

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Mémoire de Magister en Génie Mécanique

Ecole Doctorale : Construction Mécanique

Option : Mécanique et Ingénierie des Systèmes

Présenté par :

MERZOUK Meziane

Ingénieur d'état en Génie Mécanique (UMBB)

THEME

Déformation axisymétrique d'une plaque élastique reposant sur un appui rigide ayant un trou circulaire

Devant le jury composé de :

M	S. RECHAK	Professeur .ENP	Président du jury
M	B. KEBLI	Maître de conférences .ENP	Directeur
M	A.NOUR	Professeur .UMBB	Examineur
M	H.YOUSFI	Maître de conférences .ENP	Examineur

2010/2011

ملخص

نعرض في هذه المذكرة التشوه المنتاسق مع المحور لطبقة مرنة ترتكز على قاعدة صلبة مع وجود ثقب دائري يتم تطبيق حقل الإجهاد الموحد على السطح الخارجي للطبقة. تخفف المشكلة المختلطة من الشروط الحدية إلى معادلات مزدوجة.

بدلاً من استخدام النهج التقليدي عن طريق حل المعادلة المزدوجة السابقة بإتباع طريقة فريدهلم، نحصل على نظام لا حصر له من المعادلات الجيبية يحل عن طريق اختيار طريقة كوباياشي-ترانتر المعدلة في سلسلة من وظائف بيسال ونعبر على شدة عامل التوتر على حافة الثقب. وفي الأخير نعرض بعض الرسوم البيانية ذات الاهتمام الفعلي لحالات مختلفة من سمك الطبقة.

كلمات البحث: التشوه المنتاسق، طبقة مرنة، معادلات مزدوجة، طريقة كوباياشي-ترانتر

Résumé

Nous étudions la déformation axisymétrique d'une couche élastique reposant sur une base rigide avec un trou circulaire. Un champ de contrainte uniforme est appliqué sur la surface externe de la couche. Le problème mixte des conditions aux limites est réduit aux équations intégrales duales. Au lieu d'employer l'approche traditionnelle consistant en résolvant l'équation intégrale correspondante de Fredholm, nous obtenons un système infini des équations algébriques en choisissant la méthode de Kobayashi-Tranter modifiée en série des fonctions de Bessel. L'expression du facteur d'intensité de contrainte au bord du trou est donnée analytiquement. Quelques graphiques d'intérêt physique sont présentés pour différents cas de l'épaisseur de la couche élastique.

Mots clés: Déformation axisymétrique, couche élastique, équations intégrales duales, méthode de Kobayashi-Tranter.

Abstract

We study the axisymmetric deformation of an elastic layer overlaid on a rigid foundation with a circular hole. A uniform stress field is applied on the bottom surface of the layer. The mixed boundary-value problem is reduced to dual integral equations. Instead of using the traditional approach consisting in solving the corresponding Fredholm integral equation, we get an infinite system of algebraic equations by choosing the modified Kobayashi-Tranter development in series of Bessel functions. The expression of the stress intensity factor at the edge of the hole is given analytically. Some graphs of physical interest are displayed for different cases of the thickness of the layer.

Key words: Axisymmetric deformation, Elastic Layer, Dual integral equations, Kobayashi-Tranter method.

REMERCIEMENTS

=====

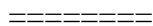
JE TIENS D'ABORD À REMERCIER MONSIEUR B.KEBLI POUR SES CONSEILS, SON ENCADREMENT, SON SUIVI ATTENTIF, SES RÉFLEXIONS PERTINENTES ET SA RIGUEUR.

JE REMERCIE ÉGALEMENT LE PRÉSIDENT ET MEMBRES DU JURY QUI ONT BIEN VOULU JUGER CE TRAVAIL.

C'EST DANS UN ÉTAT D'ESPRIT MITIGÉ QUE JE RÉDIGE CES QUELQUES LIGNES AFIN DE REMERCIER TOUTES LES PERSONNES QUI ONT CONTRIBUÉ IMPLICITEMENT OU EXPLICITEMENT À L'ENSEMBLE DE CE TRAVAIL.

ENFIN, JE NE POURRAIS TERMINER SANS UNE PENSÉE À L'ENSEMBLE DE MES ENSEIGNANTS. QU'ILS TROUVENT ICI, L'EXPRESSION DE MA PROFONDE GRATITUDE.

DÉDICACES



**JE DÉDIE CE TRAVAIL À MES
CHERS PARENTS,
TOUTE MA FAMILLE ET TOUS MES AMIS**

SOMMAIRE

1.INTRODUCTION GENERALE	1
2.ETUDE BIOGRAPHIQUE	4

CHAPITRE I

RAPPELS MATHEMATIQUES

=====

I.1 INTRODUCTION	8
I.2 EQUATION DE FREDHOLM	8
I.2.1 EQUATION DE PREMIERE ESPECE.....	8
I.2.2 EQUATION DE SECONDE ESPECE.....	9
I.3 EQUATION DE VOLTERA	10
I.3.1 EQUATION DE PREMIERE ESPECE.....	10
I.3.2 EQUATION DE SECONDE ESPECE	10
I.4 EQUATION DE BESSEL.....	10
I.5 FONCTION DE BESSEL DEUXIEME ESPECE.....	13
I.6 TRANSFORMEE DE HANKEL.....	16
I.7 QUELQUES APERÇUS SUR LES METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES DUALES	16
I.7.1 METHODE POLYNOMIALE	16
I.7.2 METHODE DE KOBAYASHI-TRANTER MODIFIEE.....	18
I.8 LES POLYNOMES DE LEGENDRE	21
I.8.1 DEFINITION.....	21
I.8.2 PROPRIETES DE DEVELOPPEMENTS EN SERIES DE PUISSANCE DES POLYNOMES DE LEGENDRE.....	22
I.9 METHODES D'INTEGRATION NUMERIQUE	23
I.9.1 METHODES DE COTES.....	23
I.9.1.1 Méthode de Trapèze	23

I.9.1.2 Méthode de Simpson	24
I.10 RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS.....	25
I.10.1 LES SYSTEMES LINEAIRES.....	25
I.10.1.1 Première méthode : la méthode par décomposition LU	25
I.10.1.2 Deuxième méthode : la méthode itérative de Jacobi.....	27
I.10.1.3 Troisième méthode : la méthode itérative de Gauss-Seidel.....	29
I.10.1.4 Les critères d'arrêt de l'itération.....	29
I.11 CONCLUSION	30

CHAPITRE II

ELEMENTS SUR LA THEORIE D'ELASTICITE

=====

II.1 INTRODUCTION	31
II.2 QUELQUES DEFINITIONS	31
II.2.1 L'ELASTICITE CLASSIQUE	31
II.2.2 ELASTICITE AXISYMETRIQUE.....	31
II.3 LES MODULES ELASTIQUES	32
II.3.1 MODULE D'YOUNG ET COEFFICIENT DE POISSON	32
II.3.1.1 Unité du Module d'Young et de coefficient de Poisson.....	33
II.3.1.2 Méthodes de mesure du module d'Young.....	33
II.3.1.3 Exemple d'utilisation	34
II.3.2 MODULE DE COULOMB	34
II.3.3 MODULE DE LAME	34
II.3.4 MODULE DE COMPRESSIBILITE ET DE CISAILLEMENT.....	35
II.3.5 QUELQUES RELATIONS ENTRE COEFFICIENTS	36
II.4 EQUATIONS DE L'ELASTICITE	36
II.4.1 LOI DE HOOKE.....	36
a) Les relations contrainte-déformation	38
b) Les relations déformation-déplacement.....	38
c) Les contraintes tangentielles:	38
II.4.2 EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE D'ELASTICITE.....	39

II.4.2 .1 La fonction de contrainte de Love	40
II.4.2 .2 Les fonctions de Boussinesq	40
I.5 CONCENTRATION DE CONTRAINTE	42
II.5.1 CHAMP DE CONTRAINTE AUTOUR D'UNE FISSURE	42
II.5.2 CHAMP DE DEPLACEMENT AUTOUR D'UNE FISSURE	45
II.6 SOLUTION DE SNEDDON DU PROBLEME DE GRIFFITH ET DU PROBLEME D'UNE FISSURE CIRCULAIRE DANS UN SOLIDE INFINI SOUMIS A UNE TRACTION UNIFORME	45
II.7 DISTRIBUTION DES CONTRAINTE DANS UNE PLAQUE MINCE INFINIE CONTENANT UN TROU CIRCULAIRE.....	47
II.8 APPLICATION DE LA THEORIE D'ELASTICITE AU CALCUL DE K_t	51
II.9 APPLICATION DES TECHNIQUES EXPERIMENTALES AU CALCUL DE K_t	53
II.9.1. MESURE DES CONCENTRATIONS DES CONTRAINTE PAR JAUGES.....	53
II.9.2. MESURE DES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTE PAR LA PHOTOELASTICITE.....	53
II.10 ENERGIE DE DEFORMATION ELASTIQUE	53
II.11 CONCLUSION	54

CHAPITRE III

RESOLUTION & DISCUSSION

=====

III.1 SOLUTION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE	56
III.2 FORMULES FONDAMENTALES	58
III.3 FORMULATION DU PROBLEME	59
III.4 DECOMPOSITION DU PROBLEME	59
III.4.1 SOLUTION ELEMENTAIRE	60
III.4.2 SOLUTION AUXILIAIRE	61
III.5 DETERMINATION DES FONCTIONS INCONNUES	62
III.5.1 DETERMINATION DE LA FONCTION $B(\lambda)$	62
III.5.2 DETERMINATION DE LA FONCTION $C(\lambda)$	63
III.5.3 DETERMINATION DE LA FONCTION $A(\lambda)$	65
III.6 RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE DUALE PAR LA METHODE DE KOBAYASHI-TRANter MODIFIEE.....	67
A) DECOMPOSITION DE $p(\lambda)$	68

B) CALCUL DES ELEMENTS DE LA MATRICE L_{MN}	68
C) CALCUL DE LA CONSTANTE R_M	69
D) DETERMINATION DES COEFFICIENTS $A_M^{(k)}$	70
E) DETERMINATION DE LA FONCTION $D(\lambda)$	71
III.7 EXPRESSIONS FINALES DES FONCTIONS INCONNUES.....	72
III.8 DETERMINATION DE DEPLACEMENT NORMAL.....	73
III.9 DETERMINATION DE CONTRAINTE NORMALE.....	74
III.10 DETERMINATION DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE	76
III.11 CONCLUSION	79
CONCLUSION GENERALE	80
PERSPECTIVES.....	80
ANNEXES.....	84
ANNEXE A.....	84
ANNEXE B.....	85
ANNEXE C.....	87
ANNEXE D.....	88
ANNEXE E.....	89

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

FIGURE I. 1: REPRESENTATION DE QUATRE PREMIERES FONCTIONS DE BESSEL DE DEUXIEME	
<i>ESPECE</i>	12
FIGURE I. 2: REPRESENTATION DE QUATRE PREMIERES FONCTIONS DE BESSEL DE DEUXIEME	
<i>ESPECE</i>	15

CHAPITRE II

FIGURE II .1: MODULES DE YOUNG ET DE POISSON	33
FIGURE II .2: MODULE DE COULOMB	34
FIGURE II .3: ÉVOLUTION DE λ ET μ LORSQUE ν VARIE ENTRE 0 ET 0.5, POUR UN E DONNE	35
FIGURE II .4: DIAGRAMME CONTRAINTE-DEFORMATION	37
FIGURE II .5: DIFFERENTS MODES DE CHARGEMENT D'UNE FISSURE	42
FIGURE II .6: SYSTEME DE COORDONNEES EMPLOYE POUR L'ANALYSE DU CHAMP DE CONTRAINTES	
<i>EN POINTE DE FISSURE</i>	43
FIGURE II .7: SOLLICITATION EN TRACTION ET EN CISAILLEMENT D'UNE PLAQUE	44
FIGURE II .8: MODELE DE SNEDDON	46
FIGURE II .9: PLAQUE INFINIE CONTENANT UN TROU CIRCULAIRE	47
FIGURE II .10: PRINCIPE DE SUPERPOSITION	48
FIGURE II .11: DISTRIBUTION DE σ_{xx} / σ_0 ET σ_{yy} / σ_0 LE LONG DE L'AXE X	49
FIGURE II .12: DISTRIBUTION DE σ_{xx} / σ_0 ET σ_{yy} / σ_0 VARIE LE LONG DE L'AXE Y	50
FIGURE II .13: DISTRIBUTION DE $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_0$ AU VOISINAGE DU TROU	51
FIGURE II .14: PLAQUE INFINIE CONTENANT UN TROU DE FAIBLE DIAMETRE	51
FIGURE II .15: DISTRIBUTION DES CONTRAINTES DANS UNE PLAQUE INFINIE CONTENANT UN TROU	
<i>DE FAIBLE DIAMETRE</i>	52
FIGURE II .16: TECHNIQUE DE PHOTOELASTICIMETRIE	53
FIGURE II .17: SCHEMATISATION DE L'ENERGIE ELASTIQUE	54

CHAPITRE III

FIGURE III. 1 : *PLAQUE ELASTIQUE REPOSANT SUR UN APPUI RIGIDE AYANT UN TROU CIRCULAIRE
ET SOUMISE A UN CHAMP DE CONTRAINTE UNIFORME* 56

FIGURE III. 2: *DISTRIBUTION RADIAL DU DEPLACEMENT NORMALE ADIMENSIONNEL* 74

FIGURE III. 3: *DISTRIBUTION RADIAL DE LA CONTRAINTE NORMALE ADIMENSIONNELLE* 76

FIGURE III. 4: *VARIATION DE COEFFICIENT D'INTENSITE DE CONTRAINTE ADIMENSIONNEL EN
FONCTION DE H/R.*..... 79

INTRODUCTION GÉNÉRALE

=====

1. Introduction générale

Les mécanismes de contact entre les solides élastiques, disant mécanique de contact, est une partie importante dans divers domaines pratiques. Elle se développe activement grâce à la mécanique des milieux continus. L'analyse du champ de contraintes et de déplacements d'une fissure d'un solide élastique est un problème classique de l'élasticité tridimensionnelle, c'est également un problème d'intérêt fondamental pour l'étude de la propagation des fissures dans les matériaux.

Le problème de détermination du champ de contrainte autour d'une fissure dans un milieu élastique infini a été discuté pour la première fois par Sneddon [10]. Une grande partie des études postérieures des problèmes concernés par les fissures circulaires ont été basées sur le travail de Sneddon et la méthode de Lebedev et Ufliand [20].

Une recherche sur l'état de contrainte dans une plaque épaisse contenant une fissure circulaire a été menée par Lowengrub [1] en se basant sur l'étude de Sneddon. La fissure a été prise au centre du plan de la plaque et dont ses surfaces sont parallèles à celles de plaque. En outre, la méthode de résolution numérique par la méthode du petit paramètre exige que l'épaisseur de la plaque soit grande par rapport au rayon de la fissure.

Des descriptions détaillées sur l'analyse des contraintes de ce type de problème et des évaluations du facteur d'intensité de contrainte associé au chargement appliqué ont été donné par Sakamoto et Kobayashi [2], [3], [4] et [5].

En général, ce type de problèmes se réduit à un système d'équations intégrales duales par la méthode de la transformation intégrale de Hankel. Différentes approches de résolutions numériques sont alors proposées pour l'étude des équations intégrales de Fredholm correspondantes. Les méthodes les plus utilisées se basent sur le principe de l'intégration numérique ou bien le développement de la fonction intégrale en série entière à condition que le rapport de l'épaisseur – rayon de la fissure soit suffisamment petit.

Cette étude analyse le problème axisymétrique d'une plaque épaisse et élastique reposant sur un appui rigide contenant un trou circulaire et soumise à un chargement uniforme. Le milieu élastique est considéré comme étant homogène et isotrope. L'étude analytique de ce problème aux conditions limites mixtes a été réalisée dans le cadre de la déformation élastique linéaire.

Par la méthode de la transformation intégrale de Hankel et en utilisant les fonctions auxiliaires de Boussinesq, le problème considéré a été ramené à un système d'équations intégrales duales. Contrairement à la méthode traditionnelle consistant à résoudre l'équation de Fredholm correspondante, le système a été directement réduit à la résolution d'un système algébrique.

Nous avons procédé par la méthode modifiée de Kobayashi-Tranter. La fonction inconnue vérifiant le système des équations duales a été cherchée sous une forme appropriée d'un développement en série de fonctions de Bessel. La méthode itérative de Jacobi a été appliquée pour la résolution du système algébrique infini obtenu.

Ayant justifié la réduction du système algébrique infini, ses coefficients ont été donnés sous forme de suites convergentes. Par suite, des déplacements normaux dans la région du trou circulaire ont été calculés ainsi que des contraintes dans le plan de l'orifice. Ces résultats ont été illustrés graphiquement. L'expression analytique du facteur d'intensité de contrainte a été aussi obtenue en termes des coefficients du système algébrique infini. Le travail a été conclu par des conclusions sur les différentes grandeurs physiques du problème étudié.

Le plan de ce mémoire s'articule autour trois chapitres, dans le premier chapitre on expose un ensemble de rappels mathématiques utilisés dans notre étude du problème. Un aperçu concernant la résolution analytique des équations intégrales a été donné. Les fonctions de Bessel ainsi que leurs propriétés ont été présentées sous forme d'un paragraphe. Ce qui permet d'introduire la notion de la transformation intégrale de Hankel.

Le deuxième chapitre présente des éléments sur la théorie d'élasticité linéaire. Le système d'équilibre élastique a été établi dans le cas de la déformation axisymétrique. La loi de Hooke et les différents modules d'élasticité ont été aussi définis. Les méthodes des fonctions de contraintes de Boussinesq, de Love ont été formulées dans ce chapitre.

Le dernier chapitre, représentant le noyau de notre mémoire, donne la résolution du problème étudié.

Des références bibliographiques citées dans le travail sont présentées à la fin du mémoire.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

=====

2. Etude biographique

M. Lowengrub 1961 [1]: A étudié les deux cas d'un problème de détermination des contraintes dans une plaque élastique épaisse et infinie ayant une fissure centrale circulaire. Le premier cas s'agit de causer une déformation (petit déplacement) sur la surface externe de la plaque, or que dans le deuxième cas, Lowengrub a supposé un chargement uniforme au centre de la fissure.

Ces deux cas sont réduits à une solution des équations intégrales duales dont leur résolution est obtenue en suivant la procédure de Lebedev et Uflyand.

Makoto Sakamoto 2003 [2]: Le problème de déformation élastique dans le cas axisymétrique d'une couche élastique et épaisse ayant une fissure centrale circulaire a été étudié. Deux cas ont été envisagés, le premier cas correspond à une surface libre de charges alors que second considère le cas d'un encastrement lisse. En tenant compte des conditions mixtes, le problème a été formulé sous forme d'un système d'équations intégrales duales. Contrairement à l'approche classique, ces dernières équations sont directement réduites, à l'aide de la formule de Gegenbauer, à un système d'équations algébriques linéaires et infinies. Le facteur d'intensité de contrainte a été évalué et donné explicitement en fonction des coefficients du système. Des résultats numériques ont été obtenus, sont données aussi les conclusions sur l'effet de l'épaisseur de la couche élastique et des conditions aux limites sur les déplacements et les contraintes calculés.

Makoto Sakamoto et Koichi Kobayashi 2004 [3]: S'intéressent à l'analyse d'un problème de déformation axisymétrique d'une couche élastique, cette dernière repose sur une fondation rigide et sous une plaque rigide contenant une fissure circulaire centrale, la couche est supposée sous un tenseur de contrainte appliquée au alentour de la fissure. Ils ont utilisé les conditions mixtes pour obtenir système d'équations intégrales duales, ce système est transformé en équations intégrales de Fredholm, sa résolution permet d'obtenir une solution

analytique en fonction de l'épaisseur de la couche sous forme d'un système infini, les effets du coefficient de Poisson et de l'épaisseur de la couche élastique sont discutés.

Makoto Sakamoto et Koichi Kobayashi 2006 [4]: Ils ont étudié le problème de contact axisymétrique de poinçonnement d'une couche élastique reposant sur un appui rigide, ce poinçon rigide et infini est appliqué sur la surface externe de la couche élastique causant un petit mode de déformation. Au lieu d'utiliser une équation intégrale de Fredholm pour la résolution des équations duales trouvées, une solution exacte et analytique est obtenue par un système infini des équations simultanées pour exprimer le déplacement normal dans le trou circulaire. Le problème formulé satisfait à une solution d'un système infini des équations simultanées utilisant une méthode pour l'expression de déplacement normal dans le trou circulaire comme une série de fonction appropriée. Des résultats numériques sont également obtenus clarifiant les effets de l'épaisseur de la couche élastique et le rayon du trou circulaire.

Makoto Sakamoto et Koichi Kobayashi 2005 [5]: Ils examinent le problème axisymétrique d'un poinçonnement d'une couche élastique sur un appui rigide ayant un trou circulaire. Un poinçon rigide et infini est appliqué sur la couche élastique causant un petit mode de déformation. Le problème est équivalent à un problème mixte des conditions aux limites de la théorie tridimensionnelle d'élasticité. La solution analytique est obtenue en résolvant un système infini des équations simultanées en exprimant le déplacement normal dans le trou circulaire comme série des fonctions appropriées. Des effets significatifs de l'épaisseur de couche et de rayon de trou circulaire sur les champs de contrainte sont démontrés avec des résultats numériques.

L.S. Fu et T.P. Tsai 1976 [6]: Ont donné un schéma numérique, basée sur la méthode de Kobayashi-Tranter avec certains modifications, pour deux types de problèmes, le premier s'agit d'un poinçonnement et l'autre d'un problème axisymétrique de fissuration en élasticité, en connaissant les équations intégrales duales appropriées aux deux problèmes, ces dernières sont réduites à un système d'équations algébriques linéaires au lieu d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. Un programme standard permet ainsi le traitement d'une série de cas différents. Le retrait d'un poinçon rigide sur une couche élastique reposant sur une fondation est formulé de cette façon et des résultats numériques sont présentés pour des différents cas.

Y. Shindo, K. Tanaka, et F. Narita 1997 [7]: Ils analysent le problème de la détermination de la contrainte singulière et les champs électriques dans une céramique piézoélectrique contenant une fissure de Griffith sous un cisaillement longitudinal en référant à la théorie de la piézoélectricité linéaire. La fissure est symétrique et orientée dans une direction parallèle aux bords de la bande. Les transformées de Fourier sont utilisées pour réduire ce problème à la solution des équations intégrales duales. La solution de ces équations duales est alors exprimée en termes d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. Les valeurs numériques du facteur d'intensité de contrainte et le taux d'énergie libérée pour la céramique piézo-électrique sont obtenues, et les résultats sont représentés graphiquement pour montrer l'influence du champ électrique.

Leon M. Keer 1974 [8]: Il a résolu un problème axisymétrique ayant une fissure circulaire dans le cas où les déplacements sont donnés sur sa surface supérieure et les contraintes sur sa surface inférieure. La solution est obtenue en utilisant la transformée de Hankel avec certaines représentations qui ramènent le problème général à la solution des problèmes de Hilbert découplés. Ce problème de Hilbert peut être résolu exactement par des méthodes données par Mushkelishvili comme dans le problème plan de deux singularités liées à la lisière du disque.

A.P.S. Selvadurai 2008 [9]: Il a étudié un problème axisymétrique de contact lié à un poinçonnement d'un demi-espace élastique isotrope et aussi renforcé par une membrane inextensible placée à une profondeur finie de la surface. Ce problème est réduit à une solution d'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce, qui est résolue numériquement en utilisant des techniques de quadratures. La solution numérique de l'équation intégrale donne les résultats qui illustrent l'influence de la profondeur d'encastrement de la membrane et le coefficient de Poisson du matériel élastique sur la rigidité.

Makoto Sakamoto, Guoan Li, Toshiaki Hara et Edmund Y. S. Chao 1996 [11]: Ont développé une nouvelle méthode mathématique pour étudier le problème de déformation axisymétrique d'une couche élastique infinie reposant sur un appui rigide. Des poinçons cylindriques et sphériques sont appliqués sur la surface de cette couche causant un petit mode de déformation. Les équations intégrales duales sont formulées en tenant compte des conditions aux limites posées et en négligeant les efforts de cisaillement entre le poinçon et la couche élastique, ce problème est équivalent à un problème mixte de condition limite de la théorie d'élasticité. Au lieu d'utiliser l'équation intégrale de Fredholm pour résoudre ces

équations duales, ils envisagent une nouvelle approche qui consiste à exprimer la contrainte entre le poinçon et la couche comme une série de fonction appropriée. Des conclusions sur l'effet de l'épaisseur de la couche élastique et du coefficient de Poisson sont présentées.

M. Lal 1984 [12]: S'intéresse à l'étude de la distribution des contraintes thermiques dans une plaque élastique où un flux est appliqué dans une région annulaire plate. Il a réduit ce problème à celui d'une solution d'un système infini des équations simultanées. Il a illustrés graphiquement les distributions de la température et le flux pour différentes valeurs de l'épaisseur de la plaque.

S. Falco, G. Panariello, F. Schettino et L. Verolino 2002 [13]: Ils ont formulés Beaucoup de problèmes de conditions aux limites sous forme du système des équations intégrales duales, le traitement mathématique de telles équations est bien connu, la solution est évaluée au moyen d'une série de Neumann.

CHAPITRE I

RAPPELS MATHÉMATIQUES

I.1 Introduction

Les équations intégrales sont a priori moins simples à résoudre que les équations algébriques ou les équations différentielles. On présente dans ce chapitre les différents types des équations intégrales, ainsi que quelques aperçus sur les méthodes de résolution des équations intégrales duales, cette résolution se ramène au problème de la recherche de solution d'un système linéaire.

I.2 Equation de Fredholm

I.2.1 Equation de première espèce

L'équation de Fredholm inhomogène de première espèce est définie par la relation suivante :

$$\int_a^b K(t, s) f(s) ds = g(t) \quad (I.1)$$

où $f(s)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer, $g(t)$ est le terme de source et $K(t, s)$ est appelé le noyau.

En notant $g_i = g(t_i)$, $K_{ij} = K(s_i, t_j)$ et $f_j = f(t_j)$ où i est un indice variant de 1 à N et j un indice variant de 1 à M (M peut être différent de N).

L'équation (I.1) se réécrit alors comme suit :

$$\sum_{j=1}^M K_{ij} f_j = g_i \quad (I.2)$$

Soit encore sous une forme matricielle ;

$$K f = g \quad (I.3)$$

Formellement, si le noyau K n'est pas singulier, la solution existe et unique et elle est donnée par la relation suivante :

$$f = K^{-1}g \quad (I.4)$$

I.2.2 Equation de seconde espèce

L'équation de Fredholm inhomogène de deuxième espèce est définie par la relation suivante :

$$\lambda f(t) = \int_a^b K(t,s) f(s)ds + g(t) \quad (I.5)$$

où $f(t)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer. Le terme de Source est $g(t)$, $K(t,s)$ est appelé le noyau et λ est un scalaire introduit par commodité pour la suite de cette équation.

Suivant le même principe que celui défini précédemment, une fois discrétisée, l'équation (I.5) se réexprime de cette façon :

$$\lambda f_i = \sum_{j=1}^M K_{ij} f_j + g_i \quad (I.6)$$

Soit encore sous une forme matricielle

$$(K - \lambda I)f = -g \quad (I.7)$$

Si la fonction g est nulle, le problème se ramène à la détermination des valeurs propres de la matrice K , et on parle d'équation de Fredholm homogène et I matrice identité. Dans le cas où g est différent de zéro, la solution existe et unique si λ n'est pas l'une des valeurs propres du noyau, sinon la matrice à inverser $(K - \lambda I)$ devient singulière. Si cette dernière est inversible, on a formellement la solution comme suit:

$$f = (\lambda I - K)g^{-1} \quad (I.8)$$

La résolution numérique des équations de Fredholm homogène de première espèce est généralement délicate car le noyau correspond souvent à une matrice presque non inversible (mal conditionnée), c'est-à-dire avec un déterminant voisin de zéro. Corrélativement, si λ est suffisamment différent de zéro, la solution des équations de Fredholm de seconde espèce est relativement simple à obtenir.

I.3 Equation de Voltera

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau K est tel que :

$$K(t, s) = 0 \quad \text{pour } s > t \quad (I.9)$$

I.3.1 Equation de première espèce

L'équation de Volterra homogène de première espèce est définie par la relation suivante :

$$g(t) = \int_a^t K(t, s) f(s) ds \quad (I.10)$$

où $f(t)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer. $g(t)$ est le terme de source et $K(t, s)$ est appelé le noyau.

La réécriture matricielle de l'équation de Volterra est identique formellement à celle de Fredholm, mais avec la particularité que la matrice associée au noyau K est une matrice triangulaire inférieure.

Alors que les équations de Fredholm de première espèce sont généralement mal conditionnées, les équations de Volterra ne le sont pas.

I.3.2 Equation de seconde espèce

De manière similaire, l'équation de Volterra de première espèce inhomogène s'écrit comme suit :

$$\lambda f(t) = \int_a^t K(t, s) f(s) ds + g(t) \quad (I.11)$$

De manière identique, la représentation matricielle de l'équation de Volterra est identique à celle correspondante à Fredholm, seule la structure du noyau K est différente, puisque comme pour toutes les équations de Volterra linéaires, la matrice K triangulaire inférieure.

I.4 Equation de Bessel

C'est une équation qui s'écrit :

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0 \quad (I.12)$$

Que l'on rencontre dans de nombreux problèmes de physique, particulièrement ceux présentant une symétrie cylindrique [17]: Problème de membrane, oscillations électromagnétique dans une cavité cylindrique (comme un fil électrique), déplacement libre d'une particule en mécanique quantique.

On cherche les solutions sous forme de série entière de la forme :

$$y = z^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \frac{dy}{dz} = pz^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dz^2} = p(p-1)z^{p-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

En les remplaçant dans l'équation (I. 12) et en identifiant les coefficients, on aura :

$$(p^2 - \nu^2)a_0 = 0$$

$$[(p+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0$$

La première relation nous donne $p = \pm \nu$, on choisit ν positif s'il est réel ou de partie réelle positive s'il est imaginaire ; a_0 est alors quelconque.

Premier cas : si $p = \nu (> 0)$ on a alors :

$$(2p+1)a_1 = 0, (4p+4)a_2 + a_0 = 0, (6p+9)a_3 + a_1 = 0 \dots, (2pn + n^2)a_n + a_{n-2} = 0$$

Donc les coefficients d'ordre impaire sont nuls et les pairs s'obtiennent en fonction de a_0 :

$$a_{2r} = a_0 \frac{(-1)^r}{2^{2r} r! (1+\nu)(2+\nu) \dots (r+\nu)}$$

On définit alors la fonction de Bessel J_ν de première espèce d'ordre ν par le choix de

$$a_0 = \frac{1}{2\Gamma(1+\nu)} \quad \text{ce qui permet de donner une écriture complet de } J_\nu \text{ grâce à la propriété}$$

de base de la fonction gamma :

$$\Gamma(1+r+\nu) = (1+\nu)(2+\nu) \dots (r+\nu)\Gamma(1+\nu)$$

Nous écrivons donc l'équation de Bessel:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \quad (I. 13)$$

Et si ν est un nombre entier n ,

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \quad (I.14)$$

Deuxième cas: si $p = -v$, les coefficients pairs sont tels que $2r(2r+1-2v)a_{2r-2} = 0$, et les coefficients impairs tels sont $2r(2r+1-2v)a_{2r-1} = 0$;

Si v n'est pas de la forme $\frac{2m+1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$, alors les coefficients impairs sont nuls et de la même manière on obtient :

$$J_{-v}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-v} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-v+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \quad (I.15)$$

Dans le cas où v est un entier égale à n on a : $\Gamma(-v+r+1) = \Gamma(r-n+1)$, or $\Gamma(k) = \infty$, si k est un entier négatif, donc tous les termes de $J_{-n}(z)$ sont nuls jusqu'un rang r' ou r' est le dernier entier pour lequel $(r-n+1 < 0)$; alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{r'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r'}}{r'! \Gamma(n+r')!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r'} = (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{r'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r'}}{r'! \Gamma(n+r')!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r'} \\ &= (-1)^n J_n(z) \end{aligned} \quad (I.16)$$

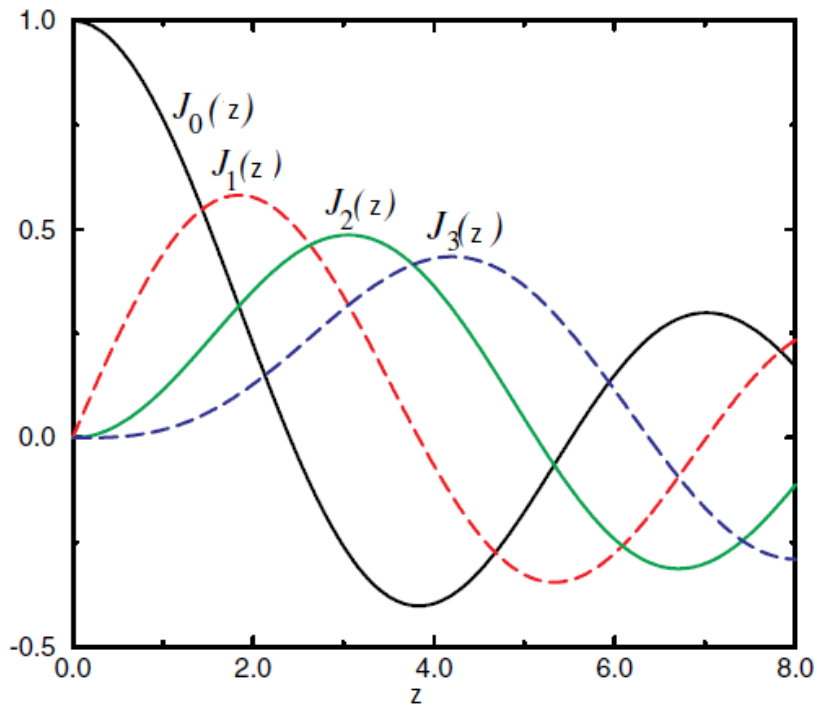


Figure I. 1: Représentation de quatre premières fonctions de Bessel de première espèce

I.5 Fonction de Bessel deuxième espèce

Nous cherchons une fonction $Y_\nu(z)$ telle que :

$$J_{-\nu}(z) = \cos \pi \nu J_\nu(z) - \sin \pi \nu Y_\nu(z) \Leftrightarrow Y_\nu(z) = \frac{\cos \pi \nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu}$$

Il est clair que si ν n'est pas un entier on retombe sur une solution particulière (I.12); par contre si on fait tendre ν vers un entier n [18], la fonction Y se présente comme une fonction indéterminée ($\cos \pi n = (-1)^n$);

Appliquant la règle de marquis Hospital :

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{-\pi \sin \pi \nu J_\nu(z) + \cos \pi \nu J_\nu(z)' - (J_{-\nu}(z))'}{\pi \cos \pi \nu} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\lim_{\nu \rightarrow n} J_\nu(z)' \right] - (-1)^n \frac{1}{\pi} \left[\lim_{\nu \rightarrow n} (J_{-\nu}(z))' \right] \end{aligned} \quad (I.17)$$

Il ne faut donc calculer la dérivée de J_ν : utilisons le développement en série,

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} = e^{\nu \ln \left(\frac{z}{2}\right)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \\ \frac{dJ_\nu(z)}{dz} &= \ln \frac{z}{2} J_\nu(z) - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu + r + 1)} \frac{\Gamma'(\nu + r + 1)}{\Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \end{aligned}$$

Faisons tendre ν vers n , la dérivée logarithmique de Γ est la fonction digamma :

$$\frac{\Gamma'(\nu + r + 1)}{\Gamma(\nu + r + 1)} = \psi(\nu)$$

d'où

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{dJ_\nu(z)}{d\nu} = \ln \left(\frac{z}{2}\right) J_\nu(z) - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! (n+r)!} \psi(n+r+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2r+n} \quad (I.18)$$

Pour $J_{-\nu}(z)$, nous utilisons la formule des compléments :

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z} \Rightarrow \Gamma(\nu-r)\Gamma(1-\nu+r) = \frac{\pi}{\sin \pi(\nu-r)} = \frac{\pi}{\sin \pi(\pi\nu - \pi r)} \\ &= \frac{\pi}{(-1)^r \sin \pi \nu} \end{aligned}$$

Soit en séparant la sommation à l'ordre $n-1$, n étant l'entier immédiatement supérieur à ν .

$$J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\nu-r)}{r!} \frac{\sin\pi\nu}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} + \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}$$

Il nous reste à dériver par rapport à ν :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{-\nu}(z)}{\nu} &= J_{-\nu}(z) \log\left(\frac{z}{2}\right) + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \left(\Gamma'(\nu+r) \frac{\sin\pi\nu}{\pi} + \Gamma(\nu-r) \cos\pi\nu \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2r} \\ &+ \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma'(-\nu+r+1)}{r! \Gamma^2(-\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2r} \end{aligned}$$

Lorsqu'on fait tendre ν vers n , on trouve :

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{dJ_{-\nu}(z)}{\nu} &= -J_{-n}(z) \log\left(\frac{z}{2}\right) + (-1)^n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-r)}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2r} \\ &+ (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r+n)! r!} \psi(-n+r+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2r} \end{aligned}$$

On peut faire un décalage de n indices en remplaçant $(r-n)$ par r , ce qui donne en utilisant l'équation (I. 16).

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{dJ_{-\nu}(z)}{\nu} &= -(-1)^n J_{-n}(z) \log\left(\frac{z}{2}\right) + (-1)^n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-r)}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2r} \\ &+ (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r+n)! r!} \psi(r+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r} \end{aligned} \quad (I. 19)$$

On remplace les relations (I. 18) et (I. 19) dans l'équation (I. 17) et on aura :

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{2}{\pi} J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r-n} \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{r! (r+n)!} [\psi(r) + \psi(n+r)] \left(\frac{z}{2}\right)^{2r+n} \end{aligned} \quad (I. 20)$$

C'est la solution dite de Weber (on trouve d'autres écritures comme N pour fonction de Neumann). Pour $n = 0$, le deuxième terme est nul.

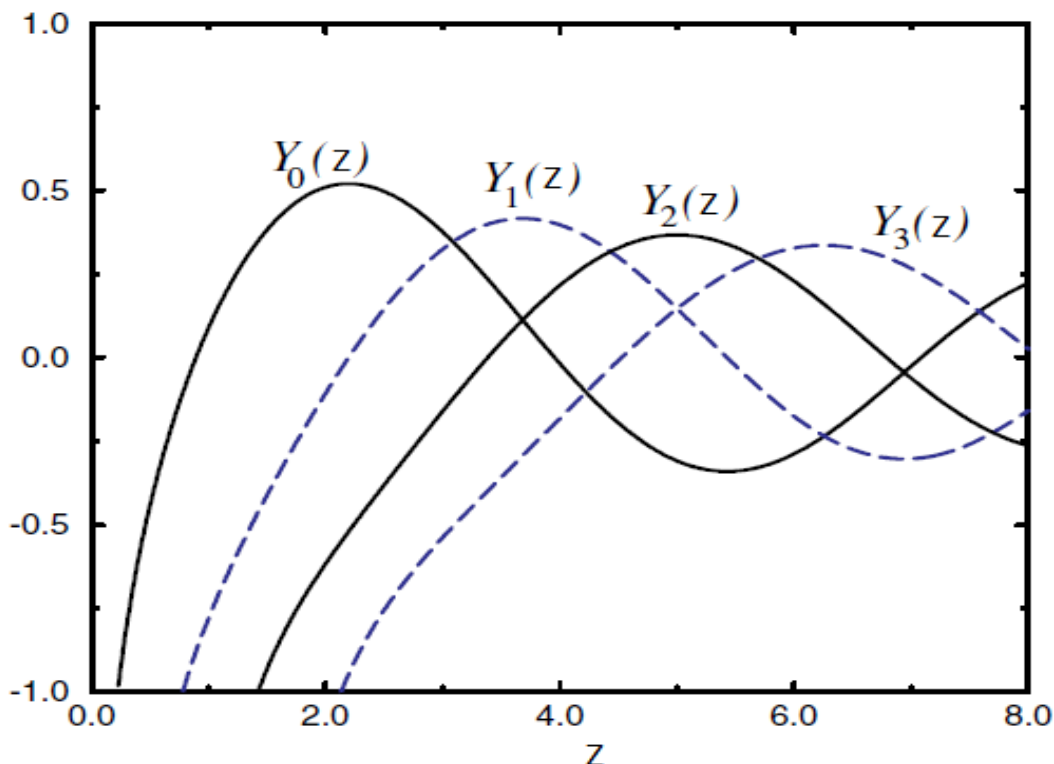


Figure I. 2: Représentation de quatre premières fonctions de Bessel de deuxième espèce

On définit les fonctions suivantes :

- Fonction de Bessel modifiée de première espèce

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} = i^{-\nu} J_\nu(iz) \tag{I. 21}$$

- Fonctions de Hankel (1) et (2) ou fonctions de Bessel du troisième type

$$\left. \begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z) = i \frac{J_\nu(z)e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \\ H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - iY_\nu(z) = -i \frac{J_\nu(z)e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \end{aligned} \right\} \tag{I. 22}$$

- Fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \pi i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\pi\nu} \tag{I. 23}$$

I.6 Transformée de Hankel

En mathématique, la transformée de Hankel exprime une fonction donnée $f(z)$ comme la somme pondérée d'un nombre infini de fonctions de Bessel de la première espèce $j_\nu(kz)$.

La transformation de Hankel d'ordre ν de la fonction $f(z)$ est donnée par :

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty f(z) j_\nu(kz) z dz$$

où j_ν est la fonction de Bessel de premier ordre avec $\nu \geq -1/2$.

L'inverse de la transformée de Hankel $F_\nu(k)$ s'écrit:

$$f(z) = \int_0^\infty F_\nu(k) j_\nu(kz) k dk$$

La transformée de Hankel est une transformation intégrale et a été développée par mathématicien Hermann Hankel. Il est également connu sous le nom de Fourier-Bessel transformer. Tout comme la transformée de Fourier pour un intervalle infini est lié à la série de Fourier sur un intervalle fini, de sorte que la transformation de Hankel sur un intervalle infini est lié à la série de Fourier-Bessel sur un intervalle fini.

Domaine de définition:

La transformation de Hankel d'une fonction $f(z)$ est valable en tout point au cours de laquelle $f(z)$ est continue à condition soit définie dans $(0, \infty)$ est continue par morceaux et à variation bornée dans chaque sous-intervalle finie dans $(0, \infty)$.

I.7 Quelques aperçus sur les méthodes de résolution des équations intégrales duales

Il existe plusieurs méthodes pour la résolution des équations intégrales duales, parmi ces méthodes :

I.7.1 Méthode Polynomiale

On considère l'équation intégrale duale suivante [14]:

$$\int_0^\infty t^{-2\alpha} [1 + \omega(t)] f(t) J_\nu(xt) dt = G(x) \quad (0 < x < 1)$$

$$\int_0^{\infty} f(t) J_{\nu}(xt) dt = 0 \quad (x > 1)$$

En tenant compte de la condition suivante: $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$.

La forme de la solution de ces équations s'écrit:

$$f(t) = \frac{t^{1+\alpha}}{2^{\alpha}} \int_0^1 u^{1+\alpha} J_{\nu-\alpha}(ut) \varphi(u) du = p(x).$$

où la fonction $\varphi(u)$ vérifiée l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$\varphi(x) + x^{-\alpha} \int_0^1 u^{1+\alpha} K(x, u) \varphi(u) du = p(x) \quad (I. a. 1)$$

avec :

$$K(x, u) = \frac{t^{1+\alpha}}{2^{\alpha}} \int_0^{\infty} t \omega(t) J_{\nu-\alpha}(xt) J_{\nu-\alpha}(ut) \varphi(u) dt$$

$$p(x) = \frac{2^{1+2\alpha}}{x^{\nu} \Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{u^{1+\alpha}}{(x^2 - u^2)^{1+\alpha}} G(u) du$$

On cherche la solution de l'équation intégrale (I. a. 1) sous forme d'un développement en série de polynôme de Jacobi :

$$\varphi(x) = x^{\nu-2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n^{\nu-\alpha}(1-2x^2) \quad (I. a. 2)$$

où a_n sont des coefficients à déterminer.

En remplaçant la fonction φ donnée par l'expression (I. a. 2) dans l'équation intégrale (I. a. 1) et en tenant compte de l'orthogonalité des polynômes de Jacobi, on trouve :

$$\frac{a_n}{2(1+\nu-\alpha+2m)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n W_{mn} = p_m \quad (I. a. 3)$$

Les éléments de matrice W_{mn} s'obtiennent en utilisant cette formule.

$$W_{mn} = \int_0^{\infty} \frac{w(t)}{t} J_{1+\nu-\alpha+2n}(t) J_{1+\nu-\alpha+2m}(t) dt$$

On détermine les coefficients p_m suivant cette intégrale.

$$p_m = \int_0^1 x^{1+\nu} p(x) p_m^{\nu-\alpha,0} (1-2x^2) dx$$

La résolution du système algébrique et infini (I. a. 3) s'obtient par la méthode de troncation en remplaçant la somme infinie par $n=0 \dots N$.

I.7.2 Méthode de Kobayashi-Tranter modifiée

Soient les équations intégrales duales suivantes :

$$\int_0^\infty A(u) B(u) J_0(ur) du = F(r) \quad (0 < r < 1) \quad (I. b. 1)$$

$$\int_0^\infty u^\alpha B(u) J_0(ur) du = 0 \quad (r > 1) \quad (I. b. 2)$$

On pose :

$$B(u) = u^{1-k-\alpha} \sum_{n=0}^\infty A_m J_{\nu+2m+k}(u) \quad (I. b. 3)$$

En remplaçant l'équation (I. b. 3) dans l'équation (I. b. 1) :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(u) \sum_{n=0}^\infty u^{1-k-\alpha} A_m J_{\nu+2n+k}(u) J_0(ur) du &= F(r) \\ \sum_{n=0}^\infty A_m \int_0^\infty u^{1-k-\alpha} A(u) J_{\nu+2n+k}(u) J_0(ur) du &= F(r) \end{aligned} \quad (I. b. 6)$$

On multiplie l'équation (I. b. 6) par :

$$\frac{m!}{2^{k-1} \Gamma(m+k)} r^{\nu+1} (1-r^2)^{k-1} P_m^{(m,k-1)} (1-2r^2) \quad (I. b. 7)$$

où $\Gamma(m+k)$ est dite fonction gamma.

On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty A_m \int_0^\infty \frac{m!}{2^{k-1} \Gamma(m+k)} r^{\nu+1} (1-r^2)^{k-1} P_m^{(m,k-1)} (1-2r^2) \\ - 2r^2 u^{1-k-\alpha} A(u) J_{\nu+2n+k}(u) J_0(ur) du \\ = F(r) \frac{m!}{2^{k-1} \Gamma(m+k)} r^{\nu+1} (1-r^2)^{k-1} P_m^{(m,k-1)} (1-2r^2) \end{aligned} \quad (I. b. 8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_m \int_0^{\infty} u^{1-2k-\alpha} A(u) J_{\nu+2m+k}(u) J_{\nu+2n+k}(u) du = R_m$$

avec

$$R_m = \frac{m!}{2^{k-1} \Gamma(m+k)} \int_0^1 F(r) r^{\nu+1} (1-r^2)^{k-1} P_m^{(m,k-1)}(1-2r^2) dr$$

Suivons les étapes de la résolution de la méthode Kobayashi-Tranter [6], les problèmes de fissuration sont résolus comme suit :

➤ Décomposition de $A(u)$:

On décompose $A(u)$ comme suit :

$$A(u) = \alpha(u) + \beta$$

A condition que :

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 1 \\ \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha(u) = 0 \end{cases}$$

➤ Calcul des coefficients L_{mn} :

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{mn} A_n + \frac{\beta}{2 \left(\eta + 2m + 1 - \frac{\alpha}{2} \right)} A_m = R_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

avec

$$L_{mn} = \int_0^{\infty} u^{-1} \alpha(u) J_{\eta+2m-\frac{\alpha}{2}}(u) J_{\eta+2n-\frac{\alpha}{2}}(u) du$$

Souvent cette intégrale se détermine par la formule de Simpson.

➤ Calcul de la constante R_m :

Cette constante est donnée par l'expression suivante :

$$R_m = \frac{m!}{\sqrt{2} \Gamma(m+k)} \int_0^1 r F(\sqrt{1-r^2}) P_{2m+1}^{(0,0)}(r) dr$$

où $P_{2m+1}^{(0,0)}(r)$ est le polynôme de Jacobi [18], qui s'écrit :

$$P_{2m+1}^{(0,0)}(r) = \frac{(-1)^{(2m+1)}}{2^{2m+1} (2m+1)} \frac{d^{(2m+1)}}{dr^{(2m+1)}} [(1-r)^{(2m+1)} (1+r)^{(2m+1)}]$$

➤ Détermination des coefficients $A_m^{(r)}$:

On détermine ces coefficients par l'algorithme de Jacobi [19].

Soit le système:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (\text{I.a})$$

avec

A : Matrice de $N \times N$.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

On décompose la matrice A :

$$A = K - M$$

$$(\text{I.a}) \Rightarrow K\vec{x} = M\vec{x} + \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = K^{-1}M\vec{x} + K^{-1}\vec{b}$$

Jacobi a posé :

$$K = D$$

$$M = E + F$$

Avec :

E : Matrice inférieure.

F : Matrice supérieure.

D : Matrice diagonale.

$$A = \begin{bmatrix} D & \dots & -F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -E & \dots & D \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & a_{NN} \end{pmatrix}$$

Donc l'algorithme de Jacobi s'écrit :

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^{(n)} + b_i \right) \quad 1 \leq i \leq N$$

Par analogie on obtient les coefficients $A_m^{(r)}$ sous la forme :

$$A_m^{(r)} = \frac{1}{L_{mm} + \frac{\beta}{2\left(\eta + 2m + 1 - \frac{\alpha}{2}\right)}} \left[R_m - \sum_{\substack{n=0 \\ m \neq n}}^{\infty} L_{mn} A_n^{(r-1)} \right]$$

Pour le calcul de la première itération :

$$A_m^{(0)} = \frac{R_m}{L_{mm} + \frac{\beta}{2\left(\eta + 2m + 1 - \frac{\alpha}{2}\right)}}$$

Remarque :

On vérifie la condition de régularité en utilisant la relation suivante :

$$C = \frac{1}{\left|L_{mm} - \frac{m_1 + 1}{4m + 3}\right|} \sum_{\substack{n=0 \\ m \neq n}}^{\infty} |L_{mn}| \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

La valeur de m_1 est donnée par : $m_1 = 1 - 2\eta$

Pour tout m : $1 - C > 0$

I.8 Les polynômes de Legendre

Le domaine des polynômes orthogonaux a été développé durant le XIX^{ème} siècle par Stieltjes, de multiples applications en ont découlé, en mathématiques et en physique.

I.8.1 Définition

L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables,

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n + 1)y = 0$$

où sous forme d'une expression simple,

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n + 1)y = 0$$

est connue sous le nom " d'équation de Legendre ". Ses solutions sont appelées " fonctions de Legendre ". Si n est nul ou entier positif, ces fonctions sont appelées " polynômes de Legendre ".

La solution de l'équation de Legendre (Obtenable par la méthode des séries de puissance) s'écrit:

$$y = a_0 P_n(x) + a_1 Q_n(x)$$

où $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ sont respectivement les polynômes de Legendre de 1^{ère} et de 2^{ème} espèces de degré n .

L'expression générale du polynôme de Legendre est:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

I.8.2 Propriétés de développements en séries de puissance des polynômes de Legendre

➤ Si n est pair et supérieur ou égal à 2,

$$P_n(x) = (-1)^{n/2} \frac{1x \ 3x \ 5x \ \dots \ (n-1)}{2x \ 4x \ 6x \ \dots \ n} \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + \dots \right]$$

➤ Si n est impair et supérieur ou égal à 3,

$$P_n(x) = (-1)^{(n-1)/2} \frac{1x \ 3x \ 5x \ \dots \ (n-1)}{2x \ 4x \ 6x \ \dots \ (n-1)} \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)}{4!} x^5 + \dots \right]$$

Les premiers polynômes sont :

- $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$
- $(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$
- $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ s'appelle formule de Rodrigues.

Les polynômes orthogonaux les plus simples sont les polynômes de Legendre pour lesquels l'intervalle d'orthogonalité est $]-1, 1[$ et la fonction poids est simplement la fonction constante de valeur 1.

I.9 Méthodes d'intégration numérique

On rencontre souvent dans la résolution des problèmes mécanique des intégrales délicats à calculer. Pour se faire, on utilise des méthodes efficaces appelées : Méthode d'intégration numérique.

La connaissance de ces méthodes est donc un préalable pour choisir la manière de résoudre ces problèmes le plus efficacement possible.

I.9.1 Méthodes de Cotes

Mathématicien anglais, contemporain et collaborateur de Newton, Roger Cotes s'est intéressé à des méthodes de calculs numériques et exacts pour l'intégration ce qui explique que les méthodes suivantes portent son nom.

Les méthodes les plus simples que l'on peut utiliser pour calculer une intégrale simple sont celles où les abscisses sont choisies de manière régulièrement espacées. Si on a

$N + 1$ abscisses, on repère celles-ci simplement par la relation :

$$x_i = x_0 + ih$$

avec $x_0 = a$, $x_N = b$ et h est appelé le pas de l'intégration. Pour simplifier les notations, on pose :

$$f_i = f(x_i)$$

I.9.1.1 Méthode de Trapèze

La méthode des trapèzes consiste à approximer la fonction entre deux abscisses successives par une droite, ce qui donne :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) + \mathcal{O}(h^3 f'')$$

Le terme d'erreur indique la qualité de l'évaluation de l'intégration et dépend de manière cubique du pas d'intégration ; f'' se réfère à un point situé à l'intérieur de l'intervalle. Pour que cette méthode converge rapidement il est nécessaire de choisir un pas h inférieur à f'' . A noter que cette formule devient exacte quand la fonction est un polynôme de degré 1 sur l'intervalle $[x_1, x_2]$.

Sur l'intervalle $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^{N-1} f_i + \frac{h}{2} (f_0 + f_N) + \mathcal{O}\left(\frac{(b-a)^3}{N^2} f''\right)$$

Ou on a pris : $h = \frac{b-a}{N}$.

I.9.1.2 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à remplacer la fonction par un polynôme de degré 2 sur un intervalle constitué de trois abscisses consécutives.

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx = h \left(\frac{1}{3} f_i + \frac{4}{3} f_{i+1} + \frac{1}{3} f_{i+2} \right) + \mathcal{O}(h^5 f^{(4)})$$

Il se trouve que cette formule est exacte jusqu'à des polynômes de degré 3 ce qui implique que l'erreur dépend de h à la puissance 5.

On peut aussi déterminer la formule à 4 points qui est aussi exacte pour les Polynômes de degré 3. Cette formule s'appelle aussi Simpson $\frac{3}{8}$ à cause des coefficients du développement

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x) dx = h \left(\frac{3}{8} f_i + \frac{9}{8} f_{i+1} + \frac{9}{8} f_{i+2} + \frac{3}{8} f_{i+3} \right) + \mathcal{O}(h^5 f^{(4)})$$

Sur un intervalle complet, en choisissant N pair, la méthode de Simpson donne une estimation de l'intégrale sur l'intervalle $[a; b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[f_0 + f_N + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} 2f_{2i-1} + f_{2i} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

La méthode de Simpson est donc de deux ordres de grandeur plus efficace que la méthode des trapèzes. Mais il est possible de mieux utiliser la méthode des trapèzes. Sachant que cette dernière méthode converge en $\frac{1}{N^2}$, on peut évaluer l'intégrale deux fois sur le même intervalle par la méthode des trapèzes.

La première fois avec N points et la seconde avec $2N$ points, puis en combinant les deux résultats de la manière suivante

$$S = \frac{4}{3} S_{2N} - \frac{1}{3} S_N$$

Sachant que le développement asymptotique de la méthode des trapèzes est une fonction paire de $1/N^2$, on en déduit que la formule précédente donne une estimation de l'intégrale en $1/N^4$, ce résultat redonne une évaluation analogue à la méthode de Simpson.

I.10 Résolution d'un système d'équations

Ce problème, également classique en traitement numérique, généralise le problème d'un système de n équations à n inconnues. On distingue deux grandes classes de problèmes : les systèmes linéaires, relativement simples d'un point de vue purement algorithmique, et les systèmes non linéaires, beaucoup plus délicats à traiter.

I.10.1 Les systèmes linéaires

Les systèmes linéaires sont relativement simples d'un point de vue mathématique, précisément en raison de la linéarité des équations. On peut mettre en œuvre deux types de méthodes numériques :

- i. les méthodes directes, qui consistent à manipuler directement les équations pour les résoudre.
- ii. les méthodes itératives, qui consistent à obtenir la solution par convergence d'un processus itératif.

I.10.1.1 Première méthode : la méthode par décomposition LU

Si la matrice A peut s'écrire sous la forme $A=LU$, où L et U sont des matrices triangulaires inférieure et supérieure respectivement, alors le système $Ax = b$ peut se décomposer en deux sous-systèmes $Ly=b$ et $Ux = y$.

Les matrices L et U étant triangulaires, la résolution de chacun de ces deux sous-systèmes est immédiate :

- $Ly = b$: on calcule $y_1, y_2 \dots y_n$.
- $Ux = y$: on calcule $x_n, x_{n-1} \dots x_1$.

Reste à calculer cette décomposition. On suppose les matrices définies par leurs coefficients

$$L = (\alpha_{ij}) \quad U = (\beta_{ij}) \quad A = (\alpha_{ij}), \alpha_{ij} = 0 \text{ si } i < j, \beta_{ij} = 0 \text{ si } i > j$$

Par définition du produit matriciel $A=LU$, on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \beta_{kj}, \quad \forall i, j$$

On a alors trois cas de figures possibles :

$$\alpha_{i1}\beta_{1j} + \dots + \alpha_{ii}\beta_{ij} = a_{ij} \quad \text{si } i < j$$

$$\alpha_{i1}\beta_{1j} + \dots + \alpha_{ii}\beta_{jj} = a_{ij} \quad \text{si } i = j$$

$$\alpha_{i1}\beta_{1j} + \dots + \alpha_{ij}\beta_{jj} = a_{ij} \quad \text{si } i > j$$

Cela nous conduit donc à n^2 équations, $(n^2 + n)/2$ inconnues α_{ij} et $(n^2 + n)/2$ inconnues β_{ij} . Il en résulte que l'on a n inconnues de trop par rapport au nombre d'équations. On va donc imposer n valeurs particulières et ensuite déterminer les autres valeurs manquantes. On se ramène ainsi à un système linéaire de n équations à n inconnues. Cela peut donner l'impression de ne pas beaucoup avancer puisque c'est précisément le problème que l'on cherche à résoudre avec la matrice A . En fait, l'intérêt de cette méthode est que la détermination des coefficients α_{ij} et β_{ij} peut se faire de façon immédiate, sans manipuler le système d'équations. Il s'agit là de l'algorithme de Crout qui consiste à réorganiser les équations dans un ordre adéquat. Cette méthode peut être décrite par le diagramme suivant :

➤ $\alpha_{ij} = 1 \quad \forall i$

➤ boucle sur j variant de 1 à n

- pour i variant de 1 à j , calcul de β_{ij} par la formule

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik} \beta_{kj}$$

- pour i variant de $j+1$ à n , calcul de α_{ij} par la formule

$$\alpha_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik} \beta_{kj}$$

On peut vérifier que cette méthode n'utilise à tout instant que des valeurs α_{ij} et β_{ij} précédemment calculées, ce qui signifie que cette décomposition est parfaitement résolue numériquement.

Remarque :

Les méthodes de décomposition LU peuvent également mettre en œuvre un choix de pivot par permutation de colonnes de la matrice A ; cela rend la programmation plus délicate, mais l'algorithme gagne en stabilité numérique.

I.10.1.2 Deuxième méthode : la méthode itérative de Jacobi

La méthode itérative de Jacobi est fondée sur une recherche de point fixe, c'est-à-dire que l'on transforme le système initial $Ax = b$ en l'exprimant de la façon équivalente $x = Bx + c$. Pour la mise en œuvre de cette méthode, il est nécessaire de revenir à quelques notions mathématiques simples.

A partir de la norme d'un vecteur, on peut introduire la norme d'une matrice par la définition

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

On peut alors aisément démontrer que cet opérateur satisfait toutes les propriétés d'une norme. D'autre part, on a $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

si $\|B\| < 1$, le système $x = Bx + c$ a une solution unique x_s et l'itération $x_{n+1} = Bx_n + c$ converge quel que soit le vecteur initial x_0 .

➤ convergence : supposant l'existence et l'unicité de x_s , on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_s &= (Bx_n + c) - (Bx_s + c) = B(x_n - x_s) = B^2(x_{n-1} - x_s) = \dots \\ &= B^{n+1}(x_0 - x_s) \end{aligned}$$

Il en résulte donc :

$$\|x_{n+1} - x_s\| = \|B^{n+1}(x_0 - x_s)\| \leq \|B^{n+1}\| \|x_0 - x_s\| \leq \|B\|^{n+1} \|x_0 - x_s\|$$

Si $\|B\| < 1$, on a naturellement $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_s\| = 0$, ce qui assure la convergence de l'itération quel que soit le vecteur initial x_0 .

Le système définissant x_s est $(I - B)x_s = c$; il est donc nécessaire et suffisant de montrer que la matrice $[I - B]$ est inversible.

Supposons cette matrice non inversible : il existe un vecteur $X_r \neq 0$ tel que $BX_r = X_r$, soit encore ;

$$\|BX_r\| = \|X_r\| \leq \|B\| \|X_r\|$$

Si $\|B\| < 1$, une telle inégalité est impossible avec $\|X_r\| \neq 0$.

En fait, on peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante de convergence est que le rayon spectral de la matrice B soit inférieur à 1 (le rayon spectral de B est défini comme la plus grande valeur propre, en valeur absolue, de $B^t B$).

➤ *Transformation du système initial :*

Pour un système $Ax = b$, le problème est maintenant de trouver B et c tels que le système $x = Bx + c$ soit équivalent au système initial.

Soit K une matrice inversible quelconque :

$$Ax = b \Leftrightarrow x = x - K^{-1}(Ax - b) \Leftrightarrow x = Bx + c$$

$$\text{Avec } B = I - K^{-1}A \text{ et } c = K^{-1}b$$

On a alors autant de méthodes itératives possibles que de choix de la matrice K .

On décompose la matrice A sous la forme $A=L+U+D$, où

- L est triangulaire inférieure à diagonale nulle,
- U est triangulaire supérieure à diagonale nulle,
- D est diagonale.

Cette décomposition correspond en fait à

$$L_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i \leq j \end{cases} \quad U_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i \geq j \end{cases} \quad D_{ij} = a_{ij} \delta_{ij}$$

La méthode de Jacobi consiste à choisir $K=D$, sous réserve que les coefficients diagonaux de la matrice soient tous non nuls. On en déduit alors l'itération

$$X_{n+1} = (I - D^{-1}A)X_n + D^{-1}b = -D^{-1}[(A - D)X_n - b]$$

Que l'on peut réécrire :

$$X_{i,n+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j \neq i} a_{ij} X_{j,n} - b \right]$$

I.10.1.3 Troisième méthode : la méthode itérative de Gauss-Seidel

La méthode itérative de Gauss-Seidel est similaire à la précédente, elle consiste simplement en un choix différent de la matrice K .

De même que dans l'itération de Jacobi, on suppose que les termes diagonaux de la matrice A sont tous non nuls, et on choisit $K=L+D$. On en déduit alors l'itération suivante :

$$X_{n+1} = X_n - (L + D)^{-1}(AX_n - b) \Rightarrow X_{n+1} = -D^{-1}[LX_{n+1} + UX_n - b]$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$X_{i,n+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j<i} a_{ij} X_{j,n+1} + \sum_{j>i} a_{ij} X_{j,n} - b_i \right]$$

a condition de calculer les composantes $X_{i,n+1}$ pour i croissant, cette expression détermine parfaitement le vecteur X_{n+1} .

Les itérations de Jacobi et Gauss-Seidel sont similaires par le principe. La principale différence réside dans le fait que Jacobi utilise uniquement l'itération n pour calculer l'itération $n + 1$, alors que Gauss-Seidel utilise à la fois l'itération n et les résultats antérieurs de l'itération $n + 1$. Par conséquent, on peut intuitivement prévoir les comportements suivants

- en cas de convergence, Gauss-Seidel convergera plus rapidement que Jacobi,
- en cas de divergence, Gauss-Seidel divergera plus rapidement aussi.

I.10.1.4 Les critères d'arrêt de l'itération

Afin d'éviter que les calculs s'éternisent, il est nécessaire de prévoir plusieurs critères d'arrêt. On peut citer les critères les plus fréquemment utilisés :

- $\|X_{n+1} - X_n\| < \varepsilon$: convergence absolue,
- $\|X_{n+1} - X_n\| < \varepsilon \|X_n\|$: convergence relative,
- $n < N$: nombre maximal d'itérations.

Les fonctions écrites ci-dessous permettent la mise en œuvre de ces deux méthodes itératives, à l'exécution, on peut par exemple tester le comportement de ces itérations avec des matrices à coefficients aléatoires. En pratique, on observe que la convergence ne s'obtient que pour des matrices à diagonale dominante.

I.11 Conclusion

La nécessité de l'outil mathématique est indispensable pour la résolution des problèmes de fissuration des plaques élastiques, ces méthodes numériques nous permettent de résoudre les systèmes d'équations infinies, et de déterminer le champ des contraintes et les déplacements autour de ces fissures.

CHAPITRE II

ELEMENTS SUR LA THEORIE D'ELASTICITE

II.1 Introduction

Les physiciens ont depuis des siècles tenté de mettre en équations le comportement de la matière. Plus ou moins générales, précises ou robustes, ces modélisations s'appuient sur la représentation du phénomène de déformation à l'aide de champs vectoriels et de tenseurs. Ceux-ci décrivent en particulier la déformation de l'objet ainsi que les contraintes internes qu'il subit.

Des lois de comportement viennent ensuite lier les contraintes et la déformation qui en résulte.

II.2 Quelques définitions

II.2.1 L'élasticité classique

C'est l'étude du comportement des solides déformables, élastiques, isotropes, en petites déformations, avec une loi de comportement linéaire. On y ajoute une hypothèse simplificatrice supplémentaire : les déplacements sont petits. Le couple d'hypothèse petits déplacements et petites déformations est souvent appelé : Hypothèse des petites perturbations. Ces hypothèses ont pour conséquence de rendre linéaire les équations différentielles de l'élasticité.

II.2.2 Elasticité axisymétrique

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du corps élastique est symétrique de révolution autour d'un axe, et si le chargement et les conditions aux limites sont aussi de révolution autour de cet axe.

Dans ce cas, la solution est aussi axisymétrique. si on utilise un système de coordonnées cylindriques ou sphérique autour de l'axe d'axisymetrie, les dérivées des

composantes sur la base naturelle par rapport à θ sont nulles. On est donc ramène à un problème à deux variables (r, z) .

Il convient de bien noter que bien que le problème soit à deux variables, ce n'est pas un problème d'élasticité plane, car ni le tenseur des contraintes, ni le tenseur des déformations ne sont des plans en générale.

II.3 Les modules élastiques

II.3.1 Module d'Young et coefficient de Poisson

Vers 1800 Young, médecin de formation, s'intéresse à l'élasticité de la cornée. En procédant à des essais de traction uniaxiale (Figure II. 1), il constate que la déformation ε_{II} mesurée selon l'axe de traction est proportionnelle à la contrainte σ appliquée [25], il définit le coefficient de proportionnalité $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{II}}$.

Poisson complète l'analyse en constatant que l'allongement dans la direction de l'axe de traction s'accompagne d'un raccourcissement plus faible proportionnel dans les directions perpendiculaires, il définit le coefficient de proportionnalité $\eta = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}}$.

- Le module d'Young E a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa (voir annexe A). Il représente la contrainte qu'il faudrait appliquer pour obtenir une déformation unité soit doubler la longueur initiale. Aucun matériau ne correspond linéairement à une telle contrainte.
- Le coefficient de Poisson ν est un nombre sans dimension compris dans l'intervalle $\left[0 \frac{1}{2}\right]$, à l'exception des élastomères comme le caoutchouc dont le coefficient de Poisson $\simeq \frac{1}{2}$, la plus part des matériaux isotropes ont un coefficient de Poisson compris dans l'intervalle $[0,25 \ 0,35]$.
- Les matériaux structurellement complexes peuvent avoir des coefficients de Poisson supérieurs à 0,5. C'est le cas des granulaires, des poreux, des textiles et de nombreux tissus biologiques comme les muscles qui gonflent fortement lorsqu'on les contracte avec un coefficient de Poisson $\nu = 1$. A l'opposé le coefficient de Poisson du liège $\nu = 0$. Un bouchon ne s'allonge pas quand on l'étreint dans une bouche bouteille.

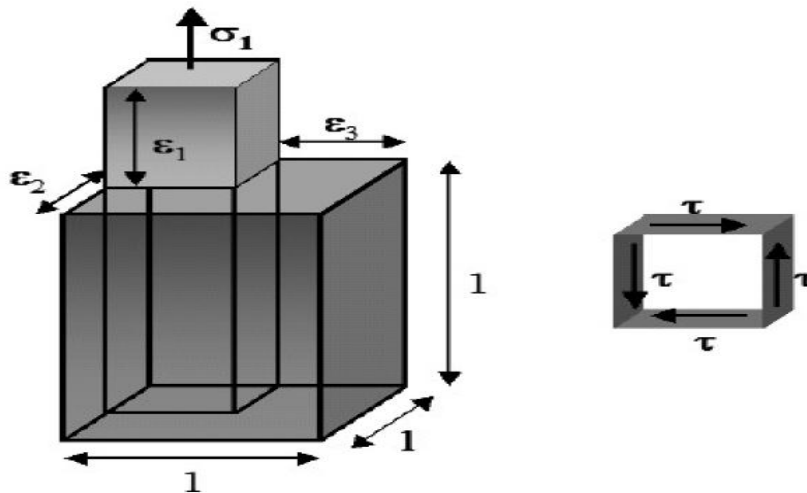


Figure II .1: Modules de Young et de Poisson

II.3.1.1 Unité du Module d'Young et de coefficient de Poisson

D'après l'équation aux dimensions, le module de Young est homogène à une pression, ou plus précisément une contrainte. L'unité internationale est donc le pascal (Pa). Cependant, en raison des valeurs élevées que prend ce module, il est en général donné en mégapascal (MPa) ou newton par millimètre carré (N/mm^2).

Remarque :

Un matériau dont le module de Young est très élevé est dit rigide. L'acier, l'iridium, le diamant, sont des matériaux très rigides, l'aluminium et le plomb le sont moins, les matières plastiques et organiques sont généralement peu rigides. Il ne faut cependant pas confondre élasticité et rigidité puisque la rigidité d'une poutre par exemple dépend de son module de Young mais aussi du moment d'inertie de sa section

II.3.1.2 Méthodes de mesure du module d'Young

Le plus simple reste bien sûr de réaliser un essai de traction, et connaissant les dimensions de l'éprouvette, d'en déduire le module de Young E . Cependant, il est difficile de réaliser cette mesure avec une bonne précision.

C'est pourquoi on préfère, lorsque cela est possible, déduire le module de Young de la fréquence propre de vibration d'une tige de matériau maintenue à ses extrémités et chargée en son milieu.

On peut aussi mesurer la vitesse du son dans le matériau de masse volumique ρ qui nous intéresse et en déduire le module de Young sachant qu'on a la relation suivante :

$$V_{son} \approx \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Cependant, cette loi est approchée, la vitesse du son dépend aussi du coefficient de Poisson.

Le module de Young augmente avec la vitesse de déformation.

II.3.1.3 Exemple d'utilisation

En médecine la mesure des variations du module de Young dans un organe est une possibilité de l'imagerie médicale qui permet de représenter l'élasticité des tissus même profonds, par exemple pour donner l'étendue de la fibrose d'un foie ou détecter dans un sein un carcinome petit ou profond, peu décelable à la palpation.

II.3.2 Module de coulomb

Coulomb a procédé à des essais de torsions (cisaillement pur) et constate que le glissement γ est proportionnel au cisaillement τ appliqué (Figure II. 2). Il définit le coefficient de proportionnalité $G = \frac{\tau}{\gamma}$, le module de Coulomb G a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa. Il représente le cisaillement qu'il faudrait appliquer pour obtenir un glissement d'un radian.

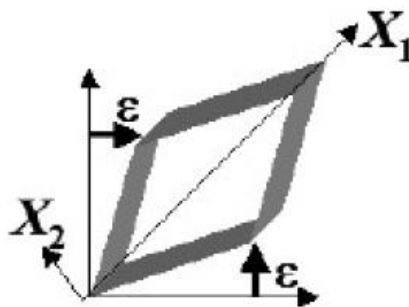


Figure II .2: Module de coulomb

II.3.3 Module de Lamé

Lamé, qui s'intéressait à la propagation des ondes, introduit le couple de modules $\{\lambda, \mu\}$ (Figure II. 3) tels que l'énergie libre F , exprimée en termes d'invariants du tenseur des

déformations, s'écrive $F = \frac{\lambda}{2} Tr^2(\bar{\epsilon}) + \mu Tr(\bar{\epsilon}^2)$. Les modules de lamé λ et μ ayant tous deux la dimension d'une contrainte.

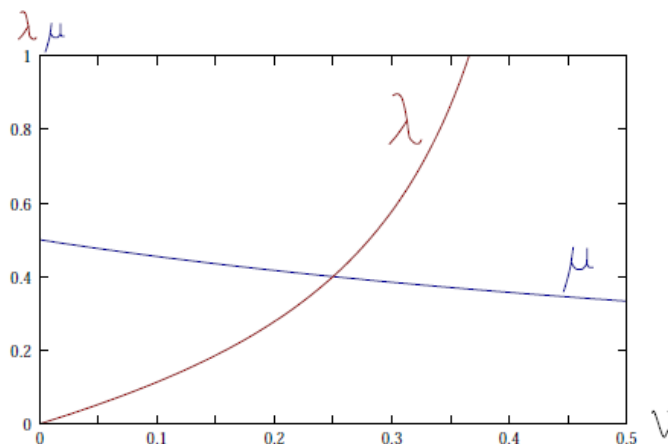


Figure II .3: Évolution de λ et μ lorsque ν varie entre 0 et 0.5, pour un E donné

Remarque : Noter que λ tend vers l'infini pour des matériaux incompressibles ($\nu=0,5$).

II.3.4 Module de compressibilité et de cisaillement

La déformation se décomposant en un changement de volume à forme constante et un changement de forme à volume constant, ces deux opérations seront caractérisées respectivement par les modules K et G .

- Le changement de volume à forme constante est une déformation isotrope, le module K établit la relation $\sigma_m = K\theta = 3K\varepsilon_m$ entre la contrainte moyenne σ_m et la variation relative de volume résultante $\theta = \frac{dV}{V} = 3\varepsilon_m$.

Dans le cas d'une compression hydrostatique dp laquelle est associée la valeur moyenne $\sigma_m = -dp$, la relation $\sigma_m = K\theta$ s'écrit $K = -V \frac{dp}{dV}$. Le module de compressibilité K , dont la dimension est celle d'une contrainte, n'est autre que l'inverse du coefficient de compressibilité thermodynamique.

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{V}$$

- Le changement de forme à volume constant est une déformation qui ne fait intervenir que les déviateurs des contraintes et des déformations caractérisés par les contraintes

σ_d et déformation ε_d déviatoriques moyennes. Le module de cisaillement G , dont la dimension est celle d'une contrainte, établit la relation $\sigma_d = 2 G \varepsilon_d$ entre ces deux grandeurs.

II.3.5 Quelques relations entre coefficients

	λ et μ (coefficients de Lamé)	E et ν (mécanique des structures)	K et G (mécanique des sols)
λ	-	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{3K - 2G}{3}$
μ	-	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	G
E	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	-	$\frac{9KG}{3K + G}$
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	-	$\frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$
K	$\frac{3\lambda + 2\mu}{3}$	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	-
G	μ	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	-

Table II.1 Relation entre coefficients

II.4 Equations de l'élasticité

II.4.1 Loi de Hooke

Le physicien britannique Thomas Young (1773-1829) avait remarqué que le rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte (un allongement relatif) est constant (figure II.4), tant que cette déformation reste petite et que la limite d'élasticité du matériau n'est pas atteinte. La loi d'élasticité est la loi de Hooke :

$$\sigma = E \varepsilon$$

où σ est la contrainte (en unité de pression),

- E est le module de Young (en unité de pression),

- ε est l'allongement relatif (adimensionnel).

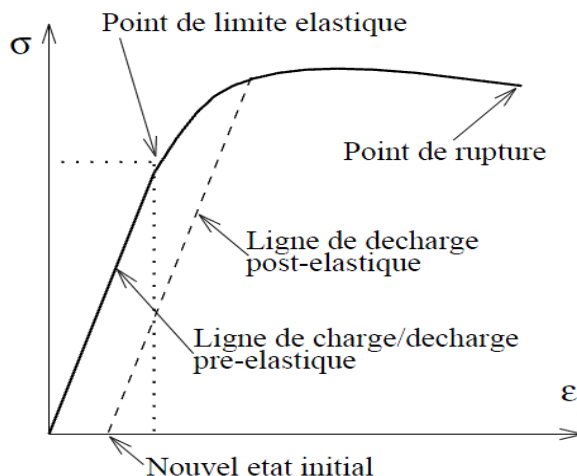


Figure II .4: Diagramme contrainte-déformation

Cette loi se généralise à l'étude des structures élastiques. Si σ_{ij} sont les six composantes du tenseur des contraintes et si ε_{ij} sont les six composantes du tenseur des déformations, la loi de Hooke se donne ici en notation indicielle par:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (II.1)$$

δ_{ij} : Indice de Kronecker.

Avec le module d'Young et le coefficient de Poisson, il existe une autre forme inverse de la loi faisant apparaître les deux coefficients de Lamé λ et μ .

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (II.2)$$

Remarque :

La loi de Hooke générale pour les matériaux anisotropes est une relation linéaire entre la matrice des contraintes et la matrice des déformations faisant intervenir 21 coefficients.

Note:

Il ne faut pas confondre rigidité et raideur. La rigidité caractérise les matériaux, la raideur concerne les produits et les constructions. Une pièce mécanique massive en matière plastique peut être beaucoup plus raide qu'un ressort en acier.

Pour un milieu isotrope, la loi de Hooke nous permet d'obtenir les relations suivantes :

a) Les relations contrainte-déformation

$$\sigma_r = \frac{E}{(\nu + 1)(2\nu - 1)} [(\nu - 1)\varepsilon_r - \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(\nu + 1)(2\nu - 1)} [(\nu - 1)\varepsilon_\theta - \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(\nu + 1)(2\nu - 1)} [(\nu - 1)\varepsilon_z - \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)]$$

b) Les relations déformation-déplacement

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{zr} = \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{u_r}{r}$$

c) Les contraintes tangentielles:

$$\tau_{r\theta} = G \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$\tau_{z\theta} = G \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right)$$

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial r} \right)$$

Les expressions des contraintes sont obtenues en remplaçant les relations déformation-déplacement dans les relations contrainte-déformation.

➤ Contrainte radiale :

$$\sigma_r = \frac{2G}{(2\nu - 1)} \left[(\nu - 1) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sigma_r = \frac{2G(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2G\nu \frac{u_r}{r} + \frac{2G\nu}{(2\nu - 1)} \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

➤ Contrainte orthoradiale :

$$\sigma_{\theta} = \frac{2G}{(2\nu - 1)} \left[(\nu - 1) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \nu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{2G(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)} \frac{u_r}{r} + \frac{2G\nu}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2G\nu}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

➤ Contrainte normale :

$$\sigma_z = \frac{2G}{(2\nu - 1)} \left[(\nu - 1) \frac{\partial w_z}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{2G(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{2G\nu}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2G\nu}{(1 - 2\nu)} \frac{u_r}{r}$$

II.4.2 Equations fondamentales de la théorie d'élasticité

Le problème de la théorie d'élasticité classique est gouverné par l'équation de Navier. Si on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'équation de Navier [30], pour les petites déformations, a comme déplacement $u(r, \theta, z)$, $v(r, \theta, z)$ et $w(r, \theta, z)$ pour les directions r , θ et z .

$$\nabla^2 u_r + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + u_r \right) = 0 \quad (II.3)$$

$$\nabla^2 v_{\theta} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - v_{\theta} \right) = 0 \quad (II.4)$$

$$\nabla^2 w_z + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \quad (II.5)$$

L'expression de e s'écrit :

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad (II.6)$$

Où ∇^2 est Laplacien qui s'exprime :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (II.7)$$

Généralement les équations d'équilibre sont résolues par la transformée de Hankel, mais il existe d'autres méthodes comme les fonctions de contraintes de Love, de Boussinesq ou de Neuber-Papkovich.

II.4.2 .1 La fonction de contrainte de Love

Cette fonction vérifiée l'équation:

$$\nabla^2 \varphi(r, z) = 0$$

où ∇ est Laplacien.

La résolution du système d'équilibre nous donne les déplacements suivants :

$$2Gu_r = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}$$

$$2Gu_z = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2(1 - \nu)\Delta\varphi$$

En remplaçant ces déplacements dans les expressions des contraintes données par Hooke, on aura :

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial r} [(2 - \nu)\Delta\varphi] - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} [(1 - \nu)\Delta\varphi] - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

II.4.2 .2 Les fonctions de Boussinesq

En absence des forces volumiques, la résolution d'un système d'équilibre s'obtient à l'aide de deux fonctions harmoniques.

$$\begin{cases} 2Gu_r = -(1 - 2\nu) \frac{\partial F}{\partial r} - 2(1 - \nu) \frac{\partial G}{\partial r} \\ 2Gu_z = -(1 - 2\nu) \frac{\partial F}{\partial z} + 2(1 - \nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rG) \end{cases} \quad (II. a)$$

où F et G sont des fonctions auxiliaires.

En portant ces expressions dans le système d'équilibre en déplacements, on trouve :

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} \right) = 0 \quad (II. b)$$

$$\Delta \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rG) \right] = 0 \quad (II. c)$$

Choisissons les fonctions F et G tel que :

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (II. d)$$

Posons :

$$2\psi = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r G) = 0 \quad (II. e)$$

Cette fonction est alors harmonique en tenant compte de (II. d) et (II. e).

On trouve :

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial G}{\partial z} \right) = 0 \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \Delta F \end{aligned} \quad (II. f)$$

La solution générale de l'équation (II. f) est donnée par :

$$F = z \psi + \varphi$$

où φ est harmonique.

Puisque :

$$\Delta(z\psi) = z\Delta\psi + \psi\Delta z + 2\text{grad } z \cdot \text{grad } \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Par suite, on aura :

$$\begin{cases} 2Gu_r = -(1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial r} - 2(1-\nu) \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial r} \\ 2Gu_z = -(1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial z} + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial F}{\partial z} - 4(1-\nu)\psi \right] \end{cases}$$

ainsi l'expression des déplacements nous donne :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial \varphi}{r \partial r} + z \frac{\partial \psi}{r \partial r} - 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2(1-\nu) \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

I.5 Concentration de contrainte

II.5.1 Champ de contraintes autour d'une fissure

Les travaux d'Irwin ont permis de définir trois modes de chargement ou de déformation d'une fissure (figure II.5)

- ✓ Mode I : résultant d'une charge de traction perpendiculaire au plan de la fissure (ouverture de la fissure)
- ✓ Mode II : résultant d'une charge de cisaillement, parallèle au plan de la fissure (glissement).
- ✓ Mode III : résultant d'une charge parallèle au plan de la fissure et au front de fissure (mouvement antiplan).

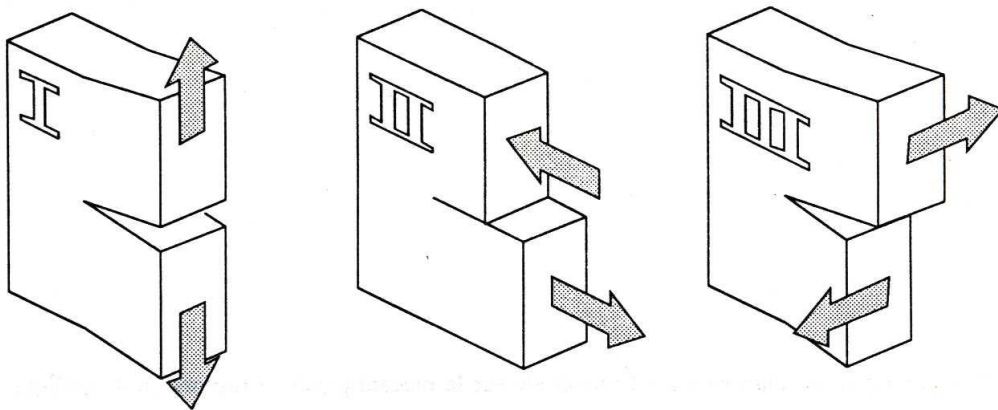


Figure II .5: Différents modes de chargement d'une fissure

Localement, un état quelconque de déformation d'une fissure peut être ramené à une combinaison de ces trois modes fondamentaux qui définissent un mode mixte de chargement de la fissure. Dans un problème à deux dimensions [35], seules les deux premiers modes interviennent. Les méthodes analytiques utilisées par la théorie de l'élasticité permettent de déterminer le champ de contrainte qui régnait autour d'une fissure dans une plaque infinie chargée selon l'un des trois modes décrits précédemment.

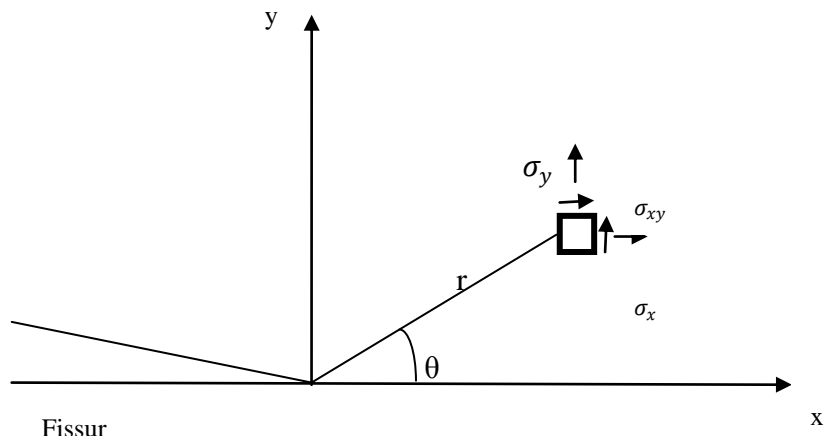


Figure II. 6: Système de coordonnées employé pour l'analyse du champ de contraintes en pointe de fissure

Dans un système de coordonnées polaires (figure II.6) les premiers termes des développements en série des solutions analytiques présentées ci-dessous sont inversement proportionnels à \sqrt{r} , les contraintes sont donc infinies à la pointe de la fissure. Les termes suivants s'annulent à la pointe de la fissure, mais donnent des valeurs finies, propres aux conditions de chargement à une certaine distance de la fissure.

Ainsi, seuls les premiers termes des solutions analytiques représentent la singularité du champ de contrainte et décrivent correctement les contraintes au voisinage de la pointe de fissure.

Les contraintes calculées pour les deux modes plans de sollicitation sont :

Mode I :

$$\begin{cases} \sigma_x^I = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(r) \\ \sigma_y^I = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(r) \\ \tau_{xy}^I = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(r) \end{cases} \quad (II.8)$$

avec

$$k_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (II.9)$$

Dans le cas de la plaque infinie contenant une fissure de longueur $2a$, soumise à une traction uniforme biaxiale (figure II.7.a).

Mode II :

$$\begin{cases} \sigma_x^{II} = -\frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{2\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(r) \\ \sigma_y^{II} = \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(r) \\ \tau_{xy}^{II} = \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \mathcal{O}(r) \end{cases} \quad (II.10)$$

Le coefficient d'intensité de contrainte s'écrit :

$$k_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$$

Dans le cas d'une plaque infinie contenant une fissure de longueur $2a$ soumise à un cisaillement uniforme (figure II.7.b).

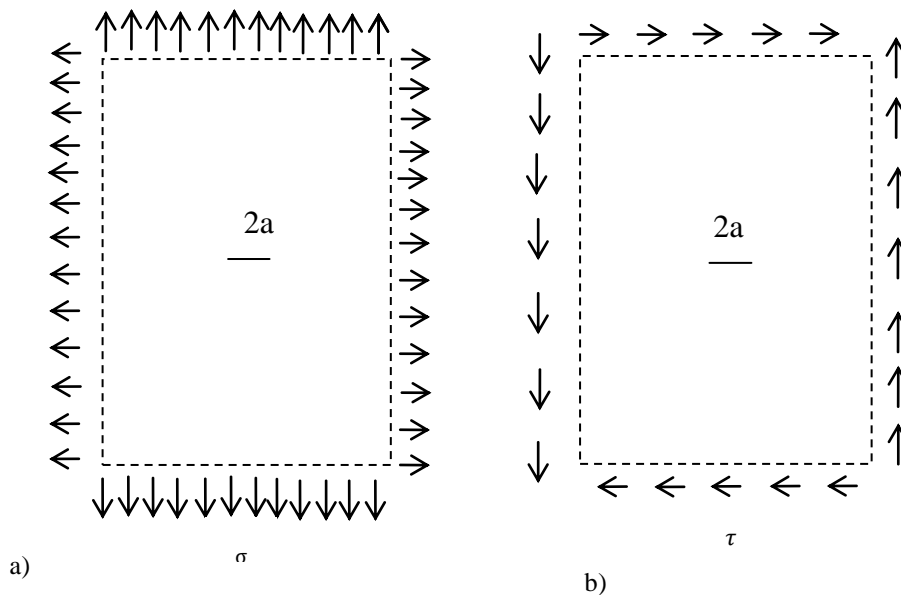


Figure II.7: Sollicitation en traction et en cisaillement d'une plaque

Le champ de contrainte d'une fissure quelconque chargé en mode I ou II a toujours la forme des équations (II.8) ou (II.10), seuls les facteurs K_I , respectivement K_{II} changent selon les conditions de bord.

K_I et K_{II} sont les facteurs d'intensité de contrainte associés aux champs de contraintes au voisinage de la pointe de la fissure, ils sont fonction uniquement de la géométrie de la pièce fissurée (voir annexe B), de la longueur de fissure et des conditions de bord (charge, appuis). Ces facteurs sont déterminés soit analytiquement, soit numériquement, soit expérimentalement.

II.5.2 Champ de déplacement autour d'une fissure

Les relations de la théorie de l'élasticité permettent de déterminer les champs de déplacement au voisinage de la pointe de fissure.

Mode I :

$$\begin{cases} u_1^I = \frac{k_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k^* - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_2^I = \frac{k_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k^* + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{cases} \quad (II.11)$$

Mode II :

$$\begin{cases} u_1^{II} = \frac{k_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k^* + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_2^{II} = -\frac{k_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k^* - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{cases} \quad (II.12)$$

où μ est le module de glissement.

$$k^* = \frac{(3 - \nu)}{(1 + \nu)} \quad \text{en contraintes planes.}$$

et aussi:

$$k^* = 3 - 4\nu \quad \text{en déformations planes.}$$

L'étude des champs de contrainte et de déformation au voisinage de la pointe de la fissure conduit à la détermination des facteurs d'intensité de contrainte, l'équivalence avec les approches énergétiques (G,J) permet d'identifier un facteur critique d'intensité de contraintes.

II.6 Solution de Sneddon du problème de Griffith et du problème d'une fissure circulaire dans un solide infini soumis à une traction uniforme

Entre 1945 et 1950, à la demande de métallurgiste Neville Motte, Sneddon reprit le problème plan de Griffith (voir annexe c) et traita le problème d'une fissure circulaire dans un solide infini soumis à une traction normale de révolution. Pour le problème d'un plan fissuré

soumis à une traction isotrope [27], Sneddon donna par un développement limité au voisinage du front de fissure les expressions des premiers termes des contraintes, et montra leur singularité.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O} \left(\sqrt{\frac{r}{a}} \right) \\ \sigma_{yy} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O} \left(\sqrt{\frac{r}{a}} \right) \\ \tau_{xy} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O} \left(\sqrt{\frac{r}{a}} \right)\end{aligned}\quad (\text{II.13})$$

Il montra que la fissure s'ouvrait en une petite ellipse, et donna les éléments pour le calcul des premiers termes des déplacements, petit comme $r^{\frac{1}{2}}$ au voisinage du front de fissure. Pour la fissure circulaire, il résolut les équations de l'élasticité par la transformation de Fourier, et donna les expressions des premiers termes des contraintes dans un trièdre lié à la normale et à la tangente (Figure II.8).

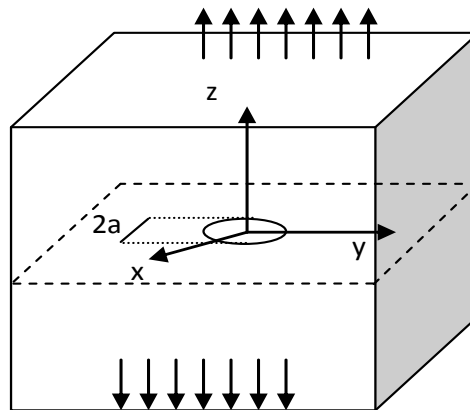


Figure II .8: Modèle de Sneddon

Les contraintes sont données par :

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O} \left(\sqrt{\frac{r}{a}} \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O} \left(\sqrt{\frac{r}{a}} \right) \\ \sigma_{tt} &= 2\nu \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \left(\sqrt{\frac{r}{a}} \right) = \nu (\sigma_{nn} + \sigma_{zz})\end{aligned}\quad (II.14)$$

Il nota la similitude des expressions (II.13) et (II.14), il remarque aussi pour la fissure circulaire l'existence de la déformation plane dans le plan normal, révélée par :

$$\sigma_{tt} = \nu (\sigma_{nn} + \sigma_{zz}).$$

Un peu plus tard, le même problème pour une fissure elliptique fut traité par Green et Sneddon ; ils donnèrent des expressions générales sans développements limités isolant les termes singuliers.

II.7 Distribution des contraintes dans une plaque mince infinie contenant un trou circulaire

Une plaque de longueur infinie avec un trou circulaire est montrée sur la (Figure II.9), elle est soumise à un chargement uniaxial qui produit des contraintes uniforme σ_0 dans la direction y pour $r = \infty$. La distribution des contraintes au voisinage du trou, le long de l'axe x et l'axe y peut être déterminée en utilisant l'approche de la fonction de la contrainte d'Airy.

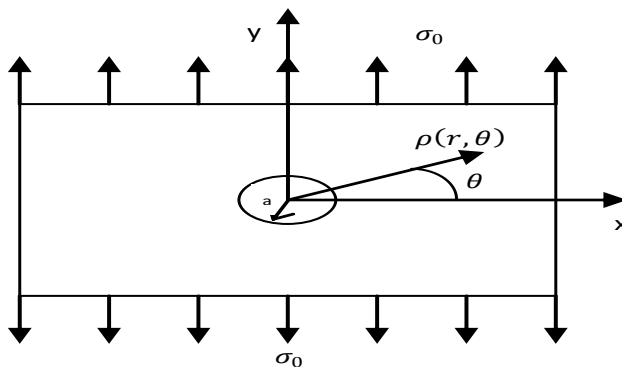


Figure II.9: Plaque infinie contenant un trou circulaire

Les conditions aux limites qui doivent être satisfaites sont :

$$\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{pour } r = a$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \sigma_0 && \text{pour } r \rightarrow \infty \\ \sigma_{xx} = \tau_{xy} &= 0 && \text{pour } r \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Une illustration du processus de superposition est présentée sur la figure II.10.

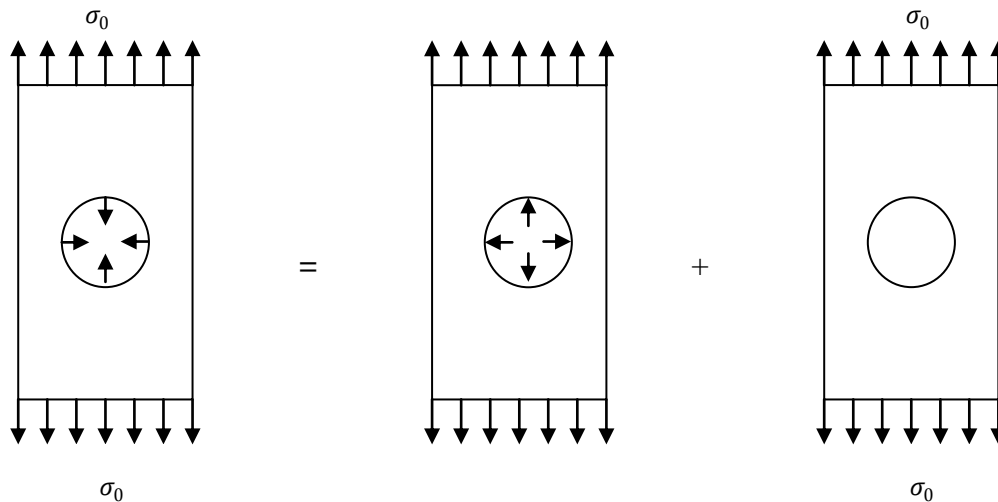


Figure II .10: Principe de superposition

Les conditions de bord quand $r \rightarrow \infty$ peuvent être satisfaites par le champ de contraintes uniforme associé à la fonction de contrainte Airy φ . Dans ce cas de chargement uniaxial dans la direction y , φ se réduit à :

$$\varphi = a_2 x^2 = \frac{\sigma_0 x^2}{2} \quad (II. 15)$$

En utilisant le principe de superposition, les contraintes le long de l'axe x peuvent être obtenues en prenant $\theta = 0$ et $r = x$ par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} = \sigma_{xx} &= \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \frac{3a^2}{x^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} &= \frac{\sigma_0}{2} \left(2 + \frac{a^2}{x^2} + \frac{3a^2}{x^2} \right)\end{aligned} \quad (II. 16)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{xy} = 0$$

La distribution des contraintes normales $\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0}$ et $\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}$ varie le long de l'axe x , une représentation est donnée par la figure II.11.

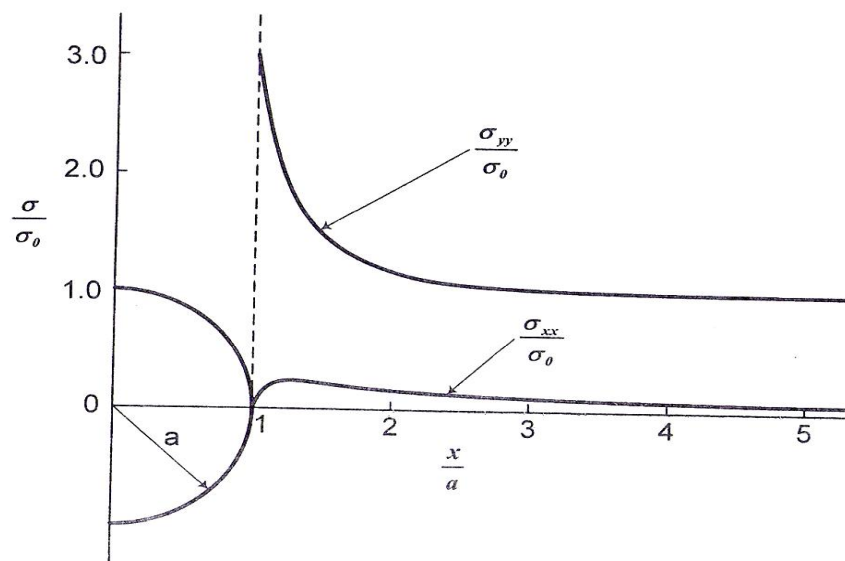


Figure II. 11: Distribution de σ_{xx}/σ_0 et σ_{yy}/σ_0 le long de l'axe x

D'une manière similaire, les contraintes le long de l'axe y peuvent être obtenues pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $r = y$ par les équations :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{2} \left(2 - \frac{5a^2}{y^2} + \frac{3a^4}{y^4} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{2} \left(\frac{a^2}{y^2} - \frac{3a^4}{y^4} \right) \quad (II.17)$$

$$\sigma_{r\theta} = \tau_{xy} = 0$$

De la même manière, la distribution de $\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0}$ et $\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}$ varie le long de l'axe y , comme le montre la figure II.12.

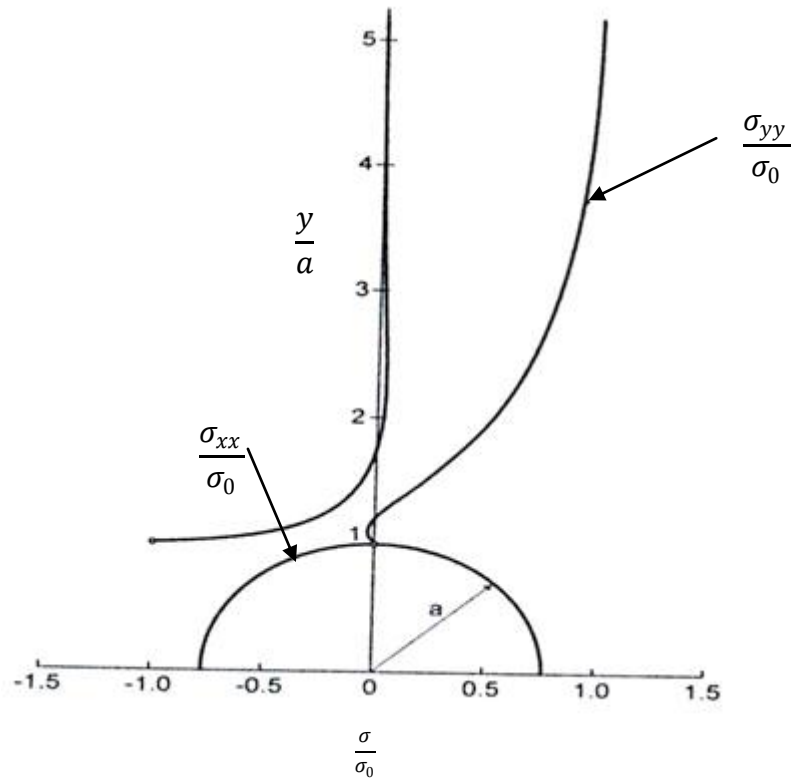


Figure II .12: Distribution de σ_{xx} / σ_0 et σ_{yy} / σ_0 varie le long de l'axe y

La distribution de $\sigma_{\theta\theta}$ au voisinage du trou est obtenue en prenant $r = a$ par les équations :

$$\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_0(1 + 2\cos 2\theta)$$

La distribution de $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_0}$ au voisinage du trou est illustrée par la figure II.13.

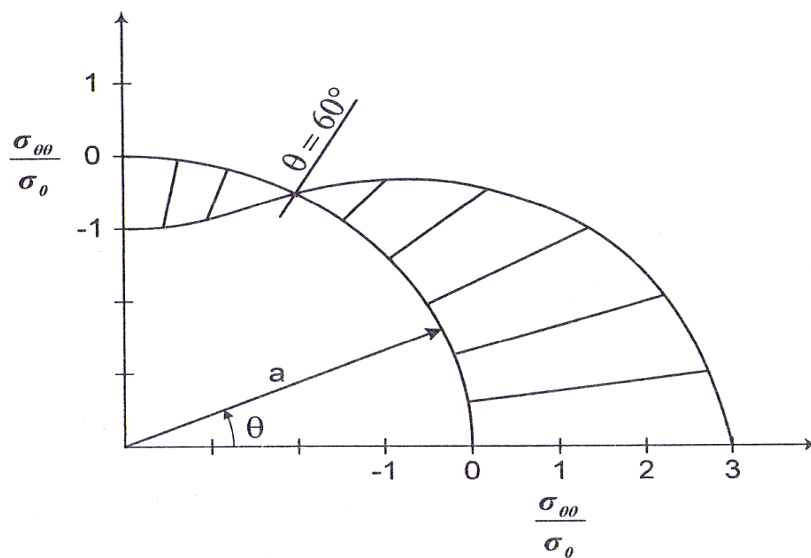


Figure II .13: Distribution de $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_0$ au voisinage du trou

II.8 Application de la théorie d'élasticité au calcul de K_t

Dans le cas d'un trou circulaire dans une plaque infinie soumise à une traction uniaxiale, on considère une plaque infinie contenant un petit trou circulaire de rayon a , soumise à une traction uniaxiale σ .

K_t est le facteur de concentration des contraintes théorique.

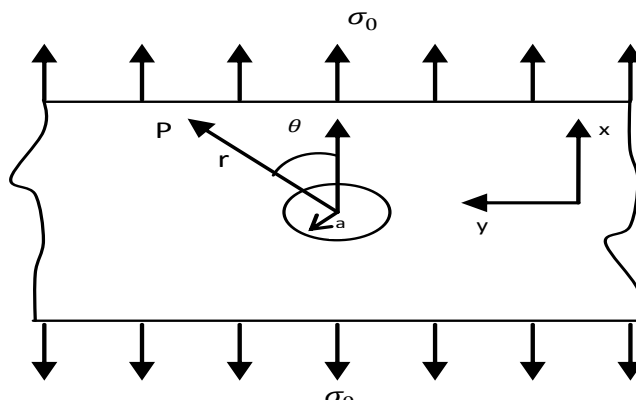


Figure II .14: Plaque infinie contenant un trou de faible diamètre

En coordonnées polaires (r, θ) , les contraintes en chaque point P sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{3a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta\end{aligned}\quad (II.18)$$

On note que l'état des contraintes données par l'équation (II.18) satisfait les conditions aux limites.

$$r = a (\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{pour tout } \theta)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma, \sigma_{xy} = 0 \quad \text{pour } \theta = 0, \pi$$

$$\sigma_{yy} = 0, \sigma_{xy} \quad \text{pour } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{pour } r = a: \sigma_{\theta\theta} = \sigma(1 - 2\cos 2\theta)$$

Cependant, pour $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, $\sigma_{\theta\theta}$ atteint sa valeur maximale $\sigma_{\theta\theta\max}$.

$\sigma_{\theta\theta\max} = 3\sigma$ ce qui implique que $K_t = 3$. Pour $\theta = 0, \pi$, $\sigma_{\theta\theta}$ atteint une valeur de $-\sigma$.

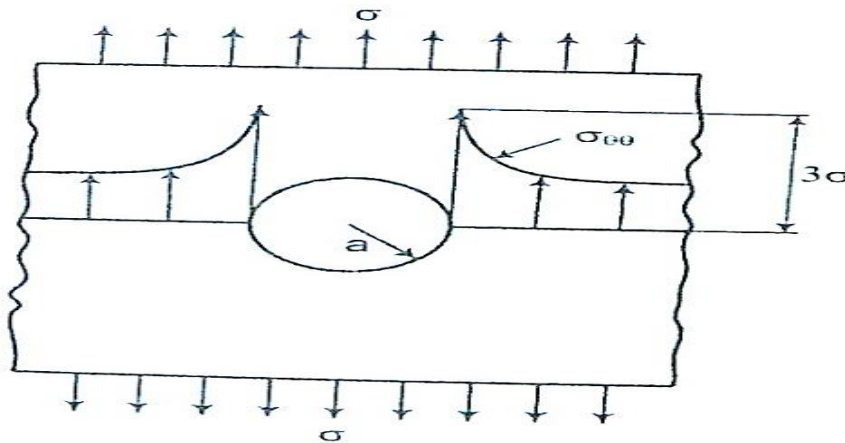


Figure II.15: Distribution des contraintes dans une plaque infinie contenant un trou de faible diamètre

On note que l'équation (II.18) ne peut être appliquée dans le cas où le diamètre du trou serait comparable à la largeur de la plaque.

II.9 Application des techniques expérimentales au calcul de K_t

II.9.1. Mesure des concentrations des contraintes par jauges

Les jauges de déformations Strain-Gage sont très précises pour le calcul de du coefficient d'intensité théorique K_t , mais il faut tenir compte du fait qu'elles intègrent les mesures sur leur longueur.

Aux points de concentrations, les gradients sont importants, il faut donc de très petites jauges.

II.9.2. Mesure des concentrations de contraintes par la photoélasticité

La photoélasticimétrie est la technique qui se prête le mieux aux mesures des concentrations de contraintes. Une image obtenue par photoélasticimétrie est équivalente à une infinie de jauges. La figure II.16 montre un exemple d'application dans ce sens.

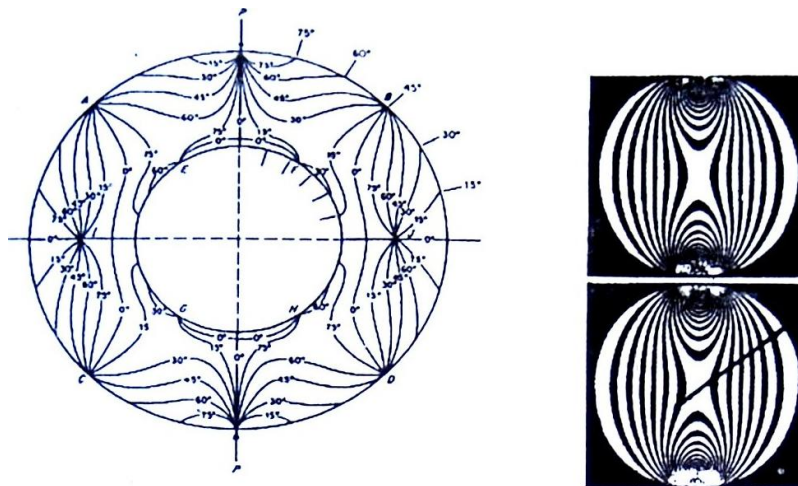


Figure II .16: Technique de photoélasticimétrie

La plupart des formules pratiques données par les formulaires ont été obtenue par photoélasticimétrie.

II.10 Energie de déformation élastique

Quand un barreau est chargé uniformément en tension (Figure II.17), le travail des forces appliquées lors le l'élongation s'exprime sous la forme :

$$dE = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dx dy dz = E_{el} dx dy dz$$

En effet l'élément de volume n'est soumis qu'à une contrainte normale σ_x , et l'effort $dF = \sigma_x dy dz$ crée un travail pendant l'élongation $dU = \varepsilon_x dx$; la relation entre ces deux composantes pendant le chargement étant linéaire, le travail peut être calculé

par l'aire sous la courbe. E_{el} est l'énergie élastique par unité de volume.

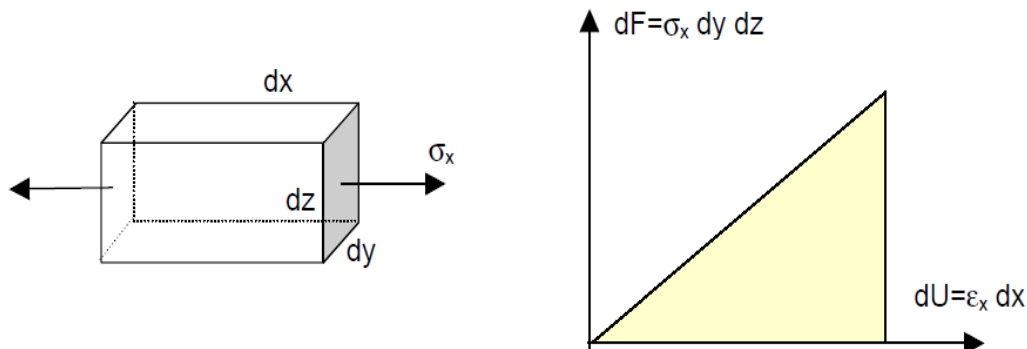


Figure II .17: Schématisation de l'énergie élastique

Par généralisation, lorsqu'un corps élastique est amené d'un état initial à un état final, le travail de déformation accumulé sur le domaine par unité de volume où l'énergie élastique par unité de volume s'exprime par la relation :

$$E_{el} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad \text{ou} \quad E_{el} = \frac{1}{2} \bar{\sigma} \bar{\varepsilon}$$

où en l'exprimant en fonction des contraintes seulement

$$E_{el} = \frac{1}{2E} (I_1^2 - 2(1 + \nu)I_2)$$

I_1 et I_2 invariants du tenseur des contraintes.

L'énergie élastique est indépendante du repère choisi, elle ne dépend pas du trajet de chargement.

Si l'on explicite E_{el} en fonction de ε_{ij} on démontre que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial E_{el}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

II.11 Conclusion

Les éléments de la théorie de l'élasticité nous permettent de résoudre de nombreux problèmes en mécanique, le progrès de cette théorie est marqué par l'implantation profonde des méthodes classiques de l'analyse mathématiques.

Grace aux descriptions en équations mathématiques des problèmes d'élasticité, cette dernière a apporté une contribution de valeur au développement des mathématiques.

CHAPITRE III

RÉSOLUTION & DISCUSSION

III.1 Solution des équations d'équilibre

Une fissure circulaire est une discontinuité sous forme d'un disque dans la couche élastique. Le système de coordonnées qui convient à représenter un tel phénomène est le système en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . La couche élastique se repose sur une fondation rigide et lisse ayant un orifice circulaire (Figure III.1) dans le plan $z = 0$.

L'épaisseur de la plaque épaisse élastique est h .

On utilise alors le système des coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Les composantes du vecteur déplacement suivant les axes r, θ et z sont respectivement u_r, v_θ et w_z , alors celles des contraintes sont données par $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ et $\tau_{r\theta}$.

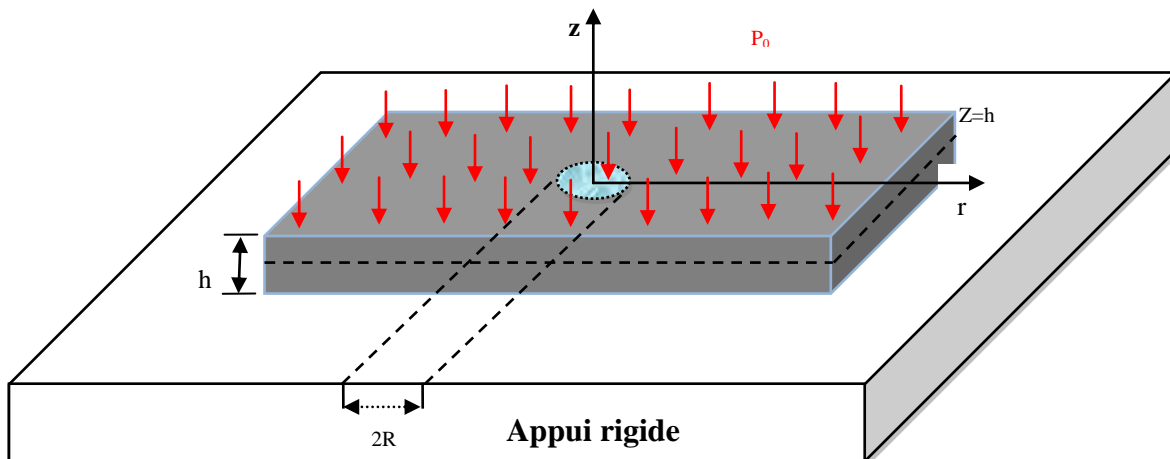


Figure III. 1 : Plaque élastique reposant sur un appui rigide ayant un trou circulaire et soumise à un champ de contrainte uniforme

En général, le vecteur de déformation a trois composantes u, v et w représentant des projections sur les trois directions principales. Elles correspondent aux déformations radiales

suivant la direction r , angulaire de direction θ et axiale suivant la verticale z , respectivement. Chaque composante est fonction des trois variables r, θ et z , c.-à-d.,

$$u = u(r, \theta, z)$$

$$v = v(r, \theta, z)$$

$$w = w(r, \theta, z)$$

En négligeant les forces volumiques agissant sur le milieu élastique, les équations d'équilibre en déplacements s'écrivent:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u \right) - (\lambda + 3\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z \partial r} \right) \\ + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (III.1)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z \partial \theta} \right) + (\lambda + 3\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \\ + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (III.2)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta \partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \theta^2} \right) \\ = 0 \end{aligned} \quad (III.3)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

Les conditions aux limites imposées sur la plaque élastique sont à symétrie axiale, alors les composantes angulaires du vecteur de déformation v sont nulles.

$$v(r, \theta, z) = 0$$

En outre les composantes u et w sont indépendantes de l'angle polaire θ .

$$u = u(r, z)$$

$$w = w(r, z)$$

Par suite, dans ce cas le système des équations d'équilibre se simplifie et s'obtient par :

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r \right) + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w_z}{\partial r \partial z} = 0 \quad (III.4)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} = 0 \quad (III.5)$$

Généralement, on résout ce système directement par la méthode de la transformation de Hankel ou bien à l'aide des fonctions de contraintes de Love, de Boussinesq ou de Neuber-Papkovich. On retrouve une fonction biharmonique dans le cas Love et seulement deux fonctions harmoniques dans les autres cas.

III.2 Formules fondamentales

Les déplacements et les contraintes dans un milieu élastique sans torsion sont exprimés par les fonctions harmoniques de Boussinesq φ_0, φ_3 qui satisfont aux équations de Laplace.

Ces fonctions de Boussinesq φ_0, φ_3 s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi_0^0 + \varphi_0^1 \\ \varphi_3 = \varphi_3^0 + \varphi_3^1 \end{cases}$$

Les premières fonctions on les choisit sous la forme :

$$\varphi_0^0 = -\frac{\nu}{2(1+\nu)} p_0 (2z^2 - r^2) \quad (III.6)$$

$$\varphi_3^0 = -\frac{1}{2(1+\nu)} p_0 \quad (III.7)$$

Les secondes fonctions s'obtiennent par :

$$\varphi_0^1 = \int_0^\infty \{A(\lambda) \cosh(\lambda z) + B(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (III.8)$$

$$\varphi_3^1 = \int_0^\infty \{C(\lambda) \sinh(\lambda z) + D(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (III.9)$$

où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro.

Les quatre fonctions inconnues $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont à déterminer à partir des conditions limites du problème proposé.

Ces fonctions sont nommées fonction élémentaire et auxiliaire, respectivement. G et ν sont le module de cisaillement et le coefficient de Poisson de plaque élastique, les fonctions de Boussinesq φ_0 et φ_3 satisfont l'équation (III.4) et (III.5) et aussi l'équation suivante :

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_3 = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

➤ **Condition aux limites du problème**

Les conditions aux limites posées dans le cas de notre problème sont :

$$z = 0 \quad \begin{cases} \sigma_z = \tau_{zr} = 0 & r < R \\ u_z = \tau_{zr} = 0 & r > R \end{cases} \quad \begin{array}{l} (III.10a) \\ (III.10b) \end{array}$$

$$z = h \quad \{ \sigma_z = -p_0, \tau_{zr} = 0 \quad r \geq 0 \quad (III.10c)$$

III.3 Formulation du problème

Le principe de résolution de Boussinesq, du système d'équilibre, consiste à déterminer les deux fonctions harmoniques φ_0 et φ_3 . Les déplacements s'obtiennent alors sous les formules suivantes :

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \\ 2Gw_z &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3 - 4\nu)\varphi_3 \end{aligned} \quad (III.11)$$

$$v_\theta = 0$$

Par la loi de Hooke, on retrouve les contraintes comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial \varphi_0}{r \partial r} + z \frac{\partial \varphi_3}{r \partial r} - 2\nu \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta z} = 0 \end{aligned} \quad (III.12)$$

III.4 Décomposition du problème

On décompose notre problème en deux parties: partie élémentaire et partie auxiliaire.

III.4.1 Solution élémentaire

Posons d'abord des hypothèses sur les fonctions de Boussinesq pour la solution élémentaires.

$$\varphi_0^0 = -\frac{\nu}{2(1+\nu)} p_0 (2z^2 - r^2)$$

$$\varphi_3^0 = -\frac{1}{2(1+\nu)} p_0$$

Les dérivées de ces fonctions par rapport à r sont :

$$\frac{\partial \varphi_0^0}{\partial r} = \frac{\nu}{(1+\nu)} p_0 r$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0^0}{\partial r^2} = \frac{\nu}{(1+\nu)} p_0$$

$$\frac{\partial \varphi_3^0}{\partial r} = \frac{\partial^2 \varphi_3^0}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \varphi_3^0}{\partial z^2} = 0$$

et par rapport à z :

$$\frac{\partial \varphi_0^0}{\partial z} = -\frac{2\nu}{(1+\nu)} p_0 z$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0^0}{\partial z^2} = -\frac{2\nu}{(1+\nu)} p_0$$

$$\frac{\partial \varphi_3^0}{\partial z} = \frac{1}{2(1+\nu)} p_0$$

D'après l'équation (III. 10), le déplacement normal est obtenu comme suit:

$$2Gw_z^0 = -\frac{2\nu}{(1+\nu)} p_0 z + \frac{1}{2(1+\nu)} p_0 z - (3-4\nu) \frac{1}{2(1+\nu)} p_0 z$$

$$2Gw_z^0 = -\frac{p_0 z}{(1+\nu)}$$

En remplaçant, respectivement, les hypothèses de la solution élémentaires dans les expressions de contrainte normale, angulaire, radiale et de tangentielle, on obtient :

➤ *Contrainte normale*

$$\sigma_z^0 = -\frac{2\nu p_0}{(1+\nu)} - 2(1-\nu) \frac{p_0}{2(1+\nu)} = -p_0$$

➤ *Contrainte orthoradiale*

$$\sigma_{\theta}^0 = -\frac{\nu p_0}{(1 + \nu)} - \frac{2\nu p_0}{2(1 + \nu)} = 0$$

➤ *Contrainte radiale*

$$\sigma_r^0 = -\frac{\nu p_0}{(1 + \nu)} - \frac{2\nu p_0}{2(1 + \nu)} = 0$$

➤ *Contrainte tangentielle*

$$\tau_{rz}^0 = 0$$

III.4.2 Solution auxiliaire

Dans la suite du travail on utilisera les différentes dérivées des fonctions φ_0^1, φ_3^1 .

Les première dérivées par rapport à z ;

$$\frac{\partial \varphi_0^1}{\partial z} = \int_0^{\infty} \{\lambda A(\lambda) \sinh(\lambda z) + \lambda B(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\frac{\partial \varphi_3^1}{\partial z} = \int_0^{\infty} \{\lambda C(\lambda) \cosh(\lambda z) + \lambda D(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3^1}{\partial z^2} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \{C(\lambda) \sinh(\lambda z) + D(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0^1}{\partial z^2} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \{A(\lambda) \cosh(\lambda z) + B(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

Les dérivées par rapport à r ;

$$\frac{\partial \varphi_3^1}{\partial r} = - \int_0^{\infty} \{\lambda C(\lambda) \sinh(\lambda z) + \lambda D(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$\frac{\partial \varphi_0^1}{\partial r} = - \int_0^{\infty} \{\lambda A(\lambda) \cosh(\lambda z) + \lambda B(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda$$

Alors que les dérivées mixtes sont :

$$\frac{\partial^2 \varphi_0^1}{\partial r \partial z} = - \int_0^{\infty} \lambda^2 \{A(\lambda) \sinh(\lambda z) + B(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3^1}{\partial r \partial z} = - \int_0^{\infty} \lambda^2 \{C(\lambda) \cosh(\lambda z) + D(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda$$

Dans les formules précédentes nous avons utilisé la formule de dérivation suivante :

$$\frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} = -\lambda J_1(\lambda r)$$

La solution générale est la somme des deux solutions : auxiliaire et élémentaire.

$$(\sigma_z)_{z=h} = \sigma_z^0 + \sigma_z^1 = -p_0, \quad z = h, \quad r \geq 0$$

$$\text{On a : } (\sigma_z^0)_{z=h} = -p_0$$

ainsi, on obtient la contrainte axiale de la face supérieure comme suit :

$$(\sigma_z^1)_{z=h} = 0, \quad z = h, \quad r \geq 0$$

III.5 Détermination des fonctions inconnues

III.5.1 Détermination de la fonction $B(\lambda)$

On utilise la condition (III. 10a), l'expression de contrainte s'écrit :

$$(\sigma_z)_{z=h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0$$

Après dérivation, on aura :

$$\begin{aligned} (\sigma_z^1)_{z=h} &= \int_0^\infty \lambda^2 \{A(\lambda) \cosh(\lambda z) + B(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &+ z \int_0^\infty \lambda^2 \{C(\lambda) \sinh(\lambda z) + D(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &- 2(1 - \nu) \int_0^\infty \{\lambda C(\lambda) \cosh(\lambda z) + \lambda D(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r \geq 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \{\lambda^2 \{A(\lambda) \cosh(\lambda h) + B(\lambda) \sinh(\lambda h)\} + h\lambda^2 \{C(\lambda) \sinh(\lambda h) + D(\lambda) \cosh(\lambda h)\} \\ &\quad - 2(1 - \nu) \{\lambda C(\lambda) \cosh(\lambda h) + \lambda D(\lambda) \sinh(\lambda h)\}\} J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \\ &\lambda \{A(\lambda) \cosh(\lambda h) + B(\lambda) \sinh(\lambda h)\} + h\lambda \{C(\lambda) \sinh(\lambda h) + D(\lambda) \cosh(\lambda h)\} \\ &\quad - 2(1 - \nu) \{C(\lambda) \cosh(\lambda h) + D(\lambda) \sinh(\lambda h)\} = 0 \end{aligned} \quad (III. a)$$

La condition sur la contrainte tangentielle pour $z=0$, permet l'obtention l'expression de la fonction $B(\lambda)$.

$$(\tau_{zr})_{z=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = 0$$

Cette condition nous donne :

$$\begin{aligned} (\tau_{zr}^1)_{z=0} = & - \int_0^\infty \lambda^2 \{A(\lambda) \sinh(\lambda z) + B(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda \\ & + z \int_0^\infty \lambda^2 \{C(\lambda) \cosh(\lambda z) + D(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda \\ & + (1 - 2\nu) \int_0^\infty \{\lambda C(\lambda) \sinh(\lambda z) + \lambda D(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \end{aligned}$$

L'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \{ \lambda^2 \{A(\lambda) \sinh(\lambda z) + B(\lambda) \cosh(\lambda z)\} + z \lambda^2 \{C(\lambda) \cosh(\lambda z) + D(\lambda) \sinh(\lambda z)\} \\ + (1 - 2\nu) \{ \lambda C(\lambda) \sinh(\lambda z) + \lambda D(\lambda) \cosh(\lambda z) \} \} J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient l'équation (III. b).

$$\begin{aligned} \lambda^2 \{A(\lambda) \sinh(\lambda z) + B(\lambda) \cosh(\lambda z)\} + z \lambda^2 \{C(\lambda) \cosh(\lambda z) + D(\lambda) \sinh(\lambda z)\} \\ + (1 - 2\nu) \{ \lambda C(\lambda) \sinh(\lambda z) + \lambda D(\lambda) \cosh(\lambda z) \} = 0 \end{aligned} \quad (III. b)$$

$$\text{On a: } z = 0 \quad \begin{cases} \cosh(0) = 1 \\ \sinh(0) = 0 \end{cases}$$

Donc, de la condition (III. b) on obtient:

$$-\lambda B(\lambda) + (1 - 2\nu) D(\lambda) = 0$$

D'où l'expression de la fonction B(λ) en fonction de D(λ) est :

$$\lambda B(\lambda) = (1 - 2\nu) D(\lambda) \quad (III. b')$$

III.5.2 Détermination de la fonction C(λ)

La condition (III. 10c), nous permet d'écrire :

$$(\tau_{zr})_{z=h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = 0$$

En substituant les expressions des fonctions de Boussinesq, pour le problème auxiliaire, dans la relation précédente,

$$\begin{aligned}
(\tau_{zr}^1)_{z=h} &= \int_0^{\infty} -\lambda^2 \{A(\lambda) \sinh(\lambda h) + B(\lambda) \cosh(\lambda h)\} J_1(\lambda r) d\lambda \\
&\quad - \lambda^2 h \{C(\lambda) \cosh(\lambda h) + D(\lambda) \sinh(\lambda h)\} J_1(\lambda r) d\lambda \\
&\quad + (1 - 2\nu) \lambda \{C(\lambda) \sinh(\lambda h) + D(\lambda) \cosh(\lambda h)\} J_1(\lambda r) d\lambda = 0
\end{aligned}$$

Cette intégrale devient :

$$\begin{aligned}
(\tau_{zr}^1)_{z=h} &= \int_0^{\infty} \{-\lambda^2 \{A(\lambda) \sinh(\lambda h) + B(\lambda) \cosh(\lambda h)\} \\
&\quad - \lambda^2 h \{C(\lambda) \cosh(\lambda h) + D(\lambda) \sinh(\lambda h)\} \\
&\quad + (1 - \nu) \lambda \{C(\lambda) \sinh(\lambda h) + D(\lambda) \cosh(\lambda h)\}\} J_1(\lambda r) d\lambda = 0
\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient:

$$\begin{aligned}
-\lambda \{A(\lambda) \sinh(\lambda h) + B(\lambda) \cosh(\lambda h)\} - \lambda h \{C(\lambda) \cosh(\lambda h) + D(\lambda) \sinh(\lambda h)\} \\
+ (1 - 2\nu) \{C(\lambda) \sinh(\lambda h) + D(\lambda) \cosh(\lambda h)\} = 0 \quad (III. c)
\end{aligned}$$

Le développement de l'équation (III. c) nous donne :

$$\begin{cases}
\lambda A(\lambda) \cosh(\lambda h) + [\lambda h \sinh(\lambda h) - 2(1 - \nu) \cosh(\lambda h)] C(\lambda) \\
= [\sinh(\lambda h) - \lambda h \cosh(\lambda h)] D(\lambda) & (III. a') \\
\lambda A(\lambda) \sinh(\lambda h) + [\lambda h \cosh(\lambda h) - (1 - 2\nu) \sinh(\lambda h)] C(\lambda) \\
= -\lambda h \sinh(\lambda h) D(\lambda) & (III. c')
\end{cases}$$

En multipliant l'équation (III. a') par $\sinh(\lambda h)$ et l'équation (III. c') par $\cosh(\lambda h)$,

puis en effectuant la soustraction:

$$(III. a') * \sinh(\lambda h) - (III. c') * \cosh(\lambda h)$$

on aura les relations suivantes

$$\begin{aligned}
&\lambda A(\lambda) \cosh(\lambda h) \\
&\quad + [\lambda h \sinh^2(\lambda h) - 2(1 - \nu) \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h) - \lambda h \cosh^2(\lambda h) \\
&\quad + (1 - 2\nu) \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)] C(\lambda) \\
&= [\sinh^2(\lambda h) - \lambda h \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h) + \lambda h \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h) +] D(\lambda)
\end{aligned}$$

$$[-\lambda h - \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)] C(\lambda) = \sinh^2(\lambda h) D(\lambda)$$

D'où l'expression de $C(\lambda)$ est:

$$C(\lambda) = -\frac{\sinh^2(\lambda h)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} D(\lambda) \quad (III. d)$$

III.5.3 Détermination de la fonction $A(\lambda)$

En remplaçant l'équation (III. d) dans (III. c'), on obtient:

$$\begin{aligned} \lambda A(\lambda) \sinh(\lambda h) - \frac{\sinh^2(\lambda h)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} [\lambda h \cosh(\lambda h) - (1 - 2\nu) \sinh(\lambda h)] D(\lambda) \\ = -\lambda h \sinh(\lambda h) D(\lambda) \end{aligned}$$

ainsi, la fonction $A(\lambda)$ est donnée par.

$$\lambda A(\lambda) = -\frac{\lambda^2 h^2 + (1 - 2\nu) \sinh^2(\lambda h)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} D(\lambda) \quad (III. d')$$

D'après la condition, il vient:

$$2Gw_z^1 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3 - 4\nu) \varphi_3$$

Lorsque $z=0$, on trouve :

$$\begin{aligned} 2G(w_z^1)_{z=0} &= \int_0^\infty \{ \lambda A(\lambda) \sinh(\lambda z) + \lambda B(\lambda) \cosh(\lambda z) \} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &+ z \int_0^\infty \{ \lambda C(\lambda) \cosh(\lambda z) + \lambda D(\lambda) \sinh(\lambda z) \} J_0(\lambda r) d\lambda - \\ &(3 - 4\nu) \int_0^\infty \{ C(\lambda) \sinh(\lambda z) + D(\lambda) \cosh(\lambda z) \} J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

En remplaçant les équations (III. b), (III. d) et (III. d') dans l'expression précédente, il vient :

$$2G(w_z^1)_{z=0} = \int_0^\infty (1 - 2\nu) D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda - (3 - 4\nu) \int_0^\infty D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0$$

Après simplification, on aura :

$$2G(w_z^1)_{z=0} = 2(\nu - 1) \int_0^\infty D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0$$

En utilisant le résultat obtenu dans la solution élémentaire, la contrainte normale pour la partie auxiliaire est :

$$(\sigma_z^1)_{z=0} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r^2} - 2(1-\nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}$$

La forme intégrale de cette contrainte est :

$$\begin{aligned} (\sigma_z^1)_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda^2 \{A(\lambda) \cosh(\lambda z) + B(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &+ z \int_0^\infty \lambda^2 \{C(\lambda) \sinh(\lambda z) + D(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &- 2(1-\nu) \int_0^\infty \{\lambda C(\lambda) \cosh(\lambda z) + \lambda D(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \end{aligned}$$

Par suite, cette forme devient :

$$(\sigma_z^1)_{z=0} = \int_0^\infty \{\lambda^2 A(\lambda) - 2(1-\nu)\lambda C(\lambda)\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

En injectant les équations (III. d) et (III. d') dans l'expression précédente,

$$\begin{aligned} (\sigma_z^1)_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda \left\{ -\frac{\lambda^2 h^2 + (1-2\nu)\sinh^2(\lambda h)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) \frac{\sinh^2(\lambda h)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \right\} D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

L'expression de cette contrainte est :

$$(\sigma_z^1)_{z=0} = \int_0^\infty \lambda \left\{ \frac{\sinh^2(\lambda h) - \lambda^2 h^2}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \right\} D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0$$

Donc la solution générale est:

➤ Pour la contrainte normale :

$$\sigma_z = \sigma_z^0 + \sigma_z^1$$

Relever les formules de σ_z^1 et σ_z^0 , cette contrainte a comme expression :

$$(\sigma_z)_{z=0} = -p_0 + \int_0^\infty \lambda \left\{ \frac{\sinh^2(\lambda h) - \lambda^2 h^2}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \right\} D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad (0 \leq r < R)$$

➤ Pour le déplacement normal :

$$w_z = w_z^0 + w_z^1$$

Ce qui donne le déplacement normal suivant :

$$2G(w_z)_{z=0} = 2(\nu - 1) \int_0^\infty D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad (R \leq r < \infty)$$

Finalement, les équations intégrales duales du système s'écrivent:

$$(\sigma_z)_{z=0} = -p_0 + \int_0^\infty \lambda D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad (0 \leq r < R) \quad (III.13)$$

$$(w_z)_{z=0} = \int_0^\infty \gamma D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad (R \leq r < \infty) \quad (III.14)$$

Sachant que :

$$p(\lambda) = \frac{\sinh^2(\lambda h) - \lambda^2 h^2}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)}$$

$$\gamma = \frac{\nu - 1}{G}$$

III.6 Résolution de l'équation intégrale duale par la méthode de Kobayashi-Tranter modifiée

On résout notre problème en suivant les étapes de résolution d'une équation intégrale duale donnée dans le chapitre I, pour ce problème similaire au cas de fissuration, on pose: $\alpha = -1, \eta = 0$.

$$\int_0^\infty \lambda p(\lambda) D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = p_0 \quad (r < R)$$

$$\int_0^\infty \gamma D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > R)$$

Pour l'application de la méthode de Kobayashi-Tranter, on fait le changement de variable.

$$t = \frac{r}{R} \Rightarrow r = Rt$$

On aura comme équations duales :

$$\int_0^\infty \lambda p(\lambda) D(\lambda) J_0(\lambda Rt) d\lambda = p_0 \quad (0 \leq r/R < 1)$$

$$\int_0^{\infty} D(\lambda) J_0(\lambda R t) d\lambda = 0 \quad (r/R > 1)$$

Par suite, les différentes étapes de résolution de notre problème sont les suivantes:

a) Décomposition de $p(\lambda)$

Utilisons la décomposition :

$$p(\lambda) = \alpha(\lambda) + \beta$$

où

$$\alpha(\lambda) = \frac{\sinh^2(\lambda h) - \lambda^2 h^2}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \text{ et } \beta = 1$$

Ce qui vérifie:

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} p(\lambda) = 1 \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha(\lambda) = 0 \end{cases}$$

b) Calcul des éléments de la matrice L_{mn}

Les éléments de la matrice L_{mn} sont donnés sous la forme intégrale suivante:

$$L_{mn} = \int_0^{\infty} \lambda^{-1} (p(\lambda) - 1) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) d\lambda$$

Posons :

$$f(\lambda) = \lambda^{-1} (p(\lambda) - 1) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda)$$

d'où

$$L_{mn} = \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda$$

Pour le calcul de cette intégrale, on vérifié la convergence de la fonction $f(\lambda)$.

$$f(\lambda) = \lambda^{-1} \left(\frac{\sinh^2(\lambda h) - \lambda^2 h^2}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} - 1 \right) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda)$$

Remplaçant les expressions suivantes dans la fonction précédente.

$$\begin{cases} \cosh(\lambda h) = \frac{e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}}{2} \\ \sinh(\lambda h) = \frac{e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}}{2} \end{cases}$$

donc la fonction $f(\lambda)$ devient :

$$f(\lambda) = \lambda^{-1} \left(\frac{\frac{1}{4}(e^{2\lambda h} + e^{-2\lambda h} - 2) - \lambda^2 h^2 - \lambda h - \frac{1}{4}(e^{2\lambda h} - e^{-2\lambda h})}{\lambda h - \frac{1}{4}(e^{2\lambda h} - e^{-2\lambda h})} \right)$$

Après simplification, la limite de cette fonction est:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = \frac{\frac{1}{2}e^{-2\lambda h}}{-\frac{1}{4}e^{2\lambda h}}$$

d'où la fonction $f(\lambda)$ est rapidement convergente.

On calcule l'intégral de la fonction $f(\lambda)$ par la formule de Simpson suivante :

$$L_{mn} = \frac{\lambda_0}{6p} \sum_{k=0}^{p-1} \left[f\left(\frac{k\lambda_0}{p}\right) + 4f\left((2k+1)\frac{\lambda_0}{2p}\right) + f\left((k+1)\frac{\lambda_0}{2p}\right) \right]$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots, p$

cette formule a comme valeur approximative:

$$L_{mn} \approx \frac{1}{6p} \lambda_0 \left(4f\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda_0}{p}\right) + f\left(\frac{\lambda_0}{p}\right) + \sum_{k=1}^{p-1} \left(f\left(\frac{k\lambda_0}{p}\right) + 4f\left(\frac{1}{2}\frac{(2k+1)\lambda_0}{p}\right) + f\left(\frac{(k+1)\lambda_0}{p}\right) \right) \right)$$

Les résultats obtenus sous forme d'une matrice sont dans l'annexe d pour $\lambda_0 = 1500$.

c) Calcul de la constante R_m

Cette constante a comme forme :

$$R_m = \frac{m!}{\sqrt{2} \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)} \int_0^1 r F\left(\sqrt{1-r^2}\right) P_{2m+1}(r) dr$$

où $P_{2m+1}(r)$ est le polynôme de Legendre qui s'écrit :

$$P_{2m+1}(r) = \frac{(-1)^{(2m+1)}}{2^{2m+1}(2m+1)!} \frac{d^{(2m+1)}}{dr^{(2m+1)}} [(1-r)^{2(2m+1)}] \quad (-1 \leq r \leq 1)$$

et $\Gamma(m+k)$ est la fonction gamma, qui a généralement comme expression:

$$\Gamma(m+k) = \int_0^{\infty} t^{m+k-1} e^{-t} dt$$

D'après les conditions aux limites, on trouve:

$$F(\sqrt{1-r^2}) = p_0$$

d) Détermination des coefficients $A_m^{(k)}$

On cherche la solution du système algébrique infini sous la forme de Gauss-Seidel comme suit :

$$A_m^{(k)} = \frac{1}{L_{mm} + \frac{\beta}{2\left(\eta + 2m + 1 - \frac{\alpha}{2}\right)}} \left[R_m - \sum_{\substack{n=0 \\ m \neq n}}^{\infty} L_{mn} A_n^{(k-1)} \right]$$

On remplace β , η et α , par leurs valeurs données précédemment, on trouve :

$$A_m^{(k)} = \frac{1}{L_{mm} + \frac{1}{4m+3}} \left[R_m - \sum_{\substack{n=0 \\ m \neq n}}^{\infty} L_{mn} A_n^{(k-1)} \right] \quad (III.15)$$

On illustre quelques résultats obtenus dans l'annexe E.

Pour le calcul de la première itération on a :

$$A_m^{(0)} = \frac{R_m}{L_{mm} + \frac{\beta}{2\left(\eta + 2m + 1 - \frac{\alpha}{2}\right)}}$$

Cette relation devient:

$$A_m^{(0)} = \frac{R_m}{L_{mm} + \frac{1}{4m+3}}$$

Les coefficients $A_m^{(k)}$ sont obtenus en fonctions de chargement p_0 .

Remarque: Pour le calcul de la solution de l'équation (1.b.1) et (1.b.2), dans le cas de fissuration, on fait le changement suivant:

$$B(u) = u^{-1} D(u)$$

La résolution des équations itératives (III.15), permet d'obtenir le tableau III.1 des coefficients A_m pour différentes valeurs de h/R .

A_m			
m	$h/R=0.7$	$h/R=1$	$h/R=1.5$
0	0.0436249997	0.0595718332	0.0747173080
1	0.0001532890	0.0001066210	0.0000380792
2	0.0000068735	0.0000043414	0.0000010073
3	-0.0000012003	0.0000001062	0.0000000221
4	-0.0000000351	-0.0000000003	0.0000000003
5	-0.0000000017	-0.0000000001	0.0000000000
6	-0.0000000000	-0.0000000000	-0.0000000000

Tableau III. 1 : Variation des coefficients A_m avec h/R

Le tableau 1 montre la variation des coefficients en fonction de h/R , à un certain seuil d’itération la convergence devient légèrement rapide et proportionnelle la valeur de h/a . Il a été examiné que sept itérations des coefficients sont suffisantes pour le calcul des champs de contrainte du problème proposé.

e) Détermination de la fonction $D(\lambda)$

La solution du système des équations duales (III. 13) et (III. 14) est :

$$D(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) \tag{III. 16}$$

Remarque :

On vérifie la condition de régularité du système algébrique infini par la condition suivante :

$$C = \frac{1}{\left| L_{mm} - \frac{m_1 + 1}{4m + 3} \right|} \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |L_{mn}| \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

avec $m_1 = 1 - 2\eta = 1$,

Ainsi cette condition est satisfaite: $1 - C > 0$

Les résultats obtenus en évaluant cette condition pour différentes valeurs de h/R sont donnés dans le tableau suivant :

1-C		
h/R=0.7	h/R=1	h/R=1.5
0.9937091471	0.9970536768	0.9991992497
0.9978031530	0.9990385403	0.9997411497
0.9982012893	0.9995130469	0.9999320661
0.9995529718	0.9999388552	0.9999954267
0.9999038841	0.9999944772	0.9999997917
0.9999865562	0.9999994157	0.9999999923
0.9999979320	0.9999999552	0.9999999997

Tableau III. 2 : Valeurs de condition de régularité

D'après les résultats du tableau 2, on conclut que la condition de régularité du système est satisfaite.

III.7 Expressions finales des fonctions inconnues

En portant respectivement l'équation (III. 16) dans les équations (III. d), (III. b') et (III. d') nous obtiendrons les expressions des fonctions suivantes :

$$C(\lambda) = -\frac{\lambda^{-(1/2)} \sinh^2(\lambda h)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda)$$

$$B(\lambda) = \lambda^{-(3/2)} (1 - 2\nu) \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda)$$

$$A(\lambda) = \lambda^{-(3/2)} \left(\frac{-\lambda^2 h^2 - (1 - 2\nu) \sinh^2(\lambda h)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \right) \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda)$$

III.8 Détermination de déplacement normal

L'expression du déplacement normal dans notre problème est donnée par l'équation (III. 11).

Remarquons que :

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_0^0 + \varphi_0^1)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_3^0 + \varphi_3^1)$$

$$\varphi_3 = \varphi_3^0 + \varphi_3^1$$

Ainsi on trouve :

$$2G(w_z) = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_0^0 + \varphi_0^1) + z \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_3^0 + \varphi_3^1) - (3 - 4\nu)(\varphi_3^0 + \varphi_3^1)$$

En portant les expressions de φ_0 et φ_3 dans l'équation (III. 10), on obtient :

$$\begin{aligned} 2G(w_z) &= \frac{-zp_0}{1 + \nu} \\ &+ \int_0^\infty \left\{ \lambda^{-(1/2)} \left(\frac{-\lambda^2 h^2 - (1 - 2\nu) \sinh^2(\lambda h)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \right) \sinh(\lambda z) \right. \\ &+ \lambda^{-(3/2)} (1 - 2\nu) \sinh(\lambda z) - (3 - 4\nu) \left(-\frac{\lambda^{-(1/2)} \sinh^2(\lambda h) \cosh(\lambda z)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \right) \\ &\left. + \lambda^{-(1/2)} \cosh(\lambda z) \right\} \sum_{m=0}^\infty A_m J_{2m+(3/2)}(\lambda) J_0(\lambda R t) d\lambda, \quad (0 \leq r/R < 1) \end{aligned}$$

Par suite, dans le plan $z=0$, on trouve :

$$2G(w_z)_{z=0} = 2(\nu - 1) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{m=0}^\infty A_m J_{2m+(3/2)}(\lambda) J_0(\lambda R t) d\lambda, \quad (0 \leq r/R < 1)$$

La formule simplifiée du déplacement normal pour $z=0$ est :

$$(w_z)_{z=0} = \frac{\nu - 1}{G p_0} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{m=0}^\infty A_m J_{2m+(3/2)}(\lambda) J_0(\lambda R t) d\lambda, \quad (0 \leq r/R < 1) \quad (\text{III. 17})$$

L'expression du cas normal adimensionnel correspondant est:

$$(\bar{w}_z)_{z=0} = \frac{Gp_0 (w_z)_{z=0}}{\nu - 1} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{m=0}^\infty A_m J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) J_0(\lambda R t) d\lambda, \quad (0 \leq r/R < 1) \quad (III.18)$$

Ce qui permet de tracer les graphes des déplacements en fonction de r/R pour différentes valeurs de h/R.

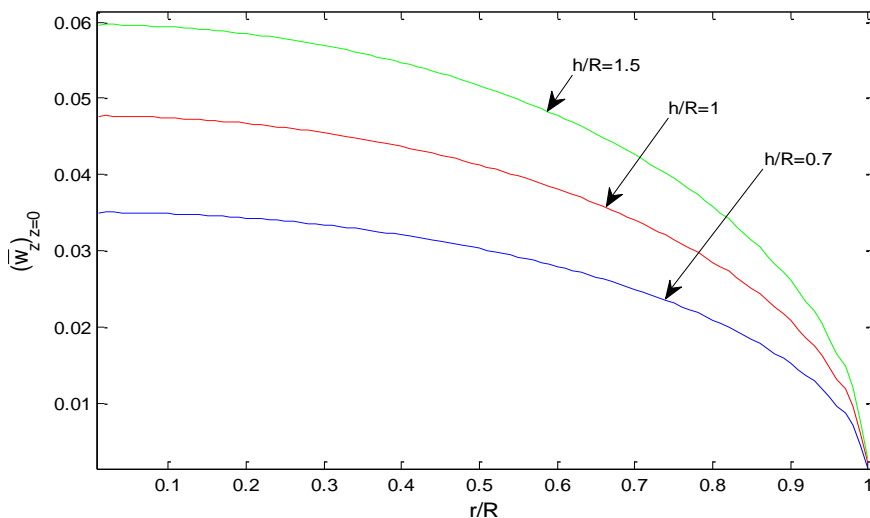


Figure III. 2: Distribution radiale du déplacement normale adimensionnel

La figure III.2 montre la distribution radiale du déplacement de contact normal et adimensionnel $(\bar{w}_z)_{z=0}$ sur de la couche élastique à $z=0$ en fonction de r/R pour les trois cas de variations du rapport d'épaisseur de cette couche et le rayon de la fissure h/R .

La décroissance du déplacement radial est proportionnelle avec le rapport h/R .

III.9 Détermination de contrainte normale

Il est aisé de remarquer que :

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi_0^0 + \varphi_0^1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi_3^0 + \varphi_3^1)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_3^0 + \varphi_3^1)$$

La contrainte normale s'obtient donc par :

$$\sigma_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi_0^0 + \varphi_0^1) + z \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi_3^0 + \varphi_3^1) - 2(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_3^0 + \varphi_3^1)$$

Ce qui donne la formule intégrale de la contrainte normale sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_z = -p_0 + \int_0^\infty \left\{ \lambda^{(1/2)} \frac{-\lambda^2 h^2 - (1 - 2\nu) \sinh^2(\lambda h)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \cosh(\lambda z) + \lambda^{(1/2)} (1 - 2\nu) \sinh(\lambda z) \right. \\ \left. + z \left(\frac{\lambda^{(3/2)} \sinh^2(\lambda h) \sinh(\lambda z)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \right) + z \lambda^{(3/2)} \cosh(\lambda z) \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) \left(\frac{\lambda^{(1/2)} \sinh^2(\lambda h) \cosh(\lambda z)}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \right) \right. \\ \left. - 2(1 - \nu) \lambda^{(1/2)} \sinh(\lambda z) \right\} \sum_{m=0}^\infty A_m J_{2m+(3/2)}(\lambda) J_0(\lambda R t) d\lambda \end{aligned}$$

La contrainte normale à $z=0$ est :

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_{z=0} = -p_0 + \int_0^\infty \sqrt{\lambda} \frac{\sinh^2(\lambda h) - \lambda^2 h^2}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \sum_{m=0}^\infty A_m J_{2m+(3/2)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda, \\ (1 \leq r/R < \infty) \quad (III. 19) \end{aligned}$$

Le cas adimensionnel s'écrit :

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_z)_{z=0} = \frac{(\sigma_z)_{z=0}}{-p_0} = 1 - \frac{1}{p_0} \int_0^\infty \sqrt{\lambda} \frac{\sinh^2(\lambda h) - \lambda^2 h^2}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)} \sum_{m=0}^\infty A_m J_{2m+(3/2)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\ (1 \leq r/R < \infty) \quad (III. 20) \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on donne quelques graphes de la contrainte normale dans le cas adimensionnel pour différentes valeurs du rapport h/R .

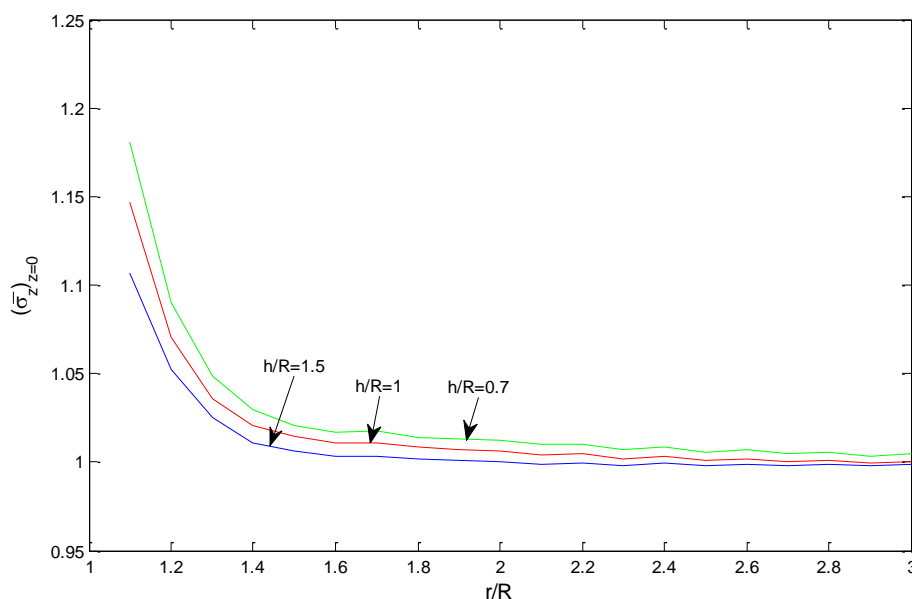


Figure III. 3: Distribution radiale de la contrainte normale adimensionnelle

La figure III.3 montre la distribution radiale de la contrainte normale adimensionnelle $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ en fonction de la variation de r/R à $z=0$ pour différents cas d'épaisseurs de la couche élastique. Cette contrainte diminue avec la croissance de l'épaisseur de la plaque élastique.

III.10 Détermination du facteur d'intensité de contrainte

La déformation de la plaque élastique correspond au mode I. Le coefficient d'intensité de contrainte s'écrit:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow R_+} \sqrt{2\pi(r-R)} (\sigma_z)_{z=0} \quad (III.21)$$

Remplaçons l'équation (III.19) dans l'équation (III.21), on obtient :

$$K_I = \sqrt{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \lim_{r \rightarrow R_+} \sqrt{r-R} \left(-p_0 + \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} p(\lambda) J_{2m+3/2}(\lambda) J_0(\lambda R t) d\lambda \right) \quad (III.22)$$

Posant :

$$L = \lim_{r \rightarrow R_+} \sqrt{2\pi(r-R)} f(\lambda)$$

avec

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} p(\lambda) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) J_0(\lambda R t) d\lambda$$

ce qui donne :

$$L = \lim_{r \rightarrow R_+} \sqrt{2\pi(r-R)} \left\{ \int_0^\infty (f(\lambda) - g(\lambda)) d\lambda + \int_0^\infty g(\lambda) d\lambda \right\}$$

$$= \lim_{r \rightarrow R_+} \sqrt{2\pi(r-R)} \int_0^\infty (f(\lambda) - g(\lambda)) d\lambda + \lim_{r \rightarrow R_+} \sqrt{2\pi(r-R)} \int_0^\infty g(\lambda) d\lambda$$

En l'utilisant l'expression asymptotique de la fonction de Bessel :

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

On obtient les équivalents suivants :

$$J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} (-1)^{m+1} \cos(\lambda)$$

$$J_0(\lambda r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right)$$

Remplaçant ces approches dans l'expression précédente, la fonction $g(\lambda)$ aura comme forme :

$$g(\lambda) = \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} (-1)^{m+1} \cos(\lambda) \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (-1)^{(m+1)} \cos(\lambda) \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right)$$

ainsi on trouve l'expression suivante :

$$L = \lim_{r \rightarrow R_+} \sqrt{2\pi(r-R)} \int_0^\infty \left\{ \sqrt{\lambda} p(\lambda) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) J_0(\lambda r) \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (-1)^{(m+1)} \cos(\lambda) \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) \right\} d\lambda$$

$$+ \lim_{r \rightarrow R_+} \sqrt{2\pi(r-R)} \int_0^\infty \frac{2}{\pi\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (-1)^{(m+1)} \cos(\lambda) \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda$$

Après simplification, l'équation (III. 22) devient:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \lim_{r \rightarrow R^+} \sqrt{r-R} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos(\lambda) \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda \quad (III.23)$$

En évaluant l'équation (III.23) et en utilisant les intégrales de Fresnel [36], on aura :

$$K_I = \sqrt{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (-1)^{(m+1)} \lim_{r \rightarrow R^+} \sqrt{\frac{(r-R)\sqrt{r-1} + \sqrt{r+1}}{r} \frac{\sqrt{r+1}\sqrt{r-1}}{\sqrt{r+1}\sqrt{r-1}}} \quad (III.24)$$

Alors, l'équation du coefficient de contrainte s'écrit :

$$K_I = \sqrt{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (-1)^{(m+1)} \frac{\sqrt{R-1} + \sqrt{R+1}}{\sqrt{R+1}}$$

Le coefficient d'intensité de contrainte adimensionnel s'obtient par :

$$\bar{K}_I = \frac{K_I}{P_0 \sqrt{R}} \quad (III.25)$$

Les résultats obtenus du coefficient d'intensité de contrainte, après l'évaluation de l'équation (III.25), sont prescrits dans le tableau suivant:

h/R	\bar{K}_I
0.7	-0.061488126017508
0.9	-0.077434402038218
1	-0.084102498691666
1.3	-0.099029701853514
1.5	-0.105613771950959
2	-0.115105965508478
2.5	-0.119526866776466
3	-0.121778226058733
3.5	-0.123022669313185
4	-0.123759249299483

Table III.3 : Valeur de coefficient d'intensité de contrainte adimensionnel

A l'aide du tableau 3, on trace le graphe du coefficient d'intensité de contrainte adimensionnel en fonction de h/R.

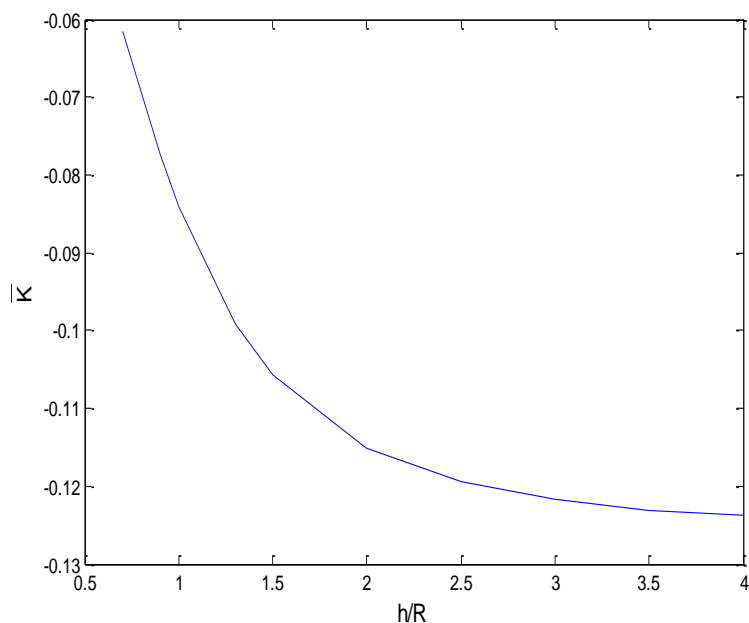


Figure III. 4: Variation de coefficient d'intensité de contrainte adimensionnel en fonction de h/R.

La figure III.4 montre la variation de coefficient d'intensité de contrainte adimensionnel \bar{K}_1 en fonction de h/R ce coefficient diminue avec l'augmentation du rapport h/R.

III.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en œuvre la méthode modifiée de Kobayashi-Tranter pour la résolution des équations intégrales duales du problème d'une plaque élastique reposant sur un appui rigide ayant un trou circulaire.

Cette approche diffère des travaux antérieurs ramenant l'étude du problème à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

Cette méthode est un outil mathématique important qui nous a permis de transformer directement ces équations intégrales duales en un système d'équations algébriques.

En déterminant les coefficients du système algébrique par la méthode de troncation, puis on a calculé numériquement les grandeurs d'intérêt physique à savoir les déplacements, les contraintes et le facteur d'intensité de contrainte.

Un ensemble de conclusions sur l'effet de l'épaisseur de la plaque élastique sur les différentes grandeurs a été données.

Conclusion générale

La présente étude donne une solution analytique du problème axisymétrique d'une plaque élastique reposant sur un appui rigide ayant un trou circulaire. Elle est soumise à un chargement uniforme le long de sa surface supérieure $z = h$. Ce problème aux conditions limites mixtes est étudié dans le cas de la théorie de l'élasticité linéaire tridimensionnelle.

La convergence de la solution du système algébrique infini a été réalisée à la septième itération par la méthode de Jacobi. Les intégrales correspondantes sont rapidement convergentes. Les résultats numériques obtenus sont récapitulés comme suit :

Le déplacement normal adimensionnel $(\bar{W}_z)_{z=0}$ dans le trou à $z=0$ varie proportionnellement avec le rapport h/R , la pente du déplacement normal approche zéro comme $r/R \rightarrow 1$.

La contrainte normal adimensionnelle $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$, est indépendant des constantes élastiques de la couche élastique, et l'importance de l'effort de contact diminue avec la croissance de l'épaisseur de la plaque élastique.

Le coefficient d'intensité de contrainte adimensionnel \bar{K}_I diminue avec l'augmentation du rapport h/R .

Perspectives

Nous envisageons de développer la méthode appliquée dans le mémoire à des problèmes de milieu élastique non homogène et transversalement isotrope, ainsi que les problèmes doublements mixtes.

A titre d'indication nous allons résoudre par la méthode de Kobayashi-Tranter le problème de déformation d'une plaque épaisse soumise à l'action d'un poinçon rigide et reposant sur un appui ayant un orifice circulaire.

Ce problème doublement mixte se ramène par la méthode de la transformation intégrale de Hankel et à l'aide de fonction de contrainte de Boussinesq à un système d'équations intégrales duales.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

=====

- [1] M. Lowengrub « *Stress in the vicinity of a crack in a thick elastic plate* » Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 19, pp. 119-126, 1961.
- [2] Makoto Sakamoto « *An elastic layer with a penny-shaped crack subjected to internal pressure* », JSME International Series A, Vol. 46, No 1, pp. 10-14, 2003.
- [3] Makoto Sakamoto et Koichi Kobayashi « *The axisymmetric contact of an elastic layer subjected to a tensile stress applied over a circular region* » Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 27-36, 2004.
- [4] Makoto Sakamoto et Koichi Kobayashi « *The axisymmetric contact problem of an elastic layer indented by infinite rigid punch with a circular hole* » Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 61-77, 2006.
- [5] Makoto Sakamoto et Koichi Kobayashi « *Axisymmetric indentation of an elastic layer on a rigid foundation with circular hole* » WIT Transactions on Engineering Sciences, Vol. 49, 2005.
- [6] L. S. Fu et T. P. Tsai « *A numerical scheme for mixed boundary value problems in elasticity* » Computers and Structures, Vol. 8, No 1, pp. 41-49, 1976.
- [7] Y. Shindo, K. Tanaka, et F. Narita « *Singular stress and electric fields ceramic strip with a finite crack under longitudinal shear* » Acta Mechanica, Vol. 120, pp. 31-45, 1997
- [8] Leon M. Keer « *Mixed boundary value problems for a penny-shaped cut* » Journal of Elasticity, Vol. 5, No. 2, Noordhoff International Publishing, 1974.
- [9] A. P. S. Selvadurai « *Boussinesq indentation of an isotropic elastic halfspace reinforced with an inextensible membrane* » International Journal of Engineering Science, 2008.
- [10] I. N. Sneddon « *The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid* », Proc. Roy Soc. A. pp. 187- 229, 1946.

- [11] Makoto Sakamoto, Guoan Li, Toshiaki Hara et Edmund Y. S. Chao « *A new method for theoretical analysis of static indentation test* » J. Biomechanics, Vol. 29, No. 5, DO. 619-685, 1996.
- [12] M. Lal « *Thermal stresses due to prescribed flux of heat within a flat annular region in elastic* » Proc. Sci. Acad, Vol. 51, No. 2, pp. 382-390, 1985.
- [13] S. Falco, G. Panariello, F. Schettino et L. Verolino « *Accurate evaluation of the electric polarizability of a small hole in a thick conducting wall* » Electrical Engineering, Vol 85, 2002.
- [14] Mujibur Rahman « *A note on the polynomial solution of a class of dual integral equation arising in mixed boundary value problems of elasticity* » Zangew Math Phys, Vol 46, 1993.
- [15] Robert Martin Fee « *Stress in the vicinity of a crack in a thick elastic plate* » Simon Raser University, 1974.
- [16] Pierre Chauchot et Jaques Labeyrie « *Rupture fragile des pièces minces et méthodes des équations inégales* » 1982.
- [17] Bell W. W « *Special functions for scientists and engineers* » Van Nostrand, 1968.
- [18] M. L. Boas « *Mathematical methods in the physical sciences* » Second edition, 1966.
- [19] Jacques Rappaz et Marco Picasso « *Introduction à l'analyse numérique* » Edition Preses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1983.
- [20] N. N. Lebedev et Ya. S. Ufliand, « *Axisymmetric contact problem for an elastic layer* » Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 22, No. 3, pp. 442-450. 1958.
- [21] V. Rektch « *Problèmes de la théorie d'élasticité* » Edition Mir, Moscou.
- [22] V. Parton et P. Perline « *Méthodes de la théorie mathématique de l'élasticité* » Tome 1, Edition Mir, Moscou, 1981.
- [23] René Labbens « *Introduction à la mécanique de la rupture* » Edition Pluralis, 1980.
- [24] Bernard Barthélémy « *Notions pratique de mécanique de la rupture* » Edition Eyrolles, 1980.
- [25] Jean-Claude Charmet « *Mécanique de solide et des matériaux* » ESPCI, 2004.
- [26] Frank Bowman « *Introduction to Bessel function* » Dover Publications Inc, 1958.

- [27] A. Ghoul « *Mécanique de la rupture* » 2005.
- [28] I. N. Sneddon « *Fourier transforms* » McGraw-Hill Book Company, 1951.
- [29] George W. Collins « *fundamental numerical methods and data analysis* » 2003.
- [30] Pascal Viot « *Méthodes d'analyse numérique* » 2003.
- [30] Martin H. Sadd « *Elasticity, theory, applications and numerics* » 2005.
- [31] J. H. Heinbockel « *Introduction to tensor calculus and continuum mechanics* » 1996.
- [32] Ya. M. Grigrenko et N. N. Kryukov « *Investigation of the asymmetric stressed-strained state of transversely isotropic cylinders under different boundary conditions at the ends* » international applied mechanics, Vol. 34, No. 7, 1998.
- [33] S. Timoshenko et J. N. Goodier « *Theory of elasticity* » 1951.
- [34] Charles Kittel « *Physique de l'état solide* » Dunod University, 2006.
- [35] Patrice Droz « *Modèle numérique du comportement non linéaire d'ouvrage massifs en béton non armé* », 1987.
- [36] Gradshteyn I. S. et Ryzhik I.M « *Tables of integrals, series, and products* », seventh edition, Academic Press, 2007.
- [37] Yves Debard « *Elasticité* » Institut Universitaire de Technologie du Mans, 2006.
- [38] Gérard Bernhart « *Théorie de l'élasticité* » Ecole des Mines D'Albi, Carmaux, 2009.

ANNEXES

=====

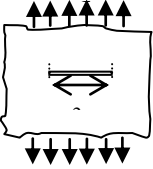
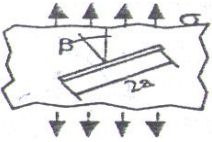
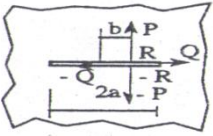
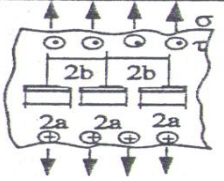
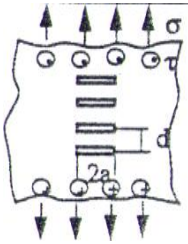
Annexes**Annexe A**

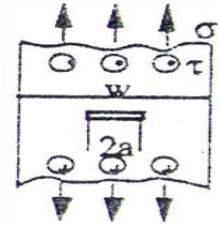
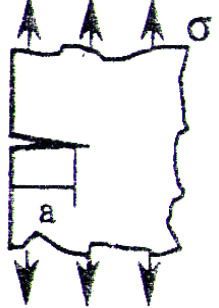
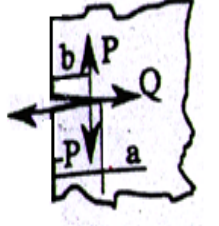
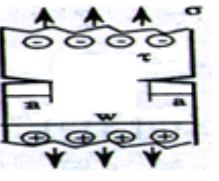
Quelques valeurs de module de Young et coefficient de Poisson pour quelques métaux et matériaux.

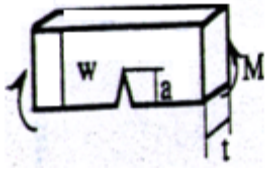
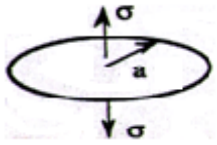
Métal	E (Gpa)	ν
Tungstène	406.00	0.30
Nickel	214.00	0.31
Fer	196.00	0.30
Cuivre	124.00	0.34
Titane	116.00	0.30
Silicium	107.00	0.22
Zinc	105.00	0.35
Aluminium	69.00	0.35

Matériau	E (GPa)	ν
Silice fondue	94.00	0.16
Béton	47.00	0.30
Nylon	3.00	0.25
Plexiglas	3.40	0.38
Polycarbonate	2.60	0.36
polyéthylène	0.77	0.46
caoutchouc	0.03	0.49

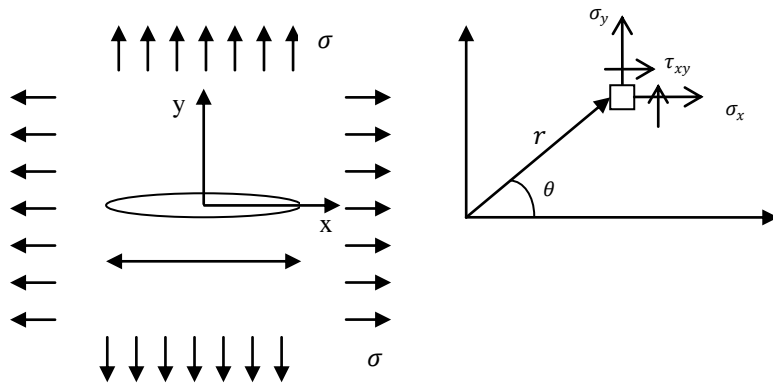
Annexe B

Schéma	Description	Valeur de K
	<p>Fissure de longueur 2a dans une plaque infinie soumise à une contrainte uniaxiale homogène</p>	$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$
	<p>Fissure inclinée de longueur 2a dans une plaque infinie soumise à une contrainte homogène σ</p>	$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cos^2 \beta$ $K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a} \cos \beta \sin \beta$
	<p>Fissure de longueur 2a dans une plaque infinie soumise à des charges concentrées à une distance b de l'axe.</p>	$K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}}$ $K_{II} = \frac{Q}{\sqrt{\pi a}} \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}}$ $K_{III} = \frac{R}{\sqrt{\pi a}} \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}}$
	<p>Fissure de longueur 2a distantes de 2b dans une plaque infinie, soumise à une contrainte homogène.</p>	$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left(\frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b} \right)^{\frac{1}{2}}$ $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a} \left(\frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b} \right)^{\frac{1}{2}}$
	<p>Fissure parallèles de longueurs 2a dans une plaque infinie soumise à une contrainte homogène σ</p>	$\frac{a}{d} < 0.5$ $K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi a}{d} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{\pi a}{d} \right)^4 \right]$ $K_{III} = \tau\sqrt{\pi a} \left(\frac{d}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{d} \right)^{\frac{1}{2}}$

	<p>Bande de largeur w contenant une fissure centrale de longueur 2a soumise à une contrainte homogène.</p>	$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left(\cos\frac{\pi a}{w}\right)^{\frac{1}{2}}$ $K_{III} = \tau\sqrt{\pi a} \left(\frac{d}{\pi a} \operatorname{tg}\frac{\pi a}{w}\right)^{\frac{1}{2}}$
	<p>Fissure latérale de profondeur a dans une plaque semi-infinie soumise à une contrainte homogène.</p>	$K_I = 1.22\sqrt{\pi a}$ $\approx 2\sigma\sqrt{a}$
	<p>Fissure dans une plaque semi-infinie soumise à des charges concentrées P et Q.</p>	$\frac{K_I}{P} = \frac{K_{III}}{Q} = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[0.2945 - 0.3912 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 0.7685 \left(\frac{b}{a}\right)^4 - 0.9942 \left(\frac{b}{a}\right)^6 + 0.5094 \left(\frac{b}{a}\right)^8 \right]$
	<p>Plaque de largeur w comportant deux fissures latérales de longueur a soumise à contrainte homogène.</p>	$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left[1 + 0.122\cos^2\left(\frac{\pi a}{w}\right) \right] \left(\frac{w}{\pi a} \operatorname{tg}\frac{\pi a}{w}\right)^2$

	<p>Poutre comportant une fissure de longueur a sous moment constant M</p>	$K_I = \frac{6M}{Bw^2} \sqrt{\pi a} \left[1.122 - 1.4 \left(\frac{a}{w}\right) + 7.33 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 13.08 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 14.0 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \right]$
	<p>Fissure circulaire dans un massif infini soumise à une contrainte homogène</p>	$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \frac{2}{\pi}$

Annexe C



Plaque infinie soumise à des contraintes de traction σ

Annexe D

h/R=0.7

 $L_{min} =$

-0.16930844541259	-0.02741608753793	-0.00169941831540	0.00004262114463	0.00001541243406	0.00000094551200	-0.00000002971148
-0.02741608753793	-0.01469409985475	-0.00302984086008	-0.00035398434097	-0.00002327369686	-0.00000026200176	0.00000011321416
-0.00169941831540	-0.00302984086008	-0.00122714012557	-0.00027200266681	-0.00003987503014	-0.00000405449235	-0.00000026739997
0.00004262114463	-0.00035398434097	-0.00027200266681	-0.00009806137885	-0.00002273019108	-0.00000379145665	-0.00000047549532
0.00001541243406	-0.00002327369686	-0.00003987503014	-0.00002273019108	-0.00000771313368	-0.00000184286880	-0.00000033441377
0.00000094551200	-0.00000026200176	-0.00000405449235	-0.00000379145665	-0.00000184286880	-0.00000060201590	-0.00000014689308
-0.00000002971148	0.00000011321416	-0.00000026739997	-0.00000047549532	-0.00000033441377	-0.00000014689308	-0.00000004672202

h/R=1

 $L_{min} =$

-0.10934783043103	-0.01288042964163	-0.00080182472914	-0.00002667024709	0.00000011674687	0.00000007216770	0.00000000447277
-0.01288042964163	-0.00390337421616	-0.00054101855482	-0.00004864737844	-0.00000314452122	-0.00000014582599	-0.0000000405158
-0.00080182472914	-0.00054101855482	-0.00012989637291	-0.00001908399676	-0.00000202683911	-0.00000016718618	-0.00000001101874
-0.00002667024709	-0.00004864737844	-0.00001908399676	-0.00000417269131	-0.00000063603144	-0.00000007458077	-0.0000000708383
0.00000011674687	-0.00000314452122	-0.00000202683911	-0.00000063603144	-0.00000013226396	-0.00000002064687	-0.00000000258409
0.00000007216770	-0.00000014582599	-0.00000016718618	-0.00000007458077	-0.00000002064687	-0.00000000415690	-0.0000000065942
0.00000000447277	-0.0000000405158	-0.00000001101874	-0.0000000708383	-0.00000000258409	-0.0000000065942	-0.00000000012975

h/R=1.5

 $L_{min} =$

-0.05240070194891	-0.00358100241291	-0.00014828904559	-0.00000445273771	-0.00000009934925	-0.0000000141201	0.00000000000312
-0.00358100241291	-0.00053828988299	-0.00004149765141	-0.00000224287840	-0.00000009544962	-0.00000000336811	-0.0000000010055
-0.00014828904559	-0.00004149765141	-0.00000511230104	-0.00000041427295	-0.00000002559777	-0.00000000129700	-0.00000000005612
-0.00000445273771	-0.00000224287840	-0.00000041427295	-0.00000004711307	-0.00000000393650	-0.00000000026366	-0.00000000001489
-0.00000009934925	-0.00000009544962	-0.00000002559777	-0.00000000393650	-0.00000000042836	-0.00000000003648	-0.00000000000258
-0.00000000141201	-0.00000000336811	-0.00000000129700	-0.00000000026366	-0.00000000003648	-0.00000000000386	-0.000000000000033
0.00000000000312	-0.00000000010055	-0.00000000005612	-0.00000000001489	-0.00000000000258	-0.000000000000033	-0.000000000000003

Annexe E

Coefficients $A_m^{(k)}$ pour $h/R=1$

$$A_0 = 0.05957152485 p_0$$

$$A_0 = 0.05957767163 p_0$$

$$A_0 = 0.05957183326 p_0$$

$$A_0 = 0.05957183325 p_0$$

$$5 A_0 = 0.05957183322 p_0$$

$$A_0 = 0.05957183322 p_0$$

$$A_0 = 0.05957183322 p_0$$

$$A_0 = 0.05957183322 p_0$$

$$A_0 = 0.05957183322 p_0$$

$$A_0 = 0.05957183322 p_0$$

$$A_1 = 0.002125198870 p_0$$

$$A_1 = 0.0001066266882 p_0$$

$$A_1 = 0.0001066315124 p_0$$

$$4 A_1 = 0.0001066210555 p_0$$

$$A_1 = 0.0001066210555 p_0$$

$$A_1 = 0.0001066210555 p_0$$

$$A_1 = 0.0001066210555 p_0$$

$$A_1 = 0.0001066210555 p_0$$

$$A_1 = 0.0001066210555 p_0$$

$$A_1 = 0.0001066210555 p_0$$

$$A_2 = 0.00008643003078 p_0$$

$$A_2 = 0.000004440530940 p_0$$

$$A_2 = 0.000004341836300 p_0$$

$$A_2 = 0.000004341411557 p_0$$

$$A_2 = 0.000004341411042 p_0$$

$$6 A_2 = 0.000004341411040 p_0$$

$$A_2 = 0.000004341411040 p_0$$

$$A_2 = 0.000004341411040 p_0$$

$$A_2 = 0.000004341411040 p_0$$

$$A_2 = 0.000004341411040 p_0$$

$$A_3 = 0.000002111093620 p_0$$

$$A_3 = 1.129144033 \cdot 10^{-7} p_0$$

$$A_3 = 1.062748862 \cdot 10^{-7} p_0$$

$$A_3 = 1.062643961 \cdot 10^{-7} p_0$$

$$A_3 = 1.062643617 \cdot 10^{-7} p_0$$

$$6 A_3 = 1.062643616 \cdot 10^{-7} p_0$$

$$A_3 = 1.062643616 \cdot 10^{-7} p_0$$

$$A_3 = 1.062643616 \cdot 10^{-7} p_0$$

$$A_3 = 1.062643616 \cdot 10^{-7} p_0$$

$$A_3 = 1.062643616 \cdot 10^{-7} p_0$$