

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

6/04

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique

Département Hydraulique



Mémoire de Projet de Fin d'Etude

Thème

*Etude des effets d'interaction dynamique sur un barrage
poids en béton*

Proposé par :
Mr. O.Belhadj
Mr. A.Bilek.

Fait par l'étudiant :
Djebouri Idir.

Session : Septembre 2004.

10/0

10/0

A la mémoire de mon père

A ma très chère mère qui a su me pousser à travailler, et qui m'a tout donner.

A mon très chère frère Ahmed

A mes deux sœurs Fazia et Ouerdia

A mes proches amis L. Mourad, K. Omar, T. Ahmed, H. Djamel ...

A tous mes proches et toutes les personnes bien aimées.

U.S. DEPARTMENT OF JUSTICE
FEDERAL BUREAU OF INVESTIGATION
WASHINGTON, D. C. 20535

Remerciements

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Je tiens à remercier Mr.O.Belhadj et Mr A Bilek pour leur conseils et critiques, ainsi que leur aide apportée pour l'élaboration de ce travail.

Je remercie également tous les enseignants de département Hydraulique qui ont contribué à notre formation, ainsi que tous qui nous ont donné la plus simple chose qui soit-elle dans le domaine du savoir.

SECRET
1950

موضوع دراسة هو: نتائج تبادل القوى الدينامكية على سد ثقلي خرساني.
في هذا العمل, قمنا بدراسة أفعال متبادلة في الجملة المزدوجة سد- مائع وذلك باستعمال
طريقة العناصر المنتهية ثنائية البعد.
كفرضية: المياه معتبرة لزجة و منضغطة, نعتبر المساحة الخلفية لسد مائلة, الخرسانة متجانسة.
بعد دراستنا هذه, تم الحصول على تاريخ استجابة السد لهزة زلزالية.
الكلمات المفتاحية: مائع بنية, سد, الخرسانة, الخزان, لزوجة مرونة, العناصر المنتهية, هزة زلزالية.

Résumé :

Le thème de notre travail s'intitule : les effets d'interaction dynamique sur un barrage poids en béton.

Dans ce travail, nous avons étudié les effets d'interaction dans le système couplé barrage réservoir en utilisant une méthode d'éléments finis bidimensionnels.

Comme suppositions, on a pris l'eau de réservoir viscoélastique, un parement amont du barrage incliné, le béton est pris isotropique et homogène. On a obtenu la réponse du barrage à une excitation sismique, ainsi que ses modes et fréquences propres.

Mots clés : fluide structure, barrage, réservoir, éléments finis, viscoélastique, excitation sismique.

Summary :

The topic of our work is entitled: effects of dynamic interaction on a concrete dam.

In this work, we studied the effects of interaction in the coupled system dam reservoir by using a two dimensional finite elements method.

As assumptions, we suppose the reservoir water as viscoelastic, the upstream face of dam is inclined, the concrete is taken isotropic and homogeneous. We have obtained the response of concrete dam to the seismic excitation, his fundamental eigenmodes and frequencies.

Key words: fluid structure, dam, reservoir, finite elements, viscoelastic, seismic excitation.

1950
1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958
1959
1960

CHAPITRE I :

I-	Introduction générale.....	1.
II-	Méthode de résolutions des système fluide-structure.....	3.
III-	Organisation du document	4.

CHAPITRE II :

MODELISATION MATHEMATIQUE.....		5.
I	Introduction	5.
II	Modélisation du système barrage réservoir.....	6.
II-1-1	Equations de bases et modélisation du fluide de réservoir.....	8.
II-1-2	Les conditions aux limites fluides.....	10.
II-2	Modélisation du barrage.....	14.
II-2-1	La théorie de l'élasticité linéaire.....	14.
II-2-2	Le modèle mathématique du barrage.....	17.

CHAPITRE III :

PRESENTATION DE LA MEF ET MODELISATION NUMERIQUE.....		19.
I	Présentation de la méthode des éléments finis	19.
I-I	Introduction.....	19.
I-III	Généralités.....	19.
I-III-1	Définitions	21.
I-III-2	Approximation par éléments finis	21.
I-III-2-1	Définitions.....	22.
I-III-2-2	La définition analytique de la géométrie.....	22.
I-III-3-1	Elément de référence	23.
I-III-3-2	Approximation sur un élément de référence	25.
I-III-3-2-1	Expression de la fonction approchée $U(x)$	25.
I-IV	Les opérations de dérivation et d'intégration	26.
I-V	L'intégration	27.
II	Modélisation Numérique et discrétisation des formes intégrales	28.
II-I-	Formulation variationnelle.....	29.
II-I-1-	Formulation forte	29.
II-I-2	Formulation faible.....	29.
II-II-1	La formulation intégrale du barrage	30.
II-II-2	La formulation intégrale du réservoir	31.
II-II-3	Les expressions des différent matrices.....	32.
II-II-3-1	La matrice masse solide M_s	32.
II-II-3-2	La matrice raideur du solide K_s	33.
II-II-3-3	La matrice de couplage Q	34.
II-II-3-4	La matrice masse Fluide M_F	34.
II-II-3-5	La matrice amortissement Fluide C_F	35.
II-II-3-6	La matrice 'raideur' Fluide K_F	35.

Chapitre IV

I	Présentation des méthodes de résolution adoptées	36
I-I	Introduction	36
I-II	Les méthodes de résolution	37
I-II-1	Problème de valeurs propres	37
III-2	Méthode de résolution	37
I-II-2-1	Méthode de sous-espace	37
I-II-2	Problème de propagation ou de valeurs initiales	39
I-II-2-1	Schéma de différences finies centrales explicites	39
I-II-2-2	Schéma de prédiction correction implicite de Newmark	40
I-II-2-3	Schéma double prédiction	41
II	Développement des différentes phases de programme.....	42
II-1	Maillage et numérotations locale et globale	42
II-II	Calcul de matrices élémentaires	45
II-II	Assemblage des matrices élémentaires	47
II-III	Organigrammes de Résolution :.....	47
Chapitre IV		
I	Analyse modale	52
I-I	Mode propre et fréquence propre	52
I-II	Modes propres du barrage	54
I-III	Les modes propres de fluide de réservoir	55
II	Réponse sismique de barrage	56
II-I	L'effet de paramètre compressibilité	59
II-II	L'effet de l'inclinaison de parement amont	60
II-III	Application d'accélérographes	60
Conclusion.....		64

Erratum :

- Page 8 ligne 6 (Chapitre II) : visqueuse (au lieu de visqueux).
 Page 30 ligne 9 (Chapitre III) : donnent (au lieu de donne.).
 Page 31 ligne 2 (Chapitre III) : termes de droite (au lieu de termes droits).
 Page 36 ligne 17 (Chapitre IV) : tu essaie de dire qqch (n'a pas lieu d'être).

Caractéristique du Barrage de Pine Flat (Californie) :

- Masse volumique $\rho=2483$ (Kg/m³).
- Coefficient de poison $\nu=0.2$
- Module de Young $E=34500$ (MPa).
- Hauteur de barrage $H_b=122$. m.
- Largeur de la base $L_b =96$.
- Hauteur de la crête 19.2 m.
- Largeur de la crête 9.75
- Fruit amont $f_m=0.0$.
- Fruit aval $f_v =0.85$.

je suppose que la masse volumique de l'eau de réservoir est de 1000 kg/m³
 viscosité je l'ai supposé de 10 e-6

Barrage de Oued-Fodda:

- Masse volumique $\rho=2640$ (Kg/m³).
- Coefficient de poison $\nu=0.2$
- Modtule de Young $E=24600$ (MPa).
- Hauteur de barrage $H_b=101$. m
- Largeur de la base $L_b=65.5$ (m)
- Hauteur de la crête 4.6(m)
- Largeur de la crête 5.0 (m.)
- Fruit amont $f_m=0.1$
- Fruit amont $f_v =0.55$.

je suppose que la masse volumique de l'eau de réservoir est de 1000 kg/m³
 viscosité je l'ai supposé de 10 e-6

Les données des deux séismes :

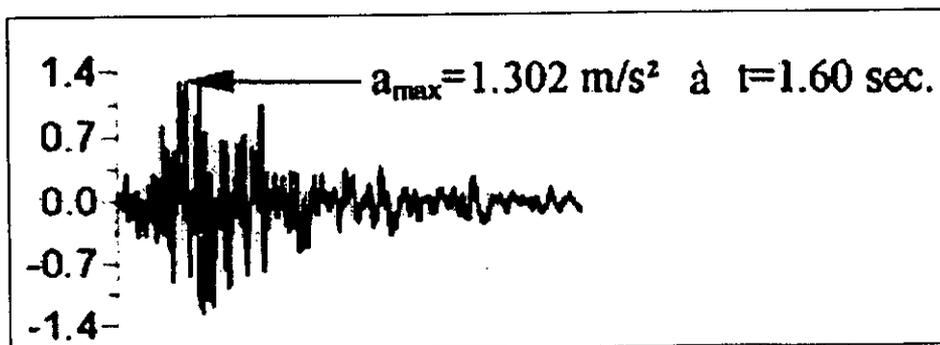


Figure 1 : accélérographe de la réplique d'Al Attaf

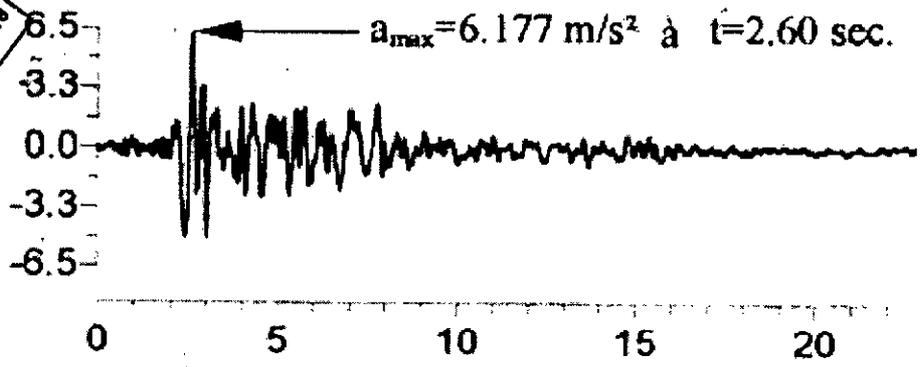


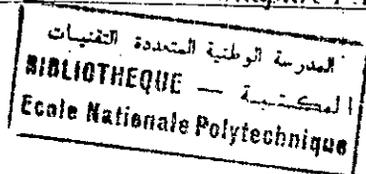
Figure2 : accélérographe du séisme de Loma Preita.

Le calcul de la pression est effectué au niveau du fond de réservoir.

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE I:

INTRODUCTION GENERALE.



I. Introduction Générale.

Dans beaucoup de problèmes physiques, il est très fréquent que deux sous systèmes interagissent entre eux, dans ce cas, si l'interaction est prédominante, il est pratiquement impossible d'envisager l'obtention d'une solution indépendante pour l'un des sous systèmes, on doit résoudre le système global. De tels systèmes sont dits couplés, et le couplage peut être faible ou important selon le degré d'interaction.

L'interaction dynamique fluide structure en est un, et constitue un cas évident. Dans ce dernier cas ni le fluide ni la structure (un barrage, une plate forme off shore ...) ne peut être résolu indépendamment de l'autre, ceci est dû à l'existence d'une interface entre les deux sous systèmes.

O.C.Zienkiewicz a donné la définition suivante pour les systèmes couplés et qui pourra, cependant, s'appliquer à une large classe de problèmes de ce type : 'Les systèmes et formulations couplés, sont ceux applicables à plusieurs domaines et à des variables indépendantes, qui, habituellement, mais pas toujours, décrivent des phénomènes physiques différents et dans lesquels

- * Aucun domaine ne peut être résolu séparément de l'autre.
- * aucune variable d'un sous système, dépendante de l'autre sous système ne pourra être éliminée des équations différentielles.

Il convient de classer les systèmes couplés en deux catégories :

Classe I : cette classe concerne les problèmes dans lesquels le couplage se fait sur des interfaces via les conditions aux limites qu'on y impose.

Classe II : cette classe concerne les problèmes dans lesquels les domaines se chevauchent en s'imbriquant, dans ce cas le couplage s'effectue à l'aide des équations différentielles décrivant les systèmes physiques.

Un cas typique de la première catégorie, c'est le problème d'interaction fluide structure. (Figure I et II.) où il peut y avoir différents domaines qui s'interagissent entre eux.

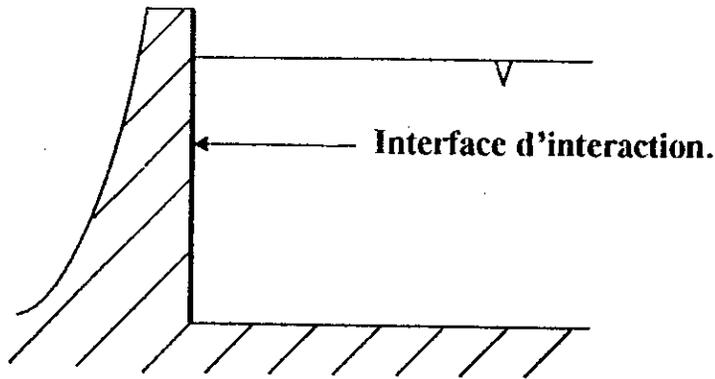


Figure I : interaction barrage-réservoir

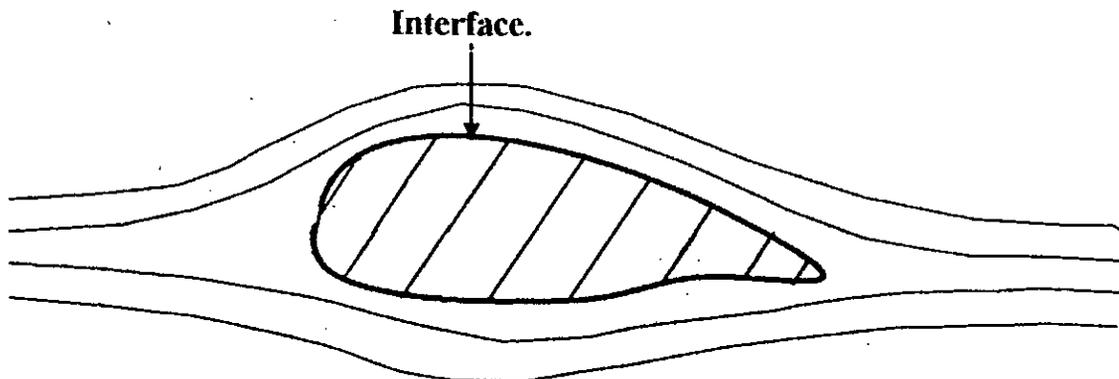


Figure II : Interaction fluide-structure

L'interaction entre le barrage et l'eau de la retenue est dû au fait que les pressions hydrodynamiques affectent les déformations du monolithe solide qui influence à son tour ces mêmes pressions. Une telle interaction introduit une dépendance de fréquences des termes hydrodynamiques des équations de mouvement qui affectent la réponse dynamique du barrage. Les termes hydrodynamiques peuvent être interprétés comme une force additionnelle (qui diffère selon la différence du mouvement du sol : horizontal et vertical), une masse additionnelle, et un amortissement supplémentaire. La masse hydrodynamique additionnelle pour un réservoir plein à fondation rigide allonge la période de résonance fondamentale (pour

le cas de barrage de Pine Flat, elle passe de 0.317s à 0.394s). L'allongement prédit analytiquement de la période de vibrations

II. Méthode de résolutions des système fluide-structure :

Deux méthodes sont envisageables pour la résolution des systèmes couplés, soit on résout le système simultanément en se basant sur des considérations de compatibilité et d'équilibre pour joindre ensemble les différents éléments composants, soit en analysant séparément chaque composant, et on synthétise la solution de l'ensemble en appliquant les conditions de compatibilité et d'équilibre ; la première démarche est généralement préférable, car la simultanéité constitue une caractéristique primordiale des systèmes couplés.

Dans le cas des systèmes fluide-structures le problème devient, cependant, plus compliqué du fait du couplage de structures de différentes natures, en effet en plus des complexités introduites par la compressibilité et la viscosité de fluide, la condition à la limite interface fluide structure induit d'importantes modifications dans les techniques de résolution et de superposition. Ainsi dans le but d'utiliser, avec un minimum de modifications et d'extensions, les codes de calculs disponibles en littérature, il est préférable de résoudre le problème de vibrations et de réponse transitoire des systèmes barrage-réservoir par la simultanéité des équations couplées.

Lors de la résolution d'un problème d'interaction fluide-structure, il y a plusieurs paramètres qui rentrent en jeu, quelques paramètres sont très importants et doivent impérativement être pris en compte, les effets de dissipations associés aux propriétés constitutives viscoplastiques de la structure et de fluide ainsi que l'effet de radiation dans le fluide en constituent deux des plus importants, aussi bien la formulation doit tenir compte de la configuration géométrique de fluide, souvent non bornée, pour modéliser correctement le problème de radiation à l'infini y découlant, quant aux effets de dissipation dans le fluide dus à la viscosité ils ont été supposés minimes selon différents auteurs (1% à 3%), toutefois, dans ce travail on les a pris en compte ; on doit pas omettre de rappeler l'effet de la compressibilité de l'eau qui est considéré important, et qui a été quantifiée par Chopra à l'aide de rapport

(T_s/T), où T_s est la période propre de vibration de système barrage réservoir et T est la période de vibration propre de l'eau de réservoir.

III. Organisation du document :

Chaque chapitre dans cette étude traite une partie spécifique, nécessaire et complémentaire pour les autres chapitres ; on commence par une introduction où le problème d'interaction fluide structure est défini brièvement et où l'on expose les axes des méthodes de résolutions, puis on passe à la modélisation mathématique de problème, où on pose le modèle mathématique de barrage et de son réservoir, ainsi que les conditions aux limites qu'on y impose, par la suite, on présente le chapitre relatif à la méthode des éléments finis où l'on donne quelques concepts sur cette méthode et on discrétise les équations mathématiques, les expressions explicites des matrices caractéristiques de barrage et de son réservoir y sont explicité, en vu de pouvoir mettre en œuvre un code de calcul pour résoudre les équations algébriques auxquelles nous aboutirons. Nous passons, par la suite à l'exposition, un peu brève et concise des méthodes et des outils mathématiques utilisés pour aboutir aux résultats graphiques, ainsi qu'à la présentation des techniques de programmation et les algorithmes de calculs utilisés. Dans le chapitre suivant, on fait une application à l'aide de programme élaboré, où, on essaye d'interpréter et de justifier les graphiques des résultats obtenus, et on termine enfin par une conclusion, où l'on pourra affirmer si l'analyse des systèmes barrages réservoirs par les méthodes choisies(éléments finis, méthode de résolution de Newmark, sous-espace pour les vibrations libres) et les conditions imposées aux frontières est satisfaisante ou encore, elle donne des résultats imprécis.

CHAPITRE II:

***EQUATIONS DE BASE ET MODELISATION
MATHEMATIQUE.***

I. Introduction :

La formulation mathématique et le choix de variables de champs solide et liquide sont des étapes très importantes, vu qu'elles conditionnent la complexité de l'analyse qui s'ensuivra ; car les systèmes d'équations matricielles, après discrétisation en éléments finis, résultants pour un choix donné des variables descriptives peuvent être très différent d'un autre choix, et demandent ainsi l'utilisation des techniques de résolution coûteuses en calculs. Usuellement le champ des pressions p pour le fluide, et celui des déplacements u pour le solide sont utilisés comme variables nodales, quoique ce choix conduit à l'obtention d'un système global de vibrations libres (où les termes d'amortissement et ceux de chargement ne sont pas pris en compte) non symétrique, donc une symétrisation s'imposera pour un tel choix.

D'autres formulations existent dans la littérature, telles que les deux formulations symétriques (u, ϕ, p) et (u, θ, p) , dans lesquelles on remarque que la variable u qui représente le champ de déplacement dans le solide est toujours retenue, tandis que le champ fluide est décrit par deux variables : p , la variable commune pour les deux formulations variationnelles, et qui caractérise toujours le champ des pressions dans le fluide, la variable ϕ , dans la première formulation, qui décrit le potentiel des déplacements, et la variable θ , dans la seconde, qui décrit le potentiel des vitesses. Une description du solide par deux variables se fait, en considérant en plus de u , la variable qui caractérise les forces de réactions dynamiques ou les accélérations nodales dans la structure ; toutes les formulations à trois variables décrites précédemment ont l'avantage de conduire à des systèmes symétriques.

Dans cette étude, on considère la formulation (u, p) , la seule formulation avec laquelle nous travaillerons par la suite, tout en adoptant des techniques appropriées de symétrisation du système matriciel résultant (pour les vibrations libres). L'analyse est basée sur le concept de sous domaines dans lequel le réservoir et le barrage sont traités en tant que deux sous-systèmes. Les aspects structuraux et hydrodynamiques désaccouplés du barrage et du réservoir sont présentés séparément. L'accouplement se produit par l'intermédiaire de l'interface, qui tient compte des forces produites de l'un sur l'autre entre le barrage-réservoir.

Suppositions

En considérant les différents facteurs qui affectent le mouvement du fluide, les suppositions suivantes sont retenues pour le fluide de réservoir :

- i) Le fluide est homogène, visqueux et linéairement compressible.
- ii) Le champ d'écoulement est irrotationnel.
- iii) Les déplacements et leurs dérivés spatiaux sont petits.
- iv) Le fluide s'étend à l'infini dans la direction amont.
- v) Il est supposé qu'il n'y a aucune source dans le réservoir, et le phénomène de cavitation ne se produit nulle part.

Le fait de prendre en compte la viscosité de fluide constitue une extension par rapport aux considérations avec lesquelles différents auteurs ont déjà travaillé

Pour le structure de barrage, les suppositions usuelles suivantes sont faites :

- i) Le matériau du barrage est considéré homogène et isotrope
- ii) Les propriétés du matériau du barrage sont prises linéaires
- iii) Le barrage est pris flexible

II . Modélisation du système barrage réservoir :

Les procédures de calcul de la réponse dynamique des barrages poids en béton utilisent souvent la formulation en déplacement, comme il a été mentionné ci-dessus, puisque elle fournit une approche commode pour décrire le comportement mécanique des solides. La formulation est en termes de déplacements de particules matériels qui sont les quantités physiques d'intérêt. Des techniques standards d'éléments finies sont employées dans l'espace, discrétisent les équations de champ et produisent l'équation des matrices du barrage. La grille d'éléments finis est incluse dans le matériel et déplace avec lui, tels que chaque point nodal a le même mouvement avec lequel la particule matérielle coïncide. Les inconnus nodaux sont, donc, les composants des déplacements de particules.

La même approche peut être prolongée facilement pour modeler le comportement de l'eau. C'est avantageux puisqu'il offre la pleine compatibilité avec la formulation de structure menant à une équation symétrique simple de matrice pour le système fluide structure. Cependant, d'un point de vue informatique, la formulation en déplacement de l'eau produit

plus d'inconnus que la formulation conventionnelle utilisant l'équation d'ondes scalaire, comme elle introduit des difficultés relatives à la discrétisation de la condition d'irrotationnalité. En conséquence, elle augmente le coût d'analyses bidimensionnelles et rend des analyses tridimensionnelles presque inaccessibles. C'est à cause des deux raisons qu'on a choisit d'utiliser la formulation en pression pour le fluide, aussi doit-on affirmer que la variable qui nous intéresse dans le champ fluide c'est bien la pression, donc la variable caractéristique décrivant le champ fluide de réservoir c'est la pression p .

Dans toute cette étude, le système barrage réservoir est considéré comme un système globale composé des deux sous systèmes, formulé en termes, de déplacements de particules pour le sous système barrage et pressions pour le sous système fluide. L'interface est traitée comme si l'eau de barrage a un comportement non visqueux (puisque il n'est pris en compte que les composantes normales des efforts au niveau de cette interface). De petits déplacements sont assumés partout dans le système de sorte qu'il n'y ait aucune distinction entre n'importe quelle configuration déformée et la configuration initiale.

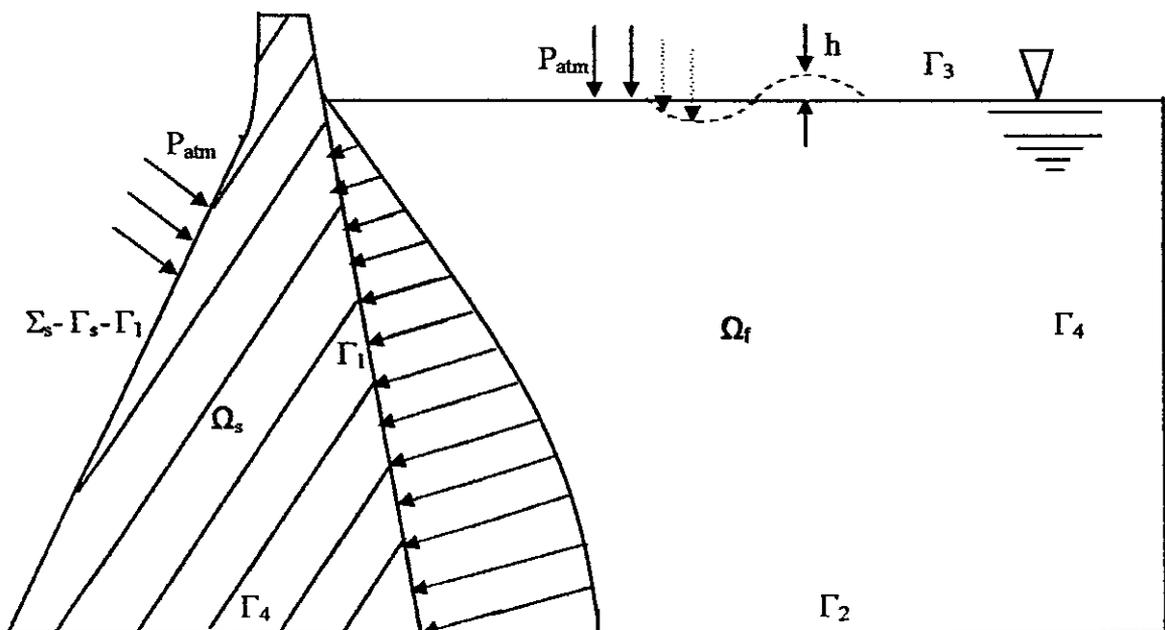


Figure 1: Système Barrage-Réservoir

II-1-1 . Equations de bases et modélisation du fluide du réservoir :

La forme condensée de l'équation de Navier Stokes qui régit l'équilibre dynamique des fluides en mouvement est reprise ici :

$$\rho_f \dot{\vec{v}} = \vec{f} - \nabla p + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla\vec{v}) + \mu\Delta\vec{v} \quad (\text{II-1})$$

La deuxième hypothèse faite sur le champ fluide, qui est pris irrotationnel, nous permet d'éliminer le troisième terme de second membre, et on garde le quatrième pour représenter les effets de la viscosité puisque l'eau de réservoir est prise visqueux, donc, on reprend la forme simplifiée de l'équation 1 :

$$\rho_f \dot{\vec{v}} = \vec{f} - \nabla p + \mu\Delta\vec{v} \quad (\text{II-2})$$

On associe à cette dernière équation, pour une description complète de fluide, l'équation de conservation de la masse et l'équation d'état, qui s'écrivent respectivement comme suit :

$$\dot{\rho}_f + \rho_f \nabla v = 0 \quad (\text{II-3})$$

Le fluide étant pris linéairement compressible, donc l'équation d'état de fluide est donnée par :

$$\dot{\rho}_f = \frac{\rho_f}{K} \dot{p} \quad (\text{II-4})$$

K est le module de compressibilité de l'eau. On combine les deux dernières équations, pour obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\rho_f}{K} \dot{p} + \rho_f \nabla v = 0 \quad (\text{II-5})$$

à partir de cette dernière équation, et en la multipliant par ∇^2 , c'est à dire en dérivant deux fois par rapport à l'espace on aura l'équation suivante :

$$\rho_f \nabla^3 v = -\frac{\rho_f}{K} \nabla^2 \dot{p} \quad (\text{II-6})$$

Toujours en dérivant l'équation (II-5), mais par rapport au temps cette fois, on obtient l'équation suivante :

$$\rho_f \nabla \dot{v} = -\frac{\rho_f}{K} \dot{p} \quad (\text{II-7})$$

On dérive l'équation (2-II) par rapport à l'espace, puis on élimine la variable v pour obtenir l'équation réarrangée suivante:

$$\nabla^2 p + \frac{\mu}{K} \nabla^2 \dot{p} - \frac{1}{C^2} \ddot{p} = 0 \quad (\text{II-8})$$

où : $C = \sqrt{\frac{K}{\rho_f}}$

désigne la célérité des ondes de compressions dans le fluide, pour l'eau, C est de l'ordre de 1440 m/s.

L'équation (II-8) c'est celle de propagation d'une onde de pression hydrodynamique, en 2-D, dans un milieu viscoélastique.

Dans l'hypothèse d'un fluide non visqueux, l'équation (II-8) se réduit à :

$$\nabla^2 p - \frac{1}{C^2} \ddot{p} = 0 \quad (\text{II-9})$$

et si on suppose que le fluide est incompressible en plus de la non viscosité, l'équation régissant la propagation de l'onde de pression se réduit dans ce cas à l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 p = 0 \quad (\text{II-10})$$

II-1-2 . Les conditions aux limites fluides :

Aux frontières de fluide, en vu de bien poser le problème et de le simplifié, les conditions suivantes sont imposées :

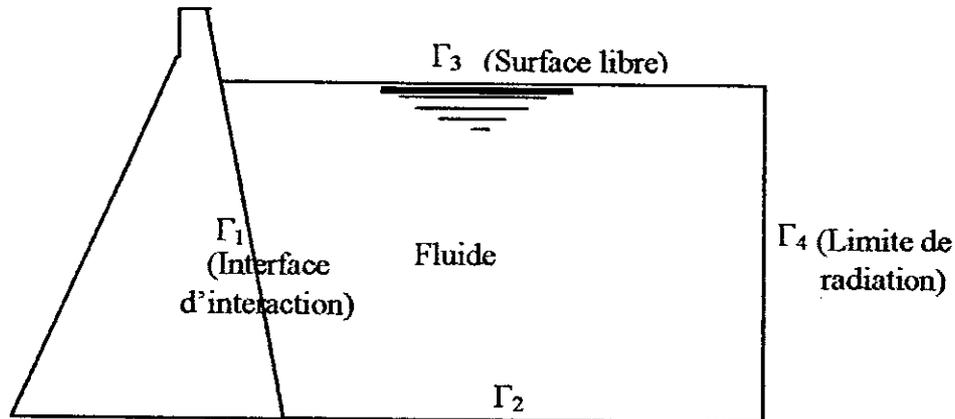


Figure II : Frontières de fluide

- Sur l'interface barrage réservoir Γ_1 : au niveau de cette limite, la liaison entre les interfaces des deux sous-domaines est considérée comme étant parfaite, c'est-à-dire que la continuité de déplacement et l'équilibre des contraintes doivent être vérifiés, et que l'interface fluide ne pourra pas s'écarter de celle du solide (fig III), cette condition est exprimée comme suit :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f \dot{v}_n = -\rho_f \ddot{u}_n \quad (\text{II-11})$$

où \ddot{u}_n désigne la projection des accélérations des particules sur la normale \mathbf{n} à la face amont du barrage.

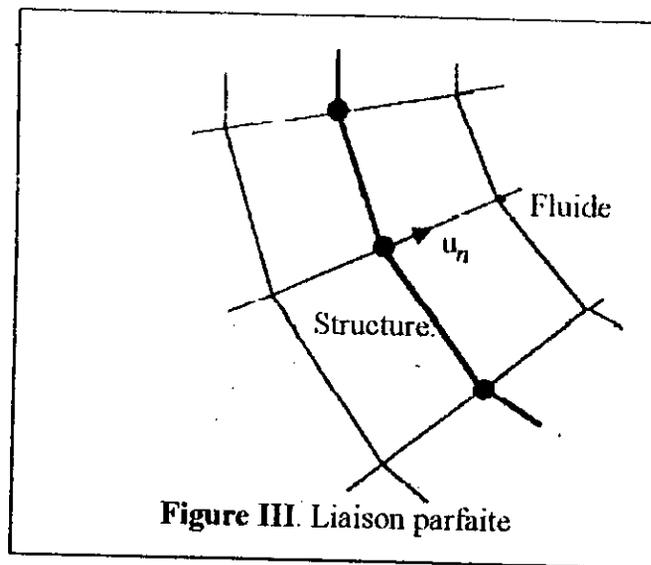


Figure III. Liaison parfaite

- **Sur la face inférieure du réservoir Γ_2** : les effets des sédiments et des alluvions se trouvant au fond du réservoir ont été modélés par les auteurs des travaux précédents ^(document Internet), en considérant un coefficient de réflexion α qui caractérise la réflectivité du fond du réservoir, le coefficient α est défini comme le rapport de l'amplitude de l'onde de pression réfléchi et de l'amplitude de celle propagée. Pour le cas considéré dans cette étude le séisme et le fond sont horizontaux et les effets de réflexion sont négligés et la condition au niveau de cette surface s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (II-12)$$

- **Sur la surface libre du réservoir Γ_3** :

la condition de la surface libre qui est souvent adoptée est donné par :

$$p = p_{atm} \Rightarrow p = 0 \quad (II-13)$$

ce qui traduit l'égalité entre la pression au niveau de la surface libre du réservoir et la pression atmosphérique, en négligeant de ce fait l'effet des ondes de surface. ceci est acceptable puisque, bien que les ondes de surface puissent être

importantes dans les cas de petits réservoirs, comme les châteaux d'eau , elles peuvent être négligées dans le cas des barrages . Toutefois , les effets des ondes de surfaces sont pris en compte en considérant une surface moyenne pour laquelle toute élévation ou abaissement de la surface actuelle d'une hauteur h se traduit par une variation de pression pouvant être prise isostatique :

$$p = \rho_f gh \quad (\text{II-14})$$

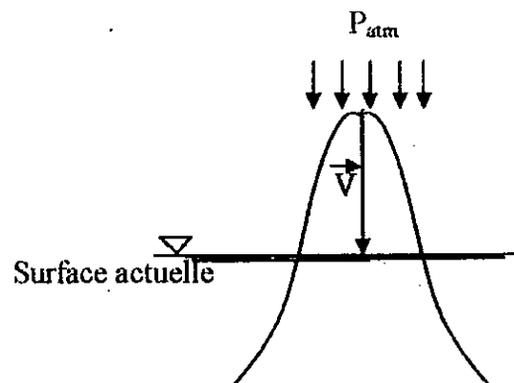


Figure IV : les ondes de surface

l'application de l'équation dynamique pour ce cas donne :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \ddot{h} \quad (\text{II-15})$$

et compte tenu de l'équation précédente (n°14), et on dérivant deux fois par rapport au temps on obtient la condition d'onde de surface linéarisée :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{g} \ddot{p} \quad (\text{II-16})$$

Sur la limite de troncature Γ_4 : pour délimiter le réservoir infini on doit imaginer une frontière non- réfléchissante verticale placée à une certaine distance en amont pour absorber les ondes de pression propagées. Dans notre cas on impose la condition présentée par Zienkiewicz et Newton pour les limites de radiation[12],[13] ; la solution générale de l'équation (n°1) peut s'écrire :

$$p = f(x - Ct) + g(x + Ct)$$

avec $g(x + Ct) = 0$ pour traduire la condition de non réflexion d'onde. La limite est supposée assez loin pour considérer l'onde de pression se propageant horizontalement en un front dans la direction x .

La dérivation de la condition (N°) par rapport au temps et à la normale permet de définir la condition appropriée comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = f' \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -Cf' \end{cases} \quad (\text{II-I})$$

$$\text{soit : } \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{C} \dot{p} \quad (\text{II-19})$$

donc le problème mathématique revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \nabla^2 p + \frac{\mu}{K} \nabla^2 \dot{p} - \frac{1}{C^2} \ddot{p} = 0 & |\Omega_f \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f \dot{v}_n = -\rho_f \ddot{u}_n & |\Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & |\Gamma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{g} \dot{p} & |\Gamma_3 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{C} \dot{p} & |\Gamma_4 \end{cases} \quad (\text{II-II})$$

la formulation variationnelle, en adoptant la formulation faible de type Galerkin-Ritz avec fonction poids δp , s'exprime par :

$$-\int_{\Omega_f} \delta \nabla p \nabla p d\Omega - \int_{\Omega_f} \delta p \dot{p} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \nabla p \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{II-20})$$

avec Γ_f représente le contour complet de réservoir.

En remplaçant l'intégrale sur Γ_f par la somme des intégrales sur différentes limites constituant le contour, et en utilisant pour chacune d'elles la condition à la limite correspondante, l'expression finale de la formulation variationnelle devient :

$$\int_{\Omega_f} \nabla \delta p \nabla p d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta p \frac{1}{C^2} \dot{p} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta p \rho_f \ddot{u}_n d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \delta p \frac{1}{g} \dot{p} d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta p \frac{1}{C} \dot{p} d\Gamma = 0 \quad (\text{II-21})$$

$\forall \delta p \in V_p$, classe des fonctions régulières admissibles.

II-2. Modélisation du barrage :

II-2-1. La théorie de l'élasticité linéaire :

Tous les matériaux possèdent, à un certain degré, la propriété d'être élastique, c'est à dire que si les forces extérieures qui provoquent la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que la force qui lui donne naissance.

Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite « théorie d'élasticité » qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces, en se basant sur les hypothèses suivantes :

- les déformations sont supposées petites.
- la loi de comportement reliant les contraintes et les déformations est linéaire.
- le solide est élastique, homogène et isotrope.

* Equations d'équilibres :

On considère un cube élémentaire dx_1, dx_2, dx_3 (figure V.)

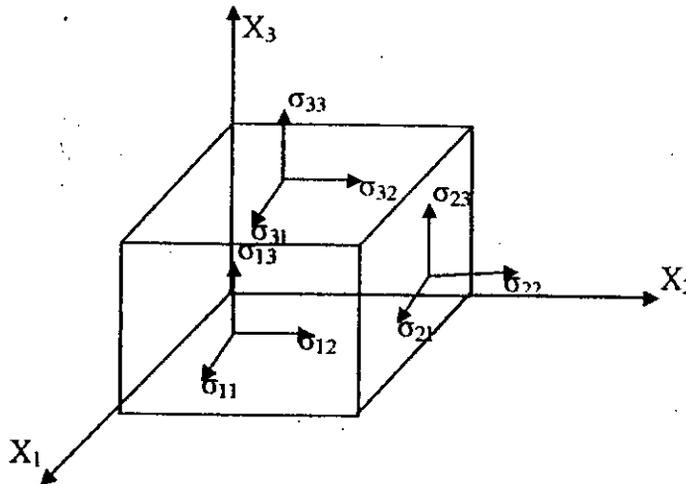


Figure V : équilibre d'un parallélépipède

L'état de contraintes en un point de corps est défini par le tenseur symétrique de contrainte $[\sigma]$ tel que :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II-22})$$

les composants de ce tenseur doivent satisfaire les équations d'équilibre qui s'expriment comme suit :

$$\sigma_{i,j} + b_j = 0 \quad / j \text{ et } i=1,2,3. \quad (\text{II-23})$$

la relation contraintes-deformations est donnée par :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (\text{II-24})$$

où D , la matrice d'élasticité du matériau qui s'écrit :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II-25})$$

où, pour le cas d'un problème en contraintes planes, d_1 et d_2 sont donnés par :

$$d_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad d_2 = \nu d_1 \quad (\text{II-26})$$

avec, E et ν représentent respectivement le module d'élasticité et le coefficient du matériau.

et pour le cas d'un problème en déformations planes, ils sont donnés par

$$d_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad d_2 = \frac{\nu d_1}{1-\nu} \quad (\text{II-27})$$

d_3 est donné, dans les deux cas par :

$$d_3 = \frac{(d_1 - d_2)}{2} \quad (\text{II-28})$$

dans le présent cas, on a un problème de déformations planes[12].

La relation déformations-déplacements est donnée par :

$$\varepsilon = Su \quad (\text{II-29})$$

où S est un opérateur de différentiation :

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II-30})$$

Pour alléger les expressions, et vu que les quantités tensorielles sont symétriques, il est préférable d'écrire, par la suite, les expressions en notation vectorielles.

II-2-2. Le modèle mathématique du barrage :

L'application de la loi de Newton pour le corps du barrage se traduit par l'égalité de tenseur des quantités d'accélérations et celui des forces extérieures agissant sur ce même monolithe de barrage, cette loi, appliquée à un barrage poids flexible, homogène, à comportement bidimensionnel élastique linéaire, fixé à sa base (pas d'effet d'interaction sol-structure) s'écrit :

$$\sigma_{y,j} + f_i = \rho_s \ddot{u}_i \tag{II-31}$$

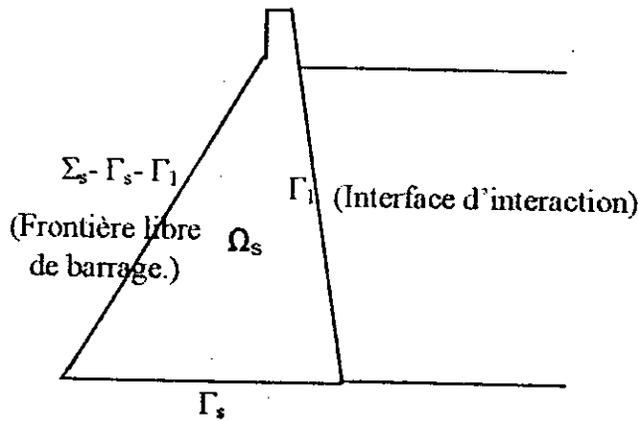


Figure VI : frontières de barrage

Des conditions aux limites de monolithe de barrage doivent être vérifiées, ces conditions sont les suivantes :

- Sur l'interface du contact entre l'eau et le barrage il faut qu'il ait équilibre dynamique entre les contraintes et le chargement du à la pression hydrodynamique sur cette même interface

$$\sigma_y n_j = p n_i \quad | \Gamma_1 \tag{II-32}$$

- Au niveau de la base, les déplacements doivent être nuls (l'interaction sol-structure n'est pas considérée dans notre cas).

$$u_i = 0 \quad | \Gamma_s \quad (II-33)$$

- Le reste de contour du barrage n'est soumis à aucun effort, donc les contraintes sont nulles

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad | \Sigma_s - \Gamma_1 - \Gamma_s \quad (II-34)$$

Après l'application de la formulation variationnelle faible de type Galerkin aux équation d'équilibre (31) et celles des conditions aux limites (32) à (34), et on prenant la fonction teste $\delta \mathbf{u}$ on obtient l'expression suivante, qui exprime, en fait, l'égalité entre le travail des contraintes développées à l'intérieur du système et celui des charges extérieures qui lui sont appliquées, et qui constitue le principe des travaux virtuels

$$\int_{\Omega_s} S \delta u_i D S u_i d\Omega + \int_{\Omega_s} \delta u_i \rho_i \ddot{u}_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} \delta u_i p_i n_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} \delta u_i f_i d\Omega = 0 \quad (II-35)$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \in V_u$$

où V_u est la classe des fonctions régulières admissibles.

CHAPITRE III:

<p><i>PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET MODELISATION NUMERIQUE</i></p>
--

I. Présentation de la méthode des éléments finis :

I.I. Introduction :

Ce chapitre est consacré à la présentation de la technique des éléments finis qui constitue l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui, vu qu'elle nous permet d'avoir des solutions des équations aux dérivées partielles, qu'on doit préalablement transformer à des systèmes algébriques, c'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problème stationnaire ou non stationnaire, linéaire ou non linéaire, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions de plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

I.II. Définition :

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques, elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

I.III. Généralités :

Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonctions dites 'exactes' $U_{ex}(x)$: température, vitesse... dans un but bien précis, on veut représenter cette fonction par d'autres fonctions approchées $U(x)$ tel que :

$$e(x) = U(x) - U_{ex}(x) \quad (\text{III-1}).$$

soit assez 'petite' pour le but visé.

Pour construire cette fonction on peut

- Choisir un ensemble fini de fonctions dépendantes de n paramètres a_i :
 $u(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$.
- Déterminer les paramètres pour satisfaire la condition (I).

- En plus ces fonctions doivent être facilement maniables sur machine

Le plus souvent les fonctions sont linéaires en a_i

$$U(x) = P_1(x) * a_1 + P_2(x) * a_2 + \dots + P_n(x) * a_n \quad (\text{III-2})$$

$$U(x) = \langle P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle P \rangle \{ a_i \} \quad (\text{III-3})$$

où : P_1, P_2, \dots, P_n sont des fonctions connues, linéairement indépendantes, tel que des polynômes, et a_1, a_2, \dots, a_n sont les paramètres de l'approximation.

Si on choisit comme paramètres a_i les valeurs de la fonction U_{ex} en n points, appelés nœuds de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n , où la fonction U_{ex} coïncide avec U

$$\begin{aligned} U(x_1) &= U_{ex}(x_1) = U_1 \\ U(x_2) &= U_{ex}(x_2) = U_2 \\ &\vdots \\ U(x_n) &= U_{ex}(x_n) = U_n \end{aligned} \quad (\text{III-4})$$

La fonction précédente s'écrit alors :

$$U(x) = N_1(x) * U_1 + N_2(x) * U_2 + \dots + N_n(x) * U_n \quad (\text{III-5})$$

$$U(x) = \langle N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{ U_i \} \quad (\text{III-6})$$

I.III.1-Définitions :

- a_1, a_2, \dots, a_n , sont les paramètres généraux de l'approximation.
- U_1, U_2, \dots, U_m , sont les paramètres nodaux ou variables nodales de l'approximation.
- La relation (III-3) définit une approximation non nodale.
- La relation (III-5) définit une approximation nodale.
- Les fonctions $P(x)$ sont les fonctions de base de l'approximation.
- Les fonctions $N(x)$ sont les fonctions d'interpolation.

Les deux relations (III-4) et (III-5) nous fournissent les deux propriétés fondamentales de l'approximation nodale.

a/ comme $U(x_i) = U_i$, alors les fonctions N_i vérifient

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

b/ l'erreur d'approximation définie par (1) est nulle en tous les nœuds x_j

$$E(x_j) = U_{ex}(x_j) - U(x_j) = 0.$$

LIII-2 Approximation par éléments finis :

Dans la pratique, la construction de $U(x)$ est très difficile, vu le nombre important de nœuds, la forme du domaine V qui peut être très complexe, ainsi que les conditions aux limites, éventuelles, qui doivent être satisfaites par la fonction $U(x)$. La méthode d'approximation par sous-domaine simplifie la construction de $U(x)$, elle consiste à

- Identifier un ensemble de sous-domaines V^e de domaine V .
- Identifier une fonction approchée $U^e(x)$ différentes sur chaque sous domaine V^e par la méthode d'approximation nodale.

La méthode d'éléments finis constitue une méthode particulière d'approximation par sous domaines qui présente les particularités suivantes

- o l'approximation nodale sur chaque sous-domaine V^e ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur V^e et sa frontière .

- o les fonctions approchées $U^e(x)$ sur chaque sous domaine V^e sont construites de manière à être continues sur V^e et elles satisfont des conditions de continuité entre les différents sous domaines.

I.III.2-1-Définitions :

- les sous domaines V^e sont appelés des **éléments**.
- les points en lesquels les fonctions approchées $u^e(x)$ coïncident avec la fonction exacte $u_{ex}(x)$ sont les nœuds d'interpolation ou points nodaux.
- les coordonnées \mathbf{x}_i de ces nœuds sont les coordonnées nodales.
- les valeurs $u_i = u^e(\mathbf{x}_i) = u_{ex}(\mathbf{x}_i)$ sont les variables nodales.

L'approximation par éléments finis présente deux aspects distincts :

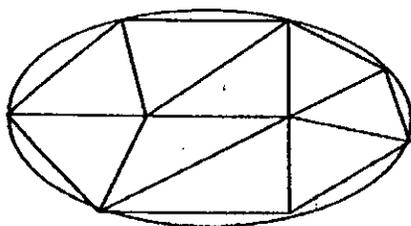
- il faut tout d'abord définir analytiquement la géométrie de tous éléments, ce qui est plus ou moins compliqué selon leurs formes.
- il faut ensuite construire les fonctions d'interpolations $N_i(x)$ correspondant à chaque élément.

I.III.2-2-La définition analytique de la géométrie :

C'est la discrétisation des domaines géométriques, qui consiste en la subdivision du domaine V à étudier en un nombre fini de sous domaines V^e de géométrie assez simple pour qu'on puisse générer facilement des programmes de calculs.

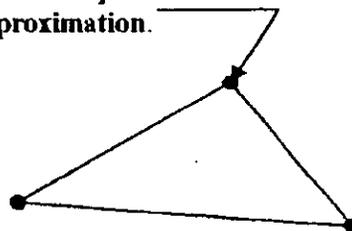
Lors de la discrétisation, on doit respecter certaines règles pour que l'approximation suivante tende vers l'égalité.

$$V \approx V_n = \sum V^e$$



Domaine d'étude discrétisé

Nœud géométrique
et d'approximation.



Élément triangulaire

Figure : Exemple de discrétisation en éléments finis

Lors d'une discrétisation d'un domaine géométrique les règles suivantes doivent être respectées

- Tout élément est d'intérieur non vide.
- Il ne doit pas y avoir de vide entre les éléments.
- L'intersection entre deux éléments distincts ne peut être que réduite soit à l'ensemble vide, soit à un point ou une arête dans le cas de 2D ou une surface en 3D.
- Un nœud appartenant à deux éléments doit être défini dans chacun des deux.
- Les angles proches de 0° et 180° doivent être évités.

Les résultats de procédé de discrétisation doit générer essentiellement deux types de données qui sont :

1. données relatives à la définition des éléments par la numérotation des nœuds. Une table de connectivités, ayant en lignes les numéros des éléments et en colonnes les numéros des nœuds correspondants, décrit d'une manière cohérente ces données.
2. données relatives à la définition des nœuds. Chaque nœud est défini par son numéro et ses coordonnées dans le repère global définissant la géométrie du domaine considéré.

I.III.3-1-Elément de référence :

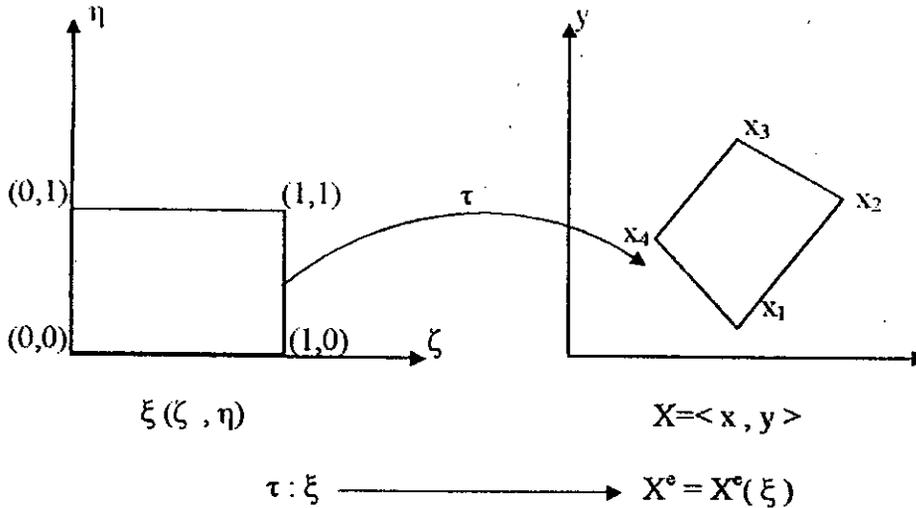
Un élément de référence est un élément de forme géométrique très simple repéré dans un espace de référence ξ (ζ , η) et pouvant être transformé en élément réel repéré dans l'espace réel X (x , y) par une transformation géométrique τ bijective. (Figure 2).

La transformation τ^e dépend des coordonnées de l'élément réel V^e , il y'a donc tant de transformations que d'élément

$$\tau : \xi \longrightarrow X^e = X^e(\xi, x_i, x_j, x_k).$$

Les transformations τ^e doivent générer des éléments réels qui satisfassent les règles de partition citées précédemment. L'écriture suivante est utilisée pour sa simplicité, vu que τ est linéaire en $\{x_n\}$.

$$\tau : \xi \longrightarrow \dot{X}(\xi) = [N(\xi)] * \{x_n\}$$



De plus les fonctions de transformations sont choisies identiques pour toutes les coordonnées :

$$X(\xi) = \langle \bar{N}(\xi) \rangle * \{x_n\} \tag{III-7}$$

$$Y(\xi) = \langle \bar{N}(\xi) \rangle * \{y_n\} \tag{III-8}$$

$$Z(\xi) = \langle \bar{N}(\xi) \rangle * \{z_n\} \tag{III-9}$$

Les fonctions N_i sont habituellement des polynômes en ξ appelées fonctions de transformations géométrique.

Remarque :

- La transformation géométrique τ peut être interprétée comme un simple changement de variables : $X(x, y) \longrightarrow \xi(\zeta, \eta)$.

- Les coordonnées $\xi(\zeta, \eta)$ peuvent être considéré comme un système de coordonnées locales liées à chaque élément. Figure. 3.

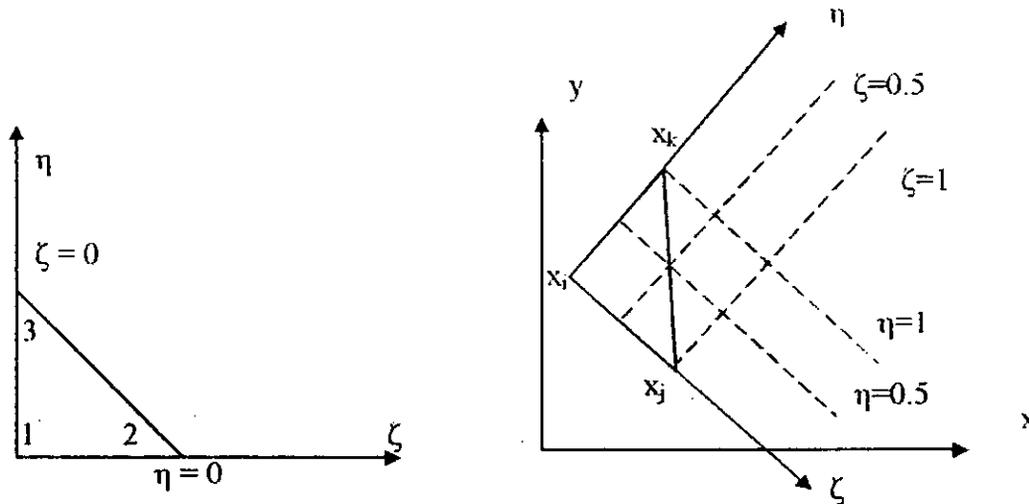


Figure . .3.

I.III.3-2-Approximation sur un élément de référence :

I.III.3-2-1-Expression de la fonction approchée $U(x)$:

Nous choisissons sur le domaine V sur un ensemble de n nœud d'interpolation de coordonnées x_i , confondus ou non avec les nœuds géométriques. Sur chaque élément V^e nous utilisons une approximation nodale de type (III-6) de fonction exacte $U_{ex}(x)$.

$$U_{ex}(x) \approx U(x) = \langle N_1, N_2, \dots, N_{ne} \rangle * \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{ne} \end{Bmatrix} = \langle N_i(x) \rangle * \{u_i\} \quad (III-10)$$

où : x appartient à V^e

u_1, u_2, \dots, u_{ne} sont les variables nodales, et $N_i(x)$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément réel .

remplaçons l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence

$$U_{ex}(\zeta) \approx U(\zeta) = \langle N(\zeta) \rangle * \{u_n\}$$

où $\{u_n\}$ sont les variables nodales de l'élément.

$\langle N(\xi) \rangle$ sont les fonctions d'interpolations sur l'élément de référence.

Généralement les fonctions $N(x)$ sont remplacées par $N(\xi)$. Ceci est dû au fait que les fonctions $N(x)$ sont très compliquées d'un côté, et elles dépendent des coordonnées des nœuds, ce qui veut dire qu'elles diffèrent d'un élément à un autre, d'un autre côté. Quand aux fonctions $N(\xi)$ elles peuvent être utilisées pour tous les éléments de références caractérisés par la forme, les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolations.

I.IV. Les opérations de dérivation et d'intégration :

Les problèmes pratiques sont régis, dans la majeure partie des cas, par des équations différentielles faisant intervenir des fonctions $U_{ex}(x)$, des dérivées premières et secondes ..., ces équations sont écrites dans le domaine réel (éléments réels), pour exprimer ces dérivées dans l'élément de référence on utilise le Jacobien :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{(III-11)}$$

qui est noté par : $\{\partial_x\} = [J]\{\partial_\zeta\}$

où $[J]$ est la matrice Jacobienne de la transformation géométrique.

De la même manière on a :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad \text{(III-12)}$$

Ce qu'on note par : $\{\partial_\zeta\} = [J]\{\partial_x\} = [J]^{-1}\{\partial_\zeta\}$

Ce qui nous donne : $[J] = [J]^{-1}$

Expression de Jacobien et de $[J]^{-1}$:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad J^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{III-13})$$

$$\text{Det}(J) = J_{11} * J_{22} - J_{12} * J_{21} \quad (\text{III-14})$$

I.V. L'intégration :

On passe d'une intégrale d'une fonction f sur l'élément réel V^e à une intégrale plus simple sur l'élément de référence V^r comme suit :

$$\int_{V^e} f(X) dx dy = \int_{V^r} f(X(\xi)) \det(J) d\xi d\eta \quad (\text{III-15})$$

avec : $X = \langle x, y \rangle$, $X(\xi) = \langle \xi, \eta \rangle$

II. Modélisation Numérique et discrétisation des formes intégrales :

Le principe général des méthodes numériques est la discrétisation des équations différentielles en vu d'obtenir un système discret des équations algébriques accessible par les méthodes numériques ; les équations posées précédemment : l'équation d'onde dans le milieu fluide et ses conditions aux limites ainsi que le système mathématique du monolithe du barrage, n'ont pas de solutions analytiques, ce qui rend l'approche numérique plus que nécessaire.

La méthode de discrétisation en éléments finis est basée sur une formulation intégrale du modèle mathématique. Nous allons approximer ici le déplacement \mathbf{u} et la pression \mathbf{p} de la manière suivante :

$$\mathbf{u} \approx \langle N_u \rangle \{U\}$$

$$\mathbf{p} \approx \langle N_p \rangle \{P\}$$

où les vecteurs N_u et N_p , qui sont des fonctions d'interpolation nodales ou fonctions de forme de l'élément sont données par :

-le solide possède deux degrés de liberté, sa fonction de forme s'écrit :

$$N_u = \begin{bmatrix} N_{u1} & 0 & \dots & N_{ui} & 0 & \dots \\ 0 & N_{u1} & \dots & 0 & N_{ui} & \dots \end{bmatrix}; i=1, n_u \quad (\text{III-16})$$

-et pour le liquide, qui a un seul degré de liberté sa fonction de forme est donnée par :

$$N_p = \langle N_{p1} \dots N_{pi} \dots \rangle ; i=1, n_p \quad (\text{III-17})$$

avec n_u , et n_p représente respectivement le nombre de nœuds par éléments utilisés pour l'interpolation.

Les opérateurs intervenant dans les formulations variationnelles développées ci dessous sont exprimés par leur approximations de la manière suivantes :

Pour l'opérateur de perturbation des champs continus :

$$\delta \mathbf{u} \approx \delta(N_u U) = \delta U^T N_u^T \quad (\text{III-18})$$

$$\delta p \approx \delta(N_p P) = \delta P^T N_p^T \quad (\text{III-19})$$

et pour l'opérateur de dérivation spatiale de champ continu p et de la perturbation :

$$\begin{aligned} \nabla p &\approx \nabla N_p P \\ \nabla \delta p &\approx \delta P^T \nabla N \end{aligned}$$

II.I. Formulation variationnelle :

La technique des éléments finis repose sur la forme intégrale des équations différentielles qui régissent le système physique. Le principe de la formulation variationnelle c'est celui des travaux virtuels, ce principe exprime l'égalité des travaux effectués par les forces extérieures à ceux effectués par les forces intérieures lors d'un déplacement virtuel quelconque

II.I.1- Formulation forte :

Un problème classique, d'équilibre, de valeurs propre, ou de propagation s'annonce comme suit :

Trouver une fonction $u \in V$, V espace des fonctions tel que

$$A(u) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$B(u) = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

Où A est une (ou un ensemble) d'équation gouvernantes sur le domaine Ω et $B(u)$ est l'ensemble des conditions aux limites que u doit satisfaire au contour Γ (figure,).

Le problème variationnel associé s'écrit : trouver $u \in V$ tel que :

$$\forall \psi \in V : \int_{\Omega} \psi A(u) d\Omega = 0 \quad (\text{III-20})$$

L'équation (III-20) est appelée forme intégrale forte de l'équation différentielle, elle est analogue à l'expression des travaux virtuels.

II.I.2- Formulation faible :

Pour satisfaire les conditions aux limites, on doit vérifier que

$$\int_{\Gamma} \psi B(u) d\Gamma = 0 \quad (\text{III-21})$$

Dans la pratique il est possible d'intégrer l'équation (précédente) par partie et de la remplacer par :

$$\int_{\Omega} C(\psi)D(u)d\Omega + \int_{\Gamma} E(\psi)F(u)d\Gamma = 0 \quad (\text{III-22})$$

où les opérateurs C,D,E et F contiennent des dérivées d'ordres moins élevés, d'où un choix de u plus large, cette dernière équation est la formulation faible de l'équation différentielle, elle forme la formulation de l'approximation par éléments finis.

II.II.1- La formulation intégrale du barrage :

Pour le cas du barrage, on remplace la fonction continue u par son approximation tout en tenant compte des formules précédentes qui nous donne la façon dont u et les autres opérateurs sont approximés.

La réécriture de l'équation (II-35), en tenant compte de l'équations (III-18,19) donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \delta U^T (SN_u)^T D(SN_u) U d\Omega + \int_{\Omega_i} \delta U^T N_u^T \rho_s N_u \ddot{U} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_i} \delta U^T N_u^T n N_p P d\Gamma + \int_{\Omega_i} \delta U^T N_u^T f d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-23})$$

On simplifie le vecteur δU^T de l'équation précédente qui devienne :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_i} N_u^T \rho_s N_u d\Omega \right) \ddot{U} + \left(\int_{\Omega_i} (SN_u)^T D(SN_u) d\Omega \right) U \\ & - \left(\int_{\Gamma_i} N_u^T n N_p d\Gamma \right) P + \left(\int_{\Omega_i} N_u^T f d\Omega \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-24})$$

pour tenir compte du terme d'amortissement structural et pour exprimer les forces de volume en fonction des forces d'inertie, on récrit l'équation précédente, sous forme matricielle, comme suit :

$$M_s \ddot{U} + C_s \dot{U} + K_s U = F_s + QP \quad (\text{III-25})$$

Où, les termes de gauche représentent la réponse du corps du barrage pour les forces exprimées par les termes droits, et le symbole $\dot{\quad}$ (point) dénote la différentiation par rapport au temps.

L'équation (III-25) interprète le fait que les forces générées par les accélérations sismiques et les pressions hydrodynamiques sont utilisées, d'une part pour accélérer la structure, d'autre part pour la déplacer et une partie est perdue par amortissement ; et les matrices M , C et K sont, respectivement, les matrices globales de masse, amortissement et de rigidité, et Q représente la matrice globale de couplage, qui génère les forces nodales appliquées par les pressions hydrodynamique sur la face amont du barrage.

II.II.2- La formulation intégrale du réservoir :

De même que pour le barrage, pour le cas de réservoir, on remplace la variable continue p par son approximation donnée par les vecteurs des valeurs aux nœuds, qui sont exprimés par (III-10)

La réécriture de l'équation (II-21) donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f} \delta P^T \nabla N_p^T \nabla N_p P d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta P^T N_p^T \frac{1}{C^2} N_p \ddot{P} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta P^T N_p^T \rho_f N_u n U d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_3} \delta P^T N_p \frac{1}{g} N_p \ddot{P} d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta P^T N_p^T \frac{1}{C} N_p \dot{P} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-26})$$

On simplifie le vecteur δP^T et on récrit l'équation (III-26) :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_f} \nabla N_p^T \nabla N_p d\Omega \right) P + \left(\int_{\Gamma_4} N_p^T \frac{1}{C} N_p d\Gamma \right) \dot{P} \\ & + \left(\int_{\Omega_f} N_p^T \frac{1}{C^2} N_p d\Omega + \int_{\Gamma_3} N_p \frac{1}{g} N_p d\Gamma \right) \ddot{P} + \left(\int_{\Gamma_1} N_p^T \rho_f N_u n d\Gamma \right) \ddot{U} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-27})$$

qu'on écrit sous forme matricielle :

$$M_F \ddot{P} + C_F \dot{P} + K_F P = -\rho_f Q^T \ddot{U} \quad (\text{III-28})$$

Où, comme pour le cas de barrage, les termes de gauche constituent la réponse de réservoir pour les efforts, qui lui sont appliqués au niveau de l'interface de contact avec le barrage, exprimés par le terme de droite

L'équation (III-28) décrit le fait que les efforts générés par l'accélération du parement amont du barrage sont, d'une part utilisés pour générés des surpressions hydrodynamiques et une autre partie perdue par le système à cause de la viscosité, au niveau des frontières de réservoir (surface libre, limite de radiation) ; les matrices M_f , C_f , K_f , représentent respectivement : la matrice masse fluide comprenant à la fois les effets d'inertie du à la compressibilité aux ondes de surface pour M_f , l'amortissement dans le fluide du à la viscosité du fluide et aux effets de radiations pour C_f et enfin, la matrice K_f correspond aux raideurs du fluide associée à l'énergie potentielle.

Donc le système du barrage-réservoir s'écrit :

$$\begin{cases} M_F \ddot{P} + C_F \dot{P} + K_F P = -\rho_f Q^T \ddot{U} \\ M_s \ddot{U} + C_s \dot{U} + K_s U = F_g + QP \end{cases} \quad (\text{III-II})$$

II.II.3- Les expressions des différent matrices :

II.II.3-1- La matrice masse solide M_s :

La relation qui nous donne la formule de la matrice masse élémentaire est dite de masse concentrée :

$$M^{el}_s = \int_{\Omega} \rho_s N_u d\Omega \quad (\text{III-29})$$

soit en explicitant les termes :

$$(M^e_s)_{ij} = \int_{\Omega^e} \rho_s \begin{bmatrix} N_{ui} & 0 \\ 0 & N_{ui} \end{bmatrix} d\Omega \quad (\text{III-30})$$

cette écriture de la matrice masse est économique de point de vue calculs et programmation mais elle induit toutefois des erreurs peu sensibles qu'on peut tolérer. Une autre écriture peu économique par rapport à l'écriture diagonale mais qui donne des résultats plus précis

est celle dite consistante où la masse est considérée comme étant répartie, son expression est la suivante :

$$(M^{elm})_{ij} = \int_{\Omega'} N_i^T \rho_s N_j d\Omega = \int_{\Omega'} \rho_s \begin{bmatrix} N_{ui} N_{uj} & 0 \\ 0 & N_{ui} N_{uj} \end{bmatrix} d\Omega \quad (III-31)$$

II.II.3-2-La matrice raideur du solide K_s :

La matrice donnant la rigidité de la structure correspond à la raideur de cette dernière, et elle caractérise son énergie de déformation, son expression est la suivante :

$$K^e_s = \int_{\Omega'} B^T D B d\Omega \quad (III-32)$$

où B est la matrice des dérivées de fonctions de formes donnée par :

$$[B] = [S][N_u] \quad (III-33)$$

$$B_i = S N_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{ui} & 0 \\ 0 & N_{ui} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{ui}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{ui}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{ui}}{\partial y} & \frac{\partial N_{ui}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (III-34)$$

donc, la matrice de rigidité de solide s'écrit :

$$(K^e_s)_{ij} = \int_{\Omega'} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{ui}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{ui}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_{ui}}{\partial y} & \frac{\partial N_{ui}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{uj}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{uj}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{uj}}{\partial y} & \frac{\partial N_{uj}}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (III-35)$$

II.II.3-3-La matrice de couplage Q :

La matrice d'interaction au niveau de l'interface fluide structure Q introduit les efforts induit par la structure dans l'équation de système réservoir, et comme elle introduit, d'un autre côté, les efforts résultants de la pression, et agissant sur le parement amont du barrage dans l'équation de monolithe du barrage. Cette matrice a pour expression :

$$Q = - \int N_{ui}^T n N_p d\Gamma \quad (III-36)$$

la matrice élémentaire permettant d'assembler cette matrice s'écrit :

$$Q_{ij}^e = \int_{\Gamma^e} \begin{bmatrix} N_{ui} & 0 \\ 0 & N_{ui} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \langle N_{pj} \rangle d\Gamma = \int_{\Gamma^e} \begin{bmatrix} N_{ui} N_{pj} n_1 \\ N_{ui} N_{pj} n_2 \end{bmatrix} d\Gamma \quad (III-37)$$

avec n_1, n_2 représente les cosinus directeurs de la normale à la face amont du barrage.

Remarque : dans les expressions précédentes, les matrices $K_s(i,j)$ et $M_s(i,j)$ représentent des éléments des deux matrices carrées K et M (4×4). Et les éléments de Q , par contre, sont des matrices rectangulaires (4×2) dont les éléments sont multipliés par la pression normale à l'interface fluide pour donner la force agissante dans le système discret d'équation d'équilibre de la structure.

II.II.3-3-La matrice masse Fluide M_F :

La matrice masse représente dans tout système les effet d'inertie de ce dernier, de même, celle de fluide représente les effets d'inertie dû à la compressibilité et ceux des ondes de surface, cette matrice s'écrit comme suit :

$$M_F = \int_{\Omega^e} N_p^T \frac{1}{C^2} N_p d\Omega + \int_{\Gamma_s} N_p^T \frac{1}{g} N_p d\Gamma \quad (III-38)$$

les matrices élémentaires correspondantes sont :

$$(M^e_F)_{k_v} = \int_{\Omega^e} N_{pi} \frac{1}{C^2} N_{pj} d\Omega \quad (III-39)$$

$$(M^e_F)_{l_v} = \int_{\Gamma^e} N_{pi} \frac{1}{g} N_{pj} d\Gamma \quad (III-40)$$

la matrice masse fluide est composée de deux parties, une partie due à la compressibilité, où on intègre sur tous les éléments contenus dans le domaine fluide, et on les assemble en une matrice totale qu'on somme avec une matrice totale qui constitue, à son tour, l'assemblage des matrices élémentaires due aux ondes de surface, qu'on aura calculé pour les seuls éléments de la surface libre.

II.II.3-4-La matrice amortissement Fluide C_F :

La matrice d'amortissement du fluide associée aux effets de radiations et à l'effet de la viscosité s'écrit

$$C_F = \int_{\Omega^f} N^T \rho \mu N_p d\Omega + \int_{\Gamma_s} N^T \rho \frac{1}{C} N_p d\Gamma \quad (\text{III-41})$$

II.II.3-5-La matrice 'raideur' Fluide K_F :

La matrice de qui quantifie la rigidité de fluide, est celle associée à l'énergie potentielle, son expression est donnée par :

$$K_F = \int_{\Omega^f} \nabla N^T \rho \nabla N_p d\Omega \quad (\text{III-42})$$

son expression explicite s'écrit :

$$(K^e_{F})_{ij} = \int_{\Omega^e} \left(N_{p,j,x} \cdot N_{p,j,y} \right) \begin{Bmatrix} N_{p,j,x} \\ N_{p,j,y} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega^e} (N_{p,j,x} N_{p,j,x} + N_{p,j,y} N_{p,j,y}) d\Omega \quad (\text{III-43})$$

dans cette expression, la virgule en indice désigne la dérivation par rapport à la variable désignée x ou y.

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ \rho Q^T & M_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & -Q \\ 0 & K_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-III})$$

CHAPITRE IV:

***TECHNIQUES DE PROGRAMMATION ET METHODES DE
RESOLUTION***

I. Présentation des méthodes de résolution adoptées :

I.1 Introduction :

La programmation efficace de la méthode de éléments finis requiert une bonne expérience à la fois dans le domaine des éléments finis et dans le domaine de l'informatique, ceci à cause de la complexité des programmes, car ils doivent exécuter des opérations très diverses : générer les matrices, résolutions numériques ... etc. et que les quantités des données manipulées par ce genre de programmes peuvent être très importantes .

Dans ce chapitre, nous présentons les techniques de programmation qui permettent la mise en œuvre de la méthode des éléments finis sur ordinateur.

Tout d'abord, nous commençons par définir les étapes de programme qui génère toutes les données relatives à la géométrie et aux caractéristiques des systèmes à étudier, c'est à dire le programme principal qui génère le maillage, les connectivités et les coordonnées des nœuds pour les injecter, par la suite, dans les sousroutines de calculs des matrices élémentaires et globales. Ensuite, on expose les techniques utilisées pour la mise en œuvre des méthodes de résolutions des système de vibrations libres et celui du système globale.

Tout programme basé sur la méthode des éléments finis inclut quelques blocs fonctionnels caractéristiques le programme élaboré dans ce travail (tu essaye de dire qqch.)

- Bloc un : lecture de caractéristiques physiques et géométriques, en vue de synthétiser le maillage (nœuds et éléments).
- Construction de matrices et de vecteurs (K_{el} , M_{el} , C_{el} ... etc.), et assemblage de ceux-ci pour former les matrices et les vecteurs globaux.
- Résolution des systèmes d'équations.
- Impression de résultats sous forme graphique, après calcul éventuel de variable additionnelle (contraintes, déformations ... etc.).

I.II- Les méthodes de résolution :

I.II-1 Problème de valeurs propres :

Ils constituent une extension de problèmes d'équilibres, dans laquelle nous évaluons U correspondant à des valeurs critiques de certains paramètres λ , dites valeurs propres, les équations correspondantes s'écrivent pour un système discret :

$$[K]\{U\} = \lambda[M]\{U\} \quad (IV-1)$$

où, $[M]$ est la matrice masse.

Dans le but de déterminer les modes et les fréquences naturelles de vibrations propres de notre système, nous devons résoudre son problème aux valeurs propres.

Pour le barrage, nous devons résoudre :

$$K_s \phi - \omega^2 M_s \phi = 0 \quad (IV-2)$$

où ϕ représente la configuration géométrique de la structure.

Et ω représente l'amplitude de vibrations, qui correspond à une période de vibrations.

$$T_i = \omega_i / 2\pi$$

et pour le fluide de réservoir, nous devons résoudre :

$$K_f \phi - \omega^2 M_f \phi = 0 \quad (IV-3)$$

où, la solution ϕ représente un vecteur de valeurs de pressions.

I.II-2 Méthode de résolution :

I.II-2-1 Méthode de sous-espace :

Cette méthode est très largement utilisée pour calculer les p premières valeurs propres d'un système de grande dimensions. Elle consiste à appliquer plusieurs fois une méthode dite

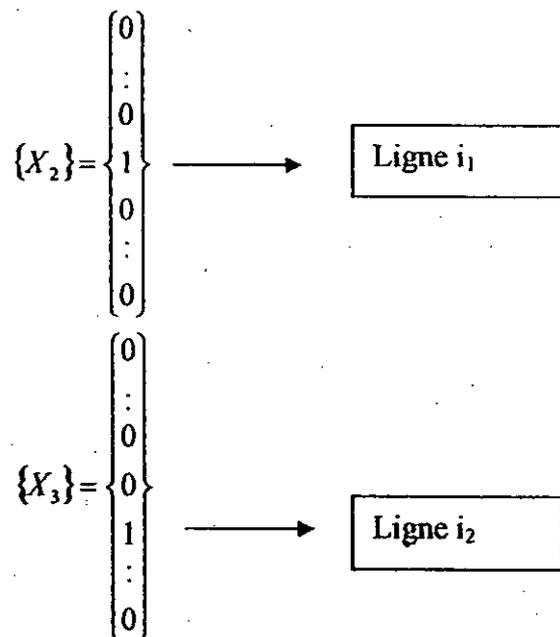
de Ritz en améliorant les vecteurs de Ritz par une autre méthode de valeurs propres appelée méthode d'itération inverse ; la méthode de Ritz force les vecteurs propres $\{\lambda_p\}$ à rester orthogonaux entre eux, alors que l'itération inverse ajuste la base vectorielle de Ritz de manière à assurer la convergence vers les vecteurs propres correspondants aux petites valeurs propres.

La méthode de sous espace enchaîne les opérations suivantes :

→ Choisir (p) vecteurs initiaux, dans notre cas on a pris (p = 10)

$$[X] = \{\{X_1\}\{X_2\}\{X_3\}\dots\{X_p\}\}$$

ces vecteurs sont choisis de la manière suivante : $\{X_1\}$ est aléatoire, et pour les autres,



où i_1, i_2, \dots sont les indices i correspondant aux plus petites valeurs successives de (K_{ii}/M_{ii})

→ On exécute une itération inverse (annexe), et on calcul simultanément les p vecteurs de Ritz $\{q_i\}$ en résolvant

$$[K]\{q_i\} = [M]\{X_i\} = \{F_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (\text{IV-4})$$

$$[K][Q] = [M][X] \quad (IV-5)$$

→ On applique la méthode de Ritz pour chercher les vecteurs propres dans le sous-espace de Ritz.

$$([\bar{K}] - \lambda_i [\bar{M}])\{A_i\} = 0 \quad (IV-6)$$

on résout ce dernier système par la méthode de Jacobi (annexe), avec :

$$[\bar{K}] = [Q]^T [K] [Q] \quad (IV-7)$$

$$[\bar{M}] = [Q]^T [M] [Q] \quad (IV-8)$$

$$[X_i] = [Q]\{A_i\} \quad (IV-9)$$

→ On teste la convergence de $\bar{\lambda}_i$, et on répète si nécessaire les étapes précédentes, sans toutefois refaire le choix des vecteurs.

I.II-2 Problème de propagation ou de valeurs initiales :

Ils consistent à évaluer $U(x,t)$ pour un temps t supérieur à t_0 , dans un système non stationnaire, $U(x, t_0)$ étant connu.

Pour un système discret le problème s'écrit :

$$[M] \frac{d^2}{dt^2} \{U\} + [C] \frac{d}{dt} \{U\} + [K] \{U\} = \{F(t)\} \quad (IV-10)$$

pour t supérieur à t_0

avec les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{U\} = \{U_0\} \\ \frac{d}{dt} \{U\} = \{\dot{U}_0\} \end{array} \right. \quad (IV-11)$$

12)

I.II-2-1 Schéma de différences finies centrales explicites :

Les équations (III-28) et (III-25) peuvent être présentées en fonction de u_{n-1} , u_n , u_{n+1} , p_{n-1} , p_n , p_{n+1} , pour donner la schéma des différences finies équivalent :

$$[a_0 M_s + a_1 C_s] u_{n+1} = Q p_n + [2a_0 M_s - K_s] u_n + [a_1 C_s - a_0 M_s] u_{n-1} \quad (IV-13)$$

$$[a_0 M_F + a_1 C_F] p_{n+1} = [2a_0 M_F - K_F] p_n + [a_1 C_F - a_0 M_F] p_{n-1} - \rho Q^T a_0 [u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}] \quad (IV-14)$$

où $a_0 = 1/\Delta t^2$; $a_1 = 1/(2\Delta t)$.

Maintenant l'équation (IV-13) est indépendante de p_{n+1} , ainsi, au moment où un petit pas de temps est requis pour annuler les fausses contributions dont les modes propres élevés sont responsables, l'équation (IV-14) devient de plus en plus indépendante de la pression hydrodynamique (à un taux proportionnel à Δt^2) puisque $\Delta t \rightarrow 0$. Ces problèmes sont typiques des formulations de différences explicites pour le système considéré, et nous sommes ainsi à chercher une forme de solution alternative [1].

I.II-2-2 Schéma de prédiction correction implicite de Newmark :

Si les termes de gauche des équations (IV-13) et (IV-14) sont exprimés au temps (t_{n+1}) en terme d'expression implicite de Newmark

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n) \quad (IV-15)$$

$$p_{n+1} = p_n + \Delta t \dot{p}_n + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{p}_{n+1} + \ddot{p}_n) \quad (IV-16)$$

alors pour des fonctions de formes spécifiques, les équations résultantes sont individuellement et inconditionnellement stables, quoique les sollicitations de ces fonctions sont fonction de \ddot{u}_{n+1} et p_{n+1} , par conséquent il est nécessaire de voir une forme algorithmique de prédiction correction.

L'utilisation de formulation implicite-explicite de Newmark proposée par Hugh [1], n'est pas considérée dans cette étude à cause des complications, une telle action permet l'analyse de stabilité et le choix de pas de temps, quoique, vue que les caractéristiques de la stabilité de forme prédiction-correction implicite (IV-15 et 16) sont identiques à celles des

équations (IV-15 et 16) elles même, il s'en suit que toute perte de stabilité d'une telle approche dans la présente application doit être causée par les seuls termes de couplages.

I.II-2-3 Schéma double prédiction :

On peut exprimer le système écrit dans le chapitre précédent (III-III) sous la forme :

$$\begin{cases} M_s \ddot{u}_{n+1}^i + C_s \dot{u}_{n+1}^i + K_s u_{n+1}^i = Q p_{p,n+1}^i \\ M_F \ddot{p}_{n+1}^i + C_F \dot{p}_{n+1}^i + K_F p_{n+1}^i = -\rho Q^T \ddot{u}_{p,n+1}^i \end{cases} \quad (\text{IV-I})$$

puis on résout ce système, en utilisant l'algorithme de schéma de double prédiction de Newmark exposé dans la suite de ce chapitre sous forme d'organigramme.

II. Développement des différentes phases de programme :

Pour un problème de grande taille, le temps de calcul nécessaire pour obtenir la solution devient très important, en particulier pour des problèmes non linéaires et non stationnaires. Le prix de ces calculs constitue une limitation économique de l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Il importe de programmer très efficacement les calculs souvent répétés : construction de matrices élémentaires, assemblage et résolution, de plus il faut effectuer judicieusement tous les choix qui influencent le temps de calcul

- type d'élément et forme de maillage.
- Méthode d'intégration numérique.
- Méthode d'intégration par rapport au temps pour des problèmes non stationnaires.
- Méthode de calcul de valeurs propres.

C'est dans le but de présenter quelques méthodes et choix efficaces qui satisfassent aux critères cités ci dessus que cette section est présentée, comme on y présente aussi les détails et le déroulement des différentes phases du programme réalisé.

II.1-Maillage et numérotations locale et globale :

Le maillage et la numérotation sont effectués par deux procédures (soubrountines) contenues dans les programmes de calculs de matrices caractéristiques de fluide et de barrage, le procédé du maillage comme il a été défini dans le chapitre relatifs à la méthode des éléments finis, c'est la discrétisation géométrique de la forme à étudier (coupe transversale dans le corps du barrage, ou de son réservoir), aussi doit-on tirer toutes les coordonnées des nœuds dans un repère qu'on fixe préalablement, ainsi que leur numéros pour définir les éléments surfaciques (quadrilatères) avec lesquels on travail par la suite, en fait, ce numéro tiré dans la phase du maillage, constitue le numéro de nœud dans le système global, et la numérotation locale est faite par une autre procédure, qui 'déduit' les numéros des quatre nœuds composants un éléments quadrilatéral, et elle les numérote localement.

Ainsi, on aura toutes les tables relatives à la description géométrique du système à étudier (coordonnées, et connectivités) . Dans la procédure du maillage, tous les nœuds qui se trouvent aux frontières sont repérés, car nous devons, pour le calcul de certaines matrices, travailler avec les seuls éléments aux frontières

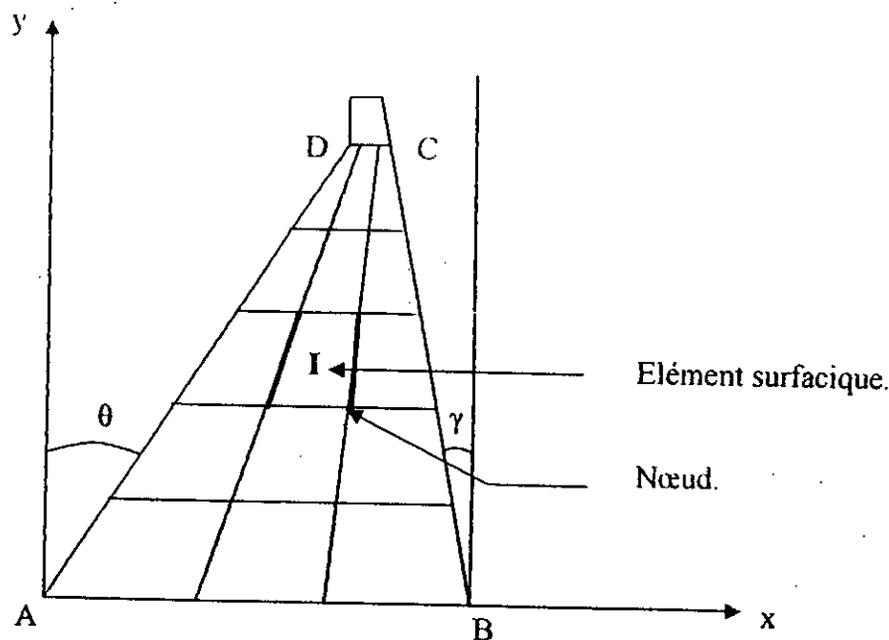
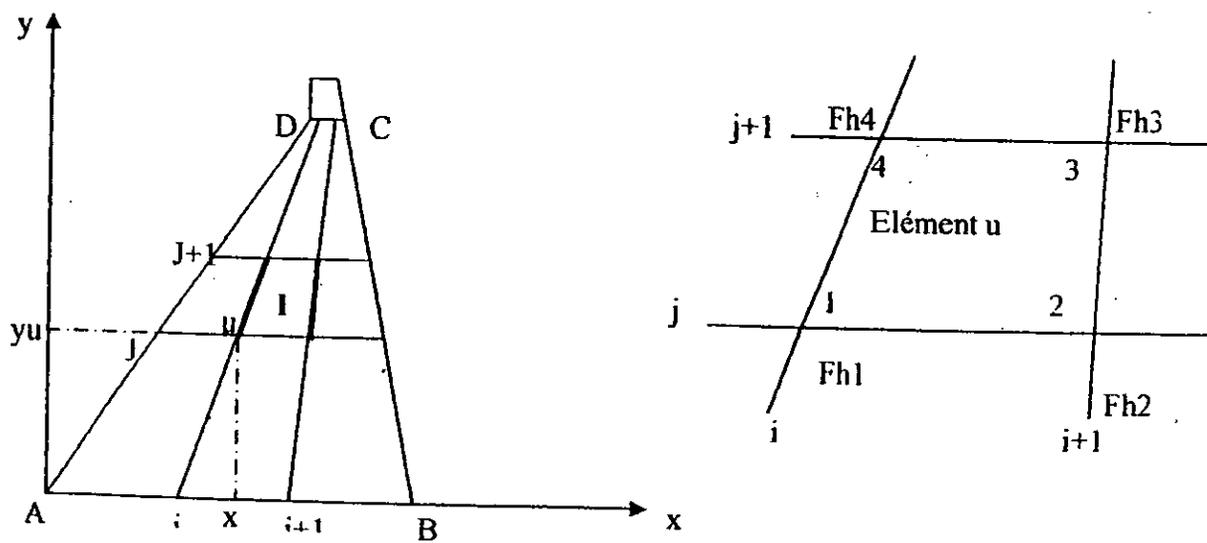


Figure I: maillage et numérotation



$$Fh1 = J*(ns+1) + i + 1; \quad Fh2 = J*(ns+1) + i + 2; \quad Fh3 = (J+1)*(ns+1) + i + 2; \quad Fh4 = (J+1)*(ns+1) + i + 1;$$

Figure II : numérotation locale et globale

Les algorithmes:

*Calculs des coordonnées et connectivités :

$Ht = (y_d - y_a)$, , hauteur de barrage.
 $Bs = (x_b - x_a)$, longueur à la base.
 $U = 0$, initialisation de numéro de connectivité.
 $I = 0$, mds,

$J = 0$, ns,

$X_u = x_a + j * (ht/mds) * \tan(\text{teta}) + (i/ns) * (bs - ((ht*j)/mds) * (\tan(\text{teta}) + \tan(\text{gama})))$

$Y_u = y_a + (j/mds) * (y_d - y_a)$

$U = u + 1$.

Si (condition sur l'appartenance de point u à la limite gauche).

$ub = u$

$xl = x_u$

$yl = y_u$

Si (condition sur l'appartenance de point u à la limite supérieure).

$ub = u$

$xl = x_u$

$yl = y_u$

Si (condition sur l'appartenance de point u à la limite inférieure).

$ub = u$

$xl = x_u$

$yl = y_u$

Si (condition sur l'appartenance de point u à la limite droite).

$ud = u$

$xl = x_u$

$yl = y_u$

*numérotation :

j = 0, mds-1.

i = 0, ns-1.

*numérotation.

fh1=j*(ns+1)+i+1

fh2=j*(ns+1)+i+2

fh3=(j+1)*(ns+1)+i+2

fh4=(j+1)*(ns+1)+i+1

fh=i*ns+j+1

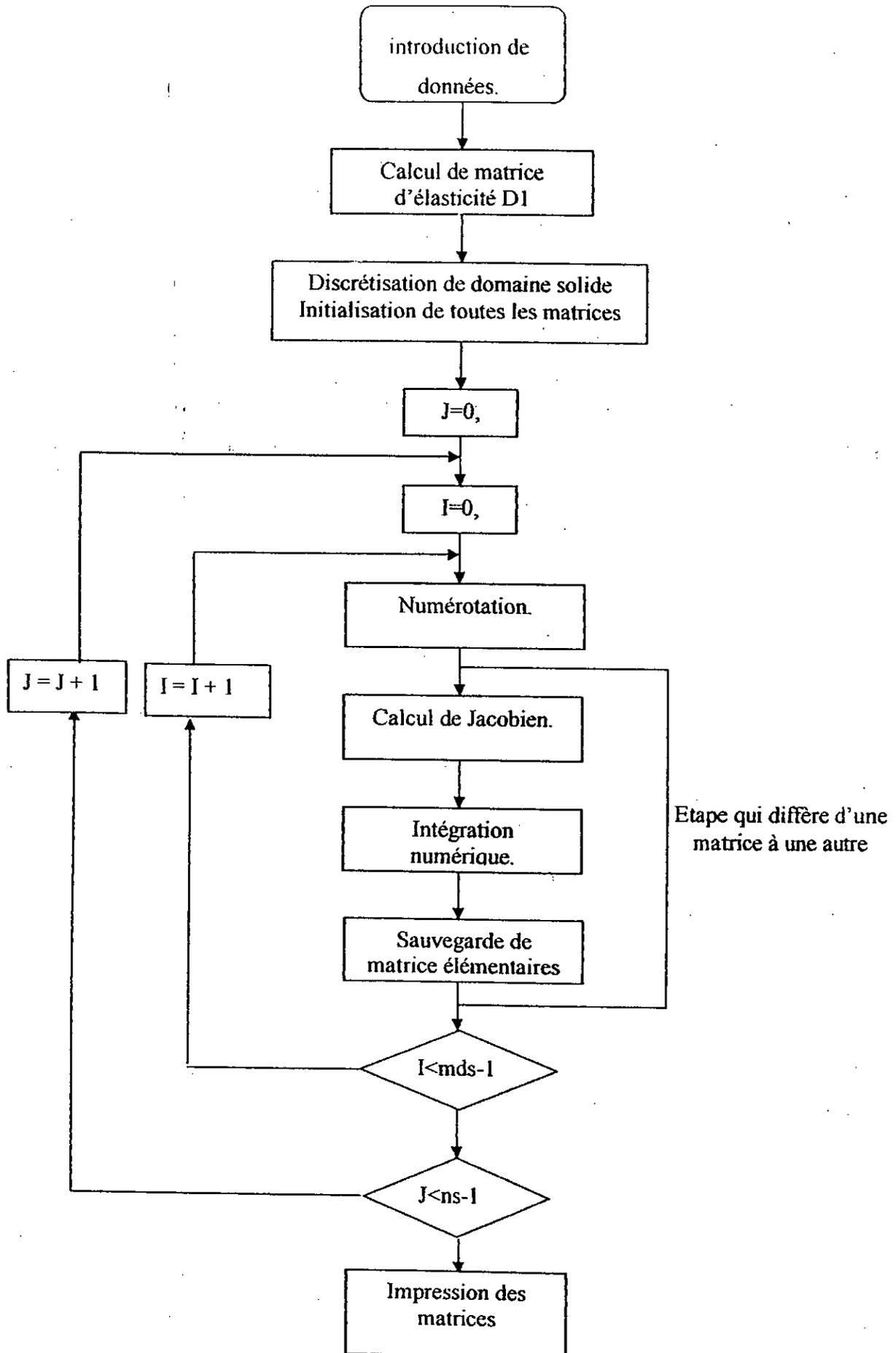
*matrice locale.

matcr(1:4 ,1:2) = matns(fh1:fh4 , 1:2)

II-II. Calcul de matrices élémentaires :

Deux programmes distincts sont réalisés pour le calcul des matrices, l'un pour le calcul de matrices du solide et l'autre pour le calcul de celles de fluide, cependant, ces deux programmes ont presque la même structure, et les mêmes étapes, chacun d'eux commence par la lecture des données d'entrée et la définition géométrique de domaine à étudier (coordonnées, connectivités ...etc.) à l'aide des procédures : (discrétisation et numérotation), puis pour chaque élément quadrilatéral iso-paramétrique Q4, on calcule le jacobien ou le déterminant à l'aide des procédures : (determinant ou calculJs), la sous-routine : determinant, calcule le jacobien des éléments centraux (loin des frontières) et celle appelée calculJs, calcule le jacobien des éléments aux frontières : Js, pour qu'on l'utilise par la suite dans les calculs de la matrice de couplage et imposer les conditions aux limites dans le fluide, vient ensuite l'étape de l'intégration numérique (intégration de Gauss à quatre points), où on fait appel à différentes fonctions de formes et leur dérivées, les organigrammes de calculs des différentes matrices sont explicités ci dessus (un seul organigramme est

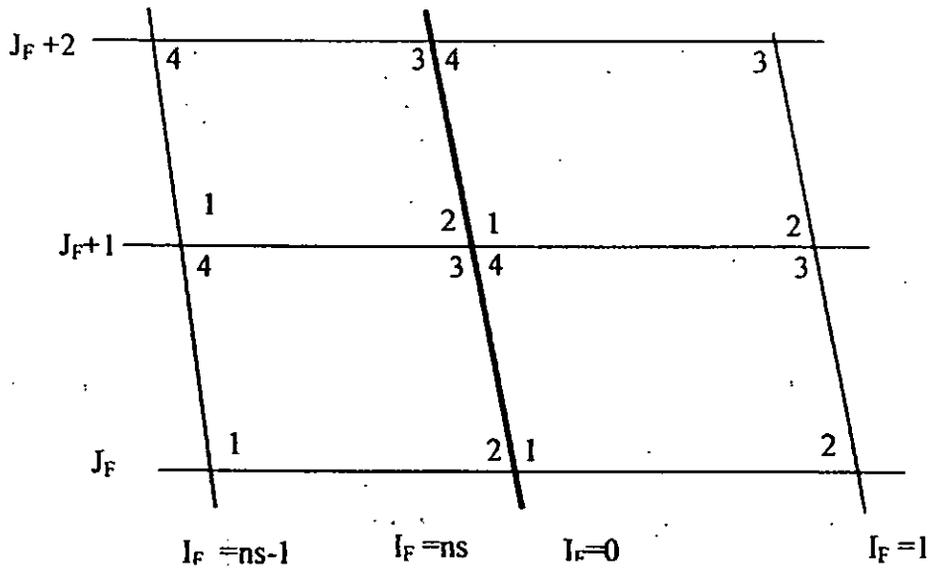
explicité, car les autres sont soit identiques, soit ils diffèrent au niveau des procédures intérieures.



II-II. Assemblage des matrices élémentaires :

Trois procédures d'assemblage sont réalisées en vu d'assembler trois types de matrices élémentaires, les matrices du barrage sont assemblées par une procédure d'assemblage assemble8x8, celles de fluide sont assemblées par une procédure assemble4x4 et celle de couplage par une procédure à part appelée assemble8x4.

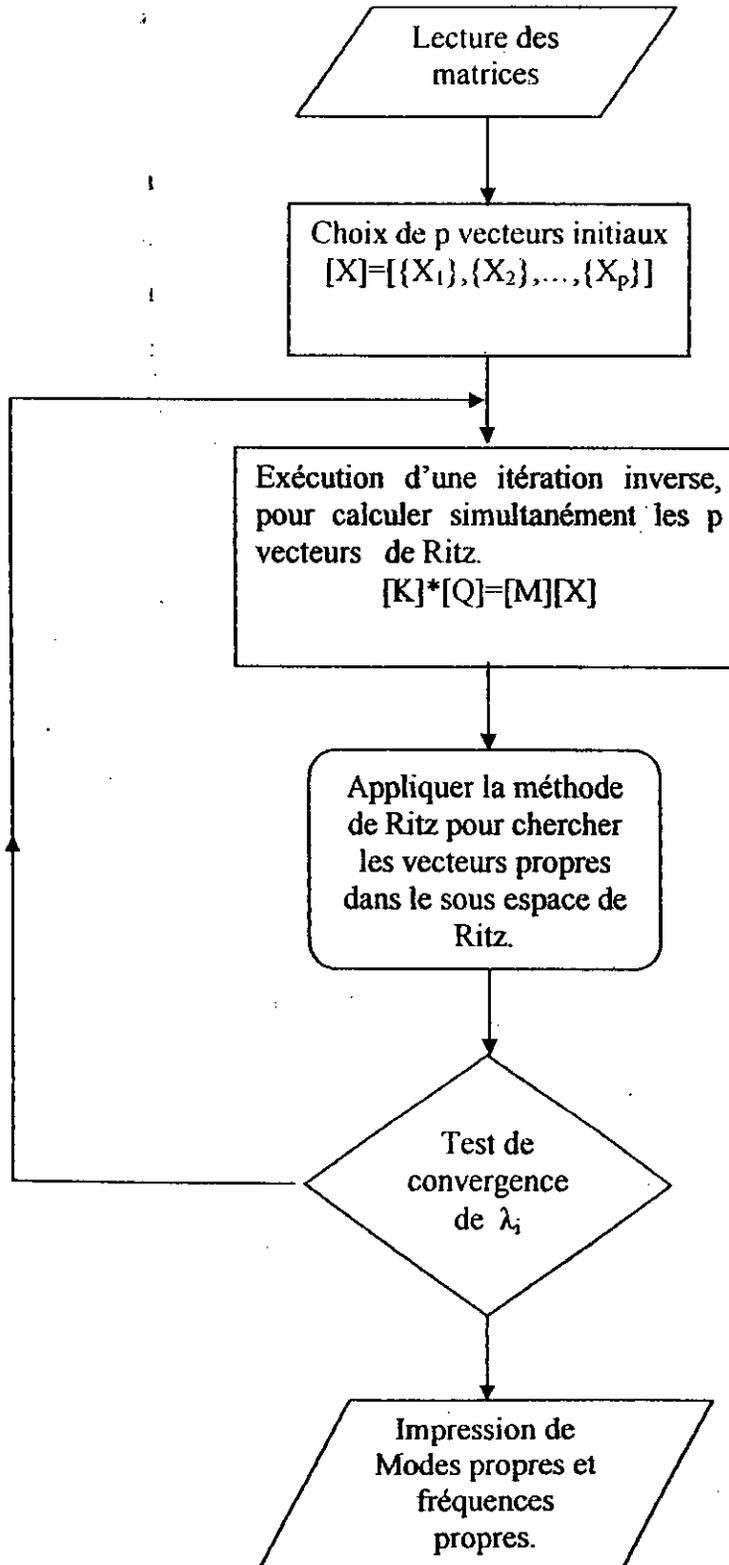
Les procédures d'assemblages sont différentes à cause des degrés de liberté pour les nœud solide et ceux fluide (deux pour le champ déplacement u , et un pour le champ pression), la matrice de couplage est construite par deux rangées d'éléments, une rangée appartient à l'interface Γ_1 du monolithe de barrage, et une autre rangée à l'interface Γ_1 de coté fluide, donc la procédure d'assemblage de ces matrices se fait selon les deux types d'assemblages Figure(III).



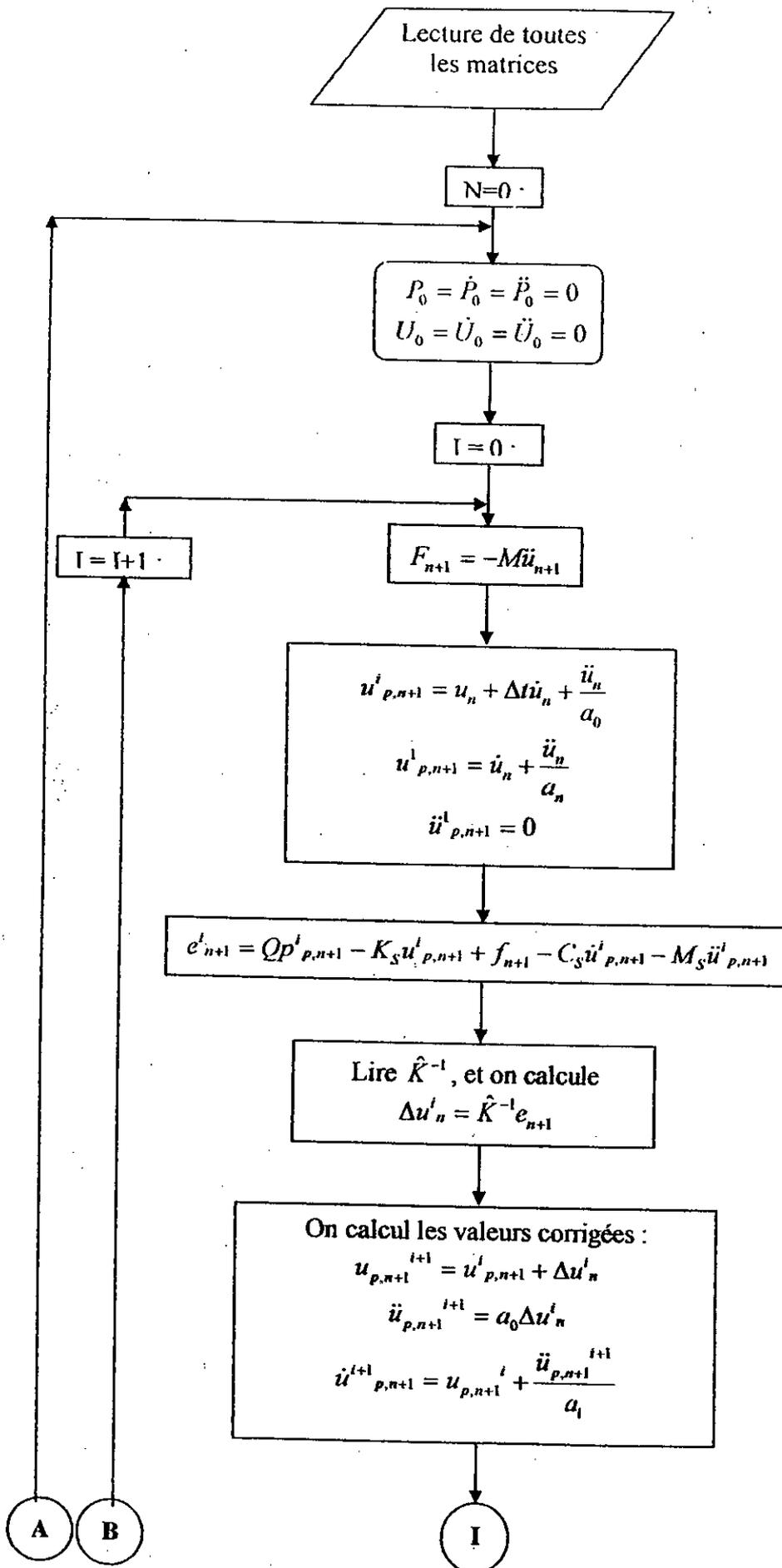
II-III Organigrammes de Résolution :

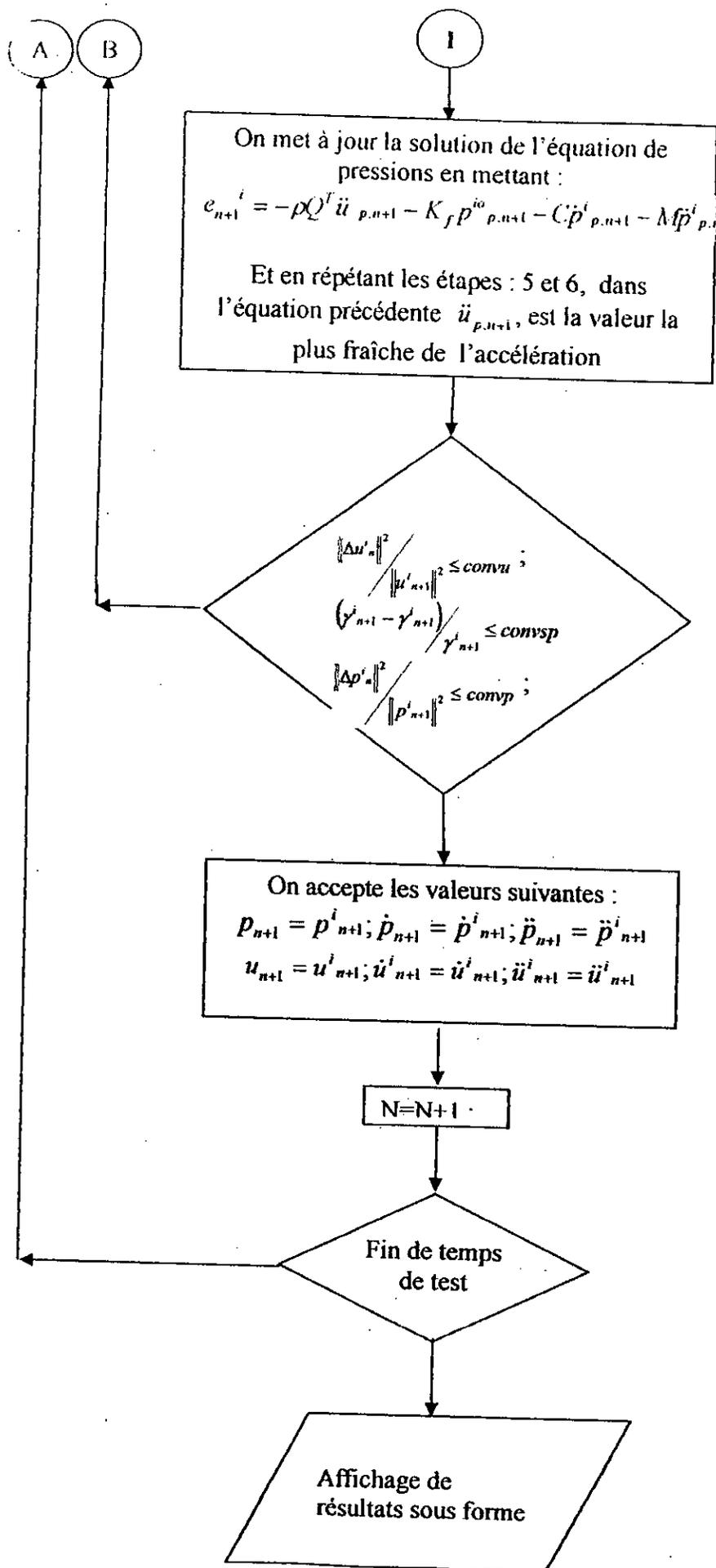
Les méthodes de résolution sur lesquelles nous avons déjà parlé, ont été programmées indépendamment des autres programmes, et chacune d'elles est écrite dans un programme à part, après avoir calculé les matrices M_S , K_S , M_F et K_F , le programme des vibrations libres est exécuté pour 'déduire' les modes et les fréquences propres.

Par la suite, on relit toutes les matrices à partir de programme de résolution du système, et on déduit la réponse sismique du barrage ; ces deux programmes sont implémentés dans le code de calcul de la manière suivante.



Organigramme de la méthode de Newmark.





CHAPITRE V:

APPLICATIONS

I. Analyse modale :

L'analyse modale d'une structure permet d'en améliorer la connaissance physique, et par conséquent, on pourra facilement éviter quelques problèmes en rapport avec les modes propres d'une structure qui peuvent, éventuellement, survenir au cours de sa durée de vie.

Une structure soumise à une excitation forcée dynamique, peut être sujette à l'amplification dynamique, qui est parfois synonyme de rupture, pour ceci, il est préférable de connaître la base modale de la structure d'une telle façon qu'elle n'ait pas de fréquences propres dans une bande donnée.

II. Mode propre et fréquence propre :

Les systèmes physiques sont toujours dissipatifs : les modes propres de vibrations physiques sont des vecteurs complexes au sens algébrique, et les fréquences propres associées sont des nombres complexes ; alors que les modes propres calculés par les programmes d'analyse modale traditionnels sont des vecteurs réels au sens algébrique et les fréquences associées sont des nombres réels : on les appelle modes propres réels bien qu'ils n'aient de réel que leur forme mathématique.

Le problème de modes et fréquences propres d'un modèle d'éléments finis d'un système physique correspond au problème des valeurs et vecteurs propres d'un système algébrique.

Le système barrage réservoir, comme il a été introduit pour le module de calcul des modes et des fréquences propres, c'est à dire discrétisé, est montré sur la figure (Figure1), la profondeur d'eau dans le réservoir est prise égale à la hauteur de barrage (Premier trapèze de hauteur H_b), et au-dessus de ce trapèze on rajoute au barrage la hauteur de la crête, qui est de deux mètres, c'est à dire que le trapèze du barrage est le seul solide introduit pour le module de calcul de fréquences et de modes propres, il est constitué de $15 \times 15 = 225$ éléments Q4 quadrilatéraux isoparamétrique à deux degrés de liberté, de même pour le fluide du réservoir, le nombre d'éléments pris est égal à 225 éléments Q4, ce qui voudrait dire qu'on a effectué 15 subdivisions horizontales pour l'eau et le barrage (pour qu'il y ait compatibilité au niveau de l'interface) et 15 subdivisions verticales que ce soit pour le réservoir ou pour le barrage.

Le barrage pris pour l'application est celui de Oued Fodda, qui a pour caractéristiques :

- Masse volumique : $\rho = 2640 \text{ (kg/m}^3\text{)}$.

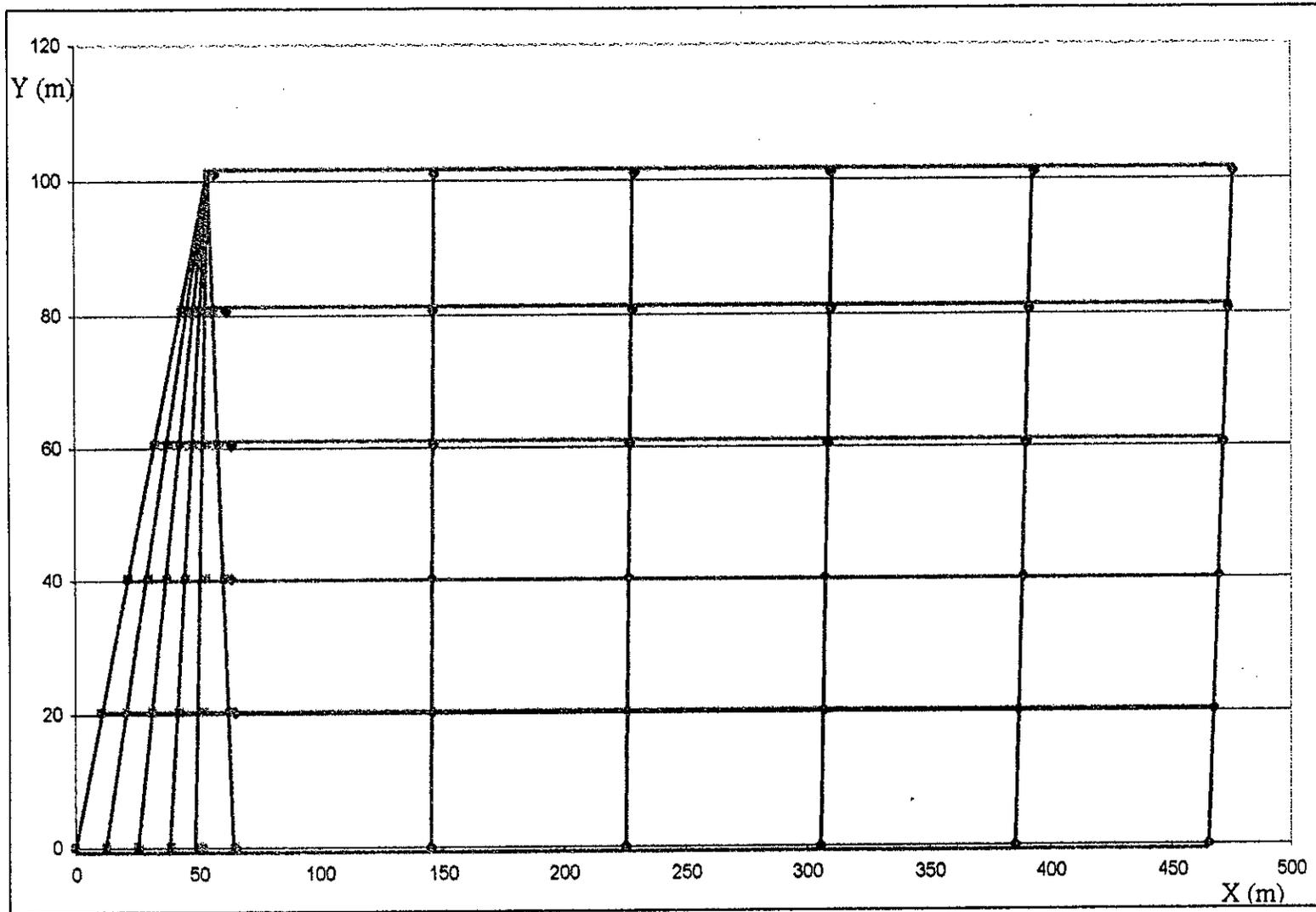


Figure 1 : Discretisation du système barrage-réservoir.

- Coefficient de Poisson 0.2
- Module de Young : $E = 2600$ (MPa).
- Hauteur du barrage : $H_b : 101$ m.
- Largeur du barrage : $L_b : 65.5$ m
- Fruit amont : $f_a=0.1$
- Fruit aval : $f_v=0.55$

I.II. Modes propres du barrage :

Les modes propres et les fréquences propres d'un barrage sont déterminés par la résolution de l'équation (IV-2), sur laquelle nous avons déjà parlé dans le chapitre relatif aux méthodes de résolution des systèmes aux valeurs propres qu'on reprend ici :

$$K,\phi - \omega^2 M,\phi = 0 \quad (V-1)$$

La solution de cette équation constitue l'ensemble des vecteurs propres de ϕ_i ; représentant chacun une configuration du barrage et vibrant avec une amplitude ω_i , les résultats sont exprimés et discutés en termes de périodes propres correspondantes $T_i = \omega_i/2*\pi$. Les résultats que nous avons obtenus par ce code de calcul sont comparés avec ceux obtenus par Mr A.Seghir sur le même barrage, qui a, lui même validé son code par des résultats obtenus par Chopra et Chakrabarti avec un code appliqué au barrage de Pine Flat (Californie), ces résultats sont montrés dans le tableau I

Modes propres du barrage.	Périodes propres (sec)	Périodes propres (sec.) (Référence)
1	0.270	0.267
2	0.106	0.113
3	0.092	0.093
4	0.067	0.066
5	0.05	0.044

Tableau I : Périodes propres de barrage de Oued Fodda.

On note que les valeurs obtenues par le code du calcul élaboré sont très satisfaisantes, dans la mesure où, dans la référence le maillage utilisé est plus resserré et fine que celui qu'on a utilisé.

I.III. Les modes propres de fluide du réservoir :

Le même maillage est appliqué sur le fluide du réservoir, c'est à dire 225 éléments isoparamétriques Q4, les modes propres du réservoir représentent les vecteurs de pressions dans le réservoir en variation harmonique de fréquence ω_i , et de période T_i .

L'équation en oscillations pour le fluide du réservoir s'écrit de la même façon que pour le solide

$$K_F \phi - \omega^2 M_F \phi = 0 \quad (V-2)$$

où ϕ_i : représente le vecteur de pression et, ω_i représente la fréquence propre.

Le tableau ci-dessous montre les périodes propres trouvées pour le fluide du réservoir, on remarque dans ce tableau aussi que les valeurs sont assez proches, et la différence est due à l'utilisation dans la référence des éléments infinis, ainsi que l'éloignement de la limite de troncature, le maillage utilisé est toujours plus fine que celui qu'on a utilisé, mais on peut affirmer que les valeurs obtenues sont assez précises.

Modes propres du réservoir.	Périodes propres (sec)	Périodes propres (sec.) (Référence)
1	0.252	0.265
2	0.238	0.251
3	0.210	0.229
4	0.193	0.205
5	0.173	0.182

Tableau II : Périodes propres du réservoir de Oued Fodda .

II. Réponse sismique de barrage :

Dans l'étude des structures, il existe plusieurs types d'excitations et donc plusieurs types de réponses pour cette structure : transitoire, harmonique... etc. dans notre cas on s'intéresse à la réponse d'un barrage et de son réservoir à une excitation dynamique aléatoire d'un séisme ; la seule excitation qui ne doit pas être négligée, en principe, dans l'étude dynamique d'un barrage. La représentation statique des forces sismiques est une hypothèse excessivement simplificatrice, car elle ne prend pas en compte la réponse dynamique et les effets inertiels.

L'équation générale régissant le mouvement d'une structure amortie soumise à une excitation fonction de temps $F(t)$ est :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F(t) \quad (V-3)$$

lorsque la fonction $F(t)$, est fonction de temps, comme dans notre cas, car elle peut ne pas dépendre du temps, et que l'on s'intéresse à la réponse du système au cours du temps on réalise une réponse transitoire, la solution dépend alors des conditions initiales : le déplacement U_0 et la vitesse \dot{U}_0

Ce chapitre est consacré à l'étude de comportement dynamique de système barrage réservoir, les résultats de la réponse de système barrage réservoir, le système en interaction, (déplacements dans le corps de barrage et les pressions dans le réservoir) sont calculés par le programme : RESOLUTION, qui utilise la méthode de Newmark double prédiction-correction ; ces résultats sont représentés graphiquement, interprétés et comparés, en vu de valider le code de calcul élaboré, aux résultats de quelques auteurs

Le phénomène d'interaction est étudié en variant quelques paramètres qui influencent :

- la compressibilité de l'eau.
- l'inclinaison de parement amont de barrage.
- la fréquence d'excitation.
- la viscosité de l'eau.

La distribution de la pression sur le parement amont d'un barrage sera représenter par la variation de coefficient de pression $C_p = P/\rho * g * H$ en fonction de la profondeur considérée. Pour pouvoir valider les résultats obtenus, et analyser par la suite l'influence des différents paramètres par le présent code, nous comparant les résultats obtenus à ceux obtenus par Humar (graphique de Humar référencié dans [9]), qui a fait l'hypothèse d'un barrage rigide et

de fluide compressible, la supposition de fluide compressible est déjà intégrée dans notre code de calcul, quant à l'hypothèse de barrage rigide, on l'inclut en augmentant le module de rigidité de barrage, la (figure2) nous montre les deux courbes représentant : $Y/H = f(C_p)$, représentées sur le même graphique ; la supeposition partielle des deux courbes est due au problèmes de précision et de discrétisation (la subdivision par 15 dans la direction horizontale est insuffisante pour le barrage, et insuffisante dans la direction verticale pour le fluide du réservoir).

Figure 2 : Validation de code de calcul dans l'hypothèse d'un barrage rigide et de fluide incompressible.

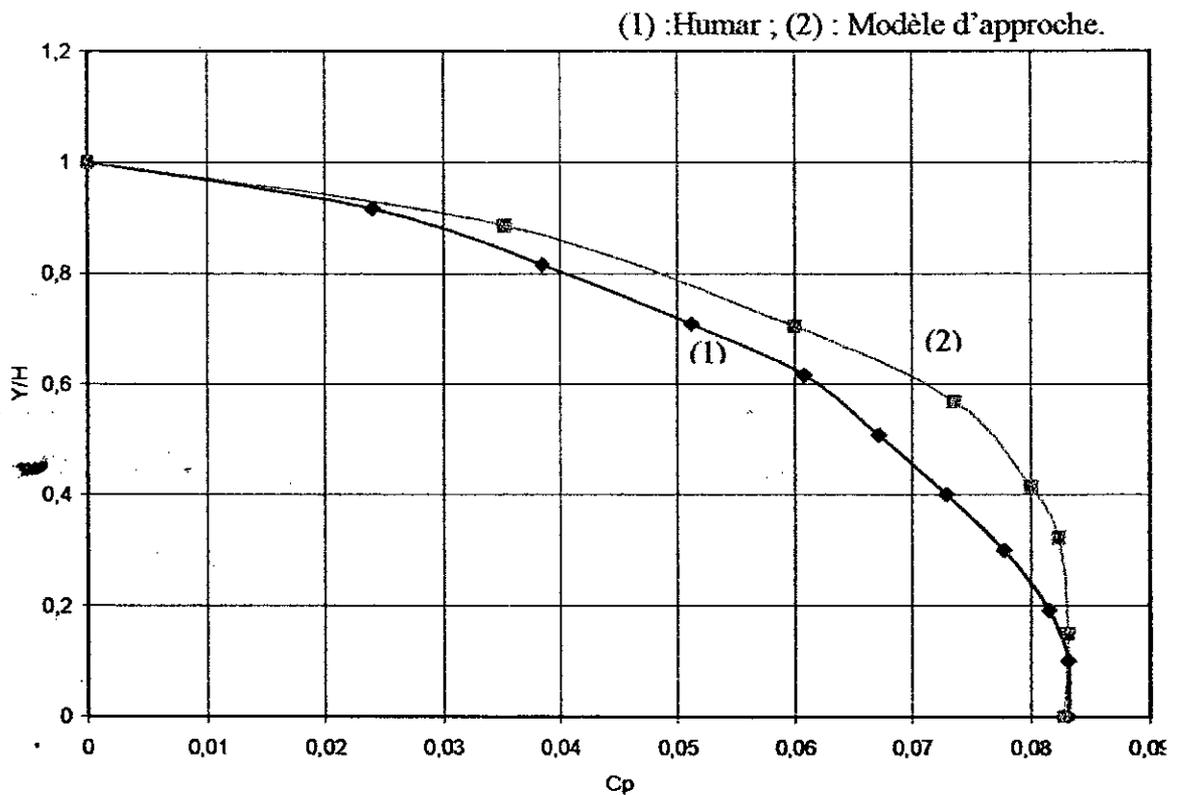
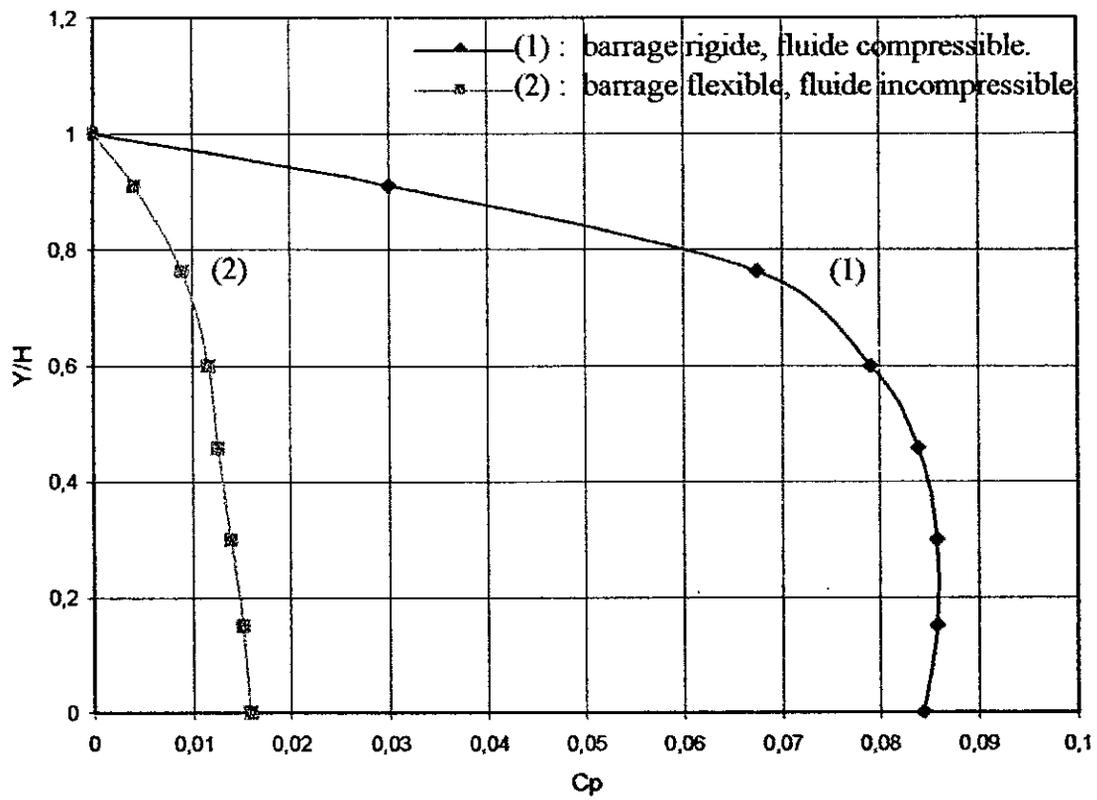
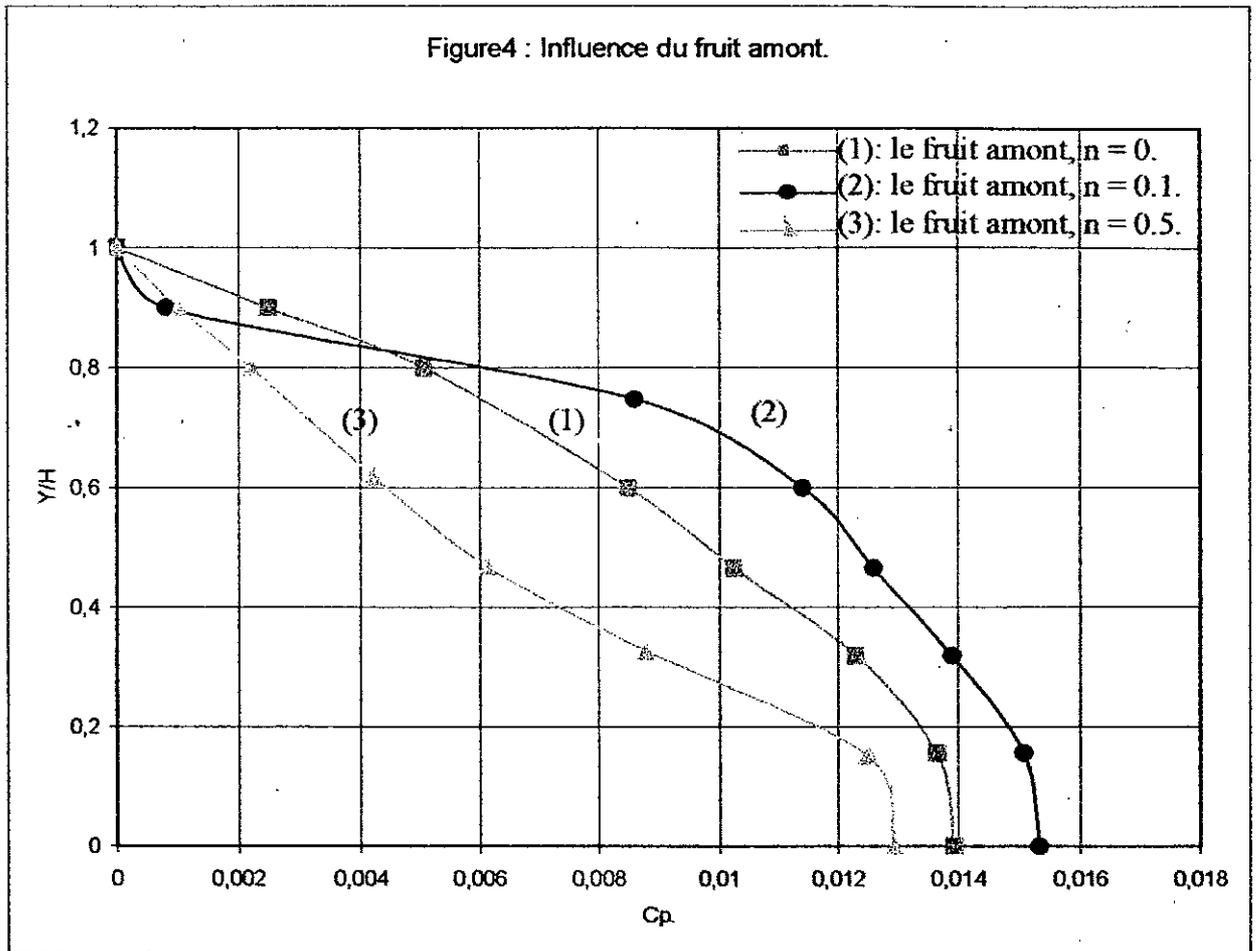


Figure3 : L'effet de la compressibilité.





II. I. L'effet de paramètre compressibilité :

Sur le graphe de la (figure2), on trace deux courbes correspondant à deux cas de figure différents : Dans le premier, on suppose que le fluide du réservoir est compressible (pour ceci, nous calculons les termes des matrices où l'on devise par C^2 ou par C) et le barrage est considéré flexible, et dans le deuxième cas par contre, l'eau du réservoir est prise incompressible et le barrage est considéré rigide, on remarque que sur cette figure, l'effet de la compressibilité de l'eau paraît très important, la négligence de la compressibilité conduit à l'utilisation de concept de masse ajoutée, ce qui induit une erreur très importante ; sans omettre l'influence de la rigidité de barrage, vu le fait qu'un barrage rigide transmet la majeure partie de l'énergie au fluide, et qu'un barrage flexible dissipe une partie de cette énergie.

II. II. L'effet de l'inclinaison de parement amont :

Lorsque les points de l'interface de barrage viennent buter contre l'eau du réservoir, si cette interface n'est pas inclinée, toute l'énergie, et pression par conséquent, est transmise au fluide du réservoir, par contre si ce parement était relativement incliné, on verra une quantité d'énergie se dissiper verticalement, la (figure 3) nous montre cet effet.

II.III. Application d'accélérographes :

On applique le code de calcul élaboré pour avoir les pressions dans le réservoir et les déplacements à la crête de son barrage, et on représente les vecteurs obtenus sous forme graphique. Les accélérographes que nous appliquerons sont montrés sur la (figure 4), l'accélérographe (a) est celui représentant les accélérations sismiques de séisme d'Al Asnam, (b) représente les accélérations de séisme de Loma Preita, on voit sur cette représentation que l'accélération sismique dépasse, au temps $t = 2.60$ s, 6.17m/s^2 ce qui constitue une accélération importante.

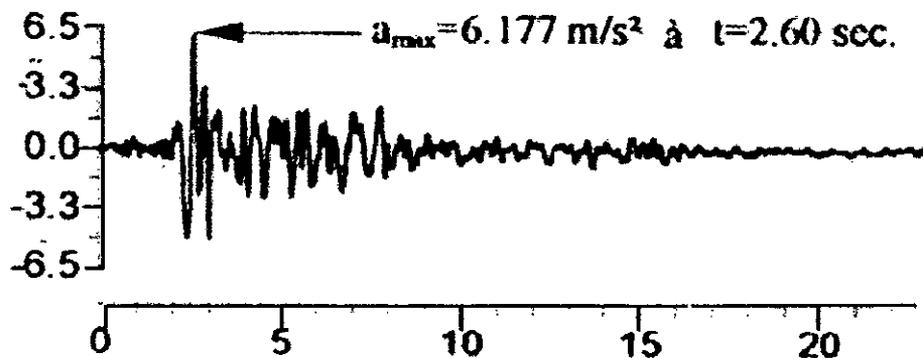


Figure 5: Accélérographe de séisme de Loma Preita.

Les déplacements et les pressions sont représentées sur la (figure) :

Figure 6: Déplacements à la crete.

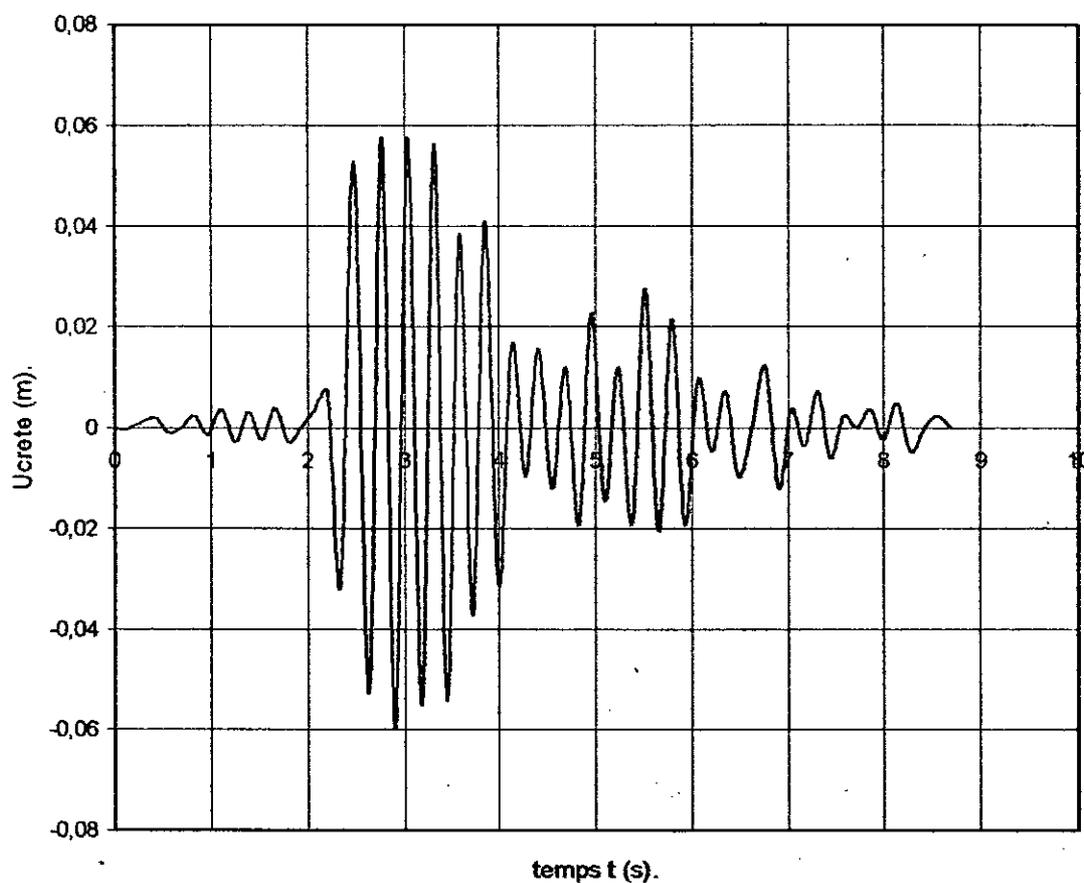


Figure 7 : Pressions dans le réservoir.

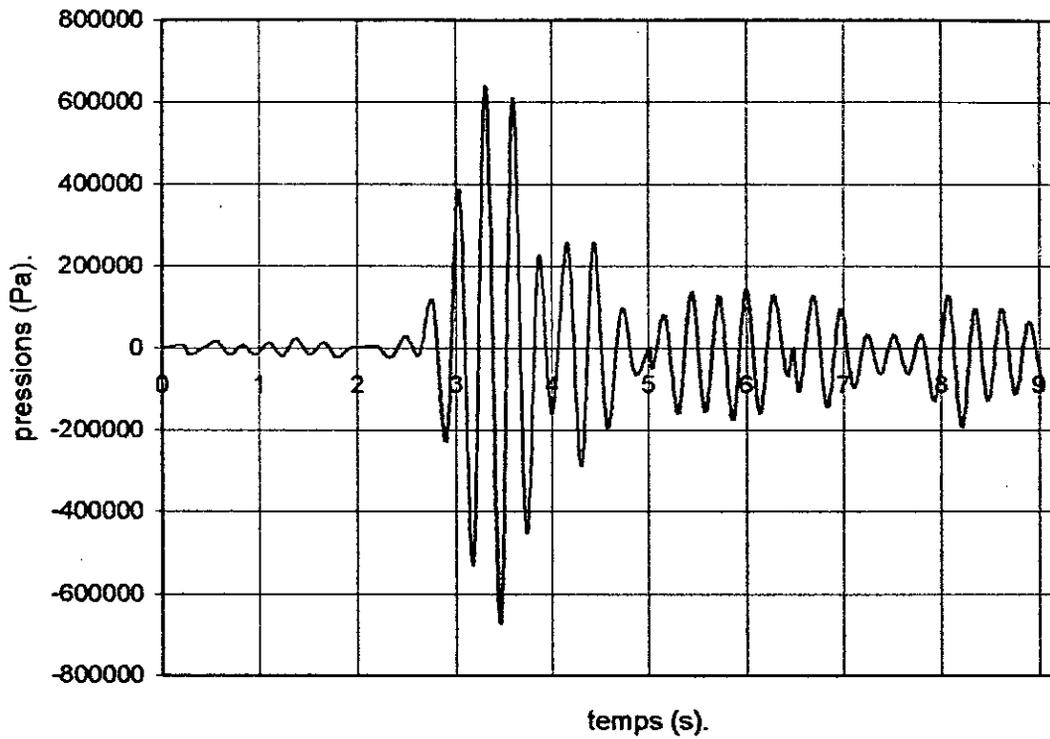


Figure 8: réponse de barrage de Pine Flat à l'accélérogramme de Loma Preita.

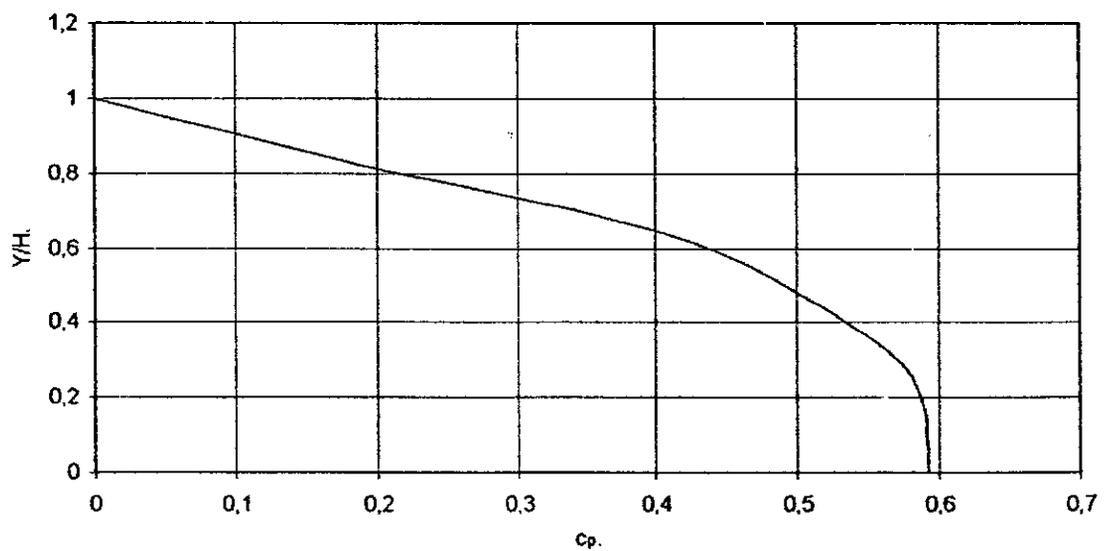
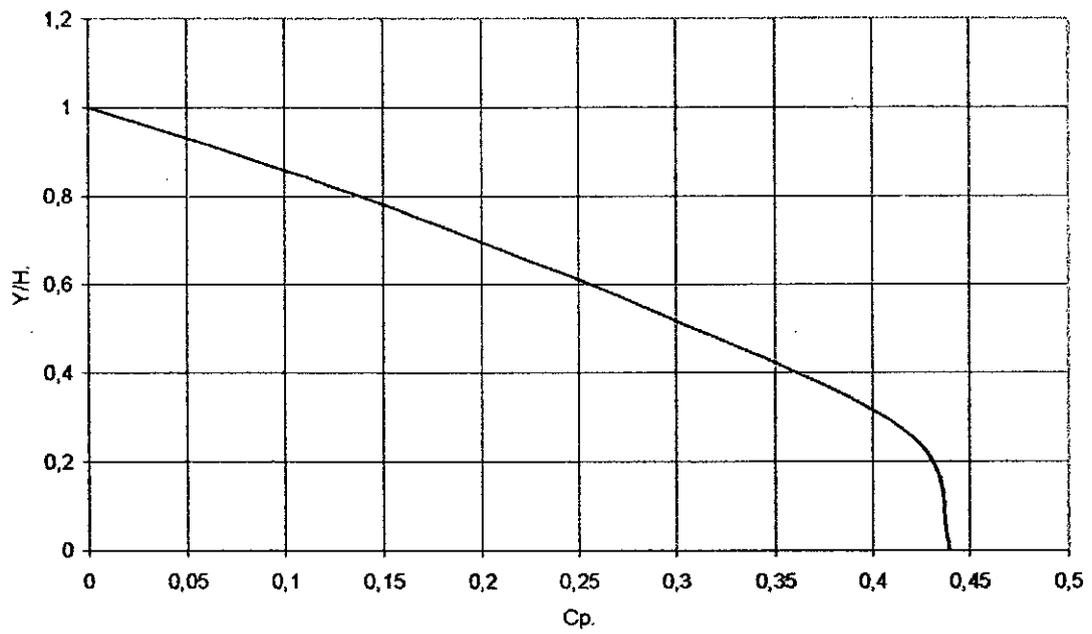


Figure 9: réponse de barrage de Hammam Grouz au séisme de Loma Preita.



CONCLUSION

Conclusion :

Dans cette étude, nous avons élaboré un programme d'analyse des effets des excitations sismiques sur un barrage poids en béton ainsi que l'effet, surtout, de son réservoir soumis aux mêmes excitations, en mettant en œuvre la méthode des éléments finis bidimensionnels et en incluant quelques conditions et configurations réelles, compressibilité de l'eau, parement amont incliné, limite de troncature assez éloignée ainsi que viscosité de l'eau, en omettant toutefois, quelques paramètres assez importants, comme les effets des sédiments du fond de réservoir qui réfléchissent les ondes de pressions, ceci tout en sachant que les barrages poids, puisque ils sont l'objet d'étude, se construisent derrière des cuvettes où les flans de montagnes sont assez inclinés.

La formulation utilisée se base sur l'approche déplacement-pression, les résultats obtenus nous renseignent sur les effets réels des paramètres pris en compte :

La compressibilité de l'eau est un paramètre très important qui ne doit pas être négligé, et l'utilisation de concept de masse ajoutée constitue une simplification très grossière qu'on ne doit pas prendre pour fiable.

L'assimilation d'un barrage rigide induit des erreurs dans les calculs, car en réalité, le barrage ne peut pas être rigide.

L'inclinaison de parement amont de barrage peut être omise, vu le fait que le parement amont des barrages poids est suffisamment faible, mais sa prise en compte compensera sûrement quelques erreurs, vu qu'elle ne constitue pas une condition difficile ni de point de vue modélisation, ni de point de vue calculs.

La viscosité de l'eau ne constitue pas un paramètre très influant, puisque elle est de l'ordre de 10^6 , beaucoup d'auteurs l'ont déjà vérifié.

Les pressions dans le réservoir n'étaient pas très importantes à un point d'influencer un monolithe de barrage de 101 m de hauteur, néanmoins l'interaction peut être une source de dégâts pour le barrage.

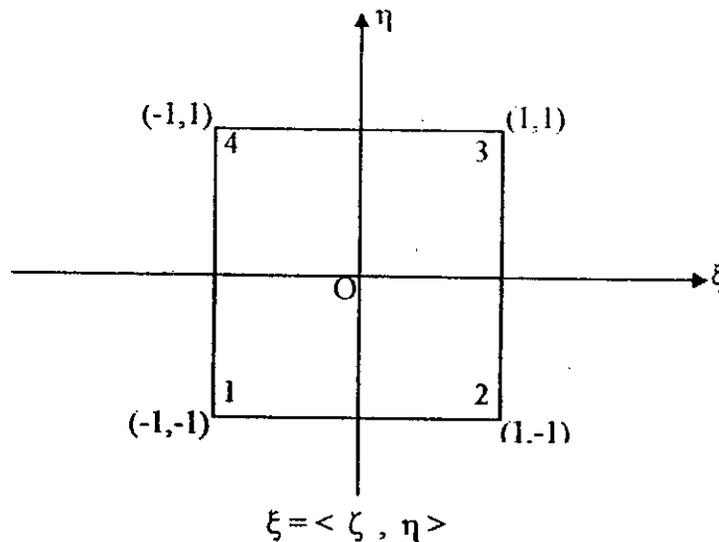
Bibliographie

- [1] E. Eng. And Struct. Dyn. 16. 1988. (A solution procedure for the earthquake analysis of arch dam-reservoir systems with compressible water.)
- [2] E. Eng. And Struct. Dyn. 32. 2003. (Stochastic seismic analysis of hydrodynamic pressure in dam reservoir systems.)
- [3] E. Eng. And Struct. Dyn. 19. 1990. (Three-dimensional boundary element reservoir model for seismic analysis of arch and gravity dams.)
- [4] E. Eng. And Struct. Dyn. 18. 1989. (Water pressures on rigid gravity dams with finite reservoir during earthquakes.)
- [5] E. Eng. And Struct. Dyn. 30. 2001. (An experimental investigation of water level effects on the dynamic behaviour of a large arch dam.)
- [6] Int. Jou. Modl. & Simu. 8. 1988. (hydrodynamic pressure on dams.)
- [7] P. G. CIARLET, *Masson*, 1982. (Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.)
- [8] J. C. CRAVEUR, *Masson*, 1996. (Modélisation des structures calcul par éléments finis.)
- [9] A. SEGHIR, A. SOUFARI, 1995, (Interaction fluide-structure cas des barrages poids en béton.)
- [10] A. SEGHIR 1999, (Investigation des effets d'interaction sismique fluide-structure par couplage éléments finis-éléments infinis.)
- [11] F. MEZALI 2003. (Modélisation des écoulements à surface libre Approche Navier-Stokes 2D.)
- [12] ZEINKIEWICZ, O.C. & TAYLOR, R.L. 1. *AFNOR* technique, 1991. (La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires.)
- [13] ZEINKIEWICZ, O.C. & TAYLOR, R.L. 2. *Mc. Graw-Hill Book Company*, 1991. (The finite element method. Solid and fluid mechanics, dynamic and non-linearity.)

ANNEXE

Annexe (I)

Les fonctions de formes $N(\xi)$ d'un élément quadrilatéral iso paramétrique :



Elément de référence.

$$\langle N \rangle = 1/4 \langle (1 - \zeta)(1 - \eta) \quad (1 + \zeta)(1 - \eta) \quad (1 + \zeta)(1 + \eta) \quad (1 - \zeta)(1 + \eta) \rangle$$

$$\langle \partial N / \partial \eta \rangle = 1/4 \langle (-1 - \eta) \quad (1 - \eta) \quad (1 + \eta) \quad (-1 - \eta) \rangle$$

$$\langle \partial N / \partial \zeta \rangle = 1/4 \langle (\zeta - 1) \quad (-1 - \zeta) \quad (1 + \zeta) \quad (1 - \zeta) \rangle$$

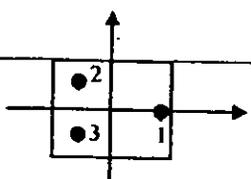
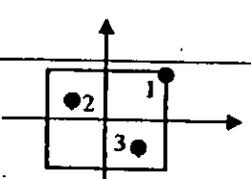
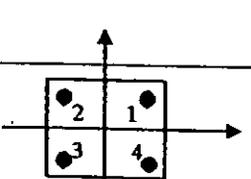
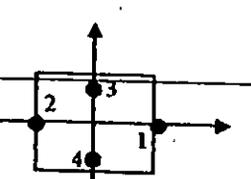
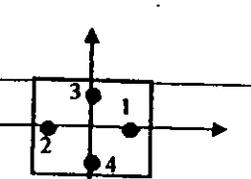
-Intégration numérique :

Les abscisses et poids d'intégration numérique de Gauss :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Y(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j Y(\zeta_i, \eta_j)$$

où : w_i, w_j , sont des coefficients appelés poids d'intégration.

et ζ_i, η_j sont les coordonnées des points d'intégration correspondants.

	Ordre m	Nombre de Points.	coordonnées		poids w_i
			ζ_i	η_i	
	2	3	$\sqrt{2/3}$	0.	4/3
			$-1/\sqrt{6}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	4/3
	2	3	1.	1.	4/7.
			$-5/9$	$2/9$	27./14.
			$1/3$	$-2/3$	3./2.
	3	4 (méthode produit à 2x2)	$\pm 1/\sqrt{3}$	$\pm 1/\sqrt{3}$	1.
	3	4	$\pm 1.$	0.	2./3.
			0.	$\pm 1/\sqrt{2}$	4./3.
	3	4	$\pm \sqrt{2/3}$	0.	1.
			0.	$\pm \sqrt{2/3}$	

Annexe (II)

-Algorithme de la méthode d'itération inverse :

*Triangulariser la matrice $[K] = [L]^T [D][L]$.

*Choisir un vecteur initial $\{V^1\}$, non M -orthogonal au vecteur proche cherché.

*calculer la sollicitation $\{F^1\} = [M] \{V^1\}$

pour chaque itération $i = 1, 2, \dots$

résoudre l'équation $[L]^T [D][L] \{V^{i+1}\} = \{F^i\}$

calculer la sollicitation : $\{\bar{F}\} = [M] \{V^{i+1}\}$

évaluer $d = \langle V^{i+1} | \{\bar{F}\} \rangle$

calculer l'approximation de λ par le quotient de Rayleigh :

$$\lambda_1^{i+1} = R(\{V^{i+1}\}) = \frac{\langle V^{i+1} | \{F^i\} \rangle}{d}$$

calculer $\{F^{i+1}\}$:

$$\{F^{i+1}\} = \frac{1}{\sqrt{d}} \{\bar{F}\}$$

vérifier la convergence de $\lambda_1^{i+1} : |\lambda_1^{i+1} - \lambda_1^i| < \varepsilon$

calculer le vecteur propre M -normalisé :

$$\{X_i\} = \frac{1}{\sqrt{d}} \{V^{i+1}\}$$

Annexe (III)

Algorithme de la méthode générale de Jacobi :

Définir la précision de la convergence requise $\varepsilon = \text{eps}$

Pour chaque cycle s.

Définir la tolérance dynamique $\varepsilon_s = 10^{-5}$

Pour chaque ligne $i = 1, 2, \dots, n$.

Pour chaque colonne $j = 1, 2, \dots, n$

Calculer les facteurs de couplage :

$$f_K = \frac{|K_{ij}|}{\sqrt{K_{ii}K_{jj}}} ; \text{ et } f_M = \frac{|M_{ij}|}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}}$$

Si f_K , ou $f_M > \varepsilon_s$

*calculer les deux facteurs a et b.

*transforme les matrices $[K][M]$

colonne i = colonne i + b*colonne j

colonne j = a*colonne i + colonne j

puis : ligne i = ligne i + b*ligne j

ligne j = a*ligne i + ligne j

*modifier les vecteurs propres $[X]$:

colonne i = colonne i + b*colonne j

colonne j = a*colonne i + colonne j

*calculer les valeurs propres et les facteurs de couplage :

$$\lambda_i = \frac{K_{ii}}{M_{ii}} \text{ et } F_\lambda = \text{Max}_i \frac{|\lambda_i^s - \lambda_i^{s-1}|}{|\lambda_i^{s-1}|}$$

$$F_K = \text{Max}_{i,j} \frac{|K_{ij}|}{\sqrt{K_{ii}K_{jj}}} \quad F_M = \text{Max}_{i,j} \frac{|M_{ij}|}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}}$$

test de convergence : $F_K < \varepsilon$ et $F_M < \varepsilon$ et $F_\lambda < \varepsilon$.

Annexe (IV)

Algorithme de décomposition de la matrice [K]

Pour $s = 2, 3, \dots, n$ Pour $i = 1, 2, \dots, n$ Pour $m = 1, 2, \dots, n$

$$K_{si} = K_{si} - K_{sm} K_{mi}$$

$$K_{is} = K_{is} - K_{im} K_{ms}$$

normaliser la ligne i

$$K_{si} = K_{si} K^{-1}_{ii}$$

pour $m = 1, 2, \dots, s-1$

$$K_{is} = K_{is} - K_{sm} K_{ms}$$

Algorithmes de résolution de systèmes matricielles inférieur et supérieur :

Système triangulaire inférieur :

Pour $i = 2, 3, \dots, n$

$$F_i = F_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} F_j$$

Système triangulaire supérieur :

$$F_n = K^{-1}_{nn} F_n$$

Pour $i = n-1, n-2, \dots, 1$

$$F_i = K^{-1}_{ii} \left(F_i - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} F_j \right)$$

