecteur, dans une bande d'environ 10 MHz et qu'on peut donc obtenir une caractéristique de modulation linéaire dans une large bande. La courbe de variation de la puissance montre que la modulation de fréquence est accompagnée d'une modulation d'amplitude.

A l'aide du tube klystron, on peut obtenir une déviation de fréquence suffisamment linéaire dans une bande de 2,5 à 5 % de la fréquence centrale, mais la bande d'accord électronique reste plus grande.



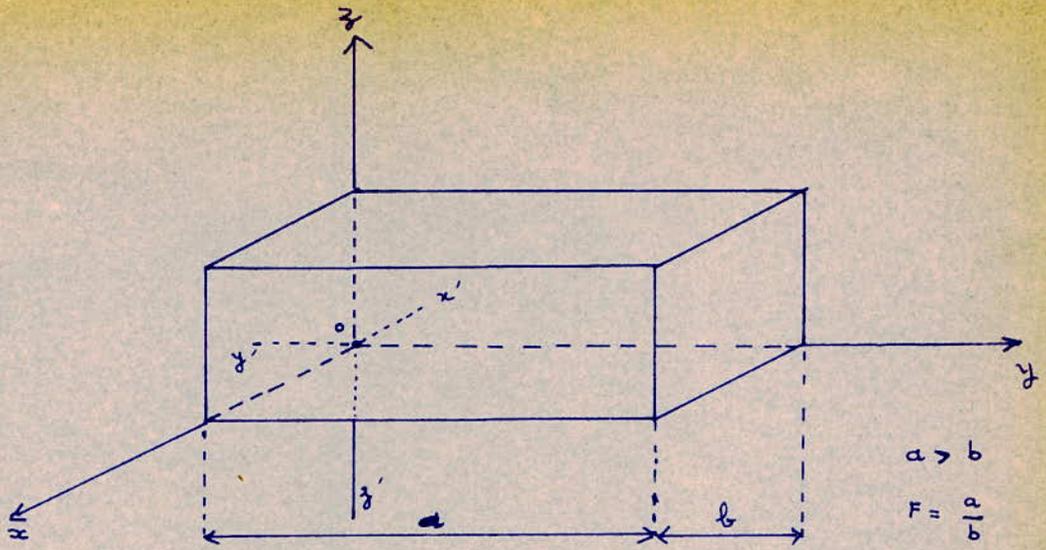
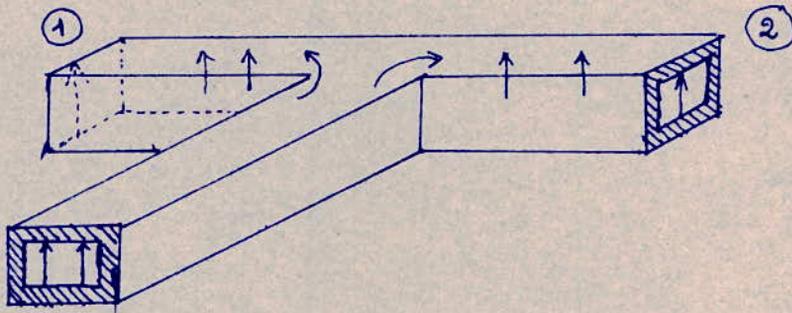


fig 2.1 schéma d'un guide rectangulaire



(4) fig 2.2 "T plan" parallèle ou " T_H "

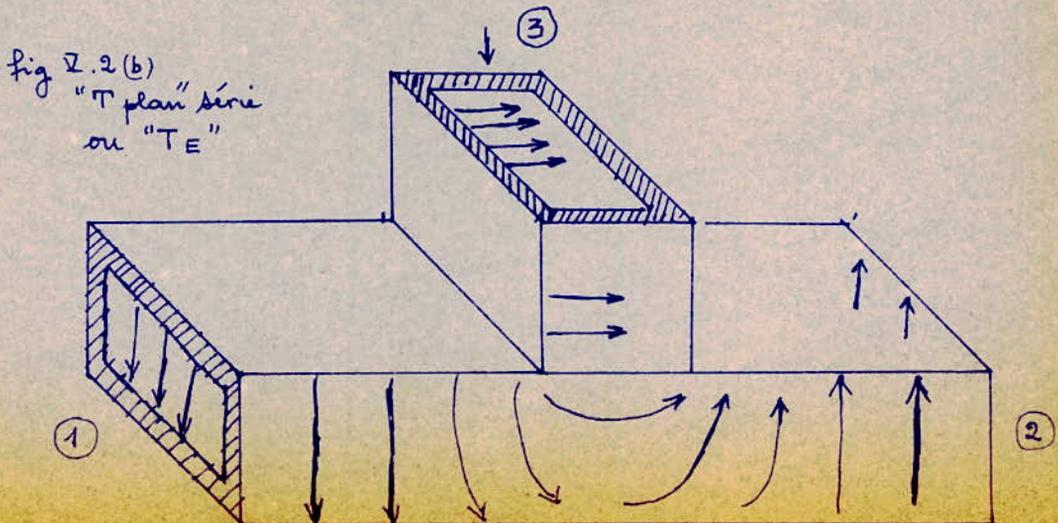


fig 2.2(b)
"T plan" série
ou " T_E "

- CHAPITRE V -

- ETUDE EXPERIMENTALE -

V - 1 Banc de mesure :

Avant de décrire la technique de mesure proprement dite, nous passerons en revue des différents éléments du banc de mesure :

- le circuit est un guide d'onde en bande X
- les éléments détecteurs
- un discriminateur pour la transposition F.M - A.M
- un mélangeur équilibré constitué d'un té hybride.

V - I 1 - Le guide d'onde :

Les mesures sont faites sur des porteuses en bande X. On utilise des guides rectangulaires.

Un guide rectangulaire est un guide dont la section est un rectangle de côtés a et b. Il existe une double infinité de modes de propagation

- Modes E_{mn} tels que $H_z = 0$ (transverse Magnétique)
- Modes H_{mn} tels que $E_z = 0$ (transverse Electric)

Si pour les ondes libres de longueur d'onde λ on pose $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ alors la constante de propagation d'un mode E_{mn} ou H_{mn} est telle que : γ

$$(\gamma_{mn})^2 = (K_c)_{mn}^2 - K^2$$

avec

$$(K_c)_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} = \pi a \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

$$f = \frac{a}{b}$$

= facteur de forme

Pour qu'il y ait propagation le long de l'axe des Z ; il faut que la constante γ_{mn} soit imaginaire.

si $K > K_c$ l'onde se propage alors sans affaiblissement avec une constante de phase kg ($\gamma_{mn} = j kg$) ; à laquelle on peut associer une longueur d'onde dans le guide.

Régime de coupure :

La condition de propagation $kg < k$ entraîne $\lambda_g > \lambda$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} < \frac{2\pi}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda < \lambda_g$$

donc la longueur d'onde dans le guide est toujours supérieure à celle des ondes libres.

Le régime de coupure est défini par $k = k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$

ou

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2}$$

la fréquence de coupure est ainsi

$$f_c = \frac{v}{2\pi} k_c$$

Pour un guide donné (a,b), un mode (m,n) déterminé ne peut se propager que si

UN GUIDE SE COMPORTE DONC COMME UN FILTRE PASSE-HAUT

Mode dominant :

On appelle mode dominant dans un guide, le mode dont la fréquence de coupure est la plus basse et dont par conséquent on peut assurer la seule propagation à condition de choisir la fréquence de travail entre la fréquence de coupure de ce mode et celle du mode suivant. Dans les guides rectangulaires le mode dominant est le mode H₁₀ sa fréquence de coupure est :

$$f_c = \frac{v}{2a} \iff \lambda_c = 2a.$$

si $F = \frac{a}{b} > 2$ le mode H₂₀ a pour fréquence de coupure $\frac{v}{a}$, on travaille donc entre $\frac{v}{a}$ et $\frac{v}{2a}$.

V - I - 2 - Atténuateur :

C'est un quadripôle dans la principale utilité est d'atténuer la puissance transmise à la charge (diode détectrice par ex.). La matrice de transmission de cet élément est :

$$\|t\| = \begin{bmatrix} c & e^{-A} \\ e^{-A} & c \end{bmatrix}$$

A est l'atténuation totale du quadripôle. Les atténuateurs peuvent être fixes ou variables (lame métallique qui s'enfonce plus ou moins dans le guide, tout en restant parallèle au petit côté).

V.- I-3- Ondémètre :

Les ondemètres sont constitués par une cavité accordable coup sur un élément de guides d'ondes rectangulaires. Le dispositif d'accord comprend un piston mobile commandé par l'intermédiaire d'une tête micrométrique. Il sert à l'étalonnage de la fréquence de travail du klystron.

Exemple : pour un enfoncement de 9,5 mm du piston il correspond une fréquence de 9300 MHz du Klystron.

V - 1 - 4 Multipôles :

- a) description

Nous décrivons un multipôle important. Il s'agit du té hybride. C'est un assemblage d'un té série et d'un té parallèle pour constituer un octo-

pôle. Il comporte quatre bras numérotés 1, 2, 3 et 4. Le bras quatre est le bras E, le bras trois est le bras H et les deux autres sont les bras dits transversaux.

D'après les propriétés des tés plans (fig.V2), on en déduit celles du té hybride.

Lorsque nous envoyons de l'énergie dans le bras 3, celle-ci se répartie en opposition de phase dans les bras 1 et 2. Si les bras transversaux sont bien adaptés aucune énergie ne passe dans 4 ; sinon de l'énergie renvoyée par 1 ou 2 se divise entre 3 et 4. Le même phénomène se produit si on envoie de l'énergie dans 4 ; mais cette fois là les ondes dans 1 et 2 sont en phase. Aucune énergie ne passe dans 3.

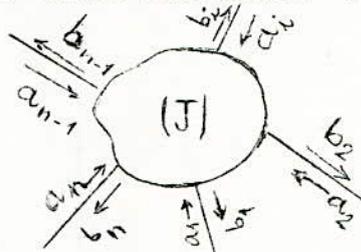
Un exemple d'utilisation pratique est le mélangeur équilibré que nous emploierons pour la mesure du bruit F.M (ou P.M).

Un té magique n'est qu'un té hybride dont les bras sont correctement adaptés à l'aide d'un volet et d'une vis placés au carrefour des quatre bras.

- b) matrice de distribution des tés hybrides :

Considérons n guides qui aboutissent à une jonction (J).

On peut alors décrire le comportement de la jonction au moyen de n ondes incidentes a_1, a_2, \dots, a_n et n ondes réfléchies b_1, b_2, \dots, b_n .



La linéarité du problème entraîne des relations de la forme :

$$b_i = S_{i1} a_1 + S_{i2} a_2 + \dots + S_{in} a_n = \sum_{j=1}^n S_{ij} a_j \quad (V.1)$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (V.2)$$

ou $(b) = (S) (a)$.

S est la matrice de transmission (Scattering Matrix) de la jonction. C'est une sorte de coefficient de réflexion global.

Propriétés de (S)

(S) est une matrice symétrique (sauf pour les jonctions à ferrites)

$$S_{ik} = S_{ki} \quad (V.3)$$

(S) est une matrice unitaire

$$\sum_{r=1}^n S_{ir} S_{kr}^* = S_{ik} \quad (V.4)$$

.../...

(V.4) \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{r=1}^n |S_{ir}|^2 = 1 \\ \sum_{r=1}^n S_{ir} S_{kr}^* \quad (i \neq k) \end{array} \right.$$

(S_{kr}^* conjugué complexe de S_{kr})

Applications :

Jonctions de 4 guides :

Nous considérons une jonction où les hypothèses suivantes

sont admises :

α) 1 et 3 non couplés $\Rightarrow S_{13} = S_{31} = 0$

β) 2 et 4 non couplés $\Rightarrow S_{24} = S_{42} = 0$

δ) la jonction comporte un dispositif d'adaptation en A_1 de telle sorte que le guide 1 soit adapté sur la jonction (les trois autres guides ayant leurs terminaisons adaptées)

$$S_{11} = 0$$

Il résulte de ces diverses hypothèses que :

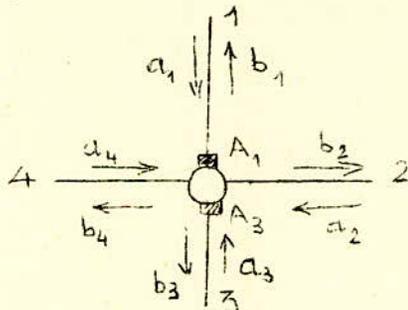
$$S = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ 0 & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & 0 & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} \quad (V.5)$$

En écrivant les relations (V.4) pour les deux premières lignes et les deux dernières de la matrice S de (V.5) on obtient :

$$S_{22} = S_{44} = 0 \quad (V.6)$$

Conséquence :

La jonction est totalement adaptée.



Reprenons (V.4) pour chaque ligne de (V.5) on trouve :

$$\begin{array}{l} |S_{12}| = |S_{34}| \\ |S_{14}| = |S_{23}| \end{array} \quad (V.7)$$

.../...

(S) du " T magique "

Prenons

$$S_{12} = -S_{14} ; S_{23} = S_{34}$$

on trouve par ailleurs que

$$|S_{12}| = |S_{14}| = |S_{23}| = |S_{34}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On prendra donc

$$S_{12} = S_{23} = S_{34} = -S_{14} = j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'où

$$S = j \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (V.8)$$

Les équations générales du " T magique " sont donc

$$\begin{cases} b_1 = j \frac{\sqrt{2}}{2} (a_2 - a_4) \\ b_2 = j \frac{\sqrt{2}}{2} (a_1 - a_3) \\ b_3 = j \frac{\sqrt{2}}{2} (a_2 + a_4) \\ b_4 = j \frac{\sqrt{2}}{2} (a_3 - a_1) \end{cases} \quad (V.9)$$

Nous allons présenter de façon très brève les coupleurs directionnels.

V - I - 5.a) Ligne unidirectionnelle :

L'énergie ne circule que de la source vers la charge.

La directivité caractérise cette propriété :

$$D = 20 \log \frac{E'_2}{E'_1}$$

V - I - 5.b) Lécoupleur directionnel :

On associe un autre guide en dérivation. L'énergie venant de I se divise entre II et III (mais II et III sont indépendants).

On caractérise le coupleur par un coefficient C dit de couplage et un coefficient D de directivité

$$C = 20 \log \frac{E_2}{E_1}$$

(pour c = 3 dB, l'énergie se divise en deux).

V - I - 5.c) Le coupleur bidirectionnel :

C'est l'association de deux coupleurs directionnels en parallèle. De l'énergie arrive par les portes I ou I' et fait comme si l'autre porte n'existait pas. C'est-à-dire se divise entre II et II' avec un couplage $C_I = C_{I'}$ (en général)

.../...

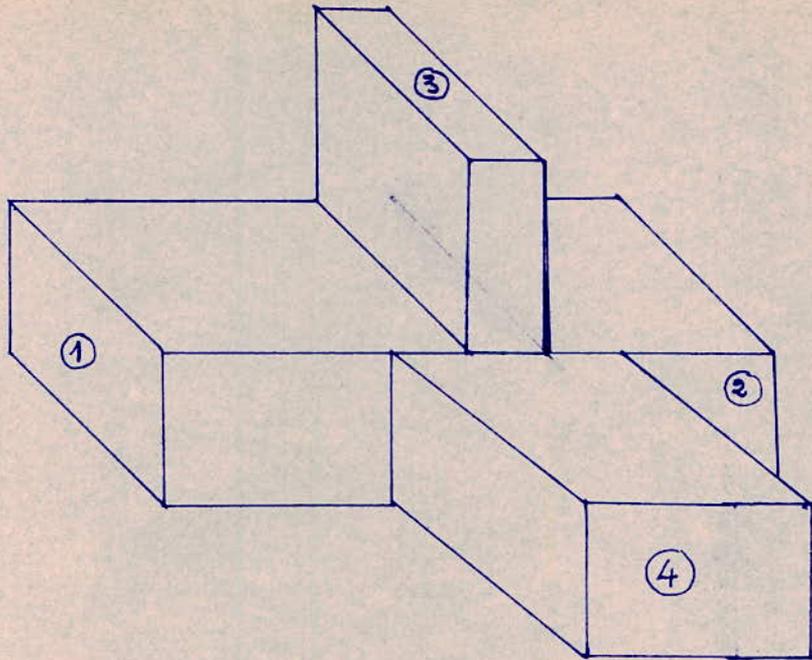


fig V. 2 (c) "T hybride"
[le "T" magique est un té (T) accordé] .

fig V. 3 (a) : ligne unidirectionnelle

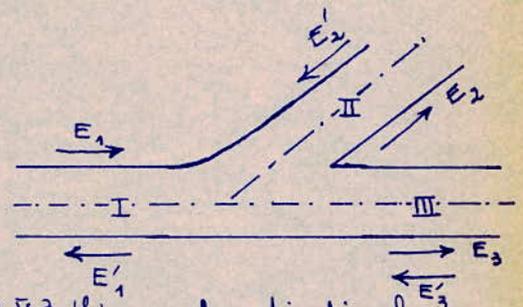


fig V. 3. (b) : coupleur directionnel

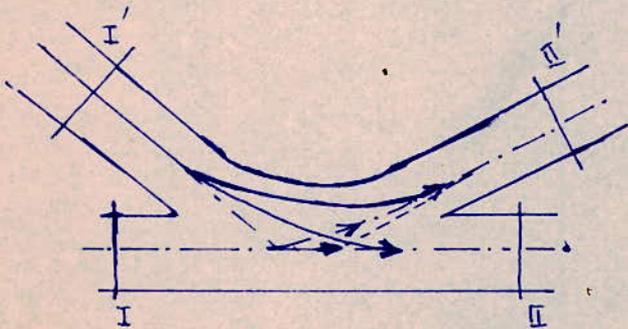


fig V. 3 (c) : coupleur bidirectionnel

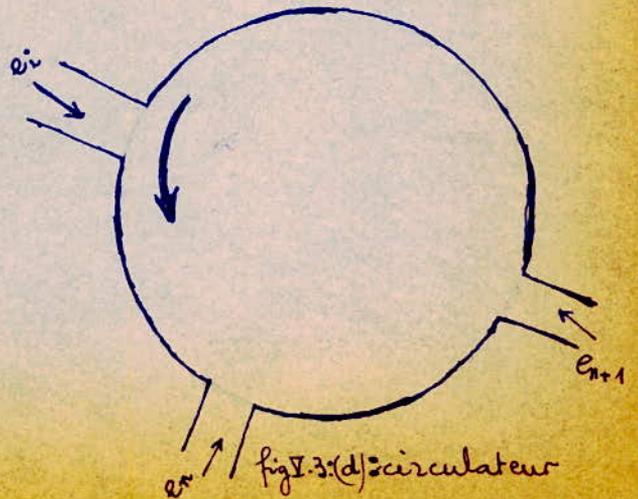


fig V. 3 (d) : circulateur

V - I - 5d) Le circulateur :

C'est une généralisation de la ligne unidirectionnelle, de l'énergie se propageant de la porte n à la porte $n + 1$ suivant le sens unique de circulation.

V - II - La technique de détection :

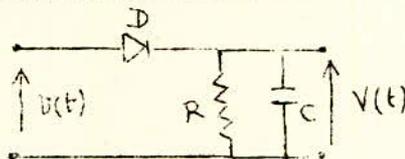
On se souvient qu'on avait assimilé le bruit dans une bande B à une fréquence f_m de la porteuse à une modulation BF sinusoïdale. La technique de démodulation usuelle par diodes appelée "détecteur d'enveloppe" constitue une mesure directe du bruit A.M.

Le but de ce sous-paragraphe consiste à montrer, sommairement, comment à l'aide d'une diode on peut extraire la modulation d'un signal H.F

On cherche à obtenir plus précisément un signal proportionnel à une fonction simple de la variation d'amplitude du signal H.F (détection linéaire ou quadratique et ceci suivant la zone utilisée de la caractéristique).

$$v(t) = A_0 \left[1 + m f(t) \right] \cos \omega_0 t \xrightarrow{D} A(t) = A_0 \left[1 + m f(t) \right]$$

V - II - 1 Détection quadratique d'enveloppe :



On veut obtenir un courant dans R ; proportionnel à $E^2(t)$.

$$\text{SI } v(t) = E(t) \cos \omega_0 t = E_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t.$$

En admettant pour la diode une loi quadratique autour du point de fonctionnement (V_0, I_0) on a :

$$i(t) = a_1 v(t) + a_2 v^2(t) = f'(0) v(t) + \frac{f''(0)}{2} v^2(t).$$

donc

$$i(t) = \underbrace{\frac{f''(0)}{4} E^2(t)}_{\text{passe dans la résistance}} + \underbrace{f'(0) E(t) \cos \omega_0 t + \frac{f''(0)}{2} E^2(t) \cos 2\omega_0 t}_{\text{passe dans la capacité}}$$

V - II - 2 Le mélangeur équilibré :
(utilisation pour la détection P.M)

Principe de fonctionnement

L'onde reçue dans le bras 3 du T hybride n° 1 (cf.fig.) est envoyée dans les lignes U_1 et U_2 et recombinaée dans le T de sortie (T2).

V5

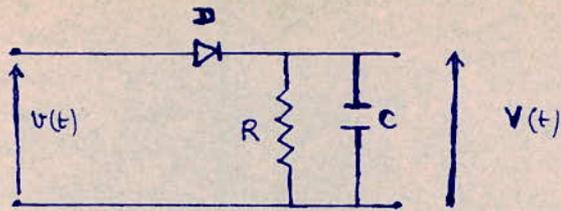


fig 7.4. Schéma usuel de détection d'enveloppe

D = diode

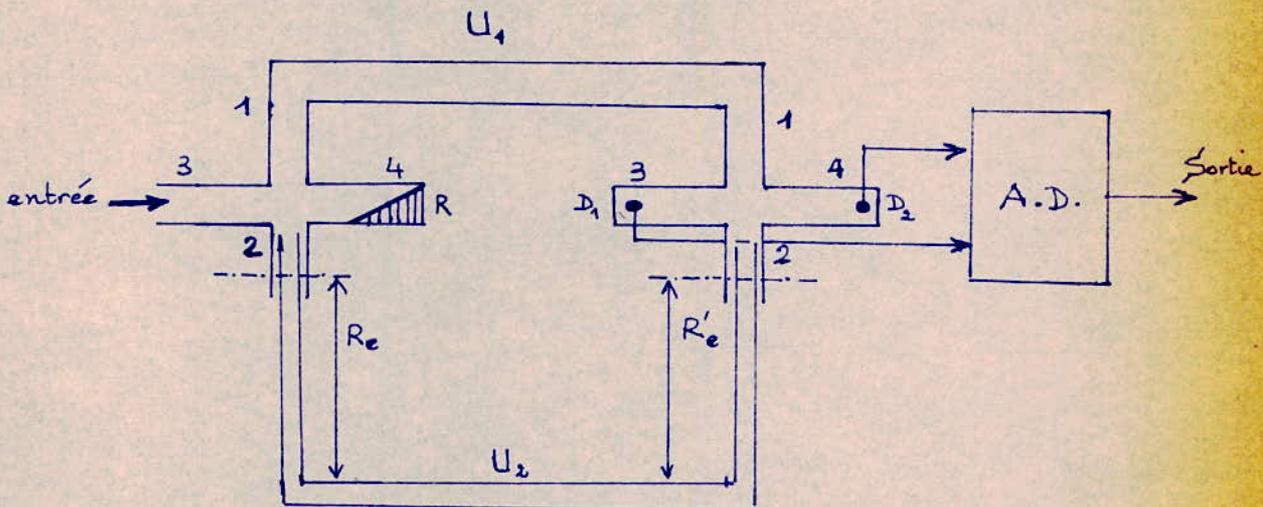


fig 7.5. a: Schéma du mélangeur équilibré. (discriminateur linéaire)

AD = Ampli différentiel ; D_1, D_2 = détecteurs adaptés
 R = Résistance terminale ; R', R_e = Réglage télescopique de la ligne u_2

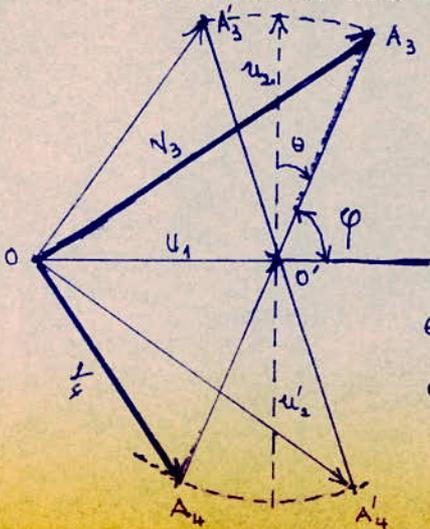


fig 7.5.(b): diagramme vectorielle des tensions à la sortie de l'A.D.

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$OO' = O'A_3 = O'A_4 = u$$

Les détecteurs placés dans les bras 3 et 4 de ce T sont connectés aux grilles de l'étage d'entrée d'un amplificateur différentiel.

Supposons que nous ayons par construction :

$$2l = (2n + 1) \frac{l_{go}}{4}$$

λ_{go} étant la longueur d'onde dans le guide correspondant à la fréquence porteuse de l'onde reçue. La différence de phase entre les trajets en U_1 et U_2 étant de $2\pi \frac{2l}{\lambda_g}$, les vecteurs U_1 et U_2 qui se recombinent dans les bras 3 et 4 de T_2 , sont décalés de 90° en l'absence de modulation.

Au cours de la modulation, les vecteurs U_2 et U'_2 décrivent un arc de cercle, faisant osciller les vecteurs V_3 et V_4 entre les points A_3 ; A'_3 et A_4 , A'_4 respectivement.

Nous avons pour les vecteurs V_3 et V_4 :

$$V_3^2 = (u + u \cos \varphi)^2 + u^2 \sin^2 \varphi$$

$$V_4^2 = (u - u \cos \varphi)^2 + u^2 \sin^2 \varphi$$

- α) Hypothèse : détection quadratique :

Nous aurons à la sortie de l'amplificateur différentiel

$$V_d = A_d (V_3^2 - V_4^2) = 4 A_d u^2 \cos^2 \varphi = 4 A_d u^2 \sin \theta \quad (3)$$

(A_d = est la constante d'amplification de l'amplificateur différentiel).

Si la modulation de fréquence est sinusoïdale, nous pouvons écrire

$$\theta = \theta_0 \sin \Omega t \quad \text{avec } \theta_0 = 2\pi \frac{2l}{\lambda} \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right)$$

en développant $\sin \theta$ on obtient

$$V_d = 4 A_d u^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right) \quad (4)$$

en négligeant les termes en θ^5 , θ^7 etc.....

$$(4) \Rightarrow \boxed{V_d = 4 A_d u^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right)} \quad (5)$$

$$V_d = 4 A_d u^2 \left(\theta_0 \sin \Omega t - \frac{\theta_0^3 \sin^3 \Omega t}{6} \right) \quad (6)$$

après transformation de (6) on aura on négligeant $\frac{\theta_0^2}{8}$ devant 1

$$\boxed{V_d = 4 A_d u^2 \theta_0 \left(\sin \Omega t + \frac{\theta_0^2}{24} \sin 3 \Omega t \right)} \quad (7)$$

.../...

β) Hypothèse ; détection linéaire :
 Les relations (1) et (2) nous donnent

$$V_3 = U \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = 2u \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$V_4 = U \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = 2u \sin \frac{\varphi}{2}$$

d'où pour V_d :

$$V_d = A_d (V_3 - V_4) = 2,8 A_d U \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

et finalement

$$V_d = 2,8 A_d U \sin \frac{\theta}{2} = 1,4 A_d u \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \quad (8)$$

Nous retrouvons l'équation (5) à un facteur numérique près.
 Il est toutefois important de noter que ce qui vient d'être fait suppose un fonctionnement normal du mélangeur en l'absence de toute modulation d'amplitude résiduelle.

Remarques :

- si $u_1 \neq u_2$ la relation (7) devient alors :

$$V_d = 4 A_d U_1 U_2 \theta_0 \left(\sin \Omega t + \frac{\theta_0^2}{24} \sin 3\Omega t \right) \quad (9)$$

- si U_2 est modulé en amplitude $\implies \theta = 0$ et alors

$$V_d = 0$$

Donc ceci constitue une méthode très judicieuse pour équilibrer le pont.
 En fin de compte, on peut dire que le mélangeur équilibré dans les conditions de fonctionnement précédentes, constitue pour φ petit, un discriminateur de phase. Il fait correspondre à un déphasage φ une tension à la sortie de l'ampli... différentiel proportionnel à φ .

V - II - 3 Le discriminateur de fréquence :

Les discriminateurs de fréquence remplissent la même fonction mais sur des écarts de fréquence. Ils font correspondre à une variation de fréquence Δf d'une porteuse de fréquence f_0 une variation d'amplitude ΔV proportionnelle à Δf .

On transforme une modulation de fréquence en modulation d'amplitude qui est alors détectée par une diode (Backward par ex.).

Il existe plusieurs types de discriminateur F.M.

On peut faire par exemple, la transposition F.M en A.M, sur les flancs de la courbe d'absorption d'une cavité à haut coefficient de qualité (Q).

C H A P I T R E VI

Méthodes de mesure du bruit
du "KLYSTRON"

Après avoir présenté dans le chapitre précédent les instruments qui nous permettent de mesurer le bruit du Klystron ; nous discuterons dans ce chapitre les méthodes de mesure proprement dites.

... Pour les trois fréquences étudiées (9000 MHz, 9325, 9600.); nous donnerons le tracé des courbes du bruit en fonction de la fréquence f_m du signal de modulation.

VI-I Mesure du bruit AM

Alimenté à tension V_r constante (tension "réflecteur"), le Klystron fournit un signal HF sur lequel vient se superposer un autre signal aléatoire perturbant la transmission Le bruit. (Le signal HF possède une certaine puissance P_o)
Modulons en amplitude la tension V_r par un signal extérieur (générateur BF). En détectant le signal sur la diode D_1 et en l'amplifiant, que lit-on (à la sortie de l'amplificateur) sur l'oscilloscope ? (cf fig VI-1)

Notons $v(t)$ le signal modulé, et respectivement les fréquences angulaires du signal de modulation et de la porteuse HF. Alors on a

$$A(t) = A_o(1 + m \cos \Omega t)$$

Supposons la détection quadratique et $m \ll 1$ (conditions vérifiées)

$$\begin{aligned} A^2(t) &= A_o^2(1 + m \cos \Omega t)^2 \\ &= A_o^2(1 + m^2 \cos^2 \Omega t + 2m \cos \Omega t) \end{aligned}$$

alors la composante d'harmonique un est prépondérante devant la composante d'harmonique deux. Donc:

$$A^2(t) = A_o^2(1 + 2m \cos \Omega t)$$

Mais comme notre ampli ne laisse pas passer la composante .../...

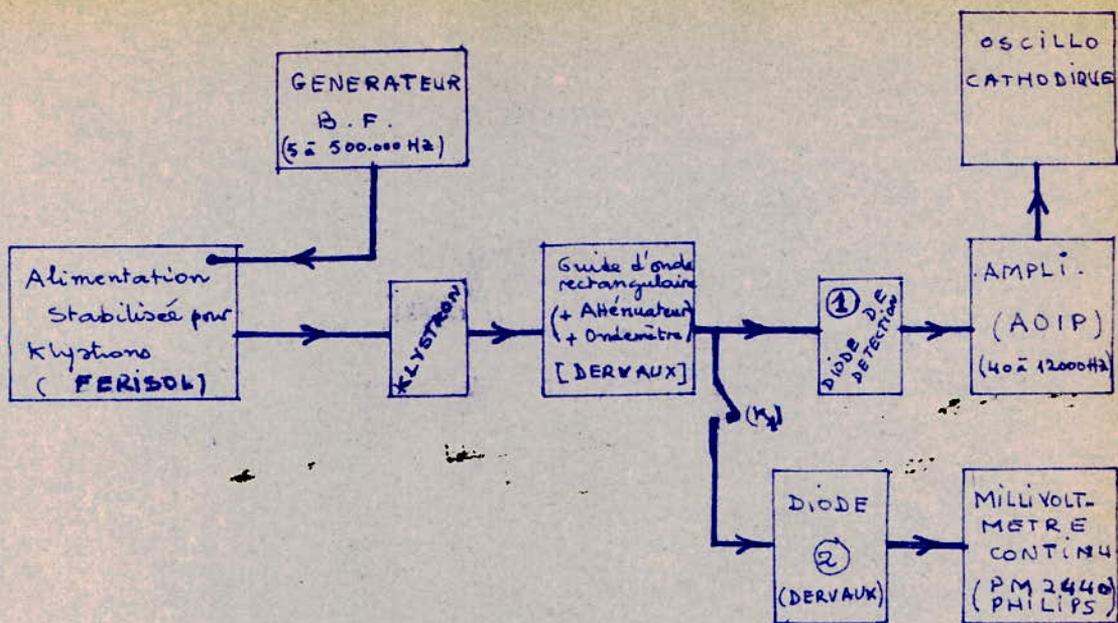


fig VI. 1. Banc de mesure de la puissance de modulation par rapport à la puissance de la porteuse. (en modulation d'amplitude).

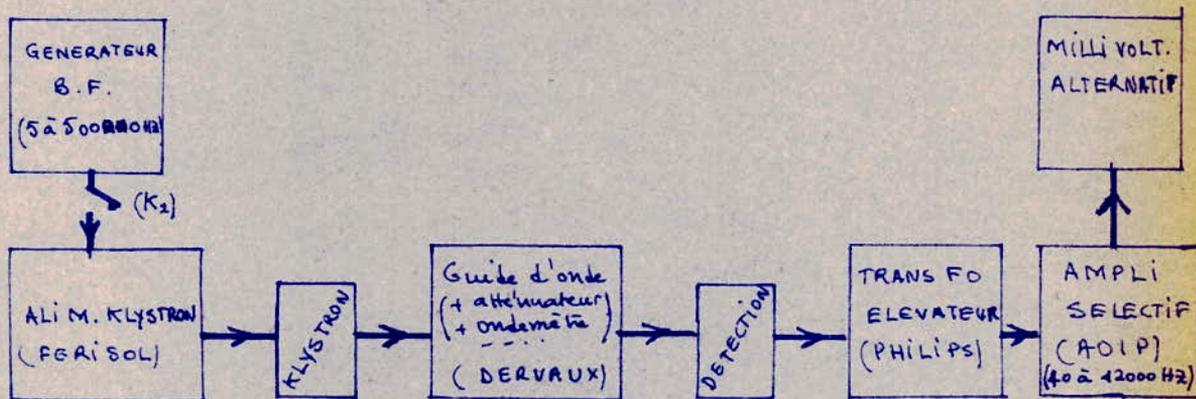
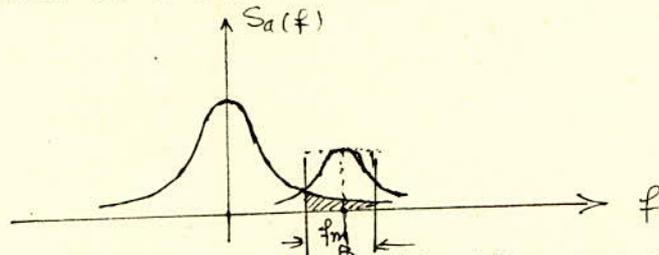


fig VI. 2. Banc de mesure de la puissance du bruit par rapport à la puissance de modulation (modulation d'amplitude).

la sortie d'un millivoltmètre alternatif, puis on coupe la modulation et on note cette fois-ci le niveau du bruit seul (signal non modulé.) d'où: $\left(\frac{P_{\text{bruit}}}{P_{\text{mod}}}\right)_{\text{db}}$

Comment choisir la bande B dans laquelle on mesure le bruit ?

On utilise un ampli sélectif (dont on connaît les caractéristiques; notamment le coefficient de qualité $Q=50$) possédant une gamme de fréquence qui s'étend de 40 à 12000 HZ. Mais comme on mesure le bruit à une distance f_m de la porteuse, c'est comme si on déplaçait la courbe de sélectivité de l'ampli.



Toutefois on doit bien faire attention que plus on s'éloigne de la porteuse, plus la bande passante de la courbe augmente; d'où une nécessité d'opérer une rectification. En effet :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

On choisira, pour notre étude, une bande égale à $\Delta f = 100$ HZ pour une fréquence centrale de 5000 HZ

Pour la rectification, on s'arrange de telle façon que la portion de surface du bruit soit constante c-à-d:

$$S_a \Delta f = k \cdot S_a \Delta f'_n$$

Les fréquences utilisées pour nos mesures sont:

100, 200, 500, 1000, 2000, 5000, 10.000 HZ

D'où pour $f = 100$ HZ $f = 2$ HZ et

$$(S_a f)_{\text{db}} = 17\text{db} + (S_a f'_1)$$

On est donc obligé d'ajouter au bruit à 100 HZ la quantité +17db

.../...

$$\begin{array}{l}
 f_2 = 200 \text{ Hz} \quad (S_a \Delta f)_{db} = (S_a \Delta f_2)_{db} + 14 \text{ db} \\
 f_3 = 500 \text{ " " } \quad (S_a \Delta f)_{db} = (S_a \Delta f_3)_{db} + 10 \text{ db} \\
 f_4 = 1000 \text{ " " } \quad (S_a \Delta f)_{db} = (S_a \Delta f_4)_{db} + 7 \text{ db} \\
 f_5 = 2000 \text{ " " } \quad (S_a \Delta f)_{db} = (S_a \Delta f_5)_{db} + 4 \text{ db} \\
 f_6 = 5000 \text{ " " } \quad (S_a \Delta f)_{db} = (S_a \Delta f_6)_{db} \\
 f_7 = 10.000 \text{ Hz} \quad (S_a \Delta f_7)_{db} = (S_a \Delta f_7)_{db} - 3 \text{ db}
 \end{array}$$

Finalement la mesure du bruit se ramène à l'évaluation de la quantité :

$$\frac{P_{\text{bruit}}}{P_{\text{port.}}} = \frac{P_{\text{bruit}}}{P_{\text{mod.}}} + \frac{P_{\text{mod.}}}{P_{\text{port.}}} + (\text{effet de } \Delta f)$$

2) Mode opératoire

On dispose du banc d'essai de la fig VI-1. Le Klystron est alimenté par une alimentation stabilisée (FERISOL) à tension "réflexe" constante. On choisit également la fréquence de travail (9325 MHz par exemple). En agissant sur l'ondemètre, étalonné en fonction de la fréquence, le Klystron livre donc un signal HF auquel vient se superposer le bruit de fluctuation. Ce signal HF passe à travers un guide rectangulaire, un dispositif de détection nous permet d'éliminer le signal HF et de ne garder que le bruit (qui est en fait un signal BF) qui passe dans un transformateur élévateur (son rôle est d'éliminer la composante continue); ce dernier, est connecté à un ampli sélectif qui nous détermine la bande et la fréquence f_m dans lesquelles on mesure notre bruit; à sa sortie est placé un millivoltmètre sur lequel est enregistrée la perturbation. On a donc une certaine déviation sur le millivoltmètre.

.../...

Mais on mesure le bruit par rapport à quoi?

Pour ce faire on le compare à une modulation BF d'amplitude constante, donné par un générateur BF et qui est en fait une modulation de la tension "réflexe", et l'on est amené alors à une mesure de:

$$\frac{P_{\text{bruit}}}{P_{\text{mod.}}}$$

Or ce qui nous intéresse le plus c'est de chiffrer le bruit par rapport à la porteuse. d'où la nécessité de connaître le niveau de modulation par rapport à la porteuse. Cette seconde opération consiste à afficher la même modulation BF que précédemment (avec le même niveau d'entrée) La composante continue du signal modulé est relevée sur un millivoltmètre continu. ON détecte et on envoie le signal dans un ampli (dont on connaît le gain) de façon à bien visualiser le niveau du signal sur l'oscilloscope (placé à la sortie de l'ampli) qui correspond à: $2A_o^2 m$.

Ceci nous permet de déterminer l'indice de modulation m

Et:

$$\left(\frac{m^2}{2}\right) \text{ dB} = 10 \log \frac{P_{\text{mod}}}{P_{\text{port.}}} = (P_{\text{mod}})_{\text{db}} - (P_{\text{port}})_{\text{db}}$$

D'où:

$$\frac{P_{\text{mod}}}{P_{\text{port}}}$$

Et finalement

$$(N_2(f_m, B))_{\text{db}} = \left(\frac{P_{\text{bruit}}}{P_{\text{mod}}}\right)_{\text{db}} + \left(\frac{P_{\text{mod}}}{P_{\text{port}}}\right)_{\text{db}}$$

S

Sensibilité de la mesure

-Au cours de nos mesures on a constaté que l'ampli sélectif utilisé possède un bruit de fond qui varie en fonction de la fréquence affichée. Cette perturbation est en fait très faible et se trouve à au moins 20db en dessous du bruit du Klystron pour chaque fréquence utilisée.

.../...

continue, l'amplitude du signal recueilli sur l'oscillo. est proportionnelle à A_o et notamment à m (indice de mod.) Si on note V_2 cette amplitude alors:

$$V_2 \propto 2m A_o^2 G$$

G : est le gain de l'ampli (grandeur connue)
(A_o est l'amplitude du signal HF)

et:

$$V_1 = \frac{V_2}{G}$$

V_1 EST l'amplitude réel du signal AM

En dirigeant maintenant le signal détecté sur un millivoltmètre continu, on mesure une tension V_1 proportionnelle à A_o^2 . Le coefficient de proportionnalité étant le même que précédemment.

Ces opérations nous permettent, donc, de calculer m .

En effet:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2mA_o^2}{A_o^2} = 2m$$

Or, on sait que la puissance de modulation par rapport à la puissance de la porteuse est donné par (cf chap II)

$$\left(\frac{m}{2}\right)_{db}^2 = 10 \log \frac{P_{mod}}{P_{port}}$$

Ne perdons pas de vue que le but de notre étude est de mesurer le bruit dans une bande B à une distance f_m de la porteuse c-à-d:

$$N_2(f_m, B) = \frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df}{P_o}$$

$$\frac{P_{bruit}}{P_{port}} = \frac{P_{bruit}}{P_{mod}} \cdot \frac{P_{mod}}{P_{port}}$$

On vient de décrire une méthode de mesure de $\frac{P_{mod}}{P_{port}}$

Pour $\frac{P_{bruit}}{P_{mod}}$ la méthode est la suivante:

On met une modulation BF (AM), dont on relève le niveau à

.../...

On a remarqué que le changement de gamme de fréquence de l'ampli sélectif entraîne un glissement de gain pour deux fréquences égales. D'où une nécessité d'effectuer une correction.

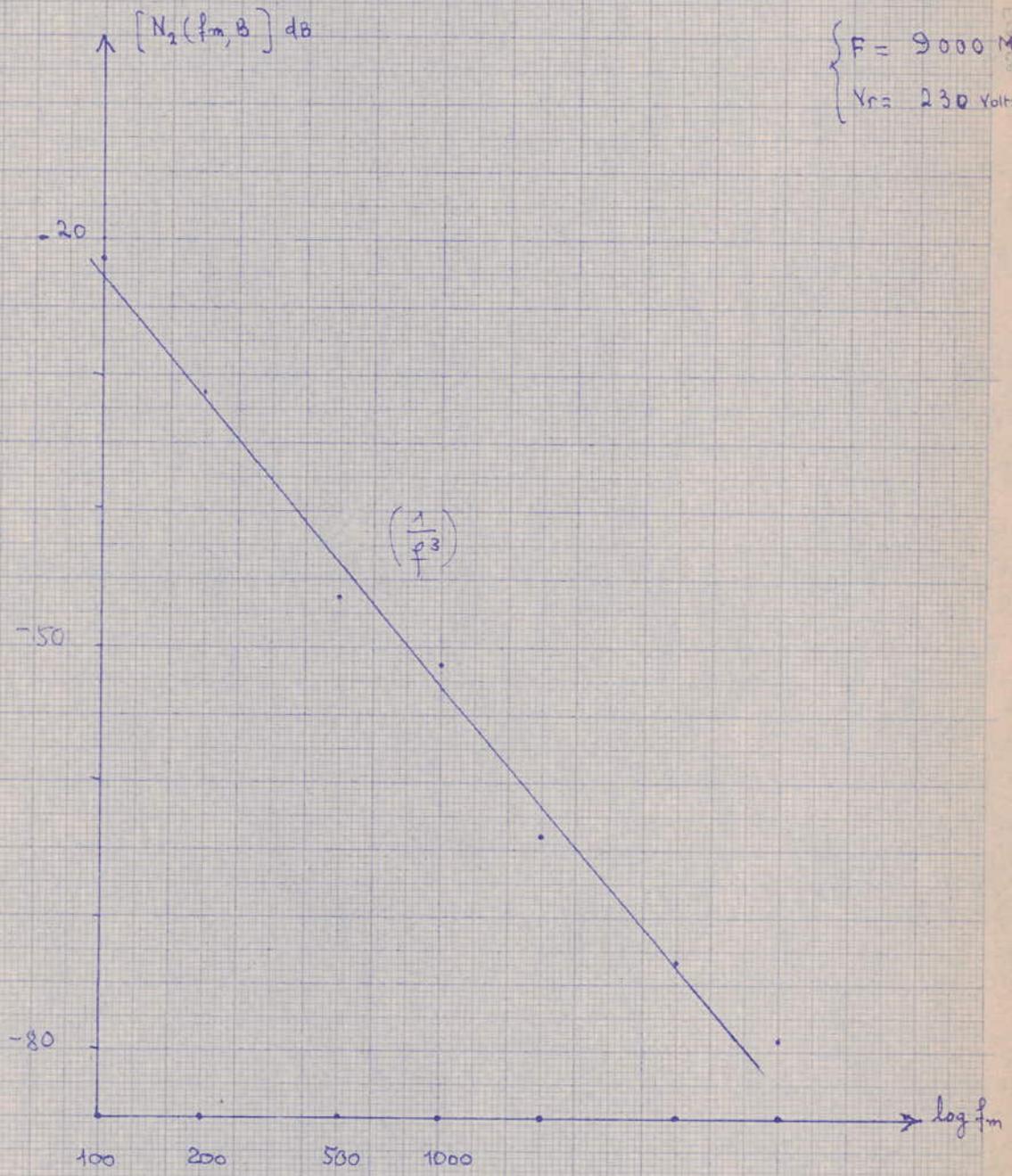
Le bruit réel est inférieur au bruit mesuré cependant on note que le bruit d'aux appareils est constant sur la gamme considérée.

Près de 100 hz, la méthode est à remettre en cause (perturbations du secteur)

DISCUSSION DES RESULTATS

La méthode utilisée, bien que juste dans le principe n'a pu donner des résultats satisfaisants et cela est dû principalement à l'état des appareils utilisés qui se sont révélés être peu fidèles. Les courbes obtenues montrent le caractère linéaire de $N_2(f_m, B)$ en fonction de $\text{Log}(f_m)$. La discussion intéressante réside bien sur en l'évaluation du bruit en fonction de la position sur le mode. Les résultats tendent à montrer que le bruit AM rapporté à la porteuse est plus important en haut de mode que sur les flancs.

Sur les flancs la pente du bruit est environ de -6db puissance par octave, en haut de mode la pente dépend du mode et de la distance à la porteuse (voir courbes)

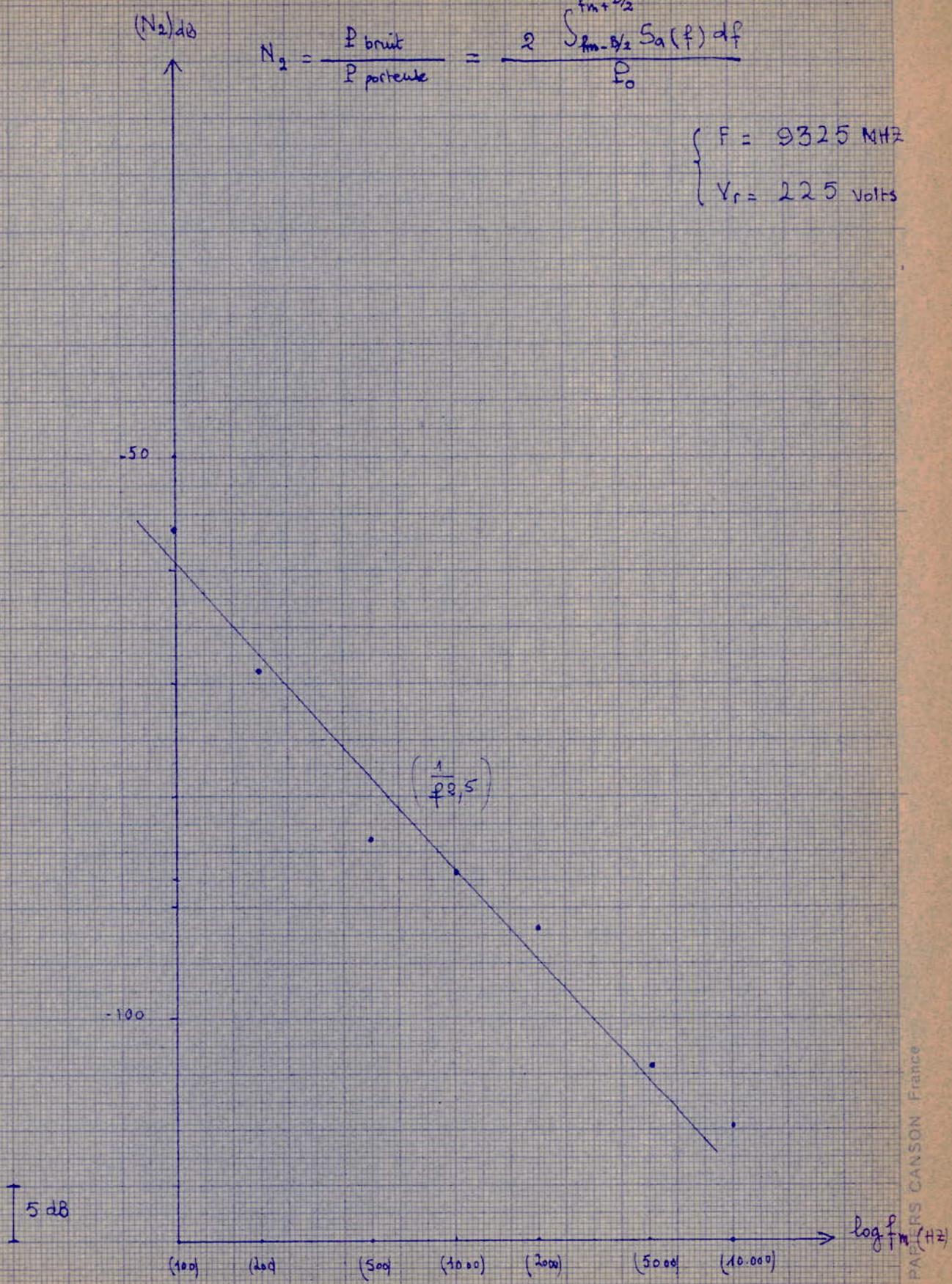


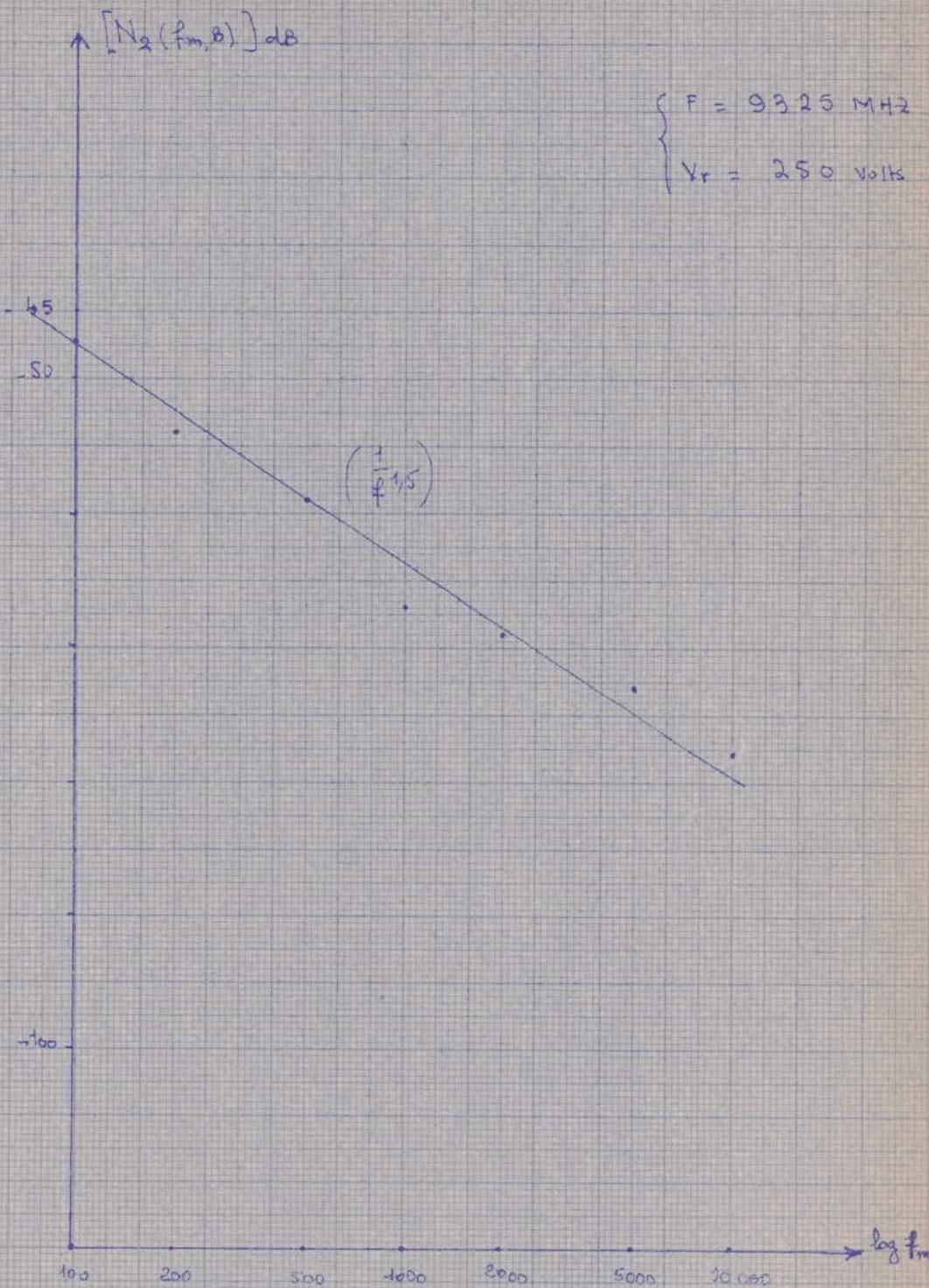
$\left\{ \begin{array}{l} F = 9000 \text{ MHz} \\ V_r = 230 \text{ Volts} \end{array} \right.$

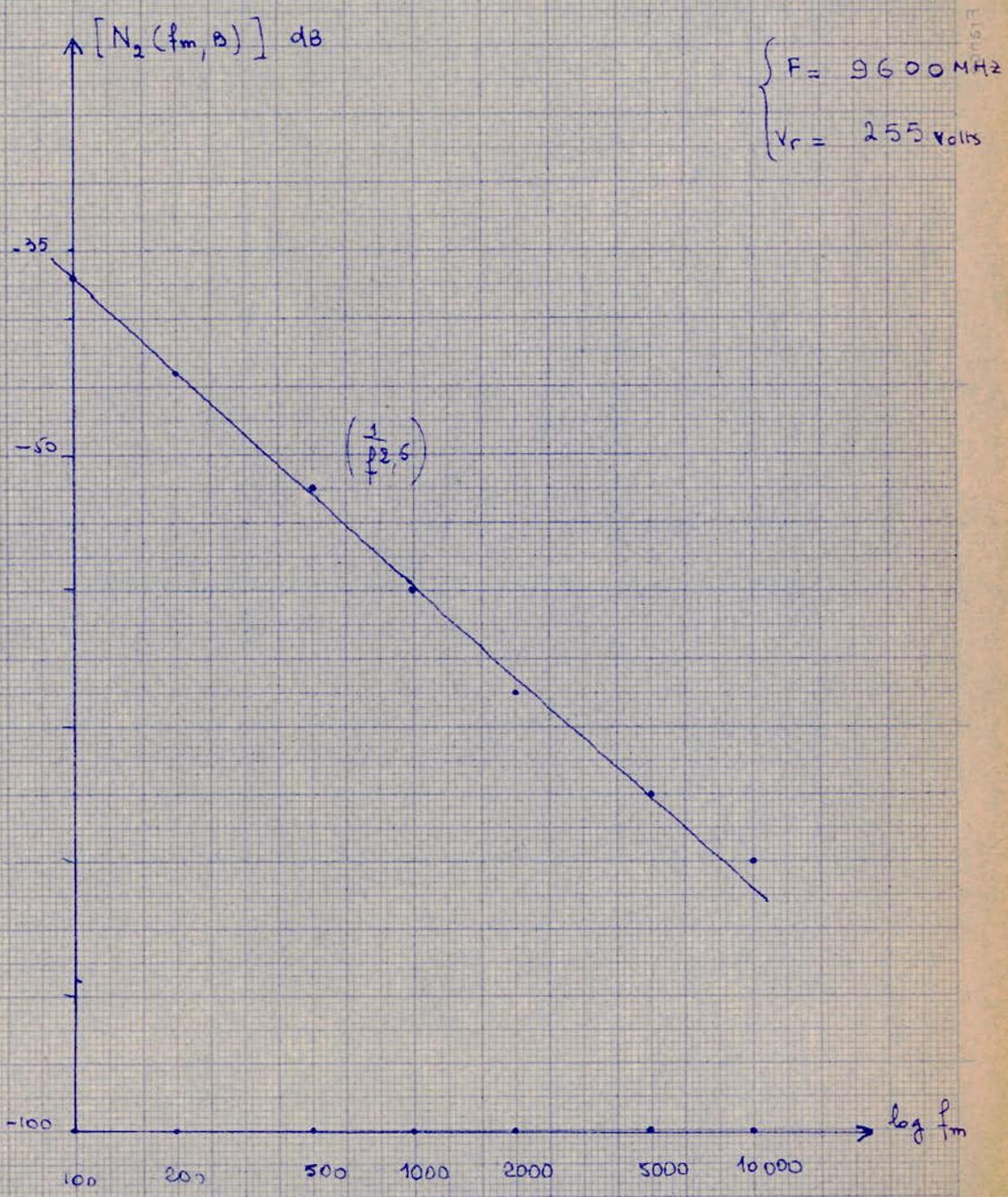
5 dB

$$N_2 = \frac{P_{\text{bruit}}}{P_{\text{portante}}} = \frac{2 \int_{f_m - B/2}^{f_m + B/2} S_a(f) df}{P_0}$$

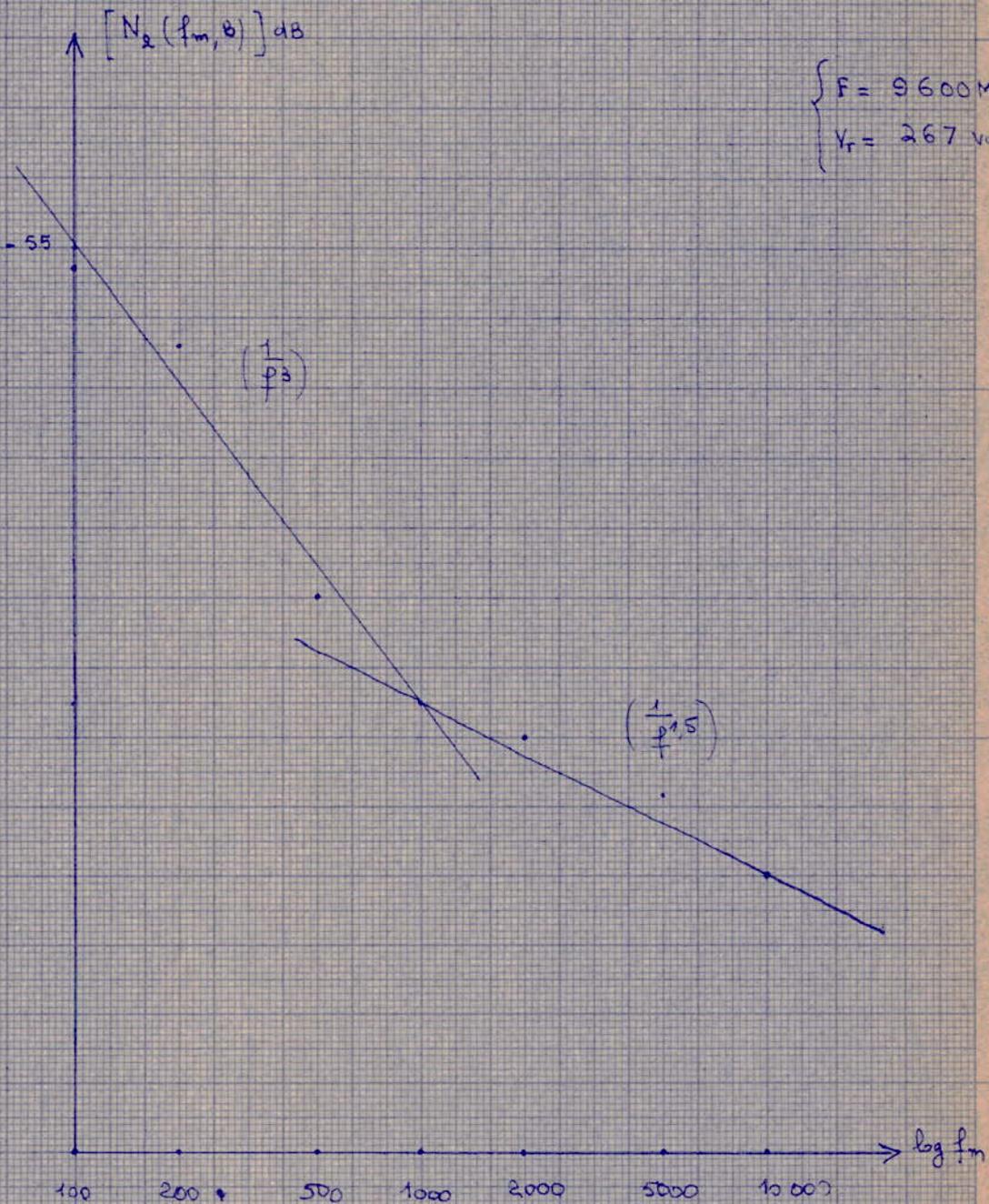
$\left\{ \begin{array}{l} F = 9325 \text{ MHz} \\ V_r = 225 \text{ volts} \end{array} \right.$







5 dB



$\left\{ \begin{array}{l} F = 9600 \text{ MHz} \\ V_r = 267 \text{ volts} \end{array} \right.$

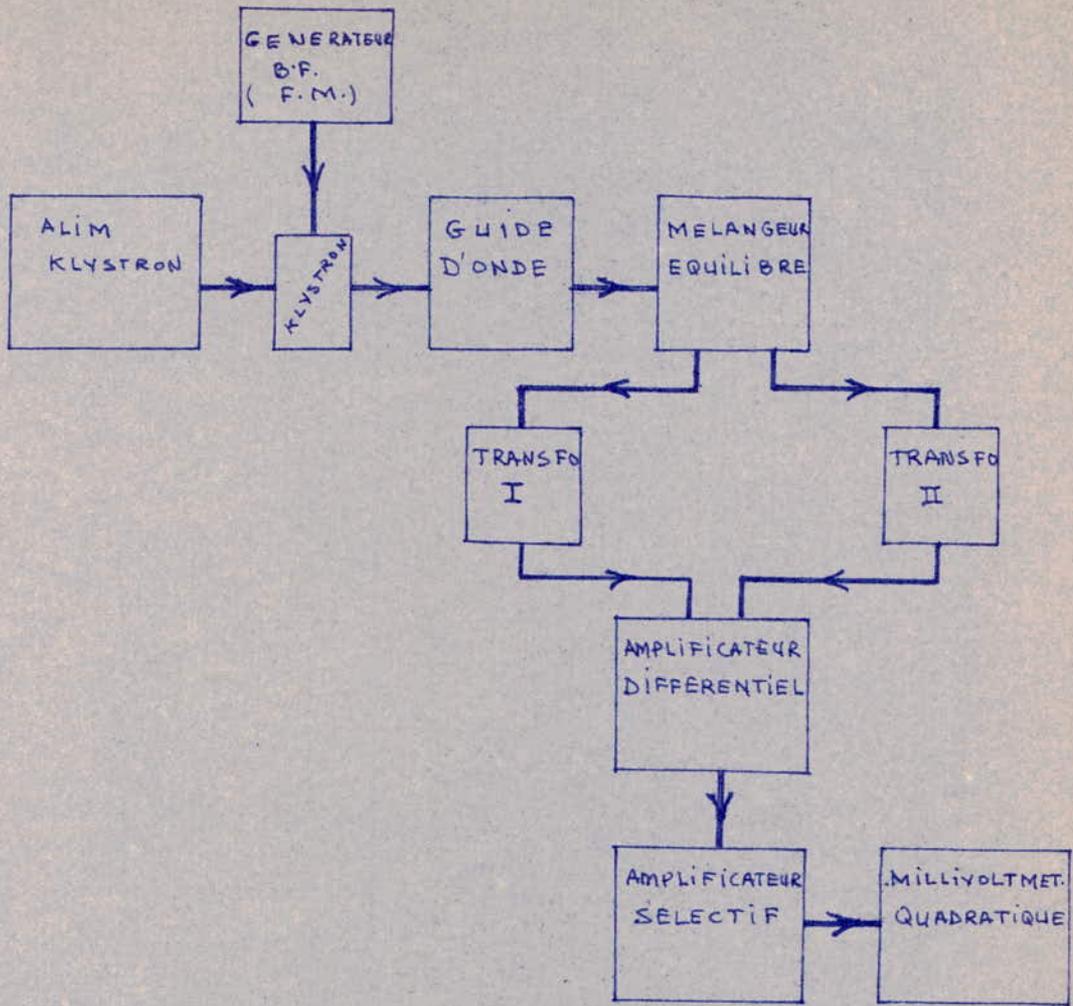


fig VI .3. Banc de mesure du bruit de fréquence d'un KLYSTRON à l'aide du mélangeur équilibré.

VI-2 Methode expérimentale permettant le passage d'une faible modulation de fréquence à une faible modulation d'amplitude -Mesure du bruit de fréquence et de phase

Nous allons présenter un pont hyperfréquence qui malheureusement n'a pu être réalisé lors de cette étude; mais dont la conception est très intéressante pour le problème qui nous importe. Lors de la mesure du rapport puissance de bruit sur puissance de la porteuse, il est nécessaire de déterminer le rapport puissance de la modulation de référence à la puissance de la porteuse.

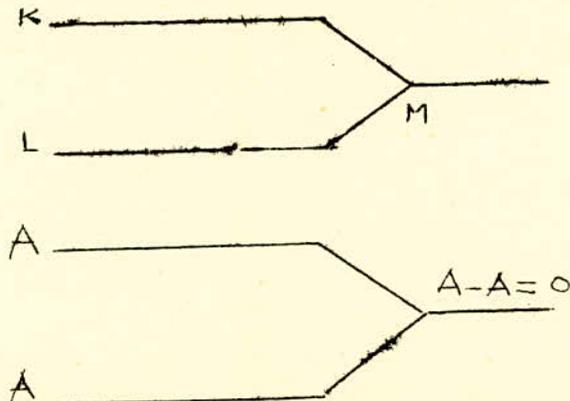
Comme pour la mesure du bruit d'amplitude, la même difficulté se présente avec la modulation de fréquence. Le mélangeur équilibré ne permet que de comparer des modulations BF de fréquence, il faut donc pour comparer la modulation de fréquence de référence à la porteuse pouvoir la transposer en une modulation d'amplitude directement comparable à la porteuse.

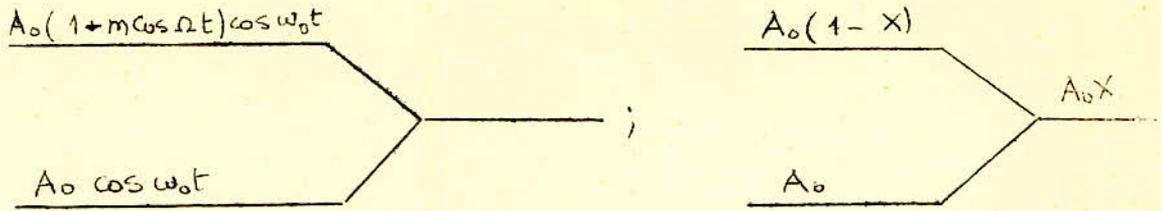
Le pont que nous présentons répond à ces besoins et peut même remplacer le système mis en place pour évaluer le rapport $P(\text{mod de référence})/P_0$ qui intervient dans la mesure du bruit AM.

Le pont d'étalonnage

1°/ Principe

C'est un pont hyper que nous symboliserons par deux voies L et K se rejoignant en M





*L'une des voies peut être modulée en amplitude

$$S_K = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$$

et on a : $N_2 (f_m = \frac{\Omega}{2\pi}) = \frac{m^2}{2} = \frac{P_{bl}}{P_0}$ (référence)

*Si au lieu d'être modulée en amplitude ; la voie est atténuée de α dB

on a : $\alpha = 20 \log \frac{A}{A(1-x)}$ avec $N_2 = x^2$

On considère que l'atténuation représente en puissance une modulation m telle que :

$$\frac{m^2}{2} = x^2 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{2} x}$$

L'étalonnage consiste à afficher dans la voie K une modulation connue (-20 dB dans les bandes latérales / porteuse)

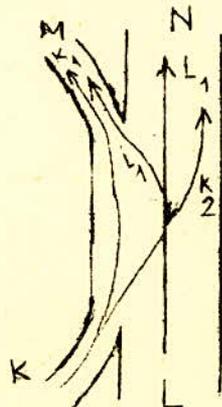
On opère comme suit :

-On règle le déphaseur et l'atténuateur dans K pour que la puissance en M soit nulle ; on a donc éliminé en M la porteuse

-On affaiblit de α dB dans le bras K tel que

$$N_2 = -20 \text{ dB} \Rightarrow x = 0,1 \text{ et } \alpha = 20 \log \frac{1}{0,9} = 0,915 \text{ dB}$$

-On revient à l'équilibre en supprimant l'atténuation et on place une modulation qui redonne la même puissance en M que précédemment . On a alors une modulation dont les bandes latérales sont à -20 dB au-dessous de la porteuse .

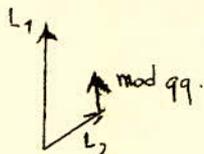


2°/ Le pont réel:

Il comprend deux bras qui se raccordent aux traveaux d'un coupleur bidirectionnel ce qui permet alors une modulation en N avec une puissance de -60dB/porteuse le coupleur est de 20 dB. La voie L se divise en LI et L2 (L2 20 dB au-dessous de LI) La voie K se divise en deux voies KI et K2 (K2 20 dB au-dessous de KI) En N arrivent KI et L2 c'est avec ces voies que l'on applique le principe du pont, on impose une modulation dans K le pont est équilibré tel que $KI=L2$.

La modulation sur K2 est à 20 dB en-dessous de la porteuse comme la porteuse est 20dB en dessous de KI, que $KI=L2$ et L2 20 dB en-dessous de LI donc en N on a une modulation de 60 dB en dessous de la porteuse ;

(En toute rigueur la porteuse est la somme de K2 et LI mais K2 est 40 dB au-dessous de LI donc négligeable)



3°/ Passage F.M-A.M:

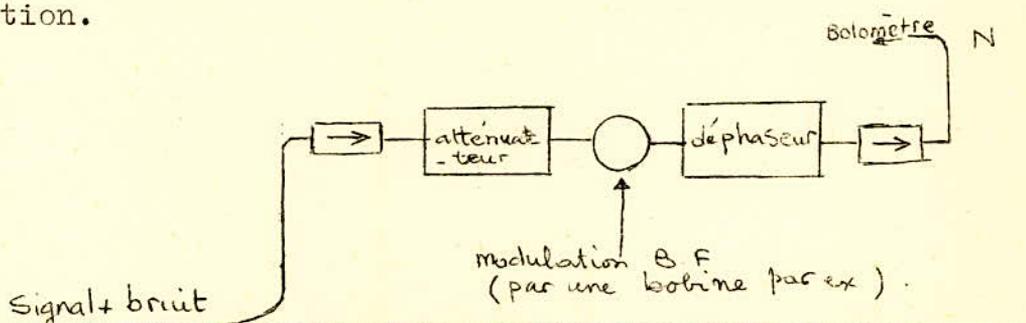
Dans le cas général le vecteur modulation est quelconque par rapport à la porteuse LI on peut en jouant sur le déphaseur dans le bras K faire tourner la modulation par rapport à L et donc passer de F.M en A.M .

Sur le détecteur un maximum de déviation correspond à A.M et un minimum de déviation correspond à F.M

En résumé le pont d'étalonnage permet de connaître le rapport N² (B.F de référence) on peut en jouant sur le déphaseur passer en A.M ou en F.M

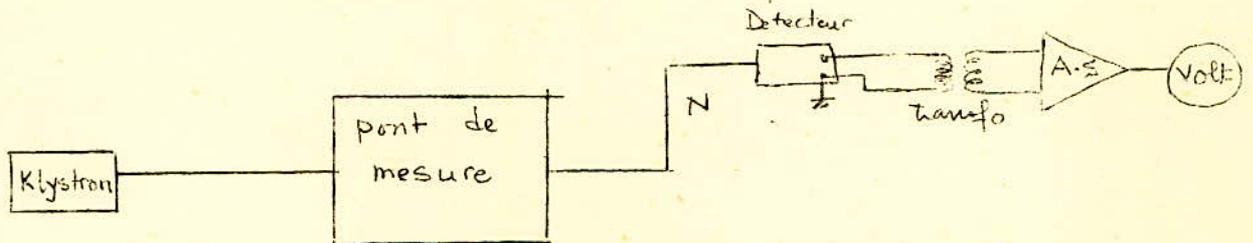
Difficultés Pratiques:

Ce pont n'a de sens que si le bruit est faible devant la modulation ; de plus on ne peut pas augmenter de trop la modulation.



UTILISATION DU PONT: Pour les A.M, ici la modulation ne s'opère pas à partir de Vr de référence mais dans le bras K.

Le banc de mesure est:



Le pont de mesure remplace le détecteur quadratique à partir duquel on chiffrait les modulations de référence

UTILISATION DU PONT POUR LES F.M:

En fait on fait une mesure de phase ou de fréquence car on obtient sur le voltmètre une déviation proportionnelle à $\dot{\Phi}$ qu'on peut traduire en bruit de fréquence :

$$\frac{S_{\dot{\Phi}}}{\omega_p^2} = S_{\Phi}$$

On fixe une référence A.M connue par rapport à la porteuse avec $m \leq 0,3$ on les transpose en F.M par le pont d'étalonnage sur la voie LI, cette modulation étant de même indice m que la modulation A.M initiale ; on peut alors comparer le bruit de fréquence avec la modulation F.M de référence à l'aide du mélangeur équilibré .

On vient d'ébaucher la méthode de mesure qui nous l'espérons pourra bientôt être mise en œuvre à l'école .

Il existe pour la mesure de F.M d'autres méthodes mais le point a l'intérêt d'être utilisable en A.M et en F.M.

REMARQUES :

Le bruit réel est \leq au bruit mesuré cependant on note que le bruit dû aux appareils est constant sur la gamme considérée.

Près de 10⁶ Hz, la méthode est à remettre en cause (perturbation du secteur.....etc)

NOTIONS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Systèmes linéaires stationnaires.

1/. Définition :

En général un système transforme un signal $x(t)$, appliqué à son entrée, en un autre signal $y(t)$ qui apparaît à sa sortie.

Donc on peut associer à tout système un opérateur fonctionnel qui transforme l'espace X du signal d'entrée $x(t)$ dans l'espace Y du signal de sortie $y(t)$.

Si on note ψ cet opérateur $\psi \{ x(t) \} = y(t)$. (1)

ψ est dit linéaire (ainsi ^{que} le système associé) si :

$$\psi \{ x_1(t) + x_2(t) \} = y_1(t) + y_2(t). \quad (2)$$

$$\psi \{ \lambda x(t) \} = \lambda \psi \{ x(t) \} = \lambda y(t). \quad (3)$$

ψ est invariant dans le temps si :

$$\psi \{ x(t+\tau) \} = y(t+\tau) \quad (4)$$

Supposons que :

$$x(t) = \sum_{k=1}^n a_k v_k(t) \quad (5)$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^n b_k v_k(t) \quad (6)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Si ψ est linéaire :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \psi_{nn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

et $\psi_{kk} a_k = b_k \quad (9)$

II/. Spécification de l'opérateur ψ dans le domaine des fréquences.

Supposons que : $v_k(t) = e^{kp_0 t}$ (10)

On remarque que ψ_{kk} est le coefficient de transfert du système et sera noté :

$$\psi_{kk} = \psi_k = H(kp_0) \quad (11)$$

Si la relation (5) est sous forme d'intégrale, l'expression de $x(t)$ serait :

$$X(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_0 - j\infty}^{\alpha_0 + j\infty} X(p) e^{pt} dp$$

avec $X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-pt} dt$.

si $k \rightarrow \infty$ et $kp \rightarrow \infty$: $Y(p) = H(p) \cdot X(p)$ (12)

De même on trouve pour $y(t)$ une forme semblable à $x(t)$.

Dans ce cas $H(p)$ est la fonction de transfert du système.

Donc on peut déterminer la réponse du signal, connaissant $H(p)$ et $X(p)$.

III/. Spécification de l'opérateur ψ dans le domaine du temps.

Utilisation à l'entrée d'un signal de la forme :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (13)$$

on obtient à la sortie :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

avec $\psi(\tau)x(\tau) = y(\tau)$ (15)

En multipliant (15) de part et d'autre par $\delta(t-\tau)$ et en posant :

$$\psi(\tau) \delta(t-\tau) = h(t-\tau) \quad (16)$$

alors
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (17)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

$h(t)$ caractérise le système de transmission et s'appelle réponse impulsive ou fonction de pondération.

on peut toutefois obtenir une autre interprétation de $h(t)$.

En effet si l'on pose $x(t) = \delta(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) h(\tau) d\tau = h(t) \quad (18)$$

donc $h(t)$ est la réponse du système à l'impulsion unité et

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_1 - j\infty}^{\alpha_1 + j\infty} H(p) e^{pt} dp \quad (19)$$

$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-pt} dt \quad (20)$$

En conclusion on peut affirmer que la réponse $h(t)$ à l'impulsion unité et la fonction de transfert $H(p)$ du système sont transformées de Laplace l'une de l'autre. Le système est complètement spécifié par la connaissance soit de $h(t)$ soit de $H(p)$ et du domaine dans lequel est définie $H(p)$, c'est-à-dire dans lequel l'intégrale (20) est convergente.

IV/. Systèmes stables et systèmes réalisables.

Un système est dit stable si, à tout signal borné appliqué à son entrée, correspond un signal borné à sa sortie.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty \quad (21) \quad ; \quad |H(j\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty \quad (22)$$

Un système est dit réalisable si l'apparition d'un signal à sa sortie ne peut précéder l'application d'un signal à son entrée c'est-à-dire

$$h(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0.$$

VI/. Transmission des signaux aléatoires par les systèmes linéaires

si on applique à l'entrée d'un système linéaire un signal aléatoire $\xi(t)$, il apparaît à sa sortie un signal également aléatoire :

$$\eta(t) = \int_0^{+\infty} \xi(t-\tau) h(\tau) d\tau.$$

$h(t)$ est la réponse du système à l'impulsion unité.

V/1. Fonction d'autocorrélation du signal sortant.

Si le signal $\xi(t)$ est stationnaire au sens large, le signal aléatoire sortant $\eta(t)$ est aussi stationnaire au sens large et sa fonction d'autocorrélation est,

$$B_{\eta}(\tau) = E \{ \eta(t_1) \eta(t_2) \} \quad (24)$$

si $B_{\xi}(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation du signal appliqué, et $\tau = t_2 - t_1$

alors :

$$B_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(\tau - u + v) h(u) h(v) du dv \quad (25)$$

V/2. Densité spectrale de puissance $g_{\eta}(\omega)$ du signal sortant

On sait que: $g_{\eta}(\omega) = \mathcal{F} [B_{\eta}(\tau)]$ où \mathcal{F} est l'opérateur de Fourier

$$g_{\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\eta}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (26)$$

En substituant (25) dans (26) et en opérant un changement de variable

$\theta = \tau - v + u$; on obtient en posant

$$\left. \begin{aligned} H(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{j\omega u} du \\ H(+j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) e^{-j\omega v} dv. \\ g_{\xi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$g_{\eta}(\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot g_{\xi}(\omega) = A^2(\omega) g_{\xi}(\omega) \quad (28)$$

Il y a lieu de remarquer qu'en présence des phénomènes transitoires (non stationnaires), les relations ci-dessus ne sont plus valables.

V/3. Réponse au bruit "blanc" des systèmes linéaires.

Le cas où l'on applique du bruit "blanc" à l'entrée d'un système linéaire revêt en pratique une importance particulière. On appelle bruit "blanc" un processus aléatoire ayant un spectre uniforme sur toutes les fréquences.

La densité spectrale du signal appliqué est alors constante.

$$g_s(\omega) = \frac{1}{2} N_0 \qquad g_y(\omega) = \frac{1}{2} N_0 A^2(\omega).$$

et la fonction d'autocorrélation du signal sortant est :

$$B_o(\tau) = \frac{1}{2} \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

de plus.

$$B_s(\tau) = \frac{1}{2} N_0 \delta(\tau).$$

et

$$B_y(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) h(u+\tau) du$$

La fonction d'autocorrélation à la sortie, quand on applique du bruit blanc à l'entrée, est proportionnelle à la fonction :

$$p(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) h(u+\tau) du.$$

$p(\tau)$ s'appelle la fonction d'autocorrélation du filtre.

En posant $t = v - u$ on trouve :

$$|H(\omega)|^2 = \mathcal{F}\{p(t)\}.$$

V.4. Exemples.

1. Réponse au bruit blanc d'un filtre passe-bas idéal.

Pour le filtre passe-bas idéal on a :

$$\begin{cases} g_y(\omega) = \frac{1}{2} N_0 A^2 & \text{pour } |\omega| < \omega_1. \\ g_y(\omega) = 0 & \text{pour } |\omega| > \omega_1. \end{cases}$$

$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ = fréquence de coupure du filtre.

La fonction d'autocorrélation du signal sortant est :

$$B_y(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \frac{N_0}{2} \cdot A^2 \int_{-\omega_1}^{+\omega_1} e^{j\omega\tau} d\omega$$

ou
$$B_y(\tau) = \frac{\omega_1}{2\pi} N_0 A^2 \frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1 \tau}.$$

Si $B(0)$ est la puissance moyenne, c'est-à-dire $B(0) = N_0 A^2$

alors
$$B_y(\tau) = B(0) \frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1 \tau}.$$

2.) Réponse au bruit d'un filtre passe-bande idéal

Dans ce cas :

$$\begin{cases} g_{\eta}(\omega) = \frac{1}{2} N_0 A^2 & \text{pour } \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ g_{\eta}(\omega) = 0 & \text{pour } |\omega| < \omega_1, \quad \omega_2 < |\omega|. \end{cases}$$

$\frac{\omega_1}{2\pi}$ et $\frac{\omega_2}{2\pi}$ sont les fréquences de coupure du filtre avec $\omega_0 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ et $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

qui est égale à la largeur de bande ; on obtient :

$$B_{\eta}(\tau) = B_{\eta}(0) \frac{\sin \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\Delta\omega \frac{\tau}{2}} \cos \omega_0 \tau.$$

3.) Bande équivalente de bruit.

Dans certains calculs, on remplace un filtre passe-bande réel par le filtre passe-bande idéal dont la largeur de bande $\Delta\omega$ est donnée par :

$$2 \Delta\omega A^2(\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega \quad (*)$$

$$2 \Delta\omega g(\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} g(\omega) d\omega \quad (**)$$

où $g(\omega)$ représente la densité spectrale de puissance du signal sortant du filtre, quand on applique du bruit blanc à son entrée.

La relation (***) est égale à la puissance moyenne du bruit sortant multipliée par 2π

La relation (*) montre que la largeur de bande $\Delta\omega$ est définie comme la largeur de bande du filtre idéal à caractéristique d'amplitude égale à $A(\omega)_{\max} = A(\omega_0)$ telle que la réponse de ce filtre à un bruit blanc de même densité spectrale ait la même puissance moyenne que celle du filtre réel, de caractéristique d'amplitude $A(\omega)$.

La largeur de bande $\Delta\omega$ est :

$$\Delta\omega = \frac{\int_0^{+\infty} A^2(\omega) d\omega}{A^2(\omega_0)} ; \quad \Delta(\omega) = \frac{\int_0^{\infty} g(\omega) d\omega}{g(\omega_0)} ; \quad \Delta\omega = \frac{2\pi B(0)}{N_0 A^2(\omega_0)}.$$

La largeur ainsi définie, appelée parfois bande de bruit diffère en général de la largeur de bande à 3 dB.

h.) Temps de corrélation.

Le filtrage du bruit par des circuits linéaires introduit des contraintes qui sont d'autant plus grandes que ces circuits ont une bande plus étroite.

A la limite si un circuit était de bande infiniment étroite et ne laissait donc passer qu'une seule composante, le signal perdrait son caractère aléatoire. Comme mesure des contraintes introduites par les circuits linéaires on va définir le temps de corrélation. On définit ce temps par la

$$\text{relation: } 2\tau_0 B(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) d\tau = 2 \int_0^{+\infty} B(\tau) d\tau \quad (\S)$$

c'est à dire que :

τ_0 détermine une aire égale à l'aire limitée par la courbe représentant la fonction de corrélation et les axes de coordonnées.

Il en résulte de la relation (§) que :

$$\tau_0 = \frac{\int_0^{\infty} B(\tau) d\tau}{B(0)} \quad (\S \S)$$

Dans le cas du filtre passe-bas idéal, on trouve :

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1 \tau} d\tau = \frac{\pi}{2\pi \omega_1} = \frac{1}{4f_1}$$

où f_1 est la largeur de bande du filtre.

Dans le cas du filtre passe-bande idéal, le temps de corrélation est défini pareillement, donc donné par la relation (§§), mais au lieu de $B(\tau)$, on introduit l'enveloppe de la fonction d'autocorrélation. On obtient alors :

$$\tau_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{\tau \Delta \omega}{2}}{\tau \frac{\Delta \omega}{2}} d\tau = \frac{2}{\Delta \omega} S_i(\infty) = \frac{\pi}{\Delta \omega} = \frac{1}{2\Delta f}$$

où Δf est la largeur de bande du filtre passe-bande.

Le temps de corrélation τ_0 est une mesure des contraintes imposées au signal par le système de transmissions. Plus la largeur de bande est petite (f_1 ou Δf petits) plus le temps de corrélation est long.

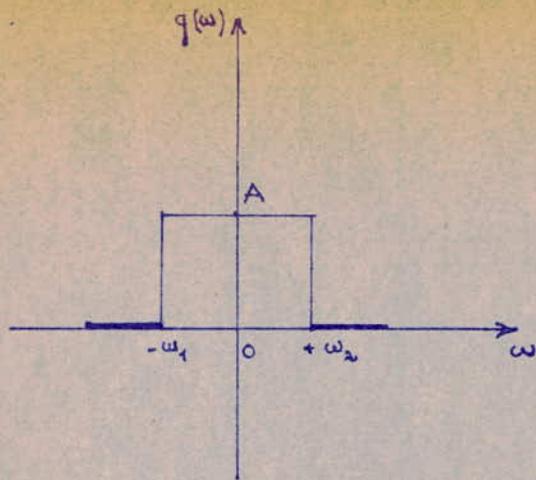


fig VII. 1 : Densité spectrale de puissance du signal de sortie d'un filtre passe-bas idéal, à l'entrée duquel on applique du "bruit blanc"

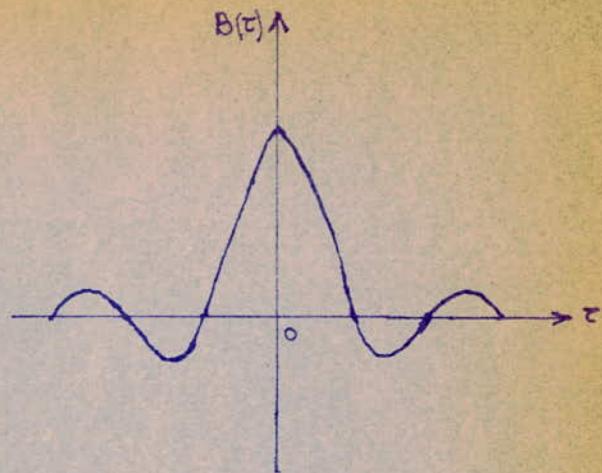


fig VII. 2. Fonction d'autocorrélation du signal de sortie d'un filtre passe-bas idéal, à l'entrée duquel on applique du bruit blanc

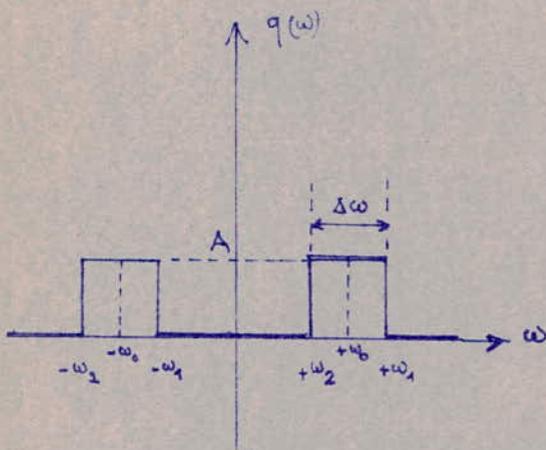


fig VII. 3. Densité spectrale de puissance du signal de sortie d'un filtre passe-bande idéal, à l'entrée duquel on applique du "bruit blanc"

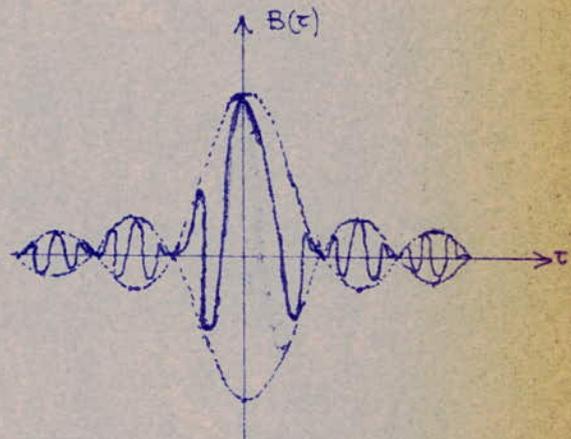


fig VII. 4. Fonction d'autocorrélation du signal de sortie d'un filtre passe-bande idéal, à l'entrée duquel on applique du bruit blanc

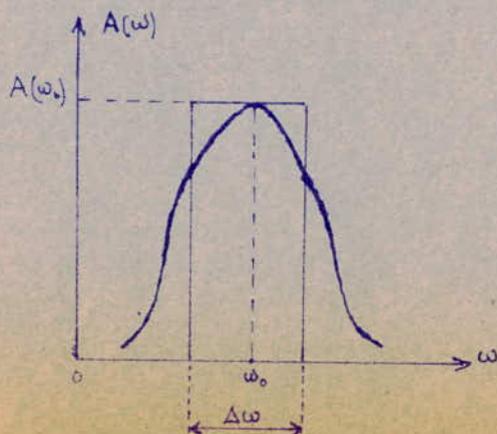


fig VII. 5. Bande équivalente du bruit

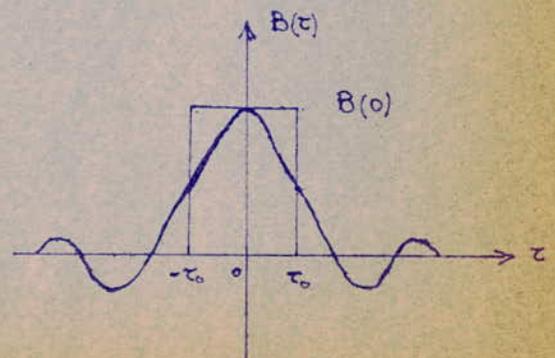


fig VII. 6. Temps de corrélation

CHAPITRE VIII

LES MESURES DANS LE DOMAINE TEMPS DES INSTABILITES DE FREQUENCES

Nous allons décrire une méthode de mesure dans le domaine temps qui fait suite à l'analyse mathématique du chapitre 3. Cette méthode est relativement nouvelle et s'est surtout développée devant la nécessité de mesurer le bruit près de la porteuse; les méthodes classiques en fréquences devenant imprécises en dessous de 100 HZ

VIII-I- Lebut de la méthode

- L'instabilité à court terme d'un oscillateur est définie par:

$$I(\tau) = \frac{\sigma^2 \langle \phi \rangle_{t, \tau}}{\omega_0}$$

Elle est souvent utilisée comme grandeur caractéristique dans le domaine temps.

- Dans le domaine fréquence, on cherche à évaluer la puissance de bruit à une fréquence f_m de la porteuse dans une bande B.

Il est très important de remarquer qu'il y a deux sortes de porteuses (cf chapitre sur la modulation B.F)

* La porteuse du signal total $A_0 \cos \omega_0 t$ tel que le bruit caractérisant la pureté spectrale $V(t)$; est telle que:

$$v(t) = V(t) + A_0 \cos \omega_0 t$$

** La porteuse de modulation de fréquence qui est

$$\omega_i = \omega_0 + \dot{\Phi}(t)$$

Le rapport (bruit/porteuse) n'a de sens que pour un bruit et une porteuse de même unité. on a:

$$N_2(f_m, B) = \frac{\langle \dot{\Phi}^2 \rangle}{\omega_0^2} = \frac{(\Delta f)^2}{f_0^2} = \frac{(\Delta f)_{rms}^2}{f_0^2}$$

Le but est l'évaluation de $(\Delta f)^2_{(f_m, B)}$

Nous allons pour cela chercher une grandeur mesurable dans le domaine temps et dont la transposition en fréquence soit la plus simple possible.

Cette grandeur sera le moment du second ordre ou variance d'une variable aléatoire soigneusement choisie. Nous verrons qu'en fait c'est la valeur moyenne du carré de la v.a. qui convient.

VIII-II- Variance et moment du second ordre

1- Définition -Relation de passage temps-fréquence

Soit $X(t)$ une fonction aléatoire on définit sa variance par:

$$\sigma^2[X(t)] = E[X(t) - E\{X(t)\}]^2$$

$E[\]$ étant la fonction espérance, ou moyenne au sens des probabilités; et d'après le théorème ergodique; elle est équivalente à la moyenne temporelle c-à-d:

$$\sigma^2[X(t)] = \langle [X(t) - E[X(t)]]^2 \rangle$$

Si on suppose que $E[X(t)] = 0$ alors:

$$\sigma^2[X(t)] = \langle X^2(t) \rangle = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df$$

Notons tout de suite que la relation qui nous intéresse est:

$$\langle X^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df \quad (I)$$

Elle n'impose pas $\langle X(t) \rangle = 0$; et donc nous abandonnerons le concept de variance qui ne nous intéresse pas. Le point de départ de notre étude est (I)

Cette étude prend toute son importance dans l'évaluation statistique de $\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df$

Evaluons successivement $E(X^2)$ et $\sigma^2(X)$ (avec $E(X) = 0$)
Calculons $\hat{E}(X^2)$ et $\hat{\sigma}^2(X)$ pour une collection X_1, \dots, X_n .

$$\hat{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n X_k^2 p(X_k)$$

Supposons la collection équiprobable; alors:

$$\hat{E}(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2$$

$$\hat{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \neq 0; \text{ alors que } E(X) = 0$$

$\hat{E}(X^2)$ est le moment initial d'ordre deux de la variable X .
Si on appelle s^2 l'estimateur de σ^2 (qui est en fait un moment centré du second ordre) alors:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [X_k - \hat{E}(X)]^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 \right) - [\hat{E}(X)]^2$$

Quelle relation existe-t-elle entre s^2 et $\hat{\sigma}_X^2$?

Le théorème de Kolmogorov affirme que:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 \text{ converge presque sûrement vers } E(X^2).$$

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

D'après la loi des grands nombres.

.../...

$$E(X^2) = \text{Var}(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + m^2$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{k=1}^n X_k^2\right) - E(\bar{X})^2 \quad \text{avec } \bar{X} = \hat{E}(X)$$

$$= \sigma^2 + m^2 + (-m^2 - \frac{\sigma^2}{n})$$

$$s^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Donc $\frac{ns^2}{n}$ est une évaluation de σ_X^2

$$\sigma_X^2 = \frac{ns^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left[X_k - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) \right]^2$$

Alors que $E(X^2) = \sigma_X^2$, on voit que $\hat{E}(X^2) \neq \hat{\sigma}_X^2$

La grandeur temporelle que nous considérerons maintenant sera $\langle X^2 \rangle$

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df$$

$$\text{et } \langle \hat{X}^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2$$

2- Inversion de la formule (I)

On cherche:

$$N_2(f_m; B) = \frac{2 \int_{f_m - B/2}^{f_m + B/2} S_{\dot{\phi}}(f) df}{f_0^2}$$

Comme on peut considérer $S_{\dot{\phi}}(f)$ uniforme sur B si $B/f_m \ll 1$ (même si ce n'est pas vrai; l'usage est de le poser comme axiome). Donc

$$2 [S_{\dot{\phi}}(f_m) \cdot B] = f_0^2 N_2(f_m; B) = (\Delta f)_{\text{rms}}^2$$

NOUS CHERCHONS A EVALUER $S_{\dot{\phi}}(f_m)$; ce qui revient à inverser la formule (I)

Pour ce faire on fait passer $\dot{\phi}(t)$ dans un filtre linéaire de réponse temporelle $h(t)$.

On a:

$$X(t) = \dot{\phi}(t) * h(t) \quad \text{et} \quad S_X(f) = |H(f)|^2 S_{\dot{\phi}}(f)$$

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\Phi}}(f) |H(f)|^2 df \quad (II)$$

Cas particulier important:

si $h(t) = 2 \cos 2\pi f_m t$ alors $H(f) = \delta(f - f_m) + \delta(f + f_m)$

$$\text{et } \langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\Phi}}(f) \left[[\delta(f - f_m)]^2 + [\delta(f + f_m)]^2 \right] df$$

$$\langle X^2 \rangle = 2 S_{\dot{\Phi}}(f_m) \quad \text{avec } X = 2 \cos 2\pi f_m t * \dot{\Phi}(t)$$

$$S_{\dot{\Phi}}(f_m) = \frac{1}{2} \langle (2 \cos 2\pi f_m t * \dot{\Phi}(t))^2 \rangle$$

Bien sûr; ceci est difficilement exploitable par la mesure étant donné la complexité de la formule. Cependant elle nous indique la marche à suivre. Il faut trouver des filtres de plus en plus proche du pic de Dirac $\delta(f - f_m)$.

3- Les différentes moyennes et leurs filtres.

Partant de $\dot{\Phi}(t)$ on cherche $X(t)$; avec un filtre $h(t)$ qui se rapproche de $2 \cos 2\pi f_m t$.

$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle$. Signal associé $\dot{\Phi}(t)$ avec:

$$h_1(t) = \delta(t) \quad \text{et} \quad H_1(f) = 1$$

On a:

$$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{\Phi}^2(t_k)$$

$\langle \langle \dot{\Phi} \rangle_{t,\tau}^2 \rangle$. Signal associé $\langle \dot{\Phi}(t) \rangle_{t,\tau} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \dot{\Phi}(t) dt$
(ceci est une moyenne sur un temps fini)

$$\langle \dot{\Phi}(t) \rangle_{t,\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\Phi}(u) h(u-t) du = [\dot{\Phi}(u) * h(u)]_t$$

avec:

$$\begin{cases} h_2(t) = \frac{1}{\tau} & 0 < t < \tau \\ h_2(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$H_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i f t} h_2(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e^{-2\pi i f t} dt = e^{-\tau i f \pi} \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau}$$

Donc:

$$|H_2(f)|^2 = \frac{\sin^2 \pi f \tau u}{(\pi f \tau)^2}$$

et

$$\langle \langle \dot{\Phi} \rangle_{t, \tau}^2 \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \langle \dot{\Phi} \rangle_{t_k; \tau}^2$$

-Moyenne d'Allan

Si on fait $n=2$ dans la moyenne précédente; on a:

$$\langle \langle \dot{\Phi} \rangle_{t, \tau}^2 \rangle_2 = \frac{1}{2} \left[\langle \dot{\Phi} \rangle_{t_1, \tau}^2 + \langle \dot{\Phi} \rangle_{t_2, \tau}^2 \right]$$

on forme alors une nouvelle expression; appelée moyenne d'Allan.

$$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{2, \tau} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (\langle \dot{\Phi} \rangle_{t_{k+1}, \tau} - \langle \dot{\Phi} \rangle_{t_k, \tau})^2$$

avec

$$\langle \dot{\Phi} \rangle_{t_k, \tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} \dot{\Phi}(t) dt \quad \text{et} \quad t_{k+1} = t_k + \tau$$

On mesure toujours. Il n'y a pas de temps mort

Dans ce cas:

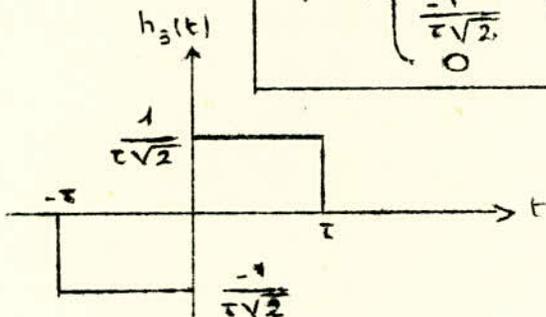
$$X_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \dot{\Phi} \rangle_{t_{k+1}, \tau} - \langle \dot{\Phi} \rangle_{t_k, \tau}$$

$$\text{et} \quad X(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{2}} \left[\int_t^{t+\tau} \dot{\Phi}(t) dt - \int_{t-\tau}^t \dot{\Phi}(t) dt \right]$$

$$\text{donc:} \quad X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u-t) \dot{\Phi}(u) du = [h(u) * \dot{\Phi}(u)]_t$$

avec

$$h_3(t) \begin{cases} \frac{1}{\tau\sqrt{2}} & : 0 < t < \tau \\ -\frac{1}{\tau\sqrt{2}} & : -\tau < t < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



.../...

$$H_3(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_3(t) e^{-2\pi i f t} dt = \int_{-\tau}^0 -\frac{1}{\tau\sqrt{2}} e^{-2\pi i f t} dt + \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau\sqrt{2}} e^{-2\pi i f t} dt$$

$$H_3(f) = \frac{1}{\tau\sqrt{2}} \frac{e^{2\pi i f \tau} - e^{-2\pi i f \tau}}{2\pi i f}$$

$$H_3(f) = i\sqrt{2} \frac{\sin^2 \pi f \tau}{\pi f \tau}$$

$$\Rightarrow |H_3(f)|^2 = 2 \left[\frac{\sin^2 \pi f \tau}{\pi f \tau} \right]^2$$

Exemple

Supposons que le bruit soit une modulation pure

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cos \Omega t = \Phi_0 \cos 2\pi f t$$

$$1) \quad \frac{\pi}{\Omega} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f}$$

Alors: $\langle \Phi^2 \rangle_{2,\tau} = \frac{1}{2n} n (2 \Phi_{T/2})^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4\Phi_0}{\pi} \right)^2$

La moyenne d'Allan est maximum.

$$2) \quad \tau = T \text{ alors } \langle \Phi^2 \rangle_{2,\tau} = 0$$

Dès que $\tau \neq \frac{T}{2}$ la moyenne d'Allan devient petite. Nous pouvons d'ailleurs voir que le pic principal de $H_3(f)$ se trouve à environ $f = \frac{1}{2\tau}$

Etude du pic de $H_3(f)$ à $\frac{1}{2}$

On a:

$$H_3(f) = \frac{\sin^2 \pi f \tau}{\pi f \tau}$$

donc $|H_3(f)|' = 0 \quad \text{tg } \pi f \tau = 2(\pi f \tau)$

d'où en résolvant graphiquement on trouve:

$$\pi f \tau = 1,165 \text{ rd}$$

$$\tau = \frac{1,165}{f} = \frac{1}{2,7 f}$$

Ce pic est très large et de plus nous avons beaucoup d'harmoniques.

-- Moyenne d'HADAMARD

Ce raffinement; q'est la moyenne d'Hadamard permet de résoudre d'une manière satisfaisante la recherche du

filtre en pic de Dirac.

C'est une généralisation pure et simple de la moyenne d'Allan. Elle s'écrit:

$$\langle \Phi^2 \rangle_{N, \tau, T_D} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left\{ \sum_{\nu=1}^{2N} (-1)^{\nu+1} \langle \dot{\Phi} \rangle_{t_{k+\nu}, \tau} \right\}^2$$

D'un filtre à un créneau ; la moyenne d'Allan donnait un filtre à deux créneaux ; on passe maintenant à un filtre à **2N créneaux**.

Nous n'écrirons pas le filtre $h_4(t)$ ici ; nous donnerons simplement la fonction de transfert $H_4(f)$; $h_4(t)$ est une fonction de WALSCH

$$H_4(f) = 2N \sum_{n'=1,3,5,\dots} \operatorname{sinc} \left[\frac{n'\tau}{2(\tau+T_D)} \right] \operatorname{sinc} \left[2N(\tau+T_D) \left(f - \frac{n'}{2(\tau+T_D)} \right) \right]$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \\ \tau \quad \text{temps de mesure} \\ T_D \quad \text{temps mort entre deux mesures} \\ N \quad \text{nombre de cycles complets dans la mesure} \end{array} \right.$$

Pourquoi un temps mort

Le but recherché étant d'atteindre la sinusoïde ; on cherche à modifier la forme du filtre ; l'introduction d'un temps mort permet de se rapprocher du but.

On a :

$$t_k + T_D = t_{k+1}$$

Avant de donner les formules de passage (temps-fréquence) relatives aux filtres d'Hadamard indiquons que l'on peut encore améliorer la moyenne d'Hadamard ; et ainsi en affectant à chaque créneau un poids approprié ; on obtiendra un filtre très satisfaisant.

$$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{N, \tau, T_D, \alpha} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\nu=1}^{2N} \alpha_{\nu} (-1)^{\nu+1} \langle \dot{\Phi} \rangle_{t_{k+\nu}, \tau} \right)^2$$

Un créneau du filtre étant:

$$h_i(t) = \begin{cases} (-1)^{i+1} \alpha_i ; & t_{k+j} < t < t_{k+j+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

L'étude de l'enveloppe du filtre d'Hadamard; c-à-d de la série (α_i) ; a été faite par HANNING; nous ne développerons ici, plus longtemps cette analyse qui ne relève plus que du calcul.

Les relations de passage

Le filtre d'Hadamard décrit précédemment; suppose $\alpha_i = 1 \quad \forall i$ et $t_k + \tau + T_D = t_{k+1}$; nous allons montrer qu'en choisissant convenablement τ/T_D ; on peut rendre le filtre très satisfaisant pour le but fixé.

Le filtre est donc un segment d'onde rectangulaire constitué de N cycles complets.

La relation de départ est:

$$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{\tau, N, T_D} = \int_0^{\infty} |H_4(f)|^2 S_{\dot{\Phi}}(f) df$$

En incluant dans $S_{\dot{\Phi}}(f)$ la puissance double bande
Posons $A_{n'} = 2N \operatorname{sinc} \frac{n'\tau}{2(\tau+T_D)}$
alors:

$$H_4(f) = \sum_{n'=1,3,5,\dots} A_{n'} \operatorname{sinc} 2N(\tau+T_D) \left(f - \frac{n'}{2(\tau+T_D)} \right)$$

On peut considérer ce filtre comme la superposition de filtres élémentaires

$$H_4(f) = \sum_{n'=1,3,5} H_{4,n'}(f)$$

avec: $H_{4,n'}(f) = A_{n'} \operatorname{sinc} 2N(\tau+T_D) \left(f - \frac{n'}{2(\tau+T_D)} \right)$

Ces filtres sont centrés en:

$$f(n') = \frac{n'}{2(\tau+T_D)}$$

leur bande passante est:

$$B_N = \frac{1}{2N(\tau+T_D)} \dots/\dots$$

$$\frac{[H_4, n'(f)]_{f=f(n') + \frac{B_N}{2}}}{[H_4, n'(f)]_{f=f(n')}} = \text{sinc} \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} = 0,65 < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3 \text{ dB})$$

Propriétés

Si n' est pair alors: $H_4(f(n')) = 0$

Si n' est impair on a un pic en: $f = \frac{n'}{2(\tau + T_D)}$

La largeur de bande étant l'inverse de la durée temporelle du filtre. Donc (3') s'écrit en supposant $B_N \ll \frac{1}{T_D + \tau}$ et par conséquent $2N$ est grand devant 1

(Condition de découplage entre les différents filtres -)

$$(5) \quad \langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{\tau, N, T_D} = \frac{1}{2N(\tau + T_D)} \sum_{n=1,3,5,\dots} A_n^2 S_{\dot{\Phi}} \left(\frac{n'}{2(\tau + T_D)} \right)$$

(5) suppose N grand

Comme $\frac{\sin x}{x}$ ne prend des valeurs notables que près de zéro l'hypothèse d'une largeur de bande faible devant la fréquence centrale de chaque filtre élémentaire; justifie (5)

Résolution de (5)

L'hypothèse sur N nous a permis d'écrire (3') sous la forme (5). Nous avons déjà dit que le rapport τ/T_D permet, s'il est bien choisi d'éliminer des harmoniques.

Soit $(\tau/T_D) = 2$ alors $A_{n'} = 2N \text{sinc} \frac{n'\tau}{2(\tau + T_D)} = \frac{2N}{\frac{\pi n'}{3}} \text{sinc} \frac{n'\tau}{2(\tau + T_D)}$

et $\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{\tau, T_D} = \tau/2, N = \frac{1}{3N\tau} \sum_{n=2k+1} \left(\frac{6N}{\pi n'} \right)^2 \text{sinc}^2 \frac{\pi n'}{3} S_{\dot{\Phi}} \left(\frac{n'}{3\tau} \right)$

si $n' = 3p$ alors $A_n = 0$

La condition (τ/T_D) ; permet d'annuler les harmoniques $3p$ p en

Cette condition remplie on a:

$$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{\tau, T_D} = \tau/2, N = \frac{1}{3N\tau} \sum_{\substack{n'=2k+1 \\ n' \neq 3p}} \left[\left(\frac{6N}{\pi n'} \right)^2 \text{sinc}^2 \frac{\pi n'}{3} \right] S_{\dot{\Phi}} \left(\frac{n'}{3\tau} \right)$$

Les harmoniques qui demeurent sont donc:

- l'harmonique 1 : $A_1 = 2N \frac{\sin \pi/3}{\pi/3}$; $A_1 = 1,24N$
 - l'harmonique 5 : $A_5 = 2N \frac{\sin 5\pi/3}{5\pi/3}$; $A_5 = -0,33N$
 - l'harmonique 7 : $A_7 = 2N \frac{\sin 7\pi/3}{7\pi/3}$; $A_7 = 0,26N$
 - l'harmonique 11 : $A_{11} = 2N \frac{\sin 11\pi/3}{11\pi/3}$; $A_{11} = -0,18N$
- etc..... (on a éliminé les harmoniques 3, 5, 15, ...)

Finalement:

$$S_{\dot{\phi}}\left(\frac{1}{3\tau}\right) = \frac{3N\tau}{(1,24)^2} < \dot{\Phi}^2 >_{\tau, T_D = \frac{\tau}{2}, N} - \left(\frac{0,33}{1,24}\right)^2 S_{\dot{\phi}}\left(\frac{5}{3\tau}\right) - \left(\frac{0,26}{1,24}\right)^2 S_{\dot{\phi}}\left(\frac{7}{3\tau}\right)$$

Soit en posant $f_m = \frac{1}{3\tau}$

$$S_{\dot{\phi}}(f_m) = \frac{1}{(1,24)^2 f_m N} < \dot{\Phi}^2 >_{\tau, T_D = \frac{\tau}{2}, N} - 0,07 S_{\dot{\phi}}(5f_m) - 0,04 S_{\dot{\phi}}(7f_m) \dots$$

Cette expression ne se simplifie vraiment que si le bruit n'existe que pour $f = 5f_m$. Alors:

$$\boxed{S_{\dot{\phi}}(f_m) = \frac{0,64 < \dot{\Phi}^2 >_{\tau, T_D = \frac{\tau}{2}, N}}{f_m N}} \Rightarrow \boxed{S_{\dot{\phi}}\left(f_m = \frac{1}{3\tau}\right) = \frac{1,9}{N} < \dot{\Phi}^2 >_{\tau, T_D = \frac{\tau}{2}, N}}$$

Autrement on peut négliger les termes suivants; puis les calculer eux mêmes de la même manière; ce qui permet de se rendre compte très vite du degré d'approximation fait en employant la formule simplifiée.

une autre méthode consiste à adopter un filtre peu bruyant qui coupe le bruit au dessus de $f = 5f_m$.

$$\left[\langle X^2 \rangle = \int_0^\infty S_x(f) df \right] \text{ avec } S_x(f) \text{ densité spectrale de puissance double bande.}$$

$\langle X^2 \rangle$	expression	filtre et relation de passage
$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle$	$\frac{1}{n} \sum_1^n \dot{\Phi}^2(t_k)$	$ H(f) ^2 = 1$
$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{t,\tau}$	$\frac{1}{n} \sum_1^n [\langle \dot{\Phi} \rangle_{t_k,\tau}]^2$	$ H(f) ^2 = \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2$
$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{2,\tau}$	$\frac{1}{2n} \sum_1^n \left(\langle \dot{\Phi} \rangle_{t_{k+1},\tau} - \langle \dot{\Phi} \rangle_{t_{k,\tau}} \right)^2$	$ H(f) ^2 = 2 \left[\frac{\sin^2 \pi \tau f}{\pi \tau f} \right]^2$
$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{\tau, T_D, N}$	$\frac{1}{n} \sum_0^n \sum_1^{2N} \left[(-1)^{i+1} \langle \dot{\Phi} \rangle_{t_{k+j},\tau} \right]^2$	$ H(f) ^2 = \left \sum_{1,3,5,\dots} A_n \sin 2N(\tau + T_D) \left(f - \frac{n}{2(\tau + T_D)} \right) \right ^2$
$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{\tau, T_D = \tau/2, N}$	identique avec $T_D = \tau/2$	<p>Ses harmoniques 3p n'existent pas</p> <ul style="list-style-type: none"> * $A_{3p} = 0$ * $A_{2p} = 0$ $S_{\dot{\Phi}}(f_m) = \frac{0.54}{f_m N} \langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{\tau, T_D = \tau/2, N}$
$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{\tau, T_D, N, \alpha_i}$	$\frac{1}{n} \sum_0^n \sum_1^{2N} \left[(-1)^{i+1} \alpha_i \langle \dot{\Phi} \rangle_{t_{k+j},\tau} \right]^2$	modulation de Hanning du filtre d'Hadamard.

CONCLUSION

Nous avons finalement trouvé une grandeur temporelle;

$\langle \dot{\Phi}^2 \rangle_{\tau, T_D = \frac{\tau}{2}, N}$ la moyenne d'Hadamard avec temps mort moitié du temps de mesure qui permet sous certaines conditions de calculer facilement $S_{\dot{\Phi}}(f_m)$, but de notre présente étude. On atteint $S_{\dot{\Phi}}(f_m)$ et non $(\Delta f)_{rms}^2$ dans la bande B que l'on désire.

$$(\Delta f)_{rms}^2 (f_m \cdot B) = S_{\dot{\Phi}}(f_m) \cdot B$$

Il n'y a pas de facteur 2, car la densité spectrale (3') est double bande comme nous l'avons déjà dit.

C O N C L U S I O N

Le but de notre étude était de mesurer le bruit d'un oscillateur hyperfréquence : "Klystron réflex". Nous avons commencé par donner un aperçu mathématique de la question; (rappelons que la théorie est tout à fait générale quelque soit l'oscillateur utilisé) ensuite nous nous sommes préoccupés de trouver des méthodes de mesure dans l'espace fréquentiel. On a donné des résultats expérimentaux relatifs à la AM et décrit un pont de mesure de la FM (pouvant servir également à la AM). Ce pont est très intéressant en ce sens qu'il peut être adopté pour la FM et pour la AM (C'est bien dommage qu'on ne puisse disposer, à l'école d'un matériel hyperfréquence qui répond à nos besoins.). On a également fait une ébauche de la mesure du bruit dans l'espace temporel (méthode d'Hadamard) qui nous permet d'avoir le bruit au voisinage de la porteuse (100 Hz). L'appareil de "HEWLETT. PACKARD" permet d'obtenir une moyenne de la forme $\langle \dot{\Phi}_{t_{k, \tau}}^2 \rangle$ qui programmée sur ordinateur donne lieu à la moyenne d'Hadamard et par suite à la puissance calculable $S_{\phi}(f_m)$. Nous souhaitons, de bon coeur, que ce sujet qui est très intéressant à plus d'un titre puisse être repris ou continué un jour à l'école.

≡ BIBLIOGRAPHIE ≡

- M. ROCCHI: Thèse d'Ingénieurat E.S.E.

- G. CARTIANU : Modulation de fréquence Ed. DUNOD Paris
(1968)

- A. SPATARU : Théorie de la transmission de l'information
Tome I "Signaux et bruits" Ed. MASSON & Cie.
(Paris 1970).

- E. ROUBINE: Circuits pour ondes ultra-courtes (ESE) 1966.

- L. S. CUTLER: & C. L. SEARLE:
"Some Aspects of the Theory and Measurement of
Frequency Fluctuations in Frequency Standards"
Revue: Proc. of the IEEE. Vol. 54, N° 2 Febr. 1966.

.....=====.....