

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique

P0010/05B



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Département Hydraulique

MEMOIRE DE PROJET DE FIN D'ETUDES D'INGENIEUR
D'ETAT EN HYDRAULIQUE

Thème :

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SIMULATION NUMERIQUE DES
ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE
AVEC ONDE
" **DAM - BREAK** "

Proposé par :
M^{me} S. BENMAMAR

Dirigé par :
M^{me} S. BENMAMAR
Mr O. BELHADJ

Préparé par :
Mr D.ZOUAOU

Année Universitaire 2004-2005

Dédicaces

A mes très chers parents

A mes grands parents paternel

A ma grande mère maternelle

A mon frère

A mes sœurs

***A tous mes amis (es) qui m'ont accompagné
dans les chemins les plus étroits et m'ont
encouragé dans les moments les plus
difficiles.***

Je dédie ce modeste travail

Zouaoui Daoud

Remerciements



Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance à ma promotrice M^{me} S. Benmamar, qui a dirigé les travaux de ce mémoire, pour son soutien au cours de mes années d'étude, la confiance qu'elle m'a témoigné et pour toute l'aide matérielle et morale qu'elle a mis à ma disposition tout le long de mon travail, que celui-ci soit à la hauteur de ses attentes.

Mes vifs remerciements vont également à Mr O. Belhadj pour m'avoir dirigé durant toute cette période de travail.

Mes remerciements à Mr A. Bilek, pour avoir accepté de me faire l'honneur de présider le jury.

Mes sincères remerciements vont également à Mr S. Benziada et Mr N. Nebbache pour avoir accepté de juger comme examinateurs ce modeste travail.

Je tiens à remercier tous les enseignants du département Hydraulique qui m'ont enseigné durant mes trois années.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent à Mr Bougara directeur de département hydrologie et Ch. Bouchoul, Ingénieur d'Etat à l'Agence Nationale des Ressources Hydraulique au département hydrogéologie, de m'avoir accepter comme stagiaire au sein de son équipe et pour l'ensemble des conseils et orientations prodigués durant mon de stage de formation.

Mes sincères remerciements à Mr M. Boussoum et Mlle K. Kherbache anciens étudiants du département Hydraulique qui m'ont aidé et soutenu moralement jusqu'au dernier jour pour accomplir ce travail.

Enfin, tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, que ce soit par leur amitié, leurs conseils ou leur soutien moral, trouveront dans ces quelques lignes l'expression de mes remerciements les plus vifs.

Sommaire

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Généralités sur les écoulements à surface libre.....	3
I. Canaux.....	3
1. Définition d'un canal.....	3
2. Types de canaux.....	3
• Canaux naturels.....	3
• Canaux artificiels.....	3
3. Propriétés d'un canal.....	4
II. Types d'écoulements à surface libre.....	4
1. Classification suivant le temps.....	4
a. Ecoulement permanent.....	4
b. Ecoulement non permanent.....	5
2. Classification suivant l'espace.....	5
a. Ecoulement uniforme.....	5
b. Ecoulement non uniforme (varié).....	5
3. Classification suivant le temps et l'espace.....	6
• L'écoulement permanent uniforme ou non uniforme.....	6
• L'écoulement non permanent uniforme ou non uniforme.....	6
• Ecoulement non permanent (transitoire).....	6
• Ecoulement permanent (stationnaire).....	6
4. Régime d'écoulement.....	6
5. Répartition des Vitesses.....	7
6. Répartition de la pression.....	8
III. Onde.....	8
1. Définition.....	8
2. Différents types d'ondes et d'ordres de grandeurs.....	8
• Ondes de gravité.....	8
• Ondes capillaires.....	9
• Ondes générées par les séismes.....	9
3. Ecoulement avec onde.....	10
4. Interférences.....	11
5. Phénomènes entraînant un changement de direction des ondes pendant leur propagation.....	11

• Réfraction.....	11
• Réflexion.....	11
Chapitre II : Modèle mathématique de Saint Venant.....	12
I. Equations de Navier Stokes (équations de base).....	12
• Equation de continuité.....	12
• Equation de conservation de la quantité de mouvement.....	12
1. Approche statistique de l'écoulement.....	14
2. Equation du mouvement moyen.....	14
• Equation de continuité.....	15
• Equations de quantité de mouvement.....	16
II. Modèle de Saint-Venant.....	18
1. Champs d'application.....	18
2. Principales hypothèses.....	18
3. Equations du mouvement moyen dans l'espace.....	19
4. Les conditions cinématiques.....	19
5. Règle d'intégration de Leibnitz.....	21
6. Intégration de l'équation de continuité sur la profondeur.....	21
7. Intégration de la première équation de Reynolds sur la profondeur.....	22
III. Modèle mathématique de propagation d'onde.....	27
1. Développement et simplification des équations.....	29
• Equation de continuité.....	29
• Equation de la quantité de mouvement suivant, x	29
• Equation de la quantité de mouvement suivant, y	29
2. Ecriture du système résultant.....	30
6. Conditions initiale et aux limites.....	30
• Conditions initiales.....	30
• Conditions aux limites.....	30
Chapitre III : Modélisation Numérique des l'écoulements à surface libre.....	31
I. Définitions des différentes méthodes numériques.....	31
1. Méthode des éléments finis.....	31
2. Méthode des volumes finis.....	32
3. Méthode des différences finies.....	32
• Cas d'une approximation à une dimensions.....	33

• Cas d'une approximation à plusieurs dimensions.....	33
II. Analyse de l'approximation.....	34
a. Erreur de troncature.....	34
b. La consistance d'un schéma aux différences finies.....	34
c. La stabilité.....	34
d. La convergence.....	34
III. Les schémas aux différences finies explicites fréquemment utilisés.....	34
• Schéma de Mac Cormack.....	35
• Schéma de Lambda.....	35
• Schéma de Gabutti.....	36
IV. Application du schéma de Gabutti.....	37
V. Condition de stabilité.....	47
VI. Conditions initiale et aux limites.....	47
• Conditions initiales.....	48
• Conditions aux limites.....	49
7. Organigramme.....	50
Chapitre IV : Applications et analyse des résultats.....	52
I. Validation du modèle.....	52
1. Commentaire et interprétation des résultats obtenus.....	53
a. Analyse des résultats.....	56
b. Interprétation des résultats.....	56
II. Effets des différents paramètres sur l'écoulement.....	57
1. Effet du nombre de courant.....	57
1. Effet de la hauteur d'eau initiale.....	59
3. Etude des profils des vitesses longitudinale et transversale.....	61
4. Effet de la largeur du canal.....	62
5. Effet de coefficient de Manning.....	63
6. Effet de pente du fond du canal.....	64
Conclusion générale.....	66
Bibliographie.....	67

Liste des symboles

b :	Largeur du canal
B :	Matrice Jacobienne
B ⁺ :	Matrice B associée aux valeurs positives
B ⁻ :	Matrice B associée aux valeurs négatives
C :	Célérité d'onde
C _f :	Coefficient de frottement
C _n :	Nombre de Courant
C _w :	Célérité absolue
D :	Matrice diagonale constituée par les valeurs propres B
D _h :	Profondeur hydraulique
f :	Fonction
F _r :	Nombre de Froude
P _g :	Force de gravité
g :	Accélération de la pesanteur
H :	Hauteur d'eau
H _{ij} :	Profondeur de l'écoulement au niveau de la section (i,j)
i :	Indice de maillage suivant la direction x ; (pas de variation dans l'espace)
j :	Indice de maillage suivant la direction y ; (pas de variation dans l'espace)
k :	Indice de l'incrémentement du pas du temps
L :	Longueur du canal
M ₁ :	Matrice constituée par les valeurs propres de la matrice B ₁
M ₂ :	Matrice constituée par les valeurs propres de la matrice B ₂
n :	Coefficient de Manning
p :	Pression
P _m :	Périmètre mouillé
R _h :	Rayon hydraulique
S :	Surface
S _{fx} :	Pente de frottement suivant x
S _m :	Surface mouillée
S _{0x} :	Pente du fond du canal suivant x
t :	Temps
Δt :	Temps d'incrémentement
U :	Composante de la vitesse de l'écoulement suivant la direction x
u :	Composante de la vitesse fluctuante de l'écoulement suivant la direction x
V :	Composante de la vitesse de l'écoulement suivant la direction y
v :	Composante de la vitesse fluctuante de l'écoulement suivant la direction y
$\tilde{V}_x^+, \tilde{V}_x^-, \tilde{V}_y^+, \tilde{V}_y^-$:	Valeurs approchées des dérivés spatiales, prédiction A
$\bar{V}_x^+, \bar{V}_x^-, \bar{V}_y^+, \bar{V}_y^-$:	Valeurs approchées des dérivés spatiales, prédiction B
$\hat{V}_x^+, \hat{V}_x^-, \hat{V}_y^+, \hat{V}_y^-$:	Valeurs approchées des dérivés spatiales, corrigées de A ou B
x :	Coordonnée spatiale longitudinale
Δx :	Pas de discrétisation spatial suivant x
y :	Coordonnée spatiale transversale
Δy :	Pas de discrétisation spatial suivant y
α :	Angle d'inclinaison suivant x

- Ω : Domaine
 Γ : Limitation du domaine
 λ, ω : Valeurs propres
 λ^+, ω^+ : Valeurs propres positives
 λ, ω^- : Valeurs propres négatives
 ρ : La masse volumique de fluide
 τ : Force de frottement par unité du surface



Introduction générale

Les écoulements à surface à libre, comme leur nom l'indique, ont la particularité de comporter une surface libre en contact avec l'air et dont la forme peut varier, ce qui implique une variation possible de la forme et des dimensions de la section transversale du canal.

Les différents paramètres caractéristiques de ces écoulements ainsi que la forme et la nature des canaux qui les contiennent feront l'objet du premier chapitre qui se terminera par un aperçu sur la notion d'onde de gravité et les écoulements avec onde.

La présente étude porte sur la modélisation mathématique du phénomène de propagation d'ondes qui résultent de la rupture totale et instantanée d'un barrage de stockage.

Cette modélisation de l'onde de rupture plus connue sous le nom "**DAM-BREAK**" a été le centre d'occupation de plusieurs investigateurs et cela depuis plusieurs décennies.

Elle a pris beaucoup d'ampleur surtout vers la fin des années soixante où l'on a assisté à la construction des centrales nucléaires à l'aval des barrages retenant des milliers de mètres cube.

La rupture d'un barrage, bien que rare de nos jours reste cependant possible et compte tenu de l'ampleur d'un tel Accident, le problème mérite d'être pris au sérieux. Cette rupture se manifeste par la libération des eaux retenues qui se propagent ainsi vers l'aval de l'ouvrage.

Vu le caractère accidentel imprévu de ce phénomène, il est nécessaire de connaître l'évolution de l'onde de rupture dans le temps à l'aval de l'ouvrage, ainsi la variation de la hauteur d'eau suivant l'axe de propagation de l'onde, le manque des solutions analytiques des équations régissant l'écoulement de l'eau (équations de **Barre de Saint Venant**), il est nécessaire d'élaborer des modèles numériques permettant de résoudre ces équations.

L'établissement des équations de Barre de Saint Venant qui sont issues de l'intégration sur la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stocks décrivant le phénomène a été étudié ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites ferrent l'objet du deuxième chapitre nommé élaboration du modèle mathématique de la propagation d'onde.

La résolution de ces équations, est délicate et très complexe. Cette complexité a depuis longtemps été signalée par Galilée (1564-1642) : *"je me suis heurté, dit-il, à moins de difficultés dans la découverte du mouvement des corps célestes, malgré leur éloignement étonnant que dans les recherches sur le mouvement de l'eau courante qui se produit cependant sous nos yeux"*. Ainsi, il devient impératif de faire intervenir l'expérience directe ou les théories approximatives pour résoudre de telles équations. Les expériences ont été effectuées un peu partout, il s'agira ici d'opter pour une des théories approximatives afin

d'approcher les solutions de la propagation d'onde à la rupture d'un barrage, ce qui fera l'objet du troisième chapitre.

Dans ce même chapitre, nous aborderons les différentes méthodes, notamment les méthodes des différences finies "explicites" traitant ce genre de problème. L'accent a été mis sur les schémas de type prédicteur correcteur. Par la suite, nous opterons pour le schéma de type prédicteur correcteur de Gabutti. L'utilisation de ce schéma implique la prise en compte de certaines conditions de stabilité. Il s'agit notamment du critère de stabilité de Courant Friedrich Lewy.

Les résultats obtenus seront calés à l'aide des résultats expérimentaux obtenus à « Waterways Experiment Station (W.E.S) » pour une série d'expériences de rupture de barrage.

Cette étude sera suivie d'une étude de l'influence des différents paramètres sur l'écoulement, notamment l'effet de la pente de fond, de la hauteur initiale, de la rugosité de fond, de la largeur et du "nombre de Courant". Les résultats obtenus feront l'objet d'analyse et de critique. Ce qui résume ainsi l'objectif du quatrième chapitre.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre I : Généralités sur les écoulements à surface libre

Les écoulements à surface libre sont des écoulements caractérisés par la présence d'une surface de séparation entre l'air et l'eau appelée surface libre, généralement; la pression qui règne cette surface est la pression atmosphérique.

L'écoulement à surface libre se produit sous l'effet de la gravité.

I. Canaux

1. Définition d'un canal

L'écoulement à surface libre se produit dans des systèmes de transport ayant une forme concave appelés "canaux".

2. Types de canaux

Les canaux à surface libre se classent en deux catégories :

- ***Canaux naturels***

Les canaux naturels sont les cours d'eau, les rivières et les fleuves qui existent dans la nature, où les propriétés hydrauliques et géométriques de ces canaux sont irrégulières. (Figure I.1).

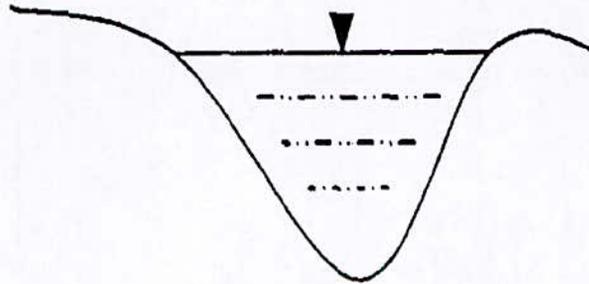


Figure I.1 : Canal Naturel

- ***Canaux artificiels***

Contrairement aux canaux naturels, les canaux artificiels sont conçus par l'homme. Ils se présentent sous plusieurs formes, parmi lesquelles on trouve : forme trapézoïdale, forme triangulaire (figure I.2) etc.

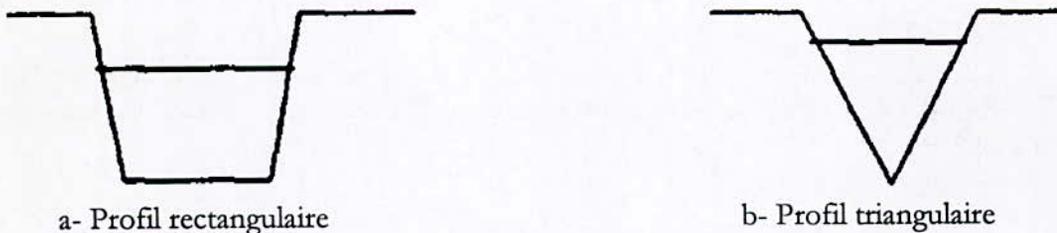


Figure I.2 : Canaux artificiels

3. Propriétés d'un canal

Les principales propriétés d'un canal sont : [Graf & Altinakar, (1993)], [Traoure, & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)]

- La section transversale d'un canal est une section plane normale à la direction de l'écoulement.
- Le périmètre mouillé, P , du canal, formé par la longueur de la ligne de contact entre la surface mouillée et le lit y compris les berges, mais ne comprenant pas la surface libre.
- Le rayon hydraulique, donné par le quotient de la surface mouillée, S , et du périmètre mouillé, P , est : $R_H = \frac{S}{P}$ (I-1)
- La largeur (superficielle), B , du canal à la surface libre.
- La profondeur hydraulique, D_h , du canal définie par: $D_h = \frac{S}{B}$ (I-2)
- La profondeur, h , ou tirant d'eau.

A part les éléments géométriques d'une section, l'étude des canaux prend également en considération les pentes longitudinales du canal, donc :

- La pente du fond du canal, S_0 , dont la valeur dépend essentiellement de la topographie et de la constitution du terrain. Cette pente, généralement faible, peut être exprimée par: $S_0 = \text{tg}\alpha = \sin\alpha$ (I-3)
- La pente piézométrique ou pente de la surface libre, S_f .

II. Types d'écoulements à surface libre

Les écoulements à surface libre peuvent être classés en plusieurs types selon les paramètres suivants :

- Permanent ou non permanent selon le temps ;
- Uniforme et non uniforme (varié) selon l'espace ;
- Torrentiel ou fluvial selon l'effet de la gravité ;
- Laminaire ou turbulent selon la viscosité.

1. Classification suivant le temps

a. Écoulement permanent

On dit qu'un écoulement est permanent, lorsque les paramètres hydrauliques tels que la vitesse, la profondeur hydraulique restent constants dans le temps dans chaque section du canal, (figure I.3).

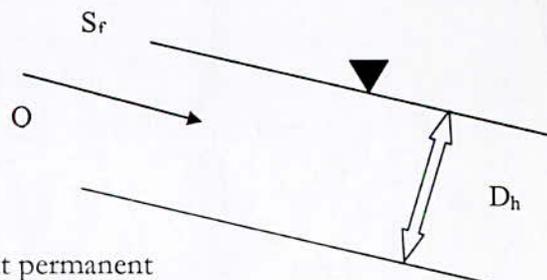


Figure I.3 : Écoulement permanent

b. Écoulement non permanent

C'est le cas le plus fréquent, où les paramètres cités auparavant ne restent pas constants dans le temps, (figure I.4).

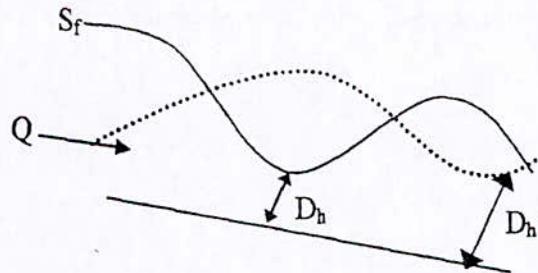


Figure I.4 : Écoulement non permanent

2. Classification suivant l'espace

a. Écoulement uniforme

Un écoulement est uniforme si la profondeur, D_h , ainsi que les autres paramètres, restent invariables dans les diverses sections du canal. La ligne de la pente de fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre et l'on a : $S_f = S_0$

On le rencontre généralement dans les canaux artificiels, (figure I.5).

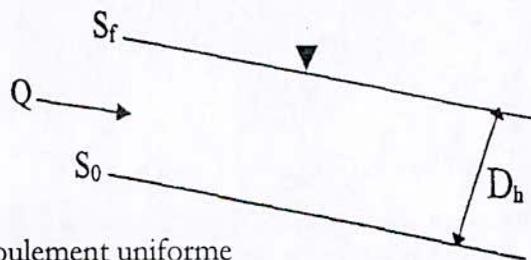


Figure I.5 : Écoulement uniforme

b. Écoulement non uniforme (varié)

L'écoulement est non uniforme ou varié si la profondeur, D_h , ainsi que les autres paramètres, changent d'une section à l'autre. La pente de fond diffère alors de celle de la surface libre, $S_0 \neq S_f$ (figure I.6), L'écoulement non uniforme peut se présenter sous deux formes :

- Écoulement graduellement varié (variation graduelle des propriétés hydrauliques d'une section à une autre).
- Écoulement brusquement varié (variation brusque des propriétés hydrauliques d'une section à une autre).

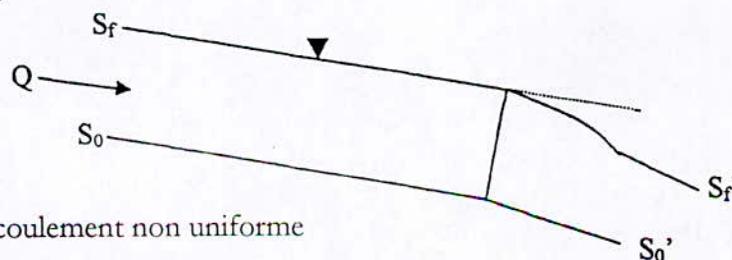
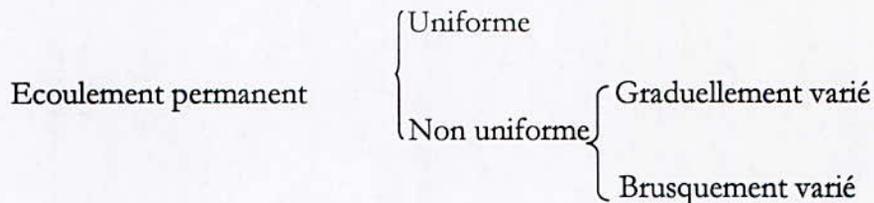


Figure I.6 : Écoulement non uniforme

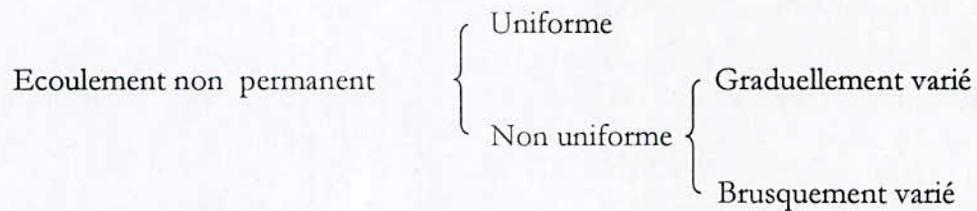
3. Classification suivant le temps et l'espace

Il peut y avoir une variation des caractéristiques d'écoulement à la fois dans le temps et dans l'espace, ainsi on distingue :

- **L'écoulement permanent uniforme ou non uniforme**



- **L'écoulement non permanent uniforme ou non uniforme.**



- **Écoulement non permanent (transitoire)**

Le régime d'écoulement est dit non permanent ou transitoire lorsque les paramètres de l'écoulement varient dans temps : $\left(\frac{\partial}{\partial t} \neq 0\right)$ (I-4)

- **Écoulement permanent (stationnaire)**

Le régime permanent désigne un écoulement dont les caractéristiques ne varient pas dans le temps. Cela se traduit mathématiquement par la nullité de toutes les dérivées partielles des grandeurs par rapport au temps : $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ (I-5)

Le régime permanent peut être uniforme ou varié selon la géométrie du canal.

4. Régime d'écoulement

L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre engendre les forces suivantes:

- Force de gravité ;
- Force d'inertie ;
- Force de frottement (viscosité et rugosité).

Le nombre de Froude est défini comme étant le rapport entre les forces de gravité et les forces d'inerties, il est donné par la formule suivante: $Fr = \frac{V}{C}$ (I-6)

où, V: la vitesse d'écoulement (m/s) ; C : célérité d' onde de gravité (m/s)

avec, $C = \sqrt{gD_h}$ (I-7)

où, g : accélération de la gravité (m²/s).

D_h : Profondeur hydraulique (m).

Le classement des écoulements se fait en fonction du nombre de Froude, "Fr", par conséquent, si :

- Le nombre de Froude est égal à l'unité ($Fr = 1$), l'écoulement est en "régime critique".
- Le nombre de Froude est inférieur à l'unité ($Fr < 1$), l'écoulement est en "régime fluvial" ou "subcritique". Dans ce cas, l'effet de la gravité est plus prononcé; ceci se traduit par une faible vitesse d'écoulement.
- Le nombre de Froude est supérieur à l'unité ($Fr > 1$), l'écoulement est en "régime torrentiel" ou "supercritique". Les forces d'inerties sont donc prépondérantes; ceci se traduit par importante vitesse d'écoulement.
- Le nombre de Reynolds, Re , est le rapport entre les forces de frottement et celles d'inertie :

$$\frac{\mu(U_c/L_c)}{\rho U_c} = \frac{\nu}{U_c L_c} = Re^{-1} \quad \text{Soit } Re = \frac{U_c L_c}{\nu} \quad (I.8)$$

Où ν est la viscosité cinématique et μ la viscosité dynamique.

Le nombre de Reynolds permet le classement des écoulements comme suit :

- ❖ $Re < 2000$ Ecoulement laminaire ;
- ❖ $2000 < Re < 8000$ Ecoulement transitoire ;
- ❖ $Re > 8000$ Ecoulement e turbulent.

5. Répartition des Vitesses

Dans un écoulement le long d'un canal, il y a répartition de vitesse entre la paroi et la surface libre. La vitesse ponctuelle, u , est nulle sur la paroi et croît rapidement lorsqu'on s'en éloigne. La valeur maximale U_{max} est atteinte un peu au-dessous de la surface libre. Le profil de la vitesse est approximativement logarithmique (figure I.7).

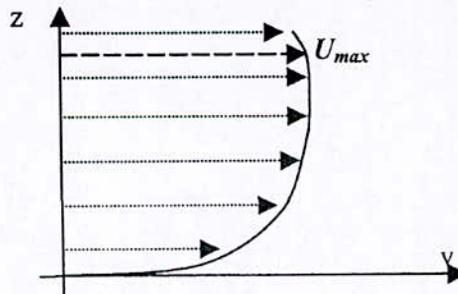


Figure I.7 : Profil logarithmique de la vitesse

- Un écoulement permanent dépend généralement de trois variables x , y et z . On l'appelle écoulement tridimensionnel (3D) (figure I.8.a) ;
- Si la largeur du canal est cinq fois supérieure à sa profondeur l'écoulement est considéré comme bidimensionnel (2D) (figure I.8.b) ;

- Dans les canaux hydrauliques, l'écoulement est réduit à une dimension, si on exprime la vitesse à travers la section par sa moyenne (figure I.8.c).

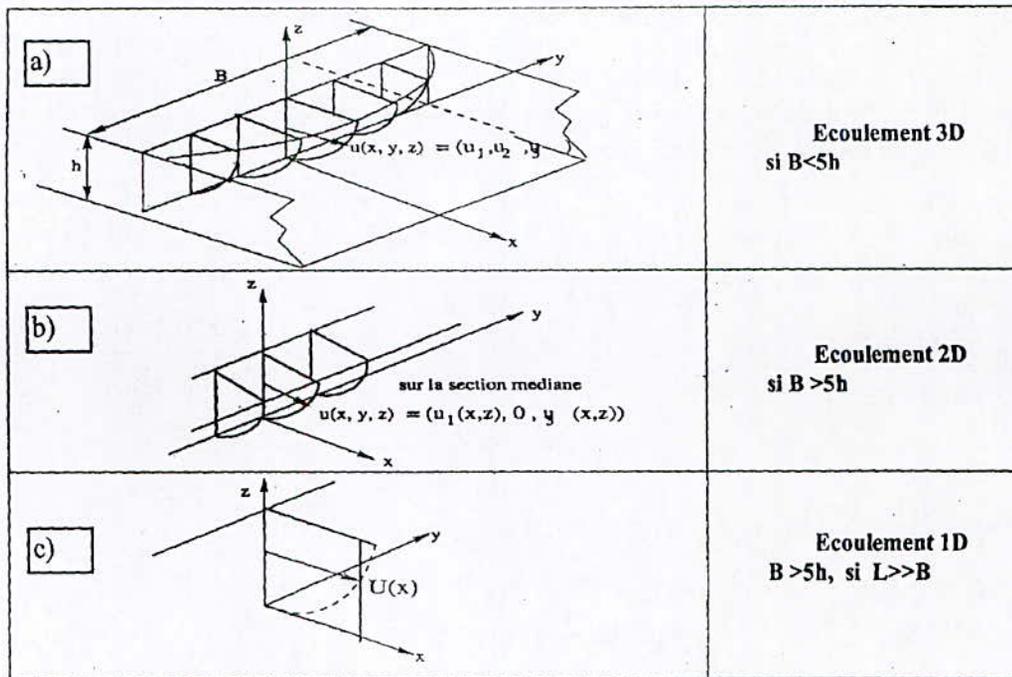


Figure I.8 : Répartition de vitesse

6. Répartition de la pression

La répartition de la pression varie selon le type du courant : si le courant est uniforme, on a une distribution hydrostatique de la pression ($P = \rho g z$). Par contre si le courant est non uniforme, il existe une accélération qui provoque la force d'inertie et la répartition de la pression n'est pas hydrostatique. Pour un courant extérieurement concave, la force centrifuge augmente les pressions ; pour un courant convexe, cette force diminue les pressions. Dans le dernier cas, elle peut même les rendre inférieures à la pression atmosphérique, provoquant un décollement du liquide du fond du canal, ainsi qu'à la formation du phénomène de cavitation.

III. Onde

1. Définition

On appelle onde matérielle, une onde qui se propage dans un milieu en le déformant. La propagation de l'onde est due, dans ce cas, à la transmission du mouvement par les molécules du milieu de propagation.

La vitesse de propagation d'une onde dépend de la nature de cette onde et du milieu dans lequel elle se propage. [Graf & Altinakar, (1993)], [Traoure, & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)]

2. Différents types d'ondes et d'ordres de grandeurs

• Ondes de gravité

Dans un canal, un écoulement non uniforme dans le temps se manifeste par une onde de gravité à la surface libre (figure 1.9). La théorie hydrodynamique pour les ondes de faible amplitude, donne pour la vitesse apparente de propagation, également appelée célérité d'une intumescence :

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \operatorname{tg} h \left(\frac{2\pi h}{L} \right) \quad (\text{I-9})$$

où, h représente la profondeur d'eau.

Dans le cas où la célérité d'onde ne dépend pas de la hauteur d'onde, H , la formule (I-9) se réduit alors à :

1. Pour les ondes courtes ou ondes de grande profondeur, ($L/H < 1$), on a :

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \quad (\text{I-10})$$

2. Pour les ondes longues ou ondes de faible profondeur, ($L/H \gg 1$), on a :

$$C^2 = gh \quad (\text{I-11})$$

3. Pour une section quelconque; on a :

$$C^2 = g D_h \quad (\text{I-12})$$

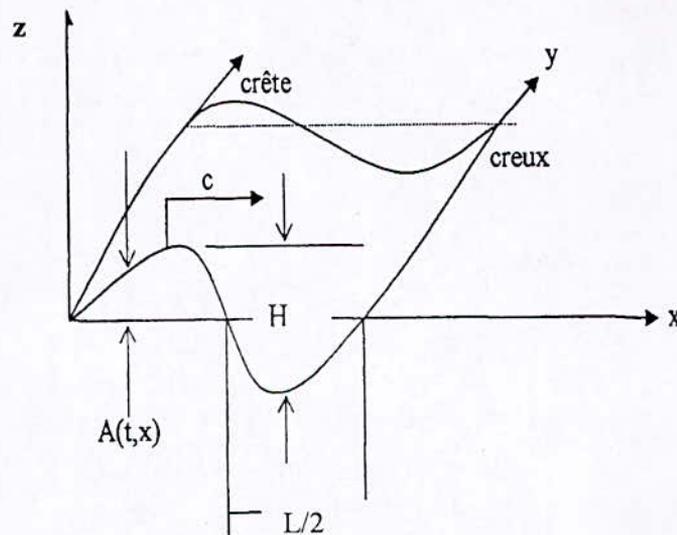


Figure I.9 : Schéma d'une onde dans un canal.

• Ondes capillaires

Elles sont très petites ($L < 1,74 \text{ cm}$) et produites par le vent et les effets de tension de surface.

Contrairement aux ondes de gravité, ce sont les ondes de petites longueurs d'ondes qui se propagent le plus vite.

• Ondes générées par les séismes

Elles sont produites par les déplacements de la croûte terrestre.

Les dimensions caractéristiques sont : $L = 200\text{km}$, $H = 0,5 \text{ m}$ jusqu'à 30m , $T = 15 \text{ min}$ et C de l'ordre de 700km/h .

3. Ecoulement avec onde

La formule (I-11) a été démontrée par Lagrange pour un canal rempli d'eau au repos. Elle reste valable aussi pour le cas où l'eau est plus au moins en mouvement; l'onde se superpose à ce courant.

La célérité absolue, C_w , d'onde pour un écoulement dans un canal ayant une vitesse moyenne, V , est :

$$C_w = V \pm \sqrt{gD_h} = V \pm C \tag{I-13}$$

Pour un canal de section rectangulaire :

$$C_w = V \pm \sqrt{gh} = V \pm C \tag{I-14}$$

La célérité absolue, C_w , qui est la vitesse par rapport au sol, a évidemment deux valeurs :

$$C'_w = V + C \tag{I-15}$$

$$C''_w = V - C \tag{I-16}$$

On distingue trois cas :

1. $V < C$, l'onde avec la célérité, C'_w , se propage vers l'aval et l'onde avec la célérité, C''_w , se propage vers l'amont ; c'est le "régime fluvial", (figure I.10).

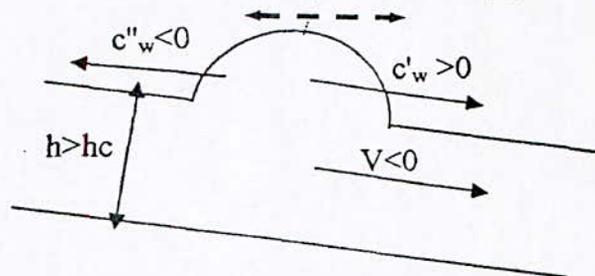


Figure I.10 : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas fluvial)

2. $V > C$, l'onde avec la célérité, C'_w , et l'onde avec la célérité, c''_w , se propagent vers l'aval; c'est le régime torrentiel (figure I.11).

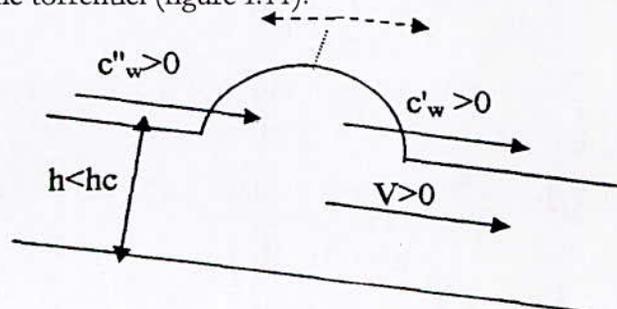


Figure I.11 : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas torrentiel)

3. Dans le cas où la vitesse de courant, V , et la célérité d'onde, C , sont égales; donc :

$$V = C = \sqrt{gh_c} \quad (I-17)$$

L'écoulement est en "régime critique", et h_c représente la profondeur critique :

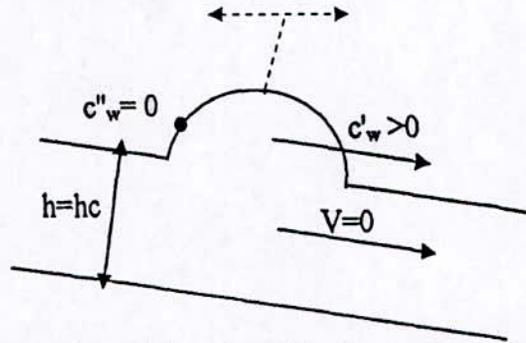


Figure I.12 : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (cas critique)

4. Interférences

Ce phénomène apparaît lorsque deux trains d'ondes se rencontrent. L'interférence peut être :

- Constructive : les ondes sont en phase et s'ajoutent ;
- Destructive : les ondes sont en opposition de phase et l'onde résultante est la différence de celles-ci ;
- Autre (en général) : Combinaison des 2 premières.

5. Phénomènes entraînant un changement de direction des ondes pendant leur propagation

- **Réfraction**

Produite par le fond, lorsque le front d'onde incident (sur une plage par exemple) ressent les effets de diminution de la profondeur h .

On observe une diminution de la vitesse (phase = groupe).

L'onde change de direction ; le front d'onde devient parallèle à la côte.

- **Réflexion**

Lorsque l'onde rencontre un obstacle (lisse ou rugueux).

Chapitre II : Elaboration du modèle

Les équations fondamentales décrivant les écoulements de fluides sont dans leur formulation générale très complexe et non linéaire, malgré la restriction à l'étude des seuls écoulements de type Newtonien. Un certain nombre d'approximations a été effectué et s'avère aujourd'hui valable pour des écoulements gouvernés par les équations de Navier Stokes.

Le niveau d'approximation le plus élevé est représenté par les équations de Navier Stokes sans aucune modification.

Un autre niveau d'approximation concerne les écoulements à très haut nombre de Reynolds où la plus grande partie de l'écoulement est turbulent. Les équations de Reynolds peuvent alors être utilisées.

Les équations de Barré de Saint venant (1871) jouent un rôle très important dans l'étude des écoulements en rivière ou canaux (naturels ou artificiels) ou les écoulement en mer.

I. Equations de Navier Stokes (équations de base)

Le domaine géométrique d'étude est en général tridimensionnel borné de frontière se décomposant en deux parties : le fond de la rivière et sa surface. On note par $x=(x, y, z)$ les coordonnées d'un point de l'espace et par (t) le temps. La surface de la rivière est une frontière libre qui dépend de diverses paramètres, elle change a priori au cours du temps. On note $\Gamma(t)$ sa frontière : $F_p(t)$ le fond de la retenue et $\Gamma_f(t)$ sa surface libre. En notant (u) la vitesse, ρ la masse volumique et P la pression, les équations classiques de conservation de la mécanique des fluides donnent : [Kherbache, (2004)]

- Equation de continuité

$$\nabla u = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-1})$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla(UU) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \tau + F \quad (\text{II-2})$$

Par projection, on trouve :

Suivant l'axe x :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + f_x \quad (\text{II-3})$$

Suivant l'axe y :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + f_y \quad (\text{II-4})$$

Suivant l'axe z :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) + f_z \quad (\text{II-5})$$

où, U, V, et W ; sont les composantes de la vitesse suivants les axes x, y et z ; P : est la pression ; f_x , f_y , et f_z sont les composantes des forces de volumes dans les directions x, y et z.

Force de volume

Ce sont les forces de la pesanteur et d'inertie traduisant l'action à distance du milieu extérieur sur le système. Ces forces sont constituées par la force de gravité et la force de Coriolis qui s'écrivent : [Ider, (2004)], [Kherbache, (2004)]

- **Force de gravité :** $\vec{f}_g = \rho \vec{g}$ (II-6)

- **Force de Coriolis due à la rotation de la terre :** $\vec{f}_c = -2\rho \vec{\omega} \wedge \vec{V}$ (II-7)

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

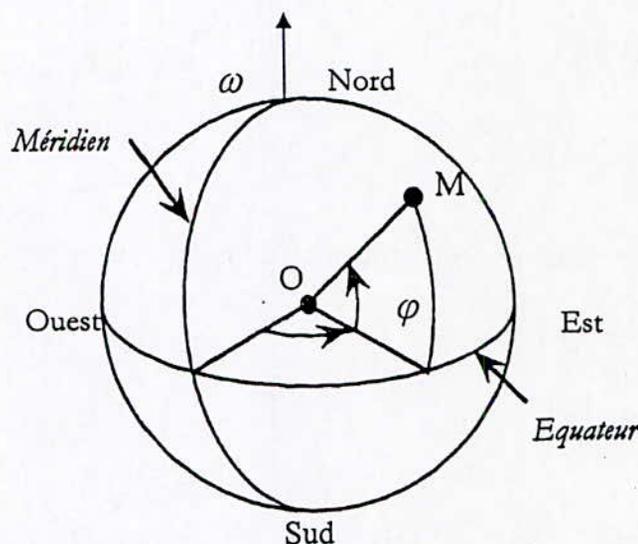


Figure II. 1 : Système de coordonnées

où, φ : est la latitude du point considéré et λ : est la longitude.

Et, $\omega = |\omega|(\cos \varphi \bar{y} + \sin \varphi \bar{z})$ désigne le vecteur taux de rotation de la terre, (φ la latitude de l'aire à modéliser (φ est positive dans l'hémisphère Nord, et négative dans l'hémisphère Sud) et ω la vitesse angulaire de la rotation de la terre ($\omega = 7,292 \cdot 10^{-5}$ rad/s)

D'où : la force de coriolis f_c suivant les axes (ox), (oy), et (oz), s'écrit :

$$\vec{f}_c = 2\omega((V \sin \varphi - W \cos \varphi)\bar{x} - U \sin \varphi \bar{y} - U \cos \varphi \bar{z}) \quad (\text{II-8})$$

1. Approche statistique de l'écoulement

Les écoulements turbulents présentent un caractère aléatoire. Pour cette raison, leur étude se rapproche de celle des gaz de particules en mécanique statistique.

On ne cherche pas à décrire la vitesse en tout point M de coordonnées (x, y, z) et à instant t, on s'intéresse à la probabilité d'obtenir certaines vitesses en un certain nombre de points bien choisis.

Pour déterminer les valeurs moyennes, il faudrait produire un grand nombre de réalisations du même écoulement pour des conditions initiales et des géométries identiques, et effectuer une moyenne d'ensemble sur des valeurs obtenues sur toutes ces réalisations.

Cela n'est évidemment guère réalisable en pratique, et on supposera donc souvent la turbulence vérifie l'hypothèse d'ergodicité : si on attend un temps assez long, l'écoulement passe par tous ses états possibles, et le temps passé dans chacun d'eux est proportionnel à sa probabilité.

On en déduit la définition suivante des composantes de la vitesse moyenne de la vitesse d'écoulement en un point M donné : [Kherbache, (2004)]

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, y, z) &= \frac{1}{T} \int_0^T U(x, y, z) dt, \quad \bar{V}(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T V(x, y, z) dt, \quad \bar{W}(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T W(x, y, z) dt \\ \bar{P}(x, y, z) &= \frac{1}{T} \int_0^T P(x, y, z) dt \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

2. Equation du mouvement moyen

Vitesse et pression sont traitées comme des fonctions aléatoires de l'espace et du temps, dont on décompose les valeurs instantanées en :

$$U_i(x_j, t) = \bar{U}_i(x_j, t) + u_i(x_j, t) \quad (\text{II-10})$$

$$P_i(x_j, t) = \bar{P}_i(x_j, t) + p_i(x_j, t) \quad (\text{II-11})$$

Tel que le symbole $(\bar{\cdot})$ représente l'opérateur de la moyenne statique ou moyenne d'ensemble et les lettres minuscules, les fluctuations ou écarts par rapport à la moyenne.

Par définition :

$$\bar{u}_i(x_j, t) = 0 \text{ et } \bar{p}_i(x_j, t) = 0 \quad (\text{II-12})$$

En désignant par $g(x, y, z, t)$ une autre fonction quelconque, cet opérateur de moyenne vérifie les relations classiques suivantes :

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f} ; \overline{\overline{fg}} = \overline{f} \overline{g} ; \overline{\overline{f+g}} = \overline{f} + \overline{g} ; \overline{\overline{f'}} = 0 \quad (\text{II-13})$$

• Equation de continuité

L'équation de continuité est défini comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-14})$$

Si on désigne par $\overline{U}, \overline{V},$ et \overline{W} les grandeurs hydrodynamiques caractérisant l'écoulement moyen, nous avons la décomposition suivante :

$$U = \overline{U} + u, \quad V = \overline{V} + v \quad \text{et} \quad W = \overline{W} + w \quad (\text{II-15})$$

Sachant que :

$\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$: Composantes de la vitesse moyenne suivant x, y, z ;

u, v, w ; Composantes de la vitesse fluctuante suivant x, y, z ;

Alors l'équation (II-14) s'écrit :

$$\frac{\partial(\overline{U} + u)}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{V} + v)}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{W} + w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-16})$$

On a : $\frac{\partial(A+B)}{\partial C} = \frac{\partial A}{\partial C} + \frac{\partial B}{\partial C}$, alors l'équation (II-16) devient :

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-17})$$

En moyennant l'équation (II-17), on a :

$$\overline{\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-18})$$

$$\text{Comme, } \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-19})$$

$$\text{Alors, } \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-20})$$

L'équation (II-20) est l'équation de continuité pour l'écoulement moyen.

En remplaçant cette équation dans l'équation (II-18), on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-21})$$

Cette dernière est l'équation de continuité du mouvement fluctuant.

• Equations de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement suivant la direction x peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UV}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + f_x \quad (II-22)$$

En appliquant les équations (II-9), qui définies les grandeurs moyennes aux dérivées spatiales de la vitesse et en échangeant l'ordre des opérations d'intégrations par rapport aux temps, et de dérivation par rapport aux variables spatiales, dans l'équation (II-21), on a :

$$\frac{1}{T_0} \int_0^T \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^T \frac{\partial U^2}{\partial x} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^T \frac{\partial UV}{\partial y} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^T \frac{\partial UV}{\partial z} dt = -\frac{1}{\rho T_0} \int_0^T \frac{\partial P}{\partial x} dt + \frac{\mu}{\rho T_0} \int_0^T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^T f_x dt \quad (II-23)$$

avec, $\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} = \frac{1}{T_0} \int_0^T \frac{\partial U^2}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T_0} \int_0^T (\overline{U} + u)^2 dt \right)$

$$\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T_0} \int_0^T (\overline{U}^2 + u^2 + 2\overline{U}u) dt \right)$$

$$\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T_0} \int_0^T (\overline{U}^2 + \frac{1}{T_0} \int_0^T u^2 dt + \frac{1}{T_0} \int_0^T 2\overline{U}u dt) \right)$$

$$\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{U^2} + \overline{u^2} + 2\overline{U}u) = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{U^2} + \overline{u^2} + 2\overline{U}u)$$

d'où : $\frac{\partial \overline{U^2}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{U^2} + \overline{u^2}) \quad (II-24)$

On a ensuite :

$$\frac{\partial \overline{UV}}{\partial y} = \frac{\partial (\overline{U} + u)(\overline{V} + v)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \overline{UV}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{T_0} \int_0^T (\overline{U} + u)(\overline{V} + v) dt \right]$$

$$\frac{\partial \overline{UV}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{T_0} \int_0^T (\overline{UV}) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^T (\overline{V}u) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^T (\overline{U}v) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^T (uv) dt \right]$$

$$\frac{\partial \overline{UV}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\overline{UV} + \overline{uv} + \overline{U}v + \overline{u}V]$$

$$\frac{\partial \overline{UV}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\overline{UV} + \overline{uv} + \overline{Uv} + \overline{uV}]$$

$$\frac{\partial \overline{UV}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\overline{UV} + \overline{uv}] \quad (\text{II-25})$$

De la même manière, on trouve :

$$\frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} = \frac{\partial (\overline{U+u})(\overline{W+w})}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\overline{U+u})(\overline{W+w}) dt \right]$$

$$\frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\overline{UW}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{uw}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{Uw}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{uW}) dt \right]$$

$$\frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [\overline{UW} + \overline{uw} + \overline{Uw} + \overline{uW}]$$

$$\frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [\overline{UW} + \overline{uw} + \overline{Uw} + \overline{uW}]$$

$$\frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [\overline{UW} + \overline{uw}] \quad (\text{II-26})$$

En moyennant le membre de droite de l'équation (II-22), et en prenant les simplifications représentées par les équations (II-24), (II-25), (II-26), on aboutit à l'équation suivante:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{U^2} + \overline{u^2})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{UV} + \overline{uv})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{UW} + \overline{uw})}{\partial z} \quad (\text{II-27})$$

En moyennant le second membre de l'équation (II-22), on obtient :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial z^2} \right) + \overline{f_x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial z^2} \right) + \overline{f_x} \quad (\text{II-28})$$

D'où l'équation (II-3) devient :

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{W} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \overline{f_x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-29})$$

En moyennant chaque terme de l'équation (II-4), il en résulte :

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \overline{W} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial y} + \overline{f_y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-30})$$

On moyenne chaque terme de l'équation (II-5) et on trouve :

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} + \overline{W} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial z} + \overline{f_z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-31})$$

Donc, le système d'équations de Reynolds et de continuité est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-32})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \bar{f}_x + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II-33})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \bar{f}_y + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}w}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II-34})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \bar{f}_z + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}w}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II-35})$$

Remarque

Le système précédent forme un système ouvert, car le nombre d'inconnues est supérieur aux nombres d'équations.

Et le tenseur de Reynolds est :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} & \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{u}v}{\partial x} & \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} & \frac{\partial \bar{v}w}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{u}w}{\partial x} & \frac{\partial \bar{v}w}{\partial y} & \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{II-36})$$

II. Modèle de Saint-Venant

Pour établir le modèle de Saint Venant, il y a lieu de moyenniser les équations de Reynolds sur la verticale, par intégration depuis le fond jusqu'à la surface libre. [Ider, (2004)], [Kherbache, (2004)]

1. Champs d'application

Le modèle de Saint Venant 2,5D est souvent appliqué dans :

- L'étude des écoulements dans les plaines inondées ;
- L'étude des écoulements dans rivières peu profonde ;
- L'étude des estuaires ou les côtes marines.

2. Principales hypothèses

Les principales hypothèses de modèle sont les suivantes :

- L'eau est un fluide incompressible ;
- La répartition de la pression est hydrostatique dans une section.
- La pente du fond est faible vis à vis de la profondeur d'eau ;
- La composante verticale de la vitesse W ainsi que ses variations (spéciales et temporelles) sont faibles, donc : $\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial t} = 0$

- Les variations verticales des deux composantes horizontales U et V sont négligeables ;
- La répartition des vitesses est supposée uniforme sur une verticale; autrement dit, la vitesse calculée sera la vitesse moyenne d'une colonne d'eau;

L'accélération verticale d'une particule fluide est très faible comparée à l'accélération gravitationnelle g, et peut ainsi être négligée [Absi & Retieb, (1994)], [Berriksi & Bouhadji, (1993)], [Berriksi, (1998)], [Ider, (2004)], [Kherbache, (2004)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure & Dialo, (2001)], [Zenzane & Maamare, (2003)]

Ainsi, sous ces hypothèses de Saint Venant, on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \tag{II-37}$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \bar{f}_x + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} \right) \tag{II-38}$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \bar{f}_y + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial z} \right) \tag{II-39}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = \bar{f}_z \tag{II-40}$$

3. Equations du mouvement moyen dans l'espace

Le domaine d'étude Ω dans le repère $R = (O, x, y, z)$ (Oz suivant la verticale est limité en bas par le fond, d'équation $z=Z_f(x, y)$ et en haut par la surface libre de l'eau, d'équation $z=Z_s(x, y, t)$. On va chercher à exprimer des équations sur les composantes horizontales de la vitesse moyennée selon la direction verticale, notées U et V. On se propose donc de considérer un écoulement quasi horizontal où l'accélération verticale de la vitesse est négligeable et la pression est hydrostatique. Les transferts de masse à travers le fond et la surface sont supposés négligeables : ce sont des phénomènes insensibles à l'échelle de temps des écoulements. Dans la suite, on désigne par (U, V, W) les trois composantes de la vitesse. [Ider, (2004)], [Kherbache, (2004)]

4. Les conditions cinématiques

En notant, Z_s la coordonnée verticale d'un point quelconque appartenant à la surface libre ; qui est défini à l'instant t, par un point M de coordonnées (x, y, z), et Z_f la coordonnée verticale d'un point N appartenant à la surface du fond.

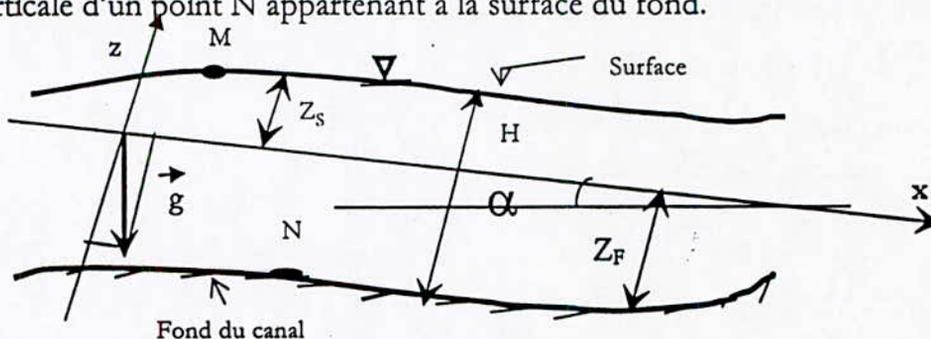


Figure II.2 : Domaine de calcul

Avant de passer à l'intégration verticale de ces équations, il est utile de les compléter par une caractérisation de la surface libre et du fond. Ces surfaces sont définies par les deux équations suivantes :

$$\bullet \text{ La surface libre : } S(x, y, z, t) = z - Z_s(x, y, t) = 0 \quad (\text{II-41})$$

$$\bullet \text{ Le fond : } F\{x, y, z, t\} = z - Z_f(x, y) = 0 \quad (\text{II-42})$$

Remarque

$Z_f = Z_f(x, y)$ suppose que le lit de la rivière est immobile.

Le vecteur \vec{n}_s , normal en un point quelconque de la surface libre se construit à partir du gradient de la fonction $S(x, y, z, t)$:

$$\vec{n}_s = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} + \frac{\left[-\frac{\partial Z_s}{\partial x} \bar{x} - \frac{\partial Z_s}{\partial y} \bar{y} + \bar{z} \right]}{\sqrt{\left(\frac{\partial Z_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (\text{II-43})$$

On construit de même le vecteur normal \vec{n}_f au fond, à partir du gradient de la fonction $F\{x, y, z, t\}$ soit :

$$\vec{n}_f = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} + \frac{\left[-\frac{\partial Z_f}{\partial x} \bar{x} - \frac{\partial Z_f}{\partial y} \bar{y} + \bar{z} \right]}{\sqrt{\left(\frac{\partial Z_f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (\text{II-44})$$

La condition cinématique pour la surface libre s'obtient en dérivant la fonction $S(x, y, z, t)$ par rapport au temps :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dZ}{dt} - \frac{dZ_s}{dt} = 0 \quad (\text{II-45})$$

L'équation de la surface libre est donnée par l'expression suivante :

$$W(Z_s) = \frac{\partial Z_s}{\partial t} = U \frac{\partial Z_s}{\partial x} + U \frac{\partial Z_s}{\partial y} \quad (\text{II-46})$$

L'équation du fond est donnée par la relation suivante:

$$W(Z_f) = \frac{\partial Z_f}{\partial t} = U \frac{\partial Z_f}{\partial x} + U \frac{\partial Z_f}{\partial y} \quad (\text{II-47})$$

En supposant que la surface du fond est indépendante du temps t :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-48})$$

Ce qui implique que :

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z_F}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{II-49})$$

$$\text{Et } W(Z_F) = U \frac{\partial Z_F}{\partial x} + V \frac{\partial Z_F}{\partial y} \quad (\text{II-50})$$

Afin d'obtenir un modèle ne faisant intervenir que les variables d'espace horizontales x et y , les deux premières équations de mouvement ainsi que l'équation de continuité sont affectées d'un opérateur de moyenne sur la hauteur d'eau. On rappelle brièvement que l'opérateur de moyenne sur la verticale pour une fonction quelconque $f(x, y, z, t)$ est défini par :

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \frac{1}{Z_s - Z_F} \int_{Z_F}^{Z_s} f(x, y, z, t) dz \quad (\text{II-51})$$

5. Règle d'intégration de Leibnitz

Pour simplifier, on désigne désormais par $h(x, y, t)$ la position de la surface libre et par $H(x, y, t)$ la hauteur d'eau :

$$h = Z_s(x, y, t) \quad \text{Et} \quad H = Z_s(x, y, t) - Z_F(x, y) \quad (\text{II-52})$$

Avec ces notations, et en appliquant la règle de Leibnitz, on obtient les relations suivantes, pour les dérivées partielles par rapport aux variables x , y et t :

$$H \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial f}{\partial t} dz = H \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_f}^{z_s} f dz + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial t} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{\partial H \bar{f}}{\partial t} + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial t} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial t} \quad (\text{II-53})$$

$$H \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial f}{\partial x} dz = H \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} f dz + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} = \frac{\partial H \bar{f}}{\partial x} + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (\text{II-54})$$

$$H \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial f}{\partial y} dz = H \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} f dz + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} = \frac{\partial H \bar{f}}{\partial y} + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (\text{II-55})$$

Quant à la dérivée par rapport à z , on obtient :

$$H \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = f(x, y, z_s) - f(x, y, z_f) \quad (\text{II-56})$$

6. Intégration de l'équation de continuité sur la profondeur

L'application de l'opérateur de moyenne (II-51) (pondéré par H) à l'équation de continuité, donne :

$$\int_{Z_F}^{Z_s} H \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (\text{II-57})$$

En appliquant la règle de Leibnitz, on a :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U} dz + \bar{U}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} - \bar{U}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} \bar{V} dz + \bar{V}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \bar{V}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{W}(x, y, z_s) - \bar{W}(x, y, z_f) \quad (II-58)$$

Par arrangement, on trouve :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} \bar{V} dz + \left[\bar{U}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} + \bar{V}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \bar{W}(x, y, z_f) \right] - \left[\bar{U}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{V}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} - \bar{W}(x, y, z_s) \right] \quad (II-59)$$

En notant \bar{U}, \bar{V} les valeurs moyennes des composantes U, V de la vitesse :

$$\bar{U} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U} dz \quad \text{et} \quad \bar{V} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^{z_s} \bar{V} dz \quad (II-60)$$

Tenant compte des conditions cinématique à la surface libre (II. 46) et sur le fond (II-47), et de l'équation (II-49), l'équation de continuité moyenne s'exprime finalement sous la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{V}}{\partial y} = 0 \quad (II-61)$$

7. Intégration de la première équation de Reynolds sur la profondeur

❖ *Intégration du membre de gauche de l'équation de quantité de mouvement (II-38) sur la profondeur (Terme de variation en temps et transport convectif)*

$$\int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial z} \right) dz = \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial z} dz \quad (II-62)$$

En utilisant la règle de Leibnitz, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U} dz + \bar{U}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial t} - \bar{U}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U}^2 dz + \bar{U}^2(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} - \bar{U}^2(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U}\bar{V} dz + \bar{U}(x, y, z_f) \bar{V}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \bar{U}(x, y, z_s) \bar{V}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{U}(x, y, z_s) \bar{W}(x, y, z_s) \\ &- \bar{U}(x, y, z_f) \bar{W}(x, y, z_f) \end{aligned} \quad (II-63)$$

Après réarrangement des équations précédentes, on obtient :

$$\int_{z_f}^{z_f} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_f}^{z_f} \bar{U} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_f} \bar{U}^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_f} \bar{U}\bar{V} dz$$

$$+ \bar{U}(x, y, z_f) \left[\frac{\partial z_f}{\partial t} + \bar{U}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} + \bar{V}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \bar{W}(x, y, z_f) \right]$$

$$- \bar{U}(x, y, z_s) \left[\frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{U}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{V}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} - \bar{W}(x, y, z_s) \right]. \quad (II-64)$$

Suite aux conditions cinématiques et les définitions de \overline{UV} , on a :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial H\bar{U}\bar{V}}{\partial y} \quad (II-65)$$

❖ *Intégration du premier terme du membre de droite de l'équation de quantité de mouvement (II-38) sur la profondeur de l'écoulement (Termes de pression)*

Tel que la pression étant hydrostatique :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \cos \alpha = 0 \quad (II-66)$$

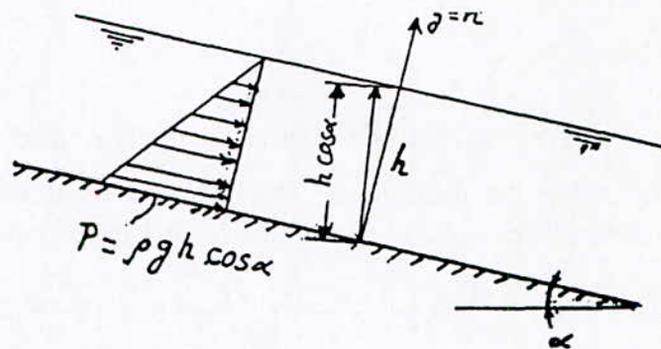


Figure II.3 : Répartition hydrostatique de la pression

Après l'intégration de cette dernière, on a :

$$P(x, y, z) = -\rho g \cos \alpha z + c \quad (II-67)$$

avec, $c =$ constante, et elle est choisie de telle sorte que $P(x, y, z) = P_{atm}$,

où, Z_s est la cote de la surface libre et P_{atm} la pression atmosphérique qui règne à la surface libre.

En remplaçant ces termes dans l'équation (II-67), on a :

$$P(x, y, z) = \rho g \cos \alpha (z_s - z) + P_{atm} \quad (II-68)$$

Et au fond, on a :

$$P(x, y, z) = \rho g \cos \alpha (z_s - z_f) + P_{atm} = \rho g \cos \alpha H + P_{atm} \quad (II-69)$$

Les dérivées partielles par rapport x, y respectivement sont :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} \quad (\text{II-70})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial y}$$

Ces dernières équations sont indépendantes de z , donc :

$$H \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = H g \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} \quad (\text{II-71})$$

$$H \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = H g \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial y}$$

❖ *Intégration du deuxième terme du membre de droite de l'équation de quantité de mouvement (II-38) sur la profondeur de l'écoulement (Forces de Coriolis)*

En faisant la moyenne du terme des forces de Coriolis et de force de pesanteur sur la profondeur :

$$\begin{aligned} \int_{z_f}^{z_s} f_x dz &= \int_{z_f}^{z_s} 2\omega (\bar{V} \sin \varphi - \bar{W} \cos \varphi) dz + \int_{z_f}^{z_s} g \sin \alpha dz = 2\omega \left(\sin \varphi \int_{z_f}^{z_s} \bar{V} dz - \cos \varphi \int_{z_f}^{z_s} \bar{W} dz \right) + g \sin \alpha (z_s - z_f) \\ &= 2\omega \left(\sin \varphi H \bar{\bar{V}} - \cos \varphi H \bar{\bar{W}} \right) + g \sin \alpha (z_s - z_f) \end{aligned} \quad (\text{II-72})$$

D'après l'hypothèse de Saint Venant sur la pression hydrostatique, la valeur moyenne $\bar{\bar{W}}$ de la composante verticale W est négligeable devant la valeur moyenne $\bar{\bar{V}}$ de la composante horizontale V , alors l'équation (II. 72) devient :

$$\int_{z_f}^{z_s} f_x dz = 2\omega \sin \varphi H \bar{\bar{V}} \left(1 - \frac{\bar{\bar{W}}}{\bar{\bar{V}}} \right) + g \sin \alpha (z_s - z_f) = 2\omega \sin \varphi H \bar{\bar{V}} + g \sin \alpha (z_s - z_f)$$

$$\int_{z_f}^{z_s} f_x dz = \Omega H \bar{\bar{V}} + g \sin \alpha (z_s - z_f) \quad (\text{II-73})$$

avec, $\Omega = 2\omega \sin \varphi$

Il est de même pour l'axe des y :

$$\int_{z_s}^{z_f} f_y dz = -\Omega H \bar{\bar{U}} \quad (\text{II-74})$$

❖ *Intégration du troisième terme du membre de droite de l'équation de quantité de mouvement (II-38) sur la profondeur de l'écoulement :*

Par l'intégration des termes de vitesses moyennés sur la profondeur, on a :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) dz = \int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right) dz + \int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right) dz + \int_{z_f}^{z_s} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) dz$$

En utilisant la règle de Leibnizien, on a :

$$\int_{Z_F}^{Z_S} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_F}^{Z_S} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) dz + \frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial x} +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_F}^{Z_S} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) dz + \frac{\partial}{\partial y} \bar{U}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{U}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}(x, y, Z_S) - \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}(x, y, Z_F) \quad (\text{II-75})$$

En utilisant les équations des vitesses moyennes définies dans la relation (II-60), on a :

$$\int_{Z_F}^{Z_S} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \bar{U}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{U}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}(x, y, Z_S) - \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}(x, y, Z_F) \quad (\text{II-76})$$

❖ **Intégration du quatrième terme du membre du droit de l'équation de quantité de mouvement (II-38) sur la profondeur (terme de frottement)**

L'intégration des termes des vitesses fluctuants sur la profondeur est :

$$\int_{Z_F}^{Z_S} \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_F}^{Z_S} \bar{u}^2 + \bar{u}^2(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} - \bar{u}^2(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_F}^{Z_S} \bar{u}v dz + \bar{u}v(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} - \bar{u}v(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial y} + \bar{u}w(x, y, Z_S) - \bar{u}w(x, y, Z_F) \quad (\text{II-77})$$

Utilisant les relations des vitesses moyennées sur la profondeur, on obtient :

$$\int_{Z_F}^{Z_S} \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial H \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{u}v}{\partial y} + \bar{u}^2(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} - \bar{u}^2(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial x}$$

$$+ \bar{u}v(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} - \bar{u}v(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial y} + \bar{u}w(x, y, Z_S) - \bar{u}w(x, y, Z_F) \quad (\text{II-78})$$

Par soustraction de v(II-76) - (II-78), on a :

$$\sqrt{\left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right)} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) \right) - \left(\frac{\partial H \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{u}v}{\partial y} \right)}$$

$$+ \sqrt{\left[\frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{U}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}(x, y, Z_F) \right] - \left[\left(\bar{u}^2(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} + \bar{u}v(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} - \bar{u}w(x, y, Z_F) \right) \right]}$$

$$- \sqrt{\left[\frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{U}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}(x, y, Z_S) \right] + \left[\left(\bar{u}^2(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial x} + \bar{u}v(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial y} - \bar{u}w(x, y, Z_S) \right) \right]} \quad (\text{II-79})$$

Par arrangement de système (II-79), on obtient le système suivant :

$$\int_{Z_F}^{Z_S} \left[\sqrt{\left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right)} \right] dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\rho} \left[\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial H \bar{u}^2}{\partial x} \right) + \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) - \rho \frac{\partial H \bar{u}v}{\partial y} \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{\rho} \left[\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(x, y, Z_F) - \rho \bar{u}^2(x, y, Z_F) \right) \frac{\partial Z_F}{\partial x} + \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \bar{U}(x, y, Z_F) - \rho \bar{u}v(x, y, Z_F) \right) \frac{\partial Z_F}{\partial y} \right] \\
 &+ \frac{1}{\rho} \left[- \left(\mu \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}(x, y, Z_F) - \rho \bar{u}w(x, y, Z_F) \right) \right] - \frac{1}{\rho} \left[\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(x, y, Z_S) - \rho \bar{u}^2(x, y, Z_S) \right) \frac{\partial Z_S}{\partial x} \right] \\
 &- \frac{1}{\rho} \left[\left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \bar{U}(x, y, Z_S) - \rho \bar{u}v(x, y, Z_S) \right) \frac{\partial Z_S}{\partial y} \right] - \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}(x, y, Z_S) - \rho \bar{u}w(x, y, Z_S) \right) \quad (II-80)
 \end{aligned}$$

On définit les contraintes tangentielles suivant (x) et (y) comme suit :

$$\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \rho \bar{u}^2 = \bar{\tau}_{xx} \quad (II-81)$$

$$\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \rho \bar{u}v = \bar{\tau}_{xy} \quad (II-82)$$

$$\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} - \rho \bar{u}w = \bar{\tau}_{xz} \quad (II-83)$$

$$\mu \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} - \rho \bar{v}^2 = \bar{\tau}_{yy} \quad (II-84)$$

$$\mu \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} - \rho \bar{v}w = \bar{\tau}_{yz} \quad (II-85)$$

Le système (II- 80) devient :

$$\begin{aligned}
 &Z_S \int_{Z_F} \left[v \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right) \right] dz \\
 &= \frac{\partial H \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \left[\bar{\tau}_{xx}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} + \bar{\tau}_{xy}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} - \bar{\tau}_{xz}(x, y, Z_F) \right] \\
 &- \left[\bar{\tau}_{xx}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial x} + \bar{\tau}_{xy}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial y} - \bar{\tau}_{xz}(x, y, Z_S) \right] \quad (II-86)
 \end{aligned}$$

On définit les contraintes du fond et de vent :

$$\tau_x^F = -\bar{\tau}_{xx}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} - \bar{\tau}_{xy}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} + \bar{\tau}_{xz}(x, y, Z_F) \quad (II-87)$$

$$\tau_x^S = -\bar{\tau}_{xx}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial x} - \bar{\tau}_{xy}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial y} + \bar{\tau}_{xz}(x, y, Z_S)$$

$$\tau_y^F = -\bar{\tau}_{yy}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} - \bar{\tau}_{yx}(x, y, Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} + \bar{\tau}_{yz}(x, y, Z_F)$$

(II-88)

$$\tau_y^S = -\bar{\tau}_{yy}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial x} - \bar{\tau}_{yx}(x, y, Z_S) \frac{\partial Z_S}{\partial y} + \bar{\tau}_{yz}(x, y, Z_S)$$

Donc le système (II-86) devient :

$$\int_{Z_F}^{Z_S} \left[v \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial H \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \tau_x^F - \tau_x^S \right)$$

Finalement le système (II-39) après l'intégration des différents termes devient :

$$\frac{\partial \bar{H}\bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{H}\bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}\bar{U}v}{\partial y} = \Omega \bar{H}\bar{V} + g \sin \alpha (Z_S - Z_F) - Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial H \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \tau_x^S - \tau_x^f \right) \quad (\text{II-89})$$

Si on suit la même démarche pour la deuxième équation de Reynolds (II-39), on trouve:

$$\frac{\partial \bar{H}\bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{H}\bar{V}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}\bar{V}^2}{\partial y} = -\Omega \bar{H}\bar{U} - Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial H \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \tau_y^S - \tau_y^f \right) \quad (\text{II-90})$$

Donc le système d'équations (II-89), (II-90) représente le modèle 2,5D de Saint Venant.

III. Modèle mathématique de la propagation d'onde

Les équations régissant ce type d'écoulement sont les équations de Saint Venant établies ci-dessus :

➤ L'effet de la force de Coriolis est négligeable (cas d'un écoulement fluvial).

Le système d'équation de Saint Venant à 2,5D (II-89), (II-90) devient : [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Ider, (2004)], [Kherbache, (2004)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure & Dialo, (2001)], [Zenzane & Maamare, (2003)]

Suivant (x) :

$$\frac{\partial \bar{H}\bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{H}\bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}\bar{U}v}{\partial y} = g \sin \alpha (Z_S - Z_F) - Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial H \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \tau_x^S - \tau_x^f \right) \quad (\text{II-91})$$

Suivant (y) :

$$\frac{\partial \bar{H}\bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{H}\bar{V}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}\bar{V}^2}{\partial y} = -Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial H \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \tau_y^S - \tau_y^f \right) \quad (\text{II-92})$$

➤ Les contraintes tangentielles au fond du canal sont prépondérantes sur les autres contraintes. [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure & Dialo, (2001)], [Zenzane & Maamare, (2003)]

D'où, le système d'équations (II-91), (II-92) devient :

$$\frac{\partial \bar{H}\bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{H}\bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}\bar{U}v}{\partial y} = g \sin \alpha (Z_S - Z_F) - Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha + \frac{1}{\rho} (\tau_x^S - \tau_x^f) \quad (\text{II-93})$$

$$\frac{\partial \bar{H}\bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{H}\bar{V}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}\bar{V}^2}{\partial y} = -Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha + \frac{1}{\rho} (\tau_y^S - \tau_y^f) \quad (\text{II-94})$$

- L'effet de l'entraînement d'air n'est pas pris en considération, donc : [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure & Dialo, (2001)], [Zenzane & Maamarc, (2003)]

$$\frac{\partial \overline{HU}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{HU^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{HUV}}{\partial y} = g \sin \alpha (Z_S - Z_F) - Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha - \frac{1}{\rho} (\tau_x^f) \quad (II-95)$$

$$\frac{\partial \overline{HV}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{HUV}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{HV^2}}{\partial y} = -Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha - \frac{1}{\rho} (\tau_y^f) \quad (II-96)$$

- Le coefficient de résistance aux frottements pour l'écoulement non permanent peut être représenté globalement par les formules de la résistance du même type que celles qui sont valables dans l'écoulement permanent (formule de Chezy ou de Manning). [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb (1996)], [Traoure & Dialo, (2001)], [Zenzane & Maamarc, (2003)]

On définit les contraintes de frottement du fond par :

$$\tau_x^f = \frac{\rho g}{C^2} \overline{U} (\overline{U^2} + \overline{V^2})^{\frac{1}{2}} \quad (II-97)$$

$$\tau_y^f = \frac{\rho g}{C^2} \overline{V} (\overline{U^2} + \overline{V^2})^{\frac{1}{2}} \quad (II-98)$$

où C : coefficient de Chezy ;

g : accélération de pesanteur.

On injecte les équations (II-97), (II-98), dans les équations (II-95), (II-96), on obtient :

$$\frac{\partial \overline{HU}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{HU^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{HUV}}{\partial y} = g \sin \alpha (Z_S - Z_F) - Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha - \frac{g}{C^2} \overline{U} (\overline{U^2} + \overline{V^2})^{\frac{1}{2}} \quad (II-99)$$

$$\frac{\partial \overline{HV}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{HUV}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{HV^2}}{\partial y} = g \sin \alpha (Z_S - Z_F) - Hg \frac{\partial H}{\partial y} \cos \alpha - \frac{g}{C^2} \overline{V} (\overline{U^2} + \overline{V^2})^{\frac{1}{2}} \quad (II-100)$$

Alors le système d'équations (II-95), (II-96) devient :

$$\frac{\partial \overline{HU}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{HU^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{HUV}}{\partial y} + Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha = Hg S_{0x} - g H S_{Fx} \quad (II-101)$$

$$\frac{\partial \overline{HV}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{HUV}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{HV^2}}{\partial y} + Hg \frac{\partial H}{\partial y} \cos \alpha = -g H S_{Fy} \quad (II-102)$$

avec,

$$Z_s - Z_f = H$$

$$S_{0x} = \sin \alpha \text{ Pentas de fond du canal suivant } x \text{ et } y.$$

$$S_{Fx} = \frac{1}{HC^2} U(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} \text{ Pentas de frottement suivant } x.$$

$$S_{Fy} = \frac{1}{HC^2} V(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} \text{ Pentas de frottement suivant } y.$$

Le système d'équations (II-99), (II-100) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-103})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial HU}{\partial t} + \frac{\partial HU^2}{\partial x} + \frac{\partial HUV}{\partial y} + Hg \frac{\partial H}{\partial x} \cos \alpha = Hg(S_{0x} - gHS_{Fx}) \end{array} \right. \quad (\text{II-104})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial HV}{\partial t} + \frac{\partial HVU}{\partial x} + \frac{\partial HV^2}{\partial y} + Hg \frac{\partial H}{\partial y} \cos \alpha = -HgS_{Fy} \end{array} \right. \quad (\text{II-105})$$

1. Développement et simplification des équations [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure & Dialo, (2001)], [Zenzane & Maamare, (2003)]

• *Equation de continuité*

En arrangeant l'équation de continuité (II-103), on aboutit à :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial y} + H \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{II-106})$$

• *Equation de la quantité de mouvement suivant x :*

$$\frac{\partial(UH)}{\partial t} + \frac{\partial(U^2H + g \frac{H^2}{2} \cos \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(VUH)}{\partial y} = gH(S_{0x} - S_{Fx}) \quad (4)$$

(1) (2) (3)

Le développement des termes (1), (2) et (3) nous donne :

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial(UH)}{\partial t} &= H \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial t} \\ (2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(U^2H + g \frac{H^2}{2} \cos \alpha \right) &= UH \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial HU}{\partial x} + H \frac{\partial}{\partial x} (gH \cos \alpha) \\ (3) \quad \frac{\partial}{\partial y} (UVH) &= U \frac{\partial}{\partial y} (VH) + VH \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}$$

En introduisant ces développements, on obtient :

$$U \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (UH) + \frac{\partial}{\partial y} (VH) \right) + H \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2}{2} + g \cos \alpha H \right) + V \frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (4)$$

Le premier terme de l'équation ci-dessus représente le terme gauche de l'équation de continuité, par conséquent il est nul.

Après simplification on arrive à la formulation suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2}{2} + g \cos \alpha H \right) + V \frac{\partial U}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{Fx}) \quad (\text{II-107})$$

• *Equation de la quantité de mouvement suivant y :*

En suivant les mêmes étapes que précédemment, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + g \cos \alpha H \right) = -g(S_{Fy}) \quad (\text{II-108})$$

2. Ecriture du système résultant

On a donc construit le modèle de propagation d'onde qui s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial y} + H \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2}{2} + g \cos \alpha H \right) + V \frac{\partial U}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{fx}) \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + g \cos \alpha H \right) = -g(S_{fy}) \end{cases} \quad (\text{II-109})$$

IV. Conditions initiale et aux limites

Nous associons les équations précédentes aux conditions initiales et conditions aux limites ci-dessus : [Bellos & Sakkas, (1987)], [Benatsou & Bouzid, (1992)]

• **Conditions initiales**

$$\text{A } t=0 ; H(x, y, 0) = H_0(x, y)$$

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y)$$

$$V(x, y, 0) = V_0(x, y)$$

Ces conditions sont applicables tout le long du champ d'écoulement et à $t=0$.

Au site du barrage, on a :

$$H(x_b, y, 0) = H_0(x_b, y)$$

$$U(x_b, y, 0) = U_0(x_b, y)$$

$$V(x_b, y, 0) = V_0(x_b, y)$$

tel que x_b : l'abscisse du site du barrage

• **Conditions aux limites**

$$\text{A l'entrée, } H(x_e, y, 0) = H_0(x_e, y)$$

$$U(x_e, y, 0) = U_0(x_e, y)$$

$$V(x_e, y, 0) = V_0(x_e, y)$$

$$\text{A la sortie } H(x_s, y, 0) = H_0(x_s, y)$$

$$U(x_s, y, 0) = U_0(x_s, y)$$

$$V(x_s, y, 0) = V_0(x_s, y)$$

avec, x_e : l'abscisse de l'extrémité amont du champ d'écoulement.

x_s : l'abscisse de l'extrémité aval du champ d'écoulement.

Conclusion

Vu la non linéarité et la complexité des équations obtenus ne permettent pas une solution analytique. Pour ce faire, on doit alors avoir recours à des méthodes expérimentales et numériques.

Chapitre III : Modélisation Numérique des l'écoulements à surface libre avec onde

«Les solutions analytiques exactes, qui sont rares en physiques, sont élégantes, mais non pas plus de valeur intrinsèque que les solutions numérique. On ne doit pas sous-estimer la facilité et la puissance des méthodes de calcul numérique.»

M.A RUDERMAN

Introduction

La modélisation d'un phénomène physique, se traduit souvent par des équations différentielles, des équations intégrales ou par équations aux dérivées partielles. En effet un grand nombre de problèmes en hydraulique sont formulés par des équations aux dérivées partielles.

La résolution d'un problème différentiel, par exemple, qui est par nature «continu», signifie l'obtention des valeurs d'une (ou de plusieurs) inconnue (s) en fonction d'une variable (comme le temps) qui prend une infinité de valeurs possibles. Si l'on est capable de résoudre analytiquement ce problème différentiel, c'est-à-dire d'exprimer sa solution à l'aide d'une formule, alors tout va bien : il suffira, à posteriori, d'appliquer cette formule à telle ou telle valeur de t que choisira l'utilisateur.

L'obtention d'une solution analytique où exacte se limite pratiquement, à des problèmes très simples ou de géométrie très particulière. Mais par contre une solution approchée est réalisable grâce à une résolution numérique qui consiste à discrétiser le problème, i.e. le remplacer par un problème discret censé lui être proche en un certain sens. On peut réaliser une approximation par éléments finis, différences finies . . . etc. Les méthodes numériques d'approximations sont nombreuses mais leur choix où leur emploi représente tout un art dans la présente étude, on a opté pour une résolution par différences finies.

L'arrivée des ordinateurs, leurs progrès immenses et incessants ont permis pour la première fois dans l'histoire de calculer à partir de modèles, des quantités qui ne pouvaient être que très approximativement estimées.

Les méthodes couramment utilisées restent cependant les méthodes des différences finies et des éléments finis. Selon les constats fait par certains chercheurs, la méthode des différences finies est la mieux conseillée quand on traite un problème d'écoulement bidimensionnel.

I. Définitions des différentes méthodes numériques

1. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée pour les études des structures à trois dimensions, car elle étend les possibilités des méthodes matricielles à un très vaste domaine d'application et permet donc l'analyse des structures complexes.

Le principe de cette méthode, consiste à subdiviser la structure étudiée en sous domaine, de forme relativement simple «éléments finis». L'approximation de la solution concernera l'élément constitutif et non pas la structure totale.

2. Méthode des volumes finis

Il s'agit d'une méthode de formulation intégrale dans l'espace physique des lois de conservation. Bien qu'elle ne soit pas fondamentalement différente aux méthodes aux différences finies ou aux éléments finis, il est d'usage de la considérer à part, parce qu'elle trouve un domaine d'application tout à fait spécifique.

3. Méthode des différences finies

La méthode consiste à estimer par approximation les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions à partir des conditions aux limites. Cette approximation représente une discrétisation du domaine en remplaçant l'opérateur différentielle par un opérateur aux différences finies (Figure III.1) [Absi & Retieb (1994)], [Berriksi & Bouhadji, (1993)], [Berriksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb (1996)].

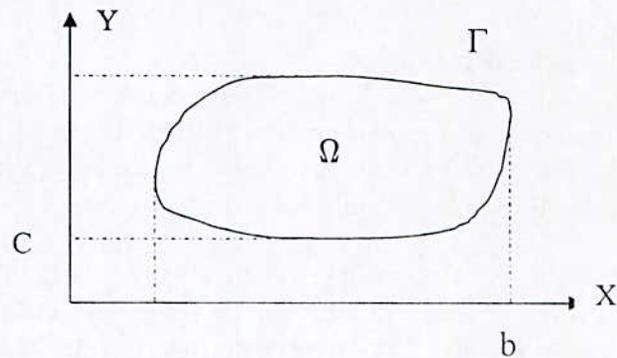


Figure III.1 : Définition d'un domaine

En d'autre termes, le domaine de variation continu, est remplacé par un ensemble fini de points ou nœuds, délimité par des frontières et formant ainsi un réseau (appelé aussi maillage ou grille) (Figure III-2).

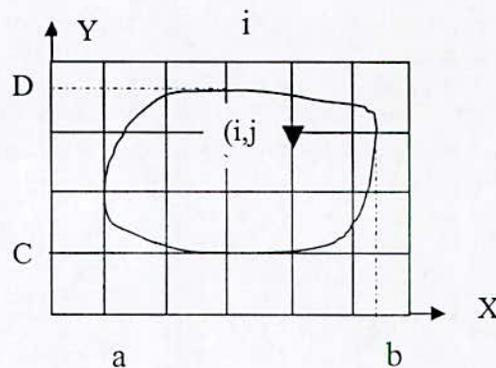


Figure III.2 : Maillage élémentaire

• **Cas d'une approximation à une dimension**

Soit f une fonction continue différentiable, on écrit :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{(III-1)}$$

avec, $f_i = f(x_i)$ Et $x_i = (i-1)\Delta x$

Dans les différenciations ci-dessus, on a utilisé respectivement une différence avant et une différence arrière.

L'ordre d'approximation dans une méthode aux différences finies se détermine à l'aide du développement en série de Taylor de la fonction f :

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\Delta x \partial f}{1! \partial x} \Big|_x + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 f}{2! \partial x^2} \Big|_x + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1} \partial^{n-1} f}{(n-1)! \partial x^{n-1}} \Big|_x + R_p \quad \text{(III-2)}$$

où, le reste R_p est de l'ordre de $\|\Delta x\|^p$, ce que l'on note habituellement :

$$R_p = O(\|\Delta x\|^p) \quad \text{Avec } p, \text{ représente l'ordre d'approximation.}$$

• **Cas d'une approximation à plusieurs dimensions**

La méthode peut être aisément étendue au cas où la fonction (f) considérée dépend de deux ou plusieurs variables.

Ainsi, si f dépend par exemple de deux variables (x, y) ; et si dans le plan oxy , on trace une série de droites parallèle aux axes déterminant de la sorte un réseau de points (i,j) (Figure III.3) auxquels correspondent les coordonnées de la fonction inconnue $f_{(i,j)}$, on peut écrire pour les différences centrales :

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{i,j} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \end{aligned} \right. \quad \text{(III-3)}$$

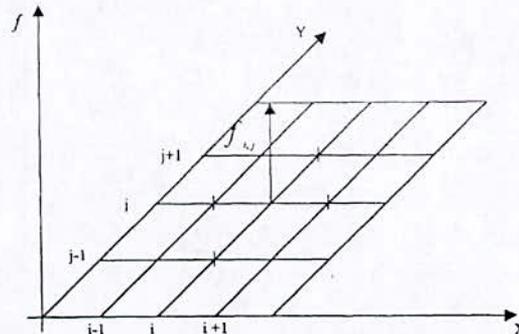


Figure III.3 : Maillage correspondant à une fonction dépendant de deux variables.

D'une manière similaire, pour les dérivées de second ordre, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \\ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_{i,j} = \frac{(f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}) - (f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1})}{4(\Delta x \Delta y)} \end{array} \right. \quad (\text{III-4})$$

$\Delta x, \Delta y$: Pas d'espace suivant les directions (x,y) respectivement.

II. Analyse de l'approximation

1. Erreur de troncature

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction f .

L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'un pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques.

2. La consistance d'un schéma aux différences finies

Nous n'aurons de chance d'obtenir la convergence du schéma que si nous approchons correctement le problème continu, c'est-à-dire si nous remplaçons les dérivées partielles par des différences finies effectivement.

La « qualité » de cette consistance s'appelle la précision du schéma.

3. La stabilité

Un schéma numérique est stable, si les erreurs de n'importe quelle origine n'augmentent pas à chaque pas de temps de calcul. L'instabilité numérique peut avoir une cause d'origine physique ; c'est le cas lorsque le phénomène n'est pas correctement modélisé.

4. La convergence

Un schéma est dit convergent quand la solution de l'équation aux différences se rapproche de la vraie solution de l'équation aux dérivées partielles ayant les mêmes conditions initiales et aux limites lorsque la dimension des mailles de discrétisation diminue.

Généralement, un schéma consistant est stable et également convergent.

III. Les schémas aux différences finies explicites fréquemment utilisés

Plusieurs schémas aux différences finies explicites aux seconds ordres ont été développés pour la résolution des systèmes d'équations de nature hyperbolique qu'on rencontre toujours dans la dynamique des fluides.

On distingue principalement les trois schémas ci-dessous :

- **Schéma de Mac Cormack**

Le schéma de Mac Cormack consiste à discrétiser les équations de base en deux séquences, une séquence de prédiction et une autre de correction [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure, & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)].

Le but est de calculer les valeur des variables de l'écoulement au pas de temps (n+1), sachant que leurs valeurs sont connues au temps n.

➤ **Etape de prédiction**

$$\begin{cases} \tilde{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \beta_1 (F_{(i,j)+1}^n - F_{(i,j)}^n) - \beta_2 (E_{(i,j)+1}^n - E_{(i,j)}^n) + \Delta t D_{(i,j)}^n \\ \tilde{V}_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n - \beta_1 (F_{(i,j)+1}^n - F_{(i,j)}^n) - \beta_2 (E_{(i,j)+1}^n - E_{(i,j)}^n) + \Delta t D_{(i,j)}^n \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

avec, $2 \leq i \leq N$
 $2 \leq j \leq M$

➤ **Etape de correction**

$$\begin{cases} \hat{U}_{(i,j)}^{n+1} = \frac{1}{2} [U_{(i,j)}^n + \tilde{U}_{(i,j)}^n - \beta_1 (F_{(i,j)}^n - F_{(i,j)-1}^n) - \beta_2 (E_{(i,j)+1}^n - E_{(i,j)}^n) + \Delta t D_{(i,j)}^n] \\ \hat{V}_{(i,j)}^{n+1} = \frac{1}{2} [V_{(i,j)}^n + \tilde{V}_{(i,j)}^n - \beta_1 (F_{(i,j)+1}^n - F_{(i,j)}^n) - \beta_2 (E_{(i,j)}^n - E_{(i,j)-1}^n) + \Delta t D_{(i,j)}^n] \end{cases} \quad (\text{III-6})$$

avec, $2 \leq i \leq N-1$
 $2 \leq j \leq M-1$

où, $\beta_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et $\beta_2 = \frac{\Delta t}{\Delta y}$ avec $\Delta t =$ pas de temps et $\Delta x, \Delta y =$ pas de discrétisation de

l'espace ; i, j et n indiquent les valeurs respectives des variables d'un nœud au point d'indice (i,j,n) sur le plan (x,y,t) avec les coordonnées x_i, y_j et t.

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)\Delta x & \text{Pour } i &= 1, 2, \dots; \\ y_j &= (j-1)\Delta y & \text{Pour } j &= 1, 2, \dots; \\ t_n &= (n-1)\Delta t & \text{Pour } n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

- **Schéma de Lambda**

Le schéma de Lambda consiste à discrétiser les équations en deux étapes, l'une de prédiction et l'autre de correction avant la dernière étape qu'est la solution [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure, & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)].

L'algorithme du schéma des deux étapes (prédiction et correction) est le suivant :

➤ **Etape de prédiction**

$$\bar{V}_x^+ = \frac{2V_{i,i}^k - 3V_{(i-1),j}^k + V_{(i-2),j}^k}{\Delta x}$$

$$\bar{V}_y^+ = \frac{2V_{i,j}^1 - 3V_{i,(j-1)}^1 + V_{i,(j-2)}^1}{\Delta y} \quad (\text{III-8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_x^- = \frac{V_{(i+1),j}^k + V_{i,j}^k}{\Delta x} \\ \bar{V}_y^- = \frac{V_{i,(j+1)}^1 - V_{i,j}^1}{\Delta y} \end{array} \right. \quad (\text{III-9})$$

➤ **Etape de correction**

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_x^+ = \frac{\bar{V}_{i,j} - \bar{V}_{(i-1),j}}{\Delta x} \\ \hat{V}_y^+ = \frac{\bar{V}_{i,j} - \bar{V}_{i,(j-1)}}{\Delta y} \end{array} \right. \quad (\text{III-10})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_x^- = \frac{-2V_{i,j} + 3V_{(i+1),j} - V_{(i+2),j}}{\Delta x} \\ \hat{V}_y^- = \frac{-2V_{i,j} + 3V_{i,(j-1)} - V_{i,(j+2)}}{\Delta y} \end{array} \right. \quad (\text{III-11})$$

• **Schéma de Gabutti**

Après avoir testé le schéma de Lambda, Gabutti remarqua que celui-ci ne donne pas d'assez de bons résultats et ne peut par conséquent être utilisé dans tous les cas [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure, & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)].

Pour corriger cette insuffisance, Gabutti proposa un schéma dit "schéma de Gabutti " qui est d'un côté similaire à celui de Lambda, dans la procédure de développement des équations, qui doivent être écrites sous une forme non conservatrice, et qui utilise aussi largement la théorie des caractéristiques, mais d'un autre côté diffère de celui-ci dans l'approximation des dérivées partielles par des différences finies.

Le schéma de Gabutti qui est aussi précis à l'ordre deux, a la particularité d'effectuer deux étapes de prédiction et une étape de correction.

L'algorithme de schéma donne :

➤ **Etape de prédiction**

Partie A

$$\begin{array}{ll} \tilde{V}_x^+ = \frac{V_{i,j}^k - V_{(i-1),j}^k}{\Delta x} & \text{Pour } \lambda > 0 \\ \tilde{V}_x^- = \frac{V_{(i+1),j}^k - V_{i,j}^k}{\Delta x} & \text{Pour } \lambda > 0 \\ \tilde{V}_y^+ = \frac{V_{i,j}^1 - V_{i,(j-1)}^1}{\Delta y} & \text{Pour } \omega < 0 \end{array} \quad (\text{III-12})$$

$$\tilde{V}_y^+ = \frac{V_{i,(j-1)}^1 - V_{i,j}^1}{\Delta y} \quad \text{Pour } \omega < 0 \quad (\text{III-13})$$

Partie B

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_x^+ = \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{(i-1),j}^k + V_{(i-2),j}^k}{\Delta x} \\ \bar{V}_x^- = \frac{-2V_{i,j}^k + 3V_{(i+1),j}^k - V_{(i+2),j}^k}{\Delta x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Pour } \lambda > 0 \\ \text{Pour } \lambda > 0 \end{array} \quad (\text{III-14})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_y^+ = \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{i,(j-1)}^k + V_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} \\ \bar{V}_y^- = \frac{-2V_{i,j}^k + 3V_{i,(j+1)}^k - V_{i,(j+2)}^k}{\Delta y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Pour } \omega < 0 \\ \text{Pour } \omega < 0 \end{array} \quad (\text{III-15})$$

➤ Etape de correction

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_x^+ = \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{(i-1),j}}{\Delta x} \\ \hat{V}_x^- = \frac{\tilde{V}_{(i+1),j} - \tilde{V}_{i,j}}{\Delta x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Pour } \lambda > 0 \\ \text{Pour } \lambda > 0 \end{array} \quad (\text{III-16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_y^+ = \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,(j-1)}}{\Delta y} \\ \hat{V}_y^- = \frac{\tilde{V}_{i,(j-1)} - \tilde{V}_{i,j}}{\Delta y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Pour } \omega < 0 \\ \text{Pour } \omega < 0 \end{array} \quad (\text{III-17})$$

Les solutions au pas de temps $k+1$ sont données par :

$$V_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (V_{i,j}^k + \bar{V}_{i,j} + \hat{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j}) \quad (\text{III-16})$$

$$V_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (V_{i,j}^k + \bar{V}_{i,j} + \hat{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j}) \quad (\text{III-17})$$

IV. Application du schéma de Gabutti

Dans le chapitre précédent, on a abouti au modèle régissant les écoulements avec onde suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial y} + H \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2}{2} + g \cos \alpha H \right) + V \frac{\partial U}{\partial x} = g(S_{0x} - S_{fx}) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + gH \cos \alpha \right) = -g(S_{fy}) \end{array} \right. \quad (\text{III-18})$$

En terme de primitives des variables de l'écoulement H , U et V , le système d'équations (III.18) qui gouverne l'écoulement s'écrit :

$$V_t + P_x + R_y + T = 0 \quad (\text{III-19})$$

$$\text{où, } \mathcal{V} = (H, U, V) \quad (\text{III-20})$$

$$P = \begin{bmatrix} UH \\ \frac{1}{2}U^2 + gH \cos \alpha \\ UV \end{bmatrix} ; R = \begin{bmatrix} VH \\ UV \\ \frac{1}{2}V^2 + gH \cos \alpha UV \end{bmatrix} \quad \text{et } T = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_{0x} - S_{fx}) \\ g(S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (\text{III-21})$$

L'équation (III-19), n'est pas totalement dans une forme conservatrice à cause de la présence du terme T appelé « Terme de source ».

Quand ce terme n'est pas nul, il agit comme une source, mais comme la contribution de ce terme est généralement petite les propriétés de la forme conservatrice ne sont pas altérées.

Il est cependant, nécessaire pour certains schémas numériques (schémas aux différences finies), que les équations soient dans la forme non conservatives c'est-à-dire dissipative, dans ce but, la forme dissipative de l'équation (III-19) est obtenue en substituant les termes P_x et R_y comme suit :

$$P_x = B_1 \cdot V_x \quad (\text{III-22})$$

$$R_y = B_2 \cdot V_y \quad (\text{III-23})$$

L'équation (III-19), peut s'écrire sous la forme non conservatrice suivante [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure, & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)] :

$$V_t + B_1 V_x + B_2 V_y + Z = 0 \quad (\text{III-24})$$

$$\text{avec, } V_t = \begin{bmatrix} H_t \\ U_t \\ V_t \end{bmatrix}, \quad B_1 V_x = \begin{bmatrix} UH_x & dU_x & 0 \\ g \cos \alpha H_x & UU_x & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix}, \quad B_2 V_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & dV_y \\ 0 & VV_y & 0 \\ g \cos \alpha H_y & 0 & V \end{bmatrix}$$

$$\text{Et } Z = \begin{bmatrix} 0 \\ g(S_{0x} - S_{fx}) \\ -g(S_{fy}) \end{bmatrix}$$

$$\text{D'où } B_1 = \begin{bmatrix} U & d & 0 \\ g \cos \alpha & U & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix} \quad \text{et } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & V & 0 \\ g \cos \alpha & 0 & V \end{bmatrix}$$

où, d : la profondeur hydraulique.

Les directions caractéristiques de l'équation (III-24) ne sont autres que les valeurs propres des matrices B_1 , B_2 .

$$V_1 = B_1 V_x = \begin{bmatrix} UH_x & dU_x & 0 \\ g \cos \alpha H_x & UU_x & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix}$$

$$V_2 = B_2 V_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & dV_y \\ 0 & VV_y & 0 \\ g \cos \alpha H_y & 0 & V \end{bmatrix}$$

Soient λ, ω des réels et soit une matrice (I) identité de même ordre que B.

Si $\det_1 (B_1 - \lambda) = 0$ et $\det_2 (B_2 - \omega) = 0$, alors λ, ω sont des valeurs propres de B_1, B_2

Les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = U \\ \lambda_2 = U + C \\ \lambda_3 = U - C \end{cases} \quad (\text{III-25})$$

$$\begin{cases} \omega_1 = V \\ \omega_2 = V + C \\ \omega_3 = V - C \end{cases} \quad (\text{III-26})$$

Les équations compatibles du système (III-18) deviennent alors [Traoure & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)]:

$$\begin{cases} H_t + UH_x + VH_y + d(U_x + V_y) = 0 \\ U_t + UU_x + VU_y + g \cos \alpha H_x - g(S_{0x} - S_{Fx}) = 0 \\ V_t + UV_x + VV_y + g \cos \alpha H_y + g(S_{Fy}) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-27})$$

$$\bullet \text{ Pour } \begin{cases} \lambda_1 = U \\ \lambda_2 = U + C \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \omega_1 = V \\ \omega_2 = V + C \end{cases}$$

Les exposants positifs et négatifs indiquent respectivement les directions des caractéristiques positives ou négatives.

En remplaçant U par sa valeur de l'expression ci-dessus, on a les équations suivantes :

$$H_t + \frac{1}{2}[\lambda]^+ H_x - C H_x + dU_x + [\omega]^+ H_y - C H_y + dV_y = 0 \quad (\text{III-28})$$

$$U_t + \frac{1}{2}([\lambda]^+ - C)U_x + ([\omega]^+ - C)U_y + \frac{C^2}{d} g \cos \alpha H_x - \frac{C^2}{d} g(S_{0x} - S_{Fx}) = 0 \quad (\text{III-29})$$

$$V_t + ([\lambda]^+ - C)V_x + \frac{1}{2}([\omega]^+ - C)V_y + \frac{C^2}{d} g \cos \alpha H_y + \frac{C^2}{d} g(S_{Fy}) = 0 \quad (\text{III-30})$$

En multipliant les équations des (III-29) et (III-30) par $\frac{d}{C}$, on a donc :

$$dU_x - C g \cos \alpha_x H_x = \frac{d}{C} ([\omega]^+ - C) U_y + \frac{d}{2C} (U_t + [\lambda]^+ U_x) - C g (S_{0x} - S_{Fx}) \quad (\text{III-31})$$

$$dV_y - C g \cos \alpha_x H_y = \frac{d}{C} ([\lambda]^+ - C) V_x + \frac{d}{2C} (V_t + [\omega]^+ V_y) - C g (S_{iy}) \quad (\text{III-32})$$

En remplaçant ces équations par leurs valeurs dans l'équation (III-28), on obtient :

$$H_t + [\lambda]^+ g \cos \alpha_x H_x + [\omega]^+ g \cos \alpha_x h_y + \frac{d}{2C} ([\omega]^+ - C) + \frac{d}{2C} (U_t + [\lambda]^+ U_x) + \frac{d}{2C} ([\lambda]^+ - C) V_x + \frac{d}{2C} (V_t + [\omega]^+ V_y) + C (S_{iy}) - C g (S_{0x} - S_{Fx}) = 0 \quad (\text{III-33})$$

$$\text{Pour } \begin{cases} \lambda_1 = U \\ \lambda_3 = U - C \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \omega_1 = V \\ \omega_3 = V - C \end{cases}$$

$$h_t + [\lambda]^- h_x - C h_x + d U_x + [\omega]^- h_y - C h_y + d V_y = 0 \quad (\text{III-34})$$

$$U_t + \frac{1}{2} ([\lambda]^- - C) U_x + ([\omega]^- - C) U_y + \frac{C^2}{d} H_x g \cos \alpha - \frac{C^2}{d} g (S_{0x} - S_{Fx}) = 0 \quad (\text{III-35})$$

$$V_t + ([\lambda]^- - C) V_x + \frac{1}{2} ([\omega]^- - C) V_y + \frac{C^2}{d} \cos \alpha H_y + \frac{C^2}{d} g (S_{iy}) = 0 \quad (\text{III-36})$$

En multipliant les équations (III-35) et (III-36) par $\frac{d}{C}$, on a :

$$dU_x - C H_x \cos \alpha = \frac{d}{C} ([\omega]^- - C) U_y + \frac{d}{2C} (U_t + [\lambda]^- U_x) - C g (S_{0x} - S_{Fx}) \quad (\text{III-37})$$

$$dV_y - C H_y \cos \alpha = \frac{d}{C} ([\lambda]^- - C) V_x + \frac{d}{2C} (V_t + [\omega]^- V_y) - C g (S_{iy}) \quad (\text{III-38})$$

En remplaçant ces équations par leurs valeurs dans l'équation (III-34), on obtient :

$$h_t + [\lambda]^+ H_x \cos \alpha + [\omega]^- H_y \cos \alpha + \frac{d}{C} ([\omega]^- - C) + \frac{d}{2C} (U_t + [\lambda]^- U_x) + \frac{d}{C} ([\lambda]^- - C) V_x + \frac{d}{2C} (V_t + [\omega]^- V_y) + C g (S_{iy}) - C g (S_{0x} - S_{Fx}) = 0 \quad (\text{III-39})$$

La forme non conservatrice de l'équation (III-24) peut être écrite comme suit [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure, & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)] :

$$V_t + B_1^+ U^+ + B_1^- U^- + B_2^+ V^+ + B_2^- V^- + Z \quad (\text{III-40})$$

Dans cette équation, les matrices B_1 , B_2 sont subdivisées en deux matrices pour chaque une, dont une est associée aux caractéristiques positives et l'autre aux caractéristiques négatives.

La dérivée caractéristique est marquée par un exposant sur la dérivée partielle spatiale pour indiquer le type de différentiation qui sera utilisée.

Soient X_1, X_2 des vecteurs propres des matrices B_1, B_2 respectivement, on a alors :

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Si on pose $[\lambda]X_1 = B_1X_1$ et $[\omega]X_2 = B_2X_2$, on trouve les systèmes suivants :

On peut alors choisir les vecteurs propres, ce qui conduit aux matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & d/2C & d/2C \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & d/2C & d/2C \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} X$$

Les matrices inverses de ces matrices notées M_1^{-1} et M_2^{-1} sont alors :

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c/d & 1 & 0 \\ c/d & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c/d & 0 & 1 \\ c/d & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On trouve alors que, les Jacobiennes B_1 et B_2 peuvent être diagonalisées de la manière suivante :

$$M_1DM_1^{-1} = B_1 \quad \text{(III-41)}$$

$$M_2DM_2^{-1} = B_2 \quad \text{(III-42)}$$

où, D_1 et D_2 : matrices diagonales constituées par les valeurs propres de B_1 et B_2 .

Les matrices Jacobiennes diagonalisées B_1 et B_2 s'écrivent aussi en fonction des valeurs propres [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure, & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)] :

$$M_1DM_1^{-1} = B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) & \frac{d}{2C}(\lambda_2 - \lambda_3) & 0 \\ \frac{C}{2d}(\lambda_2 - \lambda_3) & \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \text{(III-43)}$$

$$\text{Et } M_2DM_2^{-1} = B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) & 0 & \frac{d}{2C}(\omega_2 - \omega_3) \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ \frac{C}{2d}(\omega_2 - \omega_3) & 0 & \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) \end{bmatrix} \quad \text{(III-44)}$$

Etant donné $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, alors $B_1^- = [0]$

Et $\omega_1, \omega_2 > 0$ et $\omega_3 < 0$, il vient alors :

$$B_1^+ = B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda_3) & \frac{d}{2C}(\lambda_2 - \lambda_3) & 0 \\ \frac{C}{2d}(\lambda_2 - \lambda_3) & \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-45})$$

$$\text{Et } B_2 = B_2^+ + B_2^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\omega_2) & 0 & \frac{d}{2C}(\omega_2) \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ \frac{C}{2d}(\omega_2) & 0 & \frac{1}{2}(\omega_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\omega_3) & 0 & \frac{-d}{2C}(\omega_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-C}{2d}(\omega_3) & 0 & \frac{1}{2}(\omega_3) \end{bmatrix} \quad (\text{III-46})$$

La discrétisation pour les dérivées partielles spatiales est obtenue en se référant aux valeurs de λ et ω . Donc les équations du système (III-27) devient finalement : [Traoure & Dialo (2001)], [Zenzane & Maamare, (2003)]

$$H_t + (B_1^+ h_x^+) + (B_1^+ U_x^+) + (B_2^+ H_y^+ + B_2^- H_y^-) + (B_2^+ V_y^+ + B_2^- V_y^-) = 0 \quad (\text{III-47})$$

$$U_t + (B_1^+ U_x^+) + (B_2^+ U_y^+ + B_2^- U_y^-) + (B_1^+ H_x^+) - g(S_{0x} - S_{Fx}) = 0 \quad (\text{III-48})$$

$$V_t + (B_1^+ V_x^+) + (B_2^+ V_y^+ + B_2^- V_y^-) + (B_2^+ H_y^+ + B_2^- H_y^-) + g(S_{Fy}) = 0 \quad (\text{III-49})$$

Le schéma de Gabutti nous permet alors d'écrire :

$$H_t + (B_1^+ h_x^+) + (B_1^+ U_x^+) + (B_2^+ H_y^+ + B_2^- H_y^-) + (B_2^+ V_y^+ + B_2^- V_y^-) = 0 \quad (\text{III-50})$$

$$U_t + (B_1^+ U_x^+) + (B_2^+ U_y^+ + B_2^- U_y^-) + (B_1^+ H_x^+) - g(S_{0x} - S_{Fx}) = 0 \quad (\text{III-51})$$

$$V_t + (B_1^+ V_x^+) + (B_2^+ V_y^+ + B_2^- V_y^-) + (B_2^+ H_y^+ + B_2^- H_y^-) + g(S_{Fy}) = 0 \quad (\text{III-52})$$

• **Suivant le temps**

$$U_t = \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\Delta t}, \quad V_t = \frac{V_{i,j}^{k+1} - V_{i,j}^k}{\Delta t} \quad \text{et} \quad h_t = \frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (\text{III-53})$$

où, les indices i, j et k représentent respectivement les pas de variations dans l'espace et dans le temps.

On remplace ces termes par leurs expressions, on trouve :

$$H_{i,j}^{k+1} = H_{i,j}^k - \Delta t (B_1^+ H_x^+) - \Delta t (B_1^+ U_x^+ + B_1^- U_x^-) - \Delta t (B_2^+ H_y^+ + B_2^- H_y^-) - \Delta t (B_2^+ V_y^+ + B_2^- V_y^-) = 0 \quad (\text{III-54})$$

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k - \Delta t (B_1^+ U_x^+ + B_1^- U_x^-) - \Delta t (B_2^+ U_y^+ + B_2^- U_y^-) - \Delta t (B_1^+ H_x^+ - B_1^- H_x^-) + g \Delta t (S_{0x} - S_{Fx}) = 0 \quad (\text{III-55})$$

$$V_{i,j}^{k+1} = V_{i,j}^k - \Delta t (B_1^+ V_x^+) - \Delta t (B_2^+ V_y^+ + B_2^- V_y^-) - \Delta t (B_2^+ H_y^+ + B_2^- H_y^-) - g \Delta t (S_{Fy}) = 0 \quad (\text{III-56})$$

Dans (III-54), (III-55) et (III-56), la principale difficulté est la détermination des dérivés par rapport à x et y . c'est la qu'intervient le schéma de Gabutti, son application conduit à :

Si au lieu de $h_x^{\pm}, h_y^{\pm}, U_x^{\pm}, U_y^{\pm}, V_x^{\pm}$ et V_y^{\pm} , on les remplace par leurs expressions dans (III-54), (III-55) et (III-56), on trouvera une première valeur approximative de U, V et H , qu'on note : \tilde{U}, \tilde{V} et \tilde{H} .

1. Etape de prédiction

• Partie A

$$\begin{aligned}\tilde{H}_x^+ &= \frac{H_{i,j}^k - H_{(i-1),j}^k}{\Delta x}, \tilde{H}_y^- = \frac{H_{(i+1),j}^k - H_{i,j}^k}{\Delta y}, \tilde{H}_y^+ = \frac{H_{i,j}^k - H_{i,(j-1)}^k}{\Delta y} \text{ et } \tilde{H}_x^- = \frac{H_{i,(j+1)}^k - H_{i,j}^k}{\Delta x} \\ \tilde{U}_x^+ &= \frac{U_{i,j}^k - U_{(i-1),j}^k}{\Delta x}, \tilde{U}_x^- = \frac{U_{(i+1),j}^k - U_{i,j}^k}{\Delta x}, \tilde{U}_y^+ = \frac{U_{i,j}^k - U_{i,(j-1)}^k}{\Delta y} \text{ et } \tilde{U}_y^- = \frac{U_{i,(j+1)}^k - U_{i,j}^k}{\Delta y} \\ \tilde{V}_x^+ &= \frac{V_{i,j}^k - V_{(i-1),j}^k}{\Delta x}, \tilde{V}_x^- = \frac{V_{(i+1),j}^k - V_{i,j}^k}{\Delta x}, \tilde{V}_y^+ = \frac{V_{i,j}^k - V_{i,(j-1)}^k}{\Delta y} \text{ et } \tilde{V}_y^- = \frac{V_{i,(j+1)}^k - V_{i,j}^k}{\Delta y}\end{aligned}$$

En remplaçant ceux ci par leurs expressions dans les équations (III-37), (III-38) et (III-39), on trouve [Traoure & Dialo, (2001)], [Zenzane & Maamare, (2003)] :

• *Equation de continuité*

$$\begin{aligned}H_{i,j}^{k+1} &= H_{i,j}^k - \Delta t \left([B_1^k]_{i,j} \frac{H_{i,j}^k - H_{(i-1),j}^k}{\Delta x} \right) - \Delta t \left([B_1^k]_{i,j} \frac{U_{i,j}^k - U_{(i-1),j}^k}{\Delta x} \right) \\ &- \Delta t \left([B_2^k]_{i,j} \frac{H_{i,j}^k - H_{i,(j-1)}^k}{\Delta y} + [B_2^k]_{i,j} \frac{H_{i,(j+1)}^k - H_{i,j}^k}{\Delta y} \right) - \Delta t \left([B_2^k]_{i,j} \frac{V_{i,j}^k - V_{i,(j-1)}^k}{\Delta y} + [B_2^k]_{i,j} \frac{V_{i,(j+1)}^k - V_{i,j}^k}{\Delta y} \right) = 0\end{aligned}\quad (III-57)$$

• *Equation de quantité de mouvement suivant (x) :*

$$\begin{aligned}U_{i,j}^{k+1} &= U_{i,j}^k - \Delta t \left([B_1^k]_{i,j} \frac{U_{i,j}^k - U_{(i-1),j}^k}{\Delta x} \right) - \Delta t \left([B_2^k]_{i,j} \frac{U_{i,j}^k - U_{i,(j-1)}^k}{\Delta y} + [B_2^k]_{i,j} \frac{U_{i,(j+1)}^k - U_{i,j}^k}{\Delta y} \right) \\ &\Delta t \left([B_1^k]_{i,j} \frac{H_{i,j}^k - H_{(i-1),j}^k}{\Delta x} \right) + g \Delta t (S_{0x} - S_{fx}) = 0\end{aligned}\quad (III-58)$$

• *Equation de quantité de mouvement suivant (y) :*

$$\begin{aligned}V_{i,j}^{k+1} &= V_{i,j}^k - \Delta t \left([B_1^k]_{i,j} \frac{V_{i,j}^k - V_{(i-1),j}^k}{\Delta x} \right) - \Delta t \left([B_2^k]_{i,j} \frac{V_{i,j}^k - V_{i,(j-1)}^k}{\Delta y} + [B_2^k]_{i,j} \frac{V_{i,(j+1)}^k - V_{i,j}^k}{\Delta y} \right) \\ &- \Delta t \left([B_2^k]_{i,j} \frac{H_{i,j}^k - H_{i,(j-1)}^k}{\Delta y} + [B_2^k]_{i,j} \frac{H_{i,(j+1)}^k - H_{i,j}^k}{\Delta y} \right) - g \Delta t (S_{fy}) = 0\end{aligned}\quad (III-59)$$

• Partie B

$$\bar{U}_x^+ = \frac{2U_{i,j}^k - 3U_{(i-1),j}^k + U_{(i-2),j}^k}{\Delta x} \quad \bar{U}_y^+ = \frac{2U_{i,j}^k - 3U_{i,(j-1)}^k + U_{i,(j-2)}^k}{\Delta y}$$

$$\begin{aligned}\bar{U}_x^- &= \frac{-2U_{i,j}^k + 3U_{(i+1),j}^k - U_{(i+2),j}^k}{\Delta x} & \bar{U}_y^- &= \frac{-2U_{i,j}^k + 3U_{(i+1),j}^k - U_{(i+2),j}^k}{\Delta y} \\ \bar{V}_y^+ &= \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{i,(j-1)}^k + V_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} & \bar{V}_x^+ &= \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{i,(j-1)}^k + V_{i,(j-2)}^k}{\Delta x} \\ \bar{V}_y^- &= \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{i,(j-1)}^k + V_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} & \bar{V}_x^- &= \frac{-2V_{i,j}^k + 3V_{i,(j+1)}^k - V_{i,(j+2)}^k}{\Delta x} \\ \bar{H}_y^+ &= \frac{2H_{i,j}^k - 3H_{i,(j-1)}^k + H_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} & \bar{H}_x^+ &= \frac{2H_{i,j}^k - 3H_{i,(j-1)}^k + H_{i,(j-2)}^k}{\Delta x} \\ \bar{H}_y^- &= \frac{-2H_{i,j}^k + 3H_{i,(j+1)}^k - H_{i,(j+2)}^k}{\Delta y} & \bar{H}_x^- &= \frac{-2H_{i,j}^k + 3H_{i,(j+1)}^k - H_{i,(j+2)}^k}{\Delta x}\end{aligned}$$

• *Equation de continuité*

$$\begin{aligned}H_{i,j}^{k+1} &= h_{i,j}^k - \Delta t \left([B_1^+]_{i,j}^k \frac{2H_{i,j}^k - 3H_{i,(j-1)}^k + H_{i,(j-2)}^k}{\Delta x} \right) - \Delta t \left([B_1^+]_{i,j}^k \frac{2U_{i,j}^k - 3U_{(i-1),j}^k + U_{(i-2),j}^k}{\Delta x} \right) \\ &- \Delta t \left([B_2^+]_{i,j}^k \frac{2H_{i,j}^k - 3H_{i,(j-1)}^k + H_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} + [B_2^-]_{i,j}^k \frac{-2H_{i,j}^k + 3H_{i,(j+1)}^k - H_{i,(j+2)}^k}{\Delta y} \right) \\ &- \Delta t \left([B_2^+]_{i,j}^k \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{i,(j-1)}^k + V_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} + [B_2^-]_{i,j}^k \frac{-2V_{i,j}^k + 3V_{i,(j+1)}^k - V_{i,(j+2)}^k}{\Delta y} \right) = 0\end{aligned} \quad (\text{III-60})$$

• *Equation de quantité de mouvement suivant (x) :*

$$\begin{aligned}U_{i,j}^{k+1} &= U_{i,j}^k - \Delta t \left([B_1^+]_{i,j}^k \frac{2U_{i,j}^k - 3U_{(i-1),j}^k + U_{(i-2),j}^k}{\Delta x} \right) \\ &- \Delta t \left([B_2^+]_{i,j}^k \frac{2U_{i,j}^k - 3U_{(i-1),j}^k + U_{(i-2),j}^k}{\Delta y} + [B_2^-]_{i,j}^k \frac{-2U_{i,j}^k + 3U_{(i+1),j}^k - U_{(i+2),j}^k}{\Delta y} \right) \\ &- \Delta t \left([B_1^+]_{i,j}^k \frac{2H_{i,j}^k - 3H_{i,(j-1)}^k + H_{i,(j-2)}^k}{\Delta x} \right) + g\Delta t(S_{0x} - S_{Fx}) = 0\end{aligned} \quad (\text{III-61})$$

• *Equation de quantité de mouvement suivant (Y) :*

$$\begin{aligned}V_{i,j}^{k+1} &= V_{i,j}^k - \Delta t \left([B_1^+]_{i,j}^k \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{i,(j-1)}^k + V_{i,(j-2)}^k}{\Delta x} \right) \\ &- \Delta t \left([B_2^+]_{i,j}^k \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{i,(j-1)}^k + V_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} + [B_2^-]_{i,j}^k \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{i,(j-1)}^k + V_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} \right) \\ &- \Delta t \left([B_2^+]_{i,j}^k \frac{2H_{i,j}^k - 3H_{i,(j-1)}^k + H_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} + [B_2^-]_{i,j}^k \frac{2H_{i,j}^k - 3H_{i,(j-1)}^k + H_{i,(j-2)}^k}{\Delta y} \right) + g\Delta t(S_{Fy}) = 0\end{aligned} \quad (\text{III-62})$$

2. Etape de correction

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_x^+ &= \frac{\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{(i-1),j}}{\Delta x} & \hat{U}_y^+ &= \frac{\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{(i-1),j}}{\Delta y} & \hat{U}_x^- &= \frac{\tilde{U}_{(i+1),j} - \tilde{U}_{i,j}}{\Delta x} & \hat{U}_y^- &= \frac{\tilde{U}_{(i+1),j} - \tilde{U}_{i,j}}{\Delta y} \\
 \hat{V}_y^+ &= \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,(j-1)}}{\Delta y} & \hat{V}_x^+ &= \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,(j-1)}}{\Delta x} & \hat{V}_y^- &= \frac{\tilde{V}_{i,(j-1)} - \tilde{V}_{i,j}}{\Delta y} & \hat{V}_x^- &= \frac{\tilde{V}_{i,(j-1)} - \tilde{V}_{i,j}}{\Delta x} \\
 \hat{H}_x^+ &= \frac{\hat{H}_{i,j} - \hat{H}_{(i-1),j}}{\Delta x} & \hat{H}_y^+ &= \frac{\hat{H}_{i,j} - \hat{H}_{(i-1),j}}{\Delta y} & \hat{H}_x^- &= \frac{\hat{H}_{(i+1),j} - \hat{H}_{i,j}}{\Delta x} & \hat{H}_y^- &= \frac{\hat{H}_{(i+1),j} - \hat{H}_{i,j}}{\Delta y}
 \end{aligned}$$

- **Equation de continuité**

$$\begin{aligned}
 H_{i,j}^{k+1} &= H_{i,j}^k - \Delta t \left([B_1^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{H}_{i,j} - \tilde{H}_{(i-1),j}}{\Delta x} \right) - \Delta t \left([B_1^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{(i-1),j}}{\Delta x} \right) \\
 &- \Delta t \left([B_2^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{H}_{i,j} - \tilde{H}_{(i-1),j}}{\Delta y} + [B_2^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{H}_{(i+1),j} - \tilde{H}_{i,j}}{\Delta y} \right) - \Delta t \left([B_2^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,(j-1)}}{\Delta y} + [B_2^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{V}_{i,(j-1)} - \tilde{V}_{i,j}}{\Delta y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{III-63}$$

- **Equation de quantité de mouvement suivant (x)**

$$\begin{aligned}
 U_{i,j}^{k+1} &= U_{i,j}^k - \Delta t \left([B_1^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{(i-1),j}}{\Delta x} \right) - \Delta t \left([B_2^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{(i-1),j}}{\Delta y} + [B_2^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{U}_{(i+1),j} - \tilde{U}_{i,j}}{\Delta y} \right) \\
 &- \Delta t \left([B_1^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{H}_{i,j} - \tilde{H}_{(i-1),j}}{\Delta x} \right) + g \Delta t (S_{bx} - S_{fx}) = 0
 \end{aligned} \tag{III-64}$$

- **Equation de quantité de mouvement suivant (y)**

$$\begin{aligned}
 V_{i,j}^{k+1} &= V_{i,j}^k - \Delta t \left([B_1^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,(j-1)}}{\Delta x} \right) - \Delta t \left([B_2^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,(j-1)}}{\Delta y} + [B_2^-]_{i,j}^k \frac{\tilde{V}_{i,(j-1)} - \tilde{V}_{i,j}}{\Delta y} \right) \\
 &- \Delta t \left([B_2^+]_{i,j}^k \frac{\tilde{H}_{i,j} - \tilde{H}_{(i-1),j}}{\Delta y} + [B_2^-]_{i,j}^k \frac{\tilde{H}_{(i+1),j} - \tilde{H}_{i,j}}{\Delta y} \right) - g \Delta t (S_{fy}) = 0
 \end{aligned} \tag{III-65}$$

En résumé, on trouve [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure, & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)]:

3. Etape de prédiction

- **Partie A**

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{i,j} \\ \tilde{U}_{i,j} \\ \tilde{V}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{i,j}^k \\ U_{i,j}^k \\ V_{i,j}^k \end{bmatrix} - \tau_x [B_1^+]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (H_{i,j}^k - H_{(i-1),j}^k) \\ U_{i,j}^k - U_{(i-1),j}^k \\ V_{i,j}^k - V_{(i-1),j}^k \end{bmatrix} \quad (\text{III-66})$$

$$- \tau_y \left\{ \begin{bmatrix} (h_{i,j}^k - h_{i,j-1}^k) \\ U_{i,j}^k - U_{i,j-1}^k \\ V_{i,j}^k - V_{i,j-1}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (h_{i,j+1}^k - h_{i,j}^k) \\ U_{i,j+1}^k - U_{i,j}^k \\ V_{i,j+1}^k - V_{i,j}^k \end{bmatrix} \right\} - \Delta t [T]_{i,j}^k$$

• **Partie B**

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{i,j} \\ \bar{U}_{i,j} \\ \bar{V}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{i,j}^k \\ U_{i,j}^k \\ V_{i,j}^k \end{bmatrix} - \tau_x [B_1^+]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (2H_{i,j}^k - 3H_{(i-1),j}^k + H_{(i-2),j}^k) \\ 2U_{i,j}^k - 3U_{(i-1),j}^k + U_{(i-2),j}^k \\ 2V_{i,j}^k - 3V_{(i-1),j}^k + V_{(i-2),j}^k \end{bmatrix} \quad (\text{III-67})$$

$$- \tau_y \left\{ \begin{bmatrix} (2H_{i,j}^k - 3H_{i,j-1}^k + H_{i,j-2}^k) \\ 2U_{i,j}^k - 3U_{i,j-1}^k + U_{i,j-2}^k \\ 2V_{i,j}^k - 3V_{i,j-1}^k + V_{i,j-2}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-2H_{i,j}^k + 3H_{i,j+1}^k - H_{i,j+2}^k) \\ -2U_{i,j}^k + 3U_{i,j+1}^k - U_{i,j+2}^k \\ -2V_{i,j}^k + 3V_{i,j+1}^k - V_{i,j+2}^k \end{bmatrix} \right\} - \Delta t [T]_{i,j}^k$$

2. Etape de correction

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{i,j} \\ \hat{U}_{i,j} \\ \hat{V}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{i,j}^k \\ \tilde{U}_{i,j}^k \\ \tilde{V}_{i,j}^k \end{bmatrix} - \tau_x [B_1^+]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (\tilde{H}_{i,j}^k - \tilde{H}_{(i-1),j}^k) \\ \tilde{U}_{i,j}^k - \tilde{U}_{(i-1),j}^k \\ \tilde{V}_{i,j}^k - \tilde{V}_{(i-1),j}^k \end{bmatrix} \quad (\text{III-68})$$

$$- \tau_y \left\{ \begin{bmatrix} (\tilde{H}_{i,j}^k - \tilde{H}_{i,j-1}^k) \\ \tilde{U}_{i,j}^k - \tilde{U}_{i,j-1}^k \\ \tilde{V}_{i,j}^k - \tilde{V}_{i,j-1}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\tilde{H}_{i,j+1}^k - \tilde{H}_{i,j}^k) \\ \tilde{U}_{i,j+1}^k - \tilde{U}_{i,j}^k \\ \tilde{V}_{i,j+1}^k - \tilde{V}_{i,j}^k \end{bmatrix} \right\} - \Delta t [\tilde{T}]_{i,j}^k$$

avec, $[T] = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{0x} - S_{Fx} \\ -S_{Fy} \end{bmatrix}$ et $\begin{cases} \tau_x = \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ \tau_y = \frac{\Delta t}{\Delta y} \end{cases}$

On dispose maintenant de 3 valeurs approximatives qui permettent de nous conduire à la solution désirée.

Cette solution est donnée par :

$$H_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (H_{i,j}^k + \bar{H}_{i,j} + \hat{H}_{i,j} - \tilde{H}_{i,j}) \tag{III-69}$$

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^k + \bar{U}_{i,j} + \hat{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i,j}) \tag{III-70}$$

$$V_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (V_{i,j}^k + \bar{V}_{i,j} + \hat{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j}) \tag{III-71}$$

Donc la solution au pas de temps (k+1) se détermine de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} h_{i,j}^{k+1} \\ U_{i,j}^{k+1} \\ V_{i,j}^{k+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_{i,j}^k + \bar{h}_{i,j}^k + \hat{h}_{i,j}^k - \tilde{h}_{i,j}^k \\ U_{i,j}^k + \bar{U}_{i,j}^k + \hat{U}_{i,j}^k - \tilde{U}_{i,j}^k \\ V_{i,j}^k + \bar{V}_{i,j}^k + \hat{V}_{i,j}^k - \tilde{V}_{i,j}^k \end{bmatrix} \tag{III-72}$$

V. Condition de stabilité

On appliquera la condition de stabilité qui assure également la stabilité d'un schéma explicite [Berreksi & Bouhadji, (1993)], [Berreksi, (1998)], [Oukacha & Lecheheb, (1996)], [Traoure, & Dialo, (2001)], [Zenzane, & Maamare, (2003)].

Le schéma de Gabutti n'est stable que si la condition C.F.L (Courant-Friedrichs-Lewy) est satisfaite.

Cette expression est exprimée, pour les écoulements bidimensionnels, par l'expression suivante :

$$\Delta t = C_n \frac{b_{\min}(x)\Delta x\Delta y}{\max(V + \sqrt{gh} [\Delta x^2 + (b_{\min}(x)\Delta y^2)]^{1/2}} \tag{III-73}$$

où, V est la vitesse résultante au point du maillage.

A chaque temps t, la condition précédente (III-53) fixe le pas de temps Δt, les pas d'espace Δx et Δy étant supposés constants.

Il faut noter qu'une expérimentation numérique est requise avant de choisir la valeur optimale de la valeur C_n.

Avec, C_n : valeur désirée du nombre de courant.

L'analyse de la stabilité de Von Neumann donne les valeurs suivantes du nombre de courant pour les différents schémas.

Valeurs de C _n	Type de schéma
≤ 1	Mac Cormack
≤ 0.66	Lambda
≤ 2	Gabutti

VI. Conditions initiale et aux limites

Une équation aux dérivées partielles admet d'une manière générale, une infinité de solutions [Bellos & Sakkas, (1987)], [Benatsou & Bouzid (1992)].

La solution particulière désirée est déterminée à partir de quelques conditions supplémentaires. Dans la majorité des cas, ces conditions portent sur le comportement particulier de la solution sur une courbe qu'on appelle souvent frontière ou limite.

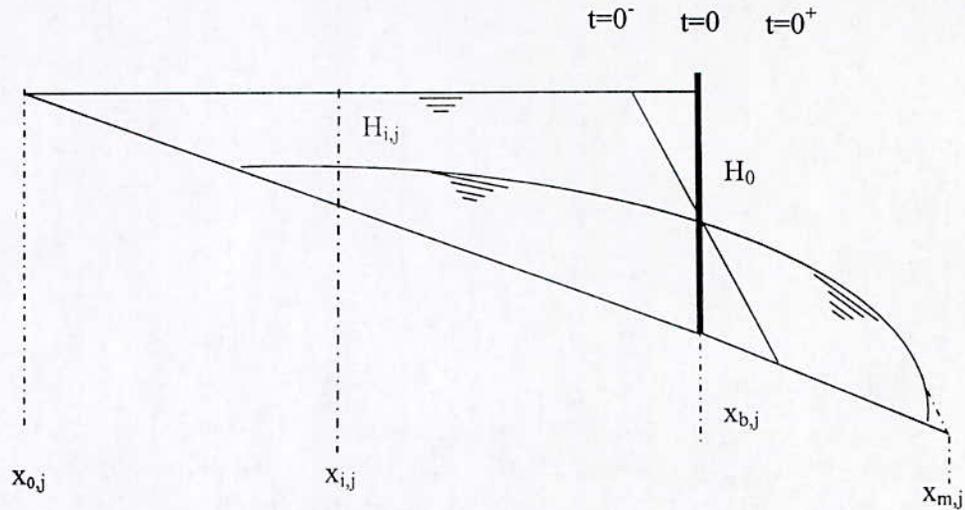


Figure III.4 : Croquis d'un réservoir

• Conditions initiales

La notion de conditions initiales est évidemment liée aux conditions qui correspondent au temps initial $t = 0$.

1. L'une des conditions initiales concernant l'instant initial $t = 0^-$, juste avant la rupture du barrage, on a :

$$H_{(i,j)} = \frac{H_0}{L} (x_{(i,j)} - x_{(0,i)}) \quad \text{pour } x_{i,j} < x_{b,j} \quad \text{(III-74)}$$

avec, $L = x_{b,j} - x_{0,j}$: longueur du réservoir.

Par ailleurs, on suppose qu'à cet instant il n'y a aucun écoulement à l'aval du barrage, le lit est sec dans cette partie, on a :

$$H_{i,j} = 0 \quad \text{Pour } x_{i,j} > x_{b,j}$$

En ce qui concerne, les vitesses, elles sont nulles à $t = 0$: $U_{i,j}^0 = V_{i,j}^0 = 0$.

En résumé, les conditions initiales sont représentées par :

$$\begin{cases} H_{i,j}^0 = \frac{H_0}{L} (x_{i,j} - x_{0,j}) & x_{i,j} < x_{b,j} \\ H_{i,j}^0 = 0 & x_{i,j} > x_{b,j} \\ U_{i,j}^0 = V_{i,j}^0 = 0 & \forall x_{i,j} \end{cases} \quad \text{(III-75)}$$

2. $t=0$: Le barrage est complètement détruit.

3. $t=0^+$: Pour les premiers instants au début de l'écoulement, la condition de symétrie est applicable. C'est-à-dire au site du barrage (au point $x_{b,j}$), on applique une condition qui est

$$\text{donné par Ritter appelée condition de Ritter telle que : } H_{x_{b,j}} = \frac{4}{9} H_0 \quad (\text{III-76})$$

- **Conditions aux limites**

La prise en compte des conditions aux limites est un aspect très important lors de l'utilisation des techniques numériques dans le but d'obtenir de bons résultats.

Les conditions aux limites sont les plus délicates à fixer. En effet, elles consistent à imposer un certain comportement à certains champs du domaine de calcul et d'approximer le domaine irrégulier en domaine régulier.

Ainsi, on a :

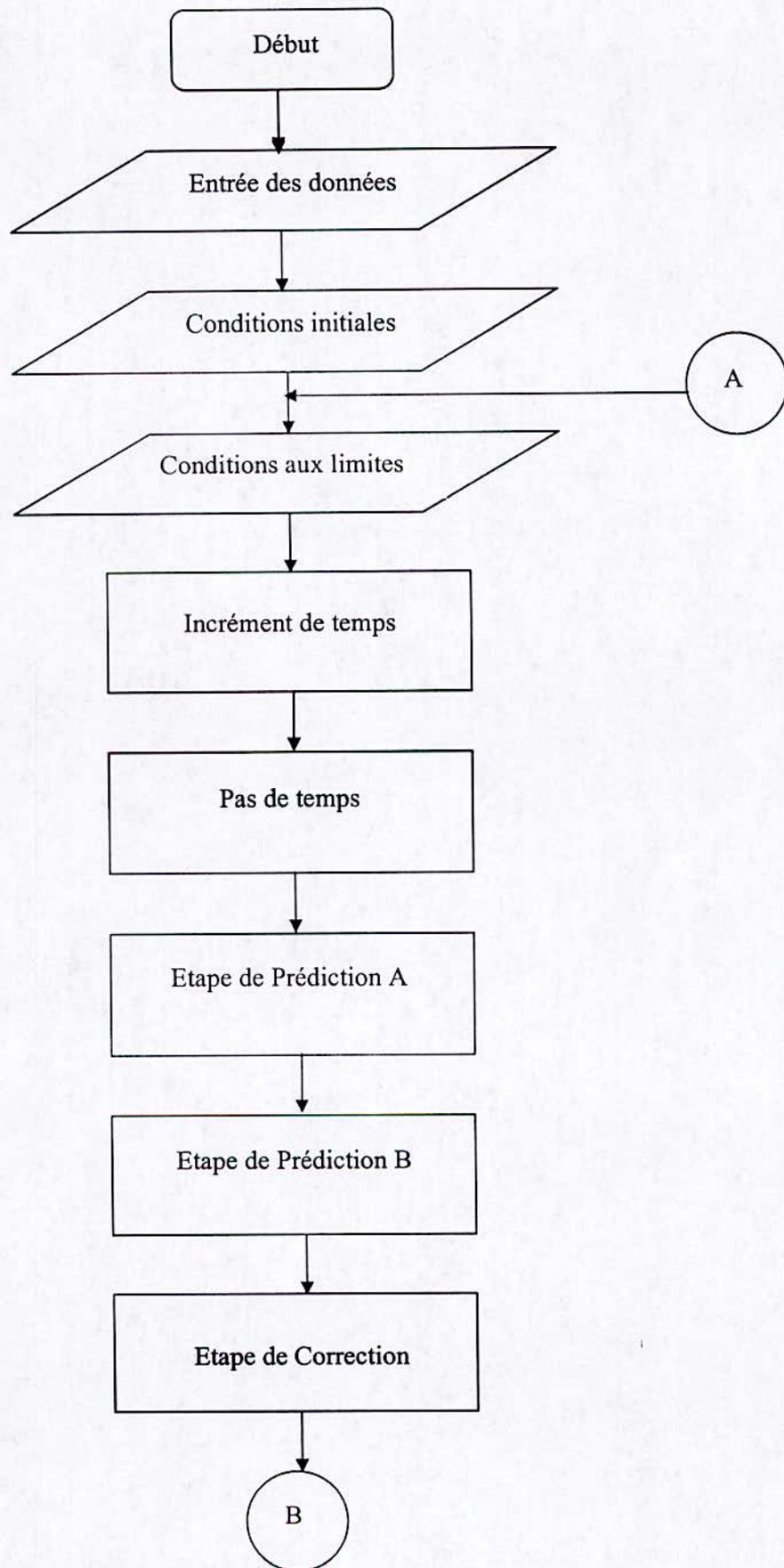
- Les conditions amont et avale sont définies comme suit :

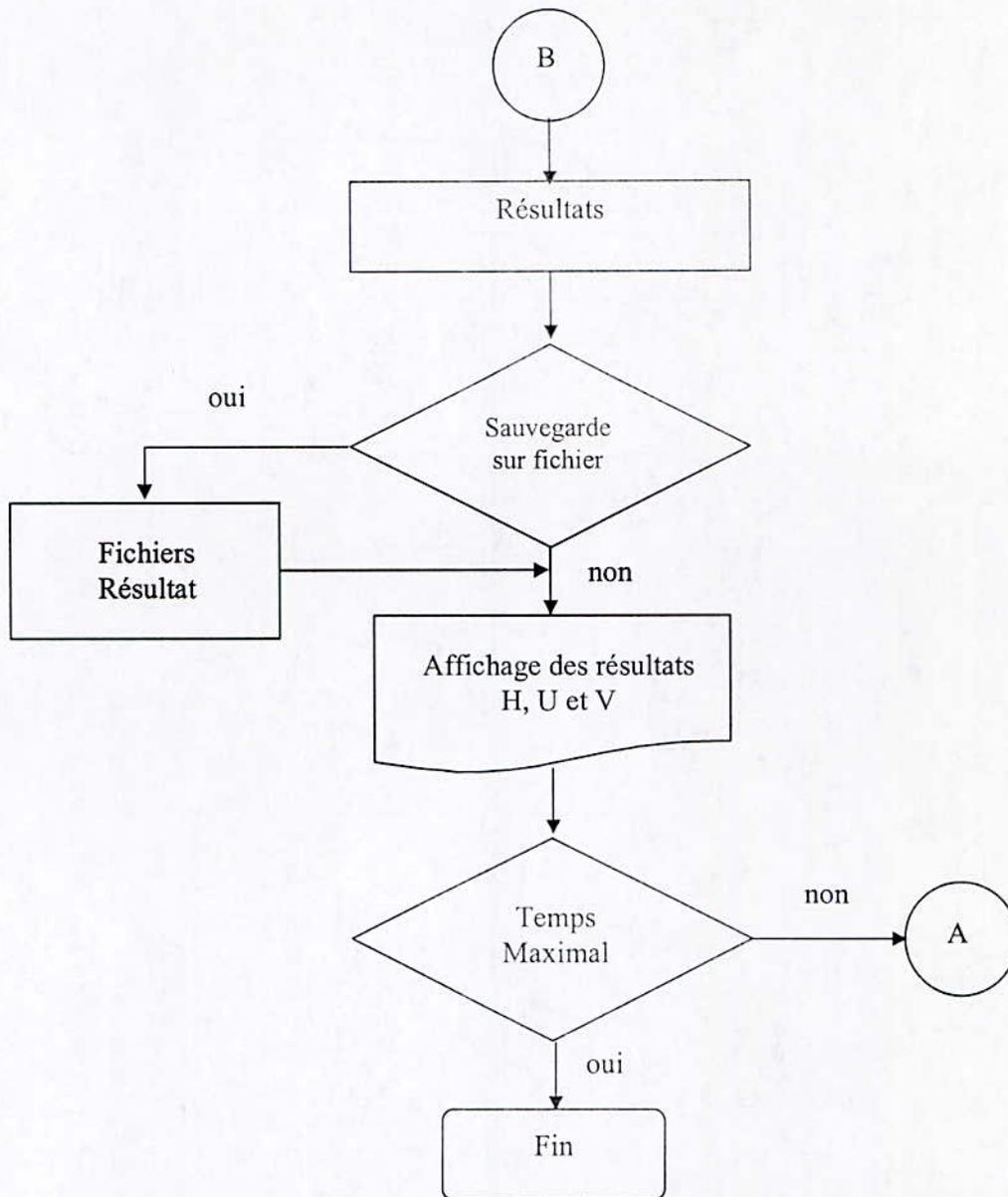
$$H_{0,j,t} = 0 \text{ et } U_{0,j,t} = V_{0,j,t} = 0 \quad (\text{III-77})$$

0 : limite amont

$$H_{(m,j),t} = 0 \text{ et } U_{(m,j),t} = V_{(m,j),t} = 0 \quad (\text{III-78})$$

m: limites avales du réservoir





Chapitre IV : Applications et analyse des résultats

Introduction

L'essor des outils informatiques a conduit à la mise au point de divers logiciels. Grâce à la performance de ces logiciels, il est possible de résoudre tous les problèmes qui demeuraient nos résultats. Nous avons opté pour le Fortran 90, afin de résoudre les équations discrétisées de Saint Venant.

Pour valider le modèle que nous avons proposé basé sur le schéma de Gabutti ; nous nous servirons de l'expérience effectuée à « Waterways Experiment Station W.E.S, U.S.corps of Engineers (« Floods resulting from suddenly breached dams », 1960), ainsi que aux résultats obtenus numériquement par [Bellos & Sakkas, (1987)], et ceux qui sont obtenus avec un modèle basé sur le schéma de Mac Cormack [Benatsou & Bouzid, (1992)].

Après validation du modèle, il sera ensuite question d'étudier l'effet des différents paramètres sur l'écoulement, notamment, l'influence de la hauteur d'eau initiale, de la largeur du canal, de sa rugosité, de la pente du fond et le nombre de courant.

I. Validation du modèle

Le modèle étudié a été développé pour résoudre les problèmes liés à la propagation d'onde de rupture de barrages en utilisant le schéma de Gabutti.

Comme il a été mentionné ci-dessus, pour valider ce modèle on se basera sur les résultats expérimentaux et sur les résultats numériques obtenus dans le cas d'un canal rectangulaire avec présence d'un obstacle (barrage) de :

- 122m de longueur ;
- 1,22m de largeur ;
- 0,005 d'inclinaison ;
- 0,305m de hauteur initiale au site du barrage ;
- Position du barrage au milieu du canal.

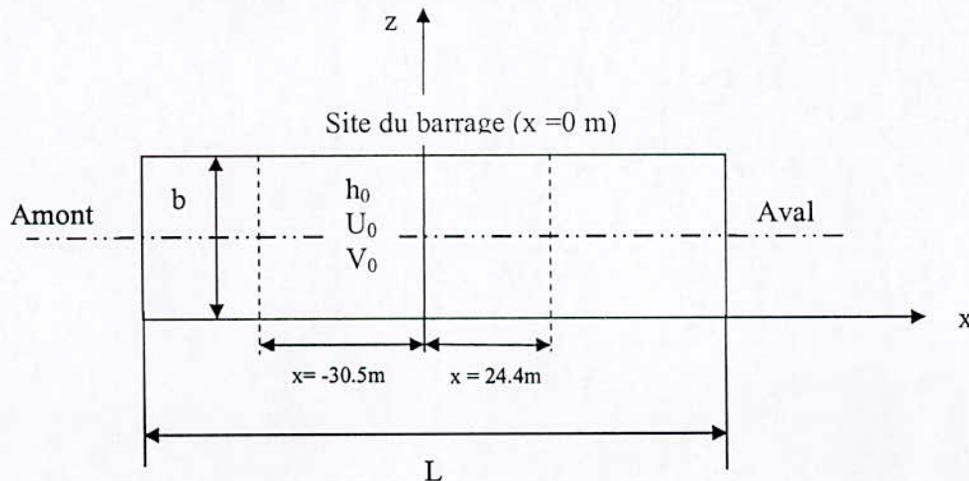


Figure IV.1 : Position du barrage

Des séries de simulations ont été réalisées pour diverses sections du canal à l'amont et à l'aval du barrage et comparées aux résultats expérimentaux et numériques basé sur le schéma de Mac Cormack [Benatsou & Bouzid, (1992)].

1. Commentaire et interprétation des résultats obtenus

Les Figures (IV.2, IV.3 et IV.4) donnent le profil de la ligne d'eau mesurée expérimentalement ainsi que les profils de la ligne d'eau déterminés numériquement par le modèle de Mac Cormack [Benatsou & Bouzid, (1992)] et les profils déterminés par le présent modèle pour les différentes sections, $x = -30,5\text{m}$; $x = 0\text{m}$ et $x = 24,4\text{m}$ à partir de la position du barrage, pour un coefficient de Manning $n = 0.05$.

De plus une comparaison est présentée dans les figures (IV.5), (IV.6) et (IV.7) pour les mêmes sections et pour un coefficient de Manning $n = 0.009$.

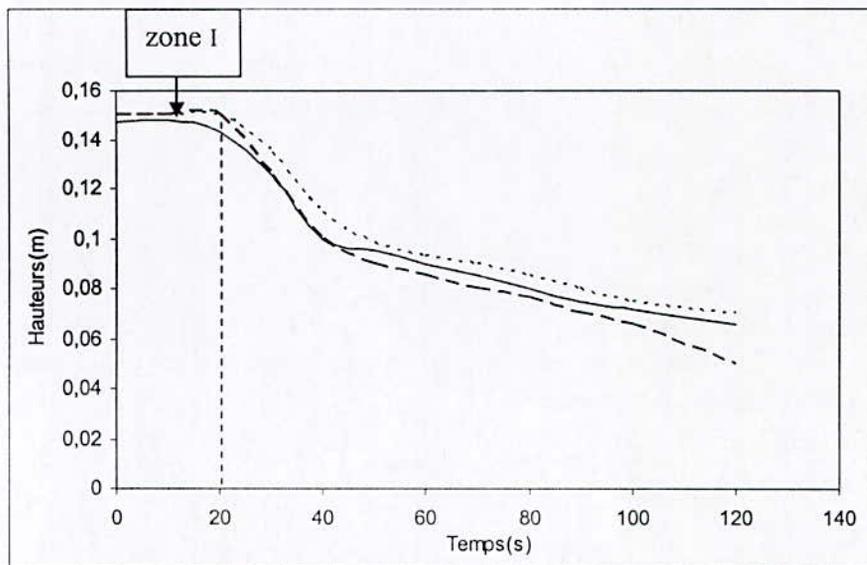


Figure IV.2 : Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x = -30.5$ et $n = 0.05$

- Résultats obtenus notre modèle basé sur le schéma de Gabutti
- Résultats obtenus par Sakkas & W.E.S
- · - · Résultats obtenus avec le modèle numérique basé sur le schéma de Mac Cormack [Benatsou & Bouzid, (1992)]

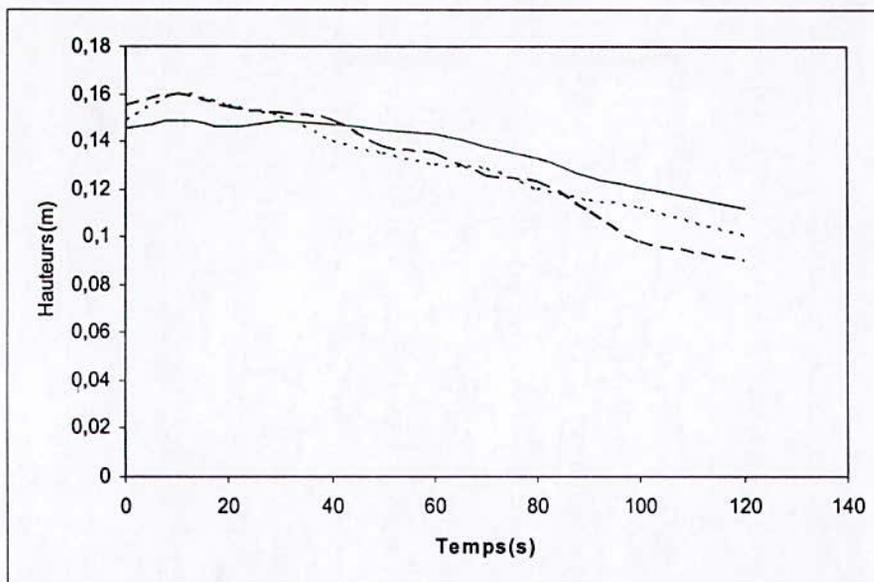


Figure IV.3 : Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x=0m$ et $n=0.05$

- Résultats obtenus notre modèle basé sur le schéma de Gabutti
- - - Résultats obtenus par Sakkas & W.E.S
- Résultats obtenus avec le modèle numérique basé sur le schéma de Mac Cormack [Benatsou & Bouzid, (1992)]

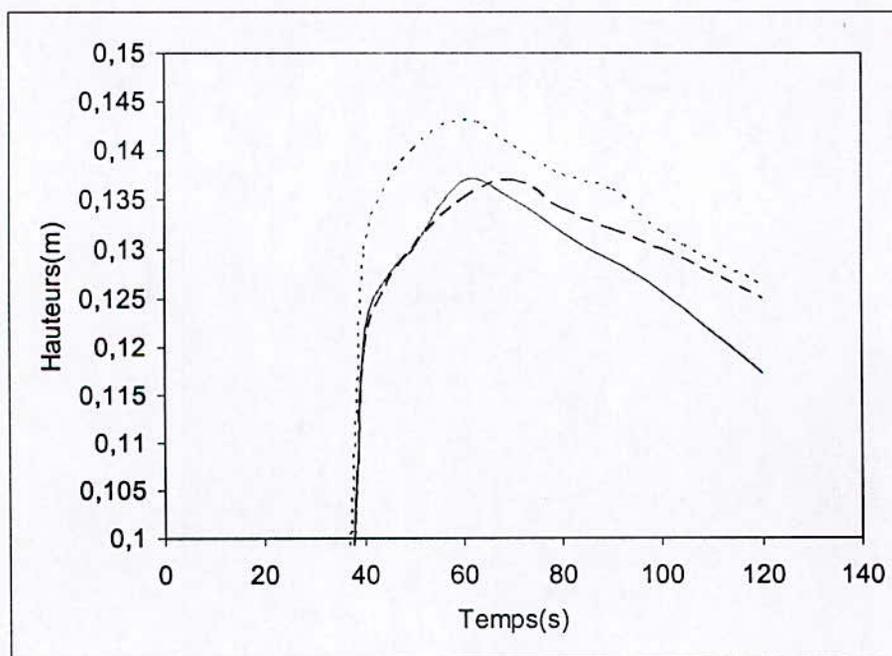


Figure IV.4 : Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x=24.4m$ et $n=0.05$

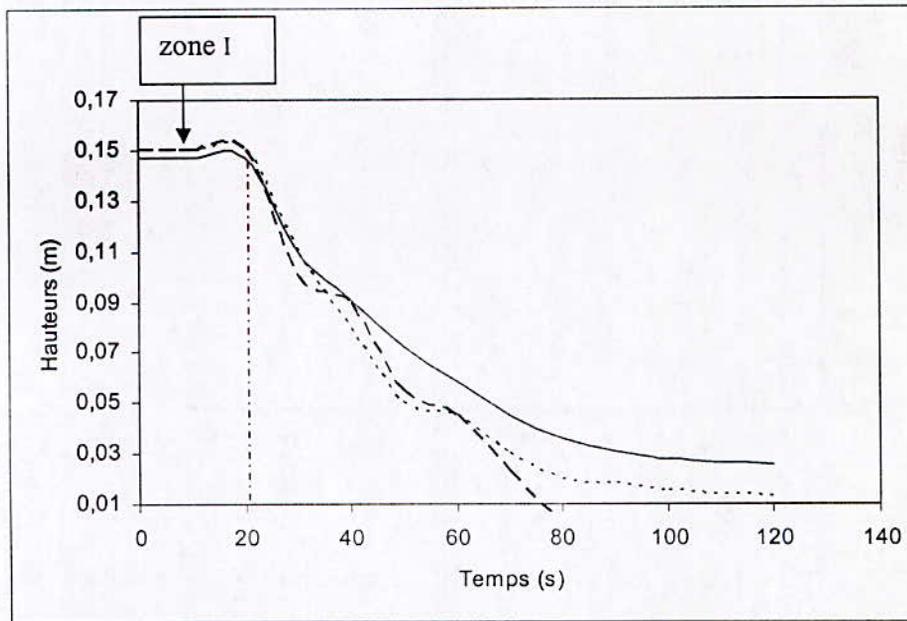


Figure IV.5 : Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x=-30.5$ et $n=0.009$

- Résultats obtenus par notre modèle basé sur le schéma de Gabutti
- Résultats obtenus par Sakkas & W.E.S
- . - Résultats obtenus avec le modèle numérique basé sur le schéma de Mac Cormack [Benatsou & Bouzid, (1992)]

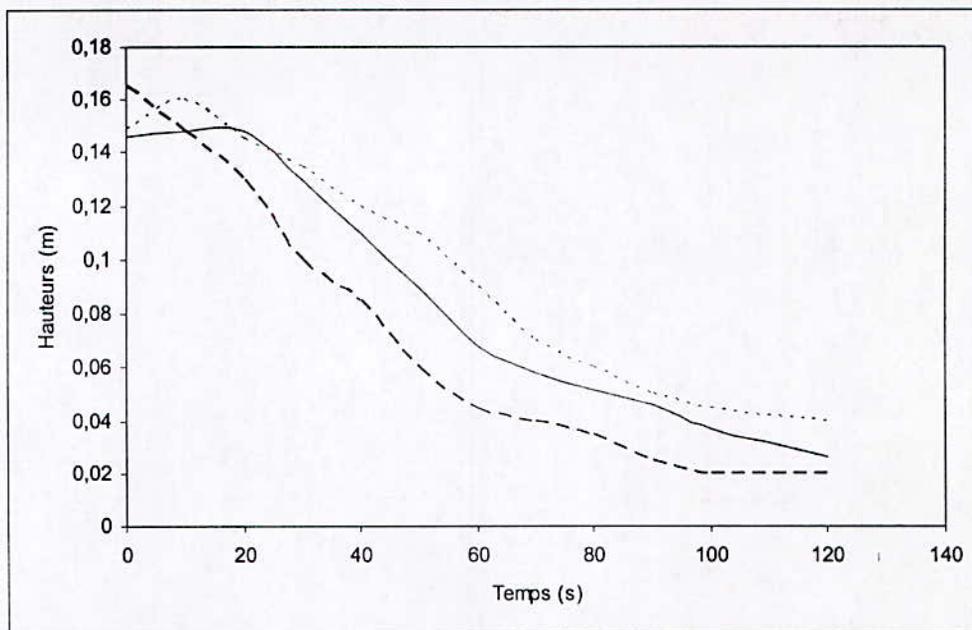


Figure IV.6 : Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x=0m$ et $n=0.009$

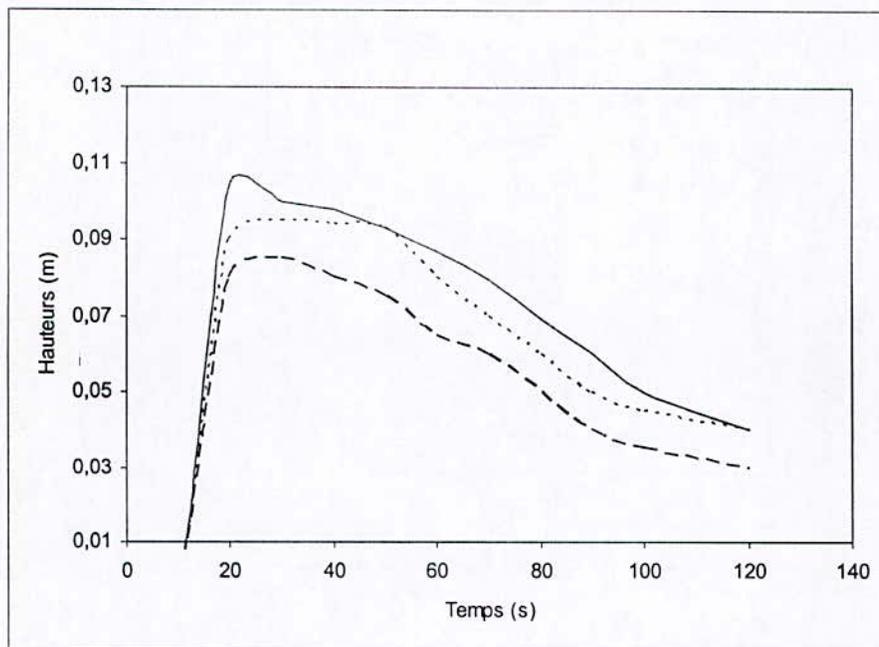


Figure IV.7 : Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x=24.4\text{m}$ et $n=0.009$

a. Analyse des résultats

- Le niveau d'eau dans la partie amont, loin du site du barrage reste constant pendant les vingt premières secondes (Figure IV.2 et IV.5) (zone I) ; au delà, il se produit une diminution du niveau d'eau.
- Lors des premiers instants après la rupture du barrage, il se produit une surélévation du niveau d'eau au voisinage du site du barrage (Figure IV.3 et IV.6) ; au bout d'un certain temps, la diminution de la hauteur d'eau est graduellement amorcée.
- Dans la partie aval loin du site du barrage, le niveau d'eau reste nulle pendant un certains temps (Figure IV.4 et IV.7) ; quelque instant après, il se produit une surélévation du niveau d'eau suivi d'une diminution.

b. Interprétation des résultats

Les courbes obtenues par le modèle présente les mêmes allures aux différentes sections. Cependant il présente des décalages plus ou moins important.

Les décalages entre les résultats théorique et expérimentaux s'expliquent par l'imperfection de la théorie. En effet, pour établir les équations mathématiques, il a fallu poser un certain nombre d'hypothèses. Le développement des équations, l'imposition des conditions aux limites et la discrétisation des équations ne se font pas sans erreurs négligeables qu'elle soient. Tandis que l'expérience intègre la réalité qui régie l'écoulement. Tenant compte de toutes ces lacunes que couvre la théorie, le modèle proposé peut être considéré comme valable.

Le programme établit intègre divers options, allant des opérations sur fichier à la visualisation des résultats au cours de l'exécution. La sauvegarde sur fichier permet un

gain de temps énormes pour le prélèvement des résultats. Un organigramme permet l'utilisation aisée du programme.

II. Effets des différents paramètres sur l'écoulement

Après avoir validé le modèle, on entamera dans ce qui suit l'effet des différents paramètres sur l'écoulement. Pour cela, plusieurs simulations ont été réalisées pour chaque paramètre.

Les dimensions du canal sont présentées dans la figure ci-dessous.

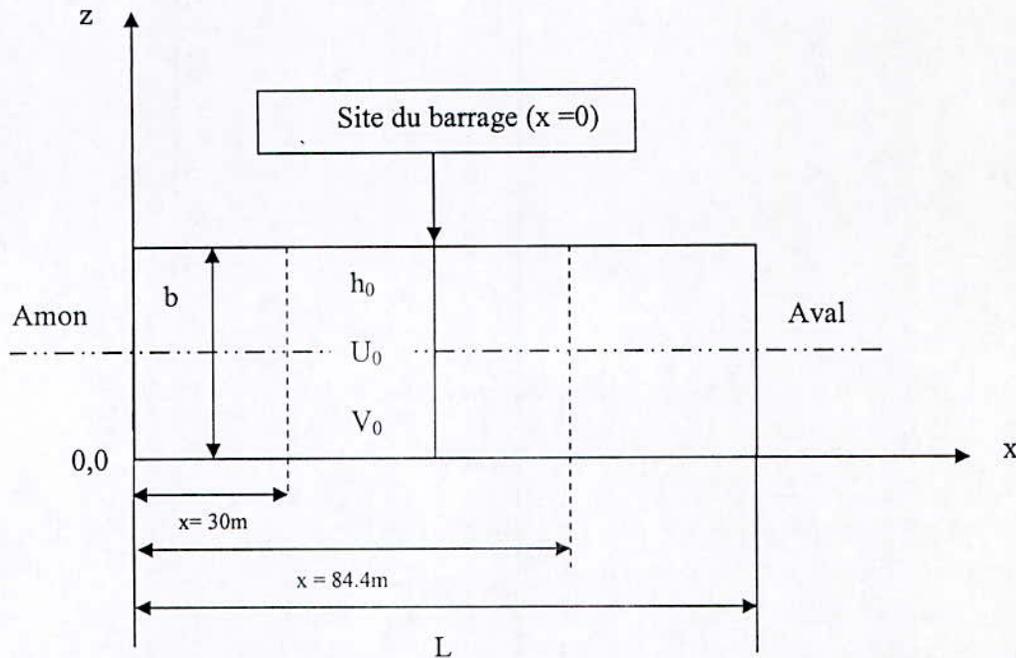


Figure IV.8 : Position du barrage dans le nouveau repère

1. Effet du nombre de courant

Le canal est de largeur $b = 1.22\text{m}$, de pentes du fond $S_{0x}=0.005$, la hauteur initiale d'eau $h_0 = 0.305\text{m}$ et le nombre de Manning $n = 0.05$.

Pour le nombre de courant les valeurs sont : 2 ; 1.9 et 1.6

Les figures (IV.9, IV.10 et IV.11) nous donnent les allures de la propagation de l'onde à la rupture du barrage pour différentes valeurs du nombre de courant (C_n).

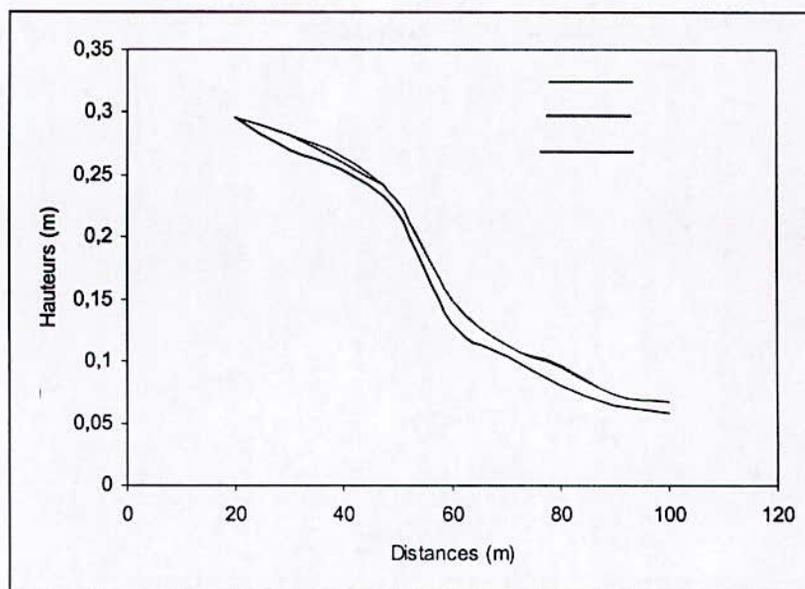


Figure IV.9 : Propagation de l'onde à la rupture du barrage à t = 20s

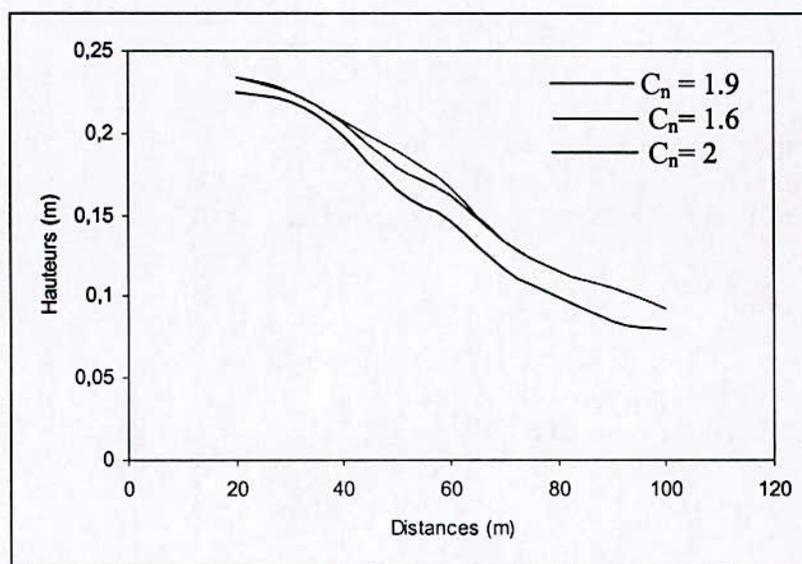


Figure IV.10 : Propagation de l'onde à la rupture du barrage à t= 50s

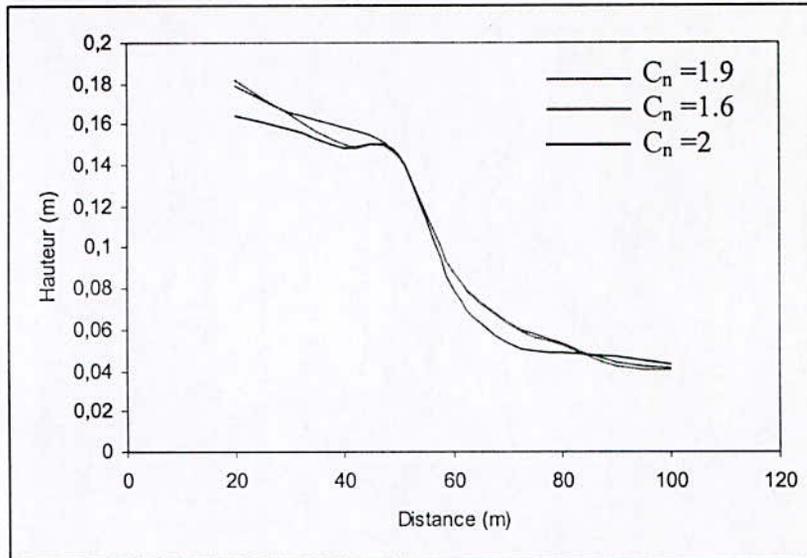


Figure IV.11 : Propagation de l'onde à la rupture du barrage à $t=100s$

Les résultats obtenus, nous ont permis de conclure que le nombre de courant joue un rôle important sur la stabilité du schéma, ceci peut être remarqué si on compare les trois figures (IV.9, IV.10 et IV.11) de la propagation de l'onde, pour les différentes valeurs de C_n .

On remarque que les courbes pour un nombre de courant $C_n=2$, la variation est moins apparente ; par contre pour les deux autres valeurs de C_n , les courbes sont très proches. Cela peut être justifié par les valeurs très proches de C_n adoptées pour la comparaison. Donc le choix du nombre de courant est conditionné par la stabilité du schéma de Gabutti à ($C_n \leq 2$).

2. Effet de la hauteur initiale de l'eau

Le canal est de largeur $b=1.22m$, le nombre de Manning est fixé à 0.05, le nombre du courant $C_n=1.6$ et de pentes du fond $S_{0x}=0.005$

Les figures (IV.12 et IV.13) représentent la variation de la hauteur d'eau en fonction du temps dans les deux sections, amont ($x = 30m$) et aval ($x = 84,4m$) pour différentes valeurs de la hauteur initiale $h_0=1m$; $0.8m$ et $0.2m$.

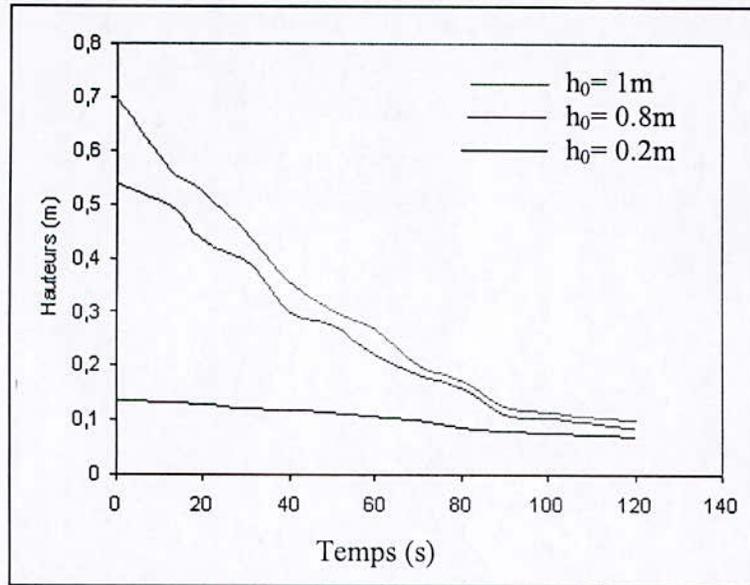


Figure IV.12 : Effet de la hauteur d'eau initiale à $x=30\text{m}$ (section amont du barrage)

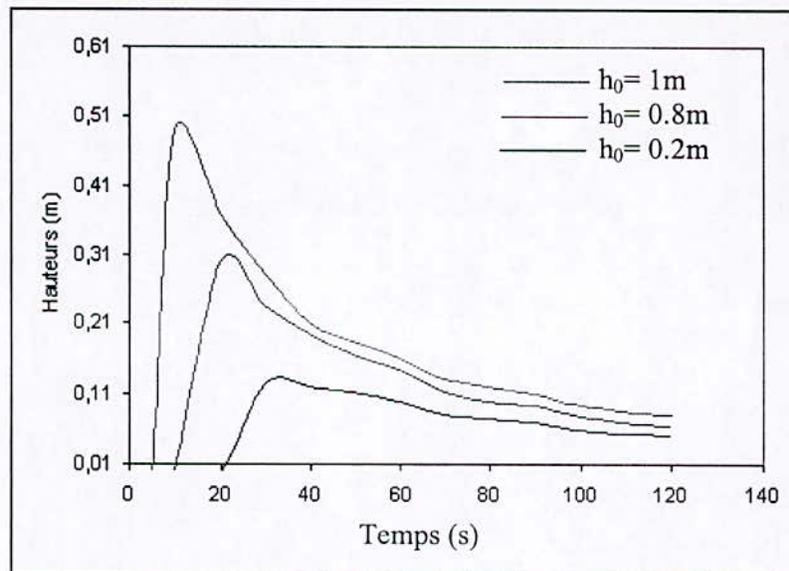


Figure IV.13 : Effet de la hauteur d'eau initiale à $x=84.4\text{m}$ (section avale du barrage)

D'après la figure (IV.12), on voit que les courbes présentent toutes la même allure ; le décalage entre elles justifie l'effet de la hauteur d'eau initiale sur l'écoulement à l'amont du barrage, où elle influe d'une façon directe sur le temps de vidange du réservoir, plus la hauteur est importante plus le temps de vidange est lent.

Pour la figure (IV.13), on voit que les courbes présentent aussi la même allure et le décalage entre elles explique que le temps de remplissage d'une section avale augmente lorsque la hauteur initiale augmente.

3. Etude des profils des vitesses longitudinale et transversale

Le canal est de largeur $b=1.22\text{m}$, le nombre de Manning est fixé à 0.05 , le nombre du courant $C_n=1.6$, de pentes du fond $S_{0x}=0.005$ et $h_0=0.305\text{m}$.

Les figures (IV.14 et IV.15) représentent les allures de variation des vitesses longitudinale et transversale respectivement en fonction du temps, dans la section transversale aval du site du barrage.

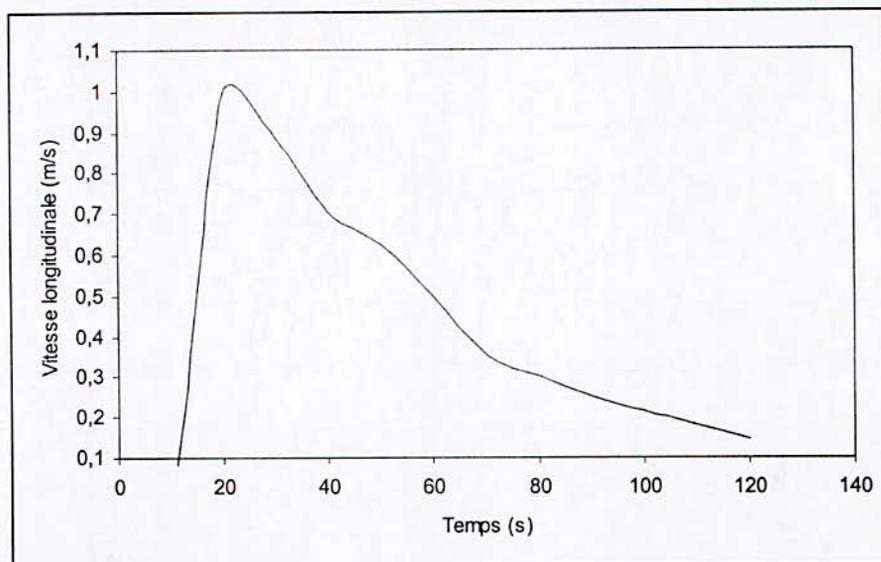


Figure IV.14: Variation de la vitesse longitudinale en fonction du temps à $x=84.4\text{m}$ (section aval)

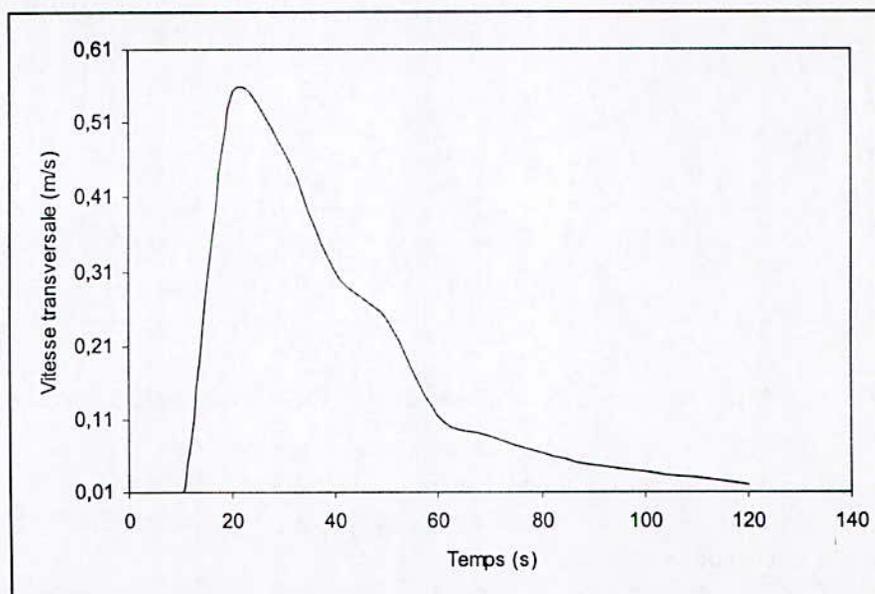


Figure IV.15: Variation de la vitesse transversale en fonction du temps à $x=84.4\text{m}$ (section aval)

Les mêmes allures de variation de vitesse longitudinale et transversale sont observées. Les deux vitesses varient rapidement avec le temps.

Le pic observé dans les deux courbes de variation de vitesse au cours du temps dans la section aval du site du barrage est due à l'arrivée du front d'onde à cette section initialement sèche, avec une vitesse non nulle, par suite la vitesse diminue très vite.

4. Effet de la largeur du canal

Les figures (IV.16 et IV.17) représentent la propagation de l'onde à la rupture du barrage dans différentes sections amont et aval du site du barrage pour différentes valeurs de largeur $b = 2\text{m}$; 1m et 0.2m . La hauteur initiale $h_0 = 0.305\text{m}$, les pentes du fond du canal $S_{0x} = 0.005$, le coefficient de Manning $n = 0.05$ et le nombre de courant $C_n = 1.6$.

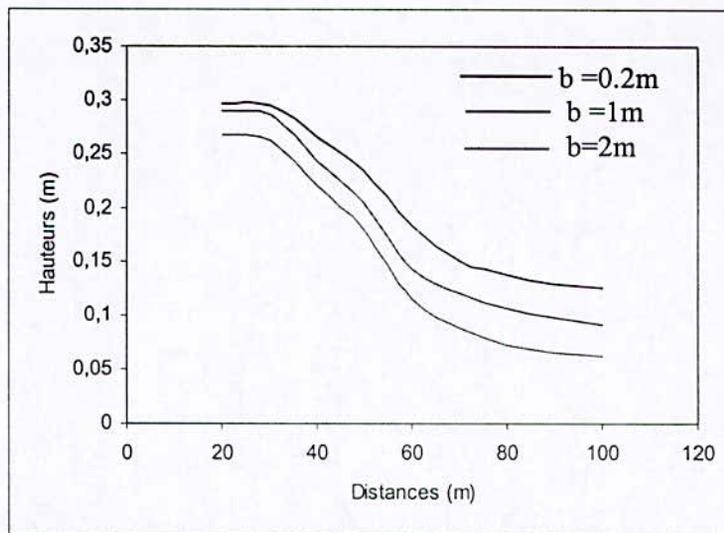


Figure IV.16 : Propagation de l'onde à la rupture du barrage à $t = 20\text{s}$

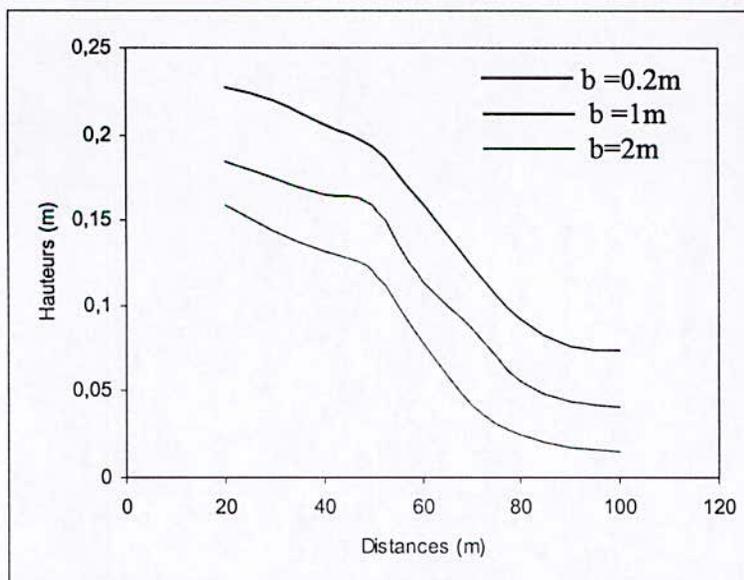


Figure IV.17 : Propagation de l'onde à la rupture du barrage à $t = 100\text{s}$

On voit que l'effet de la largeur du canal est très remarquable, l'onde de rupture du barrage se diffuse rapidement lorsque la largeur du canal augmente et le contraire est juste.

5. Effet de coefficient de Manning

Le canal est de pentes $S_{0x} = 0.005$, de largeur $b = 1.22\text{m}$, le nombre de courant $C_n = 1.6$ et la hauteur initiale d'eau $h_0 = 0.305$.

Les figures (IV.18 et IV.19), représentent la propagation de l'onde après rupture du barrage, pour différents coefficient de Manning $n = 0.009 ; 0.012$ et 0.05 .

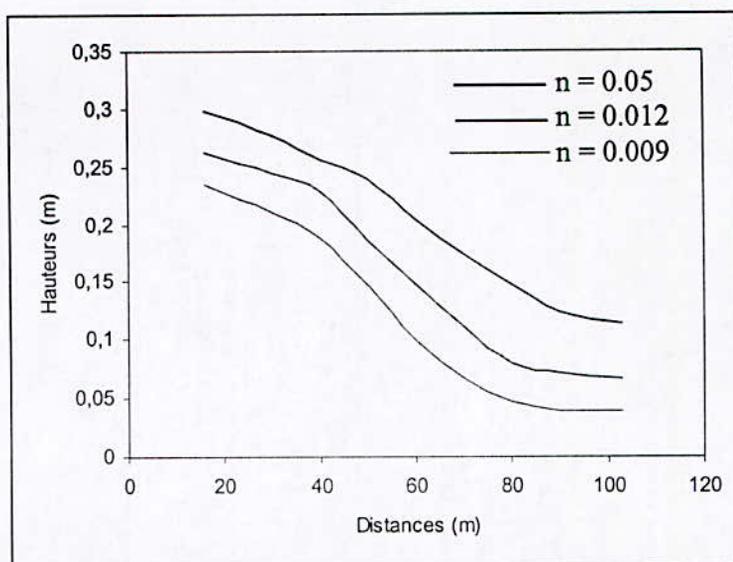


Figure IV.18 : Propagation de l'onde à la rupture du barrage à $t = 20$ s pour différents coefficient de Manning

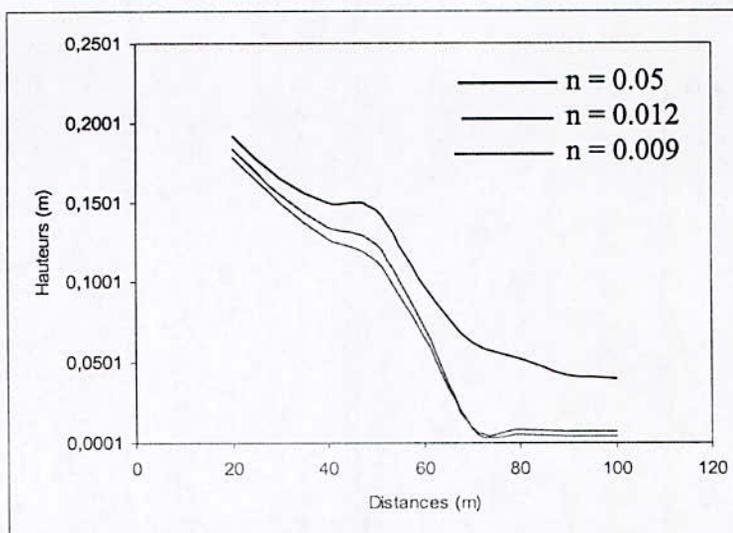


Figure IV.19 : Propagation de l'onde à la rupture du barrage à $t = 100$ s pour différents coefficient de Manning

La rugosité joue un rôle important sur la propagation de l'onde de rupture d'un barrage. Ceci apparaît dans les figures ci-dessus (IV.18 et IV.19), l'onde se diffuse rapidement

lorsque la rugosité est faible. Cela s'explique par la formule de Manning, l'augmentation de coefficient de Manning influe directement sur la pente du frottement (S_f).

6. Effet de pente du fond du canal

Le canal est de largeur $b = 1.22\text{m}$, le nombre de courant $C_n = 1.6$, de coefficient de Manning $n = 0.05$ et la hauteur initiale d'eau $h_0 = 0.305\text{m}$.

Les figures (IV.20 et IV.21), représentent les allures de variation de la hauteur d'eau en fonction des distances à $t = 20\text{s}$ et à $t = 100\text{s}$, pour différentes pentes du fond du canal $S_{ox} = 0.01 ; 0.008$ et 0.004 .

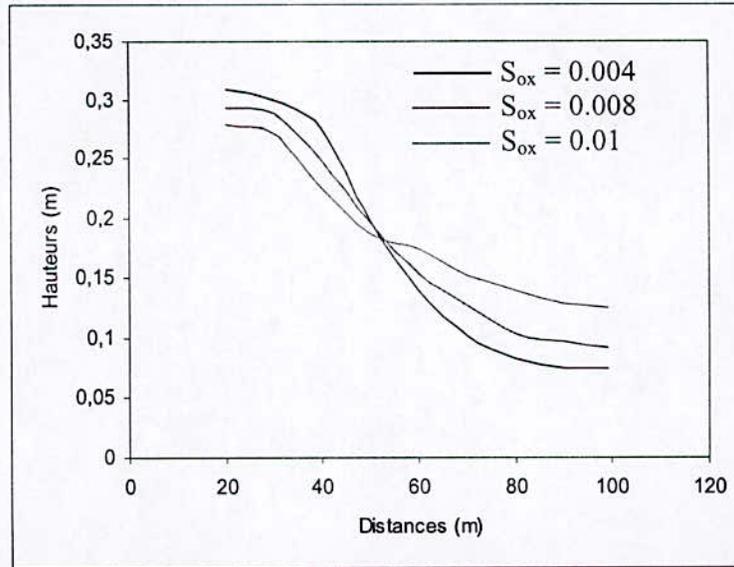


Figure IV.20 : Propagation de l'onde à la rupture du barrage à $t = 20\text{ s}$

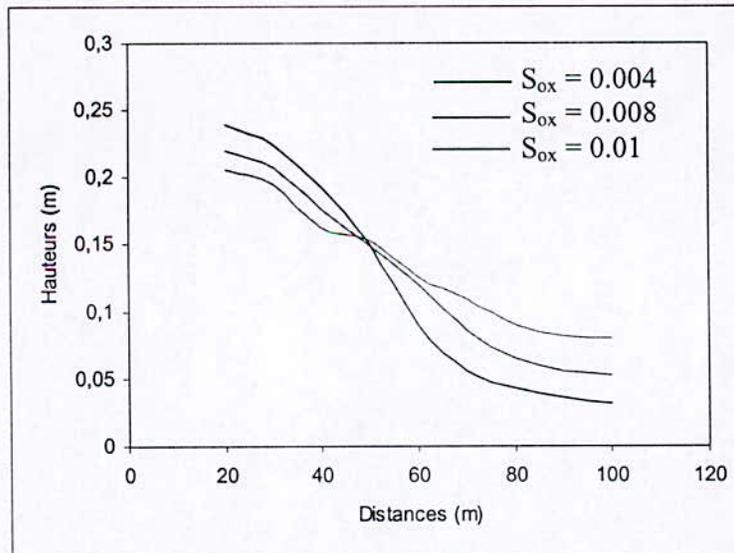


Figure IV.21 : Propagation de l'onde à la rupture du barrage à $t = 100\text{ s}$

On remarque qu'à l'amont du barrage, les différentes courbes présentent presque la même allure et elles convergent vers un point. La diminution de la hauteur d'eau est proportionnelle à la pente du fond du canal.

Avant le point d'intersection, ces courbes sont très proches l'une de l'autre, on peut dire que l'effet de la pente du fond du canal à ce stade est négligeable ; l'influence de la charge hydraulique est plus importante que celles des autres paramètres.

Après le point d'intersection, on voit que les courbes divergent, cela veut dire que la vidange se varie inversement avec la pente.

Pour l'aval du barrage, on voit que l'augmentation de la hauteur d'eau est inversement proportionnelle à la pente du fond du canal.

Conclusion générale

Les problèmes relatifs à l'hydraulique sont très complexe, surtout lorsqu'il s'agit des écoulements à surface libre où le phénomène est soumis à plusieurs paramètres, dont la solution analytique des équations est impossible; dans ces conditions la modélisation par ces deux branches physique et mathématique constitue un outil de recherche.

La propagation de l'onde à la rupture d'un barrage est l'un des problèmes qui ne manquent pas de complexité, où beaucoup de travaux de recherche ont été faits. Ces derniers sont basés sur la résolution des équations aux dérivées partielles régissant le phénomène étudié par les méthodes numériques.

La méthode la plus adaptée pour traiter l'onde de rupture est la méthode des différences finies qui convient le mieux pour les problèmes d'évolution, c'est à dire dépendant du temps.

Les équations de Barre de Saint Venant gouvernent les écoulements 2.5D à surface libre sont obtenues en appliquant le principe de la conservation de la masse et le théorème de la quantité de mouvement ainsi que des hypothèses simplificatrices.

Le schéma aux différences finies utilisé dans cette étude est celui de Gabutti, qui est un schéma explicite. Il repose sur deux algorithmes un de prédiction et l'autre de correction.

Vu l'instabilité que les schémas aux différences finies explicites présentent, la condition de Friedrich Lewy (C.F.L) a été utilisée.

Les résultats donnés par notre modèle sont proches des résultats expérimentaux de Water Ways Experiment Station W.E.S (U.S.A) et les résultats obtenus numériquement par [Sakkas & Bellos, (1987)] et ceux qui sont obtenus avec un modèle basé sur le schéma de Mac Cormack [Benatsou & Bouzid, (1992)].

Après avoir comparé les deux schémas, Mac Cormack et de Gabutti, on remarque que les résultats obtenus par ce dernier sont les plus proches des résultats expérimentaux que ceux qui sont obtenus par le schéma de Mac Cormack. Cela peut être justifié par la particularité des deux étapes de prédiction et une étape de correction.

Notre travail n'est qu'une approche, ceci laisse la voie ouverte à d'autres études. Schéma numérique implicite, par exemple (schéma de Preissman, Beam-Warming... etc).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Absi, R. & Retieb, S. (1994), « *Modélisation et simulation numérique des problèmes de diffraction bidimensionnelle d'un mascaret en régime instationnaire* ». Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.
- [2] Bellos, G. V. & Sakkas, J.G. (Vol. 113, N° 1, pp.1510-1521, 1987), « *Dam- Break Flood- wave propagation on dry bed* ». Journal of Hydraulic Engineering.
- [3] Benatsou, H. & Bouzid, M. K. (1992), « *Analyse d'un écoulement instationnaire "Dam-Break"* ». Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.
- [4] Berreksi, A. & Bouhadji, A. (1993), « *Simulation et analyse des écoulements bidimensionnels à surface libre en zones transitions* ». Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.
- [5] Berreksi, A. (1998), « *Simulation des écoulement à surface libre dans des canaux à faible et forte pente à géométrie variable* ». Mémoire de Magister, E. N. Polytechnique d'Alger.
- [6] Carlier, M. (1986), « *Hydraulique générale et appliquée* ». Edition Eyrolles.
- [7] Delannoy, Claude. (Novembre 1993), « *Programmer en FORTRAN 90 : Guide complet* ». Edition. Eyrolles.
- [8] Fennema, R. J. & Chaudry, M. H. (Vol. 25, N° 1, pp.41-50, 1987), « *Simulation des écoulement monodimensionnels consécutifs aux rupture des barrages* ». Journal of Hydraulic research.
- [9] Ghemati, DJ. & Hachemaoui, S. (2000), « *Simulation de l'écoulement bidimensionnel dans les eaux de surface* ». Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.
- [10] Graf, W. H. & Altinakar, M. S. (1993), *Hydraulique fluvial, Tome I « Ecoulement permanent uniforme et non uniforme* ». Edition. Presses Polytechnique et universitaires Romandes, Lausanne.
- [11] Graf, W. H. (1996), *Hydraulique fluvial, Tome II « Ecoulement non permanent* ». Edition. Presses Polytechnique et universitaires Romandes, Lausanne.
- [12] Hug, M. (1975), « *Mécanique des fluides appliquée* ». Edition Eyrolles
- [13] Ider, K. (2004), « *Modélisation hydrodynamique d'un cours d'eau : Application à l'Oued SOUMMAM* ». Mémoire de Magister, E. N. Polytechnique d'Alger.
- [14] Kherbache, K. (2004), « *Contribution à l'élaboration d'un modèle hydrodynamique par la méthode des volumes finis* ». Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.

- [15] Oukacha, M. & Lecheheb, M. (1996), « *Détermination de la ligne d'eau dans les canaux non prismatiques et forte pente* ». Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.
- [16] Traoure, S. & Dialo, S. (2001), « *Etude d'un écoulement transitoire à surface libre* ». Projet de fin d'études, Université A. MIRA de Bejaia.
- [17] Zenzane, A. et Maamare, B. (2003), « *Calcul des écoulement à surface libre instationnaire (cas unidimensionnel)* ». Projet de fin d'études, Université A. MIRA de Bejaia.

ملخص

هدف هذه الأطروحة هو دراسة سيلان ذو سطح حر, غير دائم سريع التغير ناتج عن انهيار تام و أني لسد في مجرى مستطيل.
جملة المعادلات المعبرة عن هذه الظاهرة التي حصل عليها بتطبيق قوانين انحفاظ الكتلة و كمية الحركة اعتمادا على بعض الفرضيات و قد تم حل جملة المعادلات حسابيا بواسطة مخطط للفروق المنتهية المسمى مخطط " GABUTTI ".
النتائج المحصل عليها قورنت مع النتائج التجريبية و الحسابية لباحثين آخرين.

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier la propagation d'onde d'un écoulement à surface libre, rapidement varie, résultant d'une rupture totale et instantanée d'un obstacle dans un canal rectangulaire large à faible pente.

Ce type de phénomène est régit par les équations de Saint Venant.

Ces dernières sont résolues numériquement par un schéma aux différences finies dit schéma de Gabutti.

Les résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux et numériques obtenus par d'autres auteurs.

Mots clés : Onde- Rupture- Saint Venant- Différences finies- Gabutti

Summary

The objective of this memory is to study the propagation of wave of flow on free face, quickly varies, resulting from a total and instantaneous collapse of an obstacle in a broad rectangular channel with weak slope.

This type of phenomenon has governs by the equations of Saint Venant.

These last are solved numerically by a diagram to the finite differences said diagram of Gabutti.

The results obtained are compared with the results experimental and numerical of other authors.

Words clés: Wave- Break- Saint Venant- finites differences- Gabutti