



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique



**REPUBLIQUE ALGERIENNE
DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**Ecole Nationale Polytechnique
Laboratoire de Recherches Sciences de l'Eau**

**Département Hydraulique
Projet de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme**

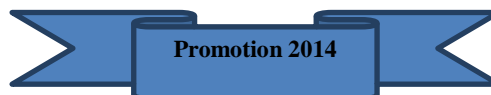
D'INGENIEUR D'ETAT EN HYDRAULIQUE

Réalisé par
**Mr GHELAF Lounis
Mr ZARAT Adel**

Thème :

**Simulation numérique d'un écoulement turbulent dans
des conduits à géométrie variable par la méthode de
lattice Boltzmann**

**Proposé et dirigé par : Mr F. MEZALI
Dr S. BENMAMAR**



ENP, 10 Avenue Hassan Badi, BP.186 EL HARRACH, ALGER

Dédicaces

Avant de commencer mes dédicaces, je suis certain que ce projet de fin d'étude est la meilleure chose qui puisse m'arriver durant cette année, j'en suis sûr, même en mi-année.

Grâce à Dieu nous avons réalisé ce travail que je dédie :

À mes parents, pour leurs aides appréciables qui ont tout fait pour que j'atteigne ce niveau.

Je le dédie également à mes frères qui ont été avec moi pour leur soutien moral et matériel.

À mes adorables sœurs et surtout mes anges sousou et marwa.

Je le dédie aussi à mes ami(e)s de polytechnique et d'autres pour leur soutien et les moments inoubliables que nous avons passés tous ensemble, désolé de ne pas pouvoir citer vos noms car vous êtes assez nombreux et que je crains d'oublier quelqu'un, et tous ceux avec qui je partage de gratitude, l'amitié, l'amour et le respect.

Adel

Dédicaces

Grâce à mon Dieu nous avons réalisé ce modeste travail que je dédie.

À celle qui m'a mise au monde, pour son aide appréciable, sa disponibilité, et ses Conseils fructueux qui m'ont facilité la réalisation de ce travail.

À mon père pour son soutien moral et matériel.

À toute ma famille

À tout la promotion Hydraulique 2014.

Lounis

Remerciement

*En premier et en dernier, Avant tout et après tout, Dans le bonheur et dans le malheur,
Merci à Allah le tout puissant pour toutes ses grâces et ses faveurs, pour nous avoir accordé
la chance d'étudier à Ecole Nationale Polytechnique et de nous avoir donné le courage
et la force d'accomplir ce modeste travail.*

*Nous remercions Mlle Benmamar Saâdia, notre encadreur, pour le sujet qu'il nous a proposé
qui nous a passionné, mais également pour sa précieuse aide et ses conseils au cours de cette
année. Elle a su nous laisser la liberté nécessaire à l'accomplissement de notre tâche, tout en y
gardant un œil critique et avisé malgré son emploi du temps chargé pendant toute l'année.*

*Nous tenons également à remercier Mr. Mezali Farouk, qui nous a éclairé et nous a mis
dans la bonne voie tout au long de notre travail, ainsi que pour ses remarques et ses
encouragements qui nous étaient de grande valeur.*

*A celui qui n'a jamais hésité le moindre instant à se tenir à nos côtés afin de nous soutenir,
nous aider et nous encourager.*

*Nous exprimons nos vifs remerciements aux membres de Jury qui nous feront l'honneur
d'apprécier ce mémoire de fin d'étude.*

*Et enfin, un grand remerciement destiné à nos enseignants et enseignantes, eux qui ont
contribué à notre formation, depuis le cycle primaire jusqu'au cursus universitaire.*

ملخص

هذه الأطروحة هو جزء من جهد أوسع لتقييم و وصف إمكانية طريقة بولتزمان لمحاكاة التدفق المضطرب في الأنابيب من نوع نمط الدوري متقاربة متباعدة

أهداف هذه الأطروحة هو دراسة معامل انخفاض الضغط في الأنابيب عندما تكون الهندسة معقدة بحيث نقوم بوضع برنامج حساب يقوم على أحد أساليب بولتزمان . للتحقق من صحة البرنامج، تمت مقارنة النتائج العددية مع النتائج التجريبية كما قمنا بدراسة تأثير عدد رينولدز على معامل خسارة الضغط

الكلمات المفتاحية : لا تيس بولتزمان ؛ قناة بأبعاد متغيرة؛ جريان اهتزازي ؛ بالابوس؛ الشروط النهائية؛ جريان مضطرب

Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans un effort plus large visant à évaluer et caractériser l'apport potentiel de la méthode de Boltzmann (LBM) pour la simulation de l'écoulement turbulent dans une conduite à motif périodique de type convergent-divergent.

L'objectif de ce mémoire est la détermination du coefficient de perte de charge dans un conduit à géométrie complexe, on a utilisé un code open source. Ce dernier est basé sur la méthode de lattice Boltzmann (LBM). Pour valider le programme, les résultats numériques ont été comparés à des résultats expérimentaux. Puis nous avons étudié l'effet du nombre de Reynolds sur le coefficient de perte de charge.

Mots clés: *Lattice Boltzmann, conduite à géométrie variable, écoulement pulsée, Palabos, conditions aux limites, écoulement turbulent.*

Abstract

This work is part of a global effort aiming at characterizing the possible contribution of the Lattice Boltzmann Method (LBM) to the simulation of turbulence flow with periodic patterns.

The objective of this thesis is determination of the coefficient of pressure drop in a pipe with complex geometry, we have used an open source code, and it is based on lattice Boltzmann method (LBM). To validate the program; the numerical results has been compared with experimental results, and we studied the effect of Reynolds number on the coefficient of loss.

Key words: *Lattice Boltzmann, driving variable geometry, pulsed flows, Palabos, boundary conditions, turbulent flow.*

Table des matières

Introduction générale.....	1
Chapitre I.....	3
Les écoulements turbulents dans les conduits à géométrie complexe.....	3
I.1. Ecoulement turbulent	4
I.2. Les écoulements turbulents dans les conduites à géométrie complexe	5
I.2.1. Travaux de Gschwind et Kotkke (2000)	6
I.2.2. Travaux de Luo (2003).....	6
I.2.3. Travaux de Benmamar (2006).....	7
I.2.4. Travaux de Takafumi (2006).....	7
I.2.5. Travaux de Cheng (2006).....	8
I.2.6. Travaux de Belakroum et Al (2007).....	8
I.2.7. Travaux de Khabbouchi et Guellouz (2008)	8
I.2.8. Travaux de Lam et Zou (2009).....	8
I.2.9. Travaux de Peixinho (2012).....	8
I.2.10. Travaux de Bouffenech et Djamaï (2012)	11
Conclusion.....	12
Chapitre II	13
Modélisation du phénomène de la turbulence par la méthode de Lattice- Boltzmann	13
II.1. Méthode des différences finis.....	13
II.2. Méthode des volumes finis	13
II.3. Méthode des éléments finis	14
II.4. Théorie de la méthode de Lattice Boltzmann	14
II.5. Méthode de Boltzmann sur réseau.....	15
II.5.1. Historique et origines	16
II.5.2. Automates Cellulaires : modèle Gaz sur réseau.....	16
II.5.3. Les équations de Navier-Stockes	19
II.5.4 Principes des codes CFD	19
II.5.5. Fondements de la méthode de Boltzmann sur réseau	20
II.5.5.1. Théorie cinétique et équation de Boltzmann	20
II.5.5.2. Équation de Boltzmann	22
II.5.6. Les Modèles d'équation de Boltzmann.....	27

II.5.6.1. Le modèle HPP	27
II.5.6.2. Le modèle FHP	28
II.5.6.4. Modèle à un seul temps de relaxation [BGK]	29
II.5.7. Modèle de turbulence LES appliqué aux modèles LBE	30
II.6. Condition aux limites sur la vitesse et la pression	31
II.6.1. Conditions aux limites de Dirichlet	32
II.6.2. Conditions aux limites de vitesse nulle (bounce back)	33
II.6.3. Conditions d'entrée et de sortie	34
Conclusion.....	35
Chapitre III	36
Programme sous Palabos de l'écoulement turbulent dans une conduite à motifs périodiques	36
III.1. Caractère périodique de l'écoulement	36
III.2. Transformation géométrique	36
Conclusion.....	40
III.3 Présentation du programme en C++ introduit dans Palabos	40
III.4. Explication de différentes commandes et les fonctions du code C++.....	41
III.4.1 Définition des Bibliothèques	41
III.4.2 Définition du Modèle d'étude.....	42
III.4.3 Introduction des paramètres Hydrauliques	42
III.4.4 Introduction du nombre de discrétisations selon x et y	43
III.4.5 Initialisation une frontière de pression à une densité constante.	44
III.4.6 Création des conditions initiales.....	44
III.4.7 Définition du domaine d'étude	44
III.4.8 Définition du domaine d'application des conditions aux limites	47
III.4.9 formulation de la densité du fluide pour l'écoulement turbulent	48
III.4.10 Introduction des paramètres de Smagorinsky pour la viscosité turbulente	48
III.4.11 Fonction Write GIF	49
III.4.12 Fonction Write VTK.....	49
III.4.13 Corps principale du programme	50
III.4.14 Appel des fonctions principales constituant le programme.....	50
III.4.15 Boucle d'iteration	51
III.4.16 Génération des images GIF	51
III.4.17 Generation des fichiers VTK.....	51
III.4.18 Déroulement de la phase de propagation et de collision	52

III.4.19 Affichage de la valeur numérique de l'énergie.....	52
III.4.20 Affichage de la valeur numérique de la densité.....	52
III.4.21 Affichage de la valeur numérique de la vitesse	53
III.5. Transformation des unités Lattice ver les unités physiques	53
III.6. Méthode de Discrétisation du système adimensionnel.....	54
III.7. Le choix du pas de temps	55
III.8. Détermination de la stabilité d'un modèle numérique	55
Conclusion.....	56
Chapitre IV	57
Analyse et discussion des résultats.....	57
IV.1. Description du dispositif expérimental	57
IV.1.1. Technique de mesure.....	58
IV.1.2. Les essais	58
IV.2. Résultats et discussion	59
IV.2.1. Résultats expérimentaux.....	59
IV.2.2. Résultats numériques.....	63
IV.2.3. Comparaison des résultats numériques aux resultats experimentaux	63
IV.2.3.1.variation de la pression près de la paroi.....	63
IV.2.3.2.variation de pression à l'axe de la conduite	66
IV.2.3.3.Évaluation de coefficient des pertes de charge près de la paroi	68
IV.2.3.4.Évaluation de coefficient des pertes de charge à l'axe de la conduite.....	68
IV.2.3.5 Évaluation de la pression à l'axe de la conduite ($y = 0$) et à la paroi.....	69
Conclusion.....	70
Conclusion générale	71
Bibliographie	72

Table des figures

Figure I. 1: diagramme de Moody.....	5
Figure I. 2 : conduites à motifs périodiques symétriques.....	6
Figure I. 3 : conduite à motif périodique asymétrique	6
Figure I. 4 : distribution de la vitesse dans une conduite à quatre motifs	7
Figure I. 5 : schéma du dispositif expérimental et visualisation d'une bouffée turbulente.....	9
Figure I. 6 : diagramme de stabilité décrivant les différentes structures d'écoulements.....	10
Figure I. 7 : rouleaux de recirculations pour un écoulement turbulent dans une conduite à motif périodique	11
Figure I. 8 : distribution de la vitesse dans conduite à quatre motifs.....	11
Figure II. 1: la collision et la propagation	23
Figure II. 2 : lattice arrangement pour un problème 1-D	24
Figure II. 3 : lattice arrangement pour des problèmes 2-D, D2Q5.....	25
Figure II. 4 : lattice arrangement pour un problème D2Q9.....	26
Figure II. 5 : discrétisation D3Q15.....	27
Figure II. 6 : discrétisation D3Q19.....	27
Figure II. 7 : les limites et l'emplacement des particules selon Dirichlet	32
Figure II. 8 : mécanisme de la condition de "rebond à mi-chemin"	33
Figure II. 9 : effet "escalier"	34
Figure III. 1 : domaine physique du fluide.....	36
Figure III. 2 : deomaine rectangulaire de calcul.....	38
Figure III. 3 : conduite à motifs périodiques.....	47
Figure IV. 1 : conduite à (07) motifs périodiques.....	59
Figure IV. 2 : variation de la pression le long de la conduite pour $Q = 0,63(l/s)$	59
Figure IV. 3 : variation de la pression le long de la conduite pour $Q = 0,62l/s$	60
Figure IV. 4 : variation de la pression le long de la conduite pour $Q = 0,59l/s$	60
Figure IV. 5 : variation de la pression le long de la conduite pour $Q = 0,54l/s$	61
Figure IV. 6 : variation de la pression le long de la conduite pour $Q = 0,47 l/s$	61
Figure IV. 7 : variation de la pression près de la paroi pour $Re = 10500$	63
Figure IV. 8 : variation de la pression près de la paroi pour $Re = 10333$	64
Figure IV. 9 : variation de la pression près de la paroi pour $Re = 9833$	64
Figure IV. 10 : variation de la pression près de la paroi pour $Re = 9000$	65
Figure IV. 11: variation de la pression près de la paroi pour $Re = 7833$	65
Figure IV. 12 : variation de la pression à l'axe pour $Re = 10500$	66
Figure IV. 13 : variation de la pression à l'axe pour $Re = 10333$	66
Figure IV. 14 : variation de la pression à l'axe pour $Re = 9833$	67
Figure IV. 15 : variation de la pression à l'axe pour $Re = 9000$	67
Figure IV. 16 : variation de la pression à l'axe pour $Re = 7833$	67
Figure IV. 17 : variation de λ en fonction de Re près de la paroi	68
Figure IV. 18: variation de λ en fonction de Re à l'axe de la conduite.....	69
Figure IV. 19 : la variation de la pression à l'axe et à la paroi.....	69

Liste des photos

Photo IV. 1: installation expérimentale 58

Photo IV. 2: les rouleaux de recirculations pour une conduite à sept motifs périodique.....70

Liste des tableaux

Tableau IV- 1: les différentes mesures effectuées. 58

Tableau IV- 2: valeurs de a pour chaque débit 62

Tableau IV- 3: valeurs de λ pour chaque débit 62

Abréviations

BGK	Bhatnagar-Gross-Krook
CA	Cellular Automaton
CFD	Computational Fluid Dynamics
GLBE	Generalized Lattice Boltzmann Equation
LBGK	Lattice Bhatnagar Gross Krook
LBE	Lattice Boltzmann Equation
LBM	Lattice Boltzmann Method
LBGK	Équation de Boltzmann avec le modèle de collision BGK
MBR	Méthodes de Boltzmann sur Réseau
LES	Large Eddy Simulation (simulation à grande échelle)
MBR	Méthode de Boltzmann sur réseau
MRT	Multi Relaxation Time

Notations

Symbole	Unités	Définition
c	(m/s)	La vitesse d'écoulement
c_s	(m/s)	La célérité du son
C_{SMG}		Constante de sous-maille de Smagorinsky
D		Dimension de l'espace
f^{eq}		Fonction d'équilibre
F		Fonction de distribution
F	(kg. m/s ²)	Action de force
g	(m/s ²)	Accélération de la pesanteur

K_B		Constante de Boltzmann
L	(m)	Longueur de la conduite
M	(kg)	La masse d'une particule
Ma		Nombre de mach
N_{iter}		Nombre d'itérations
N		Nombre de cellules
P	(N/m ²)	La pression
\mathbf{P}	(N/m ²)	Tenseur de flux de quantité de mouvement
q	(J)	Flux d'énergie
Q	(m ³ /s)	Débit volumique
E_1	(m)	Distance de rétrécissement à partir de l'axe
E_2	(m)	Distance de l'élargissement à partir de l'axe
E	(m)	La largeur équivalente de la conduite
Re		Nombre de Reynolds
Re^*		Nombre de Reynolds turbulent
\bar{S}	(s ⁻¹)	Taux de déformation caractéristique
T	(K)	La température
T^*	(s)	Temps caractéristique turbulent
t	(s)	Temps
\mathbf{u}	(m/s)	Vecteur vitesse macroscopique
u_a	(m/s)	La vitesse intrinsèque
U_{ad}	(m/s)	Vitesse adimensionnelle
U_{lb}	(m/s)	Vitesse lattice
X		Coordonnée adimensionnelle

Y		Coordonnée adimensionnelle
Δ	(m)	longueur de sous-maille
ΔP	(N/m ²)	Variation de pression le long de la conduite
δ_ρ	(kg/m ³)	Fluctuation de la densité
δ_x	(m)	Pas de longueur
δ_t	(s)	Pas du temps
ε		Coefficient de forme
ε_d	(m ² /s ³)	Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente
η	(m)	La longueur suivant la longitude
λ		Coefficient des pertes de charge
λ_{ref}		Coefficient des pertes de charge de l'écoulement entre deux plaques parallèles
λ_{th}		Coefficient des pertes de charge théorique
μ	(kg/m. s)	Viscosité dynamique du fluide
ρ	(Kg/m ³)	La masse volumique de l'eau
τ_t	(m ² /s)	La viscosité turbulente
τ	(s)	Temps de relaxation
ν	(m ² /s)	Viscosité cinématique du fluide
Ω		Operateur de collision
ζ	(m)	La longueur transversale

Introduction générale

L'étude de l'écoulement des fluides par simulation numérique est une discipline en plein essor, elle repose sur la recherche de solution des équations qui décrivent la dynamique des fluides par les algorithmes appropriés. Les simulations numériques ont deux types de finalité :

La première finalité est la réalisation d'étude à caractère fondamental, destinées à permettre une meilleure discipline de mécanisme physique de base qui régissent, la dynamique des fluides, en vue de leur compréhension, de leur modélisation et antérieurement de leur contrôle. Ces études requièrent une très grande précision de données fournies par la simulation numérique. Ceci implique que le modèle physique choisi pour représenter le comportement du fluide soit pertinent et que les algorithmes de résolution employés, ainsi que leur mise en œuvre informatique, n'introduisent qu'un faible niveau d'erreur. La qualité des informations fournies par la simulation numérique est également subordonnée au niveau de résolution choisi: pour obtenir la meilleure précision possible, la simulation doit tenir compte de toutes les échelles spatio-temporelle qui contribuent à la dynamique de l'écoulement. Lorsque la gamme d'échelle est très large, ce qui est par exemple le cas pour les écoulements turbulents, le problème devient raide, en ce sens que le rapport entre les échelles caractéristiques associées ou plus grande et aux plus petites échelles devient très grand.

La seconde finalité concerne les études d'ingénierie, qui, pour la conception des matérielles, nécessitent la prévision de leur caractéristiques. Il s'agit ici non plus de produire des données en vue de l'analyse de la dynamique de l'écoulement, mais aussi de prédire certaines de ces caractéristiques, ou plus précisément la valeur des paramètres physiques qui en dépendent. Ces prédictions peuvent porter soit sur les valeurs moyennes de ces paramètres, soit sur leurs valeurs extrêmes.

Devant la complexité des écoulements industriels dans les milieux à géométrie complexe il est nécessaire alors de faire appel à ces techniques de simulation et de modélisation de la turbulence.

Notre travail consiste à l'amélioration d'un outil numérique basé sur la méthode de Lattice Boltzmann afin de simuler l'écoulement turbulent. Notre mémoire structurée en quatre chapitres.

En premier, nous avons abordé brièvement les généralités sur les écoulements turbulents dans des conduits à géométrie variable de type convergent-divergent ainsi les travaux faits sur les écoulements dans les conduites à motif périodique.

Dans le deuxième chapitre on présente la méthode de Lattice Boltzmann adoptée pour la simulation d'écoulements turbulents puis pour celle des écoulements à travers un convergent-

divergent, commençant par la présentation de l'historique et les équations de base de la méthode de lattice Boltzmann ainsi les différents modèles sur réseaux, afin de terminer par un modèle de turbulence qui permette de valider le comportement du modèle LES (simulation des grandes échelles) dans ces géométries, tout en spécifiant quelques limitations.

Le troisième chapitre est consacré à la définition de la géométrie et aux équations de base régissant l'écoulement, et ceci en transformant le domaine physique complexe de l'écoulement en un domaine de calcul rectangulaire, ensuite une présentation de quelques détails sur le code que nous avons élaboré en C++ et les ressources informatiques utilisés y sont également exposés.

Le quatrième et le dernier chapitre présente dans une première section une approche expérimentale sur les écoulements turbulents en conduite à motif périodique type convergent-divergent qui a été réalisé dans le laboratoire de recherche de l'ENSEEIH de Toulouse. Ensuite la présentation de la partie de numérique et les résultats obtenus par la simulation, on termine par une étude comparative entre les deux résultats.

Chapitre I**Les écoulements turbulents dans les conduits à géométrie complexe**

Lorsqu'un fluide s'écoule dans une conduite il exerce une résistance visqueuse qui crée une perte d'énergie. La chute de pression le long de la conduite s'appelle la **perte de charge**. Pour des conditions aux limites constantes imposées à l'écoulement, **O. Reynolds** a montré en 1883 qu'il existe deux sortes d'écoulements suivant la valeur d'un nombre sans dimension appelé **nombre de Reynolds** est noté R_e :

$$R_e = \frac{DV}{\nu}$$

Où, V est une vitesse typique de l'écoulement, D le diamètre de la conduite et ν la viscosité cinématique du fluide. Lorsque le nombre de Reynolds est faible, les lignes de courant sont stationnaires et l'écoulement est dit **Laminaire**. Au contraire lorsque le nombre de Reynolds est grand, les lignes de courant deviennent instationnaires et l'écoulement est dit **Turbulent**. A ces deux types d'écoulement fondamentalement différents, correspondent des pertes de charge différentes.

Le calcul de ces écoulements dans les conduites de forme circulaire ou non circulaire, est fréquemment rencontré dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Les applications sont nombreuses et nous pouvons citer, à titre d'exemple, le cas de la conduite de refoulement depuis une station de pompage vers un réservoir d'alimentation d'une agglomération ou celui de la conduite gravitaire alimentant, pour des besoins énergétiques, et une usine hydroélectrique.

L'écoulement dans une conduite de forme circulaire ou non circulaire en charge est gouverné par trois principales relations qui sont les relations de **Darcy-Weisbach (1845, 1854)**, de **Colebrook-White (1939)** et du nombre de Reynolds. Ces trois relations forment le système d'équations de base destiné au calcul de l'écoulement turbulent en conduites.

La première relation exprime le gradient de la perte de charge linéaire appelé aussi perte de frottement. Celui-ci dépend du coefficient de frottement, du débit, volume écoulé et des caractéristiques géométriques de l'ouvrage.

La seconde relation exprime le coefficient de frottement en fonction du nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement et de la rugosité relative de la conduite considérée. Elle a été proposée pour être appliquée au cas des conduites de commerce où la répartition locale des éléments de rugosité est accidentelle, par opposition à une répartition artificielle.

La troisième relation, ou nombre de Reynolds, traduit les effets des forces d'inertie et de viscosité. Lorsque les forces d'inertie sont prépondérantes, l'écoulement est caractérisé par une vitesse élevée et son régime est en règle générale dans le domaine de pleine turbulence. Le coefficient de frottement prend alors une valeur quasi constante et ne dépend que de celle de la rugosité relative. Par contre, lorsque les forces de viscosités sont prépondérantes, l'écoulement est caractérisé par une vitesse moins élevée et son régime appartient souvent au domaine de transition. Le coefficient de frottement dépend alors à la fois de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds*. Pour les conduites à parois lisses ou pratiquement lisses, le coefficient de frottement ne dépend que de la valeur de la rugosité relative caractérisant l'état des parois internes de l'ouvrage.

Notre travail consiste à vérifier la loi dite des pertes de charges dans le cas d'un écoulement turbulent dans des conduits à motif périodique, et de trouver numériquement et expérimentalement le coefficient de perte de charge pour la géométrie choisie.

Nos résultats numériques seront comparés avec les résultats Expérimentaux obtenus par **Benmamar** au sein de laboratoire d'hydraulique de l'ENSEEHT de Toulouse. Très peu d'études sont réalisées sur des écoulements turbulents en conduites non cylindriques. On présente dans ce chapitre un court rappel sur les écoulements turbulents. En suite quelques travaux qui ont été effectués sur les écoulements turbulents en conduites à géométrie complexes.

I.1. Ecoulement turbulent

Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un Comportement non prévisible et l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Ils apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. L'inverse est le régime laminaire pour lequel l'écoulement est prévisible et régulier. C'est à la fin du *XIXe* siècle que **Boussinesq** et **Reynolds** ont effectué les premières études sur le régime turbulent dans les fluides. La source d'énergie dans un écoulement turbulent peut Prendre plusieurs formes allant de perturbations non locales comme un gradient de pression dans un écoulement en canal, une différence de température ou de densité à des perturbations plus localisées comme des rugosités de paroi, des sources acoustiques extérieures, des sources Impulsionnelles liées à des forçages mécaniques ou des changements géométriques, bien d'autres sources d'énergie encore (électromagnétique, chimique, etc...) [**Robinet, 2010**].

En Hydraulique l'écoulement turbulent est celui que l'on rencontre dans une conduite cylindrique ou bien non cylindrique et qui correspond à des valeurs du nombre de Reynolds très élevées et à des valeurs de rugosité relative comprises en 0 et 0,05.

Trois régimes de l'écoulement turbulent peuvent donc être observés dans une conduite cylindrique. Il s'agit des domaines lisses, de transition et de pleine turbulence appelé aussi

domaine du régime d'écoulement turbulent rugueux correspondant souvent aux fortes valeurs de la rugosité relative.

Ces trois régimes d'écoulement sont traduits graphiquement sur le diagramme universellement connu de *Moody* (1944), (figure I.1).

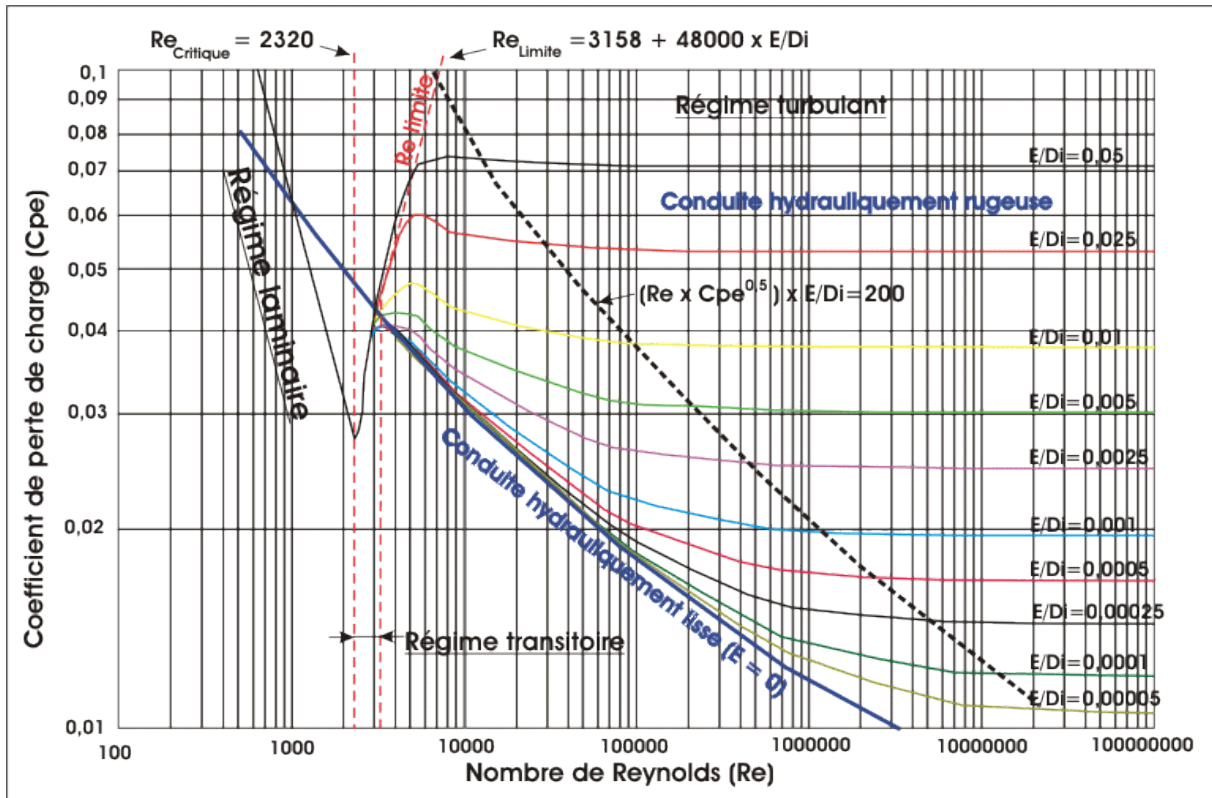


Figure I. 1: diagramme de Moody

Les résultats expérimentaux, décrits par l'abaque de Moody, montrent qu'il existe une plage de variation des paramètres dans laquelle le coefficient de perte de charge linéaire ne dépend pas du nombre de Reynolds, c'est la partie droite de l'abaque, dans lesquelles les courbes iso ε/D sont presque horizontales. Dans cette zone, comme souvent en turbulence établie, les variations de nombre de Reynolds n'ont plus d'influence sur la nature des phénomènes.

Dans une autre plage, au voisinage de la courbe du régime lisse, λ_i ne dépend que du nombre de Reynolds, toutes les iso ε/D sont confondues, cette zone correspond aux cas où l'épaisseur de la couche visqueuse est supérieure à la taille moyenne des rugosités de paroi.

I.2. Les écoulements turbulents dans les conduites à géométrie complexe

Différentes approches ont été utilisées simultanément pour étudier l'influence des ondulations de faible amplitude sur l'écoulement turbulent en conduite. Ces études, en faisant ressortir le caractère complexe de l'écoulement étudié, ont montré que les résultats classiques relatifs à l'écoulement turbulent établi en tube droit étaient profondément modifiés particulièrement à

cause de l'effet de variation de la section, de l'effet de courbure des parois et de la présence de courants de retour instationnaires derrière chaque crête.

I.2.1. Travaux de Gschwind et Kotkcke (2000)

Gschwind et Kotkcke ont étudié expérimentalement et numériquement les effets de transfert de la chaleur et de masse ainsi que les pertes de pression dans des conduites avec axes symétriques (Figure I.1) et asymétriques (figure I.2)

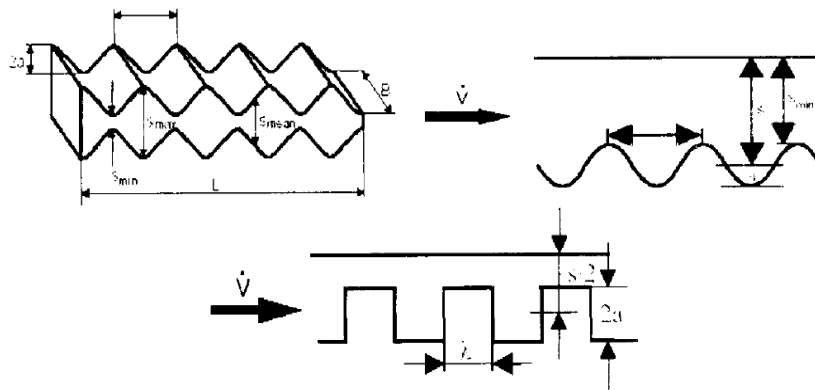


Figure I. 2 : conduites à motifs périodiques symétriques

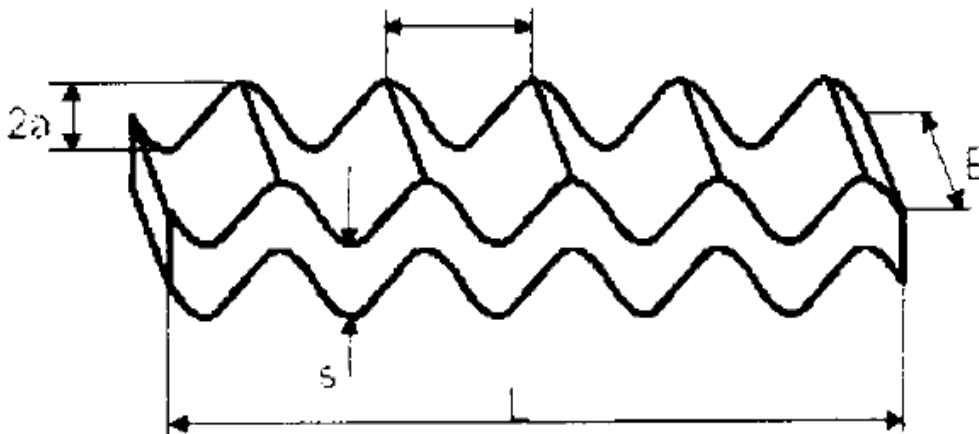


Figure I. 3 : conduite à motif périodique asymétrique

Ils ont remarqué des instabilités et formation de vortex dans les surfaces concaves, et un transfert de la chaleur et de la masse fortement non homogène à travers la largeur du conduit [Sayoud, 2004].

I.2.2. Travaux de Luo (2003)

En 2003, Luo a étudié expérimentalement les écoulements autour des obstacles carrés, employant comme méthode de mesure un colorant fluorescent et la visualisation laser. Il a déterminé le nombre Reynolds critique. Il a observé qu'au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente, le caractère onduleux de sillage augmente, et à partir d'un nombre de

Reynolds plus Elevé, le sillage derrière l'obstacle devient complètement déformé, et les longueurs d'ondes sont de plus en plus faibles [Luo, 2003].

I.2.3. Travaux de Benmamar (2006)

Devant la complexité des écoulements dans les conduit à géométrie complexe, l'autre une expérimentation sur maquettes a réalisé, afin d'observer les écoulements dans un conduit à motifs périodiques [Benmamar, 2006].

Pour visualiser les phénomènes hydrodynamiques existants dans les écoulements dans des conduits à géométrie complexe, Benmamar a conçu un modèle de conduite en acier à motif périodique de dimension 4cm x 4cm x 79,1cm.

Les expériences ont été effectuées en écoulement en charge au moyen du dispositif dont elle a fait son expérience.

Elle a proposé de relevée pour un débit donné, la pression sur la face supérieure du modèle, en installant sur chaque crête un piézomètre. Elle a constaté que pour un débit constant la pression diminue périodiquement le long de la conduite et elle a aussi évalué la distribution de la vitesse le long de la conduite à 4 motifs.

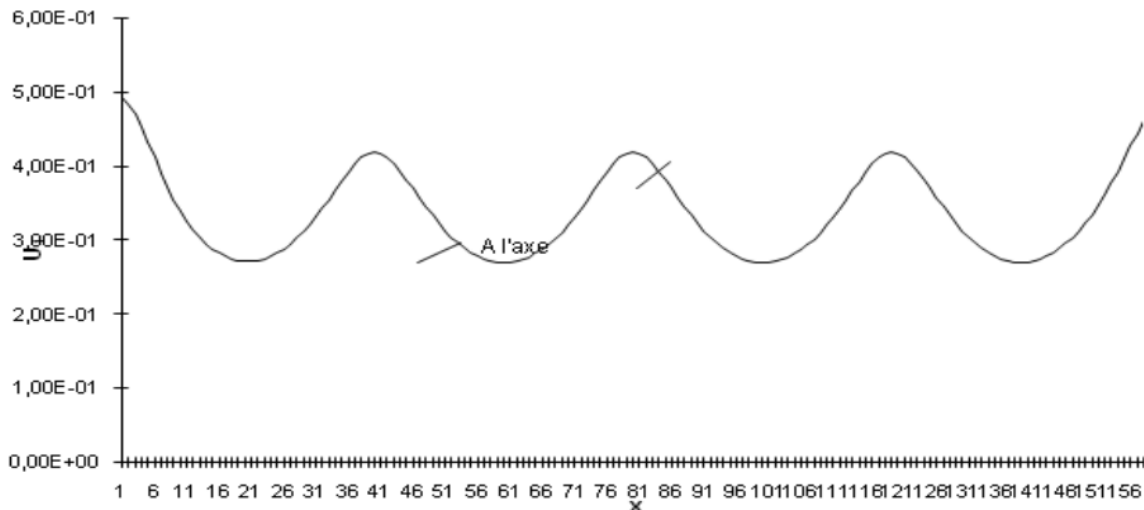


Figure I. 4 : Distribution de la vitesse dans une conduite à quatre motifs

[Benmamar et al, 1995]

I.2.4. Travaux de Takafumi (2006)

Takafumi a effectué une étude numérique bidimensionnelle de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, en utilisant la modèle DES (Detached Eddy Simulation). Les résultats obtenus par la DES a prévu la cessation du décollement de tourbillon derrière le cylindre, et même résultat a été obtenu en utilisant la méthode simulation RANS (Reynolds Average Numerical Simulation) [Takafumi, 2006].

I.2.5. Travaux de Cheng (2006)

Cheng a simulé un écoulement de cisaillement linéaire incompressible bidimensionnel au-dessus d'un tube carré. Il a montré l'effet du taux de cisaillement sur la fréquence du décollement de tourbillon du cylindre. Les résultats obtenus montrent que le vortex derrière le cylindre dépend fortement du taux de cisaillement et du nombre de Reynolds [Cheng, 2006].

I.2.6. Travaux de Belakroum (2007)

Belakroum a étudié par la méthode des éléments finis, le modèle LES (Large Eddy Simulation) pour simuler l'écoulement instationnaire et turbulent d'un fluide incompressible autour d'un cylindre. Il a trouvé que le phénomène d'éclatement tourbillonnaire est nettement mis en évidence. Et c'est ce qu'on va vérifier pour une succession de convergent-divergent [Belakroum, 2007].

I.2.7. Travaux de Khabbouchi et Guellouz (2008)

Khabbouchi et Guellouz ont effectué des mesures par PIV (vélocimétrie par images de particules) dans la zone du sillage proche derrière un cylindre placé près d'une paroi au niveau de son bord d'attaque. La configuration géométrique a permis d'isoler l'effet de l'écoulement type jet qui s'installe dans l'espacement entre la paroi et le cylindre. Ils ont montré l'existence de trois régions différentes d'écoulement lorsque le cylindre se rapproche de la paroi. L'effet de l'écoulement type jet se manifeste dans les faibles rapport- espace en détruisant la couche de cisaillement inférieure et empêchant, par la suite l'allée de Von Karman de s'installer dans le sillage [Khabbouchi & Guellouz, 2008].

I.2.8. Travaux de Lam et Zou (2009)

Ils ont étudié numériquement et expérimentalement les écoulements turbulents autour de quatre cylindres dans une configuration carrée intégrée avec différents rapports d'espacement choisis. Les résultats obtenus de la fluctuation de vitesse sont avérés similaires aux résultats numériques [Lam & Zou, 2009].

I.2.9. Travaux de Peixinho (2012)

L'écoulement dans un tube faiblement divergent (c'est-à-dire un tube cylindrique dont le diamètre augmente faiblement le long de l'axe de l'écoulement), tel que celui représenté dans la Figure (I.6) n'est pas suffisamment documenté. Cet écoulement est observé dans de nombreuses applications, par exemple, dans le système circulatoire sanguin ou encore lorsque l'on utilise des pipettes. En effet, en mode prélèvement, le liquide, généralement peu visqueux, s'écoule le long de la pointe de la pipette dans un tube faiblement divergent. Le nombre de Reynolds, Re , basé sur le petit diamètre ou le diamètre de l'entrée, est de l'ordre de quelques centaines.

Le problème bidimensionnel de la stabilité de l'écoulement entre deux parois planes qui se coupent avec un angle, α , en un point source est appelé le problème de Jeffery-Hamel. Ce problème a été étudié théoriquement et numériquement. Des bifurcations, qui indiquent un ensemble de solutions avec des alignements de tourbillons le long de l'axe de l'écoulement, ont été trouvées. D'autres travaux ont traité le cas de l'écoulement dans un élargissement brusque (avec des coins à 90°) et il a été montré que l'écoulement devient dissymétrique à partir de $Re = 80$. Dans le cas de tubes de section circulaires et avec une expansion brusque, il apparaît une bifurcation supercritique autour de $Re = 1000$.

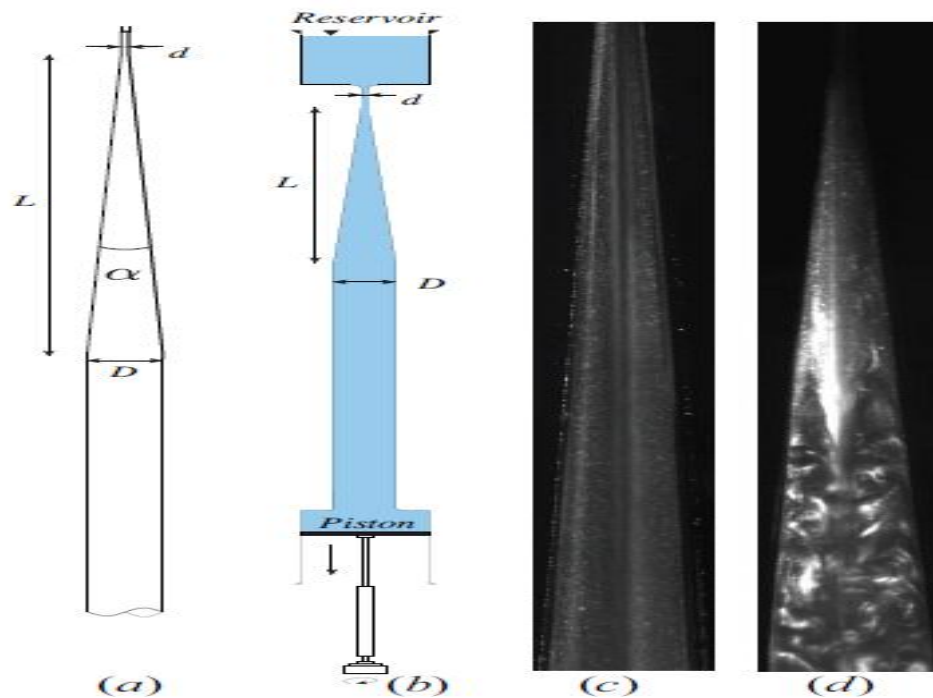


Figure I. 5 : schéma du dispositif expérimental et visualisation d'une bouffée turbulente

Les résultats consistent en l'analyse de photographies de visualisations d'écoulements. Pour de faibles débits, toutes les particules de fluides se déplacent dans le sens de l'écoulement. On pense alors à un écoulement laminaire type Poiseuille dont l'amplitude ou la vitesse maximale diminue fortement au fur et à mesure que l'on se déplace le long de la section divergente. Lorsque l'on augmente le débit, une recirculation, qui a une forme annulaire et étendue le long de l'axe de l'écoulement, apparaît. En observant le point de d'écoulement de couche limite, des estimations quantitatives de la taille de la recirculation peuvent être obtenues. En résumé, aucune recirculation n'est observée pour $Re < 500$ dans le divergent de 4° et pour $Re < 700$ dans le divergent de 6° .

Avec une nouvelle augmentation du débit, la recirculation peut, dans certain cas, donner naissance à des bouffées turbulentes comme celle représentée sur la (Figure I.7). Ces taches localisées turbulentes ont certaines similitudes avec les puffs turbulents observés dans les

conduites rectilignes. Par exemple, elles ont des longueurs précises pour un Re donné et une onde en déclin à l'avant. Ces taches turbulentes sont localisées et dépendent de perturbations ou imperfections du système.

Une deuxième série de résultats concerne des expériences de rélaminarisation. En pratique, on établit un écoulement à fort nombre de Reynolds, puis on diminue le débit afin de rélaminariser la bouffée turbulente. Les temps de rélaminarisation sont mesurés et utilisés pour construire les diagrammes décrivant la transition dans des tubes divergents. En résumé, le domaine sous-critique pour l'apparition de taches turbulentes est de $Re = 720$ à 860 dans le divergent de 4° et entre $Re = 800$ et 1000 dans le tube de 6° . Au cours de la rélaminarisation d'une tache turbulente, un jet de liquide passe au travers de la tache turbulente. Le jet de liquide ondule et des oscillations similaires de jet liquide dans une section divergente ont été observées dans des expériences en micro fluidiques [Peixinho, 2012].

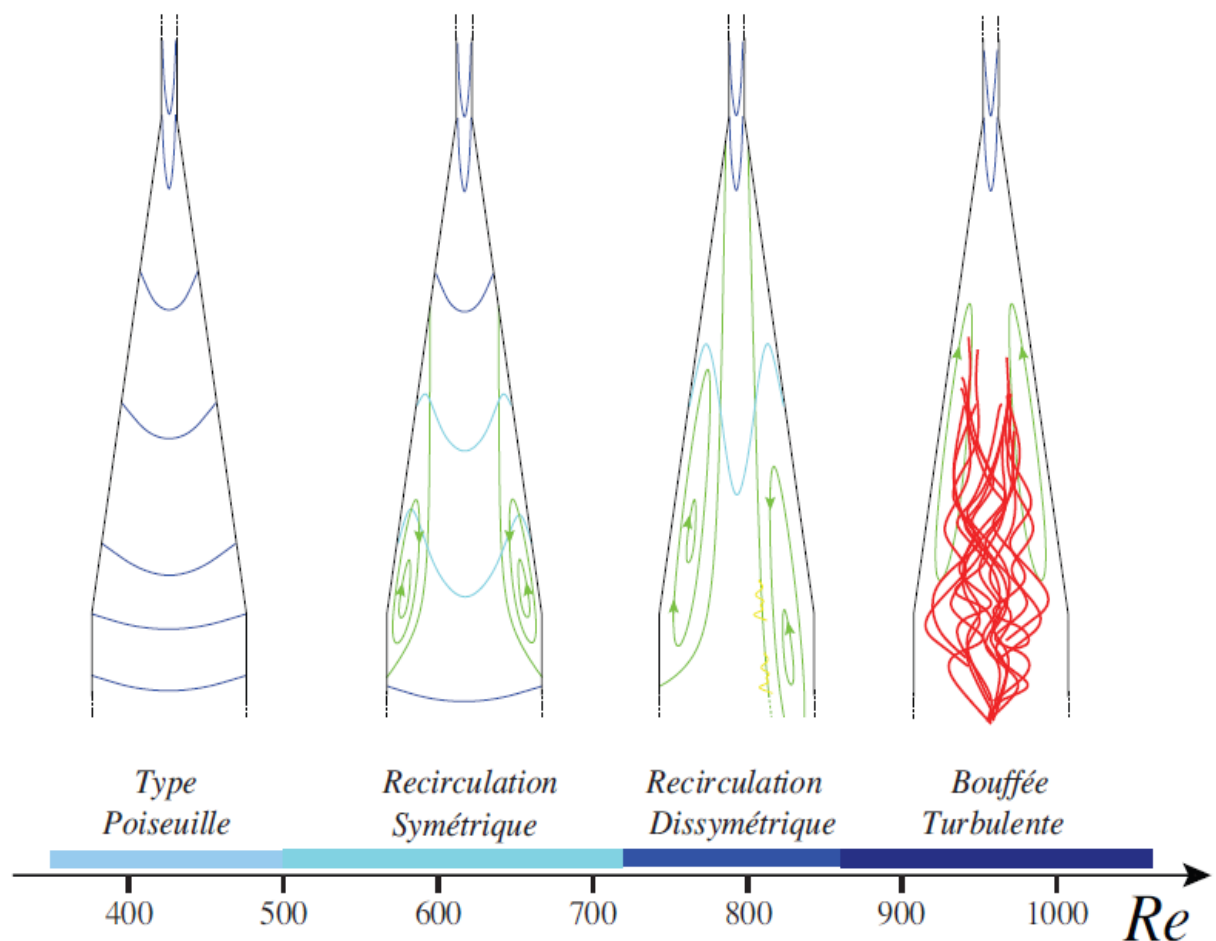


Figure I. 6 : diagramme de stabilité décrivant les différentes structures d'écoulements

Dans les schémas, les lignes bleues représentent les profils de vitesse et les lignes vertes représentent des lignes de courant. L'écoulement est du haut vers le bas.

I.2.10. Travaux de Bouffenech et Djamai (2012)

Bouffenech et Djamai ont fait une simulation d'un Ecoulement turbulent dans une conduite à 4 motifs périodiques type convergent-divergent de longueur L (Figure I.7).

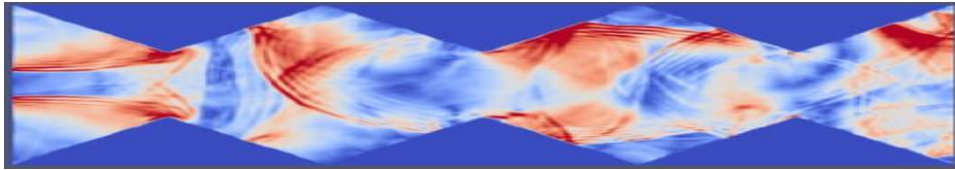


Figure I. 7 : Rouleaux de recirculations pour un écoulement turbulent dans une conduite à motif périodique [Bouffenech et Djamai, 2012]

Ils ont évalué la vitesse dans différentes régions de la conduite à l'entrée, près de la paroi et à la sortie. Pour deux nombres de Reynolds $Re = 10000$ et $Re = 30000$. Ils ont constaté pour un Re égale à 10000, le comportement de la vitesse à l'entrée est caractérisé par une perturbation suivie d'une oscillation autour d'une valeur constante. Ce n'est pas le cas sur la paroi ni à la sortie, qui sont caractérisées par l'apparition de vecteurs vitesses de sens opposé (ayant une composante négative) et qui représentent les rouleaux de recirculations.

Pour un Re égale à 30000 le comportement de la vitesse est le même à l'entrée, à la sortie et sur la paroi, il est caractérisé par deux facteurs importants, une oscillation autour d'une certaine valeur et l'apparition des vecteurs vitesses de sens opposés. Cet écoulement est assez chaotique, ce qui se manifeste par l'apparition des rouleaux de recirculations tout au long de la conduite [Bouffenech et Djamai, 2012].

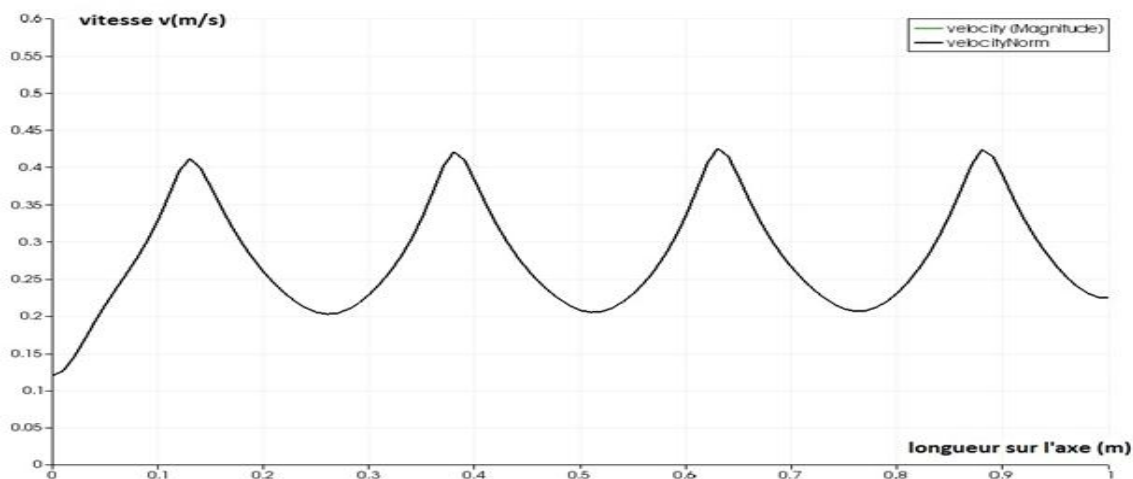


Figure I. 8 : Distribution de la vitesse dans conduite à quatre motifs

[Bouffenech et Djamai, 2012]

Ils ont aussi vérifié la relation liant le coefficient des pertes de charge et le nombre de Reynolds dans le cas d'un écoulement laminaire.

Conclusion

Dans les différents travaux présentés les écoulements turbulents dans des conduits à géométries complexes, les auteurs ont remarqué que la turbulence joue un rôle indispensable pour mélanger le plus rapidement possible les fluides.

La périodicité de la géométrie de la conduite rend l'écoulement assez chaotique ce qui se manifeste par l'apparition des rouleaux de recirculations tout au long de la conduite.

Ainsi que la complexité de la géométrie amène à l'apparition de trois régions différentes d'écoulement lorsque le fluide se rapproche de la paroi, il s'agit des domaines lisses, de transition et de pleine turbulence appelé aussi domaine du régime d'écoulement turbulent rugueux.

Dans notre travail on va évaluer la variation de la pression dans différents région de la conduite et on vérifiera l'équation des pertes de charge dans le cas d'un écoulement turbulent.

Chapitre II

Modélisation du phénomène de la turbulence par la méthode de Lattice- Boltzmann

La description du mouvement d'un fluide à l'échelle macroscopique par une résolution du mouvement particulaire microscopique est impossible du fait de la très grande densité particulaire à l'échelle macroscopique.

Une telle approche n'est pas non plus nécessaire puisque les variables macroscopiques comme la pression, la vitesse ou la température en un point donné résultent d'une moyenne statistique sur un large échantillon de particules et ainsi adoptée une approche statistique peut décrire le mouvement particulaire globale : on s'intéresse en particulier à la fonction densité de probabilité $f(x, c, t)$, qui correspond à la probabilité de trouver à un instant t avec une vitesse c et à une position x de l'espace.

Cette démarche s'intitule dans la maîtrise et l'évaluation de la pertinence de la stratégie de simulation de la méthode de Boltzmann pour la simulation d'écoulements turbulents au sein des conduits à géométrie complexe.

Cet objectif rejoint ainsi les nombreuses études visant à développer la simulation de la turbulence avec cette méthode et à proposer de plus en plus d'applications industrielles.

Beaucoup d'approches ont été utilisés en passant par des méthodes numériques telles que la méthode des volumes finis, celle des éléments finis ou des différences finies.

II.1. Méthode des différences finis

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

Les avantages de cette méthode sont : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Les inconvénients de cette méthode sont: limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

II.2. Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis consiste à décomposer le domaine de calcul en volumes élémentaires. Par la suite, l'utilisation d'un maillage décalé facilite le calcul des flux à travers les facettes qui limitent le volume. En effet, les nœuds de pression sont situés au centre des mailles et les nœuds de vitesses sont localisés au milieu des nœuds de pression.

Cette méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles.

Les avantages de cette méthode : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.

Les Inconvénient de la méthode est le peu de résultats théoriques de convergence.

II.3. Méthode des éléments finis

La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous format variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage.

Les avantages de la méthode sont : traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.

Les inconvénients de cette méthode sont : complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire [Goncalves, 2005].

II.4. Théorie de la méthode de Lattice Boltzmann

La résolution des équations aux dérivées partielles n'est plus devenu la solution pour les problèmes de la mécanique des fluides, mais elles nous ont fait penser à utiliser des méthodes de résolution directes qui consistent à faire une discrétisation spatiale et temporelle des équations macroscopiques d'Euler et de Navier stokes, parmi ces méthodes celle de lattice Boltzmann.

L'idée de Lattice Boltzmann réside sur le fait qu'un milieu n'est pas considéré continu comme on pourrait l'entendre avec l'équation de Navier-stokes mais plus particulièrement elle se base sur des théories exploitant les interactions entre molécules, cette approche se veut équivalente à celle de Navier-stokes.

Pour être plus précis, nous pourrions dire que cette vision particulière s'appuie sur les bases de la mécanique statique, de l'espace particulière cherche à redémontrer toute les équations de physique comme l'équation énoncée par le deuxième principe de la thermodynamique à l'aide de l'ensemble microscopique.

Boltzmann propose sa célèbre équation décrivant l'évolution spatio-temporelle d'une fonction f représentant la distribution des particules ayant une vitesse donnée à un endroit et à un temps donnés. Cette fonction est souvent appelée fonction de distribution et dépend donc de l'espace, de la vitesse et du temps $f = f(x, c, t)$.

II.5. Méthode de Boltzmann sur réseau

L'algorithme de Boltzmann sur Réseau (Lattice Boltzmann Method, LBM) a initialement été proposé pour résoudre le système de Navier-Stokes incompressible. L'algorithme LBM sort du cadre classique (schémas de volumes finis, différences finies etc.) et trouve ses origines dans un algorithme de type automate cellulaire (automate de gaz sur réseau).

La méthode de Boltzmann sur réseau consiste à modéliser un comportement macroscopique global à partir d'une description mésoscopique¹ simple des particules en interaction à l'échelle locale. Elle intègre des dynamiques spatiale et temporelle et se base sur une approche discrète. C'est une méthode qui généralise les automates cellulaires.

Ces derniers sont reconnus pour modéliser des systèmes à paramètres distribués et ont été utilisés pour diverses applications : l'hydrodynamique, l'épidémiologie, la dynamique spatiale des populations et des écosystèmes, les applications bio-médicales. Dans ces applications, les exemples avec espace d'état discret sont adaptés, cependant, dans des systèmes régis par des lois de conservation des variables macroscopiques (en thermodynamique ou en hydraulique), des espaces d'état continus semblent plus appropriés. Pour cette raison la méthode LB est donc considérée comme une extension convenable des automates cellulaires : et permettent par ailleurs de représenter divers type de modèles physiques [**Chopard et Droz, 2005**].

La méthode LB peut également être vue comme une méthode développée à partir de l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz. Dans montrent en effet que la méthode de Boltzmann sur réseau est une forme discrétisée de l'équation de Boltzmann.

Shan et ses collaborateurs [**Shan, 2006**] ont fait une représentation des systèmes hydrodynamiques à partir de la discrétisation de l'équation cinétique de Boltzmann

La méthode LB est aujourd'hui connue comme un outil puissant permettant la modélisation, la simulation et la résolution numérique des systèmes à paramètres distribués dans divers domaines et pour diverses applications. Parmi ces domaines, celui des fluides a largement été étudié, et fera l'objet de notre attention, notamment pour ce qui est des écoulements dans la géométrie complexe.

Nous allons dans la suite, présenter les méthodes dont dérive la méthode de Boltzmann sur réseau, ensuite définir les variables qui la caractérisent, les dynamiques, ainsi que le traitement des conditions aux limites.

1. L'échelle mésoscopique est une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique, qui caractérise les atomes ou les molécules, et l'échelle macroscopique de notre monde quotidien. Elle est notamment utilisée pour l'étude de l'incompressibilité des fluides tels que l'eau.

II.5.1. Historique et origines

La méthode de Boltzmann sur Réseau est une méthode numérique relativement nouvelle par rapport aux approches classiques utilisées en simulation numérique. Pourtant, entre le fondement de la physique statistique sur laquelle elle est basée et son achèvement théorique, il s'est écoulé plus d'un siècle. Ainsi, en guise d'introduction, nous allons présenter les grandes lignes historiques, nécessaires pour comprendre les différents aspects théoriques de cette méthode. Nous essaierons dans ce court paragraphe de faire ressortir les étapes fondamentales dans l'élaboration de l'équation de Boltzmann sur Réseau dont la construction théorique sera détaillée dans la suite. La construction de la méthode Boltzmann sur Réseau peut se résumer en deux étapes paradoxalement indépendantes : le développement de la physique statistique d'une part et l'apparition des automates cellulaires d'autre part.

La première étape nous propulse au milieu du XIX^{ème} siècle avec l'avènement de la physique statistique basée sur les travaux de l'Américain Josiah Willard Gibbs, des Anglais Lord Kelvin et James Clerk Maxwell et de l'Autrichien Ludwig Eduard Boltzmann. La physique statistique, dérivée de la théorie cinétique des gaz, s'intéresse non plus à l'évolution globale des quantités macroscopiques (densité, vitesse, pression) mais au comportement microscopique de la matière et tente de décrire l'évolution des particules qui la constitue [Simon, 2012].

Historiquement, les automates cellulaires ont été introduits par Von Neuman et Ulam en 1966, [Neuman, 1966]. Récemment, leur utilisation a été étendue aux modèles des systèmes à 2007, pour divers type d'applications. Une première méthode de type automates cellulaires pour la modélisation des écoulements a été établie avec la méthode des gaz sur réseau, dans les automates cellulaires, les espaces d'état utilisés sont discrets. Ce qui n'est pas adapté dans le cas des systèmes à paramètres distribués basés sur les lois de conservation des variables macroscopiques (par exemple la masse et la quantité de mouvement en hydraulique). La méthode de Boltzmann sur réseau apporte donc une amélioration en considérant des valeurs réelles continues.

Dans la suite, nous donnons un bref descriptif des méthodes d'automates cellulaires et de gaz sur réseau, considérées comme génératrices de la méthode de Boltzmann sur réseau [Anda Ondo, 2006].

II.5.2. Automates Cellulaires : modèle Gaz sur réseau

Un automate cellulaire (CA acronyme anglais de Cellular Automaton) résulte d'une triple discrétisation : celle de l'espace, celle des vitesses ou moments et celle du temps. Un automate cellulaire est constitué par un arrangement de cellules dans l'espace. Chaque cellule se trouve dans un état choisit dans un ensemble fini de possibilités. L'automate suit une évolution temporelle au cours de laquelle l'état de chaque cellule est actualisé suivant des

règles. Les données sur lesquelles les règles sont appliquées sont définies par l'état de la cellule en question ainsi que ceux des cellules voisines. Seuls les états des cellules dans un voisinage fini sont considérés.

Un automate cellulaire est dit homogène s'il n'y a qu'un seul ensemble de règles pour toutes les cellules, dans le cas contraire, il est dit hétérogène. Les automates utilisés dans les simulations qui suivent sont de type hétérogène par suite des conditions aux limites.

Les modèles Gaz sur réseau sont des automates cellulaires utilisés dans la simulation physique de phénomènes de transport (écoulements de fluide), dans lesquels les cellules sont arrangées de façon à obtenir un réseau de liaisons (liens) entre des sites (nœuds).

Le nœud représente la localisation spatiale des liaisons, lesquelles sont des états de moments².

Ces états de moments peuvent être occupés par des particules fictives (des quanta de masse et de moment), à ne pas confondre avec une entité physique comme par exemple une molécule d'eau. [Bougre, 2010]

On pourra trouver dans [Chopard et Droz, 2005] diverses définitions des automates cellulaires, elles se ramènent essentiellement à deux définitions, une formelle et l'autre informelle.

- De manière informelle : un automate cellulaire peut être défini par deux types de caractéristiques : structurelles et fonctionnelles. On distingue deux caractéristiques structurelles :
 - l'aspect topologique du réseau cellulaire (1D, 2D, hexagonal, carré, ...);
 - la définition du voisinage (Von-Neumann, Moore dans le cas 2D par exemple).

On compte également deux caractéristiques fonctionnelles :

- l'espace d'état (ensemble des états que peut prendre une cellule);
- la règle de transition de l'état (comment évolue un état et les règles qui définissent cette évolution).
- De manière formelle : un automate cellulaire se définit par le quadruplet $A = (T, S, V, f)$ où
 - T est un réseau cellulaire qui consiste en un pavage régulier d'un domaine de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$.

Chaque élément de T appelé cellule peut être repéré par le d -uplet (i_1, i_2, \dots, i_d) , d étant la dimension d'espace.

2. les termes lien et état de moment sont identiques (synonymes) dans la nomenclature du réseau

- S désigne l'ensemble d'état qui est un ensemble fini de valeurs qui représentent tous les états susceptibles d'être pris par chaque cellule.

$S = s_1, s_2, \dots, s_k$ L'ensemble d'état est fréquemment choisi le plus petit possible pour faciliter la simulation.

Si on a seulement deux états possibles ($S = 0, 1$), on parle alors de l'automate cellulaire binaire.

- V est une fonction qui définit le voisinage d'une cellule c définie par $V : T \Rightarrow T_n$

$$C \Rightarrow V(c) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Où, les cellules c_i pour $i = 1, \dots, n$ sont liées à c par une relation de proximité, contiguïté, influence, etc et n : la taille du voisinage $V(c)$.

- f est une fonction de transition qui permet de calculer l'état d'une cellule à l'instant $t + 1$ en fonction de son voisinage à l'instant t . Elle peut être définie par : $f : S_n \Rightarrow S$

$$f : S_t(v(c)) \Rightarrow S_{t+1} = f(S_t(v(c)))$$

Où, $S_t(c)$ désigne l'état de la cellule c à l'instant t , et $S_t(V(c))$ est l'état du voisinage.

Les automates cellulaires (en abrégé : AC) sont utilisés dans de nombreux domaines très divers relevant de la physique, de la biologie de l'écologie, de phénomènes sociaux, etc...

Il existe un grand nombre de types d'automates cellulaires, mais la plupart d'entre eux sont décrits à partir des caractéristiques génériques suivantes :

- Réseau discret de cellules : les composants de l'automate cellulaire sont organisés suivant un réseau à une, deux ou trois dimensions ;
- Homogénéité : toutes les cellules sont équivalentes, et leur évolution obéit aux mêmes règles de transition ;
- États discrets : l'état d'une cellule prend sa valeur parmi un nombre fini d'états discrets ;
- Interactions locales : chaque cellule interagit avec les cellules d'un voisinage plus ou moins immédiat supposé discrétisé ;

Dynamique discrète : à chaque pas de temps discret, une cellule met à jour son état en appliquant une règle de transition qui prend en compte les états des cellules de son voisinage [Anda Ondo, 2006].

On considère un réseau spatial de cellules dont l'état prend des valeurs dans un ensemble fini.

La méthode de Lattice Boltzmann est développée à partir du principe de l'automate cellulaire [Marcou, 2010].

II.5.3. Les équations de Navier-Stokes

Le modèle mathématique qui régit le mouvement du fluide est basé sur les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité incompressible. Ces équations sont définies dans un système de coordonnées cylindriques, ce qui permet une simulation bidimensionnelle axisymétrique (écoulement diphasique à effectuer).

Ces équations définissent les variables u , v , p et F et on définit dans l'écoulement une phase liquide et une phase gaz, les effets inertiels et visqueux sont dominés par la phase liquide. Ainsi, les équations sont résolues dans la phase liquide seule [Chetibi, 2013].

Hypothèses :

Le flux se produisant est composé de liquide et de gaz, un certain nombre d'hypothèses sont faites pour simplifier le modèle :

- Les bulles sont à deux dimensions et axisymétrique : Bulles de Taylor ; ³
- L'écoulement est incompressible : ⁴La simulation utilise des conditions aux limites périodiques pour modéliser le caractère répétitif de l'écoulement ;
- Le fluide est newtonien : L'air et l'eau sont des fluides newtoniens ;
- La tension de surface est constante : L'absence de gradients de température.

II.5.4 Principes des codes CFD

Les logiciels de simulation numérique des écoulements basés sur la méthode des volumes finis peuvent maintenant être considérés comme de véritables expériences numériques, lorsqu'elles sont faites avec soin. L'avantage des « méthodes numériques » est que toutes les quantités physiques liées à l'écoulement (champ de vitesse, champ de pression, contraintes etc.), sont immédiatement disponibles en tout point de l'écoulement.

Dans une expérimentation, l'obtention de ces quantités physiques en tout point du champ est souvent impossible ou très difficile en pratique.

³. C'est l'étude du mouvement d'une bulle de gaz isolée, dite bulle de Taylor, ou de l'interaction de deux bulles de Taylor montant dans un liquide en conduite verticale. Plusieurs mécanismes physiques influençant la vitesse de montée et la dynamique du culot de ces bulles sont analysés (viscosité, tension interfaciale), vitesse superficielle du liquide et accélération de la bulle.

⁴. En réalité, tous les fluides sont compressibles, certains plus que d'autres. La compressibilité d'un fluide mesure la variation de volume d'une certaine quantité de ce fluide lorsqu'il est soumis à une pression extérieure.

Pour simplifier les équations de la mécanique des fluides, on considère souvent que les liquides sont incompressibles. Ceci est valide dans le cas où le nombre de Mach ($Ma = u/a$) de l'écoulement est faible.

U : La vitesse de l'objet (par rapport à son environnement).

a : La vitesse de propagation ou célérité du son dans l'environnement considéré.

En termes mathématiques, l'incompressibilité se traduit par une masse volumique constante.

Mais les méthodes analytiques sont basées sur un écoulement potentiel, c'est à dire, incompressible et irrotationnel, et ne sont plus suffisantes pour faire face aux flux non linéaires autour d'une géométrie complexe.

La simulation en dynamique des fluides (CFD ; Computational Fluid Dynamics) est reconnue aujourd'hui comme l'un des outils incontournables de conception et est largement utilisée dans l'industrie. Le choix de l'utilisation de telle méthode numérique va dépendre essentiellement du type et de la complexité du problème à résoudre : La nature du fluide, le comportement thermodynamique, la modélisation du milieu et le problème stationnaire ou in stationnaire.

II.5.5. Fondements de la méthode de Boltzmann sur réseau

II.5.5.1. Théorie cinétique et équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann, qui constitue le fondement de la méthode éponyme, est une forme intégral-différentielle de la théorie cinétique des gaz. Elle décrit l'évolution de la fonction de distribution de masse d'un ensemble de particules en fonction de son environnement. Y apparaissent ainsi des termes liés au champ de force extérieure, mais aussi aux interactions entre les différentes particules :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla_x f + g \cdot \nabla_c f = \Omega(f) \quad (\text{II.1})$$

Où : $f = (x, c, t)$ représente la fonction de distribution de masse au point x , à la vitesse c et à l'instant t . g correspond au champ de force auquel est soumise la particule et Ω est un opérateur de collision interparticulaire. L'expression de l'opérateur de collision peut être déterminée par une analyse détaillée des interactions entre deux corps. Mais on retient surtout une expression proposée par Bhatnager, Gross et Krook en 1954 [**Bhatnagar et Gross, 1954**], qui permet d'approximer l'opérateur de collision par une relaxation vers un état d'équilibre local $f^{eq}(x, c, t)$:

$$\Omega(f) = - \frac{f(x, c, t) - f^{eq}(x, c, t)}{\tau} \quad (\text{II.2})$$

Où, τ est un temps de relaxation. L'équilibre thermique local correspond à l'équilibre de Maxwell- Boltzmann et est défini par la relation suivante :

$$f^{eq}(x, c, t) = \frac{\rho}{(2\pi k_B T / m)^{D/2}} \exp\left[-\frac{(c-u)^2}{2k_B T / m}\right] \quad (\text{II.3})$$

Où : D , k_B , T , m , ρ et u représentent respectivement la dimension de l'espace, la constante de Boltzmann, la température, la masse d'une particule, la masse volumique et la vitesse du fluide.

La combinaison des équations II.1 et II.2 permet d'écrire l'équation de Boltzmann sous la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla_x f + g \cdot \nabla_c f = - \frac{f - f^{eq}}{\tau} \quad (\text{II.4})$$

L'équation de Boltzmann sous cette forme est souvent appelée **LBGK (Bhatnagar-Gross-Krook)** modèle.

Le modèle de Boltzmann sur réseau qui utilise l'opérateur de collision BGK, est un grand modèle classique parmi les modèles fluides LB.

Historiquement, le succès de la méthode LB était fondé sur BGK. Ce modèle est le plus souvent utilisé pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles. Mais il utilise une approche quasi-incompressible.

La méthode BGK peut également être utilisée pour simuler les écoulements compressibles à faible nombre de Mach.

Le modèle BGK a été étendu dans de nombreuses tentatives, pour améliorer la stabilité numérique ou pour représenter d'autres phénomènes physiques.

BGK reste donc le modèle de choix dans de nombreuses situations, en raison de sa facilité de mise en œuvre ainsi que sa fiabilité. Une bonne critique du modèle BGK se trouve dans Chen et Doolen [**Chen, 1998**].

Les quantités hydrodynamiques habituelles (masse volumique, vitesse et énergie interne massique E) se calculent à l'aide des moments des fonctions de distribution dans l'espace des vitesses de particules. Par définition, ces quantités hydrodynamiques peuvent être obtenues soit via les distributions à l'équilibre f^{eq} , soit via les fonctions de distribution f totales :

$$\rho = \int f dc, \rho u = \int (f c) dc, \rho E = \frac{1}{2} \int (f (c - u)^2) dc, \quad (\text{II.5})$$

$$\rho = \int f^{eq} dc, \rho u = \int (f^{eq} c) dc, \rho E = \frac{1}{2} \int (f^{eq} (c - u)^2) dc, \quad (\text{II.6})$$

Le système d'équation précédent (équations (II.3), (II.4) et (II.5)) forme un système fermé.

En plus d'être complexe et probablement trop coûteuse en termes de ressources informatiques, sa résolution complète est inutile puisqu'elle donnerait accès à une infinité de moments des fonctions de distribution, alors que seuls les moments d'ordre 0 (masse volumique), d'ordre 1 (quantité de mouvement) et d'ordre 2 (énergie interne) sont généralement d'intérêt.

À titre d'exemple, les équations régissant le comportement de ces quantités hydrodynamiques peuvent être obtenues en formant les moments de l'équation de Boltzmann BGK (II.4) (multiplication par 1, u_a , puis $(c - u)^2$ puis intégration sur l'espace des vitesses). On obtient de

cette manière les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \nabla \cdot P = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\rho \frac{dE}{dt} + P : \nabla u + \nabla q = 0 \quad (\text{II.9})$$

En posant $u_a = c - u$ la vitesse intrinsèque et $P = \int (u_a u_a f) du_a$ et $q = \frac{1}{2} (u_a^2 u_a f) du_a$ les tenseurs de flux de quantité de mouvement et de flux d'énergie.

A partir de la théorie cinétique, l'énergie interne peut être exprimée comme, $E = \frac{3}{2} \frac{k_B T}{m}$

En l'absence d'équations supplémentaires établissant un lien entre \mathbf{P} , \mathbf{q} et les autres quantités thermodynamiques (équations constitutives), ce système n'est pas fermé et ne résout *a priori* pas les problèmes d'Euler ou de Navier-Stokes.

L'utilisation de LBGK à des fins numériques est donc conditionnée par deux contraintes :

- le système d'équations doit être simplifié,
- et sa résolution doit bien permettre d'obtenir une solution au problème de Navier-Stokes.

La levée de ces deux conditions passe par une projection des fonctions de distribution, puis par une troncature de cette projection. Une expansion de Chapman-Enskog permettra alors d'explicitier certaines conditions sur l'ordre de la troncature, puis surtout d'obtenir les équations constitutives manquantes [Seguineau De Preval, 2013]

II.5.5.2. Équation de Boltzmann

Une description statistique d'un système peut être expliquée par la fonction de distribution $f(x, c, t)$ qui est le nombre de molécules au temps t placé entre les positions x et $x + dx$, qui ont des vitesses entre c et $c + dc$. Les actes de la force extérieure F sur une molécule de gaz de la masse d'unité changeront la vitesse de la molécule de c en $c + Fdt$ et sa position de x en $x + cdt$. Comparons maintenant le nombre de molécules, $f(x, c, t)$, avant d'appliquer la force externe au nombre de molécules après la perturbation, $f(x + cdt, c + Fdt, t + dt)$. On peut distinguer deux (02) étapes successives qui sont répétées inlassablement pendant la simulation. En chaque pas de temps unité, on effectue une étape de translation suivie d'une étape de collision (au même temps).

i. Étape de translation/propagation

Dans l'étape de translation, toutes les particules se déplacent suivant leurs états de moment respectifs vers les voisins les plus proches. Ces états de moment ayant été définis de telle sorte qu'ils coïncident avec la distribution spatiale des sites. On note que les mouvements sont synchronisés de sorte qu'après la translation toutes les particules aboutissent exactement sur les sites (nœuds).

En l'absence de collision, les particules sont en équilibre thermodynamique. Un tel état est décrit par une fonction de distribution à l'équilibre f^{eq} solution de l'équation $(\frac{df}{dt})_{coll} = 0$

Le nombre de molécules avant d'appliquer la force externe est égal au nombre de molécules après sollicitation ce qui nous donne :

$$f(x + cdt, c + Fdt, t + dt)dxdc = f(x, c, t)dxdc + 0 \quad (II.10)$$

ii. Étape de collision

Cette étape est locale et implique uniquement les liens qui arrivent au même nœud. Les règles de mise à jour sont appliquées aux états de moment de chaque site. Ces règles ne prennent en compte que les états de moment du site et ignorent les autres variables du système (hormis les champs extérieurs). La collision est supposée satisfaire aux lois de conservation de la masse et de l'impulsion [Masselot, 2000].

Cependant, si les collisions ont lieu entre les molécules il y aura une différence nette entre les nombres de molécules dans l'intervalle $drdc$. Le taux de changement entre le statut final et initial de la fonction de distribution s'appelle l'opérateur de collision Ω . Par conséquent, l'équation de l'évolution du nombre de molécules s'écrit comme suit :

$$f(x + cdt, c + Fdt, t + dt)dxdc = f(x, c, t)dxdc + \omega(f)dxcdt \quad (II.11)$$

Le membre de droite de l'équation de Boltzmann, appelé opérateur de collision, représente l'effet des collisions entre particules. Si ce terme est nul, les particules sont alors simplement advectées et soumises à l'action de la force F présente dans le membre de gauche. Si les particules se rencontrent, l'évolution du système dépend alors de la forme de l'opérateur de collision.

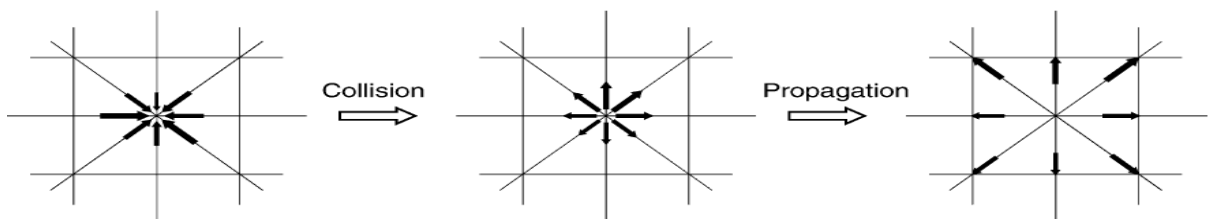


Figure II. 1: la collision et la propagation

On va s'intéresser à la deuxième étape vu qu'elle présente l'état général.

Si on division l'équation (II.11) par $dt dx dc$ et comme dt tend vers zéro (0), on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Omega(f) \quad (\text{II.12})$$

L'équation discrète de Boltzmann peut être écrite comme :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + c_i \Delta f_i = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \quad (\text{II.13})$$

L'équation précédente est le pivot de la méthode de lattice Boltzmann et remplace l'équation de Navier-Stokes en CFD.

Dans la méthode de Boltzmann, le domaine de solution doit être divisé en lattice. A chaque nœud de lattice beaucoup de particules (fonction de distribution) résident. Quelqu'une de ces particules se déplace le long des directions indiquées aux nœuds voisins. Le nombre de directions dépend de l'arrangement de lattice [**Oughlissi et Zougagh, 2011**].

II.5.5.3. Les modèles du réseau (Arrangements et dimensions de la Lattice)

La terminologie commune utilisée en LBM pour se référer à la dimension du problème et du nombre de vitesses est DnQm, où, n représente la dimension du problème (2 pour 2D et 3 pour 3D) et m se réfère au modèle de vitesse ou nombre de directions de propagation dans les lattices, longueur zéro comprise (centre de nœud de particule). Les paragraphes suivants présentent les arrangements les plus utilisés de lattice, 1-D, 2-D et 3D.

i. Lattice Unidimensionnelle 1-D

En général, deux modèles peuvent être utilisés pour des arrangements de lattice a une seule dimension, appelés D1Q3 et D1Q5. Figure (II.2). D1Q3 est le plus populaire. Le nœud noir est le nœud central, alors que les nœuds gris sont des nœuds voisins. Les particules se déplacent du nœud central aux nœuds voisins avec une vitesse spécifique appelée vitesse de lattice.

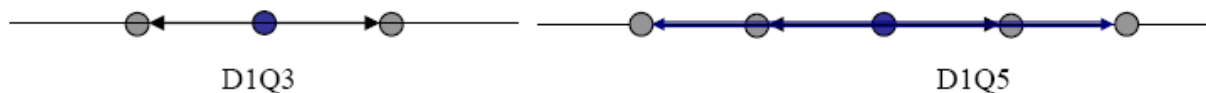


Figure II. 2 : lattice arrangement pour un problème 1-D

• Réseau D1Q3 ou D1Q2

Pour ce schéma, il y'a trois vecteurs de vitesse (c_0 , c_1 et c_2) pour f_0 , f_1 et f_2 , qui sont égales à 0, et, respectivement. Une pratique générale est de laisser, donc, $c_1 = 1$ et $c_2 = -1$ où Δx et Δt sont la distance et l'intervalle du temps, respectivement. Pour cet arrangement, le nombre de particules factices pour chaque instant ne peut pas excéder trois particules. Une particule stagnante (vitesse nulle) réside sur l'emplacement (nœud central). Les deux autres particules se déplacent au nœud gauche ou au nœud droit dans la procédure de déplacement. Les facteurs de pondération, w_i , peuvent être utilisés 0, 1/2 et 1/2 pour f_0 , f_1 et f_2 , respectivement.

Par conséquent, il n'y a aucun besoin de considérer l'effet f_0 . En conséquence cet arrangement est référé comme D1Q2. Il est également possible d'utiliser des facteurs de pondération de $4/6, 1/6$ et $1/6$ pour f_0, f_1 et f_2 , respectivement.

Dans ce schéma f_0 a besoin d'être calculé et l'arrangement s'appelle D1Q3. [Bouffenech et Djamaï, 2012]

- Réseau D1Q5

Pour cet arrangement, il y a cinq vecteurs de vitesse pour f_0, f_1, f_2, f_3 et $f_4, 0, 2/6, 2/6, 1/6$ et $1/6$, respectivement. Le nombre de toutes les particules à chaque instant du temps ne peut pas excéder cinq particules. Les facteurs de pondération, w_i , sont $6/12, 2/12, 2/12, 1/12$, et $1/12$ pour f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4 , respectivement.

- ii. Deux dimensions (bidimensionnelles)

- Réseau D2Q5

Ce modèle a cinq vecteurs de vitesse des nœuds centraux. Une des particules réside dans le nœud central, par conséquent sa vitesse est nulle $c(0,0)$.

La fonction de distribution f_1 et f_2 se déplace avec $c(l, 0)$ et $c(-1, 0)$ (à l'est et l'ouest), respectivement, tandis que f_3 et f_4 déplacent avec la vitesse $c(0, 1)$ et $c(0, -1)$ (au nord et du sud), respectivement.

Notant qu'il est admis que $\Delta x = \Delta y = \Delta t$. Pour l'arrangement D2Q5, les facteurs de pondération pour f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 sont $0, 1/4, 1/4, 1/4$ et $1/4$, respectivement.

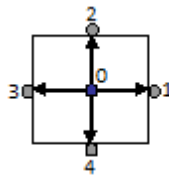


Figure II. 3 : lattice arrangement pour des problèmes 2-D, D2Q5

A noter que cet arrangement ne peut pas être utilisé pour simuler les écoulements de fluide.

- Réseau D2Q9

Ce modèle est très connu, particulièrement pour résoudre les problèmes d'écoulement de fluides. Il y'a neuf vecteurs de vitesse, la vitesse centrale est nulle comme dans le modèle D2Q5 (figure II.4). Les vitesses sont :

$c(0,0), c(1,0), c(-1,0), c(0,1), c(0,-1), c(1,1), c(-1,1), c(-1,-1)$

et $c(1,-1)$ pour $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ et f_8 respectivement.

Les facteurs de pondération pour des fonctions de distribution correspondantes sont $4/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/36, 1/36, 1/36$ et $1/36$.

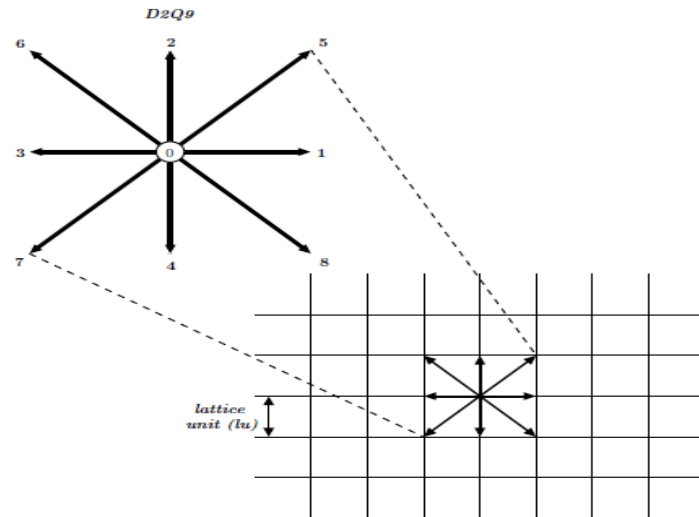


Figure II. 4 : lattice arrangement pour un problème D2Q9

iii. Lattice Tridimensionnelle (trois dimensions)

En général, deux modèles sont utilisés dans la simulation des problèmes de trois dimensions, D3Q15 et D3Q19.

• Réseau D3Q15

Dans ce modèle 15 vecteurs de vitesse sont employés figure (II.5) la fonction de distribution centrale, f_0 à une vitesse nulle. Le modèle D3Q15 est le plus généralement utilisé pour les simulations 3-D.

Notant que les nœuds 1, 2, 3 et 4 sont aux centres des faces Est, Nord, Ouest et du Sud, respectivement. Les nœuds 5 et 6 sont aux centres des faces avant et arrière, respectivement. Les nœuds 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 et 14 sont aux coins de la lattice.

Les quinze vecteurs de vitesse pour les fonctions de distribution de $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}$, et f_{14} . Sont les suivants :

$c(0, 0, 0), c(1, 0, 0), c(0, 1, 0), c(-1, 0, 0), c(0,-1,0),$

$c(0, 0, 1), c(0, 0, -1), c(1,1,1), c(1,1,-1), c(1,-1,-1),$

$c(1,-1,1), c(-1,1,-1), c(-1,1,1), c(-1,-1,1)$ et $c(-1,-1,-1)$, respectivement.

Les facteurs de pondération sont $16/72$ pour f_0 $8/72$ pour $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ et $1/72$. Pour $f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}$ et f_{14} .

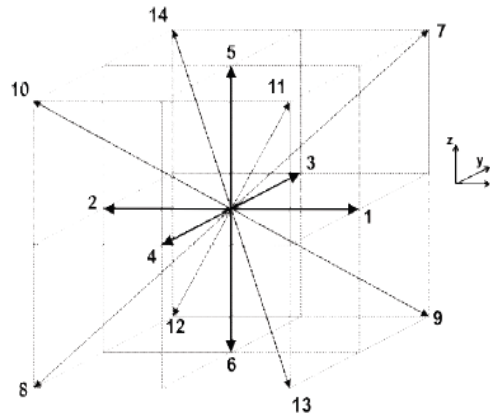


Figure II. 5 : Discrétisation D3Q15

- Réseau D3Q19

Ce modèle a 19 vecteurs de vitesse, avec le vecteur central de la vitesse nulle, figure (II.6). Les facteurs de pondération sont pour f_0 est $12/36$, pour $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ est $2/36$ pour $f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{16}, f_{17}$ et f_{18} est de $1/36$. [Bouffenech et Djamaï, 2012]

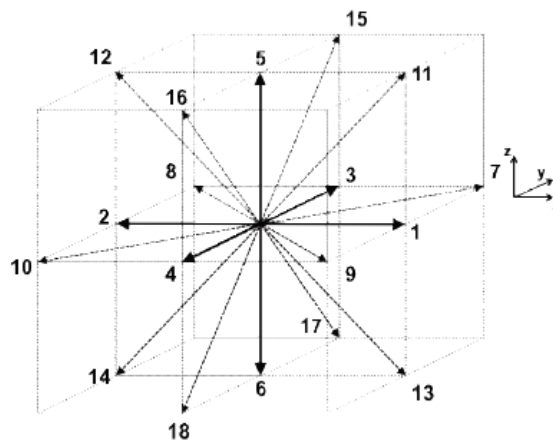


Figure II. 6 : Discrétisation D3Q19

II.5.6. Les Modèles d'équation de Boltzmann

II.5.6.1. Le modèle HPP

Le modèle Hardy, de Pazzis et Pomeau est un automate bidimensionnel. Il consiste à discrétiser l'espace par un réseau carré de pas $\Delta x = 1$. On associe à chaque lien du réseau une quantité qui prend la valeur 1 s'il y a une particule ou 0 sinon. L'évolution en un pas de temps unité ($\Delta t = 1$) se décompose de la manière suivante :

Collision: cette étape est locale et implique uniquement les liens qui arrivent au même nœud. Parmi les configurations possibles se trouve la collision frontale de deux particules qui peuvent subir une variation $\pi/2$ de la direction de leurs vitesses.

Propagation: les particules présentes en chaque lien sont transportées vers les quatre plus proches voisines selon leurs vitesses respectives, qui sont données par $c_j = \{c_1=(1,0), c_2=(0,1), c_3=(-1,0), c_4=(0,-1)\}$. On note que les mouvements sont synchronisés de sorte qu'après advection toutes les particules suivent l'équation d'évolution de la forme:

$$n_j(x_i + c_j, t + 1) = n_j(x_i, t) + \Omega(n_k) \quad (\text{II.14})$$

Où, $n_j(x_i, t)$ est le nombre de particules de vitesse c_j au nœud x_i au temps t et $n_j \in \{0,1\}$. Les indices j, k désignent le numéro de la vitesse discrète, $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Le terme Ω modélise l'opérateur de collision. [Taoussi, 2010]

II.5.6.2. Le modèle FHP

En 1985 Frisch, Hassalacher et Pomeau ont proposé un nouveau maillage de l'espace en utilisant un réseau hexagonal pour obtenir l'isotropie du modèle.

A l'aide du développement asymptotique de Chapman-Enskog sur l'équation (II.14), on obtient les équations macroscopiques de Navier-Stokes. En particulier avec le modèle FHP on a à basse vitesse :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \nabla[g(\rho)\rho u u] = -\nabla P + \nu \Delta(\rho u) + \eta \nabla \nabla \cdot (\rho u) \quad (\text{II.15})$$

Dans ce modèle, on note la richesse des cas possibles de l'étape de collision, et le fait de choisir de manière aléatoire la configuration après collision pour la même configuration avant collision.

- Bruit intrinsèque dû à la large fluctuation relative des nombres de particules n_j (prendre des moyennes d'ensemble à partir de différentes configurations initiales n'est pas possible pour les situations où les effets non linéaires jouent un rôle).
- Le non-respect de l'invariance Galiléenne, qui se traduit par $g(\rho) \neq 1$ dans l'équation macroscopique (II.15).
- La présence dans la pression P d'une contribution non-physique en u^2
- Il existe des quantités parasites non-physiques qui sont conservées: celles-ci peuvent affecter le comportement à grande échelle du modèle. [Taoussi, 2010]

II.5.6.3. Schéma de Boltzmann sur réseau

Historiquement, le schéma de Boltzmann sur réseau est obtenu à partir des automates cellulaires. En effet, MacNamara et Zanetti [MacNamara, 1988] ont proposé de remplacer

dans l'équation (II.14) les variables booléennes n_j par leur moyenne \bar{f}_i et d'obtenir une formulation fondée sur l'équation de Boltzmann avec comme équation d'évolution:

$$f_i(x_i + c_j, t + 1) = f_i(x_i, t) + \Omega(f)(x, t) \quad \text{avec, } 0 \leq j \leq b \quad (\text{II.16})$$

La variable de base est \bar{f}_i qui est la moyenne spatiale de l'ancienne variable discrète n_j effectuée sur un nombre de nœuds donné. Cette grandeur \bar{f}_i est continue, prend ses valeurs dans le segment $[0,1]$ et peut s'interpréter comme une distribution, ou probabilité de présence de particules. On note ici la difficulté d'exprimer l'opérateur de collision Ω surtout lorsque le nombre de vitesses discrètes est important (espace de dimension trois). Pour simplifier le schéma, on peut introduire l'opérateur de collision linéarisé autour d'un état d'équilibre f_k^{eq} .

Ainsi, le schéma de Boltzmann est simplifié et l'opérateur de collision s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\Omega = \sum_{k=0}^b \omega (f_k - f_k^{eq}) \quad (\text{II.17})$$

II.5.6.4. Modèle à un seul temps de relaxation [BGK]

On peut encore simplifier le schéma de Boltzmann sur réseau en utilisant l'approximation de Bhatnagar-Gross-Krook [**BGK, 1954**] noté souvent «BGK» qui consiste à avoir un seul temps de relaxation τ . Ainsi, l'opérateur de collision dans les modèles BGK s'écrit sous la forme :

$$\Omega = -\frac{1}{\tau} (f_j - f_j^{eq}) \quad (\text{II.18})$$

On remarque ici que le schéma de Boltzmann sur réseau est entièrement déterminé à partir des f_j^{eq} de l'opérateur de collision et de l'ensemble des vitesses Ω .

II.5.6.5. Modèle à plusieurs temps de relaxation [Modèle d'Humières]

Qian d'Humières et par ailleurs Succi et autres [**Succi, 2001**] proposent une loi de distribution polynomiale en vitesse pour la distribution d'équilibre f_j^{eq} et un opérateur de relaxation ω diagonal. Pour décrire l'opérateur de collision, d'Humières propose de construire un espace de moment et de prendre les moyennes des puissances successives des composantes de la vitesse, comme il est pratiqué en mécanique statique.

Ainsi, la collision n'est autre que la relaxation des différents moments. Grâce à l'interprétation physique des moments, leur paramètre de relaxation sera directement lié aux différents coefficients de transport hydrodynamique. Ce mécanisme permet alors de contrôler indépendamment chaque moment à travers son paramètre de relaxation. De plus l'opérateur de collision sera diagonal. On remarque que si on prend le même paramètre de relaxation pour tous les moments, on retrouve le modèle de BGK.

Après cette brève illustration de l'origine du schéma Boltzmann sur réseau, on note que cette méthode a des liens directs ou indirects avec d'autres théories [Tekitek, 2007] :

- L'équation classique de Boltzmann ;
- Les modèles de Broadwell ; et
- Récemment la méthode des volumes finis.

N.B :

On entend très souvent du passage de (lattice-gas cellular «LGA» au modèle de lattice Boltzmann « LBM »).

La motivation principale pour la transition de LGA à LBM était le désir d'enlever le bruit statistique en remplaçant le nombre booléen de particules dans une direction de réseau avec sa moyenne d'ensemble, la prétendue fonction de distribution de densité. Accompagnant ce remplacement, la règle discrète de collision est également remplacée par une fonction continue connue sous le nom d'opérateur de collision. Dans le développement de LBM, une simplification importante doit rapprocher l'opérateur de collision avec Limite Bhatnagar-Brute-Krook de la relaxation (BGK). Ce modèle du lattice BGK rend des simulations plus efficaces et permet la flexibilité des coefficients de transport. D'autre part, l'arrangement de LBM peut également être considéré comme forme discrétisée spéciale de l'équation continue de Boltzmann [Succi, 2001].

II.5.7. Modèle de turbulence LES appliqué aux modèles LBE

La simulation des grandes échelles (LES) se propose de ne résoudre que les plus grandes échelles turbulentes de l'écoulement, en représentant l'action des petites échelles non résolues par le biais d'un modèle de viscosité turbulente de sous-maille (par exemple le **modèle de Smagorinsky**)

Par conséquent, les fonctions de distributions sont filtrées et l'échelle des fonctions de distributions résolue est séparée en une contribution résolue et en une contribution non résolue.

La forme filtrée du modèle D2Q9–LBE pour le modèle de turbulence LES est modélisée par :

$$\bar{f}_k(x + c_k \delta_t, t + \delta_t) = \bar{f}_k(x, t) - \frac{1}{\tau_{tot}} [\bar{f}_k - \bar{f}_k^{eq}] \quad (\text{II.19})$$

Où \bar{f}_k et \bar{f}_k^{eq} représentent respectivement la fonction de distribution et la fonction de distribution d'équilibre local de l'échelle résolue. L'idée principale est d'augmenter localement le temps de relaxation τ en définissant un nouvel espace et temps dépendant du temps de relaxation total : $\tau_{tot} = \tau + \tau_t$, où τ_t (la contribution turbulente) modélise les effets de

mouvement de l'échelle non résolue qui a été incluse dans le temps de relaxation de τ_{tot} de l'équation (II.19). La viscosité effective ou totale τ_{tot} est donc donnée par la relation suivante:

$$\nu_{tot} = \nu + \nu_t = \frac{1}{3}(\tau_{tot} - \frac{1}{2})\frac{\delta_x^2}{\delta_t} \quad (II.20)$$

Où, ν est la viscosité correspondante au temps de relaxation τ . τ_t représente la viscosité turbulente. Dans le modèle de sous-maille de Smagorinsky, la viscosité turbulente est calculée en fonction du tenseur des taux de déformation $S_{\alpha\beta} = (\partial_\beta \bar{u}_\alpha + \partial_\alpha \bar{u}_\beta)$ du champ de vitesses filtrées et d'un filtre de longueur Δ (habituellement fixé à $\Delta = \delta_x$) comme suit :

$$\nu_t = (C_{SMG}\Delta)^2 \bar{S} \quad (II.21)$$

avec

$$\bar{S} = \sqrt{2 \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}} \quad (II.22)$$

Où, \bar{S} est le taux de déformation caractéristique et C_{SMG} est la constante de sous-maille de Smagorinsky qui dépend de la physique de problème et qui varie généralement entre 0,1 et 0,2

Il est important de noter que dans le modèle D2Q9-LBE, le tenseur des taux de déformation $S_{\alpha\beta}$ peut être directement obtenu à partir du moment de second ordre de la fonction de distribution de non équilibre soit :

$$S_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\rho_0 C_s^2 \tau_{tot}} \sum_k c_{k,\alpha} c_{k,\beta} [f_k - f_k^{eq}] \quad (II.23)$$

(de sorte que le taux de dissipation est calculé comme $\varepsilon_d = 2\nu \sum_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$)

Avec Δ et C_{SMG} donnés, le temps de relaxation due à la contribution turbulente τ_t , peut être obtenu à partir des équations (II.21, II.22 et II.23) [Dupuis, 2002].

$$\tau_t = \frac{1}{2}(\sqrt{\tau^2 + 18\sqrt{2}(\rho_0 c^2)^{-1}(C_{SMG}\Delta)^2 \bar{S}} - \tau) \quad (II.24)$$

La quantité C_{SMG} est habituellement prise plus petite que 0,2.

Ce modèle est apparait plus intéressant dans la méthode de lattice Boltzmann, il a pu proposer sa célèbre formule pour la viscosité turbulente dans les modèles numériques dans le cas des écoulements turbulents. C'est pour cela on a choisi d'appliquer ce modèle pour notre étude afin de déterminer sa validité pour un écoulement turbulent dont la géométrie est complexe (convergent-divergent).

II.6. Condition aux limites sur la vitesse et la pression

Les conditions aux limites de la Méthode de Lattice Boltzmann posent certains problèmes, en effet, elles sont généralement spécifiées avec d'autres méthodes de simulation conventionnelles sous forme de conditions sur les vectrices **vitesse**s et la **pression** (ou leurs

dérivées), la variable primitive de la Méthode de Lattice Boltzmann est constituée des densités de distribution discrètes. Le nombre de degrés de liberté donne ainsi au système une indétermination qu'il s'agit de lever pour garantir des simulations les plus fidèles possibles. Plusieurs méthodes ont été développées pour pallier ces défauts.

Dans le cadre de simulations d'écoulement dans des géométries complexes (écoulement à travers une succession de convergent-divergent), trois types de conditions aux limites sont d'intérêt : les conditions de Dirichlet, les conditions aux limites "de mur" qui imposent une vitesse nulle sur une surface spécifiée, et les conditions aux limites d'entrée et de sortie.

II.6.1. Conditions aux limites de Dirichlet

Comme on a pu le constater, dans la méthode LB, la pression et la densité sont reliées à travers l'équation d'état $p = c_s^2 \rho$

Où, c_s représente la vitesse du son.

Donc, imposer une condition aux limites de pression revient à imposer une condition aux limites de densité. Rappelons que la fluctuation de la densité δ_ρ et la vitesse macroscopique u pour un écoulement incompressible sont définies à partir des fonctions de distributions f_k des particules discrètes et leurs vitesses associées c_k soit: $\delta_\rho = \sum_k f_k$ et $j = \rho_0 u = \sum_k c_k f_k$

Dans ce type de conditions aux limites, la limite du domaine d'écoulement est considérée comme perpendiculaire au vecteur unitaire \vec{e}_1 . Cela signifie que, pour une particule située sur le bord dont la position est définie par le vecteur \vec{r} , la localisation $\vec{r} + \delta_x \vec{e}_1$ se situe à l'extérieur du domaine d'écoulement, et toute particule définie par $\vec{r} - \delta_x \vec{e}_1$ participe à la dynamique de la simulation en entrant dans le domaine. En conséquence, l'ensemble des particules proches de la limite du domaine de l'écoulement de position \vec{r} placée à une position $\vec{r} - c_k$ sont inaccessibles lorsque $c_k = -1$ [Jonas, 2007].

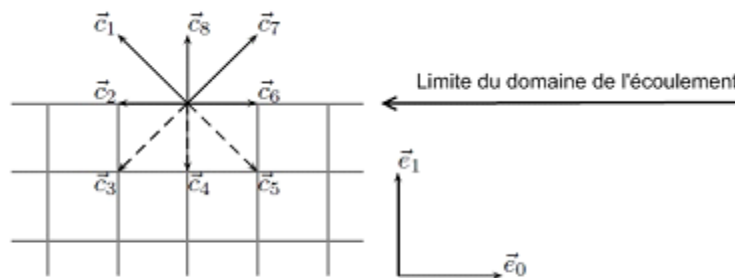


Figure II. 7 : les limites et l'emplacement des particules selon Dirichlet

On distingue alors trois classes de particules voisines des limites :

- Particules aux déplacements parallèles aux bords où dirigés vers l'intérieur du domaine d'écoulement : $c_k > 0$. Ces particules participent à la dynamique de l'écoulement.
- Particules qui sortent du domaine: $c_k = -1$. Ces particules posent un problème pour l'estimation de la densité ρ évoquée précédemment. Des relations de fermetures nécessaires seront alors nécessaires pour le calcul de la densité.

II.6.2. Conditions aux limites de vitesse (bounce back)

Du fait du maillage cubique de l'espace dans la Méthode de Lattice Boltzmann, certains nœuds sont situés dans une zone fluide et sont donc appelés nœuds fluides, alors que d'autres nœuds sont situés dans une zone solide et sont donc désignés par nœuds solides.

La condition aux limites la plus simple intervient lorsque la frontière physique du domaine correspond aux bords d'un ou plusieurs éléments. Dans ce cas, la règle du rebond à mi-chemin (*Half-way bounce-back rule*) est employée [Stobiac et Bertrand, 2013].

$$f_i^{in}(r_{j,k}, t+1) = f_i^{out}(r_{j,k}, t) \quad (\text{II.25})$$

où $r_{j,k}$ correspond au point de coordonnées (x_j, y_k) et \bar{i} est la direction opposée à la direction i

Le principe consiste en plusieurs étapes, la première étape est la collision ensuite les différents termes sont diffusés dans leurs directions respectives (propagation). Les termes sortants du domaine (flèches vertes a, b et c dans la figure ci-dessous) sont alors "renvoyés" dans la direction opposée.

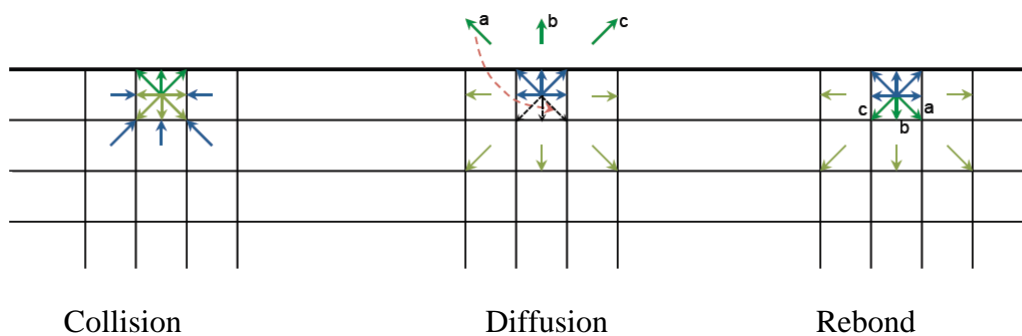


Figure II. 8 : mécanisme de la condition de "rebond à mi-chemin"

Cette condition aux limites permet de conserver une convergence à l'ordre 2 pour des écoulements simples comme un écoulement entre deux plans parallèles [Dupuis, 2002].

Elle conserve la masse, puisqu'il n'y a pas de calcul de nouveaux termes, mais uniquement des renvois. Sa simplicité en fait ainsi la condition aux limites la plus utilisée pour des frontières rectilignes. Certains développements, comme la règle de rebond modifiée [Stobiac et Bertrand, 2013], permettent aussi d'imposer une vitesse non nulle à la paroi en rajoutant un terme proportionnel à la vitesse dans les termes de collision sortants.

Cependant, cette condition aux limites n'est pas satisfaisante lorsque les frontières physiques du domaine ne coïncident pas avec les limites des éléments individuels. En effet, la condition aux limites de rebond approxime la frontière par des "escaliers", introduisant ainsi des erreurs de discrétisation spatiale, comme on peut le voir dans la figure suivante :

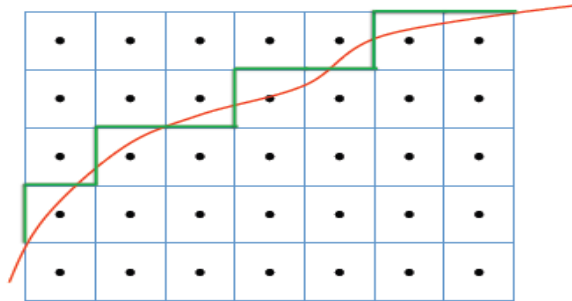


Figure II. 9 : effet "escalier"

Ces erreurs peuvent rapidement devenir une source de problèmes conséquents du fait de la nature récurrente de l'équation de Boltzmann discrète utilisée dans la MBR. Une première solution à ce problème consiste à raffiner le maillage pour diminuer l'effet "escalier". Mais cette solution est très coûteuse en l'absence de raffinement local du maillage.

Guo et al ont développé une condition aux limites prenant en compte pour chaque maille la distance entre son centre et la frontière physique.

Cette méthode dite d'extrapolation permet de reproduire plus fidèlement les frontières plus complexes avec un maillage cubique et peu adapté aux frontières courbes. En contrepartie, il a été observé que cette condition aux limites pouvait être insuffisamment définie dans certaines configurations géométriques, lorsque deux directions opposées pointent toutes les deux vers une paroi solide, par exemple [Stobiac et Bertrand, 2013].

II.6.3. Conditions d'entrée et de sortie

Une pratique répandue de conditions d'entrée et de sortie est d'imposer un différentiel de pression particulier, d'imposer un profil de vitesse particulier ou encore de garantir un certain débit.

Pour les mêmes raisons que précédemment, ces conditions qui portent directement sur la vitesse ou la pression comportent une part d'incertitude dans le cadre de la méthode de Lattice Boltzmann. Lors de simulations d'écoulements, une solution souvent employée pour éviter ces problèmes consiste à considérer un fluide avec une pression constante (soit une masse volumique constante), à utiliser des conditions périodiques dans le sens de l'écoulement, puis à remplacer le terme du gradient de pression dans l'équation de Navier-Stokes par une force extérieure [Succi, 2001 et Dupuis, 2002]. Cette force extérieure "imité" en quelque sorte le

gradient de pression. Cette méthode nécessite par contre de connaître le champ de pression en tout point du domaine afin de pouvoir déterminer la force à appliquer localement. Cette contrainte ne pose pas de problème pour les écoulements dans des géométries simples telles que les écoulements entre deux plans infinis ou dans un tube. En effet, dans ces cas, on peut considérer que le gradient de pression est uniforme et correspond au quotient de la différence de pression par la longueur totale du tube. Par contre, l'hypothèse d'uniformité du gradient de pression n'est plus valable dans des géométries plus complexes telles que des contractions ou extensions soudaines.

Dans ces cas où il n'est pas possible d'établir une relation directe entre l'écoulement recherché et le champ de pression correspondant, le champ de force doit être déterminé empiriquement ou par une procédure itérative. C'est notamment les cas pour des écoulements turbulents entre deux plans infinis [Dupuis, 2002].

Conclusion

En conclusion, on a vérifié que la méthode de lattice Boltzmann qui utilise les modèles de vitesse discrète pour aboutir approximativement des solutions des équations de Navier Stokes. L'équation de Boltzmann dans le cas d'un écoulement en régime turbulent est établie parce que c'est dans ces conditions que des solutions analytiques existent et qui nous permettent de la vérifier.

C'est pour cela que notre objectif est d'utiliser la méthode LB pour la discrétisation des équations régissant l'écoulement turbulent dans une conduite à géométrie variable car elle est la méthode la plus adéquate aux problèmes liés à des obstacles les plus complexes. En plus à cause de la complexité de la géométrie, la méthode de lattice Boltzmann nous donne des solutions bien précises et faciles à programmer.

Chapitre III

Programme sous Palabos de l'écoulement turbulent dans une conduite à motifs périodiques

Un tel modèle capte mieux les phénomènes dans un écoulement tourbillonnaire intense en présence des parois.

L'écoulement turbulent d'un fluide incompressible dans une conduite à motif périodique fait par des dimensions particulières, la création de la géométrie est reliée aux conditions aux limites qu'il faut donner pour avoir la géométrie la plus adéquate.

Les problèmes d'écoulement peuvent se résoudre après avoir fait une transformation de la géométrie pour faire un maillage structuré, qui peut être produit pour des géométries les plus complexes.

III.1. Caractère périodique de l'écoulement

PATANKAR et Col ont développé un concept général d'écoulements établis et périodiques. Ces écoulements prennent naissance loin des extrémités des conduits, dont la section varie périodiquement dans le sens de déplacement du fluide. Cette particularité permet de ramener l'étude de ce type d'écoulement à celle d'un module isolé, de longueur égale à la distance entre deux sections identiques, aux extrémités desquelles sont appliquées des conditions aux limites périodiques et comme notre conduit est considéré symétrique, nous prendrons juste la moitié du domaine.

III.2. Transformation géométrique

La méthode repose sur l'utilisation d'une transformation non-orthogonale de coordonnées, qui change le domaine physique (figure III.1) du fluide en domaine rectangulaire de calcul (figure III.2). On opère un changement de coordonnées cartésiennes (x, y) , de manière à ce que les frontières du domaine d'écoulement se traduisent par des valeurs constantes des nouvelles coordonnées (ζ, η) .

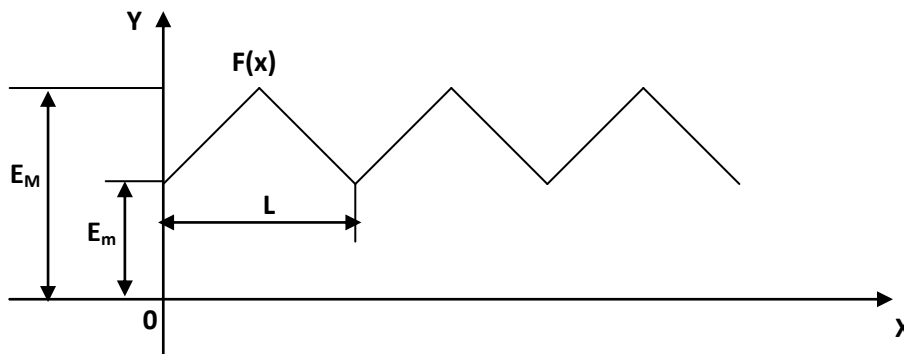


Figure III. 1 : Domaine physique du fluide

En choisissant la géométrie de prisme, on a :

$$\begin{cases} E_M = E(1 + \varepsilon) \\ E_m = E(1 - \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow E = \frac{E_M + E_m}{2}$$

Pour les études des écoulements dans les conduites à motif périodique, il existe deux types de transformations géométriques de coordonnées :

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} \zeta = \frac{x}{L} \\ \eta = \frac{y}{f(x)} \end{cases} \\ & \bullet \begin{cases} \zeta = \frac{x}{L} = X \\ \eta = \frac{y - f(x)}{L} = Y - F(X) \end{cases} \end{aligned}$$

où, L : Longueur d'un élément de la conduite.

$f(x)$: Equation du profil des parois du conduit donnée par : $f(x) = ax + d$. Dans le cas de notre conduit on a :

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ a(1-x) & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

a est la pente égale à : $2(R_2 - R_1)/L$.

X et Y sont les coordonnées adimensionnelles

$F(X)$: Equation du profil des parois du conduit sous forme adimensionnelle donnée par :

$$F(X) = \begin{cases} aX & 0 \leq X \leq \frac{1}{2} \\ a(1-X) & \frac{1}{2} \leq X \leq 1 \end{cases}$$

En utilisant la 2^{ème} transformation pour la conduite d'étude, on a : $0 \leq \zeta \leq 1$ et $0 \leq \eta \leq \frac{R_1}{L}$.

Ainsi le domaine d'écoulement (figure III.1) est transformé en un domaine de calcul rectangulaire.

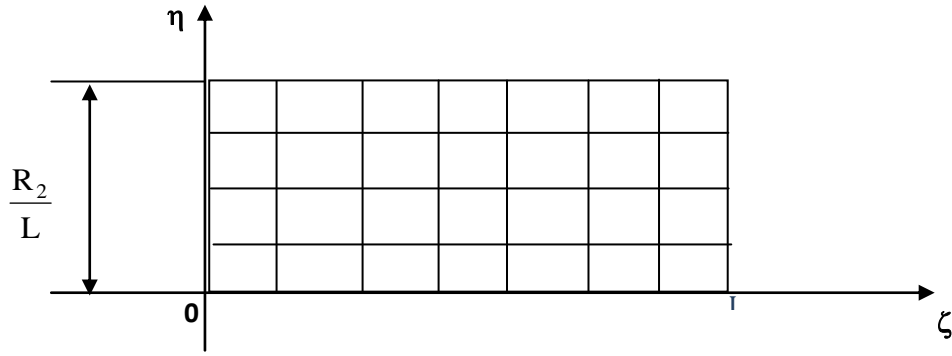


Figure III. 2 : Domaine rectangulaire de calcul

Les vecteurs unitaires \vec{e}_ζ et \vec{e}_η ne sont pas perpendiculaires, et \vec{e}_ζ change de direction avec sa position, alors que \vec{e}_η reste parallèle à \vec{e}_y , donc : $\vec{e}_\eta = \vec{e}_y$

- Détermination de \vec{e}_ζ :

En considérant le vecteur \vec{n} normal à la ligne de la constante η , on a :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\eta}{|\vec{\nabla}\eta|} \text{ avec, } \vec{\nabla}\eta = \begin{pmatrix} \frac{\partial\eta}{\partial X} \\ \frac{\partial\eta}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } \vec{\nabla}\eta = -F'\vec{e}_x + \vec{e}_y \text{ et } |\vec{\nabla}\eta| = [(-F')^2 + (1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} \beta = \frac{f}{L} \\ \alpha = \left(\frac{1}{L}\right)^2 + \left(-\frac{f}{L}\right)^2 \end{cases} \text{ on obtient : } \vec{n} = \frac{-\beta\vec{e}_x + \frac{1}{L}\vec{e}_y}{\alpha^{1/2}}$$

Etant donné que les vecteurs \vec{n} et \vec{e}_ζ sont perpendiculaires, on a : $\vec{n} \cdot \vec{e}_\zeta = 0$ d'où :

$$\vec{e}_\zeta = \frac{\left(\frac{1}{L}\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y\right)}{\alpha^{1/2}}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \alpha^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\zeta - \beta\vec{e}_\eta \\ \vec{e}_y = \vec{e}_\eta \end{cases} \quad \text{(III-1)}$$

Les composantes de la vitesse dans les nouvelles coordonnées sont données par :

$$\begin{cases} U_\zeta = U\alpha^{\frac{1}{2}} \\ U_\eta = V - \beta U \end{cases} \quad (\text{III-2})$$

Pour avoir les équations différentielles du problème dans le nouveau système de coordonnées (ζ, η) , il faut remplacer les dérivées en (x, y) par les dérivées en (ζ, η) .

◆ Les dérivées premières sont données par :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{où, } [J^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

◆ Les dérivées secondes sont données par :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial xy} \end{bmatrix} = [T1] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} + [T2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{avec, } [T1] = - [T2][C][J]$$

$$[T2] = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & 2J_{11}J_{12} \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & 2J_{21}J_{22} \\ J_{11}J_{21} & J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{11} & \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{12} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} J_{21} & \frac{\partial}{\partial \eta} J_{22} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} J_{11} + \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{21} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} J_{12} + \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{22} \right) \end{bmatrix}$$

et comme notre transformation est linéaire donc, la matrice $C = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ -\beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{III-4})$$

Conclusion

Pour faciliter le calcul, la transformation d'un domaine physique vers un domaine rectangulaire est nécessaire là où on peut utiliser les coordonnées cartésiennes qui rend le modèle plus applicable et efficace.

La géométrie qu'on a proposée pour l'écoulement dans les conduits à motifs périodiques est une conduite prismatique, où on a choisi deux largeurs l'une présente l'élargissement et l'autre le rétrécissement, et on a adopté une largeur équivalente de notre conduite.

III.3 Présentation du programme en C++ introduit dans Palabos

La bibliothèque Palabos est un cadre mis en place de la dynamique des fluides computationnelle (CFD), avec un noyau basé sur la méthode Lattice Boltzmann (LBM). Elle est utilisée à la fois comme un outil de recherche et de conception. Son interface de programmation est directe et rend possible la simulation des fluides avec une facilité relative. Plusieurs codes de calcul sont disponibles sur Palabos pour faciliter son utilisation. C'est pourquoi le choix s'est porté sur cette bibliothèque pour l'accomplissement de notre travail. Le code C++ de Palabos fait appel à la généricité dans ses différentes facettes. La programmation générique est utilisée pour offrir un code singulier qui peut servir à plusieurs intentions. D'un côté, le code exécute la généricité dynamique par l'utilisation d'interfaces à orientés objets.

L'avantage de code calcul Palabos, c'est qu'il ne demande pas de très des grand connaissances en C++ pour commencer à programmer. Une fois les lois de programmation connus, il deviendra plus facile de comprendre ce que le programme fait et éviter les différentes complications telle que l'insuffisance de la mémoire, exécution inconsistante, les coulisses inattendues de la programmation orientée objet (POO) . . . etc.

Nous allons essayer de présenter les parties essentielles du programme et expliquer le plus clairement possible le rôle joué par chaque fonction, en gardant le même ordre chronologique suivi pendant la programmation.

Dans notre mémoire, nous allons nous baser sur les écoulements turbulents, donc nous avons introduit le modèle de **Smagorinsky** qui est un modèle à viscosité turbulente algébrique.

Ce modèle est à l'origine programmé en 3D dans le code Palabos, ce qui nous a ramené à introduire des modifications nécessaires pour le rendre compatible avec une simulation 2D.

Dans le modèle de Smagorinsky la viscosité des sous mailles est définie par :

$$\nu_t = (\rho l_s^2 S)^{1/2} \quad (\text{II-5})$$

l_s est l'échelle de longueur dite de Smagorinsky et S est la norme du tenseur de gradient de vitesse.

$$S = (2 * S_{ij} * S_{ji})^{1/2} \quad (\text{II-6})$$

Afin que la longueur l_s soit proportionnelle à la taille du filtre, nous avons défini la constante C_s du modèle de Smagorinsky telle que :

$$C_s = l_s * \Delta \quad (\text{II-7})$$

On trouve dans la littérature différentes valeurs pour C_s . Une valeur théorique fondée sur la turbulence homogène isotrope est de 0.18.

La formulation de ν_t en fonction des grandeurs résolues implique que seul le transfert d'énergie depuis les échelles résolues vers les échelles des sous mailles est pris en compte. Aucune information liée au transfert d'énergie des petites structures elle-même n'est incluse dans la modélisation.

Outre le fait que la constante C_s n'est pas universelle car elle est basée sur une valeur théorique en turbulence homogène isotrope (alors que la plupart des écoulements industriels sont anisotropes), le modèle Smagorinsky présente l'inconvénient majeur de ne pas avoir le comportement adéquat près de la paroi. Concrètement, les zones de cisaillement même bien résolues présenteront une viscosité des sous mailles largement surestimées et le modèle deviendra alors trop dissipatif.

Pour palier à ce problème, des fonctions d'amortissement peuvent être mises en œuvre dans la définition de la viscosité des sous mailles, afin d'obtenir le bon comportement de ν_t près des parois.

III.4. Explication de différentes commandes et les fonctions du code C++

III.4.1 Définition des Bibliothèques

Comme tout autre programme informatique, la première partie est dédiée à la déclaration des bibliothèques requises pour le bon fonctionnement du programme. Et celles-ci sont les suivantes :

`#include "palabos2D.h" // L'accès aux différentes classes et structures du fichier Palabos traitant les géométries à deux dimensions telles que cylinder2D, Smagorinsky Model...etc. est donné par palabos2D.h.`

`#include "palabos2D.hh" // L'accès aux Templates du code est quant à lui assuré par palabos2D. hh, ce qui permettra la compilation des bibliothèques ci-dessus nommées.`

`#include <vector>` // Bibliothèque qui contient le nouveau type vector pour la déclaration des vecteurs, en remplaçant pour le type array qui perd en efficacité lorsqu'il s'agit de simulation parallèle.

`#include <cmath>` // Bibliothèque qui contient les outils mathématiques nécessaires pour le bon déroulement du programme, tel que sqrt pour carré ou sin pour sinus.

`#include <iostream>` // Bibliothèque servant à utiliser le flux de données de sortie (output) pour écrire les résultats de la simulation dans des fichiers ou dans le terminal.

`#include <fstream>` // Bibliothèque servant à l'affichage des données de sortie sous forme de fichiers.

`#include <iomanip>` // Bibliothèque qui permet un contrôle total sur les données de sortie, tel que le nombre de chiffres après la virgule (stpeprecision).

`#include <<complexDynamics/smagorinskyDynamics2D.h>>`//définition du model de smagorinsky.

`Using namespace plb : :descriptors ;`

`Using namespace std ;`

Ces deux déclarations donnent accès aux fichiers qui sont contenus dans l'espace plb et aussi à la bibliothèque C++ qui est contenu dans plb.

III.4.2 Définition du Modèle d'étude

La définition du modèle d'étude se fait par la commande suivante :

`#define DESCRIPTOR D2Q9 Descriptor`

Le modèle D2Q9 à neuf vecteurs de vitesse est très utilisé, particulièrement pour résoudre les problèmes d'écoulements des fluides. La vitesse centrale étant nulle, les vitesses sont :

$c(0,0)$, $c(1,0)$, $c(-1,0)$, $c(0,1)$, $c(0,-1)$, $c(1,1)$, $c(-1,1)$, $c(-1,-1)$ et $c(1,-1)$ pour f_0 , f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 , f_6 , f_7 et f_8 respectivement, les facteurs de pondération. Pour les fonctions de distribution correspondantes sont $4/9$, $1/9$, $1/9$, $1/9$, $1/9$, $1/36$, $1/36$, $1/36$ et $1/36$.

III.4.3 Introduction des paramètres Hydrauliques

Les paramètres Hydraulique sont très importants lors de la simulation, ils sont en générale définis par la commande suivante :

`IncomprFlowParam<T> parameters (`

`(T) 0.1, // uMax (Vitesse maximum d'écoulement)`

`(T) 1000., // Re (nombre de Reynolds)`

`100., // N (Nombre de discrétisations)`

0,791, // lx (longueur du domaine d'écoulement dans la direction x)

0,06 // ly (longueur du domaine d'écoulement dans la direction y)

// 0. // lz (longueur du domaine d'écoulement dans la direction z) ;

L'introduction des paramètres hydrauliques ou plus précisément les paramètres de l'écoulement incompressible (IncomprFlowParam) se fait de la manière suivante :

- **Vitesse**

Nous avons pris comme vitesse caractéristique ou vitesse maximale une valeur de 0,1m/s. C'est cette vitesse qui nous assurera une bonne convergence de notre programme sans risque de divergence au cas où les vitesses s'accroîtraient.

- **Densité**

La densité prise en considération est la densité de l'eau est égale à 10^3kg/m^3 .

- **Nombre de Reynolds**

Après le choix de tous les paramètres, le calcul du nombre de Reynolds se fait par le biais de la formule suivante :

$$Re = \frac{DV}{\nu}$$

Le programme que nous proposerons permettra de faire varier le nombre de Reynolds afin de couvrir le plus de cas possibles, et d'assurer un passage graduel d'un régime d'écoulement à un autre.

- **Longueurs et largeurs**

Pour notre étude nous avons considéré un modèle réduit d'une conduite prismatique de dimensions $0,04 \times 0,08 \times 0,791 \text{m}$. Nous avons choisi les largeurs suivante : à l'entrée de chaque divergent $E_m = 0,04 \text{m}$, et à l'entrée de chaque convergent $E_M = 2E_m = 0,08 \text{m}$, et comme notre conduite est prismatique, nous avons calculé une longueur caractéristique équivalente qu'est :

$$E = \frac{E_m + E_M}{2} = 0,06 \text{m}.$$

La longueur totale de la conduite de $L = 0,791 \text{m}$.

III.4.4 Introduction du nombre de discrétisations selon x et y

Dans cette section le nombre de discrétisations selon les deux axes X et Y seront introduits de la façon suivante :

$N_x = i_x * N$.

$N_y = i_y * N$.

III.4.5 Initialisation une frontière de pression à une densité constante.

Dans cette section la densité est initialisée à une valeur constante à l'aide d'une classe constant Density.

constant density

template<typename T>

class ConstantDensity {

public:

ConstantDensity(T density_)

: density(density_)

{ }

T operator()(plint iX, plint iY) const {

return density;

}

private:

T density;

};

III.4.6 Création des conditions initiales

Les conditions initiales sont très importantes et présentent une très grande difficulté lors de la construction du programme. En effet, les conditions initiales permettent à l'écoulement de s'établir beaucoup plus rapidement, et aux résultats de converger plus vite. Une manière très répandue d'établir ces conditions initiales consiste à imposer un champ de vitesse pour $t = 0$. Dans notre cas, nous établirons cette condition initiale en imposant un profil parabolique de vitesse sur le domaine d'écoulement à l'instant initial à l'aide d'une expression analytique.

Dans notre programme, les conditions aux limites sont imposées à partir d'une fonction :

classe Poiseuille Velocity And Density.

III.4.7 Définition du domaine d'étude

Nous avons adopté la géométrie du modèle physique de dimension d'un prisme.

```
double r =ny/2;
double a =nx/14;
double b =ny/6;
DotList2D cylinderShape;
for (plint iX=0; iX<nx; ++iX) {
for (plint iY=0; iY<ny; ++iY) {

// Création des motifs de la partie inférieur
if ((iX<a)and iY<(b/a)*iX)
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>a)and iY<(-b/a)*(iX-2*a))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>2*a) and (iX<3*a)and iY<(b/a)*(iX-2*a))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>3*a)and (iX<4*a) and iY<b*(4-(iX/a)))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>4*a)and (iX<5*a)and iY<(b/a)*iX-4*b)
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>5*a)and (iX<6*a)and iY<(-b/a)*iX+6*b)
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>6*a)and (iX<7*a)and iY<(b/a)*iX+7*b)
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>7*a)and (iX<8*a)and iY<(-b/a)*iX-7*b)
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>8*a)and (iX<9*a)and iY<(b/a)*iX+9*b)
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>9*a)and (iX<10*a)and iY<(-b/a)*iX-9*b)
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>10*a)and (iX<11*a)and iY<(b/a)*iX+11*b)
```

```

cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>11*a)and (iX<12*a)and iY<(-b/a)*iX-11*b)
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>12*a)and (iX<13*a)and iY<(b/a)*iX+13*b)
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>13*a)and (iX<14*a)and iY<(-b/a)*iX-13*b)
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));

// Création des motifs de la partie supérieur
else if ((iX<a)and iY>((-b/a)*iX+2*r))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>a)and iY>(b/a)*iX+2*(r-b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>2*a)and (iX<3*a)and iY>(-b/a)*iX+2*(r+b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>3*a)and (iX<4*a)and iY>(b/a)*iX+2*(r-2*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>4*a)and (iX<5*a)and iY>(-b/a)*iX+2*(r+2*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>5*a)and (iX<6*a)and iY>(b/a)*iX+2*(r-3*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>6*a)and (iX<7*a)and iY>(-b/a)*iX+(2*r-7*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>7*a)and (iX<8*a)and iY>(b/a)*iX+(2*r+7*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>8*a)and (iX<9*a)and iY>(-b/a)*iX+(2*r-9*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>9*a)and (iX<10*a)and iY>(b/a)*iX+(2*r+9*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));

```

```

else if ((iX>10*a)and (iX<11*a)and iY>(-b/a)*iX+(2*r-11*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>11*a)and (iX<12*a)and iY>(b/a)*iX+(2*r+11*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>12*a)and (iX<13*a)and iY>(-b/a)*iX+(2*r-13*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));
else if ((iX>13*a)and (iX<14*a)and iY>(b/a)*iX+(2*r+13*b))
cylinderShape.addDot(Dot2D(iX,iY));

```

Nous avons obtenu la forme de la conduite prismatique à 07 motifs périodiques suivante:

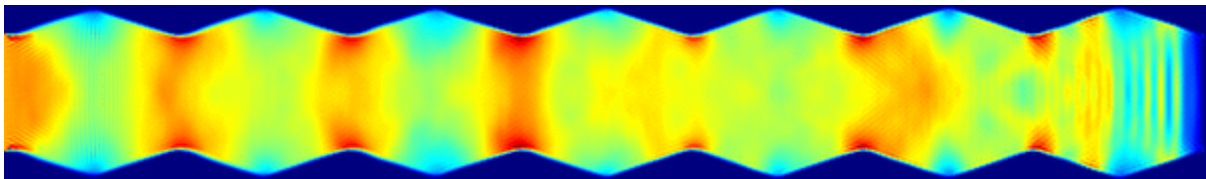


Figure III.3: conduite à motifs périodiques

III.4.8 Définition du domaine d'application des conditions aux limites

```

void cavitySetup( MultiBlockLattice2D<T,DESCRIPTOR>& lattice,
                 IncomprFlowParam<T> const& parameters,
                 OnLatticeBoundaryCondition2D<T,DESCRIPTOR>& boundaryCondition )
{
    const plint nx = parameters.getNx();
    const plint ny = parameters.getNy();
    Box2D topLid = Box2D(0, nx-1, ny-1, ny-1);
    Box2D input = Box2D(0,0,0,ny-1);
    Box2D inlet(0,0,1,ny-2);
    Box2D inletOutlet(0,0,1,ny-2);
    Box2D everythingButTopLid = Box2D(0, nx-1, 0, ny-2);
    Box2D topWall(0, nx-1, ny-1, ny-1);
    Box2D bottomWall(0, nx-1, 0, 0);
    Box2D outlet(nx-1, nx-1, 2, ny-2);

```

Nous définissons le domaine d'application des conditions aux limites à travers les fonctions **boundaryCondition.setVelocityConditionOnBlockBoundaries** suivie de l'étendu du domaine d'application par exemple :

```
boundaryCondition.setVelocityConditionOnBlockBoundaries ( lattice, Box2D (0, nx-1, 0, 0))//
```

Fait référence à l'application des conditions aux limites pour X variant de 0 à nx-1 et pour Y=0.

```
SArray<T,2> v;
```

```
v[0]=0.175*(dt1/dx1);//pourtransfirmerlavitesseàl'unité lattice
```

```
v[1]=0.0;
```

```
SetBoundaryVelocity (lattice, inlet, v ) ; // vitesse appliquée à l'entrée
```

```
SetBoundaryDensity ( lattice, outlet,ConstantDensity<T>(1. ) )
```

Concernant la vitesse, nous avons appliqué la vitesse adoptée dans la partie expérimentale.

On a lancé l'exécution pour 5 débits différents $Q_1=0,63l/s$, $Q_2=0,62l/s$, $Q_3=0,59l/s$, $Q_4=0,54l/s$ et $Q_5=0,47l/s$ qui correspondent respectivement aux vitesses suivantes :

```
V[0]=0.175*(dt1/dx1);
```

```
V[0]=0.172*(dt1/dx1);
```

```
V[0]=0.16*(dt1/dx1);
```

```
V[0]=0.15*(dt1/dx1);
```

```
V[0]=0.13*(dt1/dx1);
```

III.4.9 formulation de la densité du fluide pour l'écoulement turbulent

```
void randomIniCondition (plint iX, plint iY, T& rho, Array<T,2>& velocity) {
```

```
T randomValue = (T) rand () / (T)RAND_MAX;
```

```
velocity.resetToZero () ;
```

```
rho = (T) 1 + 1.e-2*randomValue ;}
```

III.4.10 Introduction des paramètres de Smagorinsky pour la viscosité turbulente

```
Void cavitySetup (MultiBlockLattice2D<T, DESCRIPTOR>& lattice,
```

```
IncomprFlowParam<T> const& parameters,
```

```
OnLatticeBoundaryCondition2D<T, DESCRIPTOR>& boundaryCondition)
```

```
{  
Box2D topLid = Box2D (0, nx-1, ny-1, ny-1) ;  
Box2D everythingButTopLid = Box2D (0, nx-1, 0, ny-2) ;  
T cSmago = 0.14
```

Introduction de la constante Csmago dont l'ordre de grandeur varie de 0,1 à 0,2 et qui sera introduite dans l'expression de la viscosité turbulente. Dans notre programme, la valeur 0,14 est attribuée comme une constante Csmago.

```
boundaryCondition.setVelocityConditionOnBlockBoundaries (lattice) ;
```

```
T u = sqrt((T)2)/(T)2 * parameters.getLatticeU() ;
```

Introduction des modifications dans le calcul de la vitesse Lattice et prise en compte de l'effet de la viscosité turbulente.

```
InitializeAtEquilibrium (lattice, everythingButTopLid, randomIniCondition) ;
```

```
SetBoundaryVelocity (lattice, topLid, Array<T,2>(u,0.) ) ;
```

```
lattice.initialize () ;
```

III.4.11 Fonction Write GIF

```
Void writeGif(MultiBlockLattice2D<T, DESCRIPTOR>& lattice, plint iter)
```

```
{  
ImageWriter<T> imageWriter ("leeloo") ;  
imageWriter.writeScaledGif (createFileName ("u", iter, 6),  
*computeVelocityNorm (lattice) ) ;  
}
```

C'est la fonction qui génère des images **GIF** suivant la grandeur voulue et la perspective désirée. Dans notre cas, il s'agit de **VelocityNorm** (la norme de la vitesse) mais il est possible de l'adapter à la grandeur qu'on veut représenter.

III.4.12 Fonction Write VTK

```
void writeVTK (MultiBlockLattice2D<T, DESCRIPTOR>& lattice,
```

```
IncomprFlowParam<T> const& parameters, plint iter)
```

```
{  
T dx = parameters.getDeltaX () ;  
T dt = parameters.getDeltaT () ;
```

```
VtkImageOutput2D<T> vtkOut (createFileName("vtk", iter, 6), dx) ;  
vtkOut.writeData<float>(*computeVelocityNorm(lattice), "velocityNorm", dx/dt) ;  
vtkOut.writeData<2, float>(*computeVelocity(lattice), "velocity", dx/dt) ;  
}
```

C'est la fonction qui permet d'enregistrer les résultats (données de sortie) sous format **VTK** et avoir à la fin une image de l'écoulement en deux ou trois dimensions.

Les fichiers **VTK** peuvent fournir des informations sur la vitesse, la densité et la grandeur **VelocityNorm** : la norme de la vitesse. Cette dernière donne une idée sur la distribution de la vitesse moyenne du fluide dans la structure.

La fonction a comme paramètre la Lattice (réseau), les paramètres de l'écoulement Incompressible et l'itération.

A noter que les résultats affichés en fichier **VTK** sont automatiquement transformés en unités physiques.

III.4.13 Corps principale du programme

```
int main (int argc, char* argv[]) {  
    plbInit (&argc, &argv) ; //
```

La fonction plbInit doit être appelée au début du programme pour garantir une consistance entre les programmes exécutés en parallèle et en série.

```
global :directories ().setOutputDir("./tmp/") ;
```

tmp est le fichier de sortie il permet de stocker les images GIF et les fichiers VTK.

```
const T logT = (T) 0.4; // pas d'enregistrement des résultats.
```

```
const T imSave = (T) 0.06; // pas d'enregistrement des images gif.
```

```
const T vtkSave = (T) 10 ; // pas de génération des fichiers VTK de sortie.
```

```
const T maxT = (T) 50 ; // temps maximum de simulation.
```

```
Pcout << "nx=" << nx << "ny=" << ny << endl ;
```

Fonction classique d'affichage de nx et ny respectivement.

III.4.14 Appel des fonctions principales constituant le programme

```
WriteLogFile (parameters, "Poiseuille flow") ;
```

```
MultiBlockLattice2D<T, DESCRIPTOR> lattice (  
    parameters.getNx (), parameters.getNy (),
```

```
new BGKdynamics<T, DESCRIPTOR>(parameters.getOmega()) ;
```

Durant la création du multiblock lattice (réseau a plusieurs blocs) la nature de la collision que subissent les cellules est définie ici dans new BGKdynamics, de sorte que nous appliquerons le modèle BGK à un seul temps de relaxation omega.

```
OnLatticeBoundaryCondition2D<T, DESCRIPTOR>*
```

```
BoundaryCondition = createLocalBoundaryCondition2D<T, DESCRIPTOR>() ;
```

```
CylinderSetup (lattice, parameters, *boundaryCondition) ;
```

Le type LocalBoundaryCondition2D implémente les conditions aux limites qui sont locales La fonction CylinderSetup servira de son coté à introduire ces conditions aux limites à la géométrie définie précédemment.

III.4.15 Boucle d'iteration

La fonction principale qui suit est la fonction qui permet le calcul des différents paramètres de l'écoulement. Il s'agit de l'évolution au fil du temps de ces paramètres. Cette boucle complexe permet de calculer la vitesse, la densité, l'énergie, la pression et plein d'autres variables en tout point du domaine. L'écriture des modules des vitesses est faite à partir d'une sous structure intégrée à cette boucle, et ce pour n'importe quel pas de temps. Une autre structure génère des captures d'images du domaine d'écoulement durant le déroulement de la simulation, en affichant les vitesses et la pression pour chaque pas de temps.

```
For (plint iT=0 ; iT*parameters.getDeltaT () <maxT; ++iT) {
```

```
T u0 [2] ;
```

```
for (plint iY=1 ; iY<= 100-1 ;++iY) {
```

III.4.16 Génération des images GIF

```
if (iT%parameters.nStep(imSave)==0) {
```

```
Pcout <_< "Saving Gif ..." <_< endl
```

```
WriteGif (lattice, iT) ; }
```

Grâce à la fonction **WriteGif**, les données de simulation sont sauvegardées sous forme d'images **Gif**. Il est à noter que le choix du pas de temps nous revient et qu'il est possible de le changer si nécessaire.

III.4.17 Generation des fichiers VTK

```
if (iT%parameters.nStep(vtkSave)==0 && iT>0) {
```



```
Pcout << "Saving VTK file ..." << endl ;
```

```
WriteVTK (lattice, parameters, iT) ;
```

```
}
```

La fonction **WriteVTK**, nous permet elle aussi de sauvegarder les données de simulation sous forme de fichiers **VTK**, cela nous permettra de visualiser l'écoulement.

III.4.18 Déroulement de la phase de propagation et de collision

```
if (iT%parameters.nStep(logT)==0) {
```

```
Pcout << "step» << iT << " ; t=" << iT*parameters.getDeltaT () ;
```

```
}
```

```
lattice.collideAndStream () ;
```

Cette partie du programme permettra le déroulement de deux phases importantes de l'algorithme LB, la collision et la propagation :

Collision : cette étape est locale et implique uniquement les liens qui arrivent au même noeud. Parmi les configurations possibles se trouve la collision frontale de deux particules qui peuvent subir une variation $\pi/2$ de la direction de leurs vitesses.

Propagation : les particules présentes en chaque lien sont transportées vers les neufs plus proches voisines selon leurs vitesses respectives. On note que les mouvements sont synchronisés de sorte qu'après advection toutes les particules suivent l'équation d'évolution de la forme : $n_j(x_i + c_j, t + 1) = n_j(x_i, t) + \Omega(nk)$

III.4.19 Affichage de la valeur numérique de l'énergie

```
Pcout << " ; av energy =" << Setprecision (10) << getStoredAverageEnergy<T>
(lattice)
```

La fonction **getStoredAverageEnergy** nous permettra d'afficher une valeur moyennée de l'énergie d'où le préfixe av pour averaged.

III.4.20 Affichage de la valeur numérique de la densité

```
<< " ; av rho ="
```

```
<< GetStoredAverageDensity<T>(lattice) << endl ;
```

Tout comme le cas précédent, la fonction **GetStoredAverageDensity** nous affichera une valeur moyennée de la densité.

III.4.21 Affichage de la valeur numérique de la vitesse

```
Array<T, 2> velocity
```

```
lattice.get (nx/2, ny/2).computeVelocity (velocity) ;
```

```
Pcout << "Velocity in the middle of the lattice : (" << velocity [0] << "," << velocity  
[1] << ")" << endl ;
```

Le vecteur vitesse sera affiché grâce à la déclaration d'un vecteur de deux composantes, cela se traduit dans le programme par la déclaration **Array<T, 2>**.

Le point de contrôle ou checkpoint est indiqué par la fonction **lattice.get(nx/2,ny/2)**, ce qui voudra dire que les composantes de la vitesse seront calculées dans un point précis qui est **(nx/2,ny/2)**.

```
pcout << "Velocity norm in the middle of the lattice : " << endl ;
```

```
Box2D line (nx/2, nx/2 , ny/2, ny/2) ;
```

```
pcout << setprecision(3) << *computeVelocityNorm(*extractSubDomain(lattice, line))  
<< endl ;
```

Avec la méthode **extractSubDomain** un sous domaine est extrait du domaine Lattice, c'est là où la vitesse va être calculée et affichée.

```
Plb_ofstream ofile ("profile.dat") ;
```

```
Ofile << setprecision (3) << *computeVelocityNorm (*extractSubDomain (lattice,  
line)) <<  
endl ;
```

Dans ce cas, les résultats de la compilation seront affichés dans un fichier indépendant du dossier contenant le programme.

III.5. Transformation des unités Lattice ver les unités physiques

Les simulations Lattice Boltzmann sont supposées représenter la réalité physique. Durant les implémentations la question qui se pose est comment choisir les unités des quantités simulées (les variables Lattice)

Deux contraintes déterminent le choix des unités, en premier lieux, la simulation doit refléter le comportement réel du système physique, en second lieu, les paramètres physique doivent être bien choisi pour arriver à l'exactitude voulu.

L'approche présentée ici se déroule en deux étapes ; le système physique est tous d'abord transformé en un système adimensionnel qui est indépendant des échelles physiques et

indépendant des paramètres de simulation. En second lieu le système adimensionnel est transformé en une simulation discrète. La correspondance entre les trois systèmes (le système physique, le système adimensionnel, et le système discret (lattice Boltzmann)) est faite à l'aide de nombres adimensionnels. La solution des équations de Navier Stokes dépendra seulement du paramètre adimensionnel qui est le nombre de Reynolds. Donc les trois systèmes (physique, adimensionnel et discret) sont définis de façon à avoir le même nombre de Reynolds. La transition du système physique au système adimensionnel se fait en choisissant des échelles de longueur et de temps adéquats. La transition du système adimensionnel au système lattice Boltzmann se fait en choisissant un pas de temps δt et un pas de longueur δx [Dupuis, 2002].

Les paramètres δ_x et δ_t sont très importants et jouent un rôle important dans la stabilité et l'exactitude de la simulation. Ils ne dépendent ni des échelles physiques ni de leur unités.

III.6. Méthode de Discrétisation du système adimensionnel

L'intervalle de discrétisation de l'espace δx est défini comme étant la longueur de référence divisée par le nombre de cellules utilisées pour discrétiser cette longueur.

L'intervalle de discrétisation du temps δt est défini comme étant le temps de référence divisé par le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à ce temps de référence.

$$\delta x = \frac{1}{N} \quad \text{(III-8)}$$

$$\delta t = \frac{1}{N_{iter}} \quad \text{(III-9)}$$

Les autres variables tel que la vitesse et la viscosité peuvent être facilement converties du système adimensionnel vers le système Lattice Boltzmann

$$U_{lb} = \frac{\delta t}{\delta x} U_{ad} \quad \text{(III-10)}$$

$$\nu_{lb} = \frac{\delta x^2}{\delta t} \nu_{ad} \quad \text{(III-11)}$$

Finalement en définissant la vitesse de référence $\frac{l_0}{t_0}$ on trouve :

$$U_{0b} = 1 \quad \text{(III-12)}$$

$$U_{0,lb} = \frac{\delta t}{\delta x} \quad (\text{III-13})$$

III.7. Le choix du pas de temps

Il n'y a pas de façon intuitive pour choisir le pas de temps δt . Dans d'autres schémas numériques δt est lié à δx par des relations de stabilité numérique. Il est commun de considérer la relation $\delta t = \delta x^2$ pour des schémas numériquement stables.

Dans le schéma Lattice Boltzmann δt et δx sont liées par d'autres contraintes. D'après ce qui précède nous avons déduit que la vitesse U_{lb} était proportionnelle à $\frac{\delta t}{\delta x}$, la valeur de U_{lb} ne pourra jamais dépasser la vitesse du son ce qui nous amène à la relation suivante :

$$\delta t < \frac{\delta x}{\sqrt{3}} \quad (\text{III-14})$$

III.8. Détermination de la stabilité d'un modèle numérique

Pour résoudre les équations régissant le mouvement du fluide le modelé Lattice Boltzmann fait appel à un régime légèrement compressible. Cependant la compressibilité aura un effet sur l'exactitude du modèle numérique. L'erreur sur les résultats sera proportionnelle au carré du nombre de mach Ma . Ces erreurs sont maîtrisées en maintenant le nombre de mach le moins élevé possible

Le nombre de Mach n'est rien d'autre que la vitesse Lattice divisée par la vitesse du son $Ma = \frac{U_{lb}}{C_s}$ ce qui veut dire qu'il est proportionnel à U_{lb} donc à $(\frac{\delta x}{\delta t})^2$

Maintenant, supposons que nous augmentons la résolution de la Lattice pour diminuer les erreurs lattices $\epsilon(\delta x)$ au péril de l'augmentation du nombre de mach et qui sera donc d'aucun bénéfice. Un compromis entre l'erreur Lattice commise et l'erreur sur le nombre de mach nous mènera à la relation suivante : $\delta t = \delta x^2$

Dans la pratique, pour une résolution de $N = 100$ il serait bien de commencer avec une vitesse U_{lb} de 0,1.

Une augmentation de la résolution de la Lattice devra être faite automatiquement par un changement du pas de temps δt de façon à respecter la relation $\delta t = \delta x^2$ [Dupuis, 2002].

Conclusion

Après avoir introduit les modifications dans le code Palabos, faire la transformation des unités et introduire les conditions de stabilité, nous allons passer à l'application de programme sur un conduit à sept motifs périodiques, où nous analyserons l'effet de la géométrie du conduit sur les pertes de charge.

Chapitre IV

Analyse et discussion des résultats

La conception d'un modèle numérique en mécanique des fluides et plus particulièrement en Hydraulique, nécessite l'utilisation d'outils informatiques les plus sophistiqués, Le code Palabos, est l'un de ces outils, car c'est un code mis en place pour la simulation en dynamique des fluides, avec un noyau basé sur la méthode de Lattice Boltzmann.

Dans ce chapitre, on présente les résultats de simulations qui sont le fruit de notre programme. Dans un premier temps, nous avons évalué les variations de la pression le long de la conduite périodique, pour différents nombres de Reynolds.

Ensuite, pour nous conforter dans nos résultats numériques, nous les avons comparé aux résultats expérimentaux.

Finalement, nous avons vérifié la validité du modèle numérique de **Smagorinsky** que nous avons adopté pour notre cas d'étude.

Nous allons tout d'abord présenté l'expérience prise comme référence pour valider notre programme.

IV.1. Description du dispositif expérimental

Pour visualiser les phénomènes Hydrodynamiques existants dans les écoulements dans des conduits à géométrie Complexe, **Benmamar** a conçu un modèle de conduit en acier à motifs périodiques de dimensions **8cm x 4cm x 79,1cm**.

Les expériences ont été effectuées en écoulement en charge au moyen du dispositif donné dans la **photo IV.1**. Ce dispositif a été conçu et installé dans le Laboratoire des travaux pratiques hydraulique de l'**ENSEEIH**T Toulouse. Du réservoir d'alimentation, l'eau est pompée dans un bac. L'eau s'écoule en charge dans un canal de dimensions 20 cm x 38,5 cm. Les parois latérales du canal sont en verre et le fond est en acier. L'eau franchit une vanne de fond, elle s'écoule dans un bac, puis passe dans un conduit composé de plusieurs éléments. Ces derniers sont en acier, alors que les parois latérales du conduit sont en Plexiglas.

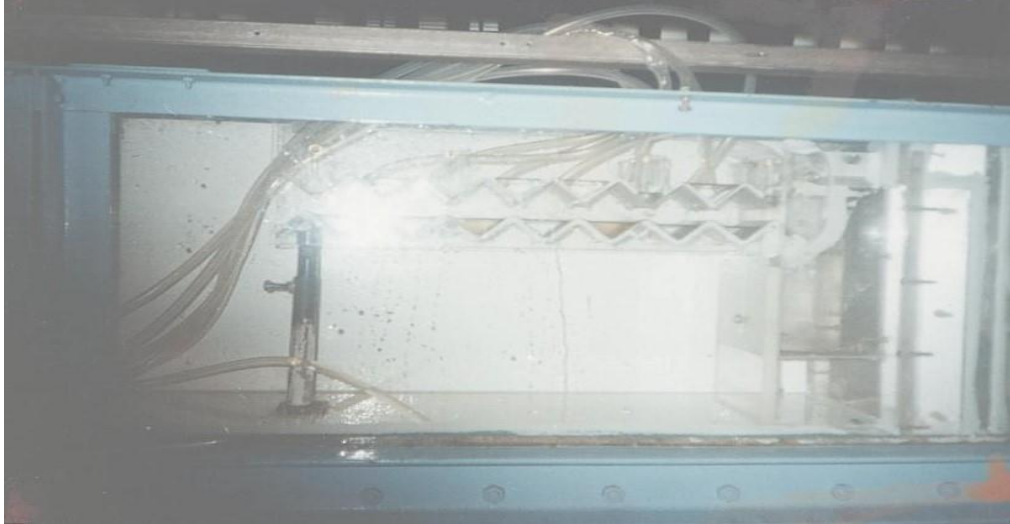


Photo IV. 1: installation expérimentale [Benmamar, 2006]

Après la mise en marche de la pompe, une période de mise en régime est observée pour une bonne stabilisation de l'écoulement.

IV.1.1. Technique de mesure

L'auteur s'est proposé de relever pour un débit donné, la pression sur la face supérieure du modèle.

i. Mesure de pression

La mesure de pression est faite en utilisant (07) sept tubes piézométriques reliés à un manomètre, chaque tube est branché sur un motif (en crête).

ii. Mesure de débit

La mesure des débits est faite en mesure volumétrique en utilisant une éprouvette graduée et un chronomètre.

IV.1.2. Les essais

Une série de mesures a été effectuée :

Les résultats sont présentés dans le Tableau IV-1

Tableau IV- 1: les différentes mesures effectuées.

Q (l/s)	P ₁ (mm)	P ₂ (mm)	P ₃ (mm)	P ₄ (mm)	P ₅ (mm)	P ₆ (mm)	P ₇ (mm)
0,63	212	210	205	190	180	165	150
0,62	210	210	200	190	175	162	150
0,59	200	210	190	190	165	160	155
0,54	190	210	180	190	165	155	150
0,47	175	210	167	190	155	150	148

IV.2. Résultats et discussion

IV.2.1. Résultats expérimentaux

a) variation de la pression le long de la conduite

Nous avons une conduite à (07) motifs périodiques de type convergent-divergent

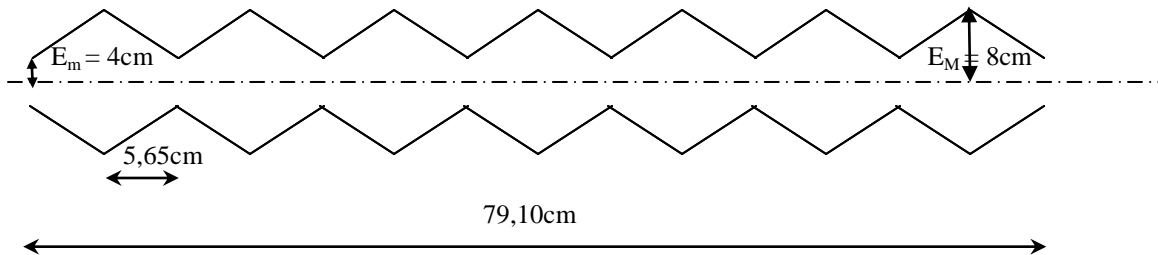


Figure IV.1: conduite à (07) motifs périodiques

Les figures (IV.2 ÷ IV.6) donnent la variation de la pression le long de la conduite pour différents débits.

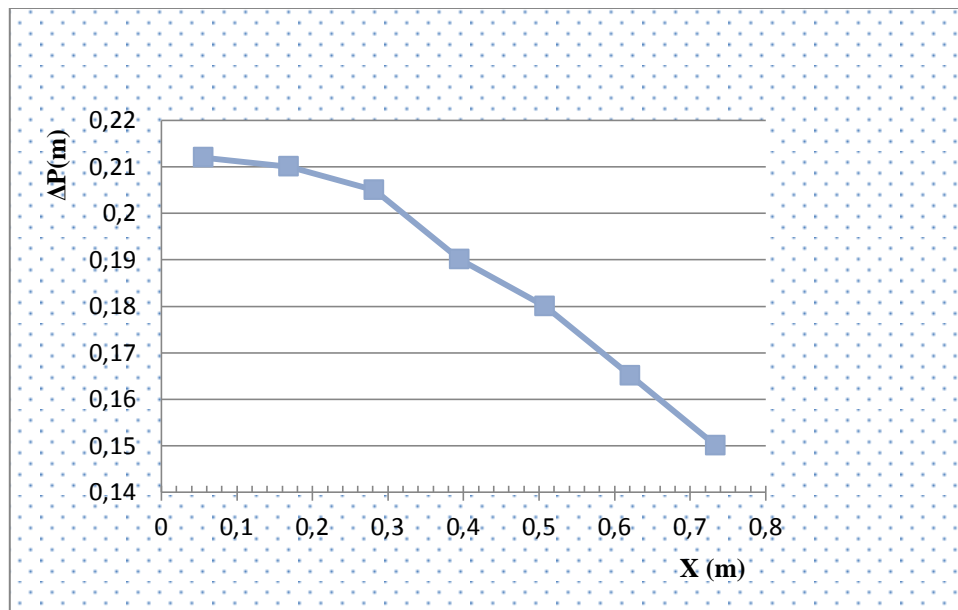


Figure IV.2: variation de la pression le long de la conduite pour $Q = 0,63$ (l/s)

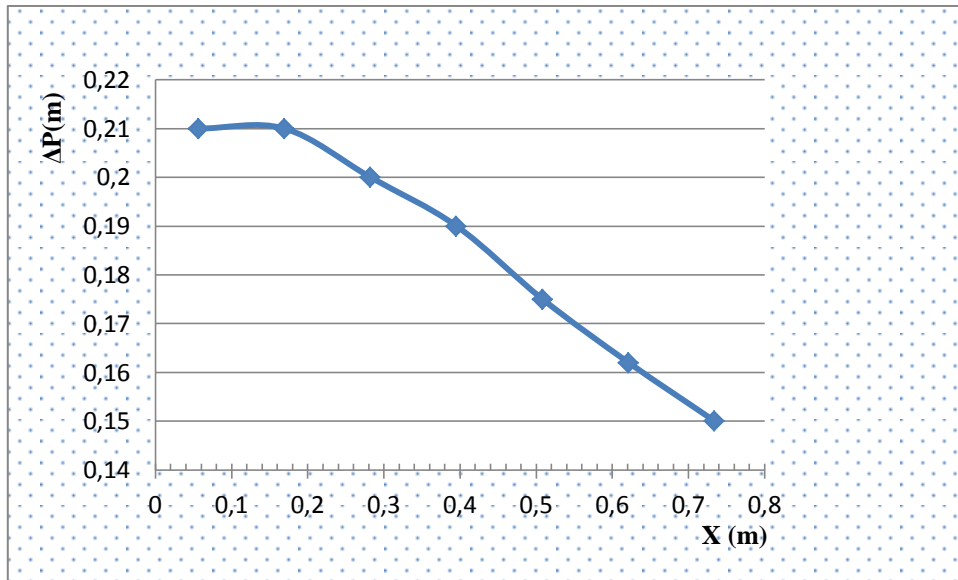


Figure IV.3: variation de la pression le long de la conduite pour $Q = 0,62$ l/s

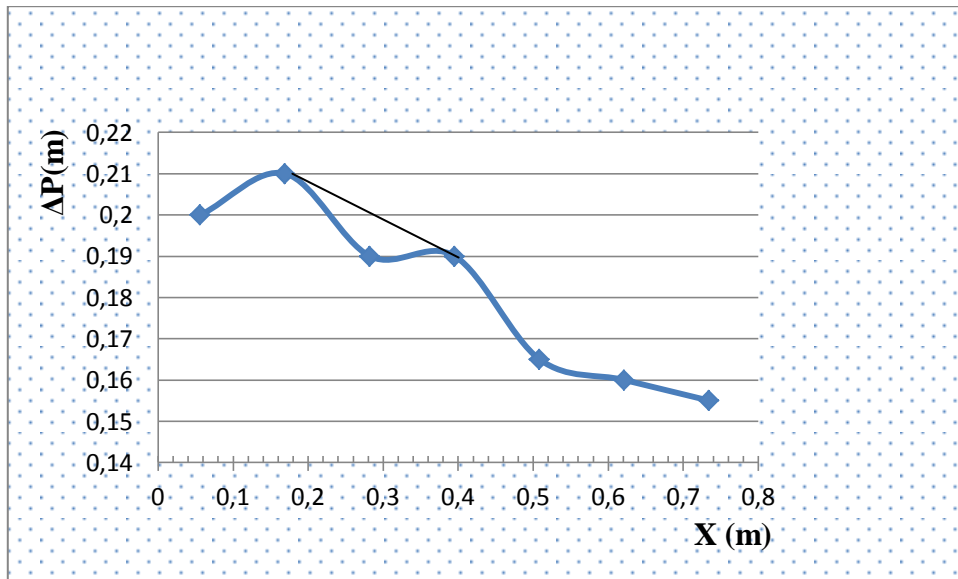


Figure IV.4 : variation de la pression le long de la conduite pour $Q = 0,59$ l/s

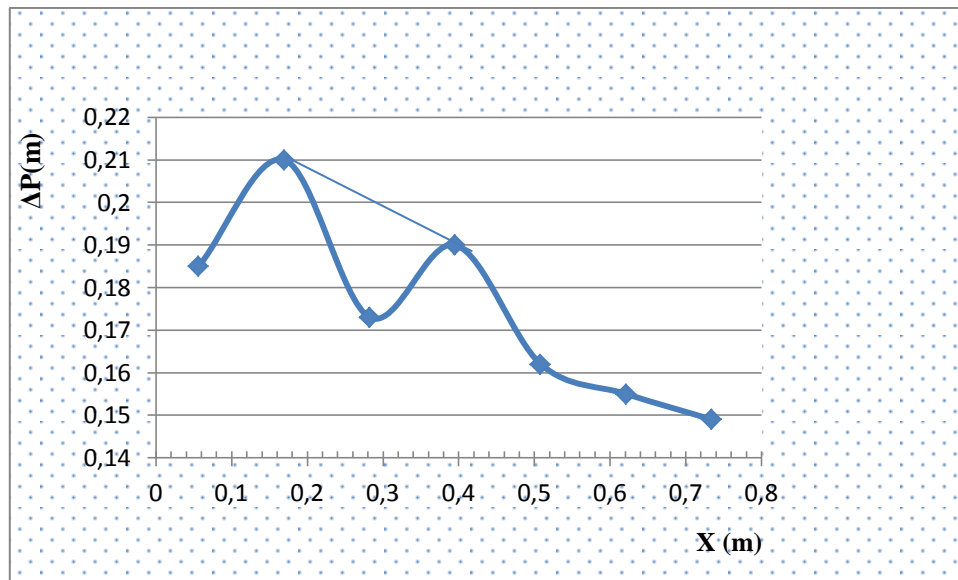


Figure IV.5 : variation de la pression le long de la conduite pour $Q = 0,54 \text{ l/s}$

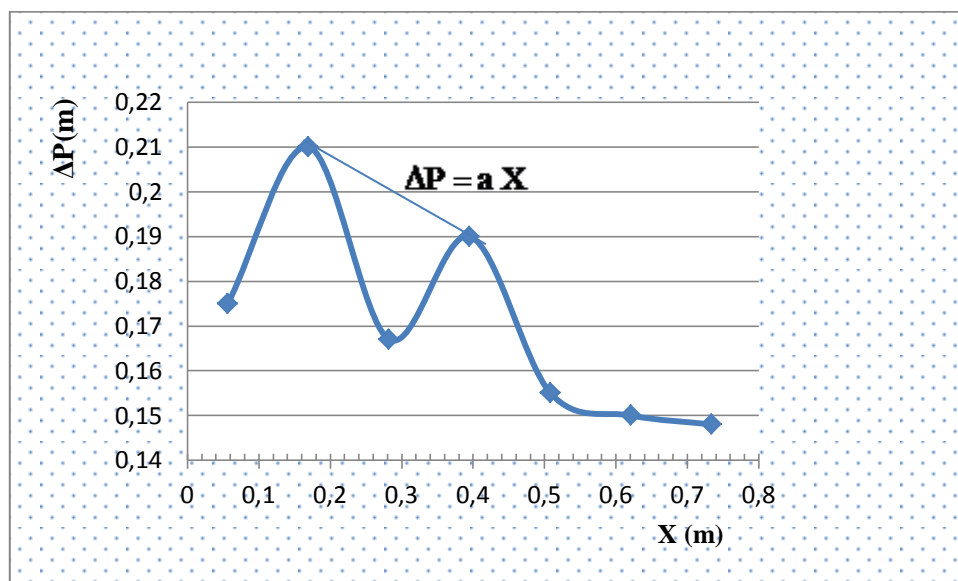


Figure IV.6 : variation de la pression le long de la conduite pour $Q = 0,47 \text{ l/s}$

On remarque que les courbes suivent une allure décroissante avec une variation pulsée.

On propose ici une méthode pour calculer le coefficient des pertes de charge qui consiste à tracer des droites qui passe par chaque pic de la courbes et qui ont pour équation :

$$\Delta P = a X$$

où, a pente de la droite.

L'équation des pertes de charge pour un écoulement turbulent dans une conduite à motifs périodique est donné par : (voir la démonstration dans mémoire master)

$$\Delta P = \frac{\lambda \rho Q^2}{4 E^5} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} X \quad (\text{IV.1})$$

ΔP : Variation de pression le long de la conduite (m) ; E : largeur équivalente de la conduite en (m) ; X : Variation de la longueur en (m) ; Q : Débit volumique en (m³/s) ;

ρ : Masse volumique de l'eau (kg/m³) ; g : Accélération de la pesanteur (m/s²) ; λ : Coefficient des pertes de charge et ε : coefficient de forme.

Tel que :

$$a = \frac{\lambda \rho Q^2}{4 E^5} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \quad (\text{IV.2})$$

On tire a graphiquement par :

$$a = \frac{\Delta P}{\Delta X} \quad (\text{IV.3})$$

Le tableau suivant donne les valeurs de a pour chaque graphe.

Tableau IV- 2: Valeurs de a pour chaque débit

Q (l/s)	0,63	0,62	0,59	0,54	0,47
a	0,079	0,107	0,100	0,123	0,123

De l'équation IV.2, on détermine la valeur du coefficient des pertes de charge.

On prend : $E_m=0,04\text{m}$ et $E_M=0,08\text{m}$.

On calcule le coefficient de forme, ε , par la formule suivante (Voir mémoire master):

$$\begin{cases} E_M = E(1 + \varepsilon) \\ E_m = E(1 - \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow E = \frac{E_M + E_m}{2} \quad (\text{IV.4})$$

D'où, le coefficient de forme, ε est égal à : 0,33

Le tableau suivant donne les valeurs du coefficient des pertes de charge pour chaque débit.

Tableau IV- 3: valeurs de λ pour chaque débit

Q (l/s)	0,63	0,62	0,59	0,54	0,47
a	0,079	0,107	0,100	0,123	0,123
λ	0,00049	0,00069	0,00071	0,00104	0,00107

A partir du tableau IV-3, on remarque qu'à chaque diminution de débit, le coefficient des pertes de charge augmente.

IV.2.2. Résultats numériques

Afin de comparer nos résultats numériques avec les résultats expérimentaux, nous avons considéré les mêmes données que ceux présentées dans l'expérience qui sont la longueur de la conduite ainsi que sa largeur, conduite non prismatique de dimension : $8,0 \times 4,0 \times 79,1 \text{ cm}$ tel que, $E_m = 0,04 \text{ m}$ et $E_M = 0,08 \text{ m}$. Les conditions aux limites sur la pression à l'entrée et à la sortie sont égales à la pression atmosphérique. Une condition aux limites sur la vitesse à l'entrée de la conduite qui correspond au débit volumique de l'expérience.

IV.2.3. Comparaison des résultats numériques aux résultats expérimentaux

Les figures montrent la variation de la pression dans deux régions de la conduite près de la paroi et sur l'axe, pour différents nombres de Reynolds.

IV.2.3.1. Variation de la pression près de la paroi

Les figures (IV.7 ÷ IV.11) montrent une comparaison entre les pressions obtenues expérimentalement avec celles obtenues numériquement.

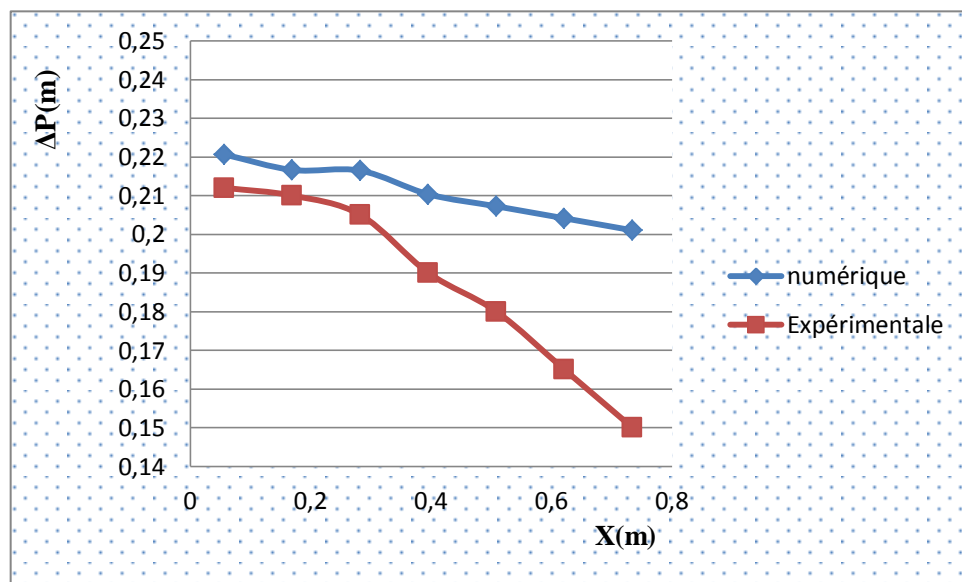


Figure IV. 7 : variation de la pression près de la paroi pour $Re = 10500$

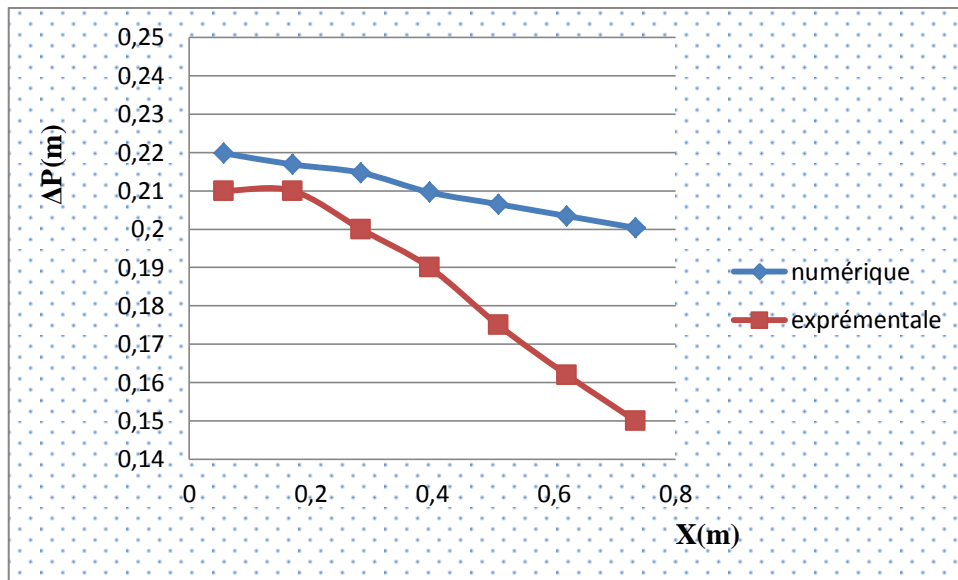


Figure IV. 8 : variation de la pression près de la paroi pour $R_e = 10333$

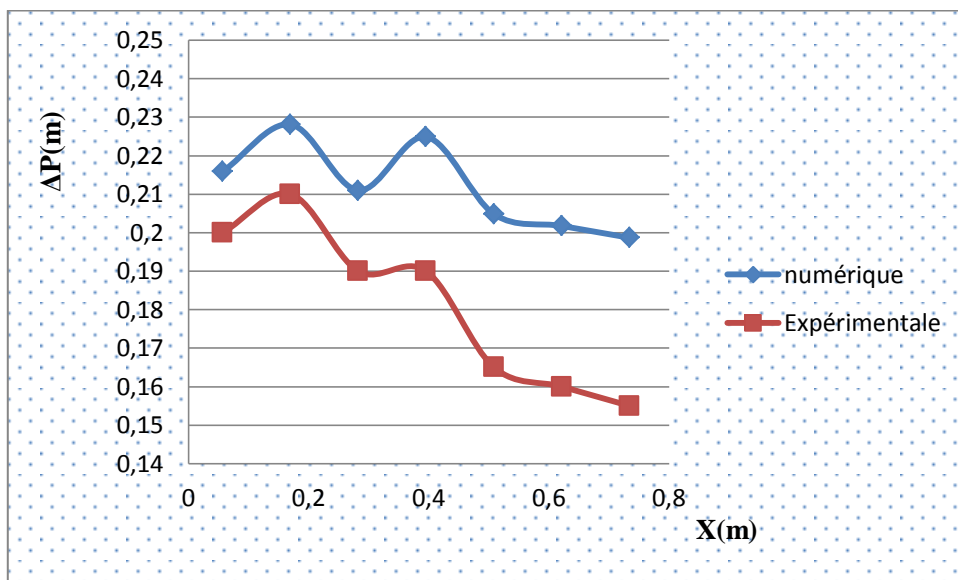


Figure IV. 9 : variation de la pression près de la paroi pour $R_e = 9833$

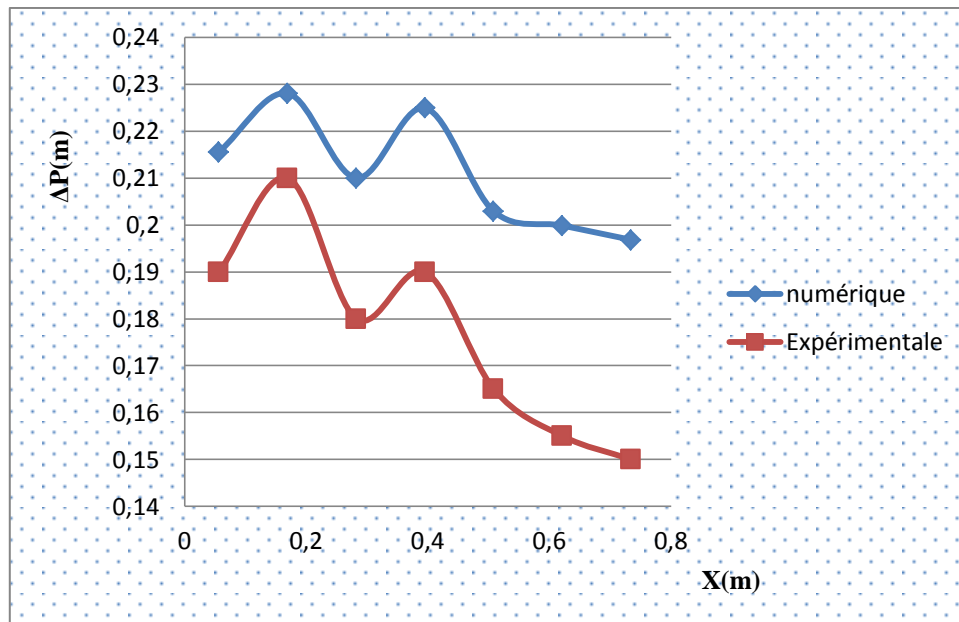


Figure IV. 10 : variation de la pression près de la paroi pour $R_e = 9000$

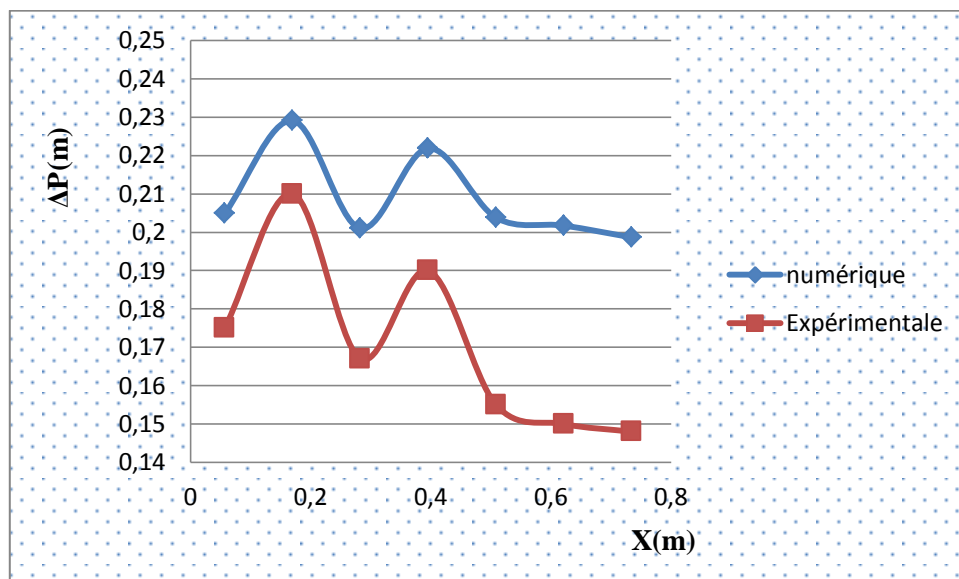


Figure IV.11: variation de la pression près de la paroi pour $R_e = 7833$

Nous constatons que les courbes expérimentales et numériques ont pratiquement la même allure, mais les valeurs numériques sont légèrement supérieures aux valeurs expérimentales. Ces différences sont comprises entre [3 - 30%]. Cette erreur est proportionnelle au nombre de Reynolds.

Cette différence peut se justifier par l'application des conditions de non glissement dit de Bounce-back entre la surface fluide et la surface solide lors de la simulation. Cette condition impose des vitesses pratiquement nulle à la paroi. Cette condition est l'une des hypothèses traditionnelles pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

IV.2.3.2. Variation de pression à l'axe de la conduite

Les figures (IV.12 ÷ IV.16) montrent la variation de la pression à l'axe le long de la conduite pour différents nombres de Reynolds.

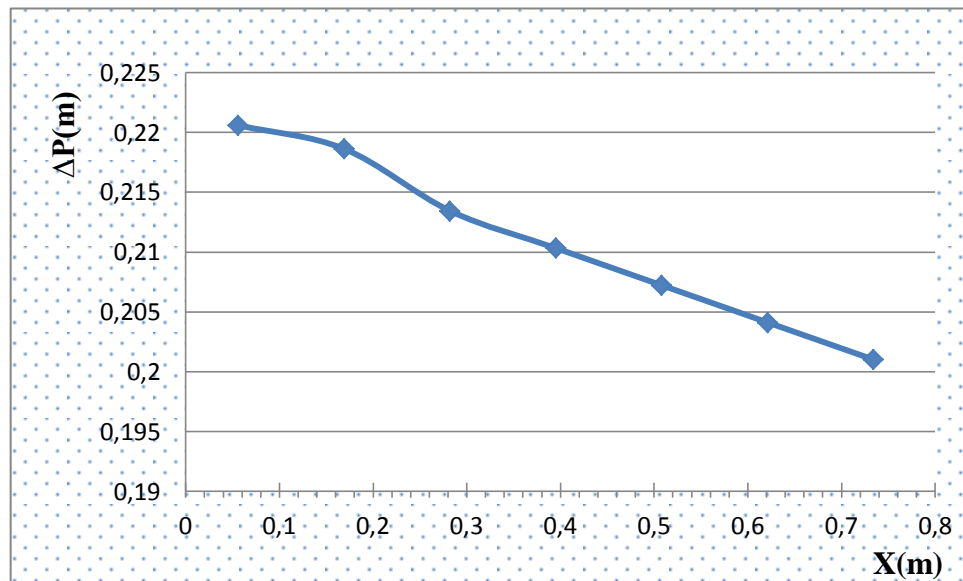


Figure IV.12 : variation de la pression à l'axe pour $R_e=10500$

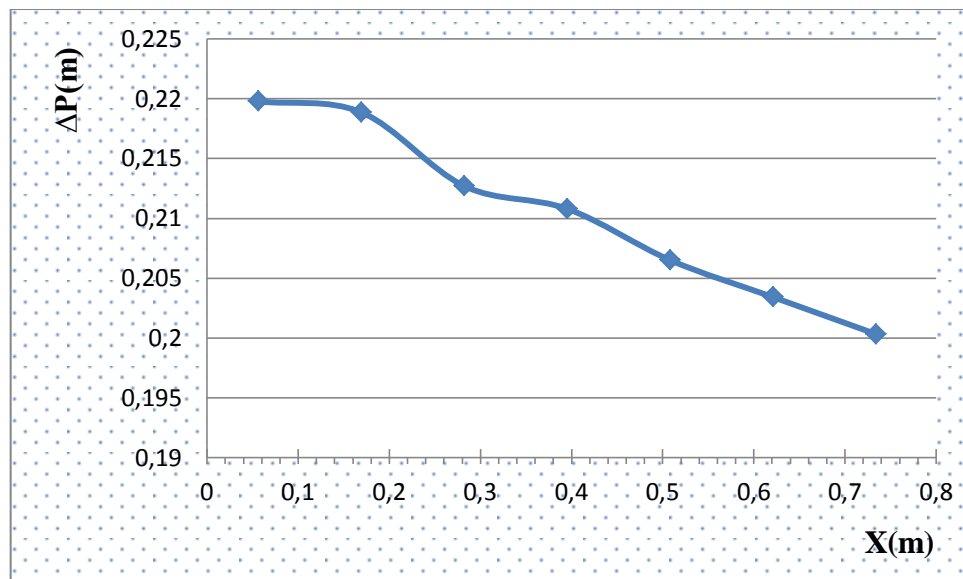


Figure IV.13 : variation de la pression à l'axe pour $R_e = 10333$

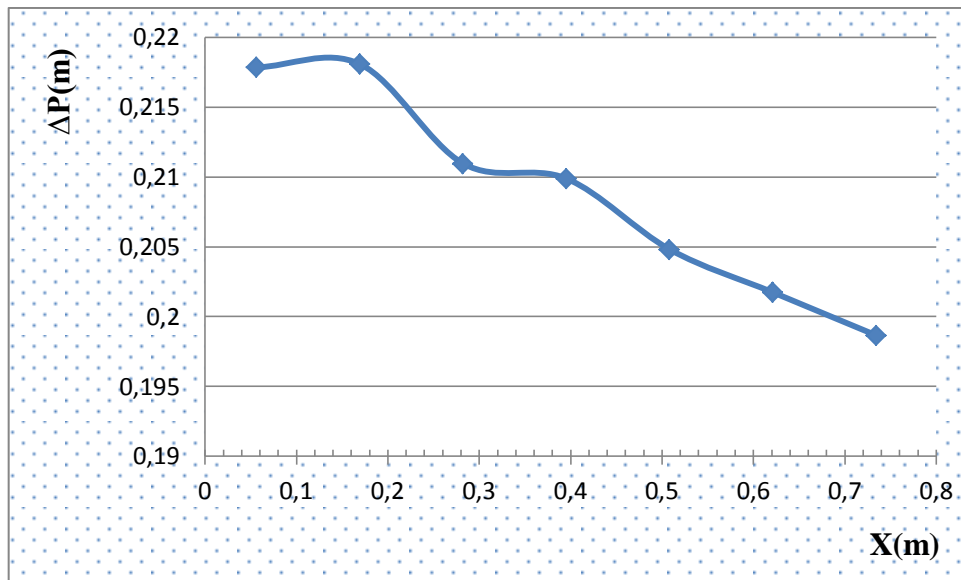


Figure IV.14 : variation de la pression à l'axe pour $Re = 9833$

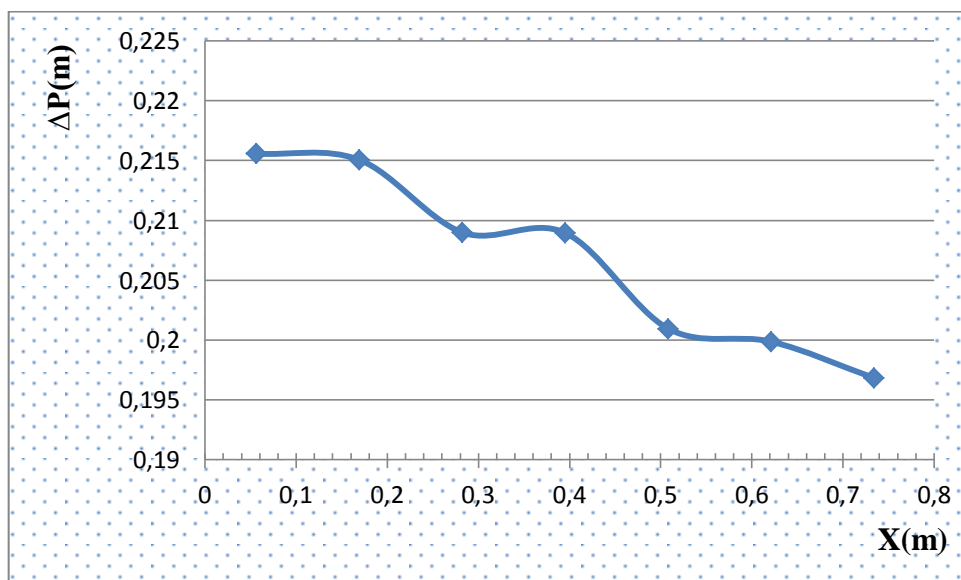


Figure IV.15 : variation de la pression à l'axe pour $Re = 9000$

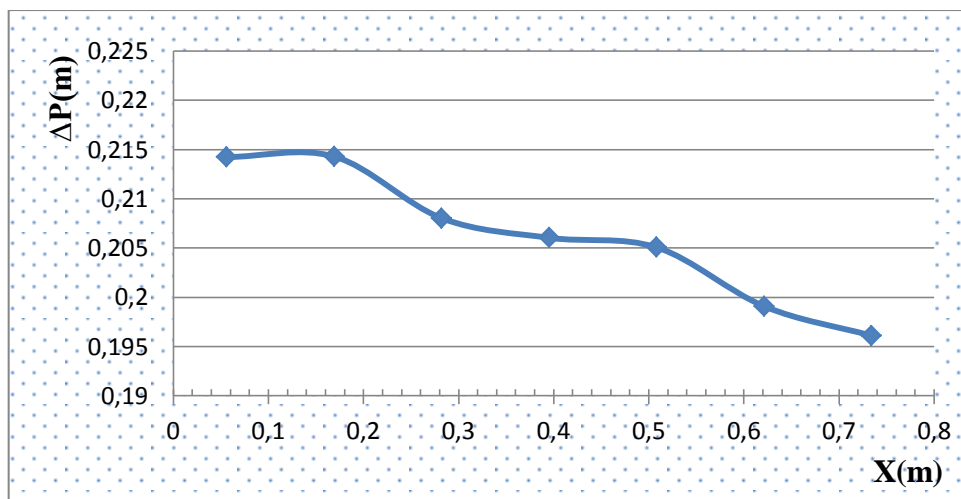


Figure IV. 16:variation de la pression à l'axe pour $Re = 7833$

On observe dans les figures (IV.12 ÷ IV.16), que la pression à l'axe de la conduite suit une tendance décroissante à faibles pulsations.

IV.2.3.3. Évaluation de coefficient des pertes de charge près de la paroi

Dans la figure III.17 est donnée la variation des coefficients de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds près de la paroi.

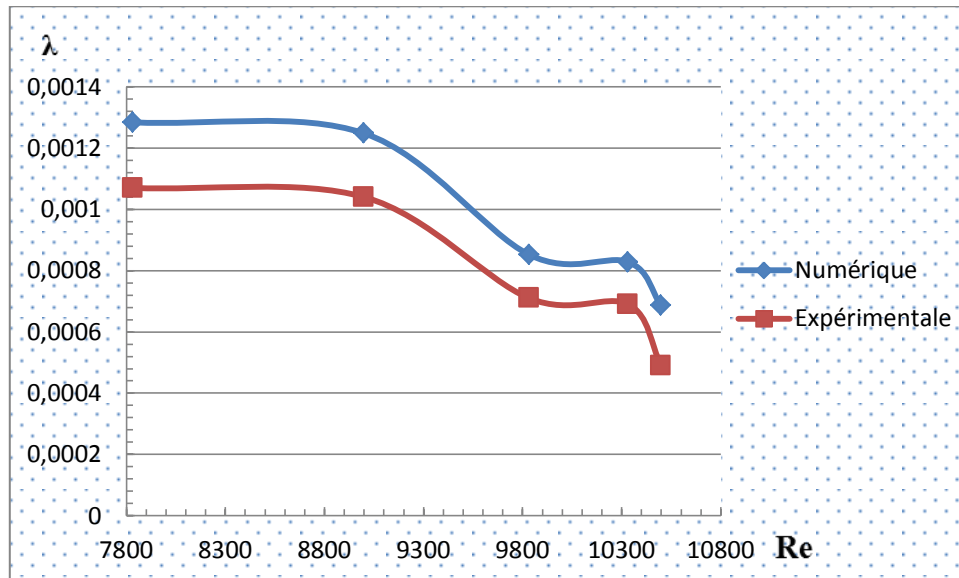


Figure IV.17: variation de λ en fonction de Re près de la paroi

On constate que les deux courbes suivent la même évolution, mais les valeurs numériques sont, comme précédemment, supérieures aux valeurs expérimentales.

On remarque également qu'en augmentant le nombre de Reynolds le coefficient des pertes de charge diminue.

IV.2.3.4. Évaluation de coefficient des pertes de charge à l'axe de la conduite

La figure (IV.18) donne la variation du coefficient de pertes de charge linéaire en fonction du nombre de Reynolds à l'axe de la conduite à motifs périodiques.

On remarque que pour un nombre de Reynolds supérieur à 2300 c'est-à-dire régime purement turbulent, le coefficient de perte de charge est constant.

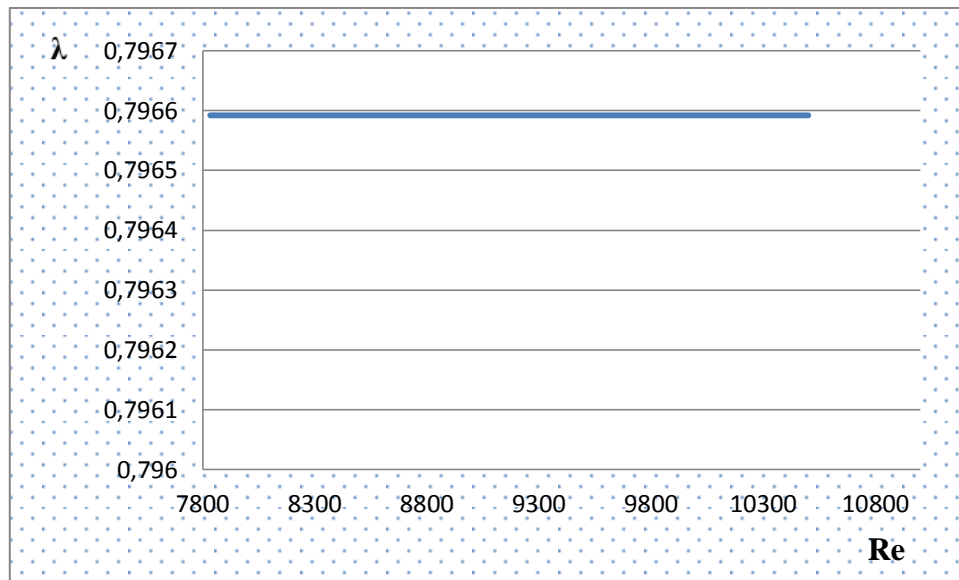


Figure IV.18: variation de λ en fonction de Re à l'axe de la conduite

On peut conclure que le coefficient de perte de charge est indépendant du nombre de Reynolds.

IV.2.3.5 Évaluation de la pression à l'axe de la conduite ($y = 0$) et près la paroi

La figure suivante montre la variation de la pression le long de la conduite pour un nombre de Reynolds égale à $Re = 10000$ à l'axe et à la paroi.

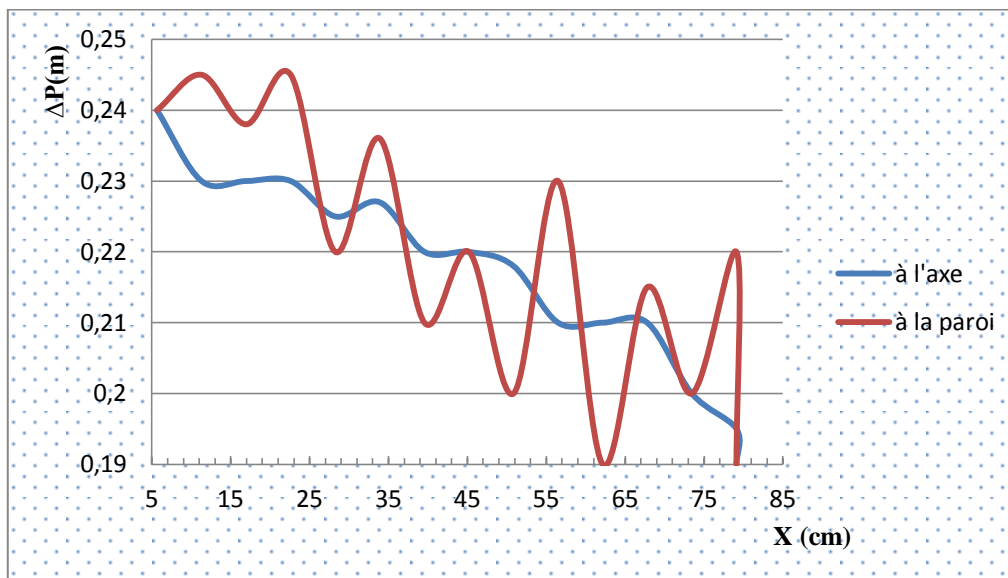


Figure IV. 19: variation de la pression à l'axe et à la paroi

La pression suit une tendance décroissante et elle est à la fois périodique et pulsée. On observe une périodicité qui correspond aux nombres de motifs de la conduite (07 motifs).

On remarque qu'à chaque pic la pression atteint son maximum. Pour le même nombre de Reynolds, la pression à la même allure, mais dès qu'on s'éloigne de la paroi, les ondulations commencent à se disparaître et la courbe prend une évolution linéaire.

Pour des nombre de Reynolds assez grand l'écoulement devient assez chaotique, ce qui se manifeste par l'apparition des rouleaux de recirculations tout au long de la conduite.

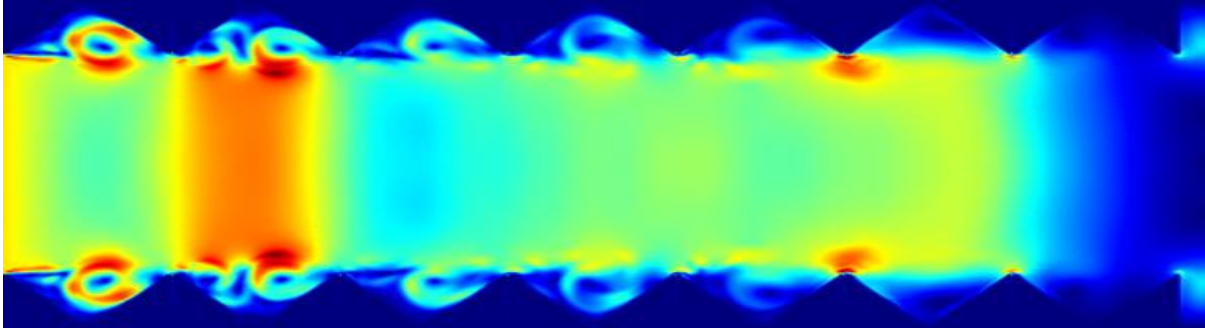


Photo IV. 1: les rouleaux de recirculations pour une conduite à sept motifs périodiques

Conclusion

Les résultats expérimentaux montrent que dans une conduite à sept (07) motifs périodiques, l'allure de pression dans l'espace suit une tendance décroissante et pulsée. En comparant les résultats expérimentaux à ceux obtenus numériquement, les deux courbes ont la même allure.

Ces résultats justifient la validité de la méthode de Boltzmann sur réseau que nous avons utilisé pour le traitement des écoulements dans des géométries complexes.

Nous avons observé que le coefficient des pertes de charge est inversement proportionnelle au nombre de Reynolds.

Conclusion générale

L'objectif de ce mémoire a été de développer un outil de simulation numérique d'un écoulement turbulent en charge dans une conduite à géométrie complexe.

Le but principal de ce mémoire est de résoudre les équations de Navier-stokes pour un écoulement turbulent dans une conduite à motif périodique modélisé par la méthode de lattice Boltzmann et de déterminer les valeurs du coefficient de pertes de charge.

Nous avons remarqué qu'il n'y a pas de moyens pour résoudre d'une manière analytique les équations en écoulement turbulent c'est pourquoi il est indispensable de se référer aux résultats expérimentaux.

Nous avons présenté le schéma numérique de Boltzmann, sa théorie cinétique, ainsi que ces modèles que nous avons retenu par son comportement dans les écoulements à géométrie complexes, ainsi que ces algorithmes robuste et explicites, sa facilité de programmation qui peuvent nous éviter les calculs contraignants à la complexité de la géométrie.

Nous avons supposé deux types de conditions aux limites, de mur (Bounce-Back) ou bien condition de non glissement qui est l'une des hypothèses traditionnelles pour la résolution des équations de Navier-stokes. Cette condition impose des vitesses pratiquement nulles à la frontière fluide-solide, une condition aux limites d'entrée et l'autre à sortie (Inlet and Outlet).

Le code de calcul Palabos est l'un des outils les plus sophistiqué pour la simulation en dynamique des fluides (CFD) grâce à sa bibliothèque basée sur les modèles de Boltzmann. Son avantage, est qu'il ne demande pas de très grandes connaissances pour élaborer un programme. Sa bibliothèque menus des différents modèles de simulation qui nous a permis de choisir le modèle de turbulence de Smagorinsky qui un modèle basé sur les grands échelles (modèle à énergie cinétique turbulente algébrique).

Les résultats trouvés lors de la simulation sont bien cohérents avec les résultats expérimentaux ce qui justifie la validité de notre code de calcul, tel que pour des nombres de Reynolds différents, le coefficient des pertes de charge diminue, donc la géométrie influe sur les pertes de charge. Mais dès que le nombre de Reynolds devient important, l'écoulement devient chaotique avec des perturbations qui s'apparaissent comme des rouleaux de recirculation tout le long de la conduite dû aux vitesses importantes et à l'effet de la géométrie qui est assez complexe.

Références bibliographie

1. Anda Ondo, D. (2006). "Modélisation et analyse des systèmes à paramètres distribués non linéaires par la méthode de Boltzmann sur réseau : application aux écoulements à surface libre", Docteur De L'université De Grenoble. 166 pages.
2. Belakroum, R. & Khadja, M. & Zibouche, H. (2007) "Simulation numérique du phénomène d'éclatement tourbillonnaire dans la zone de sillage d'un obstacle de section circulaire". International Conférence on Energetics and pollution constantine. Vol 08, pp11-13.
3. Benmamar, S. (2006) "Etude des écoulements dans les conduits à motifs périodiques – Application aux évacuateurs de crues" thèse de doctorat d'état en hydraulique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger. ENP. 197page.
1. Beugre, D. (2010). "Étude de l'écoulement d'un fluide dans des géométries complexes rencontrées en Génie Chimique par la méthode de Boltzmann sur réseau". Thèse réalisée en vue de l'obtention du grade de docteur en sciences de l'ingénieur. 163 pages.
2. Bhatnagar, P. L. & Gross, E. P. & Krook, M. (1954). "A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems". Physical review, vol 94, pp. 511-525.
3. Bouffenech, R & Djamai, Z. I, (2012). "Simulation d'un écoulement pulse à motifs périodiques par la méthode lattice Boltzmann ". Ingénieur d'état en hydraulique à l'école nationale polytechnique d'Alger, 162 pages.
4. Chetibi, M. (2013). "Simulation numérique d'un écoulement à surface libre dans des canaux à géométrie variable via PALABOS". Ingénieur d'état en hydraulique à l'école nationale polytechnique d'Alger, 138 pages.
5. Cheng, J-Y. (2006). "Bending moment distribution along swimming fish" Journal of Fluids and Structures VOL 23 PP 207–226.2006.
6. Chopard Droz, M. (2005). "Cellular automata modeling of physical systems". Cambridge University Press, 18 pages.
7. Dupuis, A. (2002). "From a lattice Boltzmann model to a parallel and reusable implementation of a virtual river," PhD, Faculté des sciences de l'université de Genève, Université de Genève, 210 pages.
8. Fargo, M. (2008). "A practical introduction to the lattice Boltzmann method "Department of physics north Dakota state university, 46 pages
9. Goncalves, E. (2005). "Méthodes, analyse et calculs numériques "mémoire à institut polytechnique de Grenoble, 99 pages

10. Jonas, L (2007). "Hydrodynamic Limit of Lattice Boltzmann Equations" mémoire d'obtention un grade de Docteur en sciences, mention interdisciplinaire à l'université de Genève, 124 pages.
11. Khabbouchi, I. & Guellouz, M.S. (2008) "Ecoulement autour d'un cylindre circulaire proche d'une paroi : Effet de l'écoulement type jet ". Laboratoire d'Etude des Systèmes Thermiques et Energétiques Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir Rue Ibn El Jazzar 5019 Monastir, Tunisie. 145 Pages
12. Lam, K & Zou, L.(2009) "Experimental study and large eddy simulation for the turbulent flow around four cylinders in an in-line square configuration". International Journal of Heat and Fluid Flow. Vol 30 PP 276–285.
13. Marcou, B. & Chopard, S. & El Yacoubi, B. & Hamroun, L. & Mendes, E. (2010). "A lattice Boltzmann model for simulation of flows in open channels with application to flows in a submerged sluice gate". Journal of irrigation and drainage engineering-asce, 136(12):809-822.
14. Malaspinas, O. P, (2009). "Lattice Boltzmann method for the simulation of viscoelastic fluid flows ".these de doctor d'état à EPFL, 172 pages.
15. Masselot, (2000). "A new numerical approach to snow transport and deposition by wind: a parallel lattice gas model". These d'obtention de grade PhD, university of Geneva, 185 pages.
16. McNamara, G, (1988). «Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata», Physical review letters, volume 61, pp.2332-2335.
17. Neuman V. (1966). "The theory of self-reproducing automata". University of Illinois Press, 85 pages.
18. Oughlissi, M & Zougagh, M (2011). "Simulation d'un écoulement hémodynamique dans un anévrisme par la méthode de Lattice Boltzmann " Ingénieur d'état en hydraulique à l'école nationale polytechnique d'Alger, 78 pages.
19. Peixinho, J. (2012). "Ecoulement dans un tube faiblement divergent transition laminaire-turbulent" Laboratoire ondes et milieux complexes université de Havre. 157Page.
20. Robinet, j.C. (2010). "effet et modélisation de la turbulence" UEE d'Arts et Métiers ParisTech. 132page
21. Sayoud, S. (2004). "Simulation numérique d'un écoulement turbulent dans une conduite à géométrie complexe Modèle K-ε" projet de fin d'étude de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger. ENP. 61page.
22. Seguineau De Preval, C. (2013). "Vers la simulation d'écoulements turbulents dans un convertisseur catalytique par la méthode de Boltzmann sur réseau". 118 pages.

23. Shan, X. Yuan, X.-F., & Chen, H., (2006). "Kinetic theory representation of hydrodynamics: A way beyond the Navies-Stokes equation ". Journal of fluid mechanics, vol. 550, pp. 413-441.
24. Simon, M. (2008) " Etude de la méthode Boltzmann sur Réseau pour les simulations en aéroacoustique ". Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie. 170 pages
25. Stobiac, V., Tanguy, P. A. & Bertrand, F. (2013). "Boundary conditions for the lattice Boltzmann method in the case of viscous mixing flows," Computers and fluids, vol. 73, pp. 145-161.
26. Succi S., (2001). "The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond ". Oxford science publications. 288 Pages.
27. Takafumi, Y. (2006). "Flow around a circular cylinder in linear shear flows At subcritical Reynolds number". Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics Vol 96 PP 961–973.
28. Tekitek, M. (2007). "Identification d'un modèle et paramètres pour la méthode de Boltzmann sur réseau", Thèse de doctorat, université de Paris XI Orsay.147 Pages.
29. Taoussi, N. (2010). "Validation de Poiseuille d'un Modèle Lattice Boltzmann Hémodynamique ". Magister en sciences de l'eau à l'école nationale polytechnique d'Alger. 92 pages.