

7/00

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieure et
de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Hydraulique



Projet de Fin d'études

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en Hydraulique



**SIMULATION DE L'ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL
DANS LES EAUX DE SURFACE**

Proposé et dirigé par :

M^r: BENZIADA SALIM
M^r: NAKIB MAAMAR

Étudié par :

Djamal GHEMATI
Saïd HACHEMAOUI

1999/2000

E.N.P. 10 ,Avenue Hassen -Badi, El-Harrach , Alger.

Remerciement

En premier lieu nous tenons à remercier notre promoteur Mr : BENZIADA de nous avoir encadrer et nous avoir conseiller.

Nous tenons également à remercier Melle :

S.BENMAMAR de l'aide précieuse qui nous été fournie dans l'établissement de cette thèse.

Nous remercions par la suite tous les membres de jury qui nous ont fait l'honneur de présider ce travail.

Nous remercions aussi chaleureusement Mr : R. MESSAHLI, ainsi que Mr : ALI BERREKSI pour leur aide.

Nous tenons également à remercier tous nos enseignants du département d'hydraulique.

Nos derniers remerciements vont à tous nos amis : Redha, Kamel, Amirouche...

Dédicaces

Au deux êtres qui me sont les
plus chères dans ce monde :
mon père et ma mère

A la mémoire de ma grand-mère

A mon frère

A mes sœurs

A tous qui m'ont encouragé

Je dédie ce modeste travail

Djamal GHEMATI

Dédicaces

A ma mère

A mon père

A ma grand-mère

A mes sœurs

A mes frères

A tous ceux qui me sont chers(es)

Je dédie ce modeste travail

Saïd HACHEMAOUI

RESUME

Une simulation des écoulements turbulents à surface libre dans des canaux rectangulaire à faible pente a été faite en utilisant les équations bidimensionnelles de la conservation de la masse et la quantité de mouvement.

Le modèle $K-\varepsilon$ a été choisis pour modeler la turbulence. Après la discrétisation de ces équations par un schéma numérique de MACCORMACK, elles sont utiliser par la suite dans un programme de calcul numérique .

Pour l'écoulement à surface libre non turbulent les résultats obtenus montre une concordance satisfaisante avec les résultats d'autres investigateurs.

Pour l'écoulement à surface libre turbulent les résultats obtenus semblent êtres satisfaisantes.

ABSTRACT

A simulation of flows turbulent to area free in the channels rectangulaire to weak slope have summer make in used ;the equations bidimensionnelles of the preservation of the ground and the quantity of movement.

The model $K-\varepsilon$ have summer choose to model the turbulence. After the discrétisation of these equations by a scheme numerical of MACCORMACK, they are used by the continuation in a program of calculation numerical .

To flow with area free not turbulent, the results obtenus watch a agreement satisfactory with the results other investigateurs.

To flow with area free turbulent, the results seems satisfactory.

نقوم في هذه الأطروحة بدراسة جريان المياه ذات السطح الحر في مجاري مستطيلة البعد ذات ميل ضعيف . تمت هذه الدراسة بإستعمال معادلات ثنائية البعد على أعماق متوسطة في حالة غير مستقرة، والمتحصل عليها بتطبيق قانوني الحفاظ على الكتلة وكمية الحركة. ثم بعد ذلك تم حساب عدديا معادلات الحركة في مجال حولت إحداثياته بإستعمال مخطط ماك كورماك. النتائج المحصل عليها تبين توافق جيدا مع النتائج المحصل عليها من قبل في حالة عدم وجود ثوران المياه. وبقي المجال مفتوح للتأكد من النتائج المحصل عليها في حالة وجود.

Mots clés

Français	Anglais	Arabe
Écoulements à surface libre	Flow to area free	المياه ذات السطح الحر
Bidimensionnel	Two dimensions	ثنائي البعد
Turbulence	Turbulence	ثوران

Introduction	1
1- Généralités sur les écoulements a surface libre	2
2- Classification des écoulements	2
3- Régime d'écoulement	3
Chapitre I : Etat de connaissance sur les équations de SAINT VENANT bidimensionnel	5
Chapitre II : Modèle mathématique d'un écoulement a surface libre	13
Introduction	14
I -Equations de base	
1°/ Equation de continuité	14
2°/ Equation de la quantité de mouvement	14
II- Hypothèses de base	15
III-Concept de la turbulence	16
1°/ Définition de la turbulence	16
2°/ Les caractéristiques fondamentales de la turbulence	16
3°/ Approche de la turbulence	17
IV- Intégration des équations de Navier–Stokes suivant la profondeur	18
1°/ Intégration de l'équation de la conservation de la masse	18
2°/ Intégration de la première équation de NAVIER-STOCKES	19
3°/ Hypothèse supplémentaire	24
Conclusion	25
Chapitre III : Choix du modèle de turbulence	26
1°/ Définition d'un modèle de turbulence	27
2°/ Critères de choix	27
3°/ Modèles a viscosité turbulente	27

a) Modèle a zéro équation de transport	27
b) Modèle à une équation et deux équations de transport	29
α) Modèle à une équation de transport	29
β) Modèle à deux équations de transport	30
γ) Exemple de modèle a deux équations de transport : Modèle K - ϵ	30
4°/ Choix du modèle de turbulence	31
5°/ Formulation du modèle retenu	33
a) Intégration de l'équation de transport de dissipation d'énergie turbulente suivant la profondeur	33
b) Intégration de l'équation d'évolution de taux de dissipation d'énergie turbulente suivant la profondeur	36
6°/ Conditions initiales et conditions aux limites	37
1- Conditions initiales	37
2- Conditions aux limites	37
3- Conditions sur les parois solides	37
4- Conditions aux limites sur K et ϵ	37
Conclusion	38
Chapitre IV : Modélisation Numérique de l'écoulement étudié	40
Introduction	41
I- Différentes méthodes numériques	41
I-1- Méthode des éléments finis	41
I-2- Méthode des volumes finis	41
I-3- Méthode des différences finies	42
Cas d'une approximation à plusieurs dimensions	43
II - Analyse de l'approximation	44
a) Erreur de troncature	44
b) La consistance d'un schéma aux différences finies	44
c) La stabilité	44
d) La convergence	45

III- Schéma explicite , schéma implicite	45
IV- Choix du schéma numérique	45
IV-1- Description du schéma de MAC CORMACK	45
a) Etape de prédiction	46
b) Etape de correction	46
IV-2- Stabilité du schéma	46
IV-3- Application du schéma de MAC CORMACK au modèle mathématique étudié	47
- Etape prédiction	50
- Etape correction	53
Organigramme	57
V- Résultats et interprétations	61
1-Première application	62
2-Deuxième application	68
 CONCLUSION GENERALE	 74

INTRODUCTION

« je me suis heurté, à moins de difficultés
dans la découverte du mouvement des corps célestes,
malgré leur éloignement étonnant que dans les recherches
sur le mouvement de l'eau courante qui se produit
cependant sous nos yeux »

GALILEE (1564 – 1642)

INTRODUCTION

L'étude de l'écoulement de l'eau dans les canaux à ciel ouvert est d'une extrême complexité lorsque nous l'envisageons dans toute sa généralité.

L'écoulement à surface libre est caractérisé par l'existence d'une surface de séparation où s'exerce une pression égale à celle du gaz. Cette condition, c'est une condition limite pour l'écoulement liquide.

La surface libre est déformable, cette déformabilité donne une particularité à ce genre d'écoulement. Il faut souligner que l'écoulement de l'eau libre est un phénomène beaucoup plus complexe que l'écoulement en charge parce que la présence d'une surface libre entraîne les variations des sections liquides suivant la longueur du courant.

Par ailleurs, la solution des problèmes scientifiques passe par une représentation mathématique des phénomènes mis en jeux. Ces derniers sont en général multiples et compliqués. Pour les représenter, on est amené à négliger certains phénomènes et à simplifier certains autres. Et même avec cela les équations obtenues sont souvent insolubles par les méthodes algébriques connues.

L'apparition des ordinateurs dans les années cinquante et l'arrivée de l'outil de calcul numérique ont contribué à un rapide développement dans toutes les branches des sciences physiques englobant le domaine hydraulique. Ce qui a permis de traiter un grand nombre de problème décrits par les équations aux dérivées partielles.

L'objectif de ce travail est la simulation des écoulements turbulents non permanents bidimensionnel afin d'obtenir des solutions à l'état permanent en utilisant le temps comme paramètre d'itération.

Dans l'introduction nous donnons quelques généralités sur les écoulement à surface libre.

Dans le chapitre 'I' un état de connaissance sur le phénomène étudié est donné.

Nous présentons dans le chapitre 'II' les équations de NAVIER-STOCKES (tridimensionnels) et leur intégration sur la profondeur pour l'obtention d'un modèle mathématique (Bidimensionnel) des écoulements à surface libre de Saint Venant.

On passe au chapitre 'III', nous présentons en bref les modèles de turbulence, ainsi que le modèle choisi.

Dans le chapitre 'IV', nous donnons le modèle numérique de l'écoulement turbulent à surface libre.

Nous terminerons cette étude par quelques applications, les résultats obtenues seront comparés à des travaux d'autres chercheurs effectués numériquement et expérimentalement.

1-Généralités sur les écoulements a surface libre : [09]

- Les écoulements à surface libre sont caractérisés par l'existence d'une surface de séparation entre l'air et l'eau appelée 'surface libre' et qui est généralement soumise à la pression atmosphérique.
- On appelle "canal" un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

Tous les lits peuvent être subdiviser en deux catégories :

- 'Les lits naturels' qui sont des cours d'eaux existant naturellement sur terre ; tels que les rivières, les ruisseaux, fleuves et estuaires et dont les propriétés géométriques et hydrauliques sont généralement assez irrégulières.
- 'Les lits artificiels' qui sont des cours d'eaux réalisés par l'homme, tels que ; les canaux de navigation et évacuation et dont les propriétés géométriques et hydrauliques sont généralement assez régulières.

2-CLASSIFICATION DES ECOULEMENTS : [09]

On peut classer les écoulements dans les canaux à ciel ouvert selon deux critères :

- Espace.
- Temps.

En prenant le premier critère, on peut distinguer:

- ✓ **L'écoulement uniforme** : dont la profondeur est la même partout.
- ✓ **L'écoulement varié** : dont la profondeur varié le long du canal, il peut encore être divisé en deux catégories:
 - a) **graduellement variable** : sa profondeur variée, avec la distance graduellement.
 - b) **Rapidement variable** : la profondeur change brusquement.

Le deuxième critère permet de diviser les écoulements en:

Permanents ou *Stationnaires* (la profondeur, dans une section données, reste constante) et non permanents ou non stationnaires (la profondeur, dans une section, varie avec le temps). Théoriquement un écoulement uniforme ou écoulement varié peut être ou bien permanent ou bien stationnaire.

Dans la pratique l'écoulement uniforme non stationnaires est presque impossible à réaliser. Par contre les écoulements non stationnaires graduellement variés ou rapidement variés sont souvent rencontrés dans la nature.

3-REGIME D'ÉCOULEMENT : [09]

L'écoulement d'un fluide dans un canal à surface libre engendre les forces suivantes :
Les forces d'inertie, de gravité et de frottement (viscosité et rugosité).

L'effet de la gravité sur le régime d'écoulement est représenté par le rapport des forces d'inertie aux forces de gravité.

Ce rapport de grande utilité en hydraulique des écoulements est défini comme étant le nombre de FROUDE et est exprimé par : $F = \frac{V}{C}$

où V : la vitesse d'écoulement (m/s).

C : la vitesse de propagation ou célérité, dépend uniquement de la géométrie de la section transversale et peut être exprimer comme suit:

$$C = \sqrt{g \cdot \frac{A}{B_s}}$$

A : est la surface transversale de la section mouillée (m²).

B_s : est la largeur de la surface libre (m).

g : est l'accélération de la pesanteur (m/s²).

Dans le cas d'un canal rectangulaire de largeur b et de surface transversale,

$$A = b \cdot h$$

où h : est la profondeur de l'écoulement, la célérité devient:

$$C = \sqrt{g \cdot h}$$

Lorsque la vitesse de l'écoulement est égale à la célérité, le nombre de Froude 'F' est égale a l'unité. On dira que l'écoulement est en régime 'critique'.

Par contre, si le nombre de Froude 'F' est inférieur à l'unité, l'écoulement est alors en régime 'subcritique' ou 'fluviale'. Dans ce cas l'effet de la gravité est plus prononcé, ceci se traduit par une faible vitesse d'écoulement.

Finalement, si le nombre de Froude 'F' est supérieur à l'unité, le régime d'écoulement devient 'supercritique' ou 'torrentiel'. Les forces d'inertie seront donc plus prépondérantes, ceci se traduit par une importante vitesse d'écoulement.

CHAPITRE I

ETAT DE CONNAISSANCE SUR LES EQUATIONS DE SAINT VENANT BIDIMENSIONNEL

CHAPITRE I

ETAT DE CONNAISSANCE SUR LES EQUATIONS DE SAINT VENANT BIDIMENSIONNEL

On trouve dans la littérature plusieurs travaux entrepris par certains chercheurs et scientifiques sur les écoulements à surface libre, et qui ont proposé des systèmes d'équations obtenus en appliquant soit les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ; soit les principes de conservation de la masse et de l'énergie , tout en posant certaines hypothèses afin de faciliter la résolution du problème en questions .

- Ainsi, en (1973)YEN [27] a présenté une étude purement théorique et globale, concernant les équations générales gouvernant les écoulements a surface libre. On y trouve des développements détaillés sur les équations unidimensionnelles de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie, pour différents types d'écoulements turbulent ou laminaire, permanent ou non permanent, uniforme ou non uniforme, subcritique ou supercritique , graduellement ou rapidement varié et pour différents types de fluides : compressible ou incompressible , homogène ou non homogène , visqueux ou non visqueux...

- En (1977) HUG [16] a fait et présenté une généralisation des équations de SAINT-VENANT bidimensionnels en tenant compte de la force de Coriolis. Les équations développées sont celles des écoulements bidimensionnels presque horizontaux, en régime non permanent dans les canaux a ciel ouvert, obtenues par application des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement à un prisme élémentaire de base Δx , Δy et de hauteur h .

- LAI (1977) [18] a donné une analyse sur le calcul des écoulements bidimensionnels non permanents dans les rivières et les estuaires ont utilisant la méthode des caractéristiques. IL a intégrer le système d'équations tridimensionnelles de NAVIER-STOCKES sur la profondeur suivant un système d'axes choisi, tout en faisant quelques suppositions nécessaires pour aboutir à un système d'équations gouvernant ces écoulements.

Les équations obtenues par intégration sur la profondeur des équations tridimensionnelles de NAVIER-STOCKES, comme il a été développé par LAI [18]; sont :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 h + g \frac{h^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) = E'_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 h + g \frac{h^2}{2}\right) = E'_y$$

Où ;
$$E'_x = gh(S_{ox} - S_{fx}) + F_c V - \frac{1}{\rho} \tau_{sx} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$E'_y = gh(S_{oy} - S_{fy}) + F_c U - \frac{1}{\rho} \tau_{sy} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$U = uh ; V = vh ; S_{ox} = -\frac{\partial Z_b}{\partial x} ; S_{oy} = -\frac{\partial Z_b}{\partial y}$$

$$S_{fx} = n^2 U \frac{(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{10}{3}}} ; S_{fy} = n^2 V \frac{(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{10}{3}}}$$

• Le model hydrodynamique bidimensionnelle à moyen profondeur développer par PONCE et YABUSAKI (1981) et étudié par CHIRANANOT(1983) [11] est basé sur l'équation de conservation de la masse, et l'équation de quantité de mouvement selon les direction Δx et Δy s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + v \frac{\partial(Hu)}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gu}{C^2 H} (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho H} \left[\frac{\partial(H T_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(H T_{xy})}{\partial y} \right] = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial(Hv)}{\partial x} + v \frac{\partial(Hv)}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{gv}{C^2 H} (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho H} \left[\frac{\partial(H T_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(H T_{yy})}{\partial y} \right] = 0$$

Où u, v sont les vitesses à moyenne profondeur dans les directions (ox) et (oy) respectivement :

H = profondeur d'eau.

C = coefficient de Chezy.

T_{xx}, T_{xy} et T_{yy} = viscosité effective.

Pour simplifier le travail, les suppositions suivantes ont été faite:

1. La variation de la profondeur du champs du cours d'eau est considéré petite, ce qui a permis d'introduire le modèle de KUIPERS et VRENGDENHIL (1973), pour la linéarisation des termes de contraintes effectives des équations à résoudre :

$$\frac{1}{\rho H} \left[\frac{\partial(H T_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(H T_{xy})}{\partial y} \right] = \mu_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{1}{\rho H} \left[\frac{\partial(H T_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(H T_{yy})}{\partial y} \right] = \mu_t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

où : μ_t est la viscosité turbulente.

2. L'effet du fond est petite est négligeable.

3. En partage la vitesse en moyenne et turbulente ; la valeur de la vitesse moyenne est plus grande que celle de la vitesse de fluctuation.

$$\begin{cases} U = u + u' \\ V = v + v' \end{cases}$$

Pour la simulation numérique de ce système le schéma implicite à direction alternée (ADI) a été utilisé.

Pour l'application de ce modèle bidimensionnelle et de schéma implicite(ADI); ont considéré les travaux De CHAIRANANONT (1983).

- En 1986 GARCIA et KAHAWITA [14] ont présenté une étude purement numérique sur l'écoulement bidimensionnel en faisant intervenir les effets de Coriolis, du vent et de la viscosité turbulente.

- En (1992) BHALLAMUDI et CHAUDHRY [08] ont présenté une analyse relative aux calculs des écoulements à surface libre dans des changements de géométrie (élargissement, rétrécissements).

Ces écoulements sont gouvernés par les équations bidimensionnelles à profondeur moyen, obtenues par intégration des équations générales du mouvement.

Le système d'équations obtenu est le même que celui donné par LAI [18], avec l'hypothèse d'une faible pente.

- Pour l'objectif de la simulation et l'analyse des écoulements à surface libre dans les transitions. BERREKSI et BOUHADJI (1993) [07] ont présenté une thèse d'ingénieur sous la direction de BELHADJ en rapport avec le travail fait par BHALLAMUDI et CHAUDHRY [08]. Un modèle mathématique des écoulements bidimensionnels en régime permanent a été utilisé pour obtenir des solutions à l'état permanent en traitant la variable temps comme paramètre d'itération.

• MUHAMAD YOUNUS et M.HANIF CHAUDHRY (1994) [15] présentent dans leurs articles un modèle numérique de calcul résolvant les équations régissant les écoulements à surface libre non permanent, bidimensionnelle, moyennés sur la verticale.

Les contraintes turbulentes sont représentées par un modèle $\bar{K}-\bar{\varepsilon}$ moyennant sur la verticale. Cependant, les contraintes visqueuses sont négligées.

Les équations de base sont tout d'abord transformées de la façon suivante :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial y} = 0$$

Equation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}^2 + g\frac{H^2}{2}) + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = -gH\frac{\partial Z_b}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\tau_{bx} \\ + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}(HT_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(HT_{xy})\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{v}^2 + g\frac{H^2}{2}) = -gH\frac{\partial Z_b}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\tau_{by} \\ + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}(HT_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(HT_{yy})\right) \end{aligned}$$

Où T_{xx} , T_{xy} et T_{yy} sont les contraintes effectives données par :

$$T_{xx} = \frac{1}{H} \int_{z_b}^{H+Z_b} \left(2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'v'} - \rho \overline{u'^2} \right) dz$$

$$T_{xy} = \frac{1}{H} \int_{z_b}^{H+Z_b} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} - \rho \overline{u'v} \right) dz$$

$$T_{yy} = \frac{1}{H} \int_{z_b}^{H+Z_b} \left(2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} - \rho \overline{v'^2} \right) dz$$

Où μ est la viscosité dynamique.

u' et v' : les fluctuations de la vitesse.

\bar{u} et \bar{v} : vitesse moyenne.

ρ : masse volumique de l'eau.

Les contraintes du fond sont exprimées par la formule :

$$\tau_{bx} = \frac{\partial g}{C^2} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \quad \tau_{by} = \frac{\partial g}{C^2} \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$$

Où C ; coefficient de CHEZY .

Pour la fermeture du système donnée, les deux auteurs ont introduit le modèle $\bar{K}-\bar{\varepsilon}$ intégré sur la profondeur et qui est donné par :

Equation de \bar{K} :

$$\frac{\partial(H\bar{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{K})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}\bar{K})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U_t}{\sigma_k} \frac{\partial(H\bar{K})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{U_t}{\sigma_k} \frac{\partial(H\bar{K})}{\partial y} \right] + P_h + P_k - \bar{\varepsilon} H$$

Equation de $\bar{\varepsilon}$:

$$\frac{\partial(H\bar{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{\varepsilon})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}\bar{\varepsilon})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(H\bar{\varepsilon})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{U_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(H\bar{\varepsilon})}{\partial y} \right] + \frac{\bar{\varepsilon}}{K} \left[C_1 P_h - C_2 \bar{\varepsilon} H \right] - P_\varepsilon$$

$$\text{Où} \quad P_h = \frac{U_t}{2} \left[2 \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(H\bar{v})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial y} + \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$P_k = \frac{g}{C^2} q^3, \quad P_\varepsilon = \frac{C_2 C_\mu^{\frac{1}{2}} g^{\frac{3}{2}} q^{\frac{5}{4}}}{h D^{\frac{1}{2}} C^{\frac{5}{2}}}, \quad q = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}, \quad U_t = C_\mu \frac{\bar{K}^2}{\bar{\varepsilon}}$$

ν_t est la viscosité turbulente .

Les valeurs des constantes empiriques sont données par :

$$C_\mu = 0.09, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3 \text{ et } D = 1.0$$

Pour la résolution du système, MUHAMMAD, Y. et HANIF CHAUDHRY, M. ont appliqué un schéma implicite à direction alternée (ADI) de BEARN WARNING (1976).

A - Les conditions aux limites près de la paroi pour le modèle $\overline{K}-\overline{\varepsilon}$ sont données par :

$$\overline{K}_w = \frac{V_0^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad ; \quad \overline{\varepsilon}_w = \frac{V_0^3}{\chi Y_n}$$

Où Y_n : distance de l'élément à la paroi.

χ : constante de VAN KARMAN, égale à 0.41.

V_0 : vitesse initiale.

C_μ : constante empirique.

B - Les conditions initiales sont données comme suit :

Pour commencer la simulation, la valeur initiale de chaque terme doit être spécifié sur tous les points de maillage.

Les valeurs initiales de $\overline{K}-\overline{\varepsilon}$ sont donnée par (ROSTOGI et RODI (1978)) comme suit :

$$\overline{\varepsilon} = S_0 g u \quad ; \quad \overline{K} = \left(0.0765 \frac{\overline{\varepsilon}}{C_\mu} \frac{g H u}{C^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Les deux applications qui ont été faites ont aboutie à des bons résultats.

1- La première application de ce modèle est faite sur un canal rectangulaire uniforme, les données sont pris comme suit :

$L=30.5\text{m}$, $H=0.305\text{m}$, $B=9.15\text{m}$, $n=0.029$, $C=51.4$ et $S_0=0.000095$, maillage (51x 41).

Les valeurs initiales de u et v sont données dans chaque point de la maille comme suit :

$$U = 0.152\text{m/s}, v = 0\text{m/s} \text{ avec } H = 0.305\text{m}.$$

2 – La deuxième application de ce modèle est faite sur un canal rectangulaire divergent, l'écoulement est supercritique, les valeurs initiales de H , u et v sont données par :

$$H = 0.0976\text{m}, u = 1.94\text{m/s}, v = 0\text{m/s} \text{ et } C = 110.$$

Quand l'écoulement devient subcritique u et v seront spécifiés par $u = 0.302\text{m/s}$ et $v = 0\text{m/s}$ et ne change pas durant toute le calcul.

Les valeurs de \bar{K} et $\bar{\mathcal{E}}$ seront extrapolées à l'intérieur de maillage.

- Afin ; d'étudier la dispersion d'une substance quelconque dans un environnement aquatique, à écoulement non permanent, soumis à l'influence du transport du fluide et au processus de dispersion associé. LAROUÏ. D. (1994) [19] a opté pour un modèle mathématique qui consiste à résoudre les équations de SAINT-VENANT et les équations de transport intégrées sur la profondeur par la méthode simple modifiée de PATANKAR [19].

Le schéma semi-implicite de PATANKAR utilisé dans cette étude pour résoudre les équations du modèle hydrodynamique a été appliqué avec succès pour la résolution de l'équation du modèle de transport.

En ce qui concerne les conditions initiales ou encore les conditions à l'itération précédente, portant sur u , v et H , LAROUÏ a noté qu'on ne peut pas connaître ces conditions surtout en bidimensionnel.

On sait toute fois que du fait de la nature hyperbolique des équations, ses variables sont souvent inconnues, à priori.

L'expérience est donc nécessaire pour spécifier physiquement les valeurs réelles dans les applications d'ingénierie.

$$U^0(x, y, 0) = 0$$

$$V^0(x, y, 0) = 0$$

$$H^0(x, y, 0) = C_1$$

C_1 est une valeur arbitraire positive constante pour tout le domaine de calcul.

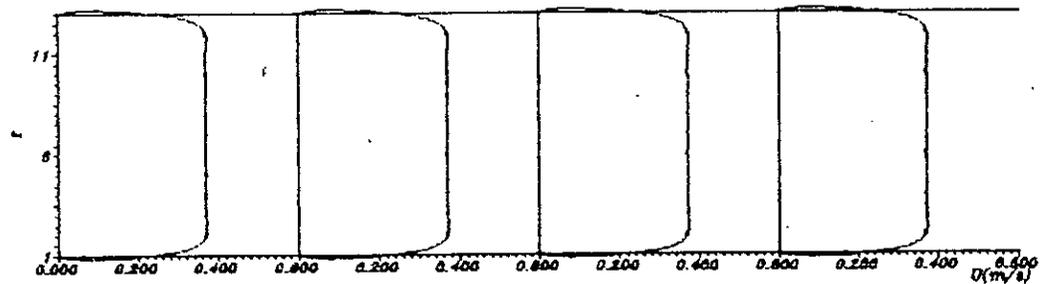
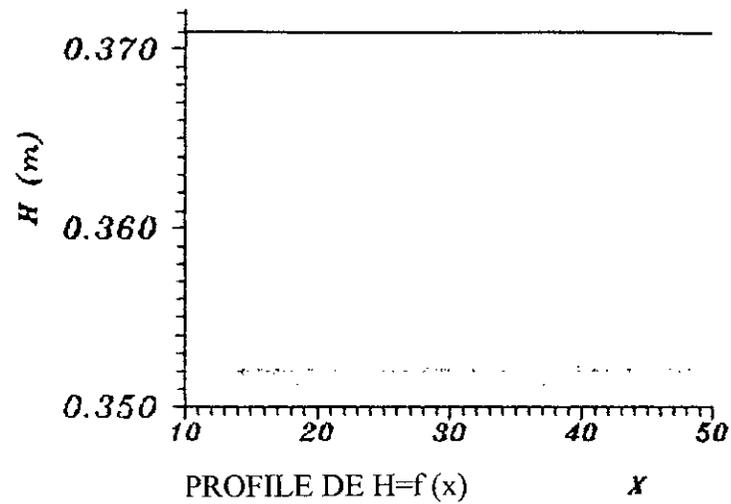
Les essais ont été effectués sur un canal rectangulaire.

Les données qui ont été utilisées sont celles des essais effectuées sur les modèles réduits connus dans la littérature tels que l'essai FISHER (1967), l'essai SAYRIE et CHANG (1968), l'essai de LAU et KRISHNAPPAN (1977), l'essai OKEYE (1970).

On présente dans ce qui suit les résultats de quelques essais, desquels on remarque :

- La présence d'une bonne symétrie par rapport à l'axe longitudinal.

- Les vitesses diminuent au niveau des rives le long du canal du fait de la couche limite.



PRESENTATION DU PROFILER DE VITESSE SELON X EN FONCTION DE Y POUR CHAQUE 10 PAS

- AMGHAR et MORSALI (1995)[02] ont étudié la simulation des écoulements supercritique bidimensionnels et à surface libre en employant la méthode des éléments finis, tout en gardant le même système d'équations préalablement donné par BERREKSI et BOUHADJI (1993) [06] et BHALLAMUDI et CHAUDHRY (1992) [08].

Les notions fondamentales et les hypothèses utilisés dans la modélisation de notre écoulement sont formulées dans les équations d'écoulements à surface libre, qui seront présentées dans ce qui suit.

CHAPITRE II

MODELE MATHEMATIQUE D'UN ECOULEMENT A SURFACE LIBRE

« L'origine des mathématiques ne revient pas à la sagesse humaine, sans passer par l'expérience concrète, c'est la nature qui a poussé l'être humain à compter et à schématiser ; par la suite l'évolution des capacités morales, lui a permis de l'abstraire »

J.SMILL

Chapitre II

MODELE MATHEMATIQUE D'UN ÉCOULEMENT A SURFACE LIBRE

INTRODUCTION [09]

A l'époque de la renaissance, l'écoulement à surface libre a intéressé des génies tels que Léonardo de Vinci (1452 - 1519) et Galilée (1564 - 1642), mais le problème de l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts reste d'une extrême complexité, jusqu'au début de XIXème siècle où les hydrauliciens se sont bornés à n'étudier que les mouvements permanents.

Le mouvement d'une masse liquide est gouverné par les lois de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement.

I-EQUATIONS DE BASE [01]

Pour un fluide Newtonien ; les équations gouvernant l'écoulement à surface libre sont les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

1°/ Equation de continuité

L'équation de continuité est basée sur le principe de conservation de la masse, ce qui signifie qu'aucun fluide ne peut ni être créé, ni disparaître dans un volume donné. Elle s'écrit comme suite :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.1})$$

avec, ρ : masse volumique du fluide, u , v et w les composantes de la vitesse.

2°/ Equation de la quantité de mouvement

Les particules fluides sont entraînées en mouvement sous l'effet des forces de volume, de pression et de viscosité et sont exprimées par les équations de Navier –Stokes :

➤ Suivant l'axe (ox) :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = \rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.2})$$

➤ Suivant l'axe (oy) :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = \rho F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.3})$$

➤ Suivant l'axe (oz) :

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \rho F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.4})$$

II- HYPOTHESES DE BASE

Les équations qui régissent l'écoulements dans les canaux naturels ou artificiels, sont un simple modèle de phénomènes extrêmement complexes. Elles incorporent seulement les grandeurs importantes influençant réellement l'écoulement, en laissant de coté les grandeurs, qui sont d'une importance secondaire .

Les hypothèses émises sont :

- L'écoulement est considéré bidimensionnel.
- La pression est distribuée hydrostatiquement sur la profondeur car l'accélération verticale est négligeable devant l'accélération de la pesanteur.
- Dans les équations de mouvement, la variation de la masse volumique de l'eau est négligeable. Cette hypothèse permet la résolution des équations du mouvement indépendamment de l'équation de transport du polluant.
- Les effets de frottement limite et la turbulence ont été considérés analogues à ceux des lois d'écoulement permanent.
- Les pertes de charge générales sont celles du mouvement permanent et uniforme de même profondeur.
- Répartition uniforme des vitesses transversales.
- Faible pente du fond du canal.

Après avoir posés ces hypothèses ont auras les équations suivantes :

Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.5})$$

Equation de la quantité de mouvement

Suivant l'axe (ox) :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} = \rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II.6})$$

Suivant l'axe (oy) :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \rho F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II.7})$$

III-CONCEPT DE LA TURBULENCE

L'écoulement turbulent est une condition naturelle et fréquente du mouvement d'un fluide visqueux où les divers paramètres présentent des variations aléatoires dans l'espace et dans le temps telles que des valeurs moyennes puissent être définies .

1°/ Définition de la turbulence

D'après MARCEL LESIEUR [23] « Il est difficile de donner une définition précise, de ce que l'on entend par turbulence, et ceci est l'origine de bien des malentendus. On peut cependant très grossièrement définir la turbulence, par opposition à ce que l'on appelle un écoulement laminaire, c'est à dire un écoulement bien organisé, tel que celui d'un large fleuve calme. Un écoulement turbulent apparaît comme une superposition de mouvements en apparence incohérents qu'il semble difficile, voire impossible de prévoir ».

D'après M.A.FAVRE et M.L.S.G.KOVAZNAY [13] « La turbulence est une propriété des écoulements du fluide et non du fluide lui-même . La définition générale et précise de ce phénomène n'a pas été donnée, mais on peut indiquer les caractéristiques que présentent les écoulements des fluides, que l'on convint d'appeler turbulence, lorsqu'on les considère à une échelle d'observation déterminée ».

2°/ Les caractéristiques fondamentales de la turbulence [10]

- La turbulence présente un caractère ALEATOIRE, les mouvements secondaires liés à la structure tourbillonnaire qui la caractérise ne témoignent d'aucun aspect régulier ou périodique ni ne sont prévisibles par la seule connaissance des conditions initiales et aux limites.
- La turbulence est un phénomène ROTATIONNEL et DISSIPATIF due a la viscosité de fluide.
- L'écoulement turbulent est TRIDIMENSIONNEL et INSTATIONNAIRE, sauf pour des cas spécifiques, il est bidimensionnel.
- La turbulence est un phénomène NON LINEAIRE, dans un écoulement turbulent, le transfert d'énergie des fluctuations des vitesses à grande échelle, vers les fluctuations à plus petite échelle est du même ordre de grandeur, que l'énergie dissipée ,en chaleur par les effets de viscosité. Ces interactions non linéaires sont représentées par les termes d'inerties dans les équations des écoulements turbulents.
- La turbulence est un phénomène DIFFUSIF, le milieu turbulent diffuse toute quantité de matière ou d'énergie transportable, à un ordre de grandeur qui dépasse celui de la diffusion moléculaire. Cette diffusion est due, aux termes de convection au niveau des fluctuations.

- Le fluide en écoulement turbulent peut toujours être considéré comme un MILIEU CONTINU (intégration des effets d'agitation moléculaire) dont le mouvement est différent selon l'échelle macroscopique adopté.

3°/ Approche de la turbulence [10]

Pour l'écoulement turbulent, on adopte l'approche statistique de REYNOLDS. Cette approche décompose une grandeur physique de l'écoulement turbulent en deux composantes, une moyenne et une fluctuante .

$$F = \overline{f} + f' \quad \text{avec, } \overline{f'} = 0 \quad (\text{II.8})$$

où : F : est la valeur instantanée,
 \overline{f} : est la valeur moyenne temporelle,
 f' : est la valeur fluctuante .

Le mouvement moyen est un mouvement permanent, et complètement défini. Par contre le mouvement fluctuant n'est pas permanent et imprévisible.

Pour l'étude mathématique de la turbulence, l'utilisation de la moyenne statistique à la place de la moyenne temporelle est tout à fait légitime, à condition que la moyenne utilisée vérifie un certain nombre de règles qui se formulent :

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{a f} = a \overline{f} \quad a : \text{constante } (\overline{a} = a) \quad (\text{II.9})$$

$$\overline{f g} = \overline{f} \overline{g}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial S}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial S} \quad \text{où } S \text{ désigne la variable d'espace ou de temps .}$$

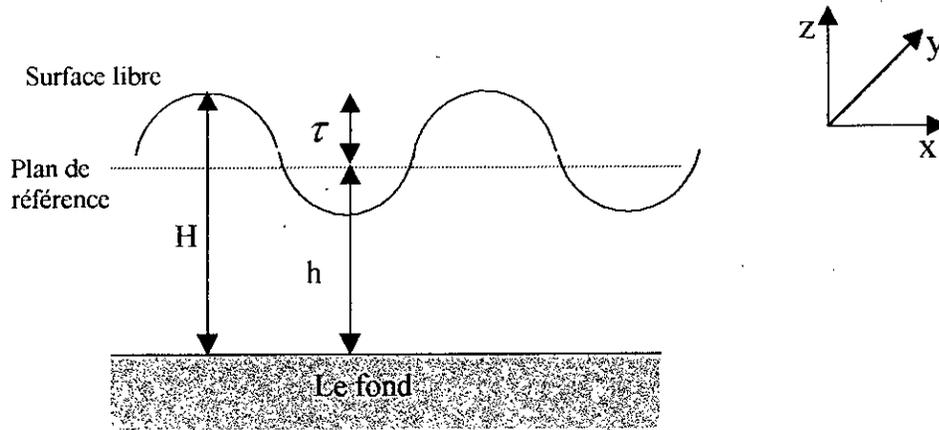
Alors, on a la décomposition des vitesses suivante :

$$u = \overline{u} + u' \quad \text{et } v = \overline{v} + v' \quad \text{d'où : } u^2 = \overline{u}^2 + u'^2 + 2 \overline{u} u' \quad (\text{II.10})$$

$$u v = (\overline{u} + u') (\overline{v} + v') = \overline{u} \overline{v} + \overline{u} v' + u' \overline{v} + u' v' \quad (\text{II.11})$$

IV- INTEGRATION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOCKES SUIVANT LA PROFONDEUR

Sur la base des Hypothèses du § II, l'intégration de ces équations sur la profondeur se fait en utilisant la règle de dérivation sous le signe « somme ». Soit :



(Figure III.1) L'Allure de la surface libre

En considérant en outre les conditions cinématiques à la surface et au fond, on a :

- Pour $z = \tau$, l'équation de la surface libre est :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} + v(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.12})$$

- Pour $z = -h$, l'équation du fond est :

$$u(-h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(-h) \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.13})$$

1°/ Intégration de l'équation de la conservation de la masse [19]

$$\int_{-h}^{\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial v}{\partial y} dz \quad (\text{II.14})$$

En utilisant la règle de dérivation sous le signe « somme », on a :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = & \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} u dz - (u(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} - u(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x}) \right] \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} v dz - (v(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} - v(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

L'écoulement est considéré moyennement permanent. Nous définissons les vitesses moyennes comme suit :

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} u \, dz \quad \text{et} \quad \bar{v} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} v \, dz \quad (\text{II.16})$$

En tenant compte des conditions cinématiques déjà citées, l'équation intégrée devient :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}H)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}H)}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.17})$$

ou encore :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}H)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}H)}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.18})$$

car $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) = 0$; (la cote du fond est invariable dans le temps) .

2°/ Intégration de la première équation de NAVIER-STOCKES [19]

En tenant compte des hypothèses posées, l'équation (II.2) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = F_x - g \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] \quad (\text{II.19})$$

* Intégration du premier membre de cette équation

$$\text{Posons : } A = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) .$$

On a :

$$\int_{-h}^{\tau} A \, dz = \int_{-h}^{\tau} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) \right] dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\tau} u \, dz - \left[u(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} - u(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial t} \right] \quad (\text{II.20})$$

En introduisant les conditions cinématiques et après arrangement, nous obtenons :

$$\int_{-h}^{\tau} A \, dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\tau} u \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} u^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} uv \, dz \quad (\text{II.21})$$

En remplaçant les termes u^2 et uv par leurs expressions (II.10) et (II.11), l'équation (II.21) devient :

$$\int_{-h}^{\tau} A \, dz = \frac{\partial}{\partial t} (H \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{u} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} \bar{u}^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} \bar{u} \bar{v} \, dz \quad (\text{II.22})$$

On fait la même chose pour le second membre de l'équation (II.2) tel que le tenseur des contraintes visqueuses et turbulentes soit donné par :

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{-u'v'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} \end{bmatrix} + \rho \nu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

où, ν est la viscosité cinématique.

** Intégrons sur la profondeur les termes de contraintes de façon similaire au premier membre de la même équation*

Nous obtenons après réarrangement :

$$\int_{-h}^{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} \tau_{yy} dz$$

$$- \left[\tau_{xx}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \tau_{yy}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} \right] + \left[\tau_{xx}(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} + \tau_{yy}(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} \right] \quad (\text{II.24})$$

Les termes à l'intérieur des crochets peuvent être interprétés comme étant les composantes du tenseur de l'effort dans les plans de la surface libre et du fond. Ceci peut être expliqué en considérant un système d'axe de coordonnées x' , y' et z' , l'axe des z' étant normal à la surface de l'eau .

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\partial \tau}{\partial x} \\ 0 & 1 & -\frac{\partial \tau}{\partial y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (\text{II.25})$$

La transformation du tenseur de contraintes montre alors que :

$$\tau_{x'z'} = -\tau_{xx} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \text{suivant l'axe } (o' x') \quad (\text{II.26})$$

$$\tau_{y'z'} = -\tau_{xy} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \text{suivant l'axe } (o' y') \quad (\text{II.27})$$

Définissons la contrainte du vent et la contrainte du fond par :

$$\tau_{wx} = (\tau_{x'z'})_s \quad \text{et} \quad \tau_{bx} = (\tau_{x'z'})_b \quad (\text{II.28})$$

$$\tau_{wy} = (\tau_{y'z'})_s \quad \text{et} \quad \tau_{by} = (\tau_{y'z'})_b \quad (\text{II.29})$$

D'où l'intégration des termes de contraintes sur la profondeur :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz &= \frac{1}{\rho} (\tau_{wx} - \tau_{bx}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\zeta} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} - \overline{u'^2} \right) dz \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-h}^{\zeta} \left(\nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \overline{u'v'} \right) dz \right] \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Alors, l'équation (II.2) intégrée devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= H F_x - gH \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_{wx} - \tau_{bx}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\zeta} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} - \overline{u'^2} - u'^2 \right) dz \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-h}^{\zeta} \left(\nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \overline{u'v'} - u'v' \right) dz \right] \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Les contraintes effectives dans le plan vertical sont définies par

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} \left(\rho \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \overline{u'^2} - \rho u'^2 \right) dz \\ T_{xy} &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} \left(\rho \nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} - \rho u'v' \right) dz \\ T_{yy} &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} \left(\rho \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho \overline{v'^2} - \rho v'^2 \right) dz \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Finalement l'équation (III.2) intégrée devient :

$$\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = H F_x - g H \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_{wx} - \tau_{bx})$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (H T_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{xy}) \right)$$
(II.33)

De la même façon, on intègre la deuxième équation de NAVIER-STOCKES sur la profondeur pour aboutir à :

$$\frac{\partial(H\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}^2)}{\partial y} = H F_y - g H \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{1}{\rho} (\tau_{wy} - \tau_{by})$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (H T_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{yy}) \right)$$
(II.34)

Les contraintes du fond sont généralement données par :

$$\tau_{bx} = \frac{\partial g}{C^2} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} = \rho g H \left[\frac{n^2 \bar{u} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{4}{3}}} \right]$$
(II.35)

$$\tau_{by} = \frac{\partial g}{C^2} \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} = \rho g H \left[\frac{n^2 \bar{v} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{4}{3}}} \right]$$
(II.36)

où ; $C = \frac{1}{R_h^{1/6}}$, n : coefficient de manning, C : coefficient de chezy et R_h : rayon hydraulique.

$$\text{Et } \frac{n^2 \bar{u} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{4}{3}}} = S_{fx}, \quad \frac{n^2 \bar{v} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{4}{3}}} = S_{fy}$$
(II.37)

où : S_{fx} et S_{fy} : sont respectivement les pentes de frottement eau-fond du canal dans la direction x, y.

$$\text{Sachant que : } -g H \frac{\partial \tau}{\partial x} = -g H \frac{\partial (H-h)}{\partial x} = -g H \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -\frac{\partial (g \frac{H^2}{2})}{\partial x} + g H \frac{\partial h}{\partial x},$$

où, $\frac{\partial h}{\partial x} = S_{ox}$, avec, S_{ox} la pente du canal dans la direction x , les équations régissant l'écoulement à surface libre, après intégration deviennent :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.38})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = H F_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{H^2}{2} \right) + g H S_{ox} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} - g H S_{fx} \\ + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (H T_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{xy}) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}^2)}{\partial y} = H F_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{H^2}{2} \right) + g H S_{oy} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} - g H S_{fy} \\ + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (H T_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{yy}) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Les différents termes dans les équations de SAINT-VENANT qui régissent notre écoulements sont:

$\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t}$: l'accélération locale de l'écoulement,

$\frac{\partial(H\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial y}$: l'accélération spatiale,

$H F_x$: la force de Coriolis,

$-\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{H^2}{2} \right)$: la force de pression,

$g H S_{ox}$: la force de gravité,

$\frac{1}{\rho} \tau_{wx}$: l'effet du vent,

$-g H S_{fx}$: frottement eau-fond du canal,

$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (H T_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{xy}) \right)$: la viscosité turbulente pour une profondeur constante H .

J.KUIPERS et C.B.VREUGDENHIL (1973) [17], ont introduit la viscosité turbulente μ_t pour une profondeur constante H, afin de prendre en compte les termes de contraintes effectives comme suit :

$$\frac{1}{\rho H} \left(\frac{\partial}{\partial x} (H T_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{xy}) \right) = \mu_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.41})$$

$$\frac{1}{\rho H} \left(\frac{\partial}{\partial x} (H T_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{yy}) \right) = \mu_t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.42})$$

La viscosité turbulente est une propriété de l'écoulement turbulent et non de fluide lui-même.

3°/ Hypothèse supplémentaire

Du fait qu'on considère un cours d'eau et qu'on a pris un plan moyen, on peut négliger la force de Coriolis.

Les équations (II.38) et (II.39) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{H^2}{2} \right) + gH S_\alpha + \frac{1}{\rho} \tau_w \\ & -gH S_{fx} + H\mu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}^2)}{\partial y} = & -\frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{H^2}{2} \right) + gH S_\alpha + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} \\ & -gH S_{fy} + H\mu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

CONCLUSION

L'écoulement turbulent à surface libre est régi par le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.45})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{H^2}{2} \right) + g H S_{ox} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} \\ & -gH S_{fx} + H \mu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}^2)}{\partial y} = & -\frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{H^2}{2} \right) + g H S_{oy} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} \\ & -gH S_{fy} + H \mu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Nous obtenons un système d'équations, où le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, c'est un système ouvert. Pour résoudre ce système, il y a lieu de modéliser la turbulence .

CHAPITRE III
CHOIX DU MODELE DE TURBULENCE

Chapitre III

CHOIX DU MODELE DE TURBULENCE

1°/ DEFINITION D'UN MODELE DE TURBULENCE [10]

Un modèle de turbulence est un système d'équations, contenant les corrélations en nombre suffisant pour permettre d'obtenir simultanément la solution du mouvement moyen et du mouvement fluctuant caractérisé par un nombre limité de paramètres .

2°/ CRITERES DE CHOIX [10]

Les modèles de la turbulence sont applicables dans des cas bien précis. Un « bon » modèle doit :

- Etre capable de relever les traits caractéristiques de l'écoulement.
- Contenir un minimum de constantes ou de fonctions empiriques.
- Conférer aux constantes ou fonctions empiriques un degré d'universalité maximum .
- Etre d'une mise en œuvre « simple » et d'une résolution numérique « économique ».
- Donner des résultats précis.
- Avoir un champ d'application aussi vaste que possible.

3°/ MODELES A VISCOSITE TURBULENTE [20,21,23,24]

En 1877, BOUSSINESQ a introduit la notion de la viscosité turbulente, pour modéliser les tensions de Reynolds, il s'agit de faire une analogie avec les tensions de la viscosité moléculaire.

Cette notion consiste à supposer que les tensions de Reynolds soient proportionnelles aux gradients de vitesse moyenne, et de même forme que les tensions de viscosité moléculaire.

$$\overline{-u_i u_j} = -R_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2. \quad (\text{III.1})$$

a) Modèle a zéro équation de transport

Les modèles à viscosité turbulente algébrique ne font appel à aucune équation de transport, puisque ν_t est donné par une expression algébrique .

PRANDTL a introduit la notion de longueur de mélange, pour faciliter le développement de cette expression.

D'après la théorie cinétique des gaz, la viscosité moléculaire est égale au produit de la vitesse moyenne des molécules par leur libre parcours moyen. Par analogie, PRANDTL suggéra que la viscosité turbulente peut elle aussi être mise sous forme de produit d'une

vitesse et d'une longueur caractéristique du mouvement turbulent, appelée longueur de mélange. Ce qui conduit à l'expression suivante de la viscosité turbulente :

$$\nu_t = L_m \left| \frac{d\mathbf{u}_1}{dx_2} \right| \quad (\text{III.2})$$

et dans le cas général :

$$\nu_t = L_m^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad i, j = 1; 2 \quad (\text{III.3})$$

Plusieurs formules sont proposées pour la longueur du mélange L_m suivant le type de l'écoulement :

- Pour la turbulence libre, PRANDTL a supposé que la longueur de mélange est proportionnelle à l'épaisseur de la couche limite :

$$\text{Zone de mélange : } \frac{L_m}{\sigma} = 0.07,$$

$$\text{Jet plan : } \frac{L_m}{\sigma} = 0.09,$$

$$\text{Jet rond : } \frac{L_m}{\sigma} = 0.075.$$

Néanmoins un défaut apparaît là où la vitesse présente un extremum, U_t , et par voie de conséquence les termes de turbulence s'annulent, PRANDTL l'a corrigé en proposant :

$$U_t = L_m^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + L_n^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2} \quad (\text{III.4})$$

L_n : second longueur de mélange .

- Pour la turbulence de paroi VON KARMAN a proposé :

$$\frac{Y}{\sigma} = 0.22 \quad L_m = 0.41 Y$$

$$\frac{Y}{\sigma} > 0.22 \quad L_m = 0.09 \sigma$$

où, σ : épaisseur de couche limite et Y : distance à la paroi .

- VANDRIEST a apporté une correction sur l'équation de VON KARMAN :

$$L_m = K y [1 - \exp(-y \frac{u^*}{26 \nu})] \quad (\text{III.5})$$

Où ; u^* est la vitesse de frottement.

- Pour la turbulence en canal ou en tube NIKURADSE a proposé :

$$L_m = D [0.14 - 0.08(1 - \frac{y}{D})^2 - 0.06(1 - \frac{y}{D})^4] \quad (\text{III.6})$$

où ; D est la demie-largeur du canal ou le rayon du tube.

Les expressions citées précédemment, d'une part, sont d'une mise en œuvre simple et ne donnent pas d'équations supplémentaire, le bon choix de L_m conduit à des résultats très satisfaisants surtout en écoulement de type couche limite.

Mais d'autre part, elles ignorent le caractère non local de la turbulence , qui ne peut être pris en compte qu'en introduisant dans la définition de ν_t au moins une grandeur turbulente décrite par une équation d'évolution .

b) Modèle à une équation et deux équations de transport

α) Modèle à une équation de transport

Ce modèle est proposé indépendamment par KOLMOGROV et PRANDTL. Il découle naturellement de l'expression de la viscosité turbulente ν_t en fonction d'une longueur et d'une vitesse caractéristique :

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{KL} \quad (\text{III.7})$$

Où : C_μ : constante numérique égale à 0.09 .

K : est la dissipation de l'énergie turbulente produite par le mouvement fluctuant , donnée par :

$$K = \frac{1}{2} \overline{u_j u_j} = \frac{1}{2} R_{jj} \quad j = 1; 2 \quad (\text{III.8})$$

Le transport de la turbulence est pris en compte grâce à l'équation d'évolution de K, mais le problème de la détermination de la longueur caractéristique L reste entier .

On peut donc formuler les mêmes réserves pour ce modèle que pour le modèle de viscosité turbulente algébrique.

β) Modèle à deux équations de transport

Le problème de détermination de l'échelle de longueur caractéristique L peut être décrite par une équation de transport (les structures turbulentes sont convoitées par l'écoulement moyen, et leur taille varie sous l'effet de la dissipation visqueuse et du phénomène type étirement de filets tourbillonnaires). En fait, choisir L comme variable associé à K n'est pas fondamental.

Toute combinaison de forme $K^m L^n$ (permettant de déduire L connaissant K) convient tout aussi bien. De nombreux modèles à deux équations de transport, ne diffèrent que par le choix du couple d'exposant (m, n) . Ainsi ont vu le jour (modèle $K-K^{1/2} L^{-1}$, modèle $K-KL$, modèle $K-KL^2$, modèle $K-K^{3/2} L^{-1}$ (ou modèle $K-\varepsilon$)).

L'équation de transport supplémentaire conserve la même forme générale quelque soit le choix du couple (m, n) .

γ) Exemple de modèle a deux équations de transport : Modèle $K - \varepsilon$

Dans le cas, ou on prend $m = 3/2$ et $n = -1$, on obtient le modèle $K-K^{3/2} L^{-1}$ appelé modèle $K-\varepsilon$.

Dans ce modèle, la viscosité turbulente est définie par :

$$\nu_t = C\mu K^2/\varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon = K^{3/2} L^{-1} \quad (\text{III.9})$$

où ; $C\mu$: est une constante numérique.

ε : est le taux de dissipation de l'énergie cinétique.

L'équation de transport de K s'écrit :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = -R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_j' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j'} - \nu \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] - \nu \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) \quad i, j = 1; 2 \quad (\text{III.10})$$

L'équation d'évolution de ε s'écrit :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = -2\nu \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m}} + \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) - 2\nu \left(\overline{u_j' \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right)^2 \right) \\
& + \nu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} \right) - 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} \right)^2 \quad i; j; m = 1, 2 \quad (\text{III.11})
\end{aligned}$$

4°/ CHOIX DU MODELE DE TURBULENCE [24,04]

Etant donné les réserves émises à propos de la capacité des modèles à zéro et à une équation de transport à traiter les écoulements à géométrie complexes, il semble que pour avoir un modèle efficace, on ne peut descendre au-dessous de deux équations de transport.

Notre choix de modèle de turbulence c'est porté donc, sur un modèle à deux équations de transport à savoir le modèle K- ε .

L'équation d'évolution de K s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial t} + u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = & \underbrace{-R_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\pi} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_j \frac{\partial u_i u_i}{2}} - \nu \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] \\
& - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{\varepsilon} \quad i; j = 1; 2 \quad (\text{III.12})
\end{aligned}$$

L'équation d'évolution de ε s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - 2\nu \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} \right) \\
& - 2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} \right) - 2 \nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} \right)^2 \quad i, j, m = 1, 2 \quad (\text{III.13})$$

En introduisant l'hypothèse des grands nombres de Reynolds dans l'équation (III.12) ; le terme de diffusion moléculaire $\nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_j^2}$ peut être négligé, et les deux autres termes seront modélisés sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_j u_i u_i} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_i}{\delta_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{III.14})$$

δ_K : constante numérique.

L'hypothèse des grands nombres de Reynolds permet de négliger les premier, second, troisième et sixième terme du membre de droite de l'équation (III.12).

L'hypothèse de diffusion en gradient permet de modéliser le cinquième terme (le terme de diffusion restant).

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right)^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_i}{\delta_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad i, j, m = 1, 2 \quad (\text{III.15})$$

δ_ε : constante numérique.

La modélisation utilisée pour le quatrième et le dernier terme est celle proposée par LANDER, REECE et RODI [21].

$$-2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) - 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} \right)^2 = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \pi - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad i, j, m = 1, 2 \quad (\text{III.16})$$

$C_{\varepsilon 1}$; $C_{\varepsilon 2}$: constantes numériques.

En remplaçant les tensions de Reynolds par leur expression en fonction des taux de déformation moyens (équations de la viscosité turbulente) ; dans le terme de production \square , les équations de transport de K et de ε s'écrivent :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_i}{\delta_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) + \frac{C_\mu K^2}{2 \varepsilon} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \varepsilon \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{III.17})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i}{\delta_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{C_\mu}{2} K \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{2} \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{III.18})$$

De fait de l'hypothèse de grands nombres de Reynolds, le modèle K- ε n'est pas valable pour décrire le voisinage immédiat d'une paroi solide, où l'action des forces visqueuses devient dominante, et où l'hypothèse d'isotropie locale n'est plus vérifiée, les structures dissipatives étant directement sous l'influence de l'écoulement moyen.

5°/ FORMULATION DU MODELE RETENU

Pour la modélisation de la turbulence, on a choisit le modèle K- ε . Ce qui nécessite la résolution des deux équations de transport associées aux grandeurs K et ε après intégration.

a) Intégration de l'équation du transport de la dissipation d'énergie turbulente suivant la profondeur [15]

L'équation de transport de K est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} + u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_i}{\delta_k} \frac{\partial K}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_i}{\delta_k} \frac{\partial K}{\partial y} \right) \\ + \frac{u_i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{u_i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{u_i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{u_i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Intégration suivant la profondeur

On pose : $\Delta = \frac{u_i}{\delta_k}$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial K}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial(uK)}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial(vK)}{\partial y} dz = \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \frac{\partial K}{\partial x}) dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \frac{\partial K}{\partial y}) dz \\ + \frac{u_i}{2} \int_{-h}^{\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dz + \frac{u_i}{2} \int_{-h}^{\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dz \\ + \frac{u_i}{2} \int_{-h}^{\tau} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dz + \frac{u_i}{2} \int_{-h}^{\tau} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dz - \int_{-h}^{\tau} \varepsilon dz \end{aligned}$$

On pose $A = \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial K}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial(uK)}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial(vK)}{\partial y} dz$ (III.20)

$$\int_{-h}^{\tau} \frac{\partial K}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\tau} K dz - \left[K(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} - K(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial t} \right]$$

$$\int_{-h}^{\tau} \frac{\partial(uK)}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} (uK) dz - \left[u(\tau)K(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} - u(-h)K(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} \right]$$

$$\int_{-h}^{\tau} \frac{\partial(vK)}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} (vK) dz - \left[v(\tau)K(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} - v(-h)K(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} \right]$$

En moyennant les conditions cinématiques, on a :

$$A = \frac{\partial(\overline{H \overline{K}})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{H \overline{u K}})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{H \overline{v K}})}{\partial y}$$

$$\text{Posant :} \quad B = \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \frac{\partial K}{\partial x} \right) dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \frac{\partial K}{\partial y} \right) dz \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \frac{\partial K}{\partial x} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} K dz \right) \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta K(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta K(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \frac{\partial K}{\partial y} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} K dz \right) \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta K(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta K(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

En considérant les conditions cinématique, on a :

$$B = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \frac{\partial H \overline{K}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \frac{\partial H \overline{K}}{\partial y} \right)$$

Posant :

$$C = \frac{\rho_t}{2} \left[\int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dz + \int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dz + \int_{-h}^z \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dz + \int_{-h}^z \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dz \right] \quad (III.22)$$

$$\int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dz = 2 \int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dz + 2 \int_{-h}^z \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

$$\int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dz = \int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dz + \int_{-h}^z \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dz + 2 \int_{-h}^z \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} dz$$

$$\int_{-h}^z \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dz = \int_{-h}^z \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dz + \int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dz + 2 \int_{-h}^z \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dz$$

$$\int_{-h}^z \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dz = 2 \int_{-h}^z \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dz + 2 \int_{-h}^z \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dz$$

Alors,

$$C = 4 \int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dz + 2 \int_{-h}^z \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dz + 2 \int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dz + 4 \int_{-h}^z \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} dz + 4 \int_{-h}^z \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dz$$

En tenant compte des conditions cinématiques et après réarrangement des différents termes ont obtenu :

$$C = \frac{\rho_t}{2} \left[2 \left(\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial (H\bar{v})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial y} + \frac{\partial (H\bar{v})}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{g}{C^2} \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\int_{-h}^z \mathcal{E} dz = H \bar{\varepsilon}$$

L'équation intégrée de l'énergie turbulente K est :

$$\frac{\partial (H\bar{K})}{\partial t} + \frac{\partial (H\bar{u}K)}{\partial x} + \frac{\partial (H\bar{v}K)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho_t}{\sigma_k} \frac{\partial (H\bar{K})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho_t}{\sigma_k} \frac{\partial (H\bar{K})}{\partial y} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{U_i}{H} \left[2 \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(H\bar{v})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial y} + \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial x} \right)^2 \right] \\
& + \left(\frac{g}{C^2} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \right)^3 - \bar{\varepsilon} H
\end{aligned} \tag{III.23}$$

b) Intégration de l'équation d'évolution du taux de dissipation d'énergie turbulente suivant la profondeur [15]

L'équation du taux de dissipation de l'énergie turbulente ε est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial} \right) \\
& + C_{\varepsilon 1} \frac{C_\mu}{2} K \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{2}
\end{aligned} \tag{III.24}$$

L'intégration de l'équation (III.24) d'une façon similaire à l'équation (III.19) donnent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(H\bar{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{\varepsilon})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}\bar{\varepsilon})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{U_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(H\bar{\varepsilon})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{U_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(H\bar{\varepsilon})}{\partial y} \right] \\
& \frac{\bar{\varepsilon}}{K} \left[C_1 P_h - C_2 \bar{\varepsilon} H \right] - P_\varepsilon
\end{aligned}$$

avec,

$$P_h = \frac{C_\mu \bar{K}^2}{H \bar{\varepsilon}} \left[2 \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(H\bar{v})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial y} + \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$P_k = \frac{g}{C^2} q^3$$

$$q = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$$

$$P_\varepsilon = \frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^{5/4} q^4}{H D^{1/2} C^{3/2}}$$

6°/ CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX LIMITES

1-Conditions initiales :

Les conditions initiales sont les conditions au temps $t=0$, afin de commencer les calculs à partir de l'état initial de l'écoulement, les valeurs des 5 variables H , u , v , K et ε devront être choisis et spécifiées en tout les points du maillage.

Le choix des valeurs des trois variables H , u et v se fait habituellement à partir de la limite amont (condition amont).

2-Conditions aux limites :

Pour un écoulement bidimensionnel en régime supercritique, par exemple, trois conditions aux frontières doivent être spécifiées à l'amont et aucune condition à l'aval.

3-Condition sur les parois solides :

Les conditions aux limites au niveau de la paroi sont d'une grande importance, il suffit qu'une petite erreur se propage pour conduire à des résultats imprévisibles.

Pour éviter les erreurs une procédure de réflexion est recommandée pour l'analyse des écoulements dans les canaux découverts, dont la section est principalement rectangulaire.

Le principe de cette procédure de réflexion consiste à considérer que la profondeur de l'écoulement H et la vitesse résultante V au point de réflexion fictif du maillage sont les mêmes que les valeurs correspondant au point intérieur de la grille de calcul.

La direction de la vitesse résultante de l'écoulement V , est déterminée telle que sa composante normale au niveau du mur soit nulle.

Si θ est l'angle que fait la paroi avec l'axe des x , et ψ l'angle que fait la vitesse résultante V au point intérieur du maillage et l'axe des x , alors les composantes de la vitesse u^f et v^f au point fictif (point de réflexion) sont : [06,07]

$$\begin{cases} u^f = V \cos(2\theta - \psi) \\ v^f = V \sin(2\theta - \psi) \end{cases}$$

4-Conditions aux limites sur K et ε :

Les conditions aux limites classiques en turbulence de paroi consistent à imposer en un point situé à une distance de paroi δ^+ comprise entre 30 et 100 :

$$\overline{K}_\delta = \frac{u_*^2}{C_\mu} \quad , \quad \overline{\varepsilon}_\delta = \frac{u_*^3}{\chi \delta} = \frac{C_\mu^{3/4} K_\delta^{-3/2}}{\chi \delta}$$

avec δ la distance à la paroi,

χ : constante de Van Carman, $\chi = 0.419$.

Plusieurs formulations sont proposées pour exprimer les conditions aux limites au niveau de la surface libre.

Les conditions de paroi précédemment énoncées sont parfois employées au niveau de la surface libre, en particulier lorsque le vent génère un cisaillement à la surface que l'on peut estimer.

U_t est une exprimées par analyse dimensionnelle, par la relation $U_t = C_\mu \frac{\overline{K}}{\varepsilon}$.

avec C_μ : constante numérique (égale 0.09 dans le modèle standard).

Conclusion

Après la modélisation de la turbulence, le système a résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.25})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{H^2}{2} \right) + g H S_{ox} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} \\ & + H \mu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}^2)}{\partial y} = & -\frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{H^2}{2} \right) + g H S_{oy} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} \\ & + H \mu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{K})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{K})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}\bar{K})}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U_t}{\sigma_k} \frac{\partial(H\bar{K})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{U_t}{\sigma_k} \frac{\partial(H\bar{K})}{\partial y} \right] \\ & + \frac{U_t}{H} \left[2 \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(H\bar{v})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial y} + \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial x} \right)^2 \right] \\ & + \left(\frac{g}{C^2} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \right)^3 - \bar{\varepsilon} H \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

$$\frac{\partial(H\bar{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{\varepsilon})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}\bar{\varepsilon})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(H\bar{\varepsilon})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{U_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(H\bar{\varepsilon})}{\partial y} \right]$$

$$+\frac{\bar{\varepsilon}}{K} \left[C_1 P_h - C_2 \bar{\varepsilon} H \right] - P_\varepsilon \quad (\text{III.29})$$

$$\text{avec, } P_h = \frac{C_\mu \bar{K}^2}{H \bar{\varepsilon}} \left[2 \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(H\bar{v})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial y} + \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$P_k = \frac{g}{C} q^3$$

$$q = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$P_\varepsilon = \frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^{3/4} q^4}{H D^{1/2} C^{3/2}}$$

Pour la modélisation numérique du phénomène étudié une discrétisation des équations ci dessus doit être effectuée.

CHAPITRE IV

Modélisation Numérique de l'écoulement étudié

« Les solutions analytiques exactes, qui sont rares en physique, sont élégantes, mais n'ont pas plus de valeur intrinsèques que les solutions numériques. On ne doit pas sous-estimer la facilité et la puissance des méthodes de calcul numérique » .

M. A. RUDERMAN

Cours de physique de BERKELEY.

Chapitre IV

Modélisation Numérique de l'écoulement étudié

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes important de la compréhension scientifique.

Le champs d'applications des équations aux dérivées partielles augmente d'importance et englobent le domaine hydraulique.

En effet, plusieurs problèmes en hydraulique exigent, par manque de solutions analytiques une résolution numérique des équations aux dérivées partielles.

L'arrivée des ordinateurs, leurs progrès immenses et incessants ont permis— pour la première fois dans l'histoire— de calculer à partir de modèles, des quantités qui ne pouvaient être que très approximativement estimées.

L'avantage de cette approche est que :

- L'expérimentation numérique a une parfaite maîtrise des propriétés physiques du fluide.
- L'écoulement n'est pas perturbé par l'instrument de mesure.
- Possibilité d'évaluation de l'influence spécifique de chaque hypothèse.

Cette approche est basée sur la transformation d'un modèle mathématique en un modèle numérique, en passant par des méthodes numériques telles que volume finis, éléments finis, ou différences finie.

I-DIFFERENTES METHODES NUMERIQUES [06,07]

I-1- Méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée pour les études des structures à trois dimensions, car elle étend les possibilité des méthodes matricielles à un très vaste domaine d'application et permet donc l'analyse des structures complexes.

Le principe de cette méthode, consiste à subdiviser la structure étudiée en sous domaine, de forme relativement simple « éléments finis ». L'approximation de la solution concernera l'élément constitutif et non pas la structure totale.

I-2- Méthode des volumes finis :

Il s'agit d'une méthode de formulation intégrale dans l'espace physique des lois de conservation. Bien qu'elle ne soit pas fondamentalement différente aux méthodes au différences finies ou aux éléments finis, il est d'usage de la considérer à part, parce qu'elle trouve un domaine d'application tout à fait spécifique.

I-3- Méthode des différences finies :

La méthode consiste à estimer par approximation les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions à partir des conditions au limites. Cette approximation représente une discrétisation du domaine en remplaçant l'opérateur différentielle par un opérateur aux différences finies.

En d'autres termes, le domaine de variation continu, est remplacé par un ensemble fini de points ou nœuds, délimité par des frontières et formant ainsi un réseau (appelé aussi maillage ou grille) (Figure IV.1).

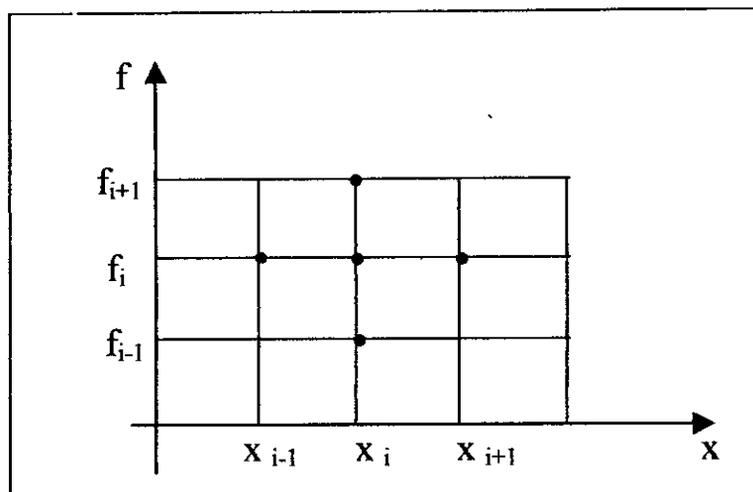


Figure IV.1 : maillage élémentaire

Si f est une fonction continue différentiable, on écrit :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

Avec, $f_i = f(x_i)$ et $x_i = (i-1)\Delta x$

Dans les différenciations ci-dessus, on a utilisé respectivement une différence avant et une différence arrière.

L'ordre d'approximation dans une méthode aux différences finies se détermine à l'aide du développement en série de Taylor de la fonction f :

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_x + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right|_x + R_n$$

où, le reste R_n est de l'ordre de $\|\Delta x\|^n$, ce que l'on note habituellement :

$$R_n = O(\|\Delta x\|^n)$$

n ; représente l'ordre d'approximation .

Cas d'une approximation à plusieurs dimensions :

La méthode peut être aisément étendue au cas où la fonction f considérées dépend de deux ou plusieurs variables.

Ainsi si f dépend par exemple de deux variables (x, y) ; et si dans le plan oxy on trace une série de droites parallèle aux axes déterminant de la sorte un réseau de points (i, j) (figure IV.2) auxquels correspond les coordonnées de la fonction inconnue $f_{i,j}$; on peut écrire pour les différences centrales :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \Delta x}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2 \Delta y}$$

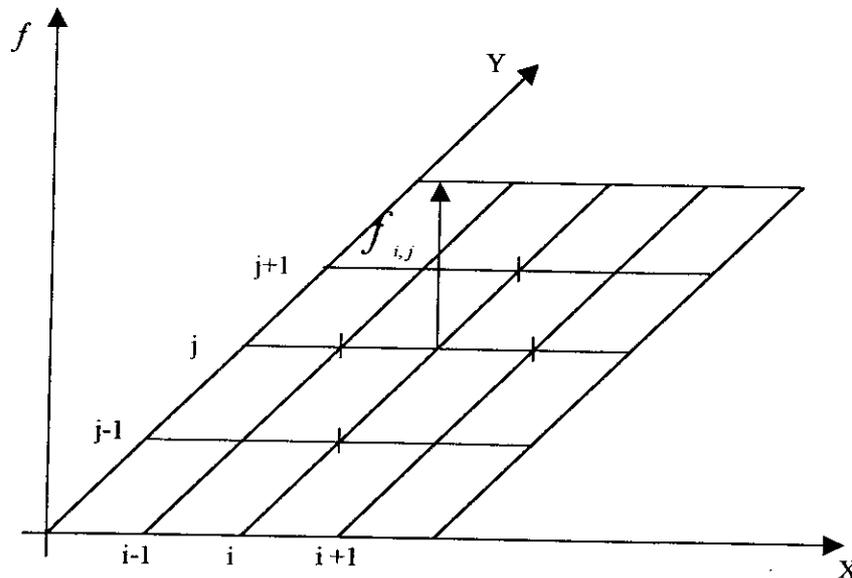


Figure IV.2 : Maillage correspondant à une fonction dépendant de deux variables.

D'une manière similaire, pour les dérivées de second ordre, on a :

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_{i,j} = \frac{(f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}) - (f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1})}{4 \Delta x \Delta y}$$

$\Delta x, \Delta y$: Pas d'espace suivant les directions x, y respectivement.

II - ANALYSE DE L'APPROXIMATION [05,12,25,26]

a) Erreur de troncature

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction f .

L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'un pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques.

b) La consistance d'un schéma aux différences finies

Nous n'aurons de chance d'obtenir la convergence du schéma que si nous approchons correctement le problème continu, c'est-à-dire si nous remplaçons les dérivées partielles par des différences finies effectivement.

La « qualité » de cette consistance s'appelle la précision du schéma.

c) La stabilité [07,12]

Un schéma numérique est stable, si les erreurs de n'importe quelle origine n'augmentent pas à chaque pas de temps de calcul. L'instabilité numérique peut avoir une cause d'origine physique ; c'est le cas lorsque le phénomène n'est pas correctement modélisé.

d) La convergence [03,12,26]

Un schéma est dit convergent quand la solution de l'équation aux différences se rapproche de la vraie solution de l'équation aux dérivées partielles ayant les mêmes conditions initiales et aux limites lorsque la dimension des mailles de discrétisation diminue.

Généralement, un schéma consistant est stable et également convergent.

III- SCHEMA EXPLICITE , SCHEMA IMPLICITE

Un schéma est explicite , si chaque valeur approchée de la solution, au temps $(t + \Delta t)$ est au point x est écrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps t . Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs communes déjà calculées et s'obtient directement pour chaque valeur de x .

Un schéma est implicite, si la valeur approchée en un point au temps $(t + \Delta t)$ est écrite en fonction de la solution précédente au temps t et des valeurs voisines au temps $t + \Delta t$. Il s'agit donc d'une liaison implicite, entre toutes les valeurs au temps $t + \Delta t$, qui se résout globalement.

IV- CHOIX DU SCHEMA NUMERIQUE

Plusieurs schémas au différences finies explicites aux second ordre ont été développées pour la résolution des systèmes d'équations de nature hyperbolique qu'on rencontre toujours dans la dynamique des fluides.

On distingue principalement les trois schémas ci-dessous :

- Schéma de LAMBDA.
- Schéma de GABUTTI.
- Schéma de MAC CORMACK.

Le schéma de MAC CORMACK est l'un des plus utilisé dans l'intégration des équations du mouvement du type hyperbolique non linéaire.

IV-1- Description du schéma de MAC CORMACK [14]

La méthode du schéma de MAC CORMACK consiste à discrétiser les équation de base en deux séquence , une séquence de prédiction est une autre de correction . Le but est de calculer une valeur des variables de l'écoulement au niveau du pas de temps $(k+1)$, sachant que leurs valeurs sont connues au pas de temps k .

Considérons les équations de base sous forme conservative, régissant l'écoulement étudié, et données en coordonnées cartésiennes par le système :

$$U_t + E_x + F_y + S = 0$$

tel que :

$$E_x = \frac{\partial E}{\partial x}$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Le schéma de MAC CORMACK appliqué au système ci-dessus se compose de deux étapes :

a) Etape de prédiction :

$$\tilde{U}_{i,j} = U_{i,j}^k - \tau_x (E_{i,j}^k - E_{i-1,j}^k) - \tau_y (F_{i,j}^k - F_{i,j-1}^k) - \Delta t S_{i,j}^k \quad \begin{cases} 2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq m \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

b) Etape de correction :

$$\hat{U}_{i,j} = \tilde{U}_{i,j} - \tau_x (\tilde{E}_{i+1,j} - \tilde{E}_{i,j}) - \tau_y (\tilde{F}_{i,j+1} - \tilde{F}_{i,j}) - \Delta t \tilde{S}_{i,j} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq m-1 \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

$$\text{où, } \tau_x = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad ; \quad \tau_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

La solution au temps (k+1) est telle que :

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^k + \hat{U}_{i,j}) \quad (\text{IV.3})$$

Les indices i et j correspondent aux points du maillage suivant les directions x et y respectivement.

Dans l'exemple développé ci-dessus, auquel le schéma de MAC CORMACK a été appliqué, les différences finies arrières sont utilisées pour l'approximation des dérivées partielles spatiales dans l'étape prédiction et les différences finies avant utilisant les variables prédites sont utilisées dans l'étape correction.

Il faut savoir par ailleurs qu'il est possible d'utiliser les différences finies avant dans l'étape prédiction et les différences finies arrières dans l'étape correction, comme il est possible d'alterner la direction de différenciation d'un pas de temps à l'autre.

IV-2- Stabilité du schéma

Les schémas aux différences finies nécessitent une condition de stabilité, qui est exigée pour les schémas explicites.

Ainsi, le schéma de MACCORMACK est stable que si la condition de stabilité 'COURANT- FRIEDRICHS- LEWY' (C.F.L) soit satisfaite. Cette condition est exprimée, pour les écoulements bidimensionnels par l'expression suivante [14.15,30 et 64] :

$$C_n = \frac{(V + \sqrt{gh}) \Delta t}{b(x) (\Delta x) (\Delta y)} \left[(\Delta x)^2 + b(x) (\Delta y)^2 \right]^{1/2} \leq 1$$

Où ; V : est la vitesse résultante au point du maillage

$$V = \sqrt{(u^2 + v^2)}$$

C_n : est le nombre de courant.

$b(x)=b$: est la largeur du canal.

X

Cette condition (C.F.L) doit être satisfaite en tout points du maillage, il est donc évident de prendre l'incrément de temps Δt tel que :

$$\Delta t = \frac{C_n b(x)(\Delta x)(\Delta y)}{\text{Max}(V + \sqrt{gh}) \left[(\Delta x)^2 + b(x)(\Delta y)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

A chaque instant t , la condition (C.F.L) fixe le pas de temps « Δt », sachant que les pas d'espace Δx et Δy sont supposés constants.

Remarque

Il faut noter qu'une expérimentation numérique est requise avant de choisir la valeur optimale du courant C_n .

IV-3- Application du schéma de MAC CORMACK au modèle mathématique étudié :

A partir des équations de base régissant notre problème :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (H \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (H \bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (H \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(H \bar{u}^2 + \frac{gH^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{u} \bar{v}) &= gH S_{ox} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} - gH S_{fx} \\ + H C_\mu \frac{\bar{K}^2}{\varepsilon} \rho \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) & \quad (\text{IV.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (H \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \bar{v}^2 + \frac{gH^2}{2} \right) &= gH S_{oy} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} - gH S_{fy} \\ + H C_\mu \frac{\bar{K}^2}{\varepsilon} \rho \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) & \quad (\text{IV.6}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (H \bar{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial (H \bar{u} \bar{K})}{\partial x} + \frac{\partial (H \bar{v} \bar{K})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{C_\mu \bar{K}^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial (H \bar{K})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{C_\mu \bar{K}^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial (H \bar{K})}{\partial y} \right] +$$

$$P_h + P_k - \bar{\mathcal{E}} H \tag{IV.7}$$

$$\frac{\partial(H\bar{\mathcal{E}})}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u}\bar{\mathcal{E}})}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{v}\bar{\mathcal{E}})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{C_\mu \bar{K}^2}{\sigma_\varepsilon \bar{\mathcal{E}}} \frac{\partial(H\bar{\mathcal{E}})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{C_\mu \bar{K}^2}{\sigma_\varepsilon \bar{\mathcal{E}}} \frac{\partial(H\bar{\mathcal{E}})}{\partial y} \right] + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{K} \left[C_1 P_h - C_2 \bar{\mathcal{E}} H \right] - P_\varepsilon \tag{IV.8}$$

Avec :

$$P_h = \frac{C_\mu \bar{K}^2}{H \bar{\mathcal{E}}} \left[2 \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(H\bar{v})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial y} + \frac{\partial(H\bar{v})}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$P_k = \frac{g}{C^2} q^3$$

$$q = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{IV.9}$$

$$P_\varepsilon = \frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^{5/4} q^4}{H D^{1/2} C^{5/2}}$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$U = \bar{u} H$$

$$V = \bar{v} H$$

$$F = H \bar{u}^2 + \frac{g H^2}{2}$$

$$S = H \bar{v}^2 + \frac{g H^2}{2}$$

$$G = H \bar{u} \bar{v}$$

$$M = \frac{K^2}{\varepsilon}$$

$$Q = g H S_{ox} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx}$$

$$W = g H S_{oy} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} \tag{IV.10}$$

$$N = H C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \rho$$

$$A = H \bar{K}$$

$$I = H \bar{u} \bar{K}$$

$$T = H \bar{v} \bar{K}$$

$$R = H \bar{\varepsilon}$$

$$X = H \bar{u} \bar{\varepsilon}$$

$$Z = H \bar{v} \bar{\varepsilon}$$

Les équations deviennent :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(U)}{\partial x} + \frac{\partial(V)}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = Q + N \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - g H S_{fx} \quad (\text{IV.12})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = W + N \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - g H S_{fy} \quad (\text{IV.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{C_\mu \bar{K}^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial A}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{C_\mu \bar{K}^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial A}{\partial y} \right] \\ &+ \frac{C_\mu M}{H} \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{g}{C^2} \left(\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \right)^3 - \bar{\varepsilon} H \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{C_\mu M}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial R}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{C_\mu M}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial R}{\partial y} \right] \\ &+ \frac{\bar{\varepsilon}}{K} \left[C_1 \frac{C_\mu M}{H} \left(2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right) - C_2 \bar{\varepsilon} H \right] \end{aligned}$$

$$- \frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^{3/4} q^4}{HD C} \quad (IV.15)$$

Appliquons maintenant le schéma de MAC CORMACK aux équations du mouvement, après le changement de variables ci-dessus :

Etape prédiction :

$$\frac{(\tilde{H}_{i,j} - H_{i,j}^n)}{\Delta t} + \frac{(U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n)}{\Delta x} + \frac{(V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n)}{\Delta y} = 0 \quad (IV.16)$$

$$\frac{(\tilde{U}_{i,j} - U_{i,j}^n)}{\Delta t} + \frac{(F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n)}{\Delta x} + \frac{(G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n)}{\Delta y} =$$

$$Q_{i,j}^n - g H_{i,j}^n S_{fx} + N_{i,j}^n \left(\frac{(\bar{u}_{i+1,j}^n + \bar{u}_{i-1,j}^n - 2\bar{u}_{i,j}^n)}{(\Delta x)^2} + \frac{(\bar{u}_{i,j+1}^n + \bar{u}_{i,j-1}^n - 2\bar{u}_{i,j}^n)}{(\Delta y)^2} \right) \quad (IV.17)$$

$$\frac{(\tilde{V}_{i,j} - V_{i,j}^n)}{\Delta t} + \frac{(G_{i+1,j}^n - G_{i,j}^n)}{\Delta x} + \frac{(S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n)}{\Delta y} =$$

$$W_{i,j}^n - g H_{i,j}^n S_{fy} + N_{i,j}^n \left(\frac{(\bar{v}_{i+1,j}^n + \bar{v}_{i-1,j}^n - 2\bar{v}_{i,j}^n)}{(\Delta x)^2} + \frac{(\bar{v}_{i,j+1}^n + \bar{v}_{i,j-1}^n - 2\bar{v}_{i,j}^n)}{(\Delta y)^2} \right) \quad (IV.18)$$

$$\frac{(\tilde{A}_{i,j} - A_{i,j}^n)}{\Delta t} + \frac{(I_{i+1,j}^n - I_{i,j}^n)}{\Delta x} + \frac{(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n)}{\Delta y} =$$

$$\left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{A_{i+1,j}^n + A_{i-1,j}^n - 2A_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) M_{i,j}^n + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{M_{i+1,j}^n - M_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{A_{i+1,j}^n - A_{i,j}^n}{\Delta x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{A_{i,j+1}^n + A_{i,j-1}^n - 2A_{i,j}^n}{(\Delta y)^2} \right) M_{i,j}^n + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{M_{i,j+1}^n - M_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \left(\frac{A_{i,j+1}^n - A_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \\
 & + \left(\frac{C_\mu}{H_{i,j}^n} M_{i,j}^n \right) \left[2 \left(\frac{U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + 2 \left(\frac{V_{i,j+1}^n + V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n}{(\Delta y)^2} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n}{\Delta y} \right) + \left(\frac{V_{i+1,j}^n - V_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \right)^2 \right] + \frac{g}{C^2} \left(\sqrt{\left(\frac{-}{u_j} \right)^2 + \left(\frac{-}{v_j} \right)^2} \right)^3 - \bar{\varepsilon}_{i,j}^n H_{i,j}^n \quad (IV.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\tilde{R}_{i,j}^n - R_{i,j}^n)}{\Delta t} + \frac{(X_{i+1,j}^n - X_{i,j}^n)}{\Delta x} + \frac{(Z_{i,j+1}^n - Z_{i,j}^n)}{\Delta y} = \\
 & \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{R_{i+1,j}^n + R_{i-1,j}^n - 2R_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) M_{i,j}^n + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{M_{i+1,j}^n - M_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{R_{i+1,j}^n - R_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \\
 & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{R_{i,j+1}^n + R_{i,j-1}^n - 2R_{i,j}^n}{(\Delta y)^2} \right) M_{i,j}^n + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{M_{i,j+1}^n - M_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \left(\frac{R_{i,j+1}^n - R_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \\
 & + \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{i,j}^n}{\bar{K}_{i,j}^n} \right) \left[C_1 \left(\left(\frac{C_\mu}{H_{i,j}^n} M_{i,j}^n \right) \left[2 \left(\frac{U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + 2 \left(\frac{V_{i,j+1}^n + V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n}{(\Delta y)^2} \right) \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n}{\Delta y} \right) + \left(\frac{V_{i+1,j}^n - V_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \right)^2 - C_2 \bar{\varepsilon}_{i,j}^n H_{i,j}^n \right] - \frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^{3/4} q^4}{H_{i,j}^n D^{1/2} C} \quad (IV.20)
 \end{aligned}$$

De cette première étape, on tire les valeurs suivantes :

$$\tilde{H}_{i,j} = H_{i,j}^n - \tau_x (U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n) - \tau_y (V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n) \quad (\text{IV.21})$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{i,j} = U_{i,j}^n - \tau_x (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) - \tau_y (G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n) \\ + \Delta t (Q_{i,j}^n - g H_{i,j}^n S_{fx}) + N_{i,j}^n \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} (\bar{u}_{i+1,j}^n + \bar{u}_{i-1,j}^n - 2\bar{u}_{i,j}^n) + \frac{\tau_y^2}{\Delta t} (\bar{u}_{i,j+1}^n + \bar{u}_{i,j-1}^n - 2\bar{u}_{i,j}^n) \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{i,j} = V_{i,j}^n - \tau_x (G_{i+1,j}^n - G_{i,j}^n) - \tau_y (S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n) \\ + \Delta t (W_{i,j}^n - g H_{i,j}^n S_{fy}) + N_{i,j}^n \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} (\bar{v}_{i+1,j}^n + \bar{v}_{i-1,j}^n - 2\bar{v}_{i,j}^n) + \frac{\tau_y^2}{\Delta t} (\bar{v}_{i,j+1}^n + \bar{v}_{i,j-1}^n - 2\bar{v}_{i,j}^n) \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{i,j} = A_{i,j}^n - \tau_x (I_{i+1,j}^n - I_{i,j}^n) - \tau_y (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) \\ + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (A_{i+1,j}^n + A_{i-1,j}^n - 2A_{i,j}^n) M_{i,j}^n + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (M_{i+1,j}^n - M_{i,j}^n) (A_{i+1,j}^n - A_{i,j}^n) \\ + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (A_{i,j+1}^n + A_{i,j-1}^n - 2A_{i,j}^n) M_{i,j}^n + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (M_{i,j+1}^n - M_{i,j}^n) (A_{i,j+1}^n - A_{i,j}^n) \\ + \left(\frac{C_\mu}{H_{i,j}^n} M_{i,j}^n \right) \left[2 \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n) + 2 \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (V_{i,j+1}^n + V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n) \right. \\ \left. + \left(\tau_y (\bar{U}_{i,j+1}^n - \bar{U}_{i,j}^n) + \tau_x (\bar{V}_{i+1,j}^n - \bar{V}_{i,j}^n) \right)^2 \right] + \frac{g \Delta t}{C} \left(\sqrt{(\bar{u}_{i,j}^n)^2 + (\bar{v}_{i,j}^n)^2} \right)^3 - \bar{\mathcal{E}}_{i,j}^n H_{i,j}^n \Delta t \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

$$\tilde{R}_{i,j} = R_{i,j}^n - \tau_x (X_{i+1,j}^n - X_{i,j}^n) - \tau_y (Z_{i,j+1}^n - Z_{i,j}^n)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (R_{i+1,j}^n + R_{i-1,j}^n - 2R_{i,j}^n) M_{i,j}^n + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (M_{i+1,j}^n - M_{i,j}^n) (R_{i+1,j}^n - R_{i,j}^n) \\
 & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (R_{i,j+1}^n + R_{i,j-1}^n - 2R_{i,j}^n) M_{i,j}^n + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (M_{i,j+1}^n - M_{i,j}^n) (R_{i,j+1}^n - R_{i,j}^n) \\
 & + \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{i,j}^n}{K_{i,j}^n} \right) \left[C_1 \left(2 \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n) + 2 \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (V_{i,j+1}^n + V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\tau_y (\bar{U}_{i,j+1}^n - \bar{U}_{i,j}^n) + \tau_x (\bar{V}_{i+1,j}^n - \bar{V}_{i,j}^n) \right)^2 \right) - C_2 \bar{\varepsilon}_{i,j}^n H_{i,j}^n \Delta t \right] - \frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^2 q^4}{H_{i,j}^n D C} \Delta t \quad (IV.25)
 \end{aligned}$$

Etape correction :

$$\frac{(\hat{H}_{i,j} - \tilde{H}_{i,j})}{\Delta t} + \frac{(\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i-1,j})}{\Delta x} + \frac{(\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j-1})}{\Delta y} = 0 \quad (IV.26)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\hat{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i,j})}{\Delta t} + \frac{(\tilde{F}_{i,j} - \tilde{F}_{i-1,j})}{\Delta x} + \frac{(\tilde{G}_{i,j} - \tilde{G}_{i,j-1})}{\Delta y} = \\
 & \tilde{Q}_{i,j} - g \tilde{H}_{i,j} S_{\beta} + \tilde{N}_{i,j} \left(\frac{(\tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i-1,j} - 2\tilde{u}_{i,j})}{(\Delta x)^2} + \frac{(\tilde{u}_{i,j+1} + \tilde{u}_{i,j-1} - 2\tilde{u}_{i,j})}{(\Delta y)^2} \right) \quad (IV.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\hat{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j})}{\Delta t} + \frac{(\tilde{G}_{i,j} - \tilde{G}_{i-1,j})}{\Delta x} + \frac{(\tilde{S}_{i,j} - \tilde{S}_{i,j-1})}{\Delta y} = \\
 & \tilde{W}_{i,j} - g \tilde{H}_{i,j} S_{\beta} + \tilde{N}_{i,j} \left(\frac{(\tilde{v}_{i+1,j} + \tilde{v}_{i-1,j} - 2\tilde{v}_{i,j})}{(\Delta x)^2} + \frac{(\tilde{v}_{i,j+1} + \tilde{v}_{i,j-1} - 2\tilde{v}_{i,j})}{(\Delta y)^2} \right) \quad (IV.28)
 \end{aligned}$$

$$\frac{(\hat{A}_{i,j} - \tilde{A}_{i,j})}{\Delta t} + \frac{(\tilde{I}_{i,j} - \tilde{I}_{i-1,j})}{\Delta x} + \frac{(\tilde{T}_{i,j} - \tilde{T}_{i,j-1})}{\Delta y} =$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tilde{A}_{i+1,j} + \tilde{A}_{i-1,j} - 2\tilde{A}_{i,j}}{(\Delta x)^2} \right) \tilde{M}_{i,j} + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tilde{M}_{i,j} - \tilde{M}_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\tilde{A}_{i,j} - \tilde{A}_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \\
 & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tilde{A}_{i,j+1} + \tilde{A}_{i,j-1} - 2\tilde{A}_{i,j}}{(\Delta y)^2} \right) \tilde{M}_{i,j} + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tilde{M}_{i,j} - \tilde{M}_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \left(\frac{\tilde{A}_{i,j} - \tilde{A}_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \\
 & + \left(\frac{C_\mu}{\tilde{H}_{i,j}} \tilde{M}_{i,j} \right) \left[2 \left(\frac{\tilde{U}_{i+1,j} + \tilde{U}_{i-1,j} - 2\tilde{U}_{i,j}}{(\Delta x)^2} \right) + 2 \left(\frac{\tilde{V}_{i,j+1} + \tilde{V}_{i,j-1} - 2\tilde{V}_{i,j}}{(\Delta y)^2} \right) \right. \\
 & \left. + \left[\left(\frac{\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j-1}}{\Delta y} + \frac{\tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i-1,j}}{\Delta x} \right)^2 \right] + \frac{g}{c^2} \left(\sqrt{(\tilde{u}_{i,j}^2) + (\tilde{v}_{i,j}^2)} \right)^3 - \tilde{\epsilon}_{i,j} \tilde{H}_{i,j} \right. \quad (IV.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\hat{R}_{i,j} - \tilde{R}_{i,j})}{\Delta t} + \frac{(\tilde{X}_{i,j} - \tilde{X}_{i-1,j})}{\Delta x} + \frac{(\tilde{Z}_{i,j} - \tilde{Z}_{i,j-1})}{\Delta y} = \\
 & \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{(\tilde{R}_{i+1,j} + \tilde{R}_{i-1,j} - 2\tilde{R}_{i,j})}{(\Delta x)^2} \tilde{M}_{i,j} + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{(\tilde{M}_{i,j} - \tilde{M}_{i-1,j})}{\Delta x} \frac{(\tilde{R}_{i,j} - \tilde{R}_{i-1,j})}{\Delta x} \\
 & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{(\tilde{R}_{i,j+1} + \tilde{R}_{i,j-1} - 2\tilde{R}_{i,j})}{(\Delta y)^2} \tilde{M}_{i,j} + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{(\tilde{M}_{i,j} - \tilde{M}_{i,j-1})}{\Delta y} \frac{(\tilde{R}_{i,j} - \tilde{R}_{i,j-1})}{\Delta y} \\
 & + \left(\frac{\tilde{\epsilon}_{i,j}}{\tilde{K}_{i,j}} \right) \left[C_1 \left(\frac{C_\mu}{\tilde{H}_{i,j}} \tilde{M}_{i,j} \right) \left(2 \frac{(\tilde{U}_{i+1,j} + \tilde{U}_{i-1,j} - 2\tilde{U}_{i,j})}{(\Delta x)^2} + 2 \frac{(\tilde{V}_{i,j+1} + \tilde{V}_{i,j-1} - 2\tilde{V}_{i,j})}{(\Delta y)^2} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{(\tilde{U}_{i,j+1} - \tilde{U}_{i,j})}{\Delta y} + \frac{(\tilde{V}_{i+1,j} - \tilde{V}_{i,j})}{\Delta x} \right)^2 \right] - C_2 \frac{\tilde{\epsilon}_{i,j}}{\tilde{H}_{i,j}} \tilde{H}_{i,j} \left[\frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^{3/4} q^4}{H_{i,j}^n D^{1/2} C} \right. \quad (IV.30)
 \end{aligned}$$

De cette deuxième étape, on tire les valeurs suivantes :

$$\hat{H}_{i,j} = \tilde{H}_{i,j} + \tau_x (\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i-1,j}) + \tau_y (\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j-1}) \quad (IV.31)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{i,j} = & \tilde{U}_{i,j} + \tau_x (\tilde{F}_{i,j} - \tilde{F}_{i-1,j}) + \tau_y (\tilde{G}_{i,j} - \tilde{G}_{i,j-1}) - \Delta t g \tilde{H}_{i,j} S_{fx} \\ & + \Delta t \tilde{Q}_{i,j} + \tilde{N}_{i,j} \left[\left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (\tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i-1,j} - 2\tilde{u}_{i,j}) + \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (\tilde{u}_{i,j+1} + \tilde{u}_{i,j-1} - 2\tilde{u}_{i,j}) \right] \end{aligned} \quad (IV.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_{i,j} = & \tilde{V}_{i,j} + \tau_x (\tilde{G}_{i,j} - \tilde{G}_{i-1,j}) + \tau_y (\tilde{S}_{i,j} - \tilde{S}_{i,j-1}) - \Delta t g \tilde{H}_{i,j} S_{fy} \\ & + \Delta t \tilde{W}_{i,j} + \tilde{N}_{i,j} \left[\left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (\tilde{v}_{i+1,j} + \tilde{v}_{i-1,j} - 2\tilde{v}_{i,j}) + \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (\tilde{v}_{i,j+1} + \tilde{v}_{i,j-1} - 2\tilde{v}_{i,j}) \right] \end{aligned} \quad (IV.33)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{i,j} = & \tilde{A}_{i,j} - \tau_x (\tilde{I}_{i,j} - \tilde{I}_{i-1,j}) - \tau_y (\tilde{T}_{i,j} - \tilde{T}_{i,j-1}) \\ & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (\tilde{A}_{i+1,j} + \tilde{A}_{i-1,j} - 2\tilde{A}_{i,j}) \tilde{M}_{i,j} + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (\tilde{M}_{i,j} - \tilde{M}_{i-1,j}) (\tilde{A}_{i,j} - \tilde{A}_{i-1,j}) \\ & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (\tilde{A}_{i,j+1} + \tilde{A}_{i,j-1} - 2\tilde{A}_{i,j}) \tilde{M}_{i,j} + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (\tilde{M}_{i,j} - \tilde{M}_{i,j-1}) (\tilde{A}_{i,j} - \tilde{A}_{i,j-1}) \\ & + \left(\frac{C_\mu}{\tilde{H}_{i,j}} \tilde{M}_{i,j} \right) \left[2 \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (\tilde{U}_{i+1,j} + \tilde{U}_{i-1,j} - 2\tilde{U}_{i,j}) + 2 \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (\tilde{V}_{i,j+1} + \tilde{V}_{i,j-1} - 2\tilde{V}_{i,j}) \right. \\ & \left. + \left[\tau_y (\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j-1}) + \tau_x (\tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i-1,j}) \right]^2 \right] \\ & + \frac{g}{C} \Delta t \left(\sqrt{(\tilde{u}_{i,j}^2) + (\tilde{v}_{i,j}^2)} \right)^3 - \tilde{\epsilon}_{i,j} \tilde{H}_{i,j} \Delta t \end{aligned} \quad (IV.34)$$

$$\hat{R}_{i,j} = \tilde{R}_{i,j} - \tau_x (\tilde{X}_{i,j} - \tilde{X}_{i-1,j}) - \tau_y (\tilde{Z}_{i,j} - \tilde{Z}_{i,j-1})$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (\tilde{R}_{i+1,j} + \tilde{R}_{i-1,j} - 2\tilde{R}_{i,j}) \tilde{M}_{i,j} + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (\tilde{M}_{i,j} - \tilde{M}_{i-1,j}) (\tilde{R}_{i,j} - \tilde{R}_{i-1,j}) \\
 & + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (\tilde{R}_{i,j+1} + \tilde{R}_{i,j-1} - 2\tilde{R}_{i,j}) \tilde{M}_{i,j} + \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (\tilde{M}_{i,j} - \tilde{M}_{i,j-1}) (\tilde{R}_{i,j} - \tilde{R}_{i,j-1}) \\
 & + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{i,j}}{\tilde{K}_{i,j}} \right) \left[C_1 \left(\frac{C_\mu}{\tilde{H}_{i,j}} \tilde{M}_{i,j} \right) \left(2 \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (\tilde{U}_{i+1,j} + \tilde{U}_{i-1,j} - 2\tilde{U}_{i,j}) + 2 \left(\frac{\tau_y^2}{\Delta t} \right) (\tilde{V}_{i,j+1} + \tilde{V}_{i,j-1} - 2\tilde{V}_{i,j}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\tau_y (\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i,j-1}) + \tau_x (\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i-1,j}) \right)^2 \right) - C_2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{i,j}}{\tilde{H}_{i,j}} \tilde{H}_{i,j} \Delta t \right] - \frac{C_2 C_\mu^{1/2} g^{3/4} q^4}{H_{i,j}^n D^{1/2} C^{3/2}} \Delta t \quad (IV.35)
 \end{aligned}$$

$$\tau_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

ou ;

$$\tau_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

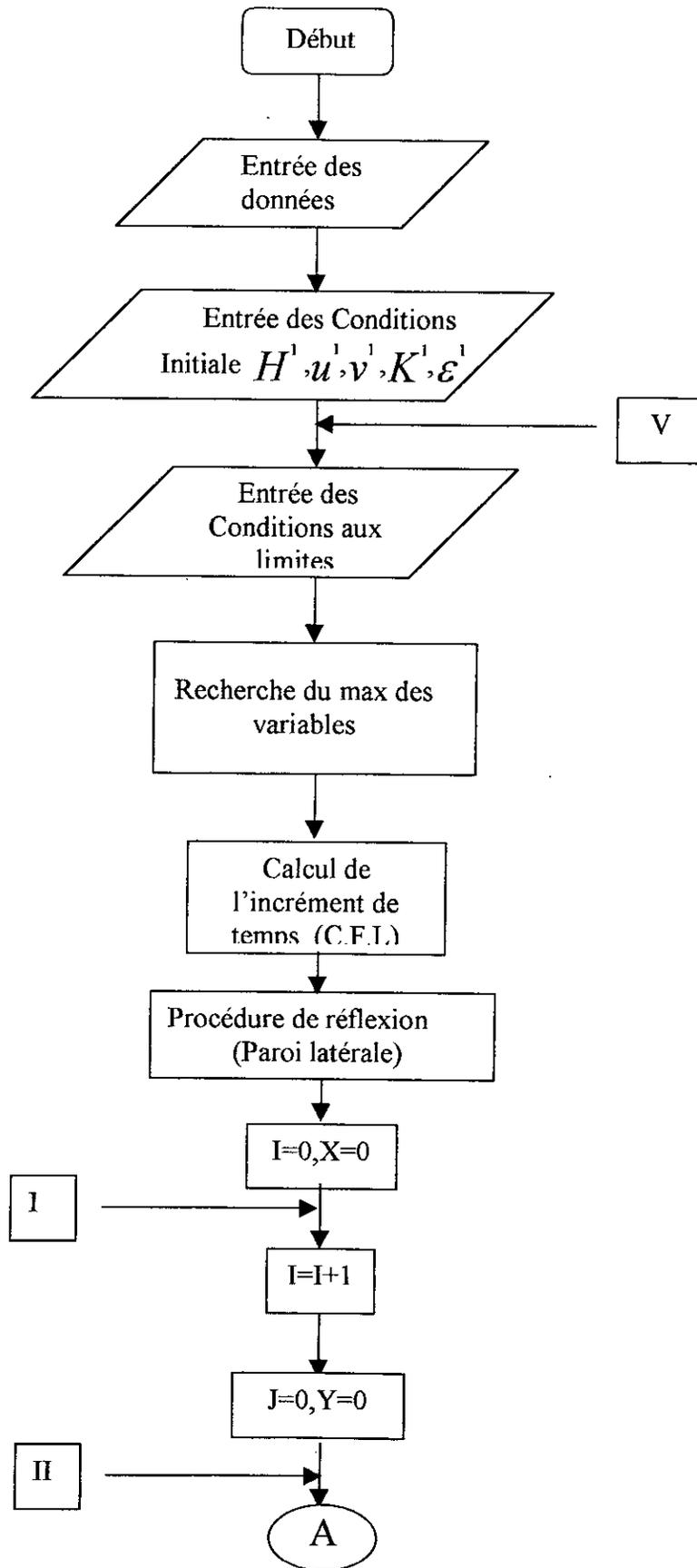
la solution au temps (n+1) est telle que :

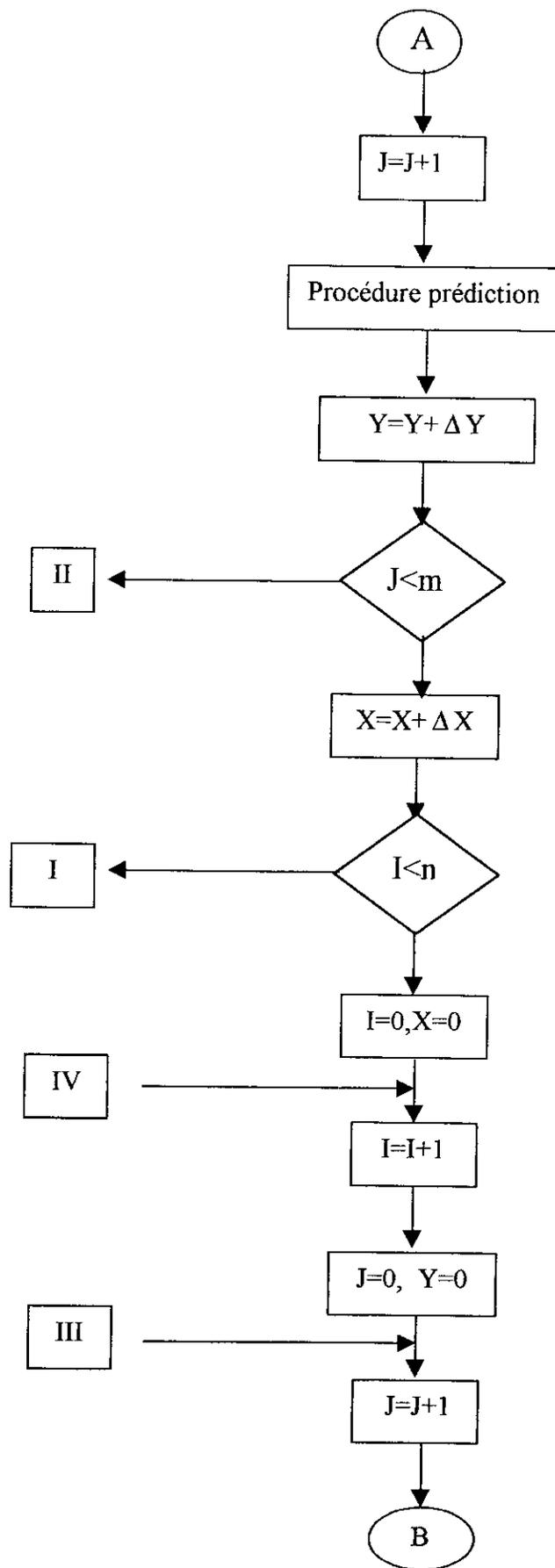
$$\left\{ \begin{aligned}
 H_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} (H_{i,j}^n + \hat{H}_{i,j}) \\
 \bar{u}_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j}^n + \hat{u}_{i,j}) \\
 \bar{v}_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} (\bar{v}_{i,j}^n + \hat{v}_{i,j}) \\
 \bar{k}_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} (\bar{k}_{i,j}^n + \hat{k}_{i,j}) \\
 \bar{\varepsilon}_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}_{i,j}^n + \hat{\varepsilon}_{i,j})
 \end{aligned} \right. \quad (IV.36)$$

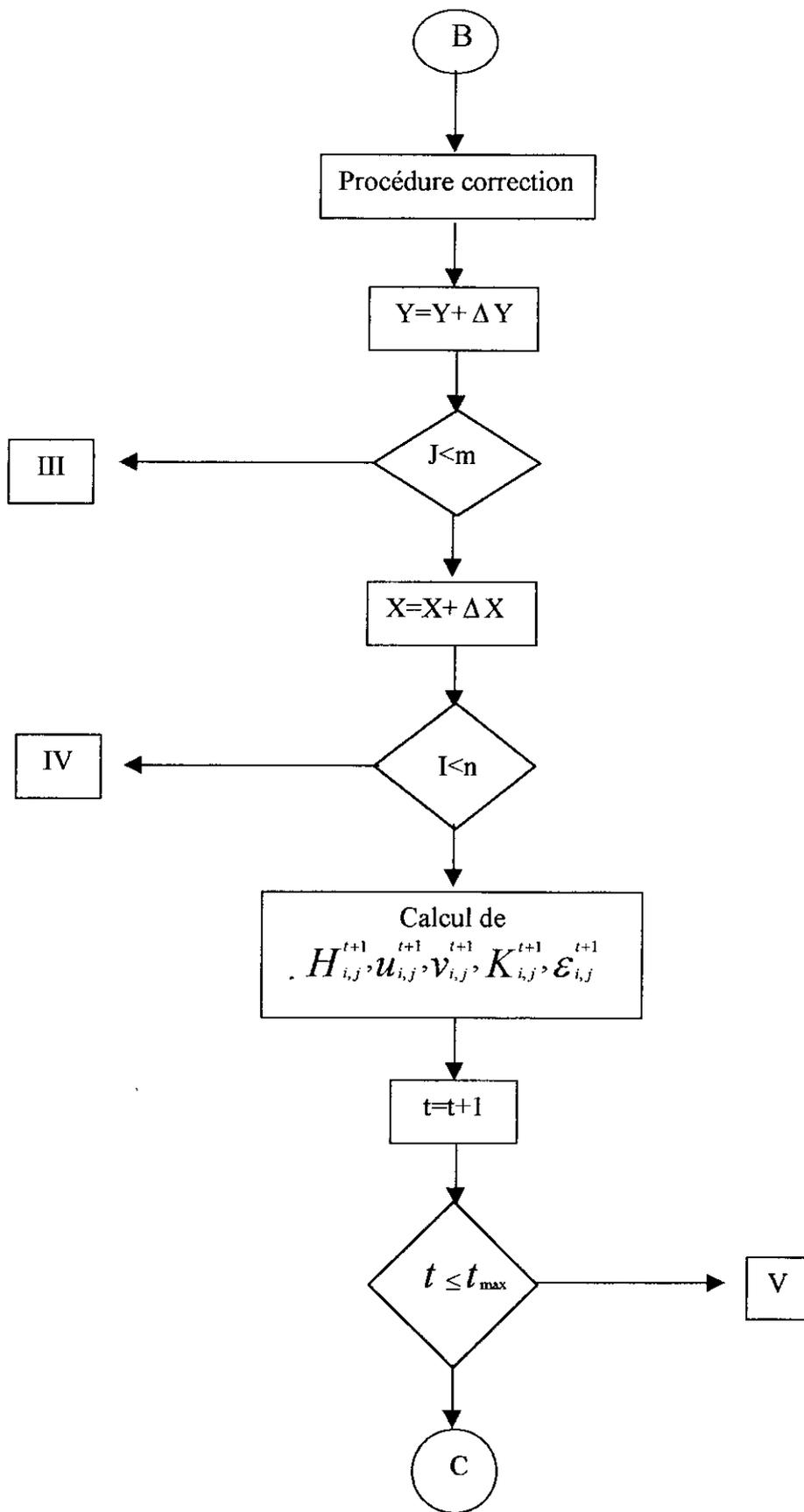
Ainsi nous obtenons les équations de notre système discrétisé si dessus.

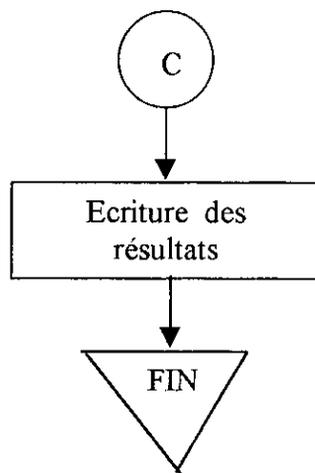
La résolution de ce système se fait par l'élaboration d'un programme de calcul en FORTRAN 90 donné par l'organigramme suivant.

Les résultats obtenus par le programme et l'interprétation de ces résultats seront développés dans le chapitre IV, 'résultats et interprétation'.









CHAPITRE V

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

CHAPITRE V

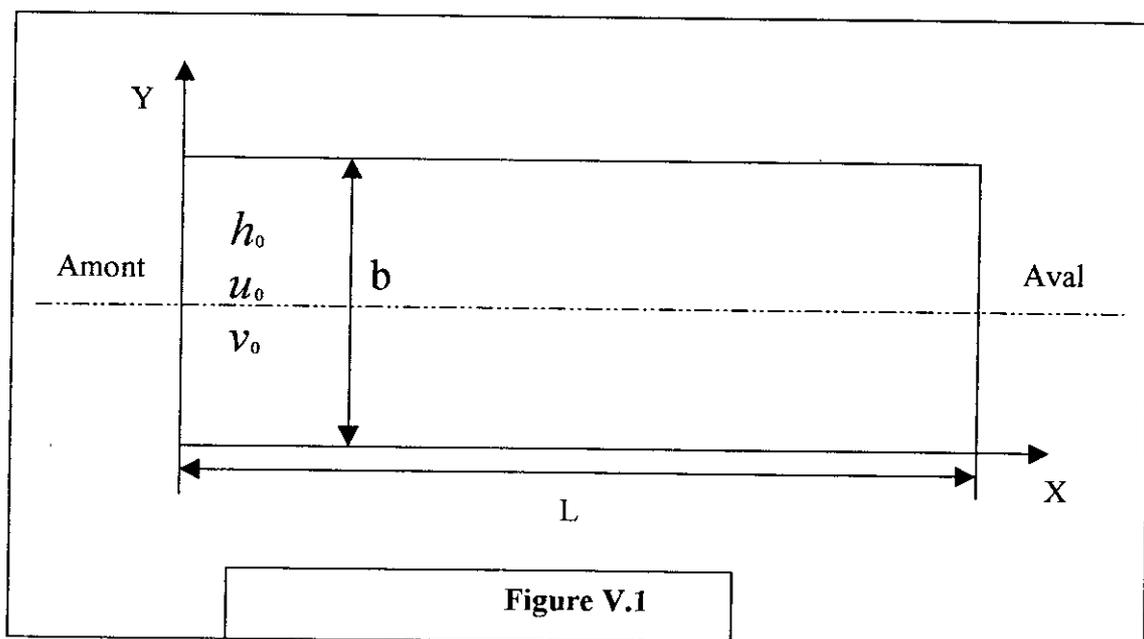
RESULTATS ET INTERPRETATIONS

I-PREMIERE APPLICATION:

Dans un premier temps on teste le programme sans turbulence pour le valider. Une application est faite sur un canal découvert rectangulaire droit, avec des berges rectilignes.

L'écoulement est supposée non permanent et non uniforme.

Le canal est partagé en plusieurs tronçons, les dimensions d'un de ces tronçons est présenté ci-dessous.



Pour la validation des résultats du modèle mathématique élaboré le canal étudié par LAROUI[19], à été pris comme exemple de calcul.

Les données et les conditions aux limites de cet exemple sont :

Les conditions aux limites de l'écoulement sont :

- Le tirant d'eau à l'amont est $h_0 = 0.371\text{m}$.
- La vitesse transversale à l'amont est considéré nulle ($v_0 = 0\text{m/s}$).
- La pente du fond suivant l'axe longitudinale est $S_{ox} = 0.001$.
- La pente du fond suivant l'axe transversale est $S_{oy} = 0$.
- Les pentes de frottement sont supposé nulle.

- Les pas d'espaces sont : $\Delta x = 0.23\text{m}$, $\Delta y = 0.058\text{m}$.
- Le pas de temps est pris : $\Delta t = 5.2\text{ s}$, est reste constant durant toute la manipulation.

En ce qui concerne les conditions initiales :

- La hauteur initiale $h_0 = 0.371\text{m}$.
 - La vitesse longitudinale initiale $u_0 = 0.371\text{m/s}$.
 - La vitesse transversale initiale $v_0 = 0\text{m/s}$.
- Et cela sur toutes les points du maillage (50*50).

Résultats et commentaires :

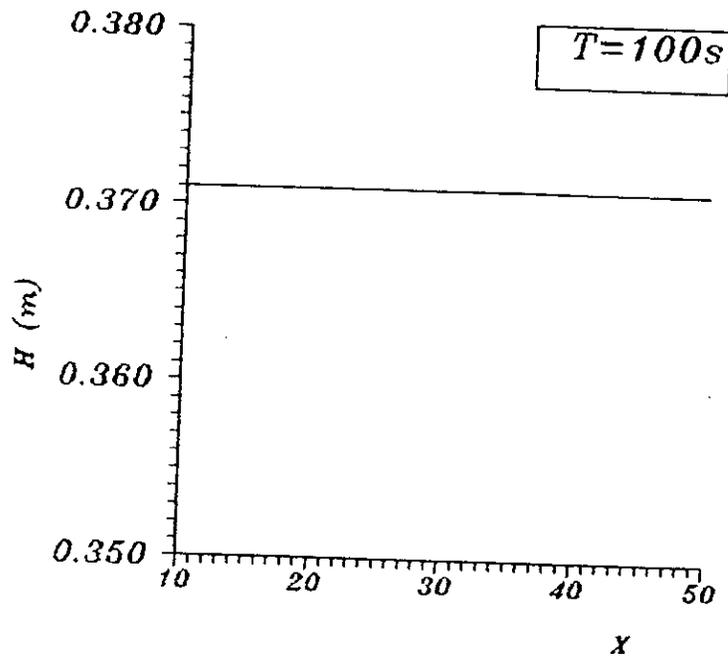
Les résultats que nous avons obtenu par cette application sont les suivants:

- Les figures (I.1, I.4, I.7) représentent les hauteurs d'eaux obtenues pour ($y = 15$) en utilisant notre modèle.
- Les figures (I.2, I.3), (I.5, I.6), (I.8, I.9) représentent chacune l'allure de la vitesse longitudinale u et la vitesse transversale v respectivement pour chaque 10 pas.

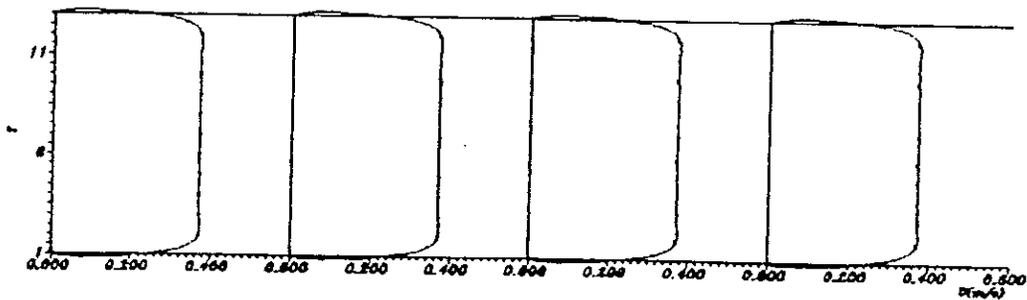
En comparant ces résultats aux résultats de LAROUÏ [19] on peut déduire:

- Le même ordre de grandeur et la même allure pour les hauteurs, et les vitesses longitudinales.
- Pour les vitesses transversales, on remarque une symétrie par rapport à l'axe longitudinale.

De cela, on constate que le schéma de MACCORMACK donne de bon résultats pour les écoulements à surface libre.

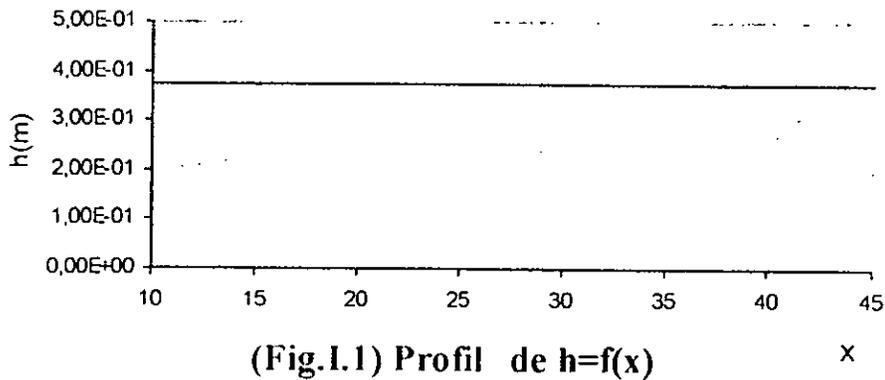


Profil de $H=f(X)$

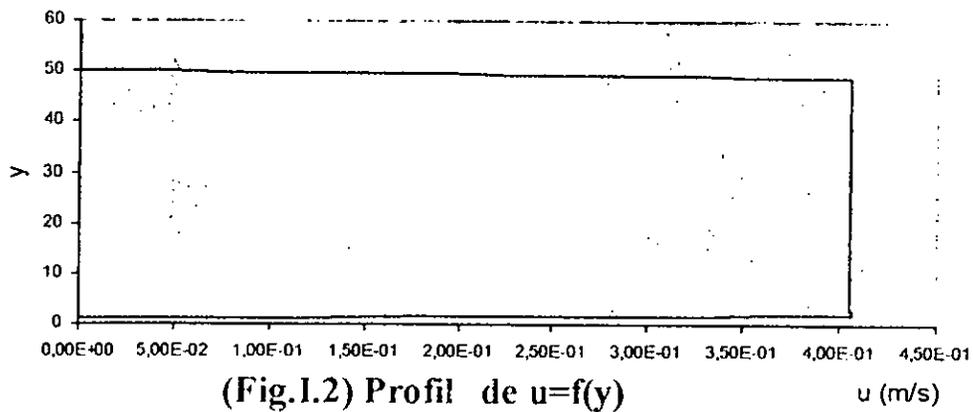


Profil de $U=f(Y)$

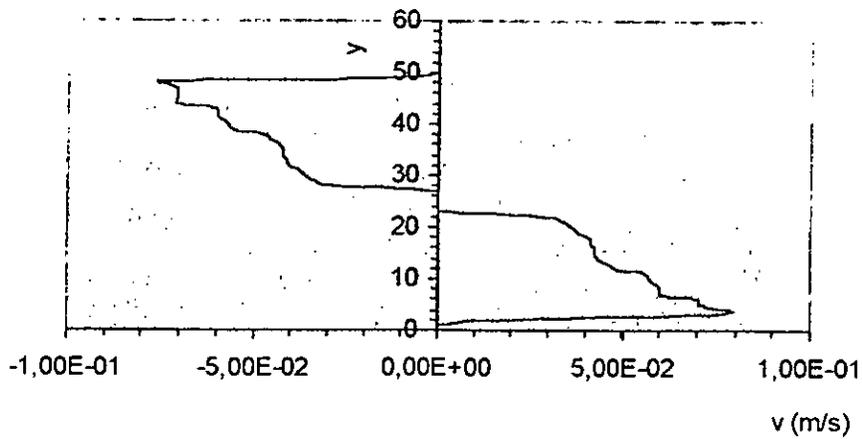
RESULTATS DE LAROUÏ : PRESENTATION DU PROFIL DE LA VITESSE LONGITUDINALE U EN FONCTION DE Y POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR $Y=1.5$ A L'INSTANT $T=100s$



(Fig.I.1) Profil de $h=f(x)$

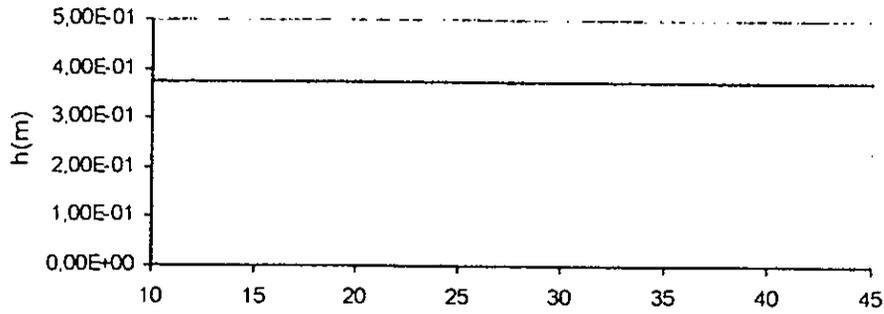


(Fig.I.2) Profil de $u=f(y)$

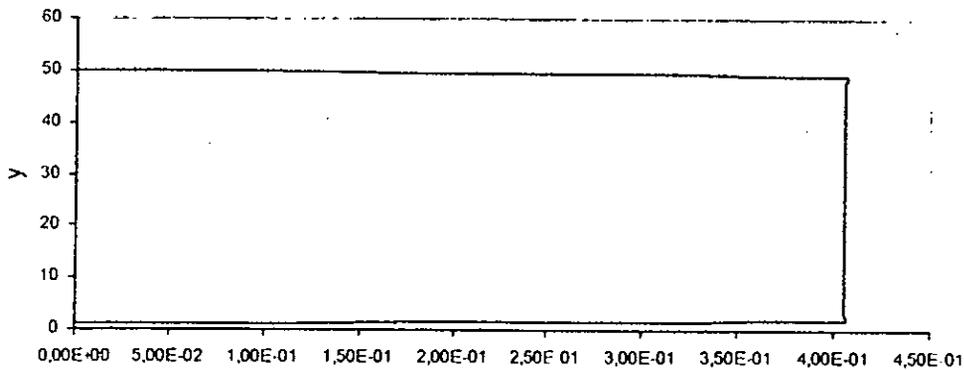


(Fig.I.3) Profil $v=f(y)$

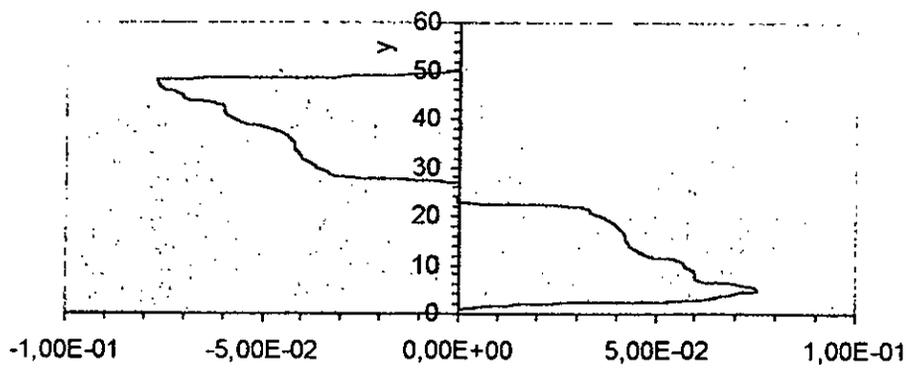
PRESENTATION DES PROFILS DE VITESSE SELON X ET Y EN FONCTION DE Y POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR $Y=15$ A L'INSTANT $T=100$ s



(Fig.1.4) Profil de $h=f(x)$

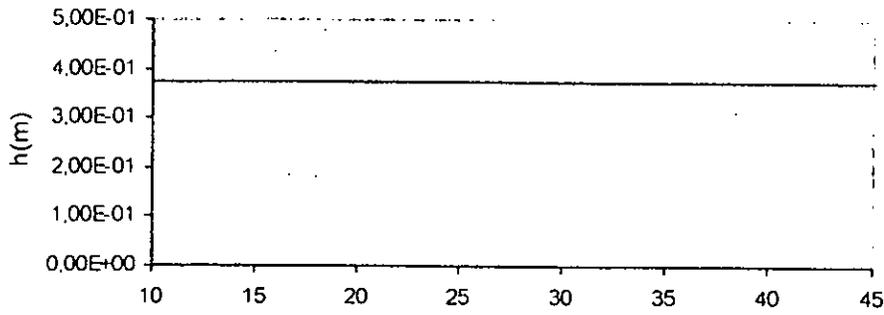


(Fig.1.5) Profil de $u=f(y)$

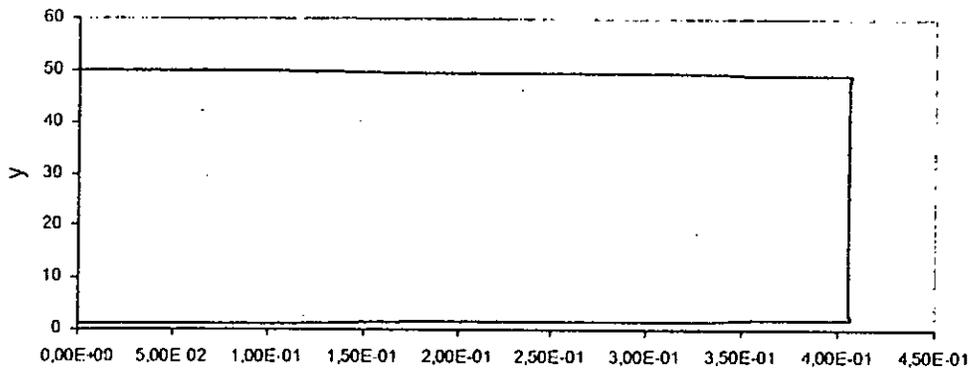


(Fig.1.6) Profil $v=f(y)$

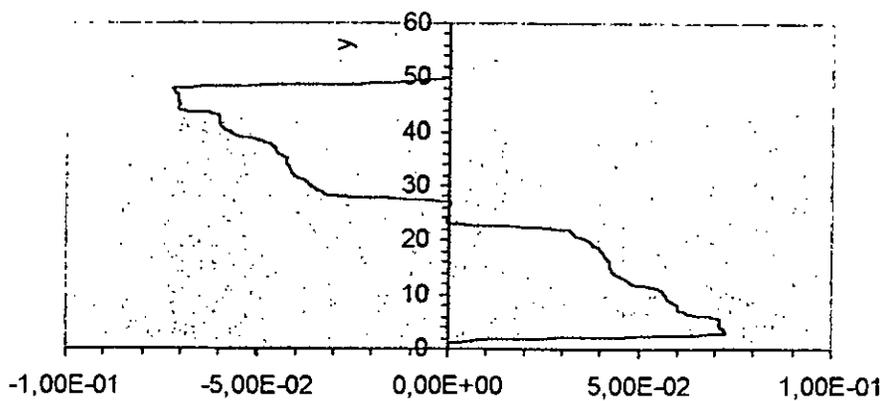
PRESENTATION DES PROFILS DE VITESSE SELON X ET Y EN FONCTION DE Y POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR Y=15 A L'INSTANT T=200 s



(Fig.I.7) Profil de $h=f(x)$



(Fig.I.8) Profil de $u=f(y)$



(Fig.I.9) Profil $v=f(y)$

PRESENTATION DES PROFILS DE VITESSE SELON X ET Y EN FONCTION DE Y POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR $Y=15$ A L'INSTANT $T=300$ s

II- DEUXIEME APPLICATION :

Dans un second temps on teste le modèle en tenant compte de la turbulence. Cette application porte sur l'analyse d'un écoulement turbulent à surface libre.

Les dimensions de notre ouvrage et les conditions initiales restent les mêmes que celles prescrites dans la première application.

Pour les conditions aux limites on considère :

- La hauteur initiale à l'amont $h_0=0.371\text{m}$.
- La vitesse longitudinale $u=0.371\text{m/s}$ et la vitesse transversale $v=0\text{m/s}$.

Ces valeurs sont adoptées comme conditions initiales et sont spécifiées en tous les points du maillage.

- Pour les problèmes de stabilité le nombre de courant est pris d'après la littérature comme suit : $C_n=0.9$.
- Les pas d'espace $\Delta x=0.05\text{m}$, $\Delta y=0.04\text{m}$.

Résultats et commentaires:

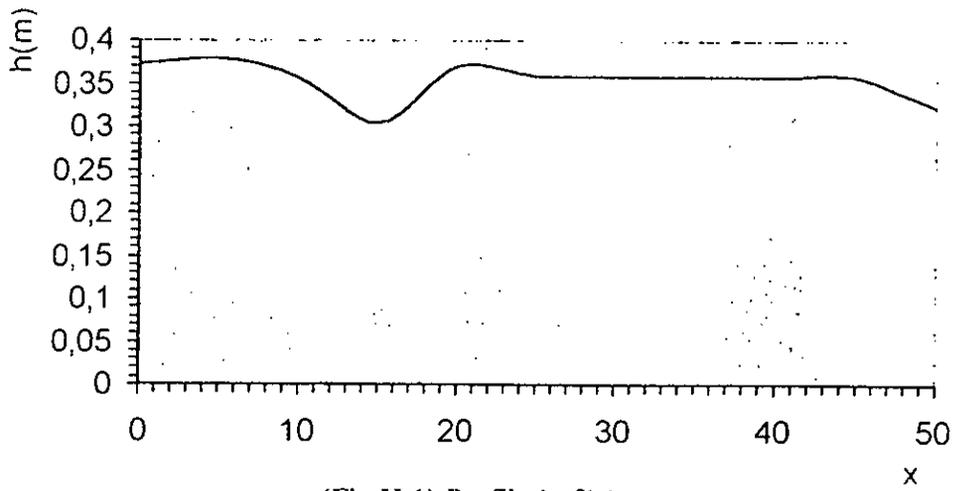
Les résultats que nous avons obtenu pour cette application sont les suivants :

- La figure (II.1) représente l'allure de la hauteur d'eau obtenu pour ($y=5$).
- Les figures (II.2, II.3) représentent l'allure de la vitesse longitudinale $u(\text{m/s})$ pour chaque 10 pas.
- Les figures (II.4, II.5) représentent l'allure de la vitesse transversales $v(\text{m/s})$ pour chaque 10 pas.
- Les figures (II.6, II.7) représentent l'allure de la dissipation d'énergie turbulente K pour chaque 10 pas.
- Les figures (II.8, II.9) représentent l'allure de taux de dissipation d'énergie turbulente ε pour chaque 10 pas.

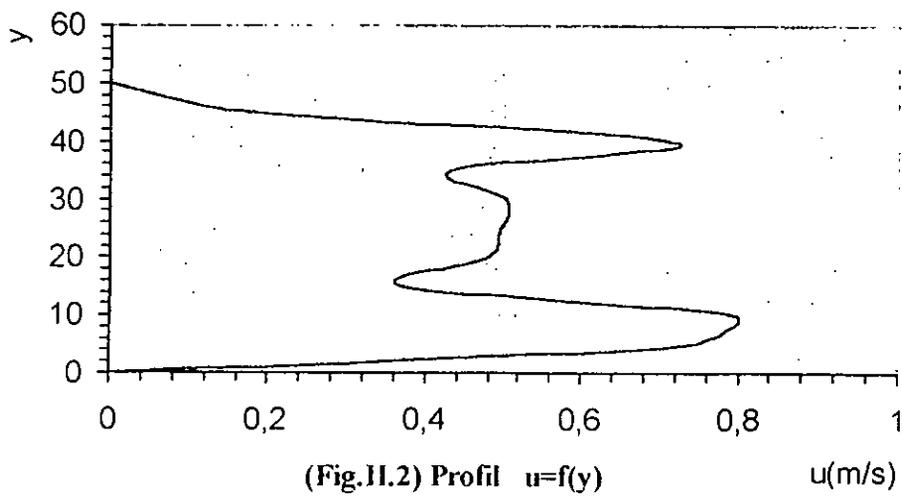
En comparant les figures de la première application avec celle de la deuxième application, pour les hauteurs en moyenne on retrouve l'ordre générale de grandeur 0.371, ainsi que pour les vitesses longitudinales.

En ce qui concerne les vitesses transversales à première vue les résultats semblent être cohérent.

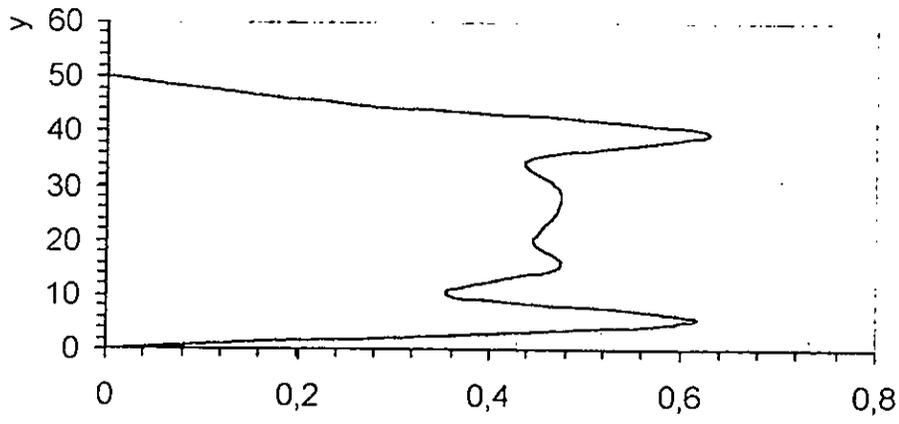
Pour plus de précision et pour valider les résultats obtenus il est nécessaire d'avoir à notre disposition des résultats expérimentaux.



(Fig.II.1) Profil $h=f(x)$

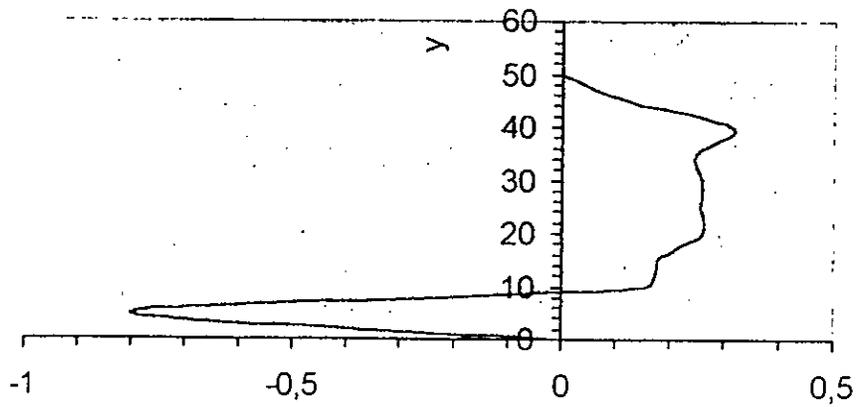


(Fig.II.2) Profil $u=f(y)$



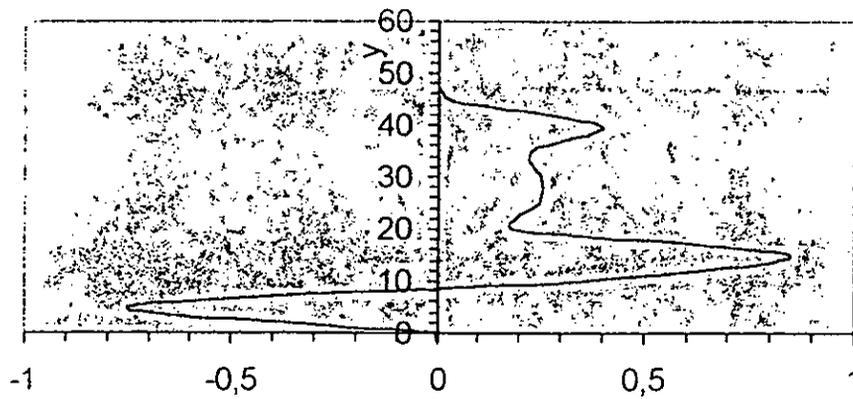
(Fig.II.3) Profil $u=f(y)$

$u(m/s)$



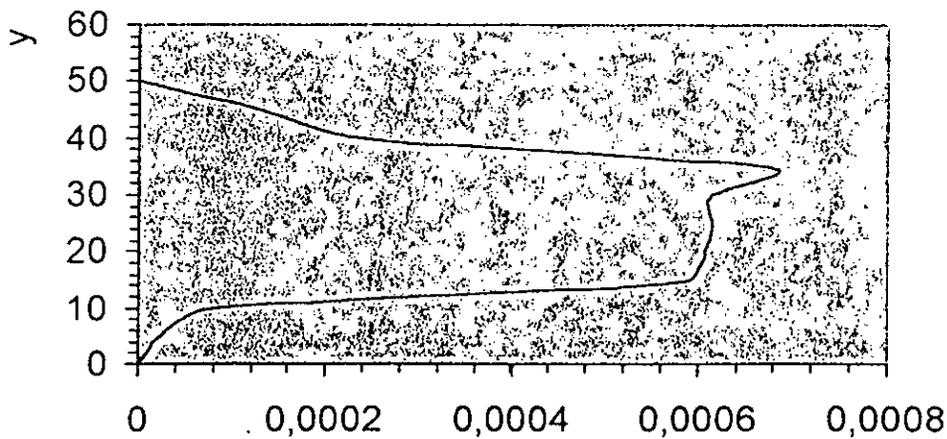
(Fig.II.4) Profil $v=f(y)$

$v(m/s)$



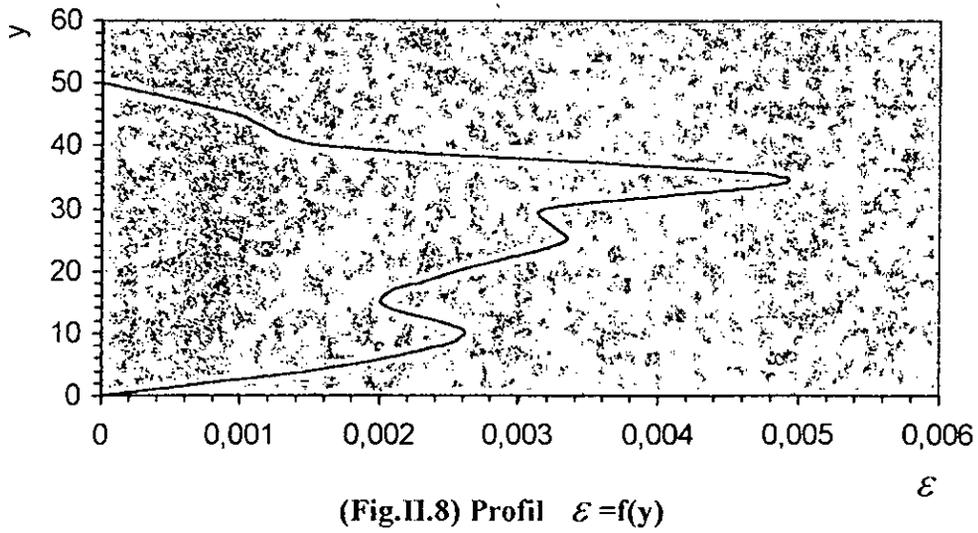
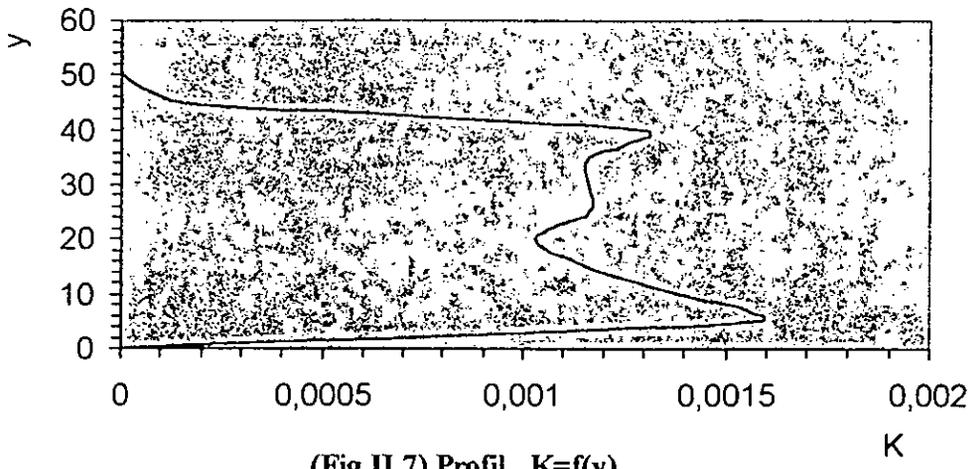
(Fig.II.5) Profil $v=f(y)$

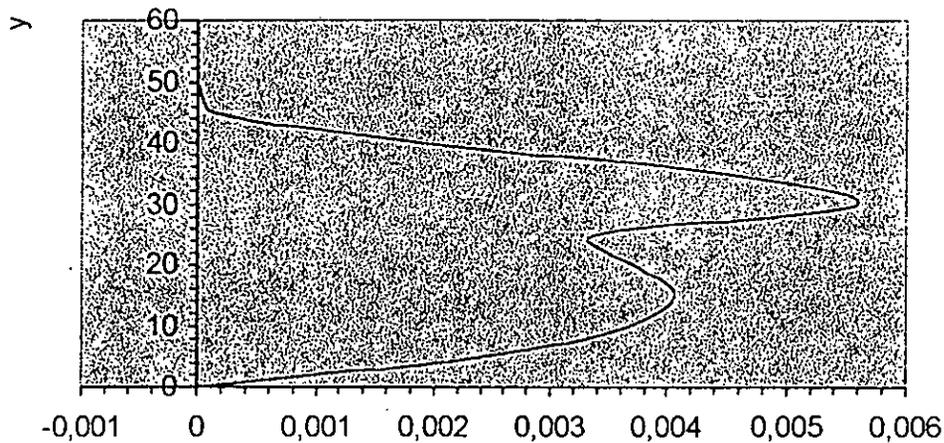
v(m/s)



(Fig.II.6) Profil $K=f(y)$

K





(Fig.II.9) Profil $\varepsilon = f(y)$

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons utilisé un modèle $K-\varepsilon$ pour la simulation d'un écoulement turbulent a surface libre bidimensionnel.

Nous avons commencé par l'intégration, suivant la profondeur des équations de la conservation de la masse et les équations de la quantité de mouvement.

Nous avons adopté le modèles $K-\varepsilon$ pour la modélisation de la turbulence. Ce modèle nous a permis la résolution du système de cinq inconnus H , u , v , K et ε .

Un schéma numérique aux différences finis « schéma de MACCORMACK » à été choisis.

Un programme en en FORTRAN 90 à été développé en introduisant la turbulence.

Une première application est faite sur un écoulement sans turbulence, Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats obtenus par LAROUÏ [19].

Les résultats obtenus sont très satisfaisants aussi bien au niveau de l'ordre de grandeur qu'au niveau de l'allure.

Le modèle mathématique avec le schéma de MACCORMACK donne de bon résultat.

Mais l'absence d'études expérimentales ou numériques, ne nous permet pas de conclure sur l'efficacité des résultats obtenus pour la deuxième application. Ceci n'enlève pas par ailleurs, en rien la qualité des résultats obtenus.

Finalement, nous pouvons dire que nous avons atteint le but que nous nous somme fixé, à savoir, présenter un modèle mathématique capable de

simuler les écoulements turbulents à surface libre dans un canal rectangulaire uniforme à faible pente.

BIBLIOGRAPHIE

- [01] ABBOTT, M. B., "Computation hydraulics: Element of the theory of free surface flow", Ed. Pitman publishing limited, London, 1979.
- [02] AMGHAR, D., MORSALI, M., et BELHADJ, O., "Modélisation par éléments finis des éléments à surface libre dans les transitions", Thèse d'Ingénieur d'Etat, ENP, ALGER, 1995.
- [03] BANAT, A., "Finite difference approximations", Polycopier des méthodes numériques, 1990.
- [04] BAOUCHE, Y. et BOUKHERCHA, A., "Etude d'un Ecoulement Turbulent dans une conduite à Motif périodique – Modèle K- ϵ ", Thèse d'Ingénieur d'Etat, ENP, ALGER, Juin 1999.
- [05] BARANGER, J., "Introduction à l'analyse Numérique", Ed. Hermann 1987.
- [06] BERREKSI, A., "Simulation des écoulements à surface libre dans des canaux à faible et à forte pente à géométrie variable", Thèse de Magister, ENP, ALGER, 1998.
- [07] BERREKSI, A., BOUHADJI, A. et BELHADJ, O., "simulation et analyse des écoulements bidimensionnels à surface libre en zone de transitions", Thèse d'Ingénieur d'Etat, ENP, ALGER, 1993.
- [08] BHALLAMUDI, S. M., et CHAUDHRY, M. H., "Computation of flow in open channel transitions", Jour. of Hydr. Research, vol. 30, No. 1, pp. 77-93, January, 1992.
- [09] CARLIER, M., "hydraulique générale appliquée", Ed. Eyrolles 1980.
- [10] CHASSAING, P., HA MINH, H., "Turbulence, introduction à l'analyse physique et modélisation mathématique", Institut Nationale Polytechnique de Toulouse, France, Ed. 1982.
- [11] CHIRANANONT, B., "Circulation of depth averaged flow in open channel", Asian Institute of Technology, Bangkok, Thailand. (1983).
- [12] EUVARD, D., "Résolution Numérique des équations aux dérivées partielles", Ed. Masson 1990.
- [13] FAVRE, A. et KOVAZNAY, L., "Turbulence en mécanique des fluides", Gautier-Villars, Paris, 1988.
- [14] GARCIA, R., and KAHAWITA, R.A., "Numerical solution of the ST. VENANT equations with the MacCORMACK finite-difference scheme", Inter. Jour. For Num. Meth. In Fluids, vol. 6, pp. 259-274, 1986.

- [15] HANIF CHAUDHRY, M., MUHAMMAD YOUNUS, " A depth-averaged $\overline{K} - \overline{\varepsilon}$ turbulence model for the computation of free-surface flow ", jour. of hydr. Research, vol. 32, No.3, pp.416-418, October 31, 1994.
- [16] HUG, M., " Mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagement et d'énergétique ", Ed. Eyrolles, Paris, 1975.
- [17] KUIPERS, J. et C.B. VREUGDENHIL " Stability Analysis Of Two-Dimensional Depth-Average Model ", jour. of hydr. Engineering, vol. 115, No.9, September, 1989.
- [18] LAI, C., " Computer simulation of two dimensional unsteady flows in estuaries and embayments by the method of characteristics ", Water Resources Investigations, 77-85, U.S. Geological Survey, August, 1977.
- [19] LAROUI, D., BILEK, A., et KAHAWITA, R., " Contribution à l'étude bidimensionnelle de la dispersion de polluants dans les milieux à découvert par la méthode simple modifiée de Pathankar ", Thèse de Magister, ENP, ALGER, 1994.
- [20] LAM, C. K.G., BREMHORST, K., " A Modified Form of the K- ε Model for Predicting Wall Turbulence ", J. Fluids Eng., 103, 457-460, 1981.
- [21] LAUNDER, B.E., REECE, G.J., RODI, W., " Progress in the development of a Reynolds-Stress turbulence closure ", J. fluid Mech., 68, 3, 537-566, 1975.
- [22] LAUNDER, B.E., SHARMA, B.I., " Application of the Energy-Dissipation Model of turbulence to the calculation of Flow-Near a spinning Disc ", Letter Heat Mass Transfert, 1, 131-138, 1974.
- [23] LESIEUR, M. " La turbulence développée ". 1982.
- [24] MARC JAEGER, " simulation numérique d'écoulements turbulents incompressibles et isothermes de fluides newtoniens par éléments finis tridimensionnels ", Thèse Doctorat, université de technologie de compiegne, France, 18 Juin 1990.
- [25] NOUGIER, J. P., " Méthodes de calcul Numérique ", Ed. Masson 1991.
- [26] OBLED, CH., " Analyse Numérique ", Institut National Polytechnique de Grenoble 1989.
- [27] YEN, B.C., " Open-channel flow equations revisited ", Jour. of the Energ. Mech. Div., ASCE, vol. 99, No. EM5, pp. 979-1009, October, 1973.