

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

*Département Hydraulique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'Etat en hydraulique*

# Mémoire

## THEME

*Analyse numérique du transport des  
polluants dans les milieux  
poreux saturés*

*Proposé par :*  
**M<sup>lle</sup> ZERFA . FZ**

*Etudié par :*  
**M<sup>r</sup> BOUSSOUM Moulla**

*Encadré par :*  
**M<sup>lle</sup> ZERFA . FZ**  
**M<sup>lle</sup> BOUCHRIH . A**

Année Universitaire : 2002/2003

## **Remerciements**

Au terme de ce travail, il m'est agréable de remercier :

**M<sup>elle</sup> ZERFA .F Z** d'avoir accepté de diriger ce travail et pour ces précieux conseils, également **M<sup>elle</sup> BOUCHRIH. A** pour sa disponibilité et son soutien constant.

**Mr. KHETTAB. A** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

**Mr BERKANI.M** d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

**Mr SEMAR. L** d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Sans oublier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation depuis la première année primaire jusqu'à aujourd'hui.

## Dédicace

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail à :

- mes parents,
- mes frères ,
- mes sœurs ,
- tous mes amies et amis
- toute personne défiant l'horizon, et qui croit à un avenir meilleur.

### Résumé :

Ce mémoire est une contribution à l'analyse bidimensionnelle de transport des polluants dans les milieux poreux saturés.

En premier lieu, nous avons simulé les écoulements souterrains permanents et bidimensionnels, à partir de l'équation d'équilibre.

Nous parlons donc de model d'hydraulique souterraine dont le but est de définir le champ des vitesses et des potentiels.

Par la suite nous avons utilisé les résultats de ce modèle pour la résolution de l'équation de transport des polluants pour des sources de pollution permanentes.

La méthode numérique utilisée est la méthode des éléments finis qui s'inspire dans sont orientation générale de celle proposée par *Galerkine*.

### Mots-clés :

Dispersion hydrodynamique, milieu poreux saturé, transport des polluants, méthode des éléments finis,...

### Abstract :

This thesis is a contribution to a bidimensional study of pollutants dispersion in saturated porous media.

At first, we have simulated the bidimensional steady flows from the balance equation; therefore, we talk about the hydrodynamic model which aims to define the speed and potential.

After wards, we use the results of this model to solve the equation of pollutants transportation for study source of pollutants.

The numerical method used, is the finite element method, is inspired in its general orientation from the one proposed by *Galerkine*.

### Key-words:

Hydrodynamic dispersion, saturated porous media, pollutants transportation, finite element method...

### ملخص

تعتبر هذه المذكرة مساهمة للدراسة ثنائية البعد عن تشتت الملوثات داخل الأوساط المسامية المشبعة.

في بداية الأمر قمنا بتصنيع السيلان أو الجريان الدائم في الوسط الباطني المشبع عن طريق معادلة التوازن و بالتالي نهدف إلى النموذج الهيدروديناميكي، الغرض منه تعريف مجالات السرعة و الكمون.

بعد ذلك قمنا باستعمال نتائج هذا النموذج لحل معادلة تنقل الملوثات في حالة منابع التلوث الدائمة.

إن الطريقة العددية المستعملة هي طريقة الأجزاء المتناهية المستوحاة عموما من الطريقة التي فرضها غالرخين .

### الكلمات المفتاحية:

التشتت الهيدروديناميكي، الوسط المسامي المشبع، تنقل الملوثات، طريقة الأجزاء المتناهية

INTRODUCTION GENERALE.....	1
<b>Chapitre I : Notion sur la pollution des aquifères et les polluants</b>	
I.1. DEFINITION D'UN POLLUANT .....	3
I.1.1. Origine de la pollution .....	3
I.1.2. Principaux types de pollution .....	3
I.1.3. Le transport des polluants dans le milieu souterrain .....	4
I.1.4. les différents micro polluants.....	5
I.1.5. les métaux et métalloïdes (micro polluants).....	5
I.1.6 Les micro polluants organiques.....	8
I.1.7. Les radioéléments .....	11
I.2. EFFETS DES POLLUANTS SUR LA SANTE PUBLIQUE .....	12
I.2.1. Comment notre santé peut être perturbée par une eau polluée ?.....	12
I.2.2. effets sur la croissance des enfants .....	13
I.2.3. Effets sur le système immunitaire .....	13
I.2.4. Problèmes relatifs a la charge minérale des eaux.....	13
I.2.4.1 Salinité globale.....	13
I.2.4.2 Eléments indésirables.....	14
I.2.4.3 Eléments ambivalentes.....	14
I.2.4.4 Eléments minéraux toxiques.....	15
I.2.5 Problèmes relatifs a la pollution organique et organominérale.....	17
I.2.5.1 Détergents.....	17
I.2.5.2 Produits phytosanitaires.....	17
I.2.5.3 Hydrocarbures.....	18
<b>Chapitre II : Modélisation mathématique du transport des polluantes</b>	
II.1.INTRODUCTION.....	20
II.2.CARACTERISATION DES MILIEUX POREUX.....	20
II.3. CLASSIFICATION DES AQUIFERES.....	21
II.4. COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT.....	22
II.5. PERMEABILITE ET TRANSMISSIVITE.....	23
II.6. MODELE THEORIQUE.....	23
II.6.1 Ecoulement.....	23
II.6.2 Equation de transport.....	26
II.7.CONCLUSION.....	30
<b>Chapitre III : Notion sur la M.E.F</b>	
III.1. HISTORIQUE.....	32
III.2.PRINCIPE.....	32
III.3 PRINCIPE VARIATIONNEL.....	34
III.4 APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS.....	35
III.5 NOTION DE CONTINUTE INTER ELEMENTAIRE.....	36

III.6. TYPE D'ELEMENT.....	36
III.7. LA NOTION D'ELEMENT DE REFERENCE EN 2D.....	38
III.8. OPERATION DE MAILLAGE.....	41
III.9. EXPRESSION DE LA FONCTION APPROCHEE.....	42
III.10. TRANSFORMATION D'OPERATEUR DE DERIVATION.....	44
III.11. INTEGRATION NUMERIQUE.....	45
III.12. TECHNIQUE D'ASSEMBLAGE.....	46
III.13. ETAPE CARACTERISTIQUE D'UN PROGRAMME (E.F).....	46
III.14. CONCLUSION.....	48

### **Chapitre IV : Analyse numérique des équations de transport et d'écoulement ( application de la M.E.F)**

IV.1. INTRODUCTION.....	50
IV.2. ECOULEMENT.....	50
IV.1.1 Modélisation par la méthode des éléments finis.....	50
IV.2.1.1. Formulation intégrale pour le problème de transport a deux dimensions.....	50
IV.3. TRANSPORT.....	56
IV.3.1 Formulation intégrale pour le problème de transport a deux dimensions.....	57
IV.4. RESOLUTION DANS LE TEMPS (EULER IMPLICITE).....	59
IV.4.1. Stabilité de la méthode.....	60
IV.5. CONCLUSION.....	60

### **Chapitre V : Application et discussion des résultats** 62

V.1. INTRODUCTION.....	62
V.2 EFFET DU PAS DE TEMPS.....	62
V.1.1 Pollution répartie.....	62
V.2.1.1. Données.....	62
V.2.1.2. Etude de l'écoulement.....	63
V.2.1.3. Etude du transport.....	64
V.2.2. pollution ponctuelle.....	68
V.2.2.1. Données.....	68
V.2.2.2. Etude de l'écoulement.....	69
V.2.2.3. Etude du transport.....	69
V.3. EFFET DU GRADIENT HYDRAULIQUE.....	73
V.3.1. Pollution répartie.....	73
V.3.2. Pollution ponctuelle.....	75
CONCLUSION GENERALE.....	79

Référence bibliographiques

Annexe

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## INTRODUCTION GENERALE

**INTRODUCTION**

De nos jours, la pollution constitue l'une des préoccupations majeures des pays industrialisés. Néanmoins, l'inquiétude gagne peu à peu les autres pays, notamment ceux dits « en voie de développement ».

En effet les rejets des zones industrielles et les rejets domestiques des grandes agglomérations ainsi que la prolifération des pesticides et d'autres produits chimiques intervenant dans l'activité agricole sont rarement traités. Sans doute, un peu par négligence, mais surtout parce que le coût des investissements liés à la mise en place des installations nécessaires au traitement des rejets est très élevé. La tendance généralement observée est celle qui consiste à déverser les polluants dans les rivières ou les cours d'eaux se trouvant à proximité, ce qui conduit à une contamination plus ou moins sévère des eaux souterraines par voie d'infiltration.

C'est dans un souci de quantification de cette pollution que nous proposons un modèle mathématique qui décrit le transport de soluté à travers un milieu poreux saturé conduisant à la pollution des eaux souterraines.

En effet, ce problème est le résultat de la combinaison de deux processus essentiels, à savoir l'écoulement de l'eau dans le milieu poreux et le transport de l'agent polluant.

Dans ce travail, la résolution du problème posé est traité pour le cas bidimensionnel. Elle est effectuée à l'aide d'une approche numérique basée sur la méthode des éléments finis. Pour réaliser cette étude, nous avons opté pour un plan de travail qui consiste tout d'abord à proposer les lois théoriques régissant notre phénomène. Par la suite, nous avons exposé les différents polluants et leurs effets sur la santé. Dans le troisième chapitre, nous avons défini la méthode des éléments finis puis nous avons discrétisé le modèle mathématique par cette dernière. Finalement, afin de valider le programme développé nous avons analysé des exemples fictifs dont nous avons discuté les résultats.

Les résultats obtenus sont en accord avec ceux trouvés dans la littérature.

**CHAPITRE I**

**NOTIONS SUR LA POLLUTION DES  
AQUIFERES ET LES POLLUANTS**

# NOTION SUR LA POLLUTION DES AQUIFERES ET LES POLLUANTS

## I.1. DEFINITION D'UN POLLUANT

Un polluant est défini comme étant une substance naturelle ou de synthèse, que l'homme introduit dans un biotope donné dont elles étaient absentes ou encore dont elles modifie et augmente les teneurs lorsqu'elles sont spontanément présentes. Ces substances présenter une nocivité pour les être vivants en provoquant une intoxication des organismes affectés en perturbant telle ou telle fonction et qui peuvent entraîner la mort (Encyclopédique des pollution - F.RAMADE).

### I.1.1. Origine de la pollution

La contamination des eaux souterraines par des polluants peut compromettre l'exploitation de la ressource pour de très longues périodes. Le temps de transfert des polluants de la surface du sol vers la nappe puis au sein de l'aquifère peut être très long ; il est en fonction de la capacité de rétention de différents matériaux traversés et de la vitesse d'écoulement des eaux souterraines. Les principales causes de pollution en nappe peuvent être attribuées :

- aux fuites ou aux déversements de produits toxiques liquides;
- au stockage ou au dépôt de déchets solides d'origine industrielle, sur des aires non étanches ;
- au lessivage par les eaux de sites et sols pollués par des activités industrielles ;
- à l'infiltration des eaux de ruissellement issues de surfaces imperméabilisées contenant des polluants ;
- au stockage ou à l'enfouissement de déchets chimiques et nucléaires.

### I.1.2. Principaux types de pollution

#### ➤ Pollution temporaire et pollution chronique

L'émission exceptionnelle de matière polluante à la suite d'un incident peut entraîner un transfert à la nappe et sa pollution dont la durée dépend de son pouvoir d'auto épuration et de sa vitesse de percolation.

Les pollutions chroniques sont plus insidieuses et dommageables. Moins spectaculaires ,elle peuvent passer inaperçues.

➤ **Pollution linéaire**

Elle accompagne le trajet des routes et autoroutes, des canaux et des cours d'eau.

➤ **Pollution ponctuelle et pollution diffuse**

Le polluant émis sur une faible surface n'affectera qu'un secteur limité de la nappe, qui pourra s'étendre par diffusion, selon la densité et la solubilité du polluant, la zone polluée sera délimitée ou diffuse, à la surface ou à l'intérieur de la nappe.

L'épandage des produits polluants sur une grande surface en revanche affecte l'ensemble de la nappe. Elles sont souvent chroniques et déclassent l'ensemble de la nappe pour la production d'eau potable.

### **I.1.3. Le transport des polluants dans le milieu souterrain**

Les caractéristiques des polluants vont conditionner leur migration dans le sous sol et les eaux souterraines. La densité, la viscosité, la solubilité, les conditions d'équilibres entre phase liquide ou dissoute et phase vapeur et la biodégradabilité.

➤ **Migration des polluants dans la zone non saturée**

Lorsqu'un polluant liquide s'infiltré dans le sol, il se forme un corps d'absorption c'est à dire une zone contenant un polluant. Si la quantité infiltrée suffit pour atteindre la nappe, le polluant liquide s'étale sous forme de « galette » s'il est léger. Où continue à s'infiltrer s'il est plus dense que l'eau. Le cheminement des produits dans la zone non saturée peut être complexe sous l'effet de l'hétérogénéité du sous sol.

➤ **Migration des polluants dans la zone saturée**

Le polluant, partiellement ou totalement miscible ou soluble, après infiltration à travers la zone non saturée dans laquelle une partie de son volume est retenue, atteint le toit de la nappe et s'y dissout ou s'y mélange progressivement, formant un panache de pollution qui s'oriente parallèlement à la direction d'écoulement. En fonction de la solubilité à l'eau du produit infiltré, une certaine quantité sera dissoute dans l'aquifère. Le transport concernant, selon les cas, la fraction dissoute d'un contaminant miscibles, ou la totalité du contaminant miscible. Le panache de

polluant migrera latéralement sous l'effet du gradient hydraulique, selon l'écoulement naturel de la nappe.

Les polluants étudiés dans ce présent chapitre sont des substances chimiques organiques (hydrocarbures, solvants, phytosanitaires), ou inorganiques (métaux lourds).

Les métaux et métalloïdes lourds sont présents de façon naturelle dans les sols, ils proviennent en grande partie de l'altération de la roche mère du sous-sol, toute fois, les concentrations les plus importantes sont liées à l'activité humaine.

La plus part des polluants organiques sont générés par l'activité humaine.

#### **I.1.4. Les différents micro polluants**

Les micro polluants peuvent être présentes dans le milieu naturel et dans les rejets sous plusieurs formes :

- dissoutes dans l'eau ;
- adsorbées sur les matières en suspension et/ou les sédiments ;
- accumulées dans les tissus des organismes aquatiques animaux ou végétaux.

#### **I.1.5. Les métaux et métalloïdes (micro polluants minéraux)**

Généralement les micro polluants minéraux dans le milieu et dans les rejets sont l'arsenic, le cadmium, le chrome, le cuivre, le mercure, le nickel, le plomb et le zinc. Ce sont en effet les 8 métaux considérés comme étant toxiques.

Les caractéristiques des micro polluants métalliques les plus fréquemment rencontrés sont généralement les suivantes :

- pas biodégradables (dégradation par des organismes vivants) ;
- toxiques cumulatifs dans les tissus des organismes vivants ;
- toxiques quand ils sont présents en grande quantité.

##### **➤ L'arsenic (As)**

C'est un constituant naturel de la croûte terrestre. L'arsenic contenu dans les fonds géochimiques représente l'une des principales sources de contamination des cours d'eau et des eaux souterraines, mais il peut également pénétrer dans l'environnement par des processus d'origine anthropique. Il est essentiellement utilisé en métallurgie, tannerie, coloration des verres et céramiques, dans la fabrication de pesticides et pour la conservation du bois. La toxicité de l'arsenic

dépend essentiellement de sa formule chimique : ses composés minéraux sont plus toxiques que ses composés organiques.

➤ **Le cadmium (Cd)**

C'est un métal lourd peu répandu dans la croûte terrestre. Il ne se trouve pas à l'état élémentaire dans la nature. Il est généralement présent dans des minerais de zinc ou de plomb. Sa présence dans les eaux est surtout d'origine anthropique, notamment les rejets industriels liés à la métallurgie, au traitement de surface, à la fabrication de céramique et à l'industrie des colorants, mais également à l'usure des pneumatiques sur les chaussées.

➤ **Le cuivre (Cu)**

Le cuivre est assez fréquemment retrouvé dans la nature. Ses caractéristiques chimiques n'autorisent cependant pas l'existence de fortes concentrations dans les eaux naturelles. Elles sont donc plutôt d'origine anthropique. Le cuivre est utilisé dans les domaines de l'électricité et de la métallurgie. Les sels de cuivre sont utilisés dans l'industrie de la photographie, les tanneries (fabrication de pigments), l'industrie textile et les traitements de surface (circuits imprimés, galvanoplastie, dépôts chimiques...) . Il est également utilisé en agriculture. Le cuivre métallique est insoluble dans l'eau, mais la plupart de ses sels sont solubles : chlorures, nitrates, et sulfates de cuivre. Les carbonates, hydroxydes et sulfures de cuivre sont quant à eux insolubles

➤ **Le chrome (Cr)**

Le chrome présent naturellement dans les roches magmatiques et dans les sédiments calcaires et argileux. Dans les eaux naturelles, il peut provenir essentiellement de filons métallifères (chromite). Cependant, la présence de chrome dans les eaux naturelles est assez rare, du fait de sa faible solubilité. Sa présence dans les eaux est en général due aux rejets d'eaux usées. A l'état pur, le chrome n'est utilisé que pour la fabrication d'aciers spéciaux, et pour le traitement de surface (dépôts anticorrosion dans l'industrie automobile, et chromage). Ses sels sont utilisés comme pigments pour l'industrie textile, la céramique, la verrerie et la photographie. Les dérivés du chrome se retrouvent dans l'eau essentiellement sous forme oxydée : le chrome trivalent (Cr III) et le chrome hexavalent (Cr VI).

➤ **Le mercure (Hg)**

Le mercure un métal lourd que l'on retrouve dans la croûte terrestre. Il est plus fréquent dans les zones volcaniques. Du fait de sa grande volatilité, le mercure peut être largement répandu dans la nature sous forme de traces. Il se concentre souvent sur les particules en suspension dans l'eau ou la matière organique. On peut le retrouver, de ce fait, dans les sédiments des rivières. Par contre, la présence de mercure dans les eaux souterraines est essentiellement d'origine anthropique, liée à son utilisation dans l'industrie électrique (piles, tubes fluorescents...), et dans l'industrie chimique du chlore. Sa présence dans le milieu est liée à l'élimination des déchets contenant du mercure : thermomètres, piles, peintures... , ainsi qu'à sa présence dans les amalgames dentaires.

➤ **Le nickel (Ni)**

La source principale de nickel dans les eaux naturelles est l'oxydation de la pyrite contenant du nickel substitué au fer. La teneur en nickel est contrôlée par le pH et le potentiel d'oxydoréduction. La pollution des eaux par le nickel peut également être liée aux rejets des eaux industrielles : Il est employé dans la préparation des alliages, la production d'aciers inoxydables, les dépôts chimiques et électrolytiques. Il sert également de catalyseur en chimie organique.

➤ **Le plomb (Pb)**

Le plomb Peut être présent naturellement. Cependant, des eaux naturelles avec présence de plomb sont assez rares. Les principales sources d'émission du plomb sont les industries du plomb et surtout le trafic routier. Il est utilisé dans l'imprimerie, la métallurgie (fonderie), dans l'industrie des batteries, dans les dépôts d'étain plomb soudures et dans l'industrie électronique. Par ailleurs, la présence de plomb dans l'eau distribuée pour la consommation humaine peut provenir de tuyauteries anciennes contenant du plomb. La source anthropique principale était, jusqu'à ces dernières années, sa présence dans les carburants automobiles.

➤ **Le zinc (Zn)**

Le zinc est un métal relativement courant, présent dans les filons métallifères, essentiellement sous forme de blende. On le trouve également dans le charbon, les bitumes et le pétrole. Il est couramment présent dans les zones minières. Il peut également avoir une origine anthropique. Le zinc et ses composés ont de très nombreuses applications industrielles : revêtement de métaux (galvanisation...), préparation d'alliages, imprimerie et teinture. Les sels de zinc sont eux utilisés dans la fabrication de pigments pour peinture, émaux, matières plastiques, caoutchouc et dans la préparation de produits pharmaceutiques et d'insecticides. Sa présence dans le milieu provient également de l'usure des pneumatiques sur les chaussées, et de l'usure des chenaux (zinguerie) des bâtiments.

### **I.1.6. Les micro polluants organiques**

Ce sont en grande majorité des produits de synthèse issus de l'activité anthropique.

➤ **PCB : Polychlorobiphényles**

Ce sont des substances chlorées très stables (résistantes au feu et non biodégradables). Ils étaient utilisés dans les transformateurs électriques comme isolants (les anciennes installations encore en fonctionnement en contiennent toujours). Ils entraient également dans la composition de vernis, encres, peintures solvants... Leur combustion peut générer des substances cancérigènes et mutagènes. Ils ont une très faible solubilité dans l'eau, et une forte affinité pour les matières en suspension.

➤ **HAP : Hydrocarbures Aromatiques Polycycliques**

Ce sont des composés issus de la combustion incomplète des produits pétroliers, activités urbaines (chauffage), industrielles et de transports (pots d'échappement des véhicules). Leur origine est donc généralement diffuse. Dans les eaux de ruissellement, les concentrations moyennes en HAP sont de 0,2 à 1,5 µg/l dans les zones urbaines et peuvent atteindre 7 µg/l aux abords des routes et autoroutes. Ce sont des composés peu solubles dans l'eau, ils s'adsorbent sur les matières en suspension et les sédiments et de ce fait se concentrent beaucoup dans le milieu naturel.

➤ **Solvants chlorés**

Les solvants chlorés sont essentiellement utilisés pour le dégraissage des pièces en mécanique, le décapage de peintures et le nettoyage à sec (pressings). Ils entrent également dans la formulation de différents solvants utilisés par le grand public. Certains dérivés servent à la fabrication de pesticides (dichloropropène...). Les propriétés de ces composés très volatils, de faible viscosité font qu'ils migrent rapidement au travers de la zone non saturée vers les nappes (lorsqu'ils sont déversés en volume suffisant pour être en phase).

➤ **Dérivés du Benzène**

Cette famille de composés regroupe des molécules très diverses utilisées presque exclusivement dans l'industrie comme solvant d'extraction (en particulier dans l'industrie des parfums) et intermédiaires de fabrication.

➤ **Phénols et dérivés**

Les phénols sont utilisés dans l'industrie des matières plastiques, des fibres synthétiques, dans l'industrie pharmaceutique. Ils servent également pour la fabrication de détergents, de colorants, de pesticides (notamment les chlorophénols).

➤ **Pesticides**

Appelés également «phytosanitaires» Les pesticides sont des substances chimiques minérales ou organiques de synthèse utilisées à vaste échelle contre les ravageurs des cultures, les animaux nuisibles et les vecteurs d'affections parasitaires ou micro biologiques de l'homme et des animaux domestiques. On distingue notamment des insecticides utilisés contre les insectes nuisibles, des fongicides utilisés contre les champignons phytopathogènes, des herbicides qui détruisent les plantes, de façon plus générale, toute végétation jugée indésirable. Les substances chimiques sont très diverses comme des composés minéraux (soufre, sulfate de cuivre), des molécules organiques de synthèse (carbammates, urées substituées, triazines, organophosphorés,...) mais aussi des molécules organiques naturelles. D'une manière générale, les pesticides contaminent fréquemment les milieux aquatiques (rivières ou eaux souterraines). C'est par exemple le cas de l'atrazine et de la simazine. La plupart des polluants organiques sont générés par l'activité humaine.

Néanmoins, certains polluants peuvent avoir une origine naturelle. C'est le cas par exemple des Hydrocarbures Aromatique polycycliques (HAP), présents dans les sols ; les zones constituant des champs pétrolières.

Le tableau suivants résume pour chaque famille des polluants l'activité génératrice ainsi que les propriétés communes pour chaque famille.

Famille de polluants	Principales propriétés communes	exemples	Activités génératrices
Hydrocarbures pétroliers courants	Plus légers que l'eau biodégradable Globalement peut solubles Volatile ou comportant une fraction volatile viscosité variable	Essence Gazole Carburants Pétrole brute Naphta	Station de service Dépôt de stockage Installation de transport Raffineries Transport (fer,route)
Hydrocarbures lourds	Densité variable Peut biodégradables Peu solubles Peu volatils Visqueux Adsorption en générale forte	Goudrons de houille Goudrons de pétrole	Chaudières, centrales thermiques Usines à gaz Raffineries
Hydrocarbures halogénés aliphatiques	Dense Peu biodégradable Relativement solubles Volatils Fluides Adsorption en générale forte	Nombreuse formules les plus courants : Bromoforme Chloroforme	Traitement de surface mécanique, industrie chimique Nettoyage à sec
Autre organiques Hydrocarbures oxygénés Halogénés cycliques	Fortement solubles biodégradables Autres propriétés variables Nombreux pesticides	Alcools, cétones, phénols PCB pentachlorophénol	Variables
Produits minéraux	Très variables en fonction des sels incriminés .	Sels de chrome Sels d' Arsenic Autres métaux lourds Nitrates	Traitement des surfaces Minéralurgie Métallurgie

**Tableau. I.1** principaux agents de contamination des eaux souterraines.

### I.1.7. Les radioéléments

Les radioéléments sont une forme particulière de polluants très toxique. La radioactivité est une transformation spontanée d'un noyau atomique qui permet l'émission d'un ou plusieurs rayonnements ou particules.

Les radioéléments (appelé aussi radio nucléides ou isotopes radioactifs) sont des isotopes instables de certains éléments. Les différents rayonnements et particules émis sont :

- Rayonnement gamma ;
- Rayonnement X ;
- Particules alpha ;
- Particules bêta.

La toxicité des radioéléments s'exprime par la dose absorbée qui est la quantité d'énergie reçue par unité de masse. Dans l'environnement, les radioéléments que l'on retrouve sont artificiels. Ils ont plusieurs origines :

- Tellurique (rayons cosmiques, radioéléments de l'écorce terrestre ... ) ;
- Retombées des explosifs nucléaires aériennes ;
- Effluents des installations nucléaires ;
- Retombées de l'accident de Tchernobyl.

La connaissance du comportement des polluants joue un rôle essentiel pour identifier le scénario de la pollution. Les polluants peuvent se présenter sous différentes formes à la source : solide (ex. : déchets riches en métaux lourds), liquide (ex. : carburants, solvants), gazeuse (ex. : oxydes de soufre ou d'azote, impuretés de combustion).

Les principaux vecteurs de leurs transport vers les nappes sont pour les :

- Solide : l'entraînement des particules par l'eau et la dissolution dans l'eau ;
- Liquides : la solubilisation dans l'eau ou la migration de la phase liquide immiscible dans l'eau ;
- Gaz : la solubilisation dans l'eau ;

Le vecteur principal d'une pollution vers une nappe est donc l'eau. Par conséquent, le transfert d'un polluant d'un point à un autre est avant tout dû à l'écoulement sous forme liquide : polluant organique liquide, polluant dissous dans l'eau.

L'atteinte d'une cible dépend étroitement du comportement des polluants dans les milieux naturels traversés, lors de leurs migrations. Les propriétés intrinsèques des milieux

traversés, les interactions entre les polluants et le milieu ainsi que les conditions locales (ex. : pluviométrie) sont autant de facteurs qui influencent la migration des polluants.

La connaissance du comportement des polluants a donc une incidence majeure en terme d'évaluation des risques : concentration, vitesse de propagation, extension de la pollution, nombre de cibles atteintes.

Dans cette étude, nous avons donné la définition de la pollution et présenté les différents types de polluants. Nous avons aussi déterminé leurs origines, leurs caractéristiques et leur mode de transport dans l'aquifère.

Cette présentation nous a permis de donner un bref aperçu sur les différents polluants qui peuvent constituer un danger pour la santé publique. Laquelle fera l'objet de la partie (I.2) suivant.

## **I.2. EFFETS DES POLLUANTS SUR LA SANTE PUBLIQUE**

Dans cette partie nous nous intéressons aux problèmes biologiques et sanitaires en relation avec la constitution des eaux, le fait que l'eau est un constituant de tous les éléments vivants et est essentielle à notre survie. Elle devient ainsi le passage privilégié des polluants vers le corps humain. L'exposition aux polluants se fait par l'intermédiaire de l'eau que nous buvons.

### **I.2.1. Comment notre santé peut être perturbée par une eau polluée ?**

Une multitude de polluants et de substances dangereuses peuvent affecter la santé humaine. Certaines substances sont très persistantes dans l'environnement et s'accumulent dans la chaîne alimentaire. Certains polluants peuvent provoquer des effets nocifs pour la santé seulement s'ils sont absorbés en grande quantité, d'autres en très petites doses. Une fois absorbé, le contaminant circule dans le sang et peut être emmagasiné dans certains organes tels que le foie, les reins. Parfois, les effets peuvent se manifester après plusieurs années d'exposition. Certains cancers ont une période de latence qui peut s'étendre sur des dizaines d'années. Plusieurs polluants peuvent être mobilisés et transférés dans le lait maternel dont la teneur en matière grasse est plus élevée.

- Les polluants retrouvés dans l'eau agissent sur la santé selon leur nature.
- Les polluants peuvent augmenter l'incidence des cancers, avoir des effets sur les systèmes reproductif et immunitaire de même que sur la croissance des enfants.

### **I.2.2. Effets sur la croissance des enfants**

Le mercure et plusieurs organochlorés ont divers effets sur l'évolution des maladies. Des chercheurs ont remarqué une diminution du poids et de la taille à la naissance, une diminution de certains réflexes ainsi qu'une baisse du tonus musculaire, du niveau d'activité et de la réactivité à des stimuli. Un retard dans le développement des fonctions qui assurent les mouvements (psychomotricité) au cours des deux premières années et une altération des capacités liées à la connaissance pendant la petite enfance ont également été notés.

### **I.2.3. Effets sur le système immunitaire**

Plusieurs polluants, comme les BPC, les dioxines, le mercure et les pesticides, peuvent affecter le système immunitaire spécialement durant la croissance du nourrisson. L'intoxication à long terme par de petites doses de mercure provoque des troubles neurologiques et rénaux.

### **I.2.4. Problèmes relatifs à la charge minérale des eaux**

#### **I.2.4.1. Salinité globale**

##### ➤ **Eaux faiblement minéralisées**

À long terme, elles ne sont généralement pas recommandables de point de vue nutritionnel, voire organoleptique. Cependant, aucune conséquence sanitaire fâcheuse n'a été observée à la suite de leur consommation habituelle. En revanche, elles peuvent être à l'origine de phénomènes de corrosion.

##### ➤ **Eaux fortement minéralisées**

En dehors des cas particuliers des eaux provenant des zones désertiques ou de eaux minérales, les effets biologiques des eaux riches en minéralisées ne sont pas toujours bien connus. Cependant, une concentration élevée de sulfates favorise l'irritation gastro-intestinale, surtout associée à des concentrations élevées d'ions  $Mg^{++}$  ou  $Na^+$ . Par ailleurs, des teneurs fortes en chlorures ou en soude communiquent à l'eau un goût désagréable.

##### ➤ **Problème du sodium**

Bien que le problème ne soit parfaitement éclairci, il semble bien que la présence exagérée de sodium dans les eaux ne soit pas à négliger complètement sur le plan

sanitaire. Il se pourrait en effet que le sodium affecte certaines populations critique (sujet souffrants d'hypertension, ou suivant des traitements hormonaux). Mais il semble aussi qu'elle puisse à terme affecter certaines sujets normaux. A cet égard, une étude épidémiologique a montré qu'une eau contenant 107 mg de sodium par litre conduit chez les adolescents d'une école américaine à une augmentation significative de la tension sanguine. Cette population, par référence à une population alimentée avec une eau contenant 8 mg de sodium par litre, présentait une distribution des tensions habituellement caractéristique d'une population plus âgée.

#### **I.2.4.2. Eléments indésirables**

Le fer, le cuivre, le zinc et le manganèse en excès peuvent être responsable, selon les cas, de mauvais goûts et de colorations anormales des eaux, de dépôts, de proliférations bactériennes dans les canalisations et de taches sur le linge au cours de son lavage. Ces éléments métalliques ne posent pas à proprement parler de problème toxicologique, encore que le zinc ne soit pas totalement exempt de propriétés biologiques et qu'il puisse être accompagné de cadmium qui lui est très fréquemment associé. La directive européenne 98/83 fixe les normes suivantes :

- fer : 200 µg/l;
- manganèse : 50 µg/l;
- cuivre: 2 mg/l.

#### **I.2.4. 3. Eléments ambivalents**

Deux exemples de ce type sont significatifs d'une activité biologique bénéfique ou nocive selon les concentrations en jeu : les fluorures et le sélénium.

##### **➤ Fluorures**

Les fluorures sont favorables et même indispensable à faible concentration : ils constituent un élément essentiel de l'alimentation et de l'eau de boisson car ils jouent un rôle particulièrement important dans la prévention de la carie dentaire chez l'enfant. Lorsque, pour certains régimes déficients, la concentration en fluorures de l'eau d'alimentation est largement inférieure à 0.5 mg/l une augmentation statistique de l'incidence des caries dentaires est prévisible. Inversement, si la concentration en fluorures est largement supérieure à 1 mg/l, la consommation prolongée d'eau associée à un régime riche en fluor peut être à l'origine de fluorose résultant d'effets cumulatifs

et se traduisant par des manifestations dentaires et principalement osseuses. Il est donc souhaitable que la teneur en fluorures de l'eau d'alimentation soit maintenue dans les limites rigoureuses définies par l'OMS en fonction de la température de l'eau. elle est de l'ordre de 1 ppm.

➤ **Sélénium**

Le sélénium est habituellement trouvé dans les eaux naturelles à des teneurs de l'ordre de quelques microgrammes par litre. Cependant, il peut atteindre des concentrations de 50 à 300 µg/l dans certaines zones. A faible concentration, le sélénium est un élément indispensable. Expérimentalement, selon des enquêtes récentes, il prédisposerait aux caries dentaires au cours des premières années de la vie, la norme actuelle de 10 µg/l. cette norme a été reprise dans la directive européenne 98/83.

#### **1.2.4.4. Eléments minéraux toxiques**

Certains sont particulièrement inquiétants en raison de leur toxicité cumulative, de phénomènes de concentration ou de transformation dans le milieu aquatique.

➤ **Arsenic**

Il est généralement présent à concentration faible dans les eaux souterraine. Exceptionnellement, certaines eaux d'Amérique latine contiennent des teneurs élevées atteignant 1 mg/l . On leur a associé des intoxications humaines contagieuses caractérisées essentiellement par une sclérose des membres inférieurs. Sachant par ailleurs que l'arsenic est doté de propriétés cancérigènes. La directive européenne 98/83 fixe une concentration maximale admissible pour les eaux de distribution publique à 10 µg/l.

➤ **Mercure**

L'attention a nouveau été attirée sur la toxicité de mercure et de ses dérivés organique par les célèbres accidents du Japon (baies de Minamata en 1953 et Niigata dans les années 1960). A l'occasion des accidents japonais, il est apparu que le rejet d'effluents industriels contenant du mercure (industrie des matières plastiques avec catalyseur au mercure, industrie du chlore et de la soude ... ) pouvait provoquer de graves accidents. Le méthylmercure hautement toxique peut franchir facilement la barrière intestinale pour se concentrer dans le cerveau, le rein et le foie. Il s'agit là de

contaminations et accidents ponctuels. En général l'eau d'alimentation à une teneur inférieure à 0.1 µg/l de mercure totale.

Le mécanisme d'action toxique du mercure et des dérivés mercuriels n'est pas bien connu. Cependant, il s'agit d'un élément susceptible de modifier la structure et l'activité fonctionnelle des protéines et des acides nucléiques.

#### ➤ **Cadmium**

Le cadmium est très utilisé en galvanoplastie, mais aussi pour les joints de canalisation, les eaux naturelles n'en contiennent ordinairement que quelques microgrammes par litre au plus. Mais, compte tenu de la toxicité du cadmium et de son évolution mal connue, il convient de veiller aux contaminations d'origine industrielle (traitement de surface). La limite fixée dans la directive européenne 98/83 est de 5µg/l.

#### ➤ **Plomb**

Il est connu de longue date pour provoquer des intoxications hydriques saturnines dans certaines circonstances et, en particulier, lorsque des eaux d'alimentation agressives séjournent dans des canalisations en plomb, matériau désormais interdit. La directive européenne 98/83 précise que la concentration en plomb dans les eaux de distribution publique ne devra plus être que de 25 µg/l pour descendre à 10 µg/l en 2013.

Une étude américaine a montré qu'au-delà de 10 µg/l une légère plombémie était détectable chez les nourrissons sans avoir un caractère pathogène.

#### ➤ **Chrome**

Il est très utilisé dans l'industrie sous forme de bichromates et sous forme de sels de chrome. Ce dernier est plus toxique à l'état hexavalent qu'à l'état trivalent. Sa diffusion doit donc faire l'objet d'une surveillance stricte. La limite précisée dans la directive européenne 98/83 a été de 10 µg/l.

#### ➤ **Aluminium**

L'aluminium est le minerai le plus employé dans le secteur industriel ; il est donc massivement rejeté dans l'environnement. L'aluminium peut s'accumuler dans les os et est lié à l'apparition de l'ostéoporose ; une diminution du processus de formation des os. Il existe de preuves démontrant qu'il peut avoir des effets nocifs sur le système

nerveux et qu'il pourrait être lié à certaines maladies telles les maladies d'Alzheimer et de Parkinson. La maladie d'Alzheimer se classe au 4<sup>e</sup> rang des causes de mortalité chez les personnes âgées. Elle se traduit essentiellement par une perte de mémoire progressive. La maladie de Parkinson se manifeste quant à elle par des tremblements, une rigidité musculaire et un ralentissement des mouvements.

## **I2.5. Problèmes relatifs a la pollution organique et organominerale**

### **I.2.5.1. Détergents**

Leurs effets sur le milieu récepteur sont assez complexes, les détergents utilisés maintenant, mêmes s'ils sont biodégradables, conduisent à un abaissement de la teneur en oxygène de milieu.

Dans l'eau de boisson, la présence de traces de détergents peut se manifester par un léger moussage, voire même par un mauvais goût. Ce paramètre n'a pas été retenu dans la directive européenne 98/83.

### **I.2.5.2. Produits phytosanitaires**

Les pesticides sont des produits chimiques organiques surtout utilisés en agriculture. Ils sont employés pour lutter contre des ravageurs, des mauvaises herbes et des maladies végétales. Il existe plus de 35 millions de pesticides qui diffèrent les uns des autres selon leur action, leur structure chimique et leur toxicité. Certains sont toxiques à long terme. Parmi eux, les organochlorés. Ils se dégradent difficilement dans l'environnement. Certains pesticides pourraient affecter la reproduction humaine, le système immunitaire et le système nerveux. L'OMS stipule que plusieurs pesticides sont cancérigènes. Des chercheurs ont aussi établi une relation entre ces polluants et les maladies de Parkinson et d'Alzheimer. Les pesticides auraient aussi un rôle à jouer avec l'asthme.

A côté des pesticides, il convient surtout de signaler les polychlorobi (ter) phényles (PCB ou PCT) qui ont été considérablement utilisés dans l'industrie, soit en système fermé, soit en système ouvert, leurs caractéristique physico-chimiques et biologiques les apparentent aux pesticides.

### **I.2.5.3. Hydrocarbures**

La biodégradabilité des hydrocarbures est relativement lente, le traitement de ces pollutions, plus ou moins massives, par « dispersion » crée d'autres problèmes qui vont

s'ajouter à ceux de la pollution elle-même on fait appel, le plus souvent, à des agglomérants qui vont créer un risque important pour les eaux.

Le second problème, en relation éventuelle avec le précédent, est le fait des hydrocarbures polycycliques aromatiques (HAP) dont certains sont cancérigènes. De nombreuses études ont été réalisées dans divers pays pour caractériser et doser ces espèces moléculaires dans les eaux souterraines et dans les sédiments. Il est indiscutable que certaines de ces molécules sont des cancérigènes expérimentaux et le problème de leurs existences, tolérable ou non, dans les eaux de consommation est posé. La directive européenne 98/83 a limité les concentrations en pesticides à 0.1 µg/l par substance avec un total de 0.5 µg/l, le benzopyrène ne devant pas en ce qui le concerne excéder 0.01 µg/l.

## **CHAPITRE II**

# **MODELISATION MATHEMATIQUE DU TRANSPORT DES POLLUANTS**

## MODELISATION MATHÉMATIQUE DU TRANSPORT DES POLLUANTS

### II.1. INTRODUCTION

Les milieux poreux sont en général triphasiques, mais comme on s'intéresse principalement au transport des polluants dans les aquifères, alors on traite uniquement les milieux poreux saturés. L'écoulement de l'eau et le transport de soluté qui se produisent dans les milieux poreux, dépendent étroitement de la géométrie de la matrice solide et avec les polluants.

Dans notre cas, nous étudions un milieu poreux non déformable dont les pores sont remplis de fluide qui n'est pas susceptible de réagir chimiquement avec la matrice solide.

Dans ce chapitre, nous définissons d'abord les caractéristiques du milieu poreux puis nous décrirons mathématiquement les modèles d'écoulement et de transport.

### II.2. CARACTERISTIQUES DES MILIEUX POREUX

Les milieux poreux naturels sont essentiellement les alluvions constituées de matériaux granuleux ou bien par des roches compactées fissurées.

On dit qu'un milieu poreux est homogène quand, en n'importe quel point, la résistance à l'écoulement est la même, par rapport à une direction donnée. Le concept d'homogénéité est fondamental pour l'étude théorique.

Etant donné l'irrégularité des milieux poreux naturels, il importe de définir l'échelle de l'homogénéité. Ainsi, une alluvion constituée par des grains d'environ 1mm de diamètre sera considérée homogène à l'échelle du  $\text{dm}^3$ .

Le milieu poreux est dit isotrope, si quelle que soit la direction considérée, la résistance à l'écoulement ou toute autre propriété est la même dans toutes les directions. La plupart des milieux poreux naturels sont anisotropes.

Un milieu poreux constitué par un matériau granulaire est caractérisé par divers paramètres, dont :

➤ **Granulométrie** : Elle est définie par la courbe granulométrique correspondant au pourcentage, en poids, des grains de diamètre inférieur à un diamètre

donné (*exemple* :  $d_{10}$  : représente le diamètre tel que 10 % du poids du matériau sont constitués par des particules de diamètre inférieur à  $d_{10}$ ).

➤ **Indice des vides** : C'est le rapport entre le volume des pores et le volume occupé par les grains :

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (\text{II-1})$$

➤ **Porosité** : C'est le rapport entre le volume des vides  $v_v$  et le volume total :  $v_t = v_v + v_s$ , où  $v_s$  est le volume de squelette solide :

$$n = \frac{V_v}{V_t} \quad (\text{II-2})$$

➤ **Coefficient de saturation  $s_r$**  : C'est le rapport entre le volume occupé par l'eau,  $v_e$  et le volume,  $v_v$  des vides :

$$s_r = \frac{V_e}{V_v} \quad (\text{II-3})$$

➤ **Porosité effective ou porosité cinématique  $n_e$**  : c'est le rapport entre le volume qui peut être occupé par l'eau en circulation  $v_{ec}$  et le volume total :

$$n_e = \frac{V_{ec}}{V_t} \quad (\text{II-4})$$

On constate les relations suivantes :

$$e = \frac{n}{1-n} \quad n = \frac{e}{e+1} \quad (\text{II-5})$$

### II.3. CLASSIFICATION DES AQUIFERES

L'aquifère est un système dynamique caractérisé par sa configuration, sa structure, les fonctions de son réservoir et ses comportements. On distingue quatre types d'aquifère :

➤ **Aquifère à nappe libre** : Dans l'aquifère à nappe libre la surface piézométrique constitue la limite supérieure de l'aquifère, c'est une limite hydrodynamique. Cette surface peut s'élever ou s'abaisser librement dans une formation hydrogéologique perméable.

- **Aquifère à nappe captive** : Dans les aquifère plus profonds les eaux souterraines sont emprisonnées entre deux formations géologiques imperméables fixes : le substratum à la base et le toit au sommet.
- **Aquifère à nappe semi-captive** : Dans ce type d'aquifère, le toit et/ou le substratum sont constitués par une formation hydrogéologique semi-perméable. Celle ci permet, dans des conditions hydrodynamiques favorables des échanges d'eau ou de pression avec l'aquifère superposé. Ce phénomène est appelé drainance.
- **Aquifère à nappe suspendue** : Il existe encore un cas particulier de nappe qui se présente quand une formation imperméable apparaît entre la zone saturée et la surface du sol, donnant origine à la rétention des eaux d'infiltration au-dessus de cette formation.

#### II.4. EMMAGASINEMENT SPECIFIQUE. COEFFICIENT D'EMMAGASINEMENT

Il existe divers paramètres qui caractérisent la quantité d'eau qui peut être extraite d'une nappe. Dans le cas des nappes confinées, on définit l'emménagement spécifique  $s_s$  de dimension  $[L^{-1}]$ , comme étant le volume d'eau qui peut être libéré par unité de volume, par suite d'une compression du milieu poreux, correspondant à l'abaissement unitaire de la hauteur piézométrique. *Jacob* propose l'expression suivante :

$$s_s = n \cdot g \left( \frac{\alpha}{n} \right) \quad (\text{II-6})$$

où  $n$  est la porosité;  $\rho$ , la masse spécifique de l'eau ;  $g$ , l'accélération de la pesanteur ;  $\alpha$ , la compressibilité verticale du squelette solide de milieu poreux  $([M^{-1}LT^2])$  ; et  $\beta$ , la compressibilité isotherme de l'eau  $([M^{-1}LT^2])$ .

Le coefficient d'emménagement de la nappe  $s$  (sans dimensions), est défini comme le volume d'eau libéré par une colonne verticale de section unitaire correspondant à une diminution unitaire de la hauteur piézométrique moyenne.

Dans le cas de nappes confinées, le coefficient d'emménagement est donné par  $s = b \cdot s_s$  ( $b$  étant l'épaisseur de la nappe). Dans les nappes phréatiques le coefficient d'emménagement est donné par  $s = b \cdot s_s + n_e$  où  $n_e$  est la porosité effective correspond au volume d'eau libéré par unité de volume, par suite de l'action de la gravité.

Etant donné que  $n_e \gg b.s_s$  on admet dans la pratique que  $s=n_e$  dans les nappes phréatiques.

## II.5. PERMEABILITE ET TRANSMISSIVITE

### ➤ perméabilité

La perméabilité relative notée  $K$ , est donnée par l'expression suivante ( Schn, 78) :

$$K = \frac{g}{v} \frac{d^2}{a} \quad (\text{II-7})$$

Où:

$g$  : accélération de la pesanteur [ $m/s^2$ ]

$d$  : diamètre caractéristique, résultant de la forme des grains et de leurs dispositions [m]

$v$  : coefficient de viscosité cinématique [ $m^2/s$ ]

$a$  : constante sans dimension égale à :

$$a (= i \frac{2.g.d}{v.V}) \quad (\text{II-8})$$

$i$  : gradient hydraulique

$V$  : vitesse de filtration apparente [m/s]

Elle dépend à la fois du liquide, par l'intermédiaire de  $\frac{g}{v}$ , et du milieu poreux, par l'intermédiaire de la perméabilité géométrique  $\frac{d^2}{a}$ .

### ➤ Transmissivité

Dans une nappe d'épaisseur  $b$  et de largeurs  $L$ , le débit écoulé suivant la loi de Darcy sera :

$$Q = K \cdot b \cdot L \cdot i \quad (\text{II-9})$$

On appelle transmissivité  $T$ , le produit  $K \cdot b$ , dont la dimension est  $[L^2 T^{-1}]$

## II.6. MODELE THEORIQUE

### II.6.1. Ecoulement

L'analyse de la filtration comporte toujours en premier lieu la détermination de la charge hydraulique en différents points du domaine étudié. Pour les écoulements permanents, le potentiel  $\phi(x, y, z)$  ne dépend que des variables spatiales.

La description d'un écoulement permanent par l'équation de *Darcy* consiste à rechercher les équations auxquelles doit satisfaire  $\phi(x, y, z)$  dans le domaine étudié d'une part et sur ses limites d'autre part.

Dans le cas d'un milieu isotrope la loi de *Darcy* généralisée s'écrit :

$$u = -K \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v = -K \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{II-10})$$

$$w = -K \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

A ces équations nous devons ajouter l'équation de continuité qui stipule que : Si nous considérons le petit volume élémentaire de la figure II.1 et que nous supposons que le liquide filtrant ainsi que le milieu poreux sont incompressibles, nous devons admettre que la somme des débits entrant par les trois faces est égale à la somme des débits sortant par les faces opposées.

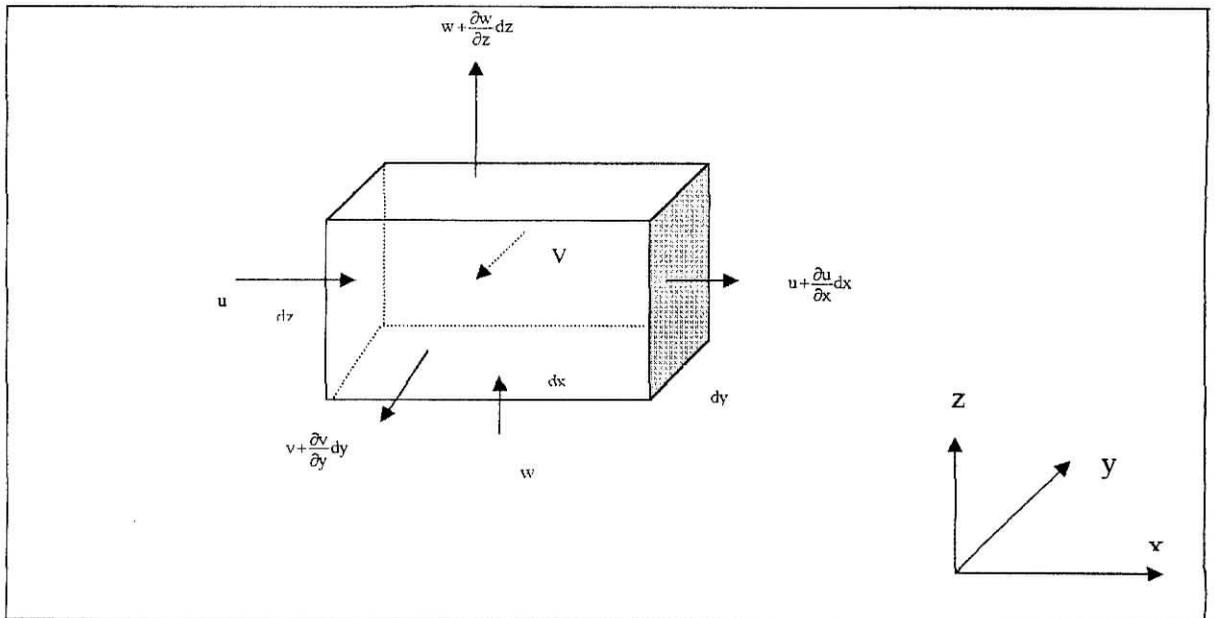


Figure II.1 : volume de contrôle

Débit entrant :

$$\sum_e d q = u \, dy \, dz + v \, dx \, dz + w \, dx \, dy \quad (\text{II-11})$$

Débit sortant :

$$\sum_s d q = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy \, dz + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) dx \, dz + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) dx \, dy \quad (\text{II-12})$$

En posant  $\sum_e d q = \sum_s d q$ , on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-13})$$

(II-13) est l'équation de continuité. On peut l'écrire vectoriellement:

$$\text{div } \bar{V} = 0 \quad (\text{II-14})$$

La distribution de la charge hydraulique est caractérisée par les équations (II-10) et (II-14). Si nous dérivons chacune des équations (II-10) par rapport à  $x, y, z$ , respectivement et si nous les additionnons nous obtenons compte tenu de (II-14):

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (\text{II-15})$$

La charge hydraulique est donc un potentiel harmonique (fonction de  $x, y, z$ ) satisfaisant l'équation de *Laplace*.

➤ Pour un écoulement non permanent, dans un milieu homogène et isotrope l'équation devient (Bear, 79) :

$$K \nabla^2 \phi \equiv K \text{div}(\text{grad } \phi) \equiv K \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right) = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{II-16})$$

Tel que  $S$ , est le coefficient d'emménagement.

➤ Pour un milieu isotrope non homogène l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{II-17})$$

➤ Pour un milieu anisotrope non homogène l'équation (II-17) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{II-18})$$

➤ Pour un écoulement non permanent à deux dimensions, avec un apport extérieur  $Q$ , dans un milieu homogène anisotrope l'équation (II-18) s'écrit:

$$K_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + Q = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{II-19})$$

➤ Pour un écoulement permanent à deux dimensions (II-19) devient :

$$K_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + Q = 0 \quad (\text{II-20})$$

L'équation (II-20) est l'équation de base pour un écoulement permanent à deux dimensions dans un milieu poreux saturé.

### II.6.2. Equation de transport

L'étude du transport d'une substance dans un milieu poreux doit être toujours précédé du calcul de l'écoulement correspondant. Les principaux paramètres qui gèrent l'écoulement sont : la perméabilité, le coefficient d'emmagasinement et la porosité. Les efforts étant les conditions aux limites du potentiel, du flux. La connaissance de la distribution spatiale du potentiel permet l'évaluation du champ de vitesse, dont on a besoin pour estimer les coefficients de dispersion hydrodynamique, et le transfert de substance par advection et dispersion.

L'équation de conservation de masse du polluant pour un milieu chimiquement inerte s'écrit comme suit : (Bear79)

$$\theta \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \theta D_{hij} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) - q_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad (\text{II-21})$$

où :

$q_i$  : flux de solution

$\theta$  : porosité, (pour les milieux saturés  $\theta = n$ )

$D_{hij}$  : dispersion hydrodynamique

$C$  : concentration du polluant

➤ Pour un système de coordonnées cartésien  $(x,y,z)$  avec  $(S)$  source de pollution, (II-21) prend la forme détaillée suivante :

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial C}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \theta \left( D_{hxx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{hxy} \frac{\partial C}{\partial y} + D_{hxz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \theta \left( D_{hyx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{hyy} \frac{\partial C}{\partial y} + D_{hyz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \theta \left( D_{hzx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{hzy} \frac{\partial C}{\partial y} + D_{hzz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \right] \\ & - q_x \frac{\partial C}{\partial x} - q_y \frac{\partial C}{\partial y} - q_z \frac{\partial C}{\partial z} + S \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

➤ Pour un système bidimensionnel homogène, l'équation dans les directions principales (II-22) prend la forme suivante :

$$\theta \frac{\partial C}{\partial t} = \underbrace{\theta D_{hxx} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \theta D_{hyy} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}}_{\text{terme dispersif}} - \underbrace{q_x \frac{\partial C}{\partial x} - q_y \frac{\partial C}{\partial y}}_{\text{terme advectif}} + \underbrace{S}_{\text{terme source}} \quad (\text{II-23})$$

- Si on s'intéresse uniquement à la pollution par dispersion l'équation (II-23) s'écrit :

$$\theta \frac{\partial C}{\partial t} = \theta D_{hxx} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \theta D_{hyy} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + S \quad (\text{II-24})$$

Le coefficient de dispersion hydrodynamique dépend :

- de la vitesse réelle de l'écoulement,
- des propriétés dispersives du milieu poreux,
- du coefficient de diffusion moléculaire.

Le coefficient de dispersion hydrodynamique prend la forme composée suivante :

$$D_{hxx} = a_L \frac{v_x^2}{|V|} + a_T \frac{v_y^2}{|V|} + D_0 \quad (\text{II-25})$$

$$D_{hyy} = a_L \frac{v_y^2}{|V|} + a_T \frac{v_x^2}{|V|} + D_0$$

Où :

$a_L$  : le coefficient de dispersion intrinsèque - longitudinal

$a_T$  : le coefficient de dispersion intrinsèque - transversal

$|V|$  : le module de la vitesse réelle de l'écoulement ( $|V| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ )

### ➤ Régimes de dispersion

Les conditions de la propagation d'un polluant dans un milieu poreux sont caractérisées par deux nombres adimensionnels:

- le nombre de *Reynolds*,
- le nombre de *Péclet*.

Le nombre de Reynolds  $Re$  détermine le rapport de la force d'inertie (de convection) à la force de frottement interne (de viscosité).

$$Re = \frac{V \cdot d_e}{\nu} \quad (\text{II-26})$$

Le nombre de *Péclet*  $Pe$  détermine la participation de la conductibilité et de la convection lors du transport du polluant.

$$Pe = \frac{V \cdot d_e}{D_0} \quad (\text{II-27})$$

ou:

$V$  : vitesse réelle de filtration

$d_e$  : diamètre efficace des grains

$\nu$  : coefficient de viscosité cinématique

Conformément à la valeur du nombre de *Péclet* on définit cinq régimes de dispersion :

1. diffusion pure ;
2. superposition de la diffusion et de la dispersion hydrodynamique ;
3. dispersion hydrodynamique pure ;
4. dispersion hydrodynamique prédominante ;
5. dispersion hydrodynamique hors du domaine de validité de la loi de *Darcy*.

### ➤ Perte de polluant

L'importance des pertes du polluant dépend du régime de dispersion et de la durée de la propagation.

Dans le cas d'un polluant chimique, les solutions organiques (les colorants) ou inorganiques (les sels) sont adsorbées dans les conditions suivantes:

- solution est diluée ;
- composant dissout ne prend pas part à la réaction chimique.

L'effet de l'adsorption est caractérisé par un coefficient de retard (R) qui prend la forme suivante (Bear, 87):

$$R = 1 + ((1 - n)/n) \cdot \rho_s \cdot K_d \quad (> 1) \quad (\text{II-28})$$

ou:

n : porosité,

$\rho_s$  : masse volumique de la phase solide,

$K_d$  : constante d'adsorption.

Si la valeur du nombre de *Péclet* est inférieur à 1, c'est-à-dire quand la diffusion est dominante, le coefficient de retard est important. Par contre si le nombre de *Péclet* augmente beaucoup l'importance de l'absorption diminue. Si l'absorption est négligeable le coefficient de retard est égal 1.

## II.7. CONCLUSION

Ce chapitre, contient l'espace mathématique de la modélisation de écoulements et de transport en milieux poreux saturé.

L'équation de *Darcy* généralisée permet de gouverner la loi d'écoulement et l'équation de conservation de masse du polluant permet de gouverner la loi transport dans la zone saturé.

Le but de cette étude est d'élaborer un programme numérique de calcul par éléments finis qui permet de résoudre les deux équations.

## **CHAPITRE III**

### **NOTIONS SUR LA M.E.F**

## NOTIONS SUR LA M.E.F

### III.1. HISTORIQUE

Les mathématiciens et les ingénieurs ont abordé différemment la discrétisation des problèmes continus. Les premiers ont développé des techniques générales s'appliquant directement aux équations différentielles régissant le problème, telle que les approximations aux différences finies, les différents procédés de résidus pondérés ou les techniques approchées de détermination du point stationnaire de fonctionnelle définies de façon adéquate.

De son côté, l'ingénieur a souvent une approche plus intuitive du problème en créant une analogie entre les vrais éléments 'discrets' et des parties finies d'un domaine continu. Les résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation ont été obtenus sous l'impulsion de *Ritz* et de *Galerkine* en 1915. Puis en 1943, *Courant* établit les bases de la M.E.F en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus est possible en effectuant une discrétisation du domaine en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

A partir des années 50 avec l'apparition des premiers calculateurs digitaux, la méthode n'a cessé de se développer pour répondre aux besoins de plus en plus complexes de l'industrie. Au début des années 60 beaucoup de progrès ont été fait du point de vue mathématique et analogique. Cet événement suivi de développement intensif des programmes sous l'impulsion d'universités, d'agences gouvernementales aux U.S.A, et de secteur industriel en Europe.

IL est certain que d'une part la M.E.F se prête bien a la programmation sur ordinateur et d'autre part, elle se caractérise par son universalité et son adaptabilité au traitement des problèmes les plus divers telle que un réseau de canalisation hydraulique pour l'ingénieur hydraulicien ou un problème de réseau de composants électriques pour l'ingénieur électricien.

### III.2. PRINCIPE

La méthode des éléments finis est une méthode de calcul numérique adaptée à la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP), pour des problèmes de mécanique, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire. Elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides : étude de la

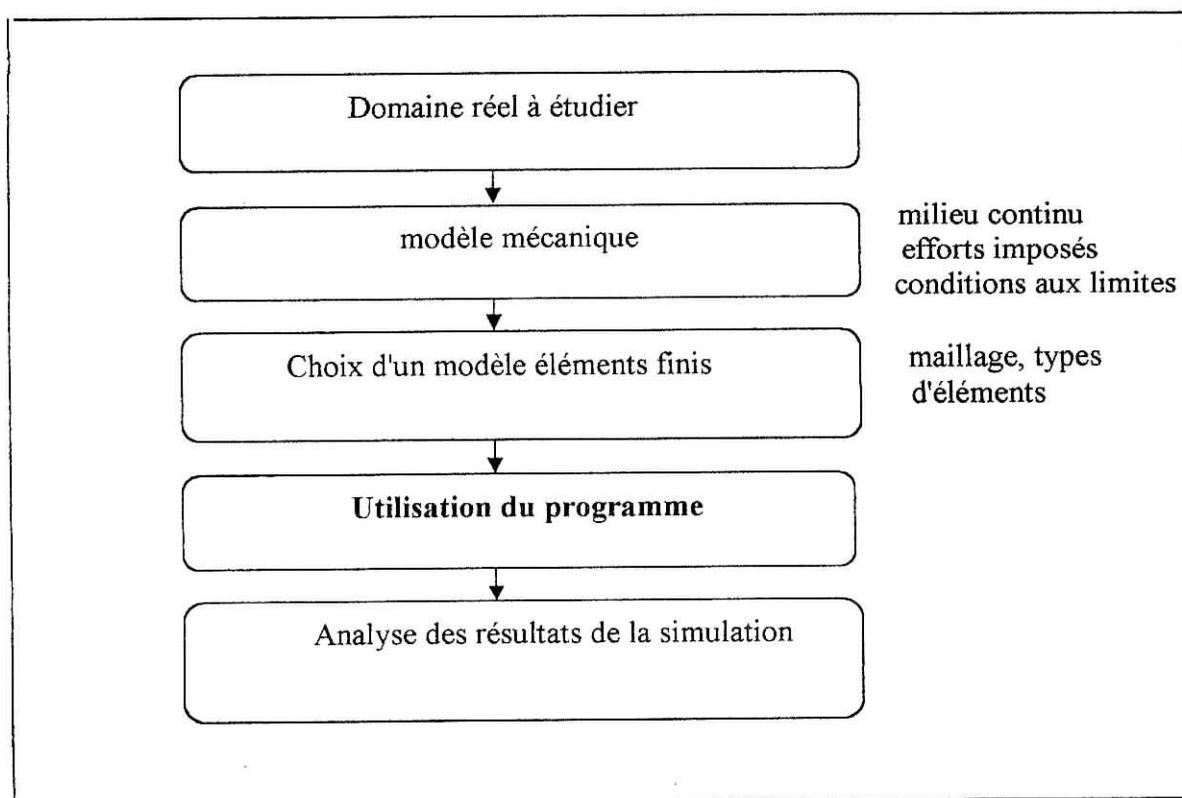
marée, des transports des sédiments, des interactions fluide-structure, étude des phénomènes de pollution thermique ou chimique.

La M.E.F permet de résoudre les problèmes de la mécanique des milieux continus en discrétisant le milieu à étudier en éléments.

La réalisation du modèle éléments finis est obtenue par l'assemblage d'éléments, cette opération est appelée discrétisation ou maillage du modèle mécanique à étudier.

La qualité des résultats est très fortement conditionnée par le maillage adopté. C'est l'une des raisons pour lesquelles il n'est pas suffisant de disposer d'un programme pour produire des simulations convenables de la réalité.

Une bonne compréhension des principes généraux de la méthode et une bonne maîtrise des concepts mécaniques (et donc des hypothèses simplificatrices qui sont en amont) sont indispensables.



**Figure III.1** : Les principales phases d'une analyse par éléments finis.

### III.3. PRINCIPE VARIATIONNEL

On définit une fonctionnelle  $I(U_i)$  comme une fonction intégrale qui dépend d'une ou de plusieurs fonctions argument ( $U_i$ ), ces fonctions peuvent être d'une ou de plusieurs variables et peuvent intervenir sous forme de leurs dérivées.

$$I(U_i) = \int_{\Omega} F\left(U_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \dots\right) d\Omega + \int_{\Gamma} E\left(U_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \dots\right) d\Gamma \quad (\text{III-1})$$

$F$  et  $E$  : sont des opérateurs spécifiés ;

$\Omega$  : domaine d'intégration ;

$\Gamma$  : partie de frontière du domaine d'intégration

La formulation variationnelle de la méthode des éléments finis est d'exprimer l'équilibre d'énergie du domaine par une fonctionnelle  $I(U_i)$ .

Le principe de calcul variationnel consiste à déterminer les fonctions arguments qui rendent stationnaire cette fonctionnelle. C'est à dire, la recherche des extremums de cette fonctionnelle.

$$D'où : \delta I = 0. \quad (\text{III-2})$$

Où :  $\delta$  est un opérateur de variation qui ressemble à l'opérateur de différentiation classique et possédant les propriétés suivantes :

$$\delta(\delta u) = 0 ; \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u) ; \delta \int u dx = \int \delta u dx.$$

La substitution de l'équation (III-1) dans (III-2) conduit aux équations *d'EULER-LAGRANGE* suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right] = 0. \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{III-3})$$

$n$  : Nombre de fonctions argument.

### III.4. APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis est en fait une méthode de RITZ ou de GALERKIN dans laquelle la construction de l'espace de travail est réalisée sous-domaine par sous-domaine (élément par élément), de façon systématique et modulaire, par l'opération de maillage. Cette opération devient plus compliquée si le domaine du milieu étudié a une forme complexe.

La méthode d'approximation nodale par sous domaine simplifié la construction de la fonction approchée  $u(M)$  et s'adapte très bien au calcul sur ordinateur.

Elle consiste à :

- Identifier un ensemble de sous domaine  $V^e$  du domaine  $V$  ;
- Définir une fonction approchée  $u^e(M)$  différente sur chaque sous-domaine  $V^e$  ;

La méthode d'approximation par éléments finis est une méthode particulière d'approximation par sous-domaine qui présente les particularités suivantes :

- L'approximation nodale sur chaque sous domaine  $V^e$  ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur  $V^e$  et sur sa frontière ;
- Les fonctions approchées  $u^e(M)$  sur chaque sous-domaine  $V^e$  sont construites de manière à être continues sur  $V^e$  et elles satisfont les conditions de continuité entre les différents sous-domaines.

Où :

- Les sous-domaines  $V^e$  sont appelés des éléments ;
- Les points en lesquels la fonction approchée  $u^e(M)$  coïncide avec la fonction exacte  $u_{ex}(M)$  sont les nœuds d'interpolation ou points nodaux ;
- Les coordonnées  $M_i$  de ces nœuds sont les coordonnées nodales ;
- Les valeurs  $u_i = u^e(M_i) = u_{ex}(M_i)$  sont les variables nodales ;

Un élément fini est défini par :

- Sa forme géométrique, incluant le nombre de nœuds et leurs positions, le nombre de côtés ;
- Sa formulation en fonction du type de problème à résoudre. C'est-à-dire la formulation des matrices et vecteurs élémentaires et du nombre d'inconnues.

Après la définition de la forme géométrique, il faut construire les fonctions d'interpolations  $N_i(M)$  correspondant à chaque éléments.

### III.5. NOTION DE CONTINUITÉ INTER ELEMENTAIRE

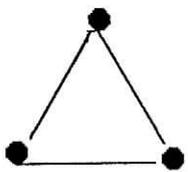
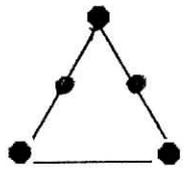
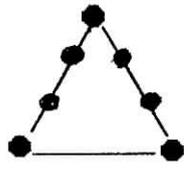
Un élément offre une certaine continuité lorsque la fonction d'interpolation sur les limites géométriques de l'enlèvement n'est fonction que des valeurs nodales constituant cette frontière, ceci est assez évident pour l'élément linéaire unidimensionnel en se référant à la propriété de l'approximation nodale.

On définit la continuité d'un élément en fonction de l'ordre de la dérivée à laquelle la fonction d'interpolation peut garantir la continuité sur une frontière.

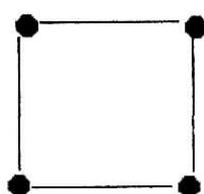
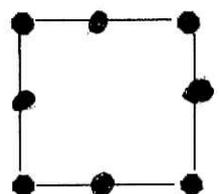
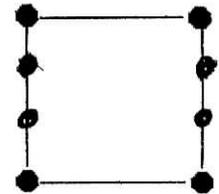
Un élément de classe  $C^0$  possède une fonction d'interpolation qui ne garantit la continuité inter élémentaire qu'à l'ordre 0, un élément  $C^1$  ne la garantit que jusqu'à l'ordre 1.

### III.6. TYPE D'ELEMENT

Les différents types d'éléments utilisables pour les problèmes d'écoulements sont répertoriés sur la **figure III.2**. Lorsqu'on doit choisir un type d'éléments pour la résolution d'un problème donné, on arrive généralement au choix suivants : ou bien choisir des éléments simples en très grand nombre, ou bien choisir des éléments d'ordre élevé en nombre restreint. Pour un même nombre de degrés de liberté les éléments à champs quadratiques ont une précision meilleure que les éléments à champs linéaires. Dans de nombreux cas (gradients importants), il est préférable d'éviter l'utilisation de triangle à 3 nœuds qui peuvent nécessiter des maillages très fins pour des précisions satisfaisantes.

		<b>TRIANGLE</b>		
Champs		Linéaire	Quadratique	Cubique
Elément de base				
		3 nœuds	6 nœuds	9 nœuds

		<b>RECTANGLE</b>		
Champs		Linéaire	Quadratique	Cubique
Elément de base				
		4 nœuds	8 nœuds	12 nœuds

**Figure III.2** : classification des éléments

Nous avons utilisé un élément rectangulaire à 4 nœuds qui donne une bonne approximation des valeurs à calculer.

### III.7. LA NOTION D'ELEMENT DE REFERENCE EN 2D

Dans le cas particulier de l'élément rectangulaire étudié, il a été possible de définir directement des polynômes en  $x$  et  $y$ , le passage par des coordonnées adaptées  $\xi, \eta$  n'étant pas strictement indispensable. Pour les éléments plus généraux, ce changement est indispensable et conduit à la notion d'élément de référence : un élément de référence  $e^r$  c'est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence.

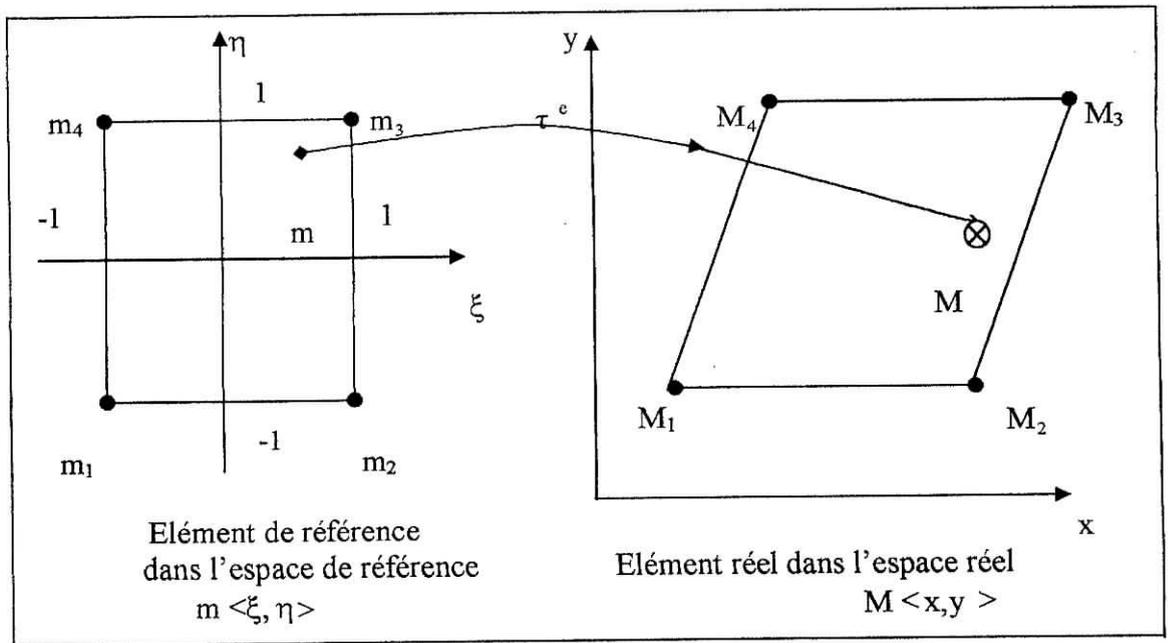


Figure III.3 : Elément de référence associé à l'élément réel

Les coordonnées de l'élément réel sont définies par la transformation  $\tau^e$  des coordonnées de l'élément de référence :

$$\tau^e : m \longrightarrow M^e = M(m) \tag{III-4}$$

Cette transformation dépend de la forme et de la position de l'élément réel alors on a une transformation indépendante pour chaque élément :

$$\tau^e : m \longrightarrow M^e = M(m, M_i, M_j, M_k, M_l, \dots) \tag{III-5}$$

On choisit la transformation  $\tau^e$  de façon que :

- Elle soit bijective en tout point  $m$  situé sur l'élément de référence ou sur sa frontière.

- L'élément de référence  $e^r$  se transforme en tous les éléments réels  $e$  de même type, par des transformations  $\tau^e$  différents.

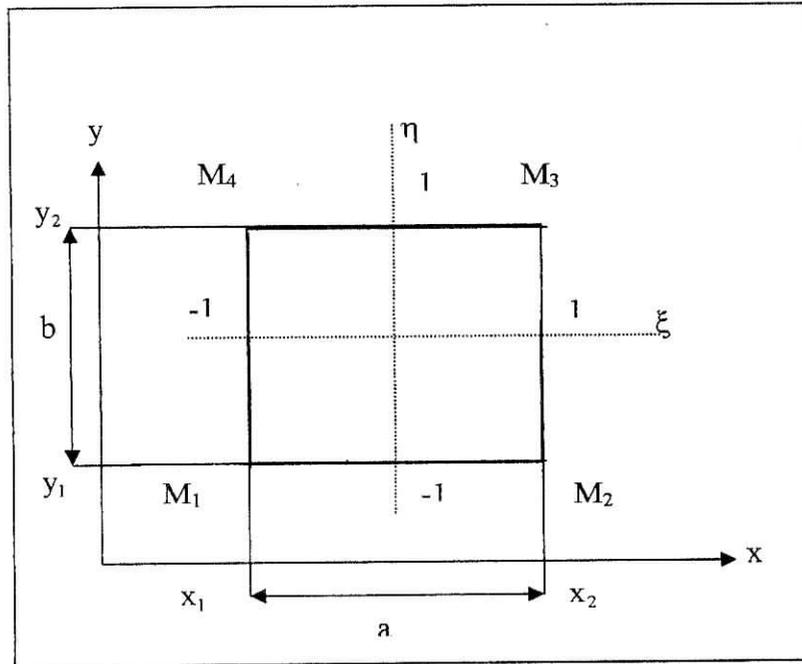


Figure III.4 : coordonnées réduites  $\langle \xi, \eta \rangle$  sur le rectangle de référence

Pour chaque couple de points  $(m_i, M_i)$  nous avons par définition :

$$M_i = \tau^e(m_i) \qquad m_i = \tau^{e-1}(M_i) \qquad (III-6)$$

Pour l'élément rectangulaire étudié ci-dessus, la bijection s'écrit :

$$\tau^{e-1}(M) : \xi = \frac{x - \frac{x_1+x_2}{2}}{\frac{a}{2}} \qquad \eta = \frac{y - \frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{b}{2}} \qquad (III-7)$$

Nous utilisons une transformation  $\tau$  linéaire par rapport aux coordonnées  $M_i$  des nœuds géométriques de l'élément réel  $e$ .

$$\tau : m \longrightarrow M(m) = [\bar{N}(m)] \{M_i\} \qquad (III-8)$$

De plus les fonctions de transformation sont choisies identiques pour les deux coordonnées  $(x_i, y_i)$ .

$$\begin{aligned} x(m) &= \langle \bar{N}(m) \rangle \{ x_n \} \\ y(m) &= \langle \bar{N}(m) \rangle \{ y_n \} \end{aligned} \quad (\text{III-9})$$

Pour les 4 nœuds du rectangle on a :

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \bar{N}_1(\xi, \eta) \cdot x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta) \cdot x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta) \cdot x_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta) \cdot x_4 \\ y(\xi, \eta) &= \bar{N}_1(\xi, \eta) \cdot y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta) \cdot y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta) \cdot y_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta) \cdot y_4 \end{aligned} \quad (\text{III-10})$$

Où  $(\xi, \eta)$  appartient à  $e^r$ .

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \langle \bar{N} \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) &= \langle \bar{N} \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III-11})$$

$\bar{N}_i$  : Sont des polynômes en  $\xi$  et  $\eta$  appelées fonction de transformation géométrique.

Tel que :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \end{aligned} \quad (\text{III-12})$$

### III.8. OPERATION DE MAILLAGE

Cette opération consiste à découper le domaine pour faire apparaître les nœuds et les éléments. Considérons la spécification des coordonnées des nœuds et des connections des éléments pour un domaines à 9 éléments bidimensionnels ( $NDM=2$ ) représenté sur la figure (III.5).

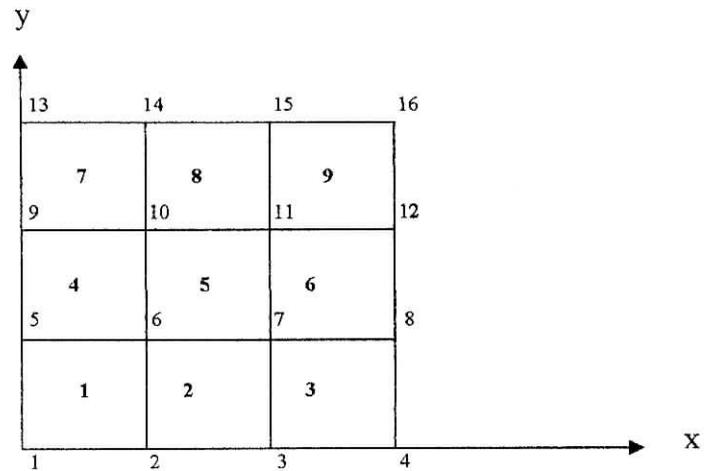


Figure III.5 : Maillages avec des éléments rectangulaires

- Le maillage retenu comprend donc 9 éléments rectangulaires à quatre nœuds ( $NUMEL = 9$ ) et ( $NEN = 4$ ), et ( $NUMNP = 16$ ) pour décrire les nœuds et les éléments, il faut attribuer une valeur à chaque  $M(i,j)$  :  $i = 1, 2$ , et  $j = 1, 16$ . Ainsi qu'à chaque  $IM(k,n)$  :  $k = 1, 4$  et  $n = 1, 9$  ;
- Dans la définition du tableau de coordonnées  $M$ , l'indice  $i$ , représente la direction de la coordonnée et l'indice  $j$ , le numéro du nœud ;
- Par exemple la valeur de  $M(1,3)$  correspond à la coordonnée dans la direction  $x$  du nœud 3 et la valeur de  $M(2,3)$  à la coordonnée dans la direction  $y$  du nœud 3 ;
- De même façons pour le tableau  $IM$  de connections des éléments, l'indice  $k$ , détermine le numéros du nœud à l'intérieur de l'élément (nœud local) et  $n$  le numéro de l'élément ;
- Toute valeur de  $IM(k,n)$  représente un numéro de nœud global ;
- Le sens conventionnel de numérotation est de commencer par le nœud le plus à gauche et le plus bas;

- Le nœud local numéro 1 pour l'élément 3 pourrait être associé aux nœuds globaux 3,4,7 ou 8 ;
- Dès que le premier nœud a été choisi, les autres se déduisent automatiquement.

Avec un maillage très important, la préparation des données resterait lourde. On peut adopter pour la génération automatique des données une instruction qui consiste à préciser les nœuds extrêmes de toutes les lignes et à définir en suite les nœuds intérieurs par une interpolation linéaire.

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{x_n - x_1}{n} & \Delta y &= \frac{y_n - y_1}{n} \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta x & y_{i+1} &= y_i + \Delta y \end{aligned} \tag{III-13}$$

Pour ce qui concerne les éléments nous remarquons que les numéros des nœuds de l'élément 2 sont ceux de l'élément 1 incrémentés de 1 les nœuds de l'élément 3 sont ceux de l'élément 2 incrémentés de 1.

Ainsi dans notre exemple nous remarquons que les numéros des nœuds de l'élément 4 sont ceux de l'élément 1 incrémenté de 4. ( $IM(1,6) = 7, IM(2,8) = 11, IM(3,4) = 14, IM(4,5) = 10$ )

### III.9. EXPRESSION DE LA FONCTION APPROCHEE

Nous utilisons une approximation nodale de la fonction exacte  $u_{ex}(M)$

$$u_{ex}(M) \approx u(M) = \langle N_1(M) \ N_2(M) \ . \ . \ . \ . \ . \ N_n(M) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \tag{III-14}$$

avec  $M$  appartient au domaine  $D$ .

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  : Sont les valeurs de  $u_{ex}$  .

$n$  : Nœuds d'interpolation de l'élément.

$N(M)$  : Sont les fonctions d'interpolation sur l'élément réel.

Remplaçons l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence :

$$u_{ex}(m) \approx u(m) = \langle N(m) \rangle \{u_n\} \tag{III-15}$$

Avec

$$\tau : m \longrightarrow M(m) = [\bar{N}(m)] \{M_n\}$$

Où :

$\{u_n\}$  : Sont les variables nodales de l'élément ;

$\langle N(m) \rangle$  : Sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

Pour définir la fonction  $u$  sur chaque élément nous constatons que, sur un élément  $e_i$  donné, la plupart des fonctions de base sont nulles. Les seules fonctions non nulles sont celles associées aux nœuds auxquels est connecté l'élément. Prenons par exemple l'élément  $e_5$  qui est connecté aux nœuds 6, 7, 10 et 11

$$N_i(M) = 0 \text{ pour } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16\} \quad (\text{III-16})$$

Par conséquent pour  $M \in e_5$  on peut écrire tout simplement :

$$u(M) = \langle N_6(M) \ N_7(M) \ N_{10}(M) \ N_{11}(M) \rangle \begin{Bmatrix} u_6 \\ u_7 \\ u_{10} \\ u_{11} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-17})$$

C'est-à-dire, en mettant en évidence les nœuds auxquels est connecté  $e_5$  et les 2 coordonnées du point  $M$ .

$$u(M) = \langle N_6(x,y) \ N_7(x,y) \ N_{10}(x,y) \ N_{11}(x,y) \rangle \begin{Bmatrix} u_6 \\ u_7 \\ u_{10} \\ u_{11} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-18})$$

Pour l'élément quadrilatère à 4 nœuds l'expression des polynômes  $N_i$  s'écrit :

$$\begin{array}{ll} N_1(\xi, \eta) \text{ associe à } m_1 \text{ et } M_1 & N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi).(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) \text{ associe à } m_2 \text{ et } M_2 & N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi).(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) \text{ associe à } m_3 \text{ et } M_3 & N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi).(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) \text{ associe à } m_4 \text{ et } M_4 & N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi).(1 + \eta) \end{array} \quad (\text{III-19})$$

### III.10. TRANSFORMATION D'OPERATEUR DE DERIVATION

Les équations du problème physique étudié sont écrites sur le domaine réel, donc elles font intervenir des fonctions inconnues  $u_{ex}$  et leurs dérivées en  $(x, y)$ .

Comme l'approximation de la fonction  $u_{ex}$  sur le domaine réel est souvent compliquée, nous utilisons systématiquement une approximation sur l'élément de référence  $m(\xi, \eta)$ .

$$\begin{aligned} u_{ex} &\approx u(m) = \langle N(m) \rangle \{u_n\} \\ M(m) &= \overline{[N(m)]} \{M_n\} \end{aligned} \quad (III-20)$$

Avec

$$\tau : m \longrightarrow M(m) = \overline{[N(m)]} \{M_n\} \quad (III-21)$$

Où :

$\{u_n\}$  : Sont les variables nodales de l'élément ;

$\langle N(m) \rangle$  : Sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

Pour un élément quadrilatère à 4 nœuds, la fonction d'interpolation s'écrit :

- En fonction des coordonnées de l'élément de référence

$$N(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta \quad (III-22)$$

- En fonction des coordonnées réelles

$$\begin{aligned} N(x, y) &= a + bx + cy + dxy \\ N_i(x, y) &= N_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (III-23)$$

Les dérivées de la fonction d'interpolation qui sert à la formulation variationnelle est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (III-24)$$

Ou bien sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-25})$$

$$\{p_x\} = [j] \{p_\xi\}$$

La matrice  $[j]$  est l'inverse de la matrice *jacobienne* qui est utilisée pour exprimer les dérivées de  $u$  en  $(x,y)$  à partir des dérivées de  $u$  en  $(\xi, \eta)$ . De plus nous avons supposé la transformation  $\tau$  bijective, par conséquent l'inverse de  $[j]$  existe en tout point de l'élément de référence.

### III.11. INTEGRATION NUMERIQUE

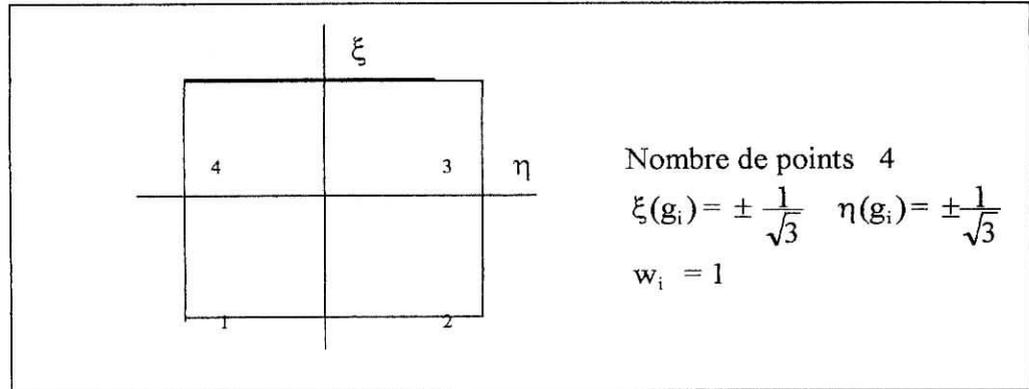
Les intégrales qui doivent être évaluées sur l'élément sont réalisées numériquement, ceci revient à remplacer les intégrales par la somme de valeurs pondérées, de la fonction à intégrer en certain nombre de "points d'intégration" notés ici  $g_i$ .

$$\int_{\Omega_r} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{n_p} w_i f(g_i) \quad (\text{III-26})$$

L'équation (III-23) exprime le schéma d'intégration en 2D, où les  $n_p$  points  $g_i$  sont les points d'intégration du schéma, de coordonnées :

$$\{m(g_i)\} = \begin{Bmatrix} \xi(g_i) \\ \eta(g_i) \end{Bmatrix} \quad (\text{III-27})$$

Dans l'élément de référence les  $w_i$  sont des coefficients de pondération ou « poids » associés aux points d'intégration du schéma.



**Figure III.6 :** Quadrature bidimensionnelle par 4 points d'intégration

### III.12. TECHNIQUE D'ASSEMBLAGE

L'assemblage comporte deux étapes :

- Construction de la matrice étendue  $[K^e]$  et de vecteur étendu  $\{F^e\}$  de chaque élément ;

Tel que :

$[K^e]$ : matrice de dimension  $n \times n$  ( $n$  : nombre de nœuds) comporte uniquement des éléments de la matrice élémentaire correspondante placés avec un guide préétabli ailleurs partout des zéro, même procédure pour le vecteur  $\{F^e\}$  ;

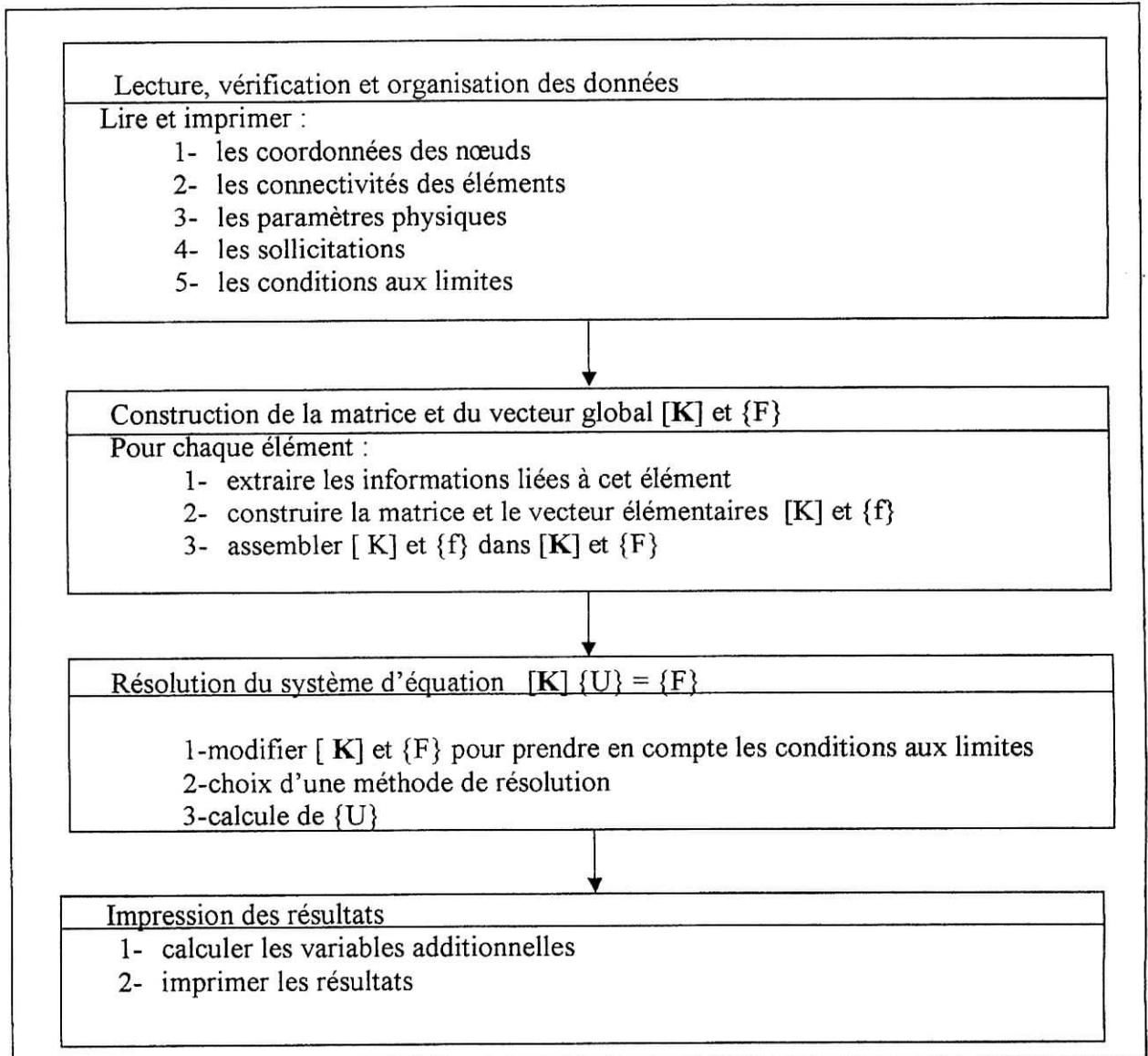
- Addition des matrices et des vecteurs étendus.

### III.13 : ETAPE CARACTERISTIQUE D'UN PROGRAMME (E.F)

Tout programme basé sur la méthode des éléments finis inclut des blocs fonctionnels caractéristiques :

- Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et élément), les paramètres physiques (charge, débit, pression, etc.), les efforts imposés et conditions aux limites ;
- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations ;

- Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites ;
- Impression des résultats après calcul.



**Figure III.7:** Blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme d'éléments finis

Les quatre phases qui sont illustrées sur la figure précédente montre que les traitements numériques résultant de la M.E.F peuvent être fractionné en phases et programmés de façon modulaire.

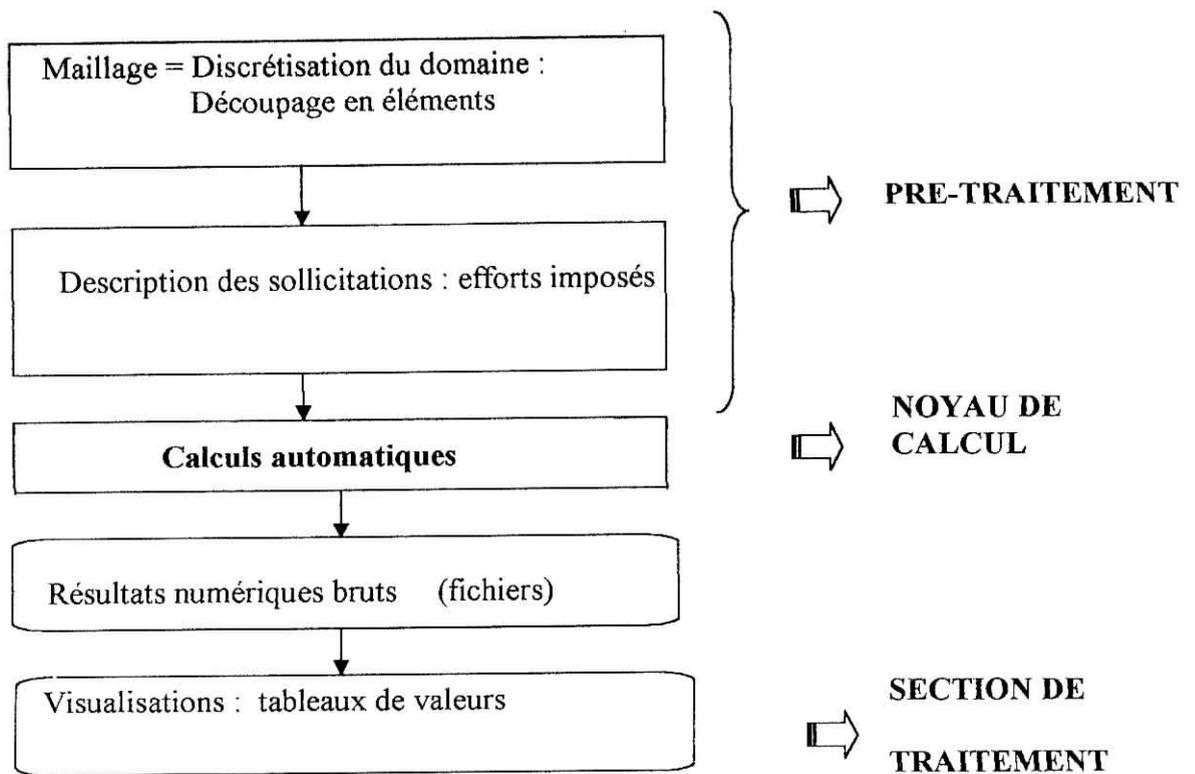


Figure III.8: Organigramme simplifié des 4 phases

### III.14. CONCLUSION

La méthode de calcul qu'on vient d'établir (M.E.F) est une méthode générale pour résoudre les problèmes mécaniques en construisant très efficacement des modèles de simulation. Elle est actuellement appliquée dans des domaines très divers pour résoudre des problèmes de mécanique des solides et/ou de mécanique des fluides, des problèmes de thermique, d'électricité, d'électromagnétisme etc.

Les outils actuels de calcul permettent même de résoudre des problèmes où ces phénomènes sont couplés. Cette méthode n'est pas la seule à être proposée à travers des outils industriels (équations intégrales, volumes finis et différences finies sont aussi utilisées), mais, en mécanique des fluides, elle est actuellement très populaire à cause de sa (relative) facilité d'utilisation et de son très grand domaine d'application.

## **CHAPITRE IV**

# **ANALYSE NUMERIQUE DES EQUATIONS DE TRANSPORT ET D'ECOULEMENT : APPLICATION DE LA M.E.F**

## **Analyse numérique des équations de transport et d'écoulement :**

### **Application de la M.E.F**

#### **IV.1. INTRODUCTION**

Dans ce présent chapitre nous considérons le problème découplé, qui signifie résoudre en premier lieu l'équation de l'écoulement, les résultats obtenus seront ensuite utilisés pour la résolution de l'équation du transport. Pour cela nous avons pris l'équation de l'écoulement à l'état permanent et l'équation de transport à l'état non permanent.

#### **IV.2. ECOULEMENT**

Les lois régissant les écoulements en milieu poreux sont deux. La loi de continuité et la loi de *Darcy*, la combinaison de ces deux équations aboutit à l'équation d'équilibre qui est donnée pour un écoulement permanent à deux dimensions dans un milieu poreux homogène comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (\text{IV-1})$$

##### **IV.2.1. Modélisation par la méthode des éléments finis**

Plusieurs méthodes ont été proposées pour discrétiser les équations aux dérivés chacune de ces méthodes présentent des avantages et des inconvénients, parmi elles la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. Dans notre cas le domaine géométrique est bien défini la méthode des éléments finis semble plus appropriée.

L'idée de base de cette méthode est l'approximation de la solution dans le domaine entier, en remplaçant celui-ci par une collection discrète de sous domaines appelés éléments finis. Ces éléments peuvent être arrangés de diverses manières pour représenter le plus possible la forme du domaine étudié ; notre choix est porté sur l'élément quadrilatère à quatre nœuds (Q<sub>4</sub>) qui présente une géométrie simple.

##### **IV .2.1.1. Formulation intégrale pour un écoulement permanent à deux dimensions**

L'intégration par parties fournis des formes intégrales dites faible qui présentent les avantages suivants :

- L'ordre maximum des dérivées de  $\phi$  diminue. Les conditions de dérivabilité de  $\phi$  sont donc moins fortes ;
- Certains des conditions aux limites peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale

Par contre l'intégration par parties fait apparaître des dérivées de  $\Psi$  donc les conditions de dérivabilité de  $\Psi$  augmentent. De plus  $\Psi$  peut avoir à satisfaire des conditions sur une partie de la frontière de manière à faire disparaître certains termes de contour.

La forme intégrale de l'équation (IV-1) est :

$$\int_{\Omega} \Psi \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q \right] dx dy + \int_{\Gamma_q} \Psi \left[ k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right] d\Gamma = 0 \quad (IV-2)$$

La fonction  $\phi$  est choisie de telle manière qu'elle prenne la valeur imposée  $\bar{\phi}$  le long de la frontière  $\Gamma_{\phi}$

Après intégration par parties (Zien 1971) on aura :

$$\int_{\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy \equiv - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \Psi \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) n_x d\Gamma \quad (IV-3)$$

$$\int_{\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy \equiv - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \Psi \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) n_y d\Gamma$$

Nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} - \Psi Q \right) dx dy + \int_{\Gamma_q} \Psi \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \Psi \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) d\Gamma = 0 \quad (IV-4)$$

La dérivée normale est donnée par

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \quad (IV-5)$$

De plus nous pouvons faire annuler le terme de contour sur  $\Gamma_{\phi}$  en imposant  $\Psi=0$  sur  $\Gamma_{\phi}$  (Dhatt, 1984).

La discrétisation de type *Galerkin* consiste à introduire des fonctions de forme  $N_i$  tel

$$\text{que : } \phi = \sum_1^n N_i \phi_i$$

$$\phi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + \dots + N_n \phi_n = \langle N \rangle \{a\}^e \quad (\text{IV-6})$$

$$\{a\}^e = \langle \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \rangle^t \quad (\text{IV-7})$$

Où:

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  sont les potentiels aux nœuds.

L'intégrale du résidu pondéré par la méthode de *Galerkin* de l'équation au dérivées partielles (IV-1) s'écrit:

$$\int_{\Omega^e} \left[ \left[ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx dy \right] = \int_{\Omega^e} \langle N \rangle Q dx dy + \int_{\Gamma^e} \langle N \rangle \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \quad (\text{IV-8})$$

Le flux d'écoulement étant défini par l'expression suivante :

$$q_n = - \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) \quad (\text{IV-9})$$

En remplaçant dans (IV-8)  $\phi$  par  $\langle N \rangle \{a\}^e$  on obtient :

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} k_x \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} k_y \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} \right) \{a\}^e dx dy = - \int_{\Gamma^e} \langle N \rangle q_n d\Gamma + \int_{\Omega^e} \langle N \rangle Q dx dy \quad (\text{IV-10})$$

Peut s'écrire de la manière compacte suivante :

$$[K]^e \{a\}^e = \{f\}^e \quad (\text{IV-11})$$

Avec :

$$[K]^e = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} k_x \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} k_y \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{IV-12})$$

L'intégration de la matrice de perméabilité élémentaire s'écrit par la quadrature de *Gauss* comme suit :

$$[K]^e = \sum_{i=1}^{npg} \sum_{j=1}^{npg} [B]^T [K] [B] W_i W_j \text{Det}[J(\xi_i, \eta_j)] \quad (\text{IV-13})$$

Tel que :

$$[B]^T = \left[ \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \right] \quad (IV-14)$$

Le vecteur sollicitation global contient le terme de surface et de volume est exprimé de la manière suivante :

$$\{f\}^e = \int_{\Gamma^e} \{N\} q_n d\Gamma + \int_{A^e} \{N\} Q dx dy$$

(IV-15)

En utilisant la quadrature de *Gauss* le terme de volume devient :

$$\{f\}_Q^e = Q \sum_{i=1}^{npg} \sum_{j=1}^{npg} w_i w_j \{N(\xi_i, \eta_j)\} \text{Det}[J(\xi_i, \eta_j)] \quad (IV-16)$$

Le terme de surface sera discrétisé comme suit :

$$dx = dL \cos \alpha$$

$$dy = dL \sin \alpha$$

$$dx^2 + dy^2 = (dL)^2 \Rightarrow dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (IV-17)$$

Les dérivés de  $x$  et  $y$  en fonction de  $\xi$  et  $\eta$  s'écrivent :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i d\xi + \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i d\eta \quad (IV-18)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i d\xi + \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i d\eta$$

$n$  : désigne le nombre de nœuds par élément, l'intégrale sur la frontière de l'élément, se fera sur chacun des côtés du quadrilatère, quatre cas possibles.

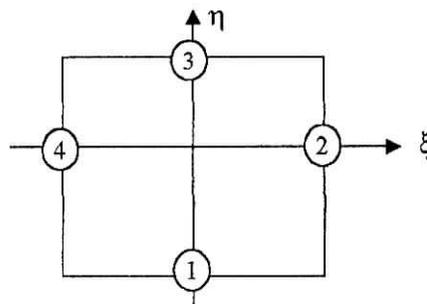


Figure IV-1. élément de référence

La figure précédente représente l'élément de référence à quatre nœuds pour lequel nous effectuons l'intégration sur chacun des quatre côtés.

1<sup>er</sup> cas :

L'intégration le long du côté 1 dont l'abscisse  $\xi$  varie entre  $-1$  et  $1$ , et d'ordonnée  $\eta$  constante et égale à  $-1$  ( $d\eta = 0$ ) conduit à :

$$dL = \sqrt{\left( \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i d\xi \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i d\xi \right)^2 \right)} \quad (\text{IV-19})$$

On pose

$$\lambda = \sqrt{\left( \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \right)^2 \right)} \quad (\text{IV-20})$$

$$dL = \lambda d\xi \quad (\text{IV-21})$$

$$\{f\}_q^e = \int_{L^e} \{N\}_q dL$$

$$\{f\}_q^e = \int_{L^e} \{N(\xi_i, -1)\}_q \lambda(\xi_i, -1) d\xi \quad (\text{IV-22})$$

Par la quadrature de *Gauss* (IV-22) devient :

$$\{f\}_q^e = \sum_{i=1}^{npg} W_i \{N(\xi_i, -1)\}_q \lambda(\xi_i, -1) \quad (\text{IV-23})$$

$npg$  : nombre de point de *Gauss* par direction.

2<sup>ème</sup> cas :

L'intégration le long du côté 3 dont les abscisses  $\xi$  sont linéaires, comprise entre  $-1$  et  $+1$  et les ordonnées  $\eta$  sont constantes et égales à  $+1$  donc  $d\eta = 0$ .

De manière analogue, (IV-22) resta valable et l'évaluation de l'intégrale sur le troisième côté. Conduit à :

$$\{f\}_q^e = \sum_{i=1}^{npg} W_i \{N(\xi_i, +1)\}_q \lambda(\xi_i, +1) \quad (\text{IV-24})$$

3<sup>ème</sup> cas :

L'intégration le long du côté (2) nœud dont les ordonnées  $\eta$  sont linéaires, comprise entre  $-1$  et  $+1$  et d'abscisse  $\xi$  constante et égale à  $(+1)$  donc  $d\xi = 0$

On obtient :

$$dL = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i d\eta \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i d\eta \right)^2} \quad (\text{IV-25})$$

On pose

$$\lambda = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \right)^2} \quad (\text{IV-26})$$

$$\Rightarrow dL = \lambda d\eta \quad (\text{IV-27})$$

En coordonnées naturelle l'équation s'écrit :

$$\{f\}_c^e = \int_{-1}^{+1} \{N(+1, \eta_i)\} \lambda_2 d\eta \quad (\text{IV-28})$$

puis par la quadrature de *Gauss* on obtient :

$$\{f\}_c^e = \sum_{i=1}^{npg} W_i \{N(+1, \eta_i)\} \lambda_2(+1, \eta_i) \quad (\text{IV-29})$$

4<sup>ème</sup> cas :

L'intégration le long du côté 4 nœud (4-1) dont les ordonnées  $\eta$  sont linéaires, comprise entre  $-1$  et  $+1$  et les abscisses  $\xi$  constantes et égale à  $-1$  donc  $d\xi = 0$ .

De même que pour le cas précédent on aura l'équation (IV-27) :

En coordonnées naturelles l'équation s'écrit :

$$\{f\}_c^e = \int_{-1}^{+1} \{N(-1, \eta_i)\} \lambda d\eta \quad (\text{IV-30})$$

Puis par la quadrature de *Gauss*:

$$\{f\}_c^e = \sum_{i=1}^{npg} W_i \{N(-1, \eta_i)\} \lambda(-1, \eta_i) \quad (\text{IV-31})$$

Le système (IV-11) est élémentaire, pour former le système algébrique global il est nécessaire de construire la matrice globale  $[K]_G$  et le vecteur global des sollicitations

$\{F\}_G$  tel que :

$$\begin{aligned} [K]_G &= \underset{iel}{\overset{nel}{A}}_{SS} [K]^e \\ \{F\}_G &= \underset{iel}{\overset{nel}{A}}_{SS} \{f\}^e \end{aligned} \quad (IV-32)$$

La résolution du système d'équation  $[K]_G \{\phi\} = \{F\}_G$  est une étape importante de la méthode des éléments finis. Les méthodes de résolution de système linéaire peuvent être classées en deux catégories :

- Les méthodes directes qui conduisent à la solution en un nombre d'opération connu a priori ;
- Les méthodes itératives qui conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée.

Dans le programme on à utiliser la méthode de Gausse. Cette méthode très souvent utilisée est constituée de deux étapes :

- Transformer le système d'équation en un système triangulaire ;
- Résolution de système triangulaire supérieur précédent « back-substitution ».

### IV.3. TRANSPORT

L'équation régissant le transport du polluant dans les milieux poreux saturés s'écrit dans les directions principales comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} + S = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (IV-33)$$

Où :

$D_x$  : dispersion hydrodynamique suivant la direction x exprimée en  $[L^2 T^{-1}]$ ;

$D_y$  : dispersion hydrodynamique suivant la direction y exprimée en  $[L^2 T^{-1}]$  ;

$C$  : concentration du polluant exprimée en  $[M L^{-3}]$  ;

$S$  : terme source exprimée en  $[ML^{-3} T^{-1}]$  ;

$t$  : c'est le temps  $[T]$ .

### IV.3.1. Formulation intégrale pour le problème de transport a deux dimensions

On pose :

$$\int_{A^e} \left[ \{N\} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \right] + \{N\} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] + \{N\} S \right] dx dy = J_c \quad (IV-34)$$

Pour qu'elle admette une solution unique, il faut satisfaire, en chaque point de la frontière du domaine étudié, les deux conditions aux limites suivantes :

- Condition sur C

$$C = C_0 \text{ sur la frontière (condition de Dirichlet)}$$

- Condition sur le flux

$$\frac{\partial C}{\partial n} = q_c \text{ (condition de Neuman)}$$

Nous pouvons écrire l'équation de transport (IV-32) sous forme intégrale (Zien 1971) comme suite :

$$\int_{A^e} \{N\} D_x \frac{\partial C}{\partial x} n_x d\Gamma - \int_{A^e} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} dx dy + \quad (IV-35)$$

$$\int_{A^e} \{N\} D_y \frac{\partial C}{\partial y} n_y d\Gamma - \int_{A^e} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} dx dy + \int_{A^e} \{N\} S dx dy = J_s$$

En rassemblant les deux termes d'intégration de frontière on aura :

$$\int_{A^e} \left[ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right] dx dy = \int_{A^e} \{N\} S dx dy + \int_{\Gamma^e} \{N\} \left( D_x \frac{\partial C}{\partial x} n_x + D_y \frac{\partial C}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \quad (IV-36)$$

$$\int_{A^e} \left[ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right] dx dy = \int_{A^e} \{N\} S dx dy + \int_{\Gamma^e} \{N\} q_c d\Gamma$$

En remplaçant C par  $\langle N \rangle \{a\}^e$  on obtient:

$$[D]^e \{a\}^e = \{f\}^e \quad (IV-37)$$

Avec

$$[D]^e = \int_{A^e} \left[ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} D_x \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial y} D_y \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} \right] dx dy \quad (IV-38)$$

$$\{f\}^e = \int_{\Gamma^e} \{N\} q_c d\Gamma + \int_{A^e} \{N\} S dx dy \quad (IV-39)$$

L'évaluation de la matrice des dispersions élémentaires se fera par la quadrature de Gauss :

$$[D]^e = \sum_{i=1}^{npg} \sum_{j=1}^{npg} [B]^T [D] [B] W_i W_j \text{Det}[J(\xi_i, \eta_j)] \quad (\text{IV-40})$$

En utilisant la quadrature de *Gauss* le terme de volume devient :

$$\{f\}_S^e = S \sum_{i=1}^{npg} \sum_{j=1}^{npg} W_i W_j \{N\} \text{Det}[J(\xi_i, \eta_j)] \quad (\text{IV-41})$$

$npg$  : Nombre de points de *Gauss*.

L'évaluation de  $q_c$  se faisait par intégration de frontière la démarche est la même que celle de modèle d'écoulement.

Le système (IV-11) est élémentaire, pour former le système algébrique global il est nécessaire de construire la matrice globale  $[D]_G$  et le vecteur globale des sollicitations  $\{F\}_G$  tel que :

$$[D]_G = \underset{iel}{\overset{nel}{A}}_{SS} [D]^e \quad (\text{IV-42})$$

$$\{F\}_G = \underset{iel}{\overset{nel}{A}}_{SS} \{f\}^e$$

La discrétisation en espace (x, y, z) du problème de propagation de la pollution, par la méthode des éléments finis, conduit à un système d'équation différentielle en temps t, de premier ordre :

$$[M] \{\dot{C}\} + [D] \{C\} = \{F\}$$

Où :

$$\{\dot{C}\} = \frac{\partial}{\partial t} \{C\} \quad (\text{IV-43})$$

$[M]$  est la matrice « masse »

$[D]$  est la matrice dispersion globale

$\{F\}$  est le vecteur sollicitation globale

$\{C\}$  est la concentration du polluant

$[M]$ ,  $[D]$ ,  $\{F\}$  sont indépendant de  $\{C\}$  et de ces dérivées. De plus les matrices  $[M]$  et  $[D]$  sont indépendantes du temps ce qui implique que le système (IV-43) est linéaire.

#### IV.4. RESOLUTION DANS LE TEMPS (*Euler implicite*)

Il existe de nombreuses méthodes d'intégration dans le temps, toutes implicites qu'explicites. Parmi les méthodes, on cite celle des différences finies décentrée à droite (implicite) et celle décentrée à gauche (explicite). La méthode des différences finies décentrée à gauche ne permet pas d'utiliser un pas de temps important.

Le phénomène de transport est généralement long d'où la nécessité d'utiliser un pas de temps important. C'est pour cela qu'on fait appel à la méthode dite Euler implicite qui permet d'utiliser des pas de temps importants avec une stabilité inconditionnelle.

Cette méthode consiste à écrire sous la forme générale le système suivant à l'instant  $t+\Delta t$

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \{f(\{C\}, t)\} \text{ pour } t > t_0 \\ \{C(t_0)\} &= \{C_0\} \end{aligned} \quad (\text{IV-44})$$

en utilisant la formule de différences finies décentrée à droite on aura :

$$\{\dot{C}_{t+\Delta t}\} \approx \frac{1}{\Delta t} (\{C_{t+\Delta t}\} - \{C_t\}) \quad (\text{IV-45})$$

d'où la formule de récurrence d'Euler implicite pour le système (IV-43) :

$$\{C_{t+\Delta t}\} = \{C_t\} + \Delta t \{f(\{C_{t+\Delta t}\}, t+\Delta t)\} \quad (\text{IV-46})$$

Dans ce cas l'expression de  $\{f\}$  fait intervenir le vecteur inconnu,  $\{C_{t+\Delta t}\}$ . L'adaptation de (IV-46) aux systèmes (IV-43) s'écrit :

$$[\overline{D}]\{C_{t+\Delta t}\} = \{\overline{R}_{t+\Delta t}\} \quad (\text{IV-47})$$

$$[\overline{D}] = [M] + \Delta t [D] \quad (\text{IV-48})$$

Où :

$$\{\overline{R}_{t+\Delta t}\} = \Delta t \{R_{t+\Delta t}\} + [M]\{C_t\} \quad (\text{IV-49})$$

ou encore en faisant intervenir  $\{\Delta C\}$  :

$$[\overline{D}]\{\Delta C\} = \{\overline{R}_{t+\Delta t}\} - [\overline{D}]\{C_t\} = \{R_{t+\Delta t}\} \quad (\text{IV-51})$$

$$\{R_{t+\Delta t}\} = \Delta t (\{R_{t+\Delta t}\} - [D]\{C_t\}) \quad (\text{IV-52})$$

$$\{C_{t+\Delta t}\} = \{C_t\} + \{\Delta C\} \quad (\text{IV-53})$$

#### IV.4.1. Stabilité de la méthode

L'expression (IV-48) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\{C_{t+\Delta t}\} = [B] \{F_{t+\Delta t}\} + [A] \{C_t\} \quad (\text{IV-54})$$

Tel que :

$$[B] = \Delta t ([M] + \Delta t [D])^{-1} \quad (\text{IV-55})$$

$$[A] = ([I] - \Delta t [M]^{-1} [D])^{-1} \quad (\text{IV-56})$$

La condition de stabilité utilise le rayon spectral de la matrice [A] :

$$\rho(A) \leq 1 \quad (\text{IV-57})$$

$$(1 + \Delta t \cdot l_i) \geq 1 \quad (\text{IV-58})$$

$l_i$  étant les valeurs propres de  $[M]^{-1}[D]$  qui sont positives si  $[M]$  et  $[D]$  sont définies et positives ; (IV-58) est donc toujours vérifiée.

#### IV.5. CONCLUSION

L'application du principe variationnel et de la méthode des éléments finis, nous ont conduit à la résolution des deux équations, écoulement et transport.

La discrétisation des formes intégrales de type *Galerkin* consiste à remplacer la forme intégrale globale par une somme des formes intégrales élémentaires, puis discrétise celles-ci en utilisant une approximation par élément fini. Ceci conduit à la formation du système algébrique que nous résolvons par la suite par la méthode de *Gauss*.

## **CHAPITRE V**

### **Applications et discussions des résultats**

## APPLICATIONS

### V.1. INTRODUCTION

Ce chapitre sera consacré à l'application du programme élaboré sur des cas simples de pollution des nappes.

La première application fera l'objet d'une nappe fictive de dimension (12×5) m avec une pollution qui est répartie à sa surface comme le cas d'une pollution agricole.

Pour la deuxième on montre un cas d'une source ponctuelle qui est généralement une pollution par des rejets industriels. La propagation de la pollution dans les deux cas sera présentée pour deux pas de temps différents.

### V.2. EFFET DU PAS DE TEMPS

#### V.2.1. Pollution répartie

Dans cet exemple nous avons étudié la pollution répartie d'une nappes. Les caractéristiques de la nappe et du polluants sont les suivantes.

##### V.2.1.1. Données

Nombre d'éléments suivant la direction x=12

Nombre d'éléments suivant la direction y=5

Perméabilité :  $K_x=1\text{ m/jour}$

$K_y=1\text{ m/jour}$

Porosité=1

Diffusion moléculaire= $0.00005\text{ m}^2/\text{jour}$

Dispersion longitudinale= $10\text{ m}^2/\text{jour}$

Dispersion transversale= $1\text{ m}^2/\text{jour}$

#### Débits d'infiltration

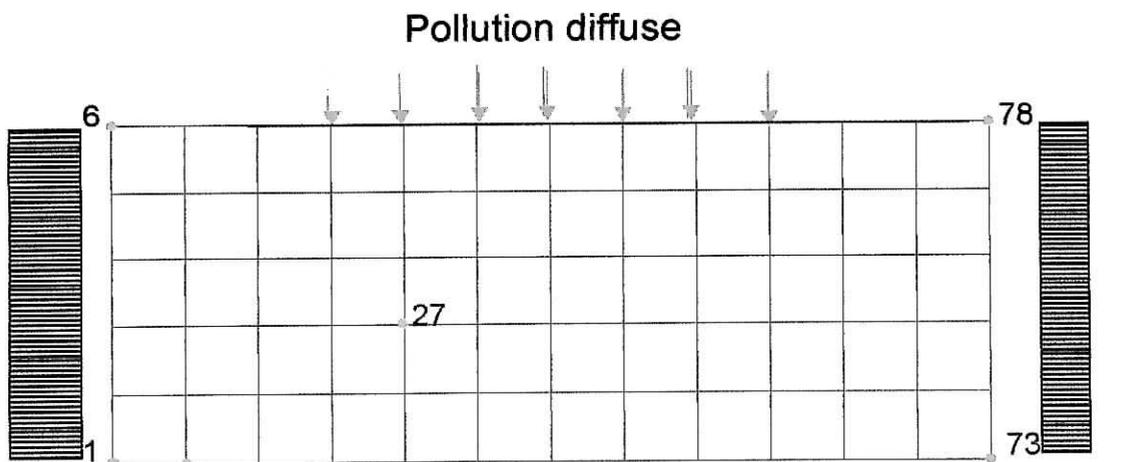
Nœuds	24	30	36	42	48	54	60
Débits d'infiltration( $\text{m}^3/\text{jours}$ )	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

**Charges**

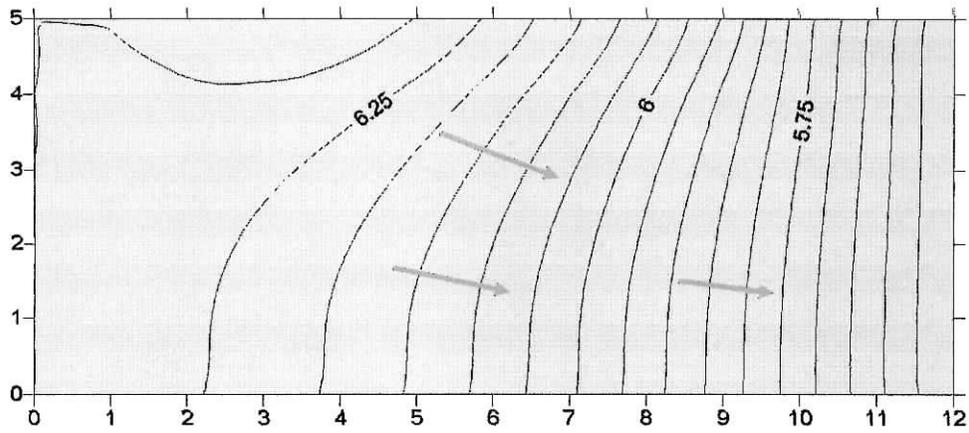
Nœuds	1	2	3	4	5	6	73	74	75	76	77	78
Charges(m)	6.3	6.3	6.3	6.3	6.3	6.3	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5

**Débits de pollution**

Nœuds	24	30	36	42	48	54	60
Débits de pollution (mole/ m <sup>3</sup> .jours)	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.

 $\Phi = 6.3\text{m}$ **FIG V.1** Maillage de la nappe $\Phi = 5.5\text{m}$ **V.2.1.2. Etude de l'écoulement**

Comme le phénomène de transport dépend du sens et de la vitesse de l'écoulement , nous représentons dans la figure qui suit les lignes équipotentiellles tracées à l'aide du logiciel SURFER. Le sens de l'écoulement dans la nappe est indiqué par les flèches rouges.



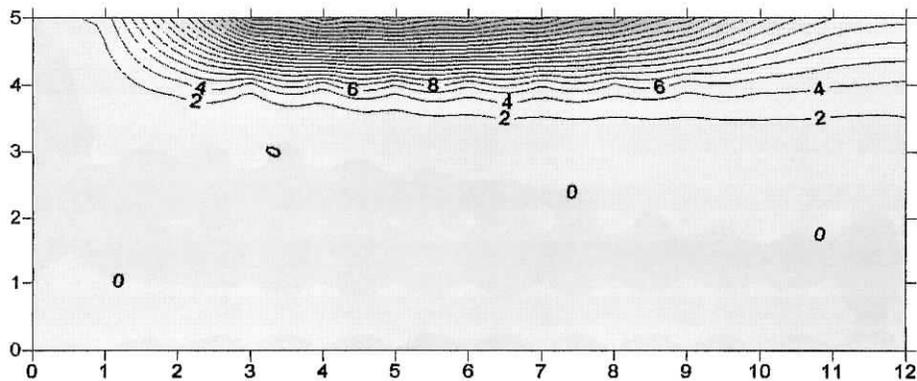
**FIG V 2. Lignes équipotentiellles pour un écoulement permanent**

### V.2.1.3. Etude du transport

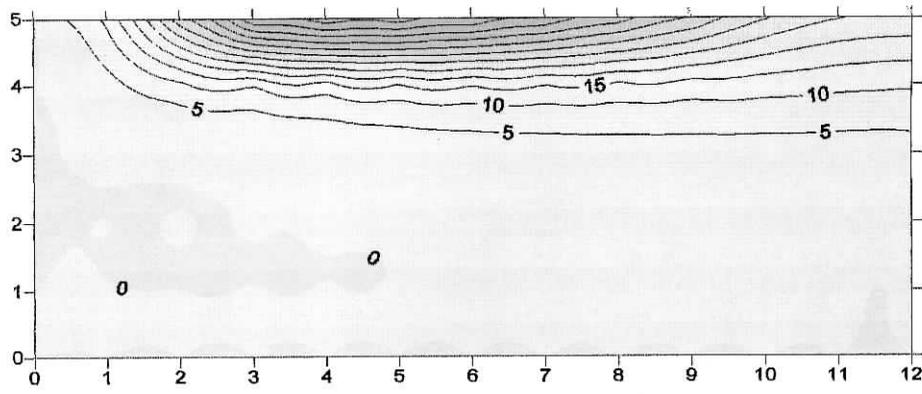
#### a) Pas de temps $\Delta t = 1$ jour

Temps de simulation :  $t=60$  jours

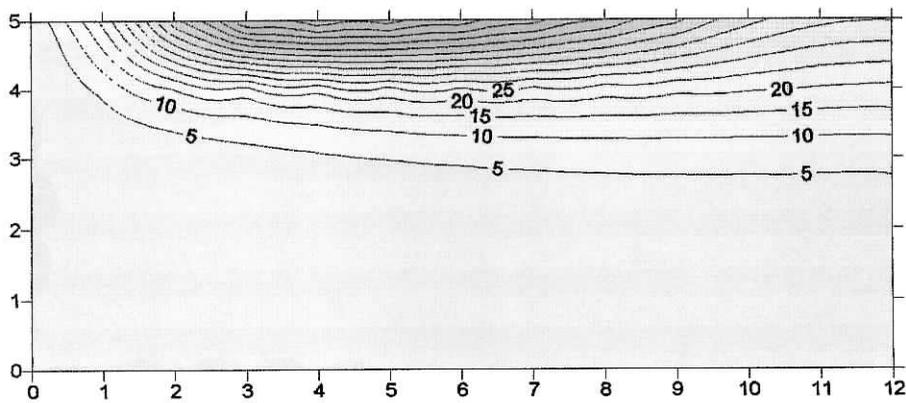
Afin d'étudier l'évolution de la pollution dans la nappe nous avons tracé les iso-concentrations à l'aide du logiciel SURFER. Les graphes suivants représentent la propagation de la pollution pour 15, 30, 45 et 60 jours.



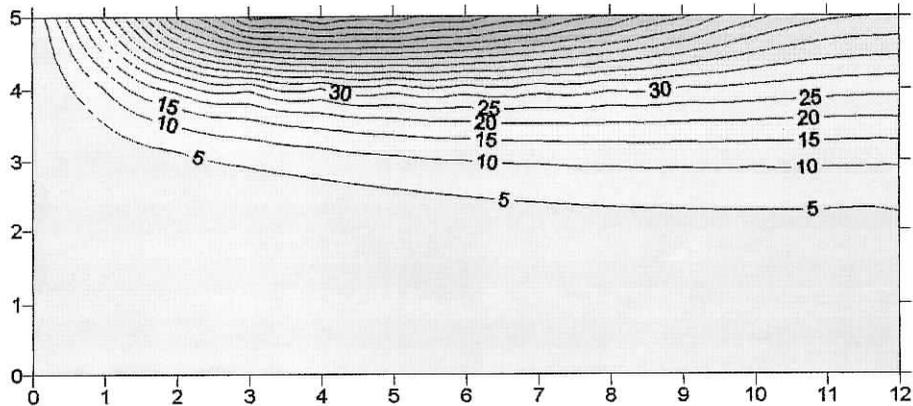
**FIG V.3 Pollution à 15 jours**



**FIG V.4 Pollution à 30 jours**



**FIG V.5 Pollution à 45 jours**



**FIG V.6 Pollution à 60 jours**

### Interprétation

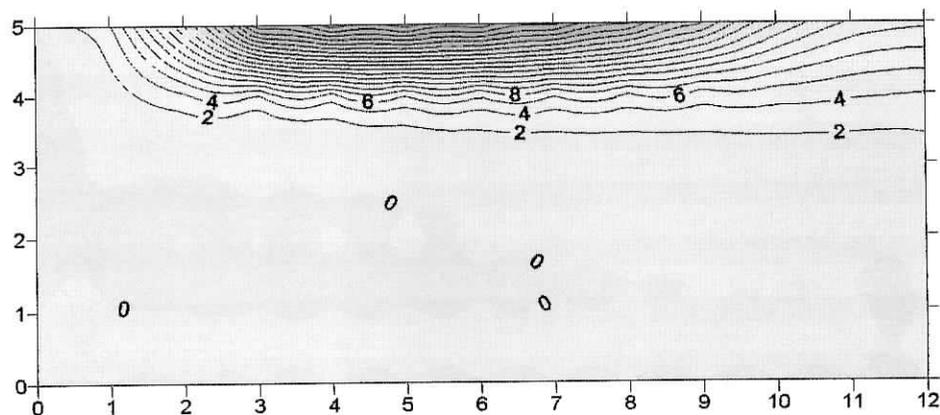
Ces différentes figures nous montre l'évolution de la pollution dans le temps (pas de temps 1 jour) et dans l'espace pour chaque 15 jours. Et la remarque que nous pouvons tirer de ces différentes figures est que la pollution gagne de l'espace en fonction du temps.

En un point donné, la concentration en polluants augmente dans le temps. On remarque aussi que le polluant est transporté dans le sens de l'écoulement.

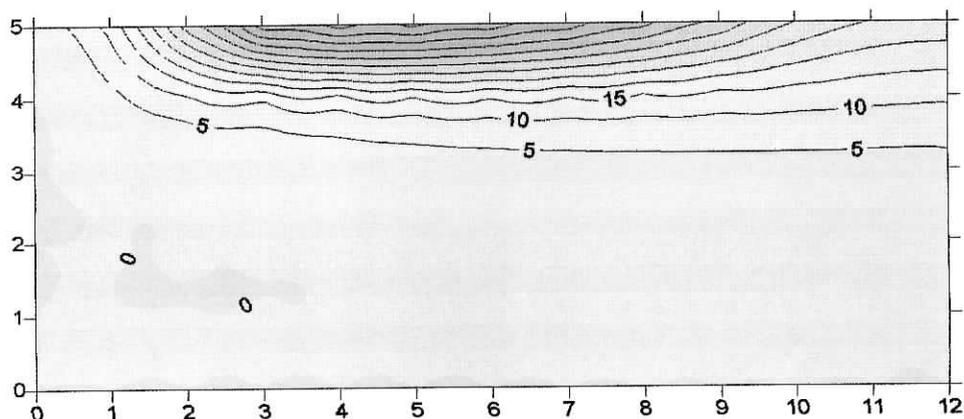
#### **b) Pas de temps : $\Delta t=5$ jours**

Temps de simulation :  $t=60$  jours

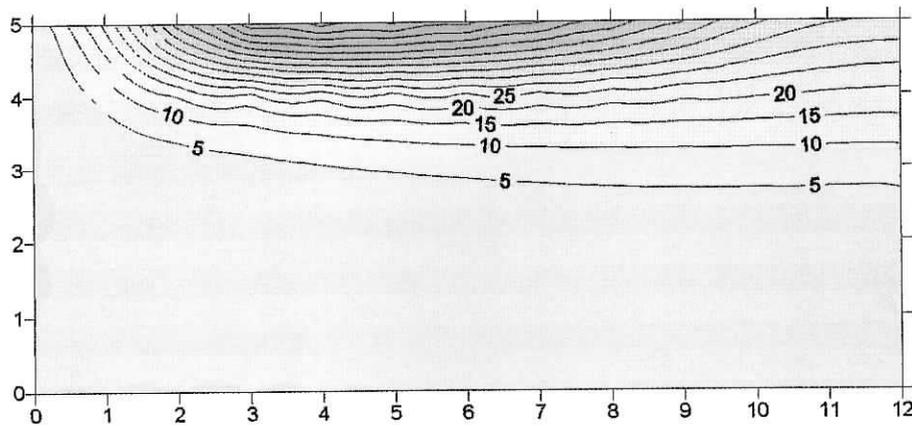
Les graphes suivants représentent l'évolution de la pollution pour 15, 30, 45 et 60 jours.



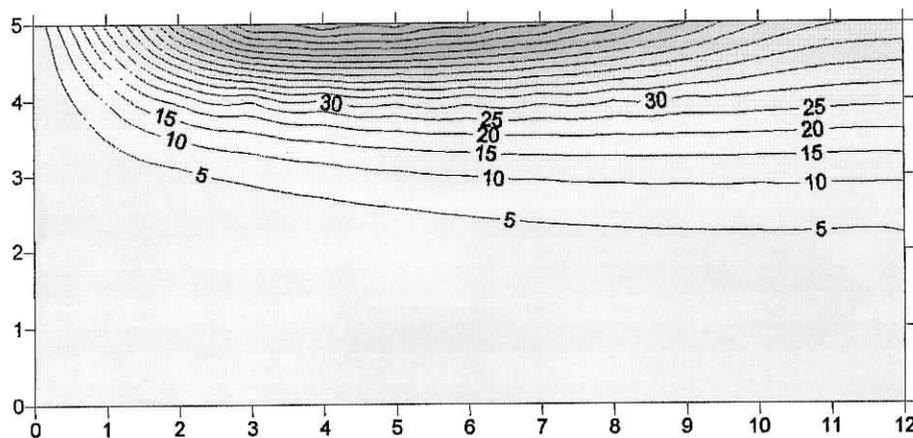
**FIG V.7 Pollution à 15 jours**



**FIG V.8 Pollution à 30 jours**



**FIG V.9 Pollution à 45 jours**



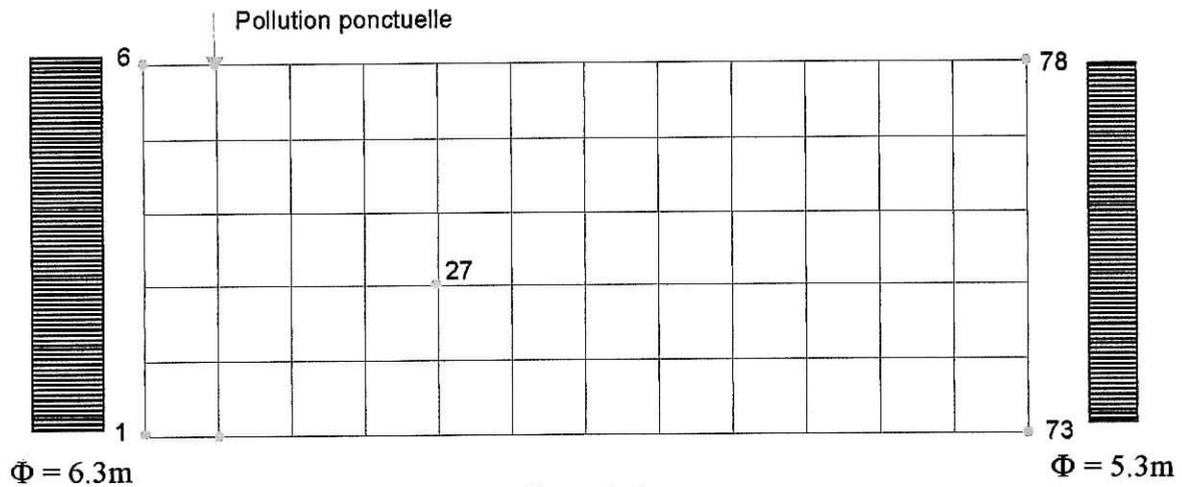
**FIG V.10 Pollution à 60 jours**

### **Interprétation :**

Dans cet exemple nous avons fait changé le pas de temps de 1 à 5 jours et nous avons constaté que la pollution se propage de la même manière que dans le cas précédent. Ceci est la conséquence de la stabilité de la méthode d'intégration dans le temps qui assure la stabilité et la convergence quelque soit le pas de temps.

En un point donné, la concentration en polluants augmente dans le temps. On remarque aussi que le polluant est transporté dans le sens de l'écoulement.

**V.2.2. Pollution ponctuelle**



**FIG V.11** Maillage de la nappe

**V.2.2.1. Données**

Nombre d'éléments suivant la direction x=12

Nombre d'éléments suivant la direction y=5

Perméabilité :  $K_x=1\text{m/jour}$

$K_y=1\text{m/jour}$

Porosité=1

Diffusion moléculaire =  $0.00005\text{ m}^2/\text{jour}$

Dispersion longitudinale =  $10\text{m}^2/\text{jour}$

Dispersion transversale=  $1\text{m}^2/\text{jour}$

**Débits d'infiltration**

Nœuds	12
Débits d'infiltration( $\text{m}^3/\text{jours}$ )	0.02

**Charges**

Nœuds	1	2	3	4	5	6	73	74	75	76	77	78
Charges(m)	6.3	6.3	6.3	6.3	6.3	6.3	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5

**Débits de pollution**

Nœuds	12
Débits de pollution (mole/ m <sup>3</sup> .jours)	2.

**V.2.2.2. Etude de l'écoulement**

Comme le phénomène de transport dépend du sens et de la vitesse de l'écoulement , nous représentons dans la figure qui suit les lignes équipotentielle pour le cas d'une source ponctuelle, les résultats nous permettent de tracer les ligne équipotentielle à l'aide du logiciel SURFER. Le sens de l'écoulement dans la nappe est indiqué par les flèches rouges.

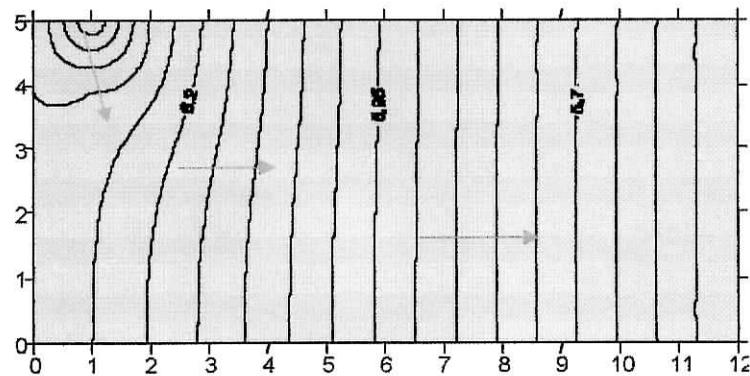
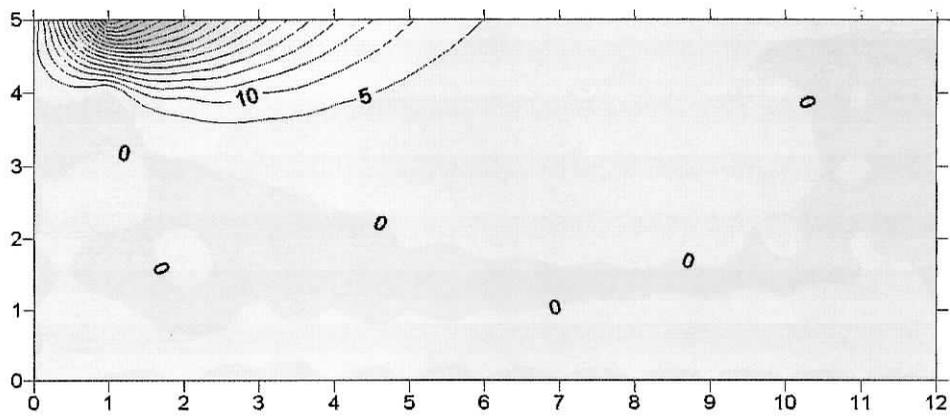


FIG V.12. Lignes équipotentielle pour un écoulement permanent

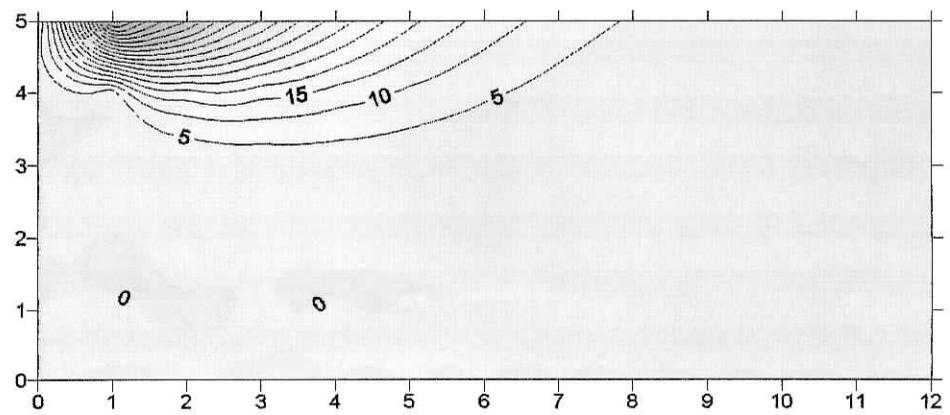
**V.2.2.3. Etude du transport****a) Pas de temps :  $\Delta t=1$  jour**

Temps de simulation :  $t=60$  jours

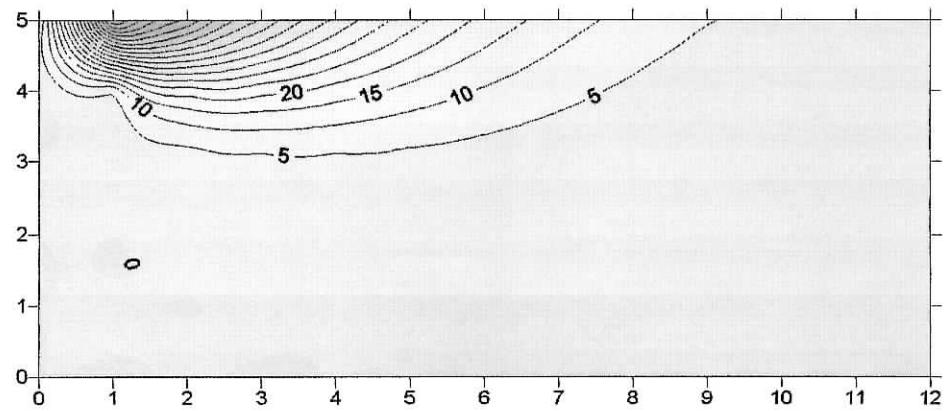
Les graphes suivantes représentent l'évolution de la pollution dans la nappe pour 15, 30, 45, 60 jours pour un pas de temps de 1 jour, dans le cas d'une source de pollution ponctuelle.



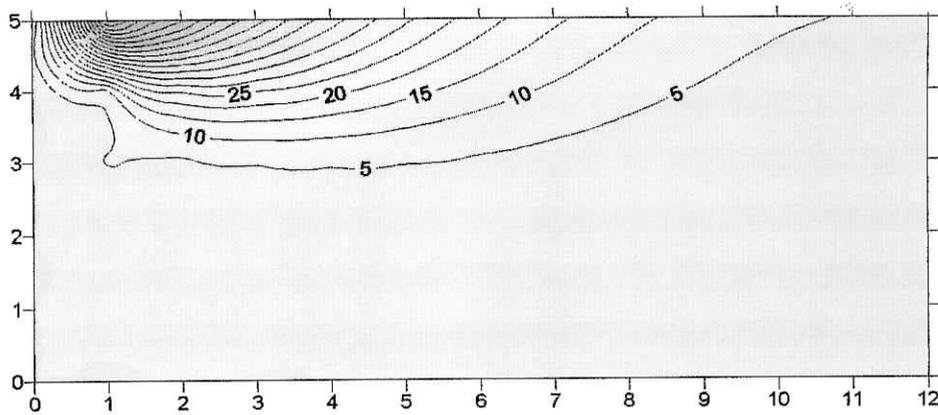
**FIG V.13 Pollution à 15 jours**



**FIG V.14 Pollution à 30 jours**



**FIG V.15 Pollution à 45 jours**



**FIG V.16 Pollution à 60 jours**

**Interprétation :**

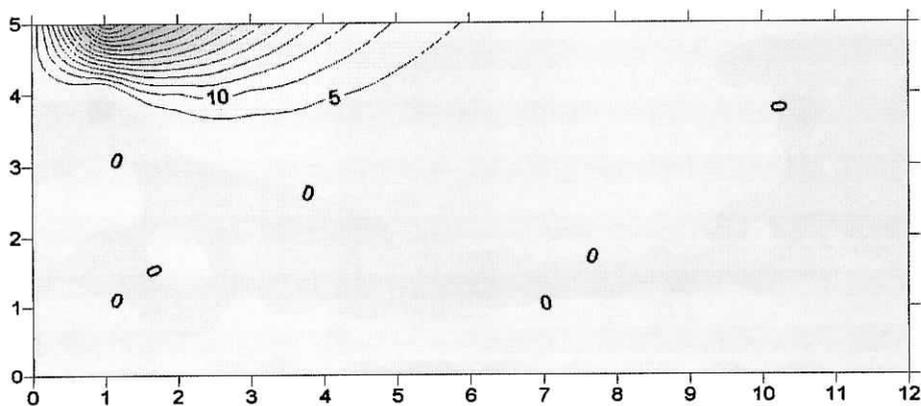
Dans ce cas nous remarquons que la pollution est concentrée sur la source, puis elle se propage tout au long de la nappe en fonction du temps.

En un point donné, la concentration en polluants augmente dans le temps. On remarque aussi que le polluant est transporté dans le sens de l'écoulement.

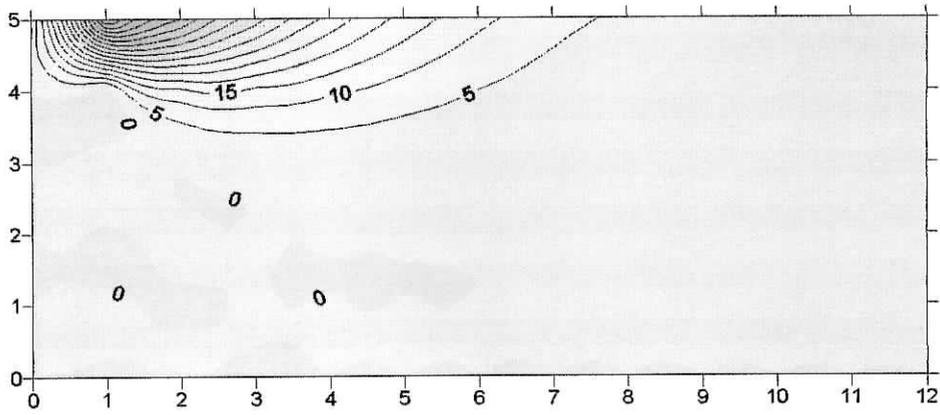
**b) Pas de temps :  $\Delta t = 5$  jour**

Temps de simulation :  $t=60$  jours

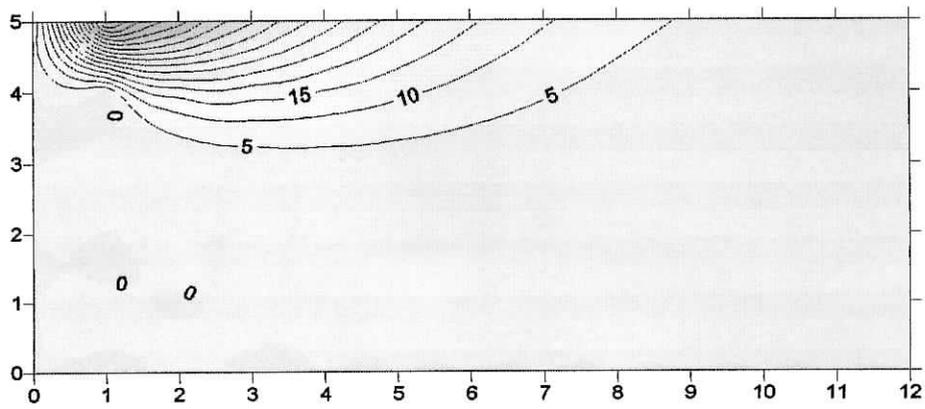
Les graphes suivants représentent l'évolution de la pollution pour 15, 30, 45 et 60 jours.



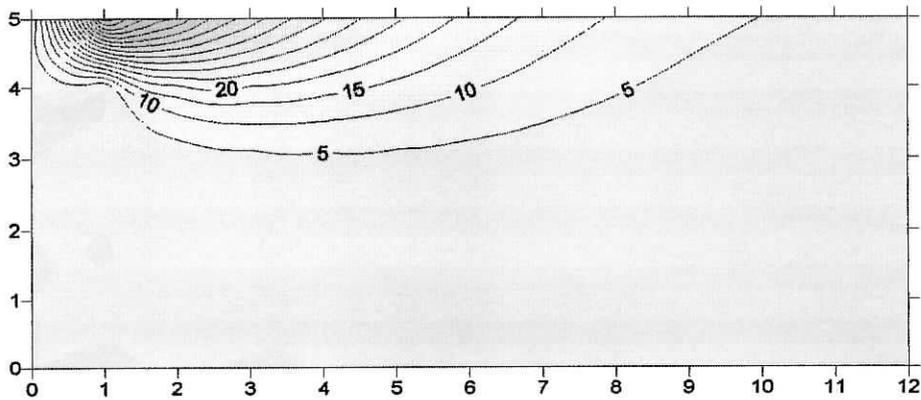
**FIG V.17 Pollution à 15 jours**



**FIG V.18 Pollution à 30 jours**



**FIG V.19 Pollution à 45 jours**



**FIG V.20 Pollution à 60 jours**

Dans cet exemple nous avons fait changé le pas de temps de 1 à 5 jours et nous avons constaté que la pollution ponctuelle se propage de la même manière que dans le cas où le pas de temps est 1 jour. Ceci est la conséquence de la stabilité de la méthode d'intégration dans le temps.

En un point donné, la concentration en polluants augmente dans le temps. On remarque aussi que le polluant est transporté dans le sens de l'écoulement.

### V.3. EFFET DU GRADIENT HYDRAULIQUE

Nous travaillons avec la même nappe, mais cette fois ci on fait changer que le gradient hydraulique. On le fait passer de 0.067 à 0.2 et nous étudierons les deux cas de pollution à source ponctuelle et à source répartie.

#### V.3.1. Pollution répartie

Dans cet exemple nous avons uniquement changé le gradient hydraulique, pour cela nous avons imposé les charges suivantes :

##### Charge

Nœuds	1	2	3	4	5	6	73	74	75	76	77	78
Charges(m)	8.4	8.4	8.4	8.4	8.4	8.4	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0

Le gradient hydraulique :  $I=0.2$

Le Pas de temps :  $\Delta t=1$  jour

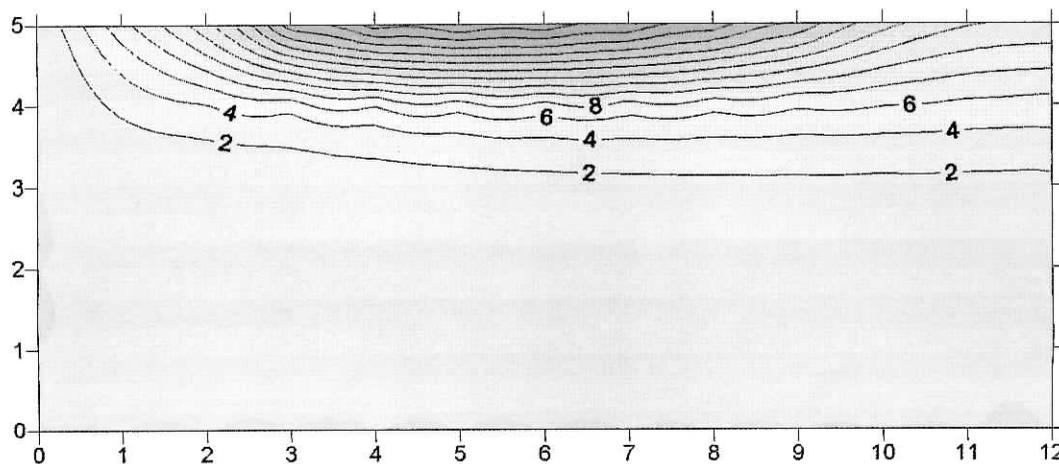
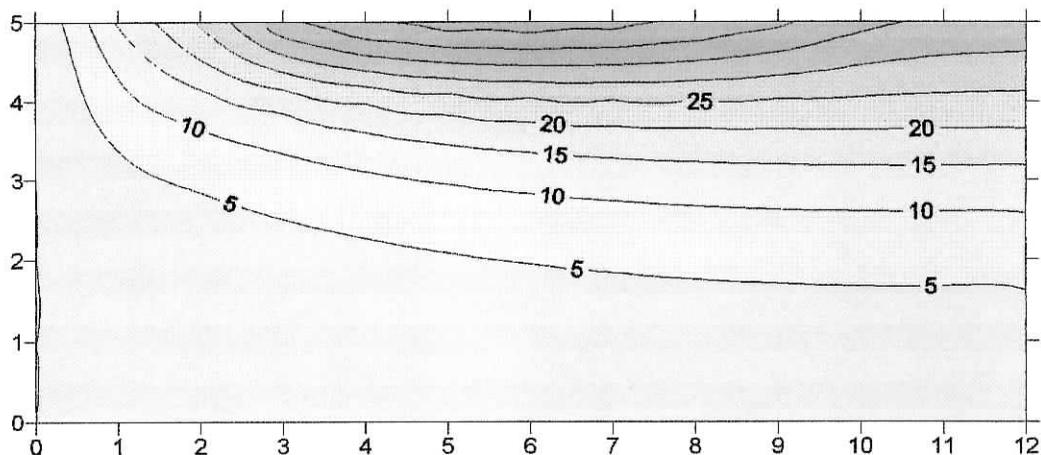


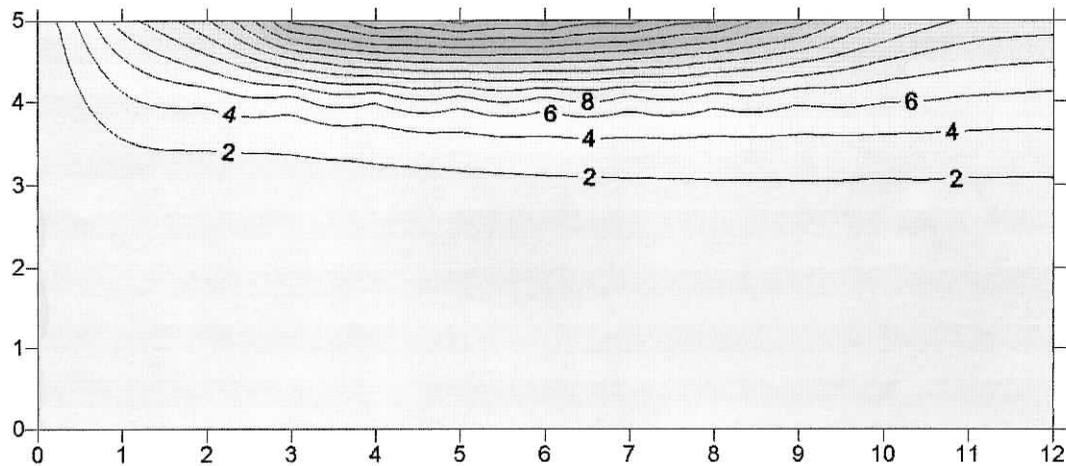
FIG V.21 Pollution à 15 jours



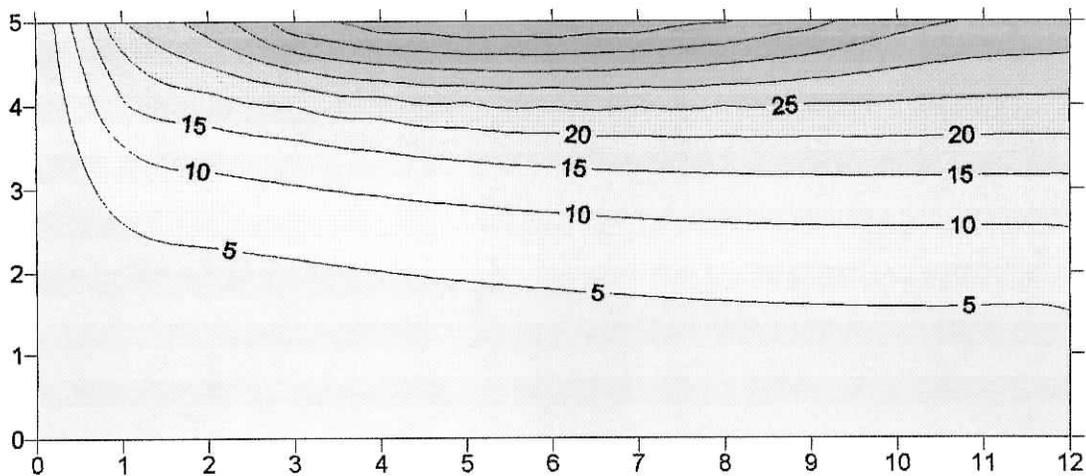
**FIG V.22 Pollution à 60 jours**

Le gradient hydraulique :  $I=0.2$

Le Pas de temps :  $\Delta t=5$  jour



**FIG V.23 Pollution à 15jours**



**FIG V.24 Pollution à 60 jours**

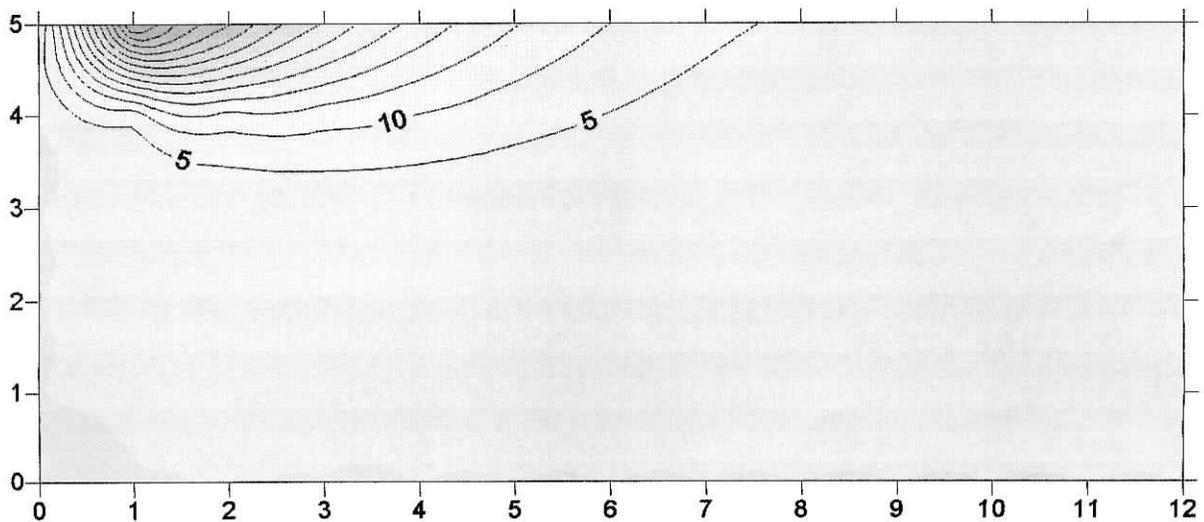
**Interprétation :**

L'augmentation de gradient hydraulique conduit à des vitesses plus importantes qui diffuseront plus rapidement le polluant dans la nappe. Les figures( V.21, V.22, V.23, V.24 ) montrent que la zone polluée obtenue pour un gradient de(0.2) est plus importante que celle d'obtenue pour un gradient de (0.067) illustré dans les figures (V.3, V.6, V.7, V.10).

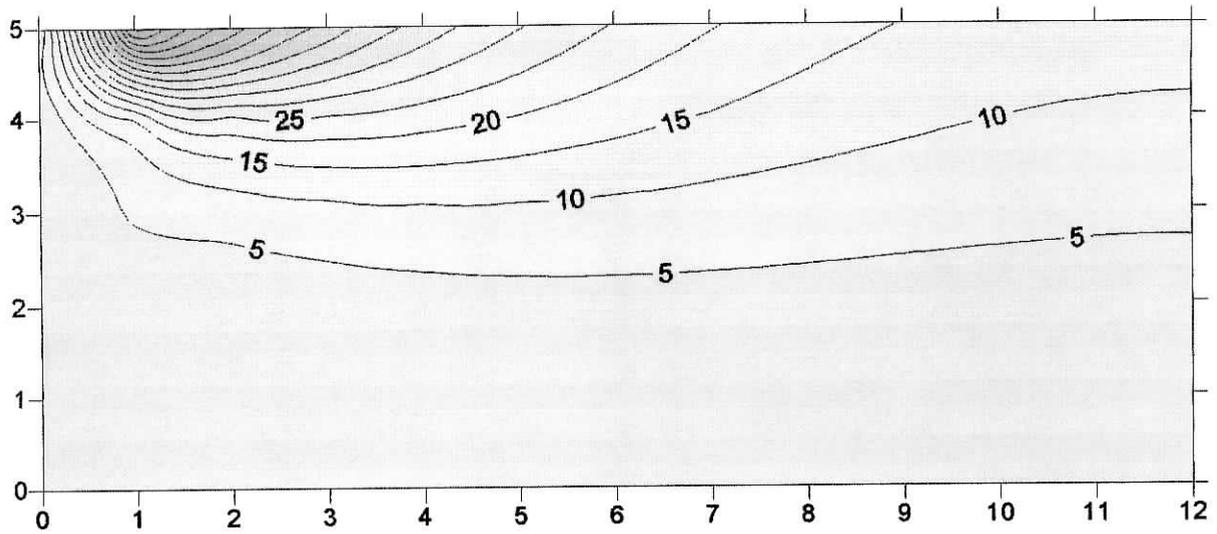
**V.3.2. Pollution ponctuelle**

Dans cette exemple nous avons imposé un gradient hydraulique de 0.2 avec une source de pollution ponctuelle.

Le Pas de temps :  $\Delta t=1$  jour



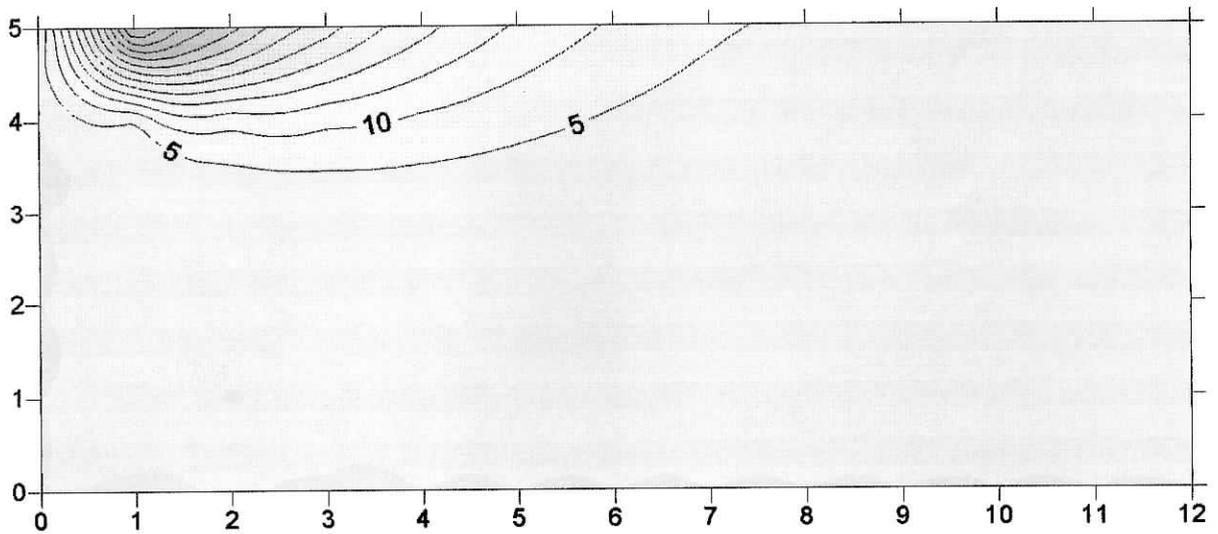
**FIG V.25 Pollution à 15 jours**



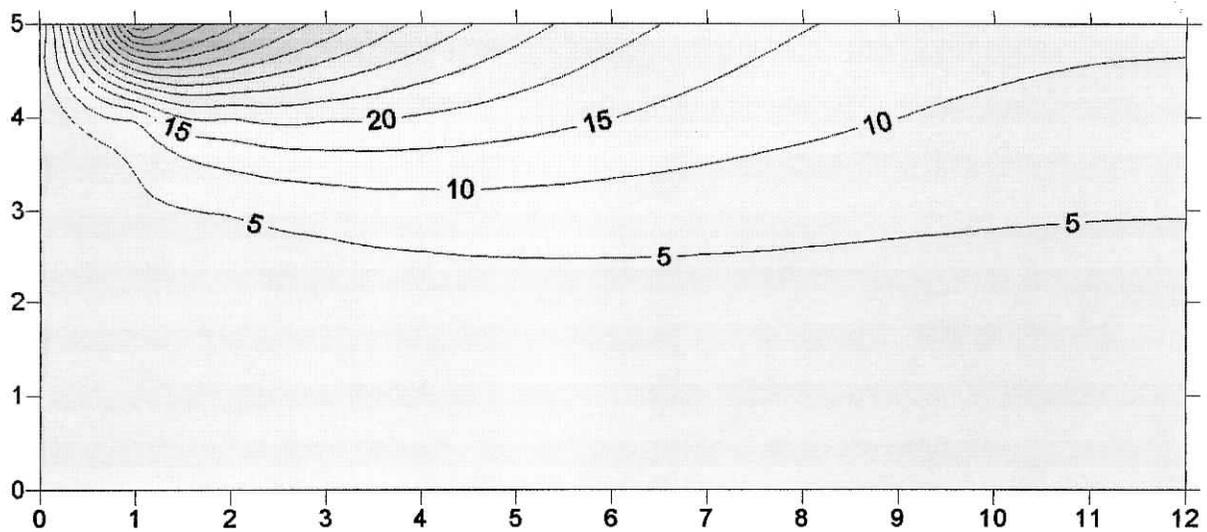
**FIG V.26 Pollution à 60 jours**

Le gradient hydraulique :  $I=0.2$

Le Pas de temps :  $\Delta t=5$  jour



**FIG V.27 Pollution à 15 jours**



**FIG V.28 Pollution à 60jours**

### **Interprétation**

L'augmentation de gradient hydraulique conduit à des vitesses plus importantes qui diffuseront plus rapidement le polluant dans la nappe. Les figures (V.25, V.26, V.27, V.28) montrent que la zone polluée obtenue pour un gradient de 0.2 est plus importante que celle d'obtenue pour un gradient de 0.067 .

## **CONCLUSION GENERALE**

## Conclusion

Le présent travail, nous a permis de réaliser une étude, plus en moins satisfaisante sur le transport de la pollution dans les nappes.

La résolution du problème lie au transport de la pollution dans l'aquifère est modélisé par une équation d'équilibre qui exprime la conservation de masse et discrétisée par la méthode des éléments finis.

Notre étude du phénomène du transport s'est focalisée sur la dispersion mécanique et la diffusion moléculaire seulement. Quand à l'advection elle n'est pas prise en compte en raisons du manque de temps qui m'est reparti.

Bien que le logiciel n'a pas été teste pour un exemple réel les résultats obtenus pour les exemples fictifs étudiés sont objectifs et concordent avec les résultats obtenus par d'autres auteurs (Bear et Pinder)

Le logiciel reste à améliorer en prennent en compte les paramètres suivants :

1. Etude de l'advection ;
2. Ecoulement transitoire ;
3. Prendre en compte les réactions chimiques ;
4. La zone non saturée ;
5. Cas des fluides non miscibles .

**REFERENCES  
BIBLIOGRAPHIQUES**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. ALAN J. DAVIES ., The Finite Element Method (a first approach), clarendon press .OXFORD 1980.
2. BEAR, J., hhdraulic of groundwater edition 1979.
3. B. Lemiére et C. Guern., Guide sur le comportement des polluants dans les sols et les nappes, édition BERGM 2001.
4. Collection des notes et guides techniques du Schéma Directeur d'Aménagement et de Gestion des Eaux, (SDAGE) Rhône-Méditerranée-Corse.
5. EMIL O. FRIND AND DIANE GERMAIN., Simulation of Contaminant Plumes With Large Dispersive. Contrast: Evaluation of Alternating Direction Galerkin Models, Water Resources Research, vol. 22 NO.13, pages 1857-1873, decembre 1986.
6. G. DHATT et G.TOUZOT., une présentation de la méthode des éléments finis ,deuxième édition.
7. Gérard Coffignal, . Mécanique Non Linéaire et Eléments Finis, Ecole National Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM), Paris.
8. JOHN D. BREDEHOEFT., Mass Transport in Flowing Groundwater, Water Resources vol. 9, NO. 1, page 194-226, February 1973.
9. M. BOUMAH RAT, .Methods numériques appliqués, édition (OPU)
10. RELAND VILAGINES., Environnement et Santé Publique, édition TEC et DOC
11. ZIENKIEWICZ, Introduction à la méthode des éléments finis.

**ANNEXE**

# ORGANIGRAMME

## Introduction :

l'élaboration d'un programme de calcul d'écoulement et de transport par la méthode des éléments finis, s'avère pour tout ingénieur travaillant sur les phénomènes de transport dans les milieux poreux, une concrétisation des connaissances acquises et une bonne maîtrise du problème.

Toute fois, cette procédure demande une bonne connaissance dans les domaines, numérique et informatique.

La méthode des éléments finis est utilisée dans tous les domaines de la science, et il existe sur le marché, des logiciels sophistiqués traitant la pollution des nappes.

Parmi ces logiciels on peut citer : MODFLOW.

Dans le présent travail, le programme élaboré a pour but d'analyser par la méthode des éléments finis l'écoulement et le transport en milieux poreux en tenant compte uniquement de la zone saturée.

Tout programme en élément finis est constitué de trois étapes : l'étape de pré traitement, l'étape de traitement et l'étape de poste de traitement.

### 1. Etape de pré traitement :

L'étape de pré traitement est une étape indispensable dans la programmation en éléments finis. Elle consiste à préparer les données nécessaires au programme principal (A1).

Dans cette étude les données définissant la géométrie du milieu sont préparées à l'aide d'un programme de maillage automatique. Ce module nous permet d'éviter l'introduction manuelle des données et par conséquent, gagner du temps.

### 2. Etape de traitement :

Après la préparation des données à l'aide du module précédent, cette étape consiste à résoudre le problème physique. Elle permet de calculer la matrice de perméabilité globale, la matrice de dispersion globale, les vecteurs des forces (l'écoulement / transport), les conditions aux limites et calculer la concentration de la pollution à chaque instant.

Les grandes démarches de cette étape sont :

- Etape d'initialisation des matrices et des vecteurs ;
- Etape d'assemblage des matrices et des vecteurs ;
- Etape de traitement des conditions aux limites et initiales ;

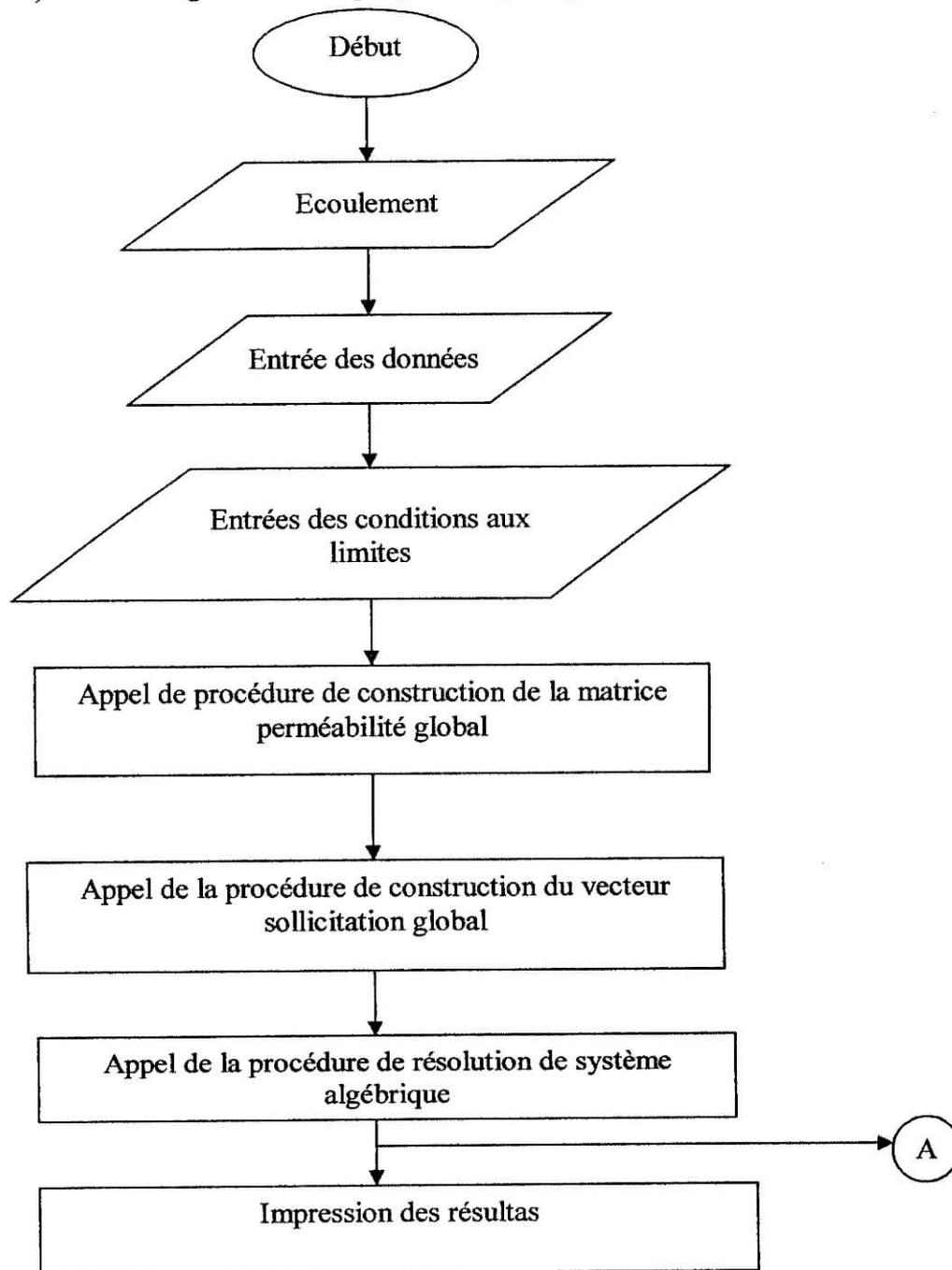
- Etape de résolution des systèmes algébriques ;
- Etape de sortie des résultats.

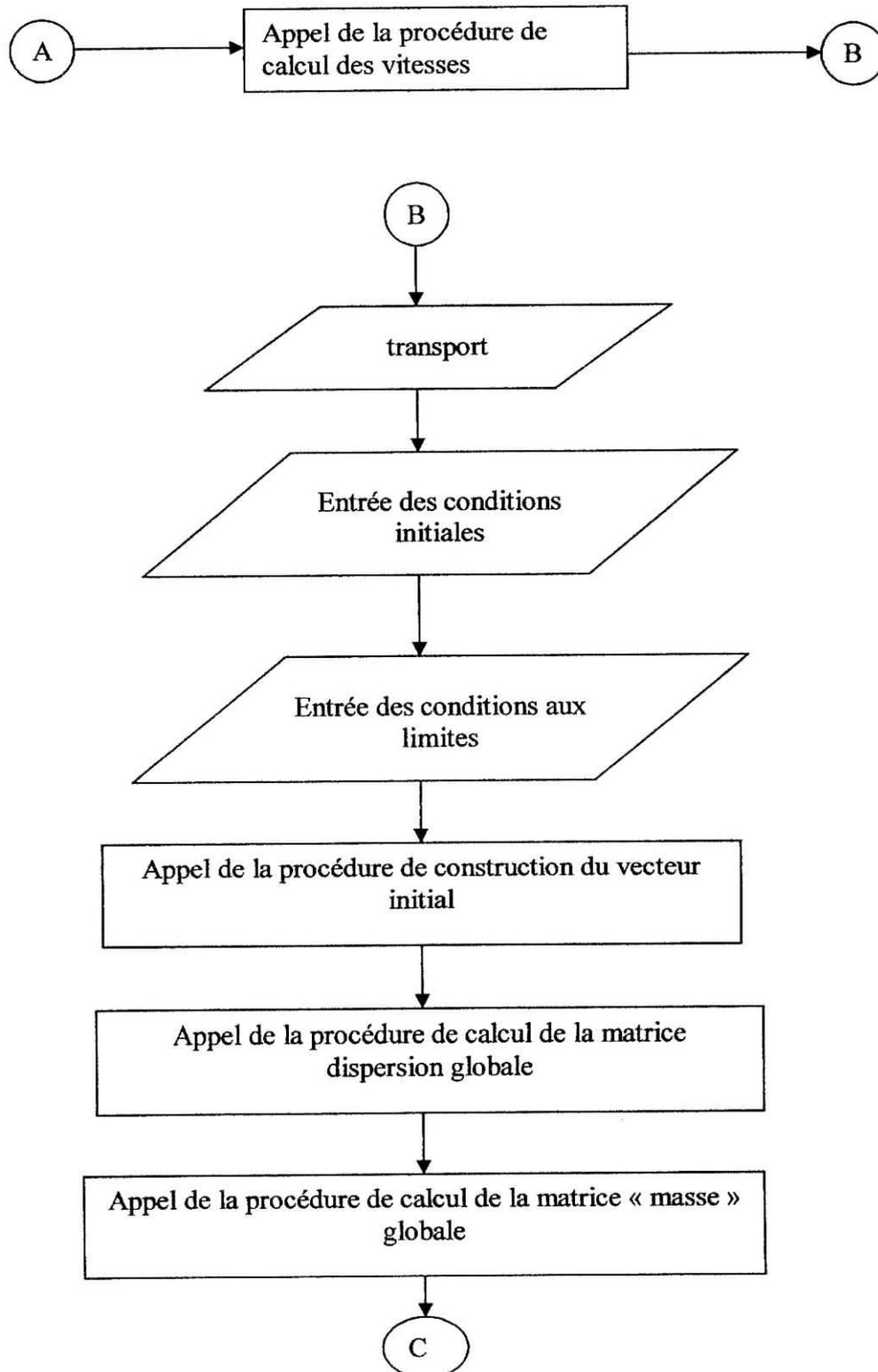
### 3. Etape de poste-traitement :

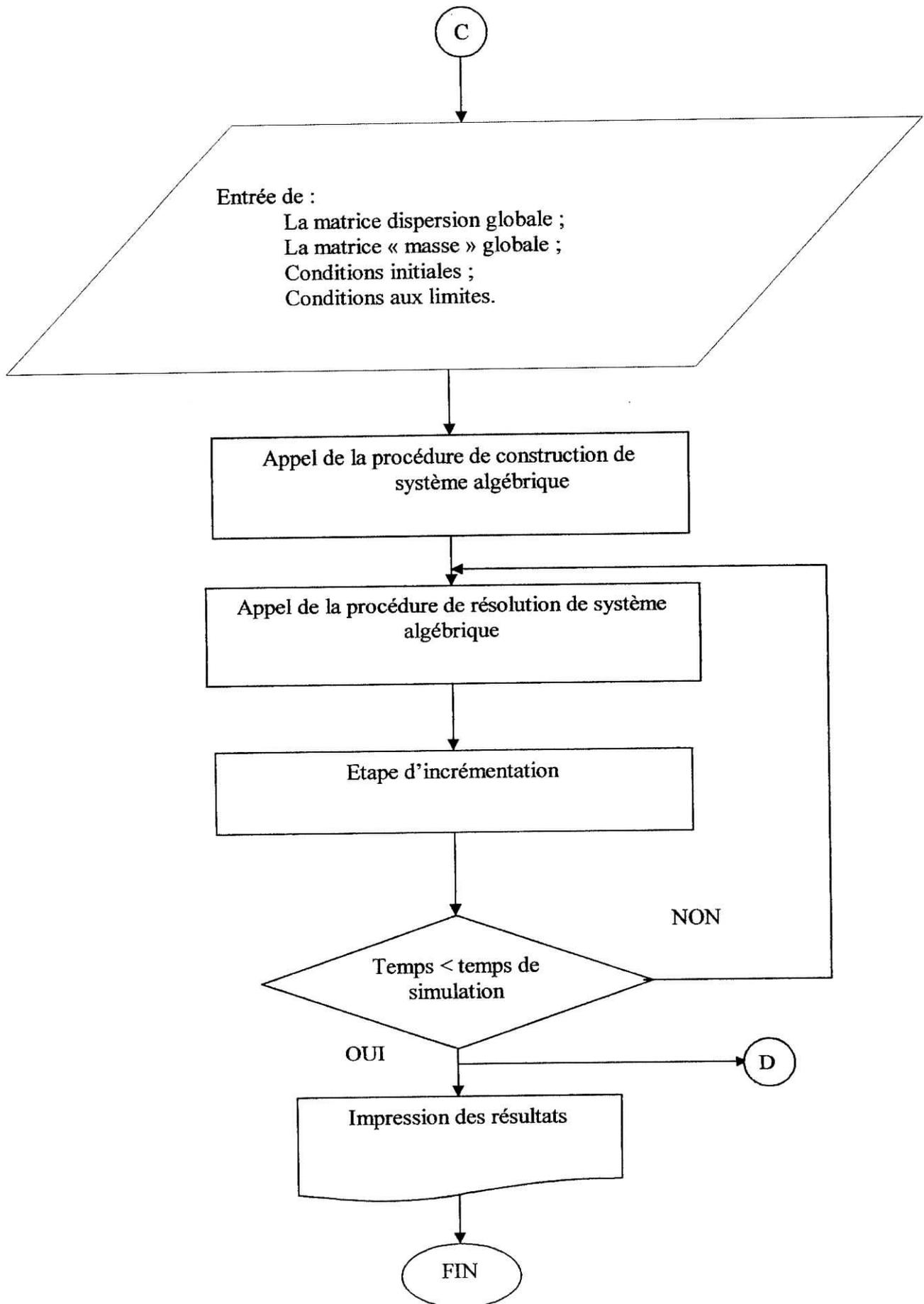
C'est la dernière étape du traitement, elle permet d'écrire les résultats dans les fichiers, les imprimer et le tracé de leurs graphes.

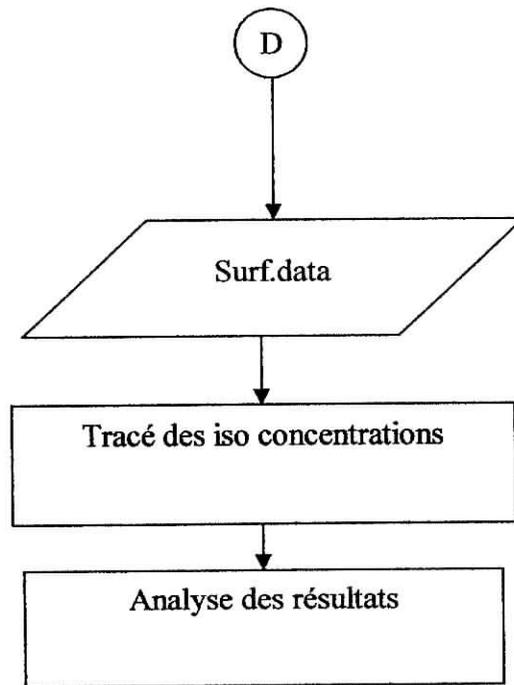
Le tracé des graphes est réalisé à l'aide du logiciel « Surfer » sous Windows utilisant les fichiers de sortie de programme éléments finis comme fichier de données.

La figure (A1) illustre l'organisation du programme principal.









Figure(A1) : Organisation du programme éléments finis

On présente ci-dessous les différents sous-programmes qui composent le programme éléments finis :

**1. subroutine impute :**

Ce sous programme permet de lire les données préparées à l'aide du programme de génération automatique de données ainsi que des données qui sont introduites manuellement dans autre fichier de données. Ces données représentent les caractéristique les caractéristiques du milieu poreux, caractéristiques du polluant, le nombre de point de gausse, le temps de simulation.

**2. subroutine H band :**

Ce sous programme donne la demi largeur bande des matrices globales.

**3. subroutine Gausse :**

Elle permet de donner les coordonnées naturelles des points de Gausse et les coefficients de pondération nécessaires à l'intégration numérique en fonction de *npg* « nombre de points de Gusse ».

**4. subroutine form :**

Le sous-programme *form* consiste à donner les fonctions d'interpolation en coordonnées naturelles.

**5. sousroutine interp :**

Elle permet de donner la matrice d'interpolation ainsi que sa transposée.

**6. sousroutine derivintxy :**

Le sous programme *derivintxy* permet calculer les dérivées des fonctions d'interpolation dans le repère global.

**7. sousroutine defm :**

Elle calcul la matrice déformation.

**8. sousroutine rigid :**

Le sous programme *rigid* permet de calculer les matrice de perméabilités et de dispersions élémentaires.

**9. sousroutine assemb :**

Elle permet de faire l'assemblage des matrices élémentaires.

**10. sousroutine limit :**

Il existe plusieurs méthode d'introduire les conditions aux limites exposées dans plusieurs ouvrages (Dhatt, 77), (zien, 79). Dans ce travail la méthode choisie est dite « *Méthode du terme diagonal dominant* »

**11. sousroutine résolution :**

Elle décrit la résolution des systèmes algébrique après l'assemblage par la méthode de *Gausse*, cette méthode consiste à transformer le système  $Ax = b$  à matrice quelconque en un système équivalent  $A'x = b'$  où  $A'$  est une matrice triangulaire supérieure.

**12. sousroutine vitesse :**

Cette sousroutine permet le calcul des composantes de la vitesse  $v_x$  et  $v_y$  pour les quatre points d'interpolation de chaque éléments dans le plans réel.

**13. sousroutine dispersion :**

Elle permet le calcul de la matrice dispersion globale

**14. sousroutine masse :**

Le sous programme *masse* permet de calculer la matrice « masse » globale.

**15. sousroutine temps :**

Cette sousroutine permet de résoudre l'équation de transport de polluant dans le milieu poreux saturé en utilisant la méthode d'Euler implicite « premier ordre ».