

8/04

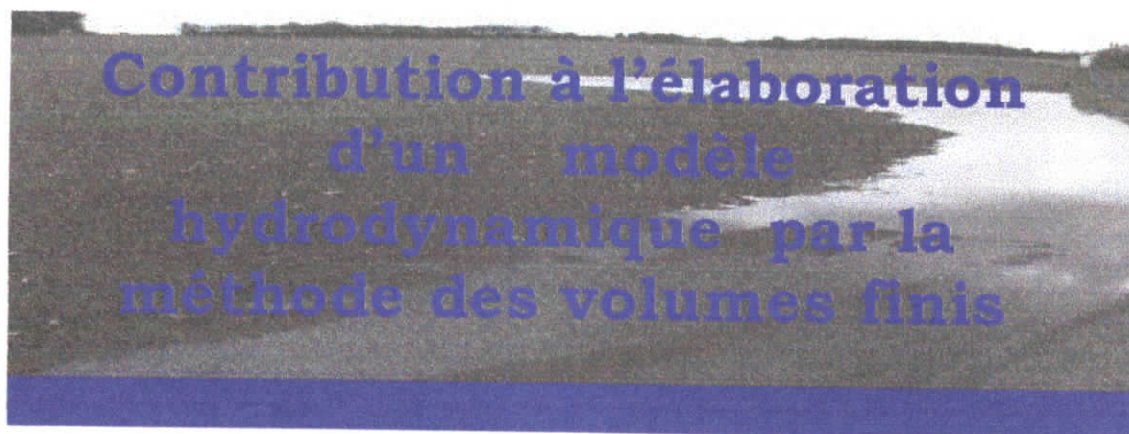
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT d'HYDRAULIQUE

MEMOIRE DE PROJET DE FIN D'ETUDES D'INGENIEUR D'ETAT EN  
HYDRAULIQUE



**Proposé par et dirigé :**

M<sup>lle</sup> S. BENMAMAR  
Mr A.BILEK

**Préparé par :**

K. KHERBACHE

*Année universitaire 2003/2004*

# Dédicaces

*A ma mère, ma grande amie qui m'a protégée, soutenue et encouragée à regarder l'avenir avec confiance.*

*A mon père que je remercie pour son éternel et infatigable soutien, toujours présent depuis ma naissance à ce jour.*

*A mes sœurs Imen, Manel et mon frère Moustapha auxquels j'espère la même réussite sinon plus.*

*A ma grand-mère paternelle et ma grand-mère maternelle qui m'ont beaucoup encouragée.*

*A toute ma famille.*

*A toutes mes amies intimes Ahlem, Amina, Asma, Hanan, Meriem, et Khawla.*

*A mes très chères amies de la promotion et toutes mes amies de l'Ecole National Polytechnique.*

*A tous mes enseignants du primaire, moyen, secondaire et supérieur.*

 Je dédie cet humble travail. 

# REMERCIEMENTS

Je remercie avant tous Allah de m'avoir donné le succès, et la volonté pour faire ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à ma promotrice S. BENMAMAR, pour avoir proposé ce sujet et pour toute l'aide matérielle et morale qu'elle m'a apporté durant toutes les années d'étude, et spécialement durant la période de l'élaboration de ce mémoire.

Ma profonde reconnaissance vont à Mr. A. BILEK pour m'avoir dirigée et encouragée durant toute la période de mon travail.

Mes sincères remerciements vont à Mr. BERKANI qui a bien voulu présider le jury.

Mes remerciements sont adressés à Mr. NEBBACHE, Mr. BELHADJ, Mr. BENZIADA, d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'apporter leurs critiques.

Je tiens à remercier tous les enseignants du département Hydraulique qui m'ont dirigée durant mes trois années.

Je remercie également Mr. BOUHAEF SALEH CHIKH et Mr. AMEZIANE, enseignants à l'institut de mécanique à l'USTHB et l'enseignant de l'institut de mécanique à l'université de BLIDA qui nous ont consacré des séances pour examiner ce travail et apporter leurs critiques.

Je remercie tout particulièrement Melle Asma. BOUCHERIH, ancienne étudiante du département Hydraulique qui m'a soutenue moralement et qui m'a aidée jusqu'à la dernière minute pour accomplir ce travail.

Je remercie Nabil. AZZI, ancien étudiant du département de Génie Mécanique pour ses conseils et son aide morale durant toute la période de ce travail.

J'exprime ma plus profonde gratitude au personnel de la bibliothèque de l'ENP qui m'ont permis de profiter de la documentation de la bibliothèque et m'ont offert leurs services.



## المخلص

تعتبر هذه المذكرة مساهمة لدراسة الجريان ذو السطح الحر. لقد قمنا بدراسة الجريان ذو السطح الحر ثنائي البعد عن طريق نموذج سانت فنونت فيما يتعلق بحل هذه المعادلات، لقد قمنا باستعمال طريقة الحجوم المنتهية، مع الاعتماد على الخوارزمية البسيطة المستوحات عموما من الطريقة التي فرضها بانتكار و سبالدينغ.

### المفاتيح

الجريان ذو السطح الحر، النموذج المعدل سانت فنونت، طريقة الحجوم المنتهية، الخوارزمية البسيطة.

## Résumé

L'objectif de ce mémoire est de contribuer à l'élaboration d'un modèle numérique permettant de simuler les écoulements à surface libre.

Nous avons simulé les écoulements à surface libre pour une géométrie bidimensionnelle à partir du modèle réduit de Saint Venant.

Concernant la résolution numérique, nous avons utilisé pour la discrétisation du modèle mathématique de Saint Venant la méthode des volumes finis, et l'algorithme que nous avons choisit était l'algorithme de Simpler modifié, proposé par Patankar et Spalding.

### Mots clés

Écoulement à surface libre, modèle réduit de Saint Venant, méthode des volumes finis, algorithme Simpler.

## Summary

The objective of this memory is to contribute to the development of a digital model that makes it possible to simulate the flows on free face.

We simulated the flows on free face for a two-dimensional geometry starting from the reduced model of Saint Venant.

Concerning the numerical resolution, we used for the discretization of the mathematical model of Saint Venant the finite volumes method, and the algorithm chosen was the revised Simpler algorithm, proposed by Patankar and Spalding.

### Key words

Flow on free surface, the reduced model of Saint Venant, the finite volumes method, Simpler algorithm.

# SOMMAIRE

## INTRODUCTION GENERALE

Chapitre I : Elaboration du modèle mathématique de Saint Venant.....	4
I. Equations base.....	5
1. Hypothèses.....	5
2. Equation de continuité.....	5
3. Equation de quantité de mouvement.....	5
4. Approche statistique de l'écoulement.....	6
II. Equation du mouvement moyen.....	7
1. Equation de continuité.....	7
2. Equations de quantité de mouvement.....	8
III. Equations de Saint Venant.....	12
1. Hypothèses de Saint Venant.....	12
2. Les conditions cinématiques.....	12
3. Règle d'intégration de Leibnitz.....	14
4. Intégration de l'équation de continuité sur la profondeur.....	14
5. Intégration de la première équation de Reynolds sur la profondeur.....	15
IV. Conclusion.....	23
Chapitre II : Présentation de la méthode des volumes finis.....	24
I. Méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion en une dimension.....	26
1. Régime permanent.....	26
2. Régime transitoire.....	30
II. Méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion en deux dimensions.....	34
III. Etude de problème de convection- diffusion.....	35
III.1. Etude de problème de convection- diffusion pour un écoulement unidirectionnel.....	36
III.2. Solution exacte du problème de convection diffusion unidimensionnelle.....	36
III.3. Application de la méthode des volumes finis sur l'équation de convection diffusion unidimensionnelle.....	37

IV. Schémas d'interpolations.....	38
1. Propriétés des schémas de discrétisation.....	38
2. schémas aux différences centrées.....	39
3. schémas de différentiation aval.....	42
4. schémas hybride.....	45
5. schémas de la loi de puissance.....	47
6. schémas de degré élevé.....	48
conclusion.....	56
Chapitre III : Discrétisation des équations de Saint Venant.....	57
I. Maillage .....	58
II. Discrétisation des équations de Saint Venant.....	59
a. Equation de continuité.....	59
b. Equation de quantité de mouvement.....	62
III. Schéma hybride .....	68
IV. Conclusion.....	69
Chapitre IV : Algorithmes de résolution.....	70
I. Algorithme SIMPLE.....	71
1. Principe de l'algorithme SIMPLE.....	71
a. Forme générale du système d'équations de Saint Venant discrétisées.....	71
b. Correction de la vitesse .....	72
2. Application de l'algorithme simple.....	72
a. Equation de correction de la vitesse.....	72
b. Equation de correction de la côte de la surface libre.....	73
II. Algorithme SIMPLER.....	78
1. Application de l'algorithme SIMPLER .....	78
III. Algorithme SIMPLEC .....	83
IV. Algorithme PISO.....	84
V. Résolution matricielle.....	89
1. Les méthodes directes.....	89
2. Les méthodes itératives.....	89
3. La méthode par bloc, et L'algorithme de TDMA .....	89
4. Algorithme de TDMA.....	90

5. Application de L'algorithme de Tomas (TDMA) pour un problème bidimensionn.....	90
6. Application du TDMA pour le système d'équations de Saint Venant (TDMA ligne par ligne).....	91
V. Conclusion.....	92
Chapitre V : Applications.....	94

Conclusion générale

### Liste des paramètres

A : Volume de contrôle

$a_p, a_o, a_e, a_n, a_s, a_c, a_o, a_n, a_s, a_p^o$  : Coefficients des équations de quantité de mouvement et de continuité

C : coefficient de Chézy

D : Terme de diffusion

F : Terme de convection

$f_x$  : Composante des forces de volume suivant la direction x

$f_y$  : Composante des forces de volume suivant la direction y

$f_z$  : Composante des forces de volume suivant la direction z

$\bar{f}_x$  : Composante des forces de volume moyenne suivant la direction x

$\bar{f}_y$  : Composante des forces de volume moyenne suivant la direction y

$\bar{f}_z$  : Composante des forces de volume moyenne suivant la direction z

g : accélération de la pesanteur,  $m/s^2$

H : Hauteur de l'eau, m

h : Côte de la surface libre, m

$H^o$  : Profondeur de l'écoulement à l'itération précédente

$h^*$  : Hauteur d'écoulement corrigée, m

$h^j$  : cote de la surface libre à l'itération précédente, m

$J_x, J_y, J_o, J_e, J_n, J_s$  : le flux de convection et de diffusion

P : Pression, bar

$P_{atm}$  : Pression atmosphérique, bar

Pe : Nombre de Peclet

$\bar{P}$  : La pression moyenne, bar

$S_p^x, S_p^y, S_{px}, S_{py}, S_{cx}, S_{cy}$  : Termes de source

T : La durée d'observation, seconde

t : Variable de temps, seconde

U : Composante de la vitesse de l'écoulement suivant la direction x, m/s

u : Composante de la vitesse fluctuante de l'écoulement suivant la direction x, m/s

$u_*$  : Vitesse de frottement

$\bar{U}$  : Composante de la vitesse moyenne de l'écoulement suivant la direction x, m/s

$\bar{U}^*$  : Vitesses d'écoulement suivant x corrigée, m/s

$\tilde{U}$  : Pseudo vitesse suivant la direction x, m/s

V : Composante de la vitesse de l'écoulement suivant la direction y, m/s

$\bar{V}^*$  : Vitesse d'écoulement suivant y corrigée, m/s

v : Composante de la vitesse fluctuante de l'écoulement suivant la direction y, m/s

$\bar{V}$  : Composante de la vitesse moyenne de l'écoulement suivant la direction y, m/s

$\tilde{V}$  : Pseudo vitesse suivant la direction y, m/s

W : Composante de la vitesse de l'écoulement suivant la direction z, m/s

w : Composante de la vitesse fluctuante de l'écoulement suivant la direction z, m/s



$\bar{W}$  : Composante de la vitesse moyenne de l'écoulement suivant la direction  $z$   
 $x, y, z$  : composantes cartésiennes  
 $z_f$  : La coordonnée vertical d'un point appartenant à la surface libre  
 $z_s$  : La coordonnée vertical d'un point appartenant à la surface libre  
 $\Delta x$  : Le pas d'espace la direction des  $x$   
 $\Delta y$  : Le pas d'espace dans la direction des  $y$ .  
 $\Delta t$  : Pas de temps  
 $\varphi$  : Scalaire prenant les valeurs  $\bar{U}, \bar{V}, h$   
 $\mu$  : La viscosité dynamique de fluide  
 $\nu$  : Viscosité cinématique du fluide  
 $\nu_T$  : Viscosité totale  
 $\nu_t$  : Viscosité cinématique turbulente  
 $\rho$  : La masse volumique de fluide,  $\text{kg/m}^3$   
 $\tau$  : Tenseur de Reynolds  
 $\tau_x^f$  : Tenseur de contrainte au fond  
 $\tau_y^s$  : Tenseur de contrainte à la surface libre  
 $\omega, \Omega$  : Vitesses angulaires de la terre  
 $\Gamma$  : Coefficient de diffusion

### Indices

$n, N$  : interface et nœud Nord  
 $e, E$  : interface et nœud Est  
 $o, O$  : interface et nœud Ouest  
 $s, S$  : interface et nœud Sud

## Introduction générale

Pour n'importe quel problème scientifique en hydraulique fluviale ou maritime, on doit passer par une représentation mathématique des phénomènes physique mis en jeu.

Cette étude va consister à établir un modèle mathématique des écoulements à surface libre peu profonds qui est représenté en général par des équations différentielles.

Mais, même avec des hypothèses simplificatrices les équations obtenues sont difficiles à résoudre par des méthodes analytiques, donc il est nécessaire d'avoir recours aux méthodes numériques.

Les écoulements à surface libre sont régis par des modèles mathématiques complexes

Plusieurs modèles mathématiques ont été développés dans le domaine des écoulements à surface libre, on cite :

### ❖ Modèle de Navier Stokes tridimensionnel

Ce modèle traite les écoulements à surface libre pour des géométries tridimensionnelles, ce modèle permet d'étudier le phénomène naturel tel qu'il est, sans tenir compte des hypothèses des simplifications.

Les modèles tridimensionnels sont rarement utilisés, parce que ce type de modèle demande des outils de calcul de stockage mémoire important et de temps de calcul important.

### ❖ Modèle de Saint Venant bidimensionnels

Ce type de modèle est utilisé pour étudier les écoulements à surface libre dans le cas où la profondeur de l'écoulement est négligeable devant la largeur du canal.

### ❖ Modèle mathématique de Saint Venant unidimensionnel

Ce modèle est utilisé pour traiter les problèmes d'écoulement ayant une direction privilégiée.

Ces équations sont employées dans les domaines de la protection de l'environnement, calcul des marées et des ondes de tempête, la stabilité des ouvrages, l'étude des crues.

En général, la résolution analytique est limitée pour des géométries très simples, et avec un nombre de Reynolds moins élevée.

Donc, la simulation numérique est imposée comme un outil vital pour résoudre ce type de modèle

Pour résoudre n'importe quel modèle mathématique, on doit transformer le problème continue en un problème discrétisé, qui sera représenté par un système d'équations algébriques.

Pour ce faire, on utilise l'une des trois méthodes :

- ❖ Méthode des différences finies ;
- ❖ Méthodes des éléments finis ;

## ❖ Méthodes des volumes finis.

Le choix de la méthode numérique est fonction du type de problèmes physique à étudier et de la complexité de la géométrie.

L'objectif de ce mémoire est de contribuer à l'élaboration d'un modèle numérique permettant de simuler les écoulements à surface libre.

Dans le chapitre I, on établit le modèle mathématique de Saint Venant 2.5D et ceci à partir des équations fondamentales de Navier Stokes, intégrées sur la profondeur de l'écoulement, en introduisant les termes de la turbulence, et en tenant compte des hypothèses simplificatrices.

Dans le chapitre II, on donne un aperçu de la méthode numérique qu'on va utiliser pour discrétiser notre modèle mathématique de Saint Venant.

On présente dans le chapitre III, les différentes étapes à suivre pour discrétiser le modèle mathématique de Saint Venant par la méthode des volumes finis.

On établit dans le chapitre IV, les algorithmes les plus utilisés par la méthode des volumes finis pour résoudre le système d'équations algébrique de Saint Venant, et l'algorithme de la résolution matricielle.

On présente dans le chapitre V, quelques applications.

On termine enfin par une conclusion.

## Chapitre I : Elaboration du modèle mathématique de Saint Venant

Les équations de Saint Venant, publiées en 1871, sont encore aujourd'hui d'une extrême importance en hydraulique maritime ou fluviale, elles régissent les écoulements à surface libre en eaux peu profondes, d'où leur appellation anglaise «shallow water equations».

Ce modèle de Saint-Venant est également appelé «modèle des eaux peu profondes», «équations d'ondes longues».

Le modèle mathématique de Saint-Venant à deux dimensionnel (2D) dans le plan horizontal découle de l'intégration verticale des équations de Navier-Stokes à trois dimensions (3D) en posant différentes hypothèses fondamentales dont l'une est celle de la pression hydrostatique.

Il est à noter que l'hypothèse de pression hydrostatique limite l'applicabilité du modèle de Saint-Venant aux situations exemptes de ruptures de la topographie ou du niveau d'eau (chutes, ressauts hydrauliques), l'étude des crues.

Le problème physique consiste à étudier les écoulements à surface libre dans le cas où la longueur d'onde est grande par rapport à la profondeur de l'écoulement.

On présente dans ce chapitre le système d'équations de Saint Venant et leurs différentes formulations qui sont résumés dans le schéma suivant :

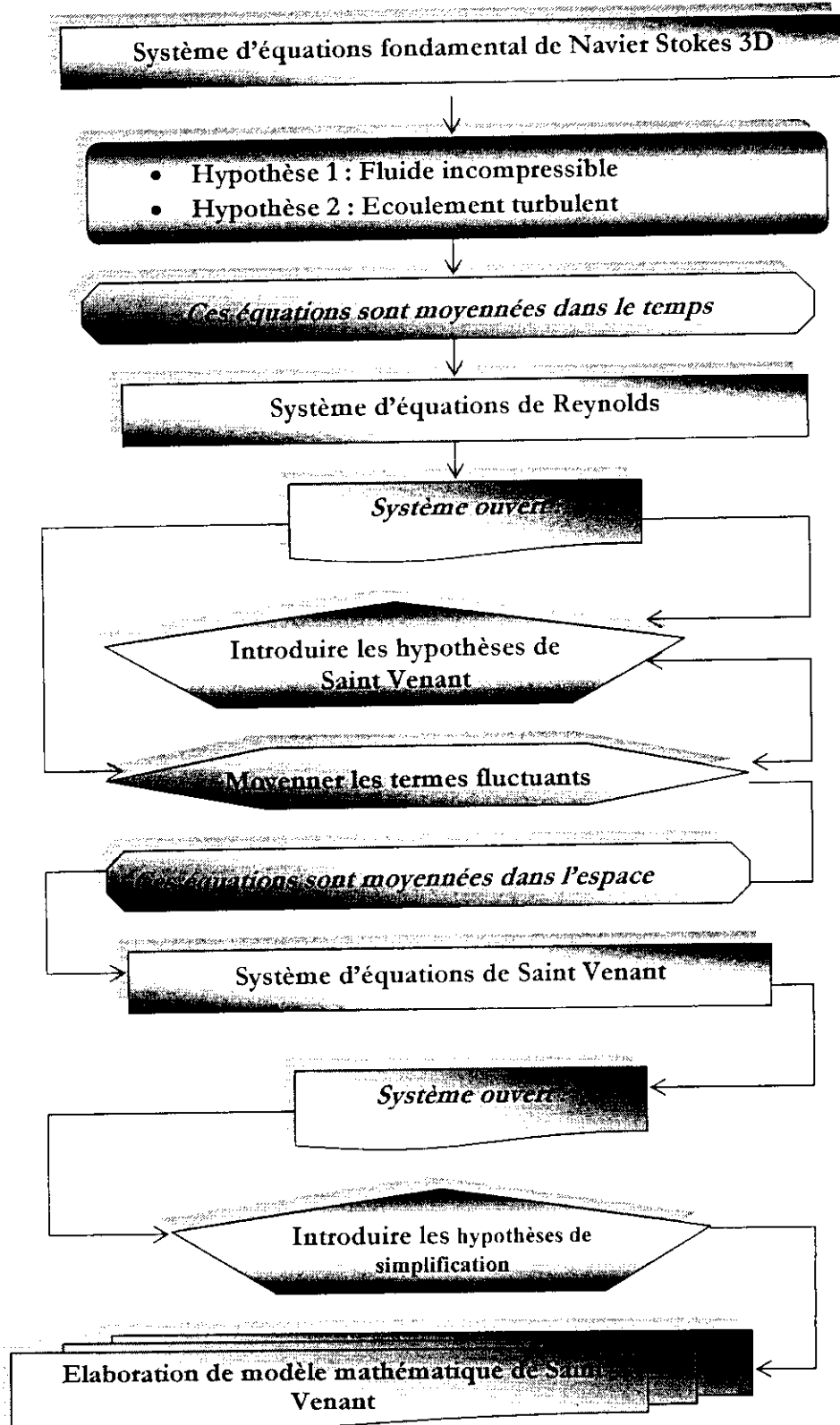


Figure.I.1 : Elaboration de modèle mathématique de Saint Venant

## I. Equations base

Dans un problème d'écoulement à surface libre, le fluide s'écoule entre le fond du canal et la surface libre de l'eau. L'écoulement du fluide est régi par les équations de Navier - Stokes et de continuité.

### 1. Hypothèses

Les hypothèses qu'on introduit pour l'étude de l'écoulement à surface libre sont les suivantes:

- Fluide incompressible;
- Ecoulement turbulent

### 2. Equation de continuité

L'équation de continuité pour un fluide incompressible est donnée par :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (I-1)$$

### 3. Equation de quantité de mouvement

L'équation dynamique suivant x est [7]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f_x + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (I-2)$$

L'équation dynamique suivant y est [7]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + f_y + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \quad (I-3)$$

L'équation dynamique suivant z est [7]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + f_z + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (I-4)$$

où, U, V et W : sont les composantes de la vitesse dans les directions x, y, z ; P : est la pression;  $f_x$ ,  $f_y$  et  $f_z$  sont les composantes des forces de volume dans les directions x, y, z.

#### Forces de volume

Les forces de volume sont décomposées en forces de pesanteur (forces de gravité), et en forces qui sont dues à la rotation de la terre sur elle-même (force de Coriolis).

$$\vec{f} = \vec{f}_g + \vec{f}_c$$

#### ◆ Forces de pesanteur

$$\vec{f}_g = \rho \vec{g}$$

◆ *Force de Coriolis*

$$\vec{f}_c = -2\vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

En un point de latitude  $\varphi$ , on choisit un repère avec (ox) orienté vers l'est, (oy) vers le Nord et (oz) vers la verticale de lieu.

$$\text{Où, } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

On décompose la force de Coriolis suivant les trois directions (ox), (oy) et (oz), on trouve :

$$\vec{f}_c = 2\omega \begin{pmatrix} V \sin \varphi - W \cos \varphi \\ -U \sin \varphi \\ U \cos \varphi \end{pmatrix}$$

L'étude de l'écoulement turbulent dans un canal pourrait se faire, du moins en principe, par la résolution directe des équations (I-1) ÷ (I-4).

Cette approche directe nécessite de puissants moyens informatiques. Elle ne peut être conduite actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple et pour des nombres de Reynolds peu élevés.

Les équations du mouvement présentent des fluctuations irrégulières dans l'espace et dans le temps. Devant cet aspect désordonné des évaluations turbulentes et cette apparente complexité du phénomène, l'attitude naturelle et la plus utilisée a été d'introduire des méthodes statistiques.

#### 4. Approche statistique de l'écoulement

Les écoulements turbulents présentent un caractère aléatoire. Pour cette raison, leur étude se rapproche de celle des gaz de particules en mécanique statistique.

On ne cherche pas à décrire la vitesse en tout point M de coordonnées (x, y, z) et à tout instant t, on s'intéresse à la probabilité d'obtenir certaines vitesses en un certain nombre de points bien choisis.

Pour déterminer les valeurs moyennes, il faudrait produire un grand nombre de réalisations du même écoulement pour des conditions initiales et des géométries identiques, et effectuer une moyenne d'ensemble sur des valeurs obtenues sur toutes ces réalisations.

Cela n'est évidemment guère réalisable en pratique, et on supposera donc souvent que la turbulence vérifie l'hypothèse d'ergodicité : si on attend un temps assez long,

l'écoulement passe par tous ses états possibles, et le temps passé dans chacun d'eux est proportionnel à sa probabilité.

On en déduit la définition suivante des composantes de la vitesse moyenne de la vitesse d'écoulement en un point M donné :

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, y, z) &= \frac{1}{T} \int_0^T U(x, y, z, t) dt, \quad \bar{V}(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T V(x, y, z, t) dt, \quad \bar{W}(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T W(x, y, z, t) dt \\ \text{et } \bar{P}(x, y, z) &= \frac{1}{T} \int_0^T P(x, y, z, t) dt \end{aligned} \quad (I-5)$$

avec, T : la durée d'observation.

## II. Equation du mouvement moyen

Vitesse et pression sont traitées comme des fonctions aléatoires de l'espace et du temps, dont on décompose les valeurs instantanées en [+]:

$$U_i(x_j, t) = \bar{U}_i(x_j, t) + u_i(x_j, t) \quad (I-6)$$

$$P(x_j, t) = \bar{P}(x_j, t) + p(x_j, t) \quad (I-7)$$

Le symbole  $\bar{(\quad)}$  représente l'opérateur de moyenne statique ou moyenne d'ensemble et les lettres minuscules, les fluctuations ou écarts par rapport à la moyenne.

Par définition, les fluctuations sont centrées, de sorte que l'on a identiquement :

$$\bar{u}_i(x_j, t) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{p}(x_j, t) = 0 \quad (I-8)$$

### 1. Equation de continuité

L'équation de continuité s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (I-9)$$

Si on désigne par  $\bar{U}$ ,  $\bar{V}$  et  $\bar{W}$  les grandeurs hydrodynamiques caractérisant l'écoulement moyen, nous avons la décomposition suivante :

$$U = \bar{U} + u, \quad V = \bar{V} + v \quad \text{et} \quad W = \bar{W} + w \quad (I-10)$$

Sachant que:

$\bar{U}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{W}$  : Composantes de la vitesse moyenne suivant x, y, z ;

u, v, w : Composantes de la vitesse fluctuante suivant x, y, z;

Alors l'équation de continuité s'écrit :



$$\frac{\partial(\bar{U}+u)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}+v)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{W}+w)}{\partial z} = 0 \quad (I-11)$$

En arrangeant cette équation, on trouve :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (I-12)$$

En moyennant l'équation (I-12), on obtient :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (I-13)$$

$$\text{Comme : } \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (I-14)$$

$$\text{On a : } \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (I-15)$$

L'équation (I-15) est l'équation de continuité pour l'écoulement moyen.

En remplaçant cette équation dans l'équation (I-12), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (I-16)$$

L'équation (I-16) est l'équation de continuité du mouvement fluctuant

## 2. Equations de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement suivant la direction x peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f_x + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (I-17)$$

En appliquant les équations (I-5), qui définit les grandeurs moyennes aux dérivées spatiales de la vitesse et en échangeant l'ordre des opérations d'intégration par rapport au temps, et de dérivation par rapport aux variables spatiales, on trouve que :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial U^2}{\partial x} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial UV}{\partial y} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial UW}{\partial z} dt = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial P}{\partial x} dt + \frac{1}{T} \int_0^T f_x dt + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dt \right) \quad (I-18)$$

En décomposant le membre de droite de cette équation en trois termes et en calculant la moyenne de chacun de ces trois termes, nous avons :

$$\overline{\frac{\partial U^2}{\partial x}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial U^2}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{U+u})^2 dt \right]$$

$$\overline{\frac{\partial U^2}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{U^2} + u^2 + 2\overline{U}u) dt \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \overline{U^2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T 2\overline{U}u dt \right]$$

$$\overline{\frac{\partial U^2}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \overline{U^2} + \overline{u^2} + 2\overline{U}u \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \overline{U^2} + \overline{u^2} + 2\overline{U}u \right]$$

d'où :

$$\overline{\frac{\partial U^2}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \overline{U^2} + \overline{u^2} \right] \quad (I-19)$$

Nous avons ensuite:

$$\bullet \quad \overline{\frac{\partial UV}{\partial y}} = \frac{\partial (\overline{U+u})(\overline{V+v})}{\partial y}$$

$$\overline{\frac{\partial UV}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{U+u})(\overline{V+v}) dt \right]$$

$$\overline{\frac{\partial UV}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{UV} + \overline{Vu} + \overline{Uv} + \overline{uv}) dt \right]$$

$$\overline{\frac{\partial UV}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{UV}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{Vu}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{Uv}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{uv}) dt \right]$$

$$\overline{\frac{\partial UV}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \overline{UV} + \overline{uv} + \overline{Uv} + \overline{uV} \right]$$

$$\overline{\frac{\partial UV}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \overline{UV} + \overline{uv} + \overline{Uv} + \overline{uV} \right]$$

$$\overline{\frac{\partial UV}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \overline{UV} + \overline{uv} \right] \quad (I-20)$$

De la même manière, on trouve:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{\overline{\partial U W}}{\partial z} &= \frac{\overline{\partial(U+u)(W+w)}}{\partial z} \\
 \frac{\overline{\partial U W}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{U+u})(\overline{W+w}) dt \right] \\
 \frac{\overline{\partial U W}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{UW} + \overline{uw} + \overline{Uw} + \overline{uW}) dt \right] \\
 \frac{\overline{\partial U W}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{UW}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{uw}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{Uw}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (\overline{uW}) dt \right] \\
 \frac{\overline{\partial U W}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \overline{UW} + \overline{uw} + \overline{Uw} + \overline{uW} \right] \\
 \frac{\overline{\partial U W}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \overline{UW} + \overline{uw} + \overline{Uw} + \overline{uW} \right] \\
 \frac{\overline{\partial U W}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \overline{UW} + \overline{uw} \right] \tag{I-21}
 \end{aligned}$$

En moyennant le membre de droite de l'équation (I-17), et en prenant les simplifications représentées par les équations (I-19), (I-20), (I-21), on aboutit à l'équation suivante:

$$\frac{\overline{\partial U}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\overline{\partial U}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\overline{\partial U}}{\partial y} + \overline{W} \frac{\overline{\partial U}}{\partial z} = \frac{\overline{\partial U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{U^2 + u^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{UV + uv}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{UW + uw})$$

En moyennant le second membre de l'équation (I-17), nous obtenons :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial P}}{\partial x} + \overline{f_x} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial y^2} + \frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial z^2} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial P}}{\partial x} + \overline{f_x} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial y^2} + \frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial z^2} \right] \tag{I-22}$$

D'où l'équation (I-2) devient

$$\frac{\overline{\partial U}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\overline{\partial U}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\overline{\partial U}}{\partial y} + \overline{W} \frac{\overline{\partial U}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial P}}{\partial x} + \overline{f_x} + \nu \left( \frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial y^2} + \frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\overline{\partial u^2}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial uv}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial uw}}{\partial z} \right) \tag{I-23}$$

En moyennant chaque terme de l'équation (I-3), il en résulte :

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \bar{f}_y + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{v}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}w}{\partial z} \right) \quad (I-24)$$

On moyenne chaque terme de l'équation (I-4) et on trouve :

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \bar{f}_z + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{w}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} \right) \quad (I-25)$$

Par conséquent, le système d'équations de Reynolds et de continuité est :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \bar{f}_x + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \bar{f}_y + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{v}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \bar{f}_z + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{w}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\}$$

On peut voir que ces équations ne forment plus un système fermé, car on a quatre équations, dix inconnues : les trois composantes de la vitesse moyenne ( $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ ), la pression moyenne ( $\bar{P}$ ) et les contraintes de Reynolds  $\bar{u}^2, \bar{u}v, \bar{u}w, \bar{v}^2, \bar{v}w, \bar{w}^2$ .

Le tenseur de Reynolds est :  $\tau = \rho \begin{bmatrix} \bar{u}^2 & \bar{u}v & \bar{u}w \\ \bar{u}v & \bar{v}^2 & \bar{v}w \\ \bar{u}w & \bar{v}w & \bar{w}^2 \end{bmatrix} \quad (I-26)$

### III. Equations de Saint Venant

Pour établir le modèle de Saint Venant, il y a lieu de moyenniser les équations de Reynolds sur la verticale, par intégration depuis le fond jusqu'à la surface libre.

#### 1. Hypothèses de Saint Venant

Les hypothèses adoptées par Saint Venant sont [5], [8] et [11] :

- Les équations de Saint Venant se déduisent du modèle de Navier Stokes dans le cas où la profondeur est faible devant l'échelle horizontale de variation de la surface libre et de la vitesse ;
- La pression est hydrostatique sur la profondeur car l'accélération verticale est négligeable devant l'accélération de la pesanteur ;
- La variation de la masse volumique de l'eau est négligeable ;
- La composante verticale de la vitesse  $W$  ainsi que ces variations (spatiales et temporelles) sont faibles, ceci implique :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad (I-27)$$

- Les variations verticales des deux composantes horizontales  $U$  et  $V$  sont faibles ;
- Les pertes de charge générales sont celles du mouvement permanent et uniforme de même profondeur ;
- Faible pente du fond du canal.

En se basant sur l'hypothèse (d), l'équation du mouvement suivant la verticale se

$$\text{réduit à : } \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = \bar{f}_z \quad (I-28)$$

A partir de cette hypothèse de Saint Venant, on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \bar{f}_x + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} \right) \quad (I-29)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \bar{f}_y + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial z} \right) \quad (I-30)$$

#### 2. Les conditions cinématiques

Les conditions cinématiques sont posées comme suit :

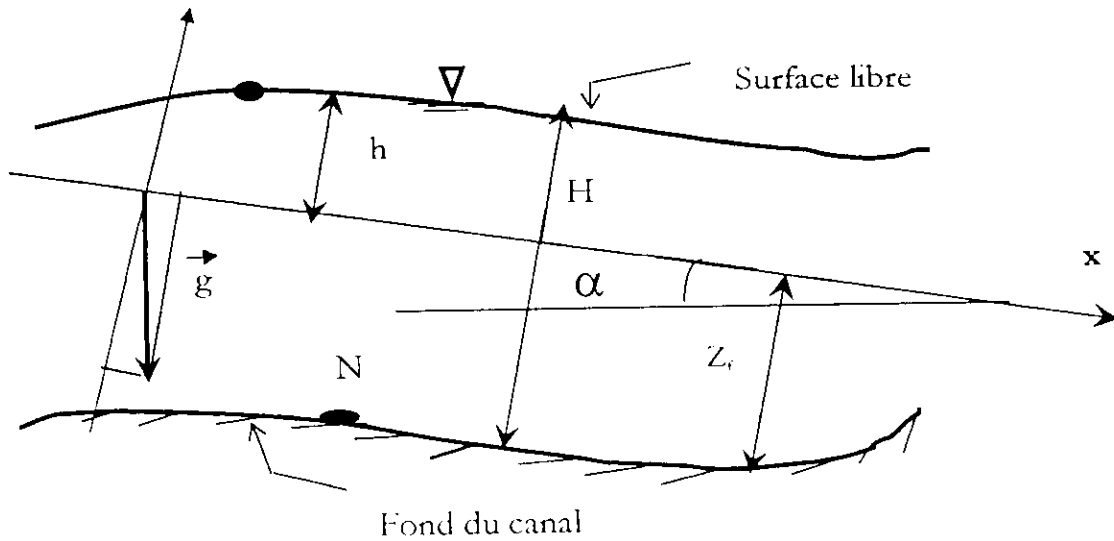


Figure I.2 : Domaine de calcul

En notant  $z_s$  la coordonnée verticale d'un point M appartenant à la surface libre ; celle-ci est définie, à l'instant  $t$ , par le point M de coordonnées  $(x, y, z)$  vérifiant l'équation :

$$W(z_s) = \frac{\partial z_s}{\partial t} + U \frac{\partial z_s}{\partial x} + V \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (I-31)$$

Cette équation représente l'équation de la surface libre.

De même, en notant  $z_f$  la coordonnée verticale d'un point N appartenant à la surface du fond ; celle-ci est définie, à tout instant  $t$ , par :

$$W(z_f) = \frac{\partial z_f}{\partial t} + U \frac{\partial z_f}{\partial x} + V \frac{\partial z_f}{\partial y} \quad (I-32)$$

Cette équation représente l'équation du fond.

On suppose que la surface du fond est indépendante du temps :

$$\frac{\partial z_f}{\partial t} = 0 \quad (I-33)$$

Ceci implique que :

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial z_f}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (I-34)$$

$$\text{et } W(z_f) = U \frac{\partial z_f}{\partial x} + V \frac{\partial z_f}{\partial y} \quad (I-35)$$

### 3. Règle d'intégration de Leibnitz

Pour faire intégrer ces équations aux dérivées partielles, on utilise la règle de Leibnitz [5], [8] et [11] :

$$H \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} dz = H \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_f}^{z_s} f dz + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial t} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{\partial H \bar{f}}{\partial t} + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial t} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial t} \quad (I-36)$$

$$H \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} dz = H \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} f dz + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} = \frac{\partial H \bar{f}}{\partial x} + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (I-37)$$

$$H \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} dz = H \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} f dz + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} = \frac{\partial H \bar{f}}{\partial y} + f(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - f(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (I-38)$$

$$H \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = f(x, y, z_s) - f(x, y, z_f) \quad (I-39)$$

### 4. Intégration de l'équation de continuité sur la profondeur

L'intégration sur la verticale de l'équation (I-15) conduit à :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (I-40)$$

En utilisant la règle de Leibnitz, il vient :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U} dz + \bar{U}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} - \bar{U}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} \bar{V} dz + \bar{V}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \bar{V}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{W}(x, y, z_s) - \bar{W}(x, y, z_f) \quad (I-41)$$

En arrangeant cette équation, on trouve :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} \bar{V} dz + \left[ \bar{U}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} + \bar{V}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \bar{W}(x, y, z_f) \right] - \left[ \bar{U}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{V}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} - \bar{W}(x, y, z_s) \right] \quad (I-42)$$

On définit les vitesses moyennées sur la profondeur comme suit :

$$\bar{\bar{U}} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U} dz \quad \text{et} \quad \bar{\bar{V}} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^{z_s} \bar{V} dz \quad (I-43)$$

En tenant compte des conditions aux limites à la surface libre (I-31) et sur le fond (I-35) et de la relation (I-34), l'équation intégrée devient :

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{H}\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}\bar{V}}{\partial y} = 0 \quad (\text{I-44})$$

### 5. Intégration de la première équation de Reynolds sur la profondeur

◆ L'intégration du membre de gauche de l'équation de quantité de mouvement (I-29) sur la profondeur est comme suit :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial z} \right) dz = \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial z} dz \quad (\text{I-45})$$

Et en utilisant la règle de Leibnitz, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial z} dz = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U} dz + \bar{U}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial t} - \bar{U}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U}^2 dz + \bar{U}^2(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} - \bar{U}^2(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U}\bar{V} dz + \bar{U}(x, y, z_f) \bar{V}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \bar{U}(x, y, z_s) \bar{V}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{U}(x, y, z_s) \bar{W}(x, y, z_s) \\ & - \bar{U}(x, y, z_f) \bar{W}(x, y, z_f) \end{aligned} \quad (\text{I-46})$$

Après réarrangement de l'équation précédente, on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U}^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} \bar{U}\bar{V} dz \\ & + \bar{U}(x, y, z_f) \left[ \frac{\partial z_f}{\partial t} + \bar{U}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} + \bar{V}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \bar{W}(x, y, z_f) \right] \\ & - \bar{U}(x, y, z_s) \left[ \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{U}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{V}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} - \bar{W}(x, y, z_s) \right]. \end{aligned} \quad (\text{I-47})$$

En utilisant les conditions cinématiques et la définition de  $\bar{U}$ , on obtient :

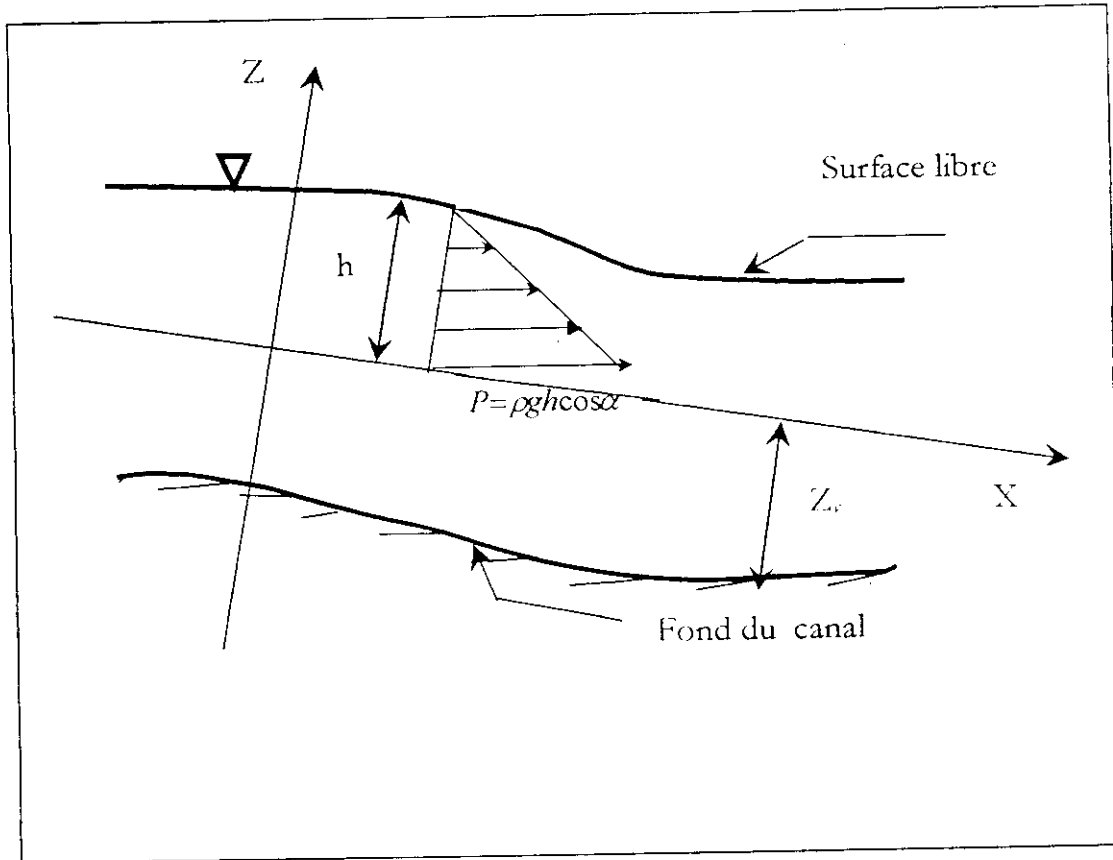
$$\int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{H}\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}\bar{U}\bar{V}}{\partial y}. \quad (\text{I-48})$$

◆ Intégration du premier terme du membre de droite de l'équation de quantité de mouvement (I-29) sur la profondeur de l'écoulement



La pression étant hydrostatique, on a :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \cos \alpha = 0 \quad (\text{I-49})$$



L'intégration de cette équation suivant l'axe des (z) donne:

$$P(x, y, z) = -\rho g \cos \alpha z + c \quad (\text{I-50})$$

avec,  $c = \text{constante}$ .

La constante est choisie de telle sorte que :  $P(x, y, z_s) = P_{\text{atm}}$ ,

où  $z_s$  est la cote de la surface libre et  $P_{\text{atm}}$  la pression atmosphérique qui règne à la surface libre.

En remplaçant ces termes dans l'équation précédente, on obtient :

$$P(x, y, z) = \rho g \cos \alpha (z_s - z) + P_{\text{atm}} \quad (\text{I-51})$$

On a en particulier au fond:

$$P(x, y, z) = \rho g \cos \alpha (z_s - z_f) + P_{\text{atm}} = \rho g \cos \alpha H + p_{\text{atm}} \quad (\text{I-52})$$

La dérivée partielle de la pression par rapport à x est :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} \quad (I-53)$$

La dérivée partielle de la pression par rapport à y est :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} \quad (I-54)$$

Les deux équations précédentes sont indépendantes de z, donc :

$$H \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = Hg \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{et} \quad H \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = Hg \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} \quad (I-55)$$

♦ **Intégration du deuxième terme du membre de droite de l'équation de quantité de mouvement (I-29) sur la profondeur de l'écoulement**

En faisant la moyenne du terme des forces de Coriolis et de force de pression sur la profondeur :

$$\begin{aligned} \int_{z_f}^{z_s} f_x dz &= \int_{z_f}^{z_s} 2\omega \left( \overline{V} \sin \varphi - \overline{W} \cos \varphi \right) dz + \int_{z_f}^{z_s} g \sin \alpha dz = \\ &= 2\omega \left( \sin \varphi \int_{z_f}^{z_s} \overline{V} dz - \cos \varphi \int_{z_f}^{z_s} \overline{W} dz \right) + g \sin \alpha (z_s - z_f) \\ &= 2\omega \left( \sin \varphi H \overline{\overline{V}} - \cos \varphi H \overline{\overline{W}} \right) + g \sin \alpha (z_s - z_f) \end{aligned} \quad (I-56)$$

D'après l'hypothèse (2) de Saint Venant, la valeur moyenne  $\overline{\overline{W}}$  de la composante verticale W est négligeable devant la valeur moyenne  $\overline{\overline{V}}$  de la composante horizontale V, alors l'équation précédente devient:

$$\begin{aligned} \int_{z_f}^{z_s} f_x dz &= 2\omega \sin \varphi H \overline{\overline{V}} \left( 1 - \frac{\overline{\overline{W}}}{\overline{\overline{V}}} \right) + g \sin \alpha (z_s - z_f) = 2\omega \sin \varphi H \overline{\overline{V}} + g \sin \alpha (z_s - z_f) \\ \int_{z_f}^{z_s} f_x dz &= \Omega H \overline{\overline{V}} + g \sin \alpha (z_s - z_f) \end{aligned} \quad (I-57)$$

avec,  $\Omega = 2\omega \sin \varphi$

Il en est de même pour l'axe des y, il en résulte:

$$\int_{z_f}^{z_s} f_y dz = \Omega H \overline{\overline{U}} \quad (I-58)$$

♦ **Intégration du troisième terme du membre de droite de l'équation de quantité de mouvement (I-29) sur la profondeur de l'écoulement**

En intégrant les termes de vitesse moyenne sur la profondeur, on a :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) dz = \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} dz + \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} dz$$

En utilisant la règle de Leibnitz, on trouve:

$$\begin{aligned} \int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} dz + \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial x} \frac{\partial z_f}{\partial x} - \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} dz \\ &+ \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial y} \frac{\partial z_f}{\partial y} - \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial y} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial z} - \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial z} \end{aligned} \quad (I-59)$$

En utilisant la relation définie par l'équation (I-43), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial x} \frac{\partial z_f}{\partial x} - \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial y} \frac{\partial z_f}{\partial y} - \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial y} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial z} - \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial z} \end{aligned} \quad (I-60)$$

◆ **Intégration du quatrième terme du membre du droit de l'équation de quantité de mouvement (I-29) sur la profondeur de l'écoulement**

L'intégration des termes de vitesse fluctuant sur la profondeur est

$$\begin{aligned} \int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_s} \bar{u}^2 dz + \bar{u}^2(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} - \bar{u}^2(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} \bar{u}v dz + \bar{u}v(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \bar{u}v(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{u}w(x, y, z_s) - \bar{u}w(x, y, z_f) \end{aligned} \quad (I-61)$$

En utilisant les relations définies par l'équation (I-43), on trouve:

$$\begin{aligned} \int_{z_f}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial H \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{u}v}{\partial y} + \bar{u}^2(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} - \bar{u}^2(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}v(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} \\ &- \bar{u}v(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{u}w(x, y, z_s) - \bar{u}w(x, y, z_f) \end{aligned} \quad (I-62)$$

Si on prend  $v(I-61) - (I-63)$ , on obtient:

$$v \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right) = v \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + v \left[ \left( \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial x} \frac{\partial z_f}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial y} \frac{\partial z_f}{\partial y} - \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial x} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial y} \frac{\partial z_s}{\partial y} - \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial z} \right) \right] \\
& - \left[ \frac{\partial H \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{u} \bar{v}}{\partial y} \right] - \left[ \left( \bar{u}^2(x, y, z_f) \times \frac{\partial z_f}{\partial x} + \bar{u} \bar{v}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \bar{u} \bar{w}(x, y, z_s) \right) - \left( \bar{u}^2(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u} \bar{v}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} \right. \right. \\
& \left. \left. - \bar{u} \bar{w}(x, y, z_s) \right) \right] \quad (I-63)
\end{aligned}$$

En arrangeant l'équation (I-63), on aboutit à :

$$\begin{aligned}
& \int_{z_f}^{z_s} \left[ v \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z} \right) \right] dz \\
& = \frac{1}{\rho} \left[ \left( \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial H \bar{u}^2}{\partial x} \right) + \left( \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) - \rho \frac{\partial H \bar{u} \bar{v}}{\partial y} \right) \right] \\
& + \frac{1}{\rho} \left[ \left( \mu \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial x} - \rho \bar{u}^2(x, y, z_f) \right) \frac{\partial z_f}{\partial x} \right. \\
& \left. + \left( \mu \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial y} - \rho \bar{v} \bar{u}(x, y, z_f) \right) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \left( \mu \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_f)}{\partial z} - \rho \bar{w} \bar{u}(x, y, z_f) \right) \right] \quad (I-64) \\
& - \frac{1}{\rho} \left[ \left( \mu \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial x} - \rho \bar{u}^2(x, y, z_s) \right) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \left( \mu \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial y} - \rho \bar{v} \bar{u}(x, y, z_s) \right) \frac{\partial z_s}{\partial y} \right] \\
& - \frac{1}{\rho} \left( \mu \frac{\partial \bar{U}(x, y, z_s)}{\partial z} - \rho \bar{w} \bar{u}(x, y, z_s) \right)
\end{aligned}$$

Or, en représentant les contraintes tangentielles par les relations suivantes :

$$\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \rho \bar{u}^2 = \bar{\tau}_{xx} \quad (I-65)$$

$$\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \rho \bar{u} \bar{v} = \bar{\tau}_{xy} \quad (I-66)$$

$$\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} - \rho \bar{u} \bar{w} = \bar{\tau}_{xz} \quad (I-67)$$

$$\mu \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} - \rho \bar{v}^2 = \bar{\tau}_{yy} \quad (I-68)$$

$$\mu \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} - \rho \bar{v} \bar{w} = \bar{\tau}_{yz} \quad (I-69)$$

L'équation (I-63) devient :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left[ \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} \right) \right] dz$$

$$= \frac{\partial H \overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial H \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} + \left[ \overline{\tau_{xx}}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} + \overline{\tau_{xy}}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \overline{\tau_{xz}}(x, y, z_f) \right] \quad (I-70)$$

$$- \left[ \overline{\tau_{xx}}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \overline{\tau_{xy}}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} - \overline{\tau_{xz}}(x, y, z_s) \right]$$

Pour simplifier l'écriture, on définit les contraintes de fond et de vent:

$$\tau_x^f = \overline{\tau_{xx}}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} + \overline{\tau_{xy}}(x, y, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \overline{\tau_{xz}}(x, y, z_f) \quad (I-71)$$

$$\tau_x^s = \overline{\tau_{xx}}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \overline{\tau_{xy}}(x, y, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} - \overline{\tau_{xz}}(x, y, z_s) \quad (I-72)$$

En tenant compte de ces simplifications, on a :

$$\int_{z_f}^{z_s} \left[ \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial H \overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial H \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} + \tau_x^f - \tau_x^s \right] \quad (I-73)$$

L'intégration de l'équation (I-29) donne finalement :

$$\frac{\partial H \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{U}\bar{V}}{\partial y} = \Omega H \bar{V} + g \sin \alpha (z_s - z_f) - Hg \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial H \overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial H \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} + \tau_x^f - \tau_x^s \right) \quad (I-74)$$

Si on suit la même démarche pour la deuxième équation de Reynolds (I-30), on trouve:

$$\frac{\partial H \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{U}\bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{V}^2}{\partial y} = H \Omega \bar{U} - Hg \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial H \overline{\tau_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial H \overline{\tau_{yy}}}{\partial y} + \tau_y^f - \tau_y^s \right) \quad (I-75)$$

On a donc construit le modèle 2D de Saint Venant qui s'écrit:

$$\frac{\partial H \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{U}\bar{V}}{\partial y} = \Omega H \bar{V} + g \sin \alpha (z_s - z_f) - Hg \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial H \overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial H \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} + \tau_x^f - \tau_x^s \right) \quad (I-78)$$

$$\frac{\partial H \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{U} \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{V}^2}{\partial y} = H \Omega \bar{U} - H g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial H \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \tau_y^e - \tau_y^s \right) \quad (I-77)$$

### Hypothèse de simplification

Pour simplifier notre étude, on suit les étapes suivantes :

❖ On néglige l'effet de force de Coriolis devant les autres paramètres.

Le système d'équations de Saint Venant à 2D devient :

$$\frac{\partial H \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{U} \bar{V}}{\partial y} = + g \sin \alpha (z_s - z_r) - H g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial H \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \tau_x^e \right) \quad (I-78)$$

$$\frac{\partial H \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{U} \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{V}^2}{\partial y} = - H g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial H \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \tau_y^e \right) \quad (I-79)$$

### ❖ Modélisation de la turbulence

En 1973, J. Kuiperd et C. Bvreugdenhil (1973), ont proposé l'hypothèse suivante :

Dans un régime d'écoulements turbulent, pour une profondeur d'eau constante les contraintes effectives des équations (I-78), (I-79), sont données par les relations suivantes [1]:

$$\frac{1}{\rho H} \left( \frac{\partial H \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} \right) = \nu_T \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right) \quad (I-80)$$

$$\frac{1}{\rho H} \left( \frac{\partial H \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} \right) = \nu_T \left( \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \right) \quad (I-81)$$

avec,  $\nu_T = \nu_0 + \nu_t$  où  $\nu_0$  : viscosité cinématique de l'eau et  $\nu_t$  : viscosité turbulente donnée par l'expression :  $\nu_t = C_\mu H u_*$  avec  $u_*$  : vitesse de frottement,  $C_\mu$  : coefficient semi empirique ( $0,2 < C_\mu < 0,4$ ) [11].

A partir de ces simplifications, on aboutit à:

$$\frac{\partial \overline{H\overline{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{H\overline{U}^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{H\overline{U}\overline{V}}}{\partial y} = +g \sin \alpha (z_s - z_f) - Hg \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_x^f) + v_T H \left( \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^2} \right) \quad (I-82)$$

$$\frac{\partial \overline{H\overline{V}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{H\overline{U}\overline{V}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{H\overline{V}^2}}{\partial y} = -Hg \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{\rho} (\tau_y^f) + v_T H \left( \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y^2} \right) \quad (I-83)$$

◆ On définit la contrainte de fond par :

$$\tau_x^f = \frac{\rho g}{C^2} \overline{U} \left( \overline{U^2} + \overline{V^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (I-84)$$

$$\tau_y^f = \frac{\rho g}{C^2} \overline{V} \left( \overline{U^2} + \overline{V^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (I-85)$$

On injecte les équations (I-84), (I-85), dans les équations (I-82), (I-83), on obtient :

$$\frac{\partial \overline{H\overline{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{H\overline{U}^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{H\overline{U}\overline{V}}}{\partial y} = +g \sin \alpha (z_s - z_f) - Hg \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{C^2} \overline{U} \left( \overline{U^2} + \overline{V^2} \right)^{\frac{1}{2}} + v_T H \left( \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^2} \right) \quad (I-86)$$

$$\frac{\partial \overline{H\overline{V}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{H\overline{U}\overline{V}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{H\overline{V}^2}}{\partial y} = -Hg \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{g}{C^2} \overline{V} \left( \overline{U^2} + \overline{V^2} \right)^{\frac{1}{2}} + v_T H \left( \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y^2} \right) \quad (I-87)$$

### Remarque

On est dans le cas où l'écoulement est peu profond, c'est à dire que la profondeur d'eau est faible devant l'échelle horizontale.

Donc l'accélération verticale est faible devant celle de la pesanteur, ce qui entraîne une faible variation de la profondeur de l'écoulement devant les autres directions (x, y), ce qui donne :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (I-88)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (I-89)$$

On remplace ces deux relations dans les équations (I-86) et (I-87), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{U} \bar{V}}{\partial y} = & + g \sin \alpha (z_s - z_r) - H g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{C^2} \bar{U} \left( \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + v_t \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) \right) + v_t \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{U} \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial H \bar{V}^2}{\partial y} = & - H g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{g}{C^2} \bar{V} \left( \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + v_t \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right) - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right) + v_t \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

A partir de ces simplifications, le modèle mathématique de Saint Venant s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H \bar{U} \bar{U} - v_T H \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \bar{U} \bar{V} - v_T H \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) = & + g \sin \alpha (z_s - z_r) - H g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} \\ & + \frac{g}{C^2} \bar{U} \left( \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (I-90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H \bar{U} \bar{V} - v_T H \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \bar{V} \bar{V} - v_T H \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) = & - H g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{g}{C^2} \bar{V} \left( \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (I-91)$$

## Conclusion

Le système d'équations obtenu contient des termes non linéaires.

La complexité de ces équations ne permet pas la résolution analytiquement. On doit alors avoir recours à des méthodes expérimentales ou à des méthodes numériques.



## Chapitre II : Présentation de la méthode des volumes finis

Les équations aux dérivées partielles régissant le mouvement d'un fluide sont dans le cas général non linéaire. Par conséquent, elles ne peuvent être résolues analytiquement. Des méthodes numériques sont donc utilisées, principalement les méthodes des éléments finis, des volumes finis et des différences finies.

### • Méthode des éléments finis

La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (triangles ou quadratiques en général). Comme elle permet de modéliser des géométries très complexes.

Les équations sont simplifiées en utilisant une combinaison linéaire de fonctions de base dans le support est un des éléments.

La méthode des éléments finis est une méthode de calcul numérique adaptée à la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP), pour des problèmes stationnaires ou transitoires, linéaires ou non linéaires, et d'une équation à trois variables d'espace indépendantes. L'espace de travail est découpé en sous domaines, les éléments finis, délimités par des noeuds sur lesquels est discrétisée l'inconnue.

### • Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est un outil numérique basé sur l'équation locale qui est discrétisée et résolue de proche en proche : on exprime l'opérateur différentiel en un point en fonction de l'inconnue aux points voisins, en effectuant un développement en série de Taylor de système d'équations qui représente le problème qu'on va traiter.

Le « maillage » est réalisé avec des carrés en 2D ou des cubes en 3D.

### • Méthodes de Volumes finis

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation pour les lois de conservation. Elle résulte d'un choix au sens physique, basé sur l'écriture des bilans.

Cette méthode consiste à discrétiser sur chaque cellule, appelée volume de contrôle, la forme intégrale du problème à résoudre à la place de sa forme différentielle considérée; en différences finies.

La méthode de volumes finis est une méthode de discrétisation bien adaptée à la simulation numérique de différents types de lois de conservation (elliptiques, hyperboliques et paraboliques). Elle est beaucoup utilisée dans plusieurs domaines d'ingénierie, comme la mécanique des fluides, le transfert de chaleur et de masse.

**Avantage de la méthode des volumes finis**

- L'avantage la méthode des volumes finis sur la méthode des différences finies est qu'elle s'adapte facilement à des géométries complexes comme c'est le cas dans de nombreux problèmes industriels. De plus, elle permet de prendre en compte la présence d'obstacles (dans un domaine) et de traiter de façon naturelle les conditions aux limites. La difficulté essentielle qui peut être rencontrée est l'estimation des flux aux frontières de chaque volume de contrôle lors de la mise en oeuvre de cette technique.
- L'avantage la méthode des volumes finis sur les méthodes des différences finies et les éléments finis est qu'elle est conservative ; en bref, tout ce qui sort d'un volume de contrôle entre dans un autre.

Les avantages et inconvénients de chaque méthode sont présentés dans le tableau 1

<u>Méthodes numériques</u>	<u>Avantages</u>	<u>Inconvénients</u>
Méthode des différences finies (MDF)	Simplicité dans les calculs	Difficulté de traitement des géométries complexes
Méthode des éléments finis (MEF)	Adaptés aux domaines complexes	Difficultés de mise en oeuvre et coût élevé
Méthode des volumes finis (MVF)	Mise en oeuvre relativement simple et bien adaptée aux domaines et à la physique étudiés.	

Tableau 1

La comparaison entre les trois méthodes est présentée dans le tableau 2.

Méthodes numériques	MDF	MEF	MVF
Formulation	Forte	Faible	Faible
Rapidité de calcul	+	-	-
Géométries complexes	-	+	+
Mise en oeuvre rapide	+	+	-
Précision	+	++	-
Fluides incompressibles	+	++	+
Fluides compressibles	+	-	++
Elliptique	+	++	-
Conservative	+	-	++
Hyperbolique	+	+	++

Tableau 2

**Un des objectifs de notre travail est de discrétiser les équations de Saint Venant en utilisant la méthode des volumes finis.**

**I. Méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion en une dimension**

**1. Régime permanent**

Ici nous allons développer la méthode des volumes finis pour le plus simple des problèmes de transport qui est la diffusion pure en régime permanent. L'équation qui gouverne ce phénomène s'écrit :

$$\text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) + S = 0 \tag{II-1}$$

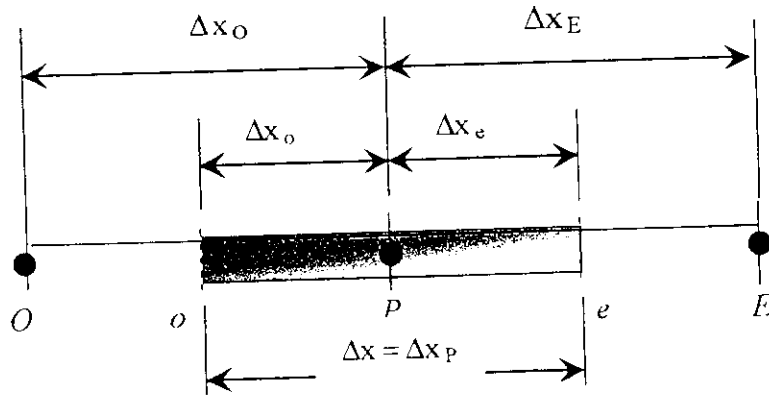
La diffusion pure en régime permanent unidimensionnel phénomène est gouverné par l'équation :

$$\frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \tag{II-2}$$

où,  $\Gamma$  est le coefficient de diffusion et  $S$  est le terme de source. Les valeurs de  $\phi$  aux frontières sont données constantes. Un exemple d'un tel processus est celui de la conduction dans une barre.

On applique cette méthode pour le volume de contrôle construit autour de point P (figure II.1)

Figure II.1 : Maillage monodirectionnel



**Etape 1 : Génération du maillage**

Les symboles E et O désignent respectivement le point Est et le point Ouest des nœuds voisins par rapport à P, l'un est dans la direction des x croissants et l'autre dans la direction des x décroissants.

Les deux traits verticaux en pointillés délimitent le volume de contrôle associé à P.

On appelle e et o les frontières qui délimitent le volume de contrôle.

On note par  $\Delta x_o$  et  $\Delta x_E$  les distances entre O et P et entre E et P respectivement.

Et de la même manière, on appelle  $\Delta x_o$  et  $\Delta x_e$  les distances entre e et p et o et p.

**Etape 2 : Discrétisation.**

L'étape clé de la méthode des volumes finis est l'intégration de l'équation (II-2) régissant le transport à travers le volume de contrôle. Pour le volume de contrôle tel qu'il est défini, on a :

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\varphi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left( \Gamma A \frac{d\varphi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\varphi}{dx} \right)_o + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{II-3})$$

où,  $A$  est la section droite du volume de contrôle,  $\Delta V$  est son volume,  $\bar{S}$  est la moyenne de la source  $S$  tout le long du volume de contrôle.

Pour poursuivre la discrétisation de l'équation, il est nécessaire de choisir une loi de variation locale pour  $\varphi$ . Deux lois possibles sont représentées sur la (Figure II-2) [9].

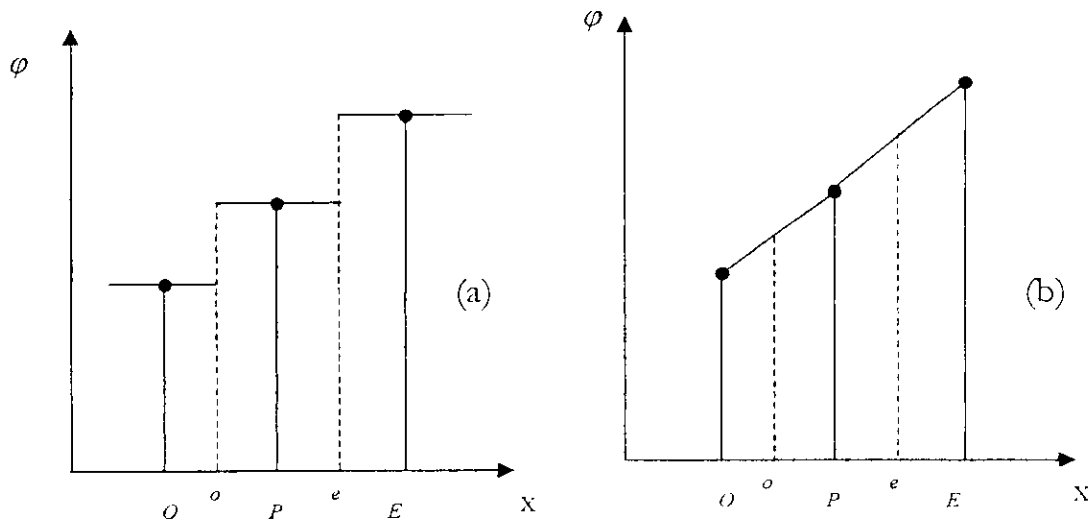


Figure II.2 : Lois de variation locales.

(a)  $\varphi$  constante dans chaque volume de contrôle.

(b) variation linéaire de  $\varphi$  entre deux points du maillage.

Pour la loi de la figure II.2.a, où l'on suppose que  $\varphi$  est constante dans chaque volume de contrôle,  $d\varphi/dx$  n'est pas définie aux points frontières du volume de contrôle ( $o$  et  $e$ ), tandis que la loi de la figure II.2.b où l'on suppose une variation linéaire de  $\varphi$  entre deux points du maillage, permet le calcul de  $d\varphi/dx$ .

Afin que nous puissions aboutir à des formes d'équations discrétisées utiles, nous allons avoir besoin de l'interface de diffusion  $\Gamma$  et du gradient  $d\varphi/dx$  à l'Est " $e$ " comme à l'Ouest " $o$ ". Ce qui nous amène à évaluer  $\Gamma$  et  $\varphi$  aux points nodaux.

Pour le calcul du gradient aux facettes du volume de contrôle, il va falloir utiliser une distribution approximative des propriétés mises en jeu entre les nœuds.

Pour commencer, nous choisissons la plus simple des approximations qui est l'approximation linéaire. Cette pratique est dénommée « *différentiation centrale* » (*Central differencing*).

Les termes de flux de diffusion sont évalués comme suit :

$$\left( \Gamma A \frac{d\varphi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left( \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\Delta x_E} \right) \quad (\text{II-4})$$

$$\left( \Gamma A \frac{d\varphi}{dx} \right)_o = \Gamma_o A_o \left( \frac{\varphi_P - \varphi_O}{\Delta x_O} \right) \quad (\text{II-5})$$

où,  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_o$  sont les valeurs du coefficient de diffusion sur les faces  $e$  et  $o$  du volume de contrôle, tel que :

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \quad (\text{II-6})$$

$$\Gamma_o = \frac{\Gamma_P + \Gamma_O}{2} \quad (\text{II-7})$$

La source est approchée linéairement par la relation suivante :

$$\bar{S} \Delta V = S_C + S_P \varphi_P \quad (\text{II-8})$$

En remplaçant les équations (II-4), (II-5) et (II-8) dans l'équation (II-3), on trouve :

$$\Gamma_e A_e \left( \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\Delta x_E} \right) - \Gamma_o A_o \left( \frac{\varphi_P - \varphi_O}{\Delta x_O} \right) + (S_C + S_P \varphi_P) = 0 \quad (\text{II-9})$$

Après réarrangement de l'équation (II-9), on trouve :

$$\left( \frac{\Gamma_e}{\Delta x_E} A_e + \frac{\Gamma_o}{\Delta x_O} A_o - S_P \right) \varphi_P = \left( \frac{\Gamma_e}{\Delta x_E} A_e \right) \varphi_E + \left( \frac{\Gamma_o}{\Delta x_O} A_o \right) \varphi_O + S_C \quad (\text{II-10})$$

On définit par  $a_E$ ,  $a_O$  et  $a_P$  les coefficients associés aux nœuds  $\varphi_E, \varphi_O, \varphi_P$  respectivement, et par suite l'équation devient :

$$a_P \varphi_P = a_O \varphi_O + a_E \varphi_E + b \quad (\text{II-11})$$

avec,  $b = S_C$

$$a_O = \frac{\Gamma_o}{\Delta x_O} A_o \quad (\text{II-12})$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x_E} A_e \quad (\text{II-13})$$

$$a_P = a_O + a_E - S_P \quad (\text{II-14})$$

### **Etape 3 : Solution des équations**

Les équations discrétisées données par (II-11) sont formulées pour chaque nœud en vue de résoudre le problème de diffusion pure en 1D. Pour les volumes de contrôle qui sont adjacents aux frontières, l'équation (II-11) est modifiée afin qu'elle puisse aussi les intercaler. Nous obtenons alors un système composé d'équations linéaires.

La solution obtenue est constituée de la valeur nodale de la propriété  $\varphi$ .

**Commentaires :**

➤ L'équation (II-11) est de la forme standard que nous adopterons pour l'écriture d'une équation discrétisée. La variable  $\varphi$  au point P apparaît à gauche de l'équation, tandis que la variable des nœuds voisins et la constante b apparaissent à droite. Le nombre de voisins augmente avec la complexité de la géométrie du problème. Nous noterons de façon générale une équation discrétisée sous la forme [9] :

$$a_P \varphi_P = \sum_{nb} a_{nb} \varphi_{nb} + b \quad (\text{II-15})$$

où, l'indice nb désigne un voisin du point P, la sommation portant sur tous les voisins de P.

➤ La liberté de choix en ce qui concerne les lois de variation locale montre qu'il est possible d'obtenir un grand nombre de forme d'équations discrétisées pour une même équation aux dérivées partielles et un même maillage. Il est cependant important de respecter deux règles.

- Le choix de la loi de variation locale d'une grandeur doit avoir un sens physique.
- Il faut toujours s'assurer que la conservation globale est vérifiée.

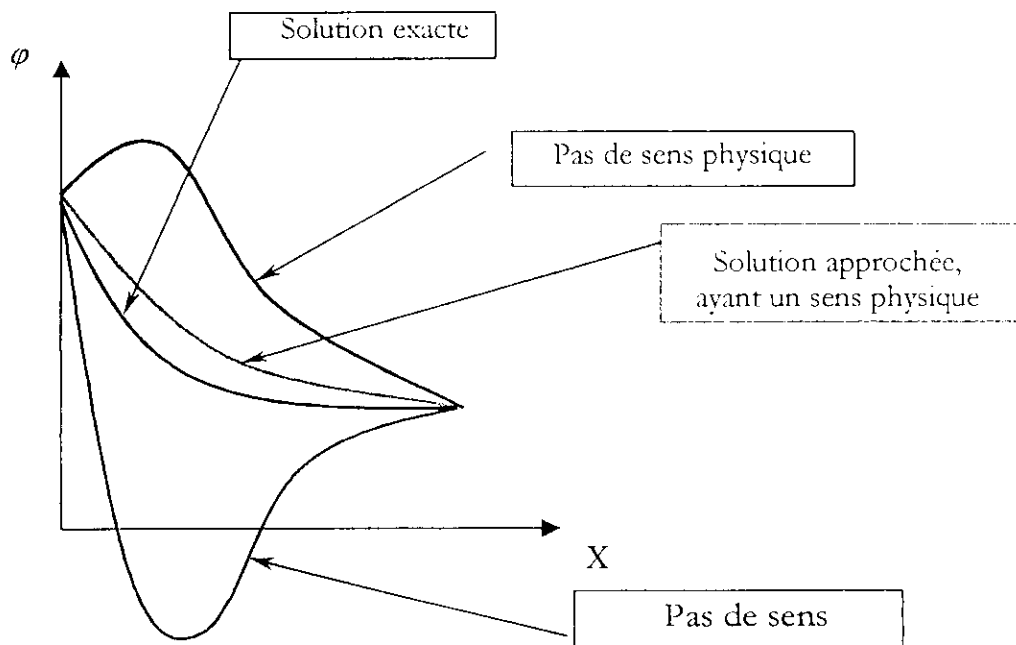


Figure II.3 : Exemple de lois de variation locale avec ou sans sens physique

**Principes d'une bonne discrétisation**

- Positivité des coefficients  $a_P$  et  $a_{nb}$

Sachant que la valeur de la variable  $\varphi$  au point P est essentiellement influencée par celle de ses voisins immédiats, on comprend que si on perturbe la variable en un

point voisin de P, la variable au point P devra être modifiée dans le même sens que celui de la perturbation. Les signes de  $a_p$  et  $a_{nb}$  doivent donc être identiques (équation II-15).

Par convention, on choisit que  $a_p$  et  $a_{nb}$  toujours de signe positif [9].

- Somme des coefficients voisins.

Les équations différentielles gouvernantes contiennent uniquement les dérivées de la variable dépendante  $\varphi$ . Si  $C$  est une constante arbitraire, la fonction  $\varphi + C$  vérifie aussi les équations différentielles. Cette propriété est aussi valable pour les équations discrétisées. Ceci conduit à [9] :

$$a_p = \sum_{nb} a_{nb} \quad (\text{II-16})$$

- Choix du maillage

La distance entre deux points du maillage n'est pas obligatoirement constante. Si cette distance est constante, on parle de maillage régulier, sinon de maillage irrégulier. Le choix du maillage dépend du problème posé ; dans une zone où  $\varphi$  varie fortement, il sera nécessaire d'employer des mailles fines, tandis que des mailles plus larges pourront être utilisées dans des zones de variations plus faibles. Bien qu'il n'existe pas de règle stricte, il ne faut pas passer brusquement d'une maille très fine à une maille beaucoup plus large. En pratique, le rapport des dimensions entre deux mailles voisines doit être compris entre 1/3 et 3.

- Linéarisation du terme source

Quand le terme source dépend de  $\varphi$ , la meilleure méthode consiste à exprimer  $\bar{S}$ , dans chaque volume de contrôle, sous la forme :

$$\bar{S} = S_C + S_P \varphi_P \quad (\text{II-17})$$

Le choix d'une telle approximation se justifie par le fait que nous conservons la linéarité du système discrétisé ; c'est à dire que la discrétisation conduit à un système linéaire.

Quand  $S$  est une fonction non linéaire de  $\varphi$ , il est nécessaire de la linéariser, les valeurs de  $S_c$  et  $S_p$  pouvant dépendre de  $\varphi$ . Il faut alors travailler avec une méthode itérative. A chaque itération, les valeurs de  $S_c$  et  $S_p$  sont réactualisées avec les dernières valeurs obtenues pour  $\varphi$ , que nous noterons  $\varphi^*$  [9].

## 2. Régime transitoire

### Principe d'une discrétisation en espace et en temps

Pour un problème de diffusion pure sans terme source en régime transitoire, la forme générale de l'équation de transport est de la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \quad (\text{II-18})$$

L'équation discrétisée est obtenue par intégration en espace, sur le volume de contrôle de la (Figure II.1) et en temps, entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . Il vient :

$$\int_0^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dt dx = \int_0^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dt dx \quad (\text{II-19})$$

Après intégration de cette équation, on a :

$$\int_0^e [(\rho\varphi)_{t+\Delta t} - (\rho\varphi)_t] dx = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_0 \right] dt \quad (\text{II-20})$$

On définit à l'instant  $t$  les paramètres  $(\rho\varphi)^0$  et à l'instant  $t + \Delta t$  les paramètres  $(\rho\varphi)$ .

L'intégration spatiale et temporelle de l'équation (II-20) donne [9] :

$$[(\rho\varphi) - (\rho\varphi)^0] \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_0 \right] dt \quad (\text{II-21})$$

Pour discrétiser ce terme, il faut tout d'abord choisir une loi de variation locale de  $\left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)$  en fonction du temps.

- Avec une loi de variation locale de type constante, nous obtenons :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dt = \Delta t \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^0 \quad (\text{II-22})$$

$$\text{où, } \int_t^{t+\Delta t} \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dt = \Delta t \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \quad (\text{II-23})$$

- Avec une loi de variation locale de type linéaire, il vient :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dt = \frac{\Delta t}{2} \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) - \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^0 \right] \quad (\text{II-24})$$

Ces trois possibilités peuvent s'écrire sous une forme générale :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dt = \left[ f \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + (1-f) \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^0 \right] \Delta t \quad (\text{II-25})$$

où,  $f$  est un coefficient de pondération qui varie entre 0 et 1.

Les trois lois données ci-dessus correspondent respectivement au schéma explicite ( $f = 0$ ), schéma de Crank-Nicolson ( $f = 0,5$ ) et schéma totalement implicite ( $f = 1$ ).

Les trois lois de variations locales correspondant à ces trois schémas sont représentées sur la figure (II-4) :



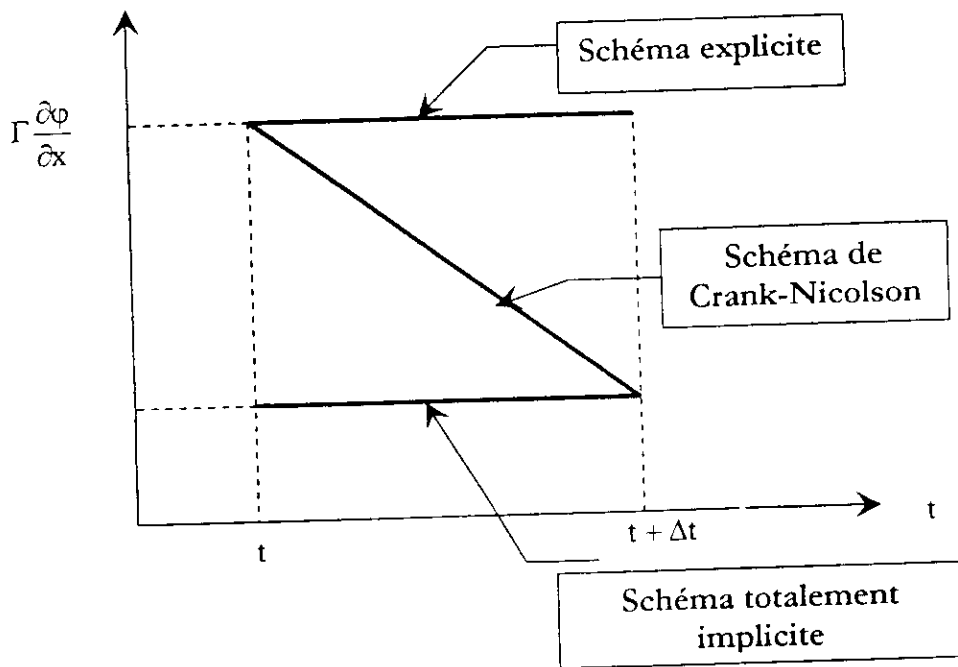


Figure II.4 : Lois de variation locale pour la discrétisation en temps

Donc l'équation (II-21) devient :

$$[(\rho\varphi)_P - (\rho\varphi)_P^0] \frac{\Delta x}{\Delta t} = f \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_o \right] + (1-f) \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e^0 - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_o^0 \right] \quad (II-26)$$

A partir d'une loi de variation locale, les différents termes de  $\left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$  sont représentés par les relations suivantes :

$$a_P \varphi_P = f a_E \varphi_E + f a_O \varphi_O + b \quad (II-27)$$

avec,  $a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x_E}$ ,  $a_O = \frac{\Gamma_o}{\Delta x_O}$ ,  $a_O^0 = \frac{\Gamma_o^0}{\Delta x_O}$ ,  $a_E^0 = \frac{\Gamma_e^0}{\Delta x_E}$

$$a_P^0 = \rho^0 \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad b = a_P^0 \varphi_P^0 + (1-f) \left[ a_E^0 (\varphi_E^0 - \varphi_P^0) - a_O^0 (\varphi_P^0 - \varphi_O^0) \right] \quad (II-28)$$

$$a_P = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} + f a_E + f a_O$$

***Stabilité du schéma de discrétisation temporelle***

Examinons plus en détail les trois principaux schémas : explicite, Crank - Nicolson et totalement implicite. Dans toute la discussion qui suit, nous considérerons que  $\Gamma$  et  $\rho$  sont constants, et ne distinguerons donc plus  $a_E$  et  $a_E^0, \dots$

Le schéma explicite est obtenu en posant  $f = 0$  dans l'équation (II-27) soit :

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E^0 + a_O \varphi_O^0 + (a_P - a_E - a_O) \varphi_P^0 \quad (\text{II-29})$$

La valeur de  $\varphi_P$  à l'instant  $t + \Delta t$  ne dépend pour ce schéma que des valeurs de  $\varphi$  à l'instant précédent. Ainsi, le calcul de  $\varphi$  à chaque pas de temps ne nécessite pas la résolution d'un système linéaire. Cependant le schéma explicite souffre d'une sérieuse limitation. En effet, si l'on perturbe  $\varphi_P$ ,  $\varphi_P^0$  doit suivre la perturbation dans le même sens. Pour ce faire, il faut que :

$$a_P - a_E - a_O > 0$$

ce qui signifie, en considérant un maillage régulier, que le pas de temps ne doit pas dépasser la valeur limite :

$$\Delta t < \rho \frac{\Delta x^2}{2\Gamma} \quad (\text{II-30})$$

Si cette condition n'est pas remplie, des solutions sans aucun sens physique peuvent être obtenues.

La condition (II-30) est un critère classique de stabilité du schéma explicite. Ce critère peut conduire à des temps de calcul longs car plus on veut raffiner le maillage, plus il faut réduire le pas de temps.

Nous allons illustrer la différence entre les trois schémas à partir d'un problème simple. Nous considérons dans l'équation (II-27) que  $\varphi_E$  et  $\varphi_O$ , sont bloqués à zéro. Dans ce cas, pour un maillage régulier, nous déduisons de (II-27) la relation :

$$\frac{\varphi_P}{\varphi_P^0} = \frac{1 - \lambda(1-f)}{1 + \lambda f} \quad (\text{II-31})$$

$$\text{avec, } \lambda = \frac{2\Gamma\Delta t}{\rho\Delta x^2} \quad (\text{II-32})$$

Le fait que  $\varphi_E$  et  $\varphi_O$ , soient toujours nuls nécessite que  $\varphi_P$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. La raison de la suite géométrique  $\varphi_P$  doit donc être en valeur absolue inférieure à 1. Les variations de  $\varphi_P / \varphi_P^0$  en fonction de  $\lambda$ , pour les trois schémas, sont représentées sur la (Figure II.5).

On voit sur cette figure que seul le schéma totalement implicite conduit à des valeurs positives quelle que soit la valeur de  $\lambda$ . Pour des grandes valeurs de  $\lambda$ , le schéma de Crank - Nicolson donne pour  $\varphi_P / \varphi_P^0$  une valeur comprise entre -1 et 0, ce qui signifie que les valeurs de  $\varphi$  vont osciller entre des valeurs positives et négatives en tendant vers 0. Le rapport  $\varphi_P / \varphi_P^0$  devient inférieur à -1 avec le schéma explicite si  $\lambda > 2$ ; les oscillations de  $\varphi$  ne sont alors plus amorties et la solution diverge.

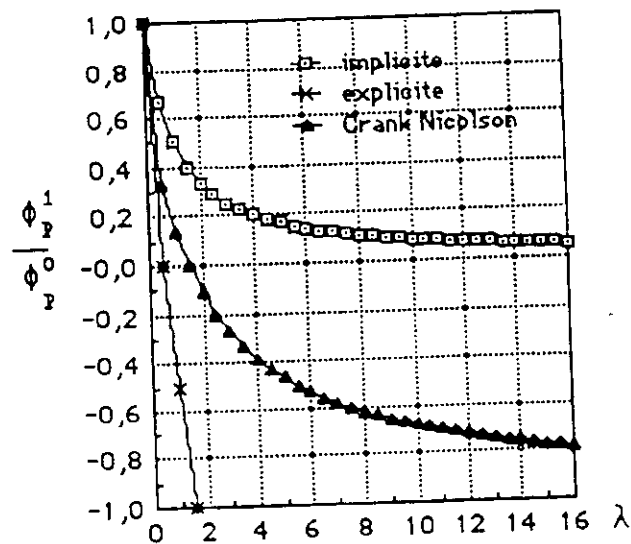


Figure II.5 : Comparaison des schémas explicite, Crank - Nicolson et implicite

Ainsi, le schéma totalement implicite répondant aux critères de simplicité et de réalité physique de la solution, nous l'utiliserons de préférence dans toute la suite de notre travail.

Il est cependant reconnu que le schéma de Crank - Nicolson est plus précis que le schéma implicite pour des petits pas de temps. Ce résultat est prévisible car pour de petits pas de temps les variations de  $\varphi$  en fonction du temps sont presque linéaires, tandis que le schéma implicite décrit des variations exponentielles.

Remarquons enfin que la stabilité " inconditionnelle " du schéma totalement implicite n'est assurée en toute rigueur que pour un système linéaire [9].

## II. Méthode de volumes finis pour les problèmes de diffusion en deux dimensions

La méthode de discrétisation utilisée en une dimension est étendue à celle de deux dimensions. Pour illustrer ceci, nous considérons l'équation de diffusion en deux dimensions :

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + S \quad (\text{II-33})$$

Le maillage est donné dans la figure II.6.

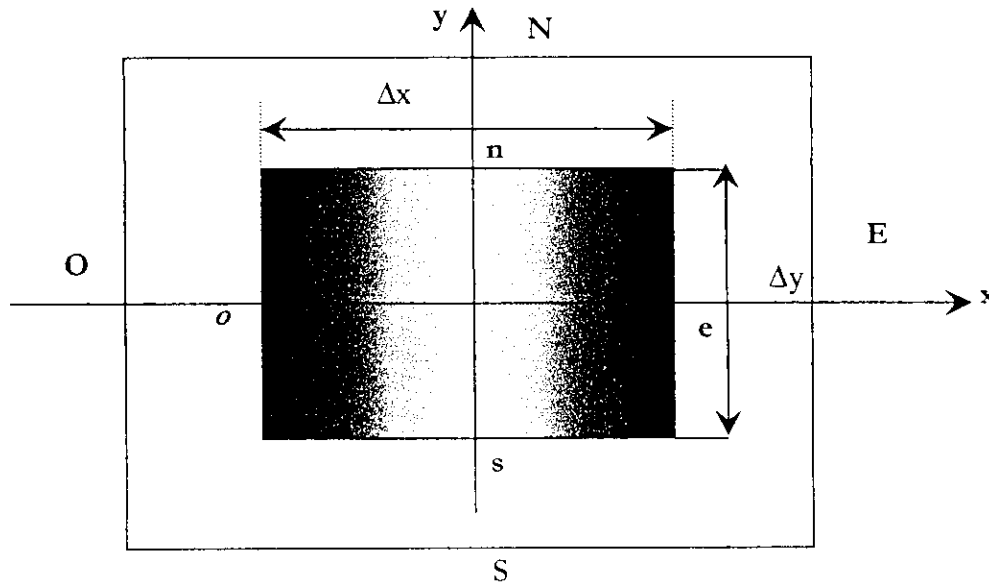


Figure II.6 : Maillage bidimensionnel

L'équation discrétisée est obtenue par intégration en espace et en temps :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dy dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dy dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} S dy dx dt \quad (II-34)$$

La discrétisation de l'équation de diffusion sur le volume de contrôle est :

$$\begin{aligned} [(\rho\varphi)_p - (\rho\varphi)_p^0] \Delta x \Delta y = & \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_o \right] \Delta y \Delta t \\ & + \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \Delta t + S \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (II-35)$$

En choisissant d'utiliser le schéma totalement implicite, on obtient :

$$\begin{aligned} a_p \varphi_p &= a_E \varphi_E + a_O \varphi_O + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b \\ \text{avec, } a_p &= a_E + a_O + a_N + a_S, \quad a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x_E} \Delta y, \quad a_O = \frac{\Gamma_o}{\Delta x_O} \Delta y, \quad a_S = \frac{\Gamma_s}{\Delta y_S} \Delta x, \\ a_N &= \frac{\Gamma_n}{\Delta y_N} \Delta x, \quad b = S_c \Delta x \Delta y - a_p^o \varphi_p^o, \quad a_p^o = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \end{aligned} \quad (II-36)$$

### III. Etude de problème de convection diffusion

Les effets de convection diffusion ont une influence importante, sur l'étude des écoulements à surface libre.

Dans cette partie, on suppose que le champ de la vitesse est constant, et on cherche à trouver un champ scalaire  $\varphi$  dont l'évolution en temps et en espace est régie par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \text{div}(\rho \phi \vec{V}) = \text{div}(\Gamma \overline{\text{grad } \phi}) + S \quad (\text{II-37})$$

Le processus de diffusion affecte la distribution du transport de la propriété  $\phi$  dans toutes les directions, alors que celui de la convection n'est influé que dans le sens de l'écoulement.

La superposition d'un problème convectif et d'un problème diffusif conduit donc à la simulation d'interactions entre un transport à la vitesse  $V$  et une diffusion du champ scalaire  $\phi$ .

Pour étudier le comportement de la solution de ce système, on doit faire une comparaison qui sera définie par l'expression qui représente le rapport entre le terme de convection et le terme de diffusion.

### 1. Etude d'un problème de convection diffusion pour un écoulement unidirectionnel

En absence du terme source, l'équation de convection diffusion unidimensionnelle pour un régime permanent est régit par le système d'équations suivant :

- Equation de quantité de mouvement

$$\frac{d}{dx}(\rho U \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \quad (\text{II-38})$$

- Equation de continuité

$$\frac{d}{dx}(\rho U) = 0 \quad (\text{II-39})$$

où,  $U$  : représente la vitesse dans la direction  $x$  et  $\Gamma$  : représente le coefficient de diffusion.

$$\text{avec, } \phi(0) = \phi_0 \quad (\text{II.40})$$

$$\phi(L) = \phi_L \quad (\text{II.41})$$

### 2. Solution exacte du problème de convection diffusion unidimensionnelle

La solution exacte d'une équation de convection diffusion sur le domaine  $[0, L]$  est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\phi(x) - \phi(0)}{\phi(L) - \phi(0)} = \frac{\exp\left(\text{Pe} \frac{x}{L}\right) - 1}{\exp(\text{Pe}) - 1} \quad (\text{II-42})$$

où,  $\text{Pe}$  : représente le nombre de Peclet, qui sera défini par l'expression suivante :

$$\text{Pe} = \frac{\rho U L}{\Gamma} \quad (\text{II.43})$$

Le résultat de cette interpolation dépend donc de la nature de l'écoulement caractérisé par le nombre de Peclet qui indique l'importance de la convection et de la diffusion.

En effet, si  $Pe = 0$ , on se trouve dans le cas de la diffusion pure. La solution de ce système est linéaire.

Si le nombre de Peclet est grand, on se trouve dans le cas où la convection est fortement dominante, l'interpolation se fait en adoptant la valeur de la cellule amont. (La valeur de  $\varphi$  en  $x=0$  sera la même dans tout le domaine, donc  $\varphi(x) = \varphi_0$ ).

Si le nombre de Peclet est faible, dans ce cas la diffusion est fortement dominante, c'est la valeur de la cellule aval qu'est adoptée. (On prend la valeur de  $\varphi$  en  $x=L$  dans tout le domaine d'étude, donc  $\varphi(x) = \varphi_L$ ).

Ces résultats peuvent être résumés dans la figure (II.7)

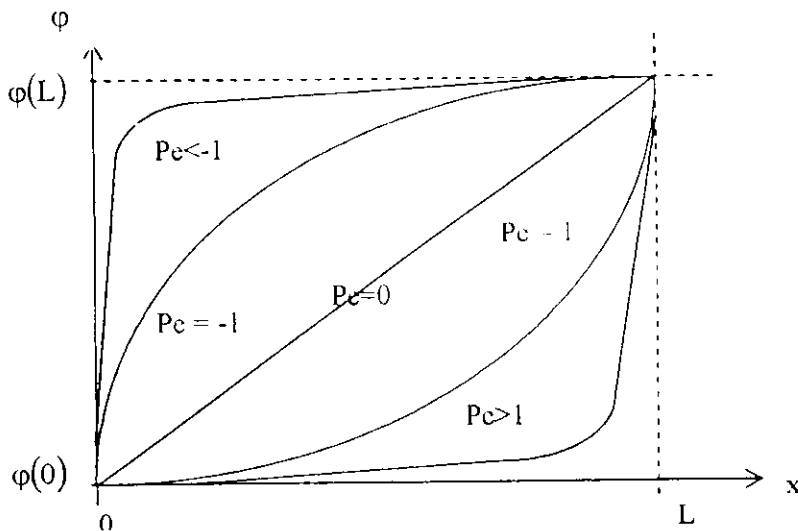


Figure II.7 : Interpolation de  $\varphi$  sur  $[0, L]$  selon la valeur du nombre de Peclet

### 3. Application de la méthode des volumes finis sur l'équation de convection diffusion unidimensionnelle

- *Discretisation spatiale*

On définit un domaine de calcul qui sera représenté par une grille, le volume de contrôle est délimité par les faces E dans la direction des X croissants et O dans la direction des X décroissants.

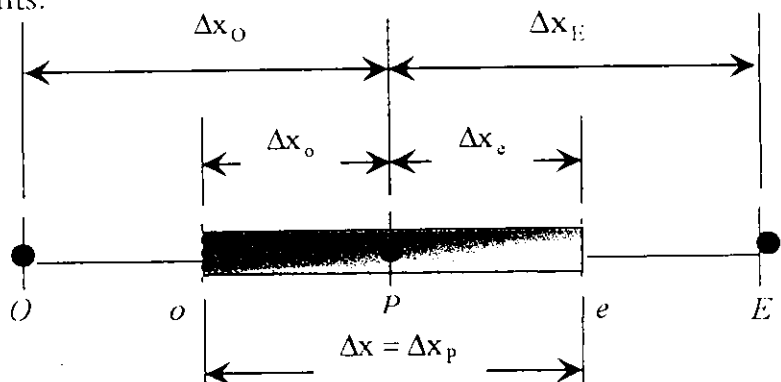


Figure II.8 : Discretisation unidirectionnelle

L'intégration de l'équation de convection diffusion (II-37) sur le volume de contrôle représenté par la figure (II-8) est donnée par l'expression suivante :

$$(\rho AU\phi)_e - (\rho AU\phi)_o = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_o \quad (\text{II.44})$$

et l'équation de continuité (II-39) sera défini par :

$$(\rho UA)_e - (\rho UA)_o = 0 \text{ avec, } \Lambda_e = \Lambda_o = A \quad (\text{II.45})$$

On ne peut pas résoudre cette équation directement, car elle est fonction des termes de  $\phi_e$  et  $\phi_o$  qui ne sont pas définis.

Donc, il est nécessaire d'avoir recours à une interpolation pour se ramener à une équation où la seule valeur de  $\phi$  correspond au centre du volume de contrôle qui intervient.

Il existe plusieurs schémas d'interpolation de précision variable.

#### IV. Schémas d'interpolation

On peut présenter les différents schémas d'interpolation par la figure suivante :

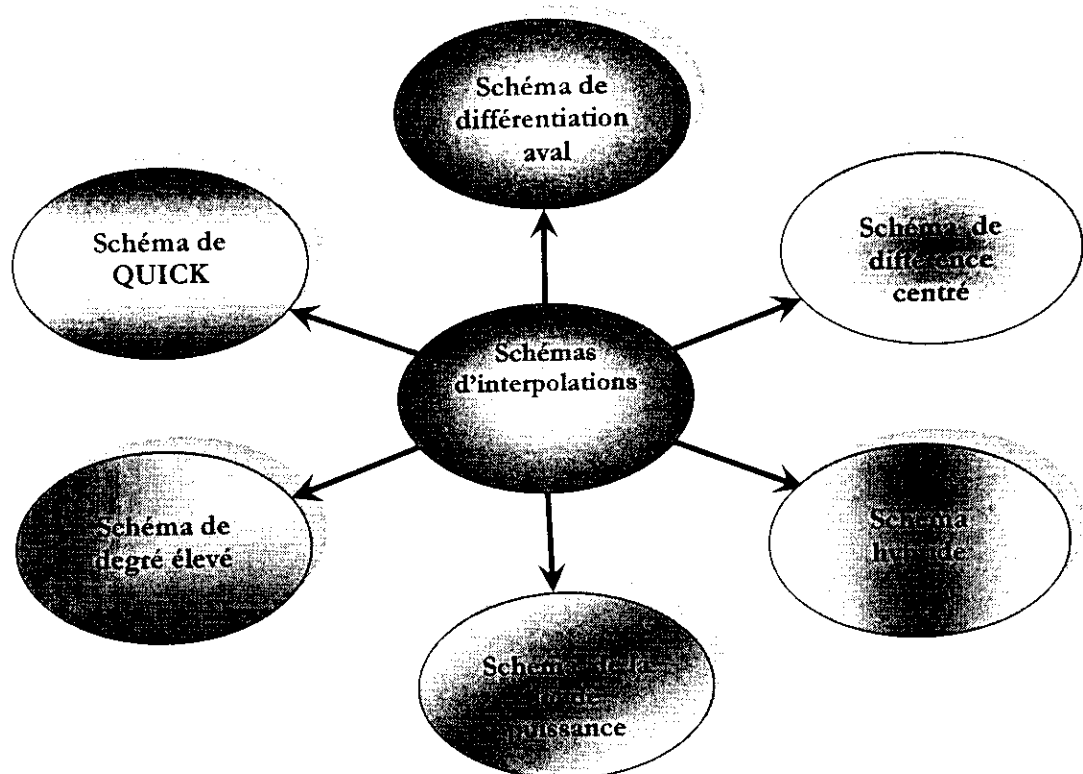


Figure II.9 : Schémas d'interpolations

##### 1. Propriété des schémas de discrétisation

Les propriétés des schémas de discrétisation les plus importantes sont liées à [12], [13] :

- ❖ La conservation ;

- ❖ La frontière ;
- ❖ Au transport].

▪ **Propriété de conservation**

L'intégration de l'équation de convection diffusion a donné des équations discrétisées conservatrices faisant intervenir le flux de la propriété  $\phi$  à travers les faces de volume de contrôle.

Pour assurer la conservation de  $\phi$  pour toute la solution du domaine, le flux sortant d'un volume de contrôle doit être égal à celui rentrant au volume de contrôle à travers la même face.

▪ **Propriété de frontière**

Pour résoudre des problèmes correspondant à des équations complexes, on doit utiliser la technique qui commence par le processus de résolution à partir d'une distribution supposée ou devinée de la variable  $\phi$  puis exécuter des ajouts successifs jusqu'à ce que la solution converge.

Scarborough a montré pour qu'une méthode itérative converge, il est nécessaire que la relation suivante soit vérifiée.

$$\frac{\sum |a_{\text{voi}}|}{|a_P - S_P|} \begin{cases} \leq 1 & \text{pour tous les noeuds} \\ < 1 & \text{pour au moins un noeud} \end{cases} \quad (\text{II-46})$$

Si le schéma satisfait ce critère alors la matrice des coefficients résultante est à diagonale dominante.

Pour cette raison, le dénominateur de (II-46) doit être suffisamment important ou encore la linéarisation des termes de source doit fournir un terme de source  $S_P$  toujours négatif.

La dominance diagonale est un critère utiliser pour satisfaire la propriété de frontière.

De plus, tous les coefficients des équations discrétisées doivent avoir le même signe (positif).

Ce qui veut dire physiquement qu'une augmentation de la variable  $\phi$  à un nœud donné doit résulter de l'augmentation de  $\phi$  en tout nœud voisin à ce dernier.

◆ **Propriété de transport**

Cette propriété nous renseigne sur l'effet de la direction de l'écoulement et de la tendance relative de la convection par rapport à la diffusion.

## 2. Schéma aux différences centrées

Ce schéma propose l'hypothèse que la variation de  $\phi$  est linéaire d'un nœud à son voisin immédiat, en considérant que les interfaces des volumes de contrôles sont à mi distance entre les nœuds.

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_E) \quad (\text{II-47})$$



$$\varphi_o = \frac{1}{2}(\varphi_P + \varphi_O) \quad (\text{II-48})$$

$$\text{Et } \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)_o = \frac{\varphi_P - \varphi_O}{(\Delta x)_o} \quad (\text{II-49})$$

$$\left( \frac{d\varphi}{dx} \right)_e = \frac{\varphi_E - \varphi_P}{(\Delta x)_e} \quad (\text{II-50})$$

Si on injecte les relations (II-47), (II-48), (II-49) et (II-50) dans l'équation (II-44), on a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\rho U)_e \varphi_P + \frac{1}{2}(\rho U)_e \varphi_E - \frac{1}{2}(\rho U)_o \varphi_P - \frac{1}{2}(\rho U)_o \varphi_O &= \frac{\Gamma_e}{\Delta x_E} \varphi_E - \frac{\Gamma_e}{\Delta x_E} \varphi_P \\ &- \frac{\Gamma_o}{\Delta x_O} \varphi_P + \frac{\Gamma_o}{\Delta x_O} \varphi_O \end{aligned} \quad (\text{II-51})$$

Par approximation, on définit les variables F et D représentant respectivement le flux massique convectif par unité de surface et la conductance de la diffusion :

$$F = \rho U \quad (\text{II-52})$$

$$D = \frac{\Gamma}{\Delta x} \quad (\text{II-53})$$

En remplaçant les expressions (II-52) et (II-53) dans la relation (II-51), et après réarrangement de cette équation on trouve :

$$\left[ \left( D_e + \frac{F_e}{2} \right) + \left( D_o - \frac{F_o}{2} \right) \right] \varphi_P = \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \varphi_E + \left( D_o + \frac{F_o}{2} \right) \varphi_O \quad (\text{II-54})$$

L'intégration de l'équation de continuité sur le volume de contrôle est :

$$F_e - F_o = 0 \quad (\text{II-55})$$

Si on injecte et en soustrayant l'équation de continuité (II-55) du membre de droite de l'équation (II-54), on obtient :

$$\left[ \left( D_e + \frac{F_e}{2} \right) + \left( D_o - \frac{F_o}{2} \right) + (F_e - F_o) - (F_e - F_o) \right] \varphi_P = \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \varphi_E + \left( D_o + \frac{F_o}{2} \right) \varphi_O \quad (\text{II-56})$$

En arrangeant l'équation (II-56), il en résulte :

$$\left[ \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) + \left( D_o + \frac{F_o}{2} \right) + (F_e - F_o) \right] \varphi_P = \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \varphi_E + \left( D_o + \frac{F_o}{2} \right) \varphi_O \quad (\text{II-57})$$

On définit les coefficients de l'équation de convection diffusion par les relations suivantes :

$a_o$	$a_e$	$a_p$
$D_o + \frac{F_o}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_o + a_e + (F_e - F_o)$

Tableau 3

Donc l'équation (II-57) se transforme à :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_O \Phi_O \quad (\text{II-58})$$

• Evaluation du schéma aux différences centrées pour les problèmes de convection diffusion

▪ Propriété de conservation

Puisque ce schéma utilise des expressions consistantes pour évaluer les flux de convection et de diffusion, donc on peut dire que ce schéma est conservatif.

▪ Propriété des frontières

On remplace les paramètres de l'équation de convection diffusion par leurs relations dans l'expression du critère de frontière, on trouve :

$$\frac{\sum |a_{VOI}|}{|a_P - S_P|} = \frac{|a_O + a_E|}{|a_E + a_O + 0|} = 1 \quad (\text{II-59})$$

Ce qui implique que les coefficients de ce schéma satisfont le critère de Scarborough.

Les coefficients  $a_E$  et  $a_O$  peuvent devenir négatifs selon le signe du nombre de Peclet.

En effets, si  $Pe > 2$ , la convection domine,  $a_E$  sera négatif.

Si  $Pe < -2$ ,  $a_O$  sera négatif.

Ces résultats sont en contradiction avec la règle de positivité des coefficients  $a_P$ ,  $a_O$  et  $a_E$ .

▪ Propriété de transport

Le schéma de différenciation centrale introduit l'influence au nœud P de la direction de tous les voisins pour le calcul des flux de convection et celui de diffusion.

Ce schéma ne reconnaît pas la direction de l'écoulement ni la distance relative de la convection par rapport à la diffusion. Il ne possède pas la propriété de transport.

▪ Propriété de précision

Puisque le critère de frontière exige que les coefficients de l'équation de convection diffusion doivent être positifs.

Donc la stabilité et la précision de ce schéma ne seront pas vérifiées.

Pour satisfaire ces conditions nous avons deux possibilités :

- Soit diminuer la vitesse ce qui veut dire favoriser la diminution de la diffusion et aussi diminuer le nombre de Reynolds.
- Diminuer le pas de la grille ou encore affiner davantage le maillage.

Avantage et inconvénient de ce schéma

Les avantages et les inconvénients de ce schéma sont représentés dans le tableau récapitulatif suivant :

	<i>Avantage</i>	<i>Inconvénients</i>
conservation	conservatif	***
transport	***	Ne possède pas la propriété de transport.
Critère de frontière	***	N'est pas vérifié
Précision	***	Les résultats ne sont pas précis.
Cas réels	***	On ne peut pas utiliser ce schéma pour le calcul des écoulements en général.

Tableau 4

En résumé, le schéma centré, résultant du choix d'une loi de variation locale de type linéaire, conduit à des oscillations lorsque le nombre de Peclet local devient en valeur absolue supérieur à 2.

Donc, ce schéma ne donne pas de bons résultats pour le calcul des écoulements en général.

### 3. Schéma de différenciation aval

Ce schéma prend en compte le sens de l'écoulement lors de la détermination des valeurs aux faces d'un volume de contrôle.

Le principe de ce schéma exige que la valeur de  $\phi$  aux faces d'un volume de contrôle soit prise égale à celle de la valeur située à l'aval du nœud considéré.

Pour discrétiser les termes convectifs et les termes diffusifs, on doit choisir deux lois de variation locale.

Le choix de ces lois se fait en découplant le phénomène diffusif de celui convectif. (Si le transport est purement diffusif, on doit s'intéresser à une loi de variation locale du type linéaire par morceau).

Si on prend en considération les deux équations  $F_e = (\rho U)_e$  et  $F_o = (\rho U)_o$ , on se retrouve dans deux cas :

#### Cas N°1

Si l'écoulement est dans le sens positif,  $U_o > 0, (F_o > 0)$  et  $U_e > 0, (F_e > 0)$ , on a :

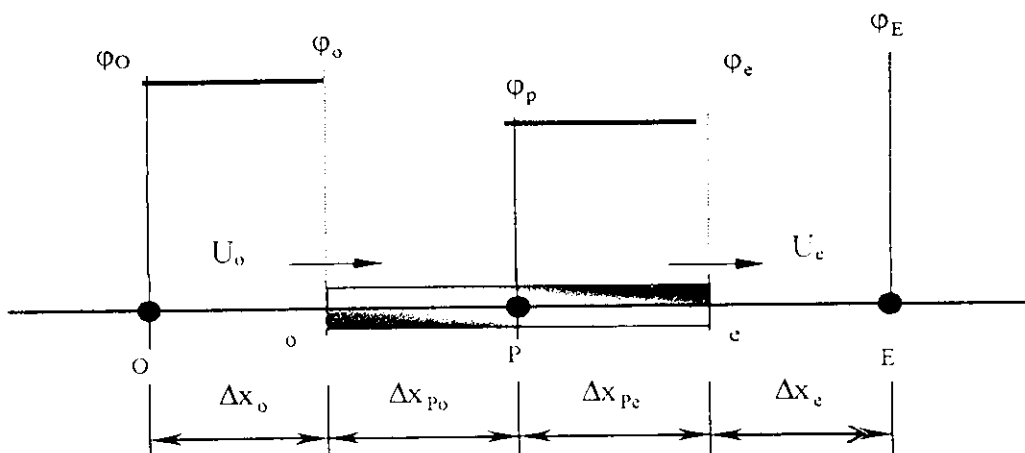


Figure II.11 : Ecoulement dans le sens positif

$$\varphi_O = \varphi_o \tag{II-60}$$

$$\text{et } \varphi_e = \varphi_P \tag{II-61}$$

Si on injecte les deux expressions (II-52) et (II-53) dans l'équation (II-44), on obtient :

$$F_e \varphi_e - F_o \varphi_o = D_e (\varphi_E - \varphi_P) - D_o (\varphi_P - \varphi_O) \tag{II-62}$$

Par conséquent, en remplaçant les deux relations (II-60) et (II-61) dans l'équation (II-62), on trouve :

$$F_e \varphi_P - F_o \varphi_O = D_e (\varphi_E - \varphi_P) - D_o (\varphi_P - \varphi_O) \tag{II-63}$$

Après réarrangement de cette équation, on aboutit à :

$$[(F_o + D_o) + D_e + (F_e - F_o)] \varphi_P = (F_o + D_o) \varphi_O + D_e \varphi_E \tag{II-64}$$

Cas N°2

Quand l'écoulement est dans le sens négatif, on a :

$$U_o < 0, U_e < 0, (F_o < 0, F_e < 0)$$

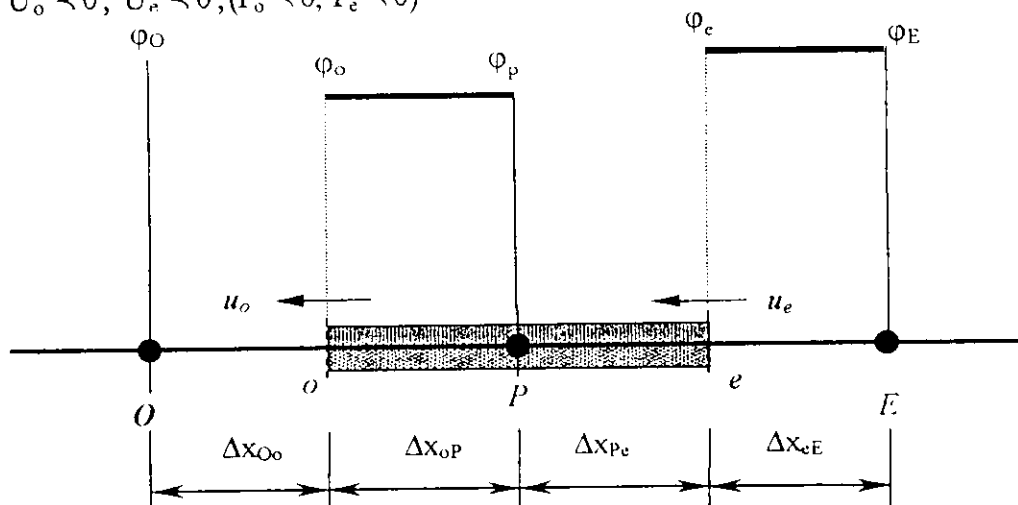


Figure II.12 : Ecoulement dans le sens négatif

Le schéma de différenciation aval prend la forme :

$$\varphi_O = \varphi_P \tag{II-65}$$

et  $\varphi_e = \varphi_E$  (II-66)

En remplaçant  $\varphi_o$  par  $\varphi_P$  et  $\varphi_e$  par  $\varphi_E$  dans l'équation (II-61), on obtient :

$$F_e \varphi_E - F_o \varphi_P = D_e (\varphi_E - \varphi_P) - D_o (\varphi_P - \varphi_O) \tag{II-67}$$

En arrangement cette équation, on aboutit à :

$$[(D_e - F_e) + D_o + (F_e - F_o)] \varphi_P = (D_e - F_e) \varphi_e + D_o \varphi_O \tag{II-68}$$

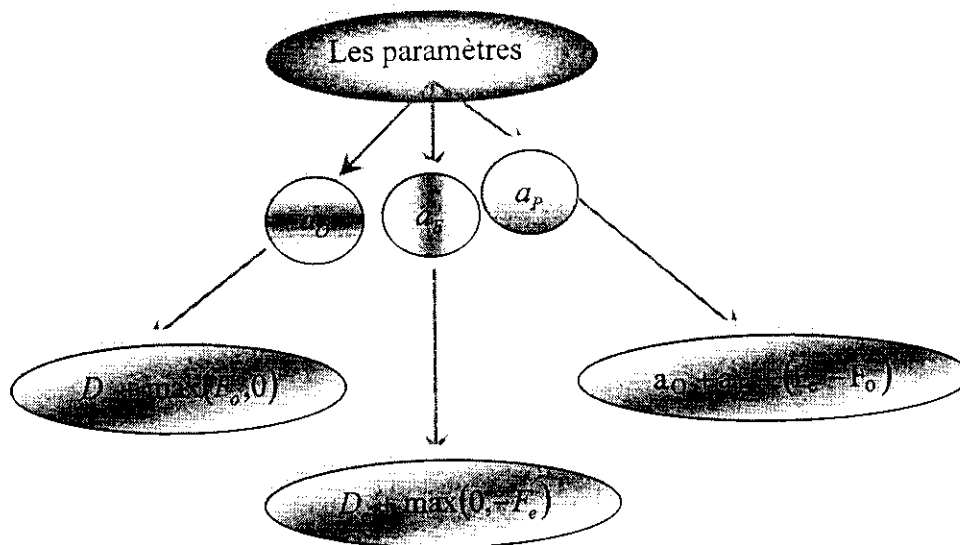
Par conséquent, les deux équations (II-64) et (II-68) peuvent être écrites de la forme générale, qui sera présentée par l'expression (II-58) :

Les expressions  $a_E, a_O, a_P$  sont présentées dans le tableau récapitulatif qui suit :

		$a_O$	$a_E$	$a_P$
Cas N°1	$F_o > 0 \quad F_e > 0$	$D_o + F_o$	$D_e$	$a_O + a_E + (F_e - F_o)$
Cas N°2	$F_o < 0 \quad F_e < 0$	$D_o$	$D_e - F_e$	$a_O + a_E + (F_e - F_o)$

Tableau 5

Une autre écriture plus simple donne les expressions de  $a_o$  et  $a_e$  dans les deux cas qu'on a cité précédemment. Cette écriture est illustrée par le schéma suivant :



Sachant que  $F_e - F_o = 0$ , donc :

$$a_P = a_O + a_E \tag{II-69}$$

• Evaluation des schémas de différenciation aval pour les problèmes de convection diffusion

▪ Propriété de conservation

Ce schéma est conservateur, puisque il utilise des expressions consistantes pour évaluer le flux de convection.

- Propriété de frontière

D'après le tableau précédent et l'équation (II-69), on voit que tous les coefficients de l'équation de convection diffusion sont positifs, donc la stabilité des itérations est bien vérifiée.

Par conséquent, tous les coefficients du schéma de différentiation aval, satisfont le critère de Scarborough.

Ce critère nous permet de dire que la matrice est à diagonale dominante, ce qui nous permet d'éviter d'avoir des oscillations.

- Propriété de transport

L'un des avantages de ce schéma, c'est de vérifier la propriété de transport, puisqu'il permet de suivre la direction de l'écoulement.

- Précision

Le schéma de différentiation aval est basé sur les résultats d'arrière, ce qui ne permet pas de donner des résultats plus efficaces.

Avantage et inconvénient de ce schéma

L'étude des différences principales de ce schéma nous permet de détecter les avantages et les inconvénients du schéma de différentiation aval.

	Avantage	Inconvénient
conservation	Conservatrice	***
Frontière	Vérifie le critère de frontières	***
Transport	Permet de suivre le sens de l'écoulement	***
Précision		Il produit des résultats erronés pour un écoulement non aligné de la grille, il induit de faux résultats de diffusion.

Tableau 6

#### 4. Schéma hybride

Ce schéma est proposé par Spalding, il est basé sur la combinaison des deux schémas, différentiation centrale et différentiation aval p [12], [13].

Le schéma de différentiation centrale est employé lorsque le nombre de Peclet est inférieur à 2, alors que le schéma de différentiation aval est employé dans le cas où le nombre de Peclet est supérieur à 2.

On définit dans cette partie le nombre de Peclet local par la relation suivante :

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{(\rho U)}{\left(\frac{\Gamma}{\Delta x}\right)} \quad (\text{II-70})$$

Par conséquent, on a deux cas à respecter :

- Cas n°1 :  $Pe < 2$

Les coefficients  $a_E, a_O, a_P$  sont définis par les relations suivantes :

$$a_O = D_o + \frac{F_o}{2} \quad (\text{II-71})$$

$$a_E = D_e + \frac{F_e}{2} \quad (\text{II-72})$$

$$a_P = a_O + a_E + (F_e - F_o) \quad (\text{II-73})$$

- Cas n°2 :  $Pe > 2$

Les paramètres  $a_E, a_O, a_P$  sont représentés par les expressions suivantes :

$$a_O = D_o + \max(F_o, 0) \quad (\text{II-74})$$

$$a_E = D_e + \max(0, -F_o) \quad (\text{II-75})$$

Par conséquent, ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessus :

$a_E$	$a_O$
$\max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right]$	$\max\left[F_o, \left(D_o + \frac{F_o}{2}\right), 0\right]$

Tableau 7

On constate que les deux cas nous permettent d'aboutir à l'équation (II-58)

- **Evaluation des schémas de différentiation hybride pour les problèmes de Convection Diffusion**

Le schéma de différentiation Hybride utilise les propriétés avantageuses des schémas de différentiation aval et différentiation centré.

Le principe de ce schéma bascule entre le schéma différentiation centré et le schéma différentiation aval. Quand le schéma de différentiation centrée produit des résultats erronés pour des nombres de Peclet élevés il passe au schéma de différentiation aval.

- Conservation

D'après l'analyse des études qui ont été faites, on a constaté que ce schéma est conservateur.

- Frontière

Les coefficients internes de l'équation de convection diffusion sont toujours positifs, ce qui veut dire que la matrice est à dominance diagonale.

- Transport

On constate d'après le schéma différentiation aval que le schéma hybride satisfait les critères de transport pour des grandes valeurs du nombre de Peclet.

▪ Précision

Il donne de bons résultats qui sont semblables à la réalité et avec une très bonne précision

Avantages et inconvénient de ce schéma

Soit le tableau récapitulatif qui résume les avantages et les inconvénients de ce schéma :

	Avantage	Inconvénient
Conservation	Conservatrice	***
Frontière	Le critère de frontière est vérifié	***
Transport	Le critère de frontière est vérifiée pour $Pe \gg 1$	***
Précision	Il donne des résultats conformes à la réalité et avec une bonne précision	***

Tableau 8

### 5. Schéma de la loi de puissance

C'est une version approchée du schéma exponentiel, il est recommandé uniquement dans le cas d'un problème d'écoulement unidimensionnel.

Pour le cas 1D, ce schéma donne des résultats précis et meilleurs que ceux du schéma hybride.

Les coefficients  $a_E, a_O, a_P$  sont approchés par une fonction polynomiale de  $Pe$ , par morceau.

- Quand le nombre de Peclet est supérieur à 10, la diffusion est prise égale à zéro.
- Si  $0 < Pe < 10$ , le flux est évalué en utilisant une expression polynomiale.

Pour le coefficient  $a_E$ , on définit les relations suivantes :

- $Pe < -10, \frac{a_E}{D_E} = -Pe$
- $0 < Pe < 10, \frac{a_E}{D_E} = (1 + 0,5 Pe)^5 - Pe$
- $Pe > 10, \frac{a_E}{D_E} = 0$

Les coefficients de l'équation discrétisée pour la convection et diffusion en une dimension sont donnés dans le tableau ci-dessous :

$a_O$	$D_o \max(0, (1 - 0.1 Pe_o )^5 + \max(F_o, 0))$
$a_E$	$D_e \max(0, (1 - 0.1 Pe_e )^5 + \max(-F_e, 0))$
$a_P$	$a_O + a_E + (F_c - F_o)$

Tableau 9



Avantages et inconvénient de schéma de la loi de puissance

Les avantages et les inconvénients de ce schéma sont résumés dans le tableau qui suit :

	Avantages	Inconvénient
Précision	Il produit des résultats plus stables pour le cas 1D	Il n'est pas utilisé pour le cas 2D et 3D.

Tableau 10)

**6. Schémas de degré élevé pour les problèmes de convection – diffusion**

Comme on a vu précédemment, la différence qui existe entre les différents schémas présentés est le degré de précision et de la minimisation des erreurs.

Donc pour cette raison on a pensé à utiliser des discrétisation des degrés élevés.

Le schéma de degré élevé implique plus de points voisins et la réduction de l'erreur de discrétisation par l'apport d'une plus large influence.

De plus, les formulations qui ne tiennent pas compte de la directionnelle des écoulements ne sont pas demandées en raison de leurs instabilités.

**a. Différenciation quadratique aval : QUICK schéma**

L'interpolation quadratique amont à convection cinématique utilise trois points à poids pour évaluer  $\phi$  aux faces d'une cellule. La valeur de  $\phi$  est obtenue par une fonction quadratique passant par deux nœuds (en chaque face) et un nœud du côté amont.

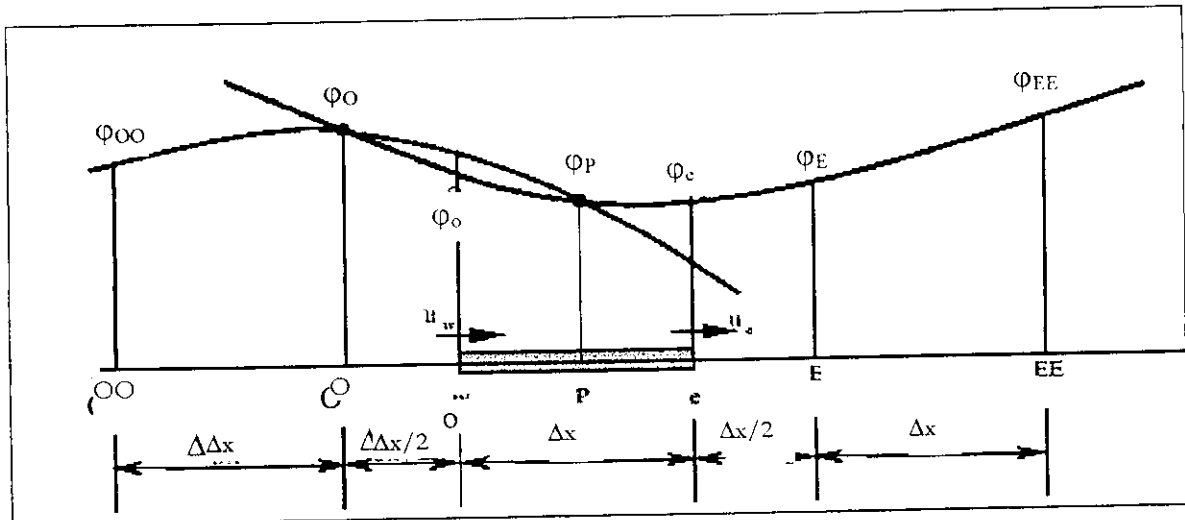


Figure II.13 : Cellules de calcul pour le schéma Quick

On a deux cas à considérer :

- Si  $U_o > 0$  et  $U_e > 0$  : Une fonction quadratique passant par OO, O et P est utilisée pour calculer  $\phi_o$  et une autre fonction passant par O, P et E est utilisée pour calculer  $\phi_e$ .

- Lorsque  $U_o < 0$  et  $U_e < 0$ , les valeurs de  $\phi$  en O, P et E sont utilisées pour le calcul de  $\phi_o$  et les valeurs de  $\phi$  en P, E et EE sont utilisées pour le calcul de  $\phi_e$ .
- Pour  $U_o > 0$ , les nœuds enveloppant la face ouest o sont O et P et le nœud amont est OO, on a l'expression suivante :

$$\phi_o = \frac{6}{8}\phi_O + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{OO} \tag{II-76}$$

- Pour  $U_e > 0$ , les nœuds enveloppant la face e sont P et E et le nœud amont est O ; on a la relation qui lie O, P, E :

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_O \tag{II-77}$$

Pour une grille uniforme ce phénomène donne une expression qui sera la même que pour la différenciation central.

Si  $F_o > 0$  et  $F_e > 0$  et si on utilise les équations (II-76, II-77) pour les termes convectifs et la différenciation centrale pour les termes de diffusion, alors l'équation correspondant au problème de convection- diffusion en une dimension s'écrit comme suite :

$$\left[ F_e \left( \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_O \right) - F_o \left( \frac{6}{8}\phi_O + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{OO} \right) \right] = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_o(\phi_P - \phi_O) \tag{II-78}$$

Après réarrangement de cette équation, on trouve :

$$a_P \phi_P = a_O \phi_O + a_E \phi_E + a_{OO} \phi_{OO} \tag{II-79}$$

où :

$a_O$	$a_E$	$a_{OO}$	$a_P$
$D_o + \frac{6}{8}F_o + \frac{1}{8}F_e$	$D_e - \frac{3}{8}F_e$	$-\frac{1}{8}F_o$	$a_O + a_E + a_{OO} + (F_e - F_o)$

Tableau 11

Si  $F_o < 0$  et  $F_e < 0$ , les flux traversant les faces Ouest et Est sont :

$$\phi_o = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_O - \frac{1}{8}\phi_E \tag{II-80}$$

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_{EE} \tag{II-81}$$

Substituons ces deux équations, pour les termes de convection, et celles de la différenciation centrale, pour les termes de diffusion, dans l'équation (II-62); après réarrangement de cette équation, on obtient la même expression que l'équation (II-79) sachant que les termes de cette équation sont illustrés dans le tableau qui suit :

$a_O$	$a_E$	$a_{OO}$	$a_P$
$D_o + \frac{3}{8}F_o$	$D_e - \frac{6}{8}F_e - \frac{1}{8}F_o$	$\frac{1}{8}F_e$	$a_O + a_E + a_{EE} + (F_e - F_o)$

Tableau 12

Si on combine les deux équations des coefficients on obtient l'expression générale valable pour une direction d'écoulement positive ou négative :

$$a_P \varphi_P = a_O \varphi_O + a_E \varphi_E + a_{OO} \varphi_{OO} + a_{EE} \varphi_{EE} \quad (\text{II-82})$$

Les paramètres de cette équation sont donnés par les relations suivantes :

$a_P$	$a_O + a_E + a_{OO} + a_{EE} + (F_e - F_o)$
$a_O$	$D_o + \frac{6}{8} \alpha_o F_o + \frac{1}{8} \alpha_e F_e + \frac{3}{8} (1 - \alpha_o) F_o$
$a_{OO}$	$-\frac{1}{8} \alpha_o F_o$
$a_E$	$D_e - \frac{3}{8} \alpha_e F_e - \frac{6}{8} (1 - \alpha_e) F_e - \frac{1}{8} (1 - \alpha_o) F_o$
$a_{EE}$	$\frac{1}{8} (1 - \alpha_e) F_e$

Tableau 13

avec,

$$\alpha_o = 1 \text{ pour } F_o > 0 \text{ et } \alpha_e = 1 \text{ pour } F_e > 0$$

$$\alpha_o = 0 \text{ pour } F_o < 0 \text{ et } \alpha_e = 0 \text{ pour } F_e < 0$$

### **b. Évaluation des Quick schémas pour les problèmes de Convection Diffusion**

#### ▪ Propriété de conservation

Ce schéma utilise des profils quadratiques consistants.

Par conséquent, ce schéma possède le critère de conservation.

#### ▪ Propriété de transport

Ce schéma est basé sur la relation qui lie les deux nœuds en amont et une valeur en aval. D'où la propriété de transport est bien vérifiée.

#### ▪ Propriété de frontière

Le champ d'écoulement satisfait l'équation de continuité, ce qui implique que le coefficient  $a_P$  est égal à la somme de tous les coefficients avoisinant le nœud central. Par conséquent, le Quick schéma possède la propriété de frontière.

Les coefficients principaux  $a_E$  et  $a_O$  ne sont pas garantis être positifs et les coefficients  $a_{EE}$  et  $a_{OO}$  sont négatifs.

➤ Pour des faibles nombres de Peclet,  $\left( Pe_e = \frac{F_e}{D_e} > \frac{8}{3} \right)$ , et si  $U_o > 0$  et  $U_e > 0$ , le

coefficient Est devient négatif.

Ceci peut donner lieu, pour certaines conditions d'écoulements, à des problèmes de stabilité et frontière. Idem pour le coefficient ouest dans le cas où l'écoulement est dans le sens négatif. D'où ce schéma est conditionnel.

D'autres parts, les équations discrétisées font intervenir non seulement les nœuds mitoyens et les nœuds un peu plus loin ce qui donne une matrice tridiagonale qui ne se résout pas directement.

### c. Stabilité du Quick schéma

Pour enlever le problème de stabilité du Quick schéma différentes formulations ont été proposées.

Toutes ces formulations sont proposées pour essayer de mettre les coefficients négatifs dans le terme de source pour ne retenir que les coefficients positifs.

Hayase et ses collaborateurs ont généralisé l'approche pour le réarrangement du Quick schéma et ont tiré une variante stable et qui converge rapidement [13]. Le Quick schéma de Hayase et ses collaborateurs peut être résumé comme suit :

$$\varphi_o = \varphi_o + \frac{1}{8}[3\varphi_P - 2\varphi_o - 3\varphi_{oo}] \text{ pour } F_o > 0 \quad (\text{II-83})$$

$$\varphi_e = \varphi_P + \frac{1}{8}[3\varphi_E - 2\varphi_P - 3\varphi_o] \text{ pour } F_e > 0 \quad (\text{II-84})$$

$$\varphi_o = \varphi_P + \frac{1}{8}[3\varphi_P - 2\varphi_E - 3\varphi_{EE}] \text{ pour } F_o < 0 \quad (\text{II-85})$$

$$\varphi_e = \varphi_E + \frac{1}{8}[3\varphi_P - 2\varphi_E - 3\varphi_{EE}] \text{ pour } F_e < 0 \quad (\text{II-86})$$

L'équation discrétisée prend la forme suivante :

$$a_P \varphi_P = a_O \varphi_O + a_E \varphi_E + S \quad (\text{II-87})$$

Les paramètres de cette équation sont présentés dans le tableau suivant :

$a_P$	$a_O + a_E + (F_e - F_o)$
$a_E$	$D_e - (1 - \alpha_e)F_e$
$a_O$	$D_o + \alpha_o F_o$
$\bar{S}$	$\frac{1}{8}[3\varphi_P - 2\varphi_o - \varphi_{oo}]\alpha_o F_o + \frac{1}{8}[\varphi_o + 2\varphi_P - 3\varphi_E]\alpha_e F_e + \frac{1}{8}[3\varphi_o - 2\varphi_P - \varphi_E](1 - \alpha_o)F_o$ $+ \frac{1}{8}[2\varphi_E + \varphi_{EE} - 3\varphi_P](1 - \alpha_e)F_e$

Tableau 14

avec,  $\alpha_o = 1$  pour  $F_o > 0$  et  $\alpha_e = 1$  pour  $F_e > 0$   
 $\alpha_o = 0$  pour  $F_o < 0$  et  $\alpha_e = 0$  pour  $F_e < 0$

L'avantage de cette approche réside dans le fait que les coefficients sont toujours positifs et satisfont les critères de Conservation, Frontière et de Transport.

## V. Maillage décalé

Dans les équations de quantité de mouvement les composantes de la vitesse (termes de convection) jouent le rôle d'une quantité transportable.

Par contre, la pression qui intervient sous la forme d'un terme source de types gradient ne joue pas le rôle d'une quantité transportable, donc il n'y a pas d'équation sur la pression.

D'autre part, dans un problème d'écoulement unidimensionnel d'un fluide visqueux, incompressible, et en absence de forces de volumes, l'incrément de pression  $\Delta P$  est proportionnel à  $\rho U^2$ . Donc il n'existe pas une relation directe entre la pression  $P$  et la vitesse  $U$  mais entre  $U$  et  $\Delta P$ .

La discrétisation d'une équation de convection diffusion sur le volume de contrôle par la méthode des volumes finis fait intervenir les valeurs des vitesses aux interfaces des volumes ( $U_e, U_o, V_n, V_s$ ).

On doit donc calculer ces vitesses directement sur les interfaces (sans avoir à effectuer d'interpolation).

On utilise dans le cas de la discrétisation de l'équation de continuité et de gradient de pression une interpolation linéaire.

Supposons que la répartition de pression et de vitesse est uniforme, donc cette interpolation peut induire des erreurs importantes.

Donc, on doit localiser chaque composante de la vitesse entre deux pressions.

Par conséquent, on utilise un maillage décalé « staggered grid ».

Deux grilles décalées l'un vers la droite et l'autre vers le haut respectivement sont utilisées pour le calcul des vitesses horizontale et verticale.

Les équations de quantité de mouvement suivant la direction  $x$  et  $y$  sont intégrées sur le volumes de contrôle entourant la vitesse suivant  $x$  et  $y$  ( $U, V$ ) aux points de localisation  $o$  et  $e$  pour  $U$  et  $n$  et  $s$  pour  $V$ .

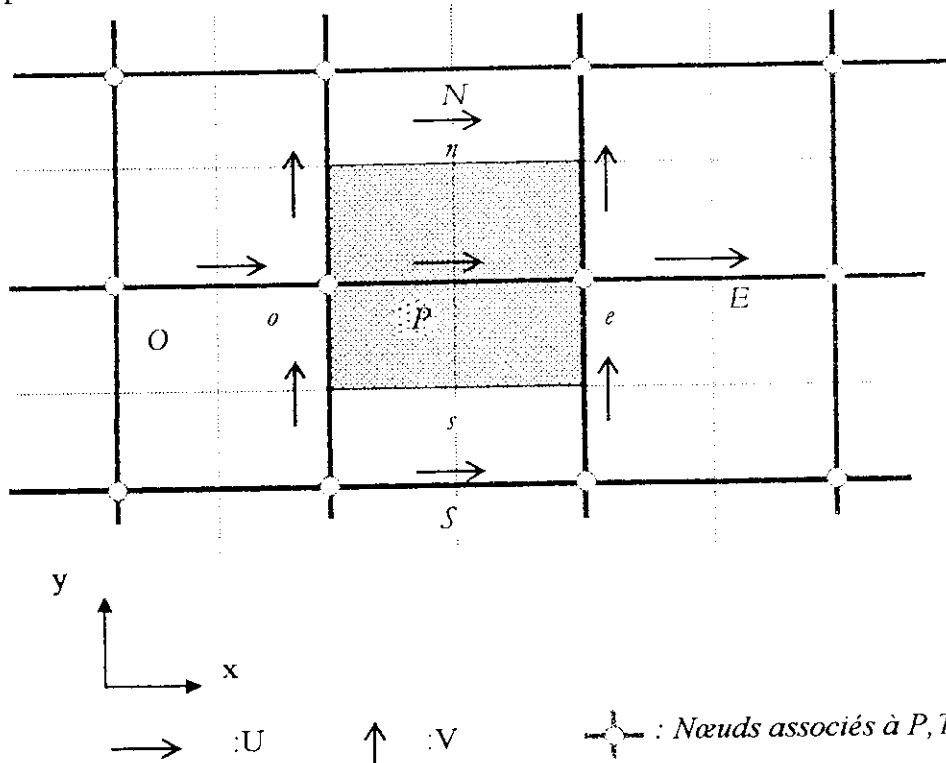


Figure II.13 : Volume de contrôle utilisé pour la discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement dans la direction  $x$

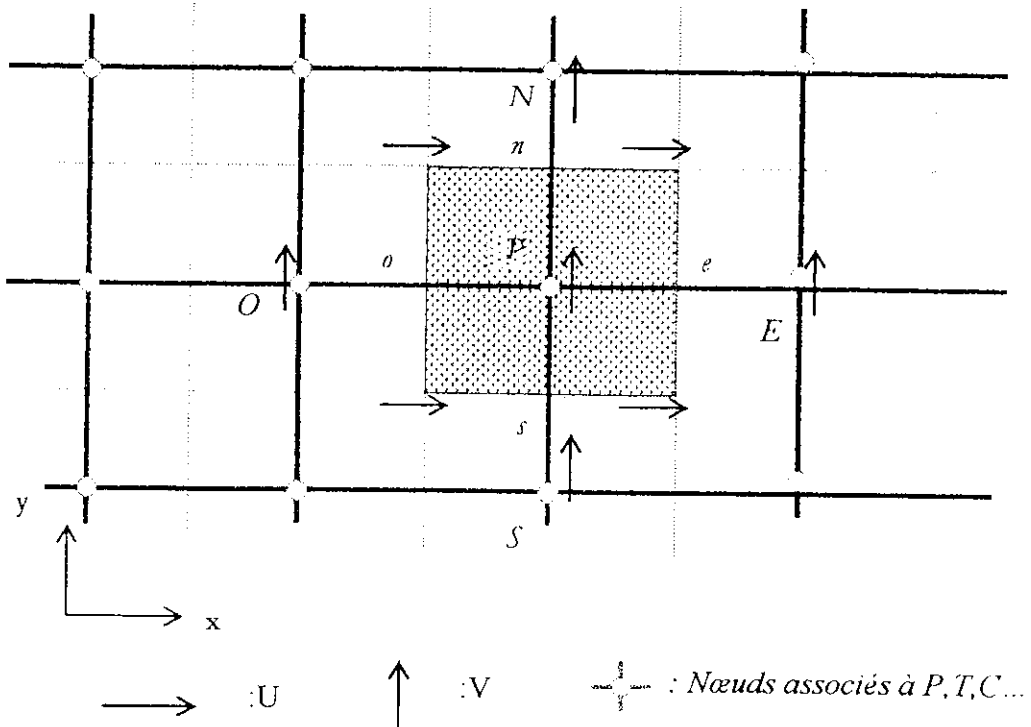


Figure II. 14 : Volume de contrôle utilisé pour la discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement dans la direction  $y$

L'équation de continuité est intégrée sur le volume normal  $P$ .

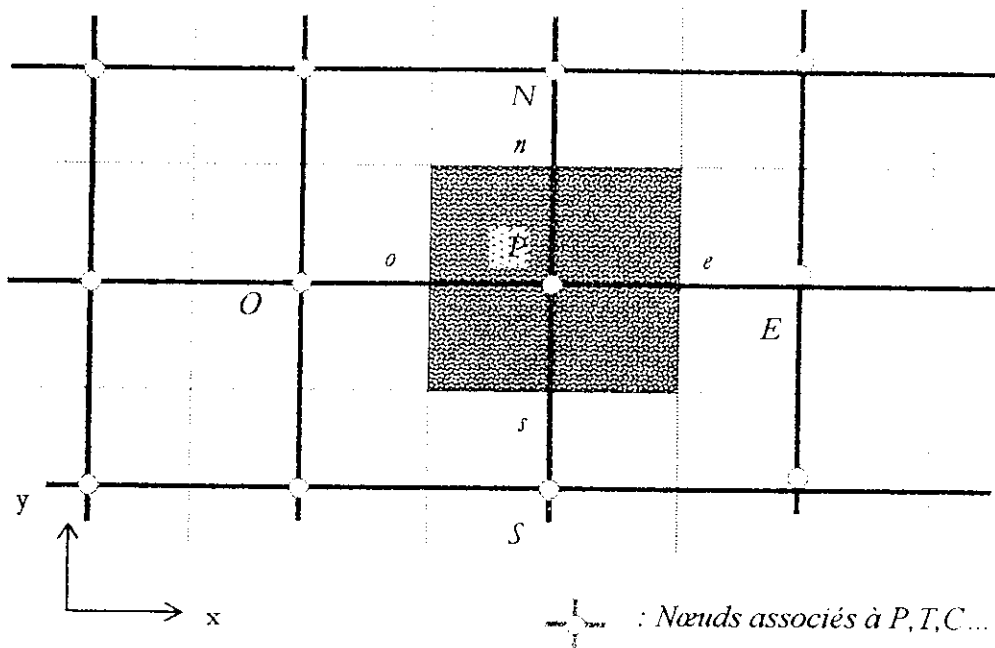


Figure II. 15 : Volume de contrôle utilisé pour la discrétisation de l'équation de continuité

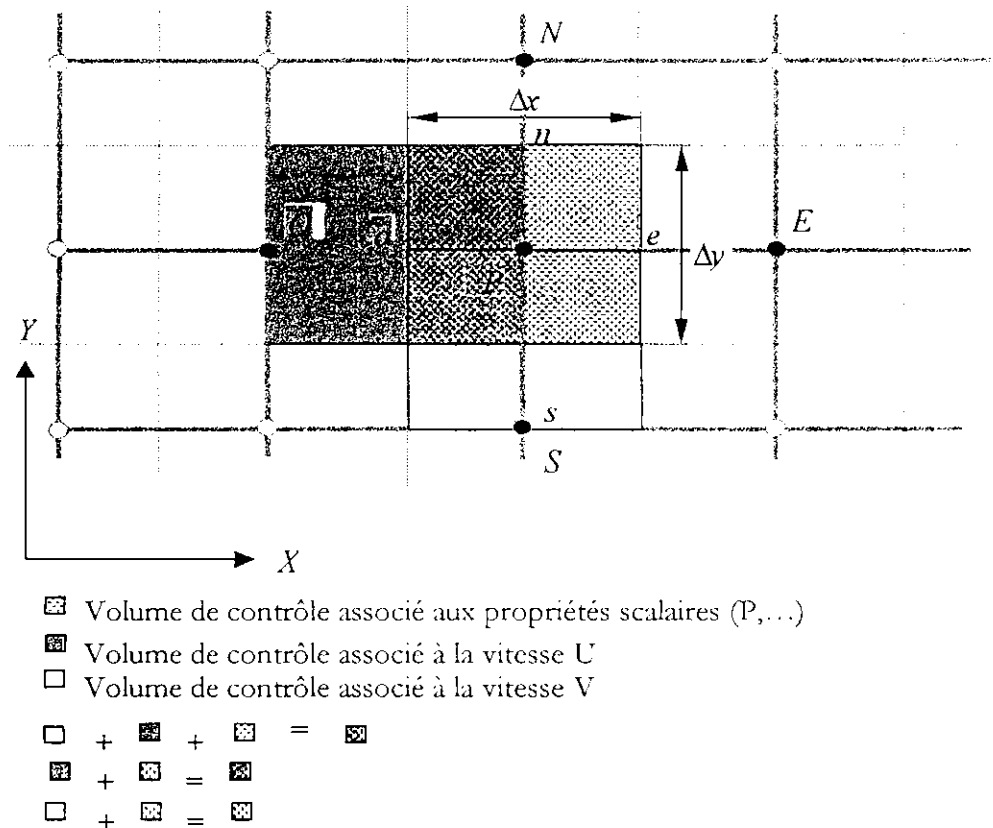


Figure II.16: Volume de contrôle utilisé pour la discrétisation de l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement

Avec ce choix de maillage décalé, le calcul des forces de pression pour la discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, fait apparaître la différence de pression entre deux points voisins du maillage. Il en est de même pour l'équation de conservation de la masse. Ceci vient du fait, qu'il n'y a plus à faire d'interpolation pour calculer  $h_e$  et  $h_s$  ou pour calculer  $U_e$  et  $U_s$ .

Le Quick schéma a formellement une grande précision par rapport à celui de schéma de différence centré et celui de schéma hybride.

L'implémentation des schémas de degré élevé, tel que celui d'ordre trois peut causer des problèmes relatifs aux conditions de frontière. Ajouter à ceci, ils génèrent des coûts élevés des calculs numériques par rapport aux deux autres schémas.

Les schémas que nous avons présenté dans ce chapitre décrivent les effets simultanés de la convection et de la diffusion par le biais d'équations discrétisées formées d'une combinaison linéaire des valeurs nodales et pondérées par des poids nommés coefficients, composés eux aussi d'une combinaison du flux convectif par unité de surface  $F$  et de la conductance de diffusion  $D$  [13].

Les équations discrétisées d'un nœud interne relatifs aux schémas de différentiations Centrale, Aval, Hybride et Loi de Puissance pour les problèmes de convection diffusion en une dimension prennent la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = a_O \phi_O + a_E \phi_E$$

avec,  $a_P = a_E + a_O + (F_e - F_o)$

Les coefficients voisins sont représentés dans le tableau suivant :

Schémas	$a_o$	$a_E$
Schéma aux différences centré	$D_o + \frac{F_o}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$
Schéma de différentiation aval	$D_o + \max(F_o, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$
Schéma hybride	$\max \left[ F_o, \left( D_o + \frac{F_o}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[ -F_e, \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$
Schéma de la loi de puissance	$D_o + \max \left[ 0, (1 - 0.1  Pe )^5 \right] + \max(F_o, 0)$	$D_e + \max \left[ 0, (1 - 0.1  Pe )^5 \right] + \max(-F_e, 0)$

Tableau 15

Les schémas qui possèdent des propriétés de Transport, Conservation et Frontière fournissent des solutions réalistes et des itérations stables :

- ✓ Puisque le schéma aux différences centrées ne vérifie pas le critère de transport et donne des solutions non réalistes, donc ce schéma n'est pas approprié pour les problèmes de convection diffusion
- ✓ Les schémas de différentiation aval, hybride, de la loi de puissance possèdent toutes les propriétés de Transport, Frontière, Conservation et une haute stabilité unidimensionnelle.

Dans le cas des écoulements multidimensionnels, si le vecteur vitesse n'est pas parallèle à une coordonnée de direction, ces différents schémas qu'on a présenté donnent des fausses diffusions.

Les équations discrétisées d'un nœud interne relatives au Quick schéma de Leonard pour les problèmes de convection diffusion en une dimension ont la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = a_O \phi_O + a_E \phi_E + a_{OO} \phi_{OO} + a_{EE} \phi_{EE}$$

avec,  $a_P = a_O + a_E + a_{OO} + a_{EE} + (F_e - F_o)$

Les coefficients voisins sont :



Quick schéma	
$a_o$	$D_o + \frac{6}{8}\alpha_o F_o + \frac{1}{8}\alpha_e F_e + \frac{3}{8}(1-\alpha_o)F_o$
$a_E$	$-\frac{1}{8}\alpha_o F_o$
$a_{oo}$	$D_e - \frac{3}{8}\alpha_e F_e - \frac{6}{8}(1-\alpha_e)F_e - \frac{1}{8}(1-\alpha_o)F_o$
$a_{EE}$	$\frac{1}{8}(1-\alpha_e)F_e$

Tableau 16

avec,  $\alpha_o = 1$  pour  $F_o > 0$  et  $\alpha_e = 1$  pour  $F_e > 0$

$\alpha_o = 0$  pour  $F_o < 0$  et  $\alpha_e = 0$  pour  $F_e < 0$

Les schémas de haut degré comme le Quick peuvent réduire les erreurs générées par une fausse diffusion mais ils sont moins stables numériquement. Ceux-ci se manifestent par des sur dépassement ou sous dépassement dans la solution de certains problèmes y compris ceux avec de large gradient de  $\varphi$  conduisant à un comportement non physique ; exemple des propriétés turbulentes  $\epsilon$  et  $k$  négatives[13].

Si ce schéma est utilisé avec précaution, il peut donner des solutions avec de bonnes précisions pour les problèmes de convection diffusion.

### Conclusion

Le schéma hybride est une combinaison entre le schéma de différentiation central et le schéma de différentiation aval. Ce schéma est en fait une approche moins coûteuse en temps de calcul par rapport au schéma de la loi puissance et le schéma Quick.

Pour la discrétisation spatiale notre choix s'est porté sur le schéma hybride.

Pour la discrétisation temporelle, puisque les schémas explicite et le schéma de Crank-Nicolson ne donnent pas des résultats stables dans le temps, donc le schéma qu'on va utiliser est le schéma implicite.

On va traiter un problème de convection diffusion pour une géométrie bidimensionnelle et un régime d'écoulement non permanent.

## Chapitre III : Discrétisation des équations de Saint Venant

Nous avons présenté dans le chapitre I, la méthodologie à suivre pour déterminer le modèle mathématique correspondant au problème physique traité.

La complexité de ce modèle mathématique ne permet pas de le résoudre analytiquement, donc on est amené à la résolution numérique.

Pour notre étude, on s'est limité à la méthode des volumes finis, présentée dans le chapitre II.

Dans cette partie, nous allons appliquer cette méthode sur notre modèle mathématique.

Le domaine de calcul est d'abord divisé en un nombre finis de volumes de contrôle formant un maillage rectangulaire, sur lequel on intègre notre système d'équations différentielles de Saint Venant. Ce maillage doit être uniforme et structuré.

Toutes les variables qui nous intéressent sont définies au centre de volumes de contrôles.

Le principe de la méthode des volumes finis consiste à proposer un changement de variable, qui permet de linéariser le système d'équations différentielles.

Chaque équation de ce modèle mathématique de Saint Venant est intégrée sur tous les volumes de contrôles, ce qui donne un système d'équations discrétisées qui relie la valeur de la variable au centre de volume de contrôle à la valeur aux points voisins.

Pour avoir une bonne précision et des résultats proches de la réalité, on utilise un maillage décalé pour la discrétisation, ce qui permet de calculer les composantes de la vitesse aux interfaces des volumes de contrôle, tandis que la profondeur de l'écoulement, la pression sont évalués au centre de volume de contrôle.

Pendant le calcul, les valeurs des vitesses peuvent être élevées, ce qui entraîne que la solution de notre problème ne converge pas, pour éviter ce problème on utilise le schéma hybride pour évaluer les flux aux interfaces de volume de contrôle.

Comme on l'a vu dans le chapitre II, le schéma totalement implicite est plus stable dans le temps, donc on utilise ce schéma pour la discrétisation temporelle.

Donc, nous expliquons dans ce chapitre les démarches à suivre pour discrétiser notre modèle mathématique de Saint Venant.

On peut résumer les différentes étapes qu'on va suivre pour résoudre ce problème dans le schéma suivant :

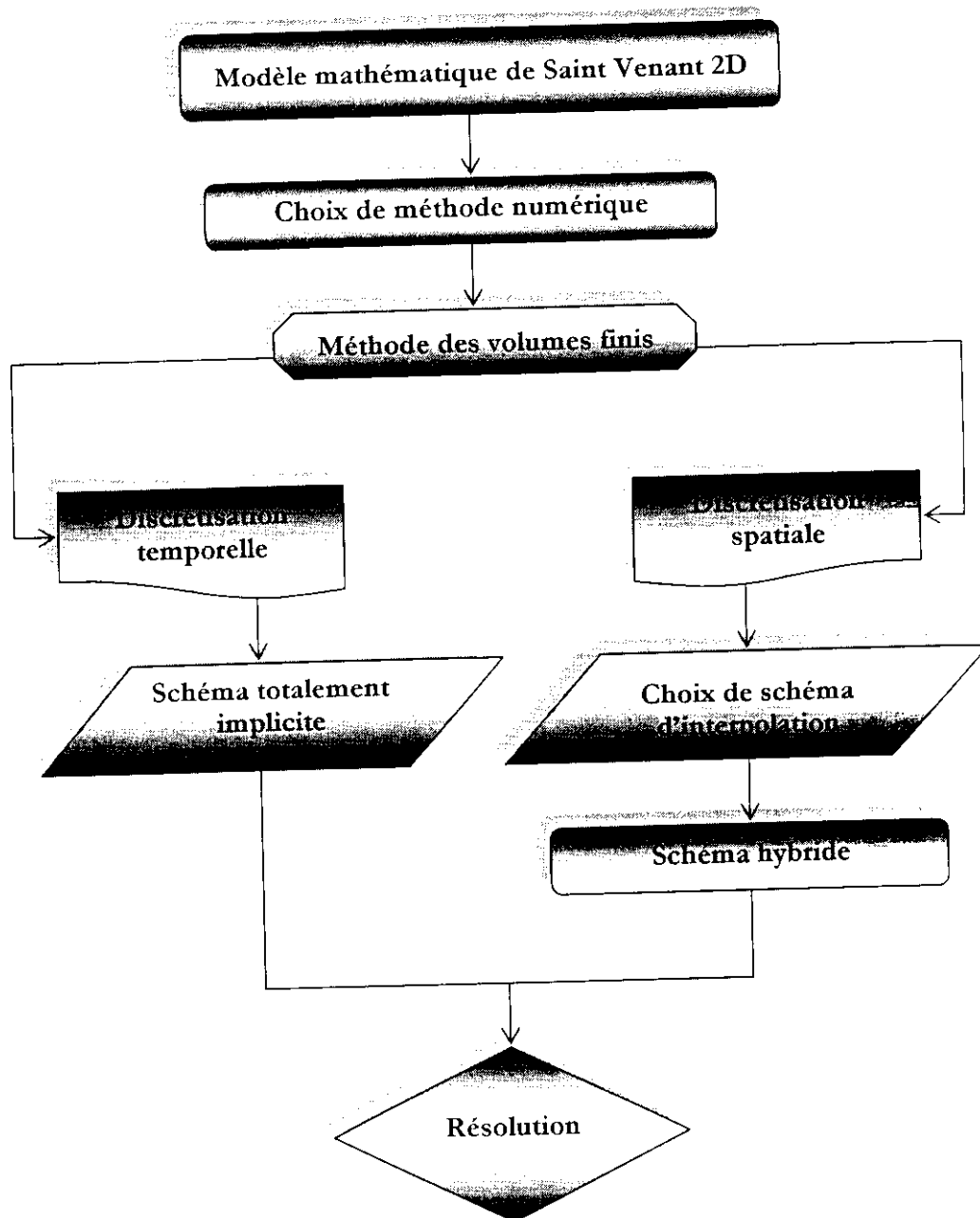


Figure III.1. Les différentes étapes à suivre pour déterminer le système d'équations algébrique de Saint Venant

### I. Maillage

Pour chaque nœud P, on définit un domaine de calcul délimité par les premiers voisins définis par les lettres majuscules (N, E, S, O) tel que :

E est nœud dans la direction des  $x$  croissants, et O dans la direction des  $x$  décroissants

N est nœud dans la direction des y croissants, et S dans la direction des y décroissants

On définit le volume de contrôle, sur le quel on intègre le système d'équations de Saint Venant. Ce domaine est délimité par les interfaces représentées par les lettres minuscules (o, e) dans la direction des x, et (n, s) dans la direction des y, les points des interfaces (n, o, s, e) se situent aux milieux des distances (PN, PO, PS, PE).

On définit le pas  $\Delta x$  dans la direction des x, et le pas  $\Delta y$  dans la direction des y.

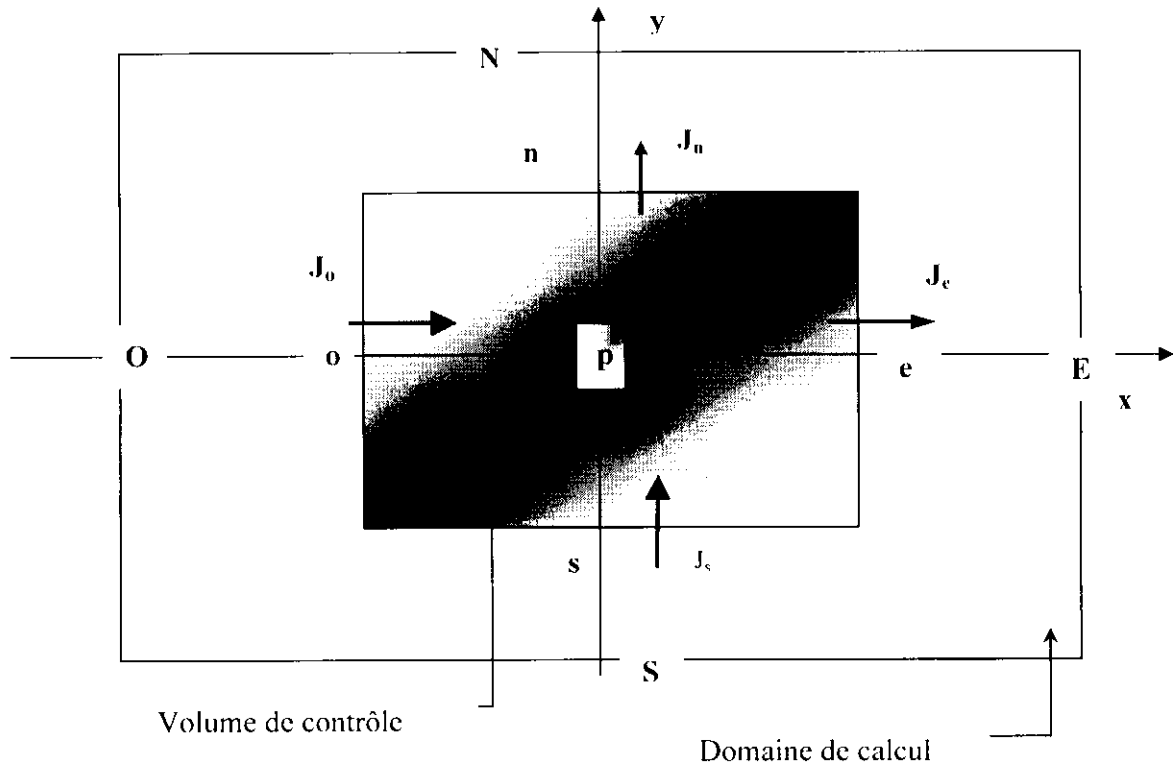


Figure III.2 : Volume de contrôle pour une géométrie bidimensionnelle

## II. Discretisation des équations de Saint Venant

### a. Equation de continuité

L'équation de continuité intégrée sur la profondeur est représentée par :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-1})$$

On doit intégrer cette équation sur un volume de contrôle délimité par les interfaces (o, e) dans la direction des x, et (n, s) dans la direction des y, cette intégration se fait dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ .

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial H}{\partial t} dy dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial HU}{\partial x} dy dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial HV}{\partial y} dy dx dt = 0 \quad (\text{III-2})$$

On décompose cette équation en trois termes et on intègre chacun de ces trois termes sur le volume de contrôle.

• **Intégration du premier terme de l'équation de continuité sur le volume de contrôle**

Le premier terme de cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial H}{\partial t} dy dx dt = \int_s^n dy \int_o^e dx \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial H}{\partial t} dt = (y_n - y_s)(x_e - x_o)(H_P]_{t+\Delta t} - H_P]_t) \quad (\text{III-3})$$

On définit à l'instant  $t$  les paramètres suivants :  $H_P^0, U_P$ ; et à l'instant  $t+\Delta t$  les paramètres  $H_P, \bar{U}_P$ .

L'intégration spatiale et temporelle de ce terme donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial H}{\partial t} dy dx dt = (H_P - H_P^0) \Delta x \Delta y \quad (\text{III-4})$$

• **Intégration du deuxième terme de l'équation de continuité sur le volume de contrôle**

Le deuxième terme de l'équation (III-2) est égal à :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial HU}{\partial x} dy dx dt = \int_s^n dy \int_t^{t+\Delta t} dt \int_o^e \frac{\partial HU}{\partial x} dx \quad (\text{III-5})$$

Pour la discrétisation temporelle de ce terme, on utilise le schéma totalement implicite :

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial HU}{\partial x} dt = \Delta t \left( \frac{\partial HU}{\partial x} \right) \quad (\text{III-6})$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial HU}{\partial x} dy dx dt = \int_s^n dy \int_t^{t+\Delta t} dt \int_o^e \frac{\partial HU}{\partial x} dx = (y_n - y_s)(HU]_e - HU]_o) \Delta t \quad (\text{III-7})$$

Par la suite, on a :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial HU}{\partial x} dy dx dt = (H_e \bar{U}_e - H_o \bar{U}_o) \Delta y \Delta t \quad (\text{III-8})$$

• **Intégration du troisième terme de l'équation de continuité sur le volume de contrôle**

L'intégration du troisième terme de l'équation (III-2) donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial H \bar{V}}{\partial y} dy dx dt = \int_s^n \frac{\partial H \bar{V}}{\partial y} dy \int_t^{t+\Delta t} \int_o^e dx = (H_n \bar{V}_n - H_s \bar{V}_s) (x_c - x_o) \Delta t \quad (\text{III-9})$$

Le troisième terme intégré devient :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial H \bar{V}}{\partial y} dy dx dt = (H_n \bar{V}_n - H_s \bar{V}_s) \Delta x \Delta t \quad (\text{III-10})$$

On remplace les termes intégrés sur le volume de contrôle par leurs expressions :

$$(H_p - H_p^0) \Delta x \Delta y + (H_e \bar{U}_e - H_o \bar{U}_o) \Delta y \Delta t + (H_n \bar{V}_n - H_s \bar{V}_s) \Delta x \Delta t = 0 \quad (\text{III-11})$$

En multipliant l'équation (III-11) par  $\left(\frac{1}{\Delta t}\right)$ , on a :

$$\frac{(H_p - H_p^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + (H_e \bar{U}_e - H_o \bar{U}_o) \Delta y + (H_n \bar{V}_n - H_s \bar{V}_s) \Delta x = 0 \quad (\text{III-12})$$

$$\text{Or : } H_p = z_{fp} + h_p \quad (\text{III-13})$$

Sachant que la surface du fond est indépendante du temps, c'est à dire :

$$z_{fp} = z_{fp}^0 \quad (\text{III-14})$$

donc l'équation de continuité devient :

$$\frac{(h_p - h_p^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + (H_e \bar{U}_e - H_o \bar{U}_o) \Delta y + (H_n \bar{V}_n - H_s \bar{V}_s) \Delta x = 0 \quad (\text{III-15})$$

Sachant que [9], [12]:

$$F_e = H_e \bar{U}_e \Delta y \quad (\text{III-16})$$

$$F_o = H_o \bar{U}_o \Delta y \quad (\text{III-17})$$

$$F_n = H_n \bar{V}_n \Delta x \quad (\text{III-18})$$

$$F_s = H_s \bar{V}_s \Delta x \quad (\text{III-19})$$

L'équation (III-15) se réduit :

$$\frac{(h_p - h_p^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + F_e - F_o + F_n - F_s = 0 \quad (\text{III-20})$$

En multipliant l'équation (III-20) par  $\varphi_p$ , on trouve :

$$\frac{(h_p - h_p^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y \varphi_p + F_e \varphi_p - F_o \varphi_p + F_n \varphi_p - F_s \varphi_p = 0 \quad (\text{III-21})$$

Cette équation est équivalente à :

$$\frac{(H_p - H_p^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y \varphi_p + F_e \varphi_p - F_o \varphi_p + F_n \varphi_p - F_s \varphi_p = 0 \quad (\text{III-22})$$

### b. Equation de quantité de mouvement

#### • Suivant la direction x

L'équation de quantité de mouvement intégrée sur la profondeur est comme suit :

$$\frac{\partial H \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H \bar{U} \bar{U} - v_T H \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \bar{U} \bar{V} - v_T H \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) = \frac{g}{C^2} \bar{U} \left( \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + g \sin \alpha (z_s - z_f) - g H \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III-23})$$

On remplace  $\bar{U}$  par  $\varphi$  et on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial H \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H \bar{U} \varphi - v_T H \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \varphi \bar{V} - v_T H \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{g}{C^2} \varphi \left( \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + g \sin \alpha (z_s - z_f) - g H \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III-24})$$

On note  $J$  le flux total de convection et de diffusion, tel que :

$$J_x = H \bar{U} \varphi - v_T H \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{III-25})$$

$$J_y = H \bar{V} \varphi - v_T H \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{III-26})$$

On définit le terme de source par la relation suivante :

$$S_p^x = \frac{g}{C^2} \varphi_p \left( \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + g \sin \alpha (z_s - z_f) = S_{px} \varphi_p + S_{cx} \quad (\text{III-27})$$

avec,  $S_{cx}$  : partie constante de la linéarisation de terme source ;

$S_{px}$  : coefficient de  $\varphi_p$  dans l'expression linéarisée de terme source.

L'équation (III-27) se simplifie à :

$$\frac{\partial H \varphi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S_x - gH \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III-28})$$

On intègre cette équation (III-28) sur le volume de contrôle qu'on a défini précédemment. On décompose le membre de droite en trois termes et le membre de gauche en deux termes.

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_0}^{n_c} \frac{\partial H \varphi}{\partial t} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_0}^{n_c} \frac{\partial J_x}{\partial x} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_0}^{n_c} \frac{\partial J_y}{\partial y} dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_0}^{n_c} S_x dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_0}^{n_c} gH \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} dx dy dt \quad (\text{III-29})$$

- Intégration du premier terme du membre de droite de l'équation (III-29) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_0}^{n_c} \frac{\partial H \varphi}{\partial t} dt dx dy = \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_0}^{n_c} \left. \frac{\partial H \varphi}{\partial t} \right]_p dt dx dy = \int_t^{t+\Delta t} \left. \frac{\partial H \varphi}{\partial t} \right]_p dt \times \int_{s_0}^c dx \times \int_s^n dy \quad (\text{III-30})$$

Si on désigne par :

$$H = H_p^0 \text{ et } \varphi = \varphi_p^0 \text{ à l'instant } t;$$

$$\text{et } H = H_p \text{ et } \varphi = \varphi_p \text{ à l'instant } t + \Delta t$$

Le premier terme est égal à :

$$\int_{s_0}^c \int_s^n \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial H \varphi}{\partial t} dt dx dy = [H_p \varphi_p - H_p^0 \varphi_p^0] \Delta x \Delta y \quad (\text{III-31})$$

- Intégration du deuxième terme du membre de droite de l'équation (III-29) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$

Le deuxième terme du membre de droite de l'équation (III-29) s'exprime comme suit :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_0}^c \int_s^n \frac{\partial J_x}{\partial x} dy dx dt = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_{s_0}^c \left. \frac{\partial J_x}{\partial x} \right]_s^n dx = (J_{xc} - J_{xs})(y_n - y_s) \Delta t \quad (\text{III-32})$$

Le deuxième terme devient :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_0}^c \int_s^n \frac{\partial J_x}{\partial x} dy dx dt = (J_{xc} - J_{xs}) \Delta y \Delta t \quad (\text{III-33})$$



- Intégration du troisième terme du membre de droite de l'équation (III-29) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$

Le troisième terme du membre de droite de l'équation (III-29) sera égal à :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial J_y}{\partial y} dy dx dt = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_o^e dx \int_s^n \frac{\partial J_y}{\partial y} dy = (J_{yn} - J_{ys})(x_e - x_o) \Delta t \quad (\text{III-34})$$

Alors l'intégration de (III-34) donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \frac{\partial J_y}{\partial y} dy dx dt = (J_{yn} - J_{ys}) \Delta x \Delta t \quad (\text{III-35})$$

- Intégration du premier terme du membre de gauche de l'équation (III-29) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$

L'intégration du premier terme de membre de gauche de l'équation (III-29) s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \int_p S_x dx dy dt = S_{px} \int_o^e dx \int_s^n dy \int_t^{t+\Delta t} dt = S_{px}^x \Delta x \Delta y \Delta t \quad (\text{III-36})$$

- Intégration du deuxième terme du membre de gauche de l'équation (III-29) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$

L'intégration du deuxième terme de membre de gauche de l'équation (III-29) s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \int_o^e g H \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} dx dy dt = g H_p \cos \alpha \int_t^{t+\Delta t} dt \int_s^n dy \int_o^e \frac{\partial h}{\partial x} dx = g H_p \cos \alpha [y_n - y_s] [h_e - h_o] \Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{o_s}^{e_n} \int_o^e g H \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} dx dy dt = g H_p \cos \alpha [h_e - h_o] \Delta t \Delta y \quad (\text{III-37})$$

L'équation de quantité de mouvement intégrée sur le volume de contrôle est :

$$\left[ H_p \phi_p - H_p^0 \phi_p^0 \right] \Delta x \Delta y + [J_{xe} \Delta y - J_{xo} \Delta y] \Delta t + [J_{yn} \Delta x - J_{ys} \Delta x] \Delta t = (S_{px} \phi_p + S_{cx}) \Delta x \Delta y \Delta t - g H_p \cos \alpha (h_e - h_o) \Delta y \Delta t \quad (\text{III-38})$$

Sachant que [9], [12]:

$$J_n = J_{yn} \Delta x \quad (\text{III-39})$$

$$J_s = J_{ys} \Delta x \quad (\text{III-40})$$

$$J_o = J_{xo} \Delta y \quad (\text{III-41})$$

$$J_e = J_{xe} \Delta y \quad (\text{III-42})$$

L'équation de quantité de mouvement sera de la forme suivante :

$$\frac{[H_p \varphi_p - H_p^0 \varphi_p^0]}{\Delta t} \Delta x \Delta y + (J_e - J_o) + (J_n - J_s) = (S_{px} \varphi_p + S_c) \Delta x \Delta y - g H_p \cos \alpha (h_e - h_o) \Delta y \Delta t \quad (\text{III-43})$$

En soustrayant l'équation (III-22) de l'équation (III-43), on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \frac{[H_p \varphi_p - H_p^0 \varphi_p^0 - H_p \varphi_p + H_p^0 \varphi_p]}{\Delta t} \Delta x \Delta y + (J_e - F_e \varphi_p) - (J_o - F_o \varphi_p) + (J_n - F_n \varphi_p) - (J_s - F_s \varphi_p) \\ & = (S_{px} \varphi_p + S_c) \Delta x \Delta y - g \cos \alpha H_p (h_e - h_o) \Delta y \Delta t \quad (\text{III-44}) \end{aligned}$$

On définit les relations suivantes [9], [12] :

$$J_e - F_e \varphi_p = a_E (\varphi_p - \varphi_E) \quad (\text{III-45})$$

$$J_o - F_o \varphi_p = -a_O (\varphi_O - \varphi_p) \quad (\text{III-46})$$

$$J_n - F_n \varphi_p = a_N (\varphi_p - \varphi_N) \quad (\text{III-47})$$

$$J_s - F_s \varphi_p = -a_S (\varphi_S - \varphi_p) \quad (\text{III-48})$$

On injecte ces relations dans l'équation (III-43), on trouve :

$$\begin{aligned} & - \frac{[H_p^0 \varphi_p^0 - H_p^0 \varphi_p]}{\Delta t} \Delta x \Delta y + a_E (\varphi_p - \varphi_E) + a_O (\varphi_p - \varphi_O) + a_N (\varphi_p - \varphi_N) + a_S (\varphi_p - \varphi_S) = (S_{px} \varphi_p + S_c) \Delta x \Delta y \\ & \quad - g H_p \cos \alpha (h_e - h_o) \Delta y \Delta t \quad (\text{III-49}) \end{aligned}$$

En arrangeant l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{[H_p^0 \varphi_p - H_p^0 \varphi_p^0]}{\Delta t} \Delta x \Delta y - (a_E \varphi_E + a_O \varphi_O + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S) + (a_E + a_O + a_N + a_S) \varphi_p = \\ & = (S_{px} \varphi_p + S_c) \Delta x \Delta y - g H_p \cos \alpha (h_e - h_o) \Delta y \Delta t \quad (\text{III-50}) \end{aligned}$$

On pose :

$$a_p^0 = \frac{H_p^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{III-51})$$

$$a_{px} = a_E + a_N + a_S + a_O + a_p^0 - S_{px} \Delta x \Delta y \quad (\text{III-52})$$

$$b_x = a_p^0 \varphi_p^0 + S_{cx} \Delta x \Delta y \quad (\text{III-53})$$

L'équation de quantité de mouvement suivant l'axe des x est défini par :

$$a_{Px}\varphi_P = a_E\varphi_E + a_O\varphi_O + a_N\varphi_N + a_S\varphi_S + b_x + gH_P \cos\alpha(h_o - h_e) \quad (\text{III-54})$$

### β. Suivant la direction y

L'équation de quantité de mouvement suivant la direction y s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\partial H\bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H\bar{V}\bar{U} - v_T H \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H\bar{V}\bar{V} - v_T H \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) = \frac{g}{C^2} \bar{V} \left( \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - gH \cos\alpha \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{III-55})$$

Si on remplace  $\bar{V}$  par  $\varphi$  dans l'équation (III-55), on aboutit à :

$$\frac{\partial H\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H\bar{U}\varphi - v_T H \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H\varphi\bar{V} - v_T H \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{g}{C^2} \varphi \left( \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - gH \cos\alpha \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{III-56})$$

Le flux total de convection et de diffusion est défini par les relations suivantes (III-25), (III-26).

Le terme de source est représenté par la relation suivante :

$$S_P^y = \frac{g}{C^2} \varphi_P \left( \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = S_{Py}\varphi_P + S_{cy} \quad (\text{III-57})$$

avec,  $S_{cy}$ : partie constante de la linéarisation de terme source ;

$S_{Py}$ : coefficient de  $\varphi_P$  dans l'expression linéarisée de terme source ;

L'équation (III-56) sera de la forme suivante :

$$\frac{\partial H\varphi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S_{Py} - gH \cos\alpha \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III-58})$$

Pour intégrer cette équation sur le volume de contrôle, on doit décomposer le membre de droite en trois termes et le membre de gauche en deux termes.

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} \frac{\partial H\varphi}{\partial t} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} \frac{\partial J_x}{\partial x} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} \frac{\partial J_y}{\partial y} dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} S_{Py} dx dy dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_{s_o}^{n_e} gH \cos\alpha \frac{\partial h}{\partial y} dx dy dt \quad (\text{III-59})$$

### Remarque

On constate que le calcul de membre de droite de l'équation de quantité de mouvement suivant y est le même que celui suivant l'axe des x.

- Intégration du premier terme du membre de gauche de l'équation (III-59) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_o^e [S_y]_p dx dy dt = S_p^y \int_o^e dx \int_s^n dy \int_t^{t+\Delta t} dt = S_p^y \Delta x \Delta y \Delta t \quad (\text{III-60})$$

- Intégration du deuxième terme du membre de gauche de l'équation (III-59) sur le volume de contrôle dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_o^e gH \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} dx dy dt = gH_p \cos \alpha \int_t^{t+\Delta t} dt \int_s^n \frac{\partial h}{\partial y} dy \int_o^e dx = gH_p \cos \alpha [x_e - x_o] [h_n - h_s] \Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_o^e gH \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} dx dy dt = gH_p \cos \alpha [h_n - h_s] \Delta t \Delta x \quad (\text{III-61})$$

Par suite, l'équation de quantité de mouvement intégrée sur le volume de contrôle est définie par la relation suivante :

$$\frac{[H_p^o \varphi_p^o - H_p^o \varphi_p]}{\Delta t} \Delta x \Delta y + a_E (\varphi_P - \varphi_R) + a_O (\varphi_P - \varphi_O) + a_N (\varphi_P - \varphi_N) + a_S (\varphi_P - \varphi_S) = (S_{py} \varphi_p + S_{cy}) \Delta x \Delta y - gH_p \cos \alpha (h_n - h_s) \Delta x \Delta t \quad (\text{III-62})$$

En arrangeant l'équation (III-62), on trouve :

$$\frac{[H_p^o \varphi_p^o - H_p^o \varphi_p]}{\Delta t} \Delta x \Delta y + a_E \varphi_E + a_O \varphi_O + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S - (a_E + a_O + a_N + a_S) \varphi_P = (S_{py} \varphi_p + S_{cy}) \Delta x \Delta y - gH_p \cos \alpha (h_n - h_s) \Delta x \Delta t \quad (\text{III-63})$$

On pose :

$$a_{py} = a_E + a_N + a_S + a_O + a_P^0 - S_{py} \Delta x \Delta y \quad (\text{III-64})$$

$$b_y = a_P^0 \varphi_P^0 + S_{CP} \Delta x \Delta y \quad (\text{III-65})$$

D'après les relations (III-51), (III-64) et (III-65), on définit l'équation de quantité de mouvement suivant la direction y par la relation suivante :

$$a_{py} \varphi_P = a_E \varphi_E + a_O \varphi_O + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b_y + gH_p \cos \alpha (h_s - h_n) \quad (\text{III-66})$$

Le système d'équations discrétisée par la méthode des volumes finis est :

- **Equation de continuité**

$$\frac{(h_p - h_p^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + H_e \bar{U}_e \Delta y - H_o \bar{U}_o \Delta y + H_n \bar{V}_n \Delta x - H_s \bar{V}_s \Delta x = 0 \quad (\text{III-67})$$

• **L'équation de quantité de mouvement suivant la direction x**

$$a_{Px} \varphi_P = a_E \varphi_E + a_O \varphi_O + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b_x + g H_P \cos \alpha (h_o - h_e) \quad (\text{III-68})$$

• **L'équation de quantité de mouvement suivant la direction y**

$$a_{Py} \varphi_P = a_E \varphi_E + a_O \varphi_O + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b_y + g H_P \cos \alpha (h_s - h_n) \quad (\text{III-69})$$

### III. Schéma hybride

Les coefficients des équations (III-68), (III-69) sont exprimés à partir du schéma hybride et se présentent sous la forme [9], [12]:

$$a_O = \max \left[ F_o, \left( D_o + \frac{F_o}{2} \right), 0 \right] \quad (\text{III-70})$$

$$a_E = \max \left[ -F_e, \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right] \quad (\text{III-71})$$

$$a_N = \max \left[ -F_n, \left( D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right] \quad (\text{III-72})$$

$$a_S = \max \left[ F_s, \left( D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right] \quad (\text{III-73})$$

On définit les flux massiques par unité de surface sur les interfaces des volumes de contrôles :

$$F_e = H_e \bar{U}_e \Delta y \quad (\text{III-74})$$

$$F_o = H_o \bar{U}_o \Delta y \quad (\text{III-75})$$

$$F_n = H_n \bar{V}_n \Delta x \quad (\text{III-76})$$

$$F_s = H_s \bar{V}_s \Delta x \quad (\text{III-77})$$

On définit la conductance de la diffusion sur les interfaces les volumes de contrôle :

$$D_e = \frac{v_e H_e \Delta y}{\Delta x} \quad (\text{III-78})$$

$$D_o = \frac{v_o H_o \Delta y}{\Delta x} \quad (\text{III-79})$$

$$D_n = \frac{v_n H_n \Delta x}{\Delta y} \quad (\text{III-80})$$

$$D_s = \frac{v_s H_s \Delta x}{\Delta y} \quad (\text{III-81})$$

### **Conclusion**

On a établi le système d'équations algébriques de Saint Venant à partir de la méthode des volumes finis.

Pour résoudre ce problème on doit faire appel à un algorithme de résolution. Des algorithmes sont présentés dans le chapitre IV.

## Chapitre IV : Algorithmes de résolution

Une fois le système d'équations algébrique est déterminé, l'étape suivante consiste à résoudre ce système à chaque pas de temps pour un écoulement non permanent.

La satisfaction de l'équation de conservation de la masse est l'un des problèmes majeurs que l'on rencontre lors de la résolution numérique des problèmes d'écoulements incompressible. Par conséquent, pour satisfaire l'équation de continuité, le champ de la vitesse doit être nul.

Comme on l'a vu dans le chapitre III, notre modèle mathématique de Saint Venant représente des équations non linéaires. Et par suite on ne peut pas les résoudre en une seule fois, et puisque les vitesses apparaissant sous forme de produit qui empêche la résolution directe de ces équations, et les coefficients de chaque équation discrétisée dépendent des variables du problème étudié, on doit donc passer par une méthode itérative.

Partant des valeurs estimées, le processus itératif permet petit à petit d'améliorer ces valeurs jusqu'à ce qu'on aboutit à la solution du problème à une certaine valeur prés définie (critère de convergence).

A la première itération, on donne des valeurs estimées à la vitesse et à la profondeur de l'écoulement.

A l'aide de ces valeurs, on peut calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement et de déterminer une nouvelle valeur de la vitesse.

A prés avoir calculer le champ de vitesse, il est nécessaire d'imposer l'équation de la conservation de la masse pour déterminer la nouvelle valeur de la profondeur de l'écoulement.

Ces nouvelles valeurs ne satisfont pas l'équation de continuité ( $\text{div } \vec{V} = 0$ ), on doit donc corriger la vitesse et la profondeur de l'écoulement de manière à forcer la conservation de la masse tout le long du processus itératif.

Les différents algorithmes qui existent dans la méthode des volumes finis pour résoudre ce type d'équations, et qui conduisent à une équation de correction de la profondeur de l'écoulement, sont largement employées et développées par Patankar et Spalding

Parmi ces algorithmes, on cite : l'algorithme Simple et ces variantes (Simpler, Simplec et Piso, Simplest.), qui sont les plus largement employées et utilisés.

Ces algorithmes peuvent être mis en oeuvre sur des grilles décalées ou non décalées.

## I. Algorithme SIMPLE

Contrairement à ce que pourrait penser le lecteur, SIMPLE ne veut pas dire simple, mais "**Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations**", ce qui change tout, évidemment.

Cet algorithme a été mis au point par Patankar et Spalding (1972).

### 1. Principe de l'algorithme SIMPLE

Le principe est de partir d'une profondeur constante  $h'$ , qui par le biais des équations de conservation de la quantité de mouvement, conduit à un champ de vitesse approchée  $(\bar{U}^*, \bar{V}^*)$ .

Des corrections successives sont ensuite apportées à l'un et à l'autre de façon à se rapprocher petit à petit d'une solution qui satisfasse de mieux en mieux l'équation de continuité.

Les différentes étapes sont répétées jusqu'à ce que l'erreur sur chaque équation de conservation, sur chaque volume de contrôle, soit inférieure à une valeur définie au préalable.

#### *a. Forme générale du système d'équations de Saint Venant discrétisées*

La discrétisation du système d'équations de Saint Venant est :

$$a_{px} \bar{U}_P = a_E \bar{U}_E + a_O \bar{U}_O + a_S \bar{U}_S + a_N \bar{U}_N + b_x + g H_P \cos \alpha (h_o - h_c) \Delta y \quad (\text{IV-1})$$

$$a_{py} \bar{V}_P = a_E \bar{V}_E + a_O \bar{V}_O + a_S \bar{V}_S + a_N \bar{V}_N + b_y + g H_P \cos \alpha (h_s - h_n) \Delta x \quad (\text{IV-2})$$

On pose :

$$\sum a_{nb} \bar{U}_{nb} = a_E \bar{U}_E + a_O \bar{U}_O + a_S \bar{U}_S + a_N \bar{U}_N \quad (\text{IV-3})$$

$$\sum a_{nb} \bar{V}_{nb} = a_E \bar{V}_E + a_O \bar{V}_O + a_S \bar{V}_S + a_N \bar{V}_N \quad (\text{IV-4})$$

$$A_{px} = g \cos \alpha H_P \Delta y \quad (\text{IV-5})$$

$$A_{py} = g \cos \alpha H_P \Delta x \quad (\text{IV-6})$$

On remplace les équations (IV-3), (IV-4), (IV-5) et (IV-6) dans (IV-1) et (IV-2), on aboutit à :

$$a_{px} \bar{U}_P = \sum a_{nb} \bar{U}_{nb} + b_x + (h_o - h_c) A_{px} \quad (\text{IV-7})$$

$$a_{py} \bar{V}_P = \sum a_{nb} \bar{V}_{nb} + b_y + (h_s - h_n) A_{py} \quad (\text{IV-8})$$



### ***b. Correction de la vitesse***

Dans cette étape, on doit établir une estimation sur la côte de la surface libre. On pose  $h=h^*$ , ce qui permet d'estimer la vitesse suivant les directions x et y par les quantités  $\bar{U}^*$  et  $\bar{V}^*$ , tel que :  $\bar{U} = \bar{U}^*$  et  $\bar{V} = \bar{V}^*$ .

Les équations (IV-7) et (IV-8) deviennent :

$$a_{Px} \bar{U}_P = \sum a_{nb} \bar{U}_{nb} + (h_o^* - h_e^*) A_{Px} + b_x \quad (IV-9)$$

$$a_{Py} \bar{V}_P = \sum a_{nb} \bar{V}_{nb} + (h_s^* - h_n^*) A_{Py} + b_y \quad (IV-10)$$

Les vitesses précédentes ne satisfont pas l'équation de continuité, on corrige la côte de la surface libre en écrivant  $h = h' + h^*$ .

Cette correction de la côte de la surface libre entraîne une correction sur la vitesse qui sera égale à  $\bar{U}'$  suivant la direction x et  $\bar{V}'$  suivant y, ces deux quantités vérifient les relations suivantes :  $\bar{U} = \bar{U}' + \bar{U}^*$  et  $\bar{V} = \bar{V}' + \bar{V}^*$ .

En soustrayant membre à membre l'équation (IV-9) de (IV-7), il vient :

$$a_{Px} \bar{U}'_P = \sum a_{nb} \bar{U}'_{nb} + (h'_o - h'_e) A_{Px} \quad (IV-11)$$

En soustrayant membre à membre l'équation (IV-10) de (IV-8), on trouve :

$$a_{Py} \bar{V}'_P = \sum a_{nb} \bar{V}'_{nb} + (h'_s - h'_n) A_{Py} \quad (IV-12)$$

## **2. Application de l'algorithme SIMPLE**

### ***a. Equation de correction de la vitesse***

L'hypothèse de l'algorithme SIMPLE consiste à négliger la contribution des termes aux points voisins :  $\sum a_{nb} \bar{U}'_{nb} = 0$  et  $\sum a_{nb} \bar{V}'_{nb} = 0$

D'où les équations (IV-11) et (IV-12) deviennent :

$$a_{Px} \bar{U}'_P = (h'_o - h'_e) A_{Px} \quad (IV-13)$$

$$a_{Py} \bar{V}'_P = (h'_s - h'_n) A_{Py} \quad (IV-14)$$

On établit ainsi les équations des vitesses corrigées :

$$\bar{U}_P = \bar{U}_P^* + (h'_o - h'_e) \frac{A_{Px}}{a_{Px}} \quad (IV-15)$$

$$\bar{V}_P = \bar{V}_P^* + (h'_s - h'_n) \frac{A_{Py}}{a_{Py}} \quad (IV-16)$$

On définit :

$$d_{Px} = \frac{A_{Px}}{a_{Px}} \tag{IV-17}$$

$$d_{Py} = \frac{A_{Py}}{a_{Py}} \tag{IV-18}$$

Si on injecte les expressions  $d_{Px}$  et  $d_{Py}$  dans les relations (IV-15) et (IV-16), les équations des vitesses corrigées sont de la forme suivante :

$$\bar{U}_P = \bar{U}_P^* + (h'_o - h'_c) d_{Px} \tag{IV-19}$$

$$\bar{V}_P = \bar{V}_P^* + (h'_s - h'_n) d_{Py} \tag{IV-20}$$

**b. Equation de correction de la côte de la surface libre**

La discrétisation de l'équation de continuité par la méthode des volumes finis est :

$$\frac{(h_P - h_P^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \left[ (H_c \bar{U}_c) - (H_o \bar{U}_o) \right] \Delta y + \left[ (H_n \bar{V}_n) - (H_s \bar{V}_s) \right] \Delta x = 0 \tag{IV-21}$$

Pour calculer les vitesses  $\bar{U}_c$ ,  $\bar{U}_o$ ,  $\bar{V}_n$  et  $\bar{V}_s$ , on utilise le maillage décalé (figure IV.1).

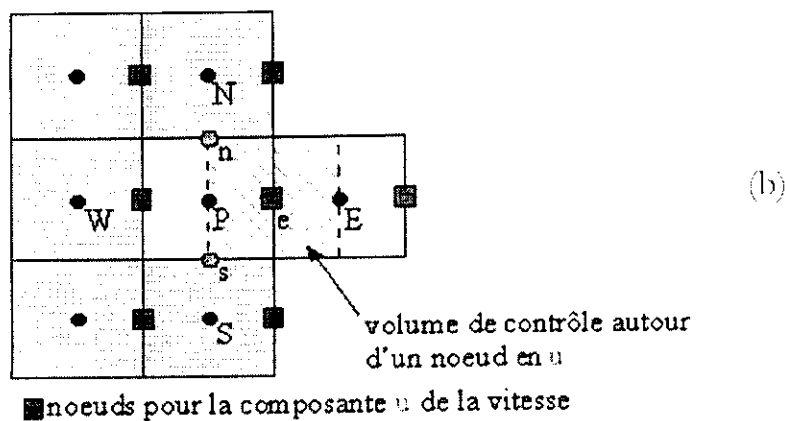
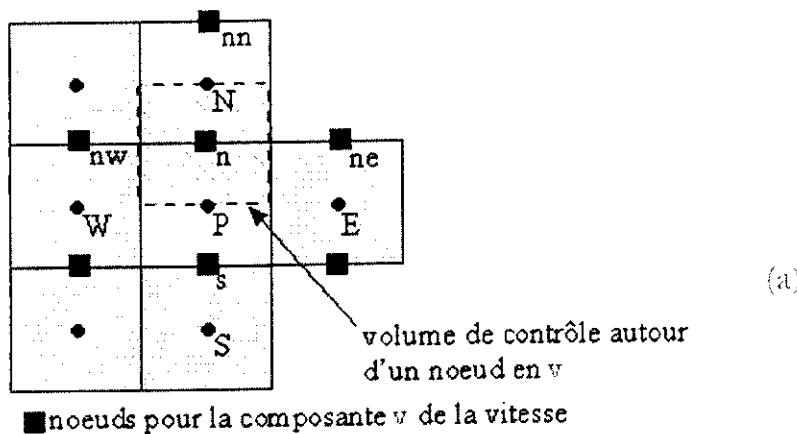


Figure IV.1 : Grilles décalées

D'après les équations de correction des vitesses (IV-19) et (IV-20), on définit les relations suivantes :

$$\bar{U}_e = \bar{U}_e^* + d_e (h'_P - h'_E) \quad (\text{IV-22})$$

$$\bar{U}_o = \bar{U}_o^* + d_o (h'_O - h'_P) \quad (\text{IV-23})$$

$$\bar{V}_n = \bar{V}_n^* + d_n (h'_P - h'_N) \quad (\text{IV-24})$$

$$\bar{V}_s = \bar{V}_s^* + d_s (h'_S - h'_P) \quad (\text{IV-25})$$

$$\text{avec, } d_e = \frac{\Lambda_e}{a_e} \quad (\text{IV-26})$$

$$d_o = \frac{\Lambda_o}{a_o} \quad (\text{IV-27})$$

$$d_s = \frac{\Lambda_s}{a_s} \quad (\text{IV-28})$$

$$d_n = \frac{\Lambda_n}{a_n} \quad (\text{IV-29})$$

Si nous substituons les expressions (IV-22), (IV-23), (IV-24) et (IV-25) dans (IV-21), nous obtenons une équation discrétisée portant sur les corrections de la cote de la surface libre :

$$\begin{aligned} & \frac{(h_P - h_P^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \left[ H_e \bar{U}_e^* + d_e H_e (h'_P - h'_E) \right] \Delta y - \left[ H_o \bar{U}_o^* + d_o H_o (h'_O - h'_P) \right] \Delta y \\ & + \left[ H_n \bar{V}_n^* + d_n H_n (h'_P - h'_N) \right] \Delta x - \left[ H_s \bar{V}_s^* + d_s H_s (h'_S - h'_P) \right] \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-30})$$

En arrangeant l'équation (IV-30), on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \left[ d_n H_n \Delta x + d_s H_s \Delta x + d_e H_e \Delta y + d_o H_o \Delta y \right] h'_P \\ & = \left[ d_s H_s \Delta x h'_S + d_n H_n \Delta x h'_N + d_o H_o \Delta y h'_O + d_e H_e \Delta y h'_E \right] - \frac{(h_P - h_P^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y \\ & \quad - \left[ H_e \bar{U}_e^* \Delta y - H_o \bar{U}_o^* \Delta y + H_n \bar{V}_n^* \Delta x - H_s \bar{V}_s^* \Delta x \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-31})$$

On pose :

$$a_o = d_o H_o \Delta y \quad (\text{IV-32})$$

$$a_e = d_e H_e \Delta y \quad (\text{IV-33})$$

$$a_s = d_s H_s \Delta x \quad (\text{IV-34})$$

$$a_n = d_n H_n \Delta x \quad (\text{IV-35})$$

$$a_p = d_n H_n \Delta x + d_s H_s \Delta x + d_e H_e \Delta y + d_o H_o \Delta y \quad (\text{IV-36})$$

$$b = -\frac{h_p - h_p^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y - H_n \bar{V}_n^* \Delta x + H_s \bar{V}_s^* \Delta x - H_e \bar{U}_e^* \Delta y + H_o \bar{U}_o^* \Delta y \quad (IV-37)$$

A partir de ces étapes, on peut définir l'équation de correction de la côte de la surface libre qui est égale à :

$$a_p h'_p = a_E h'_E + a_N h'_N + a_S h'_S + a_O h'_O + b \quad (IV-38)$$

***c. Représentation de la géométrie du maillage***

Dans un repère cartésien bidimensionnel, on définit un maillage rectangulaire.

Le domaine de calcul est délimité par les interfaces E et O qui représentent l'Est et l'Ouest respectivement, et N et S qui représentent le Nord et le Sud.

Ces nœuds sont donnés par les coordonnées suivantes :

$$E(I+1, J), O(I-1, J), N(I, J+1), S(I, J-1).$$

Le volume de contrôle est délimité par les interfaces e et o qui représentent l'Est et l'Ouest respectivement, et n et s qui représentent le Nord et le Sud.

Ces nœuds sont donnés par les coordonnées suivantes :

$$e(I+1, J), o(i, J), n(I, j+1), s(I, j).$$

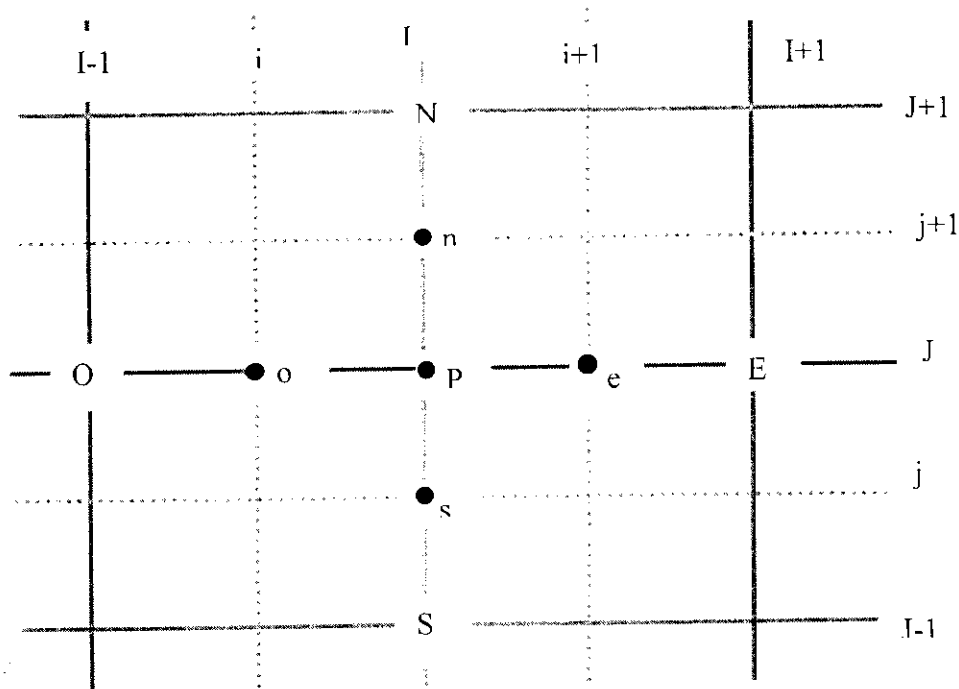


Figure IV.2 : Géométrie bidimensionnelle

A partir de ce schéma, on peut présenter les équations de quantité de mouvement et de correction de la côte de la surface libre par la forme suivante :

◆ ***Equation de quantité de mouvement***

Les équations (IV-7) et (IV-8) s'écrivent :

$$a_{I,J} \bar{U}_{I,J}^* = \sum a_{nb} \bar{U}_{nb}^* + (h_{i,j}^* - h_{i+1,j}^*) A_{I,J} + b_{I,J} \quad (\text{IV-39})$$

$$a_{I,J} \bar{V}_{I,J}^* = \sum a_{nb} \bar{V}_{nb}^* + (h_{I,j}^* - h_{I,j+1}^*) A_{I,J} + b_{I,J} \quad (\text{IV-40})$$

◆ *Equation de correction de la côte de la surface libre*

L'équation (IV-38) s'écrit

$$a_{I,J} h_{I,J} = a_{I-1,J} h_{I-1,J} + a_{I+1,J} h_{I+1,J} + a_{I,J-1} h_{I,J-1} + a_{I,J+1} h_{I,J+1} + b_{I,J} \quad (\text{IV-41})$$

◆ *Equations des vitesses corrigées et de la côte de la surface libre*

$$\bar{U}_{I,J} = \bar{U}_{I,J}^* + (h'_{i,j} - h'_{i+1,j}) d_{xI,J} \quad (\text{IV-42})$$

$$\bar{V}_{I,J} = \bar{V}_{I,J}^* + (h'_{I,j} - h'_{I,j+1}) d_{yI,J} \quad (\text{IV-43})$$

$$h_{I,J} = h_{I,J}^* + h'_{I,J} \quad (\text{IV-44})$$

L'algorithme SIMPLE se déroule suivant les séquences suivantes :

1. Estimation de la profondeur  $h^*$ .
2. Résolution du système d'équations discrétisées de la quantité de mouvement (IV-39, IV-40) et détermination de la vitesse suivant x et y qui seront  $\bar{U}^*$ ,  $\bar{V}^*$ .
3. Résolution de l'équation de correction de la côte de la surface libre (IV-41), et détermination de  $h'$ .
4. Calcul de la nouvelle profondeur de l'écoulement qui sera donnée par  $h$ , tel que :  $h = h^* + h'$ .
5. Détermination des nouvelles valeurs  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$ , à l'aide de la valeur de la profondeur  $h$  qu'est a été calculée dans l'étape 4 et à partir des équations (IV-42) et (IV-43).
6. Avec cette nouvelle valeur de la profondeur, on pose  $h^* = h$ , et on retourne en 2 jusqu'à convergence.

On pourrait remarquer qu'on a négligé les termes,  $\sum a_{nb} \phi'_{nb}$  dans les équations (IV-17), (IV-18). En fait, cela n'est pas grave. L'algorithme est appelé semi implicite du fait de devoir itérer entre les équations de conservation de la quantité de mouvement et celle de la conservation de la masse.

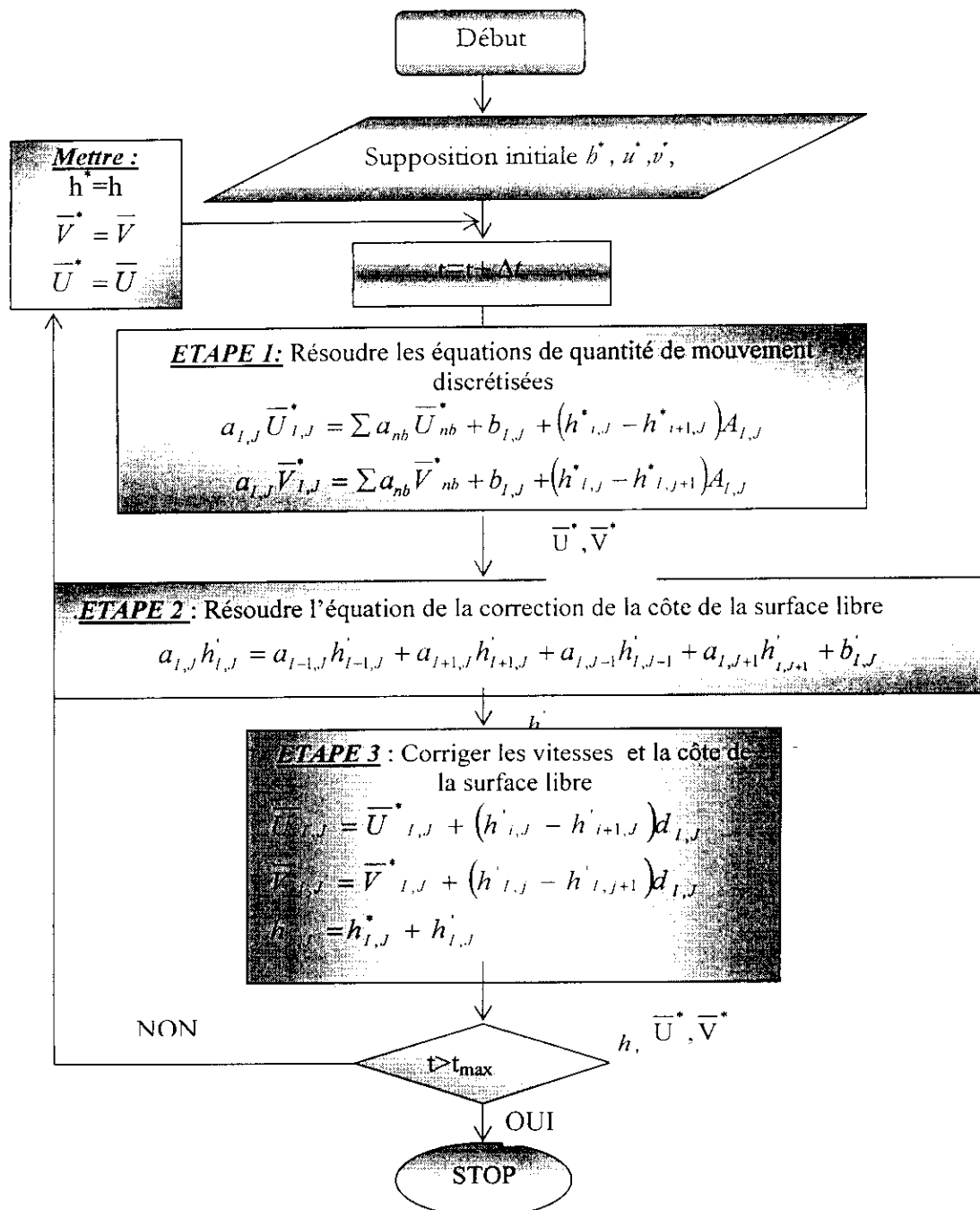
De fait, le critère de convergence dans cet algorithme doit être choisi avec soin, il faut s'assurer que les corrections de la profondeur sont négligeables, un bon indicateur est le terme source  $b$  dans l'équation de correction de la côte de la surface libre (équation (IV-41)).

Des problèmes de divergence peuvent également survenir, il est donc parfois nécessaire de relaxer la côte de la surface libre. Dans ce cas, la nouvelle valeur de la côte de la surface libre dans l'étape 4 est obtenue par :  $h = h^* + \alpha h'$

où,  $\alpha$  est un coefficient de relaxation de l'ordre de 0,8. On donne ci-dessous l'organigramme de l'algorithme SIMPLE[12] :

• **L'organigramme de l'algorithme SIMPLE**

L'organigramme de l'algorithme SIMPLE est illustré dans la figure ci-dessous[12] :



## II. Algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (SIMPLE révisé) de Patankar (1980) est une version améliorée de *SIMPLE*. Dans cet algorithme, l'équation discrétisée de continuité (IV-21) est utilisée pour dériver une équation discrétisée pour la cote de la surface libre, au lieu d'une équation de la correction de la cote de la surface libre comme dans *SIMPLE*. Donc la cote de la surface libre intermédiaire est obtenue sans l'usage d'une correction directement. Cependant, les vitesses sont encore obtenues à travers les corrections de la vitesse (IV-19, IV-20) de *SIMPLE*.

La solution numérique est obtenue avec l'algorithme *SIMPLER* à chaque étape de temps.

### 1. Application de l'algorithme SIMPLER

Les équations de quantité de mouvement discrétisées (IV-7), (IV-8) sont réarrangées comme suite :

$$\bar{U}_P = \frac{\sum a_{nb} \bar{U}_{nb} + b_x}{a_{Px}} + (h_o - h_e) \frac{A_{Px}}{a_{Px}} \quad (IV-45)$$

$$\bar{V}_P = \frac{\sum a_{nb} \bar{V}_{nb} + b_y}{a_{Py}} + (h_s - h_n) \frac{A_{Py}}{a_{Py}} \quad (IV-46)$$

Si on utilise les formules (IV-17), (IV-18), on aboutit à :

$$\bar{U}_P = \frac{\sum a_{nb} \bar{U}_{nb} + b_x}{a_{Px}} + (h_o - h_e) d_{Px} \quad (IV-47)$$

$$\bar{V}_P = \frac{\sum a_{nb} \bar{V}_{nb} + b_y}{a_{Py}} + (h_s - h_n) d_{Py} \quad (IV-48)$$

On peut présenter les pseudo -vitesses par les relations suivantes :

$$\tilde{U}_P = \frac{\sum a_{nb} \bar{U}_{nb} + b_x}{a_{Px}} \quad (IV-49)$$

$$\tilde{V}_P = \frac{\sum a_{nb} \bar{V}_{nb} + b_y}{a_{Py}} \quad (IV-50)$$

Si on injecte les deux équations (IV-49) et (IV-50) dans les relations (IV-47), (IV-48), on obtient les équations de correction de la vitesse :

$$\bar{U}_P = \tilde{U}_P + (h_o - h_e) d_{Px} \quad (IV-51)$$

$$\bar{V}_P = \tilde{V}_P + (h_S - h_N) d_{Py} \quad (\text{IV-52})$$

D'après les équations de correction de la vitesse (IV-51) et (IV-52), on définit les équations de correction de la vitesse à chaque nœud du volume de contrôle (en utilisant le maillage décalé):

$$\bar{U}_e = \tilde{U}_e + d_e (h_P - h_E) \quad (\text{IV-53})$$

$$\bar{U}_o = \tilde{U}_o + d_o (h_O - h_P) \quad (\text{IV-54})$$

$$\bar{V}_n = \tilde{V}_n + d_n (h_P - h_N) \quad (\text{IV-55})$$

$$\bar{V}_s = \tilde{V}_s + d_s (h_S - h_P) \quad (\text{IV-56})$$

En remplaçant les relations (IV-53), (IV-54), (IV-55), (IV-56) dans l'équation de continuité (IV-21), l'équation de la côte de la surface libre est exprimée par:

$$\begin{aligned} & \frac{(h_P - h_P^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \left[ H_e \tilde{U}_e + d_e H_e (h_P - h_E) \right] \Delta y - \left[ H_o \tilde{U}_o + d_o H_o (h_O - h_P) \right] \Delta y \\ & + \left[ H_n \tilde{V}_n + d_n H_n (h_P - h_N) \right] \Delta x - \left[ H_s \tilde{V}_s + d_s H_s (h_S - h_P) \right] \Delta x = 0 \quad (\text{IV-57}) \end{aligned}$$

En arrangeant l'équation (IV-57), on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \left[ d_n H_n \Delta x + d_s H_s \Delta x + d_e H_e \Delta y + d_o H_o \Delta y + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \right] h_P = \left[ d_e H_e \Delta y h_E + d_o H_o \Delta y h_O \right] \\ & \quad \left[ d_s H_s \Delta x h_S + d_n H_n \Delta x h_N \right] + \left[ -H_e \tilde{U}_e \Delta y + H_o \tilde{U}_o \Delta y - H_n \tilde{V}_n \Delta x + H_s \tilde{V}_s \Delta x \right] \\ & \quad + \frac{h_P^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y = 0 \quad (\text{IV-58}) \end{aligned}$$

On pose :

$$b = \frac{h_P^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y - H_n \tilde{V}_n \Delta x + H_s \tilde{V}_s \Delta x - H_e \tilde{U}_e \Delta y + H_o \tilde{U}_o \Delta y \quad (\text{IV-59})$$

A partir des relations (IV-32), (IV-33), (IV-34), (IV-35) et (IV.59), on obtient:

$$a_P h_P = a_E h_E + a_N h_N + a_S h_S + a_O h_O + b \quad (\text{IV.60})$$

### Remarque

Les coefficients de l'équation (IV-60) sont les mêmes que ceux de l'équation de la correction de la côte de la surface libre (IV-38), avec la différence que b est fonction des termes de pseudo vitesse. Par la suite, les équations discrétisées de la vitesse (IV-7, IV-9) sont utilisées dans la résolution de l'équation de la côte de la surface libre. Les équations de la correction de la vitesse (IV-19, IV-20) sont utilisées dans l'algorithme SIMPLER pour obtenir les vitesses corrigées. Par conséquent, l'équation (IV-38) doit aussi être résolu pour obtenir les corrections



de la côte de la surface libre et pour faire les corrections de la vitesse.

D'après le schéma de la figure IV.2, on peut présenter les équations de la correction de la vitesse et de la côte de la surface libre par les formules suivantes :

$$\bar{U}_{I,J} = \frac{\sum a_{nb} \bar{U}_{nb} + b_{I,J}}{a_{I,J}} + (h_{I,J} - h_{i+1,J}) \frac{\Lambda_{I,J}}{a_{I,J}} \quad (\text{IV-61})$$

$$\bar{V}_{I,J} = \frac{\sum a_{nb} \bar{V}_{nb} + b_{I,J}}{a_{I,J}} + (h_{I,J} - h_{I,j+1}) \frac{\Lambda_{I,J}}{a_{I,J}} \quad (\text{IV-62})$$

Les relations des pseudo vitesses sont :

$$\tilde{U}_{I,J} = \frac{\sum a_{nb} \bar{U}_{nb} + b_{I,J}}{a_{I,J}} \quad (\text{IV-63})$$

$$\tilde{V}_{I,J} = \frac{\sum a_{nb} \bar{V}_{nb} + b_{I,J}}{a_{I,J}} \quad (\text{IV-64})$$

Les équations de la vitesse sont :

$$\bar{U}_{I,J} = \tilde{U}_{I,J} + (h_{i,I} - h_{i+1,J}) \frac{\Lambda_{I,J}}{a_{I,J}} \quad (\text{IV-65})$$

$$\bar{V}_{I,J} = \tilde{V}_{I,J} + (h_{I,j} - h_{I,j+1}) \frac{\Lambda_{I,J}}{a_{I,J}} \quad (\text{IV-66})$$

Les séquences de calcul sont les suivantes :

1. Le champ de vitesse et la côte de la surface libre sont estimés en tous les points du maillage  $\bar{U}^*, \bar{V}^*, h^*$ .
2. A partir des équations (IV-49) et (IV-50), on calcule les champs de pseudo vitesse  $\tilde{U}, \tilde{V}$ .
3. On résout l'équation de la côte de la surface libre pour déterminer la valeur de  $h$  (équation IV-60).
4. On résout les deux équations de quantité de mouvement, et on calcule le champ de vitesse  $\bar{U}^*, \bar{V}^*$  (le terme de la côte de la surface libre est évalué avec les résultats de l'étape 3).
5. On résout l'équation de correction de la côte de la surface libre, et on détermine la valeur de la correction de la côte de la surface libre.

6. On utilise la valeur de la côte de la surface libre de l'étape 5, et on corrige le champ de vitesse  $\bar{U}, \bar{V}$ .
  7. On retourne à l'étape 2 et on répète les opérations 2 à 6 jusqu'à la convergence.
  8. On vérifie la convergence. Si cette étape est atteinte, on passe à l'étape 9 sinon on retourne à l'étape 2.
  9. On passe au pas de temps suivant  $t = t + \Delta t$ , puis on retourne à l'étape 2 et on refait les mêmes étapes.
- ✓ Le critère de la convergence mentionné à l'étape 8 est basé sur le terme source dans l'équation de correction de la profondeur de l'écoulement. Il est donné par l'expression suivante :

$$\sum_i \sum_j b_{ij} \leq 10^{-6}$$

- ✓ Par suite, on définit le critère de convergence qu'en utilisant à chaque étape de temps par la formule suivante :

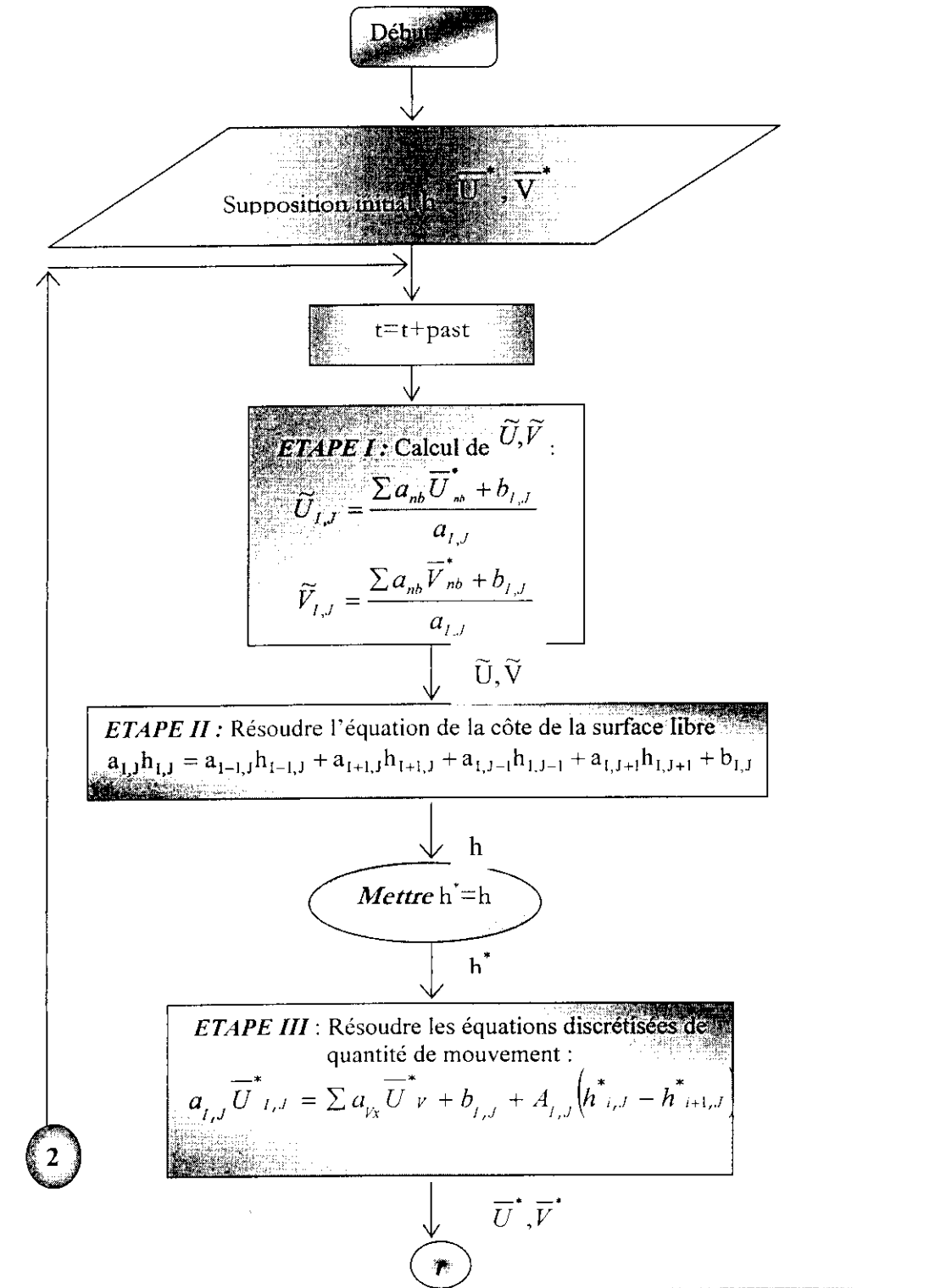
$$\frac{\sum_i \sum_j |\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j}^{k-1}|}{\sum_i \sum_j \varphi_{i,j}^k} \leq 10^{-6}$$

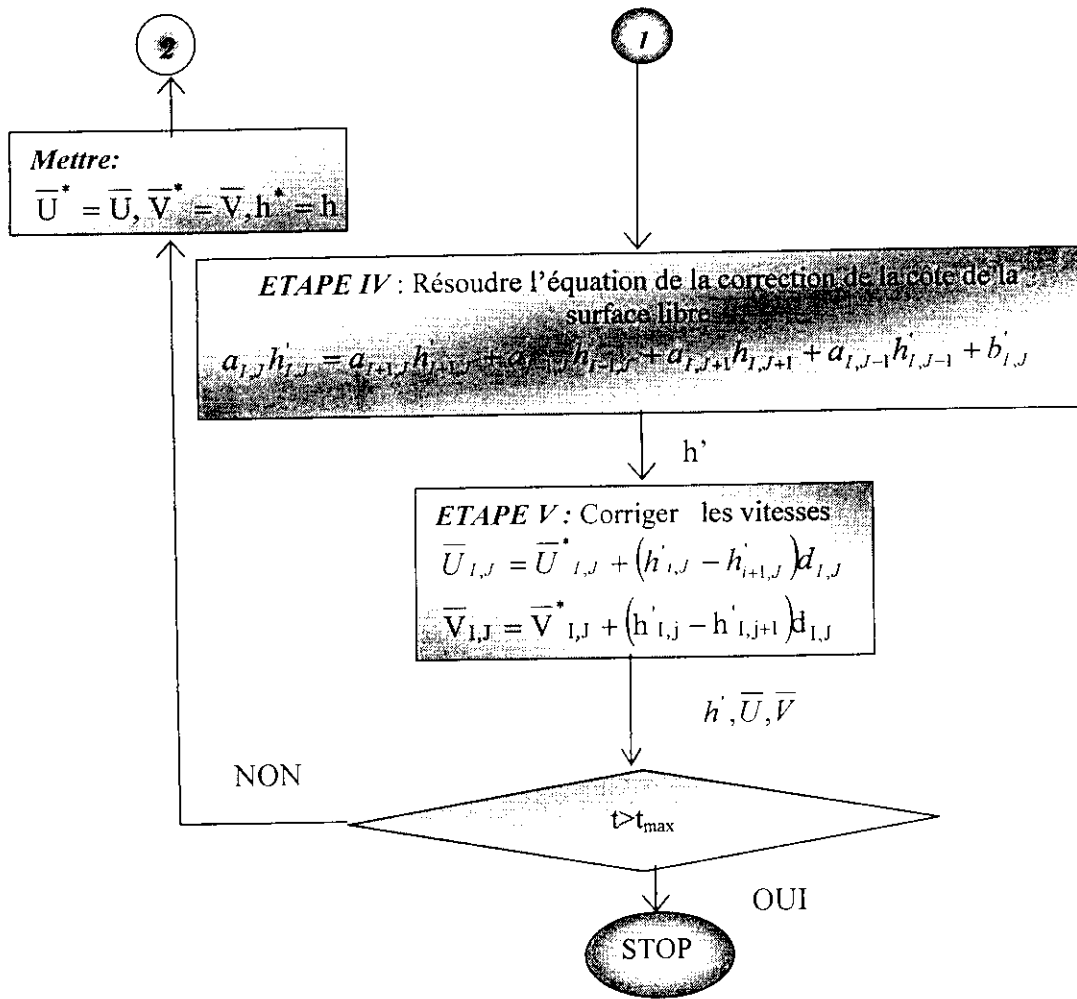
où,  $\varphi$  est l'une des variables qui caractérise notre problème physique  $\bar{U}, \bar{V}, h$  et  $k$  représente la  $k^{\text{e}}$  itération.

- ✓ Pour éviter le problème de divergence de programme on utilise la technique de sous relaxation.

• **L'organigramme de l'algorithme SIMPLER**

On peut présenter l'organigramme de l'algorithme SIMPLER par le schéma qui suit [12] :





### III. Algorithme SIMPLEC

L'algorithme SIMPLEC (Simple Logique) de Van Doormal et Raithby (1984) suit les mêmes pas comme l'algorithme SIMPLE, avec la différence que les équations de la vitesse sont manipulées afin que les SIMPLEC équations des vitesses corrigées omettent des termes qui sont moins considérables que ceux omis dans SIMPLE[12].

◆ L'équations de correction de la vitesse pour la composante  $\bar{U}$  est donnée par :

$$\bar{U}'_p = d_{px} (h'_o - h'_c) \tag{IV-67}$$

$$\text{avec, } d_{px} = \frac{A_{px}}{a_{px} - \sum a_{nb}} \tag{IV-68}$$

De la même façon pour la composante  $\bar{V}$ , l'équation de correction de la vitesse modifiée est :

$$\bar{V}'_p = d_{py} (h'_s - h'_n) \tag{IV-69}$$

$$d_{py} = \frac{A_{py}}{a_{py} - \sum a_{nb}} \quad (\text{IV-70})$$

Les équations discrétisées sont les mêmes comme pour SIMPLE, sauf que les termes de  $d_{px}$  et  $d_{py}$  sont calculées par les relations (IV-67) et (IV-70)

#### IV. Algorithme PISO

L'algorithme PISO qui représente la pression implicite, est une procédure développée pour le calcul non itérative des courants (fluide) compressibles instables initialement.

Il a été adapté pour la solution itérative des problèmes de l'état stable avec succès.

L'algorithme PISO utilise une première correction de la côte de la surface libre identique à celle de SIMPLE. Une deuxième étape de correction est effectuée (au cours de même itération) en vue de mieux satisfaire de l'équation de quantité de mouvement et l'équation de continuité.

##### • Le premier pas de correction

- ◆ Les champs  $\bar{U}^*$  et  $\bar{V}^*$  ne satisfèrent pas la continuité à moins que l'intervalle de la profondeur de l'écoulement  $h^*$  est correcte.
- ◆ Le premier pas du correcteur de SIMPLE est introduit pour donner un champ de la vitesse  $\bar{U}^{**}, \bar{V}^{**}$  lequel satisfait l'équation discrétisée de la continuité.
- ◆ Il en résulte que les équations qu'on trouve sont semblables aux équations de correction de la vitesse (IV-19), (IV-20) de SIMPLE.
- ◆ A partir de cette étape on utilise un pas de correction supplémentaire dans l'algorithme PISO, on utilise une notation légèrement différente :

$$h^{**} = h^* + h' \quad (\text{IV-71})$$

$$\bar{U}^{**} = \bar{U}^* + \bar{U}' \quad (\text{IV-72})$$

$$\bar{V}^{**} = \bar{V}^* + \bar{V}' \quad (\text{IV-73})$$

Ces formules sont utilisées pour définir les vitesses corrigées  $\bar{U}^{**}, \bar{V}^{**}$

$$\bar{U}_P^{**} = \bar{U}_P^* + d_{Px} (h'_o - h'_c) \quad (\text{IV-74})$$

$$\bar{V}_P^{**} = \bar{V}_P^* + d_{Py} (h'_s - h'_n) \quad (\text{IV-75})$$

Comme dans les équations de l'algorithme SIMPLE (IV-74), (IV-75) est substitué dans l'équation discrétisée de la continuité (IV-21), on obtient l'équation de la correction de la côte de la surface libre (IV-38) avec ses coefficients et son terme de la source.

Cette étape est appelée la première équation de la correction de la profondeur de l'écoulement.

Une fois les corrections de la profondeur de l'écoulement sont obtenues, les composantes des vitesses  $\bar{U}^{**}$  et  $\bar{V}^{**}$  peuvent être obtenues à travers les équations (IV-74), (IV-75).

• **Le deuxième pas de correction**

PISO exécute un deuxième pas de correction.

Les équations discrétisées de la vitesse pour  $\bar{U}^{**}$  et  $\bar{V}^{**}$ , sont :

$$a_{Px} \bar{U}_P^{**} = \sum a_{nb} \bar{U}_{nb}^* + (h_o^{**} - h_c^{**}) A_{Px} + b_{Px} \quad (\text{IV-76})$$

$$a_{Py} \bar{V}_P^{**} = \sum a_{nb} \bar{V}_{nb}^* + (h_s^{**} - h_n^{**}) A_{Py} + b_{Py} \quad (\text{IV-77})$$

Si on fait la deuxième correction de la vitesse ( $\bar{U}^{***}, \bar{V}^{***}$ ), les équations (IV-76) et (IV-77), peuvent être écrites de la manière suivante :

$$a_{Px} \bar{U}_P^{***} = \sum a_{nb} \bar{U}_{nb}^{**} + (h_o^{***} - h_c^{***}) A_{Px} + b_{Px} \quad (\text{IV-78})$$

$$a_{Py} \bar{V}_P^{***} = \sum a_{nb} \bar{V}_{nb}^{**} + (h_s^{***} - h_n^{***}) A_{Py} + b_{Py} \quad (\text{IV-79})$$

Par soustraction de l'équation (IV-76) de (IV-78) et (IV-77) de (IV-79), on aboutit à :

$$\bar{U}_P^{***} - \bar{U}_P^{**} = \frac{\sum a_{nb} (\bar{U}_{nb}^{**} - \bar{U}_{nb}^*)}{a_{Px}} + (h_o'' - h_c'') d_{Px} \quad (\text{IV-80})$$

$$\bar{V}_P^{***} - \bar{V}_P^{**} = \frac{\sum a_{nb} (\bar{V}_{nb}^{**} - \bar{V}_{nb}^*)}{a_{Py}} + (h_s'' - h_n'') d_{Py} \quad (\text{IV-81})$$

Où,  $h''$  est la deuxième correction de la côte de la surface libre, et  $h^{***}$  est obtenue par la relation suivante :  $h^{***} = h^{**} + h''$

A partir des équations de correction des vitesses (IV.80) et (IV.81), on définit les expressions de correction de la vitesse à chaque interface de volume de contrôle :

$$\bar{U}_c^{***} - \bar{U}_c^{**} = \frac{\sum a_{nb} (\bar{U}_{nb}^{**} - \bar{U}_{nb}^*)}{a_c} + (h_p'' - h_j'') d_c \quad (\text{IV-82})$$

$$\bar{U}_o^{***} - \bar{U}_o^{**} = \frac{\sum a_{nb} (\bar{U}_{nb}^{**} - \bar{U}_{nb}^*)}{a_o} + (h_o'' - h_p'') d_o \quad (\text{IV-83})$$

$$\bar{V}_n^{***} = \bar{V}_n^{**} + \frac{\Sigma a_{nb} \left( \bar{V}_{nb}^{**} - \bar{V}_{nb}^* \right)}{a_n} + \left( h_p'' - h_N'' \right) d_n \quad (\text{IV-84})$$

$$\bar{V}_s^{***} = \bar{V}_s^{**} + \frac{\Sigma a_{nb} \left( \bar{V}_{nb}^{**} - \bar{V}_{nb}^* \right)}{a_s} + \left( h_s'' - h_p'' \right) d_s \quad (\text{IV-85})$$

En substituant les relations (IV.82), (IV.83), (IV.84) et (IV.85) dans l'équation discrétisée de la continuité (IV.21), on peut déterminer l'équation de la correction de la cote de la surface libre, qu'est défini par :

$$\begin{aligned} H_c \left[ \bar{U}_c^{**} + \frac{\Sigma a_{nb} \left( \bar{U}_{nb}^{**} - \bar{U}_{nb}^* \right)}{a_c} + \left( h_p'' - h_E'' \right) d_c \right] \Delta y - H_o \left[ \bar{U}_o^{**} + \frac{\Sigma a_{nb} \left( \bar{U}_{nb}^{**} - \bar{U}_{nb}^* \right)}{a_o} + \left( h_o'' - h_p'' \right) d_o \right] \Delta y \\ H_n \left[ \bar{V}_n^{**} + \frac{\Sigma a_{nb} \left( \bar{V}_{nb}^{**} - \bar{V}_{nb}^* \right)}{a_n} + \left( h_p'' - h_N'' \right) d_n \right] \Delta x - H_s \left[ \bar{V}_s^{**} + \frac{\Sigma a_{nb} \left( \bar{V}_{nb}^{**} - \bar{V}_{nb}^* \right)}{a_s} + \left( h_s'' - h_p'' \right) d_s \right] \Delta x \\ \frac{\left( h_p - h_p^0 \right)}{\Delta t} \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.86})$$

En arrangeant l'équation (IV.85), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\left( h_p - h_p^0 \right)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \left[ \Sigma a_{nb} \left( \bar{U}_{nb}^{**} - \bar{U}_{nb}^* \right) \right] \left[ \frac{H_c}{a_c} \Delta y - \frac{H_o}{a_o} \Delta y \right] + \left[ \Sigma a_{nb} \left( \bar{V}_{nb}^{**} - \bar{V}_{nb}^* \right) \right] \left[ \frac{H_n}{a_n} \Delta x - \frac{H_s}{a_s} \Delta x \right] \\ - \left[ H_c \Delta y d_c h_p'' + H_o \Delta y d_o h_o'' + H_n \Delta x d_n h_N'' + H_s \Delta x d_s h_s'' \right] \\ + \left[ H_c d_c \Delta y + H_o d_o \Delta y + H_n d_n \Delta x + H_s d_s \Delta x \right] h_p'' \\ + \left[ \bar{U}_c^{**} H_c \Delta y - \bar{U}_o^{**} H_o \Delta y + \bar{V}_n^{**} H_n \Delta x - \bar{V}_s^{**} H_s \Delta x \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.87})$$

$$b_p'' = \frac{\left( h_p - h_p^0 \right)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \left[ \Sigma a_{nb} \left( \bar{U}_{nb}^{**} - \bar{U}_{nb}^* \right) \right] \left[ \frac{H_c}{a_c} \Delta y - \frac{H_o}{a_o} \Delta y \right]$$

On pose :

$$+ \left[ \Sigma a_{nb} \left( \bar{V}_{nb}^{**} - \bar{V}_{nb}^* \right) \right] \left[ \frac{H_n}{a_n} \Delta x - \frac{H_s}{a_s} \Delta x \right] \quad (\text{IV.88})$$

On suppose que :

$$\left[ \bar{U}_c^{**} H_c \Delta y - \bar{U}_o^{**} H_o \Delta y + \bar{V}_n^{**} H_n \Delta x - \bar{V}_s^{**} H_s \Delta x \right] = 0 \quad (\text{IV.89})$$

On remplace les formules (IV.32), (IV.33), (IV.34), (IV.35) dans la relation

(IV.89), l'équation de correction de la profondeur de l'écoulement est :

$$a_P h_P'' = a_E h_E'' + a_N h_N'' + a_S h_S'' + b_P'' \quad (IV.90)$$

L'équation (IV.90) est résolue pour obtenir la deuxième correction de la profondeur de l'écoulement  $h''$

La profondeur de l'écoulement deux fois corrigée est obtenue à partir de la relation suivante :

$$h''' = h'' + h' = h^* + h' + h'' \quad (IV.91)$$

• **L'équation de la deuxième correction de la profondeur de l'écoulement**

$$a_{I,J} h_{I,J} = a_{I-1,J} h_{I-1,J} + a_{I+1,J} h_{I+1,J} + a_{I,J-1} h_{I,J-1} + a_{I,J+1} h_{I,J+1} + b_{I,J} \quad (IV.92)$$

• **Les équations de correction du champ de vitesse**

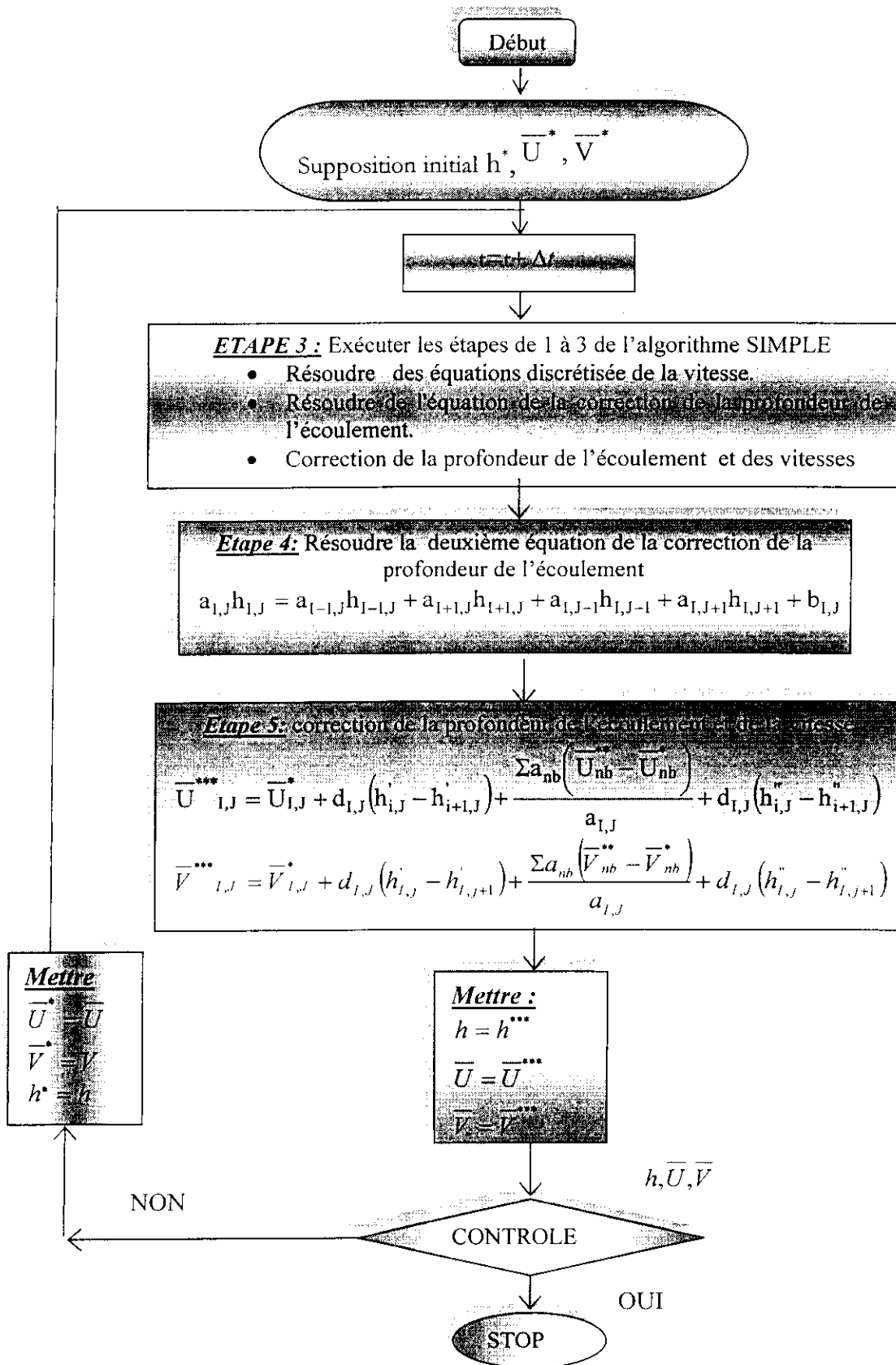
$$\bar{U}_{I,J}''' = \bar{U}_{I,J}'' + d_{I,J} (h_{I,J}' - h_{I+1,J}') + \frac{\sum a_{nb} (\bar{U}_{nb}'' - \bar{U}_{nb}')}{a_{I,J}} + d_{I,J} (h_{I,J}'' - h_{I+1,J}'') \quad (IV.93)$$

$$\bar{V}_{I,J}''' = \bar{V}_{I,J}'' + d_{I,J} (h_{I,J}' - h_{I,J+1}') + \frac{\sum a_{nb} (\bar{V}_{nb}'' - \bar{V}_{nb}')}{a_{I,J}} + d_{I,J} (h_{I,J}'' - h_{I,J+1}'') \quad (IV.94)$$

**L'organigramme de l'algorithme PISO**

L'organigramme de l'algorithme PISO est représenté par [12] :





## **IV. Résolution matricielle**

On a établi dans le chapitre III, le système d'équations algébriques pour chaque point P du maillage.

Dans la première partie de ce chapitre, on a présenté les méthodes itératives du type prédiction correction qui conduisent à une équation de correction de la côte de surface libre (SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC, PISO).

Par conséquent, on peut déterminer les paramètres physiques qui caractérisent notre problème pour chaque nœud P du domaine de calcul.

Chaque équation de ce système algébrique présente des inconnues des nœuds voisins à chaque point P. Ce qui impose la résolution matricielle. Celle-ci doit être effectuée à chaque pas de temps.

Il existe deux méthodes pour la résolution matricielle.

- Méthode directe ;
- Méthode indirecte (itérative).

Le choix de la méthode de résolution est fonction de plusieurs paramètres :

- ◆ Performant en terme de temps de calcul ;
- ◆ Une méthode qui demande moins de stockage mémoire.

### **1. Les méthodes directes**

On peut citer à titre d'exemple :

- La règle de Cramer ;
- L'élimination de Gauss.

Pour un système d'équations de N équations à N inconnues, le nombre d'opérations à effectuer est évalué à  $N^3$ , avec un stockage de  $N^2$  valeurs des coefficients des équations dans l'espace mémoire.

### **2. Les méthodes itératives**

Permis les méthodes qui existent :

- Méthode itérative de Jacobi ;
- Méthode itérative de Gauss Seidel ;
- Méthode itérative Pivot maximum.

Ces méthodes sont faciles à programmer, mais elles sont très lentes pour un système d'équations large.

Par conséquent, on a choisit la méthode par blocs.

### **3. La méthode par bloc, et L'algorithme de TDMA**

Cette méthode est très récente. Le principe de cette méthode est de partager le domaine en différents sous domaine (bloc). Chaque bloc ou sous domaine contient un certain nombre de cellules de contrôle (volume de contrôle).

La résolution d'un système d'équations algébriques dans un bloc est établie en supposant que les blocs voisins sont connus, par suite on change de bloc de calcul, et on continue les itérations sur tout le domaine jusqu'à que le critère de convergence soit vérifié.

Dans un problème bidimensionnel en coordonnées cartésiennes. On doit fixer les  $x$  et on établit un balayage selon  $y$  croissantes pour résoudre notre système d'équations.

En utilisant dans l'application de cette méthode l'algorithme de TDMA.

#### 4. Algorithme de TDMA

Le TDMA est un algorithme développé par Thomas en 1942. L'intérêt de cet algorithme est de résoudre les matrices tri diagonales par une méthode itérative dans le cas 2D ou 3D.

Cet algorithme est appelé algorithme de Thomas ou TDMA (*Tri Diagonal Matrix Algorithm*).

#### 5. Application de L'algorithme de Tomas (TDMA) pour un problème bidimensionnel

Soit le système d'équations algébriques qui constitue une matrice tri diagonale suivante :

$$D_1\varphi_1 - \alpha_1\varphi_2 = C_1 \quad (\text{IV-95})$$

$$-\beta_2\varphi_1 + D_2\varphi_2 - \alpha_2\varphi_3 = C_2 \quad (\text{IV-96})$$

$$-\beta_3\varphi_2 + D_3\varphi_3 - \alpha_3\varphi_4 = C_3 \quad (\text{IV-97})$$

$$-\beta_4\varphi_3 + D_4\varphi_4 - \alpha_4\varphi_5 = C_4 \quad (\text{IV-98})$$

$$\dots\dots\dots$$

$$-\beta_n\varphi_{n-1} + D_n\varphi_n - \alpha_n\varphi_{n+1} = C_n \quad (\text{IV-99})$$

$$-\beta_{n+1}\varphi_n + D_{n+1}\varphi_{n+1} = C_{n+1} \quad (\text{IV-100})$$

On peut présenter ces équations de la forme généralisée suivante:

$$-\beta_j\varphi_{j-1} + D_j\varphi_j - \alpha_j\varphi_{j+1} = C_j \quad (\text{IV-101})$$

Les équations de (IV-96) à (IV-99) peuvent être exprimées sous la forme suivante :

Pour le nœud 2 :

$$\varphi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2}\varphi_3 + \frac{\beta_2}{D_2}\varphi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (\text{IV-102})$$

Pour le nœud 3 :

$$\varphi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3}\varphi_4 + \frac{\beta_3}{D_3}\varphi_2 + \frac{C_3}{D_3} \quad (\text{IV-103})$$

Pour le nœud 4 :

$$\varphi_4 = \frac{\alpha_4}{D_4}\varphi_5 + \frac{\beta_4}{D_4}\varphi_3 + \frac{C_4}{D_4} \quad (\text{IV-104})$$

Pour le nœud  $n$  :

$$\varphi_n = \frac{\alpha_n}{D_n}\varphi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n}\varphi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n} \quad (\text{IV-105})$$

En introduisant l'expression de  $\varphi_2$  (IV-102) dans l'équation (IV-103), on trouve :

$$\varphi_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \varphi_4 + \left( \frac{\beta_3 \left( \frac{\beta_2}{D_2} \varphi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \quad (\text{IV-106})$$

On définit par :

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \quad \text{et} \quad C_2' = \frac{\beta_2}{D_2} \varphi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (\text{IV-107})$$

En remplaçant  $A_2$  et  $C_2'$  dans l'équation (IV-106), on obtient :

$$\varphi_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \varphi_4 + \left( \frac{\beta_3 C_2' + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad (\text{IV-108})$$

On pose :

$$A_3 = \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \quad \text{et} \quad C_3' = \frac{\beta_3 C_2' + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \quad (\text{IV-109})$$

Si on injecte ces deux relations (IV-109) dans l'équation (IV-108), on aboutit à :

$$\varphi_3 = A_3 \varphi_4 + C_3' \quad (\text{IV-110})$$

En continuant le processus de substitution, on a pour le  $J^{\text{emc}}$  noeud :

$$\varphi_j = A_j \varphi_{j+1} + C_j' \quad (\text{IV-111})$$

$$\text{où : } A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad \text{et} \quad C_j' = \frac{\beta_j C_{j-1}' + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad (\text{IV-112})$$

Pour résoudre n'importe quelle système d'équations algébriques, on doit les réarranger sous la forme de l'équation (IV-111), sachant que les deux paramètres  $A_j$ ,  $C_j'$  sont déterminées par l'expression (IV-112), sur toute la ligne, en variant  $j$  de 2 jusqu'à  $n$ .

Par contre, la connaissance de  $\varphi$  à  $(n+1)$ , permet de calculer tous les autres variables de  $\varphi$  en variant  $j$  de  $n$  jusqu'à 2 à partir de la relation (IV-112).

## **6. Application du TDMA pour le système d'équations de Saint Venant (TDMA ligne par ligne)**

L'équation générale de notre système d'équations de Saint Venant est établie comme suit :

$$a_P \varphi_P = a_S \varphi_S + a_N \varphi_N + a_E \varphi_E + a_O \varphi_O + b \quad (\text{IV-115})$$

En utilisant le schéma (IV. 3), en faisant varier  $i$  de 1 jusqu'à  $(n+1)$  suivant la direction des  $x$  croissants et en faisant varier  $j$  de 1 jusqu'à  $(m+1)$  suivant la direction des  $y$  croissants.

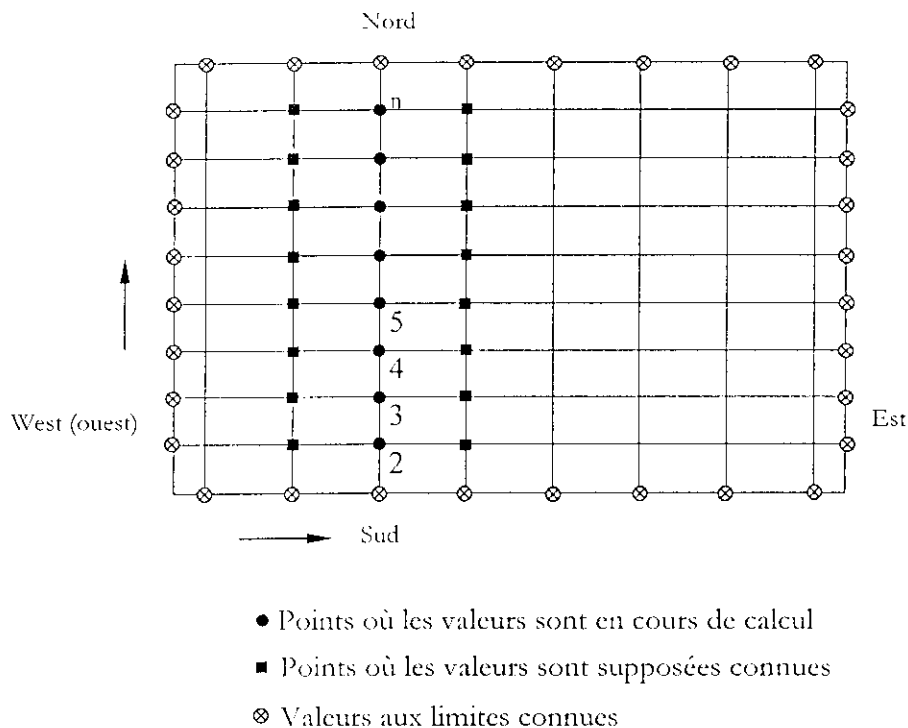
L'équation (IV-115) est réarrangée sous la forme suivante :

$$-a_S \varphi_S + a_P \varphi_P - a_N \varphi_N = a_E \varphi_E + a_O \varphi_O + b \quad (\text{IV-116})$$

Donc le coté droit de l'équation (IV-116) est supposé connu, on doit calculer  $\varphi_S, \varphi_N, \varphi_P$ .

Si on pose :  $\alpha_j \equiv a_N, \beta_j \equiv a_S, D_j \equiv a_P$  et  $C_j = a_O \varphi_O + a_E \varphi_E + b$ , l'équation (IV-116) sera équivalente à l'équation (IV-111) ;

En utilisant cette équation, on fait le balayage de l'Ouest à l'Est pour résoudre ce système d'équations sur tout le domaine de calcul.



## Conclusion

L'algorithme PISO est utilisé que pour des écoulements stables et des fluides compressibles.

L'algorithme SIMPLER et SIMPLER sont des version améliorée de l'algorithme SIMPLE, l'un est développé en 1984 et l'autre en 1980, puisque il y a plus de

Chapitre V : **Application**

L'exemple de simulation que nous présentons est celui d'un écoulement non permanent dans un canal rectangulaire.

Les dimensions du canal sont :

La largeur est égale à 2,4m.

La longueur est de 24,5m.

Les données sont :

- Le pas d'espace suivant x est égal à :  $\Delta x = 0,5\text{m}$ .
- Le pas d'espace suivant y est égal à :  $\Delta y = 0,2\text{m}$ .
- Le pas de temps est de 5s.

Les conditions initiales sont :

$$U_0 = 0.428\text{m/s}$$

$$h_0 = 0.171\text{m}$$

$$V_0 = 0\text{m/s}$$

### 1. Variation de la profondeur d'écoulement

Les figures V.1÷ V.2 donnent la variation de la profondeur d'écoulement le long du canal pour différents temps.

Figure V.1 :Variation du la cote de la surface libre le long du canal à  $y=1,5\text{m}$  et  $T=500\text{s}$

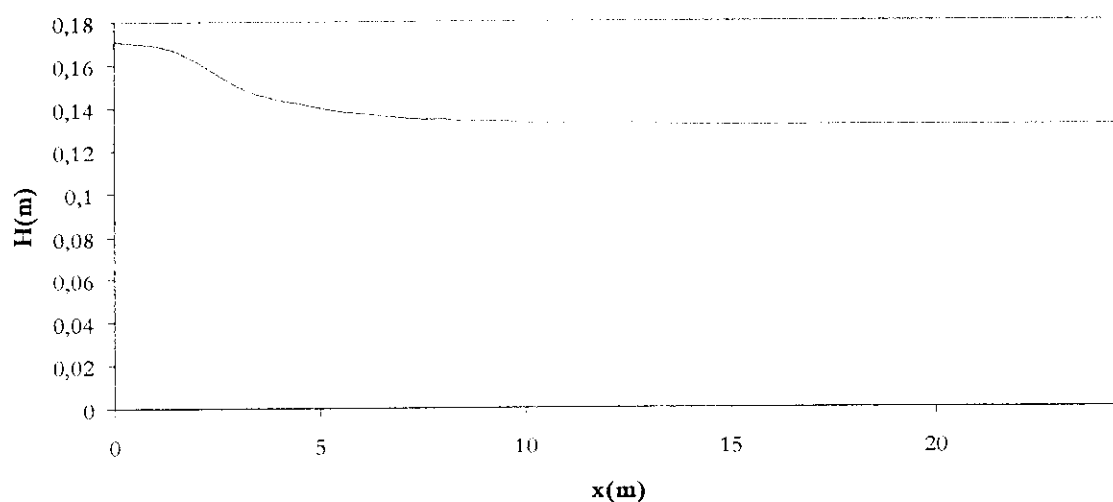
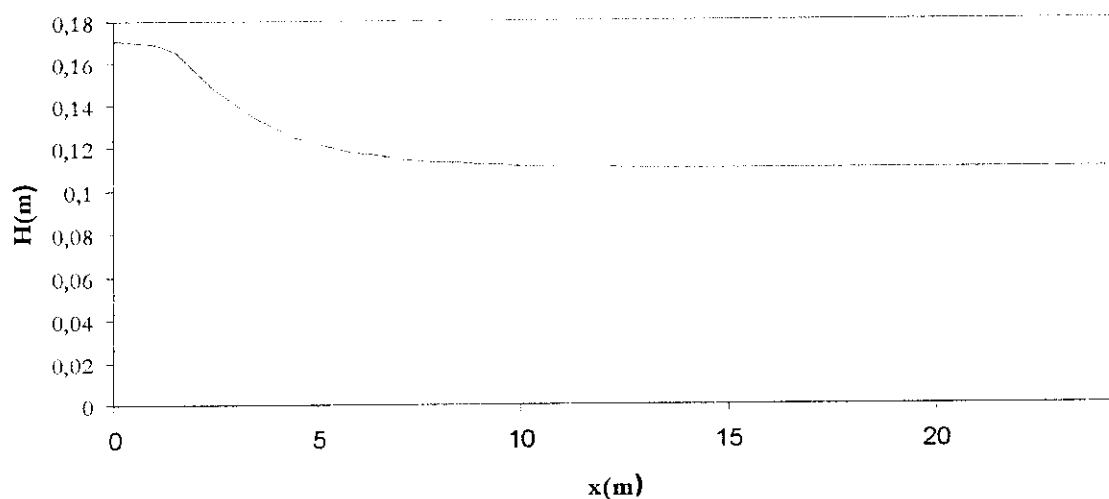


Figure V. 2 : Variation de la cote de la surface libre le long du canal  
à  $y=1,2\text{m}$  et  $T=1000\text{s}$

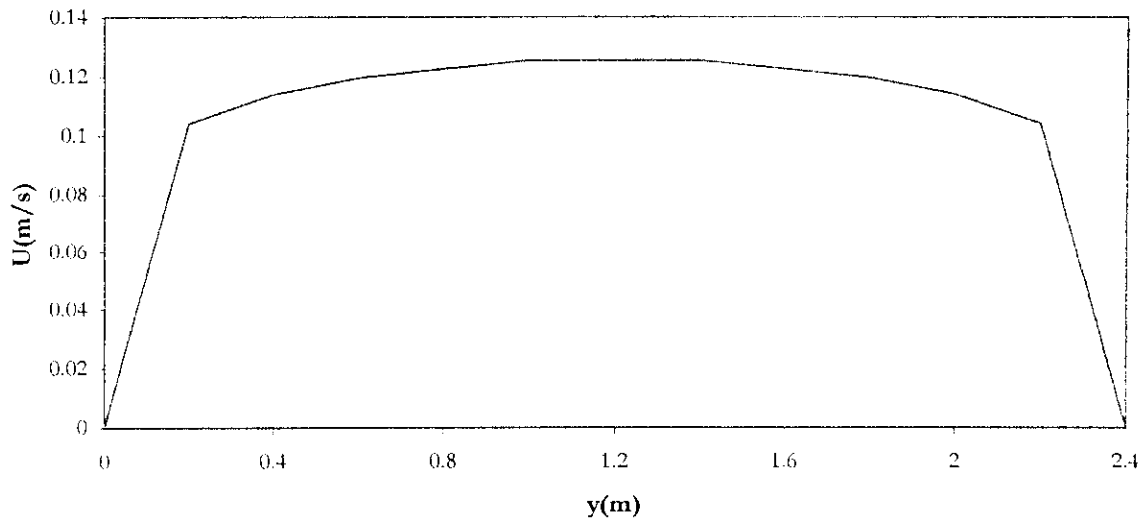


A travers les résultats obtenus, on voit clairement que la profondeur varie très lentement.

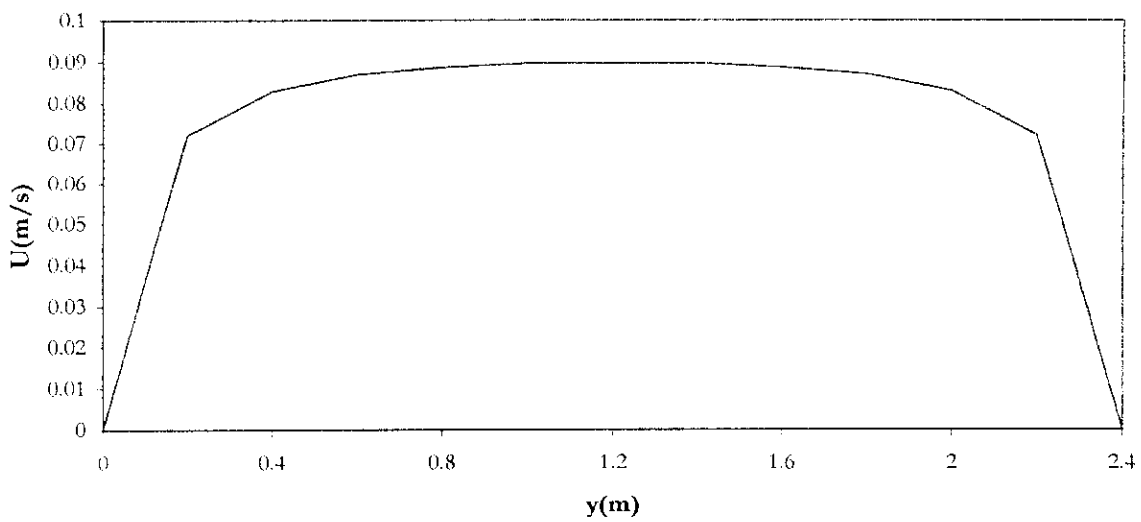
## 2. Variation de la vitesse $U$ sur la largeur du canal

Les figures V.3 ÷ V.8 donnent la distribution de la vitesse  $U$  sur la largeur du canal à des distances différentes et pour différents temps.

**Figure V. 3: Distribution de la vitesse U sur la largeur du canal à  $x=5\text{m}$  et  $T=500\text{s}$**

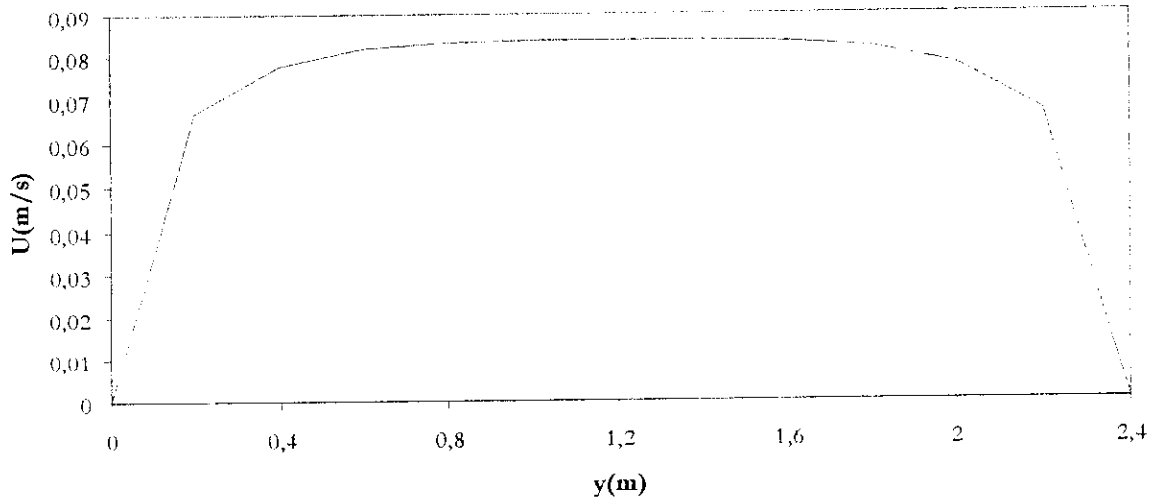


**Figure V. 4: Distribution de la vitesse U sur la largeur du canal à  $x=10\text{m}$  et  $T=500\text{s}$**

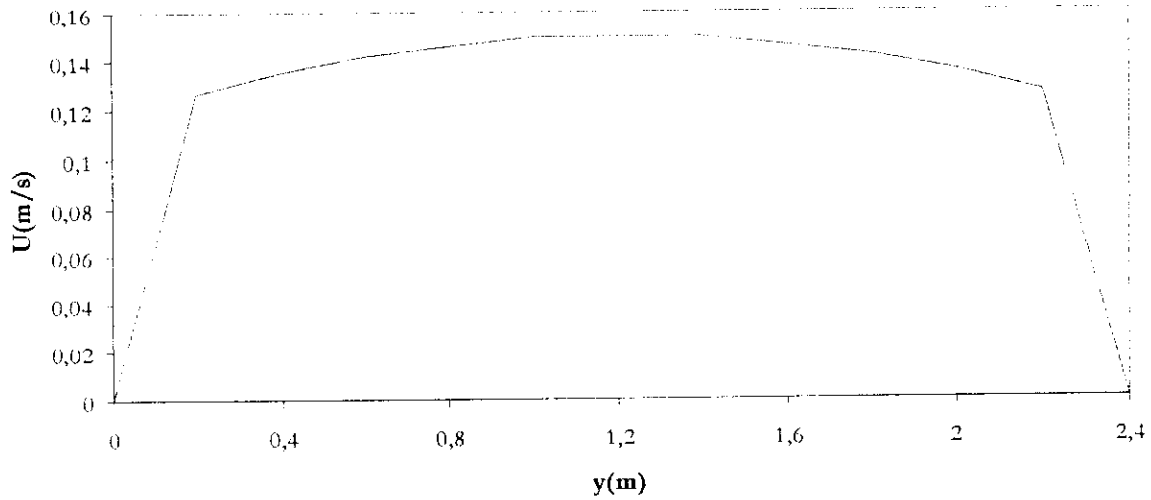




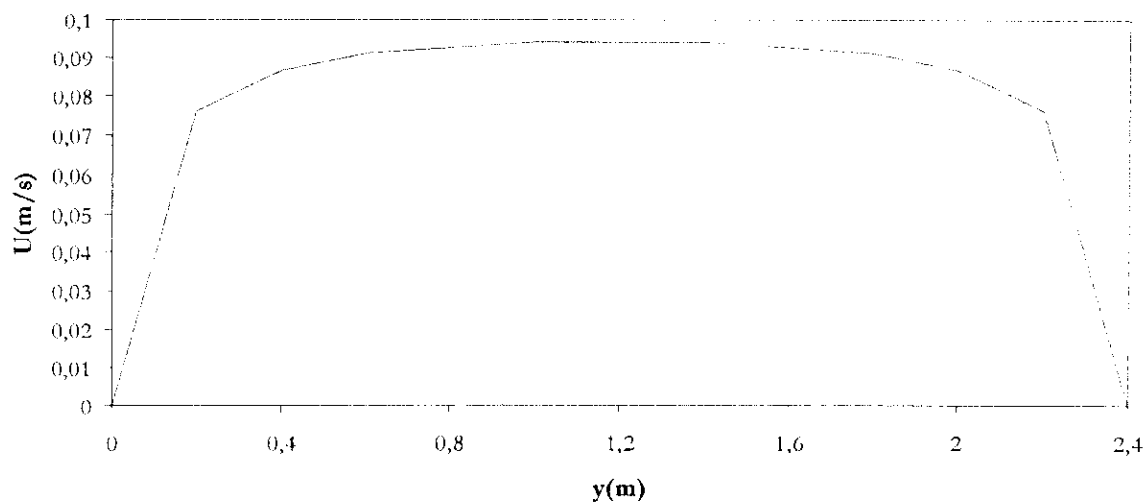
**Figure V.5 : Distribution de la vitesse  $U$  sur la largeur du canal à  $x=15\text{m}$  et  $T=500\text{s}$**



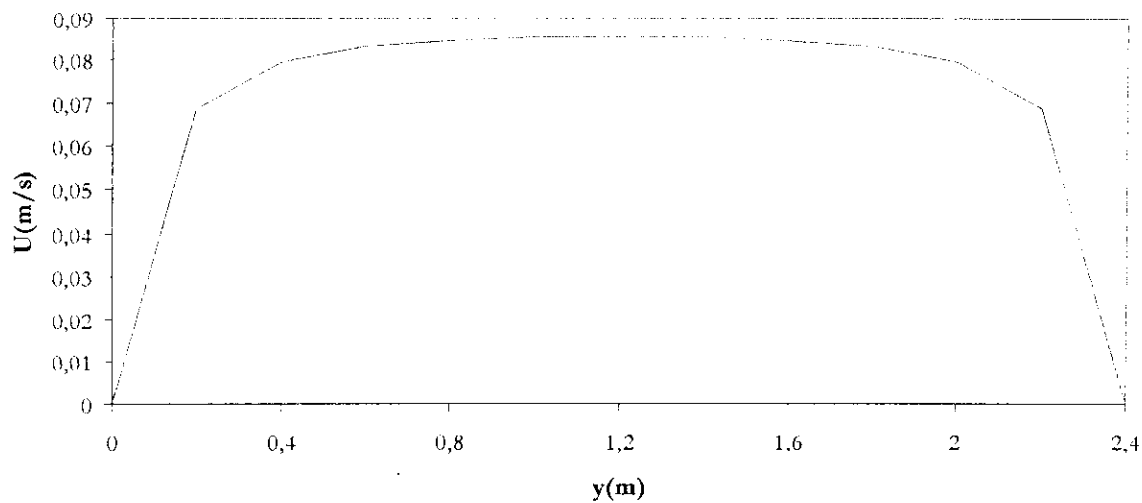
**Figure V.6 : Distribution de la vitesse  $U$  sur la largeur du canal à  $x=5\text{m}$  et  $T=1000\text{s}$**



**Figure V.7: Distribution de la vitesse U sur la largeur du canal à  $x=10\text{m}$  et  $T=1000\text{s}$**



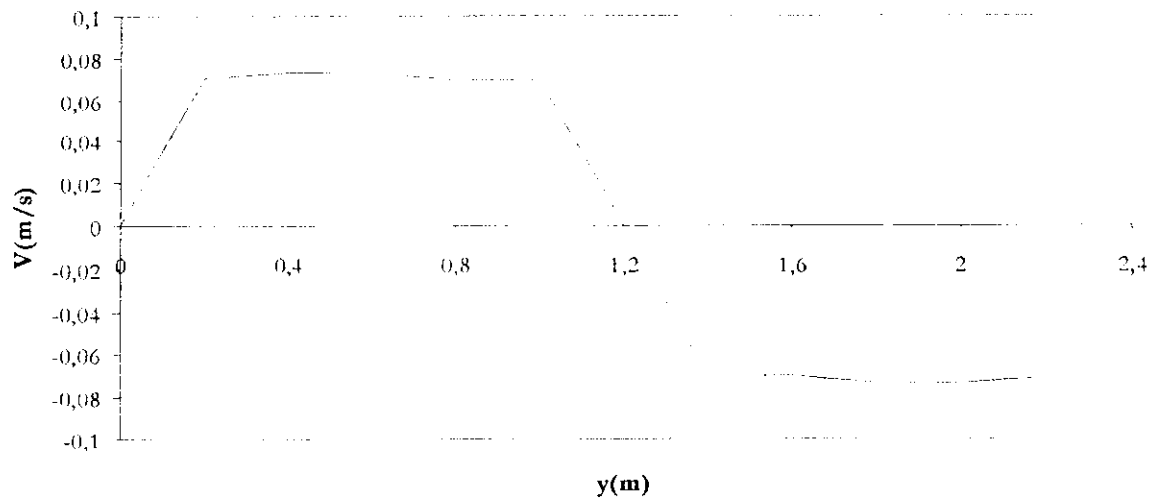
**Figure V.8: Distribution de la vitesse U sur la largeur du canal à  $x=15\text{m}$  et  $T=1000\text{s}$**



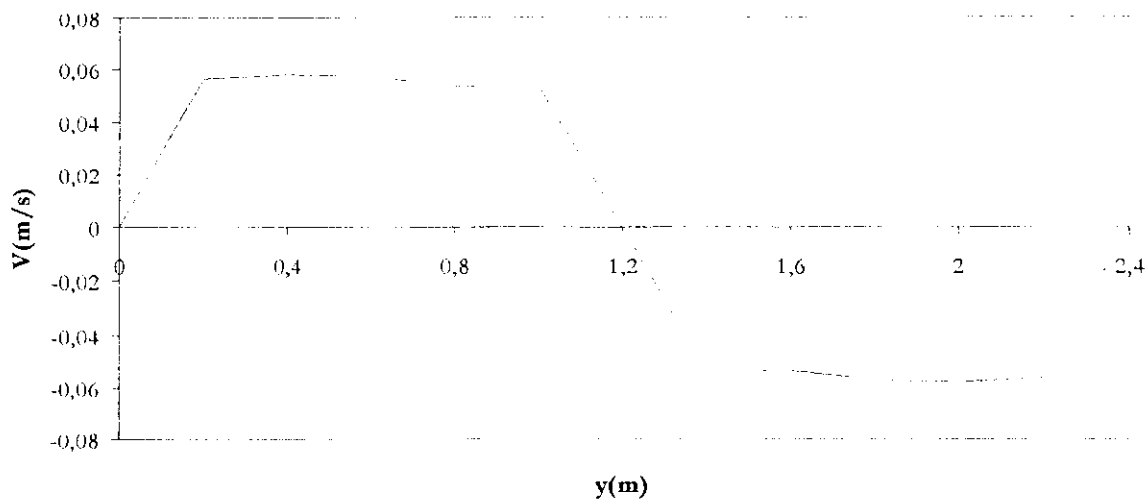
### 3. Variation de la vitesse V sur la largeur du canal

Les figures V.9 ÷ V.14 donnent la répartition de la vitesse V à différentes distances et à différents temps.

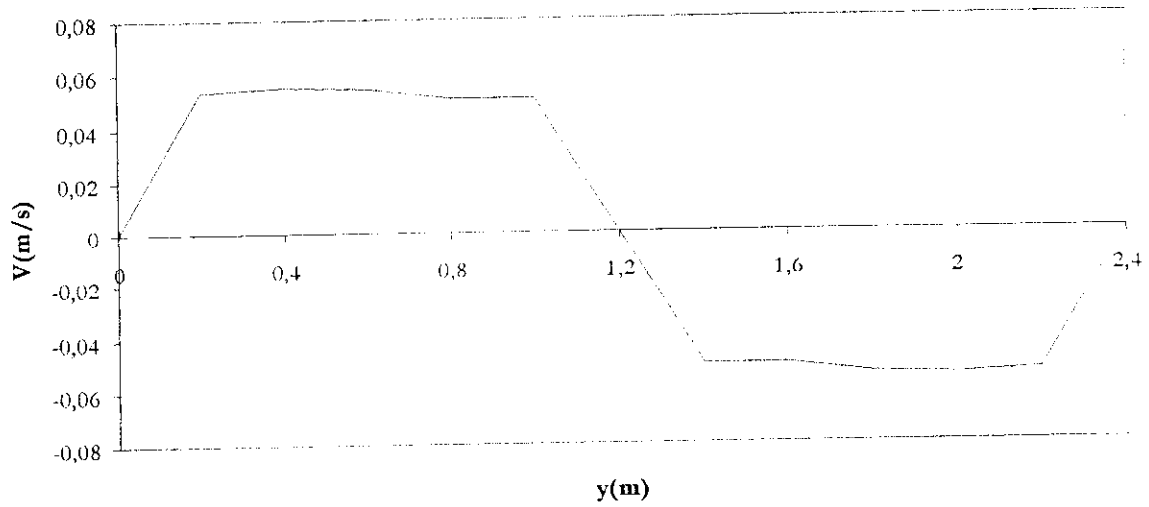
**Figure V.9 : Distribution de la vitesse  $V$  sur la largeur du canal à  $x=5m$  et  $T=500s$**



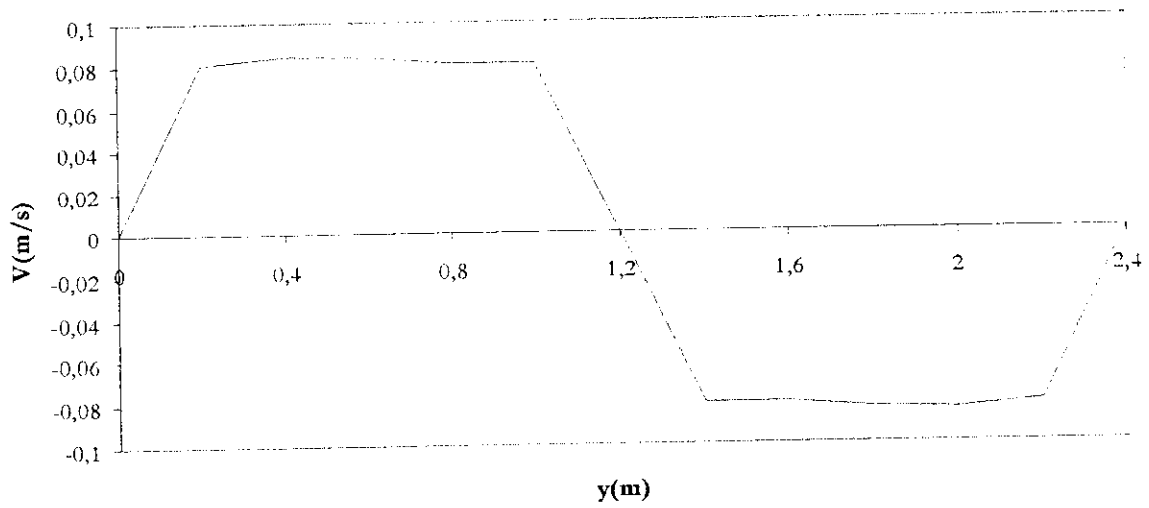
**Figure V.10: Distribution de la vitesse  $V$  sur la largeur du canal à  $x=10m$  et  $T=500s$**



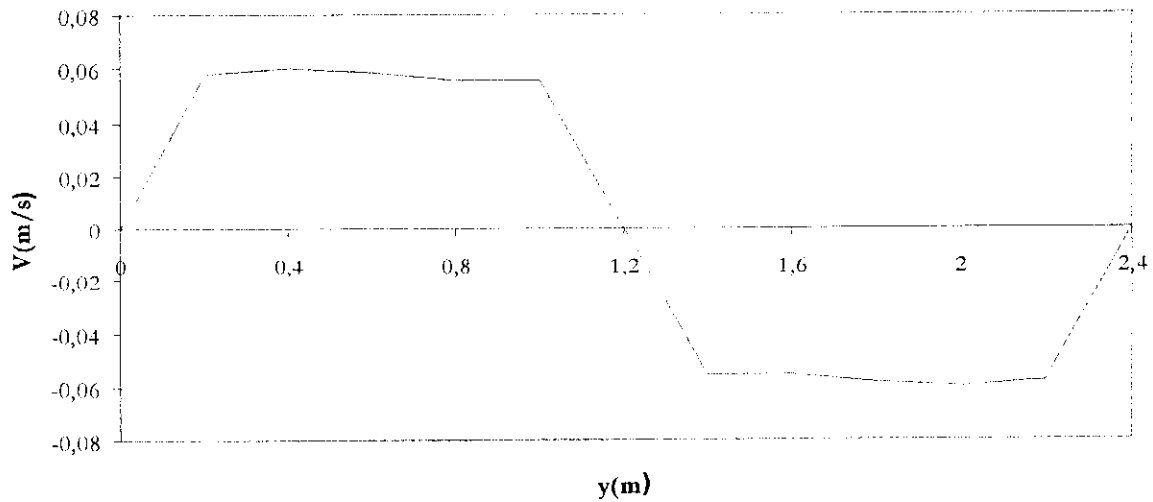
**Figure V.11: Distribution de la vitesse  $V$  sur la largeur du canal à  $x=15m$  et  $T=500s$**



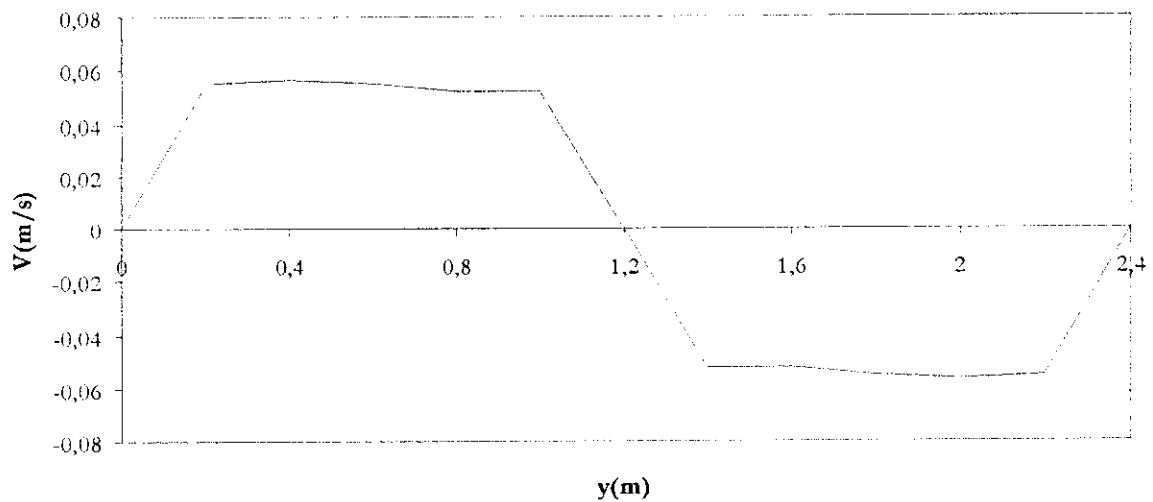
**Figure V.12: Distribution de la vitesse  $V$  sur la largeur du canal à  $x=5m$  et  $T=1000s$**



**Figure V.13: Distribution de la vitesse  $V$  sur la largeur du canal à  $x=10\text{m}$  et  $T=1000\text{s}$**



**Figure V.14 : Distribution de la vitesse  $V$  sur la largeur du canal à  $x=15\text{m}$  et  $T=1000\text{s}$**



#### 4. Interprétation des résultats

A travers ces résultats nous pouvons dire que l'écoulement correspond bien à celui que nous nous attendions à obtenir :

- Présence d'une bonne symétrie par rapport à l'axe longitudinale ;
- Les vitesses diminuent au niveau des rives le long du canal.

Une bonne analyse des résultats se fera plus tard, vu que d'autres essais numériques sont programmés.

## CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire a été de développer un outil de simulation numérique d'écoulement à surface libre.

Le modèle mathématique utilisé est celui de Saint Venant. La méthode numérique de résolution est la méthode des volumes finis.

La discrétisation spatiale est faite à l'aide du schéma hybride et la discrétisation temporelle par le schéma implicite.

Plusieurs algorithmes de résolution ont été présentés, notre choix s'est porté sur l'algorithme Simplé.

Un programme de calcul a été élaboré pour la résolution des équations algébriques de Saint Venant.

Après maints essais numériques, nous pouvons dire que le programme actuellement est fonctionnel.

Au vu des difficultés rencontrées lors de l'élaboration du programme de calcul, il serait judicieux de tester d'autres algorithmes de résolution et d'autres schémas de discrétisation spatiale.

---

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Carlier, M. (1986), « Hydraulique générale et appliquée ». Edition Eyrolles.
- [2] Chassaing, P. (2000). «Turbulence en mécanique des fluides : Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur». Collection Polytechnic, CEPADUES- Edition.
- [3] Graba, M. (2002). « Etude numérique de la dispersion longitudinale dans les cours d'eau ». Mémoire de magister de l'Université de Bejaia.
- [4] Hager, H. & Sinniger, R. (2000). « Constructions Hydrauliques » Presses Polytechnique Romandes
- [5] Hug, M. (1975). « Mécanique des fluides appliquée ». Edition Eyrolles
- [6] Ider, K. (2004). «Modélisation Hydrodynamique d'un cours d'eau – Application à oued Soummam». Mémoire de magister de l'Ecole Nationale Polytechnique.
- [7] Laroui, D. (1994), «Contribution à l'étude bidimensionnelle de la dispersion de polluants dans les milieux à découvert par la méthode Simple modifiée de Patankar ». Thèse de Magister de l'Ecole Nationale Polytechnique.
- [8] Patankar, S.V. (1980). «Numerical heat transfer and fluid flow». Hemisphere Publishing Corporation, 196p.
- [9] Talamali, S. (2002). «lHydrodynamique des rivières et les systèmes d'information géographiques ». Mémoire de Magister de l'Ecole Nationale Polytechnique.
- [10] Tingsanchali, T. (1987). «Stability analysis of two dimensional depth average model ». Journal of hydraulic engineering, volume 115, N°9.
- [11] Schiestel, R. (1993). «Modélisation et simulation des écoulements turbulents». Traité des nouvelles Technologies, Edition Hermes, 442p.
- [12] Versteec, H. K. & Mala Lasekera, W. (1995). «An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method»
- [13] Web. [www.mec.etsmtl.ca/cours/sys860/documents/cours8.pdf](http://www.mec.etsmtl.ca/cours/sys860/documents/cours8.pdf) - Résultat complémentaire-
- [14] Web. [www.wesip.campus.univ-poitiers.fr/enseignement/thermique\\_mecaflu/modelisation/voluf.html](http://www.wesip.campus.univ-poitiers.fr/enseignement/thermique_mecaflu/modelisation/voluf.html) - 14k -.
- [15] Web. [www.uqar.qc.ca/rlepage/modelisation/eleminfini.PDF](http://www.uqar.qc.ca/rlepage/modelisation/eleminfini.PDF).
- [16] Web. [www.uqar.qc.ca/rlepage/modelisation/VOLFINIS.PDF](http://www.uqar.qc.ca/rlepage/modelisation/VOLFINIS.PDF).
- [17] Web. [www.uqar.qc.ca/rlepage/modelisation/mod%C3%A9lisation\\_et\\_simulation.htm](http://www.uqar.qc.ca/rlepage/modelisation/mod%C3%A9lisation_et_simulation.htm) - 6k -.
- [18] Web. [www.wesip.campus.univ-poitiers.fr/enseignement/thermique\\_mecaflu/modelisation/navstok.pdf](http://www.wesip.campus.univ-poitiers.fr/enseignement/thermique_mecaflu/modelisation/navstok.pdf).
- [19] Web. [www.wesip.campus.univ-poitiers.fr/enseignement/thermique\\_mecaflu/modelisation/residuponderc.pdf](http://www.wesip.campus.univ-poitiers.fr/enseignement/thermique_mecaflu/modelisation/residuponderc.pdf).
- [20] Web. [www.lyon.cemagref.fr/doc/these/buil/buil3.pdf](http://www.lyon.cemagref.fr/doc/these/buil/buil3.pdf).
- [21] Web. [www.collegesherbrooke.qc.ca/~binetbr/these.pdf](http://www.collegesherbrooke.qc.ca/~binetbr/these.pdf).
- [22] Web. [www.mahery.math.u-psud.fr/theses-orsay/1999/5627.html](http://www.mahery.math.u-psud.fr/theses-orsay/1999/5627.html) - 7k -.
- [23] Web. [www.mahery.math.u-psud.fr/~faure/amiens.pdf](http://www.mahery.math.u-psud.fr/~faure/amiens.pdf) -.
- [24] Web. [www.ulg.ac.be/aerodyn/fr/cours/anamf/cours.html](http://www.ulg.ac.be/aerodyn/fr/cours/anamf/cours.html) - 7k -.
- [25] Web. [www.cours.polymtl.ca/gch6914/files/Chapitre%201%20-%20Introduction.pdf](http://www.cours.polymtl.ca/gch6914/files/Chapitre%201%20-%20Introduction.pdf).
-