

République Algérienne Démocratique et Populaire

*Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique*

Ecole Nationale Polytechnique

Département : Hydraulique

Mémoire de projet de Fin d'études

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en hydraulique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

THEME

*Résolution d'un écoulement autour d'une poche
d'air dans une conduite verticale en mouvement
ascendant*

Proposé par :

R. Messahli

Réalisé par :

K. Bensid

K. Laouni

Promotion 2000

République Algérienne Démocratique et Populaire

*Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique*

Ecole Nationale Polytechnique

Département : Hydraulique

Mémoire de projet de Fin d'études

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en hydraulique

المعرض الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique
THEME

*Résolution d'un écoulement autour d'une poche
d'air dans une conduite verticale en mouvement
ascendant*

Proposé par :

R. Messahli

Réalisé par :

K. Bensid
K. Laoui

Promotion 2000

REMERCIEMENT



Nous tenons à témoigner nos vifs remerciements et notre profonde gratitude à notre promoteur monsieur R. Messahli, pour nous avoir constamment guidé au cours de la réalisation de ce mémoire pour ses conseils, ses critiques et sa disponibilité au long de ces mois.

Nous remercions aussi les membres de jury, pour l'honneur qu'ils nous font de juger ce travail.

Nos remerciements, s'adressent également au personnels de la bibliothèque de l'ENP.

Dédicaces :

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je tiens à dédier ce mémoire, comme fruit de toutes mes études :

A celle qui a consacré sa vie pour mon éducation et ma réussite, pour son sacrifice, ma très chère mère.

A mes chères frères, mes beaux frères, mes sœurs, mes belles sœurs, mes neveux et mes nièces pour leurs encouragements

A tous mes amis de Ben Badis, de l'ENP et de la RUBA

Kouider

Dédicaces :

Je tiens à dédié ce mémoire, comme fruit de toutes mes études :

A ceux qui ont consacré leur vie pour mon éducation et ma réussite, pour
leurs sacrifices, mes très chères parents.

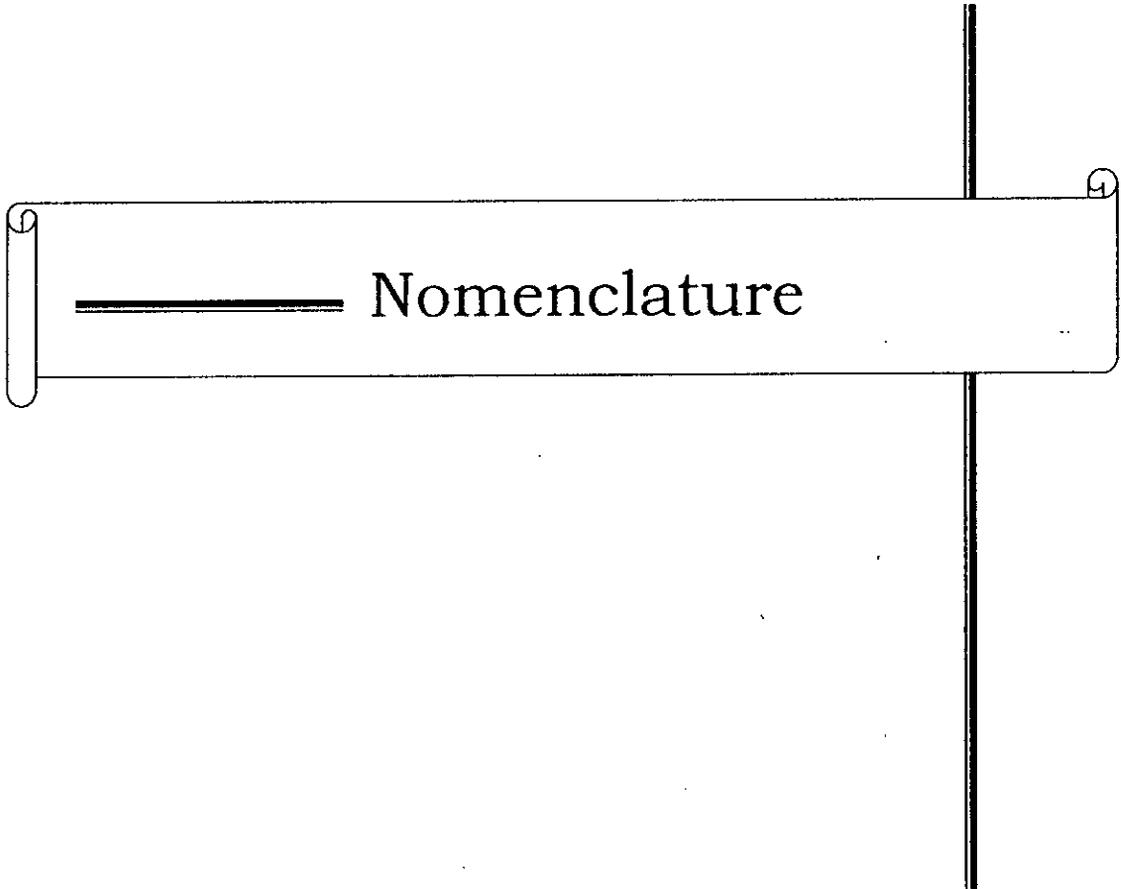
Mes chères frères pour leurs encouragements

Mes chères sœurs

A tous mes amis

Enfin, à tous ceux qui savent donner sans recevoir, qui aide
sans retour et sans être égoïste.

khalil



- A : Aire de la section de la conduite
- A_F : Aire du film
- A_{FI} : Aire de la zone de film à gradient de vitesse
- A_{CS} : Aire de la zone d'alimentation au culot de la poche
- B_0 : Nombre de BOND
- C : Nombre de LEVICH
- D : Diamètre intérieur de la conduite
- d : Diamètre de bulle
- e_F : Epaisseur du film
- e_{FI} : Epaisseur de la zone de film à gradient de vitesse
- F_β : Fonction de distribution de la variable θ_β
- Fr : Nombre de Froud
- f_i : Facteur de friction interfaciale
- $f_{w\beta}$: Facteur de frottement pariétal dans la configuration β
- G : Glissement moyen du gaz dans le bouchon
- g : Accélération de la pesanteur
- k : Indice de phase
- K_I : Rugosité interfaciale
- K_w : Rugosité de paroi
- J_Λ : Trace des interfaces dans Λ
- L_c : Longueur de cellule
- L_β : Longueur de la configuration β
- M_I : Densité de flux massique à travers l'interface
- M_o : Nombre de MORITON
- n_c : Fréquence cellulaire
- N_{IK} : Normale à l'interface dirigée de K vers $K+1$
- N_p : Normale à la paroi dirigée vers l'extérieur
- P : Pression
- P_Λ : Périmètre de la conduite
- $P_{K\beta}$: Périmètre mouillé par la phase K dans la configuration β
- $P_{I\beta}$: Périmètre interfacial dans la configuration β
- q_{Ge} : Débit de gaz entraîné au bout de la poche
- q_{Gc} : Débit de gaz alimentant la poche au culot
- Re : Nombre de Reynolds
- Re_I : $U_I^* \cdot K_I / \nu_G$ (Nombre de Reynolds interfacial)
- Re_{WF} : $U_{WF}^* \cdot e_F / \nu_F$ (" " pariétal dans le film)
- R : Rayon intérieur de la conduite
- R_K : Taux global de présence de la phase K
- $R_{K\beta}$: Taux de présence de phase K moyen dans la configuration β
- $R_{K\beta}(\theta)$: Taux de présence de phase K à l'abscisse θ (ou x') de la configuration β
- R_I : Rayon du noyau gazeux dans la poche
- $t_{\beta I}$: Instant de passage du front de l'événement I de la configuration β
- T : Durée d'observation
- T_c : Période cellulaire
- U : Célérité des poches

- U_K : Vitesse superficielle de la phase K dans la configuration β
- U_I^* : Vitesse de frottement interfacial $(\tau_I / \rho_G)^{1/2}$
- U_{WF}^* : Vitesse de frottement pariétal dans le film $(\tau_W / \rho_L)^{1/2}$
- $V_{K\beta}$: Vitesse phasique de la phase K moyenne dans la configuration β
- $\tilde{V}_{K\beta}(\theta)$: Vitesse phasique à l'abscisse θ (ou x')
- $\tilde{V}_{K\beta}'$: Vitesse phasique relative à la célérité U
- \tilde{V}_{FSO}' : Vitesse du film dans le noyau liquide
- \tilde{V}_{PSO}' : Vitesse de poche dans le noyau gazeux
- α_β : Taux de présence de la configuration β
- α_c : Rapport des cisaillements dans le film
- β : Indice de configuration (S ou D)
- $\eta_{K\beta}$: Terme de dispersion dans la conservation de la quantité de mouvement
- δ_β : Opérateur d'échantillonnage à l'abscisse x' (ou θ)
- δ_e : Epaisseur de la zone de poche à vitesse relative positive.
- $\varphi_{K\beta}$: Flux massique relatif de la phase K dans la configuration β
- ζ : δ_e / R
- z'_1 : e_F / R
- z' : y' / R
- φ : Densité de flux diffusif de ψ
- θ : Variable temporelle d'évolution de la configuration β
- $\theta_{\beta 1}$: Durée de passage de l'événement 1 de la configuration β
- χ : Constante de VON KARMAN
- λ : Longueur d'onde de la lumière cohérente du laser
- μ_β : Fonction de distribution de θ
- $\mu_{\beta 1}$: Réalisation de la variable aléatoire μ_β
- μ_K : Viscosité dynamique de la phase K
- ν_K : Viscosité cinématique de la phase K
- ψ : Tenseur densité de masse
- ρ_K : Masse volumique de la phase K
- σ : Tension superficielle
- Σ' : Tenseur des contraintes tangentielles
- $\tau_{IK\beta}$: Cisaillement interfacial de la phase K sur K+1 dans la configuration β
- $\tau_{WK\beta}$: Cisaillement pariétal
- χ_K : Fonction de présence de phase K
- χ_β : Fonction de présence de configuration β
- $\chi_{\beta 1}$: Réalisation de la variable aléatoire χ_β

Liste des indices

- B : Bouchon
- D : Dispersé
- F : Film
- G : Gaz
- I : Interface
- L : Liquide
- l : Compteur d'événement
- P : Poche
- S : Séparé
- W : Paroi

Opérateur

- $\langle \quad \rangle$: Moyenne spatiale
- $\underline{\quad}$: Moyenne spatiale

Nomenclature	1
Introduction	1
CHAPITRE I : Généralité sur les écoulements diphasiques.	3
Introduction .	3
I-1- Régime d'écoulement	3
I-2- Critère de transition	4
I-2-1 GOVIER et AZIZ (1972).	4
I-2-2 ROS (1961)	5
I-2-3 GRIFITH et WALLIS (1961)	5
I-2-4 TAITEL – BORNEA et DUKLER	6
I-3 Ecoulement intermittent	6
I-3-1 Généralités	6
I-3-2 Ecoulement à poche et à bouchon	6
I-4 Modèle cellulaires	7
CHAPITRE II : Modélisation d'un écoulement intermittent.	11
II-1- Définition du modèle.	12
II-2- Bases de modélisation	12
II-3 Concept de cellule moyenne équivalente	13
II-4 Les opérateurs de moyennes	16
II-4-1 Moyenne temporelle	16
II-4-2 Moyenne sur une configuration	16
II-4-3 Moyenne cellulaire	17
II-5 Equations locales de conservation d'une densité tensorielle	17
II-5-1 Equation moyenne sur la section A de la conduite	19
II-5-2 Moyenne spatio-temporelle de l'équation de conservation	20
II-5-3 Moyenne spatio-temporelle par configuration	21
II-6 Application aux équations de la conservation de la masse	22
II-6-1 Moyenne spatio-temporelle classique	22

II-6-2 Moyenne par configuration	22
II-7 Application aux équations de quantité de mouvement	23
II-7-1 Moyenne spatio-temporelle classique	23
II-7-2 Moyenne par configuration	23
II-8 Equation de base du modèle	24
II-8-1 Equation de base dans la poche	25
II-8-2 Equation de base dans le bouchon	26
CHAPITRE III : Les lois de fermeture	28
Introduction	29
III-1 Célérité des poches	29
III-2 Lois constitutives dans la poche	33
III-2-1 loi de cisaillement interfacial	33
III-2-2 Loi d'entraînement de gaz	36
III-2-3 Loi de cisaillement film –paroi en écoulement établi	39
III-3 Lois constitutives dans le bouchon	46
III-3-1 loi de glissement de gaz dans le bouchon	46
III-3-2 Lois de cisaillement pariétal dans le bouchon	474
CHAPITRE IV : Equation de Navier-Stokes et méthode de différences finies	48
Introduction	49
IV-1 Modélisation des équations de Navier-Stokes	50
IV-1-1 conservation de la masse	50
IV-1-2 conservation de la quantité de mouvement	50
IV-2 Présentation du problème traité	51
IV-2-1 Formulation du problème	54
IV-2-2 Formulation adimensionnelle	54
IV-3 Méthodes de différences finies	55
IV-3-1 Discrétisation	56
IV-3-2 Discrétisation explicite	56

IV-3-3 Résolution de l'équation de Poisson 58

CHAPITRE V : Résultats et discussion	60
V-1 Présentation générale du modèle cellulaire	61
V-1-1 Modèle poche	61
V-1-2 Modèle d'arrachage	63
V-1-3 Modèle bouchon	64
V-2 Bilans globaux	65
V-3 Estimation de l'épaisseur du film	65
V-4 Résultats du modèle cellulaire	66
V-5 Résultats de la résolution d'un écoulement autour d'une poche :	69
V-5-1 Résultats numériques	69
CONCLUSION	74
ANNEXE	
BIBLIOGRAPHIE	

ملخص

الهدف من الدراسة، هو حل انسياب حول جيب هوائي في قناة عمودية في حركة تصاعدية في البداية قمنا بإنشاء معادلات الحفظ في انسياب ثنائي الطور (نبضي: جيوب و سدادات)، لكي ننشئ نموذج خلوي الذي يأخذ بعين الاعتبار التداخلات سائل-غاز و الذي يستعمل للتنبؤ بالأبعاد الشاملة (كمية الغاز و تدرج الضغط) ، ثم قمنا بحل معادلات نافي-ستوكس حول حاجز قابل للتشوه (جيب من الغاز) باستعمال طريقة الفروق المنتهية ، لكي نعطي حقول الضغط و السرعة في الشريط السائل

كلمات مفتاحية:

انسياب ثنائي الطور حركة تصاعدية نبضي جيب و سدادات معادلات الحفظ التداخل (غاز-سائل) . نموذج خلوي - الفروق المنتهية.

Résumé

L'objectif de notre travail, c'est la résolution d'un écoulement autour d'une poche d'air dans une conduite verticale en mouvement ascendant. Au début nous avons établi les équations de conservation dans un écoulement diphasique (intermittent : à poches et à bouchons), afin de construire un modèle cellulaire qui prend en compte les interactions liquide-gaz, et qui sert à prédire les grandeurs globales (taux de gaz et gradient de pression). Ensuite, nous avons résolu les équations de Navier-Stokes autour d'un obstacle déformable (poche de gaz) par la méthode des différences finies, afin de déterminer les champs de pression et de vitesse dans le film liquide.

Mots clés :

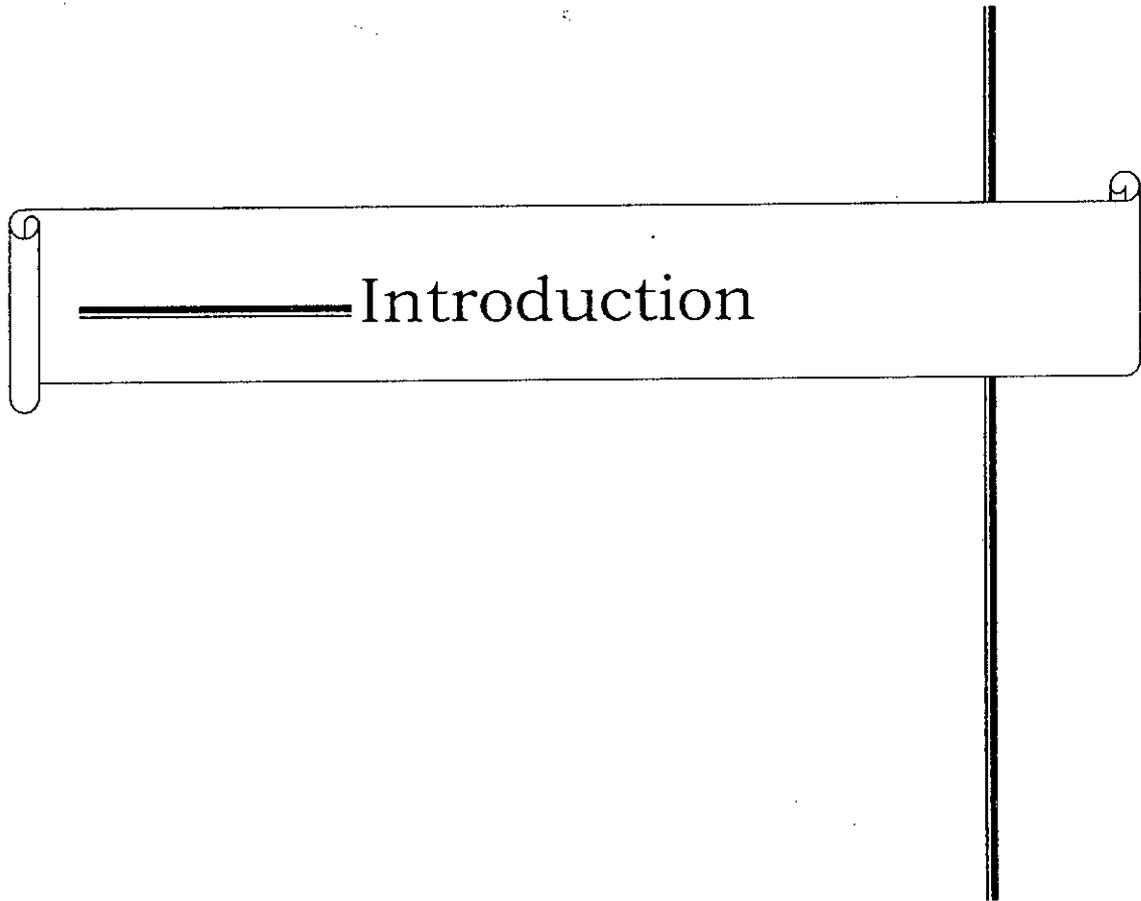
Écoulement diphasique - mouvement ascendant - intermittent - poches et bouchons - équations de conservations - interaction (gaz-liquide) - modèle cellulaire - différences finies.

Summary

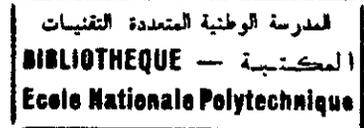
Our objective's work, is to resolve a around air pocket flow in a vertical tube and ascending flow movement. We started by establishing the conservation's equation of an intermittent two-phase flow formed by a series of pockets and plugs in order, to build a cellular model that takes account a liquid - gas's interactions. That's serves to predict the global sizes lake, a rate of gas and pressure gradient of pressure. Theri, we solved the Navier-Stokes's equation around a deformable pocket of gas by the method of the finite-differences in order to determine the fields of pressure and speed in the liquid film .

Works keys:

Two-phase flow- ascending movement- intermittent- pockets and plugs- conservation's equations- interaction (liquid-gas)- cellular model- finite difference



INTRODUCTION



Dans de nombreuses situations industrielles, on est amené à véhiculer des mélanges de plusieurs fluides ou encore une matière constituée de deux phases. Les exemples courants sont :

- *les écoulements eau-vapeur (ébullition, condensation) en production d'énergie, refroidissement des réacteurs nucléaires;*
- *les mélanges hydrocarbures (extraction et transport du pétrole et du gaz) ;*
- *les écoulements air-eau dans les pompes air- lifts (exploitation des gisements fond marin, dévasement des barrages).*

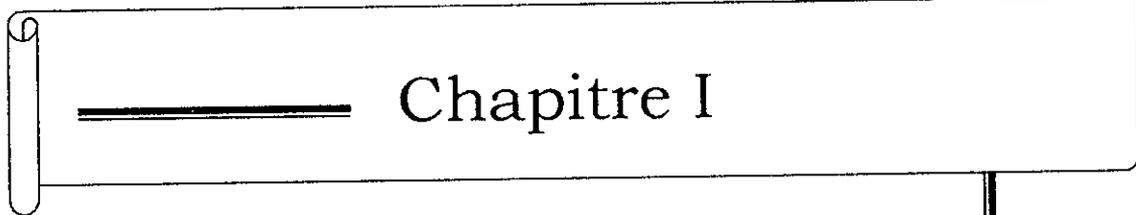
Les écoulements diphasiques en conduite sont riches de problèmes physiques encore mal résolus voire inexplorés. Parmi eux, ce qui touche à la structure de l'interface, sont les plus attrayants à cause de la diversité des topologies rencontrées et de la variété des phénomènes qu'elles sous-tendent. L'organisation de l'interface sous forme de bulles, de poches, de films, résulte en effet d'une compétition complexe entre forces d'inertie, de gravité, de viscosité et de tension superficielle.

Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement à l'écoulement d'un liquide autour d'une poche d'air dans une conduite cylindrique en mouvement ascendant. Les poches de gaz sont souvent présentes dans les écoulements diphasiques gaz-liquide dans les configurations intermittentes.

En premier lieu, nous avons établi un modèle cellulaire en résolvant les équations de conservation de masse et d'énergie dans la phase liquide et la phase gazeuse, et tout en appuyant sur certaines lois constitutives, dites lois de fermeture.

En second lieu, nous avons résolu directement les équations de Navier-Stokes dans le film liquide qui enveloppe la poche d'air, dans cette résolution numérique, nous avons opté pour la méthode des différences finies.

Le présent travail est principalement consacré aux écoulements intermittents. Dans le premier chapitre nous retrouvons une description concernant les écoulements diphasique. Dans le deuxième chapitre on rappelle le concept d'une cellule moyenne, afin de modéliser l'écoulement intermittent. Le troisième chapitre regroupe les différentes lois constitutives, qui sert à fermer les équations induites du chapitre II. Le quatrième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes autour d'une poche d'air. Enfin, dans le cinquième chapitre nous représentons les différents résultats obtenus par cette modélisation.



Chapitre I

Généralités sur les écoulements
diphase

Introduction :

Les écoulements diphasiques gaz-liquide sont très importants pour le génie chimique, génie nucléaire et production pétrolière. Pour la production pétrolière en mer, on recueille la production du gisement en surface. Ensuite, on fait la séparation et recompression des phases liquide et gazeuse. Chacune de ces phases est transportée par une conduite. Une solution économique serait d'avoir une conduite unique pour le transport, mais cela présente des risques (fluctuations de pression ; blocage conduite par ségrégation dans les points bas, ...). Actuellement, il n'y a pas de théorie pour prévoir ces phénomènes ainsi que la perte de pression, ce qui entraîne une diminution de la production (cf.[15], [16]).

I.1 Régimes d'écoulement :

Un régime d'écoulement caractérise une certaine distribution géométrique des phases. Cette distribution dépend des conditions d'écoulement, c'est-à-dire des paramètres permettant de quantifier l'écoulement, telles que les vitesses superficielles.

Plusieurs régimes (cf.[19], [14], [13]) peuvent se présenter, lorsque deux phases gaz-liquide s'écoulent dans une conduite, et les différents auteurs retiennent actuellement quatre régimes d'écoulement :

- ❖ A bulles ;
- ❖ A poches et bouchons ;
- ❖ Annulaire ;
- ❖ Transition entre l'intermittent et l'annulaire.

Ces régimes peuvent être regroupés comme c'est indiqué ci-dessous :

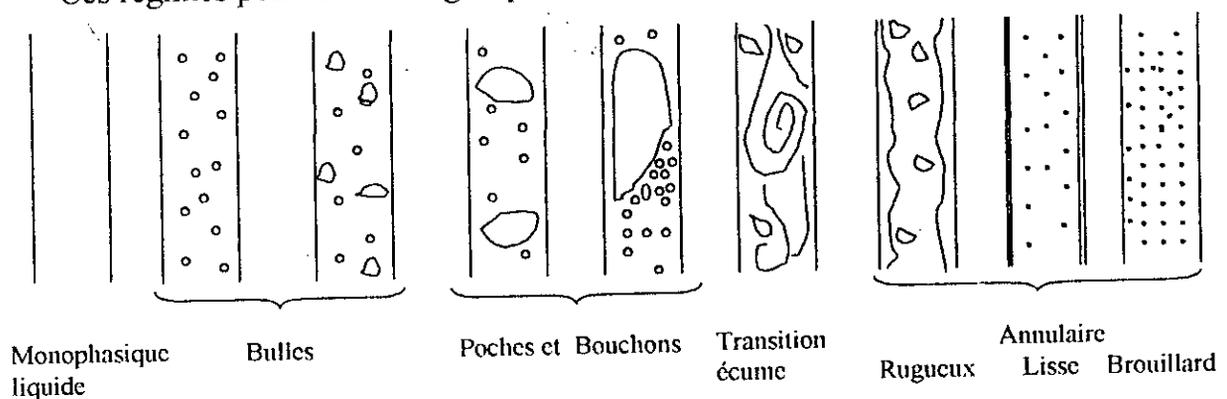


Fig.I.1 Régimes d'écoulement

Ainsi certains auteurs, tel que DUKLER, GOVIER et ROS (cf.[13]) proposent des cartes d'écoulement en fonction des vitesses superficielles du gaz et du liquide (U_G et U_L), afin de déterminer le régime d'écoulement. Il est évident que ces cartes d'écoulements sont différentes d'un auteur à un autre et ce en raison de plusieurs paramètres :

- ❖ Subjectivité de chaque expérimentation dans l'observation et a qualification de chaque régime ;
- ❖ Dans les conditions d'écoulement et d'expérimentation de chaque auteur, la corrélation n'est pas évidente ;
- ❖ La détermination de ces cartes ne tient compte que des vitesses superficielles du gaz et du liquide.

.I.2 Critère de transition :

En général, l'évolution d'un écoulement diphasique tel que l'air et l'eau s'effectue par le passage d'une configuration à une autre. Ainsi une configuration donnée est cernée entre deux transitions. En fonction des instruments de mesures expérimentales, des critères de transition ont été définis par certains auteurs (cf.[17]).

1.2.1 GOVIER et AZIZ (1972) :

Bulle \longrightarrow Poche phénomène de coalescence.

Poche \longrightarrow Ecume instabilité du film.

$$Y = \left(\frac{\rho_L \cdot \sigma_{W,A}}{\rho_W \cdot \sigma} \right)$$

$$X = \left(\frac{\rho_G}{\rho_A} \right) * Y$$

L et G : relatives aux liquides et au gaz.

W et A : relatives à l'eau et à l'air.

Bulles/poches : $Y \cdot U_L = 0.01(1.96U_G)^{5.81}$;

Poches/Ecumes : $Y \cdot U_L = 0.236(X \cdot U_G - 8.61)$ si $Y \cdot U_L < 4$;

Ecumes/Annulaires : $Y \cdot U_L = 0.01(X \cdot U_G / 70)$ si $Y \cdot U_L < 4$;

Poches/Annulaires : $X \cdot U_G = 26.5$ si $Y \cdot U_L > 4$.

1.2.2 ROS (1961) :

Il introduit d'autres groupes adimensionnels :

$$\text{Nombre de vitesse liquide : } N = U_L \left(\frac{\rho}{g \cdot \sigma_L} \right)^{1/4} ;$$

$$\text{Nombre de vitesse de gaz : } N_G = U_G \left(\frac{\rho}{g \cdot \sigma_L} \right)^{1/4} ;$$

$$\text{Nombre de diamètre : } N_D = D \left(\frac{\rho_L \cdot g}{\sigma} \right)^{1/2} .$$

$$\text{Bulles / Poches : } N_G < L_1 + L_2 \cdot N ;$$

$$\text{Poches / Ecumes : } N_G < 50 + 36 \cdot N ;$$

$$\text{Ecumes / Annulaires : } N_G > 75 + 84 \cdot N^{0.75} .$$

L_1, L_2 sont déterminés à partir d'abaque en fonction de N_D ...

1.2.3 GRIFFITH et WALLIS (1961) :

Ils utilisent des nombres adimensionnels :

$$NF_m = \left[\frac{Q_G + Q_L}{A} \right]^2 / g \cdot D ;$$

$$N_G = \frac{Q_G}{Q_G + Q_L} .$$

La transition bulles- bouchons étant définie par :

$$\frac{Q_G}{Q_G + Q_L} < L \quad \text{avec} \quad L > 0.13$$

$$\text{et } L = 1.07 - \frac{0.2218}{D} * \left(\frac{Q_G + Q_L}{A} \right)^2$$

I.2.4 TAITEL-BORNEA et DUKLER (1958) :

Deux zones d'écoulements à bulles sont déterminées :

- aux faibles débits de liquide : transition bulle-poche par coalescence avec le pourcentage de gaz à la transition $\alpha_T = 25\%$. Au vu des travaux de HARMATHY(1960), nous avons :

$$U_L = 3U_G - 1.15 \left(\frac{g(\Delta\rho)\sigma}{\rho_L^2} \right)^{1/4}$$

- aux forts débits liquides, la turbulence dans le liquide détruit les zones de bulles :

$$U_L + U_G = 4 \left(\frac{D^{0.419} (\sigma / \rho_L)^{0.089}}{U_L^{0.072}} * \left(\frac{g(\Delta\rho)}{\rho_L} \right)^{0.446} \right)$$

Cette transition est valable tant que le taux de gaz reste inférieur au taux de tassement :

$$\alpha_T = 52\%$$

I.3 Ecoulements intermittents :**I.3.1 Généralités :**

Les écoulements intermittents à deux fluides non miscibles, sont obtenus en injectant un gaz et un liquide dans conduite verticale. En écoulement gaz-liquide, le phénomène d'intermittence se caractérise- soit par une organisation spatio-temporelle quasi périodique des interfaces, sous forme d'une succession de poche de gaz et de bouchon de liquide contenant des bulles- soit par une organisation chaotique des interfaces comportant une succession de paquets de liquide fortement aéré, et de gaz (configuration bouillante).

I.3.2 Ecoulement à poche et à bouchon (slug flow) :

L'écoulement se présente comme une succession spatio-temporelle de cellules comprenant une zone à phases séparées (zone poche) et une zone à phase dispersée (zone bouchon) (voire Fig. 2). La zone à phases séparées comporte une poche de gaz séparée de la paroi par un film de liquide à contre courant de l'écoulement à gaz. La forme du front de poche est quasi hémisphérique alors que le culot de poche est de forme plane. Le bouchon présente une structure analogue à celle de la configuration à bulles avec cependant une zone à forte

concentration de bulles au culot de la poche. La vitesse ascensionnelle des bulles de gaz dans le bouchon de liquide est inférieure à celle des poches.

En repère relatif lié à la poche, on observe autour de celle-ci un écoulement de liquide qui entraîne les petites bulles alors que les plus grosses coalescent dans les poches.

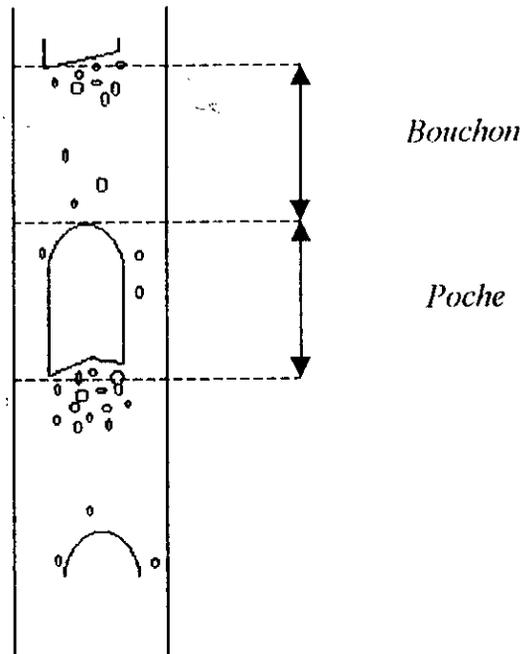


Fig.1.2 Écoulement à poches et à bouchons

1.4 Modèles cellulaires :

Les modèles cellulaires ont été introduits pour la première fois par DUKLER et HUBBARD (1975)(cf. [13]), pour résoudre le cas de l'écoulement intermittent en conduite horizontale. Ces modèles sont basés sur la définition d'une cellule «moyenne» composée d'une poche et d'un bouchon. Cette cellule moyenne a une réalité physique évidente dans le cas où le phénomène d'intermittence est périodique dans le temps et selon l'axe de la conduite ; si la vitesse de propagation des cellules est constante la cellule moyenne peut être définie à partir de la longueur moyenne des cellules.

Dans les modèles cellulaires, on cherche à résoudre les équations de la conservation de masse et de quantité de mouvement dans un référentiel attaché à la cellule, respectivement dans la poche et dans le bouchon. Le dénominateur commun des modèles cellulaires présentés par les différents auteurs FERNANDES, SEMIAT et DUKLER (1983), LINE et

MASBERNAT (1985), est constitué par l'écriture de la conservation de la masse dans le référentiel en mouvement complétée par une corrélation exprimant la vitesse du référentiel (vitesse de poche de gaz) :

$$U_p = C_0(U_{GS} + U_{LS}) + C_1 \sqrt{gD} \frac{\Delta\rho}{\rho_L}$$

a) *Modèle de FERNANDES, SEMIAT et DUKLER :*

- *Loi de célérité des poches :*

A partir des résultats expérimentaux, les auteurs proposent :

$$U_p = 1.29(U_{GS} + U_{LS}) + 0.35\sqrt{gD}$$

- *Loi complémentaire :*

Les auteurs présentent deux modèles : un modèle simplifié dans lequel la fraction de gaz dans le bouchon est fixée à la valeur maximum que l'on peut obtenir dans un écoulement à bulles, selon TAITEL et al (1980), $R_{GB} = 0.25$, et un deuxième modèle dans le mécanisme d'entraînement de gaz entre le culot de la poche et le bouchon est pris en compte, les équations rajoutées sont une équation du flux de gaz relatif au front de la poche :

$$\phi_G = R_{GB}(U_p - U_{LS} - U_{GS}) - G_B R_{GB}(1 - R_{GB}),$$

et une équation de bilan des flux au culot de la poche :

$$\phi_G = \phi_{Ge} - \phi_{Gc},$$

où ϕ_{Ge} est le flux de gaz entraîné dans le bouchon par l'interaction dynamique entre le film de liquide et le gaz (voire Fig. 2.1) et ϕ_{Gc} est le flux de gaz réinjecté dans la poche par le jeu de l'agitation turbulente et des forces d'Archimède.

Une corrélation qui relie ϕ_{Gc} à un taux d'intensité turbulente I_B :

$$\phi_{Gc} = \left(1 - 2 \frac{e_G + e_F}{e_F}\right)^2 \frac{\phi_{Ge}}{\phi_{Ge} + \phi_L} I_B,$$

$$I_B = 0.25(U_p - 1.15U_{LP}).$$

e_G Représente l'épaisseur de la couche de gaz entraînée dans la poche. ϕ_L Représente le flux de liquide relatif à la poche, $\phi_L = R_l U_p - U_{ls}$. Pour la modélisation du flux de gaz entraîné, FERNANDES et al introduisent des lois de profil de vitesse classique pour les écoulements turbulents. Le flux de gaz est calculé par l'intégration sur l'épaisseur de la couche de gaz entraîné e_G :

$$\phi_{Ge} = \int_0^{e_G/D} (1 - 2\frac{e_G}{D} - 2\frac{Y}{D}) U(\frac{Y}{D}) d(\frac{Y}{D}),$$

Y est la distance à l'interface du film et de la poche.

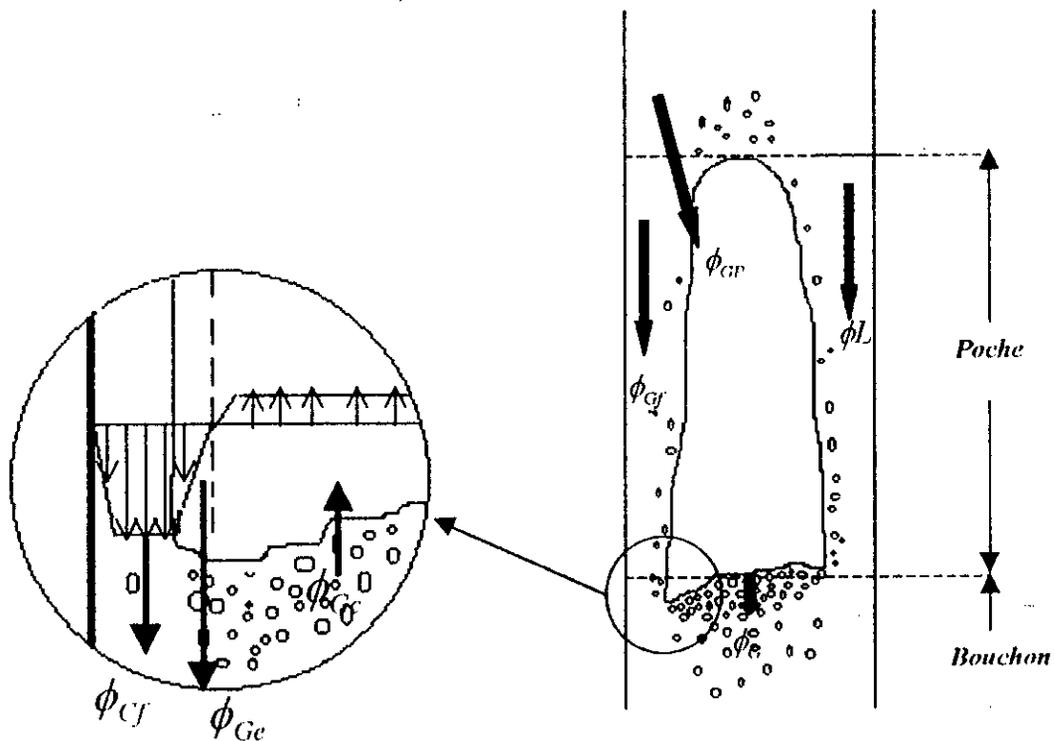


Fig. I.3 Cellule moyenne en écoulement à poche et à bouchon

b) Modèle de LINE et MASBERNAT :

Les auteurs proposent un modèle basé sur un mécanisme analogue au mécanisme d'entraînement décrit par FERNANDES et al. Les auteurs distinguent deux zones dans la configuration bouchon :

Une zone de culot fortement aérée, et une zone de mélange moins aérée (zone dispersée). Les lois de glissements adoptées pour ces deux zones sont:

- Zone de culot : $G_c = U_{Gc} - U_{Lc} = U_p$;
- Zone dispersée : $G_d = U_{Gd} - U_{Ld} = c_d \left(\sigma g \frac{\Delta \rho}{\rho_l} \right)^{1/4} (1 - R_{Gd})$.

Induite par ce découpage ; les équations de flux sont :

$$\phi_G = R_{Gc}(U_p - U_{Gc})$$

$$\phi_G = R_{Gd}(U_p - U_{Gd})$$

$$\phi_L = (1 - R_{Gc})(U_p - U_{Lc})$$

$$\phi_L = (1 - R_{Gd})(U_p - U_{Ld})$$

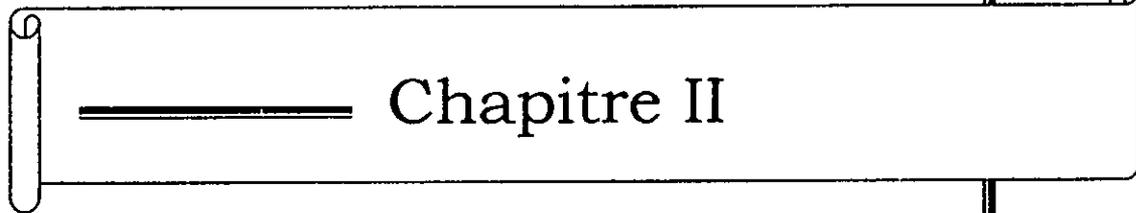
$$R_{GB} = \alpha_c R_{Gc} + \alpha_d R_{Gd}$$

$$\alpha_d + \alpha_c = 1$$

- Une loi de fermeture sur le taux de présence de la zone dispersée dans le bouchon est utilisée : $(1 - \alpha_d) = \alpha_s^2$
- Une loi de célérité de poche : $U_p = 2 \frac{Q_L}{A} + 0.35 \sqrt{2gR}$

c) Synthèse :

Les modèles cellulaires présentent une amélioration par rapport aux corrélations, dans la mesure où ils tiennent compte de la structure particulière de l'écoulement intermittent, avec comme idée force la prise en compte les interactions dynamiques dans deux domaines : un domaine où l'écoulement est à phase séparée co-courant et à contre courant, la poche, et un domaine où l'écoulement est à phase dispersée, le bouchon. Cependant , il est important de préciser les limites des lois de fermetures.



Chapitre II

Modélisation d'un écoulement
intermittent

II.1 Définition du modèle :

La cellule représentative de ce régime d'écoulement, sera composée en partie d'une configuration séparée (poche), et une configuration dispersée (bouchon)(cf. [15]). Précisons les notations d'indices : β désigne un indice de configuration, k un indice de phase suivant le schéma :

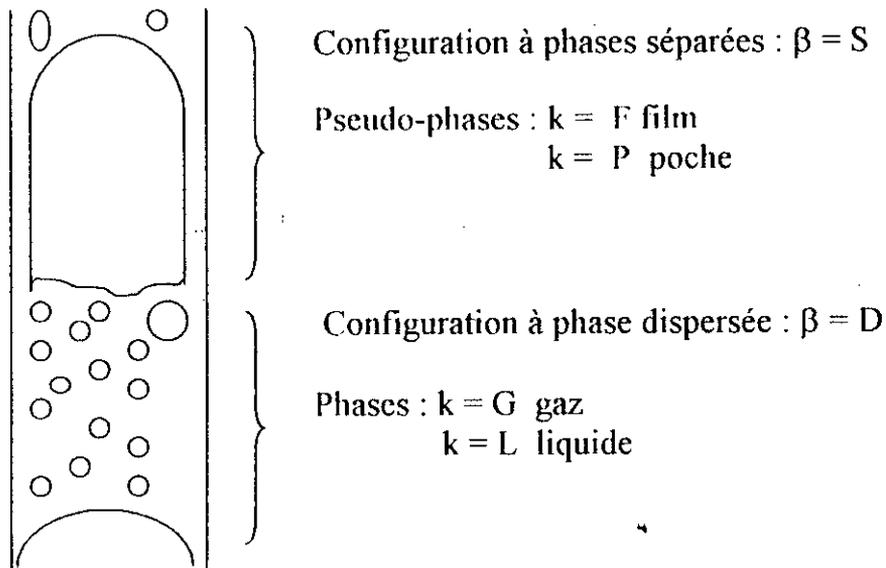


Fig.II.1 : Ecoulement intermittent

II.2 Bases de modélisation:

La finalité de toutes les méthodes de calculs des écoulements diphasiques en générale et les écoulements intermittents en particuliers est de déterminer d'abord le taux de gaz R_G et le gradient de pression dP/dx (cf. [5], [13]). Beaucoup de corrélations ont été développées par certains auteurs. En réalité la structure cellulaire de l'écoulement compromet une telle approche, car l'écoulement est à phase séparée et à phase dispersée. On doit donc introduire des lois spécifiques aux poches et bouchons.

Les variables utilisées sont les variables d'Euler notées : x , y , z , et t . x définit la direction de l'axe de la conduite, dans le sens ascendant ; l'origine $x=0$ est prise à l'injecteur de la conduite diphasique. y et z sont les coordonnées dans une section plane normale à x .

Les moyennes temporelles sont effectuées sur un temps T , correspondant au passage de N cellules. Soit $\theta_{\beta l}$ la durée du passage l'abscisse x de l'événement l ($l=1,2 \dots N$) de la configuration β (S ou D). Il vient :

$$T = \sum_{l=1}^N (\theta_{S_l} + \theta_{D_l})$$

Soit :

$$T_{\rho} = N \cdot \tilde{\theta}_{\rho}$$

où $\tilde{\theta}$ indique l'opérateur de moyenne d'ensemble, définie par la relation :

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \theta_{\beta l}$$

alors

$$T = T_S + T_D = N(\tilde{\theta}_S + \tilde{\theta}_D)$$

La fréquence cellulaire de l'écoulement est notée n_c définie par :

$$n_c = \frac{1}{\tilde{\theta}_S + \tilde{\theta}_D}$$

II.3 Concept de cellule moyenne équivalente :

La formulation des équations est destinée à reconstituer l'évolution des grandeurs physiques et géométriques de l'écoulement, dans une cellule équivalente, définie comme moyenne d'une population de N événements.

a) Fonction de présence de configuration :

En un point d'observation situé à l'abscisse x de la conduite, le front de l'événement l de la configuration β passe à un instant $t_{\beta l}$, et le bout de cet événement à un instant $t_{\beta l} + \theta_{\beta l}$, avec :

$\theta_{\beta l}$: durée de l'événement l de la configuration β

$$t_{\beta l} + \theta_{\beta l} = t_{\beta (l+1)}$$

La fonction de présence de configuration β , notée $\chi_\beta(x,t)$ est une variable aléatoire de réalisation $\chi_{\beta l}(x,t)$ ainsi définie :

$$\begin{cases} \chi_\beta(x,t) = 1 & \text{si } t \in [t_{\beta l}, t_{\beta l} + \theta_\beta] \\ \chi_\beta(x,t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

les schémas ci-dessous, donne les graphes des fonctions χ_β et $\chi_{\beta l}$

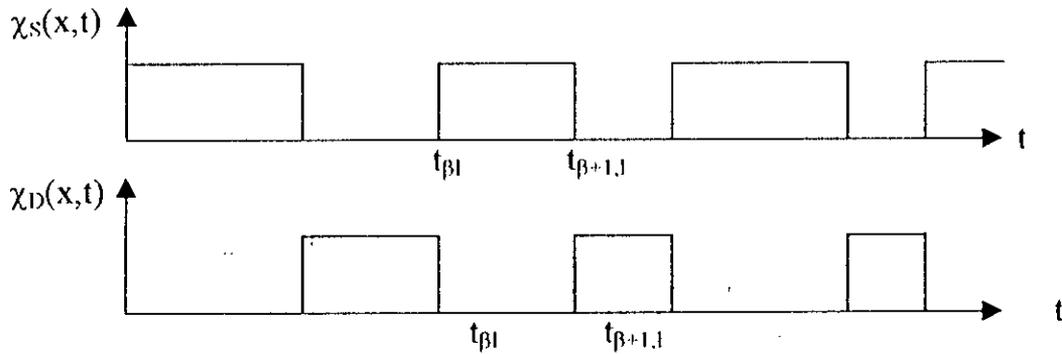


Fig.II.2 : fonction de distribution χ

θ_β est la variable aléatoire «durée des événements» de réalisation $\theta_{\beta l}$, de fonction de distribution :

$$F_\beta(\beta) = \text{poba}(\theta_\beta < \theta)$$

Le taux de présence de la configuration β , au sens de la moyenne temporelle s'écrit :

$$\alpha_\beta = \bar{\chi}_\beta$$

b) Variable θ :

Pour reconstituer l'évolution des grandeurs dans chaque configuration β , il est nécessaire d'introduire une variable temporelle θ (ou spatiale x) définie à partir du front de l'événement l: $\theta=0$ à $t=t_{\beta l}$

Soit, $\tilde{\mu}(\theta)$ la fonction de probabilité de la variable θ . Pour l'événement « βl », $\mu_{\beta l}(\theta)$ vaut 1 tant que $\theta < \theta_{\beta l}$, et 0 au-delà. Il vient : $\tilde{\mu}_\beta(\theta) = 1 - F_\beta(\theta)$

Soit, N événements «poche» de longueur θ_{pl} , $\mu_p(\theta)$ peut être schématisée ainsi :

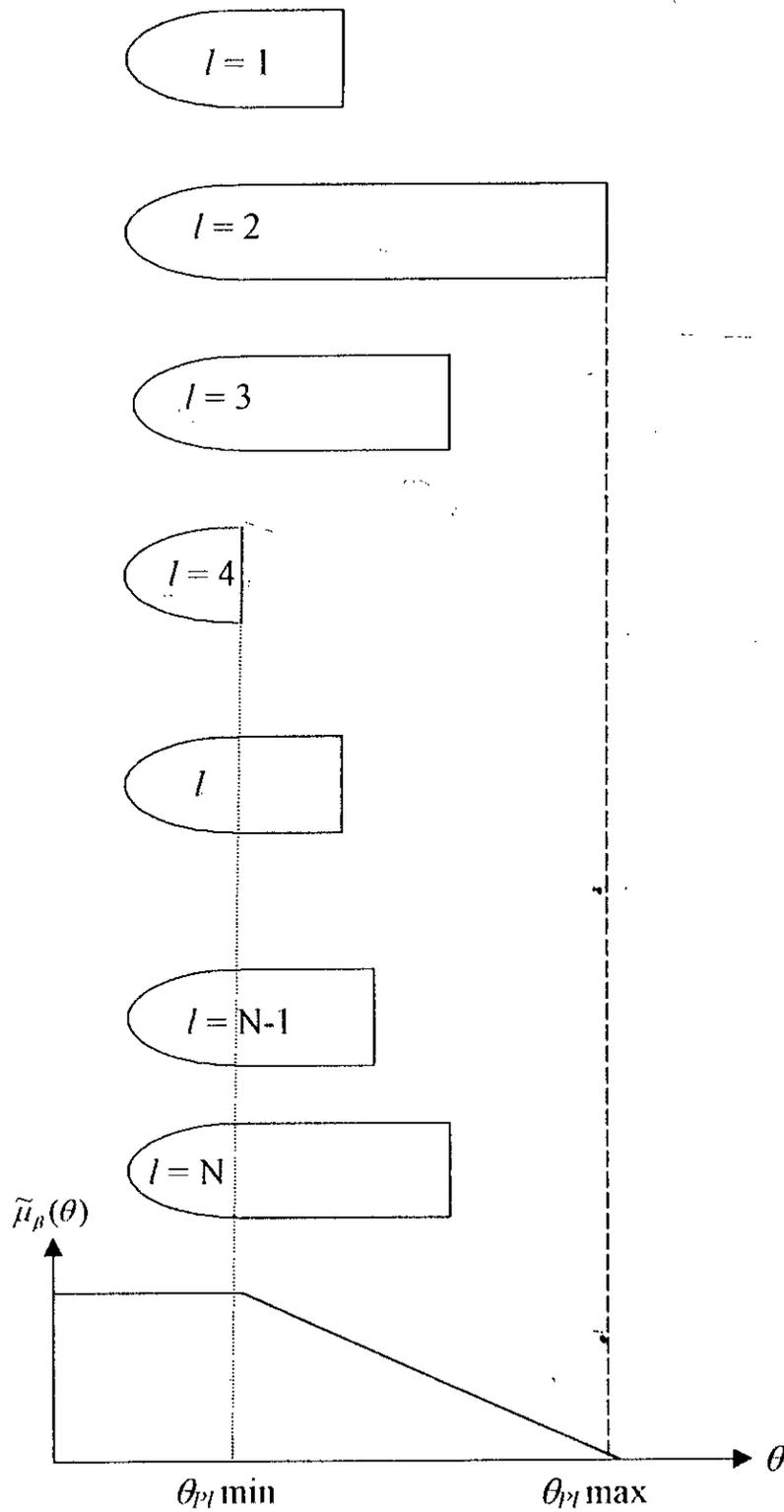


Fig. II.3 : Fonction de distribution des longueurs de poches

En particulier, tant que ($\theta < \theta_{\beta l \text{ min}}$), tous les événements β_l , ($l = 1, 2, \dots, N$), contribuent au calcul de la moyenne de $F(\theta)$, au contraire, pour ($\theta > \theta_{\beta l \text{ max}}$) aucun événement n'y contribue, pour une valeur intermédiaire de θ , un pourcentage de la population N contribue au calcul de la moyenne, ce pourcentage étant précisément la valeur de $\mu_{\beta}(\theta)$ correspondante.

c) Opérateur $\delta_{\beta}(\theta)$:

L'opérateur $\delta_{\beta}(\theta)$, appliqué à une fonction $f(x, t)$, crée la variable aléatoire suivante :

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\beta}(\theta), f \rangle &= f(x, t_{\beta l} + \theta) \cdot \chi_{\beta}(t_{\beta l} + \theta) = f(x, t_{\beta l} + \theta) \text{ si } \theta < \theta_{\beta l} \\ &= 0 \text{ si } \theta > \theta_{\beta l} \end{aligned}$$

II.4 Les opérateurs de moyenne :

II.4.1 Moyenne temporelle $\bar{G}_k(x, t)$:

On définit la moyenne temporelle sur un intervalle T beaucoup plus grand que la période cellulaire: $T > 1/n_c$

$$\bar{G}_k = \frac{1}{T} \int_0^T \langle G_k(x, t') \rangle dt'$$

Ce type de moyenne correspond à une approche globale. Les corrélations classiques des écoulements diphasiques adoptent cette approche.

II.4.2 Moyenne sur une configuration $G_{k\beta}$:

La définition est la suivante :
$$\bar{G}^{\beta} = \frac{1}{T_{\beta}} \int_{[T_{\beta}]} G(x, t') dt'$$

où $[T_{\beta}]$ est la réunion des intervalles de temps de présence de la configuration β à l'abscisse x .

Cet opérateur tient compte du caractère intermittent de l'écoulement. Il permet de définir :

$\overline{\frac{dp^\beta}{dx}}$: gradient de pression moyen dans la configuration β ,

$\overline{R_k^\beta}$: taux de présence de la phase k , moyen dans la configuration β ,

avec : $\overline{R_G^s} + \overline{R_L^s} = 1$

$$\overline{R_G^D} + \overline{R_L^D} = 1$$

et α_β le taux de présence de la configuration β avec : $\alpha_s + \alpha_D = 1$

II.4.3 Moyenne cellulaire :

La moyenne cellulaire de la fonction G est définie par la moyenne d'ensemble des valeurs de la fonction G aux instants « $t_{\beta l} + \theta$ », effectuée sur les « $N \times \mu_\beta(\theta)$ » événements pour lesquels $G(t_{\beta l} + \theta)$ a un sens.

L'application de cet opérateur aux équations fondamentales de la mécanique des fluides déterminera les lois de conservation de notre modèle.

II.5 Equations locales de conservations d'une densité massique tensorielle ψ :

L'équation de la conservation de ψ s'écrit :

$$\frac{\partial \rho \Psi}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \Psi V + \varphi)}{\partial x} = \rho F \quad (1)$$

avec : $\frac{\partial \rho \Psi}{\partial t}$: taux de variation de Ψ

$\rho \Psi V$: flux convectif

φ : flux diffusif

ρF : effets extérieurs.

multiplions (1) par χ_k :

$$\chi_k \frac{\partial \rho \Psi}{\partial t} + \chi_k \frac{\partial (\rho \Psi V + \varphi)}{\partial x} = \chi_k \rho \cdot F \quad (2)$$

de l'équation (2), décomposons les termes des premiers membres :

$$\diamond \quad \chi_k \frac{\partial \rho \Psi}{\partial t} = \frac{\partial (\chi_k \rho \Psi)}{\partial x} - \rho \Psi \frac{\partial \chi_k}{\partial x} \quad (3)$$

$$\diamond \quad \chi_k \frac{\partial (\rho \Psi V + \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial (\chi_k \rho \Psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} - (\rho \Psi V + \varphi) \frac{\partial \chi_k}{\partial x} \quad (4)$$

$$\text{soit : } \frac{\partial (\chi_k \rho \Psi)}{\partial t} - \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \frac{\partial (\chi_k \rho \Psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} - (\rho \Psi V + \varphi) \frac{\partial \chi_k}{\partial x} = \rho \cdot F \chi_k \quad (5)$$

$$\text{or nous savons que : } \frac{\partial \chi_k}{\partial t} = U_i \cdot \text{grad} \chi_k \quad (6)$$

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial x} = -N_{ik} \cdot \delta_i \quad (7)$$

$$\text{grad} \chi_k = -N_k \cdot \delta_i \quad (8)$$

L'équation (5) devient :

$$\frac{\partial (\chi_k \rho \Psi)}{\partial t} + \frac{\partial (\chi_k \rho \Psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} = \rho F \chi_k + \rho \Psi \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + (\rho \Psi V + \varphi) \frac{\partial \chi_k}{\partial x} \quad (9)$$

d'après (7), (8) et (9) nous avons :

$$\rho \Psi \frac{\partial \chi_k}{\partial t} = \rho \Psi (-U_i \cdot \text{grad} \chi_k) = \rho \Psi (U_i \cdot N_{ik} \cdot \delta_i) = \rho \Psi U_i N_{ik} \delta_i \quad (10)$$

$$(\rho \Psi V + \varphi) \frac{\partial \chi_k}{\partial x} = -(\rho \Psi V + \varphi) N_{ik} \delta_i = -\rho \Psi V N_{ik} \delta_i - \varphi N_{ik} \delta_i \quad (11)$$

l'équation (9) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_k \rho \Psi}{\partial t} + \frac{\partial (\chi_k \rho \Psi + \varphi \chi_k)}{\partial x} &= \rho \Gamma \chi_k + \rho \Psi U_I N_{ik} \delta_I - \varphi N_{ik} \delta_I \\ &= \rho \Gamma \chi_k + (\rho \Psi U_I - \rho \Psi V - \varphi) N_{ik} \delta_I \\ &= \rho \Gamma \chi_k + [\rho \Psi (U_I - V) - \varphi] N_{ik} \delta_I \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{posons: } M_I = \rho(V - U_I) \quad (13)$$

l'équation (12) devient :

$$\frac{\partial \chi_k \rho \Psi}{\partial t} + \frac{\partial (\chi_k \rho \Psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} = \rho \Gamma \chi_k - [\Psi M_I + \varphi] N_{ik} \delta_I \quad (14)$$

II.5.1 Equation moyenne sur la section A de la conduite :

Le transfert de masse à l'interface est supposé nul donc :

$$V_k = U_I = V_{kn} \Rightarrow M_I = 0 \quad (15)$$

et l'équation (14) devient :

$$\frac{\partial \chi_k \rho \Psi}{\partial t} + \frac{\partial (\chi_k \rho \Psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} = \rho \Gamma \chi_k - \varphi N_{ik} \delta_I \quad (16)$$

et si par définition, le taux de présence de la phase k sur la section A s'écrit :

$$\langle R \rangle_k = \frac{1}{A} \int_A \chi_k \delta A \quad (17)$$

et la moyenne phasique Ψ notée $\langle \Psi \rangle_k$ s'écrit :

$$\langle R \rangle_k \langle \Psi \rangle_k = \frac{1}{A} \int_A \chi_k \Psi \delta A \quad (18)$$

l'équation (16) devient :

$$\frac{\partial(\rho_k \langle R \rangle_k \langle \Psi \rangle_k)}{\partial t} + \frac{\partial[\langle R \rangle_k (\rho_k \langle \Psi V \rangle_k \langle \varphi \rangle_k) E]}{\partial x} = \rho_k \langle F \rangle_k \langle R \rangle_k - \frac{1}{A} \int_{JA} \frac{\varphi N_{Ik} \delta_l}{N_{Ik} K_{Ik}} - \frac{1}{A} \int_{PA} \varphi N_p \chi_k dS_p \quad (19)$$

- E vecteur directeur de x
- K_{Ik} projection de N_{Ik} dans le plan (y,z) de A
- JA trace de toutes les interfaces dans A
- N_p normal à la paroi dirigée vers l'extérieur.

II.5.2 Moyenne spatio-temporelle de l'équation de conservation :

Posons :
$$P_l \varphi_{lk} = \overline{\int_{JA} \varphi_k N_{Ik} \frac{dS_l}{N_{Ik} K_{Ik}}} \quad (20)$$

$$P_l = \overline{\int_{JA} dS_l} \quad : \text{périmètre interfacial} \quad (21)$$

$$P_k = \overline{\int_{PA} \chi_k dS_p} \quad : \text{périmètre mouillé par la phase k} \quad (22)$$

$$P_k \varphi_{rk} = \overline{\int_{PA} \varphi N_p \chi_k dS_p} \quad (23)$$

L'équation (19) devient :

$$\frac{\partial(\overline{\rho_k \langle R \rangle_k \langle \Psi \rangle_k})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho_k \langle \Psi V E \rangle_k \langle R \rangle_k + \sum_k \varphi E \langle R \rangle_k})}{\partial x} = \overline{\rho_k \langle F \rangle_k \langle R \rangle_k} - \frac{P_l}{A} \varphi_{lk} - \frac{P_k}{A} \varphi_{rk} \quad (24)$$

II.5.3 Moyenne spatio-temporelle par configuration :

Multiplions la relation (19) par χ_β :

$$\chi_\beta \frac{\partial(\rho_k \langle R \rangle_k \langle \Psi \rangle_k)}{\partial t} + \frac{\partial[\langle R \rangle_k (\rho_k \langle \Psi V \rangle_k \langle \varphi \rangle_k) E] \chi_\beta}{\partial x} =$$

$$[\rho_k \langle F \rangle_k \langle R \rangle_k - \frac{1}{A} \int_{PA} \frac{\varphi N_{ik} \delta_i}{N_{ik} K_{ik}} - \frac{1}{A} \int_{PA} \varphi N_p \chi_k dS_p] \chi_\beta$$
(25)

cette relation moyennée donne :

$$\frac{\partial(\rho_k \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_k \langle \Psi \rangle_k}^\beta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_k \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_k \langle \Psi V E \rangle_k}^\beta)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_\beta \overline{\langle \varphi E \rangle_k \langle R \rangle_k}^\beta)}{\partial x} =$$

$$\rho_k \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_k \langle F \rangle_k}^\beta - \frac{\alpha_\beta P_{\beta k}}{A} \varphi_{pk\beta} - \frac{\alpha_\beta P_{\beta p}}{A} \varphi_{pk\beta} - \frac{\alpha_\beta P_{\beta p}}{A} (\Psi M_i)_{ik\beta} - n_c \left[\left(\frac{q_{k\beta 1}}{U_{\beta 1}} \right) - \left(\frac{q_{k\beta 0}}{U_{\beta 0}} \right) \right]$$
(26)

Avec : $q_{k\beta} = \langle [\rho \Psi (U_\beta - V) - \varphi] E \rangle_k \langle R \rangle_k$ (27)

on l'écrit sous la forme : $q_{k\beta, i} (U_i)$ avec $i=0$, en début de configuration et $i=1$ en bout de configuration.

Et $\alpha_\beta P_{k\beta} \varphi_{pk\beta} = \chi_\beta \int_{PA} \varphi N_p \chi_k dS_p$ (28)

$$P_{k\beta} = \int_{PA} \chi_k dS_p^\beta$$
(29)

II.6 Application aux équations de la conservation de la masse :

L'application à la conservation de la masse des différentes équations écrites précédemment, et le sens physique de chaque terme sera précisé.

La conservation de la masse correspond aux valeurs de Ψ , φ et F suivantes :

$$\Psi=1 \qquad \varphi=0 \qquad F=0$$

II.6.1 Moyenne spatio-temporelle classique :

En régime permanent et établi, nous avons : $\frac{\partial}{\partial t} \rho_k \overline{\langle R \rangle_k} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_k \overline{\langle R \rangle_k \langle V \rangle_k} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho_k \overline{\langle R \rangle_k \langle V \rangle_k}}{\partial x} = 0 \quad \text{Soit :} \quad (30)$$

$$\rho_k \overline{\langle R \rangle_k \langle V \rangle_k} = \text{cst} = \rho_k U_k$$

U_k : est la vitesse superficielle de la phase k.

La conservation de la masse correspond à $\Psi=1$; $\varphi=0$; $F=0$, l'équation (24) devient :

$$\frac{\partial(\rho_k \overline{\langle R \rangle_k})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_k \overline{\langle R \rangle_k \langle V \rangle_k})}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

La relation (29) suppose l'absence de transfert de masse à l'interface soit $M_I = 0$. donc $V_k = U_k = V_{kN}$. (avec V_{kN} : vitesse phasique normale)

II.6.2 Moyenne par configuration :

Soit $\varphi_{k\beta i}$ le flux massique de la phase k aux extrémités ($i=0$ et $i=1$) de la configuration β .

L'équation (26) devient :

$$\frac{\partial(\rho_k \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_k}^\beta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_k \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_k \langle V \rangle_k}^\beta)}{\partial x} = -n_c \left[\left(\frac{\varphi_{k\beta 1}}{U_{\beta 1}} \right) - \left(\frac{\varphi_{k\beta 0}}{U_{\beta 0}} \right) \right] \quad (32)$$

or d'après (32), le nombre de gauche s'annule :

$$\text{donc :} \quad \left(\frac{\varphi_{k\beta 1}}{U_{\beta 1}} \right) = \left(\frac{\varphi_{k\beta 0}}{U_{\beta 0}} \right) \quad (33)$$

$$\text{et } \varphi_{k\beta i} = \langle \rho(U_{\beta i} - V_i) \rangle_k \langle R \rangle_k \quad (34)$$

La relation (33) exprime que le flux de la phase k entrant est égal au flux de la phase k sortant, et ce bien pour un régime établi.

II.7 Application aux équations de quantité de mouvement :

Dans l'équation du bilan de quantité de mouvement, le tenseur φ s'écrit $\varphi = PI - \underline{\underline{\sigma}}$, avec $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes visqueuses.

Dans notre cas, nous allons négliger les effets de tension de surface, et nous prendrons $\varphi = PI$, I étant le tenseur d'unité, et P la pression.

Les équations de quantité de mouvement s'écrivent avec les valeurs de :

$$\Psi = V; \varphi = PI; F = g$$

II.7.1 Moyenne spatio-temporelle classique :

L'équation (24) devient :

$$\frac{\partial(\rho_k \overline{\langle R \rangle_k \langle V \rangle_k})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_k \overline{\langle VVE \rangle_k \langle R \rangle_k} + \langle PIE \rangle_k \langle R \rangle_k)}{\partial x} = \rho_k \overline{g \langle R \rangle_k} - \frac{P_l}{A} (PI)_{lk} - \frac{P_k}{A} (PI)_{pk} \quad (35)$$

II.7.2 Moyenne par configuration :

L'équation (26) :

$$\frac{\partial(\rho_k \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_k \langle V \rangle_k^\beta})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_k \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_k \langle VVE \rangle_k^\beta})}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_\beta \overline{\langle PIE \rangle_k \langle R \rangle_k^\beta})}{\partial x} = \rho_k \alpha_\beta \overline{g \langle R \rangle_k^\beta} - \frac{\alpha_\beta P_{\beta k}}{A} (PI)_{pk\beta} - \frac{\alpha_\beta P_{l\beta}}{A} (PI)_{pk\beta} - \frac{\alpha_\beta P_{l\beta}}{A} (VM_l)_{lk\beta} - n_c \left[\left(\frac{q_{k\beta 1}}{U_{\beta 1}} \right) - \left(\frac{\varphi_{k\beta 0}}{U_{\beta 0}} \right) \right] \quad (36)$$

$$\text{Avec : } \varphi_{k\beta i} = \langle [\rho V (U_{\beta i} - V) - (PI)]_i \rangle_k \langle R \rangle_k \quad (37)$$

Si on considère que l'écoulement est établi ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$ et $dP/dx = cste$) et permanent

($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), l'équation (36) devient :

$$\frac{dP}{dx} \langle R \rangle_k^\beta = -\rho_k g R_k + \frac{P_{l\beta}}{A} \tau_{lk\beta} - \frac{P_{wk\beta}}{A} \tau_{wk\beta} + \frac{1}{\theta} \left[\left(\frac{q_{k\beta 1}}{U} \right) - \left(\frac{q_{k\beta 0}}{U} \right) \right] \quad (38)$$

- $\tau_{lk\beta}$: Cisaillement interfacial de la phase k+1 sur la phase k
- $\tau_{wk\beta}$: Cisaillement pariétal ; action de la paroi sur la phase k

II.8 Equation de base du modèle :

Nous supposons que l'écoulement est permanent et établi dans la configuration β , nous avons $\beta=P$ ou $\beta=B$ et $k=L$ ou $k=G$.

Les relations de bases issues des lois de conservation sont au nombre de cinq :

$$\left(\frac{dP}{dx} \right)_{k\beta} = -\rho_k g - \frac{P_{l\beta} \tau_{lk\beta}}{AR_{k\beta}} - \frac{P_{wk\beta} \tau_{wk\beta}}{AR_{k\beta}} \quad (39)$$

$$q_{k\beta} = AR_{k\beta} V'_{k\beta} \text{ avec } V'_{k\beta} = U - V_{k\beta} \quad (40)$$

$$R_{k\beta} + R_{(k+1)\beta} = 1 \quad (41)$$

nous avons donc 5 équations pour la configuration β , avec 5 inconnus qui sont :

$$R_{k\beta}, R_{(k+1)\beta}, V'_{k\beta}, V'_{(k+1)\beta}, \text{ et } \left(\frac{dP}{dx} \right)_\beta = \left(\frac{dP}{dx} \right)_{k\beta} = \left(\frac{dP}{dx} \right)_{(k+1)\beta}$$

$R_{k\beta}$ et $R_{(k+1)\beta}$ sont les taux de phase dans β

$V'_{k\beta}$ et $V'_{(k+1)\beta}$ sont les vitesses de phase dans β

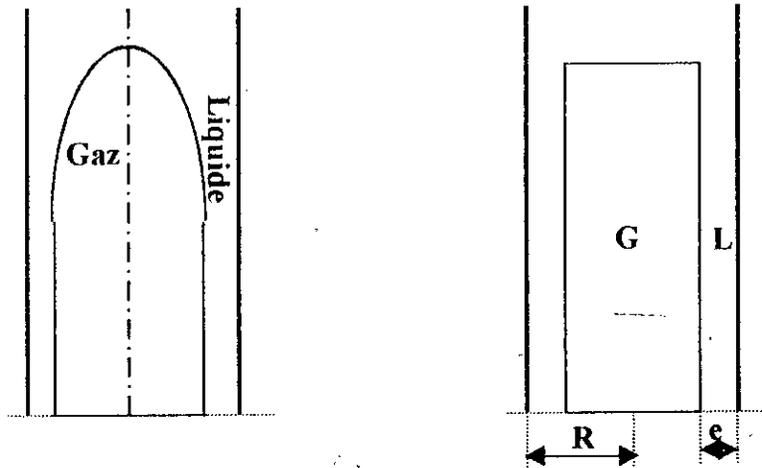
$$\left(\frac{dP}{dx} \right)_\beta = \left(\frac{dP}{dx} \right)_{k\beta} = \left(\frac{dP}{dx} \right)_{(k+1)\beta} = \text{gradient de pression dans } \beta$$

A ces équations, nous devons ajouter des lois de fermetures pour :

$$P_{IP}; \tau_{IW}; P_{WKP}; \tau_{WKP}$$

II.8.1 Equation de base dans la poche :

Dans la poche, nous proposons le schéma suivant :



Nous tirons les 5 équations dans la poche des équations (39), (40) et (41) :

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{GP} = -\rho_G g - \frac{P_{IG}\tau_{IGP}}{AR_{GP}} - \frac{P_{WGP}\tau_{WGP}}{AR_{GP}} \quad (42)$$

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{LP} = -\rho_L g - \frac{P_{IL}\tau_{ILP}}{AR_{LP}} - \frac{P_{WLP}\tau_{WLP}}{AR_{LP}} \quad (43)$$

$$q_{LP} = AR_{LP}V'_{LP} \quad (44)$$

$$q_{GP} = AR_{GP}V'_{GP} \quad (45)$$

$$R_{LP} + R_{GP} = 1 \quad (46)$$

Les 5 lois de fermetures sont :

$$P_{WGP} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{WGP} = 0 \quad (47)$$

$$P_{WLP} = 2 \cdot \pi R \quad (48)$$

$$P_{IG} = 2 \cdot \pi \cdot (R-e) \tag{49}$$

$$P_{IG} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{R_{GB}^2} \tag{50}$$

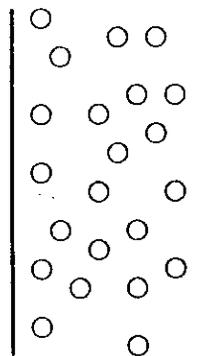
Donc :
$$R_{GB} = \frac{(R-e)^2}{R^2} \tag{51}$$

Il reste donc à déterminer τ_{ILP} et τ_{WLP} en fonction de littérature, sachant qu'en monophasique, la formule de Blasius donne :

$$\tau = \frac{1}{2} \rho f (V^2) \tag{52}$$

II.8.2 Equation de base dans le bouchon :

Dans le bouchon, nous avons le schéma suivant :



Et les équations suivantes :

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_B = -(\rho_G R_{GB} + \rho_L R_{LB}) - \frac{P_{WL} \tau_{WL}}{A} - (\beta_G R_{GB} + \beta_L R_{LB}) g \tag{53}$$

$$q_{LB} = A R_{LB} V'_{LB} \tag{54}$$

$$q_{GB} = A R_{GB} V'_{GB} \tag{55}$$

$$R_{LB} + R_{GB} = 1 \tag{56}$$

Nous avons 4 équations à 5 inconnus, nous ajoutons une équation supplémentaire sur le glissement :

$$G = V_{G\beta} - V_{L\beta} \quad (57)$$

A ces équations dans le bouchon, nous ajoutons des lois de fermetures pour :

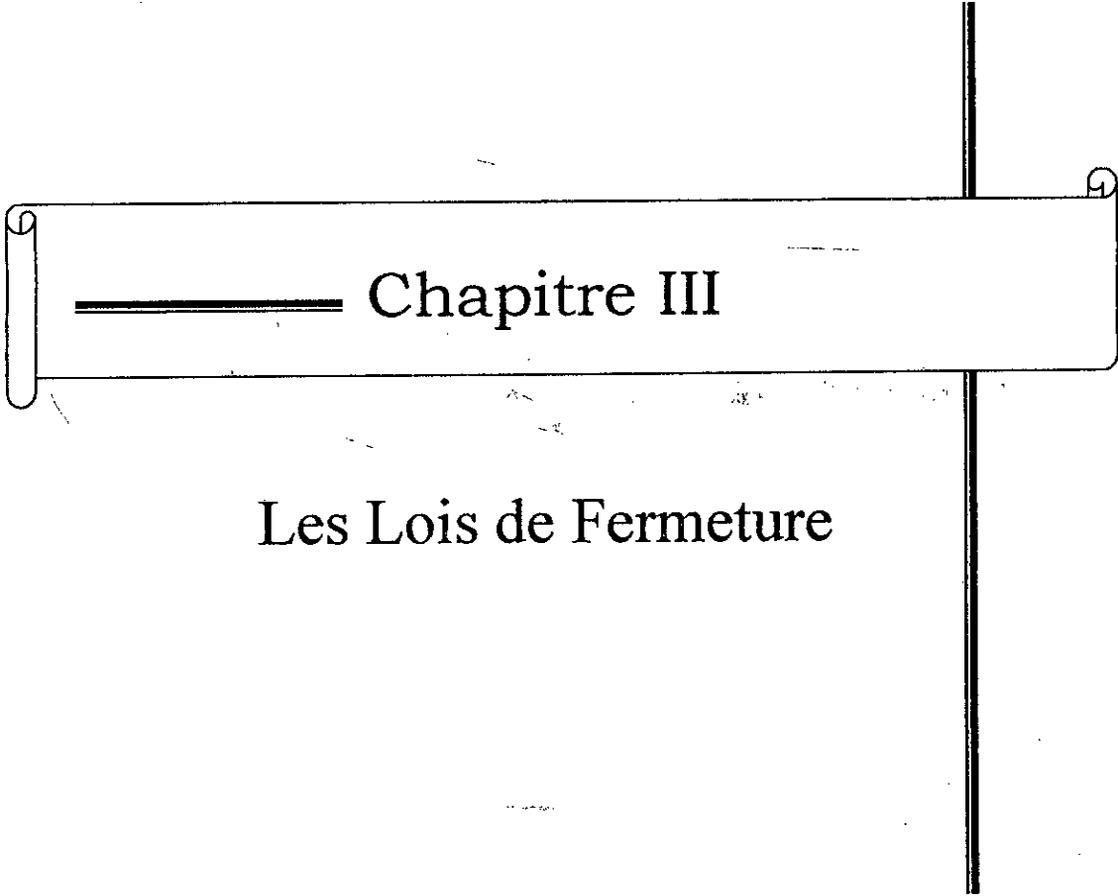
$$P_{WLB}; \tau_{WLB}; G; V_{KB}; dP/dx; R_k$$

$$\text{Nous avons : } P_{WLB} = 2 \cdot \pi \cdot R \quad (58)$$

$$V_{KB} = U - V_{K\beta} \quad (59)$$

$$\frac{dP}{dx} = \alpha_\beta \left(\frac{dP}{dx} \right)_\beta + (1 - \alpha_\beta) \left(\frac{dP}{dx} \right)_{(\beta+1)} \quad (60)$$

$$R_k = \alpha_\beta R_{K\beta} + (1 - \alpha_\beta) R_{k(\beta+1)} \quad (61)$$



Chapitre III

Les Lois de Fermeture

III.1 Introduction :

La base de notre modèle de calcul de l'écoulement intermittent réside dans l'écriture des lois de conservation, obtenus par l'application de l'opérateur de moyenne cellulaire aux équations fondamentales de la mécanique des fluides (Chapitre II). Les relations introduisent un certain nombre de grandeurs constitutives au sens large, c'est-à-dire des termes des termes pour lesquels on doit formuler des lois de fermeture : dans la poche, célérité des poches, cisaillement pariétal, cisaillement interfacial, débit d'arrachage de gaz en bout de poche et, dans le bouchon, cisaillement pariétal et glissement du gaz.

III.1 Célérité des poches :

Dans les modèles cellulaires, la vitesse et le taux de poches, conditionnent la précision des calculs, respectivement de la fraction de gaz et du frottement pariétal.

a) *Mouvement d'une poche de gaz en conduite, dans un liquide au repos :*

Le mouvement ascensionnel d'une poche de gaz en tube, dans un liquide immobile, sous l'influence de la gravité, a été étudié théoriquement par DUMITRESCU (1943), DAVIES et TAYLOR (1950)(cf.[13]). Le calcul repose sur l'hypothèse d'écoulement irrotationnel et la condition de pression nulle dans la bulle. On obtient la forme de l'interface, au voisinage du nez, en annulant les coefficients du développement limité de l'équation intégrale de Bernoulli au voisinage du point d'arrêt.

En se limitant au premier ordre, DAVIES et TAYLOR montrent que la vitesse relative est prédite avec une remarquable précision. L'expression en fonction du diamètre de conduite s'écrit :

$$U_{\infty} = C_{\infty} \sqrt{gD(\Delta\rho / \rho_L)}$$

où $C_{\infty} = 0.328$

Avec des hypothèses quelque peu différents, DIMUTRISCU trouve $C_{\infty} = 0.351$.

Ces études théoriques ne prennent pas en compte la viscosité et la tension interfaciale. Le résultat de DIMUTRESCU est confirmé par les expériences de WHITE et BEARDMORE (1962), pour :

$$\frac{gD\Delta\rho}{\sigma} > 70 \quad (1)$$

$$\frac{gD^3}{\nu^2} > 300000$$

NICKLIN et al (1962) ont montré expérimentalement l'indépendance de la vitesse d'ascension vis à vis de la longueur des poches et de leur augmentation de volume due à la détente du gaz.

ZUKOSKI (1966) (annexe A) a effectué une étude expérimentale mettant en évidence l'influence de l'inclinaison du tube.

La plupart des auteurs admettent la valeur de 0.35 pour valeur du coefficient C_{∞} , en régime contrôlé par l'inertie (conditions 1) (cf.[13]). Dans les autres cas on se réfère généralement à l'abaque de WHITE et BEARDMORE

b) Mouvement d'une poche en tube, dans un écoulement de liquide :

L'étude théorique de la vitesse ascensionnelle d'une poche de gaz soumise aux effets combinés, des forces d'Archimède et de la convection par le mouvement moyen du liquide, a été effectuée par COLLINS et al (1978) et BENDIKSEN (1985).

L'étude de COLLINS (cf.[17]) a été appliquée aux cas des écoulements laminaires et turbulents. En écoulement confiné, à débit de liquide non nul, la distribution des vitesses relative à la bulle, à l'infini amont, n'est pas uniforme. Dans son analyse, COLLINS prend en compte l'influence de la viscosité (ou la viscosité turbulente), par un artifice de calcul : il utilise les équations de fluide parfait et une distribution de rotationnel qui vérifient à l'infini amont de la poche les profils de vitesse de l'écoulement établi. Par deux méthodes analytiques différentes, il montre que la vitesse d'ascension est donnée par :

$$U_p = C_0 U_M + C_{\infty} \sqrt{gD} + \dots, \quad U_M = (U_{GS} + U_{LS})$$

Les valeurs de C_0 et C_m en écoulement laminaire diffèrent légèrement selon la méthode ($C_0 = 2.16 - 2.27, C_m = 0.347 - 0.361$). La solution complète, sans troncature, peut se mettre sous la forme générale :

$$U_p = 2U_M + 0.347\sqrt{gD} \cdot \phi(U_M / \sqrt{gD})$$

La fonction ϕ a une valeur proche de l'unité pour les faibles valeurs du nombre de Froude.

En écoulement turbulent, une analyse similaire, conduit COLLINS à une forme identique :

$$U_p = C_0(Re)U_M + 0.347\sqrt{gD} \cdot f(U_M / \sqrt{gD}, Re).$$

Les expressions de C_0 et f sont données pour $U_M / \sqrt{gD} \geq 2$. C_0 tend vers la valeur classique de 1.2 lorsque le nombre de Reynolds est très grand.

L'analyse théorique de COLLINS confirme les résultats expérimentaux obtenus par NICKLIN et al (1962). Il est intéressant de noter, comme l'a fait remarquer NICKLIN, que tout se passe comme si la poche évoluait dans un écoulement uniforme dont les vitesses sont égales à la vitesse sur l'axe. le coefficient de profil de vitesse rapportant la vitesse maximum à la vitesse moyenne : il a pour valeur exacte 2, en écoulement laminaire et pour valeur approchée 1.2 en écoulement turbulent.

BENDIKSEN (1985) a analysé théoriquement les effets combinés des forces de volume et de la tension superficielle, en écoulement laminaire et turbulent, la méthode est identique à celle de COLLINS et reste valable pour des nombres de Reynolds assez élevés : seule la condition appliquée au point d'arrêt change, et fait intervenir σ . L'auteur montre que si la tension superficielle augmente, le coefficient C_0 diminue ; il propose une relation :

$$C_0 = C_0(Re, Bo) \text{ et } f = f(Bo)$$

où les coefficients sont exprimés en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Bond défini par :

$$Bo = \frac{g\rho_L D^2}{\sigma}$$

Les résultats expérimentaux de ZUKOSKI (1966) en liquide immobile sont en bon accord avec la relation donnée pour la fonction f .

c) Mouvement d'un train de poches en conduite :

Alors que les travaux précédents concernant le mouvement de poches isolées, un certain nombre d'auteurs se sont intéressés au mouvement de train de poches générées par une alimentation continue de gaz et de liquide. A priori, on attend pas un comportement identique dans les deux cas, compte tenu de l'interaction possible de deux poches successives. Il s'agit pourtant d'un problème essentiel dans la modélisation des écoulements intermittents, qui n'a pas été abordé théoriquement. Quant aux résultats expérimentaux, leurs dispersion laisse supposer qu'il plus délicat de déterminer une célérité moyenne d'un train de poches, que de mesurer la vitesse d'une poche isolé.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des coefficients C_0 provenant de différentes sources.

	C_0	C_∞	D(mm)	Fluides
FITREMANN (1977)	1.05	0.58	44	Eau – air
TRIKI (1978)	1.15	0.58	44	Eau – air
FERNANDES et al (1983)	1.29	0.35	51	Eau – air
BENDIKSEN (1984)	1.20	0.35	25	Eau – air

L'aération des bouchons de liquide peut conduire à une augmentation de la vitesse des fronts de poche, si les bulles coalescent au nez de poche. ZAI-SHA et DUKLER (1985) ont

expliqué par un bilan de masse l'écart entre les résultats de FERNANDES et la corrélation de NICKLIN.

L'interprétation des interactions entre poches exige une analyse fine de l'écoulement dans le bouchon.

III.2 Lois constitutives dans la poche :

III.2.1 Loi de cisaillement interfacial :

Dans le gaz, la structure de l'écoulement peut s'interpréter suivant les concepts de la turbulence de la paroi : en effet, pour le gaz, l'interface liquide, lisse ou rugueuse, est vue comme une paroi mobile.

En admettant que la vitesse de la paroi est la vitesse du liquide à l'interface V'_{ks0} , les résultats classiques des écoulements turbulents en conduite circulaire s'appliquent au gaz contenu dans la poche.

Soit $V'_{ps}(y)$ la vitesse locale de la pseudo-phase poche à l'abscisse y

$$\text{à l'interface :} \quad (y = 0) \Rightarrow V'_{ps}(0) = V'_{ks0}$$

$$\text{au centre de la conduite :} \quad (y = R_l) \Rightarrow V'_{ps}(R_l) = V'_{ps0}$$

On cherche à établir une loi de variation du frottement qui dépend de (Re_l) , de la rugosité de la paroi (K_l) et de l'épaisseur moyenne du film (e_f) .

Nous avons :

$$U_l^* = \left(\frac{|\tau_l|}{\rho_G} \right)^{1/2} : \text{est la vitesse de frottement interfacial construite, construite}$$

sur le cisaillement interfacial τ_l

On associe à l'écoulement :

- Une loi de paroi universelle :

$$\frac{V'_{PS}(y)}{U_1^*} = \frac{V'_{FS0}}{U_1^*} - 2.5 \ln\left(\frac{y}{K_I}\right) - \alpha(\Re e_1^*) \quad (2)$$

- Une loi déficitaire :

$$\frac{V'_{PS}(y)}{U_1^*} = \frac{V'_{FS0}}{U_1^*} - 2.5 \ln\left(\frac{y}{R_I}\right) \quad (3)$$

- Une loi de frottement :

$$\frac{V'_{FS0}}{U_1^*} = \frac{V'_{FS0}}{U_1^*} - 2.5 \ln\left(\frac{R_I}{K_I}\right) - \alpha(\Re e_1^*) \quad (4)$$

Notons V'_{PS} : la valeur de la vitesse moyenne dans la section de la poche est égale :

$$V'_{PS} = \frac{2}{R_I} \int_0^{R_I} \left(1 - \frac{y}{R_I}\right) V'_{PS}(y) dy \quad (5)$$

de la relation (5) et (2), on a :

$$\frac{V'_{PS}}{U_1^*} = \frac{V'_{FS0}}{U_1^*} - 2.46 \ln\left(\frac{R_I}{K_I}\right) - \alpha(\Re e_1^*) - \alpha_0 \quad (6)$$

Le cisaillement interfacial s'écrit :

$$\tau_I = -\frac{1}{2} \rho_G f_I (V'_{FS0} - V'_{PS})^2 \quad (7)$$

f_I est donné par la loi de Colebrook (annexe B):

$$\frac{1}{2(f_I)^{1/2}} = 1.74 - 2 \log\left(\frac{K_I}{R_I} + \frac{1.87}{2.9 \Re e_p (f_I)^{1/2}}\right) \quad (8)$$

- *Expression de $a(\Re_e)$:*

La relation (7) s'écrit :

$$\left[\frac{|\tau_l|}{\rho_G} \right]^{1/2} = \left[\frac{f_l}{2} \right]^{1/2} |V'_{FSO} - V'_{FS}| \quad (9)$$

La relation (6) donne :

$$U_l^* = \left[\frac{|\tau_l|}{\rho_G} \right]^{1/2} = \frac{1}{\left[2.5 \ln \frac{R_l}{K_l} + a(\Re_e^*) - 3.75 \right]} |V'_{FSO} - V'_{FS}| \quad (10)$$

Il vient :

$$\frac{1}{2(f_l)^{1/2}} = \frac{1}{2(2)^{1/2}} \left(2.5 \ln \frac{R_l}{K_l} + a(\Re_e^*) - 3.75 \right)^{1/2} \quad (11)$$

La relation (8) permet d'écrire :

$$\Re_e(f_l)^{1/2} = 2(2)^{1/2} \frac{R_l}{K_l} \Re_e^* \quad \text{ou} \quad \Re_e^* = \frac{U_l^* K_l}{\nu_g}$$

alors :

$$\frac{1}{2(f_l)^{1/2}} = 1.74 - 2 \log\left(\frac{K_l}{R_l}\right) - 2 \log\left(1 + \frac{18.7}{4\sqrt{2}\Re_e^*}\right) \quad (12)$$

de (11) et (12), se déduit l'expression de $a(\Re_e)$:

$$a(\Re_e) = 8.5 - 4\sqrt{2} \log\left(1 + \frac{18.7}{4\sqrt{2}\Re_e^*}\right)$$

- *Expression de la rugosité interfaciale K_l :*

La rugosité interfaciale est exprimée en fonction de l'épaisseur du film e_F sous la forme :

$$K_l = C.e_F \quad (13)$$

HANRATTY et HEWITT (cf.[17]). proposent $C = 0.3 \left(\frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{1/3}$, pour les écoulements annulaires

co-courants.

III.2.2 Loi d'entraînement de gaz :

Le profil de vitesse de gaz dans la poche est connu. Considérons le mécanisme physique qui alimente le bouchon de liquide en gaz.

En bout de poche. Le film liquide tombant à grande vitesse entraîne un débit q_{GE} de gaz. Une partie q_{GC} est restituée au culot, le débit complémentaire q_G représente le débit de gaz alimentant réellement le bouchon. Les expressions (2),(3) et (4) permettent de calculer les différents termes q_{GE} et q_{GC} , le débit q_G étant directement exprimé par la conservation de la masse.

La modélisation consiste à évaluer la proportion de débit effectivement transmis au bouchon q_G par rapport au débit entraîné q_{GE} .

$$\text{Soit : } \alpha_q = \frac{q_{GE}}{q_G} \quad (14)$$

$$\text{comme } q_{GE} = q_G + q_{GC}, \text{ il vient : } \alpha_q = \frac{q_{GC}}{q_G} + 1$$

Le problème de la modélisation de α_q réside dans la compréhension de ce qui se passe au culot de la poche, le culot peut être considéré comme une bulle de gaz accrochée à la poche, ou comme une zone de liquide aérée (cf.[15], [16]). Si on considère que le débit q_G arraché à la poche représente une injection de gaz dans le film, c'est l'expansion consécutive du film qui explique la fermeture de la poche, avec un culot assimilable à une bulle de gaz. Si on considère que le jet de gaz entraîné avec un débit q_{GE} éclate à la surface du bouchon de liquide, alors on peut envisager que c'est l'agitation turbulente créée par l'impact du jet qui restitue au culot le débit q_{GC} , c'est cette deuxième hypothèse que l'on retenue, compte tenu des travaux de DUKLER.

Le débit q_{GC} de gaz est modélisé par la relation suivante : $q_{GC} = A_I \alpha_K V'_{GC}$ (15)

où A_I est la surface complète de la poche.

α_K est le taux de gaz dans cette zone et V'_{GC} , la vitesse du gaz au culot. La vitesse V'_{GC} est imprimé au gaz par le liquide. Plusieurs auteurs ont proposé la formule suivante:

$$V'_{GC} = \alpha V'_{PSO} \text{ avec } \alpha \approx 0.25$$

Pour le taux de gaz, on pose :
$$\alpha_K = \frac{q_{GE}}{q_{GE} + q_F}$$

- **Expression de q_{GE} :**

La section A_I de la poche vaut $A_I = \pi R_I^2$

Soit A_E , la section sur laquelle le débit q_{GE} est entraîné:

$$A_G = A_I - \pi(R_I - \delta_E)^2 = \pi R_I^2 (1 - (1 - \zeta_E)^2) \quad (16)$$

δ_E correspond à l'abscisse où la vitesse de gaz s'annule, soit :

$$V'_{PS}(\delta_E) = 0 \text{ soit dans (71) } \zeta_E = \frac{\delta_E}{R_I} = \exp\left(\frac{V'_{PSO}}{2.5U_1^*}\right)$$

Dans cette relation, V'_{PSO} est calculé en injectant (3) dans (4).

Il vient :

$$V'_{PSO} = V'_{PS} - 3.75U_1^* \quad (17)$$

d'où :

$$q_{GE} = 2\pi \int_0^{\delta_E} (R_I - y) V'_{PS}(y) dy \quad (18)$$

soit :

$$q_{GE} = 2\pi R_l \left[V'_{PSO} \left(\zeta_E - \frac{\zeta_E^2}{2} \right) - 2.5U_l^* \left(\zeta_E - \frac{\zeta_E^2}{2} \right) \ln \zeta_E + 2.5U_l^* \zeta_E \left(1 - \frac{\zeta_E}{4} \right) \right] \quad (19)$$

La modélisation de q_{GC} (15) et le calcul de q_{GE} (18) déterminent le débit q_G par la relation (14), soit encore :

$$\alpha_q = \frac{q_{GE}}{q_G} = \frac{\pi R_l^2 \frac{q_{GE}}{q_{GE} + q_L} V'_{GC}}{q_G} \quad (20)$$

Compte tenu des relations précédentes, on peut écrire les relations équivalentes :

$$q_{GE} = 5\pi R_l^2 U_l^* \zeta_E \left(1 - \frac{\zeta_E}{4} \right) \quad (21)$$

$$q_{GC} = -\pi R_l^2 [V'_{PSO} + 1.25U_l^* (1 - \zeta_E)(3 - \zeta_E)] \quad (22)$$

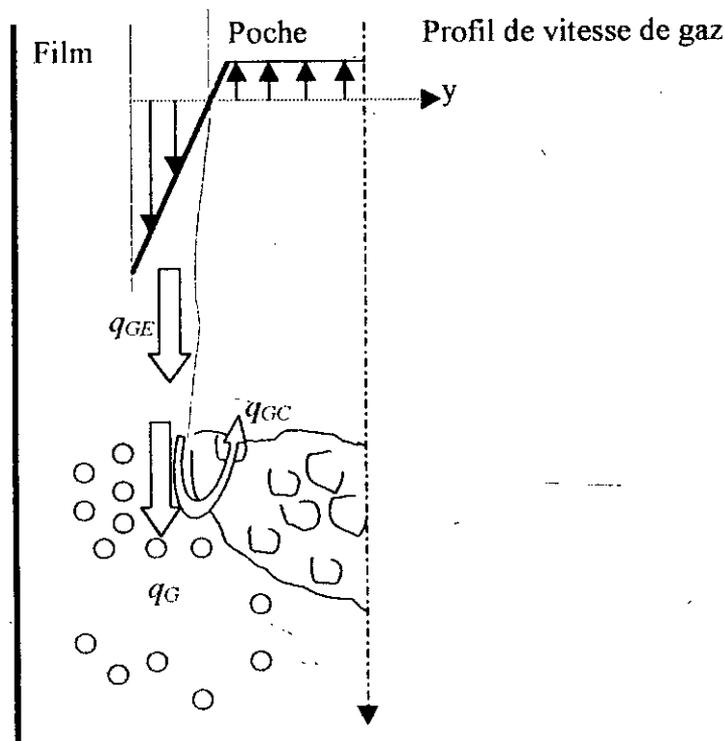


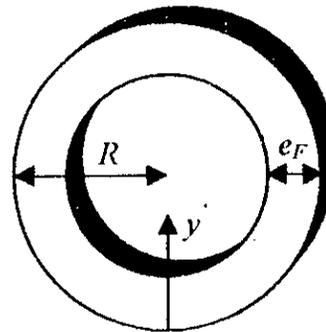
Fig. III.1 : Entraînement du gaz dans la phase séparée

III.2-3 Loi de cisaillement film-paroi en écoulement établi :

a) Profil de cisaillement dans le film en écoulement parallèle :

R : Rayon de la conduite

e_F : Epaisseur de film



Le bilan de quantité de mouvement appliqué au film liquide en écoulement parallèle donne :

$$\tau_F(1 - \zeta') = \tau_l(1 - \zeta'_l) + (\rho_F g - \frac{dP}{dx})R(\zeta'_l - \zeta') \quad (23)$$

avec : $\zeta' = \frac{y'}{R}$ et $\zeta'_l = \frac{e_F}{R}$

Soit, l'expression du cisaillement dans le film :

$$\tau_F = \tau_l \left(\frac{1 - \zeta'_l}{1 - \zeta'} \right) + (\rho_F g - \frac{dP}{dx})R \frac{\zeta'_l - \zeta'}{1 - \zeta'} \left(1 - \frac{\zeta'_l + \zeta'}{2} \right) \quad (24)$$

à la paroi : $\zeta' = 0$, il vient $\tau_F = \tau_{WF}$

où τ_{WF} est le cisaillement pariétal :

$$\tau_{WF} = \tau_l(1 - \zeta'_l) + (\rho_F g - \frac{dP}{dx})R \zeta'_l \left(1 - \frac{\zeta'_l}{2} \right) \quad (25)$$

Les équations (24) et (25) donnent :

$$\tau_F = \tau_l \left(\frac{1 - \zeta'_l}{1 - \zeta'} \right) + \frac{[\tau_{WF} - \tau_l(1 - \zeta'_l)]}{\zeta'_l \left(1 - \frac{\zeta'_l}{2} \right)} \left(\frac{\zeta'_l - \zeta'}{1 - \zeta'} \right) \left(1 - \frac{\zeta'_l + \zeta'}{2} \right) \quad (26)$$

l'expression (26) se simplifié en considérant que ξ' et ξ'_l sont des infiniment petits de même ordre :

- quand $\xi' \rightarrow 0$ et $\xi'_l \rightarrow 0$, la partie principale de (26) s'écrit :

$$\tau_F^{(0)} = \tau_l + (\tau_{WF} - \tau_l) \left(1 - \frac{\xi'}{\xi'_l}\right)$$

ou

(27)

$$\tau_F^{(0)} = \tau_l + (\tau_{WF} - \tau_l) \left(1 - \frac{y'}{e_F}\right)$$

- au second ordre près, il vient:

$$\tau_F = \tau_F^{(0)} + \tau_F^{(1)}$$

avec

(28)

$$\tau_F^{(1)} = \tau_l + (\tau_{WF} - \tau_l) \frac{\xi'}{2} \left(1 - \frac{\xi'}{\xi'_l}\right)$$

- en conclusion:

$$\tau_F = \tau_F^{(0)} + \tau_F^{(1)} + \dots$$

$$\tau_F^{(0)} = \tau_l + (\tau_{WF} - \tau_l) \left(1 - \frac{y'}{e_F}\right) \quad (29)$$

$$\tau_F^{(1)} = \tau_l + (\tau_{WF} - \tau_l) \frac{y'}{2R} \left(1 - \frac{y'}{e_F}\right)$$

Le rapport des cisaillements est noté $\alpha_c = \frac{\tau_l}{\tau_{WF}}$, il vient:

$$\begin{aligned}\frac{\tau_F^{(0)}}{\tau_{WF}} &= \alpha_c + (1 - \alpha_c) \left(1 - \frac{y'}{e_F}\right) \\ \frac{\tau_F^{(1)}}{\tau_{WF}} &= \frac{e_F}{R} \left[(1 - \alpha_c) \frac{y'}{2e_F} \left(1 - \frac{y'}{e_F}\right) \right]\end{aligned}\quad (30)$$

- *Ecoulement laminaire:*

Le profil de vitesse est solution de:

$$e_F \nu_F \frac{dV_F'}{dy'} = \tau_F(y') \quad (31)$$

Considérons les nombres suivants:

$$U_{WF}^* = \left[\frac{|\tau_F|}{\rho_F} \right]^{1/2}, \quad \Re e_{WF}^* = \frac{U_{WF}^* e_F}{\nu_F}, \quad V_F^+ = \frac{V_F'}{U_F^*}, \quad U^+ = \frac{U}{U_{WF}^*} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{y'}{e_F}$$

d'après (30):

$$\frac{V_F^+ - U^+}{\Re e_{WF}^*} = \underbrace{\alpha_c \beta + (1 - \alpha_c)^2 \left(\beta - \frac{\beta^2}{2}\right)}_{V_F^{+(0)} / \Re e_{WF}^*} + \underbrace{(1 - \alpha_c) \frac{e_F}{2R} \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{3}\right)}_{V_F^{+(1)} / \Re e_{WF}^*} \quad (32)$$

L'intégration de (32) sur la surface du film donne la vitesse V_{FS}' :

$$V_{FS}' = \frac{1}{A_F} \int_0^{e_F} 2\pi(R - y') V_F' dy' \quad \text{avec} \quad A_F = 2\pi \Re e_F \left(1 - \frac{\zeta_l}{2}\right)$$

soit:

$$V_{FS}' = \left(1 + \frac{\zeta_l}{2}\right) \int_0^1 (1 - \beta \zeta_l) V_F'(\beta) d\beta \quad (33)$$

Injectons (32) dans (33):

$$\frac{V'_{FS}}{\Re e_{WF}^* U_{WF}^*} = \frac{U}{\Re e_{WF}^* U_{WF}^*} + \left(1 + \frac{\zeta_l}{2}\right) \left[\underbrace{\int_0^1 (1 - \beta \zeta_l) \frac{V_F^{(0)}}{\Re e_{WF}^*} d\beta}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 (1 - \beta \zeta_l) \frac{V_F^{(1)}}{\Re e_{WF}^*} d\beta}_{I_2} \right] \quad (34)$$

Après calcul on trouve:

$$I_1 = \frac{1}{3} + \frac{\alpha_c}{6} - \frac{\zeta_l}{24} (5 + 3\alpha_c)$$

$$I_2 = \frac{\zeta_l}{24} (1 - \alpha_c) - \frac{7\zeta_l^2}{240} (1 - \alpha_c)$$

Au premier ordre, il vient: $(1 + \frac{\zeta_l}{2})(I_1 + I_2) = 1 + \frac{\alpha_c}{2} - \frac{\alpha_c}{4} \zeta_l$

Soit:

$$\frac{V'_{FS} - U}{\Re e_{WF}^* - U_{WF}^*} = \frac{1}{3\alpha_0} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_c}{2} - \frac{\alpha_c}{4} \zeta_l} \quad (35)$$

posons:

$$\Re e_F = \frac{4e_F |V'_{FS} - U|}{\nu_F}$$

Le cisaillement pariétal s'exprime par la relation:

$$\tau_{WF} = \frac{1}{2} \rho_F f_{WF} (V'_{FS} - U) |V'_{FS} - U|$$

la relation (35) entraîne la loi de frottement:

$$f_{WF} = 24\alpha_0 \Re e_F^{-1} \quad (36)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_c}{2} - \frac{\zeta_l}{4} \alpha_c}$$

La relation entre le vitesse V'_{FS0} a la surface du film et la vitesse V'_{FS} s'obtient à partir de (32) en opérant $\beta = 1$, soit:

$$\frac{V'_{FS0} - U}{\text{Re}'_{WF} U'_{WF}} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\alpha_c}{2} + \frac{\zeta_I}{6} (1 - \alpha_c) \right]$$

en comparant à (35), il vient:

$$\frac{V'_{FS0} - U}{\text{Re}'_{WF} U'_{WF}} = \frac{3}{2} \frac{1 + \alpha_c + \frac{\zeta_I}{6} (1 - \alpha_c)}{1 + \frac{\alpha_c}{2} - \frac{\zeta_I}{4} \alpha_c} \quad (37)$$

- **Écoulement turbulent:**

Remarque:

L'écoulement turbulent dans le film à une structure complexe qui résulte de l'interaction entre la turbulence produite à la paroi et de la turbulence produite à l'interface (cf.[17]).

- Près de la paroi, le profil de vitesse moyenne peut être intrprétée suivant une loi logarithmique classique et on vérifie que le concept de viscosité turbulente, pour le cisaillement turbulent, est acceptable.

- Près de l'interface, la structure est différente: la turbulence résulte essentiellement d'un équilibre transport-dissipation, la turbulence étant générée dans la zone de vagues interfaciales. Ceci est vrai dans le cas où les vagues sont importantes, quand l'épaisseur de la phase liquide est important, même si le transport est moins important, son rôle doit rester prépondérant (le gradient de vitesse moyenne étant faible, et, par conséquent production locale de turbulence). Le rôle prédominant du transport dans la région interfaciale fait rejeter le concept de viscosité turbulente dans cette zone.

La structure particulière de la turbulence dans cette région est responsable de la génération d'écoulements secondaires dans le film, ce qui invaliderait l'équation (26). Sans inforamation epxérimentale, nous continuerons donc d'accepter, le bilan de quantité de mouvement en écoulement parrallèle.

Champ de vitesse moyenne dans le film:

Compte tenu des remarques précédentes, plusieurs auteurs ont choisi les schémas suivant, pour le profil de vitesse moyenne dans le film:

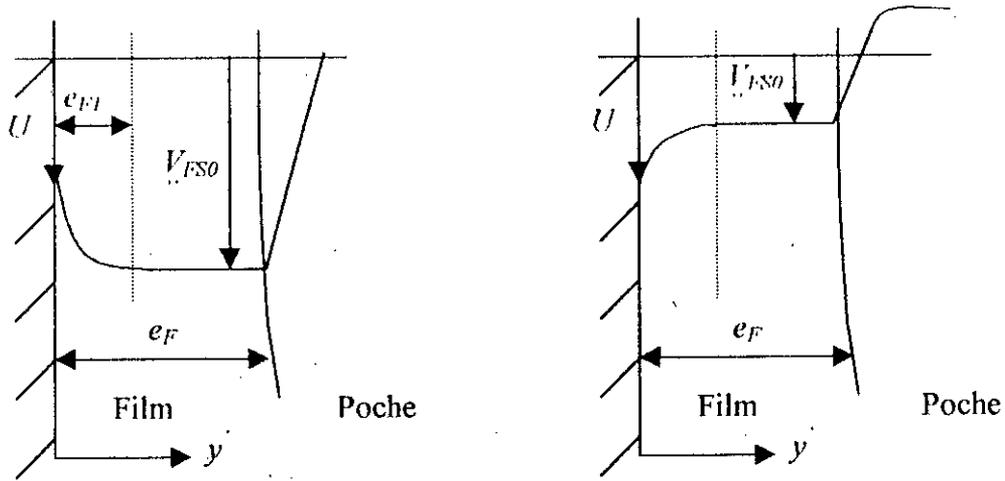


Fig. III.2 : Profils de vitesse moyen dans le film

Champ de vitesse relative dans le film:

Soit y' , la variable spatiale définie par les schémas précédent. Nous distinguons dans le film une zone de paroi ($0 < y' < e_{FI}$) à gradient de vitesse. Dans cette zone, le profil de vitesse de liquide est supposé logarithmique. Nous introduisons une zone d'interface ($e_{FI} < y' < e_F$) à vitesse constante.

- $0 < y' < e_{FI}$ Lois logarithmiques

- Loi de paroi:

$$\frac{V'_{FS}(y') - U}{U_{WF}^*} = 2.5 \ln\left(\frac{y'}{K_W}\right) + a(\text{Re}_{WF}^*) \tag{38}$$

- Loi déficitaire:

$$\frac{V'_{FS}(y) - V'_{FSO}}{U_{WF}^*} = 2.5 \ln\left(\frac{y'}{e_{FI}}\right) \tag{39}$$

- Loi de frottement:

$$\frac{V'_{FS1} - U}{U_{WF}^*} = 2.5 \ln\left(\frac{e_{F1}}{K_W}\right) + a(\Re e_{WF}^*) \quad (40)$$

• $e_{F1} < y < e_F$ Vitesse constante

$$V'_{FS}(y) = V'_{FS0} \quad (41)$$

L'intégration du profil de vitesse dans le film s'écrit:

$$V'_{FS} = \frac{1}{A_F} \int_{A_F} V'_{FS} dA_F = \frac{A_{F1}}{A_F} V'_{FS1} + \left(1 - \frac{A_{F1}}{A_F}\right) V'_{FS0} \quad (42)$$

avec:
$$\frac{A_{F1}}{A_F} = \frac{e_{F1}}{e_F} \left(1 + \frac{e_{F1} - e_F}{R}\right)$$

et
$$V'_{FS1} = \frac{1}{A_{F1}} \int_{A_{F1}} V'_{FS} dA_{F1}$$

- Loi de frottement:

La relation (40) équivaut à l'expression suivante du frottement pariétal:

$$\tau_{WFS} = \frac{1}{2} f_{WFS1} \rho_F (V'_{FS1} - U) |V'_{FS1} - U|$$

où f_{WFS1} est donné par une formule type Colebrook (annexe B):

$$\frac{1}{2\sqrt{f_{WFS1}}} = 1.74 - 2 \log \left[\frac{K_W}{2e_{F1}} + \frac{18.7}{29\Re e_{FS1} \sqrt{f_{WFS1}}} \right] \quad (43)$$

où
$$\Re e_{FS1} = \frac{4e_{F1} |V'_{FS1} - U|}{\nu_F}$$

- L'épaisseur e_{F1} :

L'épaisseur e_{F1} délimite le zone de validité du profil logarithmique vis-à-vis de la zone à vitesse uniforme dominée par la turbulence interfaciale.

Dans le cas de l'écoulement contre-courant, il paraît logique d'admettre que e_{F1} soit défini par le point où le cisaillement s'annule, soit d'après (27):

$$1 - \frac{e_{F1}}{e_F} = \frac{-\tau_I}{\tau_{WF} - \tau_I}$$

soit:
$$\frac{e_{F1}}{e_F} = \frac{1}{1 + |\alpha_v|} \quad (44)$$

Le modèle constitutif de cisaillement interfacial peut être synthétisé par les relations (40), (42), (43) et (44) qui établissent un lien constitutif entre V'_{FS} , V'_{FS1} , V'_{FS0} , τ_{WF} et τ_I .

Les expressions (38), (39) et (40) permettent de calculer les valeurs de la vitesse du film V'_{FS1} et V'_{FS0} moyennées respectivement sur les zones avec et sans gradient de vitesse.

$$V'_{FS0} = V'_{FS} + 2.5U_{WF}^* \frac{(4R - e_{F1})e_{F1}}{2(2R - e_F)e_F}$$

$$V'_{FS1} = V'_{FS} - 2.5U_{WF}^* \frac{(4R - e_{F1})e_{F1}}{2(2R - e_F)e_F}$$

$$V'_{FS1} = V'_{FS0} - 2.5U_{WF}^* \frac{(4R - e_{F1})e_{F1}}{(2R - e_F)e_F} \quad (45)$$

III.3 Lois constitutives dans le bouchon :

III.3.1 loi de glissement de gaz dans le bouchon :

DUKLER et al (1983) (cf.[9],[12]). identifient le glissement dans le bouchon, comme le glissement relatif entre le gaz et le liquide dans les écoulements à bulles, et ils proposent la relations suivantes :

$$G_B = 1.53(1 - R_{GB})^{1/2} \left[\frac{\sigma g (\rho_L - \rho_G)}{\rho_L^2} \right]^{1/4}$$

D'après les résultats expérimentaux de LINE et MASBERNAT (1985), et FRECHOU (1986); cette relation n'est pas entièrement vérifiée.

Dans notre modèle, nous avons opté pour la formule de WALLIS, calibré par la constante de Levitch:

$$G_B = C \left[\frac{\sigma g (\rho_L - \rho_G)}{\rho_L^2} \right]^{1/4} \quad (46)$$

où la constante C est fixée par LEVITCH, $C=1.41$

III.3.2 Loi de cisaillement pariétal dans le bouchon:

Si l'on suppose que seule la phase liquide mouille le paroi, on peut exprimer le cisaillement pariétal par une loi de type monophasique (cf.[14],[19]):

$$\tau_{wLB} = \frac{1}{2} f_{wLB} \rho_L V_{LD}^2 \quad (47)$$

Le facteur de friction f_{wLB} est calculé par une loi type Colebrook (annexe B) en fonction de la rugosité de la paroi (K_w/R) et du nombre de Reynolds:

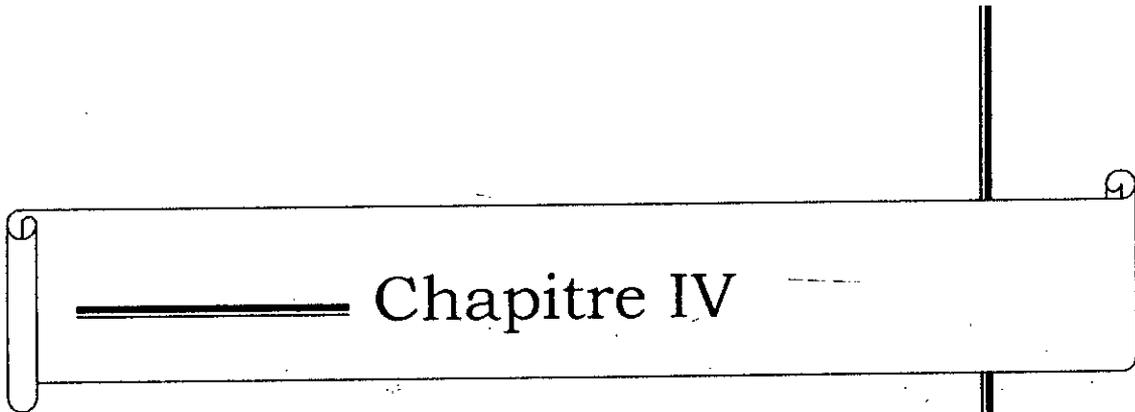
$$\Re_D = \frac{D V_{LD}}{\nu_L} \quad (48)$$

$$\text{avec } V_{LD}^2 = (U - V'_{LD})^2 \quad (49)$$

$$\text{et } \tau_{wLB} = \frac{1}{2} f_{wLB} \rho_L (U - V'_{LD})^2 \quad (50)$$

$$\text{sachons que: } \Re_D = \frac{D |U - V'_{LD}|}{\nu_L} \quad (51)$$

$$\text{et } f_{wLB} = F\left(\frac{K_w}{R}, \Re_D\right) \quad (52)$$



Chapitre IV

Equations de Navier-Stokes et
méthode des différences finies

Introduction :

Dés la fin du XVII^e siècle, les équations différentielles ont reçu une attention constante de la part des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs. Objet d'études théoriques pour les uns, outil essentiel pour les autres, cette branche, plus que toute autre, a vu son développement lié à celui de la physique et des sciences de l'ingénieur. Ce phénomène est aujourd'hui apparent non seulement dans le contexte de la physique moderne, mais également dans celui de théories plus classiques telles que la mécanique des fluides et l'élasticité qui proposent des équations différentielles non linéaires particulièrement ardues.

Grâce au développement des ordinateurs, la simulation numérique occupe une place en plus importante dans la recherche appliquée ; sans substituer à l'expérimentation matérielle, elle la prépare et la complète.

L'approche d'un problème par la simulation numérique comporte essentiellement trois étapes. La première est l'établissement d'un modèle mathématique qui comporte souvent des équations différentielles ; l'étude théorique du comportement des solutions de ces équations fournit de précieux renseignements sur la validité du modèle. Dans la deuxième étape, on « discrétise » le problème, c'est à dire que l'on approche les équations par un système algébrique fini, linéaire ou non linéaire. La troisième phase consiste à résoudre numériquement le système algébrique. Chacune de ces étapes contient des difficultés mathématiques spécifiques. La discrétisation doit refléter les propriétés essentielles du modèle (consistance) ; de plus elle, doit posséder une propriété spécifique aux problèmes approchés : la stabilité numérique. Enfin, le choix d'une méthode de résolution du système algébrique dépendra de la nature et de l'envergure du problème discrétisé.

IV.1 Modélisation des équations de NAVIER-STOKES :

Dans ce paragraphe, nous introduisons les équations de la dynamique des fluides à partir des principes de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Introduisons la notion de l'opérateur nabla :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

où n est la dimension d'espace. Pour une fonction scalaire, nous notons $\nabla\varphi$ le gradient de φ , pour une fonction vectorielle, $\nabla\underline{u}$ représente la divergence de \underline{u} et pour un tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ de composante $\sigma_{ij}, i, j = 1, \dots, n$, nous nous notons $\nabla\underline{\underline{\sigma}}$ le vecteur de composantes :

$$(\nabla\underline{\underline{\sigma}})_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}$$

IV.1.1 Conservation de la masse :

Le principe de la conservation de la masse dans un fluide s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0. \quad (1)$$

IV.1.2 Conservation de la quantité de mouvement :

Ce principe traduit l'équilibre des forces d'inerties et les forces extérieures (forces de pression, forces volumiques et forces de viscosité), il s'exprime par la formule suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right) = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}. \quad (2)$$

Pour un fluide, on peut considérer le tenseur de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ comme la somme d'une partie isotrope $-pI$, et une partie non-isotrope $\underline{\underline{d}}$ appelée tenseur visqueux des contraintes.

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{d}}. \quad (3)$$

Nous supposons que le fluide est newtonien, de sorte que le tenseur $\underline{\underline{d}}$ possède la forme suivante :

$$\underline{\underline{d}} = 2\mu(\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \underline{\underline{u}})\underline{\underline{I}}). \quad (4)$$

Où $\underline{\underline{e}}$ est le tenseur des déformations linéarisées :

$$(\underline{\underline{e}})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5)$$

Si la viscosité peut être considérée comme constante, la combinaison de (2) et (5) conduit aux équations de NAVIER-STOKES.

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial t} + (\underline{\underline{u}} \cdot \nabla) \underline{\underline{u}} \right) = \rho \underline{\underline{f}} - \nabla p + \mu (\Delta \underline{\underline{u}} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \underline{\underline{u}})). \quad (6)$$

Où Δ est le Laplacien définie par $\Delta = \nabla \cdot \nabla$. Pour un fluide incompressible, c'est-à-dire à densité constante, l'équation (II.1) prend la forme :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{u}} = 0. \quad (7)$$

Et l'équation (II) s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial t} + (\underline{\underline{u}} \cdot \nabla) \underline{\underline{u}} \right) = \rho \underline{\underline{f}} - \nabla p + \mu \Delta \underline{\underline{u}}. \quad (8)$$

Le terme $(\underline{\underline{u}} \cdot \nabla) \underline{\underline{u}}$ est appelé terme de la convection et le terme $\mu \Delta \underline{\underline{u}}$ représente la diffusion de la quantité de mouvement dans le fluide (terme de viscosité). Dans la suite le système (7) et (8) sera appelé «équation de NAVIER-STOKES».

IV.2 Présentation du problème traité :

La modélisation des écoulements intermittents nécessite de se donner un certain nombre de lois de fermeture. Ces lois expriment généralement les interactions entre gaz et liquide d'une part entre liquide et paroi d'autre part. il ne fait aucun doute que, parmi ces différentes lois, celle qui exprime la vitesse de déplacement des poches de gaz est

déterminante dans la prédiction des fractions de gaz et du gradient de pression. Les travaux entrepris sur ce problème, tant sur le plan théorique, que sur le plan expérimental, montre l'intérêt manifesté par les chercheurs à prédire correctement la vitesse ascensionnelle des poches de gaz par rapport à un liquide au repos ou en mouvement dans un tube.

Si on considère une poche isolée, de grande longueur devant le diamètre du tube, en mouvement uniforme dans un liquide, au repos ou en mouvement, on peut en donner la représentation de la figure ci-dessous.

On admettra la symétrie axiale, et l'hypothèse d'écoulement uniforme suppose que le volume de la poche ne varie pas (pas d'effet de détente) : expérimentalement cette condition est respectée lorsque le tube est fermé ou lorsque la pression à l'intérieur est importante, c'est à dire lorsque :

$$\rho_l g h / p \ll 1$$

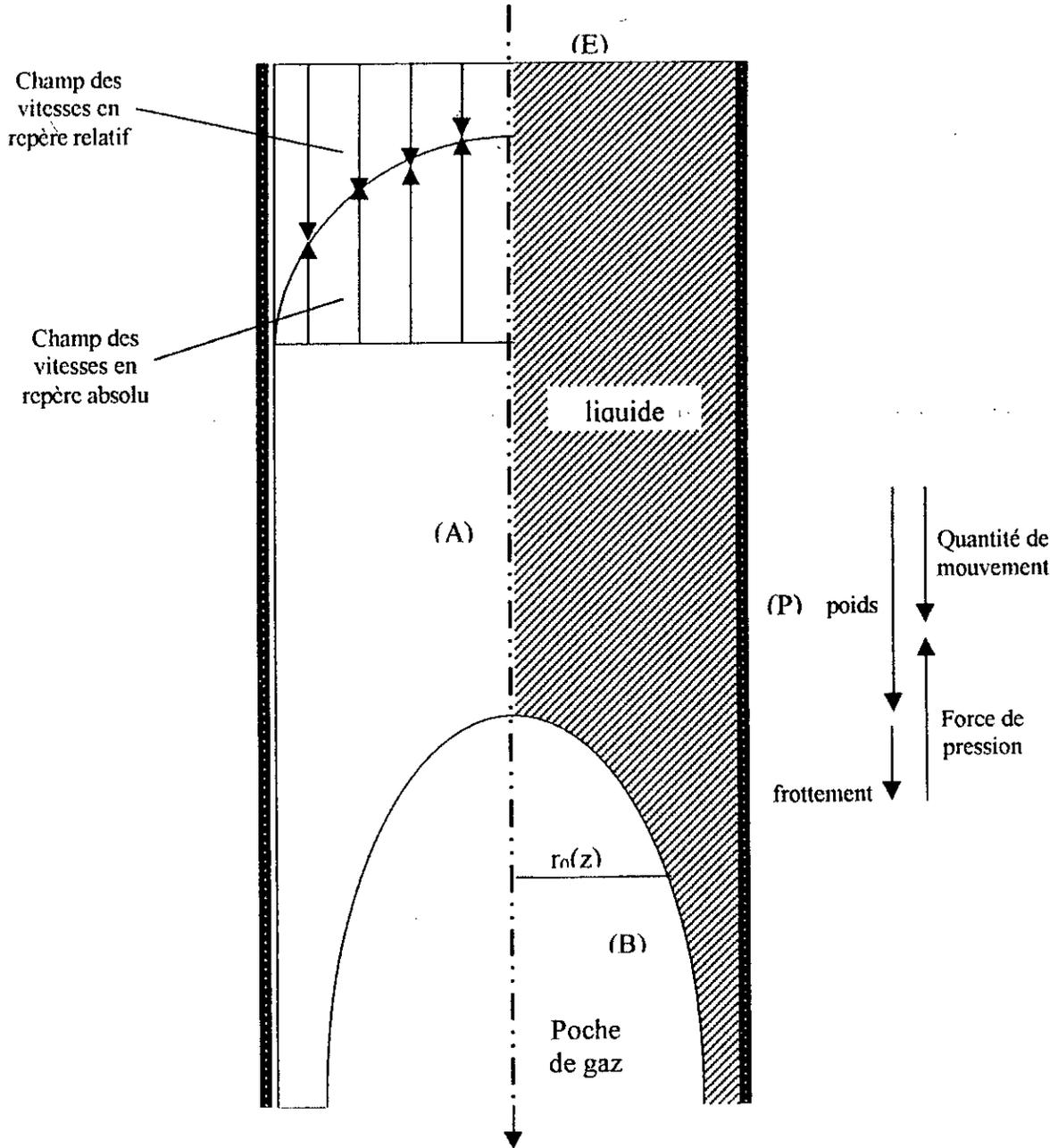
où h est la hauteur entre sondes de mesure de passage de la poche.

On admettra aussi que la poche est suffisamment longue de manière à ce que l'écoulement dans le film soit pleinement développé. Dans ces conditions on ne se préoccupe pas de l'écoulement au culot.

Examinons le problème physique en raisonnant dans un repère, en mouvement avec la poche de gaz (figure ci-dessous). Lorsque le débit de liquide est nul, le champ des vitesses, dans le repère relatif, est uniforme, en amont de la poche. Lorsque le débit correspond à un mouvement ascendant du liquide le champ des vitesses, dans le repère relatif, n'est plus uniforme, et la valeur sur l'axe est minimum. On peut admettre par hypothèse que la surface de la poche est une ligne isobare sur laquelle le frottement est nul. Dans ces conditions, l'équilibre de forces appliqué au liquide montre que la différence des débits de quantité de mouvement (dirigé vers le bas) équilibre la résultante des forces (de gravité d'Archimède et de frottement). Précisément, la force de gravité joue un rôle dominant : elle est d'autant plus importante que le rayon de courbure de la poche est plus faible.

Tout se passe comme si la poche se déplaçait dans un écoulement de liquide de vitesse uniforme, égale à la valeur sur l'axe de symétrie.

On traitera ici le cas de l'écoulement laminaire sur une poche de forme imposée à priori, sur laquelle on ne retient que la condition de frottement nul. Ce qui fixe la distribution à l'infini amont dans le repère fixe ; la vitesse mobile, qui est aussi la vitesse de la poche, quoique inconnue à priori, sera aussi imposée.



IV.2.1 Formulation du problème :

On cherche à résoudre les équations de Navier-Stokes dans le domaine physique hachuré (figure ci-dessus) limité par l'axe (A), la section d'entrée (E), la paroi (B), la section de sortie (S), la poche (B). par symétrie axiale $u_\theta = 0$. On cherche le champ de vitesses $u(u_r, u_z)$ et de pression vérifiant l'équation (II-8), avec des conditions aux frontières :

$$u_z = U(r,t) \quad / \quad u_z = 0 \text{ sur (E)}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \quad / \quad u_r = 0 \text{ sur (A)}$$

$$u_z = U_p(t) \quad / \quad u_r = 0 \text{ sur (P)}$$

$$u_z/u_r = dr_0/dz \quad / \quad \tau = 0 \text{ sur (B)}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad / \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0 \text{ sur (S)}$$

IV.2.2 Formulation adimensionnelle :

On travaillera en grandeurs sans dimension, en normant les vitesses par U_p et les longueurs par R , c'est-à-dire :

$$\underline{x} := \frac{x}{R}, t := \frac{tU_p}{R}, \underline{u} := \frac{u}{U_p}, p := \frac{p}{\rho U_p^2}, \underline{f} := \frac{fR}{U_p^2}$$

avec ces nouvelles variables, le système (7), (8) prend la forme adimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{u} = 0, \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \frac{1}{\Re e} \Delta \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nabla p = \underline{f}, \end{cases} \quad (9)$$

$$\underline{f} = \frac{gR}{U_p^2} \vec{k}$$

le problème dépend des deux nombre sans dimension :

$$Fr_p = U_p^2 / gR \quad (\text{nombre de Froude dans la poche})$$

$$\Re e_p = U_p R / \nu \quad (\text{nombre de Reynolds dans la poche})$$

IV.3 Méthodes de différences finies :

Dans ce paragraphe, nous allons approcher les équations de Navier-Stokes par des méthodes de différences finies. Nous remarquons que la condition d'incompressibilité ne contient pas la pression et doit être considérée comme une contrainte sur la vitesse.

Soit u la solution du système dynamique suivant :

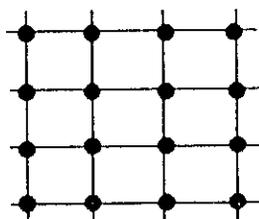
$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad u(t_0) = u_0 \quad (*)$$

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Si la fonction f satisfait des conditions ^(*), la solution u existe et est unique.

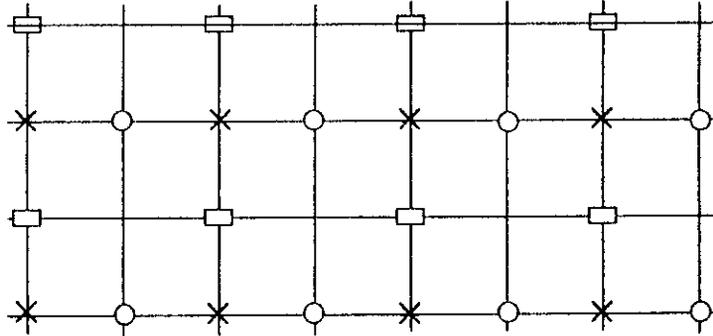
IV.3.1 Discrétisation :

Dans le cadre de notre travail présenté, la forme de la poche est imposée a priori (rectangulaire), donc nous supposons que notre domaine Ω est rectangulaire, muni d'un maillage uniforme et que la frontière Γ de Ω coïncide avec des lignes du maillage. Le positionnement des inconnus u_r , u_z et p est considéré comme suit



● u_r, u_z, p

La discrétisation de ∇p , est calculée au moyen des différences centrées. Ceci implique que pour les points x du maillage, on utilise les points o pour la dérivée $\frac{\partial p}{\partial r}$ et les points l pour la dérivée $\frac{\partial p}{\partial z}$.



IV.3.2 Discrétisation explicite :

Nous écrivons les équations de Navier-Stokes comme suit :

$$\begin{cases} \nabla \underline{u} = 0 \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla p = \underline{R} \end{cases} \quad (10)$$

avec $\underline{R} = -(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \frac{1}{R_e} \Delta \underline{u} + \underline{f}$.

Le système (10) est discrétisé de manière explicite en temps, en utilisant les niveaux $n \Delta t$ et $(n+1) \Delta t$ où Δt désigne le pas de variable de temps :

$$\begin{cases} \nabla \underline{u}^{n+1} = 0 \\ \frac{\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = \underline{R}^n \end{cases} \quad (11)$$

Nous discrétisons la première et la deuxième équation de (11) par des différences centrées :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_r}{\partial r} \right|_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2h} (u_r^{n+1}(i+1,j) - u_r^{n+1}(i-1,j)) + o(\Delta r^2) \\ \left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2h} (u_z^{n+1}(i,j+1) - u_z^{n+1}(i,j-1)) + o(\Delta z^2) \\ \left. \frac{\partial u_r}{\partial t} \right|_{i,j} &= \frac{1}{\Delta t} (u_r^{n+1}(i,j) - u_r^n(i,j)) + o(\Delta t) \\ \left. \frac{\partial u_z}{\partial t} \right|_{i,j} &= \frac{1}{\Delta t} (u_z^{n+1}(i,j) - u_z^n(i,j)) + o(\Delta t) \end{aligned}$$

donc nous obtenons :

$$(D_h \mathbf{u})_i^{n+1} = \frac{1}{2h} (u_r^{n+1}(i+1,j) - u_r^{n+1}(i-1,j)) + \frac{1}{2h} (u_z^{n+1}(i,j+1) - u_z^{n+1}(i,j-1)) = 0 \quad (12)$$

où D_h désigne l'opérateur de divergence discrète.

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (u_r^{n+1}(i,j) - u_r^n(i,j)) + \frac{1}{2h} (p^{n+1}(i+1,j) - p^{n+1}(i-1,j)) = (R_1)_{i,j}^n \\ \frac{1}{\Delta t} (u_z^{n+1}(i,j) - u_z^n(i,j)) + \frac{1}{2h} (p^{n+1}(i,j+1) - p^{n+1}(i,j-1)) = (R_2)_{i,j}^n \end{cases} \quad (13)$$

A partir des équations (12) et (13), on peut déduire que p^{n+1} satisfait l'équation suivante du type Poisson :

$$\frac{1}{h^2} (4p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}) = -D_h \left(\frac{u^n}{\Delta t} + R^n \right)_i \quad (14)$$

Pour résoudre l'équation de Poisson (14), il faut donner des conditions aux limites pour p^{n+1} . Nous introduisons les notations suivantes. Par Ω_h , nous notons l'ensemble des nœuds du maillage ; $\tilde{\Omega}_h$ désigne l'ensemble des nœuds situés à l'intérieur de Ω et Ω_h^Γ l'ensemble des nœuds situés sur Γ . nous écrivons une fonction discrète f par $f = \tilde{f} + f^\Gamma$, où \tilde{f} est définie sur $\tilde{\Omega}_h$ et f^Γ sur Ω_h^Γ . L'opérateur discret D_h s'applique à des fonctions vectorielles discrètes \underline{u} définies sur $\tilde{\Omega}_h \cup \Omega_h^\Gamma$. Nous notons

$$D_h = \tilde{D}_h + D_h^\Gamma,$$

où \tilde{D}_h opère sur \tilde{u} et D_h^Γ sur \underline{u}^Γ . L'équation (12) s'écrit maintenant

$$\tilde{D}_h \underline{u}^{n+1} = -D_h^\Gamma \underline{u}^{n+1}, \quad (15)$$

où le second membre est déterminé par les conditions aux limites sur \underline{u} .

Ensuite, nous substituons les équations du système (13) dans (15) pour obtenir le résultat suivant :

$$\tilde{D}_h G_h P^{n+1} = \tilde{D}_h \left(\frac{\underline{u}^n}{\Delta t} + \underline{R}_h^n \right) + D_h^\Gamma \frac{\underline{u}^{n+1}}{\Delta t}, \quad (16)$$

où G_h désigne l'opérateur discret de gradient et \underline{R}_h^n représente la forme discrète de \underline{R}^n .

Une fois que le problème de poisson est résolu, la vitesse \underline{u}^{n+1} peut être calculée par les équations du système (13), qui peuvent être écrites sous la forme :

$$\frac{1}{\Delta t} (\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) + G_h P^{n+1} = \underline{R}_h^n.$$

(Voir l'organigramme de calcul en annexe c)

IV.3.3 Résolution de l'équation de poisson :

Pour la résolution de l'équation de poisson, on a opté pour la méthode itérative de JACOBI :

- **Principe de la méthode de JACOBI :**

Résolution du système :

$$A \cdot x = b$$

La matrice A étant décomposée en :

$$A = M - N = D - (L + U)$$

Le système $A x = b$ devient alors :

$$D X = (L + U) X + b$$

La méthode itérative de JACOBI s'écrit donc :

$$D X^{(k+1)} = (L + U) X^{(k)} + b$$

Soit :

$$X^{(k+1)} = D^{-1} (L + U) X^{(k)} + D^{-1} b$$

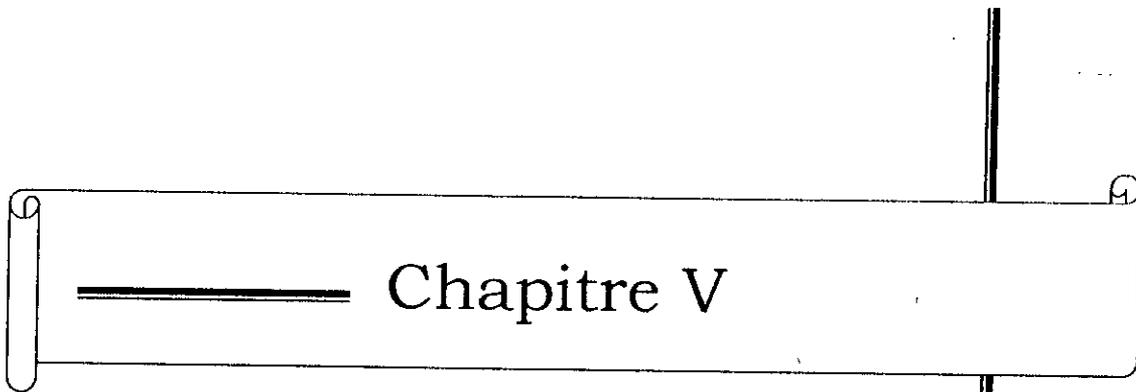
• **Algorithme de JACOBI :**

0) étant donnés b , A , $X^{(0)}$, k_{\max} , ε

$$\left. \begin{array}{l} 1) r_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \\ i = 1, n \\ 2) x_i^{k+1} = x_i^{(k)} + r_i^{(k)} / a_{ii} \\ i = 1, n \end{array} \right\} k=0, 1, 2, \dots, k_{\max}$$

3) arrêter si $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$

(Voir l'organigramme en annexe c)



Chapitre V

Résultats et discussions

V.1 Présentation générale du modèle cellulaire :

La distinction de deux configurations d'écoulement nous conduit à présenter un modèle de calcul pour la zone à phases séparées (poche) et un modèle de calcul pour la zone à phase dispersée (bouchon). Le modèle poche est destiné à calculer le taux de gaz global (et par conséquent le terme de gradient de pression par gravité), le taux de poche dans la cellule, ainsi que la contribution de la zone à phases séparées au gradient de pression par frottement. Le modèle bouchon détermine simplement le terme de gradient de pression par frottement dans la zone à phase dispersée.

V.1.1 Modèle poche :

a) Conservation de la masse :

La conservation de masse, permet de calculer le débit de chaque pseudo-phase (poche et film) :

$$q_{FS} = AR_{FS}V'_{FS} = \frac{R_{GF}}{1-R_{GF}-R_{LP}}q_L + \frac{1-R_{GF}}{1-R_{GF}-R_{LP}}q_G, \quad \rho_{PS} = (1-R_{GF})\rho_L + R_{GF}\rho_G$$

$$q_{FS} = A(1-R_{FS})V'_{FS} = \frac{1-R_{LP}}{1-R_{GF}-R_{LP}}q_L - \frac{R_{LP}}{1-R_{GF}-R_{LP}}q_G, \quad \rho_{PS} = R_{LP}\rho_L + (1-R_{LP})\rho_G$$

b) Conservation de la quantité de mouvement :

La loi de la conservation de quantité de mouvement détermine le gradient de pression dans la phase séparée, il est obtenu dans le film et dans la poche :

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{FS} = -\rho_{FS}g + \frac{2(1-R_{FS})^{0.5}}{RR_{FS}}\tau_{IS} - \frac{2}{RR_{FS}}\tau_{WS}$$

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{FS} = -\rho_{PS}g - \frac{2}{R(1-R_{FS})}\tau_{WS}$$

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_S = \left(\frac{dP}{dx}\right)_{FS} = \left(\frac{dP}{dx}\right)_{FS}$$

Les variables sont : R_{FS} , V'_{FS} , V'_{FS} , $(dP/dx)_S$

c) *Lois constitutives :*

Le cisaillement interfacial est obtenu par une formule analogue de celle de Blasius en écoulement monophasique :

$$\tau_{IS} = 0.5 \rho_{FS} f_1 (V'_{FS} - V'_{FS})^2$$

où f_1 et le coefficient de friction, il est déterminé la loi de Colebrook :

$$f_1 = f\left(\frac{K_I}{R(1-R_{FS})^2}, \Re e_p\right)$$

K_I , la rugosité interfacial est donnée sous la forme suivante : $K_I = \alpha e_f$

ainsi que le nombre de Reynolds dans la poche s'exprime comme suit :

$$\Re e_p = \frac{|V'_{FS} - V'_{FS}| D(1-R_{FS})^2}{\nu_G}$$

Le cisaillement pariétal, est obtenu, soit par l'égalité des gradients de pression dans le film et dans la poche, soit en utilisant une relation analogue à celle de Blasius :

$$\tau_{WS} = \frac{1}{2} \rho_{FS} f_{WS} V_{FSI} |V_{FSI}|$$

Avec : $f_{WS} = f\left(\frac{K_I}{2e_F}, \Re e_F\right)$

$$\Re e_F = \frac{|V_{FSI}| 4e_{F1}}{\nu_L}, e_{F1} = \frac{e_F}{1 + |\alpha_c|} \text{ et } \alpha_c = \frac{\tau_{IS}}{\tau_{WS}}$$

$$V_{FSI} = U - V'_{FS} + \left[1 - \frac{e_{F1}(2R - e_{F1})}{e_F(2R - e_F)}\right] \frac{U_W^*(4R - e_{F1})}{2\chi(2R - e_{F1})}, U_W^* = \left(\frac{\tau_{WS}}{\rho_{FS}}\right)^{0.5}$$

d) Célérité des poches :

Pour la vitesse ascensionnelle des poches, nous avons opté pour la formule de LINE :

$$U = c_1(U_G + U_L) + c_2 \sqrt{gD(\rho_L - \rho_G) / \rho_L}$$

avec : $c_1 = 1.2$ et $c_2 = 0,35$

V.1.2 Modèle d'arrachage :

Le débit du gaz entraîné, est peut être exprimé en fonction du débit du gaz, par la relation suivante :

$$q_{GE} = q_G / \alpha_q \text{ et } \alpha_q = 1 + \frac{q_{GC}}{q_G}$$

où q_{GC} est le débit du gaz injecté au culot de la poche.

Nous avons les relations suivantes :

$$q_{GE} = 5\pi R_j^2 U_l^* \zeta_e \left(1 - \frac{\zeta_e}{4}\right)$$

$$q_{GC} = -\pi R_j^2 \left[V_{rs0}^* + 1.25 U_l^* (1 - \zeta_e)(3 - \zeta_e) \right]$$

avec : $V_{rs0}^* = V_{rs}^* - 3.75 U_l^*$, $U_l^* = \left(\frac{|\tau_{js}|}{\rho_G} \right)^{0.5}$

$$\zeta_e = \exp\left(\chi \frac{V_{rs0}^*}{U_l^*}\right), \chi = 0.4$$

V.1.3 Modèle bouchon :

a) Conservation de la masse :

Elle permet de calculer les débits gaz et liquide :

$$q_G = AR_{GD}(V_{LD} - G)$$

$$q_L = A(1 - R_{GD})V_{LD}$$

où G représente le glissement gaz-liquide.

b) Conservation de la quantité de mouvement :

Elle permet de calculer le gradient de pression dans la phase dispersé :

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_D = \frac{2\tau_{WD}}{R} + [\rho_G R_{GD} + \rho_L (1 - R_{GD})]$$

c) Lois constitutives :

Ces lois, sont utilisés pour déterminer le cisaillement pariétal dans le bouchon, ainsi que le glissement gaz-liquide.

Le cisaillement pariétal est donné par une loi analogue de Blasius :

$$\tau_{WD} = \frac{1}{2} f_{WD} \rho_L (U - V_{LD})^2$$

où f_{WD} est le facteur de frottement pariétal dans la configuration bouchon, il est obtenu par la

loi formule de Colebrook : $f_{WD} = f\left(\frac{K_B}{R}, Re_D\right)$, avec $Re_D = \frac{|U - V_{LD}|}{\nu_L}$

Le glissement entre le gaz et le liquide est calculé par la formule de WALLIS :

$$G = c \left[\frac{\sigma g (\rho_L - \rho_G)}{\rho_L} \right]^{1/4}$$

avec $c=1.4$, constante de LEVITCH.

V.2 Bilans globaux :

- Ecoulement établi : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x} = 0 \Rightarrow R_{k\beta} = \overline{R_{k\beta}}$
- La conservation de la masse dans la cellule : $\begin{cases} q_G = A(R_G U - U_G) \\ q_L = A[(1 - R_G)U - U_L] \end{cases}$
- La conservation de la quantité de mouvement : $\frac{dP}{dx} = \alpha_s \left(\frac{dP}{dx} \right)_s + (1 - \alpha_s) \left(\frac{dP}{dx} \right)_b$

Avec α_s le taux de présence de la phase séparé et

V.3 Estimation de l'épaisseur du film :

Pour la prédiction de l'épaisseur du film, nous avons utilisé les données expérimentales de la banque de BOUSSENS, qui exprime la variation de l'épaisseur du film en fonction de la vitesse des poches :

$U(m/s)$	2.7	3.45	4.21	5.45	6.21	8.1	8.85	9.06	9.81	15.2
$e_f(mm)$	2.66	2.7	2.72	2.76	2.78	2.82	2.84	2.84	2.84	2.92

Nous avons tracé la courbe $e_f = f(U)$ (fig. VI.1), ensuite nous avons réalisé une interpolation polynomiale des données, afin de trouver une relation reliant l'épaisseur du film à la vitesse de la poche.

Dans la plupart des modèles cellulaires, l'épaisseur du film est estimé à partir de la

formule de BRÖTZ :

$$e_f \left[\frac{g}{v_L^2} \right]^{1/3} = \left[\frac{39 Re_F^2}{590} \right]^{1/3}$$

Ce qui nécessite une initialisation de e_f .

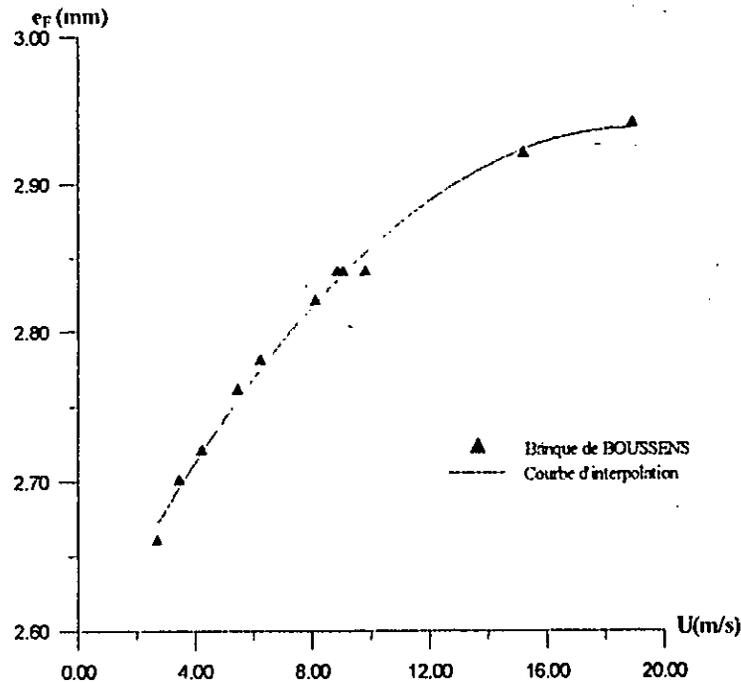


Fig. V.1 : La variation de l'épaisseur du film en fonction des vitesses des poches (courbe expérimentale et courbe d'interpolation)

Les résultats d'interpolation permettent d'écrire la relation suivante :

$$e_F = 2.57558 + 0.0384U - 0.00101U^2$$

l'organigramme du modèle cellulaire est porté dans l'annexe D.

V.4 Résultats du modèle cellulaire :

Dans le premier graphe (figure V.1), nous avons représenté le taux de gaz en fonction de la vitesse du gaz, et pour une plage des vitesses liquide. On remarque bien, d'une part la proportionnalité entre l'augmentation du taux de gaz et l'augmentation de la vitesse du gaz, et d'autre part la même augmentation du taux de gaz est accompagnée d'une diminution de la vitesse du liquide.

Ce comportement est peut être justifié par la corrélation de FANCHER et BROWN (cf.[17]) :

$$R_L = \frac{U_L}{U_L + U_G} \Rightarrow R_G = 1 - \frac{U_L}{U_L + U_G}$$

Donc pour une vitesse liquide constante nous avons : $U_G \uparrow \Rightarrow \frac{U_L}{U_L + U_G} \downarrow \Rightarrow R_G \uparrow$

La prédiction du taux de gaz en fonction de la vitesse du gaz était bonne vis-à-vis les résultats expérimentaux (banque de KOECK –ORSAY-) disponibles

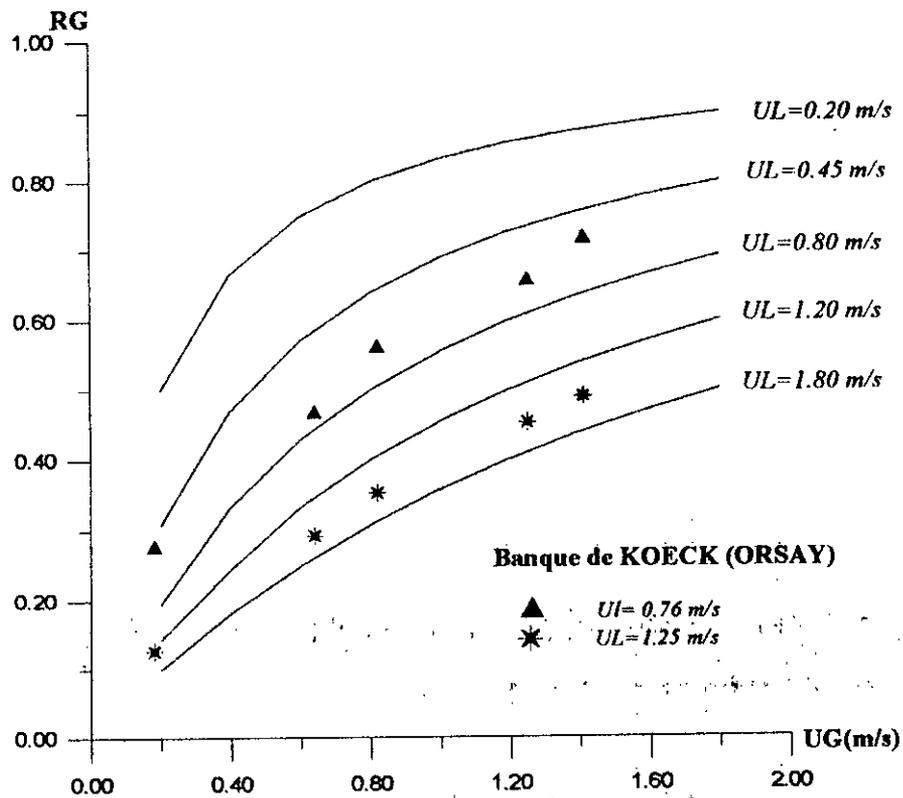


Fig. V.2 : Variation du taux de gaz en fonction de la vitesse du gaz

Dans le deuxième graphe (figure V.3), nous avons représenté la variation du gradient de pression en fonction de la vitesse du gaz. On remarque que le gradient de pression diminue avec l'augmentation de la vitesse du gaz d'une part et d'autre part avec la diminution de la vitesse du liquide.

Pour des vitesses du gaz élevées, nous avons un taux élevé de gaz (d'après la figure V.2), et cela provoque une diminution du gradient de pression, or pour des vitesses du liquide élevée (taux de liquide élevé), il y aura une augmentation du gradient de pression. Cela demeure logique, vu la nature moléculaire différente du gaz et du liquide. Enfin la prédiction du gradient de pression était satisfaisante vis-à-vis les données expérimentales disponibles.

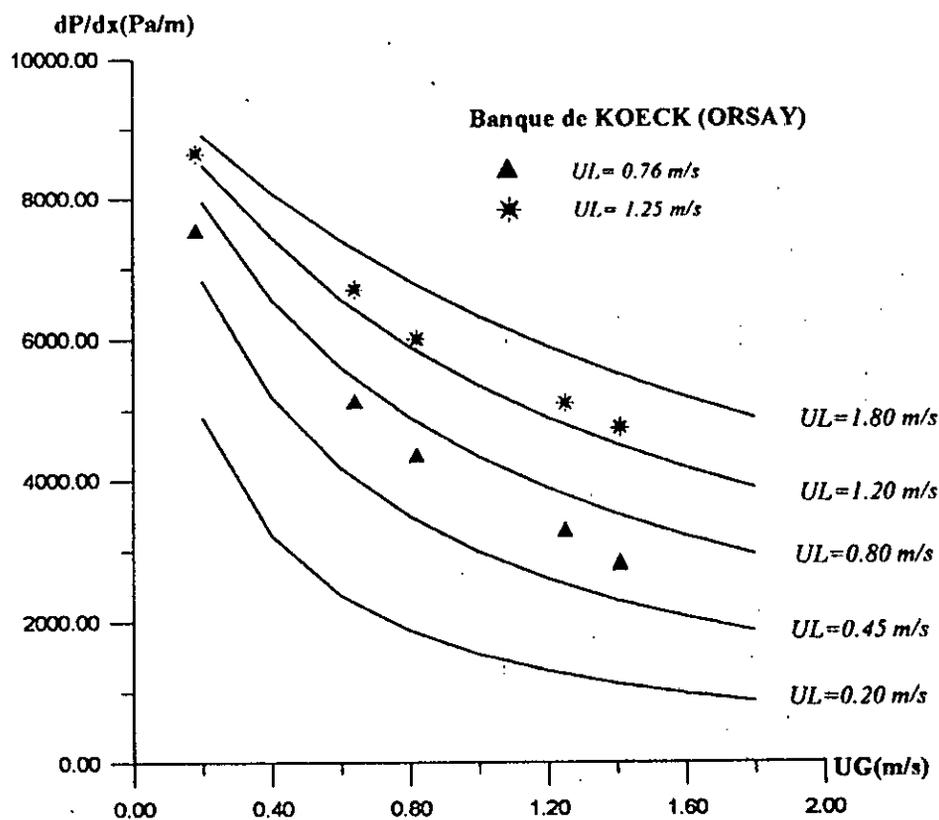


Fig. V.3 : Variation du gradient de pression en fonction de la vitesse du gaz

D'autres résultats sont regroupés sous forme d'une banque de données dans l'annexe E.

V.5 Résultats de la résolution d'un écoulement autour d'une poche :

On a réalisé une simulation numérique pour un écoulement sur une poche dont le profil est rectangulaire (forme cylindrique).

Avec

$$Fr_p = 4, \quad Re_p = 10$$

Ce cas correspond à un mouvement de liquide qui s'ajoute au déplacement propre de la poche, sous l'effet de force de gravité.

On a choisi pour le maillage :

$$\Delta r = \Delta z = h = 0.00125$$

et nous avons résolu le problème dans le rectangle de dimension 0.0125×0.05 , qui correspond à 40×10 nœuds de calcul. Le calcul effectué en instationnaire sur 20 pas de temps avec :

$$\Delta t = 8/100.$$

V.5.1 Résultats numériques :

On a porté sur les figures (V.7), (V.8), (V.9) l'évolution de la composante u_z de la vitesse relative à la poche. L'équation de la conservation de la masse (l'équation de continuité) n'est pas toujours vérifiée, mais l'erreur décroît de l'amont à l'aval de la poche. Elle se traduit dans le bilan de quantité de mouvement par un faux calcul de la pression.

On remarque aussi une distribution de la pression qui n'est pas monotone dans la section droite correspondant à $z = 0$, de plus une diminution de pression (à $z = 0$, front de la poche) ce qui s'explique par la forme réelle de la poche

On peut ajouter aussi que la détermination de la pression sur la poche de gaz est essentielle pour le calcul de la forme, de plus elle doit être effectuée avec une précision suffisante.

On a tenté de trouver l'erreur sur le calcul de la pression, l'examen des résultats numériques montre que le terme de convection est la source d'erreur.

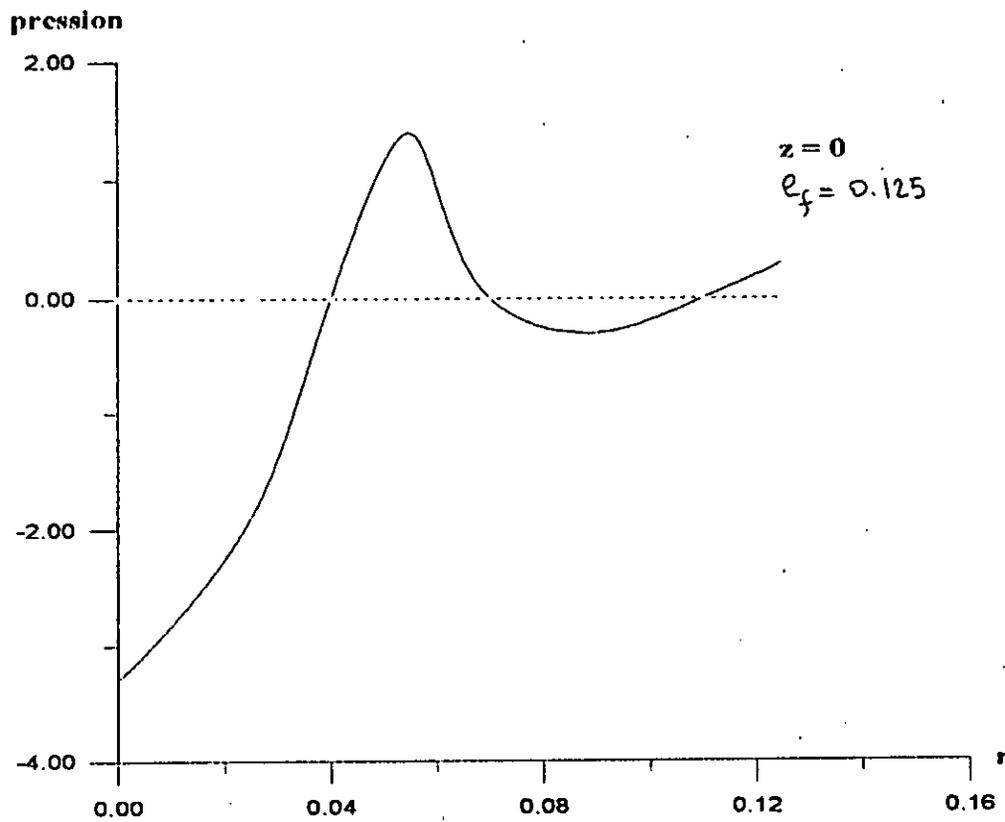


Fig V.4 : la variation de pression en fonction de r en valeurs adimensionnelles $z = 0$
à l'entrée de la poche

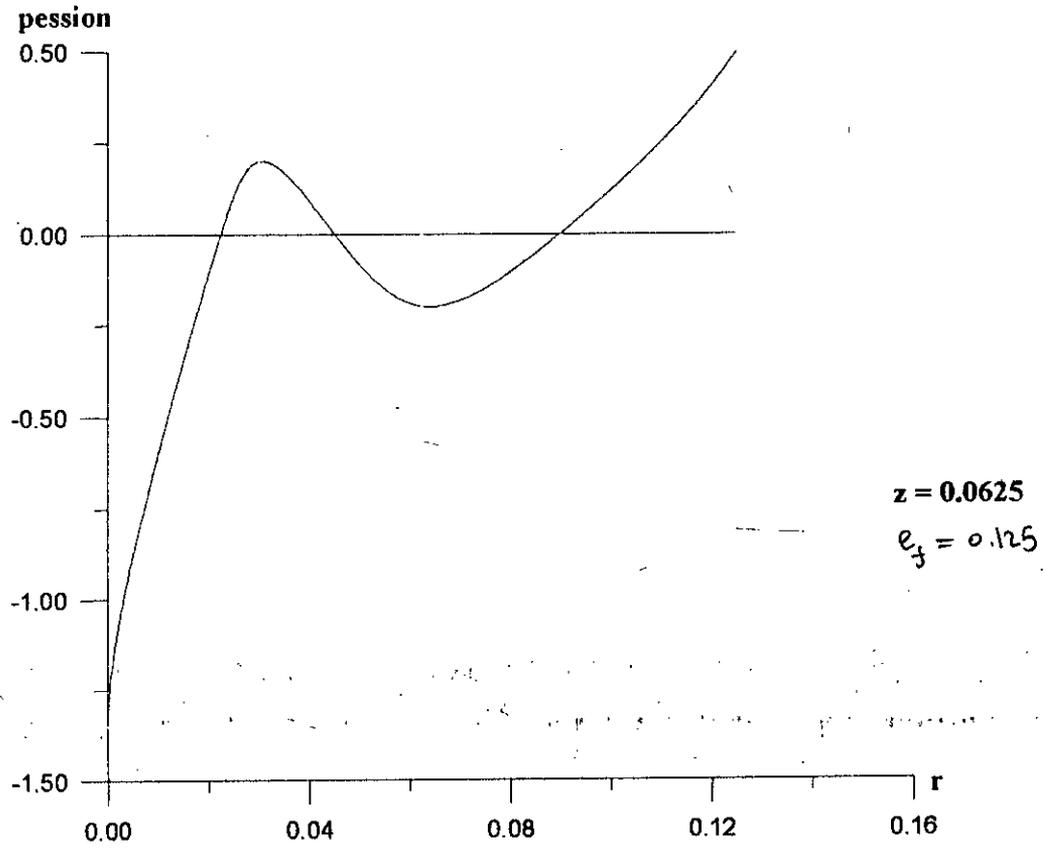


Fig. V.5 : la variation de pression en fonction de r en valeurs adimensionnelles $z = 0.0625$

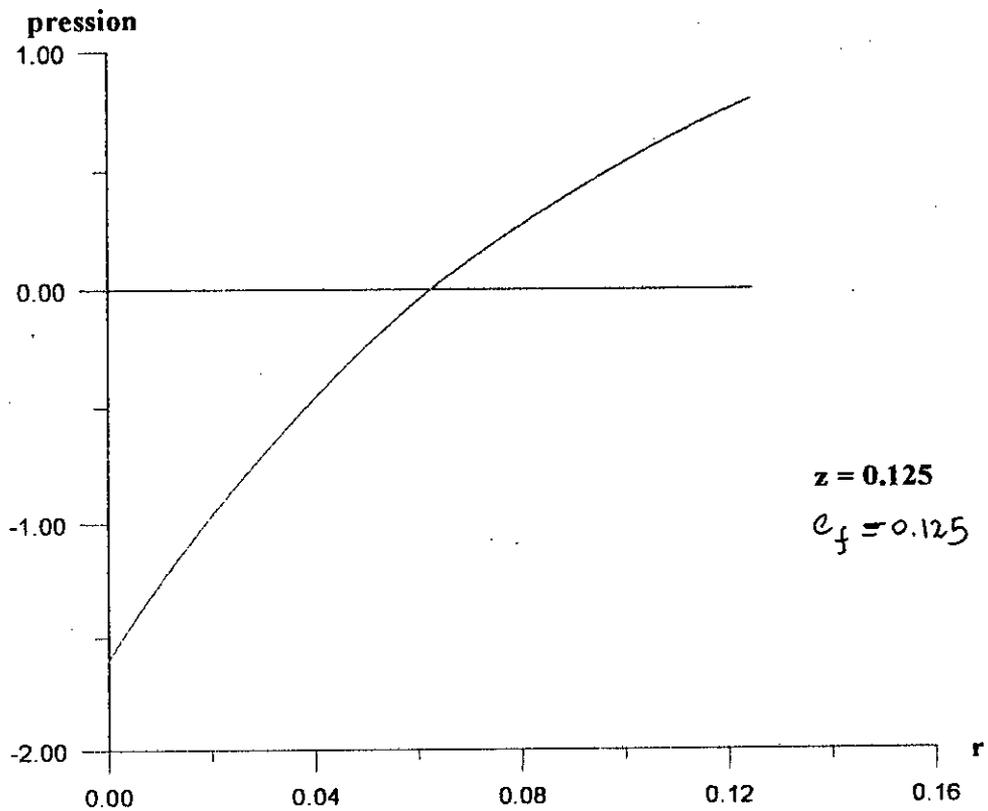


Fig V.6 : la variation de pression en fonction de r en valeurs adimensionnelles $z = 0.125$

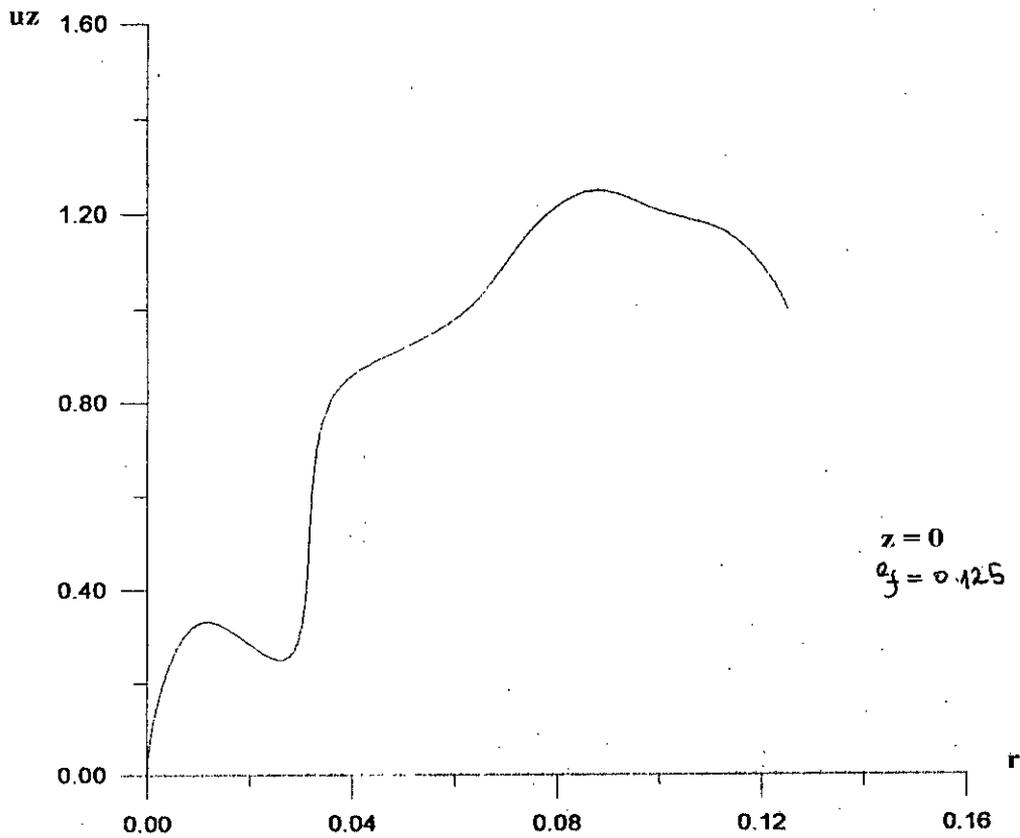


Fig V.7 : la variation de la composante u_z de la vitesse relative à la poche (adimensionnelle) $z = 0$ à l'entrée

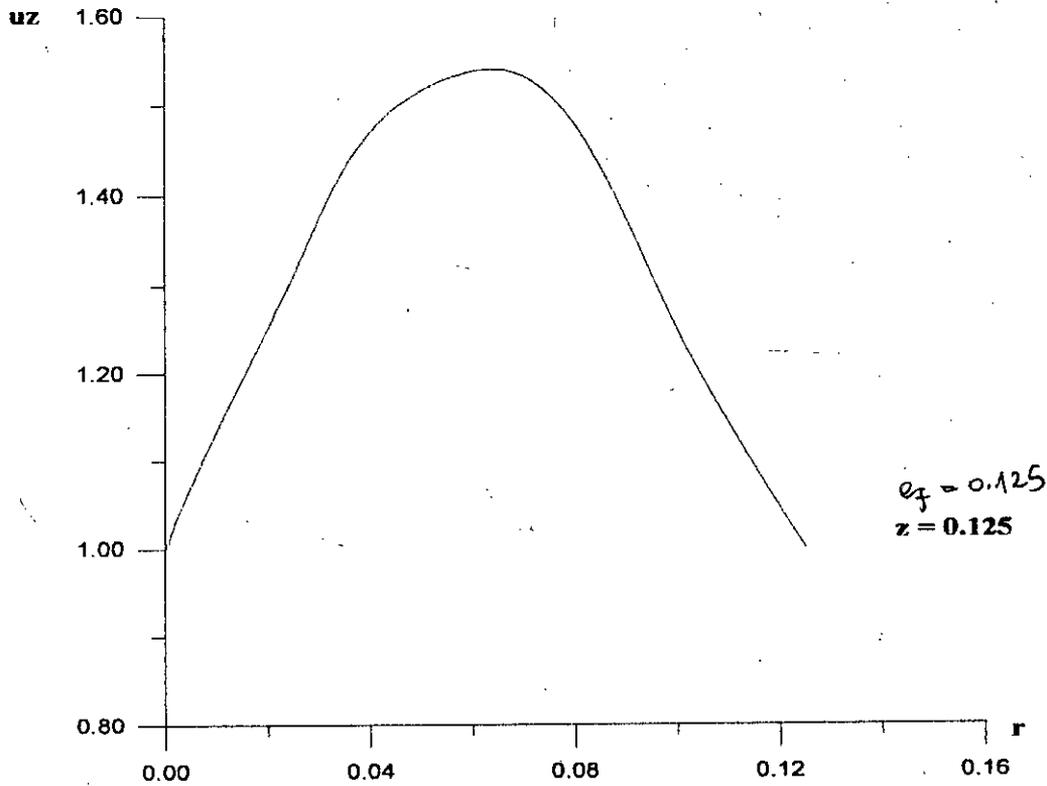


Fig V.8 : la variation de la composante u_z de la vitesse relative à la poche (adimensionnelle) $z = 0.125$

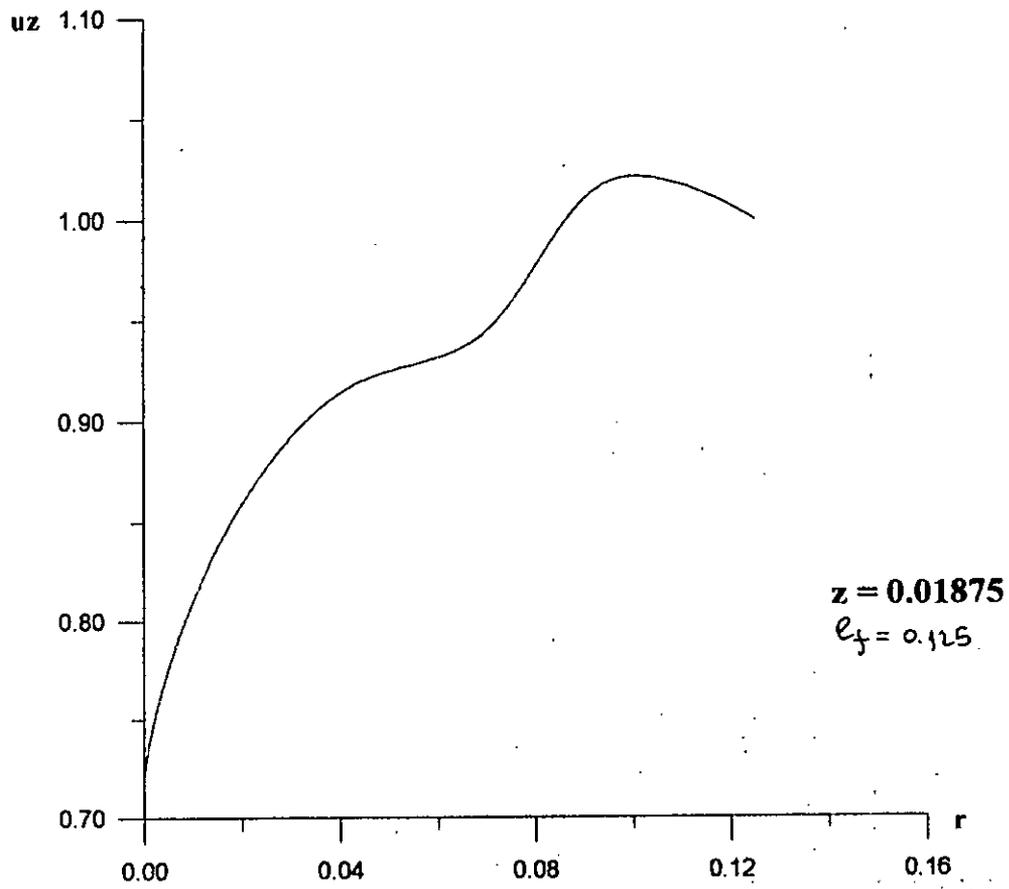
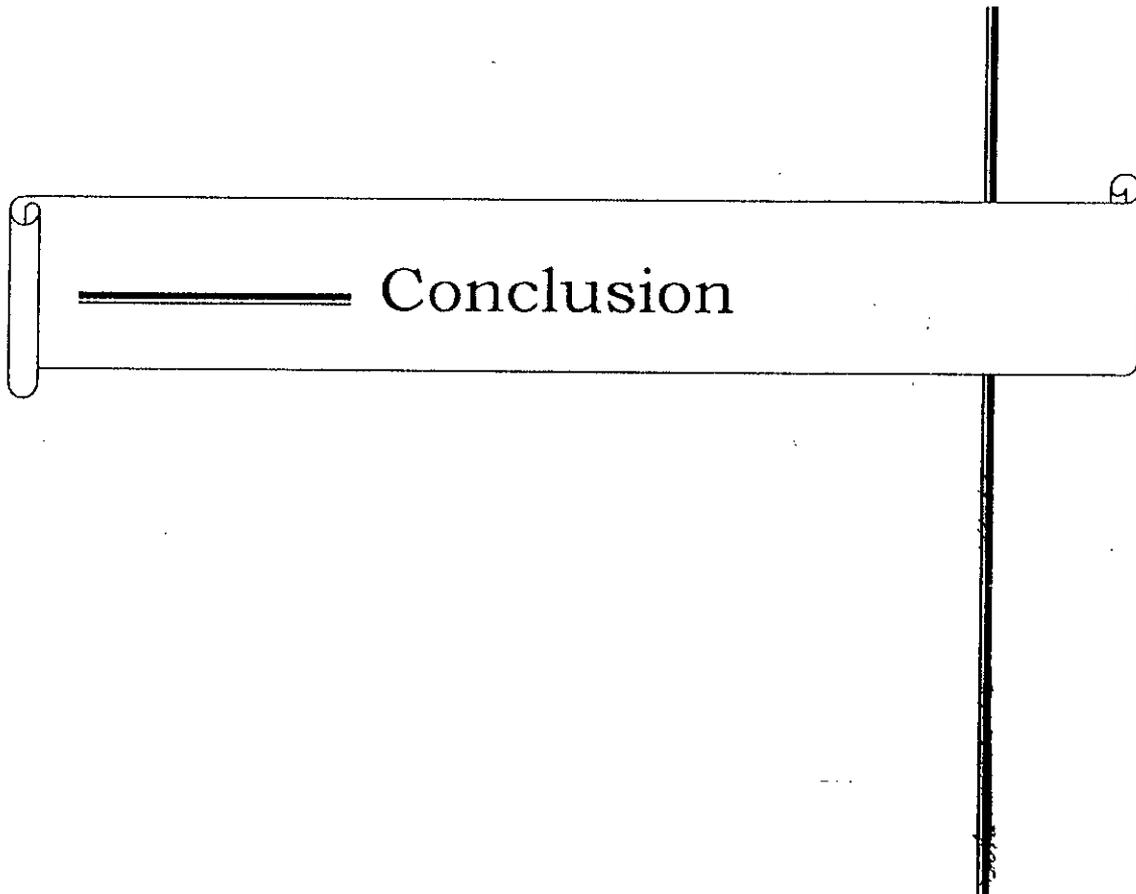


Fig V.9: la variation de la composante uz de la vitesse relative à la poche (adimensionnelle) $z = 0.01875$



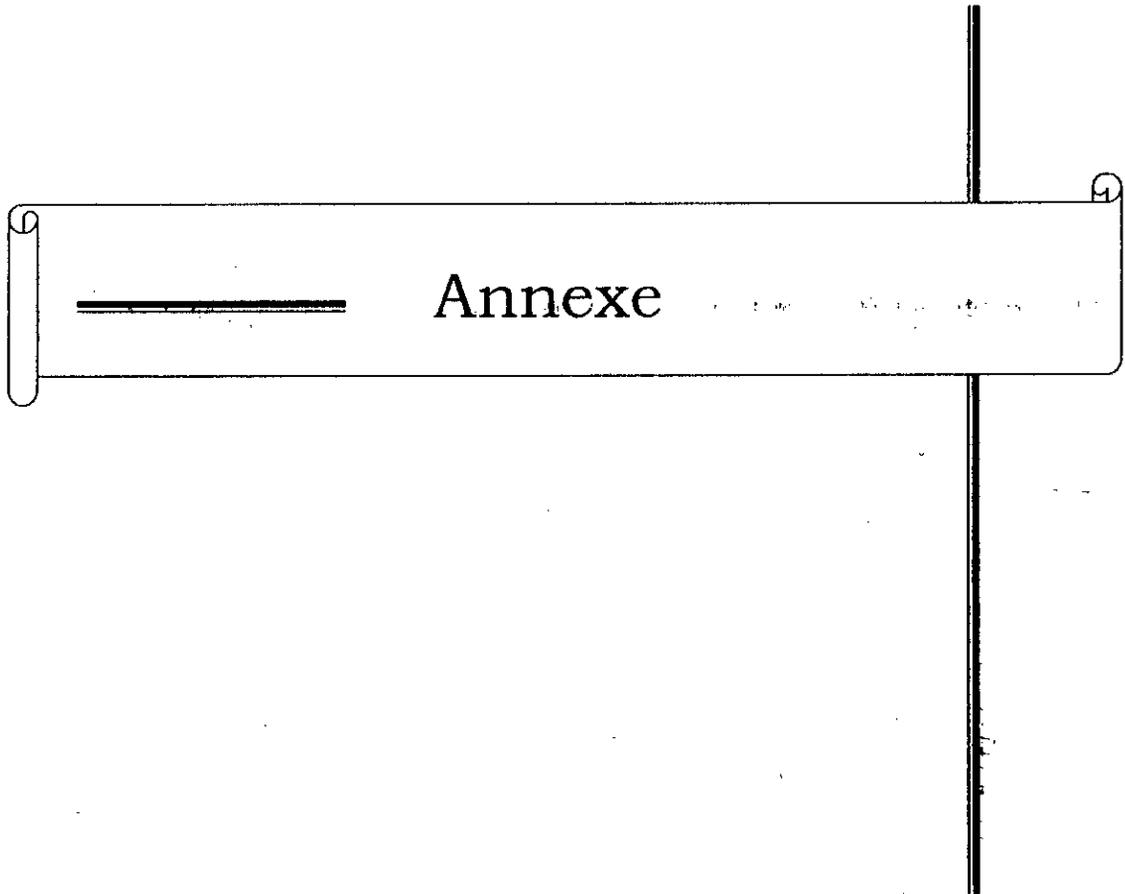
CONCLUSION

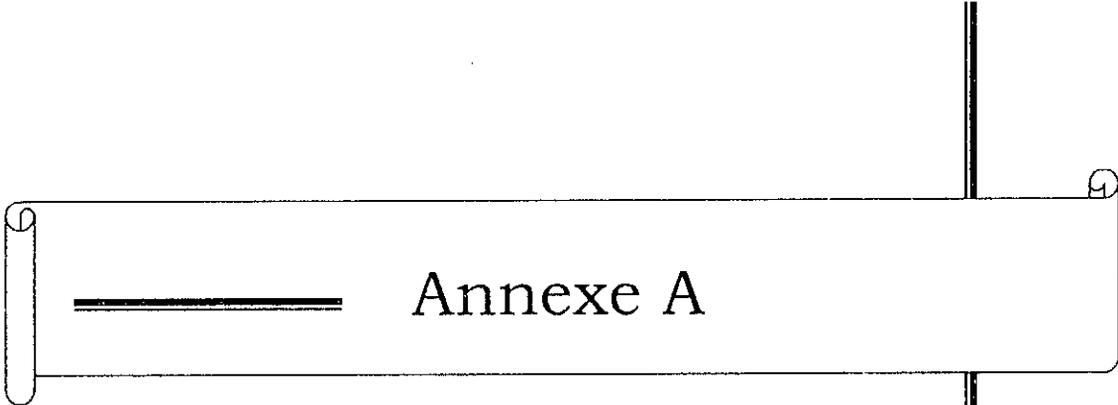
Ce travail a abouti à un double objectif. D'une part, la modélisation d'un écoulement diphasique dans sa configuration intermittente, en passant par l'écriture des équations de la conservation dans une cellule moyenne et une analyse des lois constitutives dans la poche et dans le bouchon. D'autre part, une résolution numérique des équations de Navier-Stokes autour de la poche par méthode des différences finies.

Le modèle cellulaire que nous proposons réside en un modèle de poche établie, couplé à un modèle de bouchon homogène. La prédiction du modèle cellulaire était bonne vis-à-vis les données expérimentales disponibles (Banque de KOECK – ORSAY-). En conséquence, toute amélioration de la modélisation suppose une amélioration de l'approche expérimentale. En particulier, la rhéologie des films (cisaillement pariétal, épaisseur) et le glissement dans le bouchon exigent des informations expérimentales très fines.

Pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, nous pouvons dire que les résultats obtenus ne sont pas suffisamment précis (cela apparaît dans les valeurs de la pression obtenues), à cause des simplifications de plusieurs paramètres (la forme de la poche par exemple), et aussi le choix de la méthode explicite, qui a ses avantages (elle est plus simple et plus rapide), mais elle a aussi un inconvénient majeur qui est la stabilité des résultats.

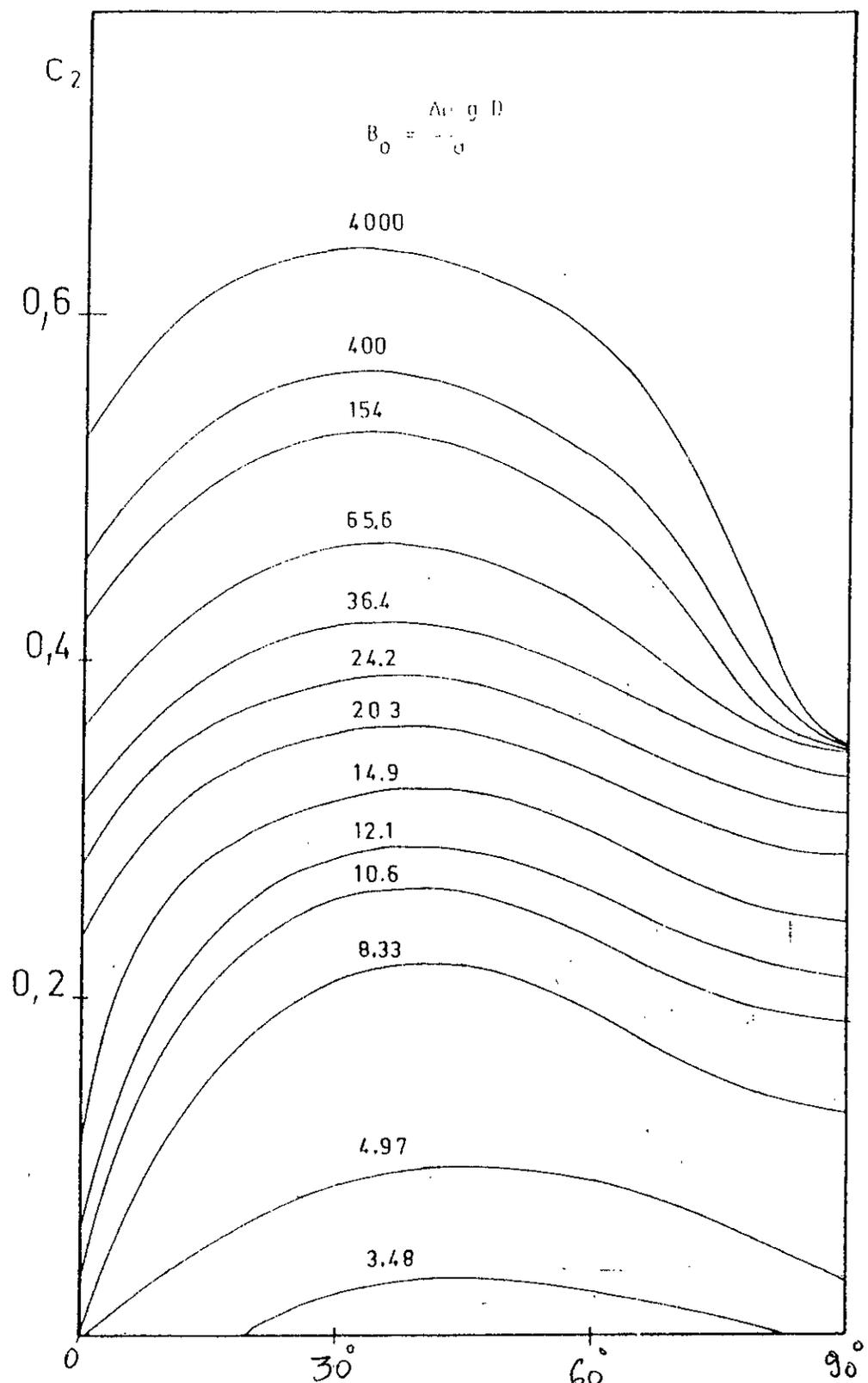
Dans ces conditions on ne peut espérer utilisé le modèle numérique dans un but autre que qualitatif, car la détermination de la pression sur la poche de gaz est essentielle pour le calcul de la forme. Nous tenons à préciser qu'il n'y a pas des résultats expérimentaux pour comparés nos résultats.



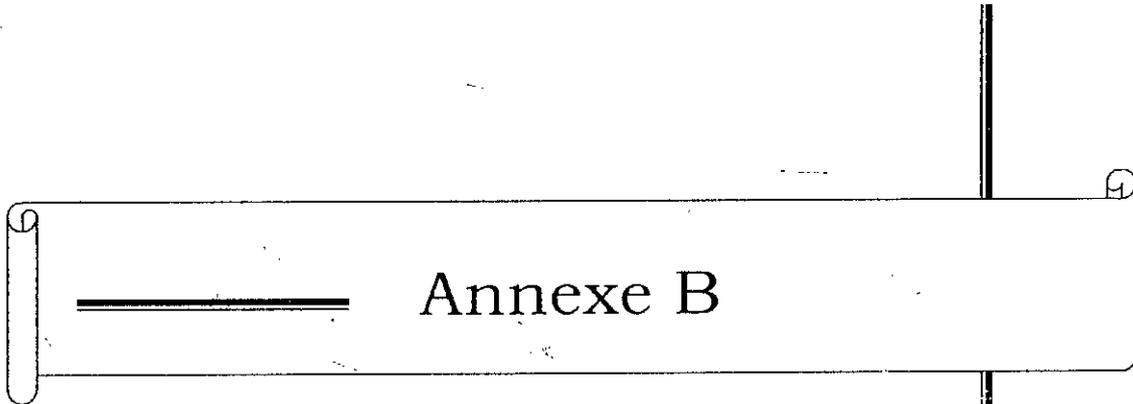


Annexe A

L'abaque de ZUKOSKI



abaque de ZUKOSKI



Annexe B

Algorithme de WEGSTEIN
(Pour la résolution numérique de l'équation de COLBROOK)

Calcul du facteur de frottement par la relation de Colebrook :

Relation universelle de Colebrook :

$$\frac{1}{2(f)^{1/2}} = 1.74 - 2 \log \left(\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1.87}{2.96 \text{Re}(f)^{1/2}} \right)$$

f : facteur de frottement,

ε : la rugosité absolue de la conduite,

D : diamètre de la conduite,

Re : le nombre de Reynolds.

On pose : $X = \frac{1}{\sqrt{f}} \Rightarrow F(X) = X$ Initialisation de f par la formule de

Leeds : $f = 0.007 + 0.6104(\text{Re})^{-0.35}$, $\text{Re} < 4.7.10^5$

Algorithme de Wegstein :

0/ $X^{(0)}, \varepsilon_1, n_{\max}$

1/ $X^{(n)} = F(X^{(n-1)})$

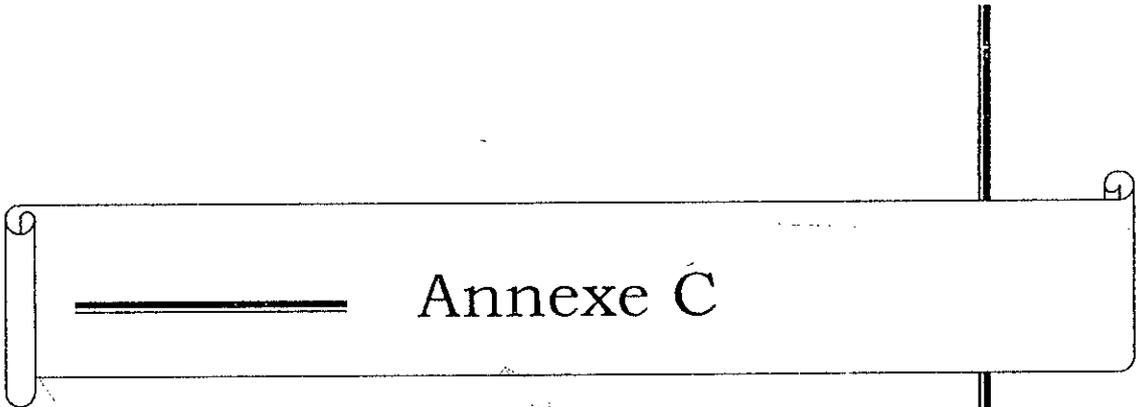
2/ $\Delta = \frac{F(X^{(n)}) - X^{(n)}}{X^{(n)} - X^{(n-1)}}$

3/ $\alpha = \frac{1}{1 - \Delta}$

4/ $X^{(n+1)} = X^{(n)} + \alpha(F(X^{(n)}) - X^{(n)})$

5/ Arrêter si : $\left| \frac{X^{(n)} - X^{(n-1)}}{X^{(n)}} \right| < \varepsilon_1$

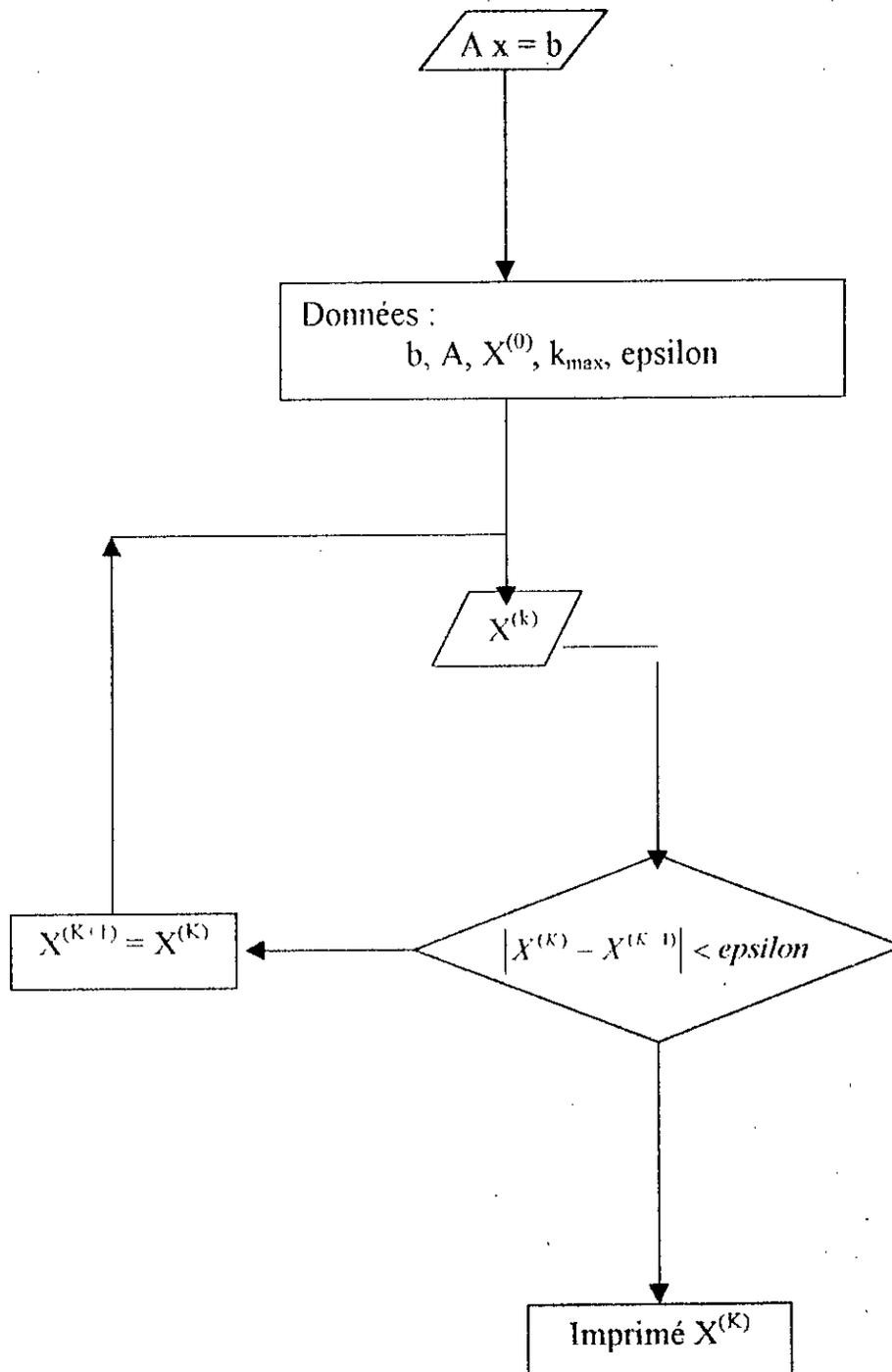
$n = 1, 2, \dots, n_{\max}$

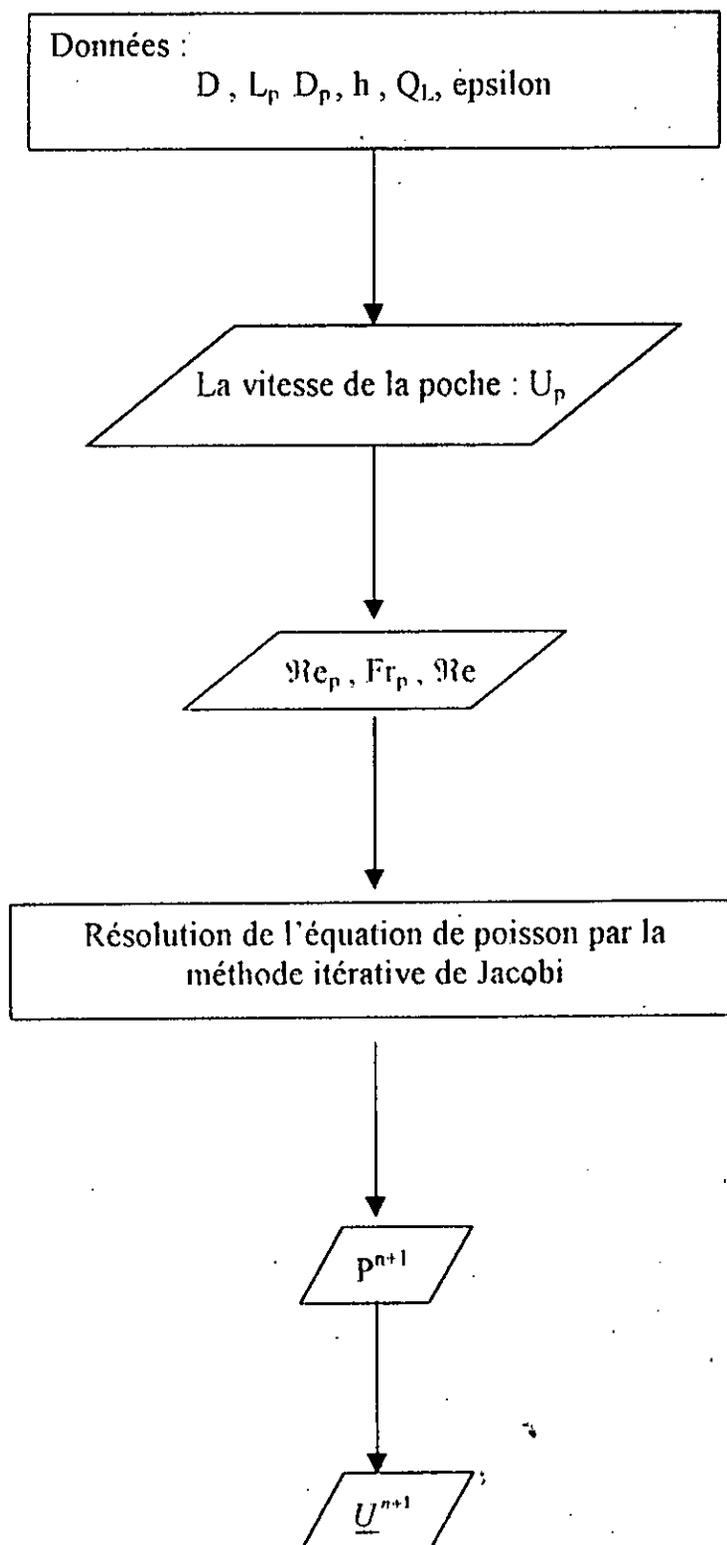


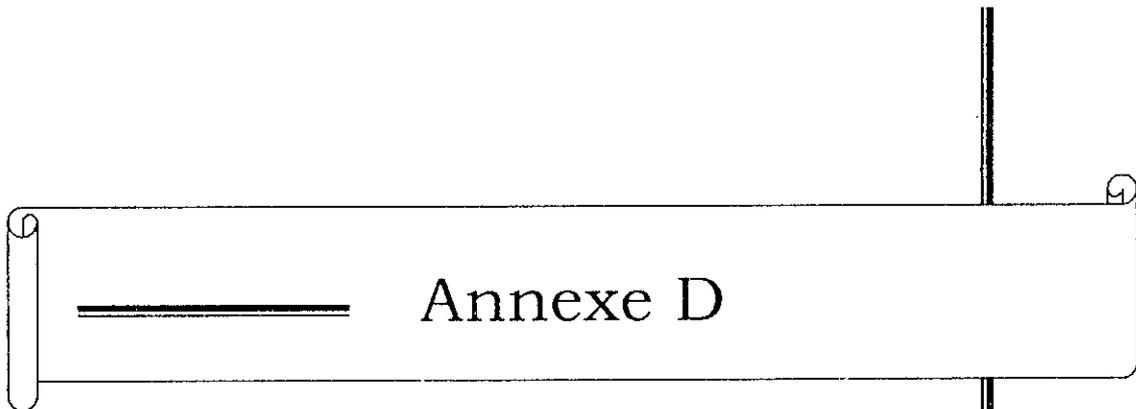
Organigrammes

(Résolution numérique des équations de NAVIER-STOKES)

algorithme de Jacobi :







Organigramme du modèle cellulaire

Les propriétés de la conduite :

Le diamètre, $D = 0.0045 \text{ m}$,

La rugosité absolu de la paroi, $K_W = 0.003 \text{ m}$.

Les propriétés des fluides :

La masse volumique du liquide (eau), $\rho_L = 1000 \text{ Kg/m}^3$.

La masse volumique du gaz (air), $\rho_G = 1.293 \text{ Kg/m}^3$.

La viscosité dynamique du liquide (eau), $\mu_L = 0.001 \text{ Kg/ms}$.

La viscosité dynamique du gaz (air), $\mu_G = 0.0000195 \text{ Kg/ms}$.

La tension superficielle liquide/gaz (air/eau), $\sigma = 0.0034 \text{ N/cm}$.

Constantes des modèles :

La première constante de la vitesse ascensionnelle, $C_1 = 1.2$

La deuxième constante de la vitesse ascensionnelle, $C_2 = 0.35$

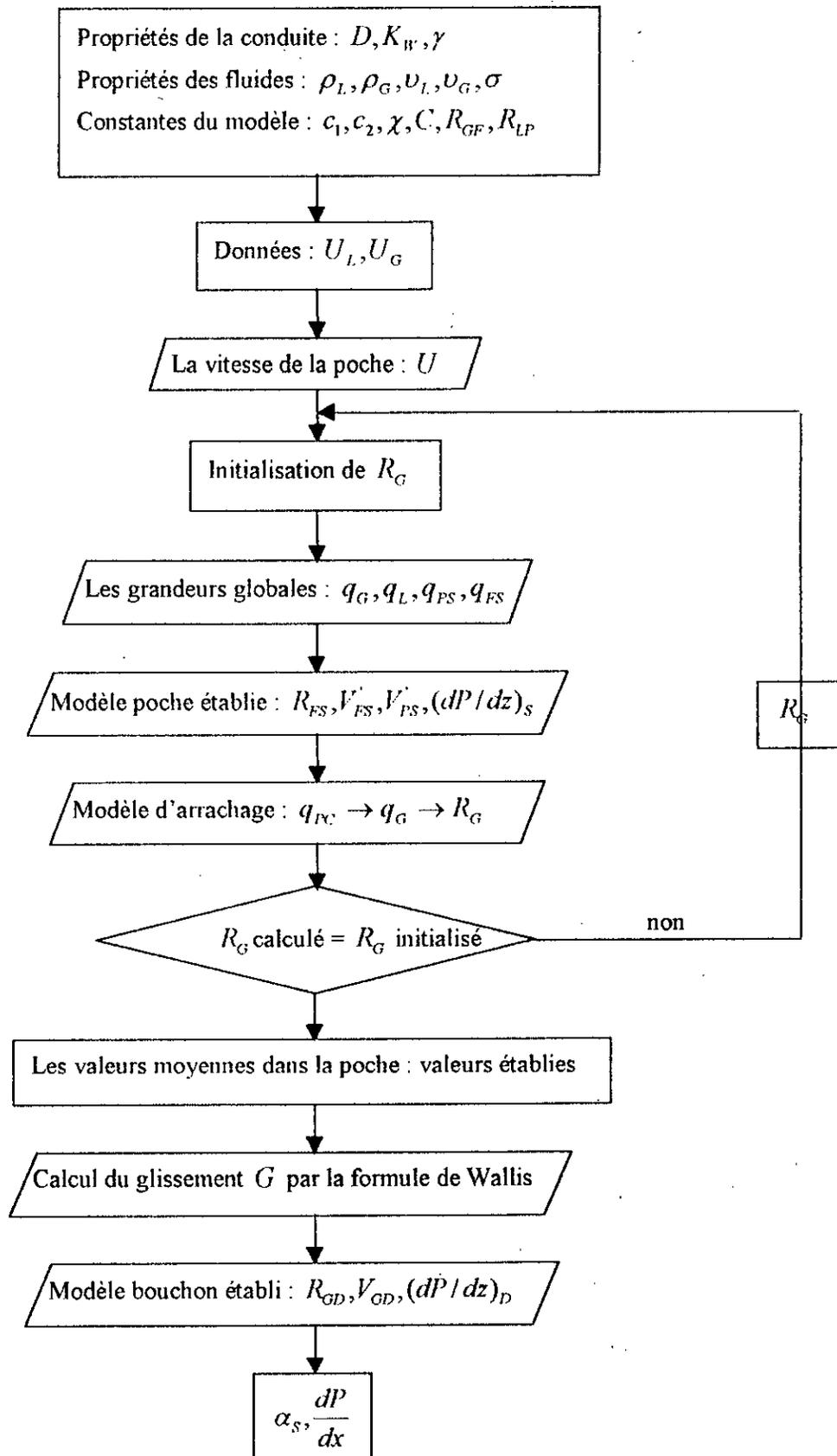
La constante de VON KARMAN, $\chi = 0.4$

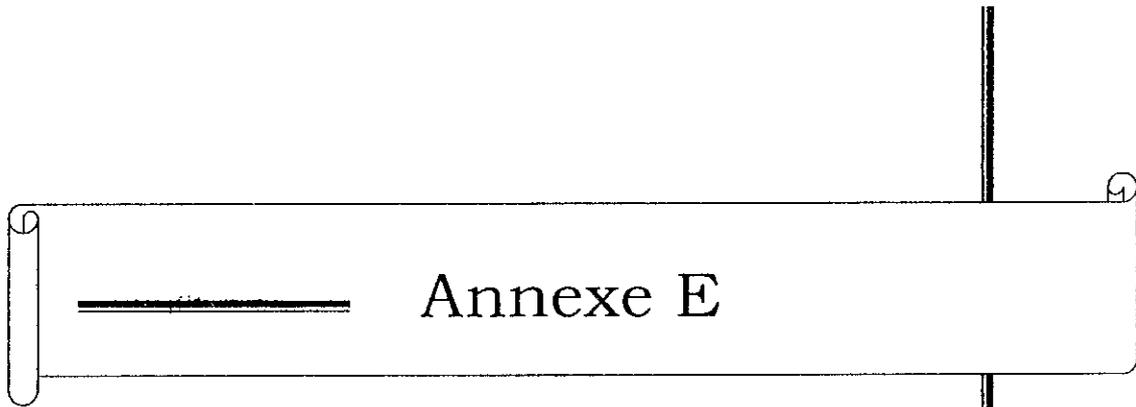
La constante de LEVITCH, $C = 1.41$

Le taux de liquide dans la pseudo-phase poche, $R_{LP} = 0$

Le taux de liquide dans la pseudo-phase film, $R_{GF} = 0$

Organigramme du modèle cellulaire :





Annexe E

Banque de données

Description de la banque de données :

Les données suivantes correspondent à une vitesse liquide $U_L = 0.5 \text{ m/s}$.

$U_G \text{ (m/s)}$: la vitesse superficielle du gaz.

$U_P \text{ (m/s)}$: célérité des poches.

R_G : le taux de gaz.

R_L : le taux de liquide.

R_{PS} : le taux de poche dans la phase séparée.

R_{FS} : le taux de film dans la phase séparée.

R_{GD} : le taux de gaz dans la phase dispersée.

$V_{PS} \text{ (m/s)}$: la vitesse phasique de la pseudo-phase poche moyenne dans la configuration poche.

$V_{FS} \text{ (m/s)}$: la vitesse phasique de la pseudo-phase film moyenne dans la configuration poche.

$V_{GD} \text{ (m/s)}$: la vitesse phasique de la phase gaz moyenne dans la configuration bouchon.

$V_{LD} \text{ (m/s)}$: la vitesse phasique de la phase liquide moyenne dans la configuration bouchon.

$dP/dx \text{ (bar/Km)}$: le gradient de pression total.

$(dP/dx)_S \text{ (N/m)}$: le gradient de pression dans la configuration poche.

$(dP/dx)_D \text{ (bar/Km)}$: le gradient de pression dans la configuration bouchon.

$(dP/dx)_G \text{ (N/m)}$: le gradient de pression par gravité, $(dP/dx)_G = (R_L \rho_L + R_G \rho_G)g$.

F_I : facteur de friction (frottement) interfacial.

Re_P : le nombre de REYNOLDS dans la configuration poche.

q_G : Le débit gaz.

q_L : Le débit liquide.

q_{PS} : Le débit de la pseudo-phase poche dans la configuration séparée.

q_{FS} : Le débit de la pseudo-phase film dans la configuration séparée.

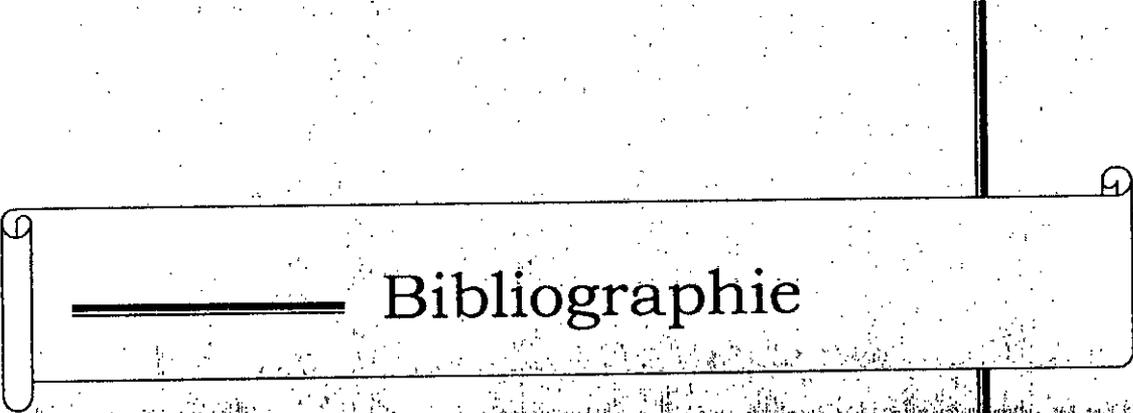
Ug(m/s)	Up(m/s)	Rg	RI	Rps	Rfs	Rgd
0.2	1.072396	0.2857143	0.7142857	0.7810946	0.2189054	0.1604844
0.4	1.312396	0.4444444	0.5555556	0.7804232	0.2195768	0.240454
0.6	1.552396	0.5454546	0.4545454	0.7797612	0.2202388	0.288967
0.8	1.792396	0.6153846	0.3846154	0.7791083	0.2208917	0.3217255
1	2.032396	0.6666667	0.3333333	0.778465	0.221535	0.3454162
1.2	2.272396	0.7058824	0.2941176	0.7778309	0.2221691	0.3633897
1.4	2.512396	0.7368421	0.2631579	0.777206	0.222794	0.3775175
1.6	2.752396	0.7619048	0.2380952	0.7765906	0.2234094	0.3889295
1.8	2.992396	0.7826087	0.2173913	0.7759843	0.2240157	0.3983498
2	3.232396	0.8	0.2	0.7753872	0.2246128	0.4062642
2.2	3.472396	0.8148148	0.1851852	0.7747995	0.2252005	0.4130113
2.4	3.712396	0.8275862	0.1724138	0.774221	0.225779	0.4188345
2.6	3.952396	0.8387097	0.1612903	0.7736517	0.2263483	0.4239135
2.8	4.192396	0.8484849	0.1515151	0.7730915	0.2269085	0.4283842
3	4.432396	0.8571429	0.1428571	0.7725406	0.2274594	0.4323505
3.200001	4.672396	0.8648649	0.1351351	0.7719989	0.2280011	0.4358945
3.400001	4.912396	0.8717949	0.1282051	0.7714664	0.2285336	0.4390805
3.600001	5.152397	0.8780488	0.1219512	0.770943	0.229057	0.4419608
3.800001	5.392396	0.8837209	0.1162791	0.7704289	0.2295711	0.4445778
4	5.632396	0.8888889	0.1111111	0.7699238	0.2300762	0.4469663
4.2	5.872396	0.893617	0.106383	0.7694279	0.2305721	0.4491552
4.4	6.112396	0.8979592	0.1020408	0.7689412	0.2310588	0.4511687
4.6	6.352396	0.9019608	9.803921E-2	0.7684636	0.2315364	0.4530275
4.8	6.592395	0.9056604	9.433961E-2	0.7679951	0.2320049	0.4547485
5	6.832395	0.9090909	9.090912E-2	0.7675357	0.2324643	0.4563468
5.199999	7.072395	0.9122807	8.771932E-2	0.7670854	0.2329146	0.457835
5.399999	7.312395	0.9152542	8.474576E-2	0.7666443	0.2333557	0.4592245
5.599999	7.552394	0.9180328	8.196723E-2	0.7662122	0.2337878	0.4605243
5.799999	7.792394	0.9206349	7.936507E-2	0.7657892	0.2342108	0.4617435
5.999999	8.032394	0.9230769	7.692307E-2	0.7653752	0.2346248	0.462889
6.199998	8.272394	0.9253731	7.462686E-2	0.7649704	0.2350296	0.4639675
6.399998	8.512394	0.9275362	7.246381E-2	0.7645745	0.2354255	0.4649845
6.599998	8.752394	0.9295775	7.042253E-2	0.7641879	0.2358121	0.4659458
6.799998	8.992393	0.9315068	6.849319E-2	0.7638102	0.2361898	0.466855
6.999998	9.232393	0.9333333	6.666666E-2	0.7634415	0.2365585	0.4677168
7.199997	9.472393	0.9350649	6.493509E-2	0.7630819	0.2369181	0.4685345
7.399997	9.712393	0.9367089	6.329113E-2	0.7627313	0.2372687	0.4693117
7.599997	9.952393	0.9382716	6.172842E-2	0.7623897	0.2376103	0.4700512
7.799997	10.19239	0.939759	6.024098E-2	0.7620571	0.2379429	0.470756
7.999997	10.43239	0.9411765	5.882353E-2	0.7617335	0.2382665	0.471428
8.199997	10.67239	0.9425287	5.747128E-2	0.761419	0.238581	0.4720697
8.399997	10.91239	0.9438202	5.617982E-2	0.7611135	0.2388865	0.472683
8.599997	11.15239	0.9450549	5.494505E-2	0.7608169	0.2391831	0.47327
8.799996	11.39239	0.9462366	5.376345E-2	0.7605295	0.2394705	0.4738322
8.999996	11.63239	0.9473684	5.263162E-2	0.7602508	0.2397492	0.474371
9.199996	11.87239	0.9484536	5.154639E-2	0.7599813	0.2400187	0.4748882
9.399996	12.11239	0.9494949	0.0505051	0.7597206	0.2402794	0.4753845
9.599996	12.35239	0.950495	0.049505	0.759469	0.240531	0.4758618
9.799995	12.59239	0.9514563	4.854369E-2	0.7592263	0.2407737	0.476321

E 11

Vps	Vfs	Vgd	Vld	(dP/dx)	(dP/dx)s	(dP/dx)d	(dP/dx)g
0.3405437	0.4860488	1.657463	1.597225	4.394785	-2144.725	99.55796	7010.768
0.2935698	0.834728	1.905634	1.845397	7.788437	-2151.588	103.2743	5455.638
0.2637146	1.120426	2.134858	2.07462	10.15775	-2158.447	98.39014	4466.01
0.2430765	1.371771	2.354591	2.294353	11.9014	-2165.258	89.58178	3780.883
0.2279681	1.602142	2.568861	2.508624	13.2389	-2172.004	79.09651	3278.456
0.2164373	1.818633	2.779687	2.71945	14.29895	-2178.688	68.1288	2894.248
0.2073541	2.025364	2.988199	2.927961	15.16143	-2185.305	57.35803	2590.926
0.2000183	2.2249	3.195073	3.134835	15.87841	-2191.854	47.18479	2345.378
0.1939741	2.418915	3.400747	3.34051	16.48524	-2198.339	37.85002	2142.536
0.1889109	2.608563	3.605514	3.545277	17.00672	-2204.757	29.4953	1972.147
0.1846108	2.794662	3.809579	3.749342	17.46074	-2211.108	22.19769	1827.002
0.180915	2.977813	4.013087	3.952849	17.86057	-2217.392	15.9896	1701.876
0.1777067	3.158462	4.216146	4.155909	18.21622	-2223.611	10.8719	1592.896
0.1748971	3.336959	4.418839	4.358602	18.53542	-2229.763	6.82015	1497.126
0.1724174	3.513579	4.62123	4.560992	18.8242	-2235.848	3.789028	1412.301
0.1702137	3.688538	4.823363	4.763125	19.08736	-2241.866	1.712329	1336.646
0.1682437	3.862021	5.025283	4.965046	19.32878	-2247.817	0.5007916	1268.75
0.1664728	4.03417	5.227019	5.166781	19.55166	-2253.703	2.777825E-2	1207.479
0.1648729	4.205115	5.428594	5.368356	19.75868	-2259.52	8.675634E-2	1151.907
0.163421	4.374959	5.630033	5.569795	19.95177	-2265.271	0.7395796	1101.275
0.1620982	4.543797	5.831351	5.771113	20.13235	-2270.956	2.198662	1054.952
0.1608887	4.711708	6.032564	5.972326	20.30169	-2276.573	4.606923	1012.411
0.1597784	4.878764	6.233683	6.173446	20.46091	-2282.123	8.082932	973.2054
0.1587562	5.04503	6.43472	6.374482	20.61097	-2287.606	12.73186	936.9593
0.1578129	5.210557	6.635682	6.575445	20.75272	-2293.023	18.65011	903.3497
0.1569391	5.375402	6.836579	6.776341	20.88688	-2298.373	25.92774	872.0983
0.1561278	5.539617	7.037415	6.977178	21.01409	-2303.655	34.65043	842.9654
0.1553732	5.703234	7.238198	7.177961	21.13492	-2308.871	44.89944	815.7432
0.1546691	5.866303	7.438932	7.378695	21.24988	-2314.02	56.75369	790.249
0.1540113	6.028857	7.639625	7.579387	21.35941	-2319.103	70.28852	766.324
0.1533953	6.190934	7.840274	7.780036	21.46389	-2324.118	85.57933	743.8273
0.1528177	6.352563	8.040887	7.980649	21.56369	-2329.067	102.6974	722.6352
0.1522737	6.513787	8.241465	8.181228	21.65911	-2333.948	121.7142	702.6361
0.1517624	6.674622	8.442013	8.381776	21.75046	-2338.763	142.6981	683.7338
0.1512792	6.835108	8.642532	8.582295	21.83798	-2343.512	165.7179	665.8387
0.1508235	6.995265	8.843024	8.782787	21.92191	-2348.194	190.8416	648.8739
0.1503916	7.155124	9.043492	8.983255	22.00247	-2352.811	218.1347	632.7676
0.1499829	7.314709	9.243937	9.183701	22.07984	-2357.36	247.6632	617.4572
0.1495948	7.474045	9.444362	9.384125	22.15422	-2361.844	279.492	602.8843
0.1492255	7.633157	9.644767	9.58453	22.22576	-2366.261	313.685	588.997
0.1488746	7.792067	9.845151	9.784914	22.2946	-2370.613	350.3092	575.7486
0.1485406	7.950798	10.04552	9.985283	22.3609	-2374.898	389.4239	563.0958
0.1482206	8.109379	10.24587	10.18564	22.42477	-2379.118	431.093	550.9984
0.1479157	8.267825	10.44621	10.38597	22.48634	-2383.271	475.3815	539.4218
0.1476244	8.426156	10.64654	10.5863	22.54573	-2387.361	522.345	528.3329
0.1473444	8.5844	10.84685	10.78661	22.60302	-2391.384	572.0544	517.7007

0.1470772	8.742565	11.04715	10.98691	22.65832	-2395.342	624.5683	507.4988
0.1468198	8.900683	11.24744	11.1872	22.71173	-2399.235	679.9494	497.7004
0.1465718	9.058775	11.44771	11.38748	22.76331	-2403.063	738.2564	488.2822

Fi	Rep	qg	ql	qps	qfs
2.862021E-2	229.5142	1.691341E-4	4.228353E-4	4.228353E-4	1.691341E-4
1.702411E-2	853.2352	2.913575E-4	3.641969E-4	3.641969E-4	2.913575E-4
1.460419E-2	1350.19	3.92258E-4	3.268816E-4	3.268816E-4	3.92258E-4
1.340862E-2	1778.094	4.816767E-4	3.010479E-4	3.010479E-4	4.816767E-4
1.265453E-2	2163.917	5.642064E-4	2.821031E-4	2.821031E-4	5.642064E-4
1.211776E-2	2521.956	6.422785E-4	2.676159E-4	2.676159E-4	6.422785E-4
1.170728E-2	2860.512	7.173007E-4	2.56179E-4	2.56179E-4	7.173007E-4
1.137828E-2	3184.748	7.901445E-4	2.469202E-4	2.469202E-4	7.901445E-4
1.110578E-2	3498.037	8.613779E-4	2.392718E-4	2.392718E-4	8.613779E-4
1.087455E-2	3802.696	9.313877E-4	2.328469E-4	2.328469E-4	9.313877E-4
1.067469E-2	4100.371	1.000446E-3	2.273742E-4	2.273742E-4	1.000446E-3
1.049941E-2	4392.265	1.068749E-3	2.226559E-4	2.226559E-4	1.068749E-3
0.0103439	4679.274	1.136443E-3	2.185466E-4	2.185466E-4	1.136443E-3
1.020458E-2	4962.096	1.203639E-3	2.149355E-4	2.149355E-4	1.203639E-3
1.007876E-2	5241.282	1.270423E-3	2.117372E-4	2.117372E-4	1.270423E-3
9.964355E-3	5517.263	1.33686E-3	2.088844E-4	2.088844E-4	1.33686E-3
9.859709E-3	5790.401	1.403006E-3	2.063244E-4	2.063244E-4	1.403006E-3
0.0097635	6060.982	1.468901E-3	2.040142E-4	2.040142E-4	1.468901E-3
9.674642E-3	6329.263	1.534581E-3	2.019187E-4	2.019187E-4	1.534581E-3
9.591488E-3	6595.444	1.600075E-3	2.000094E-4	2.000094E-4	1.600075E-3
9.514797E-3	6859.712	1.665407E-3	1.982627E-4	1.982627E-4	1.665407E-3
9.443195E-3	7122.223	1.730596E-3	1.966588E-4	1.966588E-4	1.730596E-3
9.376145E-3	7383.117	1.795659E-3	1.951803E-4	1.951803E-4	1.795659E-3
9.31319E-3	7642.518	1.860611E-3	1.938135E-4	1.938135E-4	1.860611E-3
9.253938E-3	7900.526	1.925463E-3	1.925466E-4	1.925466E-4	1.925463E-3
9.198038E-3	8157.252	1.990226E-3	1.913681E-4	1.913681E-4	1.990226E-3
9.145191E-3	8412.793	2.05491E-3	1.902693E-4	1.902693E-4	2.05491E-3
9.095136E-3	8667.214	2.119521E-3	1.892431E-4	1.892431E-4	2.119521E-3
9.047634E-3	8920.606	2.184068E-3	1.882815E-4	1.882815E-4	2.184068E-3
9.002481E-3	9173.036	2.248556E-3	1.873794E-4	1.873794E-4	2.248556E-3
8.959489E-3	9424.572	2.312989E-3	1.865311E-4	1.865311E-4	2.312989E-3
8.918494E-3	9675.272	2.377372E-3	1.857326E-4	1.857326E-4	2.377372E-3
8.879344E-3	9925.216	2.441712E-3	1.849779E-4	1.849779E-4	2.441712E-3
8.841909E-3	10174.43	2.506009E-3	1.842657E-4	1.842657E-4	2.506009E-3
8.806065E-3	10423	2.570269E-3	1.835903E-4	1.835903E-4	2.570269E-3
8.771702E-3	10670.95	2.634494E-3	1.82951E-4	1.82951E-4	2.634494E-3
8.73872E-3	10918.34	2.698686E-3	1.823433E-4	1.823433E-4	2.698686E-3
8.707027E-3	11165.23	2.762848E-3	1.817664E-4	1.817664E-4	2.762848E-3
8.67654E-3	11411.64	2.826983E-3	1.812169E-4	1.812169E-4	2.826983E-3
8.647182E-3	11657.64	2.891092E-3	1.806928E-4	1.806928E-4	2.891092E-3
8.618883E-3	11903.26	2.955175E-3	1.801935E-4	1.801935E-4	2.955175E-3
8.591578E-3	12148.55	3.019236E-3	1.79717E-4	1.79717E-4	3.019236E-3
8.565206E-3	12393.55	3.083279E-3	1.7926E-4	1.7926E-4	3.083279E-3



—— Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- [1]-BEGGAG A. -1990- " Contribution au calcul par la méthode aux différences finies des écoulements diphasique "
Thèse d'Ingénieur d'Etat à l'Ecole Nationale Polytechnique (E.N.P)
- [2]-BOUMAH RAT M., GOURDIN A. -1993- " Méthodes numériques appliquées "
Ed. OPU.
- [3]-BARANGER J. -1987- " Introduction à l'analyse numérique "
Ed. HERMAN.
- [4]-BOUTEKDJIRET H., HABOUSSI M. -1992- " Une approche mathématique et numérique pour l'étude des écoulements diphasiques dans une conduite cylindrique "
Thèse d'Ingénieur d'Etat à l'Ecole Nationale Polytechnique (E.N.P)
- [5]-BOUSQUET J. -1990- "Aérodynamique, méthodes des singularités "
Ed. CEPAUDES.
- [6]-CUVELIER C. - 1988- "Eléments d'équations aux dérivées partielles pour ingénieurs "
ED. PRESSES POLYTECHNIQUES ROMANDE.
- [7]-DAUBE A. - 1978- " Etude numérique d'un écoulement instationnaire de fluide visqueux incompressible autour d'un corps "
JOURNAL DE MECANIQUE. Volume 17
- [8]-DAUTRY R. -1987- "Analyse mathématique et calcul numérique "
Ed. MASSON.
- [9]-DELHAYE J.M. -1991- " Ecoulement diphasique "
Cours à l'école des arts et manufactures (E.C.P)
- [10]-EUVRARD D. -1994- " Résolution numérique des équations aux dérivées partielles "
Ed. MASSON.
- [11]-GODOUNOV S. -1977- " Schémas aux différences "
Ed. MIR.
- [12]-FITREMANN J.M. -- " Ecoulements diphasiques. Lois générales"
TECHNIQUE DE L'INGENIEUR. Volume AF5, N° A 720
- [13]-FRECHOU D. -1986- "Etude de l'écoulement vertical ascendant à trois fluides en conduites verticales "
Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse - Institut de mécanique des fluides (I.M.F.T/ I.N.P.T).
- [14]-ISHII M. -1975- " Thermo-fluid dynamic theory of two phase flows "
Ed. EYROLLES.
- [15]-KETTAB A -1990- " Ecoulements diphasiques en conduites verticales et inclinées "
Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

[15]-KETTAB A -1990- " Ecoulements diphasiques en conduites verticales et inclinées "
Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

[16]-KETTAB A., LINE A., MASBERNAT L. -1990- " Ecoulements diphasiques en conduites verticales " Partie II : " Ecoulement gaz-liquide en conduites verticales "
JOURNAL OF TECHNOLOGIE.

[17]-LINE A. -1983- " Ecoulement intermittent de gaz et de liquide en conduite verticale "
Thèse de Docteur-Ingénieur de l'Institut National Polytechnique de Toulouse - Institut de mécanique des fluides (I.M.F.T/ I.N.P.T).

[18]-ROACHE P. -1980- " Computational fluid dynamics "
Ed. MIR.

[19]-WALLIS G.B. -1969- " One dimensional two-phase flow "
Mac Graw Hill Book CO. NEW YORK.

