

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Ecole nationale polytechnique

ENP 2000

Département : Hydraulique

*1 seul
ex*

Mémoire du projet de fin d'études
pour l'obtention du diplôme d'ingénieur
d'état en hydraulique

المعرفة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

THEME

Etude Numérique d'un écoulement
diphase par la méthode des
différences finies

Etudié par :

*M^r KERBOUSSA ABDELHALIM
M^r BELMILIANI ZERROUK*

Encadré par : Mr R. MESSAHLI

PROMOTION : 2000.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Ecole nationale polytechnique

ENP 2000

Département : Hydraulique

***Mémoire du projet de fin d'études
pour l'obtention du diplôme d'ingénieur
d'état en hydraulique***

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

THEME

**Etude Numérique d'un écoulement
diphase par la méthode des
différences finies**

Etudié par :

*M^r KERBOUSSA ABDELHALIM
M^r BELMILIANI ZERROUK*

Encadré par : Mr R. MESSAHLI

PROMOTION : 2000.

DÉDICACE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédis ce modeste travail :

A mes chères parents ainsi que mes frères en particulier ,moustapha
et mouhamed

A toutes la famille belmiliani

A toutes la promotion ENP (99-2000).

A tout mes copains : missoum , Djamel , sif el hak ,

ZERROUK

DÉDICACE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédis ce modeste travail :

A mes chères parents ainsi que mes frères : Nesereddine , Salim , Med
El-Aid ,

A toutes la famille KERBOUSSA en particulier ma mère.

A toutes la promotion ENP (99-2000).

A tout mes copains : Faride, Fethi, Fayçal,, Adel , Raouf

ABDELHALIM

REMERCIEMENTS

Nous tenons à présenter nos sincères remerciements et notre profonde reconnaissance à notre promoteur Mr MESSAHLI, qui nous à encadré, conseillé et soutenu tout au long de cette étude.

Nous tenons à remercier vivement notre chef de département M^{elle} Benmammar.

Nous remercions aussi :

La bibliothécaire, ainsi que tout les travailleurs de INFO-2000

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Nomenclature

Nomenclature des notations

A : Surface de la section droite de la conduite.

ρ : masse volumique.

ρ_K : masse volumique de la phase K ($K=L,G$)

R : fraction de phase

U : vitesse moyenne dans la section

P : pression moyenne

χ : fonction de présence de poche

$\Delta\pi^i$: force de pression additionnelle à l'interface

T : résultante des forces de frottement

X : abscisse suivant l'axe de la conduite

θ : inclinaison de la conduite

U_m : la vitesse moyenne du mélange

δ : la vitesse de dérive de phase par rapport on mélange

V_∞ : vitesse des cellules

F_m : coefficient de frottement du mélange

D : diamètre de la conduite

β : taux de poche

ω : pulsation

N : nombre d'échantillons

\emptyset : flux de masse dans un repère se déplaçant à la vitesse V

λ : distance moyenne entre fronts ou culots on longueur moyenne d'une cellule, ou longueur d'onde

r : constante du gaz

f : Fonction courante, représentant en général une grandeur volumique.

f_k, f_i : Grandeur volumique relative à la phase K , grandeur surfacique.

$\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_i$: Source de quantité de mouvement interfacial relative à la phase K , relative à l'interface.

F : forces agissant sur une particule.

g : Accélération de la pesanteur.

g_k : Energie libre massique de la phase K .

h_k, h_i : Enthalpie massique de la phase K , de l'interface.

H : Distribution de Heavyside.

$[I]$: Tenseur unité à deux ou trois dimensions.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

- L : Longueur d'une conduite.
- m : Nombre de Mach diphasique.
- m^*_K, m^*_i : Source de masse interfacial relative à la phase K, à l'interface.
- n : Nombre de particules par unité de volume.
- n_i, n_K : Vecteur unitaire normale à l'interface extérieure à la phase K.
- N_i, N_j : Nombre de réalisations indépendantes d'une expérience, numéro d'une des réalisations.
- P : Périmètre d'une conduite.
- P_K, P_i : Périmètre moyen phase K- paroi, périmètre moyen interfacial .
- P, P_K : Pression dans la phase K.
- Q : Source volumique d'une grandeur physique associée f .
- Q_K, Q_i : Source volumique de la phase K, source surfacique de l'interface.
- q_K, q : Débit massique de la phase K, rapport des débits.
- δ : interface
- T_{k1}, T_i : température absolue de la phase K, de l'interface.
- $[T_k], [T_i]$: tenseur flux d'une grandeur physique associée f dans la phase k, à l'interface.
- $[T_k], [T_i]$: tenseur des contraintes complet de la phase k, de l'interface .
- U_k : vitesse débitante de la phase k
- v_K, v_i : vitesse local de la phase k, de l'interface.
- \tilde{v}_{12} : vitesse de glissement de la phase 1 par rapport à la phase 2
- x_1, x_2, x_3 : coordonnées curvilignes orthogonales
- δ : distribution de Dirac
- δ_i : distribution de Dirac interfacial
- ψ : potentiel des forces de gravité
- ψ_K, ψ_i : grandeur massique de la phase k, de l'interface
- η : deuxième viscosité (dilatation) de la phase k
- λ_K, λ_i : diffusivité thermique de la phase k, de l'interface
- π_K : potentiel de pression de la phase k
- $[\tau_k], [\tau_i]$: tenseur des contraintes visqueuses de la phase k, de l'interface
- $[\overline{\tau}_k]$: tenseur des contraintes turbulentes (contraintes de Reynolds) de la phase k

Indices

G : Relatif à la phase gazeuse.

K : Relatif à la phase K(K=L,G)

L : Relatif à la phase liquide

q : relatif à une grandeur instantanée dans la configuration q (q = S,D)

S : relatif à une grandeur instantanée dans la configuration à phases séparées

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Exposants

" : relatif aux culots de poche

' : relatif aux fronts de poche

D : relatif à une grandeur moyenne dans la configuration à phases dispersées.

i: relatif à l'interface

q : relatif à une grandeur moyenne dans la configuration q (q = S,D)

S : relatif à une grandeur moyenne dans la configuration à phases séparées

W : relatif à la paroi

SOMMAIRE

Nomenclature	09
Introduction générales.....	10
❖ CHAPITRE I : Généralité sur les écoulements diphasiques.	12
I - Généralité.....	13
I-1- Définition.....	14
Résolution de problème.....	15
I-2-Classification des écoulements diphasiques.....	16
I-2-1- Les différentes classes.....	17
❖ CHAPITRE II : les différents modèles	20
II-1- Introduction.....	21
II-2- Construction du modèle simplifié.....	21
II-3- Présentation des modèles.....	22
II-3-1- Modèle à deux fluides.....	22
II-3-2- Modèle à glissement.....	25
II-3-3- Modèle unifié à 2 fluides et 2 configuration.....	29
II-3-4- Modèle unifié à glissement.....	33
❖ CHAPITRE III : La mise en équation d'un écoulement diphasique.	37
III-1- Introduction	38
III-2 Distribution des hases.....	38
III-3 Moyenne statistique.....	40
III-4 Hypothèses de base.....	42
III-5 Equation locales de conservation.....	42
III-6 L'équation diphasiques de conservation.....	43
III-6-1- L'équation phasique de conservation.....	43
III-7 Moyenne statistiques.....	43
III-8 Lois de conservation usuelles moyennes.....	44
III-8-1- Conservation de la masse.....	44
III-8-2- Conservation de la quantité de mouvement.....	44
III-8-3- Conservation de l'énergie cinétique.....	45
❖ CHAPITRE IV : Modèle homogène.....	46
Introduction.....	47
IV-1- Les différents paramètres du mélange.....	48

IV-2- Bilans des équations de conservation.....	48
IV-2-1 Conservation de la masse.....	48
IV-2-2 Conservation de la quantité de mouvement.....	49
IV-2-3 Conservation de l'énergie.....	49
IV-3- Les équations constitutives.....	50
IV-4- Modèle homogène à phase dispersée sans changement de phase.....	53
IV-5- Les équations de fermeture.....	53
IV-6- Equation du modèle.....	55
IV-6-1 Les équations constituer et les équations d'état	56
IV-6-2- L'équation de conservation de la masse du mélange.....	56
IV-6-3- L'équation de conservation de la masse de la phase dispersée	56
IV-6-4- L'équation de conservation de la quantité de mouvement.....	56
❖ CHAPITRE V : Résolution numérique.....	57
Introduction.....	58
V-2- Décritisation.....	58
V-2-1- Décritisation du domaine et maillage.....	58
V-3- Choix de la méthode.....	59
V-4- choix du schéma numérique.....	59
V-5- Les différents schémas.....	59
V-5-1- Les schémas explicites.....	59
V-5-2- Les schémas implicites.....	61
V-6- Description de la méthodes.....	64
Conclusion générale	67
Annexe.....	
Bibliographie	

Résumé :

Les écoulements diphasiques représentent un pôle de recherche en raison de leur grande importance économique.

Dans la présente thèse, on s'intéresse particulièrement à leur modélisation théorique et numérique en vue de construire une base de calcul. Un modèle numérique aux différences finies : la concordance des résultats montre que l'approche adoptée est suffisante.

ملخص

الإنسيابات ثنائية الطور تعد بمثابة قطب الأبحاث نظر الأهميتها الاقتصادية القصوى. هذه الأطروحة تتناول خاصة إنشاء نموذج نظري و عددي في إطار إيجاد قاعدة حسابية. لهذا الغرض، نموذج منجانس نظري أسس و تحله باستخدام مخطط عددي بالفروق النهائية. توافق النتائج تبين أن المنهجية المنبجعة مقنعة.

Summary

Two phase flow are considered as a pole of researches up to the economic importance . This thesis has got especially making theoretic and numerical model in order to find a basis of calculation for this case . Theoretic and numerical model is established and solved by a numerical plan's method finite difference . Results combining show that this method is convinced and sufficient .

Mots clés :

-Ecoulement diphasique , mélange homogène , phase dispersée , différence finie , schéma explicite , stabilité



Introduction générale

Les écoulements diphasiques en particulier gaz-liquide sont depuis longtemps un pôle de réflexion pour plusieurs secteurs industriels, en particulier le génie chimique ; le génie de l'environnement ; le génie nucléaire ; et la production pétrolière.

Ainsi, pour le chimique, il s'agit de déterminer les meilleures conditions d'échanges de masse, entre phases, pour le génie de l'environnement, la compréhension des échanges entrées océans et air, pour le génie nucléaire ; d'assurer la sécurité et le fonctionnement d'un réacteur lors d'une surchauffe accidentelle.

Les modèles théoriques développés dans la littérature compte des phénomènes transitoires sont composés des équations de conservation de masse, la quantité de mouvement et d'énergie, écrite en moyenne sur un intervalle de temps où un nombre d'événement et intégrées sur la section droite de l'écoulement. En conduite où le rapport entre la longueur et le diamètre très important, il est parfaitement de travailler sur des modèles moyennes dans la section. La dimension spatiale se trouve ainsi réduite à un.

A ces équations de conservation on doit ajouter un ensemble de lois de fermeture qui traduisent le comportement et les échanges entre les fluides et restituent d'une formation perdue au cours de l'opération de moyenne.

L'objet de ce travail est d'établir un modèle qui décrit un écoulement diphasique et de mettre au point une méthode numérique capable de résoudre ce modèle.

Nous nous intéressons dans la résolution numérique à un modèle homogène à phase dispersée, dont le mélange est considéré comme un tout. Dont nous avons choisi un schéma aux différences finies explicite de type prédicteur-correcteur assez simple de mise en œuvre, peu coûteux et qui nous a permis, pour des paramètres de discrétisation convenablement choisis, d'obtenir des résultats probants.

CHAPITRE I

Généralités sur les écoulements diphasiques

I- Généralités

Les processus industriels font appel dans de multiples domaines à l'utilisation de fluides, liquides ou gazeux. Depuis quelques années le développement des procédés techniques en génie chimique, le refroidissement en génie nucléaire et le transport en génie pétrolier principalement a posé aux ingénieurs et aux chercheurs de nombreux problèmes d'écoulement multiphasique .

En génie chimique, il s'agit d'optimiser les échanges entre phases au sein d'un réacteur (lit fluidisé par exemple). En génie nucléaire, on est tenu d'assurer la sécurité des installations qui d'une part fonctionnent souvent en régime diphasique eau- vapeur, dans les échangeurs thermiques primaires, et d'autre part peuvent se trouver plus gravement dans cette situation lors d'une dépressurisation accidentelle. En génie pétrolier, on est fréquemment confronté à des écoulements diphasiques notamment dans les puits de pétrole produisant un mélange d'huile, d'eau et de gaz. Les techniques actuelles consistant à séparer les phases à la sortie du puits nécessitent des installations lourdes et coûteuses, spécialement dans les gisements marins.

De gros efforts sont entrepris dans ce secteur d'activité afin de mieux comprendre le comportement des écoulements polyphasiques en vue de transporter le gaz et l'huile dans une même conduite et de concevoir les installations de support convenables.

Dans cette étude nous nous intéressons précisément aux écoulements gaz- liquide dans une conduite et dans la version la plus simple air-eau. Cette géométrie particulière intéresse directement le génie pétrolier pour le dimensionnement et le fonctionnement des «pipelines» de transport.

I-1- Définition

❖ Qu'est ce un mélange diphasique ?

Un mélange diphasique est un fluide caractérisé par la présence côte à côte de deux phases qui interagissent mutuellement. En général, il existe entre elles des déséquilibres qui induisent des transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. C'est donc un fluide composé de deux régions monophasiques distinctes, séparées par des frontières mobiles et déformables. Leur compréhension constituera la base d'un écoulement plus général qu'est le milieu polyphasique. On peut citer en exemples de l'air et l'eau, l'eau et la vapeur, l'eau et les matières solides et l'air pollué.

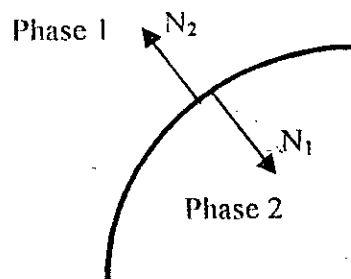


Fig : (I-1)- Interface

❖ **Remarque** : N_1 et N_2 sont les normales intérieure et extérieure à l'interface

Le problème consiste de prévoir les variations de pression et surtout du débit de chaque phase en un point de la conduite lorsque les conditions aux limites, pression ou débit, sont modifiées.

En écoulement de mélange , ces variations résultent de deux phénomènes :

- De la structure mixte propre de l'écoulement (poche - bouchon)c'est à dire les différents déséquilibres aux interfaces .
- Des variations des conditions aux limites.

La difficulté est de séparer les variations dues aux conditions aux limites qui sont liées aux conditions opératoires, des variations de structure résultant d'instabilités locales.

Pour le dimensionnement des conduites ainsi que les modèles théoriques développés dans la littérature pour rendre compte des phénomènes transitoires sont composés des équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, écrites en moyenne sur un intervalle de temps ou un nombre d'événements intégrées sur la section droite de l'écoulement.

A ces équations de conservation, on doit ajouter un ensemble de lois qui traduisent le comportement et les échanges entre les fluides, de frottement aux parois et entre phases.

A travers ce travail nous allons essayer d'appliquer cette méthodologie (modélisation puis résolution) à l'étude des écoulements diphasiques.

L'organigramme fonctionnelle ci-dessous résume la méthodologie standard de résolution (voir Ischii-[1]) et montre les différentes conditions essentielles qui rentrent dans une solution d'un problème d'écoulement à deux phases .Celui-ci montre l'ordre d'intervention de chacune d'elles .On remarque que les équations constitutives d'interface conditionnent totalement la nature de la solution.

❖ Résolution de problème

En général, l'organigramme (Ischii 75-[1]) que nous présentons ci-dessous résume les étapes nécessaires à la résolution d'un problème physique .Ainsi que nous pouvons le constater, sa validité ne peut se justifier qu'après callage du modèle sur des données expérimentaux par le biais des hypothèses faites sur les échanges interfaciaux.

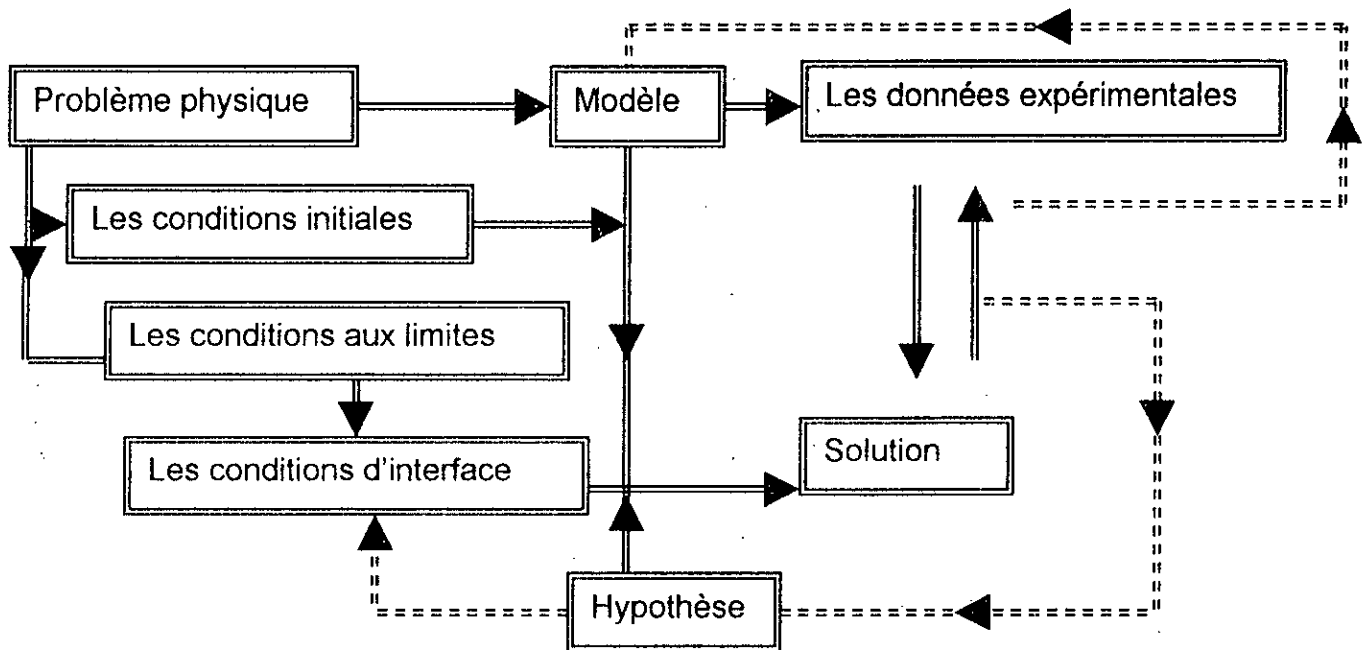


Fig : (I-2)- Organigramme de résolution

I-2- Classification des écoulements diphasiques

Il existe une variété d'écoulements diphasiques selon des combinaisons géométriques des deux phases appelées configurations, ainsi sur la nature de l'écoulement de chaque phase.

Le classement préliminaire est celui établie par la nature qui prend en compte l'état chimique de la matière selon les conditions de température et de pression. On retrouve une matrice de trois états ou quatre au plus, solide, liquide, phases gazeuses et plasma. Selon ce critère (Wallis 69-[2], on retient 4 classes :

- 1) mélange gaz- solide.
- 2) mélange gaz- liquide.
- 3) mélange liquide - solide
- 4) mélange à deux liquides non - miscible.

En général, toute étude repose sur la spécification de géométrie de l'interface qui joue un rôle important dans la recherche d'une solution d'un problème donné comme on l'a signalé en haut . Donc, il est nécessaire dans un premier lieu de se donner les différentes géométrie des interfaces rencontrées dans la pratique. Pour des raisons de faciliter et de simplification, on procède dans ce genre de problème à regrouper ces écoulements par configuration.

A l'image des écoulements monophasiques qui sont classés sur la base de la nature de l'écoulement en laminaire, transitoire et turbulent. On peut affirmer d'après ce qui précède que pour les écoulements diphasiques, la classification de base se fait à l'aide de deux paramètres principaux qui sont : la forme géométrique de l'interface et les distributions topographiques de chaque phase.

I-2-1- Différentes Classes

Suivant la forme de l'interface , un prototype de classification est fourni par Zuber, d'Ishii et Kocamustafaogullari (1971), . (Ischii (1975)-[1]) dans lequel on retrouve trois grands ensemble : écoulements séparés, écoulements transitoires ou mélangés et écoulements dispersés. A l'intérieur de chaque ensemble, on peut distinguer encore une multitude d'écoulements.

Ainsi, rien que pour l'écoulement séparé, on retrouve la grande catégorie des écoulements à surface libre qui comprend l'écoulement à film, stratifiés et à jet.

La classe des écoulements dispersés peut également être ramenée encore à plusieurs types en suivant la forme de la phase dispersée. Ainsi, dépendant de la géométrie de l'interface, on peut considérer dans le cas des particules solides les formes sphériques, elliptiques, granulaires. En fin, les écoulements dispersés rassemblent les trois régimes : bulles, gouttelette ou brume et écoulement de particules ou dans chaque régime la géométrie de la dispersion peut être sphérique, elliptique.

Notons que suite à la variation de l'interface qui peut s'effectuer graduellement, On retrouve alors la troisième classe caractérisée par la présence de la configuration séparée et dispersée (voir tableau I-1). C'est la classe de mélange appelée aussi structure transitoire.

Pour le mélange liquide - vapeur la transition s'opère fréquemment comme le changement de phase progressivement le long du canal. Là encore, il est plus commode de subdiviser la classe des écoulements mélangés selon la phase dispersée. En conséquence, nous pouvons distinguer quatre régimes : écoulement de poches, écoulement bulle-annulaire, bulle annulaire-gouttes et écoulement à film avec entraînement.

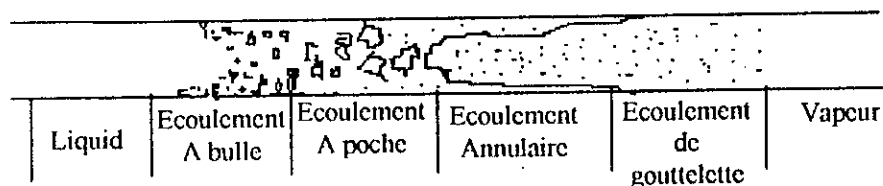

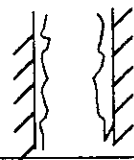

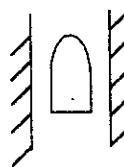
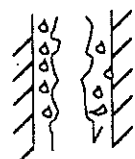
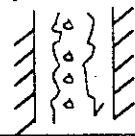



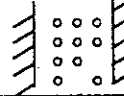


Fig : (I-3)- Transition liquide - vapeur

Tableau I-1 : Classification des écoulements diphasiques

Classe	Type de régime	Géométrie	Configuration	Exemples
Écoulement séparé	Écoulement de film		- Film de Liquide dans le gaz - Film de gaz dans le liquide	*Film se refroidissant * film boiling
	Écoulement annulaire		Film de noyau et de gaz – liquide Film de noyau et de liquide de gaz	- film bouillant - condensateurs
	Jet flow		Gicleur de Liquide en gaz Gicleur de gaz en liquide	Condensateur à injection - atomisation
Mélange écoulement transitoire	Écoulement de prise		Paquet de gaz dans le liquide	Sodium bouillant dans la convection obligatoire (surrégénérateur rapide en métal liquide)
	Écoulement annulaire		Bulles de gaz en film de liquide avec le noyau de gaz	Vaporisateurs avec la nucléation de mur
	Écoulement annulaire de Gouttelette		Noyau de gaz avec les gouttelettes et le film de liquide	Générateur de vapeur
	Écoulement annulaire de gouttelette de bulles		Intoxiquer le noyau avec des gouttelettes et le film liquide avec le gaz bouillonne	Canal d'ébullition nucléaire de réacteur
Écoulement dispersé	Écoulement de bulles		Bulles de gaz dans le liquide	réacteurs Chimiques
	Écoulement de gouttelette		Gouttelettes liquides en gaz	Jet se refroidissant
	Écoulement de particules		Particules dans le gaz ou le liquide	Transport de blé

CHAPITRE II

Les Différents modèles

II-1- Introduction

Un modèle mathématique est un ensemble d'équations présumées représenter le comportement d'un phénomène physique considéré dans des conditions données.

Pour modéliser l'écoulement du mélange de deux fluides de masses volumiques différentes séparés par un ensemble d'interface, on dispose des équations de conservation dans chaque domaine de phase continu et discontinue auxquelles on ajoute un ensemble de lois de fermeture. Ces dernières rendent compte des interactions dans les fluides et aux interfaces. La complexité du problème conduit à réduire le nombre de variables en intégrant les équations sur une variété spatiale (DELHAYE , 1971) .

II-2- Construction du modèle simplifié

Une des solutions possibles est de construire un modèle composé à l'aide d'une deux configurations de base : l'écoulement à phases séparées (stratifié ou annulaire) et l'écoulement à phase dispersée (à bulles ou à gouttes) .Par exemple l'écoulement le plus connu est l'écoulement intermittent (à poches et bouchons)qui une combinaison de ces deux configurations .

Dans ce chapitre nous rappelons tout d'abord les conditions que doit vérifier le système d'équations pour traduire un problème bien posé, ensuite, les deux types de formulation couramment utilisés modèle à deux fluides et modèle à glissement seront présentés, pour chaque modèle les lois de fermeture proposées par différents auteurs seront rappelées. Afin de concentrer notre effort sur les problèmes purement dynamiques, nous supposerons les écoulements isothermes et sans changement de phase.

II-3- Présentation des modèles :

Les équations différentielles standard d'équilibre se tiennent pour chaque secondaire région avec des états appropriés de saut et de frontière pour assortir les solutions de ces équations aux interfaces.

II-3-1- Modèle à deux fluides

❖ Equations de conservation

C'est le modèle le plus couramment utilisé (HANCOX & al, 1980, BANERJEE & CHAN, 1980).Il est constitué des équations de conservation intégrées sur la section, écrites pour chaque fluide. En reprenant la procédure de HANCOX et al pour un écoulement isotherme sans transfert de masse à l'interface, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en projection sur l'axe x, sont obtenues en appliquant soit les opérateurs de moyenne spatiale et temporelle, soit les opérateurs de moyenne spatiale et d'ensemble, aux équations locales. On obtient en toute généralité :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_k R_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_k R_k U_k) &= -\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{1k} - \frac{\partial}{\partial x} \Delta_{2k} & \dots\dots\dots(\text{II-1}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_k R_k U_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_k R_k U_k^2) + \frac{\partial}{\partial x}(R_k P_k) &= & \dots\dots\dots(\text{II-2}) \\ T_k^w + T_k^i - \prod_k^i - \rho_k R_k g \sin \theta - \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{2k} - \frac{\partial}{\partial x}(\Delta_{3k} + \Delta_{4k}) & & \end{aligned} \right.$$

où k est l'indice de phase (k = L,G)

La fraction de phase R_k est définie, à partir de la fonction de présence de phase locale χ_k par :

$$\left| R_k = \left\{ \frac{1}{A} \int_A \chi_k dA \right\} = \frac{A_k}{A} \dots\dots\dots(\text{II-3}) \right.$$

Où A_k est l'air occupé par la phase K, et A l'aire totale de la conduite. T doit être choisi suffisamment grand devant le temps caractéristique des

fluctuations aléatoires, liées à la structure de l'écoulement (aspect chaotique lié à l'organisation des interfaces : bulles et poches).

Sur les interfaces apparaissent les termes suivants :

$$\left. \begin{aligned}
 T_K^i &= \frac{1}{AT} \int_T \int_{C^i} \frac{n_x n_K^i \tau_K}{\sqrt{1 - (n_x n_K^i)^2}} dCdt && \text{frottement à l'interface} \\
 T_K^w &= \frac{1}{AT} \int_T \int_{CW} \frac{n_x n_K^w \tau_K}{\sqrt{1 - (n_x n_K^w)^2}} dCdt && \text{frottement à la paroi} \\
 \Pi_K^i &= \frac{1}{AT} \int_T \int_{C^i} \frac{n_x n_K^i P_K}{\sqrt{1 - (n_x n_K^i)^2}} dCdt && \text{pression à l'interface}
 \end{aligned} \right.$$

Où n_x et n_K^i, w sont les vecteurs unitaires respectivement colinéaires à la direction x de la conduite et perpendiculaires "sortant" à l'interface ou à la paroi ; τ_K est le tenseur des contraintes et $C^{i(w)}$ l'intersection de l'interface (ou de la paroi) avec la section droite de la conduite.

La pression moyenne à l'interface Π_K^i est divisée en deux parties :

$$\left. \begin{aligned}
 \Pi_K^i &= \Delta \Pi_K^i - P_K^i \frac{1}{AT} \int_T \int_{C^i} \frac{n_x n_K^i}{\sqrt{1 - (n_x n_K^i)^2}} dCdt && \dots\dots\dots(\text{II-4}) \\
 P_K^i &= \frac{1}{AT} \int_T P_K dCdt && \dots\dots\dots(\text{II-5})
 \end{aligned} \right.$$

Où

Est la pression moyenne sur l'interface et $\Delta \Pi_K^i$ rend compte des effets de distribution.

En utilisant le théorème de Gauss-Leibnitz (DELHAYE, 1977),

$$\left| \begin{array}{l} \prod_K^i = \Delta \prod_K^i - P_K^i \frac{\partial R_K}{\partial x} \end{array} \right. \dots\dots\dots (II-6)$$

Cette décomposition fait apparaître la pression phasique moyenne P_K , la pression moyenne sur les interfaces P_K^i et le terme représentant la contrainte $\Delta \prod_K^i$ additionnelle exercée sur les interfaces. Alors que $P_K - P_K^i$ rend compte des effets de gravité et de décollement derrière les bulles ou les poches en stationnaire, $\Delta \prod_K^i$ est identifié comme le terme de masse ajoutée.

Les termes Δ_{JK} du second membre de (II-1) et (II-2) rendent aussi compte des effets de distribution dans la section de la conduite et le temps. Ils sont définis par :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta_{1K} = \frac{1}{T} \int_T \left\{ \frac{1}{A} \int_A \chi_K dA \right\} \left\{ \frac{1}{A_K} \int_{A_K} \rho_K dA \right\} dt - R_K \rho_K \end{array} \right. \dots\dots\dots (II-7)$$

$$\Delta_{2K} = \frac{1}{T} \int_T \left\{ \frac{1}{A} \int_A \chi_K dA \right\} \left\{ \frac{1}{A_K} \int_{A_K} \rho_K U_K dA \right\} dt - R_K \rho_K U_K \dots\dots\dots (II-8)$$

$$\Delta_{3K} = \frac{1}{T} \int_T \left\{ \frac{1}{A} \int_A \chi_K dA \right\} \left\{ \frac{1}{A_K} \int_{A_K} \rho_K U_K^2 dA \right\} dt - R_K \rho_K U_K^2 \dots\dots\dots (II-9)$$

$$\Delta_{4K} = \frac{1}{T} \int_T \left\{ \frac{1}{A} \int_A \chi_K dA \right\} \left\{ \frac{1}{A_K} \int_{A_K} P_K dA \right\} dt - R_K P_K \dots\dots\dots (II-10)$$

Enfin à l'interface gaz- liquide la condition de raccordement s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{K=L,G} (T_K^i - \prod_K^i) = 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (II-11)$$

❖ **Fermetures**

Le système (1) et (2) écrit sur chaque phase comporte quatre équations dont les inconnues principales sont choisies arbitrairement comme étant U_L , U_G , P_L^i ou P_G^i et R_G . Sa résolution nécessite la connaissance de relations supplémentaires entre les inconnues principales et les autres inconnues appelées secondaires : ces relations sont les lois de fermeture du système.

Elles expriment les différentes interactions entre les fluides et entre chaque fluide et la paroi. Ce type de modèle présente des équations de conservation relativement simples, par contre les lois dépendent des configurations.

D'autre part ces lois n'assurent pas toujours la pertinence du modèle (caractéristiques imaginaires).

II-3-2- Modèle à glissement :

❖ **Equations de Conservation**

Ce type de modèle est constitué d'une équation de conservation de la masse de chaque phase et d'une équation de quantité de mouvement du mélange. Il se déduit simplement du modèle précédent en reprenant ses équation de conservation de masse et en additionnant ses équations de conservation de quantité de mouvement. Ceci conduit aux équations suivantes, en supposant constants les termes de distribution $\Delta_{1K} \dots \Delta_{4K}$ et l'uniformité de la pression dans les deux phases :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_L R_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_L R_L U_L) = 0 \quad \dots\dots\dots (II-12) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_G R_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_G R_G U_G) = 0 \quad \dots\dots\dots (II-13) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\rho_L R_L U_L + \rho_G R_G U_G] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_L R_L U_L^2 + \rho_G R_G U_G^2] + \frac{\partial P}{\partial x} = \\ & T^w - (\rho_L R_L + \rho_G R_G) g \sin \theta \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (II-14)$$

Où T^w est le terme de contrainte de cisaillement à la paroi. Les termes d'interaction à l'interface disparaissent, par contre une loi de fermeture est nécessaire pour exprimer une relation entre les inconnues U_L, U_G et R_G . WALLIS (1969) et BOURE (1982) ont développé de tels modèles.

❖ **Fermetures :**

Le système d'équation de conservation précédent nécessite l'adjonction d'équations complémentaires expriment le frottement à la paroi T_w , l'évolution des fluides $\rho_k = f(P)$ et le taux de gaz R_G .

En ce qui concerne l'évolution des fluides, on prend simplement $\rho_L = Cte$ et $\rho_G = Cte$ ou $\rho_G = f(P)$. Dans les modèles pratiques, il est clair que la compressibilité sera rétablie afin de rendre compte correctement de l'évolution de la pression.

❖ **Glissement**

En supposant le gaz incompressible, on peut découpler les équations (II-12) et (II-13) de l'équation (II-14) en se donnant une loi de glissement. L'équation de quantité de mouvement sert alors à calculer la pression. Les équations de conservation de masse s'écrivent après simplification :

$$\left| \begin{aligned} & -\frac{\partial R_G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((1 - R_G) U_L) = 0 \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (II-15)$$

$$\left| \begin{aligned} & \frac{\partial R_G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (R_G U_G) = 0 \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (II-16)$$

La loi de glissement complémentaire entre les trois inconnues R_G , U_L et U_G peut être algébrique ou différentielle. C'est elle qui traduit le couplage qui existe entre les deux phases.

BOURE (1988), WALLIS (1969) écrivent les équations (II-15) et (II-16) en introduisant les deux grandeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_M = R_G U_G + (1 - R_G) U_L \\ \delta = R_G (1 - R_G) (U_G - U_L) \end{array} \right.$$

Qui représentent la vitesse du mélange et la vitesse de dérivée de chaque phase par rapport au mélange. Les équations (II-15) et (II-16) s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_M}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (II-17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_G}{\partial t} + U_M \frac{\partial R_G}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (II-18)$$

L'équation de fermeture va porter sur l'expression de δ appelée loi de fermeture «taux de vide - glissement » (void - drift closure law) BOURE (1988). Plusieurs formulations algébriques bâties sur des résultats expérimentaux en écoulement stationnaire sont proposées.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = V_{\infty} R_G (1 - R_G)^m \quad m \cong 3 \quad \text{WALLIS(1969)} \end{array} \right. \dots\dots\dots (II-19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = 0,55 R_G (1 - R_G^{0,17}) \quad 0,01 < \alpha < 0,29 \quad \text{BOURE(1982)} \end{array} \right. \dots\dots\dots (II-20)$$

Toutes ces lois ont le défaut d'être construite pour des écoulements stationnaires, elles ne tiennent pas compte des effets instationnaires.

❖ **Frottements**

Dans l'équation de conservation de quantité de mouvement du mélange (II-14), le terme de frottement T^w doit être calculé en fonction de U_L , U_G et R_G pour pouvoir résoudre le système.

Son expression est généralement dérivée du cas monophasique et s'exprime par :

$$\left| T'' = -1/2 \rho_M f_M U_M |U_M| \frac{D}{2} \right. \dots\dots\dots (II-21)$$

Où f_M est le coefficient de frottement du mélange. WALLIS propose de déterminer ce coefficient comme en monophasique en utilisant une viscosité équivalente du mélange.

❖ **Discussion :**

Ce type de modèle permet de s'affranchir de la difficulté de fermer les termes de transferts de quantité de mouvement entre les phases propres aux modèles à deux fluides. Cette difficulté est liée aux formes des interfaces qui sont très variées et aussi à l'absence de résultats expérimentaux concernant ces transferts. Il est en effet possible de mesurer le glissement entre les deux phases, mais il n'existe pas de mesure directe du transfert de quantité de mouvement entre les phases dans le cas d'écoulement à poche où l'interface est déformante. Les modèles à glissement bénéficient donc des résultats de mesures expérimentales du glissement pour la détermination des lois de fermeture. Cette grandeur demeure cependant une grandeur globale résultante des divers phénomènes de transferts qu'il sera difficile de modéliser théoriquement tant que l'on ne connaît pas mieux la nature des échanges à l'interface.

II-3-3- Modèle unifié A 2 fluides et 2 configurations :**❖ Equations de conservation**

Les deux modèles précédents ont été développés dans deux configurations :

les écoulements stratifié et dispersé.

L'écoulement à poche- bouchon est constitué d'une succession de ces deux configurations de base. Ce constat a conduit plusieurs chercheurs, DUKLER , HUBBARD (1975) ,FABRE , FERSCHNEIDER , MASBERNAT (1983) à construire , en écoulement stationnaire, des modèles cellulaires prenant en compte cette intermittence. Cette technique permet d'utiliser les résultats connus dans les deux configurations de base.

En partant de cette même idée, FABRE, LINE, PERESSON (1989) ont développé une formulation pour l'écoulement instationnaire. Les équations sont écrites dans chaque phase et pour chaque configuration et sont pondérées par les taux de présence de la configuration à phases séparées β et de la configuration à phases dispersée $1-\beta$.

Cette formulations a l'avantage d'être continue depuis l'écoulement à phases séparées ($\beta = 1$) jusqu'à l'écoulement à phases dispersée ($\beta = 0$) moyennant la continuité de β .

II-3-3-1- Définition de l'opérateur de moyenne :

Comme il n'existe aucune théorie permettant de prédire la valeur locale instantanée de la fonction caractéristique χ , on travaille sur des moyennes . on rappelle qu'il existe deux procédures classique de moyenne :

- La moyenne temporelle sur l'intervalle de temps T : la méthode présente l'inconvénient de filtrer les transitoires rapides dont l'échelle de temps est inférieur à T ; si cette moyenne est utilisée par exemple pour éliminer les

fluctuations non prédictibles dues au passage des poches et des bouchons , on éliminera par la même occasion les variations prédictibles d'échelle de temps inférieur à la période des cellules ;

- La moyenne statistique prise sur N scénarios identiques d'écoulement ;cette méthode échoue cependant lorsqu'elle est appliquée à des suites de fonction de DIRAC ; il n 'y a en effet aucune preuve , à notre connaissance , que la moyenne

$$\left| \overline{w(x,t)} = \lim_{LN \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1,N} \{w_j(x,t)\} \right. \dots\dots\dots(\text{II-22})$$

Converge ; on d'autre termes , pour x et t donnée , la somme peut être nulle car chaque terme s'annule presque partout , excepté en un ensemble fini de points de mesure nulle .

On utilisera donc une moyenne plus judicieuse. On la définit d'abord par une fonction sommable par :

$$\left| \overline{F}(x,t) = \frac{1}{NT_h} \sum_{j=1,N} \left\{ \int_0^{t+T_h} F_j(x,t) dt \right\} \right. \dots\dots\dots(\text{II-23})$$

La moyenne ainsi définie combine une moyenne temporelle sur l'intervalle T_h et une moyenne statistique sur N échantillons (ces deux moyennes commutent). Si on note T_c l'échelle de temps des fluctuations à filtrer (typiquement la période moyenne des cellules) et T_p l'échelle de temps caractéristique des phénomènes transitoires à restituer, on doit vérifier :

$$NT_h \gg T_c \qquad T_h \ll T_p \qquad \dots\dots\dots(\text{II-24})$$

La première des deux conditions correspond au filtrage des fluctuations non prédictibles et la seconde à la restitution des transitoires rapides. On peut étendre cette définition au cas ou F est une somme de distributions de DIRAC,

Comme chaque terme du signe somme est une fonction qui peut avoir une valeur non nulle pourvu qu'il y ait au moins une distribution de DIRAC sur l'intervalle T_h la somme définie par (II-23) a un sens.

Avant d'appliquer la définition il est nécessaire de s'assurer que les opérateurs de dérivation temporelle ou spatiale que l'on rencontre dans les équations de bilan et l'opérateur de moyenne commutent .

Pour l'opérateur de dérivation selon x, si :

$$\frac{\partial}{\partial x} F_j(x,t)$$

est une fonction ou une somme de distributions de DIRAC , alors il vient par les propriétés de commutativité :

$$\left[\frac{1}{NT_h} \sum_{j=1,N} \left\{ \int_t^{t+T_h} \frac{\partial F_i}{\partial x} dt \right\} \right] = \frac{1}{NT_h} \sum_{j=1,N} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_t^{t+T_h} F dt_j \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{NT_h} \sum_{j=1,N} \left\{ \int_T^{t+T_h} F_j dt \right\} \right] \dots\dots\dots (II-25)$$

concernant la dérivée temporelle , on a :

$$\left[\frac{1}{NT_h} \sum_{j=1,N} \left\{ \int_t^{t+T_h} \frac{\partial F_i}{\partial t} dt \right\} \right] = \frac{1}{NT_h} \sum_{j=1,N} \{ F_j(t+T_h) - F_j(t) \} \dots\dots\dots (II-26)$$

IL suffit de restreinte la définition de la dérivée temporelle en posant (T_h étant aussi petit que l'on voudra pourvu que (II-24) soit vérifiée) :

II-3-3-2- Stratégie de fermeture

Le nombre d'inconnues est fortement accru par rapport au modèle précédent, une étude exhaustive des lois de fermeture de ce modèle n'a pas encore été réalisée.

Cependant on peut d'ores et déjà essayer d'apprécier le problème auquel on va être confronté .

On dispose de :

- 8 équations de conservation (2.4.1 à 2.4.4, pour K=L,G)
- 6 définitions (2.4.5 & 2.4.6, pour K=L,G ; 2.4.7 & 2.4.8).
- 2 conditions aux interfaces pour la quantité de mouvement (2.4.9 & 2.4.10).
- 4 relations géométriques (2.4.11 à 2.4.14).

soit 20 équations .

En outre , en considérant que les termes interfaciaux de frottement (respectivement de pression) résultent essentiellement de la composante tangentielle à l'interface (respectivement normale), on peut scinder deux équations chaque condition interfaciale 2.4.9 et 2.4.10 . on a donc 4 équations supplémentaires,

Soit 22 équations .

Le bilan des inconnues se résume comme suit :

- 13 inconnues principales :

$$R_K^q, U_K^q, P_K^q \text{ (pour } K=L,G ; q=S, D) ; \beta$$

- 34 inconnues additionnelles :

$$P_K^{i,q} \text{ (pour } q=S,D) ; \Delta \Pi_K^{i,q}, T_K^{w,q}, T_K^{i,q} \text{ pour } K=L, G ; q=S, D) ;$$

$$R_K' ; U_K' ; P_K' ; \Phi_K' ; R_K'' ; U_K'' ; P_K'' ; \Phi_K'' \text{ pour } K=L,G) ;$$

$$\lambda ; \lambda' ; V' ; V''$$

Soit 47 inconnues.

Le problème de fermeture est en apparence très compliqué. Il est possible toutefois de réduire cette complexité en utilisant pour la fermeture de certains termes, des hypothèses identiques à celles faites dans les modèles à deux fluides ; cette méthode s'applique en particulier à :

- La différence de pression $P_k^q - P^{iq}$ (POUR $K=L, G$; $q= s, d$)
- la force de pression ajoutée $\Delta \Pi_k^{iq}$ (pour $K=L$ ou $L=G$; $q= s, D$)
- le frottement pariétal T_k^{mq} (pour $K=L, G$; $q= S, D$)
- le frottement interfaciale T_k^{iq} (pour $K=L$ ou G ; $q= S, D$)

soit 12 lois de fermeture

Par différence, il manque 13 hypothèses ou lois de fermeture qui doivent être discutées comme hypothèse on doit envisager celle qui conduit à l'égalité des gradients de pression moyenne dans les deux configurations.

❖ Discussion

Ce type de modèle unifié fait intervenir un grand nombre d'inconnues. Il permet de mettre évidence tous les effets d'extrémité et d'avoir des équations qui évoluent une du régime à phases séparées au régime à phases dispersée de manière continue. sa complexité est importante mais il peut être le point de départ pour conduire des formulations plus simples moyennant un certain nombre d'hypothèses.

II-3-4 Modèle unifié à glissement

❖ Equations de conservation

Le modèle à glissement est obtenue à partir du modèle précédent en deux étapes. tout d'abord on additionne les équations de conservation de chaque configuration

Les termes d'extrémité disparaissent dans cette formulation qui constitue déjà un modèle plus simple à deux fluides. On additionne ensuite les deux équations de conservation de quantité de mouvement ce qui permet d'éliminer les termes de transfert à l'interface, on obtient finalement les équations suivantes où P est la pression du mélange :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_K R_K] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_K R_K U_K] = 0 \quad \dots\dots\dots(\text{II-27})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\rho_L R_L U_L + \rho_G R_G U_G] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_L R_L U_L^2 + \rho_G R_G U_G^2] + \frac{\partial}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \beta(1-\beta) \left[\frac{\rho_L^s \rho_L^D R_L^s R_L^D [U_L^s - U_L^D]}{\rho_L R_L} + \frac{\rho_G^s \rho_G^D R_G^s R_G^D [U_G^s - U_G^D]}{\rho_G R_G} \right]^2 = \dots\dots\dots(\text{II-28}) \\ & T^w - (\rho_L R_L + \rho_G R_G) g \sin \theta \end{aligned}$$

avec les définitions suivantes

$$R_K = \beta R_K^s + (1-\beta) R_K^D \quad \dots\dots\dots(\text{II-29})$$

$$\rho_K R_K = \beta \rho_K^s R_K^s + (1-\beta) \rho_K^D R_K^D \quad \dots\dots\dots(\text{II-30})$$

$$\rho_K R_K U_K = \beta \rho_K^s R_K^s U_K^s + (1-\beta) \rho_K^D R_K^D U_K^D \quad \dots\dots\dots(\text{II-31})$$

$$T^w = \beta T^{ws} + (1-\beta) T^{wD} \quad \dots\dots\dots(\text{II-32})$$

Et les 2 relations géométriques :

$$\sum_{K=L,G} R_K^s = 1 \quad \dots\dots\dots(\text{II-33})$$

$$\sum_{K=L,G} R_K^D = 1 \quad \dots\dots\dots(\text{II-34})$$

❖ **Fermetures**

Par rapport au modèle à glissement décrit précédemment, on a le terme d'inertie complémentaire à calculer en supplément. Pour ceci il faut déterminer les grandeurs cellulaires β ,

$$R_G^S, R_G^D, U_L^S, U_L^D, \rho_L^S, \rho_L^D, \rho_G^S, \rho_G^D, \dots$$

❖ **Hypothèses**

Les hypothèses qui ont été adoptées sont les suivantes :

- Par de transfert de masse aux parois ni aux interfaces ;
- La tension interfaciale est négligée ;
- La masse volumique de chaque phase est la même dans les deux configurations :

$$\rho_L^S = \rho_L^D = \rho_L \qquad \rho_G^S = \rho_G^D = \rho_G \qquad \dots\dots\dots (II-34)$$

- Le gaz est compressible (les effets thermodynamiques sur la vitesse de propagation de la pression). Afin de ne pas avoir à traiter l'équation de conservation de l'énergie , on se donne une loi barotropique pour le gaz $p = F(\rho)$ que l'on considère comme parfait : pour simplifier , on considère une loi d'évolution polytropicque de la forme :

$$\frac{\rho}{\rho_G^n} = Cte \qquad \dots\dots\dots (II-35)$$

En l'absence de transfert de masse , l'exposant compris entre 1 et γ : les modèles ne présentent pas une grande sensibilité à cette valeur , de sorte que dans la plupart des cas on fera l'hypothèse d'écoulement isotherme (cette hypothèse suppose l'équilibre thermodynamique entre phases , la phase liquide imposant la température à la phase gazeuse, dont l'énergie interne est

négligeable ; les simulations ainsi que les calculs analytiques ont été faits avec $n=1$ (cas isotherme), ce qui conduit à l'équation :

$$\rho_G^S = \rho_G^D = \rho_G = \frac{\rho}{rT}$$

❖ Lois de fermetures

La vitesse U_G^D est comprise entre V (la vitesse des poches) et U_L^D ; une loi doit être exprimant

$U_G^D - U_L^D$. cependant il est intéressant d'examiner les deux cas asymptotiques

$$U_G^D = V \text{ et } U_G^D = U_L^D .$$

Les autres grandeurs cellulaires peuvent être estimées en écoulement stationnaire en supposant que l'écoulement stratifié dans les poches est établi et en se donnant des lois de taux de gaz dans les bouchons et de frottement à la paroi et à l'interface.

Les frottements sont exprimés comme en écoulement monophasique, dans la partie stratifiée on calcul la part liée au gaz T_G^{MS} et au liquide T_L^{MS} dans des conditions monophasiques.

Pour le taux de gaz dans les bouchons, diverses tentatives ont été effectuées pour prédire la fraction du gaz dans les bouchons. les relations proposées sont, soit totalement empiriques, soit basées sur quelques idées physiques. en règle générale, chaque auteur a calibré sa loi sur ses propres mesures,

❖ Discussion

Ce modèle suscite les mêmes commentaires que: sont homologue sans le terme d'inertie. On ajoutera qu'il a été déduit du modèle unifié et comporte donc un terme complémentaire d'inertie.

CHAPITRE III

La mise en équation d'un écoulement diphasique

III-1- Introduction

La méthode utilisée pour écrire les équations de conservation de masse de quantité de mouvement et d'énergie pour un écoulement diphasique est strictement identique à celle des écoulements monophasiques à condition de raisonner sur des grandeurs définies partout : un observateur placé au point \mathbf{r} dans un écoulement gaz-liquide peut définir à chaque instant la masse volumique, à l'aide des masses volumiques respectives du gaz et du liquide. on notera que, à chaque passage de l'interface la masse volumique subit un saut de valeur : ce n'est pas une fonction continue. On distinguera donc la grandeur partout définie qu'on l'appellera grandeur diphasique et une grandeur associée à chaque phase appelée grandeur phasique.

En écoulement diphasique, on a affaire à des grandeurs physiques discontinues, telles que la masse volumique est les propriétés des fluides. or, dans les équations du bilan, il apparaît des dérivées spatiales et temporelles des différentes grandeurs ; vitesses, grandeurs thermostatiques, ect... considérées comme des fonctions des coordonnées de l'espace et du temps, leurs dérivées n'ont pas de sens aux discontinuités. Il est alors tout naturel les considérées comme des distributions pour lesquelles les dérivées ont un sens, et d'appliquer la méthode générale d'établissement des équations de bilan de monophasique.

III-2- Distributions des phases

Avec les variables d'Euler, on doit définir en premier lieu le domaine occupé par chaque phase par leur distribution Eulerienne (Fig.III-1).

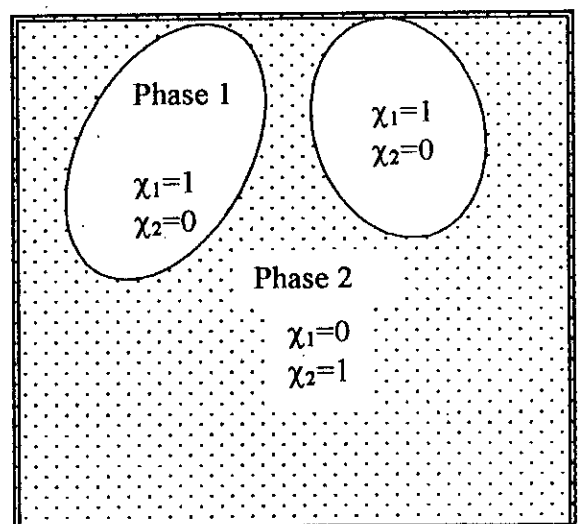


Fig : (III-1)- Distributions des phases

$$\left. \begin{array}{l} \chi_1(r,t) = 1; \chi_2(r,t) = 0; \text{ Si } \delta_i(r,t) > 0 \\ \chi_1(r,t) = 0; \chi_2(r,t) = 1; \text{ Si } \delta_i(r,t) < 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(\text{III-1})$$

χ_1 et χ_2 non définis ; Si $\delta_i(r,t) \neq 0$

La première distribution signifiant, par exemple, que le point de coordonnées r est dans la phase 1 à l'instant t .

avec :

$\delta_i(r,t) = 0$: Equation de l'interface , choisie de telle sorte que $\delta_i(r,t) > 0$ dans la phase 1 et < 0 dans la phase 2

On a alors $\chi_1 + \chi_2 = 1$ si $\delta_i(r,t) \neq 0$ (III-2)

Il est commode de prolonger l'égalité (III-2) partout , en considérant l'interface comme une phase particulière

L'équation (III-2) se transforme en :

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_i = 1 \dots\dots\dots(\text{III-3})$$

On sera amené a écrire pour l'écoulement déphasique les lois de :conservations classiques de masse, de quantité de mouvement et d'énergie :

On doit être capable alors de définir les valeurs de chacune de ces grandeurs en chaque point.

Considérons un écoulement diphasique.

f_1 : la densité volumique de la grandeurs dans les phases 1.

f_2 : la densité volumique de la grandeurs dans la phase 2.

f_i : la densité surfacique de la grandeurs dans la phase i ;

On utilisant la définition de densité de DIRAC d'interface on adonc :

$$f = \chi_1 f + \chi_2 f_2 + \delta_i f_i \text{ qui définit une grandeur diphasique}$$

III-3- Moyenne statistiques

La moyenne statistique \bar{f} d'une grandeur f est, par définition :

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j$$

où l'indice j se réfère à N réalisations dépendantes du phénomène avec des conditions aux limites identiques. Dans le cas d'écoulement stationnaire, la moyenne \bar{f} est identique à la moyenne temporelle. Les moyennes temporelles des distributions élémentaires sont particulièrement importantes et notées :

$$\alpha_1 = \overline{\chi_1}, \alpha_2 = \overline{\chi_2}, \alpha_i = \overline{\delta_i}$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

les moyennes des grandeurs extensives (volumiques, pour une phase et surfacique pour l'interface) sont également importantes. Cependant, ce que l'on mesure couramment, ce sont des moyennes phasiques, moyennes sur le seul nombre de réalisations où la phase considérée est présente au point de référence. Si, sur N réalisations, on en a N_1 où la phase 1 est présente et $N_2 = N - N_1$ où la phase 2 est présente, on aura :

$$\alpha_1 = N_1/N, \alpha_2 = N_2/N \quad N \rightarrow \infty$$

et les moyennes phasiques dans les phases 1 et 2 :

$$\left. \begin{aligned} \overline{f_1} &= \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} f_{1j}, \overline{f_2} = \frac{1}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} f_{2j}, \quad N \rightarrow \infty \\ \bar{f}_1 &= \alpha_1 \overline{f_1} \quad \text{et} \quad \bar{f}_2 = \alpha_2 \overline{f_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(\text{III-4})$$

Le nombre de réalisation où le point de référence est sur l'interface et un infiniment petit par rapport au nombre (des réalisations totales) mais, pondéré si qui est infiniment grand, les moyennes surfaciques gardent un sens et l'on peut définir une moyenne interfaciale par :

$$\overline{f_i} = \frac{\overline{f_i \delta_i}}{\overline{\delta_i}} = \frac{\overline{f_i \delta_i}}{\alpha_i} \dots\dots\dots(III-5)$$

Par toute grandeur définie dans chaque phase par les fonctions f_1 et f_2 (volumiques) et sur d'interface par f_i (surfactive) , ou peut alors définir en tout point une grandeur diphasique par :

$$f = f\chi + f_1\chi + f_i\delta_i$$

et sa moyenne à l'aide de (III-4) et (III-5)

$$\overline{f} = \alpha_1 \overline{f_1} + \alpha_2 \overline{f_2} + \alpha_i \overline{f_i} \dots\dots\dots(III-6)$$

la figure 2 donne une image de ces définitions.

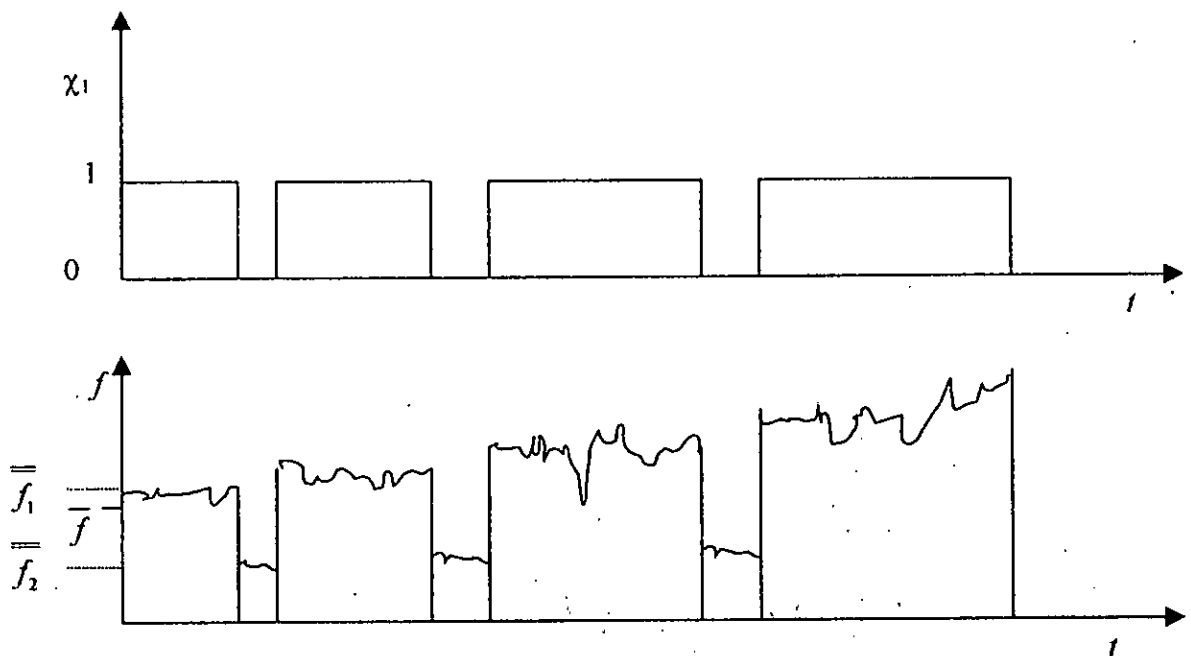


Fig :(III-2)- Définition des moyennes phasiques dans les cas d'un écoulement stationnaire.

❖ **Remarque :**

En turbulence, on est amené à calculer des moyennes phasiques, produit d'un type $\overline{\rho V_i}$ ou $\overline{\rho V_1 \otimes V_2}$ identique aux moyennes statistique utilisées au mécanique monophasique. Il est alors avantageux d'employer des moyennes massique (penderées /à la masse) notées :

$$\overline{V_1} = \frac{\overline{S_1 V_1}}{\overline{S_1}} ; \overline{V_1 \otimes V_2} = \frac{\overline{\delta_1 V_1 \otimes V_2}}{\overline{S_1}} \dots\dots\dots(III-7)$$

Et les fluctuations : V_1' définies par :

$$V_1 = \overline{V_1} + V_1' ; \overline{\rho_1 V_1'} = 0 \dots\dots\dots(III-8)$$

III-4- Hypothèses de base

- Les hypothèses concernant chaque phase fluide sont celle généralement admise pour les écoulements monophasiques.
- La phase interfaciale n'est pas la source d'une production d'entropie , ce qui revient à négliger tous les transferts moléculaires interfaciaux (pas de diffusion thermique ou massique surfacique).
- Il n'y a pas de masse superficielle attachée à l'interface.

III-5- Equations locales de conservation

La loi de conservation d'une grandeur volumétrique f s'écrit .

$$\frac{d}{dt} \int_v f dv = \int_\delta [T] n d\delta + \int_v Q dv \dots\dots\dots(III-9)$$

avec :

V : Volume matériel limité pour la surface δ .

$[T]$: Densité de flux de la quantité f .

Q : Source volumique de cette même quantité f .

$f, [T]$ et Q sont pas des grandeurs diphasique définies par (5) , d'où :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_v (f x_2 + f_2 x_2 + f_i \delta_i) \right\} = - \int_\delta ([T_1] x_1 + [T_2] x_2 + [T_i] S_i) n d\delta + \int_v (Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_i \delta_i) dv \dots\dots\dots(III-10)$$

On transformé les intégrales de surface et en utilisant la règle de LEIBNITZ volumique , et on remarquant que les distribution x_k sont quelconques , on obtenant les loi de conservation volumique locale usuelle.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}f_k = \text{div}[T_k] + Q_k \quad \text{pour } n=1,2 \dots\dots\dots(\text{III-11})$$

et sont équivalent surfacique

$$f(V_i - V_1) - n_1 + f_2(V_i - V_2) - n_2 + \frac{\partial f_i}{\partial t} + \text{div}f_i V_i = -[T_1]n_1 - [T_2]n_2 + \text{div}[T_i] + [T_i]n_2 H + Q_i \dots\dots\dots(\text{III-12})$$

On développant qu'une partie des termes de (III-12) , ou obtient deux autres formes des équations locales de conservation.

III-6- L'équation diphasique de conservation :

$$\left| \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(f_i x_1 + f_2 x_2) + \text{div}(f_1 V_1 x_1 + f_2 V_2 x_2) - \text{div}([T_1]x_1 + [T_2]x_2) - Q_1 x_1 - Q_2 x_2 = \\ & - \left[\frac{\partial f_i}{\partial t} + \text{div}f_i V_i - \text{div}[T_i] - [T_i]n_2 H - Q_i \right] \delta_i \end{aligned} \right. \dots\dots\dots(\text{III-13})$$

III-6-1- L'équation phasique de conservation :

$$\left| \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} f_k x_k + \text{div}f_k x_k V_k - \text{div}[T_k]x_k - Q_k x_k = (f_k (V_i - V) n_k + [T_k]n_k) \delta_i \end{aligned} \right. \dots\dots\dots(\text{III-14})$$

Dans les équations (III-13) et (III-14) , le second définit les sources interfaciales respectivement diphasique et phasique de la quantité f . Ces sources sont les quantité qui assurent le transfert entre phases et jouent un rôle essentiel dans le mécanique diphasique.

III-7- Moyenne statistiques

On peut moyenner statistiquement les équations précédentes puisque , pour une distribution , dérivation et sommation commutant (cela n'est pas vrai pour une fonction continue ou par morceaux non défini par tout).ON obtiendra alors , par exemple , pour une équation phasique locale :

$$\left| \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k \overline{f_k} + \text{div} \alpha_n \overline{f_k V_k} - \text{div} \alpha_k [T_k] - \alpha_k \overline{Q_k} = \alpha_i \overline{(f_k (v_i - v_k) n + [T_k] n_k)} \end{aligned} \right. \dots\dots\dots(\text{III-15})$$

III-8- Lois de conservations usuelles moyennes

III-8-1- Conservation de la masse

- Conservation géométrique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} - \alpha_i v_i n_k = 0 \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \alpha_i v_i n \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{array} \right. \dots\dots\dots(III-16)$$

- Equation phasique ,Phase (Phase K) :

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k \rho_k + \text{div} \alpha_k \rho_k v_k = \alpha_i \dot{m}_k \dots\dots\dots(III-17) \right.$$

- Equation diphasique (phase 1et 2)

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2) + \text{div} (\alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2) = \alpha_i \dot{m}_i \dots\dots\dots(III-18) \right.$$

Détermination des sources interfaciles

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_k = -\rho_k (v_k - v_i) n_k \\ \dot{m}_i = -\left(\frac{\delta \zeta \rho_i}{\delta t} + \text{div} \rho_i v_i \right) \\ \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_i \end{array} \right. \dots\dots\dots(III-19)$$

III-8-2- Conservation de la quantité de mouvement

- Equation phasique (phase 1et 2)

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k \tilde{v}_k) + \text{div} \alpha_k \rho_k [\tilde{v}_k \otimes \tilde{v}_k] = -\text{grad} \alpha_k \bar{P}_k + \text{div} \alpha_k ([\tau_k] + [\tau_k]) + \alpha_k \rho_k g + \alpha_i \dot{f}_k \dots\dots\dots(III-20) \right.$$

- Equation diphasique (phase 1 et 2)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \bar{\rho}_1 \tilde{v}_1 + \alpha_2 \bar{\rho}_2 \tilde{v}_2) + \text{div}((\alpha_1 \bar{\rho}_1 [\tilde{v}_1 \otimes \tilde{v}_1] + \\ & \alpha_2 \bar{\rho}_2 [\tilde{v}_2 \otimes \tilde{v}_2]) = -\text{grad}(\alpha_1 \bar{P}_1 + \alpha_2 \bar{P}_2 - \alpha_i \bar{\sigma}) + \text{div}(\alpha_1 ([\dot{\tau}_1] + [\tau_1]) + \alpha_2 ([\dot{\tau}_2] + [\tau_2]) + \alpha_i [\tau_i]) + \\ & (\alpha_1 \bar{\rho}_1 + \alpha_2 \bar{\rho}_2 + \alpha_i \bar{\rho}_i) g + (-\frac{\partial}{\partial t} \rho_i v_i - \text{div} \rho_i [v_i \otimes v_i]) \end{aligned}$$

.....(III-21)

□ Définition des sources interfaciales :

$$\begin{aligned} \dot{f}_k &= -\overline{\rho_k v_k (v_k - v_i) n_k} - \overline{\rho_k n_k} + [\tau_k] n_k \\ \dot{f}_i &= -\frac{\partial}{\partial t} \rho_i v_i - \text{div} \rho_i [v_i \otimes v_i] + \rho_i g + \text{grad} \sigma + \sigma n (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) + \text{div} [\tau_i] + [\tau_i] n (\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}) \end{aligned}$$

.....(III-22)

III-8-3- Conservation de l'énergie cinétique

□ Mouvement moyen + Turbulence : (équation physique)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k (\frac{1}{2} \bar{\rho}_k |\tilde{v}_k|^2 + \frac{1}{2} \rho_k \tilde{v}_k'^2 + \bar{\rho}_k \psi + \bar{\rho}_k \Pi_k - \bar{P}_k) + \text{div} \alpha_k (\frac{1}{2} \bar{\rho}_k \tilde{v}_k |v_k|^2 + \frac{1}{2} \bar{\rho}_k \tilde{v}_k \tilde{v}_k'^2 + \\ & \frac{1}{2} \bar{\rho}_k v_k' (v_k'^2) + \bar{\rho}_k v_k \pi_k + \bar{\rho}_k v_k \tilde{v}_k \tilde{\pi}_k + \rho_k v_k \pi_k + \bar{\rho}_k \tilde{v}_k \psi) = \\ & \text{div}(\tilde{v}_k \cdot [\tau_k'] + \tilde{v}_k [\tau_k] + \rho_k v_k' [\frac{\tau_k}{\rho_k}] - \alpha_k [\tau_k'] : [\text{Grad} v_k] - \\ & \alpha_k \bar{\rho}_k [\frac{\tau_k}{\rho_k}] : [\text{Grad} v_k'] - \alpha_i [\rho_k (v_k - v_i) n_k (\frac{1}{2} |v_k|^2 + \psi + \pi_k - \frac{P_k}{\rho_k}) - n_k (-P_k [I] + [\tau_k]) \cdot v_k \end{aligned}$$

.....(III-23)

□ Mouvement moyen (équation physique)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k (\frac{1}{2} \bar{\rho}_k |\tilde{v}_k|^2 + \bar{\rho}_k \psi + \bar{\rho}_k + \bar{\rho}_k \tilde{\pi}_k - \bar{P}_k) + \text{div} \alpha_k (\frac{1}{2} \rho_k \tilde{v}_k |v_k|^2 + \bar{\rho}_k \tilde{v}_k \tilde{\pi}_k + \bar{\rho}_k \tilde{v}_k \psi) = \\ & \text{div} \alpha_k (\tilde{v}_k [\tau_k'] + \tilde{v}_k [\tau_k]) - \alpha_k ([\tau'] + [\tau_k]) : [\text{Grad} \tilde{v}_k - \alpha_i \overline{[\rho_k (v_k - v_i) n_k (\frac{1}{2} |v_k|^2 + \bar{\rho}_k \tilde{\pi}_k - P_k + \psi)} \\ & + n_k (-P_k [I] + [\tau_k] + [\tau_k']) \cdot v_k \end{aligned}$$

.....(III-24)

CHAPITRE IV

Modèle homogène

INTRODUCTION

L'idée de base du modèle homogène est de considérer le mélange comme un tout. Cette schématisation va se traduire par une simplicité de la mise en équation d'une part et une perte d'information aux différentes interactions microscopiques à l'interface d'autre part.

Néanmoins c'est exactement cette simplicité du modèle homogène qui font lui très demandé dans le domaine de technologie. C'est le cas avec les analyses du système dynamique d'écoulement diphasique où l'information exigée est la réponse de tout le mélange et pas de chaque phase. En outre, des analyses détaillées sur le comportement local de chaque phase peuvent être effectuées avec moins de difficultés, si ces réponses de mélange sont connues.

L'aspect le plus important du modèle homogène est la réduction du nombre total de champs d'équations et le nombre d'équations constitutives dans la formulation en comparaison du modèle à deux-fluides. Le modèle homogène est exprimées en termes de quatre champs d'équations; la continuité de mélange, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie plus une équation de diffusion qui tient compte des changements de concentration.

Il peut voir donc, que le modèle de diffusion suit l'approche standard a employé la dynamique d'un mélange des gaz ou des liquides. On l'accepte généralement là que le modèle homogène est approprié à un écoulement du mélange où la dynamique de deux phases est couplés.

On notera que les équations que nous allons utiliser dans ce présent chapitre sont obtenues en appliquant les opérateurs de moyenne temporelle.

Avant de décrire les équations de conservation de ce modèle, on définit les différents paramètres du mélange.

IV-1- Les différents paramètres du mélange

❖ **La densité :**

$$\rho_m = \sum_k \alpha_k \rho_k ; k=1,2 \dots\dots\dots(IV-1)$$

❖ **La vitesse :**

$$v_m = \frac{\sum_k \alpha_k v_k \rho_k}{\sum_k \alpha_k \rho_k} ; k=1,2 \dots\dots\dots(IV-2)$$

❖ **la pression :**

$$P_m = \sum_k \alpha_k P_k ; k=1,2 \dots\dots\dots(IV-3)$$

❖ **L'énergie interne :**

$$u_m = \frac{\sum_k \alpha_k \rho_k u_k}{\sum_k \alpha_k \rho_k} ; k=1,2 \dots\dots\dots(IV-4)$$

❖ **L'enthalpie :**

$$i_m = u_m + \frac{P_m}{\rho_m} ; k=1,2 \dots\dots\dots(IV-5)$$

IV-2- Bilans des équations de conservation

pour le modèle homogène, une relation est proposée par ishii, qui traduit le bilan général d'équations du mélange

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t \rho_m \psi_m + \nabla \cdot (\rho_m \psi_m v_m) = -\nabla \cdot J_m + \rho_m \phi_m + I_m \dots\dots\dots(IV-6) \end{array} \right.$$

I_m : Source interfaciale ;

IV-2-1- Conservation de la masse :

D'après l'équation (IV-6) et les définitions de ρ_m et v_m , on obtient l'équation de conservation de la masse.

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t \rho_m + \nabla \cdot (\rho_m v_m) = 0 \dots\dots\dots(IV-7) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t \alpha_1 \rho_1 + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 v_m) = \Gamma_1 - \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 V_{1m}) \dots\dots\dots(IV-8) \end{array} \right.$$

la deuxième équation tient compte du changement de α_1

Γ_1 : source de masse de la phase 1 ;

IV-2-2- Conservation de la quantité de mouvement

Pour obtenir l'équation de conservation il suffit de prendre

$$\left| \partial_t \rho_m v_m + (\rho_m v_m v_m) = -\nabla P_m + \nabla(\bar{\tau} + \tau' + \tau^d) + \rho_m g + M_m \right. \dots\dots\dots (IV-9)$$

M_m : source de quantité de mouvement ;

$\bar{\tau}$: tenseur des forces de viscosité ;

τ^d : tenseur des forces de diffusion ;

τ' : tenseur des forces de turbulence ;

IV-2-3- Conservation de l'énergie

$$\left| \partial_t \rho_m i_m + \nabla \cdot (\rho_m i_m v_m) = -\nabla \cdot (\bar{q} + q' + q^d) + \frac{DP_m}{Dt} + \phi_m'' + \phi_m^\sigma + \phi_m^i \right. \dots\dots\dots (IV-10)$$

i_m : l'énergie du mélange (l'enthalpie);

\bar{q} : flux de conduction du mélange ;

q^d : flux de diffusion ;

q' : flux de turbulence

ϕ_m^σ : tension de surface du mélange ;

ϕ_m'' : tenseur de dissipation du mélange dû à l'effet de viscosité;

ϕ_m^i : l'énergie mécanique échangée à l'interface ;

Les équations de conservation de la masse , de la quantité de mouvement et de l'énergie, ne sont pas suffisantes pour décrire complètement le système. Il est nécessaire de fournir des équations constitutives supplémentaires qui spécifient les caractéristiques de la réponse de certain groupe de mélanges macroscopiques à deux phases.

IV-3- Les équations constitutives

Les équations constitutives décrivent les propriétés intrinsèque d'un milieu donné. Elles n'ont pas de forme générale car elles sont liées directement aux paramètres de l'écoulement tels que le taux de vide, la nature de l'interface les vitesses d'écoulement ect.. . en outre, elles sont souvent non linéaires et devront donc être écrites et simplifiées selon le problème traité.

Pour fermer l'ensemble des équations du modèle homogène, il est nécessaire de lui enjoinde des équations d'état qui permettront donc de définir les différents tenseurs, flux et termes sources y apparaissent .

L'axiome de continuité exige qu'une interface ne reste pas à un point pour un intervalle du temps fini

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

❖ **Source de quantité de mouvement interfaciale**

$$M_m = \nabla \cdot (\overline{\overline{2H_{21}\sigma\alpha_2}}) + M_m'' \dots\dots\dots(\text{IV-11})$$

$\overline{\overline{H_{21}}}$: la courbure moyenne

$\overline{\sigma}$: la tension interfaciale

M_m'' : force due au changement de la courbure moyenne

❖ **Tenseur des forces de viscosité $\overline{\tau}$**

Pour les écoulements à phase dispersée, on à une simple équation qui n'est pas valable que pour ce type d'écoulement.

$$\overline{\tau} = (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) \cdot (\nabla v_m + \nabla v_m) \dots\dots\dots(\text{IV-12})$$

μ_1 :viscosité dynamique de la phase 1 ;

μ_2 :viscosité dynamique de la phase 2 ;

❖ **Tenseur des forces de diffusion τ^D :**

$$\tau^D = -\frac{\alpha_2}{1-\alpha} \cdot \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_m} V_{2j} V_{2j} \dots\dots\dots (IV-13)$$

V_{2j} : la vitesse *drift* de la phase 2(c'est la vitesse par rapport au centre du volume) .

Pour les écoulements à phase dispersée, plusieurs travaux ont montré que cette vitesse est fonction de la vitesse V_∞ d'une particule (goutte ou bulle) dans un milieu infini et du taux de vide.

$$V_{2j} = (1-\alpha_2)^m V_\infty \dots\dots\dots (IV-14)$$

❖ **Tenseur des forces de turbulence τ^t**

$$\tau^t = 2\mu_m \rho_m L_s^2 \sqrt{2D_{,m}} : DmD_m \dots\dots\dots (IV-15)$$

❖ **Tenseur des forces de surface du mélange ϕ_m^σ**

$$\phi_m^\sigma = E_m^{II} - v_m M_m^{II} - 2H_{12} \sigma \frac{D\sigma_i}{Dt} + T_i \frac{d\sigma}{dt} \frac{D_i}{Dt} (1/L_s) \dots\dots\dots (IV-16)$$

E_m^{II} : énergie de mélange due au changement de la courbure moyenne

$1/L_s$:concentration ;

❖ **Tenseur de dissipation dû à l'effet de viscosité ϕ_m^μ**

$$\phi_m^\mu = \sum_k \alpha_k \overline{\tau_k} : \nabla v_k ; k=1,2 \dots\dots\dots (IV-17)$$

$\overline{\tau_k}$: tenseur des forces de viscosité de la phase k ;

❖ **Tenseur d'échange d'énergie mécanique à l'interface ϕ_m^i**

$$\phi_m^i = \sum_k [\Gamma_k v_k^2 / 2 + (\alpha_k \nabla P_k - M_k^D) V_{km}] \dots\dots\dots (IV-18)$$

P_k : la pression moyenne à la phase k

M_k^D :effet des forces de viscosité de la phase k (drag forces)

v_{km} :la vitesse de diffusion de la phase k

❖ Flux de chaleur \bar{q}

On considère que la température de l'interface est proche de celle de la phase dispersée : $\nabla T_i \approx 0$ et $T_d \approx T_i$, nous pouvons écrire :

$$\bar{q} = -k_c \nabla[\alpha_c(T_c - T_i)] \quad \dots\dots\dots(\text{IV-19})$$

cette relation est valable pour les écoulements à phase dispersée, où :

k_c : la conductivité thermique de la phase continue ;

T_c : la température de la phase continue ;

T_i : la température de l'interface ;

❖ Flux de chaleur de diffusion q^D :

$$q^D = -\alpha_1 \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_m} V_{2d} (i_2 - i_1) \quad \dots\dots\dots(\text{IV-20})$$

❖ La différence de pression entre les deux phases :

$$P_1 - P_2 = -2H_{12} \sigma \quad \dots\dots\dots(\text{IV-21})$$

❖ Les vitesses de diffusion

$$\sum_k \alpha_k \rho_k V_{km} = 0, \quad k=1,2 \quad \dots\dots\dots(\text{IV-22})$$

IV-4- Modèle homogène à phase dispersée sans changement de phase :

Supposons un mélange gaz liquide, ainsi que, le liquide qui est en dispersion, formé de fines gouttelettes sphériques de petits rayons qui restent en suspension dans une conduite cylindrique au cours de l'écoulement.

En négligeant les effets de la turbulence, le modèle sera constitué d'une équation de conservation de la masse du mélange, d'une équation de conservation de la masse de la phase dispersée et d'une équation de quantité de mouvement.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m v_m) &= 0 \\ \frac{\partial \alpha_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_d v_m) &= -\nabla \cdot \left(\frac{\alpha_d \rho_c}{\rho_m} V_{cd} \right) \dots\dots\dots (IV-S1) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m v_m) + \nabla \cdot (\rho v_m v_m) &= -\nabla P_m + \nabla (\bar{\tau} + \tau^D) + \rho g + M_m \end{aligned} \right.$$

α_d : taux de présence de la phase dispersée (la phase liquide)

α_c : taux de présence de la phase continue (la phase gazeuse)

IV-5- Les équations de fermeture

- Tenseur des forces de viscosité

$$\bar{\tau} = (\alpha_l \mu_l + \mu_g \alpha_g) (\nabla v_m + \nabla v_m) \dots\dots\dots (IV-23)$$

- Tenseur des forces de diffusion

$$\tau^D = \nabla \cdot \left(\frac{\alpha_d \rho_c \rho_d}{1 - \alpha_d} V_{cd} V_{cd} \right) \dots\dots\dots (IV-24)$$

Source de quantité de mouvement

$$M_m = \nabla (2H_{dc} v_{cd}) = P_2 - P_1 \dots\dots\dots (IV-25)$$

Dans le cas d'un écoulement à phase dispersée où la valeur de la courbure H_{12} est importante, la différence de pression entre les deux phases sera considérable.

- L'axiome de continuité

$$\alpha_G + \alpha_L = 1 \quad \dots\dots\dots(\text{IV-26})$$

- La vitesse de la phase dispersée

$$v_d = v_m + \left(1 - \frac{\alpha_d \rho_d}{\rho_m}\right) (1 - \alpha_d)^m V_w \quad \dots\dots\dots(\text{IV-27})$$

- La pression du mélange

$$P_m = \alpha_G P_G + \alpha_L P_L \quad \dots\dots\dots(\text{IV-28})$$

❖ **hypothèses**

Dans les modèles pratiques, il est clair que la compressibilité sera rétablie afin de rendre compte correctement de l'évaluation de la pression. Donc on suppose que la phase liquide est incompressible et on prend simplement $\rho_e = \text{cte}$ (ou ; $\rho_l = f(P_k)$).

On suppose que les gouttelettes du liquide ont des petits diamètres se qui traduit par une différence de pression négligeable entre les deux phases. Et par conséquent :

$$M_m = P_2 - P_1 \approx 0$$

Le gaz est incompressible. On se donne loi barotropique pour les gaz $\rho = f(p)$ que l'on considère comme parfait. pour simplifier, on considérera

une loi $\frac{p}{\rho_s^n} = \text{cte} \quad \dots\dots\dots(\text{IV-39})$

En l'absence de transfert de masse, l'exposant n est y compris entre 1 et δ : les modèles ne présentent pas une grande sensibilité à cette valeur, de sorte qu'on fera l'hypothèse d'écoulement isotherme (cette hypothèse suppose l'équilibre thermodynamique entre phases, la phase liquide imposant la température à la phase gazeuse, dont l'énergie interne est négligeable), ce qui conduit à l'équation:

$$\rho_l = \frac{p}{rT}$$

Donc les équations d'état sont comme suit:

- le liquide est supposé isovolume $\rho_l = cte$.
- Le gaz suit l'équation d'état des gaz parfaits $\rho_{gi} = \frac{P}{rT}$
- Afin de ne pas avoir à résoudre l'équation de transfert de l'énergie, on se place en écoulement isotherme ($T=cte$)

r : canotante des gaz parfaits

T : la température du gaz ;

P : c'est la pression du gaz ;

On peut donc montrer que :

$$P_m = (1 - \alpha_l)r.T \dots\dots\dots(IV-30)$$

On négligeant la viscosité du gaz ($\mu_G \approx 0$), l'équation (2) sera comme suit :

$$\bar{\tau} = \alpha_l \mu_l (\nabla v_m + \nabla v_m) \dots\dots\dots(IV-31)$$

On suppose que tous les phénomènes physiques se produisent selon une direction privilégiée, c'est à dire le long de la conduite.

IV-6- Equations du modèle

Finalement, le modèle homogène à phase dispersée sans changement de phase est décrit par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m v_m) = 0 \\ \frac{\partial \alpha_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_d v_m) = -\nabla \cdot \left(\frac{\alpha_d \rho_c V_{jd}}{\rho_m} \right) \dots\dots\dots(IV-S2) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m v_m) + \nabla \cdot (\rho v_m \cdot v_m) = -\nabla P_m + \nabla (\bar{\tau} + \tau^D) + \rho g \end{array} \right.$$

On complétant le système par les équations constitutives et les équation d'état, il sera fonction des seules inconnues :

$$\rho_m, v_m, \alpha_d$$

IV-6-1- Les équations constitutives et les équations d'état :

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\tau} &= \alpha_1 \mu_1 (\nabla v_m + \nabla v_m) \\ p_m &= (1 - \alpha_1) r T \\ v_d &= v_m + \left(1 - \frac{\alpha_d \rho_d}{\rho_m}\right) (1 - \alpha_d)^m V_\infty \dots\dots\dots (IV-S3) \\ \tau^D &= \nabla \cdot \left(\frac{\alpha_d \rho_c \rho_d}{1 - \alpha_d \rho_m} V_d V_d \right) \end{aligned} \right.$$

A ce système devront s'ajouter les conditions initiales et les conditions aux limites de la conduite.

projetant les équations du modèle sur l'axe de l'écoulement z

IV-6-2- L'équation de conservation de la masse du mélange

$$\left| \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_m v_m) = 0 \dots\dots\dots (IV-32) \right.$$

IV-6-3- L'équation de conservation de la masse de la phase dispersée

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_d v_d + \zeta) &= 0 \\ \zeta &= \alpha_d \left(1 - \frac{\alpha \rho_d}{\rho_m}\right) (1 - \alpha_d)^{m-1} V_\infty \dots\dots\dots (IV-S4) \\ v_d &= v_m + \left(1 - \frac{\alpha \rho_d}{\rho_m}\right) (1 - \alpha_d)^{m-1} V_\infty \end{aligned} \right.$$

IV-6-4- L'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m v_m) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_m v_m^2 + (1 - \alpha_d) r T + \rho_d \xi) &= \rho_m g \sin \theta + 2 \mu_1 \rho_1 \frac{\partial^2 v_m}{\partial z^2} \\ \xi &= \alpha_d \rho_d \left(1 - \frac{\alpha_d \rho_d}{\rho_m}\right) (1 - \alpha_d)^{2(m-1)} V_\infty^2 \dots\dots\dots (IV-S5) \end{aligned} \right.$$

CHAPITRE V

Modélisation numérique

V-1- Introduction :

La plus part des phénomènes physiques (dynamique des fluides, électricité, mécanique, transfert de chaleur) sont d'écrits par des équations aux dérivées partielles, dont les quelles l'inconnue est une fonction f dépendant de plusieurs variables d'espace ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$) et du temps t .

La méthode des différences finies, prise au sens strict, consiste à remplacer partout dans l'équation aux dérivées partielles et dans les conditions aux limites, les dérivées par des différences finies calculées sur un maillage donné.

Aujourd'hui, de nombreuses autres méthodes d'approximation sont apparues (éléments finis, volumes finis...) mais les schémas aux différences finies gardent une grande importance pratique en particulier par leur grande facilité de la mise en œuvre et leur efficacité numérique, surtout du point de vue du temps de calcul.

V-2- Description :**V-2-1- Description du domaine et maillage :**

Nous considérons le cas d'un domaine Ω donné (intervalles si $\Omega \subset \mathbb{R}$, rectangles si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, parallélépipèdes si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) dans lequel la fonction inconnue f dépendant des variables d'espace $x = (x_1, \dots, x_n)$ et du temps.

On découpe le domaine Ω par une famille T_h de mailles K_{hi} , $i=1, \dots, N_h$ et on cherche à déterminer la fonction f sur chaque maille de T_h .

❖ Expression synthétique des équations traitées :

La méthode qui est exposé concerne les systèmes aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. Elle a été largement employée pour résoudre des problèmes d'écoulement monophasiques transitoire 1D, 2D ou 3D.

❖ Propriété de conservation :

Une méthode aux différences finies possède la propriété de conservation si elle garantit le respect de relations de conservation intégrales du système différentiel.

V-3- Choix de la méthodes :

L'analyse de la littérature apporte des renseignements intéressantes et permet de dégager quelques idées pour orienter le travail.

Deux classes de méthodes paraissent bien adaptée :

- Les méthodes à deux pas de type LAX-WENDROFF et notamment celle développée par MAC CORMACK.
- Les méthodes de volumes finis avec maillages entrelacés.

- Dans ce travail, on présente uniquement les méthodes de MAC CORMACK.

Ces méthodes sont dérivées des méthodes à deux pas de LAX-WENDROFF et sont basées sur un développement en série de Taylor au second ordre.

V-4- Choix du schéma numérique :

Il faut maintenant choisir les équations liant les inconnues de façon à limiter au mieux l'équation aux dérivées partielles à résoudre et ses conditions aux limites .

Cette phase cruciale est naturellement très délicate ,on va essayer de présenter quelques schémas numériques dans le paragraphe suivant. :

V-5- Les différents schémas

V-5-1- Les schémas explicites

❖ Schéma explicité, centré en espace.

Considérons l'équation différentielle de la forme.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} - v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(V-1)$$

où u, v supposes constants par simple commodité de présentation.

S ; ΔZ et le pas d'espace et Δt le pas de temps ; le schéma explicite à 2 niveaux centré en espace s'écrit.

- Pour les dérivées en temps $\frac{\partial f}{\partial t}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} /_j^n = \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + o(\Delta t) \dots\dots\dots(V-2)$$

- Pour la dérive en espace $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} /_j^n = \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} + o(\Delta x) \dots\dots\dots(V-3)$$

- Pour la deuxième dérive en espace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_j^n = \frac{f_{j+1}^n + 2f_j^n + f_{j-1}^n}{\Delta x^2} + o(\Delta x)^2 \dots\dots\dots(V-4)$$

finalement on peut écrire

$$f_j^{n+1} = f_j^n - u \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (f_{j+1}^n + 2f_j^n + f_{j-1}^n) \dots\dots\dots(V-5)$$

❖ **Schéma explicite, décentré en espace**

- pour la dérivée en temps $\frac{\partial f}{\partial t}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} /_j^n = \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + o(\Delta t) \dots\dots\dots(V-6)$$

pour le dérivée en espace $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} /_j^n = \begin{cases} \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{\Delta x} + o(\Delta x) & \text{Si } U > 0 \\ \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} + o(\Delta x) & \text{Si } U < 0 \end{cases} \dots\dots\dots(V-S1)$$

- pour la deuxième dérivée en espace $\frac{\partial f}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_j^n = \frac{f_{i+1}^n - 2f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{\Delta x^2} + 0(\Delta x)^2 \dots\dots\dots(V-7)$$

donc l'équation (x) s'écrit sous la forme.

$$f_j^{n+1} = f_j^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) \dots\dots\dots(V-8)$$

V-5-2- Schémas implicites

V-5-2-1-La méthode des directions alternées

Pour éviter les contraintes imposées par les conditions de stabilisés des schémas explicites, on a intérêt, la plupart du temps, à utiliser des schémas implicite. Toute fois, ceux-ci coûtent cher. C'est ce qui explique le succès remporté par la méthode des directions alternées. (Alternating Direction Implicite Méthode, ou ADI) dans laquelle, on limite habituellement le coût des résolutions.

Il s'agit d'une méthode du type prédicteur-correcteur.

Etape prédicteur :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} /_j^{n+1/2} &= \frac{f_j^{n+1/2} - f_j^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} /_j^{n+1/2} &= \frac{f_{j+1}^{n+1/2} - f_{j-1}^{n+1/2}}{4\Delta x} \dots\dots\dots(V-S2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_j^{n+1/2} &= \frac{f_{j+1}^{n+1/2} - 2f_j^{n+1/2} + f_{j-1}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

donc à l'étape prédicteur l'équation différentielle s'écrit comme suit :

$$f_{i,j}^{n+1/2} = f_j^n - u \frac{\Delta t}{4\Delta x} (f_{j+1}^{n+1/2} - f_{j-1}^{n+1/2}) + v \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} (f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2} + f_{j-1}^{n+1/2}) \dots\dots\dots(V-9)$$

Etape correcteur :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} /_j^{n+1} &= \frac{f_j^{n+1} - f_j^{n+1/2}}{\Delta t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} /_j^{n+1} &= \frac{f_{j+1}^{n+1/2} - f_{j-1}^{n+1/2}}{4\Delta x} \dots\dots\dots(V-S3) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_j^{n+1} &= \frac{f_{j+1}^{n+1/2} - 2f_j^{n+1/2} + f_{j-1}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

on obtiendra :

$$f_j^{n+1} = f_j^n - u \frac{\Delta t}{4\Delta x} (f_{j+1}^{n+1/2} - f_{j-1}^{n+1/2}) + v \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (f_{j+1}^{n+1/2} - 2f_j^{n+1/2} + f_{j-1}^{n+1/2}) \dots\dots(V-10)$$

on trouvera donc :

$$f_j^{n+1} = f_j^{n+1/2} - u \frac{\Delta t}{4\Delta x} (f_{j+1}^{n+1/2} - f_{j-1}^{n+1/2}) + v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (f_{j+1}^{n+1/2} - 2f_j^{n+1/2} + f_{j-1}^{n+1/2}) \dots\dots(V-11)$$

V-5-2-2- Schéma de « saute-mouton » (S-M).

Donnons un schéma à trois niveaux, explicité et du second ordre. Il est obtenu très simplement en discrétisant les dérivées partielles $\frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$ en différences centrés au point p_j^n .

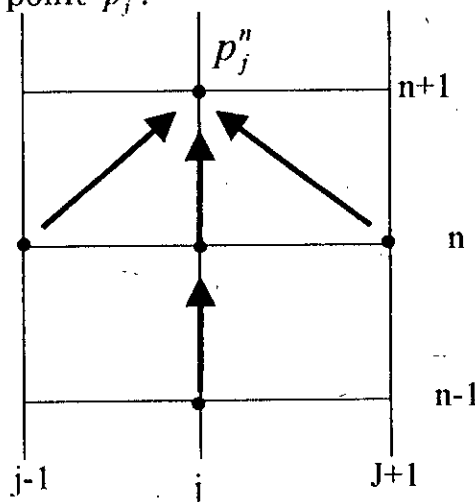


Fig : (V-1)-Schéma de saute-mouton

V-5-2-3- Schéma de LAX WANDEROFF (L.M) à deux pas :

Il s'agit d'une méthode de type prédicteur correcteur, dans une telle méthode, l'étape ne « pas ») intermédiaire (le « prédicteur ») n'est en général

qu'une étape de calcul, qui peut ne pas avoir de signification directe, et que l'on efface de la mémoire lorsqu'on augmente ensuite (n) d'une unité : d'indice (n+1/2) est à prendre comme une notation.

Ceci en général, Mais ceci il est effectivement intéressant d'introduire le maillage intermédiaire, i.e les points de coordonnées (j+1/2) Δx, (n+1/2)Δt.

La première étape, n'est autre que le schéma de LAX. La seconde étape, est alors le schéma de saute-mouton.

Supposons une équation de la forme $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f^2}{2} \right) = 0$

Où x (variable d'espace) et t (le temps) sont des variables indépendantes, et où f(x, t) représente une fonction inconnue :

On peut avoir donc :

On commence par calculer, pour tous les indices, possibles, les quantités.

$$f_{j+1/2}^{(n+1/2)} = \frac{1}{2} [f_j^n + f_{j+1}^n] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\left(\frac{f^2}{2} \right)_{j+1}^n - \left(\frac{f^2}{2} \right)_j^n \right] \dots\dots\dots(V-12)$$

Puis en déduit, pour tous les j concernés.

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{f^2}{2} \right)_{j+1/2}^{n+1/2} - \left(\frac{f^2}{2} \right)_{j-1/2}^{n+1/2} \right] \dots\dots\dots(V-13)$$

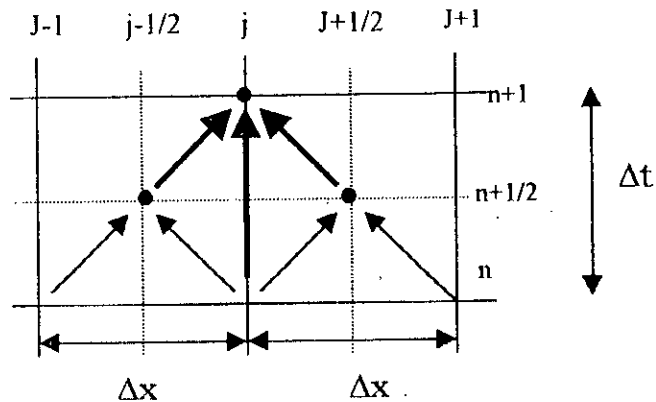


Fig : (V-2)- Schéma de LAX

Grille de discrétisation (traits continus), et grille intermédiaire (traits discontinus) ; premier pas (flèches minces) et deuxième pas (flèches grasses).

L'objet de cette partie est la résolution du système S_y obtenu au chapitre précédent, dans ce but on va utiliser une méthode à schéma explicite de centre en espace, cette méthode est déduit les méthodes à deux pas de LAX-WERDEROFF et elle est basée sur un développement en série de TAYLOR au second ordre (c'est une version de type « prédicteur - correcteur »).

Cette méthode est simple de mise en œuvre.

V-6- Description de la méthode :

Il s'agit de déterminer, partout $(x, t) \in \Omega$, le vecteur (ρ_m, v_m, α_d) qui est la solution du système d'équations.

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho_m \\ \alpha_d \\ \rho_m v_m \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho_m v_m \\ \alpha_d v_m + \zeta \\ \rho_m v_m^2 + P + \rho_d \xi - 2\mu_d \rho_d \frac{\partial v_m}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_m g \end{bmatrix} \dots\dots\dots(V-14) \end{array} \right.$$

Approximation de dérivées.

Soit une fonction $f(x,t)$, Δt étant le pas de temps et Δx le pas d'espace, on peut faire des approximations, on utilisant un schéma explicité décentré en espace, sur les dérivées des équations du modèle.

- pour la dérivée du temps $\frac{\partial f}{\partial t}$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i^N = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + o(\Delta t) \dots\dots\dots(V-15) \right.$$

c'est un schéma décentré à deux points.

- Pour la dérivée en espace $\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^n = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} + o(\Delta x) \dots\dots\dots(V-16)$$

- Pour la deuxième dérivée en espace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i^n = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x)^2 \dots\dots\dots(V-17)$$

Pour simplifier d'écrire en prend comme variables généralisées :

$$W = \begin{pmatrix} \rho_m \\ \alpha_d \\ \rho_m v_m \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho_m v_m \\ \alpha_d v_m + \zeta \\ \rho_m v_m^2 + P + \rho_d \zeta - 2\mu_d \rho_d \frac{\partial v_n}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_m g \end{pmatrix}$$

La résolution du système SVI, pour les conditions initiales et aux limites choisies, permet d'obtenir, pour chaque pas de temps et en chaque nœuds du maillage, la valeur de la variable généralise W. la détermination les inconnues principales pour les points intérieurs au domaine (i=2,n-1), se fait par simple calcul algébrique à partir de la valeur de la variable généralisée et de loi de fermeture du modèle. Aux limites du domaine, (i=1 et i=N) c'est moins simple.

La méthode de discretisation explicite appliquée au système donne l'expression aux différences finies suivantes :

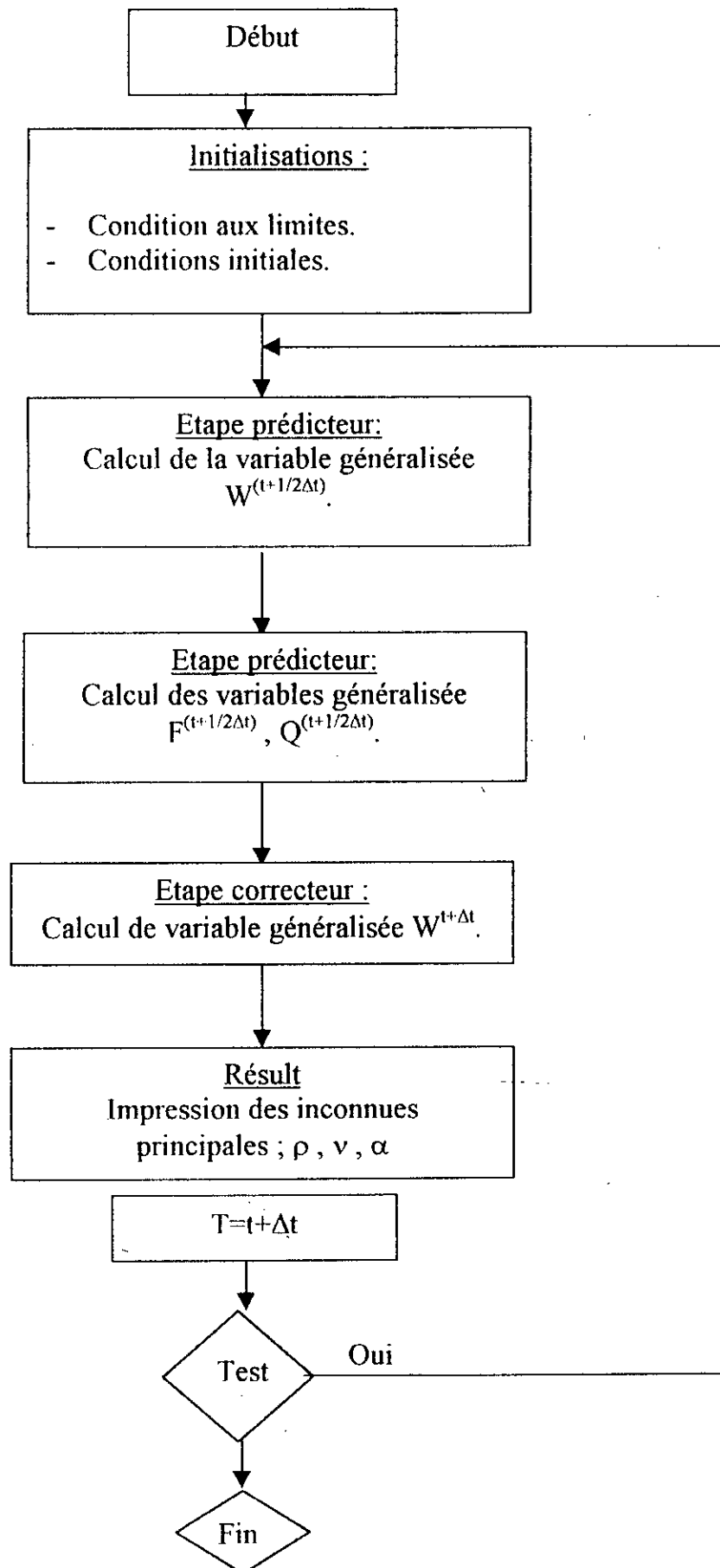
Etape prédicteur ;

$$\begin{aligned}
 (\rho_m)_i^* &= (\rho_m)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left((\rho_m v_m)_{i+1}^n - (\rho_m v_m)_i^n \right) \\
 (\alpha_d)_i^* &= (\alpha_d)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left((\alpha_d v_m)_{i+1}^n - (\alpha_d v_m)_i^n \right) \dots \dots \dots (V-S4) \\
 (\rho_m v_m)_i^* &= (\rho_m v_m)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left\{ (\rho_m v_m^2 + P + \rho_d S)_{i+1}^n - (\rho_m v_m^2 + P + \xi)_i^n \right\} \\
 &+ \Delta t g (\rho_m)_i^n + 2 \mu_d \rho_d \frac{\Delta t}{\Delta L^2} \left\{ (v_m)_{i+1}^n - 2(v_m)_i^n + (v_m)_{i-1}^n \right\}
 \end{aligned}$$

Etape correcteur

$$\begin{aligned}
 (\rho_m)_i^{n+1} &= 0,5 \left\{ (\rho_m)_i^* + (\rho_m)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho_m v_m)_i^* - (\rho_m v_m)_{i-1}^* \right) \right\} \\
 &\dots \dots \dots (V-S5) \\
 (\alpha_d)_i^{n+1} &= 0,5 \left\{ (\alpha_d)_i^* + (\alpha_d)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left((\alpha_d v_d)_{i+1}^* - (\alpha_d v_d)_i^* \right) \right\} \\
 (\rho_m v_m)_i^{n+1} &= 0,5 \left\{ (\rho_m v_m)_i^* + (\rho_m v_m)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left((\rho_m v_m^2 + P + \rho_d S)_i^* - (\rho_m v_m^2 + P + \rho_d S)_{i-1}^* \right) \right\} \\
 &+ \Delta t g (\rho_m)_i^* + 2 \mu_d \rho_d \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \left((v_m)_{i+1}^* - 2(v_m)_i^* + (v_m)_{i-1}^* \right)
 \end{aligned}$$

ORGANIGRAMME DE RESOLUTION



Afin de valider la méthode numérique, nous avons effectué une série de tests numériques.

Nous avons choisi, pour effectuer ces tests, une conduite ayant une longueur de cent mètres et un rayon d'un mètre.

Les conditions initiales et aux limites pour ces tests ont été choisies de telle sorte que la solution analytique du système soit de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_m = \frac{1}{at + b} \\ V_m = \frac{az + 1}{at + b} \\ \alpha_d = a t + b \end{array} \right. \quad a, b = \text{cte}$$

en absence des résultats théoriques sur la stabilité du schéma, nous ne disposons donc pas d'argument a priori qui nous permet de choisir de façon optimale les pas de discrétisation Δt et Δz ; c'est pourquoi, nous avons effectué des tests en faisant varier essentiellement le pas de temps Δt sur l'intervalle (0,0001 ; 0,1) et le pas d'espace Δz sur l'intervalle [0,1 ; 5]

Test :

Nous choisissons :

$$\Delta t = 0,0001$$

et nous faisons varier le pas d'espace Δz

$$\Delta t = 0,0001 \quad \text{et} \quad \Delta z = 0,2 \text{ m (fig. 1)}$$

$$\Delta t = 0,0001 \quad \text{et} \quad \Delta z = 0,25 \text{ m (fig. 2)}$$

$$\Delta t = 0,0001 \quad \text{et} \quad \Delta z = 0,3 \text{ m (fig. 3)}$$

$$\Delta t = 0,0001 \quad \text{et} \quad \Delta z = 0,33 \text{ m (fig. 4)}$$

$$\Delta t = 0,0001 \quad \text{et} \quad \Delta z = 0,4 \text{ m (fig. 5)}$$

Commentaire

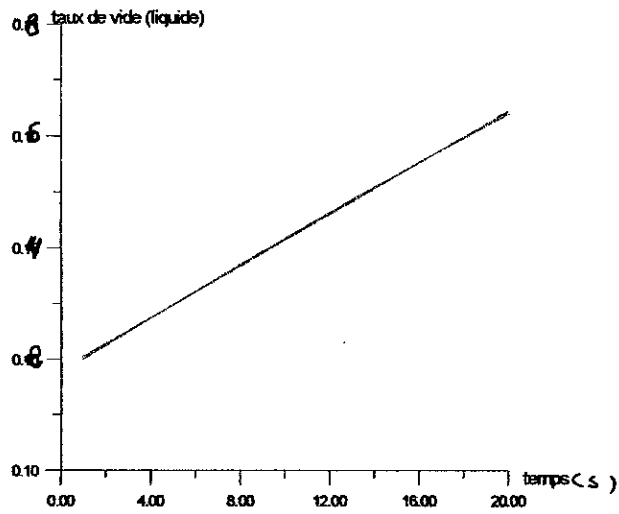
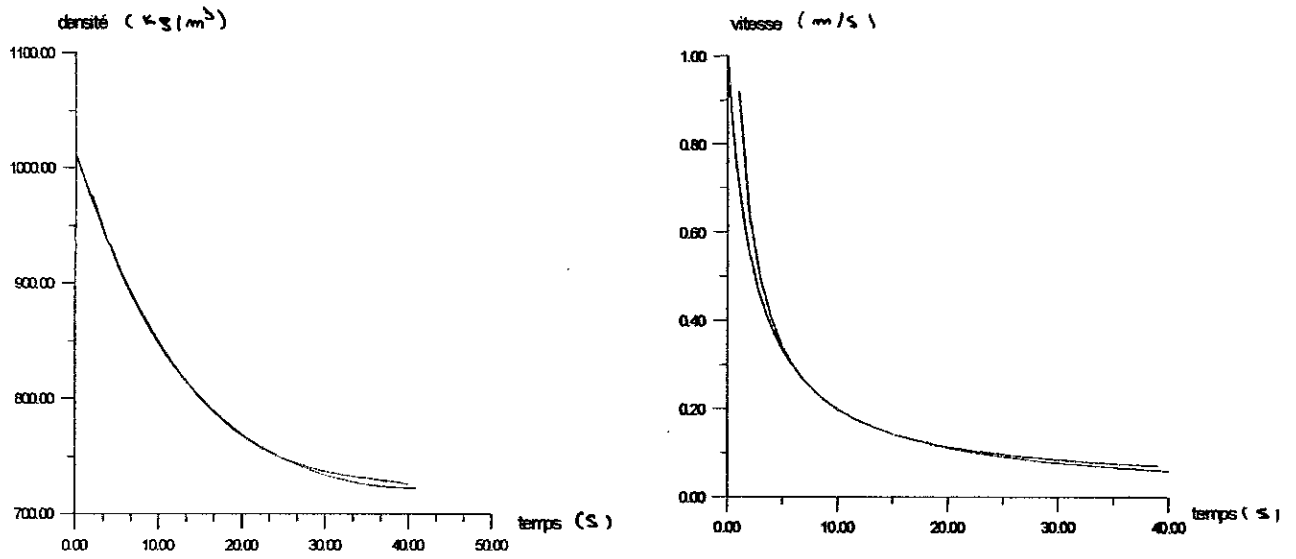
Nous remarquons que pour Δt fixé ($\Delta t=0.0001$) nous avons une bonne concordance des courbes numériques et analytiques, les résultats sont probants jusqu'à $\Delta z = 0.3$ (fig-3-) où nous commençons à perdre en précision, en revanche à partir de $\Delta z=0.4$ (fig-5-) des instabilités numériques apparaissent.

Remarque :

les unités des graphiques sont les suivantes :

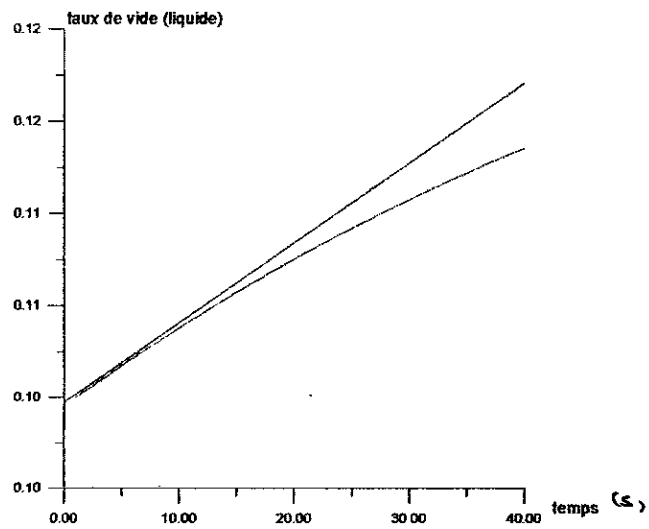
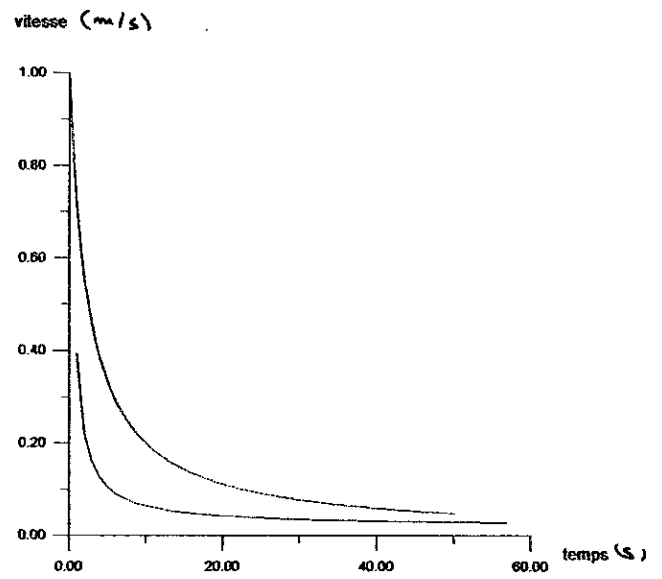
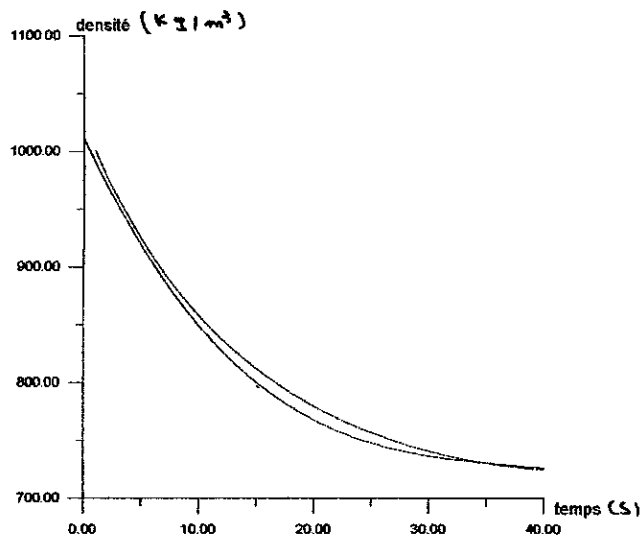
- ❖ V : la vitesse (m/s)
- ❖ t : le temps (s)
- ❖ ρ : la densité (Kg/m³)
- ❖ taux de vide : (Sans unité)

57



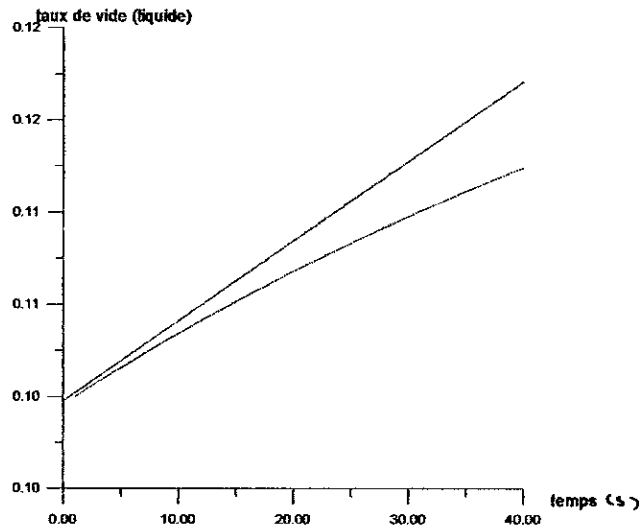
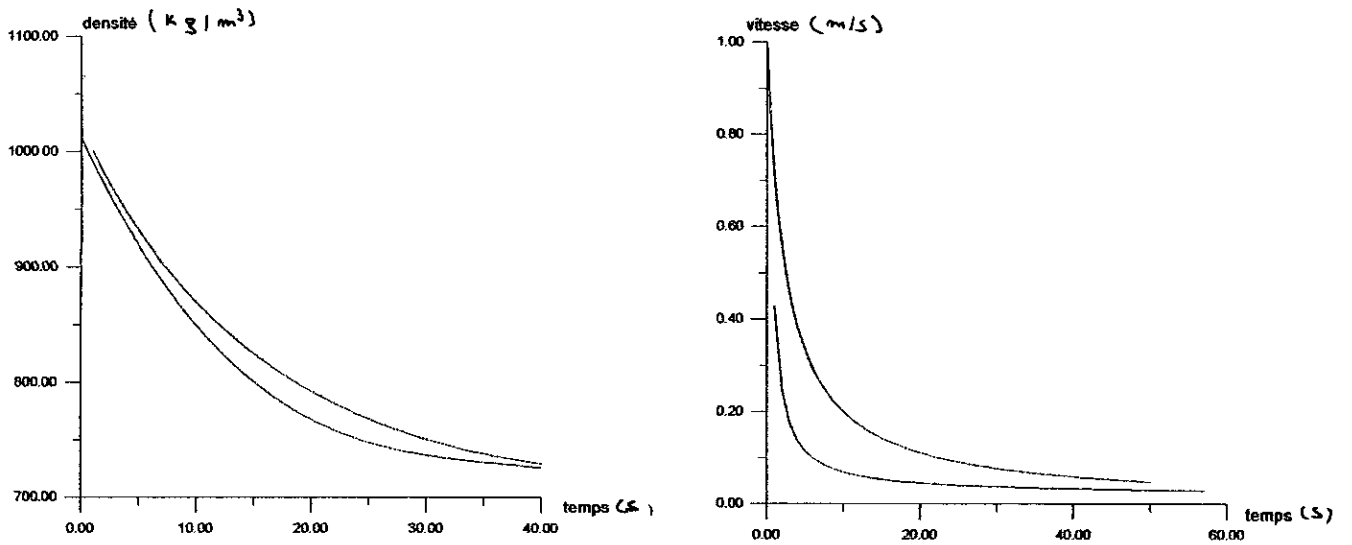
— Résultats numériques
 - - - Résultats analytiques

Fig : (V-1) test $\Delta t= 0,0001$, $\Delta z= 0,2$



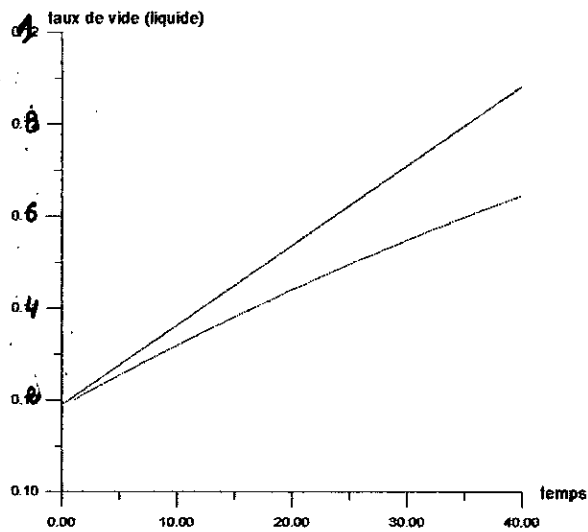
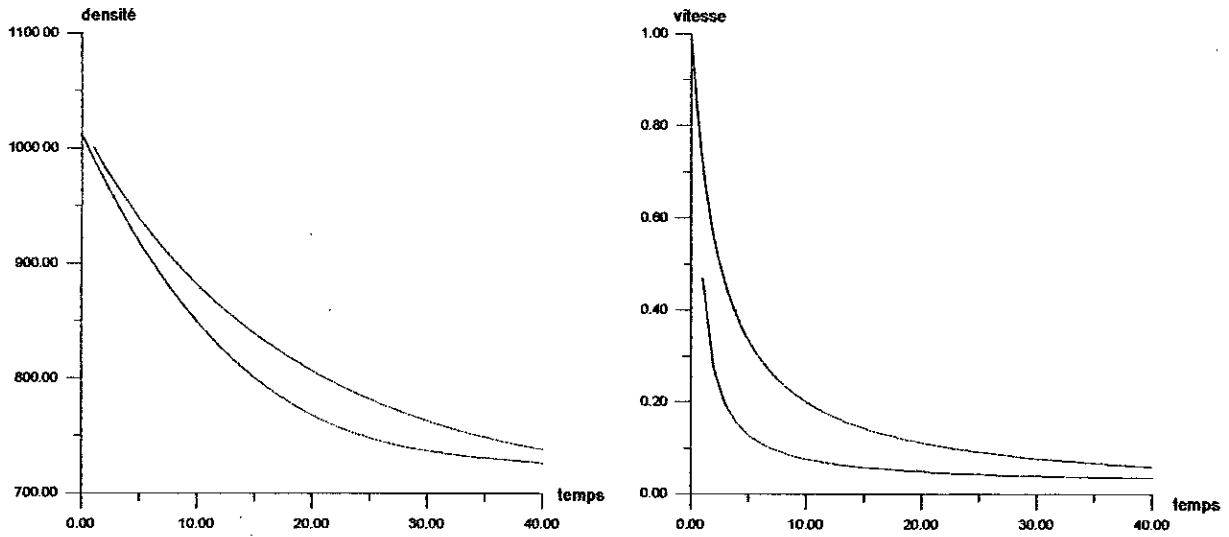
— Résultats numériques
 — Résultats analytiques

Fig : (V-2) test $\Delta t= 0,0001$, $\Delta z= 0,25$



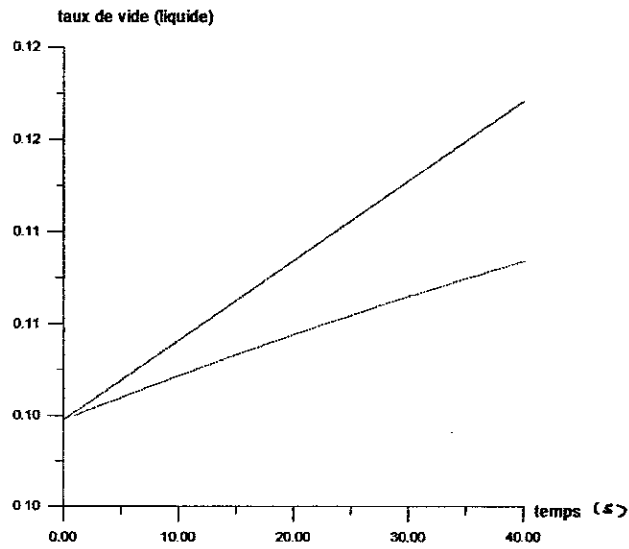
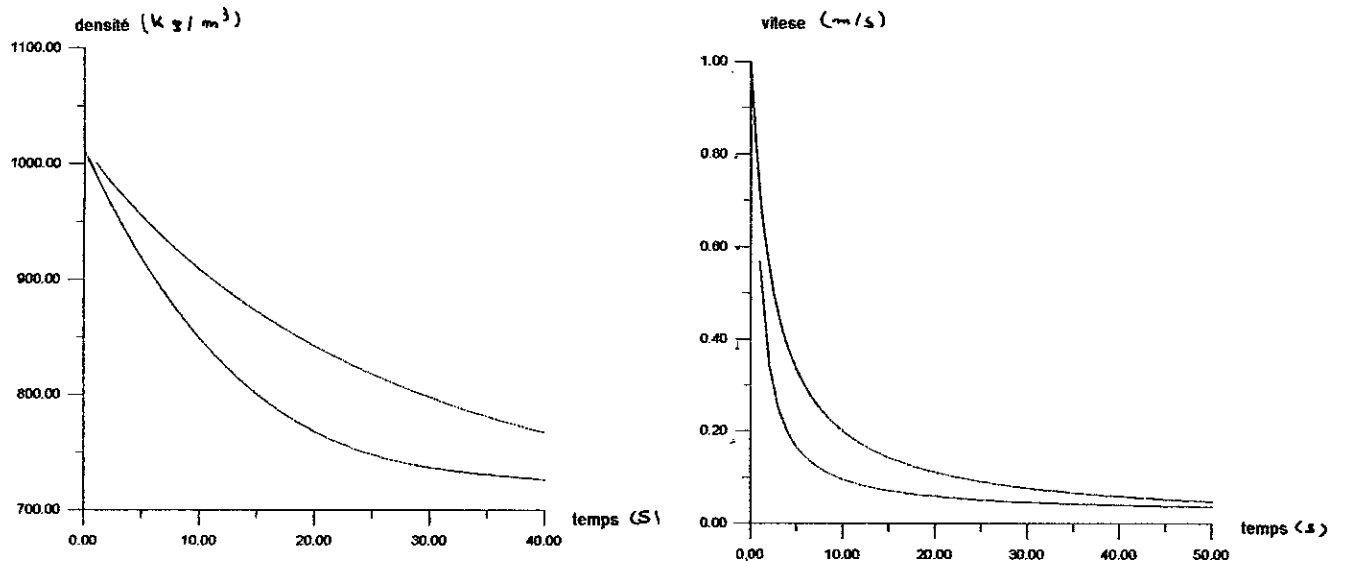
—— Résultats numériques
 ——— Résultats analytiques

Fig : (V-3) test $\Delta t= 0,0001$, $\Delta z= 0,3$



— Résultats numériques
 - - - Résultats analytiques

Fig : (V-4) test $\Delta t= 0,0001$, $\Delta z= 0,35$



— Résultats numériques
 — Résultats analytiques

Fig : (V-5) test $\Delta t= 0,0001$, $\Delta z= 0,4$



Conclusion générale

CONCLUSION

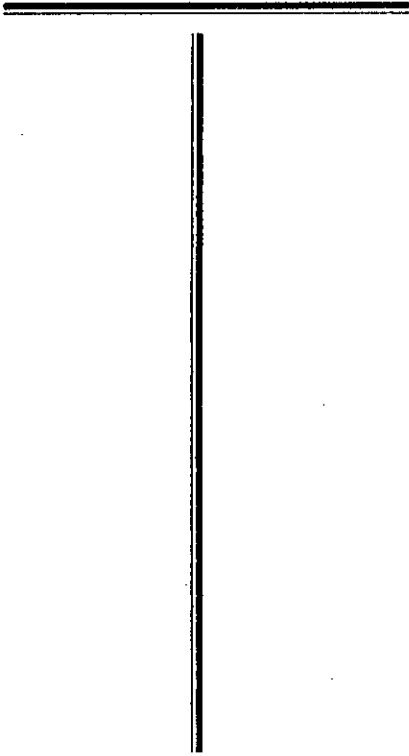
L'objet de ce travail a été double, d'une part établir un modèle théorique qui décrit les écoulements diphasiques dans les conduites et d'autre part, mettre au point une méthode numérique capable de résoudre ce modèle.

Sur le plan de la modélisation, le modèle théorique d'un écoulement diphasique à phase dispersée dans une conduite qu'on a proposé est basé sur l'hypothèse que le mélange (gaz-liquide) est continu (les propriétés du mélange sont des quantités définies par tous), sur cette schématisation que nous avons pu faire la moyenne des différents paramètres dans les équations de conservation.

Sur le plan numérique, Les tests effectués sur le modèle numérique montrent qu'il est apte à représenter le comportement du mélange pour des plage d'intervalle de Δt et Δz où notre schéma est stable .

Il reste, dans ce cas de faire une analyse théorique sur le schéma numérique : étude de la stabilité, détermination des paramètres de discrétisation optimaux.

Enfin, il est clair que pour mieux apprécier la validité du modèle théorique et les performances de la méthode numérique adoptée, une comparaison avec les résultats expérimentaux doit être menées.



Annexe

Conservation de la masse

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{Kq} R_{Kq}) + \frac{\partial}{\partial X}(\rho_{Kq} R_{Kq} U_{Kq}) = 0 \quad (2.1.1)$$

Conservation de la quantité de mouvement.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{Kq} R_{Kq} u_{Kq}) + \frac{\partial}{\partial X}(\rho_{Kq} R_{Kq} U_{Kq}^2) + \frac{\partial}{\partial X}(R_{Kq} P_{Kq}) = T_{Kq}^w + T_{Kq}^i - \prod_{Kq}^i - \rho_{Kq} r_{Kq} g \cdot \sin \theta \quad (2.1.2)$$

Conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_{Kq} R_{Kq} \left(h_{Kq} + \frac{U_{Kq}^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[\rho_{Kq} R_{Kq} \left(h_{Kq} + \frac{U_{Kq}^2}{2} \right) U_{Kq} \right] - \frac{\partial}{\partial X} (R_{Kq} P_{Kq}) = \\ - Q_{Kq}^w - Q_{Kq}^i - W_{Kq}^i - \rho_{Kq} R_{Kq} U_{Kq} g \cdot \sin \theta \dots \dots \dots (2.1.3) \end{aligned}$$

Conditions aux interfaces

$$\sum (T_{Kq}^i - \prod_{Kq}^i) = 0 \quad (2.1.4) \quad \sum_{K=L,G} (Q_{Kq}^i + W_{Kq}^i) = 0 \quad (2.1.5)$$

Condition géométrique

$$\sum_{K=L,G} R_{Kq} = 1 \quad (2.1.6)$$

Figure 2.1. Equations de conservation des grandeurs locales instantanées écrites pour les configurations de base (q=S,D) et pour chaque phase (K=L, G).

a. conservation de la masse pour les configurations S et D.

Configuration de la masse pour les configurations Set D

$$\frac{\partial}{\partial t} [\beta \rho_k^s R_k^s] + \frac{\partial}{\partial x} [\beta \rho_k^s R_k^s U_k^s] = \frac{\dot{\phi}_k}{\lambda} - \frac{\ddot{\phi}_k}{\lambda''} \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1-\beta) \rho_k^D R_k^D] + \frac{\partial}{\partial x} [(1-\beta) \rho_k^D R_k^D U_k^D] = \frac{\dot{\phi}_k}{\lambda''} - \frac{\dot{\phi}_k}{\lambda} \quad (2.4.2)$$

b. Conservation de la quantité de mouvement pour les configurations S et D.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\rho_k^s R_k^s U_k^s] + \frac{\partial}{\partial x} [\beta \rho_k^s R_k^s U_k^s] + \beta \left[R_k^s \frac{\partial}{\partial x} P_k^s + (P_k^s - P^{is}) \frac{\partial}{\partial x} R_k^s \right] \\ & - \beta [T_k^{ws} + T_k^{is} + \Delta [\Pi_k^{is} - \rho_k^s R_k^s g \cdot \sin \theta]] = \\ & \frac{1}{\lambda} [\dot{\phi}_k U_k - R_k (P_k' - P^{is}) + R_k^s (P_k^s - P^{is})] - \frac{1}{\lambda''} [\dot{\phi}_k U_k - R_k (P_k'' - P^{is}) + R_k^s (P_k^s - P^{is})] \dots (2.4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [(1-\beta) \rho_k^D R_k^D U_k^D] + \frac{\partial}{\partial x} [(1-\beta) \rho_k^D R_k^D U_k^D] + (1-\beta) \left[R_k^D \frac{\partial}{\partial x} P_k^D + (P_k^D - P^{id}) \frac{\partial}{\partial x} R_k^D \right] \\ & - (1-\beta) [T_k^{wD} + T_k^{id} + \Delta [\Pi_k^{id} - \rho_k^D R_k^D g \cdot \sin \theta]] = \\ & \frac{1}{\lambda} [\dot{\phi}_k U_k - R_k (P_k' - P^{id}) + R_k^D (P_k^D - P^{id})] - \frac{1}{\lambda''} [\dot{\phi}_k U_k - R_k (P_k'' - P^{id}) + R_k^D (P_k^D - P^{id})] \dots (2.4.4) \end{aligned}$$

c. Définitions des flux de masse en bouts.

$$\dot{\phi}_k = \rho_k R_k (V' - U_k) \quad (2.4.5) \quad \dot{\phi}_k'' = \rho_k R_k (V'' - U_k) \quad (2.4.6)$$

d. Définition de λ et de V

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{V'}{\lambda} - \frac{V''}{\lambda''} \quad (2.4.7) \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''} \quad (2.4.8)$$

e. Conditions de raccordement pour la quantité de mouvement.

$$\sum_{K=L,G} (T_{Kq}^{is} - \Delta \Pi_k^{is}) = 0 \quad (2.4.9)$$

$$\sum_{K=L,G} (T_{Kq}^{id} - \Delta \Pi_k^{id}) = 0 \quad (2.4.10)$$

f. Relations entre les fractions de gaz et de liquide.

$$\sum_{K=L,G} R_k^S = 1 \quad (2.4.11)$$

$$\sum_{K=L,G} R_k^D = 1 \quad (2.4.12)$$

$$\sum_{K=L,G} R_k^I = 1 \quad (2.4.13)$$

$$\sum_{K=L,G} R_k^II = 1 \quad (2.4.14)$$



Bibliographie

Références Bibliographiques

[1] M. Ishii , Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow , Edition Eyrolles , 1975 .

[2] Wallis , One-dimensional two-phase flow , 1969 .

[3] Bernard Theron , Ecoulement diphasiques instationnaires en conduite horizontale , thèse de doctorat en mécanique des fluides , 1989.

[4] D. Euvrard , résolution numérique des équations aux dérivées partielles , Edition Masson , 1994.

[5] J. Fabre, Ecoulements diphasiques , cours de mécanique des fluides de I.M.F.T. Toulouse , France . *Carne, 1985.*

[6] H.A.R.Boutekdjiret et M. Haboussi , Une approche mathématique et numérique pour l'étude des écoulements diphasiques dans les conduites , P.F.E , E.N.P , 1992.

[7] G. Chavent , Approximation des équations aux dérivées partielles , Méthodes aux différences finies , technique de l'ingénieur .

[8] J. Bonnin et J.M.Fitermann , Configuration d'écoulement gaz-liquide, La houille blanche , N°5 , 1978 .

[9] I. Kataoka et al , Basic equations in gaz-liquid two-phase flow , I.J.M.F , Vol.15 , N°5 , pp 843-855 , 1989 .

[10] J.M.Delhye , Ecoulement diphasique, cours à l'école des arts et manufacture (E.C.P.) , (1991-1992) .

[11] J. M. Fitremann , Ecoulements diphasiques, lois générales, Technique de l'ingénieur A 720 , Mécanique des fluides .

(12) B. Bouzemlal, C. Bentalha, Etude d'un écoulement diphasique, P.F.E, 1999, E.N.P.

(13) K.Akika, Fortas, Modélisation des écoulements diphasiques dans une conduite cylindrique, P.F.E, 1997, E.N.P.