

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique



**École Nationale Polytechnique**  
**Département de Génie Hydraulique**

Mémoire du projet de fin d'études d'ingénieur

Thème

**Écoulements diphasiques**  
*Application à une installation de transport  
pétrolier à partir d'un gisement off-shore*

Présenté par :

M. OUIGUINI Ali

Dirigé par :

M. MESSAHLI Rabiaa

الهدف من هذا العمل هو الدراسة النظرية لسيلان ثنائي الأحوال وتدعيم تلك الدراسات بدراسة تطبيقية. بعد تقديم المفاهيم العامة لسيلان ثنائي الأحوال سوف نحاول تطبيقها في بئر بترول بحري , أولا تطرقنا إلى تقيس القنائة ثم تطرقنا إلى برمجة عدة نماذج لسيلان ثنائي الأحوال :الأول أحادي السيلان و الاثنان الآخرين لسيلان ثنائي الأحوال .فيما يخص الخواص الفيزيائية لدينا اختيارين لإتباعها . MATLAB استعمل بكثرة و الذي سو يسمح لنا القيام بالعملية النظرية وصف كيفية استخراج البترول والغاز قد تم برمجة برامج عن طريق MATLAB و كل برنامج قد ارتبط بالنموذج الموافق له. لخم هذا العمل قد قمنا بعدة مقارنات في سبيل قياس مدى تأثير العوامل التي تتدخل في كل نموذج على السيلان

كلمات مفتاحية : سيلان ثنائي الأحوال بئر بترول بحري, MATLAB ,نموذج,نسبة الفراغ

## Résumé

Le but de ce travail est d'étudier théoriquement les écoulements diphasiques puis d'appuyer les connaissances acquises par une application pratique.

Après une présentation théorique des concepts généraux concernant les écoulements diphasiques, nous tâcherons de les appliquer à un gisement offshore.

Nous commencerons notre application par le dimensionnement de la conduite, pour ensuite simuler l'écoulement lors de l'extraction. Pour cela plusieurs modèles seront proposés ; un modèle monophasique et deux modèles diphasiques. Concernant l'évolution des propriétés physiques, deux choix de suivi seront disponibles.

Le logiciel Matlab, largement utilisé dans notre étude, nous permettra de simuler l'extraction. Des programmes Matlab seront donc associés à chaque modèle.

Nous finirons ce travail en comparant les résultats obtenus à partir des simulations, ce qui nous permettra d'évaluer l'impact des hypothèses formulées dans chacun des modèles sur l'écoulement

**Mots clés** : Ecoulement diphasique, offshore, MATLAB, modèle, fraction de vide

## Abstract

The goal of this work is to study the two-phase flows theoretically then to support the knowledge obtained by a practical application.

After a theoretical presentation of the general concepts concerning the two-phase flows, we will try to apply them to an offshore oil rig.

We will begin our application with the dimensioning of pipeline, for then simulating the flow during the extraction. For that several models will be proposed; a one phase flow model and two two- phase flows models. Concerning the evolution of the physical properties, two choices of follow-up will be available.

The Matlab software, largely used in our study, will enable us to simulate the extraction. Matlab programs will thus be associated each model.

We will finish this work by comparing the results obtained starting from simulations, which will enable us to evaluate the impact of the assumptions formulated in each model on the flow.

**Key words** : Two phase flows, offshore, MATLAB,model, void fraction

*À ma famille, particulièrement à mes parents, Tata Safia  
et à Mes sœurs (Pam, Fa, Mi), qui ont toujours été là pour moi.*

*À Louiza qui a toujours cru en moi.*

# Remerciements

Ce thème m'a été proposé par Monsieur Messahli, ayant remarqué que j'étais intéressé par le sujet et son application à l'industrie des hydrocarbures. Qu'il trouve ici toute ma gratitude de m'avoir incité à le retenir. Je le remercie également pour sa disponibilité, ses conseils et la qualité des documents qu'il m'a fournis.

Je remercie Mademoiselle Bennamar, pour tout le temps qu'elle m'a consacré, et pour m'avoir aidé à trancher dans le choix de l'application retenue.

Je tiens à témoigner ma sincère reconnaissance à Monsieur Benziada, Chef du Département Génie hydraulique, pour sa serviabilité, ses conseils et surtout pour son soutien moral.

Je voudrais aussi exprimer tous mes remerciements à Monsieur Berkani pour les enseignements dispensés en mécanique des fluides, ses orientations et ses conseils tout au long de mon travail.

Je remercie Monsieur BILEK, pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury, ainsi que Monsieur BELHADJ, pour avoir accepté d'être membre de ce jury.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements au Docteur Lakhehal de l'Ecole Polytechnique de Zurich pour m'avoir soutenu et encouragé aux moments où je désespérais. Son aide m'a particulièrement été précieuse dans mon étude bibliographique

Que le personnel du département génie hydraulique et celui de la bibliothèque centrale de l'E.N.P. trouvent ici l'expression de ma gratitude pour l'assistance qu'ils m'ont apportée lors de mes recherches bibliographiques.

Je remercie tous mes amis, en particulier Abdelkader, Lotfi, Lotfi, Djamil, Ziad, Salim et Zimou qui m'ont soutenu tout au long de l'été.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, j'aimerais leur dire MERCI.

J'adresse enfin ma profonde gratitude à ma famille qui a tout mis à ma disposition pour que mon travail se déroule dans les meilleures et conditions possibles.

# Table des matières

*Nomenclature*

*Liste des figures*

*Listes des tableaux*

• <b>Introduction générale</b> .....	1
• <b>Première partie</b> .....	4
<b>Chapitre I : Introduction aux écoulements diphasiques</b> .....	5
I.1. Classification élémentaire des écoulements diphasiques .....	6
I.1.1. Ecoulement diphasique gaz-liquide .....	7
I.1.2. Ecoulement gaz solides .....	8
I.1.3. Ecoulements liquide-liquide .....	9
I.1.4. Ecoulement Liquide-solide .....	10
I.2. Utilité de l'étude des écoulements diphasiques .....	11
I.2.1. Le gradient de pression .....	11
I.2.2. Le coefficient de transfert de chaleur .....	11
I.2.3. Le coefficient de transfert de masse .....	12
I.2.4. Le taux de présence ou taux de vide de la phase .....	12
I.2.5. Limitations de flux .....	13
I.3. Approche de modélisation des écoulements diphasique .....	14
I.3.1 Le modèle Homogène .....	14
I.3.2 Le modèle à flux de dérive .....	14
I.3.3 Le modèle à phases séparées .....	14
I.3.4 Le modèle multi fluide .....	14
<b>Chapitre II : Présentation des écoulements diphasiques gaz-liquide</b> .....	15
II.1. Présentation des écoulements diphasiques du type Gaz liquide .....	16
II.1.1. Régimes d'écoulement ou configuration d'écoulement .....	16
II.1.1.a. Écoulement stratifié (stratified flow) .....	17
II.1.1.b. Écoulement à bulles (dispersed flow) .....	18
II.1.1.c. Écoulement annulaire (annular flow) .....	19

II.1.1.d Écoulement intermittent ou à poches et bouchons (slug plug flow) .....	20
II.1.2. Écoulement en conduite verticale .....	21
II.1.3. Écoulement en conduites horizontales .....	22
II.1.4. Écoulement diphasique en conduite inclinée .....	23
II.2. Carte de configuration ou carte d'écoulement .....	25
II.3. Les transitions en écoulement diphasiques .....	28
II.3.1. Les transitions en écoulement vertical .....	28
II.3.1.a. Bulle- poche bouchon .....	28
II.3.1.b Transition écoulement poche bouchon- annulaire .....	29
II.3.1.c Transition du régime churn (à fortes coalescences) à l'annulaire .....	30
II.3.2. Transitions en écoulements horizontaux .....	31
II.3.2.a Transition régime stratifié- poche bouchon .....	31
II.3.2.b Transition poche bouchons-annulaire .....	31
II.3.2.c Transition poche bouchon- bulles dispersée .....	31

### **Chapitre III : Les principes fondamentaux des écoulements diphasiques .....**

III.1. Les bilans .....	34
III.1.1. Principe général de bilan .....	34
III.1.2. Pourquoi faire des bilans ? .....	35
III.1.3. Equation généralisée des bilans .....	35
III.2. Cas d'un écoulement diphasique .....	37
III.2.1. Équation d'équilibre des bilans en écoulement diphasique .....	38
III.2.2. Grandeur phasique .....	38
III.3. Bilans locaux et globaux intrinsèques (à l'intérieur de chaque phase) .....	39
III.3.1. Conservation de la masse .....	39
III.3.2 Équation de bilan de la quantité de mouvement .....	41
III.3.2.a. Conservation de la quantité de mouvement .....	41
III.3.2.b. Interprétation physique de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement .....	42
III.3.3. Équation de conservation de l'énergie .....	43
III.3.4. Évolution de l'entropie .....	44

III.4. Lois constitutives.....	45
III.4.1. Équations d'état .....	46
III.4.2. Équations constitutives mécaniques .....	47
III.4.3. Équations constitutives énergétiques .....	48
III.5 Traitement des deux phases .....	49
III.5.1. Bilan phasique locaux .....	49
III.5.2 Fonction caractéristique de présence de phase .....	49
III.5.3. Distribution et propriétés de l'interface .....	50
III.6 Extension des équations à tout le domaine d'écoulement .....	52
III.6.1 Equation locale phasique généralisée .....	52
III.6.2 Les équations phasiques locales instantanées .....	54
III.7. Equation diphasique et condition de saut à l'interface .....	54
III.7.1. Grandeur diphasique .....	54
III.7.2. Équations diphasiques des bilans locaux généralisée .....	55
III.7.3. Équations diphasiques des bilans locaux .....	57
III.7.3.a. Bilan de masse .....	57
III.7.3.b. Bilan de la quantité de mouvement .....	59
III.7.3.c. Conservation de l'énergie .....	61
III.8 Lois constitutives à l'interface .....	62
<b>Chapitre IV : Approches de moyenne .....</b>	<b>64</b>
IV.1. Approches de moyenne .....	65
IV.1.1. Pourquoi moyennner ? .....	65
IV.1.2. Opérateur de moyenne .....	65
IV.2. Moyenne statistique .....	66
IV.2.1. Définition et propriétés de la moyenne statistique .....	66
IV.2.2. Moyennes phasique et diphasique .....	67
IV.2.3. Moyenne statistique des grandeurs physiques .....	69
IV.2.4. Grandeurs moyennes et fluctuantes des grandeurs phasiques et diphasiques .....	69
IV.2.5. Moyenne de Favre, phasique et diphasique .....	71
IV.3 Équations sur les grandeurs moyennes phasiques .....	71
IV.3.1. Équation générale de bilan sur les grandeurs moyennes phasiques .....	72

IV.3.1.a. Bilan de masse des grandeurs moyennes phasique ...	72
IV.3.1.b. Bilan de quantité de mouvement des grandeurs moyennes phasique .....	72
IV.3.1.c. Bilan d'énergie des grandeurs moyennes phasique ...	74
IV.3.2. Équation générale de bilan sur les grandeurs moyennes diphoniques .....	75
IV.3.2.a. Bilan de masse des grandeurs moyennes diphonique	77
IV.3.2.b. Bilan de la quantité de mouvement grandeurs moyennes diphonique .....	77
IV.3.2.c. Bilan d'énergie de grandeurs moyennes diphonique .	79
IV.4. Raccordement des équations aux interfaces .....	79
IV.5. Opérateur de moyenne spatiale .....	80
IV.5.1. Moyenne sur une variété, phasique et diphonique .....	80
IV.5.2. Moyenne spatiale des grandeurs interfaciales .....	82
IV.5.3. Taux de présence moyen spatial de phase .....	82
IV.5.4. Taux de présence moyen spatial de l'interface .....	83
IV.5.5. Moyenne spatiale pondérée par la fonction de présence .....	84
IV.6. Opérateur de moyenne temporelle .....	85
IV.6.1. Opérateur de moyenne temporelle, phasique et diphonique ...	85
IV.6.2. Taux de présence de phase et d'interface .....	85
IV.6.3. Moyenne temporelle pondérée par le taux de présence local ...	86
IV.7. Identification et commutativité des opérateurs de moyenne .....	86
IV.7.1. Identification des opérateurs de moyenne .....	86
IV.7.2. Moyennes composées .....	87
IV.7.2.a. Moyenne double statistique espace .....	87
IV.7.2.b. Moyenne double espace- temps .....	88
• <b>Deuxième partie</b> .....	89
<b>Chapitre V : Application</b> .....	90
V.1. Rappel sur la genèse des hydrocarbures .....	91
V.2. Le pétrole et le diphonique Positionnement du problème .....	92
V.3. Ecoulement en conduite .....	93
V.3.1. Moyenne double sur la conduite .....	93

V.3.2. Equations de conservation .....	93
V.4 Principaux modèles .....	95
V.4.1 Modèle homogène .....	96
V.4.2 Le modèle à phases séparées .....	96
V.4.3 Modèle à flux de dérive .....	97
V.4.4 Modèle multi fluide .....	98
V.5 Présentation de l'installation .....	98
V.6 Dimensionnement de la conduite .....	100
V.7 Etude de l'installation et développement d'un code de calcul .....	101
V.7.1. Déroulement de l'application .....	103
V.7.1.a. Cas monophasique .....	103
V.7.1.b. Cas diphasique .....	114
V.7.2. Résultats graphiques et commentaires .....	121
V.7.2.a. Résultats .....	121
V.7.2.b. commentaires .....	130
• <b>Conclusion générale</b> .....	135

*Bibliographie*

*Annexes*

# Nomenclatures

## Notations et symboles

- $A, A_k, A_i$  : aire totale, aire cumulée occupée par la phase k, aire interfaciale  
 $A, B$  : coefficients du modèle de van der Waals  
 $Dim$  : dimension  
 $D, D_k$  : domaine spatial de l'écoulement, domaine spatial occupé par la phase k  
 $E_k, E_i$  : énergie phasique totale par unité de masse, énergie surfacique  
 $e_k$  : énergie interne spécifique  
 $f_{pm}$  : Coefficient de frottement pariétal  
 $F_k$  : l'énergie libre de Helmholtz  
 $g_k, g_i$  : résultante des forces massiques s'exerçant dans le fluide, source volumique à l'interface  
 $G_k$  : Énergie libre massique (*fonction de Gibbs*) de la phase k  
 $g$  : accélération de la pesanteur  
 $h, H$  : enthalpie, enthalpie totale  
 $H$  : courbure moyenne de l'interface  
 $I$  : tenseur unité à deux ou trois dimensions  
 $J$  : vecteur flux diffusif surfacique  
 $K_k, K_i$  : diffusivité thermique de la phase k, de l'interface  
 $K$  : constante de Boltzmann  
 $l$  : segment total  
 $l_k$  : longueur cumulée du segment occupé par la phase k  
 $M$  : masse  
 $M_k$  : masse molaire de la phase k  
 $\dot{m}_k$  : flux de masse sortant de l'interface à partir de la phase k  
 $\overline{\dot{m}_k}$  : source de masse interfaciale relative à la phase k  
 $\overline{M_k}$  : moyenne des sources interfaciales phasiques de la quantité de mouvement  
 $\overline{\dot{m}_i}$  : source de masse interfaciale relative à l'interface  
 $\overline{M_i}$  : terme d'interface du aux échanges entre phase dans le bilan de la quantité de mouvement  
 $N$  : nombre de réalisations indépendantes  
 $n_k$  : nombre de mole de la phase k  
 $n_c$  : vecteur unitaire normale à une courbe  
 $n, n_k$  : vecteur unitaire, normale à l'interface extérieure à la phase k  
 $N_k$  : nombre de réalisations de la phase k  
 $P_{kc}$  : pression critique de la phase k  
 $P, P_k, P_i$  : pression, pression dans la phase k, de l'interface  
 $q_k, q_i$  : flux de chaleur entrant au système, ( $-q_k$ ) flux de chaleur perdu par conduction Thermique, flux de chaleur à l'interface

$Q, Q_k$  : débit, quantité de mouvement, rayonnement, et rayonnement de la phase  $k$   
 $R$  : constante universelle des gaz  
 $r_i$  : vecteur caractérisant la position d'un point lié à l'interface.  
 $R_k$  : fraction volumique de la phase  $k$   
 $R_1, R_2$  : rayons de courbure principaux d'une surface  
 $r$  : vecteur caractérisant la position  
 $Re$  : nombre de Reynolds  
 $S, S_k$  : entropie, entropie phasique  
 $S_p$  : périmètre de la section  
 $T_k, T_i$  : tenseur des contraintes complet de la phase  $k$ , de l'interface  
 $T, T_k, T_i$  : température, température de la phase  $k$ , température à l'interface  
 $t$  : le temps  
 $U_{i_n}$  : composante normale de la vitesse interfaciale  
 $U, U_k, U_i$  : vitesse eulérienne d'une particule fluide, de la phase  $k$ , de l'interface.  
 $V$  : volume matériel  
 $V_k$  : volume de la phase  $k$   
 $V_{kc}$  : volume critique  
 $W_k$  : tenseur des vitesses de déformation  
 $x$  : titre massique  
 $\tau, \tau_k, \tau_i$  : tenseur des contraintes visqueuses, de la phase  $k$ , de l'interface.  
 $\tau_k^t$  : tenseur des contraintes turbulentes ou de Reynolds  
 $\tau_p$  : contrainte de cisaillement  
 $\Delta_k$  : taux de production de l'entropie par unité de volume.  
 $\psi$  : fonction courante, représentant en général une grandeur volumique densité volumique  
 $\psi_k, \psi_i$  : grandeur volumique relative à la phase  $k$ , grandeur surfacique relative à l'interface.  
 $\varphi$  : grandeur massique  
 $\varphi_k, \varphi_i$  : grandeur massique de la phase  $k$ , de l'interface  
 $\varphi_k''$  : fluctuation phasique non centrée de la grandeur phasique  $\varphi_k$   
 $\varphi'$  : fluctuation diphasique centrée de la grandeur diphasique  $\varphi$   
 $\varphi''$  : fluctuation phasique non centrée de la grandeur diphasique  $\varphi$   
 $\varphi_k'$  : fluctuation phasique centrée de la grandeur phasique  $\varphi_k$   
 $\phi$  : source volumique de création / destruction  
 $\phi_k, \phi_i$  : source volumique de la phase  $k$ , source surfacique de l'interface  
 $\nu_k$  : viscosité cinématique du fluide.  
 $\eta_k$  : désigne la viscosité de volume du fluide  
 $\mu_k$  : viscosité dynamique du fluide.  
 $\delta_i$  : distribution de Dirac interfaciale  
 $\sigma$  : tension interfaciale  
 $\rho_i$  : masse surfacique de l'interface  
 $\chi_k$  : fonction caractéristique de présence de la phase  $k$

$\varepsilon$  : épaisseur de l'interface (infiniment petit)

$\alpha_k, \alpha_i$  : taux de présence local de phase  $k$ , d'interface

$\overline{\xi}_k$  : source d'échanges interfaciaux moyenne de la conservation d'énergie

$\overline{\xi}_i$  : source d'énergie interfaciale

### Opérateurs :

$\nabla$  : gradient d'une grandeur scalaire, vecteur

$\nabla \cdot$  : divergent d'une grandeur vecteur, tenseur

$\otimes$  : produit tensoriel de deux vecteur

$\sim$

:opérateur de moyenne

—

: opérateur de moyenne statistique

==

: opérateur de moyenne statistique phasique pondérée par la fonction de présence

^

: opérateur de moyenne de Favre moyenne pondérée par la masse

^^

: opérateur de moyenne de Favre phasique

$\langle \rangle$  : opérateur de moyenne volumique

$\langle \rangle_l$  : opérateur de moyenne volumique linéaire

$\langle \rangle_A$  : opérateur de moyenne volumique surfacique

$\langle \rangle_V$  : opérateur de moyenne volumique

$\langle \rangle_{Dim}$  : opérateur de moyenne sur une variété

$\langle \rangle_l$  : opérateur de moyenne phasique linéaire

$\langle \rangle_A$  : opérateur de moyenne phasique surfacique

$\langle \rangle_V$  : opérateur de moyenne phasique volumique

$\overline{\phantom{x}}$  : opérateur de moyenne temporelle

≡

: opérateur de moyenne temporelle phasique

### Liste des indices :

$A$  : variété spatiale surfacique

$C$  : courbe

$i$  : indice désignant l'interface entre deux phases

$j$  : numération d'une suite

$k$  : indicateur de phase

$l$  : phase liquide ou variété linéaire pour la moyenne volumique

$g$  : phase gazeuse

$V$  : variété spatiale volumique

1,2 : première phase, deuxième phase

# Liste des Figures

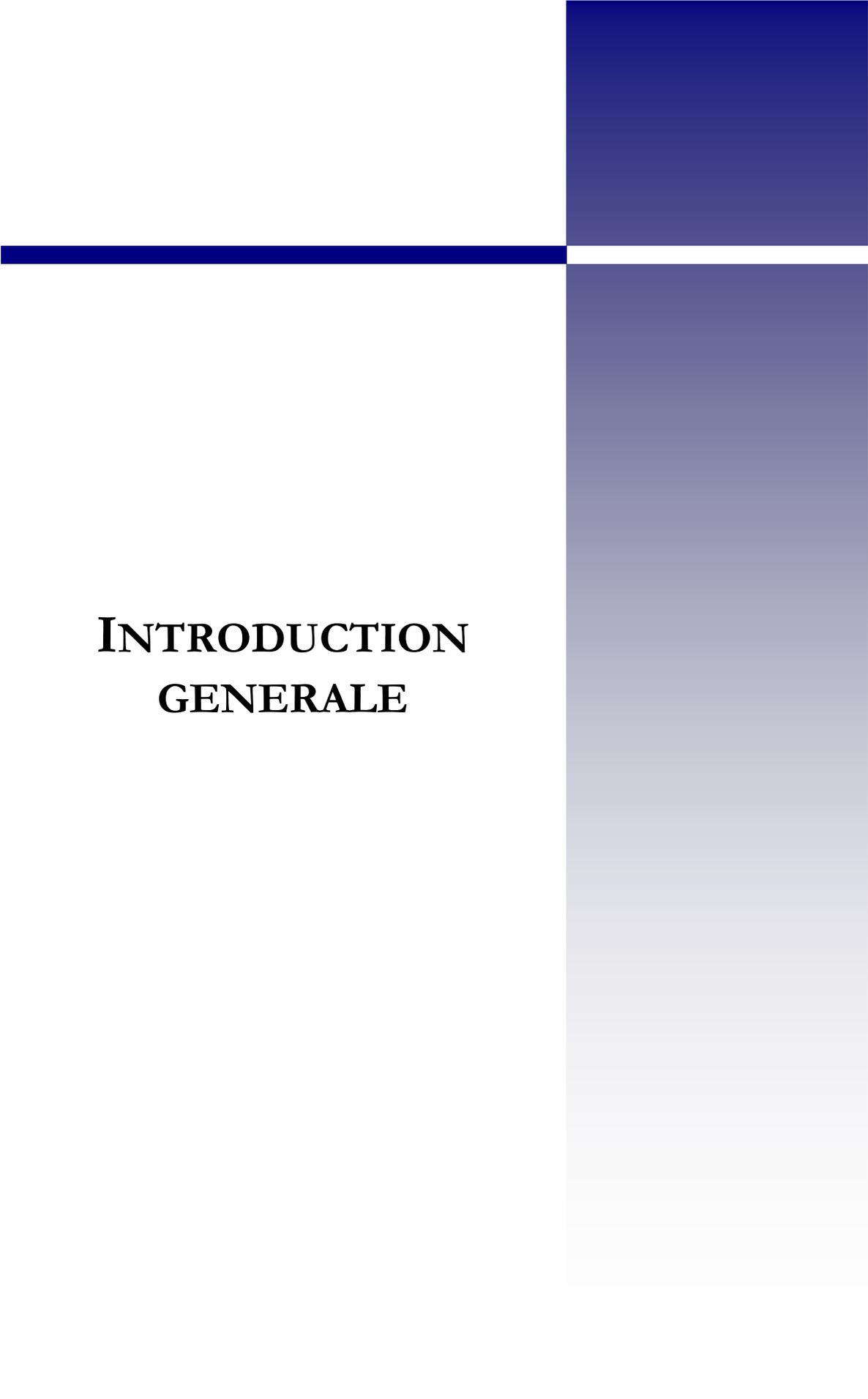
• Figure I.1.a : Exploitation des gisements de pétrole .....	7
• Figure I.1.b: Centrale thermique .....	8
• Figure I.1.c: Processus d'aération dans le lac de Bouregreg (Maroc) .....	8
• Figure I.2 : Principe du transport pneumatique .....	9
• Figure I.3: Marée noire .....	10
• Figure I.4 Sédimentation .....	10
• Figure I.5: Conditions de flux critique en ébullition convective Bowring, (1972) pour l'eau .....	13
• Figure II.1: Régimes d'écoulements stratifiés et dispersés .....	17
• Figure II.2: Écoulements stratifiés .....	17
• Figure II.3 : Écoulements à bulles .....	18
• Figure II.3.a: Régimes d'écoulements à bulles en conduite verticale .....	18
• Figure II.3.b: Écoulement dispersé à bulles (En conduite horizontale) .....	18
• Figure II.3.c: Écoulement dispersé à bulles (En conduite verticale) .....	18
• Figure II.4: Exemples d'écoulements annulaires .....	19
• Figure II.4.a : Écoulements annulaires en conduite horizontale .....	19
• Figure II.4.b : Écoulement annulaire dispersé ou à gouttelettes .....	19
• Figure II.4.c : Écoulement annulaire en conduite verticale .....	19
• Figure II.5: Exemples d'écoulement à poches et bouchons .....	20
• Figure II.5.a : Écoulements intermittents en conduite horizontale .....	20
• Figure II.5.b : Écoulement à longues bulles en conduite inclinée .....	20
• Figure II.5.c : Écoulement intermittent ou à poches et bouchons .....	20
• Figure II.6: Conduite expérimentale verticale .....	21
• Figure II.7: Les différents régimes en écoulement verticaux .....	22
• Figure II.8: Conduite expérimentale horizontale .....	22
• Figure II.9 : Régimes d'écoulement en conduites horizontales .....	23
• Figure II.10: Conduite expérimentale inclinée .....	24
• Figure II.11: Écoulements en conduite inclinée en fonction de la vitesse superficielle du gaz .....	24

• Figure II.12 : Fraction liquide, écoulement en conduite inclinée.....	25
• Figure II.13 : Configurations pour écoulement co-courant en conduite horizontale obtenue par Taitel et Dukler 1986 .....	26
• Figure II.14 : Configurations obtenue par Hewitt et Roberts (1969) pour un écoulement ascendant co-courant en conduite verticale .....	27
• Figure II.15: Régimes d'écoulement gaz liquide en conduite verticale (Govier&Aziz,1977) .....	27
• Figure II.16: Transition régime à bulles- régime intermittent .....	29
• Figure II.17: Transition de churn à annulaire .....	30
• Figure II.18: Comparaison de relation de transition poche bouchon/annulaire, données de Reiman .....	32
• Figure III.1 : Différents états de la matière .....	34
• Figure III.2 : Évolution temporelle des variables d'état.....	36
• Figure III.3 : Région contenant une surface singulière .....	38
• Figure III.4 : Fonction caractéristique de présence .....	50
• Figure III.5 : Distribution des phases .....	51
• Figure III.6 : Discontinuité à l'interface .....	52
• Figure III.7 : Aire interfaciale .....	52
• Figure III.8 : Volume de contrôle et interactions entre les phases .....	55
• Figure III.9 : Coordonnées interfaciales .....	56
• Figure IV.1 : Moyenne volumique .....	83
• Figure IV.2 : Intervalles de temps en écoulements diphasiques .....	86
• Figure IV.3 : Moyennes phasiques statistiques en écoulement stationnaire .....	87
• Figure V.1 : Présentation de l'installation .....	99
• Figure V.2 : Evolution du diamètre en fonction de la pression du réservoir .....	101
• Figure V.3 : Organigramme de calcul pour la méthode de tir établie .....	110
• Figure V.4 : Géométrie de la structure (système pipelines) .....	112
• Figure V.5 : Paramètres d'écoulement à l'aide du modèle monophasique .....	113
• Figure V.6: Comparaison des paramètres d'écoulement des deux choix de suivi des propriétés physiques (Modèle homogène) .....	122
• Figure V.7: Comparaison des deux choix de suivi des propriétés physiques (modèle homogène) .....	123
• Figure V.8: Comparaison des paramètres d'écoulement des deux choix de suivi des	

propriétés physiques pour le modèle à flux de dérive .....	124
• Figure V.9: Comparaison des deux choix de suivi des propriétés physiques (modèle à flux de dérive) .....	125
• Figure V.10: Comparaison des paramètres d'écoulement des deux modèles diphasiques avec utilisation du modèle gaz parfait .....	126
• Figure V.11: Comparaison des propriétés physiques (gaz, pétrole) des deux modèles diphasique à l'aide du modèle gaz parfait .....	127
• Figure V.12: Comparaison des paramètres d'écoulement des deux modèles diphasique avec utilisation du modèle industriel .....	128
• Figure V.13: Comparaison des propriétés physiques (gaz, pétrole) des deux modèles diphasique à l'aide du modèle gaz parfait .....	129
• Figure V.14 : Exemple de zoom sur un résultat graphique .....	133

# Liste des Tableaux

- Tableau III.1 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan phasique de la masse .....40
- Tableau III.2 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan phasique de la quantité de mouvement .....42
- Tableau III.3 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan phasique d'énergie .....43
- Tableau III.4 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan phasique d'entropie .....44
- Tableau III.5 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan diphasique de la masse .....58
- Tableau III.6 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan diphasique de la quantité de mouvement .....59
- Tableau III.7 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan diphasique d'énergie .....61
- Tableau V.1: Données géométriques du système de pipeline de l'installation .....105
- Tableau V.2 Equations du modèle monophasique, pour fluides compressibles et incompressible .....109
- Tableau V.3 : Equations des modèles (Gaz parfait et Industriel) pour le suivi des propriétés Physiques .....117
- Tableau V.4 : Equations des modèles (homogène et à flux de dérive) .....119
- Tableau V.5 : Organigramme de la boucle de calcul (Modèle homogène et à flux de dérive) .....120
- Tableau V.6 : Récapitulatif des résultats (paramètres en sortie) après exaction des différents programmes .....133



**INTRODUCTION  
GENERALE**

Depuis le premier essor de l'industrie, la mécanique des fluides prend une place prépondérante dans les systèmes industriels.

Plusieurs systèmes industriels sont confrontés à la résolution de problèmes de transfert de mélanges de plusieurs fluides, ou de fluides et de solides sous différentes formes et dans des proportions variées d'un domaine à l'autre

Cet écoulement de mélange ou écoulements polyphasiques se présente sous diverses formes comme par exemple :

- Au niveau du milieu naturel (neige, sédimentation, etc.).
- Au niveau du transport pneumatique (mélange solide gaz).
- Au niveau du transport hydraulique (mélange liquide solide).
- Au niveau de l'extraction et du transport des hydrocarbures (gaz naturel et pétrole).
- Au niveau des fluides cryogéniques (hydrogène, hélium).

L'écoulement d'un mélange en deux phases est appelé écoulement diphasique. Parmi les formes d'écoulements recensés, les écoulements se limitant au cas d'un mélange de deux phases restent néanmoins toujours aussi complexes et sont assez fréquents

Compte tenu de l'étendue des champs d'application des écoulements diphasiques, ce domaine de la mécanique des fluides suscite un grand intérêt tant aux scientifiques qu'aux industriels, pour améliorer les performances des processus industriels.

Mais à l'heure actuelle, il n'existe pas de consensus sur la modélisation de ce type d'écoulement par approche universelle. Les phénomènes complexes à modéliser (échanges entre phases, réactions chimiques, forces interfaciales, etc.) et les nombreuses configurations d'écoulement différentes en sont les principales raisons. Tous les modèles utilisant l'approche eulérienne correspondent à une simplification de la formulation locale instantanée. Cette formulation décrit les écoulements diphasiques comme un ensemble de domaines monophasiques à frontières mobiles (ces frontières correspondent aux interfaces entre chaque phase). Les régions monophasiques sont décrites par les équations de Navier-Stokes et les interfaces sont modélisées par des lois constitutives, des relations de saut et d'évolution.

La connaissance et la compréhension des différents transferts et comportements au sein de l'écoulement relèvent entre autres des concepts de la mécanique des fluides, de la thermodynamique et de la pertinence des outils mathématiques.

Ainsi, dans le cadre de ce projet de fin d'études nous nous limiterons en matière de concept de la mécanique des fluides aux écoulements diphasiques du type gaz-liquide, même si une grande partie des équations présentées restent valable pour les autres types d'écoulements diphasiques en fonction des phases en présence.

Notre objectif est de l'impact de ce type de phénomène, qui prend une place importante dans le transport des hydrocarbures, secteur que nous avons découvert au cours de stages effectués lors de la formation en spécialité hydraulique.

Pour l'élaboration de ce travail nous nous sommes rendus compte que la compréhension de ce type d'écoulement nécessitait une connaissance théorique assez consistante, et nous nous sommes investis dans ce sens.

C'est la première partie du document qui nous familiarisera avec ce type d'écoulement dans un premier temps et qui donnera ensuite les éléments théoriques des écoulements diphasiques gaz-liquide nécessaires à la compréhension, et l'élaboration d'une modélisation adéquate. A cet effet nous formulerons les différents bilans de conservation et d'évolution. Une fois ce travail fait, nous moyennerons ces derniers afin de pouvoir s'attaquer à la modélisation,

Pour asseoir les connaissances acquises dans le développement de la première partie, et pour s'initier aux outils mathématiques, nous avons illustré les écoulements diphasiques gaz-liquides par une application propre à l'industrie pétrolière, et durant laquelle nous avons simulé l'écoulement lors de l'extraction du gaz en exploitation off-shore, à l'aide de trois modèles.

C'est l'objet de la deuxième partie du document qui se présente comme suit :

- Présentation d'une structure offshore. Celui qui nous intéressera sera le système de papi (la géométrie du système d'extraction).
- Dimensionnement de la conduite du système, n'ayant pas de diamètre comme donné nous avons dimensionné notre conduite en fonction des données que nous possédions et à l'aide d'un débit d'extraction.
- Une fois la géométrie complète de la structure connue (diamètre compris), nous simulerons l'écoulement avec trois modèles, le premier est une approche monophasique de l'écoulement, les deux autres sont des modèles diphasiques qui prennent en considération le gaz qui coexiste avec l'huile extraite.



# **PREMIERE PARTIE**

# CHAPITRE

---

# I

## INTRODUCTION AUX ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES

Par définition, un écoulement diphasique représente un mélange de deux phases où la topologie, la composition et les phénomènes d'échanges sont des paramètres qui peuvent constamment varier. De part leur grande diversité, on les rencontre fréquemment dans la nature et notamment dans les applications industrielles: Traitement du pétrole, réacteur nucléaire, turbopropulseur, injecteur diphasique, etc.

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter les différents types d'écoulement diphasique, ainsi que leurs domaines d'application.

### I.1. Classification élémentaire des écoulements diphasiques

Une classification élémentaire des écoulements diphasiques peut être faite selon la nature des phases en présence (gaz, liquide, solide), et les combinaisons possibles (gaz/liquide, liquide/solide, solide/gaz, liquide/liquide). Divers noms ont été donnés à des mélanges particuliers, comme par exemple [1], [2], [3] :

— **émulsion** : mélange liquide-liquide finement divisé, ce terme est parfois appliqué à un mélange gaz-liquide sous forme de très petites bulles très nombreuses ;

— **mousse** : mélange gaz-liquide à très fort taux de gaz ; interfaces à géométrie polyédrique ;

— **brouillard, aérosol** : suspension dans un gaz de très fines gouttelettes de liquide ; l'appellation dépend de la taille des particules.

— **lit fluidisé** : suspension de corps pulvérulents par un faible courant de gaz.

Dans ce qui suit, on se bornera à présenter une classification basée sur la nature des phases en présence à savoir :

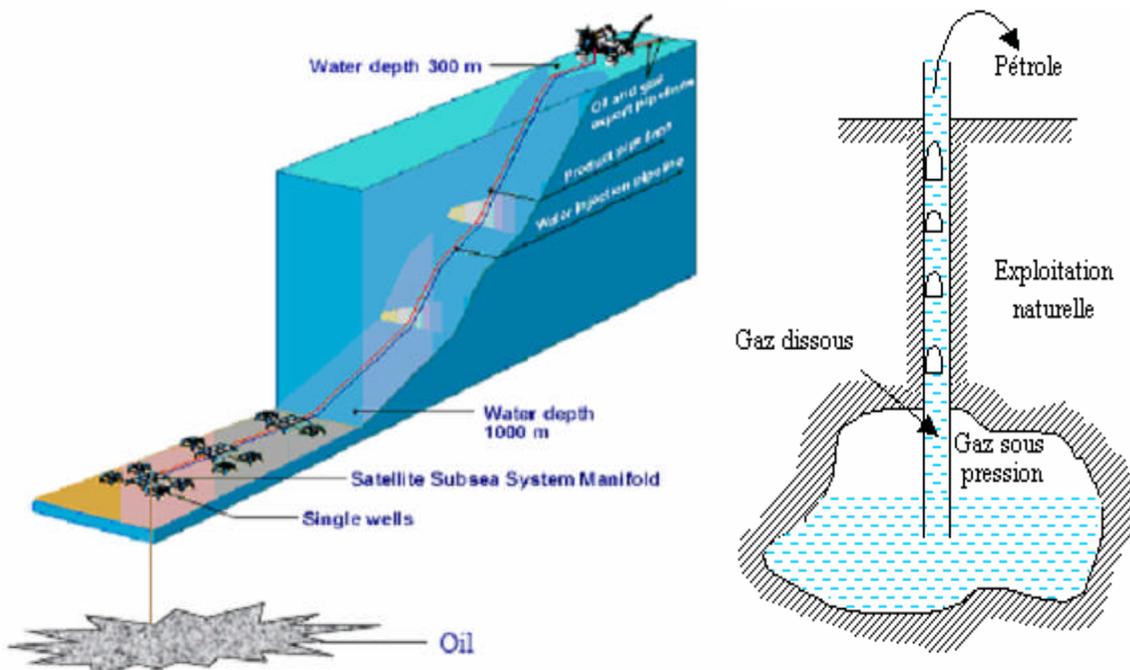
- ✚ Mélange gaz-liquide,
- ✚ Mélange gaz-solide,
- ✚ Mélange liquide-liquide,
- ✚ Mélange liquide-solide

### I.1.1. Ecoulement diphasique gaz-liquide

Cette classe correspond aux écoulements où il y a deux phases en présence, l'une sous forme liquide, l'autre sous forme de gaz [2], [4].

Ce type d'écoulement diphasique est le plus important et le plus répandu il est largement rencontré dans différentes applications industrielles, celles-ci incluent les systèmes de transport par canalisation dans le cas de l'extraction et du transport gazo pétrolière (voir exemple en figure (I.1.a)), les vaporisateurs, les chaudières et les condenseurs.

Dans le domaine de la thermique et des systèmes à combustion on citera comme exemple les centrales thermiques (voir figure I.1.b) et les stations d'épuration, les systèmes de refroidissement, les échangeurs de chaleur, les réacteurs nucléaires et les usines cryogéniques. Les systèmes gaz liquides sont utilisés dans d'autres domaines liés à des phénomènes de la nature telles que la météorologie, l'astrophysique ou l'entrophisatic (voir exemple en figure I.1.c)



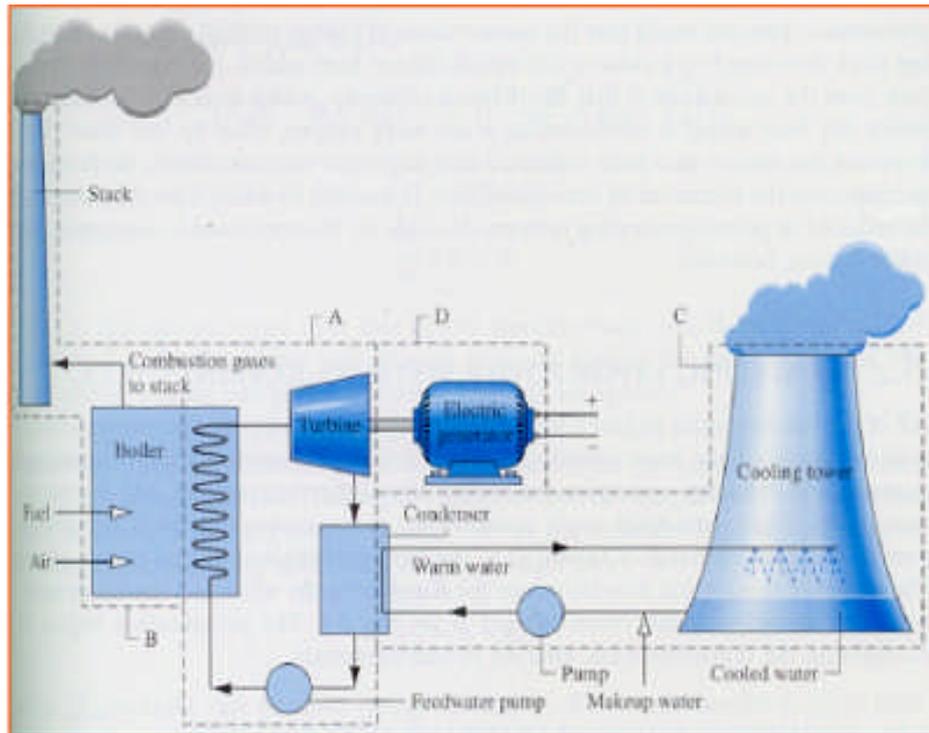


Figure I.1.b: Centrale thermique [6]

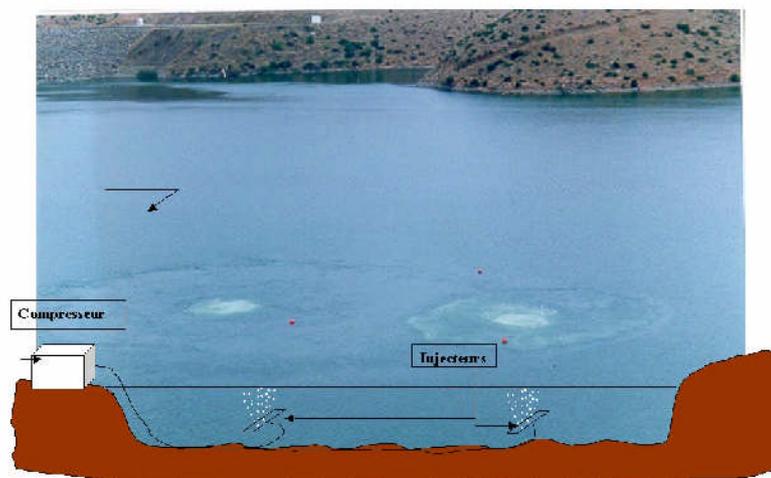


Figure I.1.c: Processus d'aération dans le lac de Bouregreg (Maroc)

### I.1.2. Ecoulement gaz solides

Ce sont les écoulements où subsiste une phase sous forme solide, l'autre sous forme gazeuse. Le type d'écoulement (écoulement diphasique gaz solide) [2], le plus répandu dans cette classe est le système de transport pneumatique (voir figure I.2), on citera également le cas

des mélanges de solides avec suspension de gaz et les combustions pulvérisées à l'aide de gaz combustibles.

Les lits de fluidisation peuvent également être considérés comme une forme d'écoulement diphasé gaz-solide. Dans de telles situations le solide est fixe il est pénétré par le gaz éjecté, cependant le gaz et le solide subissent des mouvements complexes.

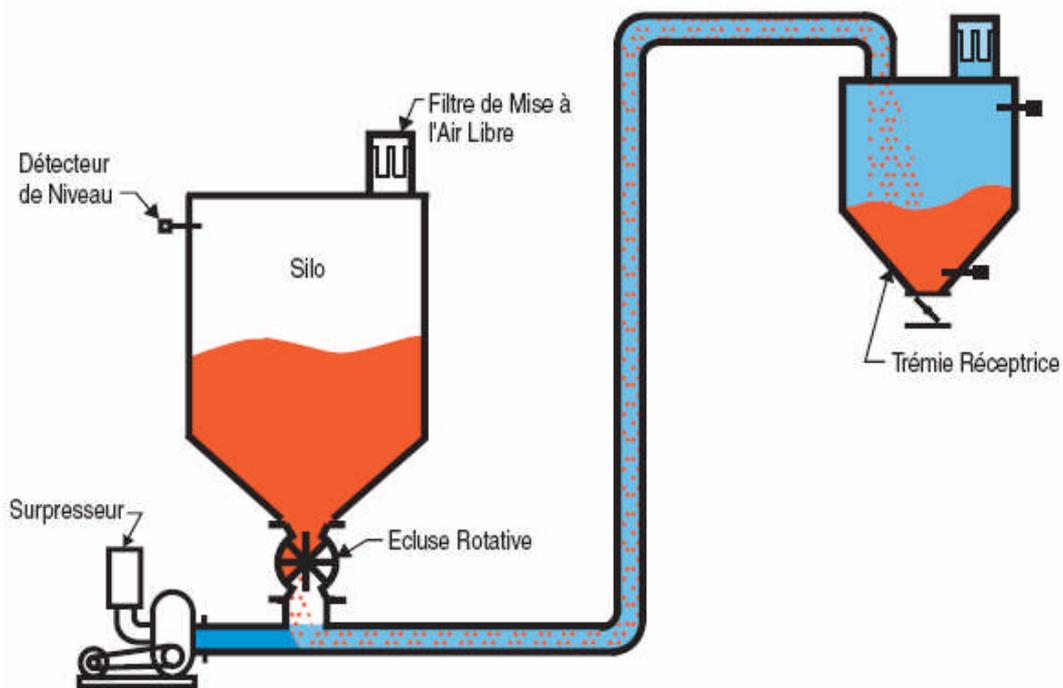


Figure I.2 : Principe du transport pneumatique

### I.1.3. Ecoulements liquide-liquide

On rencontre cet écoulement dans le cas où deux liquides immiscibles s'écoulent simultanément. Les exemples d'application dans ce type d'écoulement sont le plus souvent rencontrés dans les procédés chimiques faisant appel à deux liquides non miscibles d'évacuation. Dans le domaine industriel par exemple (évacuation eau-huile) c'est le cas des canalisations de rejet des stations de déshuilage.

Les systèmes liquides-liquides sont également observés dans le cas des catastrophes naturelles, à l'exemple d'une marée noire comme le montre la (figure I.3)



**Figure I.3: Marée noire**

#### **I.1.4. Ecoulement Liquide-solide**

Ce type d'écoulement se caractérise par la coexistence d'une phase liquide et d'une phase solide.

L'application la plus importante dans ce type d'écoulement se trouve dans le transport hydraulique des matériaux solides. Les suspensions liquide-solide se produisent également dans des systèmes de cristallisation, dans l'extraction de kaolin et dans les hydro cyclones. L'écoulement diphasique solide-liquide est plus fréquent dans le milieu naturel qu'industriel, parmi les phénomènes naturels où l'on peut observer ce type d'écoulement on citera l'érosion et la sédimentation (voir figure I.4), ainsi que les icebergs.



**Figure I.4 Sédimentation**

## I.2. Utilité de l'étude des écoulements diphasiques

La complexité de ces systèmes est en général telle qu'il est impossible de les décrire dans le détail à l'aide des concepts de la mécanique des fluides habituelle (monophasique). Un formalisme approprié, permet alors une description globalisée, mais utilisant des grandeurs physiques accessibles. Même en se limitant au cas d'un mélange de deux phases, les phénomènes sont très complexes [2], [4].

L'étude et la modélisation de ces écoulements diphasiques sont primordiales dans la conception, le dimensionnement ainsi que la prédiction et la prévention des systèmes où ces types d'écoulement sont présents.

Les paramètres de conception les plus importants à prendre en compte dans l'étude des systèmes diphasés sont les suivants :

### I.2.1. Le gradient de pression

La pression : les gains ou pertes de pression dans les systèmes diphasés ont pour origine :

- les frottements,
- l'accélération,
- les effets dus à la gravité.

A cet effet, si un écoulement bien déterminé est exigé, alors les variations de pressions déterminent la puissance à fournir dans le système. Dans le cas des systèmes de pompage ce paramètre permet la conception et le dimensionnement des pompes. C'est le cas des pompes à boues en forage ou des pompes de mélange huile-eau.

Si le gradient de pression utile est connu, il est alors important de faire appel à la relation liant la vitesse au gradient de pression (vitesse/pression) afin de prédire le débit résultant.

Pour exemple prenons le cas de la prévision du taux de circulation dans les systèmes de circulation des chaudières.

### I.2.2. Le coefficient de transfert de chaleur

Les coefficients de transfert thermique dans les systèmes biphasés où il y a changement de phase sont aussi très importants, dans de tels systèmes ils servent à déterminer la taille des

échangeurs de chaleur. Par exemple citons le cas du surchauffeur à thermo siphon s'il s'agit de distillerie, ou encore des condenseurs dans les centrales.

### I.2.3. Le coefficient de transfert de masse

Nous avons souvent à faire face à un transfert de masse en écoulement diphasique, ce paramètre rend encore plus complexe l'étude de l'écoulement.

L'étude du coefficient de transfert de masse est prépondérante dans les systèmes de fractionnement et la conception des équipements de séparation, paramètres clés dans les procédés de liquéfaction de gaz.

Elle permet aussi le suivi des différents transferts entre les phases en présences.

Nous sommes appelés parfois à étudier plusieurs paramètres simultanément, c'est ainsi que l'étude du coefficient de transfert de chaleur est souvent jumelée avec celle du coefficient de transfert de masse, cette combinaison permet le suivi des différents échanges entre les deux phases au niveau de l'interface au sein de l'écoulement.

Le cas des écoulements diphasiques liquide vapeur ou il y a changement de phase, transfert de chaleur et de masse, c'est un exemple très fréquent dans le domaine de la thermohydraulique.

### I.2.4. Le taux de présence ou taux de vide de la phase [5]

Le taux de présence ou taux de vide représente la fraction temporelle ou spatiale d'une phase par rapporte au système complet.

Il permet essentiellement de proportionner l'écoulement et 'évaluer et de quantifier la contribution de chacune selon différents aspects, géométriquement, temporellement, et échanges aux interfaces.

On définit temporellement le taux de présence comme étant la fraction de la durée d'observation de la phase k sur une période.

Si une des phases occupe le volume, aire ou segment donné, dans une section alors le taux de vide global est défini spatialement par la fraction volumique, surfacique ou linéaire de cette dernière

En écoulement diphasique gaz liquide, le taux de présence est souvent désigné par la fraction de vide, alors que la fraction liquide est dite le « **Liquid holdup** ».

Dans les systèmes contenant une phase solide, la fraction solide est désignée par le terme « **Solid Holdup** ».

Le taux de présence d'une phase est également très important, il permet de régir l'inventaire d'une phase particulière dans un système, autrement dit l'extension de la phase sur tout le système.

### I.2.5. Limitations de flux

La limitation des flux de masse et de chaleur est importante dans le cas de la sûreté des installations, leur étude est nécessaire dans la prévention contre certains risques et problème susceptible d'apparaître [6].

Les exemples de limitation de flux massique sont les "écoulements critiques" qui tendent à se produire à de faibles vitesses et capables d'apparaître à de plus faibles vitesses que celles connues en monophasique.

Le « **flooding** » et les "écoulements renversés " peuvent apparaître dans les systèmes où il y a écoulement diphasique à contre courant, c'est le cas du condenseur à reflux, et la vitesse minimum de fluidisation dans les lits de fluidisation.

La limitation des flux de chaleur s'avère importante en ébullition et condensation convective (Figure I.5), il ne faudra pas dépasser des flux critiques ayant comme conséquence l'appauvrissement des performances du système, qui peuvent créer des dommages physique à l'installation, nous retiendrons essentiellement la cavitation, la convection forcée et le coup de bélier.

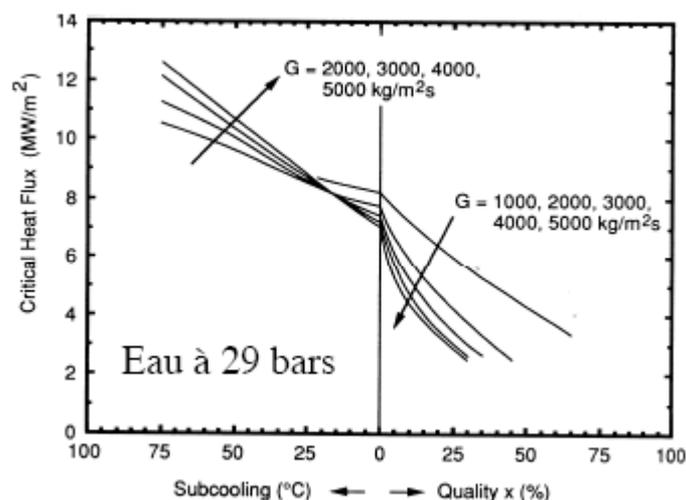


Figure I.5 : Conditions de flux critique en ébullition convective **Bowring, (1972)** pour l'eau [6]

### **I.3. Approche de modélisation des écoulements diphasique**

Une large gamme de modèles a été développée en écoulement diphasique, chacun d'entre eux doit être adapté au cas particulier qui se présente [4], [7],[8].

#### **I.3.1 Le modèle Homogène**

C'est le modèle le plus simple que l'on puisse rencontrer, dans le modèle homogène on suppose les deux phases s'écoulent à la même vitesse dans le canal et on remplace l'écoulement diphasique par un pseudo - fluide monophasique incompressible dont les propriétés (vitesse, température masse volumique et viscosité) sont les moyennes du mélange obéissant aux lois d'un écoulement monophasique.

#### **I.3.2 Le modèle à flux de dérive**

Le modèle à flux de dérive a une approche similaire à celle du modèle homogène à la différence que le modèle à flux de dérive prend en considération une vitesse relative entre les deux fluides.

#### **I.3.3 Le modèle à phases séparées**

On considère que chacun des fluides s'écoule à sa propre vitesse sans aucune relation liant les vitesses des phases. Les bilans de conservations sont écrits en tenant compte de cette hypothèse aux deux phases séparément.

#### **I.3.4 Le modèle multi fluide**

Les équations de conservation sont écrites séparément pour chacune des phases, ces équations contiennent des termes qui décrivent le comportement au niveau de l'interface, ils font référence aux différents échanges qui se produisent entre les phases pendant l'écoulement.

Le choix de l'approche dépendra de la disponibilité des données, plus les modèles sont complexes, plus l'information est exigée, ceci dans le but d'introduire le maximum de détails possibles sur l'écoulement et pour assurer une certaine exactitude des résultats requis.

# CHAPITRE

---

# II

**PRESENTATION DES  
ECOULEMENTS  
DIPHASIQUES  
GAZ-LIQUIDE**

Parmi les quatre types d'écoulement diphasique « gaz-liquide, gaz-solide, liquide-liquide et liquide-solide » les écoulements gaz liquide sont, sans aucun doute, les plus complexes à étudier [2], [9], [10].

Leur complexité réside en la combinaison de deux propriétés qui leurs sont propres à savoir :

- la déformabilité et la distribution spatiale des interfaces,
- la présence d'une phase compressible qui n'est pas réparties de manière homogène

L'intérêt majeur qu'il suscite est due à la variété des applications possibles dans le monde industriel, notamment celui des hydrocarbures

Ainsi, dans le cadre de ce mémoire nous nous intéresserons exclusivement, en matière de concept de la mécanique des fluides aux écoulements diphasiques du type gaz liquide.

## **II.1. Présentation des écoulements diphasiques du type Gaz liquide**

Pour un écoulement de type gaz liquide donné, dans un canal donné, la distribution des interfaces peut prendre une infinité de forme. Cependant ces distributions spatiales peuvent être classées selon différents types appelés régimes d'écoulements.

La connaissance du régime d'écoulement ou « configuration d'écoulement » constitue une assez bonne caractérisation, ces « configurations d'écoulement » sont aux écoulements diphasiques ce que l'écoulement laminaire et l'écoulement turbulent sont aux écoulements monophasiques. On comprend donc qu'il importe avant tout de définir ces configurations, du moins celles le plus souvent rencontrées [11]

### **II.1.1. Régimes d'écoulement ou configuration d'écoulement [8]**

On appelle « configuration d'écoulement » l'ensemble des paramètres qui décrivent la forme (structure et dimensions) de chacune des phases dans l'écoulement .en général, cette description s'obtiendra directement par la vision si l'écoulement est lent, ou par photographies qui pourront, en effet correspondre à une évolution caractéristique de certains paramètres hydrodynamiques, suite à l'analyse d'un signal fourni par une sonde adaptée, qui permettra d'identifier l'écoulement.

Il existe différents régimes d'écoulement, la figure (II.1), illustre différents régimes.

Les principaux régimes rencontrés en écoulement diphasique gaz liquide sont les suivants :

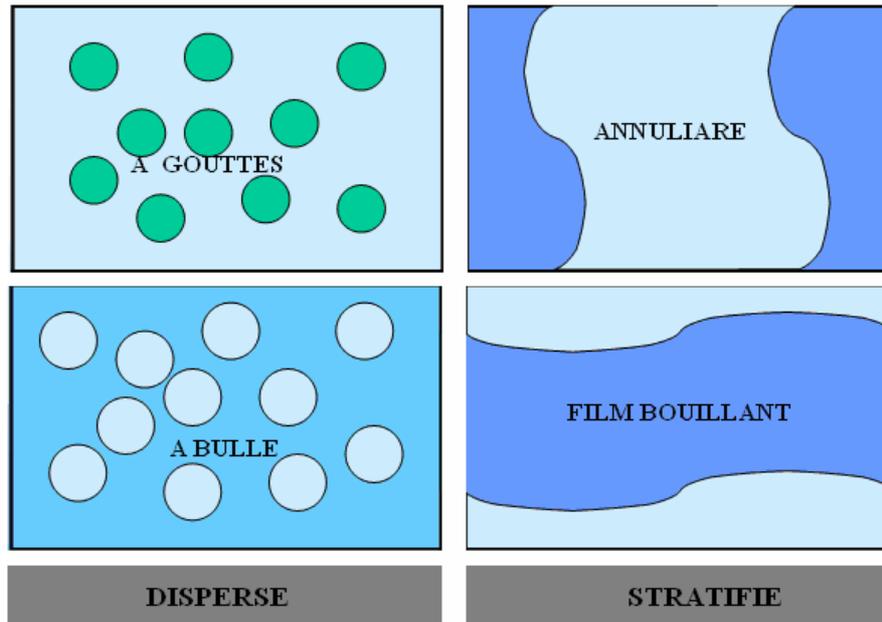


Figure II.1: Régimes d'écoulements stratifiés et dispersés[8]

### II.1.1.a. Écoulement stratifié (stratified flow) [12], [13]

Ce type d'écoulement se rencontre lorsque les débits de gaz et de liquide sont faibles, l'interface se présente sous la forme d'une surface continue séparant les deux phases. C'est un écoulement dit à phases séparées. Le liquide est situé en dessous du gaz, suite au phénomène de densité (gravité).

Dans ce régime, la forme de l'interface est contrôlée par la compétition entre les forces d'inertie qui tendent à la déformer (champ de vagues) et les forces de gravité et de tension superficielle qui tendent à la maintenir plane. Lorsque les premières prédominent, on se trouve en écoulement dit stratifié à vagues (stratified wavy) et dans le cas contraire, l'écoulement est appelé stratifié lisse (stratified smooth) comme le montre la (figure II.2). Dans la nature, on rencontre ce type d'écoulement en mer (formation des vagues par le vent).

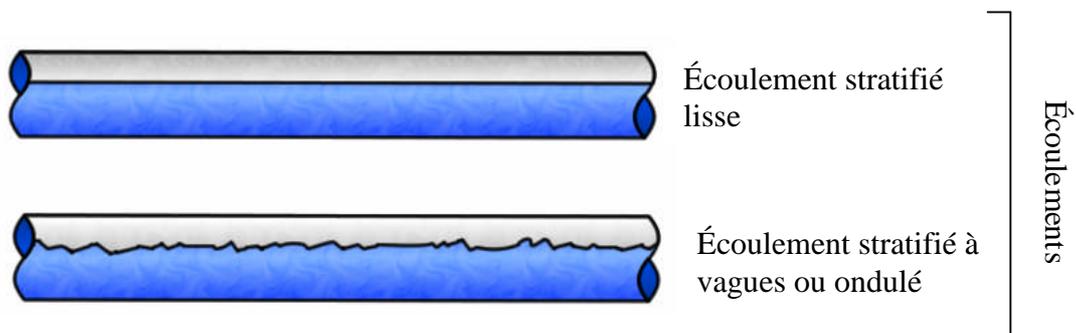


Figure II.2: Écoulements stratifiés

### II.1.1.b. Écoulement à bulles (*dispersed flow*)[14]

Lorsque le débit de liquide est important, les forces d'inertie qui s'exercent sur le gaz ont pour conséquence la formation de bulles. Cet écoulement appartient à la classe des **écoulements dispersés**. Dans l'écoulement à bulle la phase gazeuse de l'écoulement est répartie sous forme de bulles dispersées dans la phase continue, le liquide (figure II.3.c). Les dimensions de ces bulles sont petites en comparaison avec le diamètre de la conduite. Ce régime n'apparaît que pour de faibles vitesses superficielles de gaz. L'écoulement horizontal à bulles (figure II.3.b) n'existe que pour des vitesses superficielles du liquide suffisamment élevées. Exemple : formation de bulles d'air lors de l'agitation d'une bouteille d'eau (figure II.3.a).

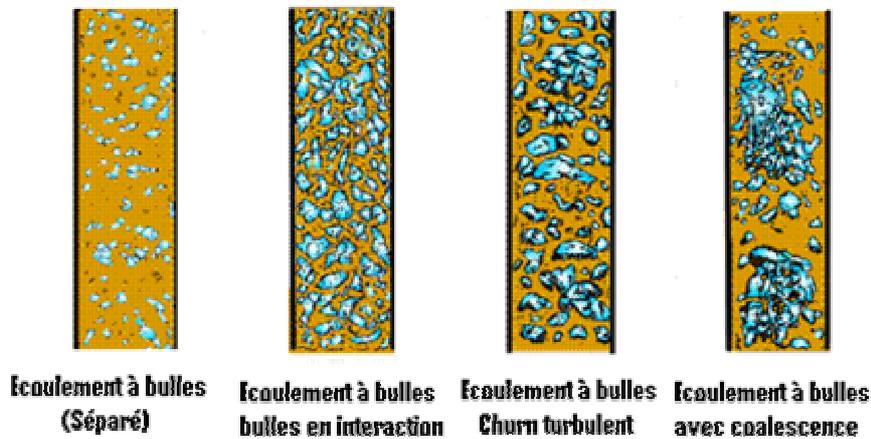


Figure II.3.a: Régimes d'écoulements à bulles en conduite verticale

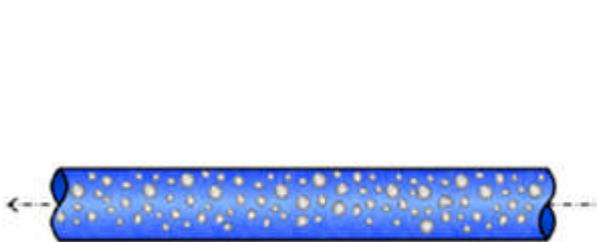


Figure II.3.b: Écoulement dispersé à bulles (En conduite horizontale)



Figure II.3.c: Écoulement dispersé à bulles (En conduite verticale)

### Figure II.3 : Écoulements à bulles

*II.1.1.c. Écoulement annulaire (annular flow)*

Lorsque le débit de gaz est important, les forces de gravité sont fortement négligeables devant les forces d'inertie [13], [15]. Le liquide mouille alors complètement la paroi en formant un film annulaire autour de l'écoulement de gaz (Figure II.4.c).

L'écoulement reste **à phases séparées**. De plus, à très fort débit de gaz des gouttes de liquide sont arrachées et entraînées par la phase gazeuse. Cet écoulement est dit annulaire à gouttes ou annulaire dispersé [16] (Figure II.4.b).

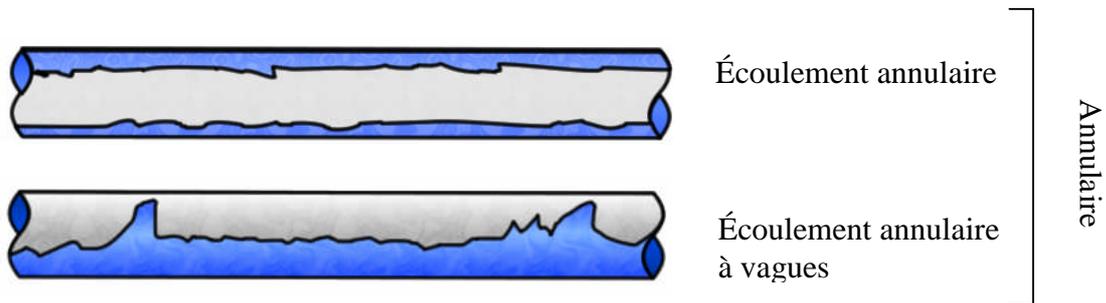


Figure II.4.a : Écoulements annulaires en conduite horizontale

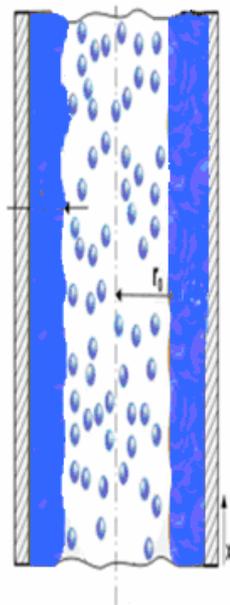


Figure II.4.b : Écoulement annulaire dispersé ou à gouttelettes

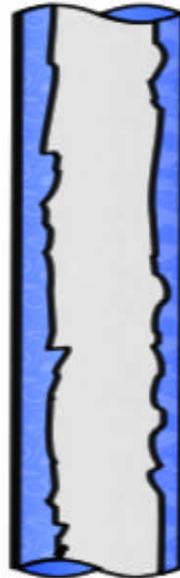


Figure II.4.c : Écoulement annulaire en conduite verticale

**Figure II.4: Exemples d'écoulements annulaires**

### II.1.1.d Écoulement intermittent ou à poches et bouchons (*slug plug flow*)

Ce type d'écoulement est observé pour des débits de gaz et de liquide "moyens". Sa structure présente une succession de poches de gaz et de bouchons de liquide qui contiennent de petites bulles (Voir des exemples en figure II.5). C'est une configuration mixte entre un écoulement stratifié et un écoulement à bulles [13], [17].

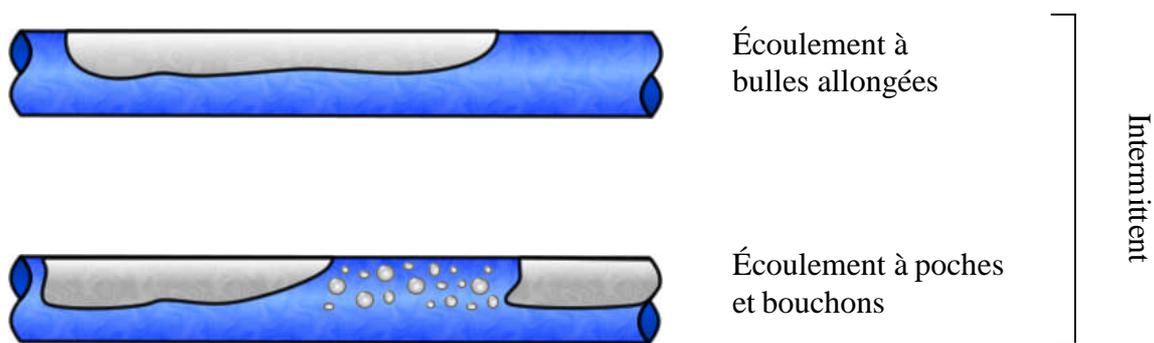


Figure II.5.a : Écoulements intermittents en conduite horizontale

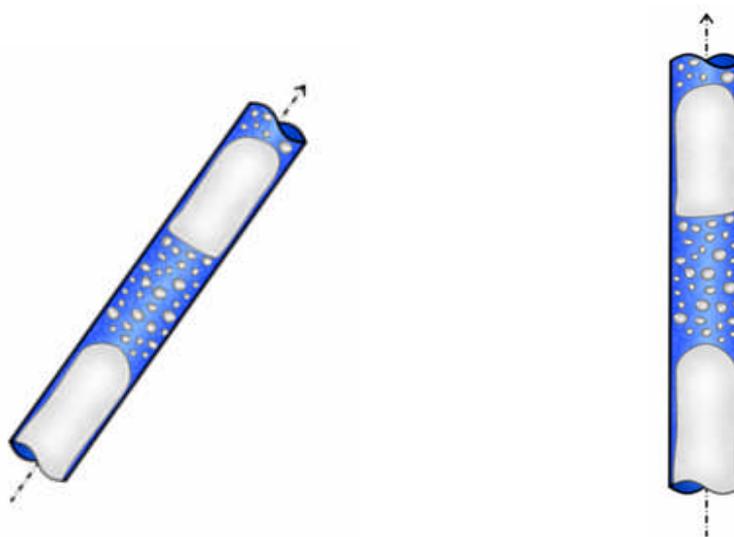


Figure II.5.b : Écoulement à longues bulles en conduite inclinée

Figure II.5.c : Écoulement intermittent ou à poches et bouchons

**Figure II.5: Exemples d'écoulement à poches et bouchons**

### II.1.2. Écoulement en conduite verticale [5], [13]

Dans l'écoulement vertical, la force de gravité est un facteur capital dans le comportement de l'écoulement, car la gravité agit comme une force motrice en écoulement vertical et non comme une force pour stratifier les deux phases ce qui est le cas en écoulement horizontal, voir figure II.6. Le fluide le plus léger aura tendance à s'écouler vers le haut beaucoup plus rapidement que le plus dense, il se formera alors des tourbillons. Le liquide s'écoulera vers le bas provoquant un phénomène appelé hold-up



**Figure II.6: Conduite expérimentale verticale [13]**

Les régimes rencontrés en écoulement en conduites verticales sont illustrés dans (la figure II.7), ils incluent :

- ✚ le régime à bulles, où le liquide est la phase continue et la phase gazeuse est dispersée à l'intérieur de la phase continue
- ✚ le régime à poche où bouchons les bulles coalescent pour donner lieu à des poches séparées par des bouchons de liquide de sections voisines de celle de la conduite ;
- ✚ régime churn dit à forte coalescence quand les poche d'aire se décomposent il se produit un écoulement oscillatoire appelé churn
- ✚ régime annulaire le liquide s'écoule au niveau de la paroi tel un film et le gaz s'écoule au coeur du canal avec présence de quelques gouttes

				
Écoulement à bulles	Écoulement intermittent ou à poches et bouchons	Écoulement CHURN ou à forte coalescence	Écoulement annulaire	Écoulement "Wispy" annulaire

Figure II.7: Les différents régimes en écoulement verticaux

### II.1.3. Écoulement en conduites horizontales

La (figure II.8) illustre un exemple de conduite expérimentale horizontale

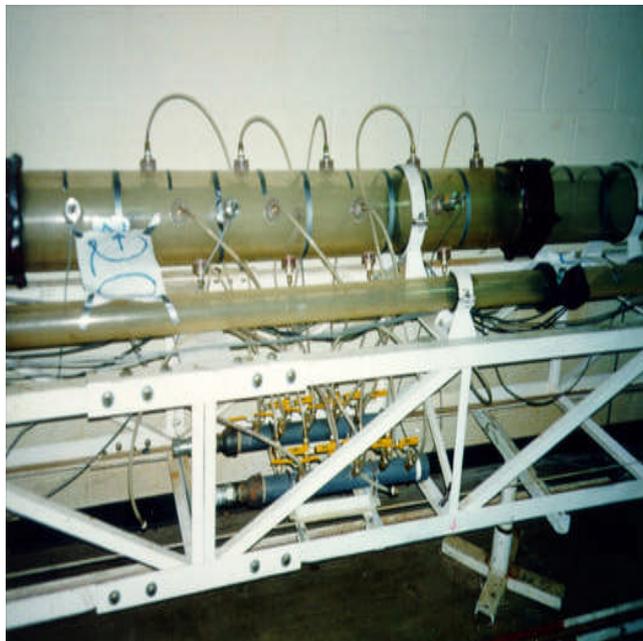
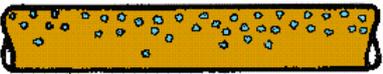
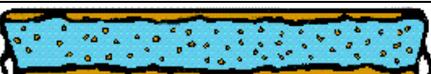


Figure II.8: Conduite expérimentale horizontale [13]

Les régimes en écoulement horizontaux sont présentés dans la figure II.9, la gravité agit sur l'écoulement et tend à séparer les deux phases. Les régimes rencontrés sont [5], [13] :

- ✚ le régime stratifié où il y a séparation complète des deux phases, le régime stratifié à vagues ou ondulé, il est important de signaler que ce régime est propre aux écoulements diphasiques en conduite horizontale.
- ✚ le régime dispersé, écoulement à bulles, les bulles sont dispersées dans le liquide bien qu'il y ait une certaine séparation due à la pesanteur, les bulles sont concentrées le haut de la conduite.
- ✚ annulaire dispersé : qui est semblable à celui dans l'écoulement vertical, avec présence d'une asymétrie dans l'épaisseur de film due à l'action de la pesanteur
- ✚ écoulements intermittents ou de transition, une large variété de ces derniers figurent en conduite horizontale, ils incluent l'écoulement à poche ou bouchon, dans lequel de grandes bulles de gaz s'écoulent au voisinage de la paroi du tube qui passe rapidement le long du canal ; écoulement semi bouchons, où de grandes vagues sont présentes au niveau de la couche stratifiée .

Direction de l'écoulement 	<b>Écoulement à bulles</b>
	<b>Écoulement stratifié</b>
	<b>Écoulement stratifié à vagues ou ondulé</b>
	<b>Écoulement à poches</b>
	<b>Écoulement à bouchons</b>
	<b>Écoulement annulaire dispersé</b>

**Figure II.9 : Régimes d'écoulement en conduites horizontales**

#### II.1.4. Écoulement diphasique en conduite inclinée

L'inclinaison du canal reste un paramètre très important dans la détermination du régime d'écoulement. La figure II.10 est exemple de conduite expérimentale inclinée [13].



Figure II.10: Conduite expérimentale inclinée [13]

Quand l'écoulement diphasique a lieu en conduite inclinée, son comportement change considérablement, et le volume occupé par le liquide le « liquid hold-up » devient un paramètre très important, à titre d'exemple quand l'inclinaison s'élève jusqu'à  $5^\circ$  et que l'écoulement est ascendant, la phase liquide possède un comportement similaire à celui d'une vague en mer et si la vitesse superficielle du gaz augmente alors le hold-up liquide augmente à des angles d'inclinaison plus importants, de grandes poches de liquides se créent et le liquide tend à se renverser et ainsi s'écouler vers l'arrière, c'est l'impression que l'on a dans ce type de situation. Les diagrammes de la figure II.11 indiquent comment l'écoulement change avec l'augmentation croissante de la vitesse superficielle du gaz [5]

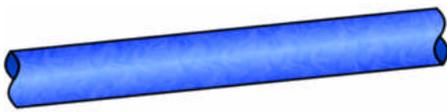
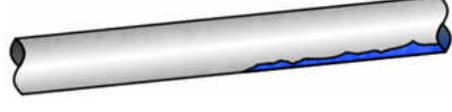
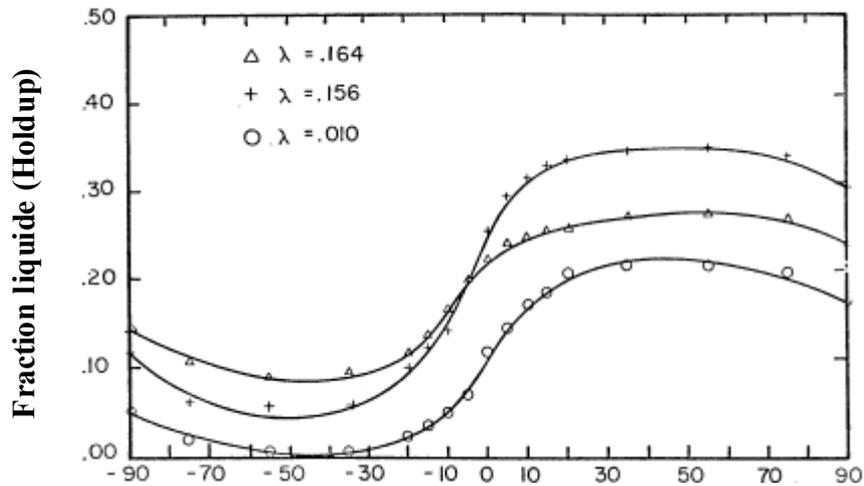
	Écoulement monophasique en pente
	Écoulement type bouchon à faible vitesse de gaz
	Écoulement type bouchon à vitesse de gaz moyenne
	Écoulement pulsé à vagues à forte vitesse de gaz
	Écoulement avec expulsion de liquide

Figure II.11: Écoulements en conduite inclinée en fonction de la vitesse superficielle du gaz



Angle d'inclinaison du pipe par rapport à l'horizontal

Figure II.12 Fraction liquide, écoulement en conduite inclinée

- Le paramètre  $\lambda$  indique la fraction liquide d'entrée.
- Les angles positifs font référence aux écoulements ascendants.

Nous rappelons que le **hold-up** liquide est défini comme étant la fraction volumique du pipe occupée par le liquide. Ce dernier est très influencé par l'inclinaison de la conduite, ceci est explicité par la figure suivante (figure II.12)

## II.2. Carte de configuration ou carte d'écoulement

Il est nécessaire de prévoir des régimes comme repère et base de calcul en écoulement diphasé, pour cela nous avons recours à des représentations graphiques des informations appelées cartes d'écoulements ou de configurations [4], [9], [10].

Plusieurs de ces cartes sont tracées en termes de variables primaires (vitesse superficielle des phases ou du flux et de la quantité de masse, par exemple), **mais il y a eu beaucoup de travail fait afin de généraliser le domaine d'application et de validité de la carte, de sorte qu'elles puissent être appliquées à un éventail de géométries de canal et de propriétés physiques des fluides, ceci reste une lourde tâche à accomplir.**

Une carte d'écoulement, comme son nom l'indique, est une représentation graphique bidimensionnelle des domaines d'existence des différents régimes. Les systèmes de coordonnées qui la définissent sont choisis parmi les variables de l'écoulement diphasique. Ces derniers sont différents selon les auteurs, et il n'existe pas de consensus sur le meilleur système. Les paramètres qui sont souvent employés sont ceux utilisés par l'expérimentateur

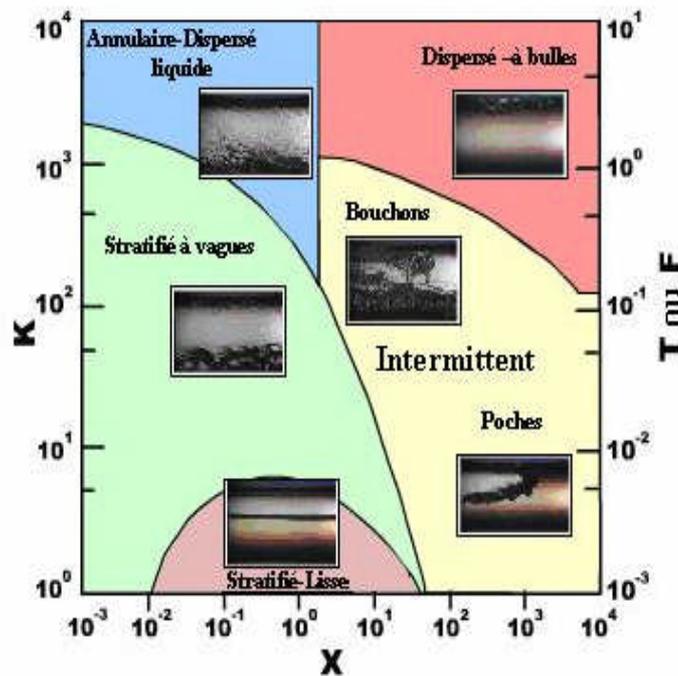
pour contrôler l'écoulement ; à savoir les vitesses superficielles du liquide et du gaz, etc. Les frontières entre les différents régimes n'ont jamais été bien définies et les zones de transition sont relativement étendues, d'où le caractère subjectif de ces cartes d'écoulement

Une carte de configuration généralisée pour les écoulements diphasiques en conduite horizontale est celle donnée par Taitel et Duker (1976) elle est donnée en figure (II.13)

Elle est tracée en fonction des paramètres suivants :

$$K^2 = F^2 Re_L = \frac{\rho_G U_G^2}{(\rho_L - \rho_G) D g \cos \alpha} \frac{DU_L}{\nu_L} \quad T = \left[ \frac{(dp_F/dz)_L}{(\rho_L - \rho_G) g \cos \alpha} \right]^{1/2} \quad \chi^2 = \frac{(dp_F/dz)_L}{(dp_F/dz)_G}$$

où  $(dp_F/dz)_L$  et où  $(dp_F/dz)_G$  sont les gradients de pression propre à la phase liquide et gazeuse respectivement, le  $\rho_L$  et le  $\rho_G$  sont les densités des phases,  $U_L$  et  $U_G$  sont les vitesses superficielles des phases,  $D$  le diamètre du tube,  $\nu_L$  la viscosité cinématique du liquide,  $g$  l'accélération due à la gravité, et  $\alpha$  l'angle d'inclination du canal.



**Figure II.13 : Configurations pour écoulement co-courant en conduite horizontale obtenue par Taitel et Dukler 1986[4]**

Une carte généralisée pour des écoulements verticaux est donnée par la figure II.14 elle est due à Hewitt et à Roberts (1969) (voir le Hewitt, 1982).

Cette carte de configuration est tracée en terme de flux superficiel de quantité de mouvement

du liquide et du gaz,  $\rho_l U_l^2$ ,  $\rho_g U_g^2$ , respectivement .

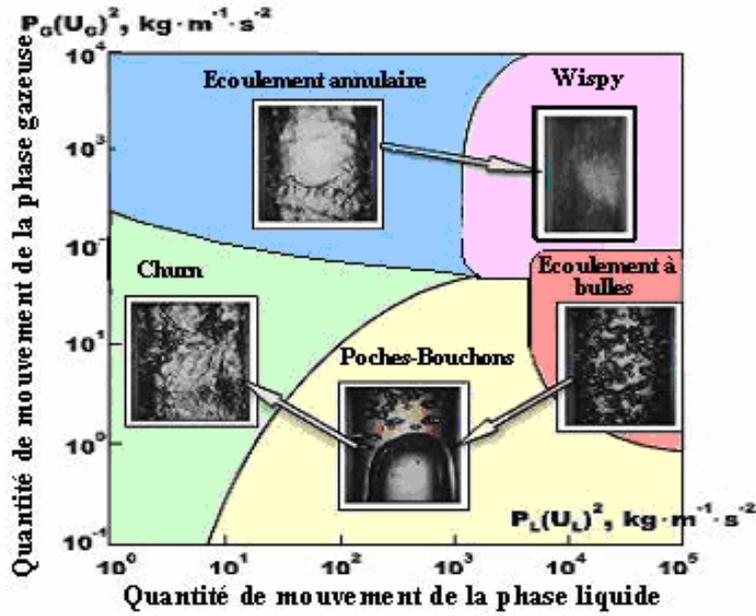


Figure II.14 : Configurations obtenue par Hewitt et Roberts (1969) pour un écoulement ascendant co-courant en conduite verticale [4].

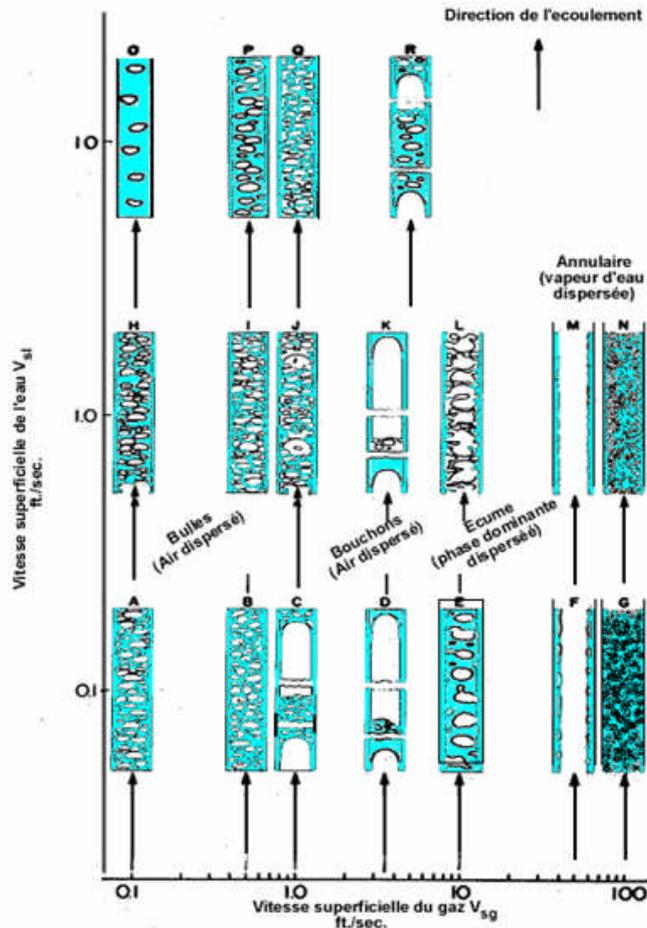


Figure II.15: Régimes d'écoulement gaz liquide en conduite verticale (Govier & Aziz, 1977)

### II.3. Les transitions en écoulement diphasiques [2], [4]

Dans les écoulements diphasiques on rencontre différentes transitions, selon que l'écoulement soit vertical, horizontal. Nous décrirons dans ce qui suit les transitions les plus importantes(annexe B).

#### II.3.1. Les transitions en écoulement vertical

##### *II.3.1.a. Bulle- poche bouchon*

Cette transition est classique, elle résulte généralement de la coalescence (La coalescence est un phénomène par lequel deux substances identiques, mais dispersées, ont tendance à se réunir) des bulles, cela va mener à une croissance continue des bulles jusqu'à occuper toute la section droite du canal et ainsi passer au régime poche bouchon. La figure II.16 représente le diagramme de transition régime à bulles- régime intermittent.

Habituellement la transition au régime poche bouchon apparaît lorsque la fraction du vide est aux alentours de 25-30%.

Dans des écoulements fortement turbulents, la dissolution des bulles peut se produire (rarement vu dans les écoulements réels turbulents à bulle) pour "excentrer " ou "stopper" la progression de la coalescence.

Cependant, **l'étude récente** semble indiquer que cette transition est très peu probable et peut être erronée. Il semble plus probable que des vagues de vide soient formées dans l'écoulement, et que, dans ces vagues, les bulles deviennent étroitement liées et peuvent mieux fusionner, à grande échelle ceci peut produire une poche d'air. Cette approche de transition est présentée, par Beisheuvel et Gorissen (1990).

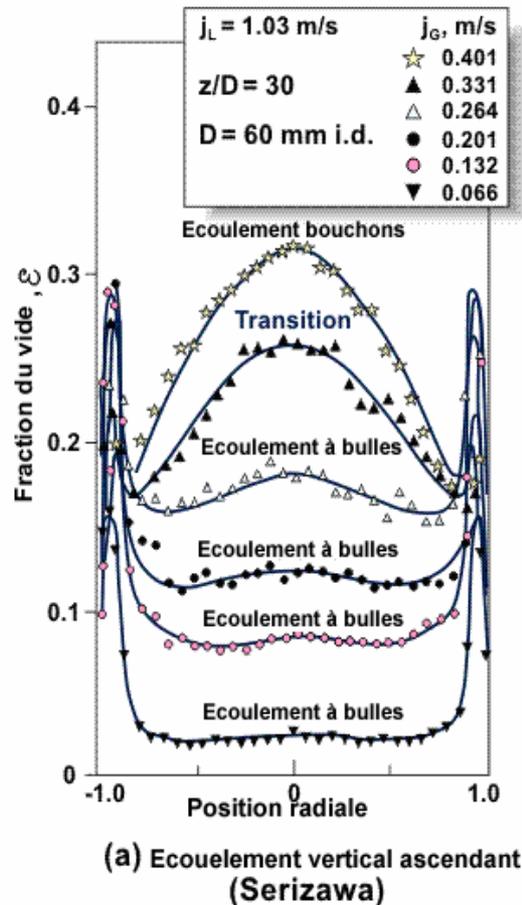


Figure II.16: Transition régime à bulles- régime intermittent[14]

### II.3.1.b Transition écoulement poche bouchon- annulaire

Sujet de polémique, probablement à cause de sa sémantique. Taitel et al (1980) définissent le régime churn qui est essentiellement un développement du régime poche bouchon.

Cet écoulement possède les caractéristiques suivantes :

- Ce régime découle du régime poche bouchon par la formation d'onde du type flooding ces vagues sont présentes tout au long de l'écoulement, **ce type de vague sont absents en écoulement à poche bouchon et en régime annulaire mais sont formées** de manière continue en écoulement **Churn** et tendent à transporter le liquide vers le haut et créer ainsi un film liquide au niveau de la paroi.

- Entre deux ondes successives de type **flooding** le film liquide qui se crée est controversé, il change de sens et c'est autour de la prochaine vague de l'entraîner vers le haut.

Le début de l'écoulement à forte coalescence (churn) est accompagné d'une importante hausse du gradient de pression ce phénomène a été étudié par Owen(1986) ou encore dans les travaux sur le phénomène du flooding de Jayanti et Hewitt(1992) .

### II.3.1.c Transition du régime churn (à fortes coalescences) à l'annulaire :

Une fois le régime de type **Churn** est établi, à mesure que la vitesse de gaz est augmentée, le gradient de pression diminue jusqu'à atteindre une pression minimale (figure II.17), à cette pression limite les interactions gaz liquide deviennent très intenses, il y a alors apparition d'onde de **flooding**. Celles-ci génèrent une large hausse du gradient de pression, une fois qu'elles disparaissent, le gradient de pression décroît progressivement.

Mais il peut y avoir éventuellement une augmentation du débit de gaz ceci aura comme conséquence l'augmentation du gradient de pression. Autrement dit le passage par le point critique sera le début de l'écoulement annulaire, mais cela peut aussi correspondre au renversement de l'écoulement; car l'écoulement de type **Churn** et l'écoulement annulaire possèdent une caractéristique commune qui est la présence d'un film liquide et d'un noyau de gaz au cœur du canal même si le comportement de l'écoulement est tout à fait différent. Cette transition est supposée se produire à une valeur critique de la quantité de mouvement et d'énergie cinétique, cependant l'identification du point de transition reste très subjective et difficile à identifier.

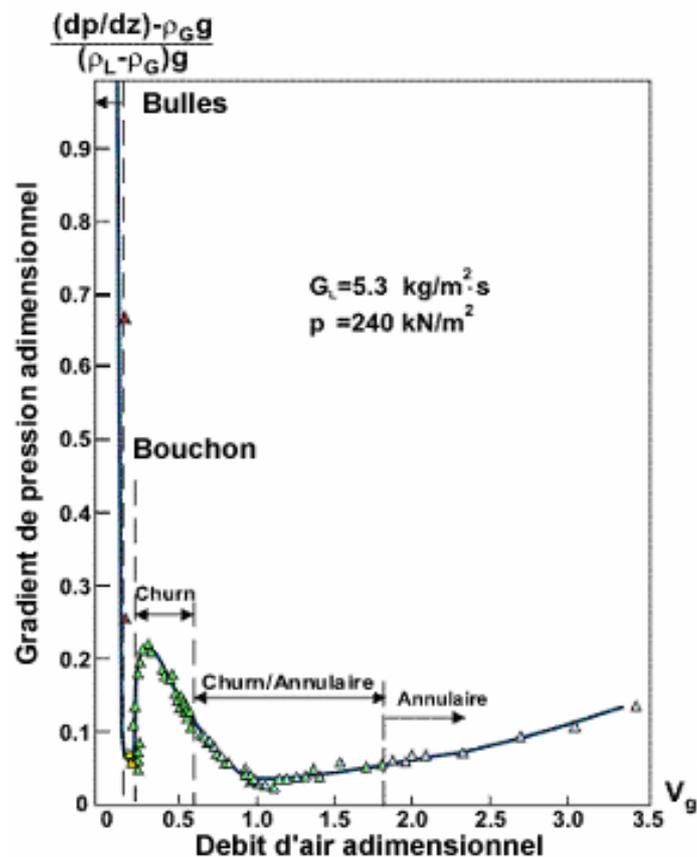


Figure II.17: Transition de churn à annulaire

### II.3.2. Transitions en écoulements horizontaux

Il y a eu un grand intérêt pour les modèles de transition en écoulement horizontaux d'écoulement diphasés, cet intérêt a pris de l'importance avec le développement des systèmes de piping en structure offshore. Les transitions les plus répandues en écoulements horizontaux sont les suivants :

#### *II.3.2.a Transition régime stratifié- poche bouchon*

**Taitel** et **Ducker** (1976), ont élaboré un modèle adapté à ce type de transition mais l'attribution de l'instabilité de Kelvin-Helmholz à leur étude ne prenait pas en considération la viscosité du fluide, cette omission a provoqué certains désaccords entre les résultats réels et ceux du modèle, certaines corrélations ont dû être introduites afin d'améliorer les approximations. Une approche plus intéressante fut présentée par **Lin** et **Hanratty** (1986) qui présente une théorie qui tient compte des effets de la viscosité.

Cependant, la prévision de cette transition demeure toujours incertaine.

#### *II.3.2.b Transition poche bouchons-annulaire*

Dans le modèle de **Taitel** et de **Dukler** (1976) cette transition est susceptible d'apparaître si le niveau d'équilibre du liquide au début de l'instabilité **Kelvin-Helmholz** est inférieur au rayon du canal. Cependant les résultats du modèle n'étaient pas très satisfaisants ni ceux des autres modèles. La figure (II.18) Compare les prévisions des différents modèles nous observerons que ces derniers diffèrent considérablement.

#### *II.3.2.c Transition poche bouchon- bulles dispersée*

Dans la carte de **Taitel** et **Dukler** ainsi que les autres cartes relatives à cette transition, ce phénomène est attribué à la possibilité d'apparition de la turbulence dans la phase liquide, cette dernière est capable de créer et suspendre les bulles. Quand les bulles ne peuvent pas être suspendues elles agglomèrent pour former les régions de bulle de gaz dans l'écoulement poche bouchon.

Ceci dit le mécanisme d'entraînement des bulles et leurs comportements reste très complexe et requiert d'avantage de recherche.

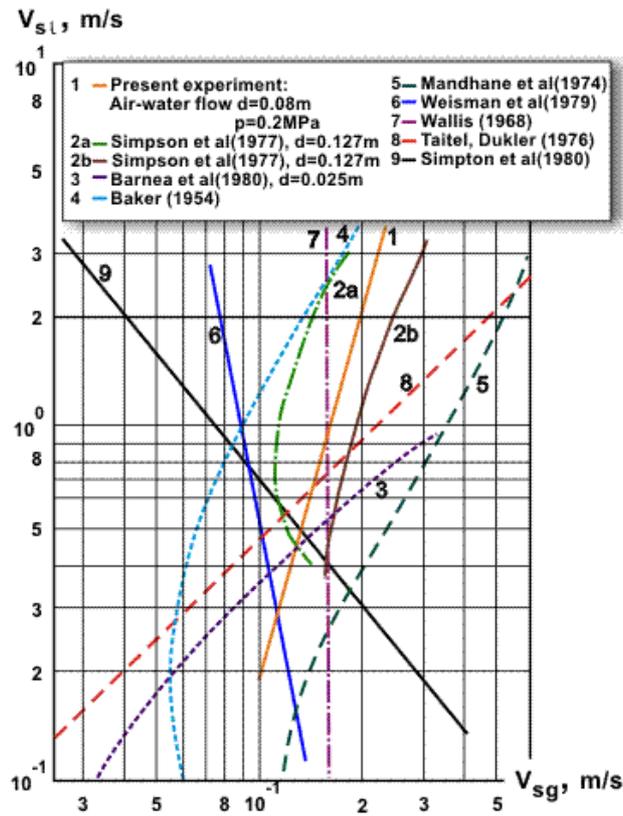


Figure II.18: Comparaison de relation de transition poche bouchon/annulaire, données de Reiman[4]

# CHAPITRE

---

# III

**LES PRINCIPES  
FONDAMENTAUX DES  
ECOULEMENTS  
DIPHASIQUES**

Dans ce présent chapitre nous allons présenter les fondamentaux des écoulements diphasiques, qui seront l'outil de base de la modélisation diphasique.

On appelle mécanique des fluides tout ce qui touche au mouvement des liquides et des gaz. Les fluides multiphasiques sont formés de plusieurs états physiques (gaz, liquide, solide) figure (III.1) aux propriétés très différentes. Les phénomènes physiques modélisés sont complexes : évolution d'interfaces, transfert de masse, d'énergie et de quantité de mouvement, changement de phase, interaction avec la turbulence [18]...



Figure III.1 : Différents états de la matière

Cette partie vise à introduire les principes de base de la dynamique des fluides et les principaux bilans de conservation et d'évolution en mécanique des fluides monophasique en premier lieu, pour ensuite passer à notre cas qui est la mécanique des fluides diphasique.

### III.1. Les bilans

#### III.1.1. Principe général de bilan

Le principe général de bilan permet d'établir les équations d'évolution du système à partir d'une équation générale appliquée à différentes grandeurs physiques conservées, qui doivent être fonctions des variables d'état, mais sont en général distinctes de celles-ci. Ces grandeurs pertinentes seront la masse, la quantité de mouvement, l'énergie et l'entropie, ce sont les variables sur lesquelles portent les bilans pour la mécanique des fluides [18] :

✚ La masse :  $M = \int \rho dV$

✚ La quantité de mouvement :  $Q = \int \rho U dV$

✚ L'énergie totale :  $E = \int \rho(e + U^2/2)dV$

✚ L'entropie  $S$  : on note  $s$  l'entropie par unité de masse tel que  $S = \int \rho s dV$

Remarque : on peut définir l'enthalpie massique par la relation :  $h = e + \frac{P}{\rho}$

### III.1.2. Pourquoi faire des bilans ?

Un problème de mécanique des fluides consiste à déterminer en tout point du fluide et à tout instant, ses grandeurs caractéristiques, soit:

- la vitesse  $U$
- la masse volumique  $\rho$
- la pression  $P$
- la température  $T$

Ce qui permet ensuite d'évaluer les différents flux de masse et/ou de chaleur. Un nombre suffisant de conditions aux limites et initiales doit être connu [19].

Pour calculer ces grandeurs, on utilise les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que les relations de comportement qui lient certaines grandeurs entre elles.

### III.1.3. Equation généralisée des bilans

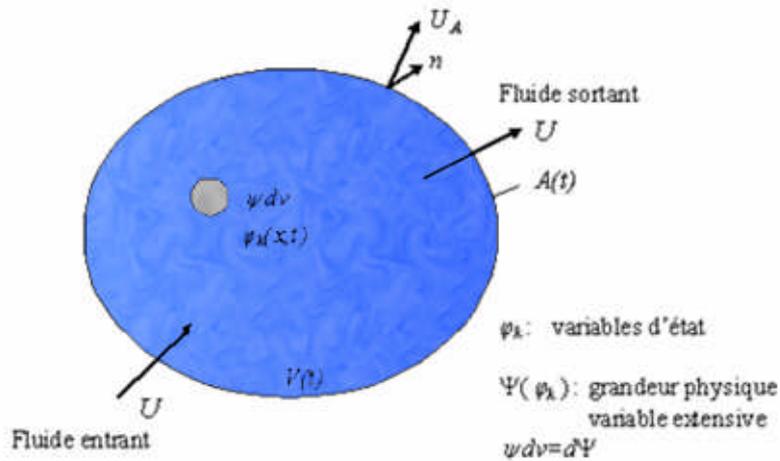
Un bilan exprime que la variation temporelle d'une quantité  $\psi$  dans le volume considéré  $V(t)$  est égale à ce qui entre moins ce qui sort via la surface  $A(t)$ , plus la somme algébrique des sources de production et de disparition / destruction dans le volume  $V(t)$  et la surface  $A(t)$  figure (III.2).

Ces sources de production/disparition sont dues à l'effet de l'environnement extérieur. Elles peuvent résulter des facteurs suivants:

- ✚ Interaction de la quantité  $\psi$  dans le volume  $V(t)$  avec d'autres propriétés physiques de même nature associées à d'autres constituants présents dans  $V(t)$ , non pris en compte dans le bilan (à titre d'exemple : établissement du bilan de masse ou d'énergie pour un constituant lors d'une réaction chimique ou changement de phase),
- ✚ Influence du milieu extérieur à  $V(t)$ , actions à distance de  $V(t)$  (force induite

par des champs, flux radiatif),

- ☛ Termes d'interface au niveau de la surface  $A(t)$  (force de liaison, flux diffusif).



**Figure III.2 Évolution temporelle des variables d'état**

Ainsi l'équation générale d'une quantité  $\psi$  peut s'écrire sous sa forme intégrale par introduction de la densité volumique  $\rho$  et du flux  $J$  et des sources volumiques  $\phi$  comme suit [21] :

$$\frac{d}{dt} \int_V \underbrace{\psi}_{1} dV = - \int_A \underbrace{n \cdot J}_{2} dA + \int_V \underbrace{\phi}_{3} dV \quad (3.1)$$

**Le terme 1 :**  $\psi$  est la densité volumique d'une grandeur  $\varphi$  quelconque avec  $\psi = \rho\varphi$

**Le terme 2 :**  $J$  est le vecteur flux diffusif surfacique à travers la surface  $A$

**Le terme 3 :**  $\phi$  le taux volumique de création / destruction, disparition de la grandeur  $\varphi$

$V$  est un volume matériel de surface matérielle  $A$  .

Cette équation traduit que la variation temporelle de  $\psi$  dans le volume matériel  $V$  est égale au flux à travers la surface  $A$ , plus les sources volumiques.

Les équations d'équilibre des bilans globaux nous permettront de développer les équations locales instantanées, ces dernières, forment la base de la modélisation des écoulements diphasiques.

Notre but étant de formuler les équations locales instantanées, on se doit de manipuler l'équation générale (3.1) en utilisant certains édifices mathématiques, à savoir (la dérivée

particulière d'une grandeur, le théorème de transport de Reynolds et le théorème d'Ortogradsky) voir annexe A :

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi dV = - \int_A n \cdot J dA + \int_V \phi dV \quad (3.2)$$

L'application du théorème de transport de Reynolds à la quantité  $\frac{d}{dt} \int_V \rho \psi dV$  donne :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \psi dV + \int_A \psi U \cdot n dA = - \int_A J \cdot n dA + \int_V \phi dV \quad (3.3)$$

L'application du théorème d'Ortogradsky aux termes,  $\int_A \psi U \cdot n dA$  ,  $-\int_A J \cdot n dA$  donne :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \psi dV + \int_V \nabla \cdot (\psi U) dV = - \int_V \nabla \cdot J dV + \int_V \phi dV \quad (3.4)$$

Ou encore :

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \psi + \nabla \cdot (\psi U) \right] dV = \int_V [-\nabla \cdot J + \phi] dV \quad (3.5)$$

Par identification nous arrivons à notre but qui est autre que l'élimination de la forme intégrale équation (3.4), autrement dit le passage à la formulation différentielle suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \psi}_1 + \underbrace{\nabla \cdot (\psi U)}_2 = \underbrace{-\nabla \cdot J}_3 + \underbrace{\phi}_4 \quad (3.6)$$

Il est intéressant d'interpréter physiquement l'équation obtenue (3.6), terme par terme :

- 🚦 **Le terme 1** : représente la variation temporelle de la quantité  $\psi$  par unité de volume.
- 🚦 **Le terme 2** : correspond à la variation par convection par unité de volume.
- 🚦 **Le termes 3** : traduit le flux surfacique à travers la surface  $A$
- 🚦 **Le terme 4** : est l'ensemble des sources volumiques provenant du volume de control  $V$  .

### III.2. Cas d'un écoulement diphasique

Tout milieu diphasique peut être assimilé à un ensemble de régions purement monophasiques, dans lesquelles les équations locales de la mécanique des fluides s'appliquent, ces régions étant séparées par une zone de transition singulière, appelée interface, une zone infiniment mince [22].

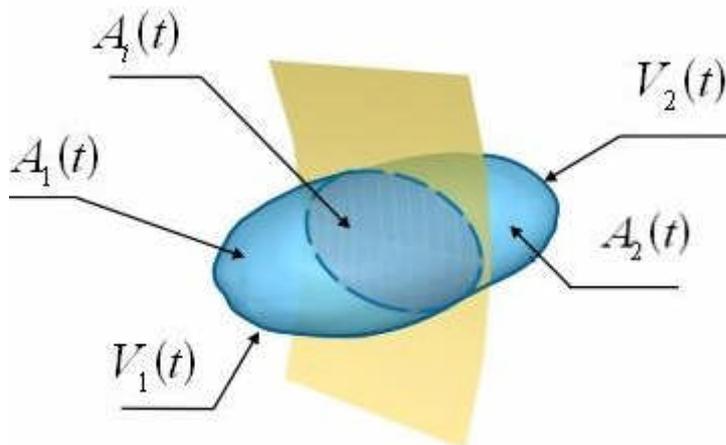


Figure III.3 : Région contenant une surface singulière

### III.2.1. Équation d'équilibre des bilans en écoulement diphasique

La formulation des équations locales instantanées est explicitée dans ce qui suit, elle sont obtenues par dérivation des équations globales (sous forme intégrale) équation (3.4), ainsi les équations de conservation en écoulement diphasique s'établissent similairement à celles des écoulements monophasés à l'exception de la zone qui caractérise essentiellement ces écoulements, qui est l'interface.

Pour une étude complète de l'écoulement diphasique il est important de prendre en compte la zone d'interface [20], [21].

### III.2.2. Grandeur phasique

Une grandeur phasique  $\psi_k$  est la grandeur définie sur le volume  $V_k$  propre à la phase k, on supposera que la grandeur  $\psi_k$  est continue dérivable à tous ordres dans  $V_k$ .

Les deux phases de l'écoulement diphasique obéissent aux équations de base de la mécanique des fluides monophasiques.

Dans ce qui suit nous allons développer les bilans, à l'intérieur des volumes  $V_k$  propres à chacune des deux phases, on notera  $k = 1, 2$  les indices respectifs à chacune des phases [20], [23].

**III.3. Bilans locaux et globaux intrinsèques (à l'intérieur de chaque phase)**

Les bilans globaux et locaux, traduisent les principes de conservation et d'évolution de la physique, on écrit les bilans de conservation pour [11], [18] :

- ✚ Les masses  $M_k$ , conservation de la masse (continuité)
- ✚ Les quantités de mouvement  $\rho_k U_k$ , conservation de la quantité de mouvement principe fondamentale de la dynamique
- ✚ Les énergies totales  $\rho_k E_k = \rho_k e_k + \rho_k \frac{U_k^2}{2}$ , conservation de l'énergie totale premier principe de la thermodynamique avec  $e_k(\rho_k, P_k)$ , les énergies internes spécifiques dépendant des densités  $\rho_k$  et des pressions  $P_k$
- ✚ Evolution de l'entropie  $S_k$  dans chaque phase, deuxième principe de la thermodynamique

On obtient alors pour chaque phase, le système classique des équations de Navier Stokes.

L'équation de conservation générale sous sa forme globale équation (3.4), et sous sa forme locale equation (3.6), peut être appliquée à nos deux phases séparément, l'indice k nous permettra d'établir les bilans phasiques dans chaque phase à l'aide des grandeurs phasiques :

$$\int_{V_k} \frac{\partial}{\partial t} \psi_k dV + \int_{V_k} \nabla \cdot (\psi_k U_k) dV = - \int_{V_k} \nabla \cdot J_k dV + \int_{V_k} \phi_k dV \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_k + \nabla \cdot (\psi_k U_k) = - \nabla \cdot J_k + \phi_k \tag{3.9}$$

Nous parviendrons à formuler les équations de bilan sous leurs formes intégrales à partir de l'équation (3.8) et sous leur forme différentielle (écriture locale des bilans) à partir de l'équation (3.9) [21].

**III.3.1. Conservation de la masse**

Cette loi fondamentale de la mécanique s'énonce ainsi : La masse  $M$  d'un domaine fluide quelconque  $D$  que l'on suit dans son mouvement reste constante quand le temps varie.

## Chapitre III Les principes fondamentaux des écoulements diphasiques

Cet énoncé se traduit mathématiquement par :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{D(t)} dM &= 0 \\ \text{ou bien} \\ \frac{dM}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

On substitue la grandeur  $\psi$  par le scalaire  $\rho_k$ , la grandeur  $\mathbf{J}$  par 0 et la grandeur  $\phi$  par 0 dans les équations (3.8) et (3.9) respectivement.

Phase	$\psi$	$\mathbf{J}$	$\phi$
Phase 1,2  $k = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	$\rho_k$	0	0

**Tableau III.1 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan phasique de la masse**

On obtient alors :

$$\left. \begin{aligned} \int_{V_k} \frac{\partial}{\partial t} \rho_k dV + \int_{A_k} \rho_k U_k \cdot n dA \\ \int_{V_k} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \nabla \cdot (\rho_k U_k) \right] dV \end{aligned} \right\} = 0 \quad \text{Équation globale de la conservation de la masse (3.11)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \nabla \cdot (\rho_k U_k) = 0 \quad \text{Équation locale de la conservation de la masse (3.12)}$$

L'équation locale de conservation de la masse, équation (3.12) peut s'écrire autrement :

Nous avons :

$$\nabla \cdot (\rho U) = \rho \nabla \cdot (U) + \nabla(\rho) \cdot U \quad (3.13)$$

D'où :

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \rho_k \nabla \cdot (U_k) + \nabla(\rho_k) \cdot U_k = \frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \nabla(\rho_k) \cdot U_k + \rho_k \nabla \cdot (U_k) \quad (3.14)$$

Par application de la dérivée particulière (voir Annexe a), on aboutit à une seconde formulation de l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho_k}{dt} + \rho_k \nabla \cdot (U_k) = 0 \quad (3.15)$$

Ainsi pour un fluide incompressible nous avons :  $\rho = \rho_0 = cste$

Nous rappelons qu'un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure quasiment constant sous l'action d'une pression externe, et l'équation (3.15) devient :

$$\longrightarrow \frac{d\rho_k}{dt} + \rho_k \nabla \cdot (U_k) = 0 \quad \nabla \cdot (U_k) = 0 \quad (3.16)$$

Cas de l'écoulement stationnaire : On dit que le mouvement d'un fluide est permanent ou stationnaire si la vitesse  $U$  et toutes les caractéristiques du milieu en un point ne dépendent que de l'abscisse et sont indépendantes du temps.

Le mouvement permanent ou stationnaire se traduit mathématiquement par :

$$\frac{\partial \varphi(M, t)}{\partial t} = 0 \quad (\forall \text{ la grandeur physique } \varphi \text{ observée}) \quad (3.17)$$

L'équation locale de conservation de la masse se modifie comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \nabla \cdot (\rho_k U_k) = 0 \longrightarrow \nabla \cdot (\rho_k U_k) = 0 \quad (3.18)$$

Ou alors :

$$\nabla \cdot (\rho_k U_k) = \rho_k \nabla \cdot (U_k) + \nabla(\rho_k) U_k = 0 \quad (3.19)$$

### III.3.2 Équation de bilan de la quantité de mouvement

Ce principe est le principe fondamental de la dynamique, qui exprime la conservation de la quantité de mouvement. La dérivée particulaire du tenseur cinétique est égale au tenseur des efforts extérieurs[24].

#### III.3.2.a. Conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est obtenue en introduisant le tenseur des contraintes surfaciques ainsi que les forces volumiques, du tableau si dessous, dans les équations générales (3.8) ; (3.9) :

Phase	$\psi$	$J$	$\phi$
Phase 1,2 $k = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	$\rho_k U_k$	$-T_k = P_k I - \tau_k$	$\rho_k g_k$

**Tableau III.2 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan phasique de la quantité de mouvement**

Les équations deviennent :

$$\int_{V_k} \frac{\partial}{\partial t} \rho_k U_k dV + \int_{A_k} (\rho_k U_k) \otimes U_k .ndA = - \int_{A_k} [P_k I - \tau_k] .ndA + \int_{V_k} \rho_k g_k dV \quad (3.20)$$

Bilan global de quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k U_k + \nabla . (\rho_k U_k \otimes U_k) = \nabla . \tau_k - \nabla P_k + \rho_k g_k \quad (3.21)$$

Bilan local de quantité de mouvement

Nous remarquerons que le tenseur des contraintes surfaciques a été décomposé en terme de pression plus le tenseur des contraintes visqueuses.

**III.3.2.b. Interprétation physique de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement**

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho_k U_k}_1 + \underbrace{\nabla . (\rho_k U_k \otimes U_k)}_2 = \underbrace{-\nabla p_k}_3 + \underbrace{\nabla . \tau_k}_4 + \underbrace{\rho_k g_k}_5 \quad (3.22)$$

Cette équation signifie que la somme des forces agissant sur la surface du volume de contrôle, plus les forces de volume agissant sur le fluide à l'intérieur de ce volume de contrôle, sont équilibrées par la variation de la quantité de mouvement.[25]

Le terme 1 représente la variation temporelle de quantité de mouvement au sein du

 volume  $V_k$  : ce terme est évidemment nul en régime permanent,

✚ Le terme 2, représente le bilan global au travers de la surface fermée  $A_k$  qui est souvent dénommée "Surface de contrôle".

Le second membre de l'équation représente la contribution des forces externes qui peuvent diminuer ou augmenter la quantité de mouvement du fluide contenu dans le volume  $V_k$  :

- ✚ Le terme 3, représente les forces de pression (surfaciqes) qui peuvent diminuer ou augmenter la quantité de mouvement.
- ✚ Le terme 4, les forces de viscosité qui ne peuvent que consommer de la quantité de mouvement.
- ✚ Le terme 5,  $g_k$  désigne la résultante des forces massiques s'exerçant dans le fluide, les forces de volume qui peuvent être champ de pesanteur, champ électriques, thermiques, etc.

**III.3.3. Équation de conservation de l'énergie**

Cette équation découle du premier principe de la thermodynamique, ce dernier s'énonce comme suit :

La variation d'énergie interne et de l'énergie cinétique, d'un système est égale à la somme des puissances des actions extérieures mécanique et thermique (quantités de chaleur et de travail que ce système a échangé avec le milieu extérieur).

Pour arriver à la formulation globale et locale du bilan de conservation de l'énergie nous devrions effectuer les substitutions suivantes :

Phase	$\psi$	$J$	$\phi$
Phase 1,2  $k = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	$\rho_k E_k,$  $E_k = e_k + \frac{U_k^2}{2}$	$q_k - T_k U_k = q_k + (P_k I - \tau_k) U_k$ <i>avec</i> $(-T_k = P_k I - \tau_k)$	$\phi_k = \rho_k g_k U_k + Q_k$

**Tableau III.3 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan phasique d'énergie**

En attribuant chacune des grandeurs  $\psi$ ,  $J$  et  $\phi$  aux valeurs données par le tableau si dessus on obtient :

$$\int_{V_k} \frac{\partial}{\partial t} \rho_k E_k dV + \int_{A_k} (\rho E_k + p_k) U_k \cdot n dA = \int_{A_k} [-q_k + \tau_k \cdot U_k] \cdot n dA + \int_{V_k} \rho_k \mathbf{g}_k \cdot U_k dV + \int_{V_k} Q_k dV \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k E_k) + \nabla \cdot [(\rho E_k + p_k) U_k] = \nabla \cdot (\tau_k \cdot U_k) + \rho_k \mathbf{g}_k \cdot U_k - \nabla \cdot q_k + Q_k \quad (3.24)$$

### III.3.4. Évolution de l'entropie

L'évolution de l'entropie est régie par le second principe de la thermodynamique, qui s'énonce comme suit :

Toute évolution spontanée d'un système se fait par accroissement d'entropie.

Le second principe concerne la notion d'irréversiblement d'une transformation et introduit la notion d'entropie. Il stipule que l'entropie d'un système isolé augmente, ou reste constante et est associée à l'impossibilité du passage du désordre à l'ordre sans intervention extérieure.

Comme le deuxième principe évoque une évolution et non pas une conservation la forme générale d'évolution de l'entropie s'écrit [11] :

$$\int_{V_k} \frac{\partial}{\partial t} \psi_k dV + \int_{V_k} \nabla \cdot (\psi_k U_k) dV + \int_{V_k} \nabla \cdot J_k dV - \int_{V_k} \phi_k dV \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{transfert réversible} \\ \geq 0 \rightarrow \text{transfert irréversible} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_k + \nabla \cdot (\psi_k U_k) + \nabla \cdot J_k - \phi_k \geq 0 \quad (3.26)$$

Phase	$\psi$	$J$	$\phi$
Phase 1,2 $k = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	$\rho_k S_k$	$\frac{q_k}{T_k}$	$\frac{Q_k}{T_k}$

**Tableau III.4 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan phasique d'entropie**

L'inégalité de l'évolution globale et locale de l'entropie est :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho_k S_k dV + \int_{A_k} \frac{q_k}{T_k} \cdot n_k da - \int_{V_k} \frac{Q_k}{T_k} dV \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{transfert réversible} \\ \geq 0 \rightarrow \text{transfert irréversible} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k S_k + \nabla \cdot (\rho_k S_k U_k) + \nabla \cdot \frac{q_k}{T_k} - \frac{Q_k}{T_k} = \Delta_k \geq 0 \quad (3.28)$$

Remarque : la forme globale de l'évolution de l'entropie équation (3.27) est plus connue sous le nom de l'inégalité de Clausius Duhem.

**Notation :**

Dans les équations globale et locale de conservation:

$\rho_k$  est la masse volumique du fluide, présent dans la phase k

$U_k$  désigne la vitesse eulérienne d'une particule fluide située dans le volume  $V_k$ .

$P_k$  désigne la pression.

$\tau_k$  est le tenseur des contraintes visqueuses.

$g_k$  désigne la résultante des forces massiques s'exerçant dans le fluide.

$E_k$  est l'énergie phasique totale par unité de masse.

$q_k$  est le flux de chaleur entrant au système, ou encore  $(-q_k)$  flux de chaleur perdu par conduction thermique.

$Q_k$  représente la perte de chaleur volumique due au rayonnement.

$S_k$  entropie phasique.

$T_k$  est la température ambiante dans la phase k.

$\Delta_k$  est le taux de production de l'entropie par unité de volume.

**III.4. Lois constitutives**

Les équations (3.12) ;(3.21) ;(3.24) et (3.28) sont les équations locales instantanées de conservation et d'évolution dans chacune des deux phases, valables à l'intérieur du volume  $V_k$  et propres à la phase k.

Il est évident que le système composé de cet ensemble d'équations reste ouvert car le nombre d'équation accède le nombre de relations qui lient ces dernières.

Pour y remédier nous faisons recours à certaines simplifications usuelles, très utilisées dans la

résolution de problèmes de mécanique des fluides. Ce sont des équations constitutives, et des lois de comportement qui décrivent le comportement thermodynamique, mécanique, énergétique et chimique du système, elles peuvent être considérées comme des modèles mathématique faisant lieu d'hypothèse dans des cas d'applications bien définis, on y retrouve :

### III.4.1. Équations d'état

Une équation d'état est fondée sur une relation qui lie l'énergie interne à la densité volumique et à l'entropie :

$$e_k = e_k(\rho_k, s_k) \quad (3.29)$$

Nous citerons l'énergie libre de Gibbs, l'enthalpie et l'énergie libre de Helmholtz définies successivement par [21], [26] :

$$G_k = e_k - T_k s_k + \frac{P_k}{\rho_k} \quad (3.30)$$

$$h_k = e_k + \frac{P_k}{\rho_k} \quad (3.31)$$

$$F_k = e_k - T_k s_k \quad (3.32)$$

Il découle de l'équation d'état fondamentale (3.29) d'autres relations constitutives :

$$P_k = P_k(\rho_k, T_k) \quad (3.33)$$

$$e_k = e_k(\rho_k, T_k) \quad (3.34)$$

Ces relations sont plus pratiques du fait que la température et la pression sont des grandeurs physiques aisément mesurables.

Pour un système homogène (la masse volumique est supposée constante dans tout le fluide,  $\rho = cste$ ).

Les liquides sont déformables à volume constants. La masse volumique de liquide varie peu en fonction de la pression, ce sont des fluides incompressibles, mais elle est fonction de la température, ce sont des fluides dilatables [18].

Les gaz sont déformables à volume expansible. Leur masse volumique est fonction de la

pression et de la température ( $f(P_k, \rho_k, T_k) = 0$ ).

Pour un gaz parfait, on considère la loi de Mariotte :

$$P_k V_k = N_k K T_k \quad (3.35)$$

$N_k$  est le nombre de mole de la phase k

$K$  est la constante de Boltzmann.

elle s'écrit aussi

$$P_k = \rho_k \frac{R}{M_k} T_k \quad (3.36)$$

$M_k$  masse molaire du gaz

$R$  est la constante universelle des gaz.

Autre lois pour les gaz parfaits :

Loi de Mariotte : à  $T_k = cte$   $P_k V_k = cte$

Lois de Gay Lussac et Charles : à  $V_k = cte$   $\frac{P_k}{T_k} = cte$

à  $P_k = cte$   $\frac{V_k}{T_k} = cte$

Et pour un gaz réel, le modèle le plus répandu est celui de Van der Waals, l'équation semi empirique est donnée par

$$\left(P_k + \frac{A_k}{V_k^2}\right)(V_k - B_k) = RT_k \quad (3.37)$$

Les coefficients A et B sont calculés à partir des condition critiques du fluide :

$$A_k = 3P_{kc} V_{kc}^2 \quad ; \quad B_k = \frac{V_{kc}}{3}$$

D'autre modèles sont valables pour les gaz réels, Peng Robinson, **Marriot**, Soave, Elliott, Suresh, Donohue (**équations d'états Wikipedea**).

Les solides sont peu déformables à volume constant, leur masse volumique varie lentement en fonction de la température.

### III.4.2. Équations constitutives mécaniques

1. La loi rhéologique la plus simple est celle du fluide non visqueux :

$$\tau_k = 0 \quad (3.38)$$

2. Pour de nombreux fluides usuels comme l'eau et l'air, le tenseur des contraintes visqueuses est proportionnel à la partie symétrique du tenseur des taux de déformation (hypothèse de Newton) [21].

Le tenseur des contraintes visqueuses pour de tels fluides s'écrit :

$$\tau_k = 2\mu_k W_k + \eta_k \nabla \cdot U_k I \quad (3.39)$$

Où  $W_k$  est le tenseur de vitesse de déformation [27].

$$W_k = \frac{1}{2} \nabla U_k + \frac{1}{2} [\nabla U_k]^t \quad (3.40)$$

Les fluides pour lesquels cette hypothèse est vérifiée, sont appelés fluides newtoniens, on leur adjoint généralement l'hypothèse de Stokes sur les viscosités [26] :

$$3\eta_k + 2\mu_k = 0 \quad (3.41)$$

$\mu$  désigne la viscosité cinématique du fluide.

$\eta$  désigne la viscosité dynamique du fluide.

3. la résultante des forces massiques s'exerçant dans le fluide sont très souvent assimilés au champ de gravité dans la mécanique des fluides ainsi :

$$g_k = g \quad (3.42)$$

### III.4.3. Équations constitutives énergétiques

1. la loi de comportement thermique exprime la relation entre le flux de chaleur  $q_k$  et le gradient de température, généralement, on a à faire aux deux comportements suivants [19],[21] :

🚦 Fluide non conducteur :

$$q_k = 0 \quad (3.43)$$

🚦 Fluide conducteur linéaire (flux de chaleur proportionnel au gradient de température)

loi de Fourier :

$$q_k = -K_k \nabla T_k \quad (3.44)$$

avec  $K_k$  conductivité thermique du fluide elle est fonction de la température  $K_k = f(T_k)$ .

2. le rayonnement qui est une action qui s'effectue à distance du système physique étudié est très souvent considéré nul [21] :

$$Q_k = 0 \quad (3.45)$$

### III.5 Traitement des deux phases

#### III.5.1. Bilan phasique locaux

Comme nous sommes en écoulement diphasique on se doit de définir les équations de conservation et d'évolution en tout point de l'écoulement en prenant compte de l'interface.

Pour cela nous allons faire une extension des bilans phasiques développés préalablement.

Afin de décrire localement l'écoulement en chaque instant et en chaque point, il faut déterminer la phase fluide dans laquelle on se trouve [20], [22], [23]

Trois possibilités se présentent :

- ✚ L'observateur se trouve dans la phase  $k = 1$ ,
- ✚ L'observateur se trouve dans la phase  $k = 2$ ,
- ✚ L'observateur se trouve au niveau de l'interface.

Les trois possibilités sont envisageables, car un écoulement diphasique peut être décrit à un instant donné par une répartition aléatoire des deux phases. Cette répartition varie au cours du temps et on rencontre en chaque point du domaine de l'écoulement diphasique successivement, sur des intervalles de temps variables, la phase 1 ou la phase 2 voir l'interface.

#### III.5.2 Fonction caractéristique de présence de phase

La description eulérienne instantanée d'un tel écoulement peut être réalisée en définissant une fonction  $\chi_k$  qui indique la présence ou non de la phase  $k$  au point  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$ .

La fonction  $\chi_k$  est appelée fonction caractéristique ou fonction de présence (Ishii, 1975), (Drew, 1983) [21],[28]

Définition de la fonction de présence :

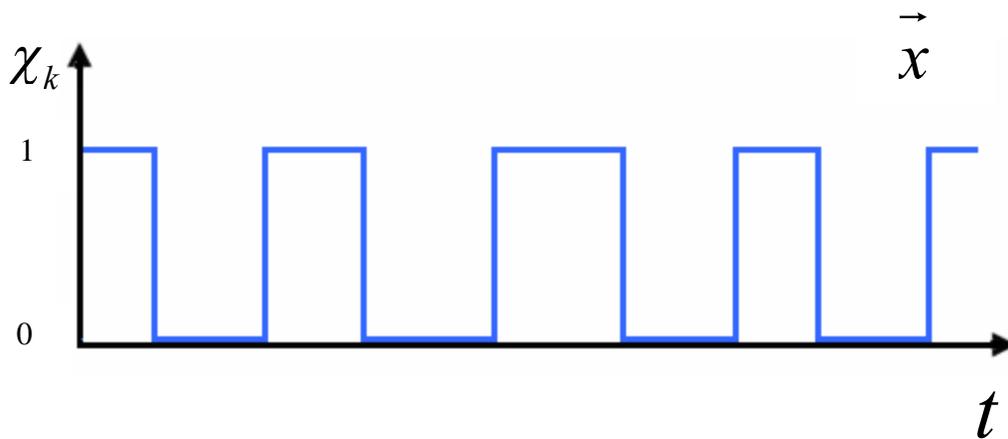
Soit  $D$  le domaine spatial de l'écoulement observé, indépendant du temps. On note  $D_k(t)$  le domaine spatial occupé par la phase  $k$  dans le domaine d'écoulement  $D$  à l'instant  $t$ . Le domaine  $D_k(t)$  peut être non connexe et on définit,  $\chi_k$  la fonction caractéristique de la phase  $k$  par :

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(r,t) = 1 ; \chi_2(r,t) = 0 & \text{ si } r \in D_1(t) \quad A_i(r,t) > 0 \\ \chi_1(r,t) = 0 ; \chi_2(r,t) = 1 & \text{ si } r \in D_2(t) \quad A_i(r,t) < 0 \\ \chi_1 \text{ et } \chi_2 \text{ non définis} & \text{ si } A_i(r,t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Avec  $A_i(r,t) = 0$  : l'équation de l'interface, choisie de telle sorte que  $A_i(r,t) > 0$  dans le domaine  $D_1(t)$  de la phase 1 et  $< 0$  dans la domaine  $D_2(t)$  de la phase 2.

On a alors :

$$\chi_1 + \chi_2 = 1 \quad \text{si } A_i(r,t) \neq 0 \quad (3.47)$$



**Figure III.4. Fonction caractéristique de présence**

### III.5.3. Distribution et propriétés de l'interface

Il est commode de prolonger la fonction de présence et définir le cas  $A_i(r,t) = 0$  quand  $\chi_1, \chi_2$  sont non définis, pour cela nous allons définir une, distribution interfaciale :

On introduit une distribution de Dirac  $\delta_i$  sur l'interface, c'est-à-dire une masse uniforme de densité 1 sur l'interface. Si l'on cherche à visualiser l'interface comme une pellicule d'épaisseur finie infime  $\varepsilon$  on a alors [23] :

$$\delta_i(r,t) = 0 \text{ si } A_i(r,t) \neq 0 \quad (3.48)$$

Si le point de coordonnées  $r$  est sur l'interface à l'instant  $t$  :

$$\delta_i(r,t) = \infty \text{ si } A_i(r,t) = 0 \quad (3.49)$$

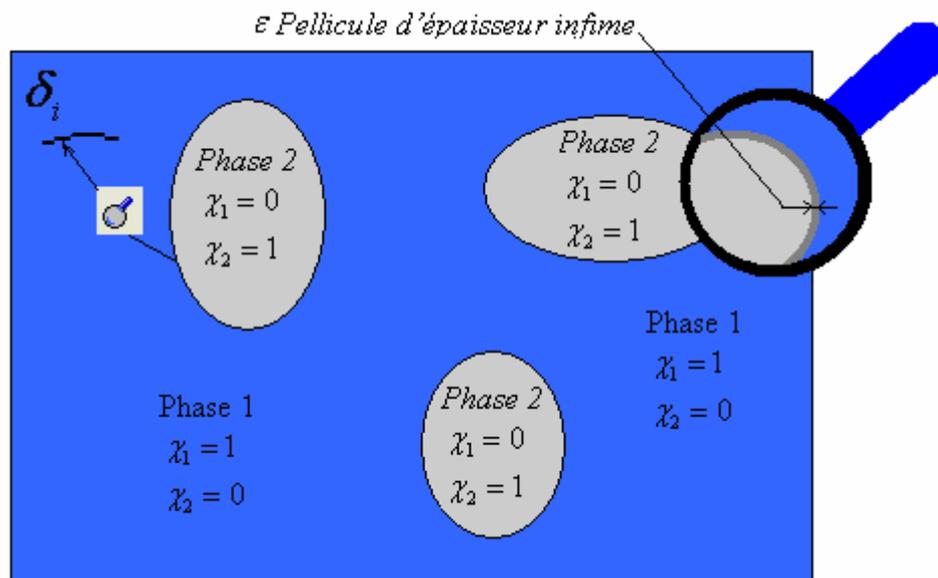


Figure III.5 : Distribution des phases

La vitesse interfaciale est par définition :

$$U_i = \frac{d r_i}{d t} \tag{3.50}$$

Où  $r_i$  est le vecteur caractérisant la position d'un point lié à l'interface

On ne peut définir la vitesse d'une surface géométrique, on définit alors sa vitesse normale qui est :

$$U_{i_n} = U_i \cdot n = - \frac{\frac{\partial A_i}{\partial t}}{|\nabla A_i|} \tag{3.51}$$

C'est le produit scalaire  $U_i \cdot n$  qui est autre que la vitesse normale interfaciale qui devra systématiquement figurer pour représenter le déplacement de l'interface [20],[21] ,[23], [25].

Si l'on suppose l'interface séparant les deux phases comme une pellicule infiniment mince et sans masse de sorte que l'on passe instantanément en la traversant d'une phase à l'autre La fonction caractéristique de présence (3.46) vérifie les règles de dérivation suivantes (Ishii, 1975) :

$$\nabla \chi_k = -n_k \delta_i \tag{3.52}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} = -U_i \nabla \chi_k \end{aligned} \right\} (k = 1, 2) \tag{3.53}$$

La distribution de Dirac associée à l'interface  $\delta_i$  vérifie la propriété suivante :

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial t} + U_i \cdot \nabla \delta_i = 0 \tag{3.54}$$

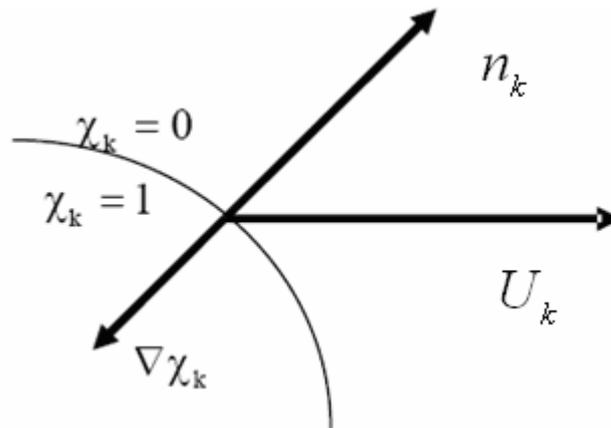


Figure III.6 : Discontinuité à l'interface.

Avec :

$U_i$  : La vitesse de déplacement de l'interface,

$n_k$  : Un vecteur unitaire normal à la l'interface et orienté vers l'extérieur de la phase k,

$\delta_i$  : Une distribution de Dirac associée à l'interface.

Conséquence directe de l'hypothèse de l'épaisseur nulle des interfaces, la relation (3.52) indique que le gradient de la fonction caractéristique n'est différent de zéro qu'au passage des interfaces (figure : 3.6). La relation (3.53) signifie que lorsqu'on se déplace à la vitesse  $U_i$  de l'interface on reste dans la même phase [22], [29].

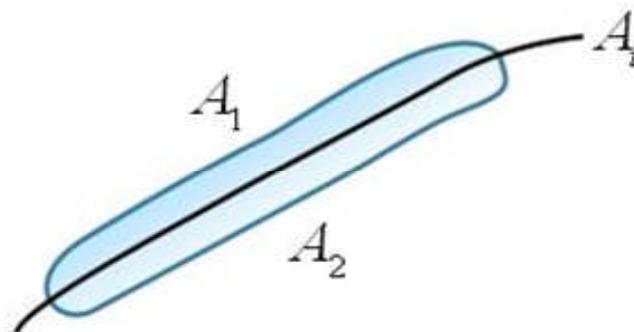


Figure III.7 : Aire interfaciale

### III.6 Extension des équations à tout le domaine d'écoulement

#### III.6.1 Equation locale phasique généralisée

La fonction caractéristique, discontinue aux interfaces permet d'étendre les équations (3.12), (3.21) et (3.24) valides à l'intérieur d'une phase, c'est-à-dire  $\forall r \in D_k(t)$ , à tout le domaine  $D$  de l'écoulement.

Rappelons que la fonction vérifie au sens des distributions les égalités suivantes [30] :

$$\left. \begin{aligned} \nabla (X_k f) &= X_k \nabla f - f n_k \delta_i \\ \nabla \cdot (X_k U) &= X_k \nabla \cdot U - U \cdot n_k \delta_i \\ \nabla \cdot (X_k T) &= X_k \nabla \cdot T - T \cdot n_k \delta_i \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

Où,  $n_k$  est le vecteur normal à l'interface extérieur à  $D_k(t)$ ,  $f$  une fonction scalaire,  $U$  un vecteur,  $T$  un tenseur et  $\delta_i$  la fonction caractéristique de l'interface.

$U_i$  Étant la vitesse de l'interface, on a aussi [30] :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (X_k f) &= X_k \frac{\partial f}{\partial t} + f U_i \cdot n_k \delta_i \\ \frac{\partial}{\partial t} (X_k U) &= X_k \frac{\partial U}{\partial t} + U U_i \cdot n_k \delta_i \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Les équations de conservation pour chaque phase définie, au sens des distributions, en tout point du domaine de l'écoulement s'obtiennent en multipliant l'équation générale (3.9) par la fonction caractéristique de présence  $\chi_k$ , on obtiendra alors la forme générale suivante des bilans étendus sur tout le domaine  $D$  [20],[30] :

$$\chi_k \left[ \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi_k U_k) + \nabla \cdot J_k - \phi_k \right] = 0 \quad (3.57)$$

En multipliant les équations (3.12), (3.21) et (3.24) par la fonction caractéristique de présence  $\chi_k$ , ou en substituant les grandeurs  $\psi$ ,  $J$  et  $\phi$  par les valeurs données par les tableaux (III.1), (III.2) et (III.3), dans l'équation générale (3.57) on a:

$$X_k \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \nabla \cdot (\rho_k U_k) \right] = 0 \quad (3.58)$$

$$X_k \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho_k U_k + \nabla \cdot (\rho_k U_k \otimes U_k) + \nabla P_k - \nabla \cdot \tau_k \right) = X_k \rho_k g_k \quad (3.59)$$

$$X_k \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_k E_k) + \nabla \cdot [(\rho_k E_k + P_k) U_k] + \nabla \cdot q_k - \nabla \cdot (\tau_k \cdot U_k) \right] = X_k \rho_k g_k \cdot U_k \quad (3.60)$$

La notion de dérive au sens des distributions permet d'introduire la fonction caractéristique à l'intérieur des opérateurs différentiels et en appliquant les propriétés (3.55) et (3.56) de la fonction caractéristique de présence des phases, à l'équation générale (3.57) on obtient une autre forme générale des bilans phasiques instantanés avec fonction caractéristique intégrée :

$$\frac{\partial \chi_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \psi_k U_k) + \nabla \cdot (\chi_k J_k) - \chi_k \phi_k + \delta_i [(\psi_k (U_k - U_i) + J_k) \cdot n_k] = 0 \quad (3.61)$$

### III.6.2 Les équations phasiques locales instantanées

La substitution les grandeurs,  $\psi$ ,  $J$  et  $\phi$  par les valeurs données par les tableaux (III.1), (III.2) et (III.3), dans l'équation générale (3.61), donne les équations phasiques locales instantanées masse, quantité de mouvement et d'énergie successivement [30] :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k X_k) + \nabla \cdot (X_k \rho_k U_k) + \rho_k (U_k - U_i) \cdot n_k U_i = 0 \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (X_k \rho_k U_k) + \nabla \cdot (X_k \rho_k U_k \otimes U_k) + \nabla X_k P_k - \nabla \cdot X_k \tau_k \\ + \rho_k (U_k \otimes U_k) \cdot n_k U_i - \rho_k U_k (U_i \cdot n_k) U_i + P_k n_k U_i - \tau_k \cdot n_k U_i = X_k \rho_k g_k \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (X_k \rho_k E_k) + \nabla \cdot X_k [(\rho_k E_k + P_k) U_k] + \nabla \cdot X_k q_k - \nabla \cdot X_k (\tau_k \cdot U_k) \\ + \rho_k E_k (U_k - U_i) \cdot n_k U_i + P_k U_k \cdot n_k U_i + (q_k - \tau_k \cdot U_k) \cdot n_k U_i = X_k \rho_k g_k \cdot U_k \end{aligned} \quad (3.64)$$

Les équations locales (3.62), (3.63) et (3.64) sont une extension des équations locales, (3.12), (3.21) et (3.24) à tout le domaine de l'écoulement et sont également valables aux interfaces.

## III.7. Equation diphasique et condition de saut à l'interface

Tout comme nous avons défini les grandeurs phasiques pour écrire les bilans phasiques, nous définissons ce qu'est une grandeur diphasique afin d'écrire les bilans diphasiques instantanés.

### III.7.1. Grandeur diphasique [20],[23]

On appelle grandeur diphasique  $\psi$ , la grandeur définie dans  $V$  et prenant dans chaque phase  $k$ , la valeur  $\psi_k$ .

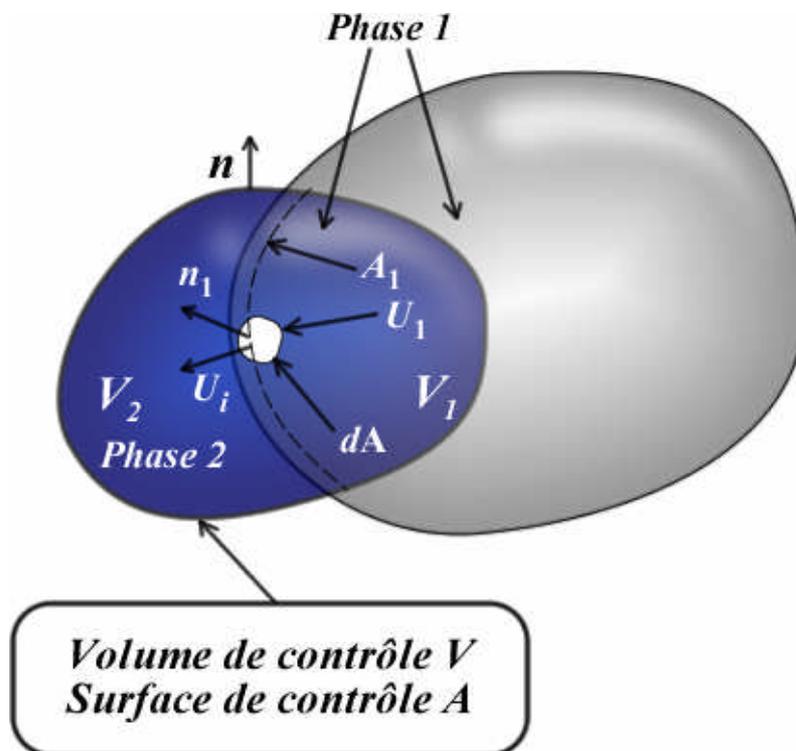
Il est clair que dans ces conditions que  $\psi$  n'est pas nécessairement continue partout,  $\psi$  est discontinue et non dérivable partout. On est alors amené à considérer  $\psi$  comme une distribution, et lui appliquer les opérateurs de dérivation définis au sens de distribution. Ainsi pour toute grandeur définie dans chaque phase par les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  (volumiques) et sur l'interface par  $\psi_i$  (surfactive), on peut définir en tout point une grandeur diphasique par :

$$\psi = \chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2 + \delta_i\psi_i \quad (3.65)$$

**III.7.2. Équations diphasiques des bilans locaux généralisée**

Les équations de bilan diphasique prennent en charge l'écoulement global, les phases présentes mais aussi les interfaces, qui les séparent et cela sur tout le domaine de l'écoulement  $D$ .

Le de volume contrôle reflète l'écoulement macroscopique il y a un volume  $V_1$  de la phase 1, un volume  $V_2$  de la phase deux et une surface d'interface [25] comme le montre la figure si dessous :



**Figure III.8 : Volume de contrôle et interactions entre les phases**

Le traitement des zones surfaciques d'interface reste important tout en étant très délicat. [31]  
 Pour étudier ces zones avec soin et formuler des équations diphasiques globales on se doit de rapporter le théorème de transport à une grandeur interfaciale.

Pour cela nous ferons appel à la forme surfacique du théorème de Gauss et Ostrogradski  
 Équation de transport d'une grandeur interfaciale.

Les théorèmes de Gauss et d'Ostrogradski appliqués à une surface gauche limitée par une courbe (figure III.9) s'écrit sous les formes suivantes [23] :

$$\int_C f n_c dC = \int_A \left[ \nabla f + f n \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] dA = \int_A [\nabla f + f n 2H] dA \quad (3.66)$$

$$\int_C T.n_c dC = \int_A \left[ \nabla.T + T.n \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] dA = \int_A [\nabla.T + T.n 2H] dA \quad (3.67)$$

Tel que  $f$  et  $T$  sont respectivement des fonctions et tenseurs quelconque

Et  $n$  normale à  $A$

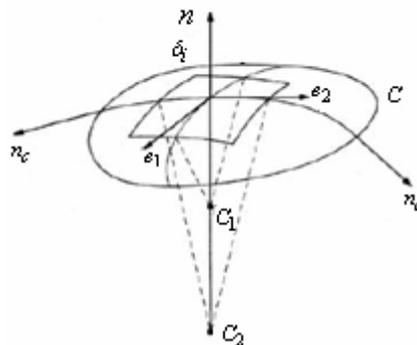
$n_c$  est normale à la courbe  $C$  dans le plan tangent à  $A$

$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  que l'on a posé égal à  $2H$  double de la courbure moyenne de la surface  $A$

$R_1, R_2$  sont comptés algébriquement le long de  $n$ , vers le centre de courbure (respectivement  $C_1, C_2$ )

Avec :

$$\nabla.n = -\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -2H \quad (3.68)$$



**Figure III.9 : Coordonnées interfaciales**

$e_1, e_2$  sont les vecteurs unitaires tangents à la surface.

À l'aide du théorème de transport d'une grandeur interfaciale équations (3.66) et (3.67), on peut formuler l'équivalent surfacique de l'équation générale (3.9) comme suit [21],[23] :

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi_i U_i) + \sum_{k=1}^2 \psi_k (U_i - U_k) \cdot n_k = -\nabla \cdot J_i - 2H J_i n + \phi_i + \sum_{k=1}^2 J_k \cdot n_k \quad (3.69)$$

**III.7.3. Équations diphasiques des bilans locaux [20], [21], [23], [29], [32]**

Les équations diphasiques sont obtenues à partir de l'équation générale (3.9), on pre-multiplie cette dernière par la fonction caractéristique de phase et on introduit les grandeurs diphasiques définies par l'équation (3.65), ceci nous mène à l'équation suivante :

$$\sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\partial (\chi_k \psi_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \psi_k U_k) + \nabla \cdot (\chi_k J_k) - \chi_k \phi_k \right\} + \frac{\partial (\delta_i \psi_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\delta_i \psi_k U_k) + \nabla \cdot (\delta_i J_k) + \delta_i \phi_k = 0 \quad (3.70)$$

On transforme l'équation (3.70), en sortant les fonctions poids  $\chi_k, \delta_i$  des opérateurs de dérivation, ceci se fait en appliquant les propriétés (3.55) et (3.56) de la fonction caractéristique de présence, ainsi que la propriété (3.54) de la distribution de Dirac à l'interface et bien sur l'équation surfacique (3.69) valable à l'interface équation, on aboutit alors à une équation générale qui traduit les équilibres locaux instantanés diphasiques, cette équation sera la base de nos bilans diphasiques, elle s'écrit :

$$\sum_{k=1}^2 \chi_k \left[ \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi_k U_k) + \nabla \cdot J_k - \phi_k \right] + \delta_i \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi_i U_i) + \nabla \cdot J_i + 2H J_i n - \phi_i - \sum_{k=1}^2 (\psi_k (U_k - U_i) + J_k) \cdot n_k \right] = 0 \quad (3.71)$$

**III.7.3.a. Bilan de masse**

Le bilan diphasique de la masse se fait des valeurs données par le tableau suivant [20], [21] :

Phase	$\psi$	$J$	$\phi$
Phase 1,2 $k = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	$\rho_k$	0	0
Interface i	$\rho_i$	0	0

**Tableau III.5 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan diphasique de la masse**

$$\sum_{k=1}^2 \left\{ \chi_k \left[ \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k U_k) \right] \right\} + \delta_i \left[ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U_i) + \sum_{k=1}^2 (\rho_k (U_k - U_i) \cdot n_k) \right] = 0 \quad (3.72)$$

La conservation de la masse dans chacune des deux phases donne :

$$\left\{ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i U_i) - \sum_{k=1}^2 \rho_k (U_k - U_i) \cdot n_k \right\} = 0 \quad (3.73)$$

Ou alors:

$$\rho_1 (U_1 - U_i) \cdot n_1 + \rho_2 (U_2 - U_i) \cdot n_2 - \frac{\partial \rho_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_i U_i) = 0 \quad (3.74)$$

L'équation (3.74) est l'équation locale instantanée de conservation de masse diphasique.

La condition de saut à l'interface

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \rho_k (U_k - U_i) \cdot n_k &= m_i \\ m_i &= \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i U_i) \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

$m_i$  est le terme source de transfert de masse au sein de l'interface [23],[27].

On écrit :

$$\rho_1 (U_1 - U_i) \cdot n_1 + \rho_2 (U_2 - U_i) \cdot n_2 = \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i U_i) = m_i \quad (3.76)$$

On pose pour simplifier les autres équations :

$$\dot{m}_k = \rho_k (U_k - U_i) \cdot n_k \quad (3.77)$$

Où  $\dot{m}_k$  est le flux de masse sortant à travers l'interface à partir de la phase k.

La condition de saut se traduit par :

$$\sum_{k=1}^2 \dot{m}_k = m_i \tag{3.78}$$

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = m_i \tag{3.79}$$

Interprétation de la relation de saut de la conservation de la masse:

L'équation (3.78 ; 3.79) traduit que le transfert de masse de la phase 1 à la phase 2 doit être égal au terme source de transfert de masse propre à l'interface  $m_i$ .

Remarque

Si la vitesse à l'interface  $U_i$  est égale aux vitesses des phases  $(U_1, U_2)$  le flux d'échange de masse à l'interface s'annule  $\dot{m}_k = \rho_k (U_k - U_i) . n_k = m_i = 0$ , à ce moment on dit qu'il n'y a pas de transfert de masse entre les phases [25].

**III.7.3.b. Bilan de la quantité de mouvement**

Le tableau ci dessous donne les valeurs appropriées aux grandeurs,  $\psi$ ,  $J$  et  $\phi$  pour arriver à l'équation locale instantanée diphasique de la quantité de mouvement :

Phase	$\psi$	$J$	$\phi$
Phase 1,2 $k = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	$\rho_k U_k$	$P_k I - \tau_k$	$\rho_k g_k$
Interface i	$\rho_i U_i$	$-\sigma I - \tau_i$	$\rho_i g_i$

**Tableau III.6 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan diphasique de la quantité de mouvement**

En attribuant aux grandeurs leurs valeurs appropriées on a :

$$\sum_{k=1}^2 \chi_k \left\{ \frac{\partial \rho_k U_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k U_k \otimes U_k) + \nabla \cdot (P_k I - \tau_k) - \rho_k g_k \right\} - \delta_i \left\{ -\frac{\partial \rho_i U_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_i U_i \otimes U_i) + \rho_i g_i + \nabla \sigma + 2H\sigma n + \nabla \cdot \tau_i + 2H\tau_i \cdot n + \sum_{k=1}^2 [\rho_k U_k (U_k - U_i) + (P_k I - \tau_k)] \cdot n_k \right\} = 0 \quad (3.80)$$

La conservation dans chacune des deux phases annule la sommation sur les k d'où :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^2 \chi_k \left\{ \frac{\partial \rho_k U_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k U_k \otimes U_k) + \nabla \cdot (P_k I - \tau_k) - \rho_k g_k \right\}}_0 - \delta_i \left\{ -\frac{\partial \rho_i U_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_i U_i \otimes U_i) + \rho_i g_i + \nabla \sigma + 2H\sigma n + \nabla \cdot \tau_i + 2H\tau_i \cdot n + \sum_{k=1}^2 \dot{m}_k U_k + [(P_k I - \tau_k)] \cdot n_k \right\} = 0 \quad (3.81)$$

Plus encore

$$-\frac{\partial \rho_i U_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_i U_i \cdot U_i) + \rho_i g_i + \nabla \sigma + 2H\sigma n + \nabla \cdot \tau_i + 2H\tau_i \cdot n + \sum_{k=1}^2 [\dot{m}_k U_k - (-P_k I + \tau_k)] \cdot n_k = 0 \quad (3.82)$$

En considérant qu'il n'y a pas accumulation de masse aux interfaces c'est-à-dire qu'il n'y a pas de masse superficielle attachée à l'interface ( $\rho_i = 0$ ) il en résulte que la quantité de mouvement et les forces volumiques à l'interface sont nulles ( $\rho_i U_i, \rho_i g_i = 0$ ).

On supposera que les termes interfaciaux sont soumis qu'aux tensions superficielles ( $J_i = -\sigma I, \tau_i = 0$ ), on établit alors la relation de saut suivante [20], [21], [25], [27] :

$$\nabla_s \sigma + 2H\sigma n + \sum_{k=1}^2 \dot{m}_k U_k - (P_k I - \tau_k) \cdot n_k = 0 \quad (3.83)$$

La sommation sur les k donne la relation de saut complète :

$$\underbrace{\nabla_s \sigma}_I + \underbrace{2H\sigma n}_{II} + \underbrace{\dot{m}_1 U_1}_{III} + \underbrace{\dot{m}_2 U_2}_{IV} - \underbrace{(P_1 I - \tau_1) \cdot n_1}_V - \underbrace{(P_2 I - \tau_2) \cdot n_2}_{VI} = 0 \quad (3.84)$$

Interprétation physique des différents termes de l'équation (3.84) :

- 🚩 Terme I : est due aux variations de la tension superficielle le long de l'interface, il peut être dû à la température à titre d'exemple,

- ✚ Terme II : a pour cause le rayon de courbure H qui fait en sorte que la résultante des tensions surfaciques soit normale à l'interface,
- ✚ Terme III : flux massique de la phase 1, il exprime le transfert de masse qui se fait de la phase 1 vers la phase 2,
- ✚ Terme IV : flux massique de la phase 2, il exprime le transfert de masse qui se fait de la phase 2 vers la phase 1,
- ✚ Terme V : dû à la pression et aux contraintes dans la phase 1,
- ✚ Terme VI : dû à la pression et aux contraintes dans la phase 2.

**III.7.3.c. Conservation de l'énergie**

Le tableau suivant donne les valeurs appropriées aux grandeurs  $\psi$ ,  $J$  et  $\phi$  ;

Phase	$\psi$	$J$	$\phi$
Phase 1,2 $k = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	$\rho_k E_k,$ $E_k = e_k + \frac{U_k^2}{2}$	$q_k + (P_k I - \tau_k) u_k$	$\phi_k = \rho_k g_k \cdot U_k + Q_k$
Interface i	$E_i$	$q_i - \tau_i U_i - \sigma U_i$	0

**Tableau III.7 : Valeur des grandeurs physiques pour le bilan diphasique d'énergie**

Les substitutions données par le tableau (III.7) faites dans l'équation générale (3.71) donnent l'équation diphasique ci après :

$$\sum_{k=1}^2 \chi_k \left\{ \underbrace{\frac{\partial \rho_k E_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k E_k U_k) + \nabla \cdot (q_k + (P_k I - \tau_k) u_k) - \rho_k g_k \cdot U_k + Q_k}_0 \right\} + \delta_i \left\{ \frac{\partial \rho_i E_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i E_i U_i) + \nabla \cdot (q_i - \tau_i U_i - \sigma U_i) + 2H (q_i - \tau_i U_i - \sigma U_i) n - \sum_{k=1}^2 [\rho_k E_k (U_k - U_i) + (q_k + (P_k I - \tau_k) u_k)] n_k \right\} = C \quad (3.85)$$

Cette équation est l'équation locale instantanée de la conservation de l'énergie.

Relation de saut à l'interface :

$$-\frac{\partial \rho_i E_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_i E_i U_i) - \nabla \cdot (q_i - \tau_i U_i - \sigma U_i) - 2H(q_i - \tau_i U_i - \sigma U_i)n + \sum_{k=1}^2 \dot{m}_k E_k + (q_k + (P_k I - \tau_k) \cdot u_k) \cdot n_k \quad (3.86)$$

$E_i$  est la source d'énergie totale interfaciale.

$e_i$  source d'énergie interne de l'interface [20],[25],[33]

$$\rho_i e_i = \rho_i T_i s_i + \sigma \quad (3.87)$$

$s_i$  est l'entropie de l'interface

$T_i$  température à l'interface

$\sigma$  tension superficielle.

Les termes interfaciaux assurent le couplage entre les équations de bilan des deux phases. C'est ainsi que l'équation (3.86) représente la relation de discontinuité à l'interface de l'énergie.

### III.8 Lois constitutives à l'interface

Comme on vient de le voir, l'extension des équations locales sur tout le volume ainsi que l'établissement des bilans diphasiques a permis d'écrire un certain nombre d'équations pour les inconnues du problème. Cependant, on introduit à chaque étape des inconnues supplémentaires. Il s'agit alors de simplifier le problème en introduisant des approximations, lois constitutives pour les inconnues supplémentaires plus exactement les termes interfaciaux :

La masse surfacique de l'interface est considérée nulle [7],[20],[22],[23] :

$$\rho_i = 0 \quad (3.88)$$

Cette loi constitutive simplifiée considérablement la modélisation des échanges interfaciaux et l'équation (3.78) devient :

$$\sum_{k=1}^2 \dot{m}_k = 0 \quad (3.89)$$

Le transfert de masse de la phase 1 à la phase 2, devra être égal en module et opposé en sens par rapport au transfert qui s'effectue de la phase 2 à la phase 1.

Remarque :

Il faut prendre garde toutefois que les produits  $\rho_i e_i$  et  $\rho_i E_i$ , qui sont des grandeurs surfaciques, restent finis équations (3.86 ; 3.87).

Les contraintes visqueuses interfaciales ne semblent jouer un rôle que lors des coalescences, des ruptures de jets et des phénomènes de films minces par conséquent [20], [21],[23] :

$$\tau_i = 0 \quad (3.90)$$

On peut négliger la conduction thermique interfaciale cela se traduit par  $K_i = 0$  conductivité thermique à l'interface nulle ce qui implique un flux de chaleur nul à l'interface

$$q_i = 0 \quad (3.91)$$

Équation d'état de l'interface :

$$\sigma = \sigma(T_i) \quad (3.92)$$

On néglige l'effet Marangoni (celui-ci intervient surtout lors des coalescences)[11],[23]

$$\nabla \sigma = 0 \quad (3.93)$$

En vu de l'équilibre thermique de l'écoulement (souvent le cas), les températures des phase sont identiques à la surface de séparation [33] :

$$T_k = T_i = T \quad (k=1,2) \quad (3.94)$$

et l'équation (3.87) de l'énergie interne interfaciale devient :

$$\rho_i e_i = \rho_i T s_i + \sigma \quad (3.95)$$

# CHAPITRE

---

# IV

## APPROCHES DE MOYENNE

Les équations locales instantanées peuvent être employées directement dans certains cas diphasiques, nous citerons le domaine de la dynamique des bulles ou des écoulements à film. Mais généralement, elles sont employées sous leurs formes moyennes, c'est le cas dans l'étude des écoulements dans les pipes conduites.

Dans ce qui suit, nous passerons en revue l'approche de moyenne, essentiellement l'approche de moyenne statistique, comme présenté par Fabre [20]. En majeure partie de ce qui va être présenté est issu des travaux de Fabre, nous présenterons également les différents opérateurs de moyenne utilisés en écoulement diphasique, ainsi que leurs compositions [21],[23],[25],[29],[30],[35]

## IV.1. Approches de moyenne

### IV.1.1. Pourquoi moyenner ?

La résolution directe des équations des échanges locaux instantanés ne peuvent être résolues car elle suppose que l'on connaisse à chaque instant la position des interfaces et leurs vitesses de déplacement or cette dernière possède une distribution aléatoire dans le temps et dans l'espace ce qui rend la résolution quasiment impossible.

### IV.1.2. Opérateur de moyenne

Afin de remédier aux problèmes de résolution des équations locales, on moyenne ces dernières, ce qui permettra de reconstituer deux milieux continus fictifs. On introduit pour cela un opérateur de moyenne  $\widetilde{\phantom{x}}$  qui vérifie les conditions de Reynolds usuelles à savoir [34], [35] :

✚ La linéarité :

$$\widetilde{f + h} = \widetilde{f} + \widetilde{h} \quad (4.1)$$

$$\widetilde{\lambda f} = \lambda \widetilde{f} \quad (4.2)$$

✚ L'idempotence :

$$\widetilde{\widetilde{f}} = \widetilde{f} \quad (4.3)$$

$$\widetilde{f h} = \widetilde{f} \widetilde{h} \quad (4.4)$$

✚ La commutativité vis-à-vis des opérateurs de dérivation :

$$\widetilde{\nabla f} = \nabla \widetilde{f} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t} \quad (4.6)$$

$f$  et  $h$  sont deux variables quelconques et  $\lambda$  est une constante.

L'opérateur  $\widetilde{\quad}$ , qui vérifie les conditions de Reynolds, vérifie aussi :

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{\chi}_k &= \alpha_k \\ \widetilde{\delta}_i &= \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$\alpha_k$  est appelé, taux de présence de la phase k et  $\alpha_i$  taux de présence de l'interface.

## IV.2. Moyenne statistique

Dans cette première partie, on s'intéressera principalement à la méthode statistique pour la simulation des écoulements diphasiques, car l'opérateur de moyenne statistique noté  $\overline{\quad}$  vérifie les conditions de Reynolds [20],[34].

Il apparaît donc nécessaire de définir les outils mathématiques qui vont permettre, à partir des équations locales instantanées du mouvement, d'obtenir des équations moyennées statistiquement.

Cependant, l'opérateur de moyenne statistique n'est pas le seul qui vérifie les conditions de Reynolds, on peut avoir recours aux opérateurs de moyenne temporelle  $\overline{\quad}$  ou spatiale  $\langle \quad \rangle$ .

### IV.2.1. Définition et propriétés de la moyenne statistique

Si l'on réalise  $N$  expériences indépendantes portant sur le même écoulement. A chaque expérience, on va enregistrer la valeur de la quantité qui nous intéresse  $\psi$  à la même position et au même temps soit  $\psi_j(r, t)$ .

La moyenne statistique de la quantité  $\psi$  en  $(r, t)$  sera donnée par [20], [23], [34] :

$$\overline{\psi}(r,t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_j(r,t) \right\} \quad (4.8)$$

Où l'indice  $j$  se réfère à  $N$  réalisations indépendantes du phénomène avec des conditions aux limites identiques.

$r$  est le vecteur position.

Remarque : Cette moyenne est aussi appelée moyenne de Reynolds ou moyenne d'ensemble.

Les moyennes des distributions élémentaires sont particulièrement importantes, relation (4.7), en moyenne statistique, elles sont notées :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_k = \overline{\chi_k} \\ \alpha_i = \overline{\delta_i} \end{array} \right\} \quad k=1,2 \quad (4.9)$$

Et l'équation géométrique [20],[23]:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (4.10)$$

#### IV.2.2. Moyennes phasique et diphasique

La moyenne d'une grandeurs extensives (volumiques pour une phase et surfaciques pour l'interface) définie par l'équation (4.8) sont importantes, cependant, ce que l'on mesure couramment, ce sont des, moyennes sur le seul nombre de réalisations où la phase considérée est présente au point de référence. Si, sur  $N$  réalisations en a  $N_1$  où la phase 1 est présente et  $N_2 = N - N_1$  où la phase 2 est présente, le taux de présence, relatif à chacune de nos deux phases est [23] :

$$\alpha_k = \frac{N_k}{N} \quad (4.11)$$

$N_k$  correspond au nombre de réalisations d'événement ou il y a présence de la phase  $k$ .

$$\alpha_1 = \frac{N_1}{N} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{N_2}{N} \quad (4.12)$$

A partir de la, le passage à une description moyennée de l'écoulement diphasique suppose que la prise de moyenne doit être effectuée dans chacune des phases il faut donc moyenner dans les équations locales diphasiques ou phasique, les termes apparaissent sous forme de  $\chi_k \psi_k$  ou  $\delta_i \psi_i$ .

L'application de l'opérateur de moyenne statistique au produit  $\chi_k \psi_k$  donne :

$$\overline{\chi_k \psi_k} = \chi_k \lim_{N_k \rightarrow \infty} \underbrace{\left\{ \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \psi_{jk} \right\}}_{M.PH} \quad (4.13)$$

$\psi_{jk}$  est la valeur correspondante de la grandeur  $\psi_k$  à la réalisation d'ordre  $j$ , tel que  $j$  prend les valeurs ( $j = 1 \dots N_k$ )

Le terme  $M.PH$  est une moyenne qui ne concerne que les réalisations de la grandeur  $\psi_k$  dans la phase  $k$  [20].

Ischii (1975) introduit à cet effet la notion de moyenne eulérienne phasique, elle consiste à pondérer la grandeur à moyenner par la fonction de répartition  $\chi_k$  [21].

On l'a défini par :

$$\overline{\overline{\psi_k}} = \frac{\overline{\chi_k \psi_k}}{\chi_k} \quad \text{et selon (4.9)} \quad \overline{\overline{\psi_k}} = \frac{\overline{\chi_k \psi_k}}{\alpha_k} \quad (4.14)$$

Le nombre de réalisations où le point de référence est sur l'interface est un infiniment petit par rapport à  $N$ , mais pondérées par  $\delta_i$  qui est infiniment grand, les moyennes surfaciques gardent un sens et l'on peut définir une moyenne interfaciale par [20], [23] :

$$\overline{\overline{\psi_i}} = \frac{\overline{\delta_i \psi_k}}{\delta_i} \quad \text{et selon (4.9)} \quad \overline{\overline{\psi_i}} = \frac{\overline{\delta_i \psi_k}}{\alpha_i} \quad (4.15)$$

Si l'on s'intéresse à la grandeur physique diphasique  $\psi$  définie par la relation (3.65), sa moyenne statistique diphasique, s'écrit comme suit :

$$\overline{\overline{\psi}} = \overline{\overline{\chi_1 \psi_1}} + \overline{\overline{\chi_2 \psi_2}} + \overline{\overline{\delta_i \psi_i}} \quad (4.16)$$

$$\overline{\overline{\psi}} = \overline{\overline{\alpha_1 \psi_1}} + \overline{\overline{\alpha_2 \psi_2}} + \overline{\overline{\alpha_i \psi_i}} \quad (4.17)$$

Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  Sont des densités massiques dans chaque phase de la grandeur  $\psi$

$$\psi_1 = \rho_1 \varphi_1, \psi_2 = \rho_2 \varphi_2 \text{ et } \psi_i = \rho_i \varphi_i \quad (4.18)$$

$$\overline{\psi} = \alpha_1 \overline{\rho_1 \varphi_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 \varphi_2} + \alpha_i \overline{\rho_i \varphi_i} \quad (4.19)$$

Et comme l'interface est supposée sans masse on pose par définition :

$$\overline{\rho \varphi} = \alpha_1 \overline{\rho_1 \varphi_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 \varphi_2} \quad (4.20)$$

### IV.2.3. Moyenne statistique des grandeurs physiques [20]

L'application de l'opérateur de moyenne statistique aux grandeurs physiques rencontrées en écoulement phasique donne :

Application à la masse :

$$\overline{\rho} = \alpha_1 \overline{\rho_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2} \quad (4.21)$$

Si l'on a à faire à des masses volumiques constantes, la masse volumique du mélange sera alors régit par la fonction de présence  $\alpha_k$  et sera donnée par :

$$\overline{\rho} = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 \quad \text{car} \quad \overline{\rho_1} = \rho_1 \text{ et } \overline{\rho_2} = \rho_2 \quad (\rho_1, \rho_2 \text{ cste}) \quad (4.22)$$

Application à la quantité de mouvement

$$\overline{\rho U} = \alpha_1 \overline{\rho_1 U_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 U_2} \quad (4.23)$$

Application à l'énergie :

L'énergie cinétique moyenne s'écrit

$$\frac{1}{2} \overline{\rho U^2} = \alpha_1 \frac{1}{2} \overline{\rho_1 U_1^2} + \alpha_2 \frac{1}{2} \overline{\rho_2 U_2^2} \quad (4.24)$$

L'énergie interne moyenne :

$$\overline{\rho e} = \alpha_1 \overline{\rho_1 e_1} + \alpha_2 \overline{\rho_2 e_2} \quad (4.25)$$

### IV.2.4. Grandeurs moyennes et fluctuantes des grandeurs phasiques et diphasiques

On définit à partir de l'opérateur de moyenne statistique, la décomposition de Reynolds d'une quantité quelconque de l'écoulement, en deux parties distinctes [20],[21],[30][34],[35] :

La grandeur phasique  $\varphi_k(r, t)$  s'écrit :

$$\overline{\varphi_k} = \overline{\varphi_k} + \overline{\varphi'_k} \quad (4.26)$$

$\overline{\varphi_k}$  est la moyenne phasique de la grandeur phasique  $\varphi_k$

$\overline{\varphi'_k}$  est la fluctuation phasique de la grandeur phasique  $\varphi_k$

La grandeur diphasique  $\varphi(r, t)$  s'écrit quant à elle :

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi} + \overline{\varphi'} \quad (4.27)$$

$\overline{\varphi}$  est la moyenne statistique de la grandeur diphasique  $\varphi$

$\overline{\varphi'}$  est la fluctuation diphasique de la grandeur diphasique  $\varphi$

De part la définition de l'opérateur de moyenne, (idempotence équation 4.3), les fluctuations phasiques et diphasiques possèdent des fluctuations nulles :

$$\overline{\overline{\varphi'_k}} = \overline{\overline{\varphi'}} = 0 \quad (4.28)$$

Durant notre démarche de développement des équations des grandeurs moyennes, nous croiserons des grandeur qui se présenterons sous la forme  $\overline{\overline{\varphi_k U_k}}, \overline{\overline{\varphi U}}$  il serait intéressant d'appliquer l'opérateur de la moyenne statistique aux produits phasiques et diphasiques :

Les deux grandeurs  $\varphi_k, U_k$  s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\varphi_k} = \overline{\varphi_k} + \overline{\varphi'_k} \\ \overline{U_k} = \overline{U_k} + \overline{U'_k} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{\overline{\varphi_k U_k}} = \overline{\overline{\varphi_k U_k}} + \overline{\overline{\varphi_k U'_k}} + \overline{\overline{\varphi'_k U_k}} \quad (4.29)$$

Les propriétés (4.3, 4.4, 4.28) appliquées à l'équation (4.29), donnent produit phasique :

$$\overline{\overline{\varphi_k U_k}} = \overline{\overline{\varphi_k U_k}} + \overline{\overline{\varphi'_k U'_k}} \quad (4.30)$$

Similairement les grandeurs  $\varphi, U$  et produit diphasique s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\varphi} = \overline{\varphi} + \overline{\varphi'} \\ \overline{U} = \overline{U} + \overline{U'} \end{array} \right\} \quad (4.31)$$

et

$$\overline{\overline{\varphi U}} = \overline{\overline{\varphi U}} + \overline{\overline{\varphi' U'}} \quad (4.32)$$

### IV.2.5. Moyenne de Favre, phasique et diphasique

L'examen des équations de bilan montre cependant, qu'il est plus pratique de définir, pour les écoulements diphasiques du type gaz liquide, un autre opérateur de moyenne plus approprié à certaines grandeurs à savoir: la vitesse et l'énergie du fait que ces écoulements sont caractérisés par la présence d'une phase compressible, ce qui rend les moyennes données par les équations (4.30) et (4.32) très difficile à utiliser, à cet effet pour avoir des équations moyennes de la même forme, Favre a donc défini un nouvel opérateur de moyenne (dit pondéré par la masse) appelé moyenne de Favre ou moyenne barycentrique et noté par  $\widehat{\quad}$  [20],[23],[35],[34] :

La moyenne de Favre diphasique et phasique est donnée respectivement par :

$$\widehat{\varphi} = \frac{\overline{\rho\varphi}}{\overline{\rho}} \quad (4.33)$$

$$\widehat{\varphi}_k = \frac{\overline{\rho_k\varphi_k}}{\overline{\rho_k}} \quad (4.34)$$

À partir de cette nouvelle moyenne, les partie fluctuante de la grandeur phasique  $\varphi_k$  et la grandeur diphasique  $\varphi$  seront données par :

$$\varphi_k'' = \varphi_k - \widehat{\varphi}_k \quad (4.35)$$

$$\varphi'' = \varphi - \widehat{\varphi} \quad (4.36)$$

Comme nous l'avons fait préalablement et de manière analogue, on redéfinit la moyenne au produit mais cette fois à l'aide de l'opérateur de la moyenne barycentrique on a alors :

Pour un produit phasique  $\varphi_k U_k$  la moyenne pondérée par la masse est :

$$\widehat{\widehat{\varphi_k U_k}} = \widehat{\widehat{\varphi_k}} \widehat{\widehat{U_k}} + \widehat{\widehat{\varphi_k'' U_k''}} \quad \text{avec} \quad \overline{\rho_k \varphi_k''} = 0 \quad (4.37)$$

Pour un produit diphasique  $\rho\varphi$  la moyenne est :

$$\widehat{\widehat{\rho\varphi}} = \widehat{\widehat{\rho}} \widehat{\widehat{\varphi}} + \widehat{\widehat{\rho''\varphi''}} \quad \text{avec} \quad \overline{\rho\varphi''} = 0 \quad (4.38)$$

## IV.3 Équations sur les grandeurs moyennes phasiques

Maintenant que nous avons les outils nécessaires pour manier les différents opérateurs de moyenne nous sommes en mesure de formuler les bilans locaux des grandeurs moyennes à commencer par les grandeurs moyennes phasiques.

### IV.3.1. Équation générale de bilan sur les grandeurs moyennes phasiques

Nous retiendrons essentiellement l'équation (3.60) à laquelle nous appliquerons l'opérateur de moyenne statistique comme suit [20],[23] :

$$\overline{\frac{\partial \chi_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \psi_k U_k) + \nabla \cdot (\chi_k J_k) - \chi_k \phi_k + \delta_i [(\psi_k (U_k - U_i) + J_k) \cdot n_k]} = 0 \quad (4.39)$$

La linéarité de l'opérateur de la moyenne statistique donne :

$$\frac{\partial \overline{\chi_k \psi_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\chi_k \psi_k U_k}) + \nabla \cdot (\overline{\chi_k J_k}) - \overline{\chi_k \phi_k} + \left[ \overline{\delta_i \psi_k (U_k - U_i) \cdot n_k} + \overline{\delta_i J_k \cdot n_k} \right] = 0 \quad (4.40)$$

On introduit la notion de moyenne phasique équations (4.14, 4.15):

$$\frac{\partial \overline{\alpha_k \psi_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\alpha_k \psi_k U_k}) + \nabla \cdot (\overline{\alpha_k J_k}) - \overline{\alpha_k \phi_k} + \alpha_i \left[ \overline{\psi_k (U_k - U_i) \cdot n_k} + \overline{J_k \cdot n_k} \right] = 0 \quad (4.41)$$

La relation (4.41) est l'équation générale sur les grandeurs moyennes phasique, il découle de cette dernière, les différentes équations de bilans des grandeurs phasiques.

#### IV.3.1.a. Bilan de masse des grandeurs moyennes phasique

Les substitutions données par le tableau (III.1) donnent :

$$\frac{\partial \overline{\alpha_k \rho_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\alpha_k \rho_k U_k}) + \alpha_i \left[ \overline{\rho_k (U_k - U_i) \cdot n_k} \right] = 0 \quad (4.42)$$

On introduit la moyenne de Favre phasique, donnée par l'équation (4.34):

$$\frac{\partial \overline{\alpha_k \rho_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\alpha_k \rho_k \widehat{U}_k}) + \alpha_i \overline{\dot{m}_k} = 0 \quad (4.43)$$

$\overline{\dot{m}_k}$  représente la densité volumique de la masse moyenne sortant de la phase k ou les apports de masse de la phase k, il peut être soit un terme source soit un terme puits selon son signe [20],[27].

#### IV.3.1.b. Bilan de quantité de mouvement des grandeurs moyennes phasique [20], [27]

A partir de l'équation (4.41), et à l'aide du tableau (III.2), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\alpha_k \rho_k U_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\alpha_k \rho_k U_k \otimes U_k}) + \nabla \cdot [\overline{\alpha_k (P_k I - \tau_k)}] - \overline{\alpha_k \rho_k g_k} \\ + \alpha_i \left[ \underbrace{\overline{\rho_k U_k (U_k - U_i)} \cdot n_k}_{-\dot{m}_k U_k} + \overline{(P_k I - \tau_k) \cdot n_k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

On introduit la moyenne de Favre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\overline{\alpha_k \rho_k \widehat{U}_k})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\alpha_k \rho_k \widehat{U}_k \otimes U_k}) + \nabla \cdot [\overline{\alpha_k (P_k I - \tau_k)}] - \overline{\alpha_k \rho_k g_k} \\ + \alpha_i [\overline{\dot{m}_k U_k} + \overline{(P_k I - \tau_k) \cdot n_k}] = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nous exploitons le moyenne du produit phasique de Favre équation (4.37)

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\overline{\alpha_k \rho_k \widehat{U}_k})}{\partial t} + \nabla \cdot [\overline{\alpha_k \rho_k (\widehat{U}_k \otimes \widehat{U}_k)}] - \nabla \cdot [\overline{\alpha_k \tau_k - \alpha_k \rho_k \widehat{U}_k'' \otimes U_k''}] + \\ \nabla (\overline{\alpha_k P_k}) - \overline{\alpha_k \rho_k g} + \alpha_i \overline{M_k} = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Voir :

$$\frac{\partial (\overline{\alpha_k \rho_k \widehat{U}_k})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\alpha_k \rho_k \widehat{U}_k \otimes \widehat{U}_k}) + \nabla (\overline{\alpha_k P_k}) - \nabla \cdot [\overline{\alpha_k (\tau_k + \tau_k^t)}] - \overline{\alpha_k \rho_k g} + \alpha_i \overline{M_k} = 0 \quad (4.47)$$

Nous avons introduit :

$$\overline{\tau_k^t} = -\overline{\rho_k \widehat{U}_k'' \otimes U_k''} = -\overline{\rho_k U_k'' \otimes U_k''} \quad (4.48)$$

Le tenseur des contraintes turbulentes de Reynolds.

**Remarque :** nous avons omis d'écrire la moyenne des forces volumiques  $g_k$  en raison de à

lois constitutive vue dans le chapitre précédent équation (3.42).

Interprétation physique du terme  $\overline{M_k}$  [30]:

Nous avons :

$$\overline{M_k} = \overline{\dot{m}_k U_k} + \overline{(P_k I - \tau_k) \cdot n_k} = \underbrace{\overline{\dot{m}_k U_k}}_1 + \underbrace{\overline{P_k n_k}}_2 - \underbrace{\overline{\tau_k \cdot n_k}}_3 \quad (4.49)$$

$\overline{M_k}$  est la moyenne des sources interfaciales phasiques, elle se décompose en trois grandeurs moyennes principale :

- ✚ Le terme 1 représente le transfert de quantité de mouvement du au transfert de masse et s'effectuant aux interfaces.
- ✚ Le terme 2 est la pression moyenne liée au transfert interfacial.
- ✚ Le terme 3 correspond à la force de frottement interfacial qui s'exerce sur la phase k.

#### IV.3.1.c. Bilan d'énergie des grandeurs moyennes phasique

L'équation de l'énergie moyennée statistiquement provient de l'équation générale (4.41) en portant les valeurs du tableau (III.3) aux grandeurs  $\psi, J$  et  $\phi$  nous avons [20] :

$$\frac{\partial \overline{\alpha_k \rho_k (e_k + \frac{U_k^2}{2})}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \overline{\alpha_k \rho_k (e_k + \frac{U_k^2}{2}) U_k} \right] + \nabla \cdot \left[ \alpha_k \left( \overline{q_k + (P_k I - \tau_k) U_k} \right) \right] - \overline{\alpha_k \rho_k g_k \cdot U_k} + \alpha_i \left[ \overline{\rho_k (e_k + \frac{U_k^2}{2}) (U_k - U_i) n_k} + \overline{(q_k + (P_k I - \tau_k) U_k) n_k} \right] \quad (4.50)$$

On introduit la notion de moyenne de Favre :

$$\frac{\partial \overline{\alpha_k \rho_k (\widehat{e_k} + \frac{\widehat{U_k \cdot U_k}}{2})}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \overline{\alpha_k \rho_k (\widehat{e_k} U_k + \frac{\widehat{U_k^2 U_k}}{2})} \right] + \nabla \cdot \left[ \alpha_k \left( \overline{q_k + P_k U_k - \tau_k U_k} \right) \right] - \overline{\alpha_k \rho_k g_k \cdot U_k} + \alpha_i \left[ \overline{\dot{m}_k (e_k + \frac{U_k^2}{2})} + \overline{(q_k + (P_k I - \tau_k) U_k) n_k} \right] = 0 \quad (4.51)$$

Nous faisons appel aux produits phasiques moyennés par la moyenne statistique équation (4.30) et aussi par la moyenne de Favre équation (4.37) :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{\alpha_k \rho_k \left( \widehat{e}_k + \frac{\widehat{U}_k \widehat{U}_k + \widehat{U}_k' \widehat{U}_k'}{2} \right)}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \overline{\alpha_k \rho_k \left( \widehat{e}_k \widehat{U}_k + \frac{\widehat{U}_k \widehat{U}_k^2}{2} \right)} \right] \\
& + \nabla \cdot \left[ \overline{\alpha_k \rho_k \left( \widehat{e}_k' \widehat{U}_k' + \frac{\widehat{U}_k' \widehat{U}_k'^2}{2} \right)} \right] + \nabla \cdot \left[ \overline{\alpha_k (q_k + P_k U_k - \tau_k U_k)} \right] \\
& + \nabla \cdot \left[ \overline{\alpha_k (P_k U_k' - \tau_k' U_k')} \right] + \alpha_k \left[ \overline{\dot{m}_k \left( e_k + \frac{U_k^2}{2} \right) + (q_k + (P_k I - \tau_k) U_k) n_k} \right] = 0 \quad (4.52)
\end{aligned}$$

On regroupe les termes, et on aboutit à l'équation sur les grandeurs moyennes phasique du bilan local de l'énergie :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left[ \overline{\alpha_k \left( \rho_k \left( \widehat{e}_k + \frac{\widehat{U}_k^2}{2} \right) + \frac{\widehat{U}_k'^2}{2} \right)} \right]}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \overline{\alpha_k \rho_k \left( \widehat{e}_k + \frac{\widehat{U}_k^2}{2} \right) \widehat{U}_k} \right] + \nabla \cdot \left[ \overline{\alpha_k (q_k + P_k U_k - \tau_k U_k)} \right] \\
& - \overline{\alpha_k g_k \cdot \rho_k U_k} + \nabla \cdot \left\{ \overline{\alpha_k \left[ \rho_k \left( \widehat{e}_k' + \frac{\widehat{U}_k' \widehat{U}_k'^2}{2} \right) + P_k U_k' - \tau_k' U_k' \right]} \right\} + \alpha_k \overline{\xi_k} = 0 \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Le terme  $\overline{\xi_k}$  est source d'échanges interfaciaux :

$$\overline{\xi_k} = \left[ \overline{\dot{m}_k \left( e_k + \frac{U_k^2}{2} \right) + (q_k + (P_k I - \tau_k) U_k) n_k} \right] = \underbrace{\overline{\dot{m}_k \left( e_k + \frac{U_k^2}{2} \right)}}_1 + \underbrace{\overline{q_k n_k}}_2 + \underbrace{\overline{P_k U_k n_k}}_3 - \underbrace{\overline{(\tau_k U_k) n_k}}_4 \quad (4.54)$$

Interprétation physique du terme d'échange interfacial de l'énergie [27], [30] :

- ✚ Le terme 1 représente le transfert d'énergie dû au transfert de masse.
- ✚ Le terme 2 est le transfert de chaleur, interfacial moyen.
- ✚ Le terme 4 terme source d'énergie, pression moyenne liée au transfert interfacial
- ✚ Le terme 4 représente la force de frottement qui s'exerce sur le mélange diphasique au niveau de l'interface.

### IV.3.2. Équation générale de bilan sur les grandeurs moyennes diphasiques

Comme nous l'avons fait pour les grandeurs moyennes phasiques nous allons développer

les bilans moyens diphasiques.

L'obtention des équations de bilans sur les grandeurs diphasiques se fait à partir de l'équation clé (3.71) que nous allons développer afin de formuler l'équation générale de bilan sur les grandeurs moyennes diphasiques [20].

La combinaison des équations (3.60, 3.71) nous permet d'écrire:

$$\sum_{k=1}^2 \left[ \frac{\partial \chi_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \psi_k U_k) + \nabla \cdot (\chi_k J_k) - \chi_k \phi_k + \delta_i [(\psi_k (U_k - U_i) + J_k) \cdot n_k] \right] + \delta_i \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi_i U_i) + \nabla \cdot J_i + 2 H J_i n - \phi_i - \sum_{k=1}^2 (\psi_k (U_k - U_i) + J_k) \cdot n_k \right] = 0 \quad (4.55)$$

On simplifie les termes qui s'annulent entre eux  $(\sum_{k=1}^2 \delta_i [(\psi_k (U_k - U_i) + J_k) \cdot n_k])$ :

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \chi_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \psi_k U_k) + \nabla \cdot (\chi_k J_k) - \chi_k \phi_k + \delta_i \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi_i U_i) + \nabla \cdot J_i + 2 H J_i n - \phi_i \right] = 0 \quad (4.56)$$

Nous moyennons à présent ce qui résulte équation (4.56) :

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \chi_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \psi_k U_k) + \nabla \cdot (\chi_k J_k) - \chi_k \phi_k + \delta_i \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi_i U_i) + \nabla \cdot J_i + 2 H J_i n - \phi_i \right] = 0 \quad (4.57)$$

La linéarité de l'opérateur de moyenne statistique donne:

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \overline{\chi_k \psi_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\chi_k \psi_k U_k}) + \nabla \cdot (\overline{\chi_k J_k}) - \overline{\chi_k \phi_k} + \left[ \frac{\delta_i \overline{\partial \psi_i}}{\partial t} + \overline{\delta_i \nabla \cdot (\psi_i U_i)} + \overline{\delta_i \nabla \cdot J_i} + \delta_i \overline{2 H J_i n} - \overline{\delta_i \phi_i} \right] = 0 \quad (4.58)$$

La moyenne pondérée par la fonction de présence donne des grandeurs de la forme  $\overline{\alpha_k \psi_k}$ , équation (4.14), il advient:

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \overline{\alpha_k \psi_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\alpha_k \psi_k U_k}) + \nabla \cdot (\overline{\alpha_k J_k}) - \overline{\alpha_k \phi_k} + \alpha_i \left[ \frac{\overline{\partial \psi_i}}{\partial t} + \overline{\nabla \cdot (\psi_i U_i)} + \overline{\nabla \cdot J_i} + 2 \overline{H J_i n} - \overline{\phi_i} \right] = 0 \quad (4.59)$$

**Problème de dérivation:**

Si  $D$  est un des opérateurs de dérivation intervenant dans cette relation. On aura alors des termes de la forme  $\chi_k D\varphi_k$ . Notons que l'opérateur de moyenne phasique ne commute pas en général avec tout opérateur de dérivation  $D$ , ainsi [20],[22] :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\chi_k D\varphi_k} &= \alpha_k \overline{D\varphi_k} \\ \overline{D\varphi_k} &\neq D\overline{\varphi_k} \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

On notera que la moyenne statistique des termes tels que  $\nabla \cdot \delta_i \psi_i$  conduit aussi à l'inégalité :

$$\overline{\overline{\nabla \cdot \delta_i \psi_i}} \neq \nabla \cdot \overline{\delta_i \psi_i} \quad (4.61)$$

**IV.3.2.a. Bilan de masse des grandeurs moyennes diphasique**

A partir de l'équation (4.59) et du tableau III.5, il s'écrit :

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\rho_k U_k}) + \alpha_i \left[ \frac{\partial \overline{\rho_i}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho_i U_i}) \right] \quad (4.62)$$

Où encore:

$$\sum_{k=1}^2 \left[ \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\rho_k \widehat{U}_k}) \right] + \alpha_i \left[ \frac{\partial \overline{\rho_i}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho_i U_i}) \right] \quad (4.63)$$

et l'équation (4.21), de la moyenne statistique de la densité du mélange donne:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho \widehat{U}}) + \alpha_i \left[ \frac{\partial \overline{\rho_i}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho_i U_i}) \right] = 0 \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho \widehat{U}}) + \alpha_i \overline{\dot{m}_i} = 0 \quad (4.65)$$

$\dot{m}_i$  est la masse surfacique [23],[27].

**IV.3.2.b. Bilan de la quantité de mouvement grandeurs moyennes diphasique**

Il s'écrit [20],[27]:

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \overline{\alpha_k \rho_k U_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\alpha_k \rho_k U_k \otimes U_k}) + \nabla \cdot [\overline{\alpha_k (P_k I - \tau_k)}] - \overline{\alpha_k \rho_k g_k} - \alpha_i \left[ -\frac{\partial \overline{\rho_i U_i}}{\partial t} - \nabla \cdot (\overline{\rho_i U_i \otimes U_i}) + \nabla \cdot (\overline{\sigma I + \tau_i}) + 2H(\overline{\sigma I + \tau_i})n + \overline{\rho_i g_i} \right] = 0 \quad (4.66)$$

Application de la moyenne de Fabre:

$$\sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\partial (\overline{\alpha_k \rho_k \widehat{U}_k})}{\partial t} + \nabla \cdot [\overline{\alpha_k \rho_k (\widehat{U}_k \otimes \widehat{U}_k)}] - \nabla \cdot [\overline{\alpha_k \tau_k - \alpha_k \rho_k \widehat{U}_k'' \otimes \widehat{U}_k''}] + \nabla (\overline{\alpha_k P_k}) - \overline{\alpha_k \rho_k g} \right\} - \alpha_i \left[ -\frac{\partial \overline{\rho_i U_i}}{\partial t} - \nabla \cdot (\overline{\rho_i U_i \otimes U_i}) + \nabla \cdot (\overline{\sigma I + \tau_i}) + 2H(\overline{\sigma I + \tau_i})n + \overline{\rho_i g_i} \right] = 0 \quad (4.67)$$

La sommation sur les k fait apparaître les grandeurs diphasique d'après les équations (4.17; 4.19):

$$\underbrace{\frac{\partial (\overline{\rho \widehat{U}})}{\partial t}}_1 + \underbrace{\nabla \cdot [\overline{\rho (\widehat{U} \otimes \widehat{U})}]}_2 - \underbrace{\nabla \cdot [\overline{\tau + \tau^t}]}_3 + \underbrace{\frac{\nabla \overline{P}}{4}}_4 - \underbrace{\overline{\rho g}}_5 - \underbrace{\overline{\alpha_i M_i}}_6 = 0 \quad (4.68)$$

- ✚ Le premier terme représente l'effet local de variation temporelle.
- ✚ Le deuxième terme représente le transport par convection dans le mouvement global.
- ✚ Le troisième  $\overline{\tau} = \alpha_1 \overline{\tau_1} + \alpha_2 \overline{\tau_2}$  est la moyenne, pondérée par les taux de présence de chaque phase, des flux moléculaires (effets de transport de quantité de mouvement par la viscosité).

$\overline{\tau^t}$  est le tenseur de Reynolds diphasique du a la turbulence.

$$\overline{\tau^t} = \alpha_1 \overline{\tau_1^t} + \alpha_2 \overline{\tau_2^t} = -\overline{\rho \widehat{U}'' \otimes \widehat{U}''} \quad (4.69)$$

- ✚ Le quatrième terme est la valeur moyenne de la pression diphasique, elle est pondérée par le taux de présence des phases.
- ✚ Le cinquième terme est l'effet moyen des forces volumiques.
- ✚ Le sixième terme  $\overline{M_i}$  regroupe les termes d'interface du aux échanges entre les deux phases dans le bilan de la quantité de mouvement.

### IV.3.2.c. Bilan d'énergie de grandeurs moyennes diphasique

L'équation générale (4.59) appliquée aux grandeur qui interviennent dans les bilans d'énergie (tableau III.7) donne tableau :

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \alpha_k \rho_k (e_k + \frac{U_k^2}{2})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \alpha_k \rho_k (e_k + \frac{U_k^2}{2}) U_k \right] + \nabla \cdot (\alpha_k q_k + (P_k I - \tau_k) U_k) - \alpha_k \rho_k g_k U_k + \alpha_i \left\{ \frac{\partial \rho_i E_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i E_i U_i) + \nabla \cdot (q_i - \tau_i U_i - \sigma U_i) + 2 H (q_i - \tau_i U_i - \sigma U_i) n \right\} = 0 \quad (4.70)$$

Une écriture plus simple se fait à l'aide des grandeurs diphasiques nous avons ainsi [20] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho} \left( \hat{e} + \frac{\widehat{U}^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \bar{\rho} \left( \hat{e} + \frac{\widehat{U}^2}{2} \right) \widehat{U} \right] + \nabla \cdot (\bar{q} + \overline{P U} - \overline{\tau U}) - \bar{\rho} \widehat{U} g + \nabla \cdot \left[ \rho (e'' \widehat{U}'' + \frac{\widehat{U}''^2 \widehat{U}''}{2}) + \overline{P' U'} - \overline{\tau' U'} \right] + \alpha_i \bar{\xi}_i = 0 \quad (4.71)$$

Les termes de l'équation (4.71) on la même signification que ceux de l'équation des grandeurs phasiques moyennes équation (4.53), mais cette dernière est exprimée en grandeur moyenne diphasique qui inclut les deux phases mis à part le terme interfacial  $\bar{\xi}_i$  source d'énergie interfaciale diphasique.

## IV.4. Raccordement des équations aux interfaces [20],[21],[22],[27]

Les termes interfaciaux assurent le couplage entre les équations de bilan des deux phases.

✚ Raccordement pour l'équation de continuité

$$\sum_{k=1}^2 \bar{\dot{m}}_k = \bar{\dot{m}}_1 + \bar{\dot{m}}_2 = \bar{\dot{m}}_i \quad (4.72)$$

La prise en compte de l'équation constitutive (3.88) donne :

$$\sum_{k=1}^2 \bar{\dot{m}}_k = \bar{\dot{m}}_1 + \bar{\dot{m}}_2 = 0 \quad (4.73)$$

✚ Raccordement pour la quantité de mouvement :

$$\sum_{k=1}^2 \overline{\overline{M_k}} = \overline{\overline{M_1}} + \overline{\overline{M_2}} = \overline{\overline{M_i}} \quad (4.74)$$

Afin de simplifier le terme  $\overline{\overline{M_i}}$  nous faisons souvent appel aux équations constitutives d'interface (3.88 ; 3.89) le terme  $\overline{\overline{M_i}}$  devient :

$$\overline{\overline{M_i}} = \overline{\overline{\nabla_s \sigma}} + \overline{\overline{2H\sigma n}} \quad (4.75)$$

✚ Et pour l'énergie :

$$\sum_{k=1}^2 \overline{\overline{\xi_k}} = \overline{\overline{\xi_1}} + \overline{\overline{\xi_2}} = \overline{\overline{\xi_i}} \quad (4.76)$$

On utilise l'ensemble des équations constitutives propre à l'interface (&III.8), pour écrire le terme source d'énergie interfaciale sous une autre forme plus accessible, que voici :

$$\overline{\overline{\xi_i}} = \overline{\overline{\frac{\partial \rho_i e_i}{\partial t}}} + \overline{\overline{\nabla \cdot (\rho_i E_i U_i)}} - \overline{\overline{\nabla \cdot \sigma U_i}} - \overline{\overline{2H \sigma U_i n}} \quad (4.77)$$

## IV.5. Opérateur de moyenne spatiale

Un champ de variables instantanées peut être moyenné spatialement de différente manière sur un segment, une surface ou un volume ; à titre d'exemple, celui d'un écoulement en conduite peut être moyenné à travers le rayon de la conduite, son périmètre, sa section droite ou encore sur un volume de control fini, représentatif de l'écoulement à l'intérieur de la conduite [10], [22], [32].

### IV.5.1. Moyenne sur une variété, phasique et diphasique

On définit *Dim* comme étant la dimension spatiale de la variété sur laquelle nous moyennons nos grandeur ainsi :

- ✚ *Dim* est un segment *l* lorsqu'on moyenne sur un espace à une dimension (*Dim* = *l*)
- ✚ *Dim* est une aire *A* lorsqu'on moyenne sur un espace à deux dimensions (*Dim* = *A*)
- ✚ *Dim* est un volume *V* dans le cas où nous moyennons sur un espace à trois dimensions (*Dim* = *V*)

La moyenne spatiale sur une variété à une, deux ou trois dimensions d'une grandeur physique diphasique  $\psi$ , quelconque est définie comme suit [10]:

$$\langle \psi \rangle_{Dim} = \frac{1}{Dim} \int_{Dim} \psi dDim \quad (4.78)$$

Et la moyenne phasique spatiale d'une grandeur physique phasique  $\psi_k$  sur une variété est :

$$\langle \langle \psi_k \rangle \rangle_{Dim} = \frac{1}{Dim_k} \int_{Dim_k} \psi_k dDim \quad (4.79)$$

Ces deux dernières s'écrivent dans chaque cas de variétés comme suit :

✚ Espace à une dimension (segment) :

Moyenne diphasique linéaire :

$$\langle \psi \rangle_l = \frac{1}{l} \int_l \psi dl \quad (4.80)$$

Moyenne phasique linéaire:

$$\langle \langle \psi_k \rangle \rangle_l = \frac{1}{l_k} \int_{l_k} \psi_k dl \quad (4.81)$$

où  $l_k$  est la longueur cumulée du segment occupé par la phase k et  $l$  la longueur totale.

✚ Espace à deux dimensions (aire) [11] :

Moyenne diphasique surfacique

$$\langle \psi \rangle_A = \frac{1}{A} \int_A \psi dA \quad (4.82)$$

Moyenne phasique surfacique :

$$\langle \langle \psi_k \rangle \rangle_A = \frac{1}{A_k} \int_{A_k} \psi_k dA \quad (4.83)$$

$A_k$  est l'aire cumulée occupée par la phase k et  $A$  la surface totale.

✚ Espace à trois dimensions (volume) :

Moyenne diphasique volumique [25], [29]

$$\langle \psi \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \psi dV \quad (4.84)$$

Moyenne phasique volumique :

$$\langle \langle \psi_k \rangle \rangle_V = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} \psi_k dV \quad (4.85)$$

$V_k$  est le volume occupé par la phase k et  $V$  le volume total du volume de Contrôle.

#### IV.5.2. Moyenne spatiale des grandeurs interfaciales

Dans le processus de moyenne nous rencontrons des grandeurs interfaciales  $\psi_i$ , la moyenne se fait sur une variété de moins [10],[23].

✚ Moyenne surfacique d'une grandeur interfaciale :

$$\langle\langle\psi_i\rangle\rangle_A = \frac{1}{l_i} \int_{l_i} \psi_i dl \quad (4.86)$$

Où  $l_i$  est le segment qu'occupe l'interface.

✚ Moyenne volumique d'une grandeur interfaciale :

$$\langle\langle\psi_i\rangle\rangle_V = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \psi_i dA \quad (4.87)$$

$A_i$  est l'aire interfaciale.

#### IV.5.3. Taux de présence moyen spatial de phase

On définit la fraction spatiale instantanée comme étant la moyenne spatiale de la fonction de répartition  $\chi_k$  elle est donnée par [6], [10], [11], [35] :

$$R_k = \langle\chi_k\rangle_{Dim} = \frac{1}{Dim} \int_{Dim} \chi_k(M,t) dDim = \frac{Dim_k}{Dim} \quad (4.88)$$

à travers un segment, elle s'écrit :

$$R_k = \langle\chi_k\rangle_l = \frac{1}{l} \int_l \chi_k(M,t) dl = \frac{l_k}{\sum_{k=1}^2 l_k} \quad (4.89)$$

à travers une surface, on a :

$$R_k = \langle\chi_k\rangle_A = \frac{1}{A} \int_A \chi_k(M,t) dA = \frac{A_k}{\sum_{k=1}^2 A_k} \quad (4.90)$$

à travers un volume :

$$R_k = \langle \chi_k \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \chi_k(M,t) dV = \frac{V_k}{\sum_{k=1}^2 V_k} \quad (4.91)$$

et l'équation géométrique est donnée par :

$$\sum_{k=1}^2 R_k = R_1 + R_2 = 1 \quad (4.92)$$

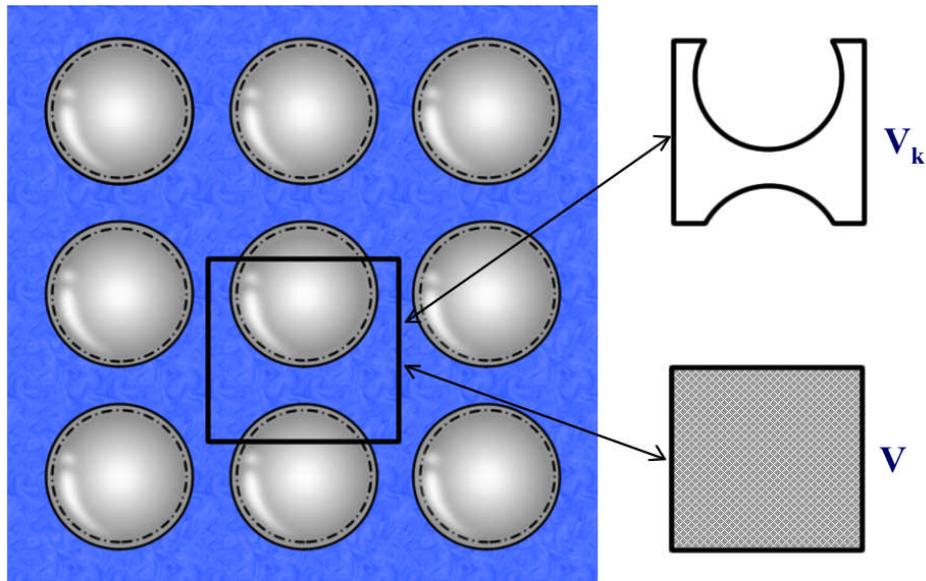


Figure IV.1 : Moyenne volumique.

#### IV.5.4. Taux de présence moyen spatial de l'interface

Dans le cas de la moyenne surfacique, le taux de présence moyen surfacique de l'interface est donné par [23] :

$$R_i = \frac{l_i}{A} \quad (4.93)$$

Nous noterons que  $R_i$  est aussi la moyenne de la distribution de Dirac à l'interface :

$$R_i = \langle \delta_i \rangle_l \quad (4.94)$$

Si l'on moyenne sur un volume, le taux de présence moyen volumique de l'interface est donné par :

$$R_i = \frac{A_i}{V} \quad (4.95)$$

Le taux de présence moyen volumique est la moyenne de la distribution de Dirac :

$$R_i = \langle \delta_i \rangle_A \quad (4.96)$$

#### IV.5.5. Moyenne spatiale pondérée par la fonction de présence

On peut moyenner spatialement la grandeur diphasique  $\psi$  définie par l'équation (3.65) ; à partir des moyennes phasiques spatiale et des taux de présence de phase spatiaux, à l'aide des relations suivantes [10],[11],[25],[29],[32] :

- Moyenne surfacique :

$$\left. \begin{aligned} \langle \langle \psi_k \rangle \rangle_A &= \frac{\langle \chi_k \psi_k \rangle_A}{\langle \chi_k \rangle_A} = \frac{\langle \chi_k \psi_k \rangle_A}{\langle R_k \rangle_A} \\ \langle \langle \psi_i \rangle \rangle_A &= \frac{\langle \delta_i \psi_i \rangle_A}{\langle \delta_i \rangle_A} = \frac{\langle \delta_i \psi_i \rangle_A}{\langle R_i \rangle_A} \end{aligned} \right\} \quad (4.97)$$

- Moyenne volumique :

$$\left. \begin{aligned} \langle \langle \psi_k \rangle \rangle_V &= \frac{\langle \chi_k \psi_k \rangle_V}{\langle \chi_k \rangle_V} = \frac{\langle \chi_k \psi_k \rangle_V}{\langle R_k \rangle_V} \\ \langle \langle \psi_i \rangle \rangle_V &= \frac{\langle \delta_i \psi_i \rangle_V}{\langle \delta_i \rangle_V} = \frac{\langle \delta_i \psi_i \rangle_V}{\langle R_i \rangle_V} \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

De cette manière, en utilisant (4.96), on exprime la moyenne diphasique pour la moyenne surfacique comme :

$$\langle \psi \rangle_A = \langle \chi_1 \psi_1 + \chi_2 \psi_2 + \delta_i \psi_i \rangle_A = R_1 \langle \langle \psi_1 \rangle \rangle_A + R_2 \langle \langle \psi_2 \rangle \rangle_A + R_i \langle \langle \psi_i \rangle \rangle_A \quad (4.99)$$

Et (4.97), nous donne pour la moyenne volumique :

$$\langle \psi \rangle_V = \langle \chi_1 \psi_1 + \chi_2 \psi_2 + \delta_i \psi_i \rangle_V = R_1 \langle \langle \psi_1 \rangle \rangle_V + R_2 \langle \langle \psi_2 \rangle \rangle_V + R_i \langle \langle \psi_i \rangle \rangle_V \quad (4.100)$$

## IV.6. Opérateur de moyenne temporelle

### IV.6.1. Opérateur de moyenne temporelle, phasique et diphasique

Il est possible de moyenniser les équations locales instantanées phasiques et diphasiques dans le temps, car l'opérateur de moyenne temporelle  $\overline{\quad}$ , vérifie les conditions de l'opérateur général de moyenne  $\widetilde{\quad}$ .

On définit les moyennes temporelles, diphasiques et phasiques de la grandeur physique  $\psi$  :

Moyenne diphasique temporelle [10],[11],[21]:

$$\widehat{\psi} = \frac{1}{T} \int_{[T]} \psi dt \quad (4.101)$$

Moyenne phasique temporelle :

$$\widehat{\psi}_k = \frac{1}{T_k} \int_{[T_k]} \psi_k dt \quad (4.102)$$

### IV.6.2. Taux de présence de phase et d'interface

Le taux de présence local de phase est considéré comme étant le rapport de la durée d'observation de la phase  $k$ ,  $T_k$  sur une période d'observation de l'écoulement global  $T$  (Figure VI.2). Il est défini en un point quelconque de la conduite par la moyenne temporelle de la fonction de présence [10],[11],[21] :

$$\alpha_k = \overline{\chi_k(M, t)} = \frac{T_k}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_k(M, t) dt \quad (4.103)$$

Où  $T$  est la période d'observation de l'écoulement globale et  $\chi_k(M, t)$  la fonction de présence.

Le taux de présence local à l'interface est :

$$\alpha_i = \overline{\delta_i(M, t)} = \frac{T_i}{T} \quad (4.104)$$

$T_i$  est le temps cumulé des passages à l'interface [21].

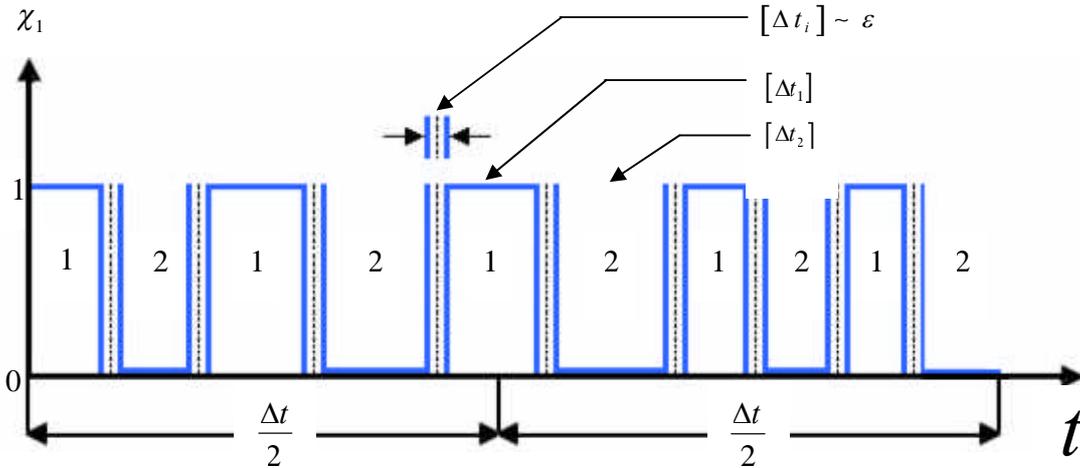


Figure IV.2 : Intervalles de temps en écoulements diphasiques

$[\Delta t_i]$  temps de passage a travers l'interface.

$[\Delta t_1]$  temps de passage de la phase 1

$[\Delta t_2]$  temps de passage de la phase 2

### IV.6.3. Moyenne temporelle pondérée par le taux de présence local

Nous pouvons aboutir aux moyennes temporelles diphasiques[21], en utilisant les moyennes phasiques et les taux de présence de phase et d'interface locaux, grâce aux équations :

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\psi}_k &= \frac{\widehat{\chi_k \psi_k}}{\widehat{\chi_k}} = \frac{\widehat{\chi_k \psi_k}}{\alpha_k} \\ \widehat{\psi}_i &= \frac{\widehat{\delta_i \psi_i}}{\widehat{\delta_i}} = \frac{\widehat{\delta_i \psi_i}}{\alpha_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.105)$$

Il en résulte la relation entre moyenne diphasique et moyennes phasique suivante:

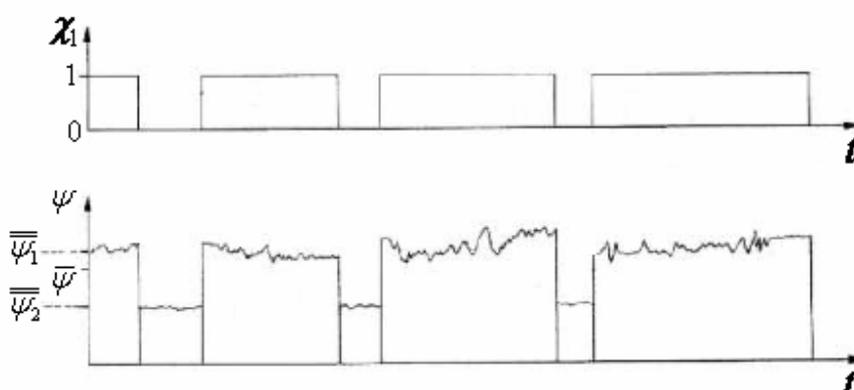
$$\widehat{\psi} = \widehat{\chi_1 \psi_1 + \chi_2 \psi_2 + \delta_i \psi_i} = \alpha_1 \widehat{\psi}_1 + \alpha_2 \widehat{\psi}_2 + \alpha_i \widehat{\psi}_i \quad (4.106)$$

## IV.7. Identification et commutativité des opérateurs de moyenne

### IV.7.1. Identification des opérateurs de moyenne

Lorsque les trois opérateurs de moyenne ‘‘ statistique, spatial et temporel ’’ vérifient certaines

conditions, ils permettent d'aboutir à des équations formellement équivalentes [22], et il est ainsi inutile de préciser la nature de l'opérateur choisi, ceci est explicité dans le cas d'écoulement stationnaire où il y a identification entre moyenne statistique et temporelle, et aussi dans le cas d'écoulement homogène, où moyenne spatiale et temporelle sont confondues [20].



**Figure IV.3 : Moyennes phisiques statistiques en écoulement stationnaire**

#### IV.7.2. Moyennes composées

Dans le cas où les conditions d'écoulement ne permettent pas les identifications citées, on est amené à combiner entre les moyennes, afin de formuler des moyennes doubles, il en résulte donc, des moyennes, spatio-temporelles ou statistiques spatiales

Les opérateurs de moyenne peuvent commuter, c'est ainsi qu'il est possible de moyennner à la fois dans le temps et dans l'espace (espace-temps)[10], ou statistiquement sur une variété spatiale (statistique-espace) [6],[23],[36].

La combinaison entre l'opérateur de moyenne spatial et l'opérateur de moyenne statistique, et celle entre l'opérateur de moyenne temporelle et l'opérateur de la moyenne spatiale, n'est valable que pour les grandeurs définies sur tout le domaine d'écoulement, des termes de la forme  $(\psi, \chi_k \psi_k, \chi_i \delta_i)$ , elle se fait à partir des relations suivantes :

##### IV.7.2.a. Moyenne double statistique espace [23],[36]

Le processus de cette moyenne double, découle de relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\langle \chi_k \psi_k \rangle} &= \overline{\langle \chi_k \psi_k \rangle} \\ \overline{\langle \delta_i \psi_i \rangle} &= \overline{\langle \delta_i \psi_i \rangle} \end{aligned} \right\} \quad (4.107)$$

Les couples d'équations (4.14 ; 4.16) ; (4.96 ; 4.97) nous, permettent d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \overline{R_k \langle \langle \psi_k \rangle \rangle} &= \langle \alpha_k \overline{\psi_k} \rangle \\ \overline{R_i \langle \langle \psi_i \rangle \rangle} &= \langle \alpha_i \overline{\psi_i} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.108)$$

Et si  $\psi$  est une grandeur diphasique donnée par (3.65), il est alors clair que :

$$\langle \overline{\psi} \rangle = \langle \overline{\psi} \rangle \quad (4.109)$$

Remarque :  $\langle \quad \rangle$  désigne l'opérateur de moyenne spatiale, (segment, surface, volume)

#### IV.7.2.b Moyenne double espace- temps [10], [11]

La moyenne double, espace temps se développe à partir des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\langle \chi_k \psi_k \rangle} &= \langle \overline{\chi_k \psi_k} \rangle \\ \overline{\langle \delta_i \psi_i \rangle} &= \langle \overline{\delta_i \psi_i} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.110)$$

Les couples d'équations (4.96 ; 4.97) ; (4.104) nous, permettent d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \overline{R_k \langle \langle \psi_k \rangle \rangle} &= \langle \alpha_k \widehat{\psi_k} \rangle \\ \overline{R_i \langle \langle \psi_i \rangle \rangle} &= \langle \alpha_i \widehat{\psi_i} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.111)$$

Pour une grandeur diphasique définie par l'équation (3.65), on a :

$$\langle \widehat{\psi} \rangle = \langle \widehat{\psi} \rangle \quad (4.112)$$



## **DEUXIEME PARTIE**

# CHAPITRE

---

V

APPLICATION

Pour mettre en oeuvre la théorie présentée dans les précédents chapitres, nous allons effectuer une application, qui consiste à étudier d'une part, l'écoulement diphasique pétrole gaz tout au long de son extraction, et de suivre d'autre part, l'évolution des différents paramètres diphasiques.

### **V.1. Rappel sur la genèse des hydrocarbures [37]**

Lorsque les forages de reconnaissance confirment la présence d'un gisement et que les études économiques s'avèrent positives, la construction de la plate-forme pétrolière peut débuter.

L'assemblage de milliers de tonnes d'acier se fait sur la terre ferme. Une fois terminés, le pied puis la plate-forme sont transportés sur des barges géantes tirées par des bateaux jusqu'au site. Il faut deux à trois ans et des milliers d'hommes pour terminer les travaux.

Il y a plusieurs millions d'années, de nombreuses régions (aujourd'hui émergées) étaient sous l'eau. Et c'est précisément dans ces mers, lacs et marécages du passé que débute la formation des hydrocarbures. Dans ce milieu flottent de nombreux résidus d'animaux morts et de végétaux. Au fil du temps, ces débris se dégradent, se fragmentent et viennent se déposer sur le fond. En règle générale, les bactéries vivant dans les fonds marins consomment ces résidus d'anciens organismes vivants. Mais il existe certaines zones, celles de grandes profondeurs par exemple, où l'oxygène se fait rare. Et là où il y a trop peu d'oxygène, il n'y a plus de bactéries. Conséquence : les débris d'organismes restent intacts sur le fond, se mélangeant aux sédiments minéraux (grès, sable, argile, etc.)

Ce mélange, appelé roche mère, constitue la matrice dans laquelle se développeront le pétrole et le gaz naturel au cours d'un processus de plusieurs millions d'années.

Au fil du temps, les particules de sédiment en suspension dans l'eau se déposent sur le fond et recouvrent la roche mère (mélange de matière organique et de sédiments). Au bout de plusieurs dizaines de millions d'années, la roche mère se retrouve enfouie sous des tonnes de sédiments et s'enfonce dans le sous-sol marin.

Cette descente dans les entrailles de la Terre s'accompagne également d'une augmentation de la température. La matière organique emprisonnée se transforme progressivement en hydrocarbures.

En fonction de la profondeur, de la température et de la nature de la matière organique, les hydrocarbures obtenus sont solides (charbon), gazeux (gaz naturel) ou liquide (pétrole).

Le gaz naturel et le pétrole, formés à partir de la roche mère en profondeur, sont des fluides moins denses que les roches du milieu. Cette différence de densité entraîne dès lors leur remontée vers la surface. Ils s'infiltreront dans les microfissures, les failles et les roches perméables. Le chemin emprunté jusqu'à l'air libre dépend alors du type de roches rencontrées, de leur perméabilité et de leur porosité. S'il s'agit de sable ou du calcaire, les hydrocarbures s'y infiltreront et traverseront sans difficulté.

Lorsque les hydrocarbures ne rencontrent aucun obstacle, ils peuvent ainsi apparaître en surface. Les constituants les plus légers s'évaporent et les plus lourds se présentent sous une forme très pâteuse. Lors de leur remontée en surface, le gaz et le pétrole peuvent rencontrer des roches imperméables, comme par exemple une nappe d'argile ou de sel. Si cette barrière rocheuse est courbe, plissée par des mouvements de terrain antérieurs, alors les hydrocarbures s'accumulent dans la roche située juste en dessous de cette cloche. Cette roche dans laquelle sont emprisonnés gaz et pétrole est appelée une roche réservoir. La surface de ce gisement peut s'étendre sur des dizaines voire des centaines de kilomètres carrés. Son épaisseur peut atteindre quelques centaines de mètres.

**C'est dire que, si l'on se réfère à la typologie des écoulements diphasiques, on se rend compte qu'ils trouvent un champ d'application privilégié dans le domaine des hydrocarbures**

## **V.2. Le pétrole et le diphasique Positionnement du problème :**

Lors de l'extraction de pétrole brut d'un réservoir, l'écoulement est diphasique (liquide/gaz). Ceci est dû à la composition complexe du pétrole ; en effet, on y trouve à la fois des composés faiblement carbonés ( $\text{CH}_4$ ,  $\text{CO}_2$ ...) et des composés à longue chaîne carbonée de type C10, C11...[38] qui ne se trouvent pas dans la même phase à une pression donnée. En effet l'huile, sous pression dans le réservoir, est formée de composants dont les températures d'ébullition et les pressions de vapeur saturante sont très différentes. On observera donc un changement de phase et l'apparition d'une phase gazeuse, l'écoulement du pétrole sera diphasique tout au long de l'extraction qui s'étend sur des milliers de mètres.

### V.3. Ecoulement en conduite

#### V.3.1. Moyenne double sur la conduite :

Dans le cadre précis de notre projet, on se trouve dans le cas d'un écoulement en conduite ce qui permet de simplifier les équations du diphasique en prenant 2 moyennes successives : moyenne statistique puis on intègre sur la section droite de la conduite. On définit ainsi la fraction de phase moyenne  $R_k$  tel que [23], [36] :

$$R_k = \frac{1}{A} \int \overline{\chi_k} dA \quad (5.1)$$

Et on a l'équation géométrique donnée dans le chapitre précédant (4.92).

#### V.3.2. Equations de conservation [6]

Dans un premier lieu nous allons reprendre les équations de conservation intégrées dans une section de pipe, ces équations seront la base des modèles que nous présenterons par la suite.

Il est important de signaler que les grandeurs utilisées sont successivement moyennées, statistiquement puis sur la section droite du pipe, (voir chapitre 4).

Equations de conservation de la masse pour chaque phase :

$$\frac{\partial \rho_g R_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g R_g U_g}{\partial z} = \Gamma \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho_l (1 - R_g)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1 - R_g) U_l}{\partial z} = -\Gamma \quad (5.3)$$

Pour le mélange gaz liquide nous sommions les deux équations phasiques :

$$\frac{\partial [\rho_g R_g + \rho_l (1 - R_g)]}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_g R_g U_g + \rho_l (1 - R_g) U_l]}{\partial z} = 0 \quad (5.4)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

Nous considérons que la même pression règne dans les deux phases

Pour la phase gazeuse, on écrit :

$$\frac{\partial \rho_g R_g U_g}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial \rho_g R_g U_g^2 A}{\partial z} = -R_g \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\tau_{pg} S_{pg}}{A} + \frac{\tau_{ig} S_i}{A} - \rho_g R_g g \sin \theta + \Gamma U_i \quad (5.5)$$

De manière analogue pour la phase liquide la conservation de quantité de mouvement est donnée par :

$$\frac{\partial \rho_l (1 - R_g) U_l}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial \rho_l (1 - R_g) U_l^2 A}{\partial z} = -(1 - R_g) \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\tau_{pl} S_{pl}}{A} + \frac{\tau_{il} S_i}{A} - \rho_l (1 - R_g) g \sin \theta + \Gamma U_i \quad (5.6)$$

Pour le mélange la conservation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial [\rho_g R_g U_g + \rho_l (1 - R_g) U_l]}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial [\rho_g R_g U_g^2 A + \rho_l (1 - R_g) U_l^2 A]}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{(\tau_{pg} + \tau_{pl}) S_p}{A} - [\rho_g R_g + \rho_l (1 - R_g)] g \sin \theta \quad (5.7)$$

Les frottements phasiques au niveau de 'interface s'annulent entre eux

$$\tau_{ig} = -\tau_{il} = \tau_i \quad (5.8)$$

Equation de conservation de l'énergie :

La variable d'état retenue pour formuler les équation de conservation de l'énergie sera l'enthalpie totale, tel que :

$$\dot{h}_k = h_k + \frac{U_k^2}{2} - gz \sin \theta \quad (5.9)$$

Conservation dans la phase compressible :

$$\frac{\partial \rho_g R_g \dot{h}_g}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial \rho_g R_g \dot{h}_g U_g A}{\partial z} = R_g Q_g + \frac{q_{pg} S_{pg}}{A} + \frac{q_{ig} S_i}{A} + \Gamma \dot{h}_{ig} + R_g \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\tau_i S_i U_i}{A} \quad (5.10)$$

Pour la phase liquide :

$$\frac{\partial \rho_l (1 - R_g) \dot{h}_l}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial \rho_l (1 - R_g) \dot{h}_l U_l A}{\partial z} = (1 - R_g) Q_l + \frac{q_{pl} S_{pl}}{A} + \frac{q_{il} S_i}{A} + \Gamma \dot{h}_{il} + (1 - R_g) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\tau_i S_i U_i}{A} \quad (5.11)$$

Pour écrire l'équation du mélange on utilise la relation de saut à l'interface suivante :

$$\Gamma(\dot{h}_{ig} - \dot{h}_{il}) + \frac{S_i}{A}(q_{ig} + q_{il}) = 0 \quad (5.12)$$

L'équation du mélange s'écrit alors :

$$\frac{\partial [\rho_g R_g \dot{h}_g + \rho_l (1-R_g) \dot{h}_l]}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial [\rho_g R_g \dot{h}_g U_g A + \rho_l (1-R_g) \dot{h}_l U_l A]}{\partial z} = R_g Q_g + (1-R_g) Q_l + \frac{q_p S_p}{A} + \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.13)$$

Paramètre physique du mélange [39],[40] :

Les grandeurs physiques  $\varphi_M$  du mélange s'écrivent en fonction des grandeurs physiques  $\varphi_k$ , tel que  $(\rho_k, p, q_k, Q_k \quad k = g, l)$  sous la forme :

$$\varphi_M = \varphi_g R_g + \varphi_l (1-R_g) \quad (5.14)$$

Masse volumique de du mélange à partir de (5.13) est :

$$\rho_M = \rho_g R_g + \rho_l (1-R_g) \quad (5.15)$$

De même pour la vitesse du mélange :

$$U_M = U_g R_g + U_l (1-R_g) \quad (5.16)$$

La vitesse barycentrique quant a elle, s'écrit:

$$\rho_M U_\rho = \rho_g U_g R_g + \rho_l U_l (1-R_g) \quad (5.17)$$

Et Vitesse de glissement entre les phases (vitesse relative):

$$U_{gl} = U_l - U_g \quad (5.18)$$

## V.4 Principaux modèles

A partir de cet ensemble d'équations de conservation plusieurs approches de modélisation peuvent être formulées, comme il a été signalé dans le chapitre I, qu'il y avait plusieurs approches de modélisation, nous présentons les principaux modèles en écoulements diphasiques :

#### V.4.1 Modèle homogène [6],[7],[8],[28] :

L'écoulement est traité comme un écoulement monophasique, nous aurons à définir des paramètres physiques du pseudo fluide monophasique. Il doit être utilisé avec précaution. Cette hypothèse consiste à supposer que les deux phases se déplacent à la même vitesse moyenne :

$$U_k = U_M = U \text{ donc } U_g = U_l = U_M = U \quad (5.19)$$

Le modèle homogène s'applique bien aux écoulements dispersés avec faible vitesse de glissement.

Il est formulé à partir des équations de conservation (5.4) (5.7) (5.13) et les propriétés du mélange équation (5.15; 5.16) comme suit :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial(\rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial[\rho_M U]}{\partial z} = 0 \quad (5.20)$$

Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho_M U)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_M U^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\tau_p S_p}{A} - \rho_M g \sin \theta \quad (5.21)$$

Energie :

$$\frac{\partial(\rho_M \dot{h}_M)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_M \dot{h}_M U)}{\partial z} = Q_M + \frac{q_p S_p}{A} + \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.22)$$

#### V.4.2 Le modèle à phases séparées [8],[21],[30]

Les équations de conservation sont écrites séparément pour chacune des phases, ces équations contiennent des termes qui décrivent le comportement au niveau de l'interface, ils font référence aux différents échanges qui se produisent entre les phases pendant l'écoulement.

Le modèle à phases séparées n'est autre que le système de 3 équations qui régissent le mouvement de chacune des phases ce qui donne un modèle à six équations, qui seront ensuite résolues simultanément avec des équations qui décrivent l'interaction entre les deux phases, surtout quand il y a équilibre thermodynamique entre les deux et aussi quand il y a interactions avec les parois de la conduite.

Le modèle est formulé comme suit :

Conservation de la masse :

$$\rho_g R_g U_g + \rho_l (1 - R_g) U_l = \frac{m}{A} = cte \quad (5.23)$$

Avec

$$m_g + m_l = m = cte \quad (5.24)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

Les équations de conservation de quantité de mouvement du modèle à phase séparé pour chacune des phases ne sont autres que les équations phasiques données par les relations (5.5 ; 5.6)

L'énergie est donnée par :

$$\frac{1}{m} \left( \frac{dq}{dz} - \frac{dm}{dz} \right) = \frac{d}{dz} [x h_g + (1-x) h_l] + \frac{d}{dz} \left[ x \frac{U_g^2}{2} + (1-x) \frac{U_l^2}{2} \right] + g \cos \theta \quad (5.25)$$

$m$  est le débit massique

et  $x$  le titre massique :

$$x = \frac{m_g}{m_g + m_l} \quad (5.26)$$

### V.4.3 Modèle à flux de dérive [6],[7],[ 8],[21],[41]

Au lieu de supposer que les vitesses des deux phases se déplacent à la même vitesse, on utilise une loi, dite de glissement ou de flux de dérive qui relie les vitesses de chaque phase et la fraction de gaz selon le cas. Il s'applique bien aux écoulements dispersés ou à poches bouchons il est établi comme suit :

Conservation de la masse :

Elle est donnée par l'équation (5.2) pour le gaz et l'équation (5.3) pour le liquide.

Conservation de la quantité de mouvement :

La notion de vitesse de dérive, intervient essentiellement dans le bilan de quantité de mouvement ce dernier est formulé comme suit :

$$\frac{\partial(\rho_M U_\rho)}{\partial t} + \frac{\partial[\rho_M U_\rho^2 + \rho_m (U_g - U_l)^2]}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\tau_p S_p}{A} - \rho_M g \sin \theta \quad (5.26)$$

#### V.4.4 Modèle multi fluide [6], [8]

Contrairement au modèle à phase séparée le multi fluide est un modèle à six équations pur, où il y a trois équation de conservation pour chaque phase, sans qu'il y ait raccord entre elles, elles sont tout à fait indépendantes, le système d'équation du modèle est celui des bilans phasique présenté préalablement :

La conservation de la masse est donnée par l'équation (5.2) pour le gaz et l'équation (5.3) pour le liquide.

La conservation de la quantité de mouvement dans la section est régie par les équations (5.5 ; 5.6) pour les deux phases qui forment le mélange diphasique.

Les équations phasiques de conservation de l'énergie sont celles retrouvées dans le modèle multifluide, ainsi les équations (5.10) ; (5.10) sont respectivement les équations de conservation de l'énergie du gaz et du liquide dans ce modèle,

Dans le cadre de notre application, trois modèles seront pris en compte :

Le modèle monophasique.(écoulement monophasé)

Le modèle homogène (écoulement diphasique).

Le modèle a flux de dérive (écoulement diphasique)

### V.5 Présentation de l'installation

Pour notre projet nous avons à considérer un puits de pétrole off-shore en eau profonde (800m).

Ce puits a une profondeur de 1000 mètres, une pression dans le réservoir de 220 bars et une température moyenne de 37°C. Nous imposerons une pression voisine de 20 bars pour le traitement en sortie, la distance du puits à la plate-forme est de 30 kilomètres.

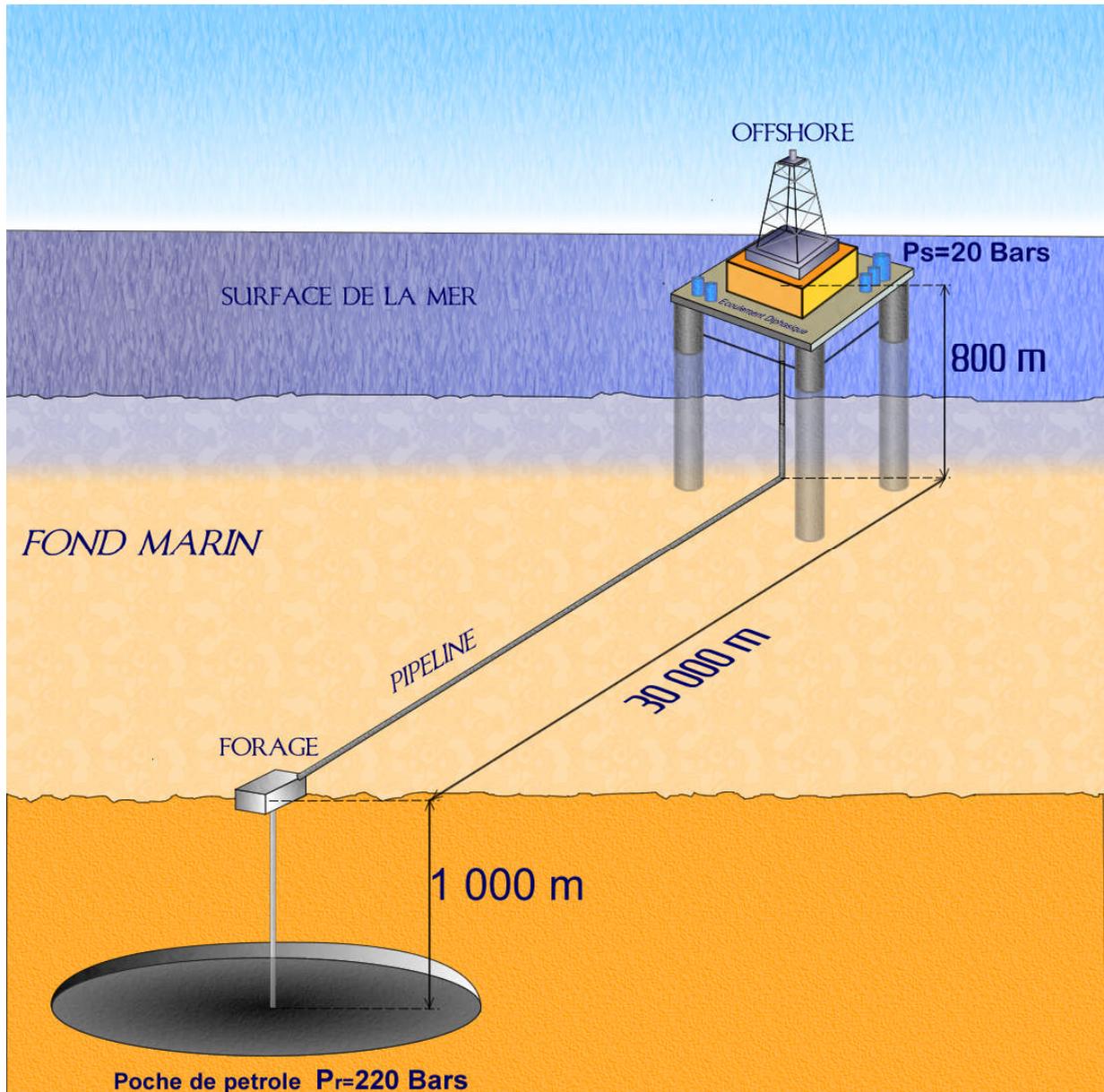


Figure V.1 : Présentation de l'installation

Les paramètres imposés sont :

- ✚ La pression minimale en plateforme que nous imposerons (contrainte technique d'exploitation),

- ✚ la pression dans le réservoir et la longueur des conduites (profondeur du puits, hauteur d'eau, et distance puits plate forme) contraintes liées au gisement.

Le but est de trouver la vitesse (débit) du mélange qui nous permettra d'avoir une pression voisine de celle exigée à la sortie.

Pour toute l'étude, des hypothèses communes à toutes les simulations seront émises, en effet nous considérerons les hypothèses suivantes :

- Ecoulement unidimensionnel : ne dépend que d'une variable spatiale.
- Isotherme : température constante sur tout le long de la conduite, durant toute l'extraction.
- Adiabatique : pas d'échange de chaleur avec l'extérieur.
- Diamètre de la conduite constant.
- Densité du gaz fonction de la pression,  $\rho_g = f(p)$

## V.6 Dimensionnement de la conduite :

En premier lieu nous devons commencer par dimensionner notre conduite et trouver un diamètre adéquat, pour cela nous avons choisi un débit d'extraction représentatif, en phase avec les débits d'extraction réels.

Le diamètre recherché, doit réaliser les conditions suivantes :

- ✚ Pression sortie  $P_s=20$  bars
- ✚ Une différence de pression en fonction de la pression du réservoir[42] :  $\Delta P_T = P_r - 20$  ( bars)
- ✚ Le débit journalier choisi pour le dimensionnement :  $Q=10000$  barils /j= $0,0184$  m<sup>3</sup>/s

L'équation codée Matlab [43] est la suivante :

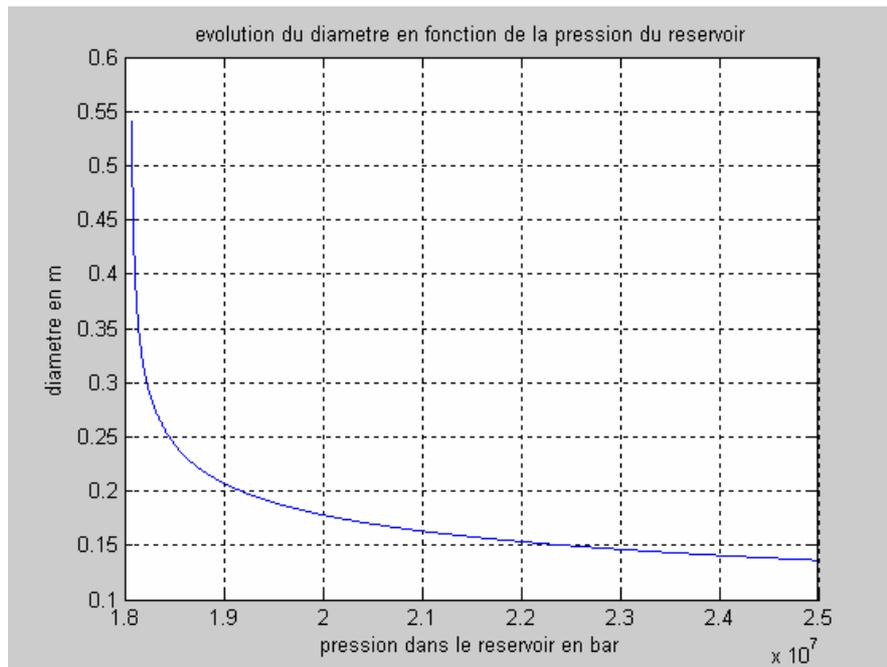
$$\Delta P_T = \Delta P_H + \Delta P_R$$

$$\Delta P_T = \rho_{pet} g \Delta z + \frac{8 \rho_{pet} \lambda L D Q^2}{\pi^5 D^5}$$

$$\text{Avec } \rightarrow \lambda = 0.316 \text{Re}_{pet}^{-1/4}$$

$$D = \left[ 0.316 \frac{8\rho_{pet} L Q^2}{\pi^2 (\Delta P_T - \rho_{pet} g \Delta z)} \left( \frac{4Q}{\pi v} \right)^{-1/4} \right]^{4/19}$$

Nous traçons l'évolution du diamètre en fonction de la pression du réservoir, connaissant la pression du puits, nous choisirons le diamètre approprié.



**Figure V.2 Evolution du diamètre en fonction de la pression du réservoir**

Pour un fluide de masse volumique  $\rho_{pet} = 880 \text{kg} / \text{m}^3$  et une viscosité cinématique  $\nu_{pet} = 7e^{-6} \text{m}^2 / \text{s}$  et une pression  $P_s = 220$  bars (cas de notre puits), on a un diamètre de 0.15 m, c'est le diamètre que nous retiendrons dans la suite de l'application.

Maintenant que nous avons dimensionné notre conduite nous pouvons procéder à l'étude et à la simulation de l'écoulement.

## V.7 Etude de l'installation et développement d'un code de calcul

A défaut d'avoir une base (Logiciel ou données expérimentales), à laquelle nous pouvions nous

référer, afin de valider nos résultats, nous sommes partis des hypothèses les plus restrictives sur le fluide et l'écoulement qui n'est autre que l'approximation monophasique que nous maîtrisons, cela pour avoir une amorce de solution au problème.

Ensuite nous leverons au fur et à mesure autant d'hypothèses, en passant au cas diphasique sous le modèle homogène avec une vitesse du mélange semblable à celle des phases en présence, puis un modèle à flux de dérive ou il y a mouvement relatif entre les phases.

Cette démarche permet la comparaison de l'influence des différentes hypothèses faites sur les résultats, et éventuellement de les valider selon les valeurs obtenues ; on gagne ainsi en compréhension physique des phénomènes mis en jeu.

L'approche est la même pour les trois modèles adoptés, la modélisation est basée sur un schéma numérique amont, le calcul s'effectue de la section d'entrée (réservoir) à la dernière section de sortie (plate forme) , seules les valeurs des variables pour la section précédente sont prises en compte.

Les programmes permettent la modélisation de réseau de pipelines de différente configuration en fonction de la géométrie et des différents paramètres introduits.

Les conditions imposées aux limites sont les pressions d'entrée et de sortie.

Afin de déterminer le débit qui résulte de cette différence de pression, on utilise une méthode de TIR [44].

La méthode de TIR consiste à remplacer le problème de conditions aux limites par un problème de conditions initiales, dans notre cas il s'agit de faire une hypothèse sur la vitesse d'entrée, et de calculer la pression qui en résulte pour tout le pipeline.

A la fin du calcul, on compare la différence de pression obtenue avec celle souhaitée:

Si ce n'est pas le cas, on relance le calcul avec une vitesse d'entrée modifiée, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de la différence de pression  $P_r - P_s$ .

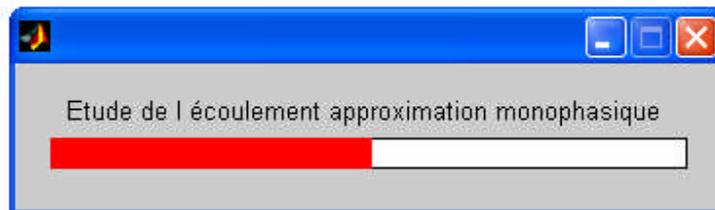
### V.7.1. Déroulement de l'application :

#### V.7.1.a. Cas monophasique :

En premier lieu nous avons fait une approximation monophasique c'est à dire que nous avons négligé l'écoulement du gaz qui coexiste avec l'huile extraite.

Cela va nous permettre d'avoir un aperçu sur l'évolution de la pression, et un ordre de grandeur quant à la vitesse du fluide monophasé.

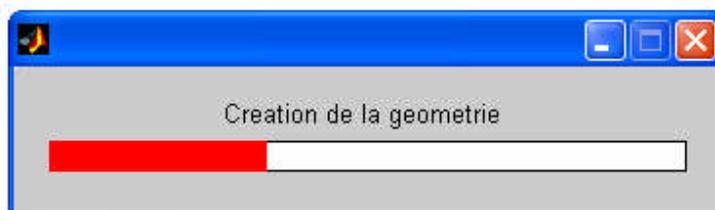
Nous allons commencer par executer le premier programme intitulé Monophasique. Il est important de commencer avec, son approximation est grossière certes, mais ce dernier nous donnera un aperçu sur l'évolution de la pression qui est le paramètre clé, mais aussi un ordre de grandeur de la vitesse de fluide nous permettant d'arriver à pression exigée au niveau de la plateforme .



#### Etape 1 :

La première étape d'exécution s'intitule « création de la géométrie », au cours de cette étape le programme se familiarise avec l'installation sujet de l'étude.

L'interface de cette étape est la suivante :



Nous devons commencer par introduire deux paramètres clés, propres à l'installation choisie :

- Quant au nombre de pipe, dans le cas de notre installation nous avons 3 pipes.
- Quant au diamètre du pipe : l'approximation monophasique nous a conduit à un pipe de diamètre  $D = 0.15$ .

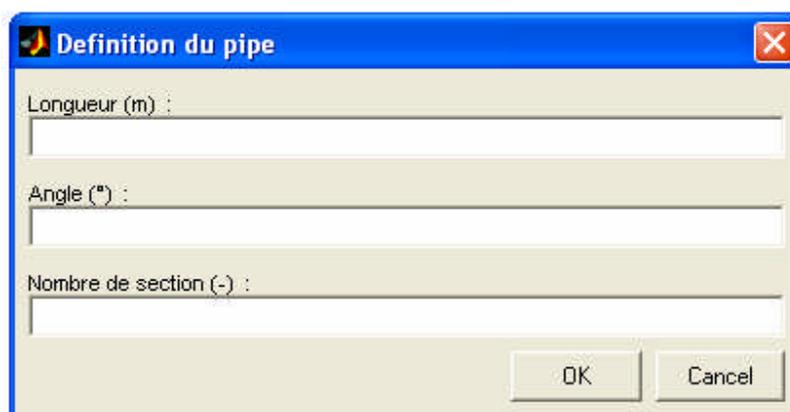
L'interface est la suivante :



The image shows a dialog box titled "Creation de la geometrie". It has a blue title bar with a close button (X) on the right. The dialog contains two input fields: "Nombre de pipe" with the value "3" and "Diametre du pipe (m)" with the value "0.15". At the bottom right, there are two buttons: "OK" and "Cancel".

Une fois que le programme est renseigné sur le nombre de pipe, il va les traiter un à un, en fonction de la longueur, de l'inclinaison et de la discrétisation souhaitée.

Les paramètres demandés dans cette sous- étape, sont donnés par l'interface suivante :



The image shows a dialog box titled "Definition du pipe". It has a blue title bar with a close button (X) on the right. The dialog contains three input fields: "Longueur (m)", "Angle (\*)", and "Nombre de section (-)". At the bottom right, there are two buttons: "OK" and "Cancel".

Cas de notre configuration :

	Longueur (m)	Angle°	Nombre de section
Pipe 1	1000	90	100
Pipe 2	30000	0	3000
Pipe 3	800	90	80

**Tableau V.1: Données géométriques du système de pipeline de l'installation.**

## Etape 2

Cette seconde étape consiste à présenter les propriétés du réservoir, elle s'intitule « Propriétés du réservoir »



Les conditions aux limites propres au réservoir sont à fournir et représenteront les conditions limites de notre problème :

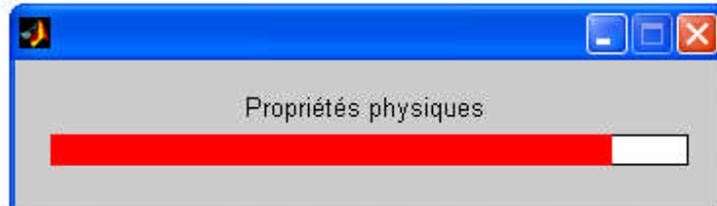
- Pression régnante dans le réservoir : notre puits est à une pression  $P_r=220\text{bar}$
- Pression exigée à la sortie. : nous exigerons une pression de sortie de  $P_s=20\text{ bar}$

L'interface est la suivante

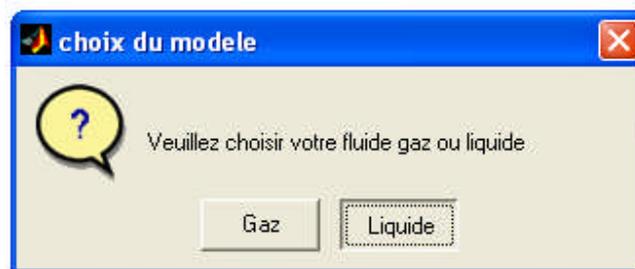


**Etape 3 :**

Elle porte sur les propriétés physiques du fluide



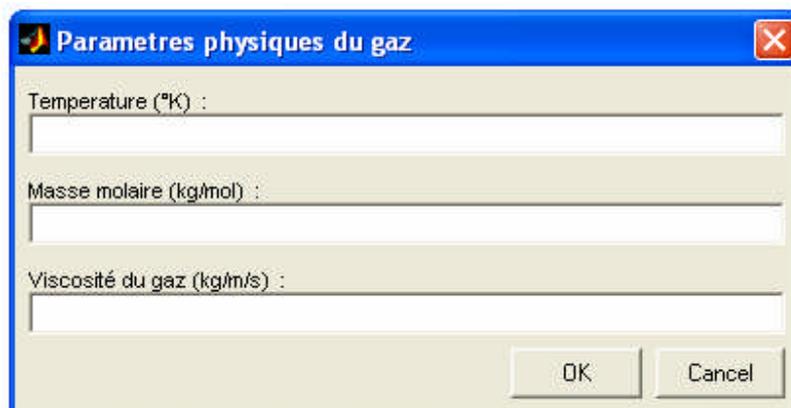
Nous choisissons d'abord la nature du fluide : compressible ou non comme la représente la figure ci dessous :



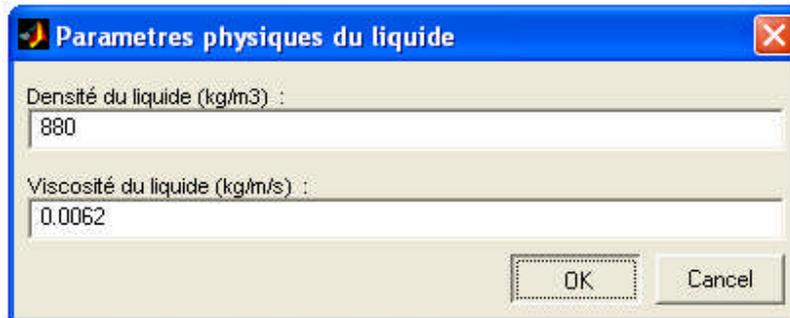
Nous devons ensuite présenter les paramètres physiques de ce dernier.

Dans le cas d'un gaz, les paramètres à remplir sont donnés dans la figure ci-dessous :

Hypothèse : Le gaz suit la loi des gaz parfaits



Dans notre cas nous faisons une approche monophasique d'un fluide incompressible : l'huile.  
Les propriétés physiques introduites sont les suivantes :

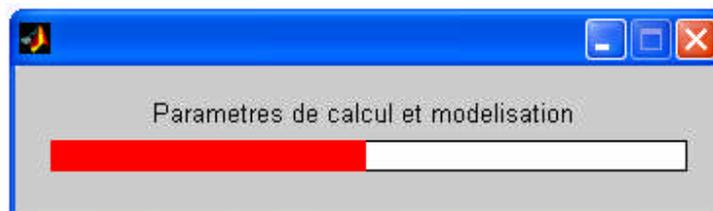


Evolution des paramètres physiques :

Les hypothèses de cette approximation sont simples :

- Masse volumique du liquide constante.
- Viscosité du liquide constante.

#### Étape 4

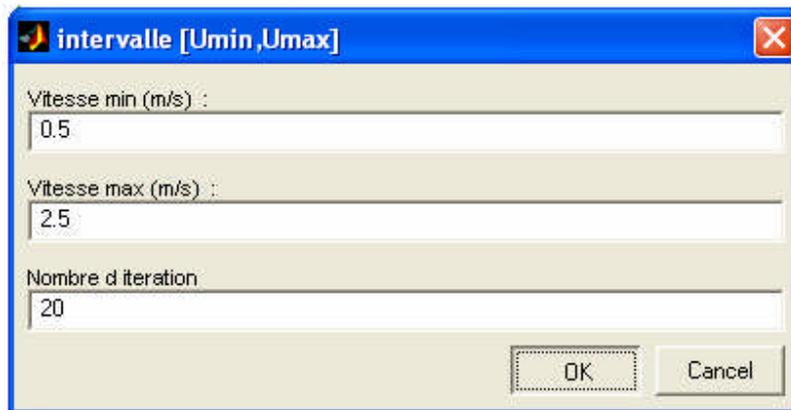


C'est l'étape la plus importante, on doit introduire les paramètres de calcul pour finaliser les données du problème. Commence ensuite le calcul proprement dit, suivant le modèle monophasique.

Cette étape se divise donc en deux sous étapes

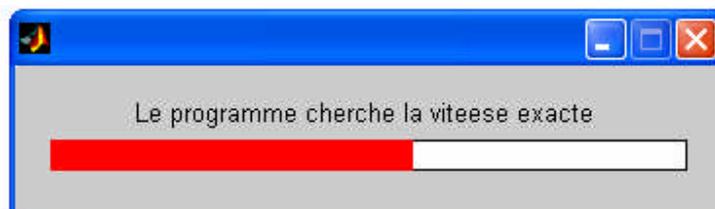
##### a. Saisie des paramètres de calcul :

Dans cette étape, nous devons donner l'intervalle de vitesse toléré et le nombre d'itérations à effectuer au niveau de chaque section, nombre de points de calcul



Le nombre d'itération est le nombre de points de calcul alors que les deux vitesses limites ( $U_{min}, U_{max}$ ) est une hypothèse sur la vitesse d'entrée du fluide, on tire une valeur moyenne d'entrée du fluide, se processus est semblable a l'amorce dans la méthode de newton Newton-Raphson.

**b. Modélisation :**



Le modèle pour lequel nous avons opté prend en charge deux types d'écoulement, pour les fluides compressibles et incompressibles.

Les équations du modèle pour un fluide compressible ou non sont présentées dans le tableau suivant :

Fluide incompressible	Fluide compressible
<p>Hypothèses <math>\rho_{pet}</math> et <math>\mu_{pet}</math> cte</p> <p>Inconnue du problème : <math>U</math></p> <p>Equation codée :</p> $\frac{d\rho_{pet}U^2}{dz} = -\frac{dp}{dz} + \frac{\tau_p S_p}{A} - \rho_{pet}g \sin \theta$ <p>Fermeture des frottements pariétaux</p> $\left(\frac{dP}{dz}\right)_{fr} = \frac{\tau_p S_p}{A}$ $\tau_{ppet} = f(U) = -\frac{1}{2}\rho_{pet}f_{pm}U^2$ <p><math>f_{pm}</math> est le coefficient de frottement</p> $\begin{cases} f_{pm} = \frac{16}{Re_{pet}} & \text{si } Re < 2000 \\ f_{pm} = 0.079 Re_{pet}^{-0.25} & \text{si } Re > 2000 \end{cases}$ <p>avec <math>Re_{pet} = \frac{\rho_{pet}DU}{\mu_{pet}}</math></p>	<p>Hypothèses : <math>\mu_g</math> cte</p> <p>Inconnues : <math>U_g, \rho_g, P</math></p> <p>Equations :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>\frac{d\rho_g U_g^2}{dz} = -\frac{dp}{dz} + \frac{\tau_p S_p}{A} - \rho_g g \sin \theta</math></li> <li><math>\frac{d\rho_g U_g}{dz} = 0</math> continuité</li> <li><math>\rho_g = P \frac{M_{mol}}{RT}</math> "modele gaz parfait (3.36)"</li> </ol> <p>Fermeture des frottements pariétaux :</p> $\left(\frac{dP}{dz}\right)_{fr} = \frac{\tau_p S_p}{A}$ $\tau_{pg} = f(U) = -\frac{1}{2}\rho_g f_{pm} U_g^2$ $\begin{cases} f_{pm} = \frac{16}{Re_g} & \text{si } Re_g < 2000 \text{ (Blasius)} \\ f_{pm} = 0.079 Re_g^{-0.25} & \text{si } Re_g > 2000 \end{cases}$ <p>avec <math>Re_g = \frac{\rho_g DU}{\mu_g}</math></p>

**Tableau V.2 Equations du modèle monophasique, pour fluides compressibles et incompressible**

**Organigramme de calcul :**

L'organigramme de calcul est le suivant :

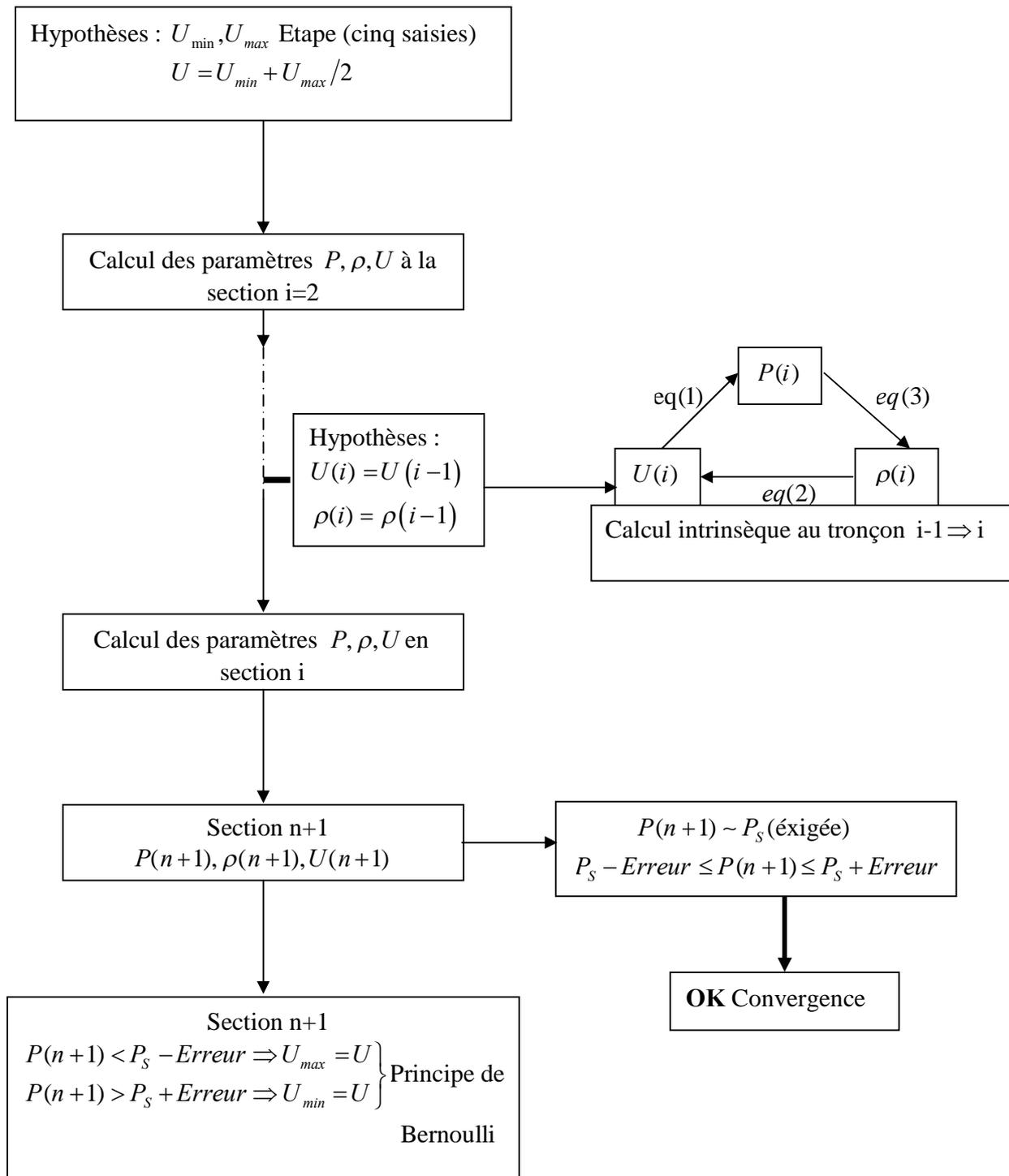


Figure V.3 : Organigramme de calcul pour la méthode de tir établie

Le programme fait appel à deux sous programmes :

- Sous programme qui calcule la valeur du coefficient de frottement  $f_{pm}$  en fonction du nombre de Reynolds.
- Sous programme qui gère l'évolution des propriétés physique du fluide.

Tolérance : le paramètre de tolérance est l'écart de la pression a la sortie l'écart est calculé

comme suit : 
$$\varepsilon = \left| \frac{P_s - P(n+1)}{P_r - P_s} \right|$$

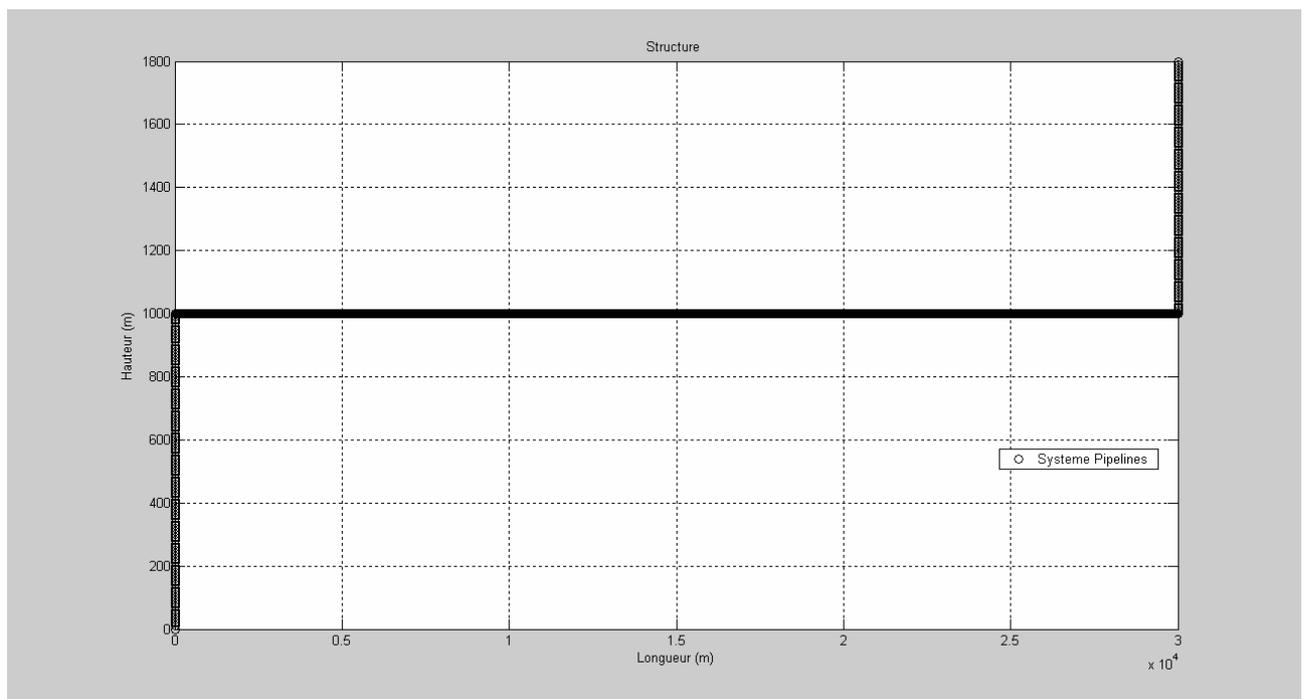
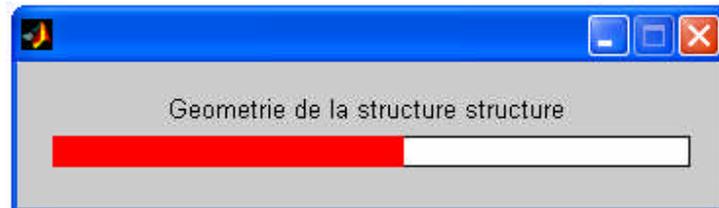
L'erreur tolérée dans le programme monophasique est  $\varepsilon = 0.003$  soit 0.3% de l'écart absolu ( $P_r - P_s = 220$  Bars)



**Etape 5** : affichage des résultats



Le premier résultats commun a tout les modèles et valable pour tout les combinaison possible car ce premier résultat consiste a retourner la géométrie de la configuration choisie, qui est évidemment indépendante du choix du modèle, dans notre cas, le resultat de la géométrie est illustré dans la figure (V.4) :



**Figure V.4 : Géométrie de la structure (système pipelines).**

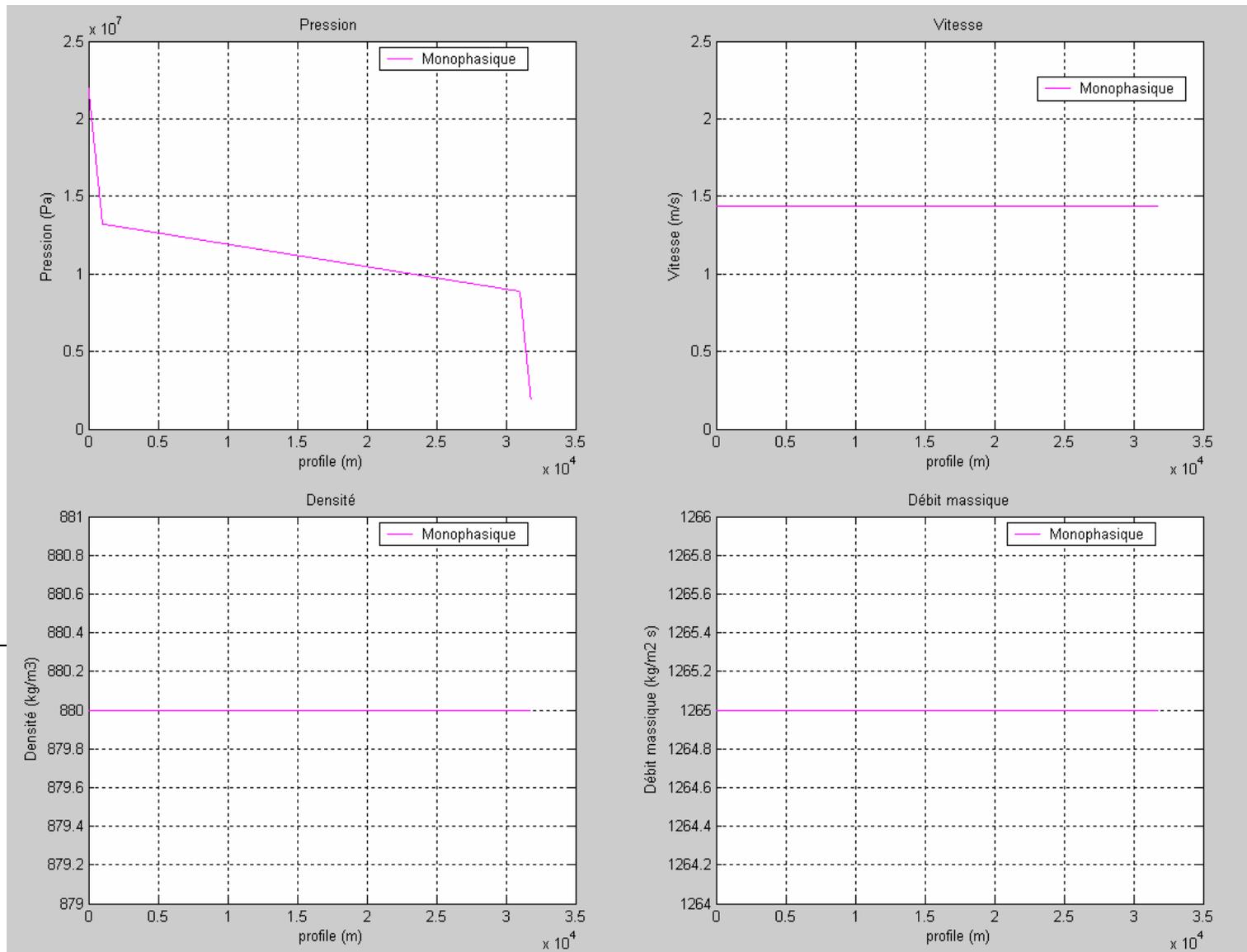


Figure V.5 : Paramètres d'écoulement à l'aide du modèle monophasique.

Le but de cette exécution est de cerner la valeur de la vitesse, en effet le résultat de l'exécution du modèle monophasique donne une vitesse  $U = 1.4375 m/s$ , cette vitesse sera un point de repère pour pouvoir juger de la validité des exécutions des modèles (homogène, et à flux de dérive) pour le cas diphasique.

Quant au comportement de la pression, le graphe (pression, abscisse) d'amont en aval montre qu'il y a trois gradients de pression distincts sur nos trois conduits, nous remarquerons que ce dernier est plus important en conduite verticale qu'en conduite horizontale, la pression diminue au fur et à mesure, de la pression d'entrée (réservoir)  $P_r = 220$  Bars jusqu'à la sortie, au cours de l'exécution nous avons exigé une pression de sortie de 20Bars, le modèle monophasique nous a permis de sortir avec une pression  $P_{(n+1)} = 20,29574$  Bars, l'écart a été calculé et estimé  $\varepsilon = 0.001479$  soit  $\varepsilon = 0.1479\%$  de l'écart absolu.

Le but de l'exécution du modèle monophasique est atteint nous avons à présent un aperçu sur l'allure que prend l'évolution de la pression le long du pipe ainsi que l'ordre de grandeur de la vitesse.

#### ***V.7.1.b. Cas diphasique :***

L'approche diphasique est plus réaliste. Elle reflète mieux l'écoulement réel du mélange lors de l'extraction. Pour expliciter cela nous exécuterons les deux modèles auxquels nous avons eu recours : le modèle homogène et le modèle à flux de dérive.

Les étapes d'exécution sont similaires pour les deux modèles à l'exception de l'étape 4.

#### **Etape 1 :**

L'étape 1 est similaire à celle effectuée dans le cas monophasique car les paramètres concernant la géométrie sont identiques pour les trois modèles (Tableau V.1).

#### **Etape 2 :**

Tout comme le modèle monophasique, les deux modèles diphasiques doivent prendre connaissance des propriétés du réservoir, mais cette fois ci avec un paramètre de plus : la fraction de vide, qui est propre aux écoulements diphasiques.

Dans le réservoir le gaz est dissout dans le liquide et le taux de gaz est pratiquement nul, nous prendrons pour notre application un taux de gaz initial  $\alpha = 0.02$ .



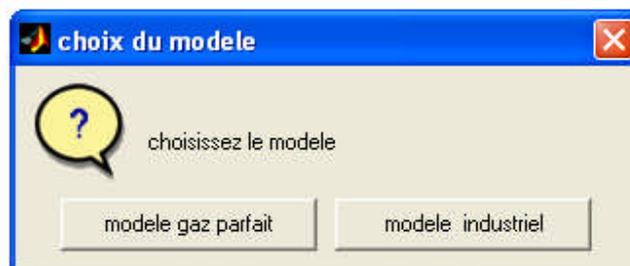
### Etape 3 :

L'étape 3 consiste à donner tous les paramètres des phases en présence afin de suivre l'évolution des propriétés physiques le long de l'écoulement.

Pour chacun des modèles homogènes et à flux de dérive, deux choix se présentent à nous :

- Choix 1 : modèle gaz parfait
- Choix 2 : modèle industriel

Ceci est représenté par la figure suivante :

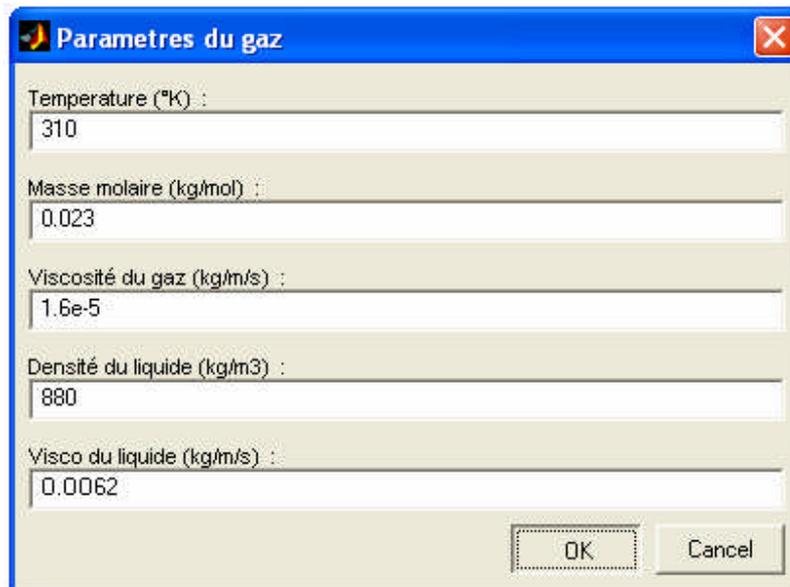


Les deux choix se présentent comme suit :

- Choix 1 : modèle gaz parfait



Après avoir choisi le modèle gaz parfait, nous devons renseigner certains paramètres. Ces paramètres sont représentés dans la figure suivante :



Parametres du gaz

Temperature (\*K) :  
310

Masse molaire (kg/mol) :  
0.023

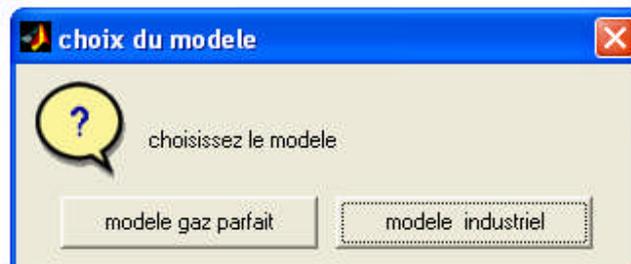
Viscosité du gaz (kg/m/s) :  
1.6e-5

Densité du liquide (kg/m3) :  
880

Visco du liquide (kg/m/s) :  
0.0062

OK Cancel

- Choix 2 : modèle industriel



choix du modele

choisissez le modele

modele gaz parfait    modele industriel

Dans le modèle industriel le calcul des paramètres n'est fonction que de la pression et de la section ou nous nous trouvons, c'est pour cela que le modèle industriel ne demande pas d'avantage de renseignement, il calcul les paramètres en fonction de la pression calculée au point ou on se situe.

Le tableau si dessous résume les approximations de chacun des deux modèles [36] :

	Modèle gaz parfait	Modèle industriel
Densité du gaz ( $kg / m^3$ )	$\rho_g = P \frac{M_{molg}}{RT}$	$\rho_g = P * 82 * 10e^{(-7)} \Rightarrow$ si $P < 2.2 * 10e^7$ $\rho_g = 180.4 \Rightarrow$ si non
Densité du liquide ( $kg / m^3$ )	$\rho_l = 880 = cte$	$\rho_l = 920 - 27 * 10e^{(-7)} P \Rightarrow$ si $P < 2.2 * 10e^7$ $\rho_l = 860.6 \Rightarrow$ si non
Viscosité du gaz ( $kg / m / s$ )	$\mu_g = 1.6e - 5 = cte$	$\mu_g = 1.2 * 10e^{(-5)} + 4.35 * 10e^{(-13)} * P$
Viscosité du liquide ( $kg / m / s$ )	$\mu_l = 0.0062 = cte$	$\mu_l = 10e^{(-2)} - 3.6 * 10 \wedge e^{(-10)} * P \Rightarrow$ si $P < 2.2 * 10e^7$ $\mu_l = 2.8 * 10 \wedge (-3) \Rightarrow$ si non

**Tableau V.3 : Equations des modèles (Gaz parfait et Industriel)  
pour le suivi des propriétés physiques.**

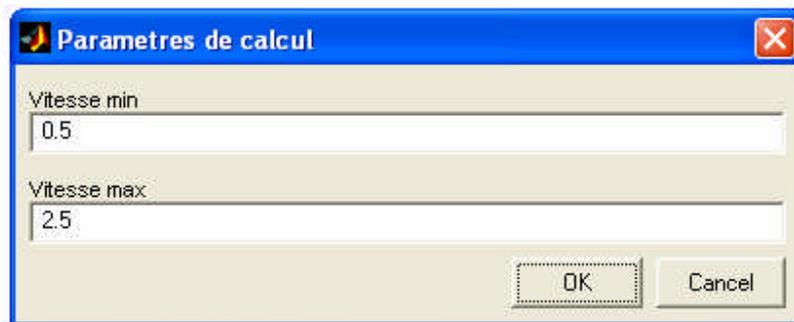
Il est important de signaler que le modèle industriel est propre à l'industrie du pétrole et du gaz il est donc plus approprié à notre application, cependant le modèle du gaz parfait est plus général et il à l'avantage de pouvoir s'adapter à différentes situations en faisant abstraction du type de gaz utilisé (du fluide compressible).

Les deux modèles seront testés et comparés, car nous appliquerons le modèle homogène et le modèle à flux de dérive avec ces deux choix de suivi des paramètres physiques des phases (pétrole, gaz).

#### **Etape 4 :**

Comme pour le modèle monophasique, cette étape est divisée en « saisie des paramètres de calcul » et « modélisation ».

**a. Saisie des paramètres de calcul :** La seule différence par rapport au modèle monophasique est que nous ne devons pas entrer un nombre d'itérations à effectuer, celui-ci est fixé par défaut ( $j = 40$ )

**b. Modélisation :**

Et une étape pertinente, elle en lien direct avec les étapes précédente, elle permet de faire le pont entre ces dernières, car aux cours de cette étape se fait le suivi des variables initiales introduite ces variations en questions définissent l'état du système (écoulement dans la conduite) en toute section.

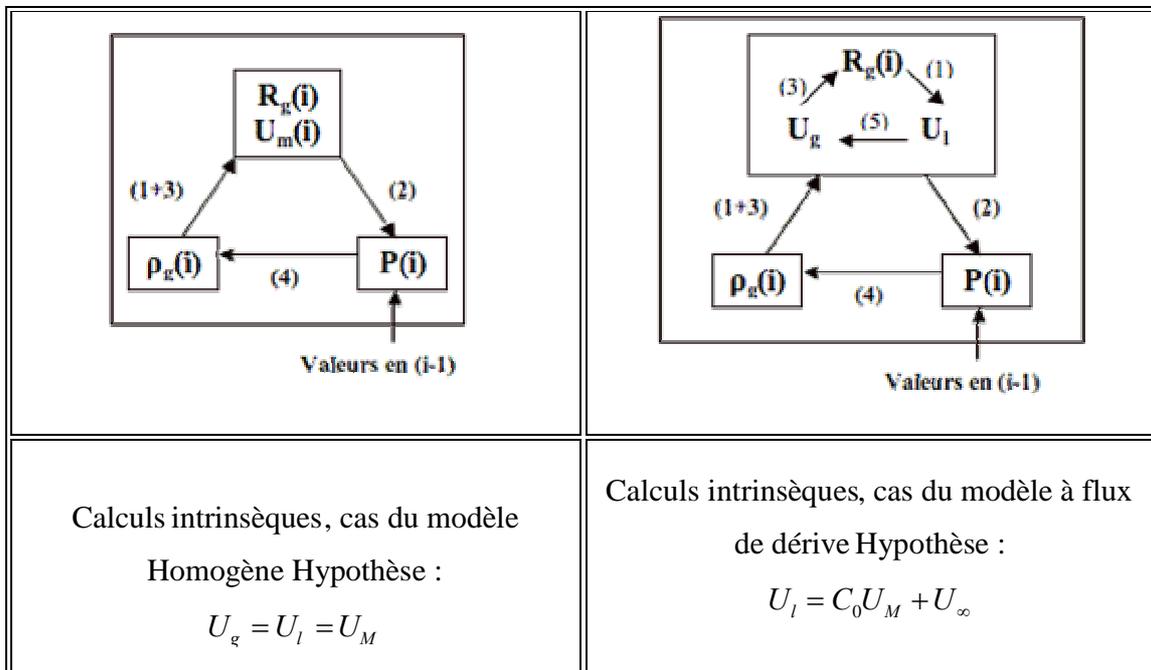
A partir de l'évolution des propriétés de chacun des fluides est soutirée la variation des grandeurs moyennes du mélange ainsi que la vitesse de dérive dans le cas du modèle a flux de dérive.

Le tableau suivant présente, les équations de bases sur lesquelles sont basés les calculs :

Modèle Homogène	Modèle a flux de dérive
<p>Inconnues : 3 inconnues principales <math>U_M, P, R_g</math>                      Équations codées :</p> <p>1. Conservation de la masse  <math display="block">\frac{d\rho_M U_M}{dz} = 0</math></p> <p>2. Conservation de la quantité de mouvement :  <math display="block">\frac{d\rho_M U_M^2}{dz} = -\frac{dp}{dz} + \frac{\tau_p S_p}{A} - \rho_M g \sin\theta</math></p> <p>3. Conservation de l'énergie  <math display="block">\frac{dh}{dz} = 0</math></p> <p>4. Densité du gaz : <math>\rho_g = f(P)</math> (Modèle gaz parfait, ou industriel)                      Avec <math>\rho_M = \rho_g R_g + \rho_l(1 - R_g)</math>                      Et <math>\mu_M = \mu_g R_g + \mu_l(1 - R_g)</math></p> <p>Lois de fermeture :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Fermeture des frottements pariétaux :  <math display="block">\tau_p = f(U) = -\frac{1}{2} \rho_M f_{pm} U_M^2</math> <math>f_{pm}</math> est le coefficient de frottement                             <math display="block">\begin{cases} f_{pm} = \frac{16}{\text{Re}_{pet}} &amp; \text{si } \text{Re}_M &lt; 2000 \\ f_{pm} = 0.079 \text{Re}_M^{-0.25} &amp; \text{si } \text{Re}_M &gt; 2000 \end{cases}</math>                     avec <math>\text{Re}_M = \frac{\rho_M D U_M}{\mu_M}</math> </li> <li>Fermeture sur les vitesses :                      Principale hypothèse du modèle homogène :  <math>U_g = U_l = U_M</math> </li> </ul>	<p>Inconnues : 4 inconnues principales <math>U_g, U_l, R_g, P</math>                      Equations codées :</p> <p>1. Conservation de la masse  <math display="block">\frac{d(\rho_M U_M)}{dz} = 0</math></p> <p>2. Conservation de la quantité de mouvement :  <math display="block">\frac{d\rho_M U_M^2}{dz} + \frac{d\rho_m U_{gl}^2}{dz} = -\frac{dp}{dz} + \frac{\tau_p S_p}{A} - \rho_M g \sin\theta</math></p> <p>3. <math>\frac{dh}{dz} = 0</math> Conservation de l'énergie</p> <p>4. Densité du gaz : <math>\rho_g = f(P)</math> (Modèle gaz parfait, ou industriel)                      Fermeture des frottements pariétaux :                      Avec : <math>\rho_M = \rho_g R_g + \rho_l(1 - R_g)</math>  <math display="block">\mu_M = \mu_g R_g + \mu_l(1 - R_g)</math>  <math display="block">\rho_M U_\rho = \rho_g R_g U_g + \rho_l(1 - R_g) U_l</math>  <math display="block">U_{gl} = U_l - U_g</math>  <math display="block">\rho_m = \frac{1}{\frac{1}{R_g \rho_g} + \frac{1}{R_l \rho_l}} \approx R_g \rho_g</math></p> <p>Lois de fermeture :                      Fermeture des frottements pariétaux :  <math display="block">\tau_p = f(U) = -\frac{1}{2} \rho_l f_{pl} U_l^2</math> <math display="block">\begin{cases} f_{pl} = \frac{16}{\text{Re}_l} &amp; \text{si } \text{Re}_l &lt; 2000 \text{ avec } \text{Re}_l = \frac{\rho_l D U_l}{\mu_l} \\ f_{pl} = 0.079 \text{Re}_l^{-0.25} &amp; \text{si } \text{Re}_l &gt; 2000 \end{cases}</math></p> <p>Fermeture sur les vitesses :                      Principale hypothèse du modèle a flux de dérive :  <math>U_l \neq U_g \quad U_{gl} = U_l - U_g</math></p> <p>Modélisation du flux de vitesse :                      5. <math>U_l = C_0 U_M + U_\infty</math> (Zuber et Findlay 1965)</p>

**Tableau V.4 : Equations des modèles (homogène et à flux de dérive).**

La structure du code est identique, sauf pour la convergence sur chaque section qui est modifiée comme suit:



**Tableau V.5 : Organigramme de la boucle de calcul (Modèle homogène et à flux de dérive)**

La combinaison de la figure (V.3) et du tableau (V.4) donne l’organigramme de calcul pour le modèle homogène et à flux de dérive respectivement.

Pendant le calcul, le programme fait appel à différentes fonctions, ces fonctions sont des sous-programmes, où l’on retrouve les équations données par le tableau (V.3) en plus d’un programme pour le calcul du frottement pariétal.

Le modèle à flux de dérive se distingue de l’homogène, il y a un sous-programme propre à ce modèle chargé de contrôler les valeurs des coefficients de la loi de fermeture du flux de vitesse [6],[36],[39] au cours de l’extraction. Le programme en question code les équations .

$$U_l = C_0 U_M + U_\infty \text{ avec } U_\infty = C_\infty \sqrt{gD}$$

$$U_l = C_0 U_M + C_\infty \sqrt{gD}$$

Où  $U_\infty$  et  $C_0$  sont des coefficients qui dépendent de la configuration d’écoulement, dans le cas de notre application nous agirons en fonction de l’inclinaison du pipe, trois couples de coefficients ( $C_0, C_\infty$ ), seront utilisés :

Cas de conduite verticale :  $U_l = 1.2U_M + 0.35\sqrt{gD}$

Cas de conduite horizontale : 
$$\begin{cases} U_l = 1.2U_M & \text{si } U_M > 2.8\sqrt{gD} \\ U_l = U_M + 0.54\sqrt{gD} & \text{si } U_M < 2.8\sqrt{gD} \end{cases}$$

**Arrêt de la boucle de calcul :** La boucle de convergence de calcul du programme, figure (V.3) peut s'arrêter en fonction de plusieurs critères, les critères d'arrêt sont communs aux trois programmes car ils ne dépendent pas du modèle mais de la structure de l'algorithme.

- Lorsque le nombre d'itération est atteint : le calcul est relancé si l'erreur n'est pas tolérée.
- Lorsque  $P(i)$  converge prématurément, avant d'arriver à nombre maximum d'itération ceci est traduit physiquement par l'atteinte de la pression voulue avant d'arriver à la section de sortie  $z(n+1)$ .
- Lorsque la pression s'annule est prend une valeur négative physique ceci veut que le fluide a une vitesse top importante et ainsi la pression s'annule en cours d'extraction.. Un message d'alerte se présente dans ce dernier cas, il est représenté par l'interface :



#### Etape 5 : affichage des résultats

Les résultats obtenus pour chaque choix de chacun des modèles diphasiques sont les suivants :



### V.7.2. Résultats graphiques et commentaires

**V.7.2.a. Résultats :** Les résultats de chaque modèle séparément sont donnés en annexe C.

Pour les comparaisons, les graphes obtenus sont les suivants :

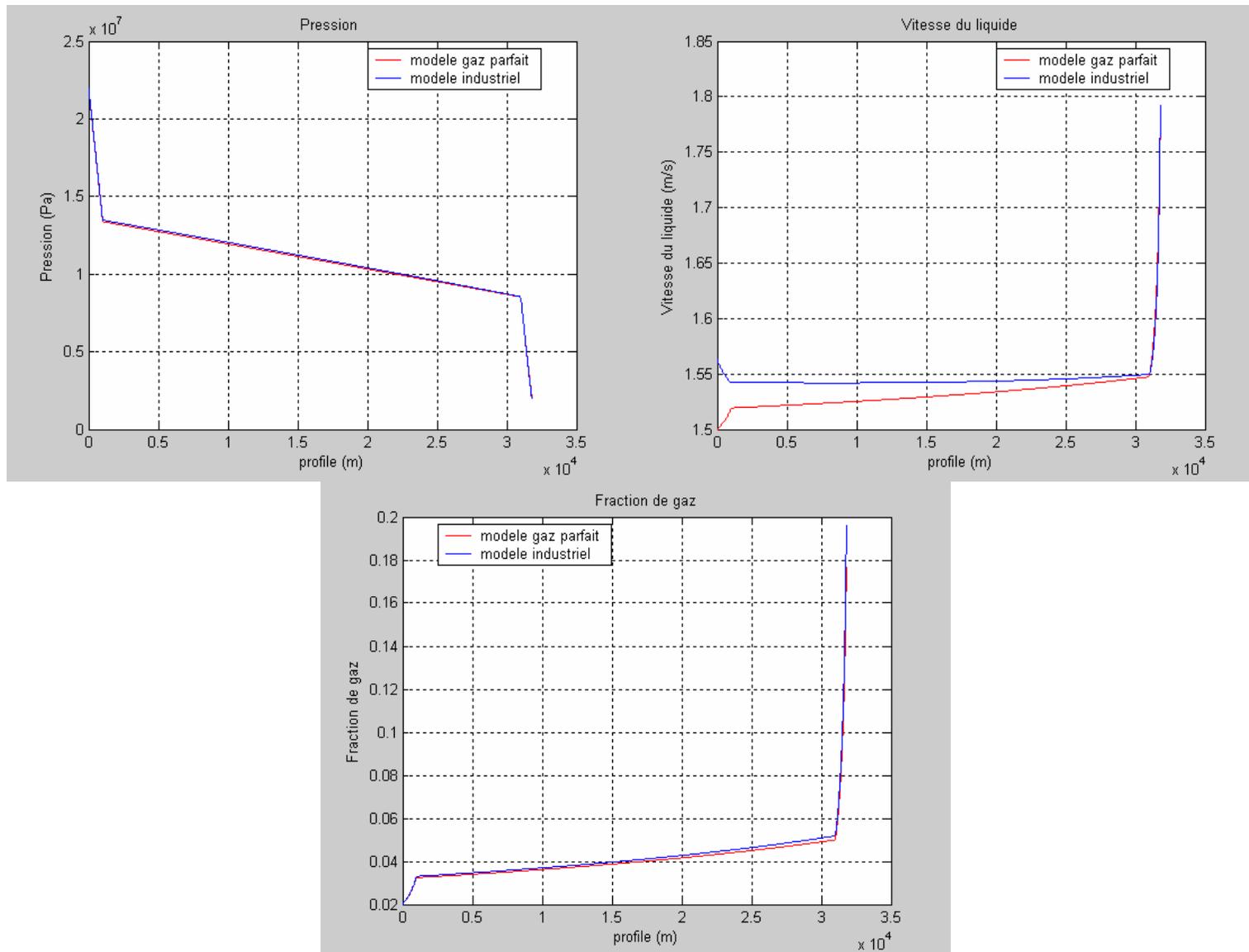


Figure V.6: Comparaison des paramètres d'écoulement des deux choix de suivi des propriétés physiques (Modèle homogène)

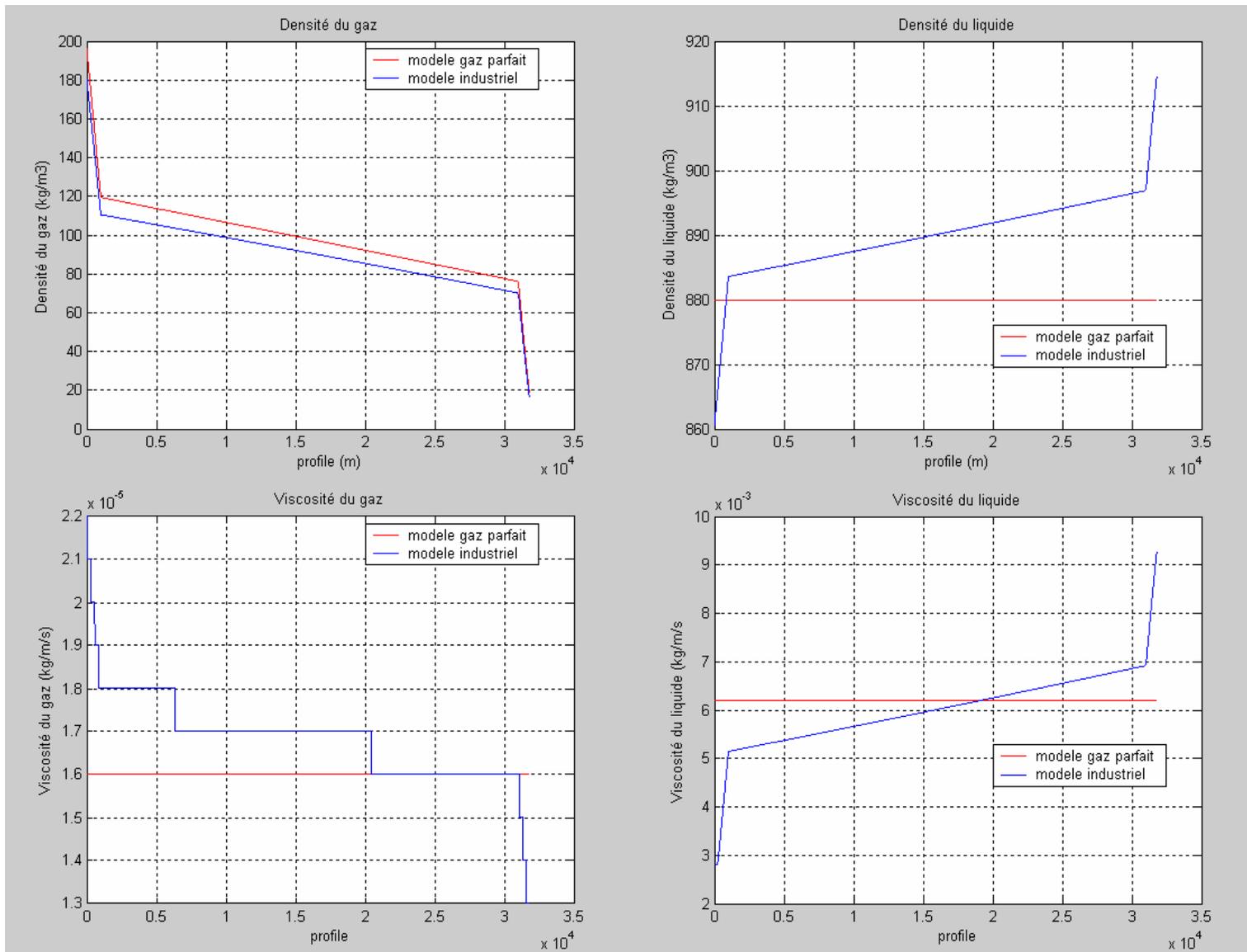
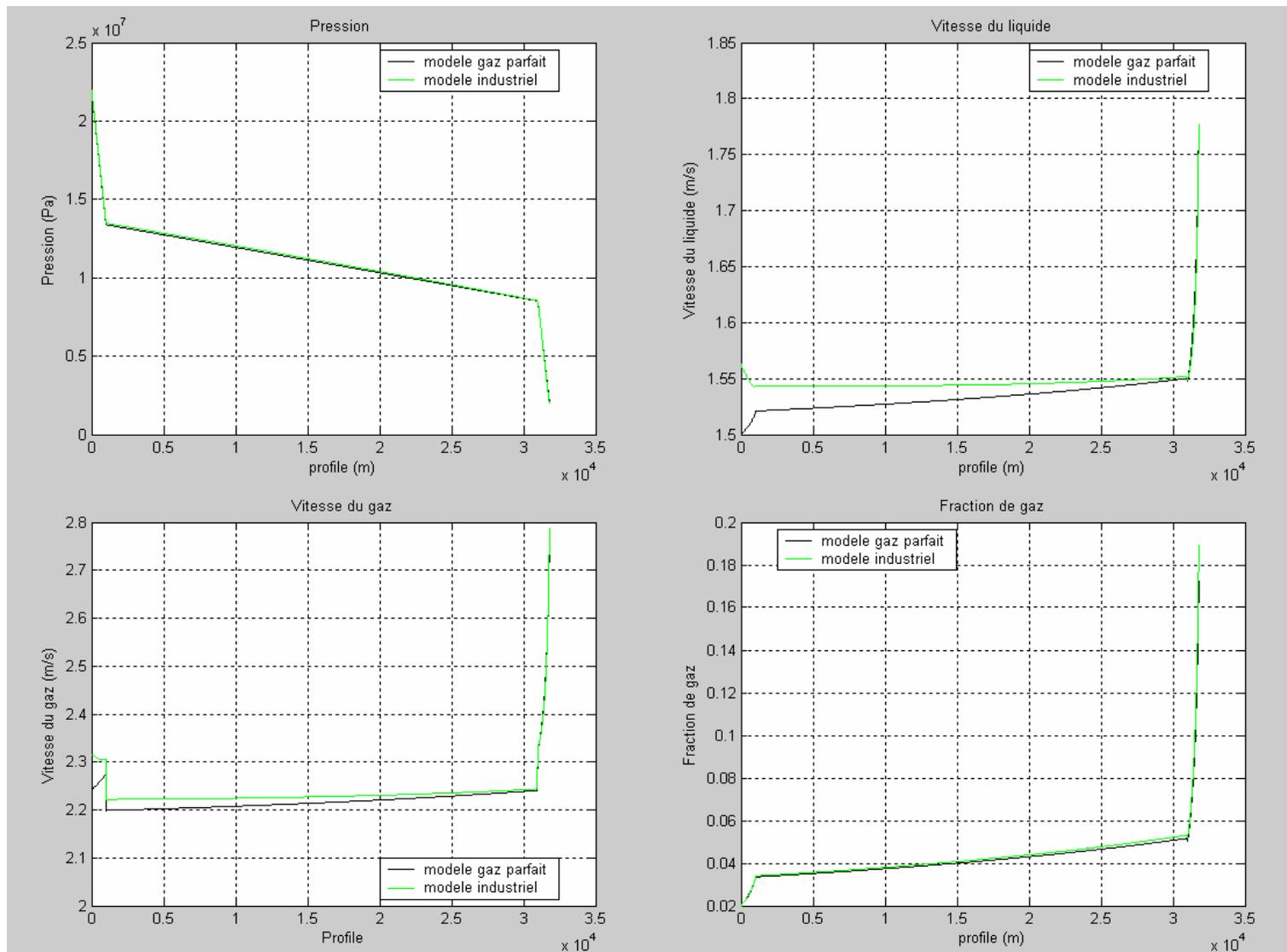


Figure V.7: Comparaison des deux choix de suivi des propriétés physiques (modèle homogène)



FigureV.8: Comparaison des paramètres d'écoulement des deux choix de suivi des propriétés physiques pour le modèle à flux de dérivation

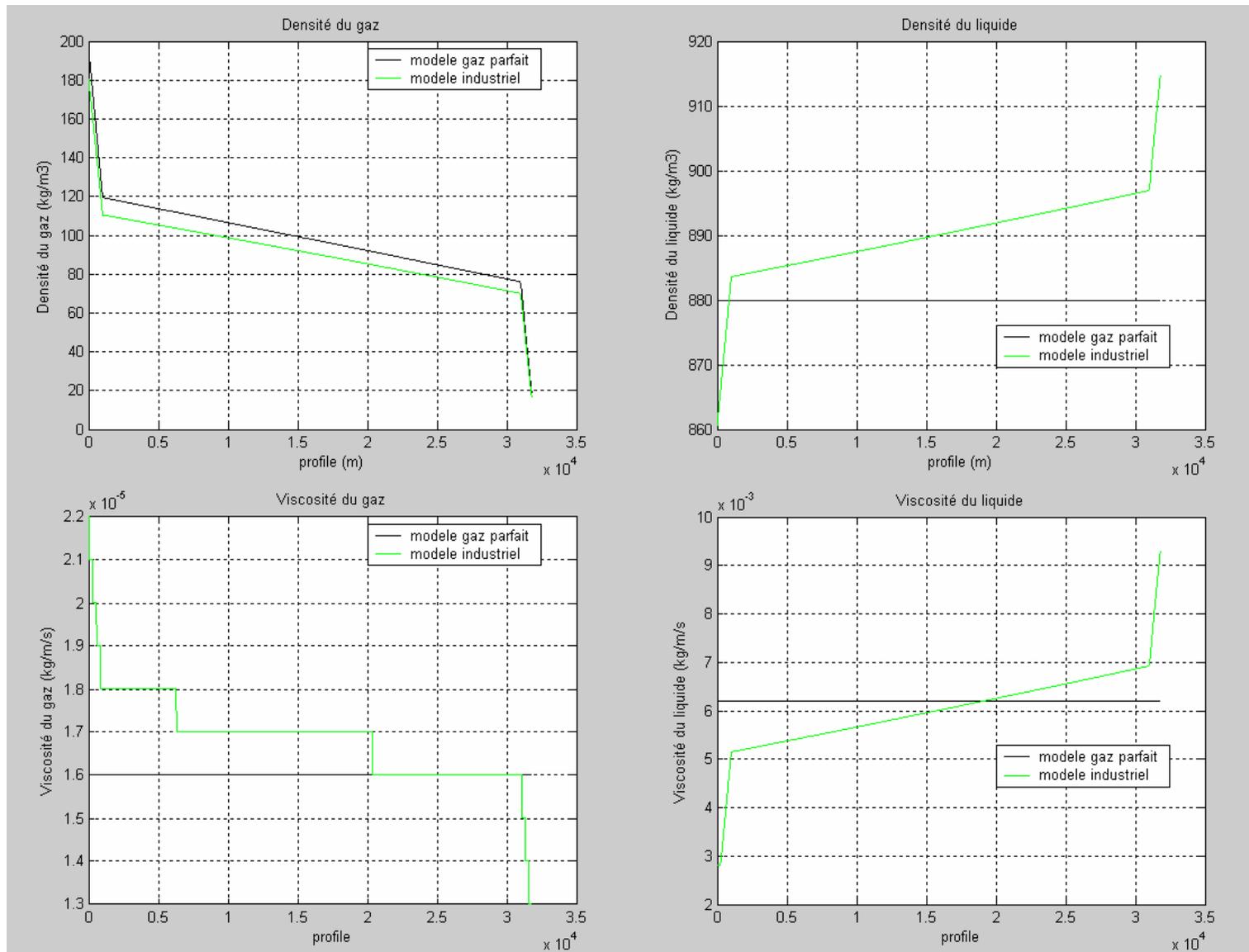


Figure V.9: Comparaison des deux choix de suivi des propriétés physiques (modèle à flux de dérive)

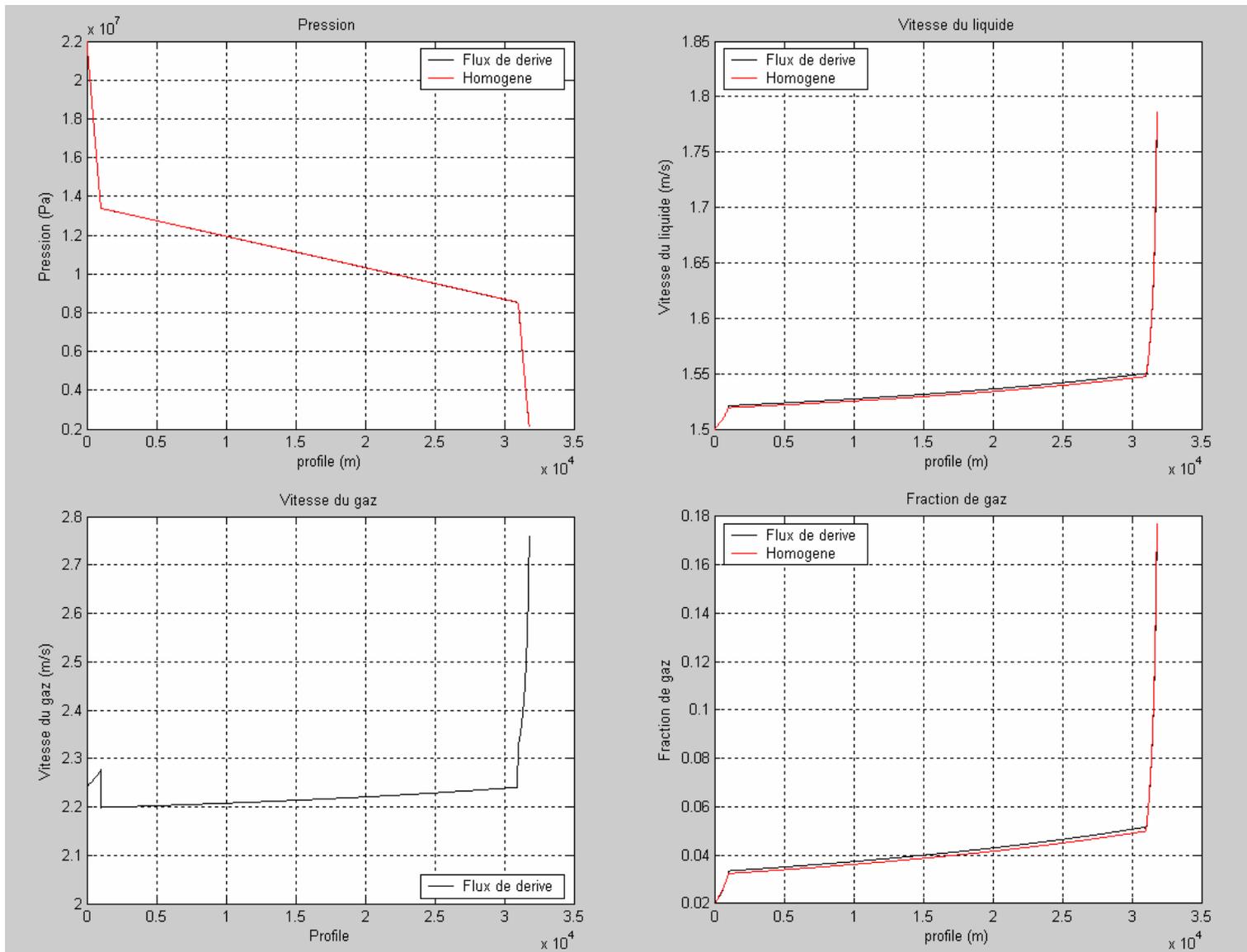


Figure V.10: Comparaison des paramètres d'écoulement des deux modèles diphasiques avec utilisation du modèle gaz parfait

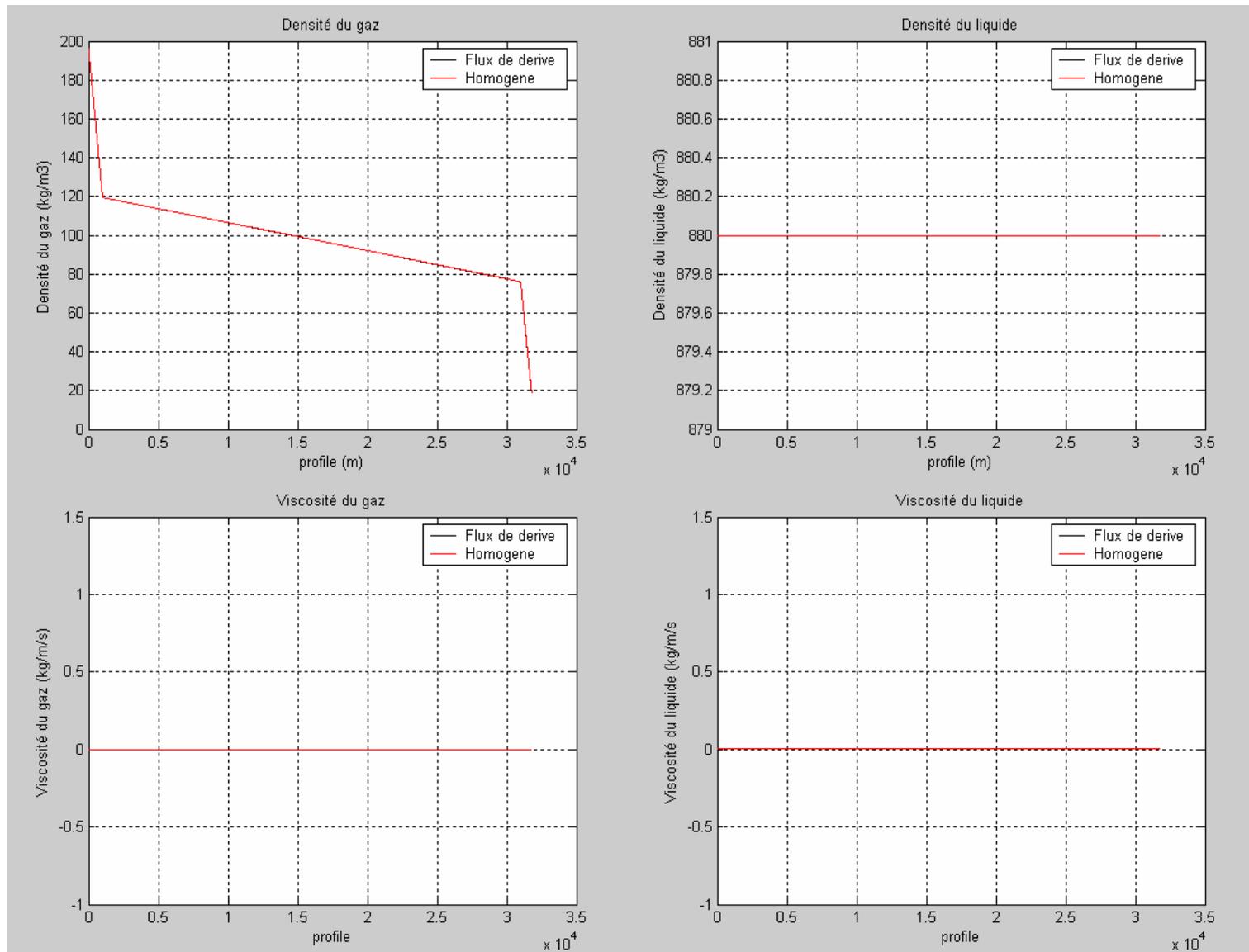


Figure V.11: Comparaison des propriétés physiques (gaz, pétrole) des deux modèles diphasique à l'aide du modèle gaz parfait

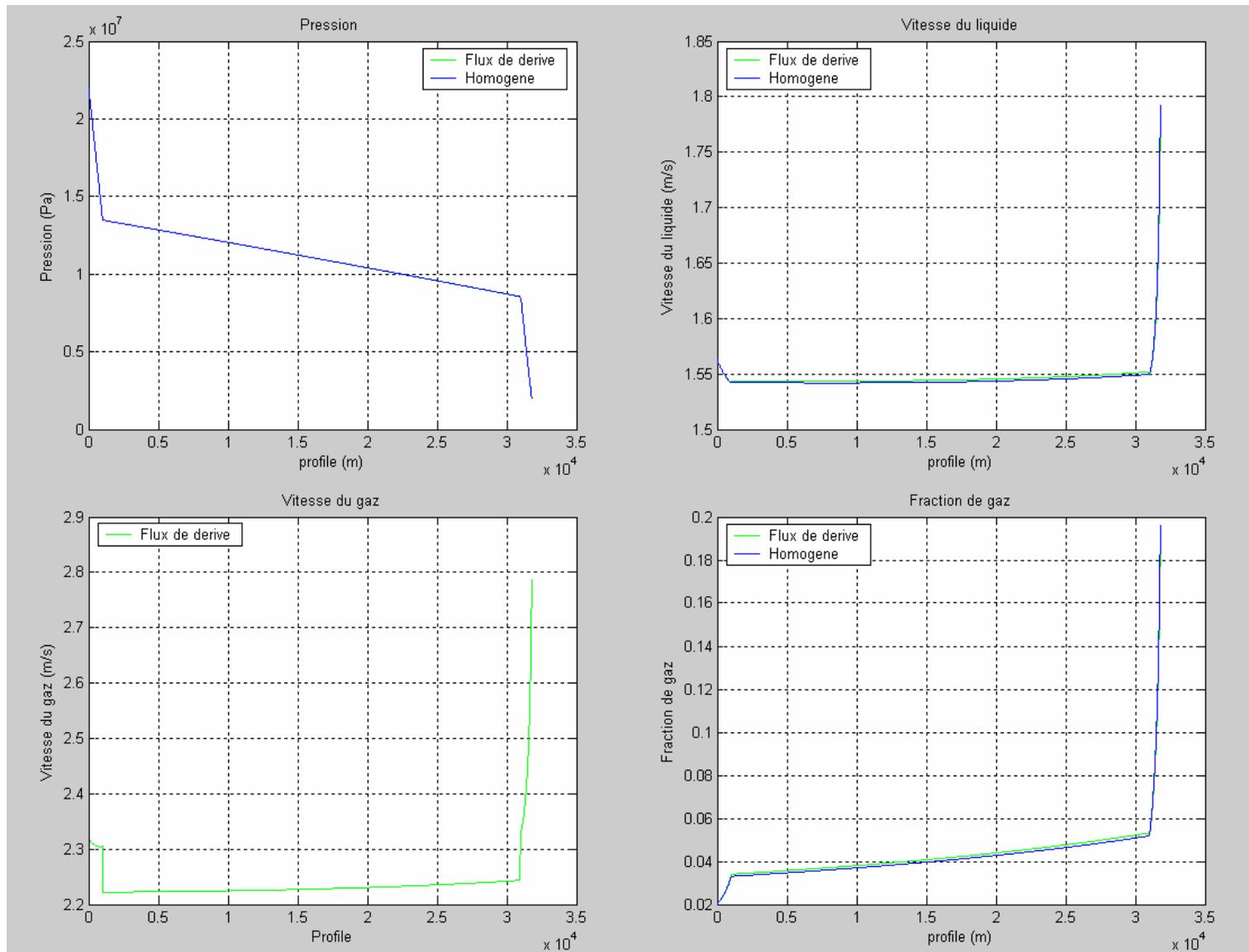


Figure V.12: Comparaison des paramètres d'écoulement des deux modèles diphasique avec utilisation du modèle industriel

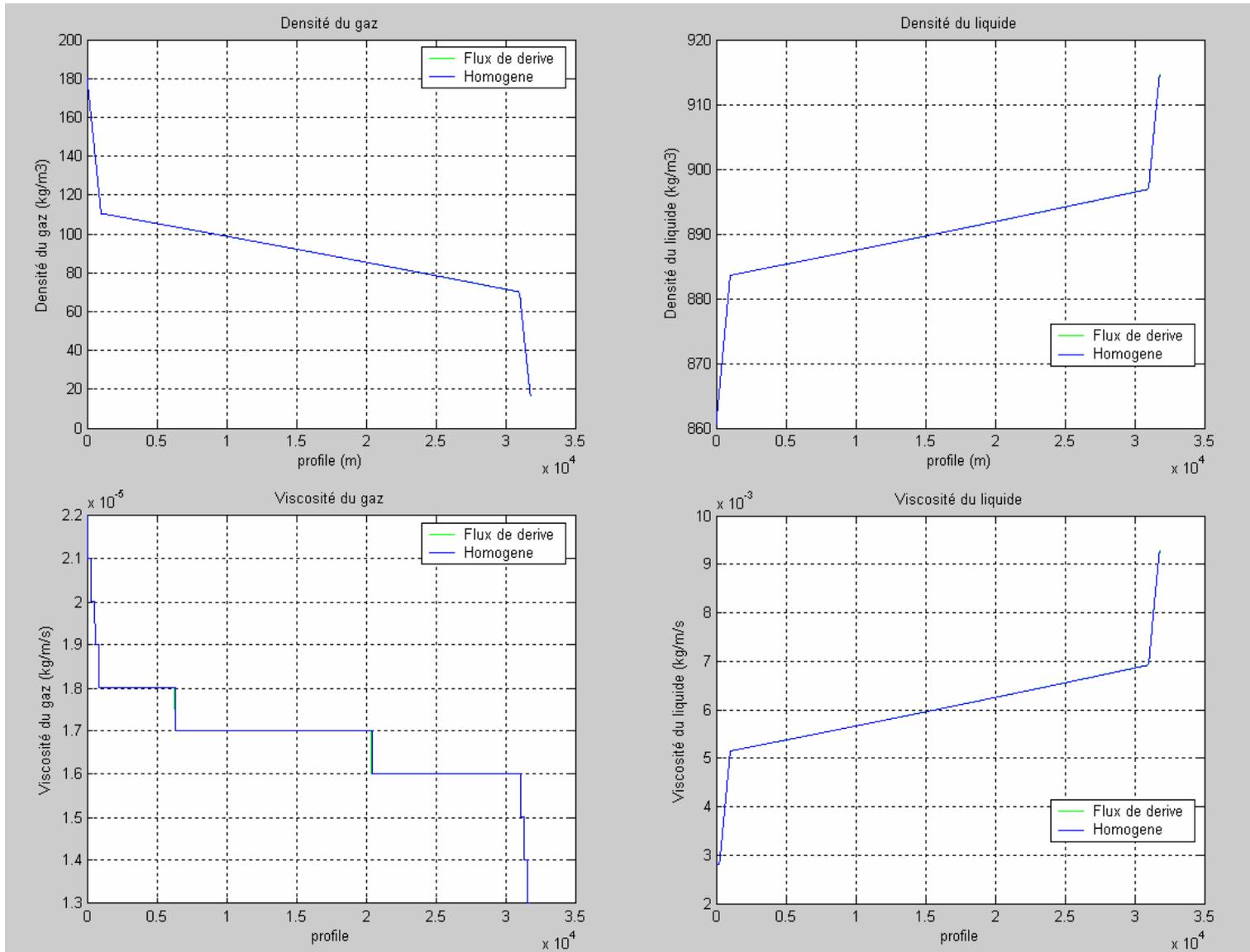


Figure V.13: Comparaison des propriétés physiques (gaz, pétrole) des deux modèles diphasique à l'aide du modèle gaz parfait

*V.7.2.b. commentaires*

On ne connaît pas ici le profil exacte des paramètres de l'écoulement, cependant lorsqu'on compare les résultats obtenus par les différentes combinaisons des modèles diphasique possibles avec ceux obtenus à l'aide du modèle monophasique, on constate une certaine ressemblance en ce qui concerne l'évolution des paramètres d'écoulement.

➤ *Comparaison des deux modèles des propriétés physiques des phases pour les deux modèles diphasiques :*

Après exécution des deux modèles, chacun avec leurs choix respectifs, nous avons constaté que la comparaison entre le modèle gaz parfait et le modèle industriel utilisés pour un modèle diphasique était semblable aussi bien pour la comparaison des paramètres d'écoulement que pour les propriétés physiques.

- *Paramètres d'écoulement :*

La comparaison des paramètres d'écoulement obtenus en utilisant les deux modèles de suivi de propriétés physique pour le modèle homogène et pour le modèle a flux de dérive sont très proches.

En effet, les représentations graphiques du taux de vide de même que celle de la pression ne permettent pas de faire la distinction entre les deux modèles, mais il est tout de même important de présenter un résultat clé de ces simulations, qui est l'ensemble des paramètres (propriétés physique et paramètres d'écoulement) donnés en sortie au niveau de la plate forme par les différentes combinaisons possibles.

En revanche, pour la vitesse du liquide, les deux modèles de suivi de propriétés donnent des résultats proches au niveau des conduites verticales de courte longueur, mais distinctifs dans la conduite horizontale du fait que la conduite horizontale soit d'une grandeur importante, ce qui laisse les petits écarts entre les deux modèles de suivi s'exprimer et apparaître sous forme d'espacements visibles entre les deux graphiques.

- *Propriétés physiques :*

Les paramètres physiques obtenus à partir des deux modèles de suivi sont différentes, car trois propriétés parmi les quatre, sont considérées constantes dans le modèle gaz parfait alors qu'elles évoluent continuellement durant toute l'extraction dans le modèle industriel.

- Densité du gaz : nous remarquerons que les densités trouvées sont pratiquement similaires dans les conduites verticales vu leur longueur "relativement courte", alors que dans le long pipe, nous remarquerons une différence entre les densités de gaz mais ces écarts n'influent pas sur la densité du mélange, car les densités du mélange à la sortie sont du même ordre.
- Densité du liquide : une des hypothèses du modèle gaz parfait est de considérer la densité du liquide constante, alors que le modèle industriel prend la densité du liquide comme étant fonction de la pression, ces deux approches donnent des résultats différents, nous remarquerons néanmoins que le graphique moyen des résultats obtenus avec le modèle industriel se rapproche de la droite du modèle gaz parfait ce qui donne une densité de mélange comparable.
- Viscosité du liquide et du gaz : dans le modèle gaz parfait, les viscosités des fluides sont constantes et restent les mêmes sur toute l'extraction, quant au modèle industriel prend en compte l'évolution des viscosités au cours de l'extraction, après consultation des propriétés physiques du mélange nous n'avons pas trouvés une grande différence pour la viscosité, malgré le fait que le modèle industriel possède le plus de viscosité.

➤ *Comparaison des deux modèles diphasique (modèle homogène et modèle à flux de dérive) :*

Les comparaisons entre les deux modèles sont données par les figures (V.10, V.11, V.12, V.13). Ces comparaisons restent, dans l'ensemble les mêmes, pour les deux cas de choix du modèle de suivi des propriétés physiques des phases.

- *Évolution de la pression :* Concernant l'évolution de la pression on retrouve le même profil que celui observé dans le modèle monophasique. En effet, on observe une chute de

pression tout au long du pipe, en précisant que les gradients de pression en conduite verticale est beaucoup plus important que dans la longue conduite horizontale, en vu de la force de gravité et des forces de frottement pariétales, qui tendent à retenir le fluide dans le cas d'écoulement ascendant.

- **Évolution de la vitesse du liquide** : il est clair que la comparaison entre les vitesses des deux fluides du mélange était le résultat le plus attendu dans cette exécution (comparaison entre les modèles diphasiques), et bien contrairement à nos attentes les différences ne sont pas aussi flagrantes que celles attendues, mais un léger zoom, pour agrandir l'échelle nous permettra de mieux apprécier ces différences, l'écart entre les vitesses de liquide données par les deux modèles ne peut s'expliquer que par l'existence d'une vitesse relative entre les phases dans le modèle à flux de dérive, ce qui modifie la vitesse du liquide, mais cette relativité entre les phases n'aura pas une grande influence sur la pression de sortie.
- **Évolution du taux de vide** : nous avons donné un taux de vide en entrée  $\alpha = 0.02$ , les deux modèles présentent une même forme d'évolution de ce paramètre, les courbes sont pratiquement superposées.

La fraction de vide croît au fur et à mesure que l'on se dirige vers la sortie, ceci s'explique par les bulles qui apparaissent durant l'extraction et qui ont tendance à se détendre lorsque la pression diminue, ce qui engendre un accroissement considérable du taux de vide, la forme des deux courbes semble être en accord avec l'explication physique du phénomène observé, et les résultats des deux modèles sont en parfaite adéquation.

- **Évolution de la vitesse du gaz** : la vitesse du gaz n'est représentée que dans le cas du modèle à flux de dérive car le modèle homogène ne fait pas de distinction entre les vitesses des phases, elle est la même ; nous remarquerons tout de même que la vitesse du gaz prend de l'ampleur, quand le taux de vide croît, et dépassera la vitesse du liquide sur le dernier tronçon, en vu de la faible pression régnante en sortie (20 bars en sortie).

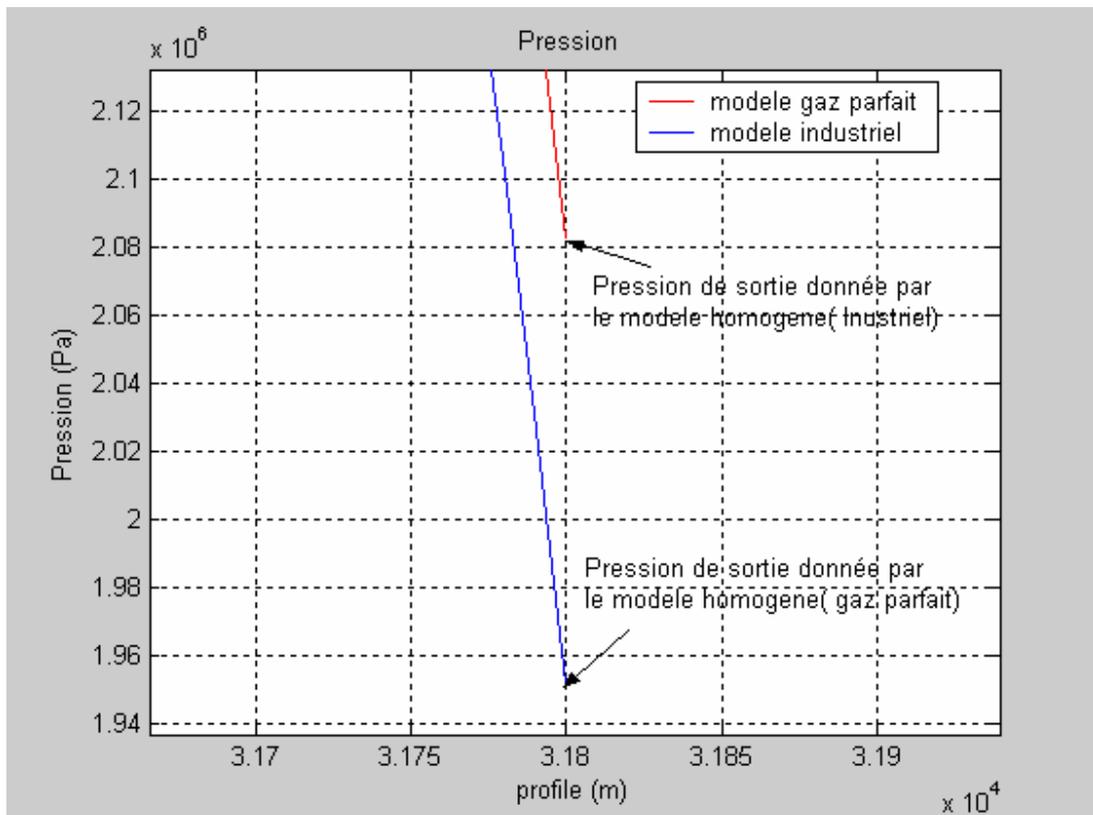
Remarque importante :

Les différents résultats graphiques présentés dans ce mémoire sont une copie des résultats trouvés à l'aide du logiciel Matlab, cette échelle ne permet pas d'observer les écarts dans certaines figures, pour ressortir ces écarts et faire une meilleure estimation, il nous faudra soit :

- consulter les fichiers textes archivés où l'ensemble des jeux de sortie sont donnés pour les différentes évolutions : le tableau (V.6) est un récapitulatif des résultats trouvés dans le cas de notre application à la sortie (dernière section),
- faire un zoom, un exemple de zoom est donné par la figure (V.13).

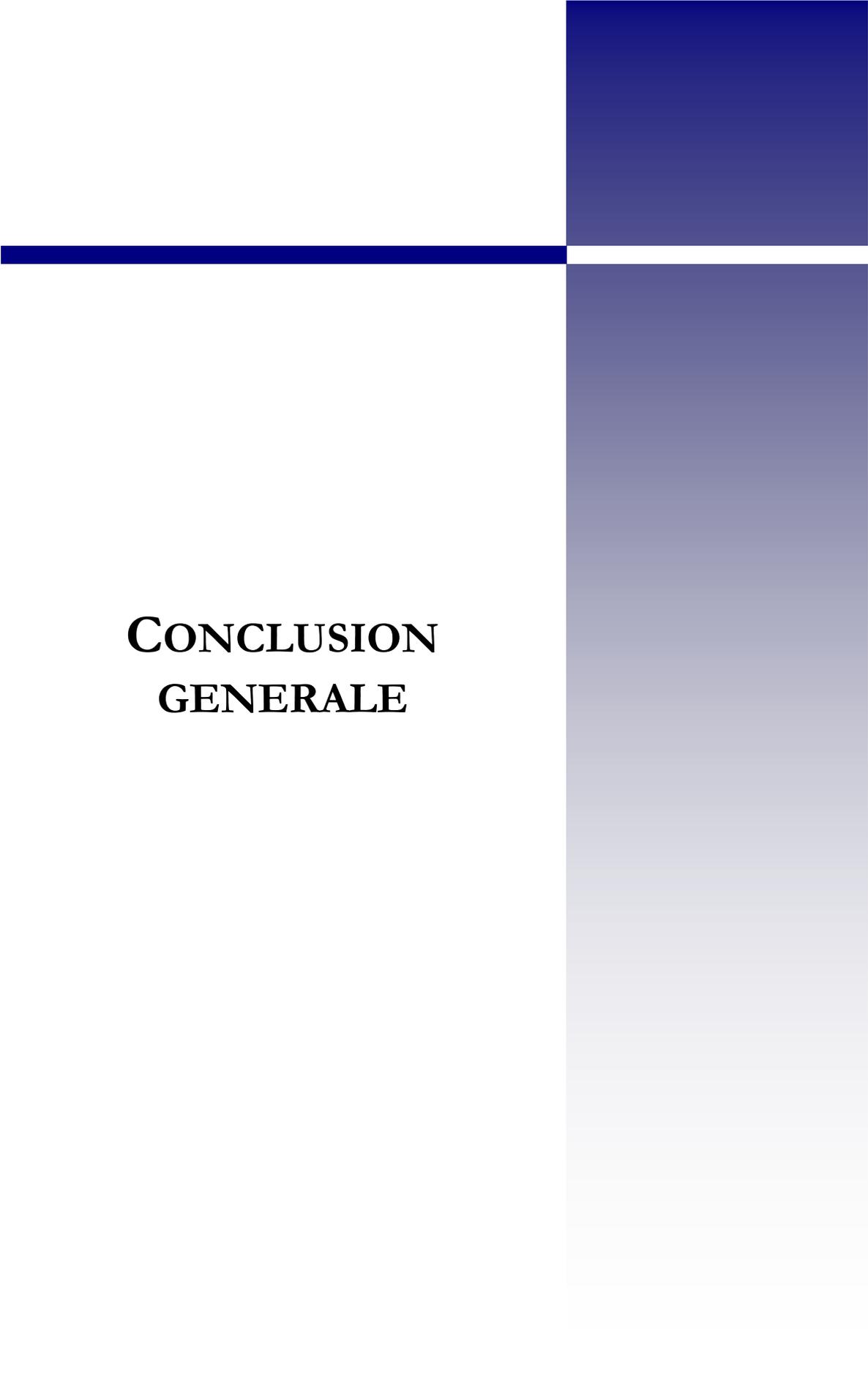
Paramètres à la sortie	(homogène)		(Flux de dérive)	
	Gaz parfait	Industriel	Gaz parfait	Industriel
Pression (Pa)	2.0824e+006	1.9518e+006	2.0629e+006	1.926e+006
Vitesse du liquide (m/s)	1.7869	1.7929	2.7625	2.7886
Vitesse du gaz (m/s)	1.7869	1.7929	1.7778	1.7782
Taux de vide (à la sortie)	0.17737	0.19647	0.17313	0.18988
Densité du gaz	18.583	16.004	18.41	15.793
Densité du liquide (kg/m <sup>3</sup> )	880	914.73	880	914.8
Viscosité du gaz (kg/m/s)	1.6e-005	1.3e-005	1.6e-005	1.3e-005
Viscosité du liquide (kg/m/s)	0.0062	0.009297	0.0062	0.009307
Densité du mélange (kg/m <sup>3</sup> )	727.21	738.16	730.83	744.1

**Tableau V.6 : Récapitulatif des résultats (paramètres en sortie) après exaction des différents programmes**



**Figure V.14 : Exemple de zoom sur un résultat graphique.**

Il est difficile de porter un jugement sur la validité des résultats, ceci dit nous n'avions pas rencontré d'incohérence ou de contradiction flagrante, de plus l'idée de faire une approche monophasique nous a permis de mieux aborder nos résultats car les résultats obtenus sont en accord avec les évolutions usuelles du modèle monophasique, même si cette adéquation ne nous permet que d'évaluer l'approche choisie. Quant à l'exactitude des résultats, cette démarche ne nous permet pas de la vérifier.



**CONCLUSION  
GENERALE**

**Synthèse du projet :**

Ce projet de fin d'études nous a fait prendre conscience de la difficulté rencontrée lors des études d'écoulements diphasiques aussi bien sur le plan théorique que sur le plan pratique. En effet la première partie, essentiellement basée sur la théorie des écoulements, illustre la difficulté et la complexité des différentes formulations mathématiques utilisées sans pour autant négliger les multiples interprétations physiques des phénomènes observés. Dans cette partie nous avons présenté les différents types d'écoulement en mettant l'accent sur les écoulements diphasiques type gaz liquide.

Une fois, familiarisés avec les écoulements gaz-liquide, nous avons présenté les éléments théoriques à savoir les bilans de conservations locaux, les différentes lois constitutives et les raccordements aux interfaces. Ces notions sont nécessaires à la compréhension de ces phénomènes.

Afin de pouvoir exploité les bilans établis nous avons moyenné nos bilans de manière à ce qu'on puisse les manipuler, ce processus de moyenne sera la base de la modélisation.

Sur cette idée, nous avons développé la deuxième partie de ce projet de fin d'études qui fait l'objet d'une étude pratique d'un cas d'écoulements diphasiques, nous nous sommes intéressé à l'industrie pétrolière, l'extraction d'un gisement de pétrole offshore. Cette application nous a permis de découvrir de l'intérieur le monde du pétrole, chose qui nous a confronté à la rigueur exigée de l'approche théorique choisie pour aborder ce genre de problème.

Pour faire une étude complète de notre installation, nous avons dimensionné notre conduite, puis simuler l'écoulement, les conditions aux limites sont les pressions d'entrée et de sortie du mélange, à cet effet trois modèles ont été testés. Leur but est de prédire la vitesse de sortie du liquide afin d'arriver à la pression exigée et de suivre l'évolution des différents paramètres d'écoulement, ainsi que les propriétés physiques des fluides,

- L'approche monophasique : on considère l'écoulement monophasique, il servira de repère, son but est de donner un ordre de grandeur des paramètres d'écoulement des phases, les résultats obtenus étaient cohérent et ne présentaient pas de aberrations.
- l'approche diphasique qui se rapproche plus du cadre réel. Pour cette approche nous avons simulé l'extraction à l'aide de deux modèles diphasiques (le modèle homogène et le modèle à flux de dérive), les deux modèles présentent, les mêmes choix de suivi de propriétés physiques de l'huile, et du gaz, le premier modèle de suivi des propriétés physiques est le modèle usuel du gaz parfait, le second est un modèle propre à l'industrie pétrolière que nous avons appelé modèle industriel qui suit l'évolution des densités et des viscosité en fonction des pressions.
  - Le premier modèle diphasique est le modèle homogène qui est très utilisé dans l'industrie pétrolière, ce qui le caractérise, c'est l'hypothèse que les deux fluides possèdent la même vitesse, il a été exécuté à deux reprises, la première avec utilisation du modèle gaz parfait pour le suivi des propriétés physiques, la deuxième à l'aide du modèle industriel; puis nous avons comparé les résultats obtenus afin de voir l'impact, du choix de modèle de calcul des propriétés physiques ; les résultats obtenus étaient similaires.
  - Le deuxième modèle diphasique est le modèle à flux de dérive, son hypothèse repose sur l'existence d'un mouvement relatif entre les phases, nous avons entrepris la même démarche que celle du modèle homogène. puis nous avons comparé les résultats, tout comme pour le modèle homogène les résultats étaient globalement ressemblants.

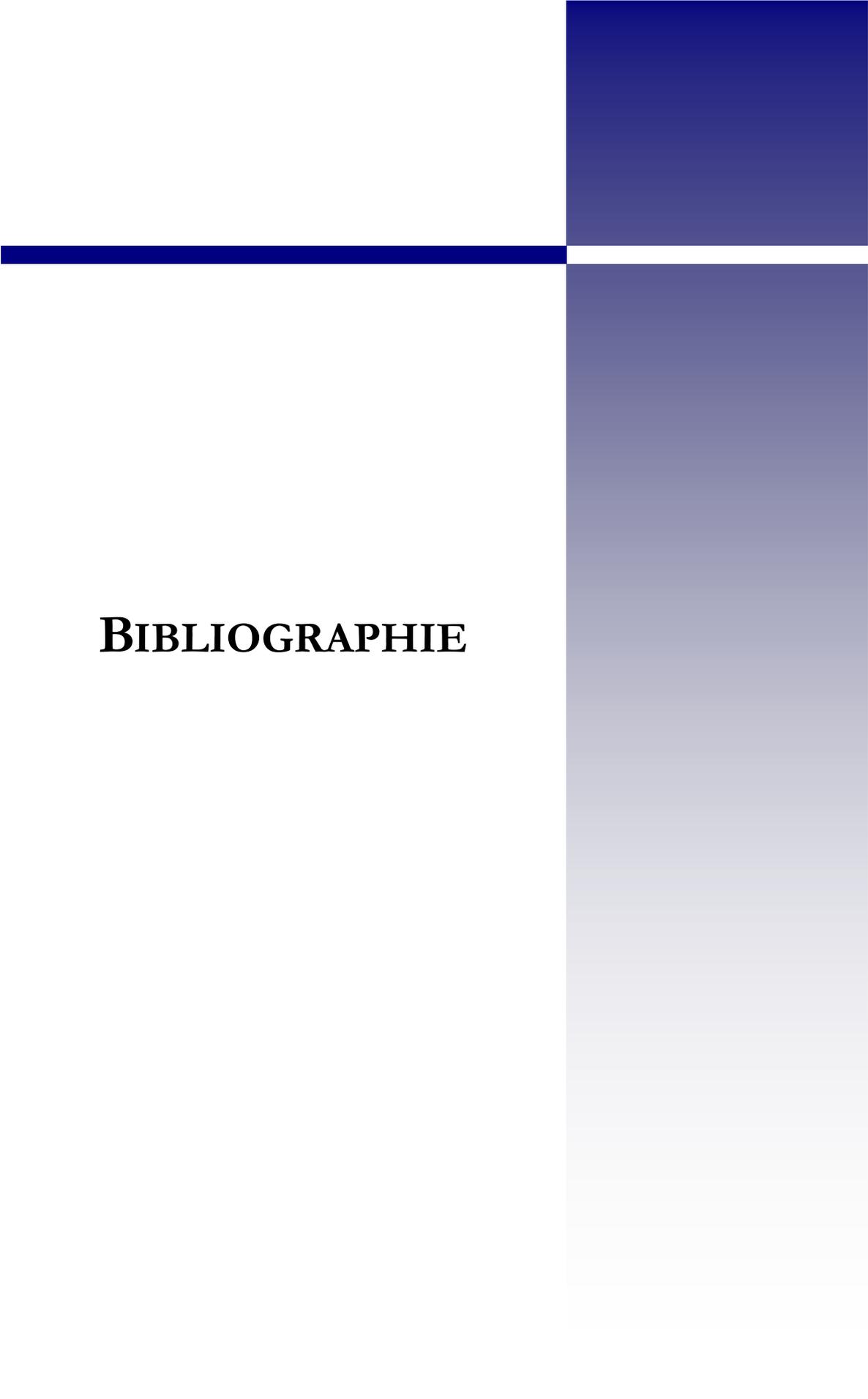
Pour finir, nous avons interprété les résultats obtenus à partir de la simulation, et comparé les deux modèles diphasiques avec des choix de suivi de propriétés physiques communs afin de mettre en valeur l'hypothèse du modèle à flux de dérive et observer les différences qu'engendre la relativité de mouvement entre les phases. La prise en compte d'une vitesse relative entre les phases n'a pas laissé paraître des différences flagrantes entre les deux modèles diphasiques. Les résultats obtenus

étaient semblables aussi bien pour le choix du modèle gaz parfait, que pour celui du modèle industriel. Les différentes exécutions et comparaisons effectuées ont fait l'objet d'une étude assez complète de l'installation.

**Recommandations :**

À travers ce projet, nous avons pu nous confronter à une situation industrielle et sortir ainsi du carcan académique. Cependant, il est regrettable de ne pas avoir un logiciel de calcul établi avec lequel nous aurions pu comparer nos résultats. C'est pour cela qu'il serait intéressant de traiter ce genre d'application avec l'appui d'un logiciel reconnu, on citera (FLUENT) pour les écoulements de fluides de manière générale et (TACITE, OLGA) dans le cadre de notre application, et aussi d'ajouter le modèle cellulaire comme troisième modèle diphasique en se référant aux mémoires de Monsieur H. Ziani [45] et de Messieurs C. Bentalha et B. Bouzemplal [46].

Du point de vue théorique, la moyenne sur laquelle nous nous sommes le plus penché est la moyenne statistique avec moyenne barycentrique, il serait enrichissant de présenter les bilans moyennés dans le temps et dans l'espace.

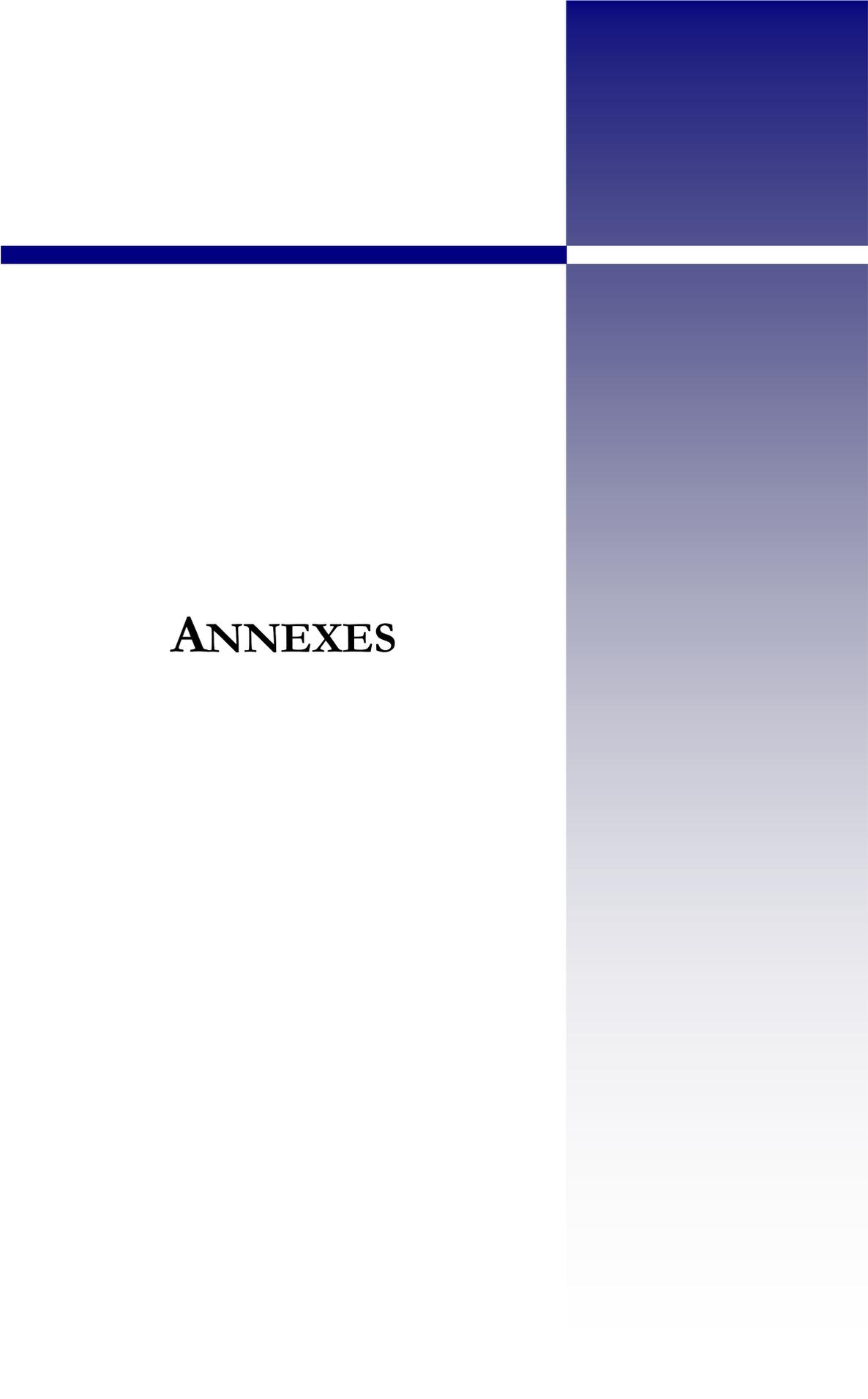


# **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] J.BONNIN, article Écoulement des fluides dans les tuyauteries technique de l'ingénieur [A 738] du traité Sciences fondamentales.
- [2] J.M FITREMANN, article Écoulements diphasiques gaz-liquide technique de l'ingénieur [A 722]
- [3] G. F. Hewitt, Two phase flows, Electronic data center,2005
- [4] G. F. Hewitt, Two-phase flow GAS-LIQUID, Electronic data center,2005
- [5] G. F. Hewitt, void fraction gaz- liquid flow, multiphase flows, Electronic data center,2005
- [6] C. Colin, Ecoulements diphasiques avec changement de phase, 2004
- [7] G. B Wallis, "One dimensional two-phase flows", Mc Graw-Hill, New-York., (1969),
- [8] M.L. Corradini, FUNDAMENTALS OF MULTIPHASE FLOW, Department of Engineering Physics University of Wisconsin, Madison WI 53706,1997
- [9] J. BONNIN et J.M.FITREMANN, Configurations d'écoulements gaz-liquide, La Houille Blanche (F), no 5 (1978).
- [10] J.M.Delhay, Ecoulements diphasiques, Ecole centrale des arts et manufacture DEA Energétique,1991.
- [11] F.aloui, Ecoulement diphasique, université de Nantes DEA diphasique;2002
- [12] A. Liné J. Fabre, STRATIFIED GAS-LIQUID FLOW, edata center,2005
- [13] Inclinaable Multiphase Flow Loop, The University of Texas, 2006
- [14] A. I. Kataoka, BUBBLE FLOW, Serizawa, A-to-Z Guide to Thermodynamics, Heat & Mass Transfer, and Fluids Engineering - 2005
- [15] Yu. A. Zeigarnik, ANNULAR FLOW Gas-liquid flow, Electronic data center 2005
- [16] G. F.Hewitt, WISPY ANNULAR FLOW, A-to-Z Guide to Thermodynamics, Heat & Mass Transfer, and Fluids Engineering - 2005
- [17] J Fabre&A Liné, SLUG FLOW, A-to-Z Guide to Thermodynamics, Heat & Mass Transfer, and Fluids Engineering - 2005
- [18] G.Le Coq, Analyse des modélisations pour la mécanique des fluides : Application aux écoulements diphasiques. ENS Cachan, 2005.
- [19] P. Fichou, Mécanique des fluides promotion IGE 2001-2002
- [20] J.Fabre, Equations générales des écoulements diphasiques, ENSEEIHT ENP toulouse,1990.
- [21] M. Ishii, "Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow", Eyrolls, Collection de la Direction des Etudes et Recherche d'Electricité de France. , (1975).
- [22] G.Bellakhal, MODELISATION DES ECOULEMENTS TURBULENTS A BULLES, These de doctorat, INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE spécialité : DYNAMIQUE DES FLUIDES, le 07 Mars 2005
- [23] J.M. FITREMANN, article Écoulements diphasiques gaz-liquide Lois générales, technique de l'ingénieur [A 720] du traité Sciences fondamentales.
- [24] P.Marty, COURS DE MECANIQUE DES FLUIDES, Université Joseph Fourier, Grenoble septembre 2001-2002
- [25] S.T. Munkejord, Analysis of the two-fluid model and the drift-flux model

For numerical calculation of two-phase flow, These de doctorat, Norwegian University of Science and Technology Faculty of Engineering Science and Technology Department of Energy and Process Engineering, janvier 2006

- [26] Wikipedia, encyclopédie coopérative et gratuite au contenu librement réutilisable, fr.wikipedia.org
- [27] J.M. FITREMANN, article Écoulements diphasiques notations et équations, technique de l'ingénieur [A 721]
- [28] D. A.Drew, "Mathematical modelling of two-phase flow", 1983
- [29] I. F. Roberts, CONSERVATION EQUATIONS, TWO-PHASE, A-to-Z Guide to Thermodynamics, Heat & Mass Transfer, and Fluids Engineering - 2005
- [30] A. MURRONE, Modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach, UNIVERSITE DE PROVENCE (Aix-MarseilleI), Ecole Doctorale Mécanique Physique et Modélisation, décembre 2003
- [31] J.M Delhaye, Some issues occuring when modeling interfacial areas, Septembre 2000
- [32] J.A. Bouré, et J.M. Delhaye, General equations and two phase flow modelling , G.Hestsroni. Handbook of multiphase systems.
- [33] E.A Guggenheim, thermodynamique, Dunod,
- [34] J.L. Estivalezes, NOTES DE COURS turbulence, 11 octobre 2005
- [35] O. gregoire et A. Cumbaro, Introduction aux modèles industriels pour les écoulements liquide-gaz, Cours premier, second, troisième. Université paris VI, CEA Scalay-LETR, Janvier 2006
- [36] Bureau d'étude industrielles diphasique: Dimensionnement d'une installation de transport pétrolier à partir d'un gisement off-shore analyse des transitions de configuration ,INPT enseeiht Toulouse, 2005
- [37] science et vie junior, "offshore", 2006
- [38] Bureau d'étude industrielles : Dimensionnement d'une installation de transport pétrolier à partir d'un gisement off-shore, Enseeiht Toulouse, 2002
- [39] Bureau d'étude industrielles, Dimensionnement d'une installation de transport pétrolier à partir d'un gisement off-shore, Enseeiht Toulouse, 2004
- [40] Bureau d'étude industrielles, Boucle de refroidissement d'un satellite,2005
- [41] G. F. Hewitt, DRIFT FLUX MODELS, eedata encyclopedie A to Z ,2005
- [42] Bureau d'étude industrielles Exploitation d'un champ pétrolier offshore en eau peu profonde : dimensionnement et activation par gaz-lift, Enseeiht Toulouse,2003
- [43] F.aloui, Présentation de Matlab, Université de Nantes juin 2002
- [44] F.aloui, Méthodes numériques, Université de Nantes 2002
- [45] H.Ziani,Etude d'un écoulement diphasique air-eau dans une conduite cylindrique verticale par le modèle cellulaire,Mémoire de projet de fin d'études Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, département Hydraulique,promotion 2005.
- [46] C. Bentalha & B.Bouzemlal,Etude théorique et pratique d'un écoulement diphasique,Mémoire de projet de fin d'études Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, département Hydraulique,promotion 1999.



# **ANNEXES**

# **Annexe A**

## **Généralités**

## Généralités

### Définitions des opérateurs vectoriels et tensoriels

- Le vecteur rotationnel d'une fonction vectorielle

$$\begin{aligned}
 \text{rot}\mathbf{F} &= \varepsilon_{ijk}F_{k,j}\mathbf{e}_i \\
 &= \left(\frac{1}{r}F_{z,\theta} - F_{\theta,z}\right)\mathbf{e}_r + (F_{r,z} - F_{z,r})\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}[(rF_\theta)_{,r} - F_{r,\theta}]\mathbf{e}_z \\
 &= \left(\frac{1}{r}F_{\varphi,\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}F_{\theta,\varphi} + \frac{\cot\theta}{r}F_\varphi\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}F_{r,\varphi} - F_{\varphi,r} - \frac{1}{r}F_\varphi\right)\mathbf{e}_\theta \\
 &\quad + (F_{\theta,r} - \frac{1}{r}F_{r,\theta} + \frac{1}{r}F_\theta)\mathbf{e}_\varphi
 \end{aligned}$$

- Le vecteur divergence d'un tenseur du second ordre symétrique

$$\begin{aligned}
 \text{div}(\overline{\overline{\mathbf{F}}}) &= F_{ij,j}\mathbf{e}_i \\
 &= [F_{rr,r} + \frac{F_{r\theta,\theta}}{r} + F_{rz,z} + \frac{F_{rr} - F_{\theta\theta}}{r}]\mathbf{e}_r + [F_{\theta r,r} + \frac{F_{\theta\theta}}{r} + F_{\theta z,z} + 2\frac{F_{r\theta}}{r}]\mathbf{e}_\theta \\
 &\quad + [F_{zr,r} + \frac{F_{z\theta}}{r} + F_{zz,z} + \frac{F_{zr}}{r}]\mathbf{e}_z \\
 &= \left[\frac{\partial F_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial F_{r\theta}}{r\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \left(\frac{2}{r}F_{rr} - F_{\theta\theta} - F_{\varphi\varphi}\right) + \frac{\cot\theta}{r}F_{r\theta}\right]\mathbf{e}_r \\
 &\quad + \left[\frac{\partial F_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial F_{\theta\theta}}{r\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{3}{r}F_{r\theta} + \frac{\cot\theta}{r}(F_{\theta\theta} - F_{\varphi\varphi})\right]\mathbf{e}_\theta \\
 &\quad + \left[\frac{\partial F_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{\partial F_{\varphi\theta}}{r\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{3}{r}F_{r\varphi} + 2\frac{\cot\theta}{r}F_{\varphi\theta}\right]\mathbf{e}_\varphi
 \end{aligned}$$

- Le tenseur gradient d'une fonction vectorielle

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{\text{grad}\mathbf{F}}} &= F_{i,j}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
 &= \begin{pmatrix} F_{r,r} & \frac{(F_{r,\theta}-F_\theta)}{r} & F_{r,z} \\ F_{\theta,r} & \frac{(F_{\theta,\theta}+F_r)}{r} & F_{\theta,z} \\ F_{z,r} & \frac{F_{z,\theta}}{r} & F_{z,z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} F_{r,r} & \frac{F_{r,\theta}-F_\theta}{r} & \frac{F_{r,\varphi}}{r\sin\theta} + \frac{F_\varphi}{r} \\ F_{\theta,r} & \frac{(F_{\theta,\theta}+F_r)}{r} & \frac{F_{\theta,\varphi}}{r\sin\theta} - \frac{F_\varphi\cot\theta}{r} \\ F_{\varphi,r} & \frac{F_{\varphi,\theta}}{r} & \frac{F_{\varphi,\varphi}}{r\sin\theta} + \frac{F_r}{r} + \frac{F_\theta\cot\theta}{r} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

### Propriétés des opérateurs :

$$\text{div}(\text{rot}\mathbf{F}) = 0$$

$$\text{rot}(\text{grad}f) = 0$$

$$\text{rot}(f\mathbf{F}) = f\text{rot}\mathbf{F} + \text{grad}f \wedge \mathbf{F}$$

$$\text{div}(f\mathbf{F}) = f\text{div}\mathbf{F} + \text{grad}f \cdot \mathbf{F}$$

$$\text{div}(\text{grad}f) = \Delta f$$

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{F}) = \text{grad}(\text{div}f) - \Delta\mathbf{F}$$

## Dérivées Lagrangienne et Eulérienne

Les dérivées utilisées en mécanique du point sont calculées dans un repère attaché à ce point.

Ce type de dérivée s'appelle une dérivée Lagrangienne. Si c'est une grandeur  $T$  que l'on dérive par rapport au temps, cette dérivée s'écrit:

$$\frac{DT}{Dt}$$

et on parle aussi de dérive droite pour la désigner.

En Mécanique des Fluides, il est souvent préférable d'écrire et de calculer les dérivées des variables (vitesse, pression, température, etc...) en un point déterminé et fixe de l'espace. Ce type de dérivée, dite Eulérienne ou encore dérivée ronde, s'écrit, toujours pour le cas particulier de la température dérivée par rapport au temps:

$$\frac{\partial T}{\partial t}$$

Ces 2 dérivées sont liées l'une à l'autre et donne naissance à la dérivée particulière de la grandeur  $T$ , dans le cas où celle-ci ne dépend que d'une seule direction,  $x$ , cette dernière s'écrit :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + U_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

Si  $T$  est un vecteur :

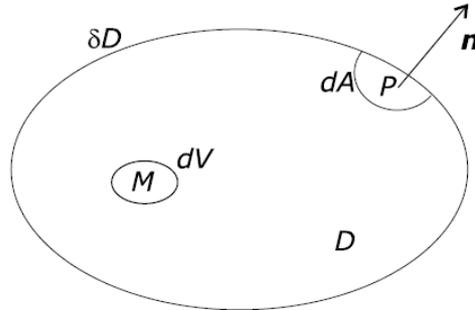
$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{dt} + U \cdot \nabla \vec{T}$$

Pour un tenseur on écrit :

$$\frac{d\overline{\overline{T}}}{dt} = \frac{\partial \overline{\overline{T}}}{\partial t} + U \cdot \nabla \overline{\overline{T}}$$

## Théorèmes généraux

On note  $D$  un domaine fluide de frontière  $\partial D$ . Soit  $dV$  un élément de volume entourant un point  $M$  du domaine, et  $dA$  un élément de surface de  $\partial D$  entourant un point  $P$  où la normale à la frontière est  $\mathbf{n}$  – voir figure ci-dessous –.



– Le théorème de la divergence et ses applications

Si  $F_{ijk}(M,t)$  est une fonction continue sur le domaine  $D$ , alors :

$$\int_D F_{ijk,k} dV = \int_{\partial D} F_{ijk} n_k dA$$

• Le théorème d'Ostrogradsky :

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$$

• Le théorème de Green :

$$\int_D \operatorname{grad} f dV = \int_{\partial D} f \mathbf{n} dA$$

•

$$\int_D \operatorname{rot} \mathbf{F} dV = \int_{\partial D} \mathbf{n} \wedge \mathbf{F} dA$$

•

$$\int_D \operatorname{div} \overline{\mathbf{F}} dV = \int_{\partial D} \overline{\mathbf{F}} \mathbf{n} dA$$

– Le théorème de Stokes :

$$\int_C \mathbf{F}(M,t) d\mathbf{M} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$$

– Le théorème de l'intégrale nulle :

$$\int_d f(M,t) dV = 0 \quad \forall d \subset D \iff f(M,t) = 0 \quad \forall M$$

## **Théorème de transport de Reynolds**

Le théorème de transport de Reynolds (règle de Leibnitz) est un outil mathématique capital dans la démarche de modélisation, il permet le passage de la dérivée de l'intégrale à l'intégrale de la dérivée comme suit :

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_A f \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dA$$

Où  $\mathbf{U}$  est le vecteur vitesse de la particule fluide et  $\mathbf{n}$  est un vecteur normal à la surface fermée (A)

Tel que

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

Le théorème de transport est aussi applicable pour toutes grandeur (scalaire, vecteur, tenseur) ainsi nous avons :

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{f} dV = \int_V \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} dV + \oint_A \vec{f} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dA \text{ pour un vecteur}$$

Et

$$\frac{d}{dt} \int_V \overline{\overline{f}} dV = \int_V \frac{\partial \overline{\overline{f}}}{\partial t} dV + \oint_A \overline{\overline{f}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dA$$

# **Annexe B**

## **Similitudes**

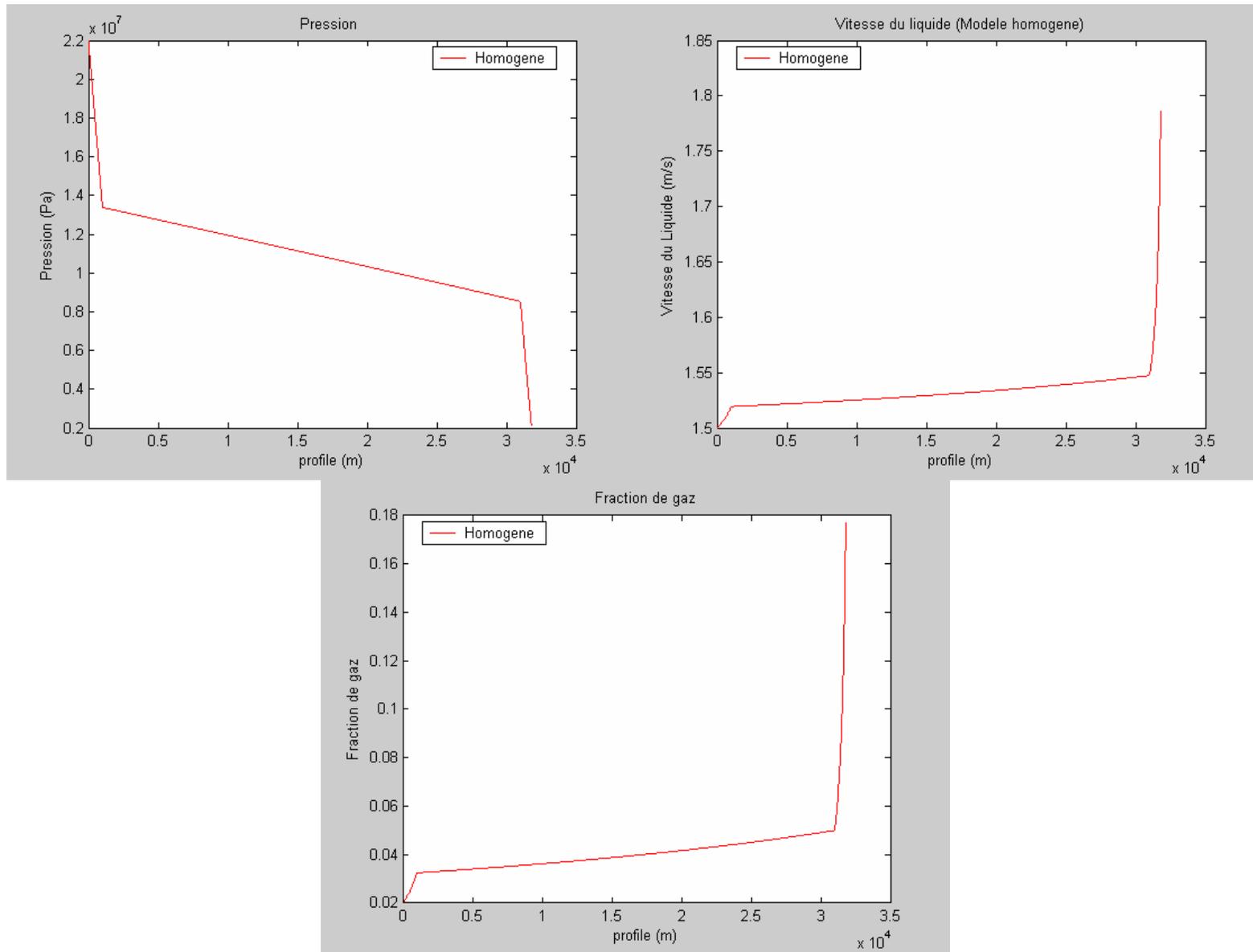
## Similitude générale

On choisit une unité de longueur  $L_0$ , de masse où  $\rho_0$  est une masse volumique de référence, une unité de temps où  $V_0$  est une vitesse de référence, et une unité de température  $T_0$ . À l'aide de ces unités, on peut écrire sous forme non dimensionnelle les équations de conservation phasiques (géométrie, masse, quantité de mouvement et énergie si l'on a besoin de décrire les phénomènes thermiques), les bilans d'interface, les équations d'état ou de propriétés physiques et les conditions aux limites. On trouve alors les équations indéfinies du mouvement et des variations de propriétés physiques. Les monômes en  $\rho_0$ ,  $V_0$ ,  $L_0$ ,  $T_0$  apparaissant dans ces équations sont les paramètres adimensionnels du système.

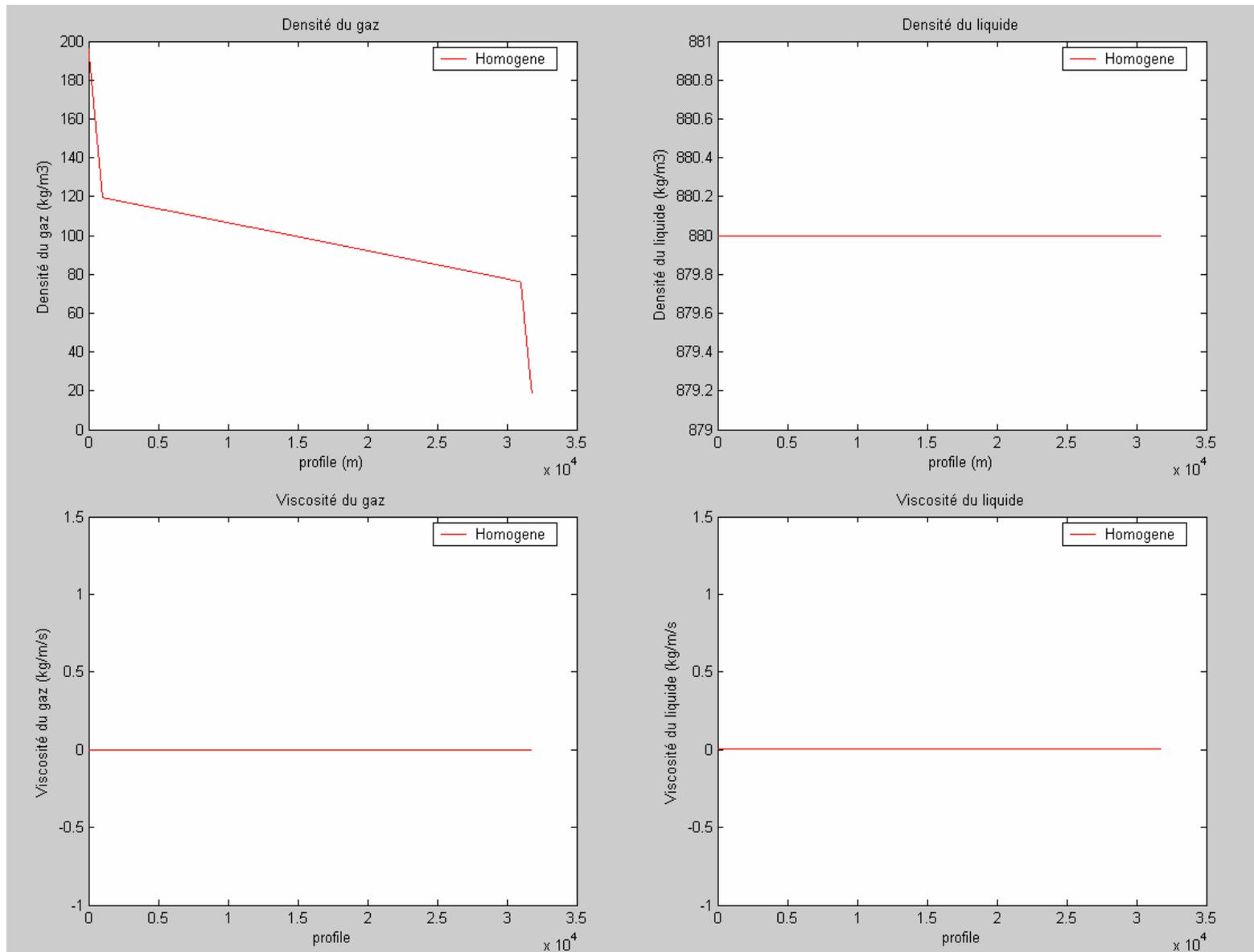
Paramètres adimensionnels	
$Bo = \frac{\Delta\rho g D^2}{\sigma}$	nombre de Bond
$Fr = U_0 \left( \frac{\rho_L}{\Delta\rho g D} \right)^{\frac{1}{2}}$	nombre de Froude
$Fr_L = \left( \frac{\rho_L U_L^2}{\Delta\rho g D} \right)^{\frac{1}{2}} ; Fr_G = \left( \frac{\rho_G U_G^2}{\Delta\rho g D} \right)^{\frac{1}{2}}$	nombre de Froude du liquide, du gaz
$Ma = \left( \frac{\alpha \rho v^2}{p} \right)^{\frac{1}{2}}$	nombre de Mach pour un mélange homogène
$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$	nombre de Reynolds
$Re_G = \frac{\rho_G v_G D}{\mu_G} ; Re_L = \frac{\rho_L v_L D}{\mu_L}$	nombre de Reynolds du gaz, du liquide
$D^+ = D \left( \frac{\Delta\rho g}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}$	diamètre adimensionnel
$U_G^+ = U_G \left( \frac{\rho_L^2}{\Delta\rho g \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} ; U_L^+ = U_L \left( \frac{\rho_L^2}{\Delta\rho g \sigma} \right)^{\frac{1}{4}}$	vitesse débitante adimensionnelle du gaz, du liquide
$\hat{U}_G = U_G \frac{\mu_L}{\sigma} \left( \frac{\rho_G}{\rho_L} \right)^{\frac{1}{2}}$	vitesse adimensionnelle (phénomène de film et d'entraînement)
$\mu_L^+ = \mu_L \left( \frac{\Delta\rho g}{\rho_L^2 \sigma^3} \right)^{\frac{1}{4}}$	viscosité adimensionnelle
$We = \frac{\rho v^2 D}{\sigma}$	nombre de Weber

# **Annexe C**

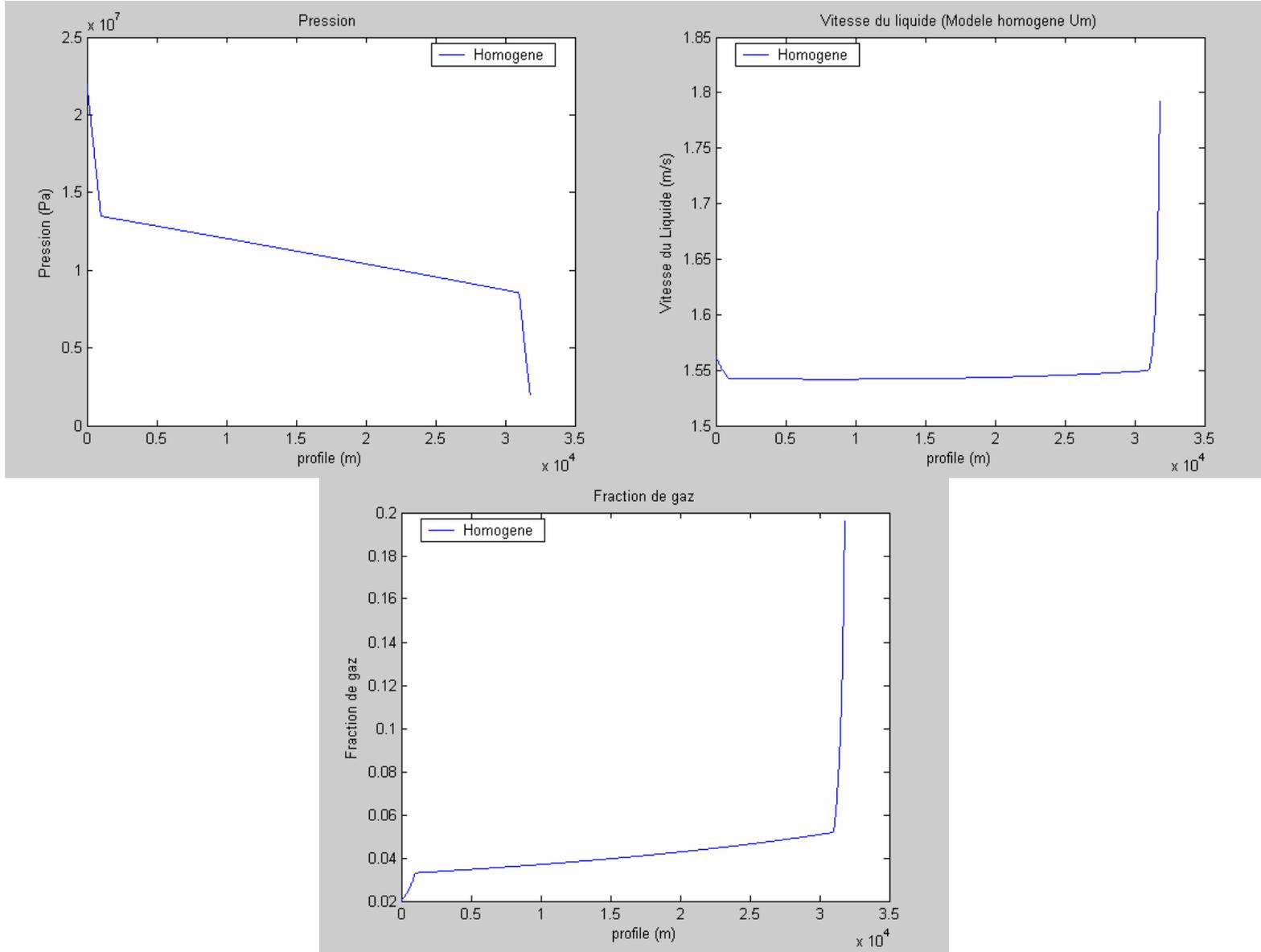
## **Résultats des simulations**



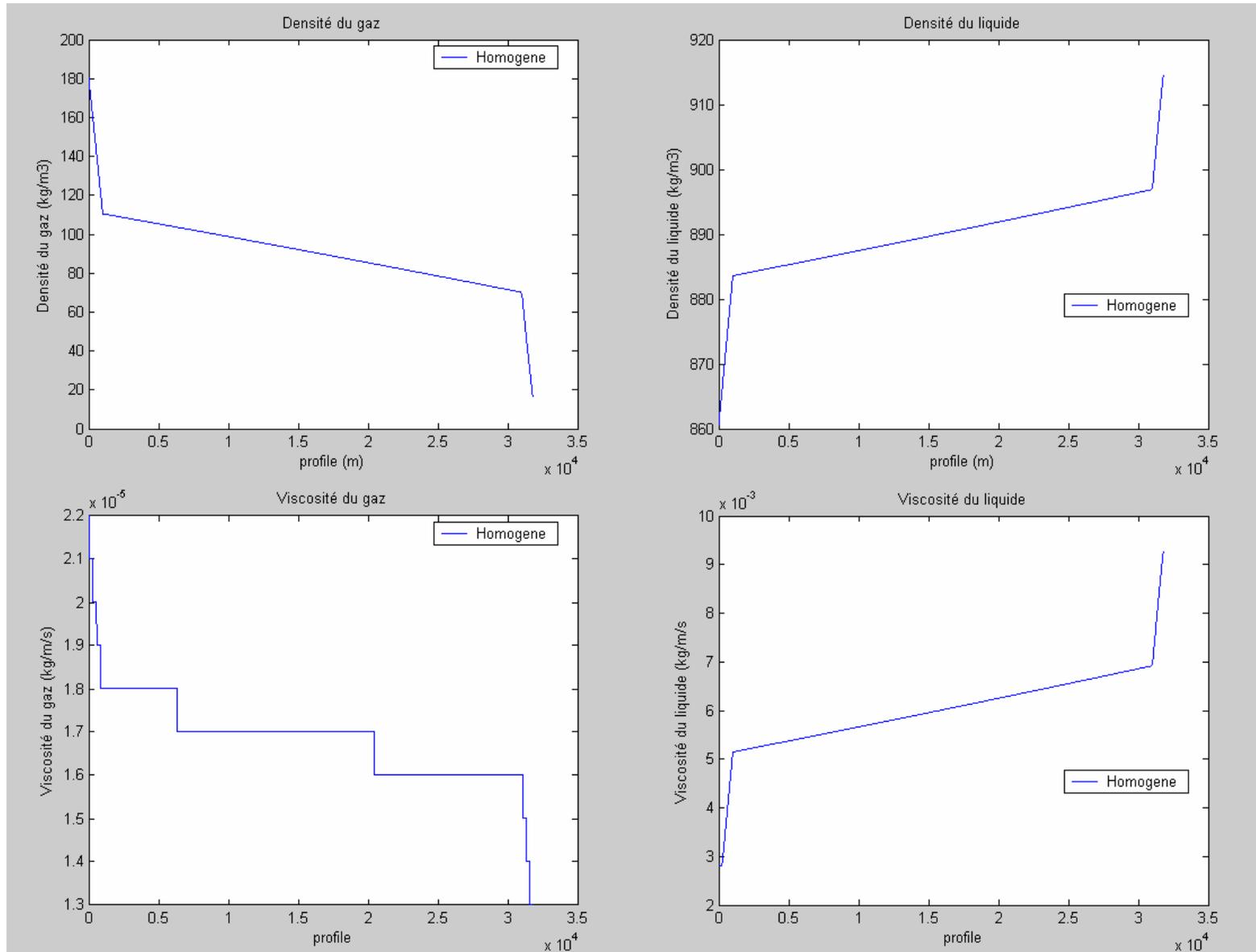
Résultats Modèle Homogène (avec utilisation du Modèle gaz parfait)



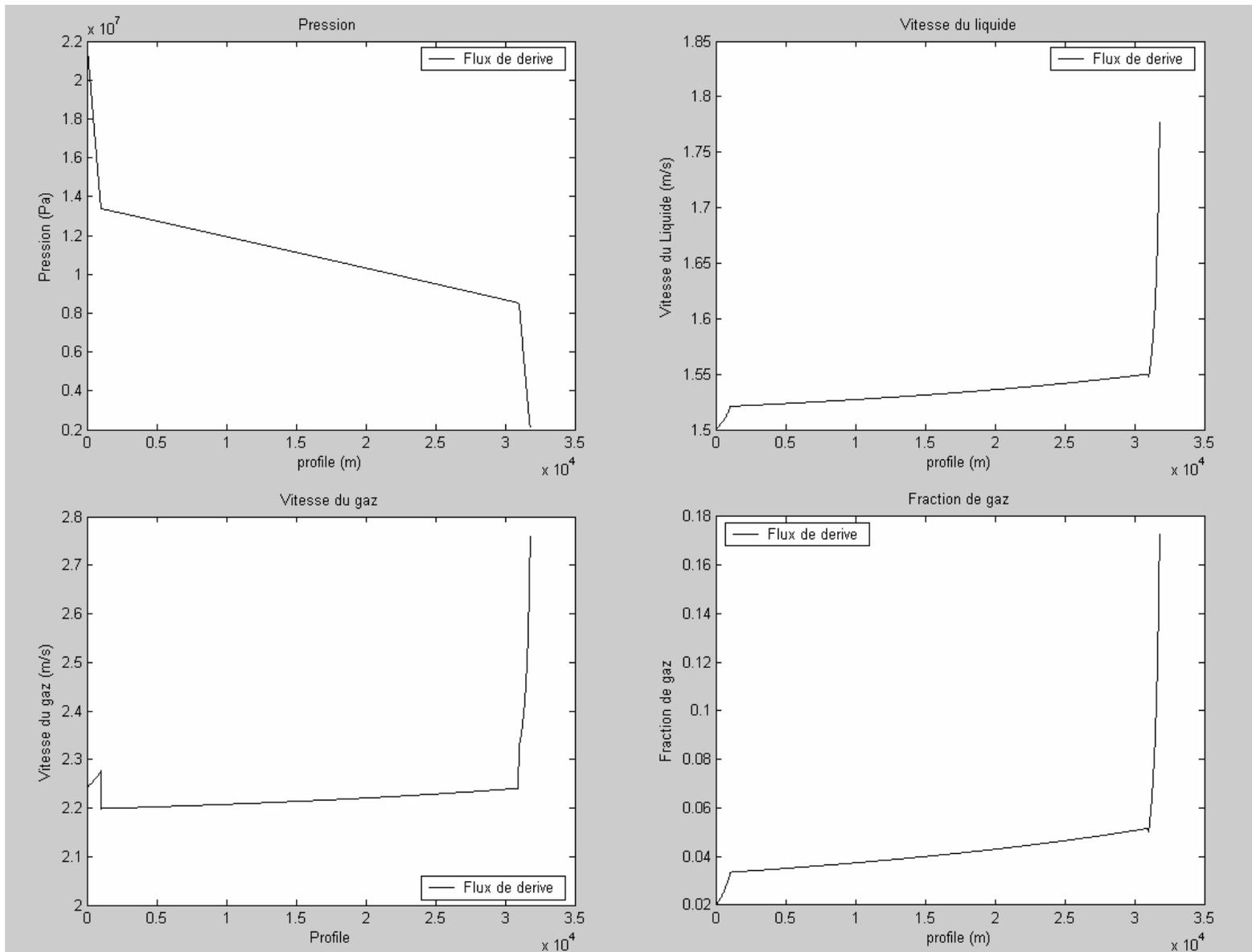
Propriétés physique des phases (gaz, pétrole) du mode gaz parfait pour le modèle homogène)



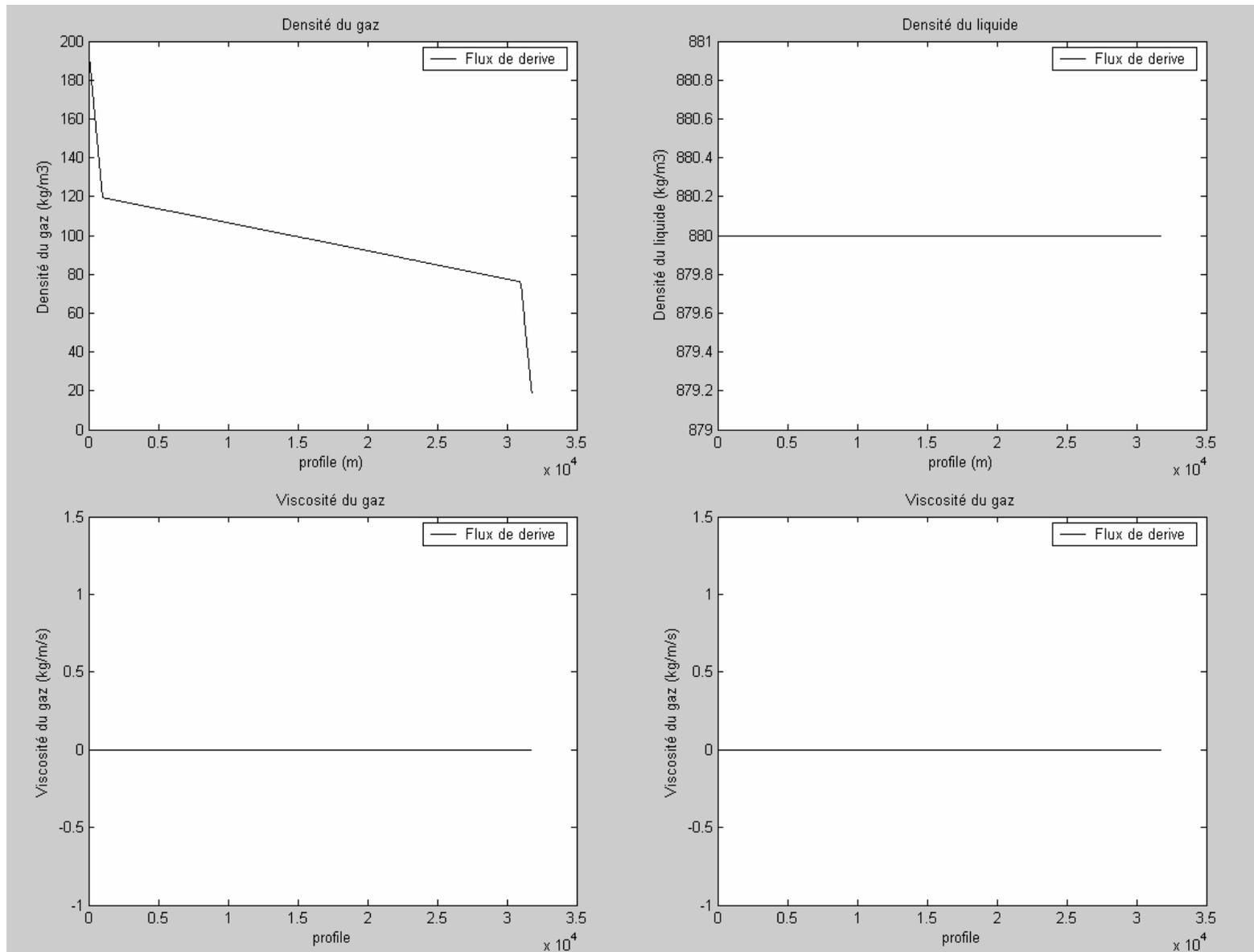
Résultats Modèle Homogène (avec utilisation du Modèle Industriel)



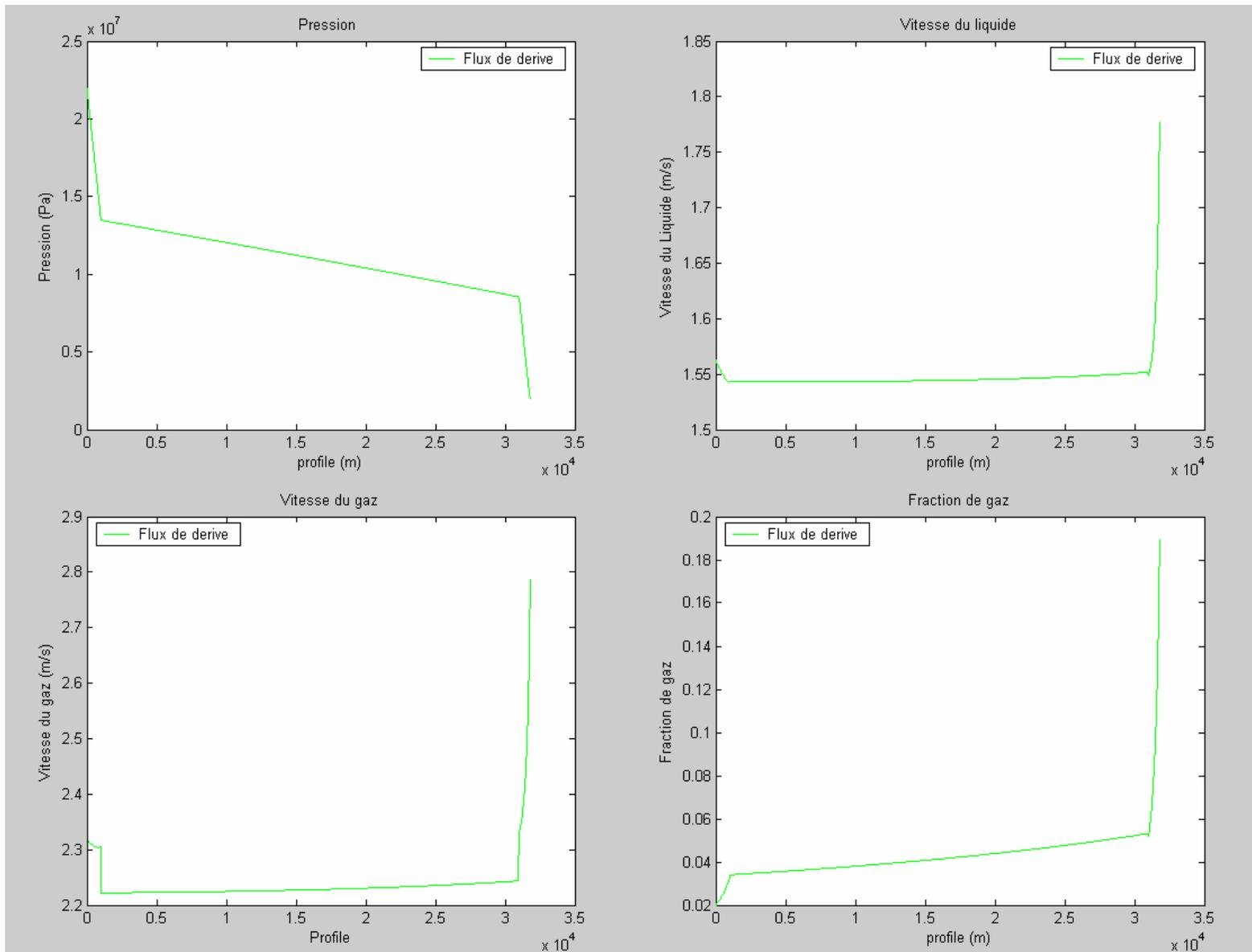
Propriétés physiques des phases (gaz, pétrole) du modèle industriel pour le modèle homogène



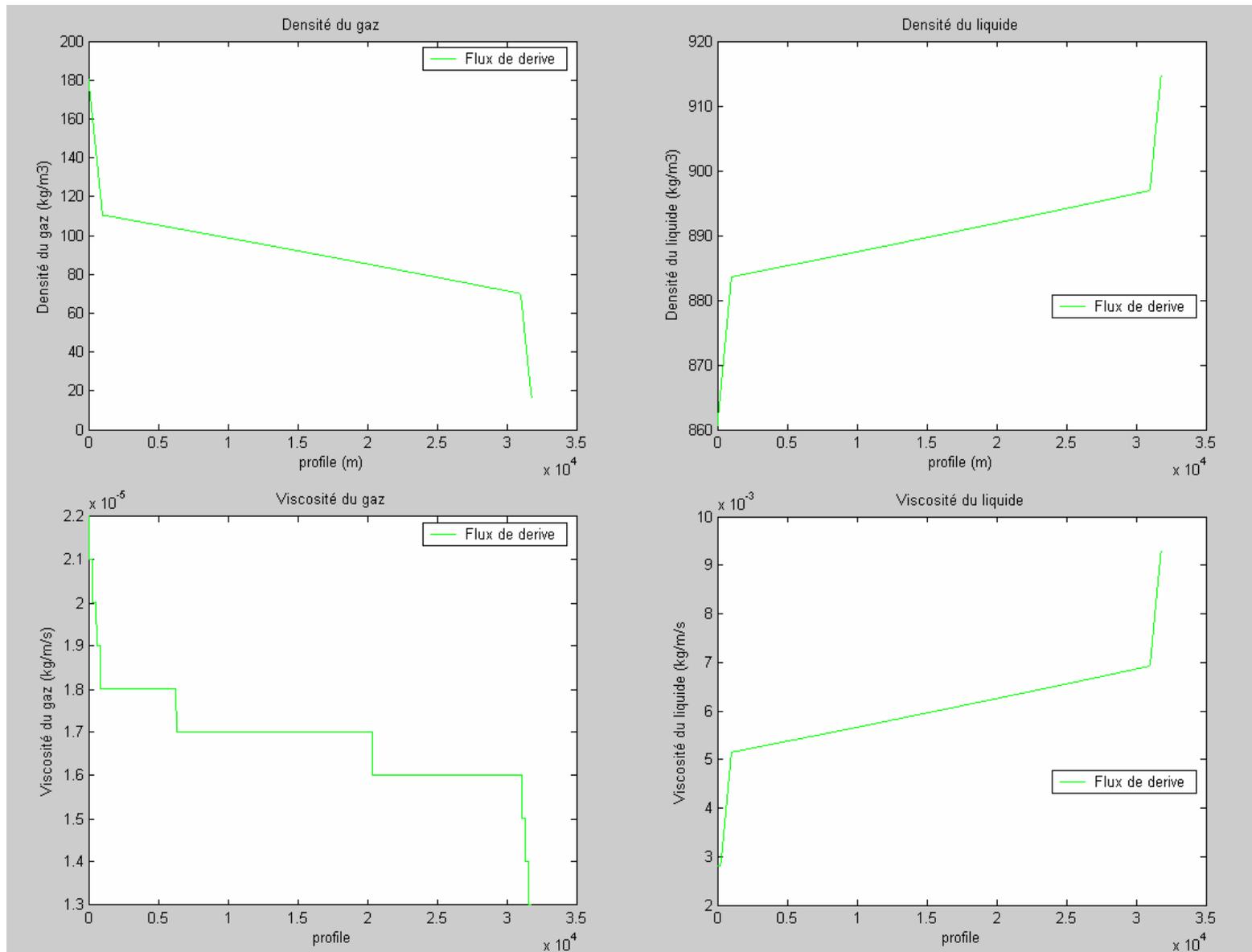
Résultats Modèle à flux de dérive (avec utilisation du gaz parfait)



Propriétés physiques des phases (gaz, pétrole) du modèle gaz parfait pour le modèle à flux de dérive



Résultats Modèle à flux de dérive (avec utilisation du Modèle Industriel)



Propriétés physiques des phases (gaz, pétrole) du modèle industriel pour le modèle à flux de dérive