

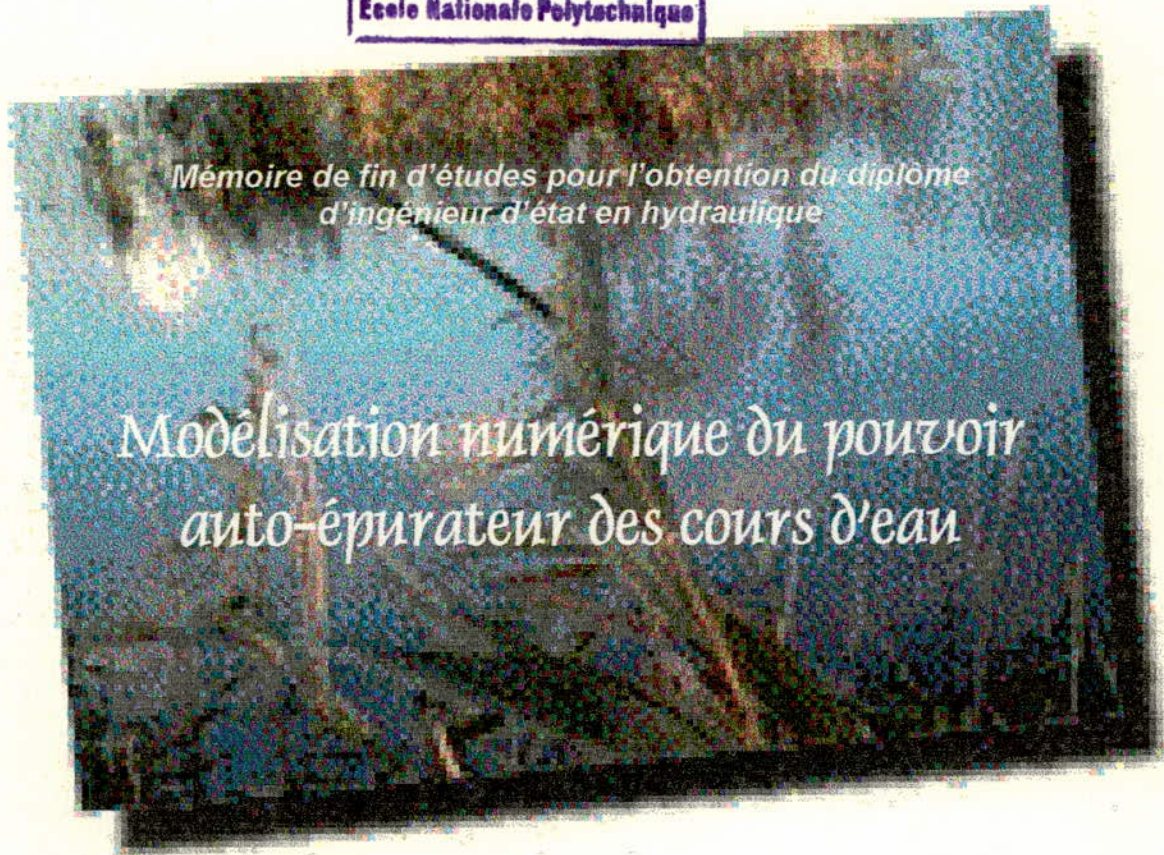
6/99

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



DÉPARTEMENT D'HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية للعلوم والتقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique



ETUDIE ET PRESENTE PAR :

M<sup>r</sup> B. MOKDAD

PROPOSE ET DIRIGE PAR :

M<sup>lle</sup> S. BENMAMAR  
M<sup>r</sup> M. NAKIB

## **Résumé:**

Le but du présent projet est de connaître l'évolution de la pollution par l'intermédiaire de la simulation de deux variables d'état caractérisant cette progression, à savoir la demande biochimique en oxygène, ainsi que celle de l'oxygène dissous. Le système d'équations régissant le problème est déterminé à partir des principes de la conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Le schéma explicite aux différences finies a été introduit pour intégrer les équations décrivant l'état biochimique de l'eau.

## **Abstract:**

The aim of the present project consist on the evolution of the pollution by the simulation of two state parameters being characteristics of this progression as the biochemical demand in oxygen and the dissolve oxygen.

Equations of the system growing the problem is determined from principals of mass movements quantity and the energy conservation.

The explicit diagram (finite difference) have been introduced to integer equations describing the biochemical state of water.

## **ملخص:**

الهدف من هذا البحث هو معرفة تطور التلوث بواسطة تمثيل متغيرين يميزين هذا التطور و هما الطلب البيوشيمي للأكسجين، و كذلك الأكسجين المنحل. جملة المعادلات المتحكمة في هذه الظاهرة تحصل عليها عن طريق تطبيق مبدأ انخفاض المادة و كمية الحركة و كذا الطاقة. البيان التوضيحي للفوارق المنتهية استعملت لمكاملة المعادلات التي تعطي الحالة البيوكيميائية للماء.

## ***Mots clés :***

Demande biochimique en oxygène, oxygène dissous, pollution, qualité de l'eau, résolution numérique, méthode des différences finies, schéma explicite, modèle mathématique, équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'espèce biochimique.



## Remerciements

Nous adressons nos remerciements en tout premier lieu à M<sup>lle</sup> S. Benmamar, pour nous avoir orienté, et suivi tout au long de cette étude, ainsi qu'à M<sup>r</sup> Hakib pour ces précieux conseils.

Nos remerciements vont également à tous (enfin !!! pas tous) ceux qui ont contribué à notre formation au département d'hydraulique, en particulier M<sup>r</sup> S. Bonziada connu pour sa sympathie et sa jovialité, M<sup>r</sup> Semar pour sa manière d'enseigner, M<sup>r</sup> Habbache pour sa simplicité, M<sup>me</sup> Fliokh pour sa gentillesse, ainsi que M<sup>r</sup> Bilok, sans oublier ceux qui ont contribué à notre formation au département de science fondamentale. (M<sup>r</sup> Kacher et M<sup>r</sup> Tegar).

Nous ne voulons pas terminer ces remerciements sans exprimer notre respectueuse gratitude à M<sup>lle</sup> Fasma et M<sup>r</sup> Kader Mousaoui ainsi que M<sup>r</sup> Kamel Redjah pour la confiance qu'ils nous ont témoignée, et dont les précieux encouragements nous ont permis de compléter progressivement cette étude.

Nous remercions vivement l'ensemble des travailleurs de la bibliothèque centrale, en particulier Krime et Salah, sans oublier Toufik du périodique.

Nous tenons également à remercier la mascotte de notre département d'hydraulique, qui est le laborantin Hanin Saïd.

شكرا

## Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à*

- mon père *Zine El Abidine* qui m'a énormément aidé dans mes études, et que sans lui, faut l'avouer, je ne serais pas arrivé à ce niveau d'études. J'espère en tout état de cause lui faire honneur le jour de ma soutenance.
- ma mère *Manana*, auprès de qui j'ai toujours trouvé tendresse et réconfort, seuls sentiments qu'une mère puisse donner à un fils gentil et studieux ????
- ma sœur *Bakina* qui n'arrête pas de prendre du poids (95 kg actuellement).
- ma « deuxième sœur » *Aicha*.
- mon « frère » *Kamel*.
- sans oublier mes ami(e)s : *Salah* (la tante) et *Nassima* (l'oncle ??), *Djamila*, *Amina*, *Salima*, *Monia*, *Samira* et *Rachid*, *Saïdia*, *Hocine* (el touil) et *Schmissa*, *Farid* (le chauffeur), *Z.O* (basculément), les *Mariam* (hidjab, la bouteille de gaz, pharma et indus), *Fouzia* (el mahboula) *Lylia*, *Feriel* (la spank), *Achraf* et *Mira*, *Mourad* (kroukrouma), *Moh* (fertass), *Merouane*, *Massi* et *Hadjib* (les débiles), *Rachdi* (le mongol), *Salim* (le futur enseignant), *Saïd* (le battour), *Fouad* (el kahloucha), les *Nassima*, *Feyrouz*, *Hocine* el houkrouma (civil), *Ghalem* (ghir hak), *Hourine* (dodo !!), *Mourad* (moustache), *Benmiliani* (l'italien), *Kheireddine* (el Morse) *Bouelam* la vérité (el aggoun), *Talamati souad* (win rah el visa ?), *Riad*, sans oublier mon ami *Djilalli*.....

صالح

## TABLE DES MATIERES

### INTRODUCTION GENERALE

#### CHAPITRE I : Etat de connaissance sur le pouvoir auto-épurateur des cours d'eau

|  |    |
|--|----|
| Introduction .....   | 01 |
| I. Effets d'un rejet polluant .....                        | 02 |
| II. Détermination du degré de pollution .....              | 06 |
| III. Différents types de modèles de qualité de l'eau ..... | 09 |
| III.1 Travaux de Masbernat.L et Chaussavoine.C .....       | 10 |
| III.3 Travaux de Ourabah.A .....                           | 23 |
| III.4 Module biologique immergé .....                      | 24 |

#### CHAPITRE II : Equations de base et hypothèses

|   |    |
|---|----|
| Introduction .....  | 25 |
| I. Equations de base hydraulique .....                          | 25 |
| I.1 Equations de continuité .....                               | 26 |
| I.2 Equations de conservation de la quantité de mouvement ..... | 27 |
| I.3 Equations de conservation de l'énergie .....                | 27 |
| I.4 Les lois de comportements .....                             | 28 |
| I.5 Hypothèses .....  | 28 |
| II. Equations de la masse pour l'espèce .....                   | 29 |
| II.1 Equations de l'état biochimique .....                      | 29 |
| II.2 Les lois de comportements .....                            | 30 |
| III. Hypothèses simplificatrices .....                          | 31 |
| III.1 Relation de Gibbs .....                                   | 31 |
| III.2 Hypothèse de Boussinesq .....                             | 32 |
| IV. Equations des eaux de surfaces .....                        | 33 |
| IV.1 Les équations des eaux de surface hydrauliques .....       | 33 |
| IV.2 Les équations des eaux de l'état biochimique .....         | 33 |
| V. Introduction à la turbulence des eaux superficielles .....   | 34 |

### CHAPITRE III : Modèle mathématique

|  |    |
|--|----|
| Introduction .....   | 36 |
| I. Développement d'un modèle .....   | 36 |
| II. Hypothèses simplificatrices .....  | 38 |
| III. Les paramètres affectant l'évolution de l'auto-épuration .....                        | 39 |
| III.1 Evolution de la demande biochimique en oxygène .....                                 | 39 |
| III.2 Evolution de l'oxygène dissous .....   | 39 |
| III.3 Remarques .....  | 40 |
| IV. Cinétiques biochimiques .....  | 41 |
| IV.1 Coefficient de dégradation biochimique ( $K_1$ ) .....                                | 41 |
| IV.2 Coefficient de réaération superficielle ( $K_2$ ) .....                               | 41 |
| IV.3 Coefficient de dispersion longitudinale ( $D_L$ ) .....                               | 41 |
| IV.4 Bilan net de l'O.D .....  | 42 |
| IV.5 Coefficient d'élimination de la D.B.O par sédimentation et adsorption ( $K_3$ ) ..... | 42 |
| IV.6 Coefficient d'ajout de D.B.O ( $La$ ) .....   | 42 |
| V. Modèles mathématiques .....   | 43 |

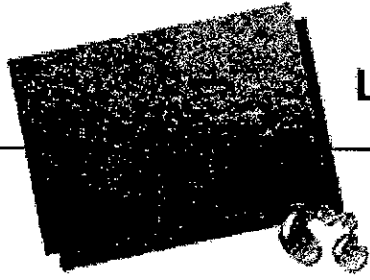
### CHAPITRE IV : Equations des eaux de surfaces

|   |    |
|---|----|
| Introduction .....  | 44 |
| I. Méthodes numériques .....  | 44 |
| I.1 La méthode des différences finies .....                             | 44 |
| I.2 La méthode des éléments finis .....                                 | 45 |
| I.3 La méthode des volumes finis .....                                  | 45 |
| I.4 Choix de la méthode .....   | 45 |
| II. La méthode des différences finies .....                             | 45 |
| II.1 Discrétisation et maillage .....                                   | 46 |
| II.2 Schéma explicite .....   | 47 |
| II.3 Schéma implicite .....   | 48 |
| II.4 Choix du schéma .....  | 49 |
| III. Consistance, convergence et stabilité d'un schéma .....            | 49 |
| III.1 La consistance .....  | 49 |
| III.2 La convergence .....  | 49 |
| III.3 La stabilité .....  | 49 |
| IV. Modélisation numérique de l'état biochimique d'un cours d'eau ..... | 50 |

## CHAPITRE V : Validation du modèle

|  |    |
|--|----|
| Introduction .....                                     | 58 |
| I. Application numérique au cours de l'ILL. ....       | 58 |
| II. Interprétation des résultats .....                 | 83 |
| II.1 Profil de la demande biochimique en oxygène ..... | 83 |
| II.1 Profil de l'oxygène dissous .....                 | 84 |

## CONCLUSION GENERALE



## Le pouvoir auto-épurateur en rivière

### I N T R O D U C T I O N G E N E R A L E

L'eau, au centre de nos préoccupations doit être gérée et protégée au mieux de nos possibilités parce qu'elle occupe une place importante sur l'échelle des valeurs de nos ressources naturelles, et qu'elle constitue un des facteurs de développement de toute société : l'évolution des techniques, ces dernières décennies, a contribué à la mise en place d'actions curatives importantes, mais aussi à la « maltraitance » du réseau hydrographique et des milieux connexes. Il a fallu un certain temps pour que l'on accorde aux cours d'eau et à leurs espaces associés l'attention dont ils ont besoin.

Les responsables ayant pour objectifs d'adopter certaines politiques ayant trait à la qualité de l'eau (coût des équipements destinés à réduire la contamination des eaux naturelles ou d'améliorer la qualité de l'eau reçue dans les foyers), se verront généralement confronté au problème financier, et ainsi voir leur champ d'action limité. Pour pouvoir remédier à ce problème, la modélisation mathématique permet à partir de la simulation numérique de manière optimale la manière d'élaborer des plans.

Nous présenterons en avant – première succinctement un état de connaissance permettant de connaître les quelques travaux effectués auparavant dans cet axe de recherche. Dans une deuxième partie, nous avons juger nécessaire de présenter les équations de bases suivies des hypothèses simplificatrices. Le troisième chapitre sera consacré au modèle mathématique du pouvoir auto – épurateur et aux paramètres qui pondèrent ce processus. Il sera suivi dans le quatrième chapitre par la modélisation numérique qui permet de solutionner le problème en utilisant un algorithme de différences finies explicites. Enfin, la dernière partie sera consacrée à des applications du modèle mathématique.

L'intérêt de cette étude est de connaître l'évolution de la pollution dans un cours d'eau dans le temps et dans l'espace, à travers la simulation de deux paramètres importants ; à savoir la demande biochimique de l'oxygène (D.B.O) et l'oxygène dissous (O.D).



# Chapitre 1

## Etat de connaissance

Qui n'a pas été interloqué d'apprendre que certaines zones de cours d'eau peuvent être classées bonnes alors qu'elles se trouvent à l'aval de points classés médiocres ou mauvais ?

La qualité de l'eau pourrait-elle donc s'améliorer au fil de son écoulement ? Pourtant, le raisonnement qui vient en premier lieu à l'esprit est celui-ci : puisque l'eau coule de l'amont vers l'aval, et que les matières dissoutes polluantes suivent en principe le même cheminement, tout le cours aval d'un secteur possédant un mauvais indice de qualité, devrait posséder en toute logique, au moins le même indice, si ce n'est plus dans le cas d'un apport d'eau polluée par l'intermédiaire d'un affluent.

Atteindre le but qui consiste à offrir une qualité irréprochable de l'eau, n'est pas une mince affaire. C'est même une œuvre de longue-haleine, surtout dans les pays dits développés. En effet cela implique sans nul doute d'énormes investissements ainsi qu'un changement radical des mentalités envers ce précieux liquide qu'est l'eau. Les impacts économiques pourraient inclure non seulement le coût des équipements destinés à réduire la contamination des eaux naturelles ou d'améliorer la qualité de l'eau reçue dans les foyers, mais aussi un développement économique limité ou illimité dans une région ou un bassin. Les responsables des politiques de gestion dont le rôle est de formuler et d'approuver les projets ayant trait à la qualité de l'eau devraient à même d'estimer et d'évaluer, et dans le temps et dans l'espace, les impacts économiques et environnementaux des politiques arrêtées. Pour se faire, il est nécessaire d'avoir recours à la simulation, seule technique fiable qui permette d'appréhender avec le plus de précision tous les paramètres et par voie de conséquence de prédire de manière optimale la manière d'élaborer des plans.

Il n'est pas possible de décrire et de présenter même de manière sommaire, tous les modèles mathématiques, du reste couramment utilisés dans la pratique pour la prévision et l'estimation de la qualité de l'eau dans les rivières.

Nous pourrions nous poser légitimement la question de savoir pourquoi y a-t-il autant de modèles mathématiques ayant trait à la qualité de l'eau ? La réponse est simple : il existe en effet une grande variété de rivières et chacune a ses propres caractéristiques hydrologiques et ses propres problèmes de pollution. Cependant pour une situation donnée, le modèle approprié et les données qui requièrent celui-ci, dépendent naturellement de l'étude envisagée et de son utilité.

L'étude de la qualité de l'eau dans une région située le long d'un fleuve ne demande pas de données détaillées comme par exemple lorsque nous avons à estimer et évaluer le degré de pollution résultant de déchets déversés par une usine industrielle. Mais il n'existe aucun modèle qui puisse s'appliquer à toutes les situations, comprenez par-là à toutes les rivières, fleuves et autres cours d'eau. Il en résulte qu'il appartient aux personnes chargées du contrôle de la qualité de l'eau de dégager dans les meilleurs délais le modèle mathématique le plus approprié pour répondre à leur besoin ; cela impliquerait, dans les limites temporelles et financières d'un développement (calibrage, validation et vitesse d'exécution).

### **I. EFFETS D'UN REJET POLLUANT : la courbe en sac.** [2], [4], [5], [10], [13], [14]

Le rejet des eaux usées domestiques ou industrielles non épurées dans le milieu naturel a pour conséquence de perturber tous les équilibres aquatiques, cette pollution pouvant aller jusqu'à la disparition de toute vie.

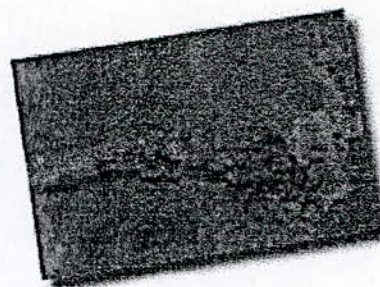
La pollution de l'eau est l'introduction de n'importe quelle substance dans une rivière, un cours d'eau, un lac, ou dans l'océan qui altère les ressources naturelles de cet environnement. Il s'agit parfois d'objets fabriqués par l'homme comme des sacs en plastique, des capsules de limonade, du fil de pêche, des balles ou mêmes des chaussures... Mais le plus souvent, la pollution de l'eau n'est pas visible. Des produits agricoles *fertilisants* ou des produits *chimiques* industriels sont des sources de pollution de l'eau difficiles à voir. Nos activités quotidiennes comme la chasse des *toilettes*, le lavage des aliments, le nettoyage des *voitures* sont aussi une cause de pollution de l'eau.



La pollution a donc de nombreuses origines qui sont reliées au cycle de l'eau. Elle peut provenir directement des activités humaines comme le déversement de déchets ou de substances chimiques dans l'eau et peut s'introduire n'importe où dans ce cycle.



Il suffit par exemple d'imaginer le chemin parcouru par une goutte de pluie depuis le moment où elle atteint le sol jusqu'à ce qu'elle rejoigne une rivière, une nappe souterraine ou la mer. Quand l'eau ruisselle sur le sol, elle peut se charger de polluants provenant par exemple des *routes*, des fermes, des pelouses...



Quand elle s'infiltré dans le sol, elle peut entrer en contact avec des polluants qui s'échapperaient de décharges de déchets, de dépôts illicites d'ordures ou de produits chimiques. Elle peut être contaminée par des **polluants rejetés en rivière** par des installations industrielles. Dans l'atmosphère, la vapeur d'eau se condense dans un air pollué par les rejets des *automobiles*, des cheminées d'*usines* ou d'autres sources de *pollution atmosphérique*. Quand les gouttes tombent vers la terre, toute substance qui est entraînée vers le sol devient un polluant de l'eau.

La **pollution** de l'eau peut être identifiée comme provenant d'un *déversement* localisé mais elle peut être aussi difficile à situer dans l'espace ; on dit alors qu'elle est *diffuse*. Ce peut être, par exemple, le cas pour les rejets de *déchets* solides dans l'eau ou pour les matières *fertilisantes* solubles lessivées dans les sols de cultures.

Si une rivière reçoit en un point de son parcours, un rejet important, nous pouvons schématiser les conséquences sur le système aquatique par la figure suivante :

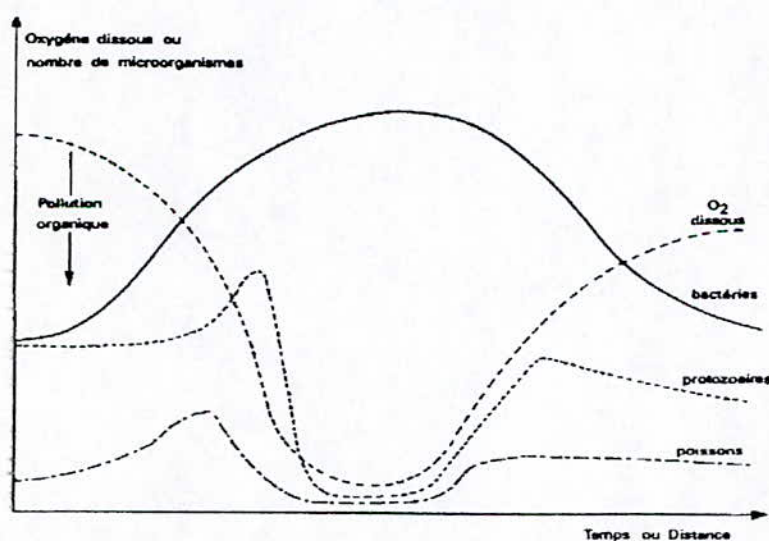
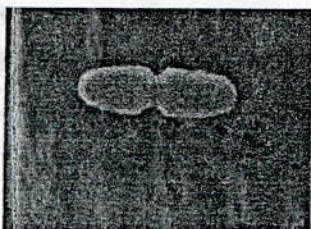


Fig. (I.1) : Evolution de l'*oxygène dissous* et des constituants principaux de la biomasse aquatique après réception d'un rejet polluant.

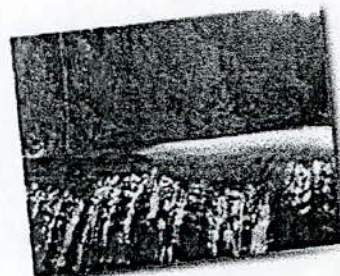
A l'endroit du rejet d'un égout, il y aura beaucoup de matières organiques à consommer et donc beaucoup de micro organismes qui vont respirer la faible quantité d'oxygène présente dans l'eau. La *concentration* de l'oxygène dissous va alors diminuer et les autres organismes présents vont s'en ressentir. Les *poissons*, comme les truites, exigeant beaucoup d'oxygène seront souvent les premiers à subir ce *déficit*.

Leur consommation de matières organiques va s'accompagner d'une respiration de l'oxygène dissous dans l'eau. Cet *oxygène* est présent en très petite quantité, souvent grâce aux remous de l'eau à sa surface qui mélange de l'air à l'eau mais aussi grâce à la *photosynthèse* de végétaux qui sont immergés dans l'eau. L'oxygène ne se *dissout* dans l'eau qu'à raison de quelques *millièmes de gramme (environ 10 au maximum)* par litre d'eau ; s'il y en a plus, ils *forment des bulles* et s'échappent rapidement. On dit que l'eau est *saturée* en oxygène.



Le principe de *l'épuration biologique* ou l'auto-épuration des eaux usées est d'alimenter en permanence une communauté de micro-organismes par des matières organiques polluantes et par de l'oxygène.

Les micro-organismes consomment la matière organique et la transforment au moyen de leur *métabolisme* aérobie en partie en une nouvelle *biomasse* microbienne et en partie en dioxyde de carbone  $CO_2$ , en eau et en matières minérales.



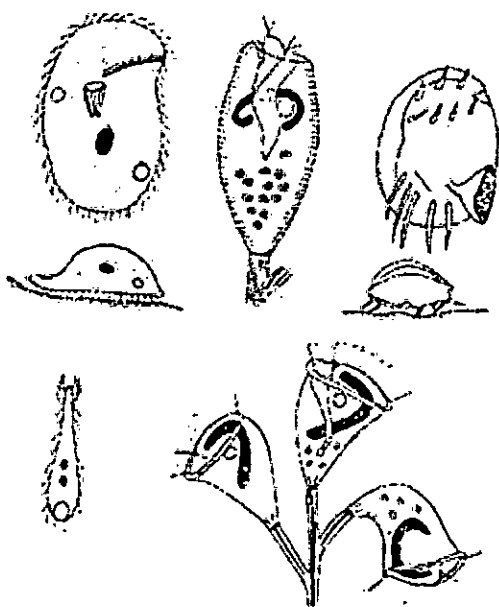
On observe donc au niveau de cette rivière une modification progressive de l'eau qui se traduit d'abord par la création de dépôts de boues où vont se développer des conditions *anaérobies*, où l'oxygène sera complètement absent.

Dans ces boues et sur les supports disponibles ainsi qu'au sein du liquide, des organismes décomposeurs vont se développer en utilisant les matières présentes. On dit que ces organismes sont *hétérotrophes* parce qu'ils ont recours à des matières organiques pour synthétiser leurs propres matières organiques dans le milieu récepteur.

Dans les sédiments, des bactéries *anaérobies* et à leur surface une communauté d'autres organismes peu exigeants en oxygène, comme certains invertébrés par exemple, vont se développer en consommant les déchets accumulés.



Les bactéries *aérobies*, c'est-à-dire dont la vie n'est possible qu'en puisant de l'oxygène dans leur milieu, se développeront sur la surface du fond et des berges et dans l'eau si celle-ci est suffisamment aérée et si l'oxygène dissout y est suffisant (au-dessus d'environ 1 milligramme par litre, le maximum soluble étant d'environ 10 mg/l à 10°C).



Ces organismes, bactéries, algues, champignons, protozoaires se développeront ensemble et seront d'autant plus abondants que l'oxygène sera disponible. A chaque endroit en aval de la pollution, un équilibre entre la consommation d'oxygène par la respiration de l'ensemble des organismes vivants et la ré-oxygénation par le contact avec l'air va s'établir.

Il y aura alors vers l'aval, de moins en moins de matières *biodégradables* dans le

courant de la rivière et donc de moins en moins de consommation d'oxygène par les décomposeurs. Il arrivera finalement un endroit où l'oxygène reviendra à une valeur semblable à celle qu'il avait avant le rejet de pollution. On dira que la rivière s'est auto-épuration.

Le terme d'auto-épuration désigne le processus biologique naturel par lequel les polluants organiques vont se transformer dans le milieu aquatique. Son importance dépend des micro-organismes présents, bactéries, algues, champignons, protozoaires et des possibilités d'oxygénation et de ré-oxygénation, de l'atmosphère et de la lumière.

La « courbe en sac » Fig.(I.1) traduit le fait que la concentration en oxygène dans l'eau dépend de :

- La vitesse de transfert de l'oxygène de l'atmosphère à l'eau.
- L'activité de la photosynthèse liée en grande partie à la présence d'algues.
- La cinétique de la biodégradation.

Le phénomène que nous venons d'évoquer est le processus normal d'auto-épuration qui permet au milieu naturel d'absorber dans une certaine mesure la pollution. Mais il apparaît clairement que les capacités d'auto-épuration normales sont limitées par la capacité de ré-

oxygénation de l'eau. Il existe un seuil à partir duquel l'apport polluant est tel que le cours d'eau n'a plus les possibilités de récupération nécessaires pour retrouver leur état antérieur.

Mais cette biodégradation n'est pas une épuration complète. Il subsistera en effet dans l'eau de nombreux résidus minéraux rejetés par les organismes vivants ainsi que toute une gamme de produits qui ne sont pas ou peu assimilables par les organismes vivants.

On appelle *autotrophes* les organismes capables de synthétiser leurs matières organiques à partir de matières minérales comme les plantes par exemple, en particulier à partir de l'acide carbonique, de l'azote et du phosphore. Dans les milieux aquatiques, ils profitent de la pollution minérale résiduelle en se développant abondamment au sein des eaux, notamment lorsque les conditions de lumière sont favorables à la *photosynthèse*.

Ce phénomène peut conduire à une dégradation de qualité qui se manifeste tout d'abord par une explosion de croissance de végétaux, comme par exemple des algues vertes qui troublent la limpidité des eaux calmes. Le phénomène de photosynthèse provoque aussi des variations quotidiennes importantes de l'oxygène dissous et du pH de l'eau. L'équilibre chimique de l'ammoniac, très toxique pour les poissons peut alors être défavorablement déplacé, et provoquer des mortalités massives.

## II. DETERMINATION DU DEGRE DE POLLUTION. [2], [4], [5], [10], [13], [14]

Pour comprendre comment nous mesurons la pollution d'un utilisateur d'eau, il faut tout d'abord répertorier les substances variées qui sont utilisées à la maison et dont nous nous débarrassons avec de l'eau.

Globalement, le jargon des hygiénistes fait appel à la couleur, on parle d'eaux grises pour toutes les eaux de lavage et d'eaux noires pour les eaux fécales des WC que l'on appelle aussi eaux vannes. Cette différence de couleur traduit le niveau du risque sanitaire lié à la dispersion de chacun des deux types d'eau.

Suivant des catégories de type chimique, les substances rejetées dans l'eau se répartissent en :

- Matières organiques biodégradables (protéines, graisses, hydrates de carbone) qui peuvent servir de nourriture à des micro organismes et que ceux-ci vont transformer, en partie, en composés minéraux simples;
- Sels inorganiques (sodium  $\text{Na}^+$ , potassium  $\text{K}^+$ , Calcium  $\text{Ca}^{++}$ , Magnésium  $\text{Mg}^{++}$ , chlorures  $\text{Cl}^-$ , sulfates  $\text{SO}_4^{2-}$ , phosphates  $\text{PO}_4^{3-}$ , nitrates  $\text{NO}_3^-$ ,...) dont l'origine



- vient des savons et des produits de nettoyage et aussi de la minéralisation initiale de l'eau;
- Produits minéraux éliminés par l'organisme (ammoniaque  $\text{NH}_4^+$ , phosphates  $\text{PO}_4^{3-}$  ...)
- Micro organismes apportés par les matières fécales ;
- Substances dangereuses indésirables car elles sont toxiques et très peu biodégradables dans le milieu aquatique telles que métaux lourds : Mercure Hg, Plomb Pb... ou, hydrocarbures : huiles minérales de vidange, solvants pour peinture
- .....

La première manifestation de la pollution par les eaux usées domestiques est due aux matières organiques, qui provoquent un prélèvement important de l'oxygène dissous par les micro-organismes qui prolifèrent dans les milieux pollués. On va donc mesurer la quantité de pollution domestique en laissant incuber une eau usée dans des conditions standard et mesurer la quantité d'oxygène respirée par les micro-organismes. On appelle cette mesure la Demande Biochimique en Oxygène ; elle est souvent mesurée après 5 jours et l'abréviation est DBO5. On l'exprime en milligrammes d'oxygène par litre ( $\text{mgO}_2/\text{l}$ ).

Cette mesure étant longue et dépendant du bon vouloir des bactéries, un raccourci est de mesurer la quantité d'oxygène nécessaire pour oxyder les matières organiques par voie chimique. La durée de la mesure est de 2 heures. Le résultat s'appelle la Demande Chimique en Oxygène (DCO) et s'exprime aussi en  $\text{mgO}_2/\text{l}$ .

La demande biochimique étant une oxydation par les bactéries toujours moins puissante que par le réactif utilisé pour la DCO, la DBO5 est une fraction de la DCO. De plus, pour les eaux usées domestiques, il y a souvent une bonne corrélation entre les deux mesures.

Les résultats de ces deux mesures sont d'autant plus élevés qu'il y a des matières organiques (c'est-à-dire à base de molécules composées de carbone) oxydables dans l'eau. La DCO et la DBO5 mesurent la charge polluante carbonée de l'eau usée.

Les substances répertoriées dans les catégories chimiques ci-dessus peuvent être présentes sous différentes formes. Par exemple, les sels inorganiques seront en *solution* de même que certaines substances organiques, comme le glucose.

Ils peuvent aussi être agglomérés en *particules*. Parmi les *particules*, certaines, relativement grossières, vont pouvoir *décanner* ou *flotter* et se retrouver sous forme de dépôts au fond d'un flacon ou à la surface. On dit alors qu'elles sont *sédimentables* ou *flottantes*. Si les particules sont intimement liées à l'eau et ne se retrouvent pas au fond après une durée importante, elles se trouvent en suspension colloïdale.

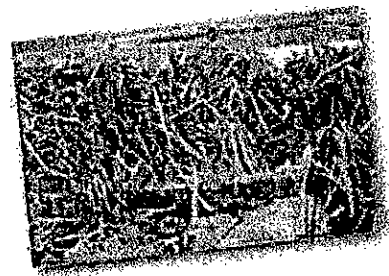
Pour caractériser l'eau usée, on s'intéresse donc également aux matières en suspension. La mesure est réalisée en faisant passer un échantillon de volume connu à travers une membrane dont la taille des pores est plus petite que la majorité des micro-organismes habituellement présents dans les eaux usées (0,47 microns [ $\mu$ .]). Le poids sec de la matière recueillie est appelé Matières En Suspension ou MES et est exprimé en milligramme par litre, mg/l.

Cette mesure est complétée par ce que l'on appelle les Matières Sédimentables (en deux heures), qui est la mesure du volume occupé par le dépôt après une décantation de deux heures et que l'on exprime en millilitre par litre, ml/l.

Ces deux mesures indiqueront la quantité de particules en suspension présentes dans l'eau et leur aptitude à former des volumes de sédiments plus ou moins importants.

Parmi les éléments présents dans l'eau, deux sont très importants parce qu'ils sont indispensables à la synthèse des micro-organismes et des végétaux dans le milieu aquatique. Il s'agit de l'azote N et du phosphore P assimilés généralement par les plantes sous forme de nitrates  $\text{NO}_3^-$  et de phosphates  $\text{PO}_4^{3-}$ .

L'azote est présent dans les matières organiques complexes, par exemple les protéines des déchets alimentaires, ainsi que dans les micro-organismes et dans l'ammoniaque  $\text{NH}_4^+$  issus de nos déchets fécaux. Le phosphore en majeure partie sous forme de phosphates  $\text{PO}_4^{3-}$  provient de nos déchets alimentaires et fécaux ainsi que des produits de nettoyage où ils sont ajoutés pour adoucir la dureté de l'eau contrariant leur efficacité.



### III. DIFFERENTS TYPES DE MODELES DE QUALITE DE L'EAU. [1], [7], [9], [18], [24], [25], [26]

Avant de parler de certains modèles mathématiques qui estiment la qualité de l'eau dans les systèmes rivières, nous distinguerons certains types de modèles ainsi que quelques-unes de leurs caractéristiques, de manière à introduire naturellement le langage ainsi que la terminologie utilisée par ceux-là même qui développent justement des modèles de qualité de l'eau. Du point de vue de l'exploitant, les modèles peuvent être classifiés suivant leur applicabilité aux différents systèmes hydrologiques, les aspects particuliers du système hydrologiques simulés par le modèle, et par la méthode de l'analyse ou de la solution du dit modèle. Ici, nous nous limiterons à l'étude de l'un des modèles de qualité de l'eau qui ont été développés pour les cours d'eau ou les rivières, à savoir la demande biochimique en oxygène et l'*oxygène dissous*.

En fait, il apparaît que les modèles actuels de qualité de l'eau sont pour une large part inspirés par les équations proposées par *Streeter et Phelps* en 1925. Ces équations avaient été proposées par leurs auteurs pour estimer et donc, prédire ou prévoir la demande biochimique en oxygène (*D.B.O*) et les concentrations de l'*oxygène dissous* (l'*oxygène dissous*), ainsi que les déficits résultant de **corps organiques** biodégradables déversés dans les rivières.

Récemment des modèles de qualité de l'eau plus performants donc plus complexe, car à paramètres multiples ont été proposés et utilisés pour prédire avec une grande précision les interactions physiques, chimiques et biologiques des constituants et des organismes présents dans l'eau. Ces modèles très performants par ailleurs, demandent pour être exploités de manière optimale, beaucoup de données et par voie de conséquence un temps de machine conséquent, mais ce n'est rien à côté de la masse d'informations que nous sommes susceptibles de recevoir, informations d'autant plus intéressantes qu'elles sont précises et détaillées, ce qui nous permettra d'accroître notre compréhension de ce qu'est l'eau, donc d'y chercher des politiques appropriées qui répondent au besoin d'avoir une eau en quantité et de qualité.

Les modèles de qualité de l'eau peuvent être utilisés pour évaluer des conditions pour un état stable, pour lesquelles la quantité et la qualité de l'eau restent inchangées avec le temps, ou pour évaluer les conditions dynamiques du changement temporel. Ce dernier modèle permet une évaluation d'un phénomène transitoire telle que l'absence d'onde et la présence accidentelle de certains organismes polluants. Les modèles d'état stables sont en général plus simple et demandent moins de calculs que leurs homologues en dynamique et en transition.

Les hypothèses relatives au mélange de polluants dans les systèmes de rivières imposent un modèle tridimensionnel (c'est à dire un modèle spatial). Bien que les systèmes physiques réels soient tridimensionnels, nous pourrions cependant obtenir des précisions suffisantes dans

beaucoup de systèmes rivières en modélisant uniquement une ou deux dimensions. Les modèles unidimensionnels supposent un mélange complet dans les deux directions latérales et verticales. Les modèles bidimensionnelles supposent quant à eux qu'il y ait soit un mélange latéral, comme dans les estuaires, soit un mélange vertical comme dans les rivières peu profondes ou bien dans les fleuves.

La plupart des modèles déterministes fournissent des estimations des valeurs moyennes des différents constituants, tandis que les modèles probabilistes tiennent compte (de manière explicite) des phénomènes aléatoires comme les processus physiques, biologique ou chimiques.

La validation des modèles stochastiques est assez compliquée et difficile, cela tient au fait qu'il est nécessaire de disposer d'une quantité importante de données afin de pouvoir y faire une comparaison avec la distribution de probabilité des variables plutôt que de se fier à leur prévision et leurs valeurs moyennes.

Les modèles déterministes unidimensionnels sont les plus utilisés dans la pratique comme dans l'aménagement (pour le long et le court terme), le contrôle et la gestion des rivières et des estuaires.

Nous présenterons succinctement dans ce qui suit deux travaux élaborés par des chercheurs pour la caractérisation du pouvoir auto-épurateur en rivière. Les premiers travaux furent élaborés en 1978 par Messieurs *L.Masbernat* et *C.Chaussavoine*, alors que les seconds Travaux furent réalisés en 1981 par Monsieur *P.balland*.

#### 1°/ Travaux de Masbernat.L et Chaussavoine.C en 1978 [24]

En 1978, *Masbernat* et *Chaussavoine* se sont intéressés à la caractérisation de l'évolution de la pollution organique sur une rivière, laquelle dite pollution est apportée par l'intermédiaire d'un affluent.

Ils mettent en valeur la biodégradation et le pouvoir auto-épurateur du milieu par les bilans de demande biochimique en oxygène et de l'oxygène dissous.

Etant donné le cas particulier du sujet traité, les auteurs ont, à partir des équations de conservation, posé certaines hypothèses pour pouvoir simplifier le problème. En premier lieu, les auteurs posèrent toutes les équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution, dans le temps et dans l'espace des grandeurs  $\rho$ ,  $V_i$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $s$ ; à savoir conservation de la masse pour chaque constituant (salinité, polluant...), l'équation de la quantité de mouvement et enfin l'équation de l'énergie.

De là, après avoir posé les équations d'état qui permettent d'associer à chaque particule du milieu en évolution l'équation fondamentale du milieu à l'équilibre, ils considèrent que les variables  $C_\alpha$  caractéristiques du système biochimique étaient sans influence sur l'état thermodynamique. Les eaux de surface sont donc considérées comme un mélange binaire(eau+sel).

Par la suite, ils introduisirent une hypothèse supplémentaire, permettant d'obtenir une écriture plus simple des systèmes d'équations aux dérivées partielles (Hypothèse de Boussinesq).

Cette hypothèse permet d'étudier les champs des différentes grandeurs comme déviations par rapport à un état de référence défini par les équations d'isotropie, de salinité constante et d'immobilité dans le système d'axe  $O_x$ . En combinant les équations de conservation et d'état avec l'hypothèse de Boussinesq, tout en négligeant les effets de gradients de salinité, de compressibilité de viscosité volumique, phénomènes diffusifs, ils obtiennent le système des équations des eaux de surface.

Ayant trouvé dans la quasi-totalité des cas des grandes difficultés de résolution du fait de la non-linéarité des équations et de l'instabilité des solutions, les auteurs ont été conduits à introduire la notion d'équations locales et instantanées pour les équations de transport. Les auteurs ont été alors conduits à utiliser le modèle unidimensionnel de Saint-Venant et aux équations de transport convectif dispersif des grandeurs scalaires. Moyennant des hypothèses complémentaires non restrictives par rapport aux cas traités(condition isotherme, pression atmosphérique constante sur l'espace étudié, frottement nul sur la surface libre), *Masbernat* et *Chaussavoine*, ont abouti aux équations classiques unidimensionnelles de continuité, de bilan de quantité de mouvement et de masse pour le composant  $\alpha$ .

Pour permettre la résolution du système obtenu, ils ont introduit les hypothèses suivantes :

- Le terme de frottement sur le fond modélisé par une expression courante de pertes de charge.
- Le terme de dispersion de quantité de mouvement négligé.
- Les variations de la masse volumique négligées.
- Le terme de dispersion de masse modélisé par l'hypothèse classique de type gradient faisant intervenir un coefficient de dispersion global  $D_L$ .

Comme il a été dit, la biodégradation et le pouvoir auto-épurateur du milieu sont représentés ici par la *demande biochimique en oxygène* et le déficit d'*oxygène dissous*.

En ce qui concerne la *D.B.O.*, de concentration  $L$ , son évolution est affectée par la biodégradation et la sédimentation suivant deux cinétiques du premier ordre de constante  $K_1$  et  $K_3$ , il a été prévu deux types d'apports de *demande biochimique en oxygène* par l'environnement : soit ponctuel simulant la charge de débit  $L_a$ , soit un apport lié à un débit d'apport simulant la charge  $P_q$  d'un affluent de débit linéique  $q$ .

L'évolution du déficit d'*oxygène dissous*, de concentration  $D$ , est affectée par la biodégradation et la réaération naturelle qui a été modélisée suivant une cinétique du premier ordre de constante  $K_2$ . Il a été prévu dans le modèle deux types d'apports, l'un simulant le déficit  $d_q$  d'un affluent de débit linéique  $q$  et l'autre  $P_H$  simule l'apport d'*oxygène dissous* par la photosynthèse.

Les auteurs ont ainsi disposé trois stations le long du bief étudié, l'Agout situé sur le bassin du Tarn, par lesquelles, ils ont pu mesurer la charge organique D.T.O en corrélation avec la *demande biochimique en oxygène* et enfin le déficit en *oxygène dissous*.

Cette rivière présente deux caractéristiques :

- Son régime hydrodynamique est fortement perturbé par la présence de barrages à l'amont qui fournissent l'énergie au moment des pointes de consommation.
- Il subit une assez forte charge organique avec l'apport du THORE, affluent qui draine la région de Mazamet riche en industries de délainage.

Les figures (I.2) et (I.3) montrent l'évolution de la charge organique exprimée en D.T.O et du déficit d'*oxygène dissous* dans trois stations situées sur le bief étudié.

Nous constatons une bonne concordance pour les courbes simulées fournies par le modèle et les points expérimentaux pour l'évolution spatio-temporelle du déficit en *oxygène dissous*. Ce qui n'est éventuellement pas le cas pour la concordance des points simulés et expérimentaux caractérisant l'évolution de la *D.B.O.* Nous remarquons que l'opération de calibration a été un succès à degré moindre pour la *D.B.O.*, car les points expérimentaux ne coïncident pas avec la courbe simulée ; ce qui n'a d'ailleurs pas été spécifié par les auteurs dans leurs dires.



Il faut noter qu'aucune indication ne nous a été fournie pour l'estimation ou le calcul des paramètres tel que  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ...

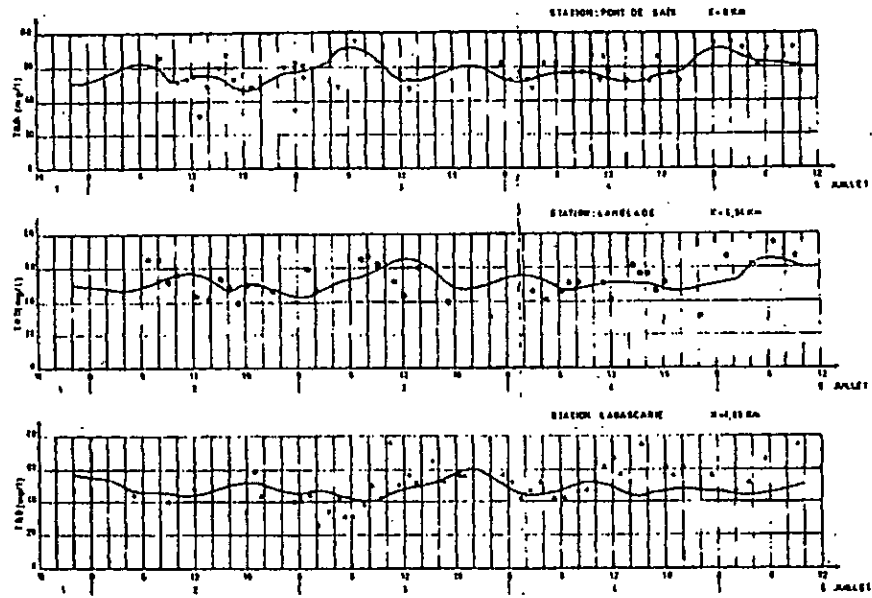


Fig. (I.2) : Evolution de la charge organique exprimée en D.T.O.

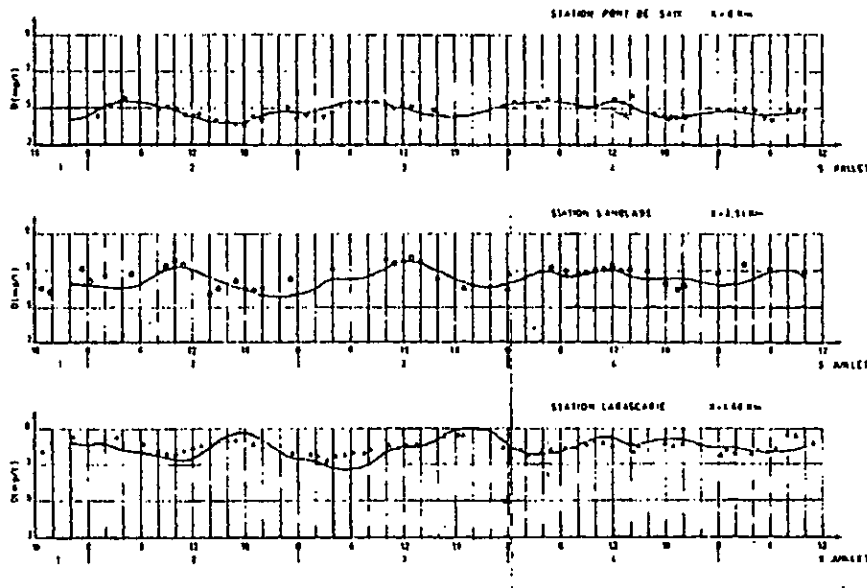


Fig. (I.3) : Evolution du déficit en oxygène dissous.

2°/ Travaux de P. Balland en 1981. [1]

*Balland* s'est intéressé au même problème que *Masbernat* et *Chaussavoine*, soit à la caractérisation de l'évolution de la pollution sur le cours d'eau. L'hypothèse simplificatrice posée par l'auteur consistait à considérer le régime du cours d'eau comme étant permanent. Ce qui revient à vérifier la condition suivante :  $U.k = h$  où  $U$  représente la vitesse en km/jour,  $k$  représente le pas de temps en jour et  $h$  représente le pas d'espace en km .

*Balland* a effectué une série de test sur une rivière à l'Ill. délimitée par Mulhouse (en amont) et Colmar (en aval). Il a disposé sur tout le tronçon, soit sur une longueur de 36 km, 7 stations, [notées Pk suivies d'un indice indiquant leurs positions (Pk : 6,71) ] distancées les unes des autres d'environ 6 km ; ce qui par rapport à l'expérience de *Masbernat* et *Chaussavoine*, constitue un avantage, puisqu'il permet d'avoir des résultats ou mesures en plus et, ainsi de mieux calibrer et valider le modèle.

Ces stations permettent de mesurer entre autres la profondeur, la température de l'air, la température de l'eau, la *D.B.O*, l'*oxygène dissous*.

L'auteur présente dans un premier temps l'ensemble des résultats collectés le long du cours d'eau pour chaque station disposée sur un bief, sous forme de tableau. Voir Figure (I.3). Il y fait correspondre la variation de la température de l'air, de la température l'eau, de l'*oxygène dissous* et de la *demande biochimique en oxygène* en fonction du temps où la mesure a été effectuée. On notera que par souci de présentation, une seule station où les différentes mesures furent effectuées a été représentée. (Fig. ci-dessous)

**Station N° 3 : FERME ST JEAN PK=12.1**

| Date |    |    |    | PROF | TEMP | TEMP | OXY  | OXY | FAC. | DBO  | FAC. | DBO  | MES  | CHLO | CHLO | CHLO |
|------|----|----|----|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| MO   | JO | HE | MI | A    | AIR  | EAU  | TER. | WIN | DIL. | g/m3 | DIL. | g/m3 | g/m3 | µg/l | µg/l | µg/l |
| 09   | 30 | 09 | 35 | .6   | 12.5 | 12.3 | 4.1  |     | 2    | 6    | 5    | 8.6  |      |      |      |      |
| 09   | 30 | 12 | 48 |      | 19   | 13.1 | 4.2  | 5.0 | 2    | 6.2  | 5    | 7.1  |      | 3.2  | 2.5  | 2    |
| 09   | 30 | 17 | 33 |      | 17   | 15.3 | 3.4  | 4   | 2    | 15   | 5    | 14.6 |      |      |      |      |
| 09   | 30 | 21 | 10 |      | 10   | 15.4 | 0    |     | 2    | 11.6 | 5    | 12.1 | 12   |      |      |      |
| 10   | 01 | 01 | 20 |      | 10   | 14   | 1.7  |     | 2    | 10.4 | 5    | 9.6  |      |      |      |      |
| 10   | 01 | 04 | 47 |      | 9    | 13.1 | 1.4  | 3.2 | 2    | 9.2  | 5    | 7.6  |      |      |      |      |
| 10   | 01 | 09 | 50 |      | 15   | 12.6 | 2.2  | 4   | 2    | 7.6  | 5    | 5.1  |      |      |      |      |
| 10   | 01 | 13 | 16 |      | 21   | 13.8 | 2    | 5   | 2    | 6.2  | 5    | 6.1  |      |      |      |      |

Fig. (I.4) : Résultats bruts

On remarquera que ces mesures n'ont pas été collectées par pas de temps successifs, car la vitesse moyenne du cours n'était pas connue. Cette dernière connue en cours de la manipulation, imposa la redéfinition des paramètres hydrodynamiques ; à savoir  $U$ ,  $k$  et  $h$ .

*Balland* apporta une série de correction aux mesures par interpolation linéaire dans le temps (et dans l'espace) aux sept stations par pas de deux heures (et par pas de quatre km) ; et par réajustement des valeurs de l'*oxygène dissous* vu la sous-estimation d'environ 30% occasionnée par le Winkler et enfin par le choix de la *demande biochimique en oxygène* correspondant à la dilution la plus forte.

A l'opposé de *Masbernat* et *Chaussavoine*, *Balland* passe en revue un à un tous les paramètres qui pondèrent le processus en nous communiquant pour chacun d'eux le moyen de les estimer ou de les calculer au mieux. Ce qui nous offre la possibilité de déterminer les valeurs servant à la calibration du modèle pour un autre cours d'eau dont nous disposerions de toutes les données nécessaires pour ce calcul.

Les paramètres pondérant le processus sont les suivants :

- Le coefficient de dispersion longitudinale  $D_L$ .
- Le coefficient de dégradation biochimique  $K_1$ .
- Le coefficient de réaération superficielle  $K_2$ .
- Le coefficient d'élimination de la *demande biochimique en oxygène* par sédimentation et adsorption  $K_3$ .
- Le surcroît de la *demande biochimique en oxygène* sur le tronçon dû au ruissellement, aux apports  $L_a$ .
- Le bilan net de la photosynthèse - respiration du biome et benthique  $D_B$ .

Selon *Balland*, les coefficients permettant de pondérer le processus d'auto-épuration, sont donnés ci-dessous :

a) *Le coefficient de dispersion longitudinale  $D_L$ .*

Le coefficient de dispersion longitudinale  $D_L$  est donné par :

$$D_L = 7,19 \cdot 10^{-4} U^{0,607}$$

b) *Le coefficient de dégradation biochimique  $K_1$ .*

Le coefficient de dégradation biochimique peut être calculé par :

$$K_1 = -0,318 + 0,039 DBO_5$$

où la  $DBO_5$  est déterminée à l'aide d'un appareil de mesure ( $DBO$  Passavant).

c) Le coefficient de réaération superficielle  $K_2$ .

De nombreuses formules existent dans la littérature. D'une manière générale, elles font toutes intervenir  $U$ , la vitesse moyenne et  $H$ , la profondeur. Balland a utilisé la formule suivante :

$$- \text{Churchill} \quad K_2 = \frac{11,6 U^{0,969}}{H^{1,673} K^{0,704}} \quad \text{avec } K \text{ facteur de conversion}$$

$$K = \frac{1}{0,304795}$$

La figure (I.4) permet de vérifier la validité des chiffres trouvés.

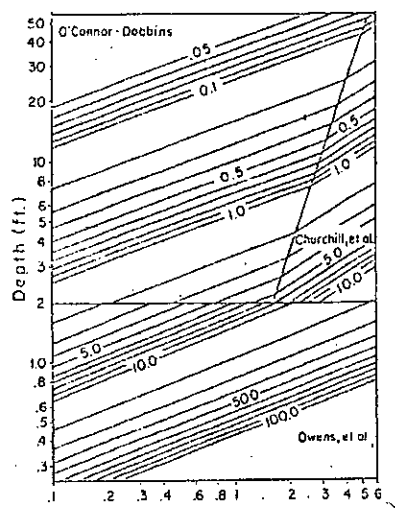


Fig. (I.4) : diagramme de Cova

d) Le coefficient d'élimination de la demande biochimique en oxygène par sédimentation et adsorption  $K_3$ .

C'est un paramètre difficile à évaluer. L'auteur l'a déterminé à partir de mesure de matière en suspension comme suit :

$$Pk \leq 12 \quad K_3 = \frac{MES \text{ en } (1) - MES \text{ en } (2)}{MES \text{ en } (1)} * \frac{1.440}{\text{temps en } (2) - \text{temps en } (1)}$$

$$Pk > 12 \quad K_3 = \frac{MES \text{ en } (3) - MES \text{ en } (7)}{MES \text{ en } (3)} * \frac{1.440}{\text{temps en } (7) - \text{temps en } (3)}$$

L'auteur a considéré le point  $Pk : 12$  car il a remarqué une diminution des MES et une certaine stagnation par la suite.

e) *Le surcroît de demande biochimique en oxygène sur le tronçon par sédimentation et adsorption.* (à compléter...)

$$Pk > 12 \quad L_a = \frac{D.B.O * 10^3}{Q * 86400} * f \quad \begin{array}{l} D.B.O : \text{exprimée en Kg/j} \\ f : \text{facteur de dilution} \end{array}$$

$$Pk \leq 12 \quad L_a = 0$$

L'auteur a considéré le point Pk : 12 car le seul apport provenait de la Thur au Pk : 13,6

f) *Le bilan net de la photosynthèse-respiration du biome et benthique  $D_B$ .*

C'est le paramètre le plus délicat à déterminer car il ne relève ni d'une mesure directe, ni d'une estimation par une formule. Il s'exprime comme le bilan net de la photosynthèse P, de la respiration du biome R et de la respiration des dépôts benthique  $D'_B$ .

$$D_B = R - P + D'_B$$

- $P_m$  Production max. d'oxygène par la photosynthèse a été prise égale à 10 ppm/jour.
- R la respiration du biome a été supposée arbitrairement égale à  $\frac{P_m}{2}$
- P : la production d'oxygène par photosynthèse a été obtenue en appliquant à  $P_m$  une double transformation :

□ fonction du temps :

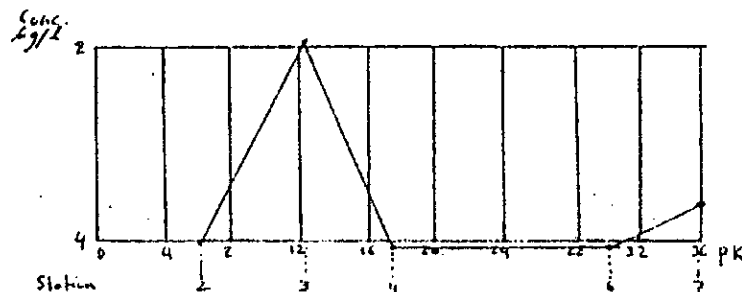
$P = 0$  de 20h à 6h du matin

$P = P_m/4$  à 8h et à 18h

$P = P_m/2$  à 10h et à 16h

$P = P_m$  de 12h à 14h

□ fonction de la distance, pour tenir compte du graphique (I.5)



L'auteur a ainsi appliqué à P et à R le facteur correctif fonction de la distance suivant :

|            |        |
|------------|--------|
| Pk 8 et 16 | K=1,25 |
| Pk 12      | K=2    |
| Pk 36      | K=1,5  |
|            | K=1    |

tous les autres Pk (0,4,20,24,28,32)

Le bilan net de la photosynthèse s'écrit alors :

$$D_B(t,x) = D'_B(x) + K(x) \left[ \frac{P_m}{2} - P(t) \right]$$

Après l'estimation des paramètres, l'auteur a présenté les valeurs calculées dans un tableau par pas de temps et d'espace défini auparavant pour les conditions de régime permanent, ce qui a pour objectif d'obtenir une meilleure stabilité et convergence du programme. Il trace par la suite le graphique correspondant (valeurs simulées et calculées) par pas de temps et par pas d'espace. Les graphiques obtenus offrent ainsi la possibilité de juger visuellement sur la validité du modèle. [voir fig.(I.6) et fig.(I.7)]

**Profil D.B.O :** La figure (I.6) et (I.7) montre l'évolution de la charge organique *demande biochimique en oxygène* dans les 7 stations situées sur le bief étudié. De ces graphes, nous remarquons une adéquation entre les valeurs des points observés et celles des points calculés que nous pouvons considérer comme satisfaisante. Le modèle reproduit bien les tendances (croissance, décroissance). En outre, il y a souvent concordance des valeurs absolues des résultats calculés par rapport aux observations.

**Profil D.B.O :** La figure (I.6) et (I.7) montre l'évolution du déficit d'*oxygène dissous* dans les 7 stations situées sur le bief étudié. L'opération de calibration n'a pas été un succès total, du fait de l'écart, quelque fois assez important observé entre les valeurs simulées et expérimentales. Cet « échec » est dû principalement à la difficulté posée en vue de l'estimation de paramètres, entre autres ceux pondérant le phénomène de la photosynthèse.

Le premier problème rencontré est l'appareillage de mesure sur terrain qui donnait une valeur par défaut pour l'estimation de l'*oxygène dissous*, ce qui constitue déjà un handicap pour la suite du travail. Le deuxième problème et le plus important, est la difficulté à estimer le bilan net de la photosynthèse, car il ne relève ni d'une mesure directe, ni d'une estimation par une formule empirique.

L'opération de calibration ne fut un succès que pour la D.B.O, l'autre variable d'état (*oxygène dissous*) est difficile à estimer vu la complexité à calculer les paramètres intervenant dans le processus à savoir, la photosynthèse.

En conclusion, le modèle mathématique d'auto-épuration en rivière proposé par *Balland* ne peut être totalement validé, à défaut d'apporter d'autres paramètres permettant de calculer aisément l'*oxygène dissous*, vu que l'opération de calibration ne fut un succès que pour la D.B.O.



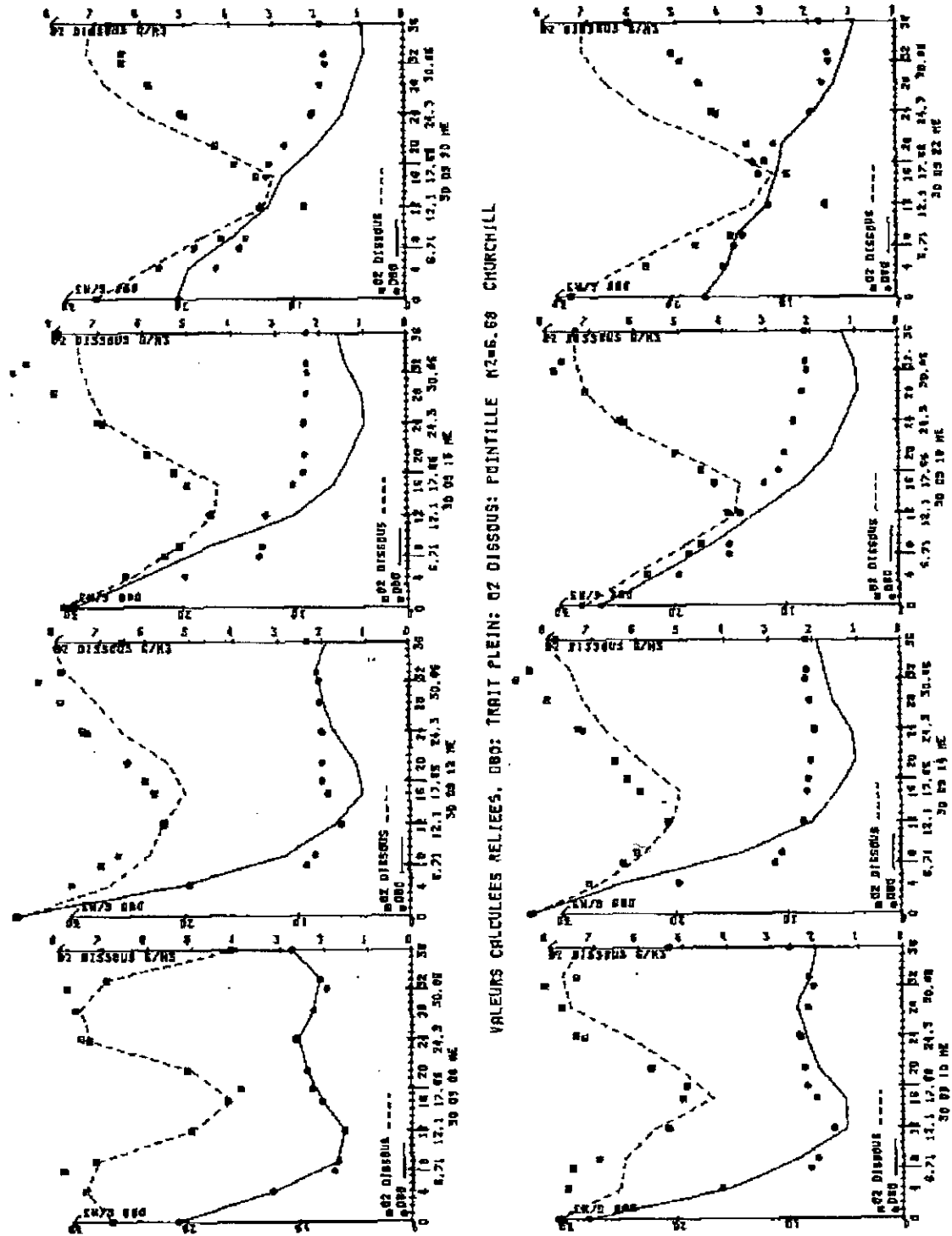


Fig.(1.6) : Profil en long des concentrations observées et calculées pour les 16 pas de temps

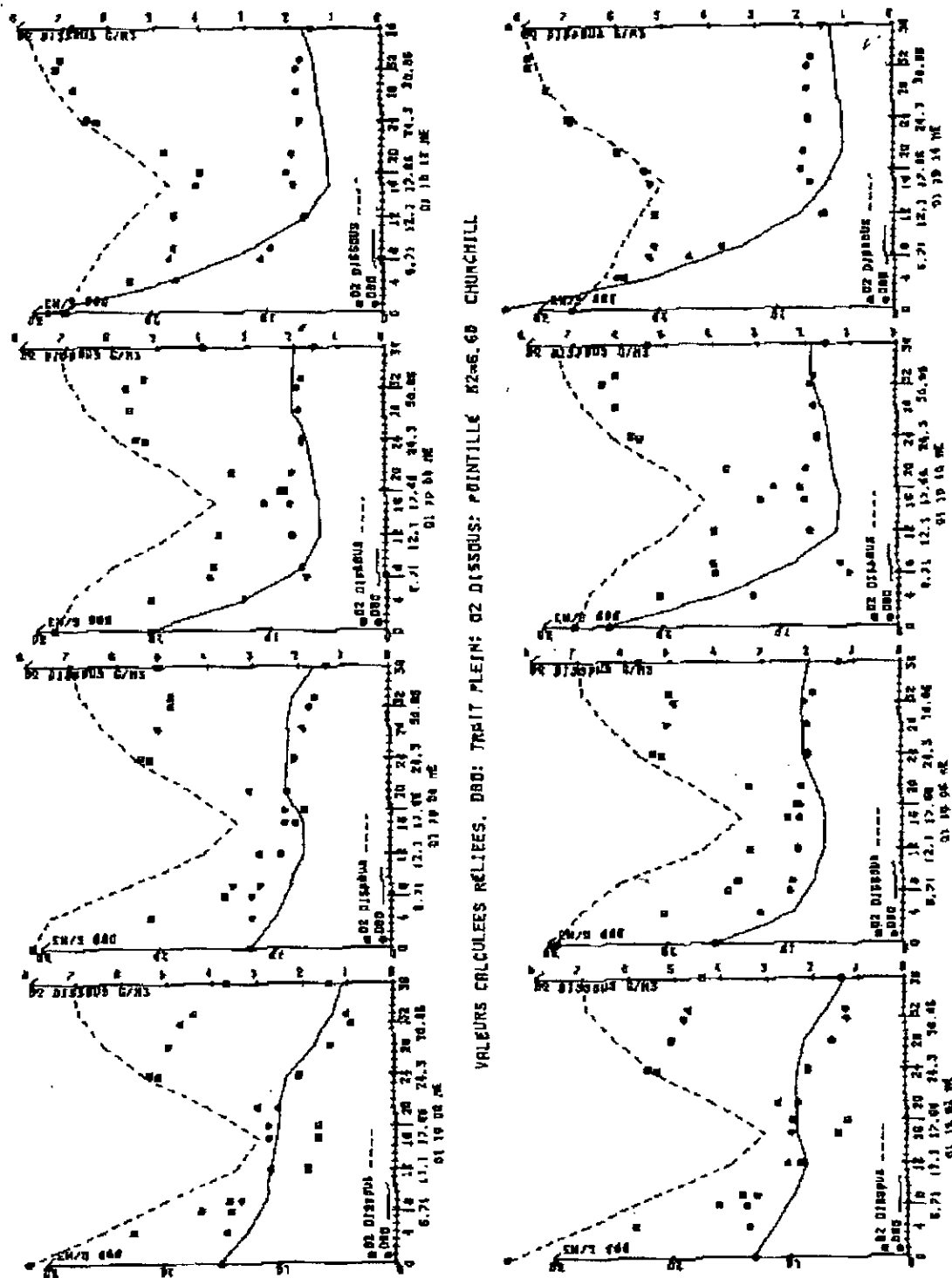


Fig.(1.6) : Profil en long des concentrations observées et calculées pour les 16 pas de temps

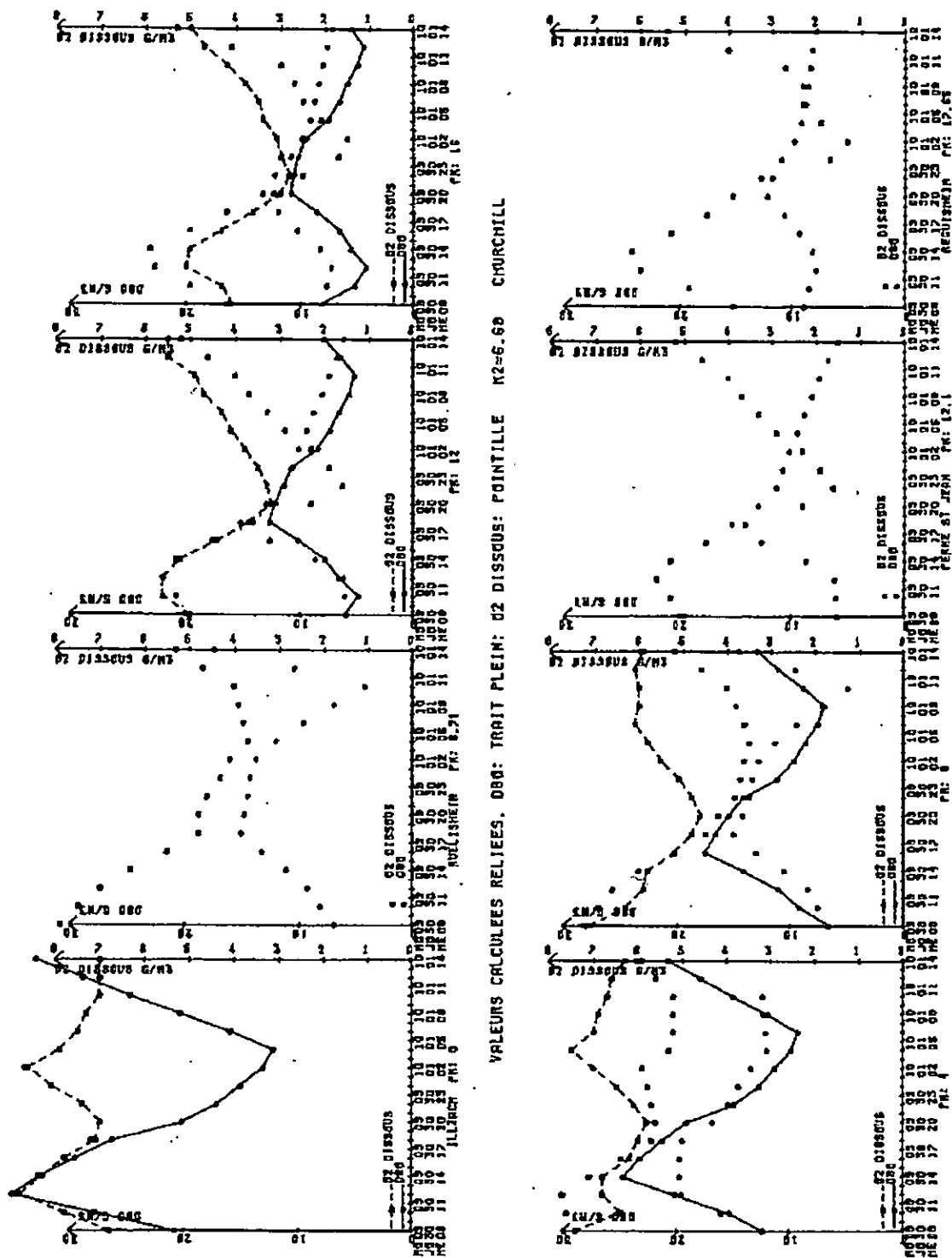


Fig.(1.7) : Profil en travers des concentrations observées et calculées pour les 15 pas d'espace

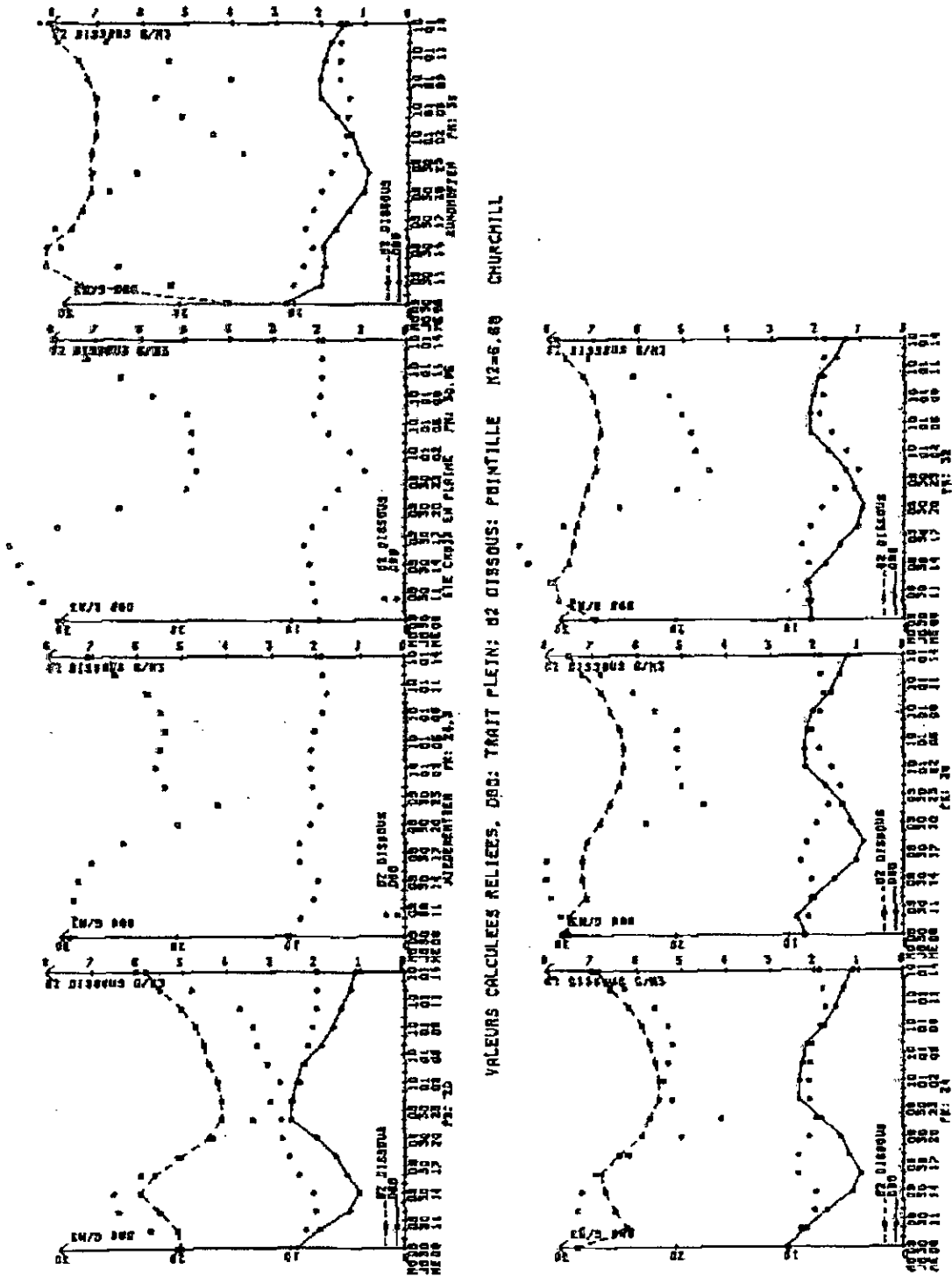


Fig.(1.7) : Profil en travers des concentrations observées et calculées pour les 15 pas d'espace

Mis à part les modèles mathématiques présentés par les 2 chercheurs, d'autres ingénieurs se sont intéressés à la caractérisation d'une pollution le long d'un cours d'eau.

### 3° Travaux de A. Ourabah en 1985 [26]

M<sup>r</sup> *Ourabah* présente dans son étude l'évolution de la charge organique (matières dissoutes polluantes) sur l'Oued *Sebaou* par l'interprétation des analyses effectuées suite à une série de prélèvement d'échantillonnage des eaux de cet oued. Il particularise l'évolution du pouvoir auto-épurateur par la mesure des paramètres suivants :

- Demande biochimique en oxygène DBO<sub>5</sub>
- demande chimique en oxygène DCO
- Matières organiques. Matières-en suspension
- Ions NH<sub>4</sub><sup>+</sup>, NO<sub>2</sub><sup>-</sup>, NO<sub>3</sub><sup>-</sup>
- Conductivité électrique
- Ph
- Détermination de l'oxygène dissous
- Détermination des micro-organismes pathogènes

#### a) *Mesure de la D.B.O<sub>5</sub>*

L'appareil le plus usité est le respiromètre. Son principe consiste à mesurer la quantité de gaz carbonique produite par les bactéries qui consomme de l'oxygène. Cette quantité de gaz carbonique entre en réaction avec l'hydroxyde de potassium, et produit dans le récipient une dépression mesurée directement par le manomètre.

#### b) *Mesure de la D.C.O*

La D.C.O est l'oxydation par un excès de chromate de potassium en milieu acide et porté à ébullition pendant 2 heures durant, des matières oxydables.

#### c) *Mesure de la matière organique.*

Les matières organiques sont absorbées et floculées au moyen de l'hydroxyde d'aluminium, extraites à l'hexane et dosées par gravimétrie.

#### d) *Mesure des matières en suspension à 105°C et 600°C*

L'eau est filtrée, puis le filtrat est séché à 105°C, puis pesé, le poids des matières retenues est déterminé par pesée différentielle. L'auteur agit de même avec une température de 600°C.

### e) Mesure de l'oxygène dissous

L'oxygène dissous est mesuré sur place avec un oxymètre portatif. La lecture est faite directement en mg d'O<sub>2</sub>/l.

Par le biais du tracé de l'évolution de l'oxygène dissous et des constituants principaux de la biomasse aquatique après réception d'un rejet polluant, il peut juger la gravité ainsi que les conséquences sur le système aquatique occasionnés. Son travail est donc surtout expérimental.

Mais il apparaît clairement que les capacités d'auto-épuration normales sont limitées par la capacité de réoxygénation de l'eau. Il existe un seuil à partir duquel l'apport polluant est tel que le cours d'eau n'a plus les possibilités de récupération nécessaires pour retrouver leur état antérieur. C'est pourquoi des « modules biologiques » [11] immergés ont été élaborés par des chercheurs. Ils permettent en l'occurrence d'assister l'auto-épuration des rivières par la biais d'une importante réoxygénation au niveau du lit amont de la rivière.

L'opération a été celle escomptée, puisque les résultats ont été positifs. C'est à dire que les chercheurs ont constaté une importante diminution de la pollution organique et chimique au niveau des rivières dotées de ce système. Il y a de ce fait une interdépendance entre la vitesse de transfert de l'oxygène et le degré de dépollution de la rivière.

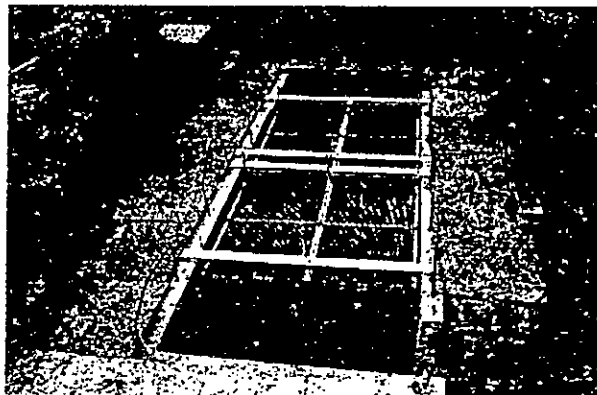


Fig.(1.8) : Module biologique immergé permettant d'assister l'auto-épuration



## Chapitre 2

### Equations de base et Hypothèses

L'étude de la réponse d'un système d'eaux de surface aux échanges et d'énergie nécessite de se donner, d'un point de vue pratique, un certain nombre de grandeurs susceptibles de définir en chaque point et à chaque instant l'état dynamique et thermodynamique du milieu. Ces dernières sont les suivantes :

- La masse volumique  $\rho$ .
- La vitesse de composante  $V_i$ .
- La température absolue  $T$ .
- La fraction massique  $C_\alpha$  (ou concentration) de l'espèce  $\alpha$  dans le mélange.

En général, ces modèles sont fondés sur la transformation entre « entrée » et « sortie », ce qui revient à utiliser les équations fondamentales de la mécanique des fluides, notamment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

#### I. EQUATIONS DE BASE HYDRAULIQUE [1], [3], [6], [[9], [16], [19], [21], [24], [23]

On fait souvent appel, pour résoudre un problème hydraulique aux principes de la conservation dans des volumes finis, de la masse, des quantités de mouvement et de l'énergie.

Pour établir les équations qui régissent le phénomène d'auto-épuration, nous considérons un volume de contrôle élémentaire fixé dans le champ de l'écoulement et ayant la forme d'un prisme de dimension  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .

Les arêtes de cet élément sont orientées de manière telle que la côte  $\Delta x$  soit parallèle à l'axe  $x$  et la côte  $\Delta y$  soit parallèle à l'axe  $y$ . La troisième face a pour dimension  $\Delta z$  et se trouve parallèle à l'axe  $z$ .

Appliquons maintenant les principes cités précédemment, à savoir l'équation de continuité ainsi que les équations dynamiques.

I.1 Equations de continuité

L'équation de continuité est obtenue à partir de la conservation de la masse. Cette dernière stipule que la variation de la masse fluide durant un intervalle de temps  $\Delta t$ , contenue dans un volume élémentaire  $\Delta V$  est égale à la différence entre les masses de fluides entrantes et sortantes.

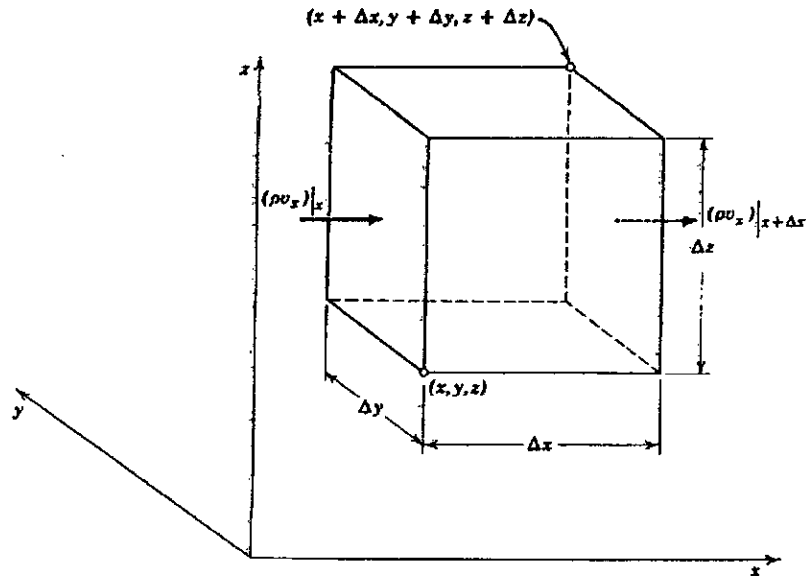


Fig. (II.1) : Equation de continuité

Nous commençons par prendre en considération les deux faces perpendiculaires à l'axe des (x). Le flux de masse passant par la face (x) est  $(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z$ , alors que le flux de masse passant par la face (x+Δx) est  $(\rho v_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . De manière similaire, nous pouvons déterminer les flux de masse passant par les autres faces (y) et (z).

La masse stockée initialement dans l'élément de volume est  $(\Delta x \Delta y \Delta z) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$ .

Ainsi la masse contenue dans l'élément prismatique pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  est égale à l'accroissement de la masse, correspondant au mouvement du fluide à travers les trois directions :

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z [(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z}]$$

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta x \Delta y \Delta z \left( -\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x \right) + \Delta x \Delta y \Delta z \left( -\frac{\partial}{\partial y} \rho v_y \right) + \Delta x \Delta y \Delta z \left( -\frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right)$$

En divisant l'équation précédente par  $(\Delta x \Delta y \Delta z)$ , et en la faisant tendre vers zéro, nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right)$$

ou encore

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{V}} \begin{cases} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

### I.2 Equations de conservation de la quantité de mouvement

Le théorème de la quantité de mouvement exprime que la variation de la quantité de mouvement, durant un intervalle de temps  $\Delta t$ , dans un volume élémentaire, est égale à l'ensemble des forces extérieures au volume, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) + \rho g \delta_{ij} \quad (\text{II.2})$$

où  $\sigma_{ij}$  désigne le tenseur de contraintes visqueuses.

### I.3 Equations de conservation de l'énergie

L'énergie mécanique emmagasinée dans un corps est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du corps.

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho e V_j) = - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - P \frac{\partial V_j}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \rho r \quad (\text{II.3})$$

où  $q_j$  : flux diffusif d'énergie (conduction de la chaleur).

$r$  : taux d'apport volumique d'énergie (rayonnement).

#### I.4 Les lois de comportement

Les lois de comportement qui permettent de régir ces deux équations (II.2 à II.3) sont formulées de telle manière à vérifier certaines hypothèses .

□ Pour les contraintes visqueuses  $\sigma_{ij}$

Si nous négligeons les effets de viscosité volumique (2<sup>ème</sup> viscosité), les contraintes visqueuses s'expriment par la loi de Newton :

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

avec  $\mu$  viscosité-dynamique.

□ Pour le flux diffusifs d'énergie  $q_j$

En négligeant les phénomènes diffusifs associés, nous retiendrons pour exprimer  $q_j$ , la loi de Fourier :

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

avec  $\lambda$  coefficient de conduction.

#### I.5 Hypothèses

Les principales hypothèses nous permettant de simplifier le problème sont les suivantes :

- La vitesse d'écoulement  $\vec{V}$  a pour composante  $\bar{u}$  suivant l'axe x étant donné que l'écoulement est unidimensionnel.
- (variation de la masse volumique négligée  $\rho$  cste).

Moyennant ces hypothèses, les équations précédentes peuvent être écrite sous la forme suivante.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(u) + \rho \frac{\partial}{\partial x}(u^2) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \rho g$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x}(e u) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - P \frac{\partial u}{\partial x} + \left[ 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \tau$$

ou encore après simplification :

### équations hydrauliques

#### Bilan global de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

#### Bilan de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(u) + \rho \frac{\partial}{\partial x}(u^2) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho g$$

#### Bilan thermique :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \rho u \frac{\partial}{\partial x}(e) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - P \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \tau$$

## II. EQUATIONS DE LA MASSE POUR L'ESPECE [1], [24]

### II.1 Equation de l'état biochimique

Pour les fractions massiques  $C_\alpha$  du système biochimique :

$$\frac{\partial \rho C_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho C_\alpha V_j) = -\frac{\partial J_j^{(\alpha)}}{\partial x_j} + \rho \tau_\alpha \quad (\text{II.4})$$

où  $J_j^{(\alpha)}$  : flux diffusif du constituant  $\alpha$ .

$\tau_\alpha$  : taux de production ou de disparition de l'espèce  $\alpha$  lié aux réactions chimiques ou biochimiques. Ce terme représente la contribution des cinétiques biochimiques du milieu exprimant des lois de croissance, de respiration, de mortalité, d'excrétion...

En ce qui concerne les variables  $C_\alpha$  représentatives de l'état biochimique du milieu, il s'agit des concentrations en biomasses bactériennes ou algales ou de concentrations en substrats, provenant soit d'apports minéraux ou organiques dissous.

La loi de comportement qui permet de régir l'équation (II.4) est formulée comme suit :

## I.2 Loi de comportements

### □ Pour les flux diffusifs de masse

Ici, nous négligeons les phénomènes croisés de thermodiffusion et barodiffusion et, nous exprimons le flux  $J_j^{(\alpha)}$  par la loi de Fick :

$$J_j^{(\alpha)} = -\rho D_\alpha \frac{\partial C_\alpha}{\partial x_i}$$

avec  $D_\alpha$  coefficient de diffusion.

Après simplification, l'équation (II.4) peut s'écrire comme suit :

### *équation de l'état biochimique*

#### Bilan des variables d'écosystème :

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C_\alpha u) = D_\alpha \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x^2} + \tau_\alpha$$

## III. HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES [24]

Etant donné le cas particulier du sujet traité, la morphologie de la rivière, les niveaux de turbulence généralement rencontrés en rivière, nous sommes contraints à émettre certaines hypothèses nous permettant de simplifier le problème. Les principales hypothèses sont les suivantes :

- La relation de Gibbs.
- L'hypothèse de Boussinesq.

La relation de Gibbs nous permet d'établir la non-influence des variables  $C_\alpha$  sur l'état thermodynamique. L'hypothèse de Boussinesq, quant à elle permet un changement de repère qui traduit l'isentropie et l'immobilité dans le système.

### III.1 Relation de Gibbs

L'hypothèse classique de l'état local permet d'associer à chaque particule du milieu en évolution l'équation fondamentale du milieu à l'équilibre. De manière générale cette équation peut s'écrire :

$$e = e(\eta, \rho, C_1 \dots C_N) \quad (\text{II.5})$$

où  $\eta$  : entropie spécifique.

$e$  : bilan d'énergie interne

Les variables intensives  $T, \rho, \mu_\alpha$  (où  $\mu_\alpha$  désigne le potentiel chimique de l'espèce  $\alpha$ ) sont définies par :

$$\begin{aligned} T &= \left( \frac{\partial e}{\partial \eta} \right)_{\rho, C_\alpha} = T(\eta, \rho, C_1 \dots C_N) \\ P &= - \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{\eta, C_\alpha} = P(\eta, \rho, C_1 \dots C_N) \\ \mu_\alpha &= \left( \frac{\partial e}{\partial C_\alpha} \right)_{\eta, \rho, C_{\beta \neq \alpha}} = \mu_\alpha(\eta, \rho, C_1 \dots C_N) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Le système d'équations (II.6) constitue le système d'équation d'état. Dans la suite de notre étude, nous considérerons que les variables  $C_\alpha$  sont sans influence sur l'état thermodynamique du système. Les eaux de surface ne seront plus considérées comme un mélange binaire (eau + caractéristiques du système biochimique), mais plutôt comme un mélange homogène constitué d'eau uniquement. Le système d'équation (II.6) s'écrira donc en prenant comme variables thermodynamiques  $T, \rho$

$$\begin{aligned} e &= e(T, \rho) \text{ ou } \eta = \eta(T, \rho) \\ P &= P(T, \rho) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Notons que les potentiels chimiques liés à chaque constituant sont définis par différence avec le potentiel du solvant (l'eau).

Il faut noter que l'équation fondamentale s'écrit sous forme différentielle :

$$\frac{de}{dt} = T \frac{d\eta}{dt} - \frac{P}{\rho} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \quad \text{Relation de Gibbs}$$

où  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  désigne la dérivée particulaire.

### III.2 L'hypothèse de Boussinesq

Pour avoir une écriture plus simple des équations précédentes (II.1) à (II.4), nous introduirons une nouvelle hypothèse qui nous permettra d'étudier les champs des différentes grandeurs comme déviation par rapport à un état de référence. L'état de référence est défini par les équations suivantes qui traduisent l'isentropie et l'immobilité dans le système d'axe  $O_{x_i}$

$$\begin{aligned} V_{i0} &= 0 \\ \frac{dP_0}{dx_3} &= \rho_0 g \\ \frac{dT_0}{dx_3} &= \frac{\beta_{0T} g T_0}{C_{ps}} \\ \rho_0 &= \rho_0(P_0, T_0) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

en négligeant les effets de compressibilités, l'équation d'état linéarisé autour de l'état de référence s'écrira :

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \beta_{0T} (T - T_0) \quad (\text{II.9})$$

## IV. EQUATIONS DES EAUX DE SURFACES [24]

### IV.1 Les équations des eaux de surface hydrauliques

En tenant compte de l'hypothèse de Boussinesq et des équations (II.1) à (II.7) auxquelles nous associons la relation de Gibbs, nous obtenons le système des équations des eaux de surface

Bilan global de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.10})$$



Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u^2) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_I}{\partial x} + 2\mu \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g [\beta_{OT} (T - T_0)] \quad (\text{II.11})$$

$$P_I = P - P_0$$

$$\text{avec } \beta_{OT} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_0$$

Bilan thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{C_{ps}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{C_{ps}} \varphi + \frac{1}{C_{ps}} r \quad (\text{II.12})$$

$$\text{avec } \varphi = 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \text{ dissipation thermique.}$$

## IV.2 Les équations des eaux de surface de l'état biochimique

Bilan des variables d'écosystème :

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} + u \frac{\partial C_a}{\partial x} = D_a \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} + \tau_a \quad (\text{II.13})$$

## V. INTRODUCTION A LA TURBULENCE DES EAUX SUPERFICIELLES [24]

Le caractère aléatoire des fluctuations des différentes grandeurs physiques et mécanique amène à prendre en compte les différents moments statistiques de ces grandeurs. Grâce à la décomposition en valeur moyenne et fluctuante de chaque grandeurs instantanées, nous pourrions déduire des équations locales et instantanées des équations de transport de ces moments, ce qui nous permettra par la suite d'atténuer les difficultés de résolution engendrées par la non-linéarité des équations.

*Equations locales moyennes.*

Chaque grandeur G est décomposée en valeur moyenne et instantanée

$$G(x, t) = \bar{G}(x) + G'(x, t) \quad (\text{II.14})$$

avec

$$\bar{G}(x) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_t^{t+\theta} G(x, t') dt' \quad (\text{II.15})$$

et  $G'(x,t) = G(x,t) - \bar{G}(x,t)$  représente la fluctuation associée à moyenne temporelle nulle ( $\bar{G}' = 0$ ).

Ainsi l'ensemble des variations introduites pour décrire les échanges dans les eaux superficielles s'écrira :

$$\begin{aligned} V_i &= \bar{V}_i + V'_i \\ P_i &= \bar{P}_i + P'_i \\ T &= \bar{T} + T' \\ C_\alpha &= \bar{C}_\alpha + C'_\alpha \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

En moyennant suivant l'équation (II.16) les équations (II.10) à (II.13), nous obtenons le système d'équation suivant. Pour des raisons de commodités, nous négligerons dans ce qui suit la turbulence généralement rencontrées en rivière ( $G' = 0$ ). Ce qui nous permettra d'avoir une première approximation et une première approche du phénomène.

Bilan global de la masse :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x} + 2\mu \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + g [\beta_{0T} (\bar{T} - T_0)] \quad (\text{II.18})$$

Bilan thermique :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \lambda \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{C_{ps}} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{1}{C_{ps}} \bar{\varphi} + \frac{1}{C_{ps}} \bar{r} \quad (\text{II.19})$$

$$\text{avec } \bar{\varphi} = 2\nu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2$$

Bilan des variables d'écosystème :

$$\frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial x} = D_\alpha \frac{\partial^2 \bar{C}_\alpha}{\partial x^2} + \bar{r}_\alpha \quad (\text{II.20})$$

Les équations (II.17) à (II.20) constituent les équations de transfert des grandeurs moyennes.

### Conclusion

Les équations des eaux de surface sont régies par deux types d'équations. le premier type traduisant le bilan global de la masse, de quantité de mouvement et thermique, alors que le second type traduit le bilan des variables d'écosystèmes.

#### équations des eaux de surface

##### Bilan global de la masse :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$$

##### Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x} + 2\mu \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + g [\beta_{or} (\bar{T} - T_0)]$$

##### Bilan thermique :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \lambda \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{C_{ps}} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{2}{C_{ps}} \nu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{C_{ps}} \bar{r}$$

##### Bilan des variables d'écosystème :

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C_\alpha u) = D_\alpha \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x^2} + \tau_\alpha$$

## Chapitre 3

### Modèle mathématique

Les modèles mathématiques en hydraulique sont des outils couramment employés par les ingénieurs. Un modèle mathématique est par définition, une conceptualisation de la réalité, c'est à dire une certaine image de la réalité que l'ingénieur essaie de reproduire à l'aide d'outils mathématiques décrivant le phénomène.

#### I. DEVELOPPEMENT D'UN MODELE [9], [18], [25]

Un modèle de qualité de l'eau n'est autre qu'un ensemble d'expressions ou de formules mathématiques décrivant l'ensemble des processus physiques, biologiques et chimiques qui sont censés se produire dans l'eau.

L'étude des mécanismes affectant les différents processus biologiques nécessite la prise en considération de trois phénomènes essentiels : les entrées provenant hors du système considéré, le transport des constituants à travers ou dans le système, et enfin les réactions du système qui ont pour effet selon les cas d'augmenter ou de diminuer la concentration ou la masse des constituants.

La principale source de pollution des rivières et autres fleuves est parfois naturelle mais souvent c'est l'homme qui en est la cause : décharge municipale, agriculture et industries. Nous connaissons les caractéristiques physiques et biochimiques des sources de pollution car nous savons les mesurer.

Les variations de l'eau en surface ont plus d'effet sur l'eau des rivières que dans celles des estuaires pour ce qui est de la caractérisation de l'auto-épuration. On connaît mieux les phénomènes de transport dans les rivières et les estuaires que dans les lacs et les océans. Il en résulte une plus grande précision des modèles d'auto-épuration en rivière que ceux des lacs et océans.

On comprend et on connaît mieux les réactions chimiques, physiques et biologiques des constituants dans des systèmes type rivière que dans des lacs. Ceci est particulièrement vrai pour les dégâts occasionnés par la baisse de l'oxygène biochimique et de l'oxygène dissous dans les rivières, ainsi que des bactéries et des différents corps organiques.

Comme il a été précédemment, la biodégradation et le pouvoir autoépurateur du milieu sont représentées ici par la *D.B.O* et le déficit d'oxygène dissous.

Rappelons pour cela avant d'élaborer le modèle mathématique, les équations de bases des eaux de surface établies au chapitre II.

*équations des eaux de surface*

*Bilan global de la masse :*

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$$

*Bilan de quantité de mouvement :*

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x} + 2\mu \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + g [\beta_{or} (\bar{T} - T_0)]$$

*Bilan thermique :*

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \lambda \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{C_{ps}} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{2}{C_{ps}} \nu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{C_{ps}} \bar{F}$$

*Bilan des variables d'écosystème :*

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C_\alpha u) = D_\alpha \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x^2} + \tau_\alpha$$

Pour résoudre ce système d'équations, il y a lieu de faire des hypothèses supplémentaires qui seront détaillées dans ce qui suit.

## II. HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES [1], [24]

Moyennant des hypothèses complémentaires non restrictives par rapport au cas traité :

- Le terme de frottement sur le fond modélisé par une expression courante de pertes de charge.
- Le terme de dispersion de masse modélisé par l'hypothèse de type gradient faisant intervenir un coefficient de dispersion global  $D_L$ .
- Les lois d'évolution prises suivant des cinétiques du premier ordre.
- Frottement nul sur la surface libre.
- Pression atmosphérique constante sur l'espace étudié.
- Conditions isothermes.
- Section constante.
- Le niveau de la surface libre est considéré constant.

nous aboutissons au système suivant :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2) = 2\mu \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\partial \bar{C}_a}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} = D_a \frac{\partial^2 \bar{C}_a}{\partial x^2} + \bar{r}_a \quad (\text{III.3})$$

Nous examinerons maintenant quelques aspects spécifiques à la modélisation d'écosystèmes, en apportant des précisions sur le choix des variables biochimiques qui pourraient nous intéresser lors de la simulation des paramètres, à savoir la *D.B.O* et l'*oxygène dissous*.

Le modèle mathématique d'auto-épuration en rivière est inspiré de l'équation de l'état biochimique de l'espèce (II.20). Nous avons considéré deux variables importantes, dans le phénomène d'auto-épuration, à simuler, à savoir ; la demande biologique en oxygène et l'*oxygène dissous*. Toutes ces variables sont exprimées en termes de concentration.

L'équation de l'état biochimique de l'espèce est donnée par :

$$\frac{\partial \bar{C}_a}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_a}{\partial x} = D_a \frac{\partial^2 \bar{C}_a}{\partial x^2} + \bar{r}_a$$

### III. LES PARAMETRES AFFECTANT L'EVOLUTION DE L'AUTOEPURATION

[1]

#### III.1 Evolution de la D.B.O

Pour la D.B.O, de concentration  $L$ , son évolution est affectée par la biodégradation et la sédimentation suivant deux cinétiques de premier ordre  $\tau_L$  de constantes  $K_1$  et  $K_3$ . Il a été prévu un type d'apport par l'environnement ponctuel sans dilution simulant un rejet de débit  $L_a$

Le système d'équation s'écrit comme suit pour la concentration D.B.O

$$\frac{\partial L}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - u \frac{\partial L}{\partial x} - (K_1 + K_3)L + L_a \quad (\text{III.4})$$

où

$L$  : concentration de D.B.O (variable d'état à simuler)

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} D_L \text{ coefficient de dispersion longitudinale.} \\ u \text{ vitesse moyenne du courant.} \\ K_1 \text{ coefficient de dégradation biochimique de la D.B.O.} \\ K_3 \text{ coefficient d'élimination par sédimentation et adsorption D.B.O.} \\ L_a \text{ coefficient d'ajout de D.B.O le long du tronçon par ruissellement.} \end{array} \right.$$

(I) sont les processus qui peuvent influencer la variation de la D.B.O

#### III.2 Evolution de l'O.D

En ce qui concerne l'oxygène dissous, de concentration  $D$ , son évolution est affectée par la biodégradation et la réaération suivant 1 cinétique de premier ordre  $\tau_D$  de constantes  $K_2$ . Il a été prévu un type d'apport par l'environnement d'oxygène dissous par photosynthèse.

Le système d'équation s'écrit comme suit pour la concentration en oxygène dissous

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - K_1 L - K_2 C - D_B \quad (\text{III.5})$$

où

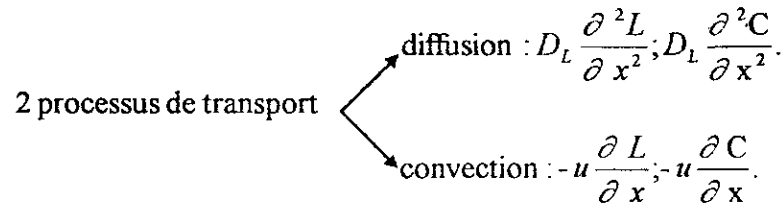
$$(II) \left\{ \begin{array}{l} D_L \text{ coefficient de dispersion longitudinale.} \\ u \text{ vitesse moyenne du courant.} \\ K_1 \text{ coefficient de dégradation biochimique de la D.B.O.} \\ K_2 \text{ coefficient de réaération superficielle.} \\ D_B \text{ bilan net d'O.D autres que dégradation D.B.O et réaération superficielle.} \end{array} \right.$$

(II) sont les processus qui influencent la variation de l'oxygène dissous.

### III.3 Remarques

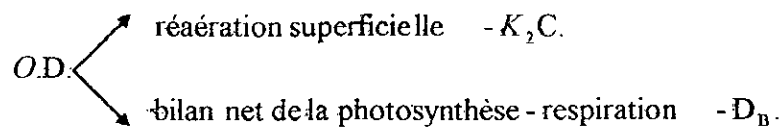
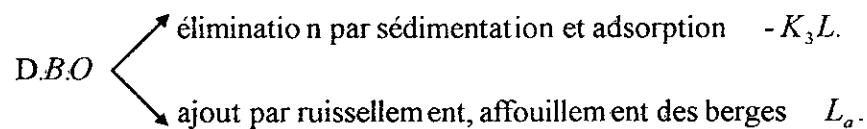
Dans ces systèmes (I) et (II), nous remarquerons qu'il y a cinq processus influençant la variation de la D.B.O et l'oxygène dissous : trois processus communs aux deux phénomènes et, deux processus spécifiques à chacun d'eux.

- processus communs :



1 processus de dégradation D.B.O -  $K_1 L$  qui consomme de l'O.D.

- processus spécifique :



Une autre remarque, toute aussi importante, est que l'équation de la D.B.O est indépendante de celle de l'oxygène dissous, alors que l'inverse n'est pas vrai. En effet, le



coefficient de dégradation biochimique de la *D.B.O* ( $K_1$ ) intervient dans l'équation de l'*oxygène dissous*, alors qu'aucun coefficient en *oxygène dissous* n'intervient dans l'équation de la *D.B.O*.

#### IV. CINÉTIQUES BIOCHIMIQUES [1]

Pour l'étude des variables d'état affectant l'évolution du pouvoir autoépurateur, nous avons jugé nécessaire d'explicitier certaines cinétiques biochimiques se référant à la progression de ces deux concentrations, en l'occurrence la *D.B.O* et l'*oxygène dissous* représentant la variation du pouvoir autoépurateur.

Les principales cinétiques biochimiques sont les suivantes :

- Le coefficient de dégradation biochimique ( $K_1$ )
- Le coefficient de réaération superficielle ( $K_2$ )
- Le coefficient de dispersion longitudinale ( $D_L$ )
- Le coefficient d'élimination de la demande biochimique en oxygène par sédimentation et adsorption ( $K_3$ )
- Le bilan net de l'*oxygène dissous* ( $Db$ )
- Le coefficient d'ajout de la demande biochimique en oxygène ( $La$ )

La détermination de ces paramètres ne repose généralement que sur des estimations, donc que sur des formules empiriques qui ne permettent que d'apprécier, et ainsi d'avoir une idée sur le coefficient.

##### IV.1 Coefficient de dégradation biochimique ( $K_1$ )

Le coefficient de dégradation biochimique peut être déterminé par la formule suivante :

$$K_1 = -0,318 + 0,039 DBO_5$$

##### IV.2 Coefficient de réaération superficielle ( $K_2$ )

Le coefficient de réaération superficielle peut être déterminé par la formule suivante :

$$K_2^{(20^\circ)} = (5,81 \cdot 10^{-5}) u^{0,969} H^{-1,673} \quad \text{Churchill}$$

##### IV.3 Coefficient de dispersion longitudinale ( $D_L$ )

Le coefficient de dispersion longitudinale est donné par :

$$D_L = 7,19 \cdot 10^4 u^{0,607}$$

A l'instar des paramètres précédents, les coefficients qui suivent, à savoir  $K_3$ ,  $La$ ,  $Db$  dépendent essentiellement du type de rivière à étudier (morphologie, caractéristiques hydrodynamiques...), et des conditions in – situ (position du niveau de rejet de polluant...).

#### IV.4 Bilan net de l'O.D

Vu que peu de données nous furent communiquées pour l'estimation du bilan net d'O.D ( $D_B$ ), nous sommes contraints à substituer ce paramètre par des constantes ayant une variation spatio-temporelle (Voir chapitre I), car comme nous l'avons dits plus haut, il ne relève ni d'une mesure directe, ni d'une estimation par une formule.

Nous définirons ainsi les deux coefficients restants, à savoir  $K_3$  et  $La$ , en tenant compte essentiellement de la position où ont lieu les changements dans les processus biologiques. Notre système (rivière) est donc caractérisé par quatre sections :

- la section amont ( $S_{amont}$ ).
- la section où s'opèrent les changements ( $S_{changmt}$ ).
- la section immédiate à  $S_{changmt}$  que nous noterons  $S_{changmt+1}$ .
- la section aval ( $S_{aval}$ ).

#### IV.5 Coefficient d'élimination de la D.B.O par sédimentation et adsorption ( $K_3$ ).

Ce coefficient dépend essentiellement de la section où s'opèrent les changements :

$$\begin{aligned}
 Pk \leq S_{changmt} \quad K_3 &= \frac{MES \text{ en } (S_{amont}) - MES \text{ en } (S_{changmt})}{MES \text{ en } (S_{amont})} * \frac{1.440}{\text{temps en } (S_{changmt}) - \text{temps en } (S_{amont})} \\
 Pk > S_{changmt} \quad K_3 &= \frac{MES \text{ en } (S_{changmt+1}) - MES \text{ en } (S_{aval})}{MES \text{ en } (S_{changmt+1})} * \frac{1.440}{\text{temps en } (S_{aval}) - \text{temps en } (S_{changmt+1})}
 \end{aligned}$$

#### IV.6 Coefficient d'ajout de D.B.O ( $La$ )

Comme le coefficient  $K_3$ , ce coefficient dépend essentiellement de la section où s'opèrent les changements :

$D.B.O$  : exprimée en Kg/j  
 $f$  : facteur de dilution

$$Pk > S_{\text{changmt}} \quad L_a = \frac{D.B.O * 10^3}{Q * 86400} * f$$

$$Pk \leq S_{\text{changmt}} \quad L_a = 0$$

## V. MODELE MATHEMATIQUE [1], [24]

En partant des équations de bases hydrauliques (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie) et de l'état biochimique, et après avoir émis quelques hypothèses non restrictives, nous aboutissons au système suivant.

Ce système de quatre équations suivant devra être résolu par voie numérique :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2) = 2\mu \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad (\text{III.7})$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - u \frac{\partial L}{\partial x} - (K_1 + K_3)L + L_a \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - K_1 L - K_2 C - D_B \quad (\text{III.9})$$

les équations (III.6) et (III.7) n'ayant pas d'influence directe sur les équations (III.8) et (III.9), le modèle mathématique se limite aux équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - u \frac{\partial L}{\partial x} - (K_1 + K_3)L + L_a$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - K_1 L - K_2 C - D_B$$

## Chapitre 4

### **Modélisation numérique de l'état biochimique d'un cours d'eau**

Depuis longtemps, le domaine hydraulique s'est contenté uniquement de l'approche expérimentale, de la reproduction des phénomènes à étudier en modèles réduits qui donnaient d'assez bons résultats.

L'utilisation des ordinateurs et les progrès réalisés en informatique ont permis de corriger les défauts (lenteur des calculs faits à la main...) et de résoudre ainsi les modèles mathématiques qui décrivent le phénomène en s'appuyant sur des méthodes numériques. Lorsqu'on s'intéresse à une méthode de résolution numérique, on doit d'abord résoudre les équations continues régissant le phénomène dans des intervalles discrets d'espaces et de temps. Autrement dit effectuer une discrétisation. Les techniques privilégiées pour les modélisations sont :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des volumes finis.

#### **I. METHODES NUMERIQUES [12], [16], [17], [19], [27]**

Les problèmes auxquels sont confrontés les ingénieurs se posent très souvent en termes d'équations différentielles et il est rare que des solutions analytiques exactes de tels problèmes soient connus.

##### **I.1 La méthode des différences finies (M.D.F).**

La méthode des différences finies est la plus anciennement utilisée en Mécanique des fluides. Les fonctions étant définies par leurs valeurs aux nœuds du maillage, la méthode consiste à approcher leurs dérivées par des différences entre ces valeurs.

### I.2 La méthode des éléments finis (M.E.F).

La méthode des éléments finis est plus récente. Alors que, dans la méthode des différences finies, l'équation différentielle régissant le problème est approchée à l'aide de valeurs discrètes de la variable, l'idée de base de la méthode des éléments finis est de discrétiser le milieu continu étudié en domaines relativement petits mais de dimensions finies, chacun de ces sous-domaines possédant ses propres fonctions, permettant de décrire les inconnues du problème.

### I.3 La méthode des volumes finis (M.V.F).

C'est une méthode de formulation intégrale des équations au plan local sur chacun des volumes jointifs, appelés volume de contrôle, entourant chaque nœud d'évaluation. ces volumes de contrôle peuvent être comme nous le verrons, construits de différentes manières. Une prise en compte correcte des flux transférés à travers la surface de chacun des volumes de contrôle assure bien les principes de conservation.

### I.4 Choix de la méthode.

Nombreux sont les algorithmes numériques des différences finies dont les résultats convergent vers les solutions exactes des équations. Néanmoins, presque tous sont tributaires de la manière dont on approche les dérivées et les valeurs qui sont données respectivement aux pas de temps et d'espace. C'est pour cette raison que nous avons opté pour la méthode des différences finies.

## II. LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES [12], [16], [17], [19], [27]

Le principe de la méthode aux différences finies est de calculer d'une part la valeur de la fonction  $f$  qui nous intéresse en des points discrets de l'espace-temps  $(x,t)$  et d'autre part d'approximer les dérivées partielles en un nœud  $M$  par des différences faisant intervenir la valeur de la grille voisine.

La discrétisation de l'équation revient en effet à remplacer toutes les dérivées par différences. Les équations discrètes ne font alors intervenir que les valeurs aux nœuds du maillage et doivent permettre de déterminer les valeurs inconnues en fonction des valeurs connues (en général, celles de l'instant  $(n+1)\Delta t$  en fonction de celle de l'instant  $n\Delta t$ ).

L'ordre d'approximation est l'erreur commise dans cette opération (puissance de  $\Delta x$  ou de  $\Delta t$  obtenue en utilisant des développements de Taylor).

Cette approche s'effectue généralement sur la base du développement en série de Taylor, ci-dessous :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + O(\Delta x)^{n+1}$$

avec

- $\Delta x$  : pas d'espace.
- $f^{(n)}$  : la dérivée n<sup>ème</sup>.
- $O(\Delta x)^{n+1}$  : l'erreur de troncature.

### II.1 Discrétisation et maillage.

La discrétisation consiste à remplacer les grandeurs étudiées, qui sont normalement des fonctions continues en espace et en temps, par des grandeurs discrètes définies en un nombre limité de points d'espace (appelés nœuds du maillage) et ne prenant une valeur que pour un nombre limité d'instants séparés par un intervalle  $\Delta t$  généralement constant.

A deux dimensions d'espace, le maillage peut être régulier rectiligne ou curviligne (mailles carrées, rectangulaires ou en forme de quadrangles) ou irrégulier (triangles...) en liaison avec les techniques de discrétisation des équations (différences finies dans notre cas).

La discrétisation dans l'espace introduit une schématisation géométrique dans laquelle disparaît tout détail de dimension inférieure à la maille de calcul (distance entre points retenus).

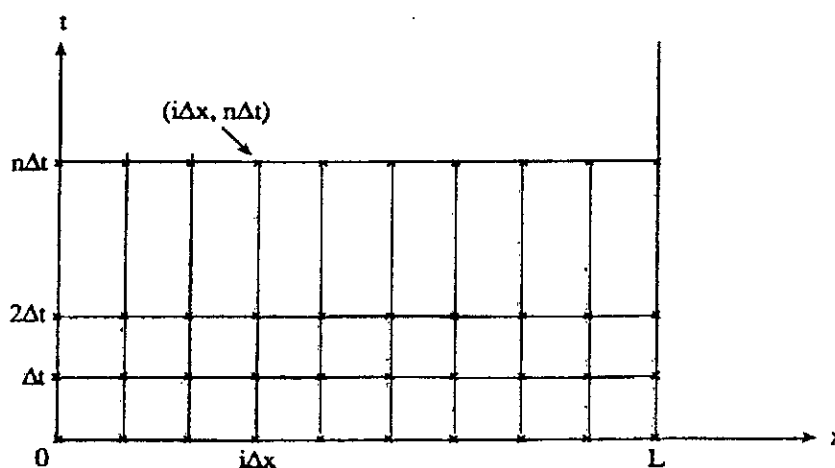


Fig. (IV.1) : Exemple de discrétisation pour une fonction  $f(x,t)$   
La fonction continue est remplacée par les valeurs  $f_i^n : f(i\Delta x, n\Delta t)$

L'aptitude du calcul à représenter les détails est donc en particulier limitée par le nombre de points du maillage, c'est à dire par la capacité de l'ordinateur ; Elle évolue donc rapidement au cours des années. En 15 années de développement des modèles numériques, les chercheurs ont pu passer de quelques centaines de points à plusieurs dizaines de milliers.

De la même manière, la discrétisation en temps induit une perte du détail des évolutions à l'intérieur du pas de temps.

Dans un problème évolutif en temps, après discrétisation, nous sommes donc amenés à déterminer les valeurs aux nœuds des inconnues à l'instant  $(n+1)\Delta t$  en fonction des valeurs connues à l'instant  $n\Delta t$  (nous avons alors un schéma à deux niveaux) et éventuellement des instants précédents (nous parlons alors de schéma à trois niveaux ou plus). Il existe deux schémas pour aborder la résolution par différences finies.

- Schéma explicite
- Schéma implicite

## II.2 Schéma explicite

Une première méthode consiste à exprimer explicitement les valeurs inconnues de la grandeur  $G$  au temps  $t + \Delta t$  en fonction des valeurs connues de  $G$  au temps  $t$ , le domaine temps étant discrétisé en intervalles réguliers  $\Delta t$ . La méthode des différences finies est alors dite explicite. C'est une approche récurrentielle, qui ne nécessite pas la résolution des équations à chaque pas de temps, ce qui constitue son principal avantage. La méthode a cependant un inconvénient majeur qui peut limiter son utilisation dans certains types de problèmes tels que l'étude de consolidation : lorsque  $\Delta t$  n'est pas assez petit, des erreurs d'amplitude croissante peuvent apparaître et la méthode est instable.

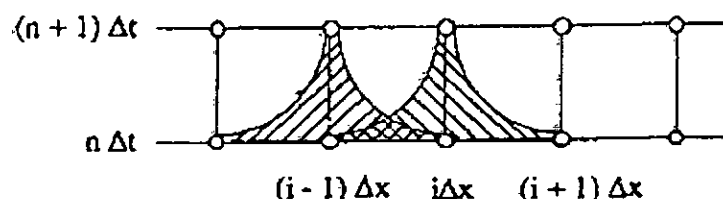


Fig. (IV.2) : Exemple de schéma explicite

La discrétisation des grandeurs en schéma explicite donne

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{\Delta t} = \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{k}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{G_{i+1,j} - G_{i-1,j}}{\Delta x} = \frac{G_{i+1,j} - G_{i-1,j}}{h}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{G_{i+1,j} + G_{i-1,j} - 2G_{i,j}}{\Delta x^2} = \frac{G_{i+1,j} + G_{i-1,j} - 2G_{i,j}}{h^2}$$

$$G = \frac{G_{i,j+1} + G_{i,j}}{2}$$

### IV.3 Schéma implicite

Dans les méthodes explicites, les dérivées partielles sont exprimées à l'aide de différences finies des valeurs de la variable au pas de temps  $t$ . Dans les méthodes implicites, par contre, les dérivées partielles sont exprimées à l'aide des valeurs de la variables au temps  $t + \Delta t$

Le calcul des valeurs de la fonction  $f$  au temps  $t + \Delta t$  est non seulement fonction des valeurs connues au temps  $t$ , mais également des valeurs inconnues au temps  $t + \Delta t$ . On obtient alors un système d'équations algébriques qu'il faut résoudre simultanément pour tous les points de calcul.

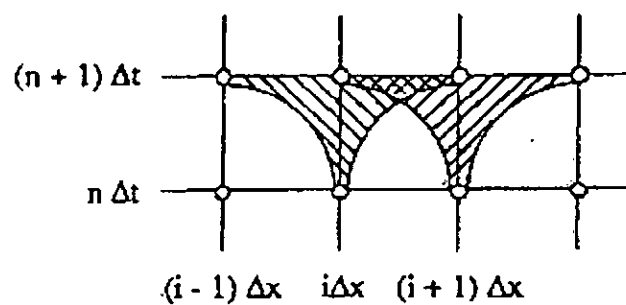


Fig. (IV.3) : Exemple de schéma implicite

La discrétisation des grandeurs en schéma implicite donne

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{\Delta t} = \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{k}$$



$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{G_{i+1,j+1} - G_{i-1,j+1}}{\Delta x} = \frac{G_{i+1,j+1} - G_{i-1,j+1}}{h}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{G_{i+1,j+1} + G_{i-1,j+1} - 2G_{i,j+1}}{\Delta x^2} = \frac{G_{i+1,j+1} + G_{i-1,j+1} - 2G_{i,j+1}}{h^2}$$

$$G = \frac{G_{i,j+1} + G_{i,j}}{2}$$

#### II.4 Choix du schéma

Le choix du schéma est très important lors de la résolution du problème. L'adoption ou l'option d'un schéma nécessite non seulement une parfaite connaissance du problème, mais aussi doit intégrer les visions de la politique recherchée ou envisagée.

Nous avons jugé que le schéma explicite était le plus adéquat à notre problème. En effet, ce choix repose sur le fait que nous cherchons à connaître l'évolution de la pollution dans le temps et dans l'espace. Cela suppose que nous ne disposons d'aucunes informations, mis à part les conditions initiales. Le schéma explicite permet d'obtenir explicitement la valeur à chacun des nœuds en fonction des valeurs précédentes.

### III. CONSISTANCE, CONVERGENCE ET STABILITE D'UN SCHEMA [12], [16], [17], [19], [27]

#### III.1 La consistance

Un schéma numérique sera consistant si la différence entre les dérivées partielles et les différences finies est infiniment petite. La qualité de cette consistance s'appelle la précision du schéma.

#### III.2 La convergence

Un schéma est dit convergent si la solution du problème discrétisé tend vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque les pas d'espace et de temps tendent simultanément vers zéro.

#### III.3 La stabilité

La stabilité d'un schéma numérique concerne uniquement l'évolution dans le temps. Un schéma est stable si les erreurs accumulées au cours des différentes approximations successives

établies au cours des étapes précédentes (erreurs d'arrondissements, erreurs de troncatures...) n'augmentent pas à chaque pas de temps. C'est à dire que le stock d'erreurs déjà obtenu à l'étape  $k$  ne doit en aucun cas se multiplier à l'étape  $k+1$ .

Nous admettons généralement qu'un schéma stable et consistant est nécessairement convergent.

#### IV. MODELISATION NUMERIQUE DE L'ETAT BIOCHIMIQUE D'UN COURS D'EAU [12], [16], [17], [19], [27]

Les deux variables caractérisant l'évolution du pouvoir autoépurateur sont la *D.B.O* et l'*oxygène dissous*. elles sont données par les équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - u \frac{\partial L}{\partial x} - (K_1 + K_3)L + L_a$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - K_1 L - K_2 C - D_B$$

En prenant en considération les équations du schéma explicite, à savoir :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{\Delta t} = \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{k}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{G_{i+1,j} - G_{i-1,j}}{\Delta x} = \frac{G_{i+1,j} - G_{i-1,j}}{h}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{G_{i+1,j} + G_{i-1,j} - 2G_{i,j}}{\Delta x^2} = \frac{G_{i+1,j} + G_{i-1,j} - 2G_{i,j}}{h^2}$$

$$G = \frac{G_{i,j+1} + G_{i,j}}{2}$$

Les équations de l'état biochimique s'écrivent :

Pour la D.B.O

$$\frac{\partial L}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - u \frac{\partial L}{\partial x} - (K_1 + K_3)L + L_a$$

$$\frac{L_{i,j+1} - L_{i,j}}{k} = D_L \left[ \frac{L_{i+1,j} + L_{i-1,j} - 2L_{i,j}}{h^2} \right] - u \left[ \frac{L_{i+1,j} - L_{i-1,j}}{h} \right] - (K_1 + K_3) \frac{L_{i,j+1} + L_{i,j}}{2} + L_a$$

$$L_{i,j+1} - L_{i,j} = k \frac{D_L}{h^2} [L_{i+1,j} + L_{i-1,j} - 2L_{i,j}] - k \frac{u}{h} [L_{i+1,j} - L_{i-1,j}] - \frac{k}{2} (K_1 + K_3) (L_{i,j+1} + L_{i,j}) + k L_a$$

$$\left[ 1 + \frac{k}{2} (K_1 + K_3) \right] L_{i,j+1} = L_{i-1,j} \left[ k \frac{D_L}{h^2} + k \frac{u}{h} \right] + L_{i,j} \left[ 1 - 2k \frac{D_L}{h^2} - \frac{k}{2} (K_1 + K_3) \right] + L_{i+1,j} \left[ k \frac{D_L}{h^2} - k \frac{u}{h} \right] + k L_a$$

$$\left[ 1 + \frac{k}{2} (K_1 + K_3) \right] L_{i,j+1} = L_{i-1,j} \left[ k \frac{D_L}{h^2} + k \frac{u}{h} \right] + L_{i,j} \left[ 1 - 2k \frac{D_L}{h^2} - \frac{k}{2} (K_1 + K_3) \right] + L_{i+1,j} \left[ k \frac{D_L}{h^2} - k \frac{u}{h} \right] + k L_a$$

$$\left[ 1 + \frac{k}{2} (K_1 + K_3) \right] L_{i,j+1} = L_{i-1,j} \left[ k \frac{D_L}{h^2} + 1 \right] + L_{i,j} \left[ 1 - 2k \frac{D_L}{h^2} - \frac{k}{2} (K_1 + K_3) \right] + L_{i+1,j} \left[ k \frac{D_L}{h^2} - 1 \right] + k L_a$$

IV.1

Posons

$$(I) = \left[ 1 + k \left( \frac{K_1 + K_3}{2} \right) \right]$$

$$(II) = k \frac{D_L}{h^2} + 1$$

$$(III) = 1 - 2k \frac{D_L}{h^2} - \frac{k}{2} (K_1 + K_3)$$

$$(IV) = k \frac{D_L}{h^2} - 1$$

$$(V) = k L_a$$

$$a = \frac{(II)}{(I)}$$

$$b = \frac{(III)}{(I)}$$

$$c = \frac{(IV)}{(I)}$$

$$d = \frac{(V)}{(I)}$$

Donc

ou encore

$$L_{i,j+1} = a L_{i-1,j} + b L_{i,j} + c L_{i+1,j} + d$$

où a, b, c, d sont des variables dépendant du paramètre distance.

LA D.B.O en section (i) au temps (n+1) s'obtient à partir des D.B.O aux sections (i-1), (i), (i+1) au temps (n).

## Pour l'oxygène dissous

Nous opérons de la même manière pour l'oxygène dissous

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - K_1 L - K_2 C - D_B$$

$$\frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{k} = D_L \left[ \frac{C_{i+1,j} + C_{i-1,j} - 2C_{i,j}}{h^2} \right] - u \left[ \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{h} \right] - K_1 \frac{L_{i,j+1} + L_{i,j}}{2} - K_2 \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j}}{2} - D_B$$

$$C_{i,j+1} - C_{i,j} = k \frac{D_L}{h^2} [C_{i+1,j} + C_{i-1,j} - 2C_{i,j}] - k \frac{u}{h} [C_{i+1,j} - C_{i-1,j}] - K_1 \frac{k}{2} [L_{i,j+1} + L_{i,j}] - K_2 \frac{k}{2} [C_{i,j+1} + C_{i,j}] - kD_B$$

$$\left[ 1 + K_2 \frac{k}{2} \right] C_{i,j+1} - C_{i,j} = k \frac{D_L}{h^2} [C_{i+1,j} + C_{i-1,j} - 2C_{i,j}] - k \frac{u}{h} [C_{i+1,j} - C_{i-1,j}] - K_1 \frac{k}{2} [L_{i,j+1} + L_{i,j}] - K_2 \frac{k}{2} [C_{i,j+1} + C_{i,j}] - kD_B$$

$$\left[ 1 + k \frac{K_2}{2} \right] C_{i,j+1} = C_{i-1,j} \left[ k \frac{D_L}{h^2} + 1 \right] + C_{i,j} \left[ 1 - 2k \frac{D_L}{h^2} - k \frac{K_2}{2} \right] + C_{i+1,j} \left[ k \frac{D_L}{h^2} - 1 \right] - K_1 \frac{k}{2} [L_{i,j+1} + L_{i,j}] - kD_B$$

Posons :

$$(I) = \left[ 1 + k \frac{K_2}{2} \right]$$

$$a' = \frac{(II)}{(I)}$$

$$(II) = k \frac{D_L}{h^2} + 1$$

$$b' = \frac{(III)}{(I)}$$

$$(III) = \left[ 1 - k \frac{K_2}{2} - 2k \frac{D_L}{h^2} \right]$$

Donc

$$c' = \frac{(IV)}{(I)}$$

$$(IV) = k \frac{D_L}{h^2} - 1$$

$$d' = \frac{(V)}{(I)}$$

$$(V) = -k \frac{K_1}{2}$$

$$e' = \frac{(VI)}{(I)}$$

$$(VI) = -kD_B$$

IV.2

ou encore

$$C_{i,j+1} = a' C_{i-1,j} + b' C_{i,j} + c' C_{i+1,j} + d' (L_{i,j} + L_{i,j+1}) + e'$$

où  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $e'$  sont des constantes dépendant des paramètres temps - distance.

L'oxygène dissous en section (i) au temps (n+1) s'obtient à partir de l'oxygène dissous aux sections (i-1), (i), (i+1) au temps (n) et des D.B.O en section (i) au temps (n) et (n+1)

Le modèle mathématique d'auto-épuration en rivière se résume aux équations suivantes, avec les coefficients définis auparavant.

Conclusion :

$$L_{i,j+1} = a L_{i-1,j} + b L_{i,j} + c L_{i+1,j} + d$$

$$C_{i,j+1} = a' C_{i-1,j} + b' C_{i,j} + c' C_{i+1,j} + d' (L_{i,j} + L_{i,j+1}) + e'$$

L'organigramme de calcul présentant les grandes étapes de calcul est présenté ci-dessous, figure (IV.4).

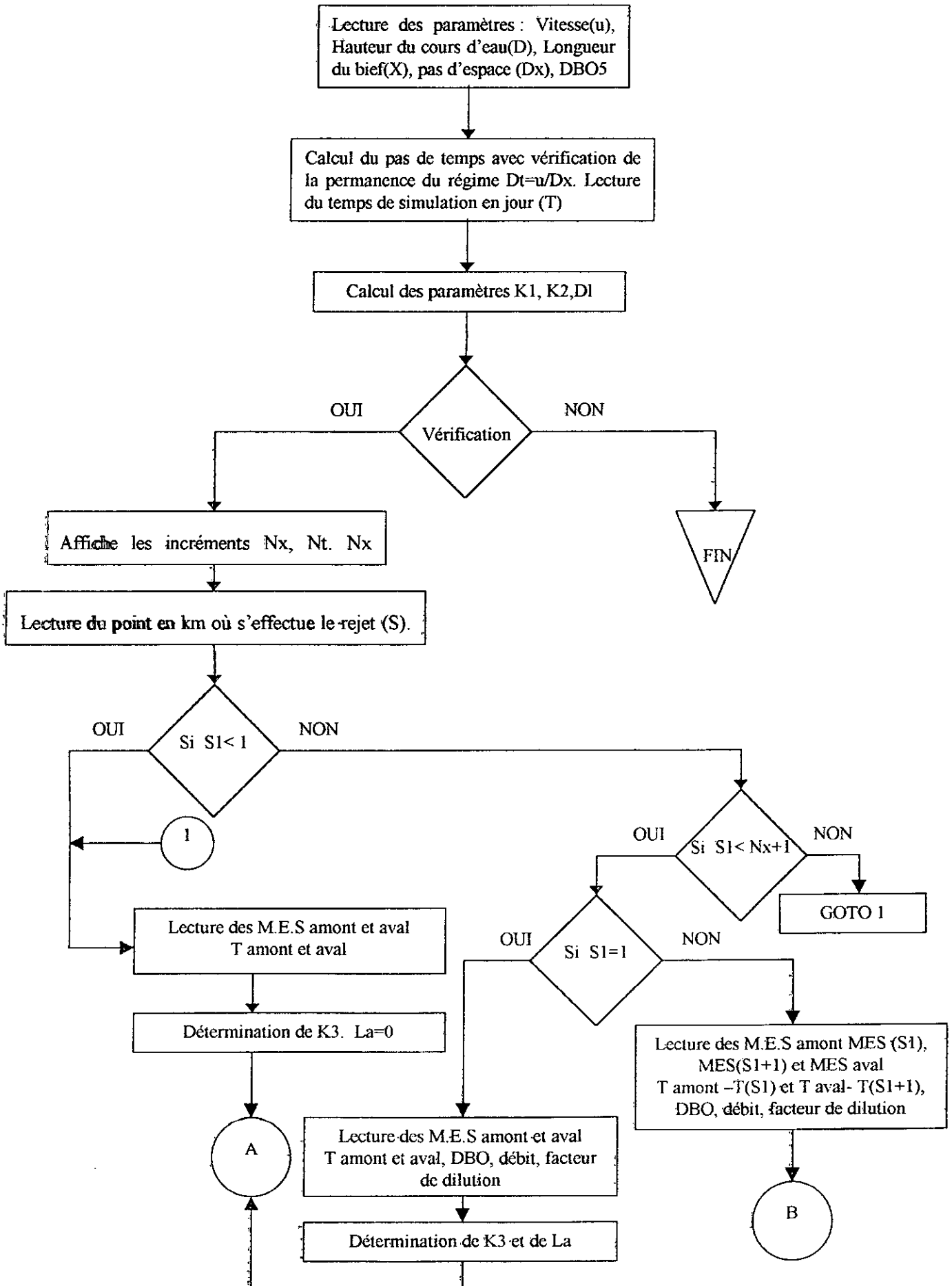


Fig.(IV.4) : Organigramme de calcul

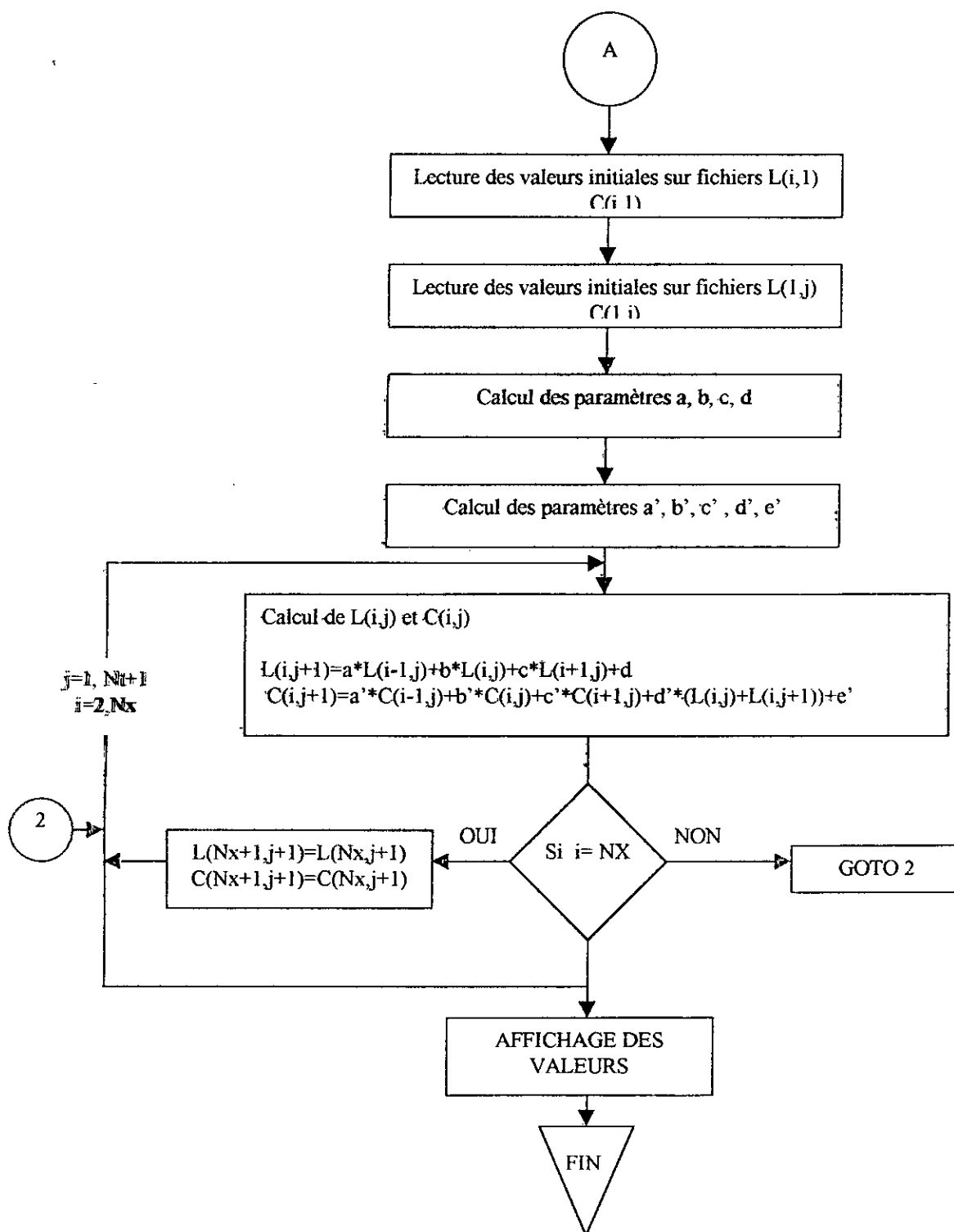


Fig (IV.4) : Organigramme de calcul

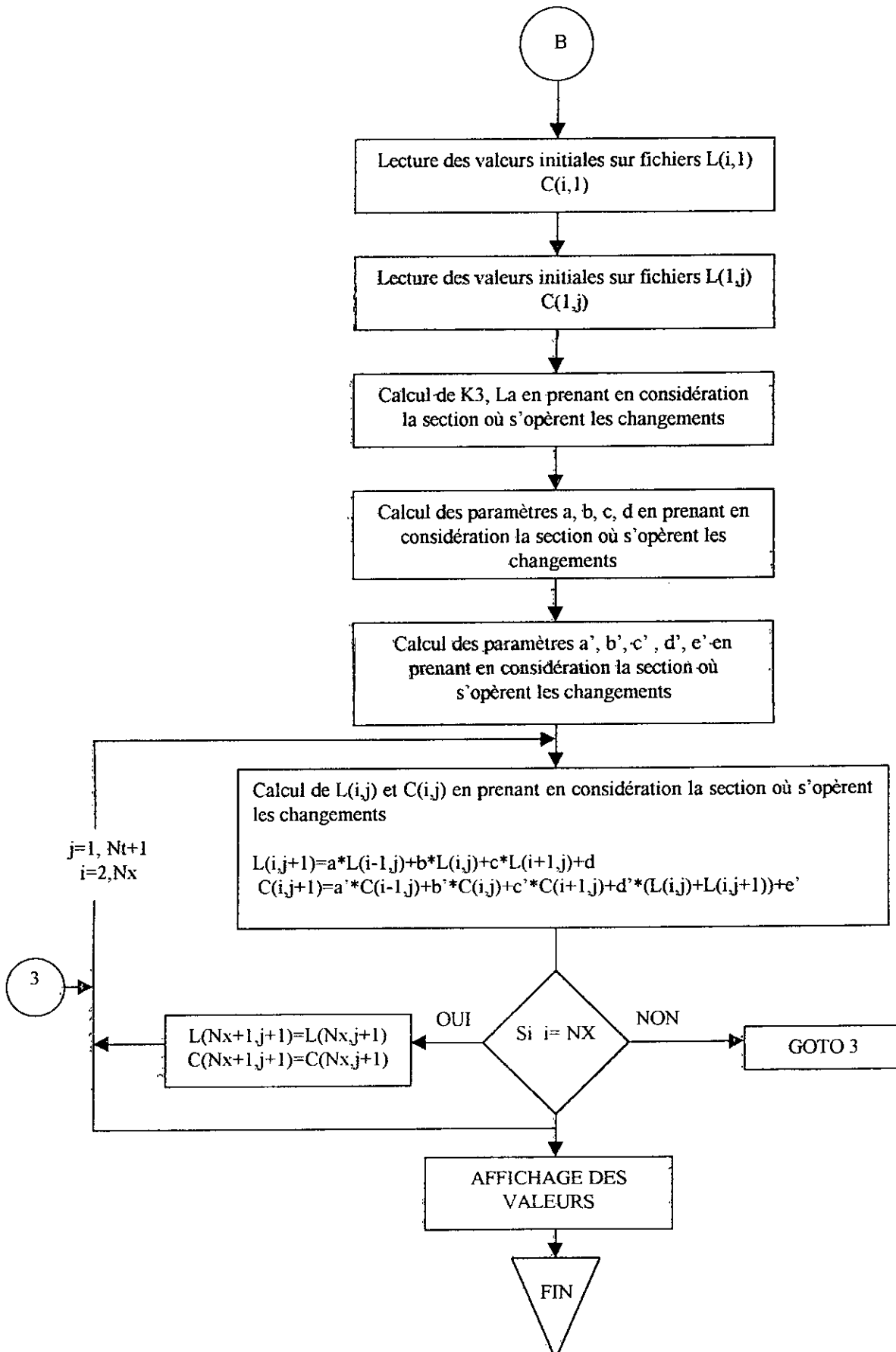


Fig (IV.4) : Organigramme de calcul



Le programme a été élaboré en FORTRAN 90. Nous avons choisi ce langage essentiellement pour sa simplicité. Le progiciel a été exécuté sur un PENTIUM II 266Mhz 32Mo de RAM.

## Chapitre 5

### ~~Validation du modèle~~

Après avoir mis au point l'organigramme de calcul du modèle mathématique au chapitre précédent, et élaboré le programme permettant de déterminer l'évolution du pouvoir auto-épurateur, ce présent chapitre sera consacré essentiellement à la validation du modèle. Le programme correspondant offre la possibilité de tester diverses valeurs des paramètres, en l'occurrence :

- Le coefficient de dégradation biochimique de la *demande biochimique en oxygène* (K1).
- Le coefficient de réaération superficielle (K2)
- Le coefficient d'élimination par sédimentation et adsorption de la *demande biochimique en oxygène* (K3)
- Le coefficient de dispersion longitudinale (Dl)
- Le coefficient d'ajout de la *demande biochimique en oxygène* (La)

#### I. APPLICATION DU MODELE NUMERIQUE AU COURS D'EAU L'ILL. [12], [17], [29]

Pour valider notre modèle, nous avons utilisé l'application de « Balland » sur le cours d'eau de l'ILL. (voir Chapitre I état de connaissance). Les mesures ont été faites sur une longueur de 36 km sur 10 stations. La distance séparant deux stations est de 4 km. Le point de rejet est situé à 13,6 km à partir de l'amont du cours d'eau.

Les données de ce cours d'eau sont récapitulées dans le tableau V.1 ci-dessous.

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Vitesse u (km/j)</b>                                     | 48          |
| <b>Hauteur du cours d'eau (m)</b>                           | 0.6         |
| <b>Longueur du bief (km)</b>                                | 36          |
| <b>Pas d'espace (km)</b>                                    | 4           |
| <b>DBO5 (g/m<sup>3</sup>)</b>                               | 9.948       |
| <b>Valeur du temps de simulation (j)</b>                    | 1.25        |
| <b>Point de rejet (km)</b>                                  | 13,6        |
| <b>MES Section amont (g/m<sup>3</sup>)</b>                  | 53          |
| <b>MES Section point de rejet (g/m<sup>3</sup>)</b>         | 14.5        |
| <b>MES Section point de rejet+1 (g/m<sup>3</sup>)</b>       | 12          |
| <b>MES Section aval (g/m<sup>3</sup>)</b>                   | 3.4         |
| <b>T<sub>section rejet</sub> - T<sub>amont</sub> (min)</b>  | 340         |
| <b>T<sub>aval</sub> - T<sub>section rejet+1</sub> (min)</b> | 900         |
| <b>Facteur de dilution</b>                                  | 0.18        |
| <b>Débit (m<sup>3</sup>/s)</b>                              | 0.9         |
| <b>DBO (kg/j)</b>   | 2500        |
| <b>Lecture de C(0,j) et L(0,j)</b>                          | Sur fichier |
| <b>Lecture de C(i,0) et L(i,0)</b>                          | Sur fichier |

Tableau V-1. Données

Le calcul de la *demande biochimique en oxygène* et de l'*oxygène dissous* a été fait pour 16 pas de temps, c'est à dire toutes les 2 heures sur une durée de 1,25 jours (soit l'équivalent de 30 heures).

Dans les tableaux (V-2), (V-3) et (V-4) sont présentés respectivement les valeurs de la *demande biochimique en oxygène* observées, les valeurs déterminées par le modèle mathématique de Balland et les valeurs de notre modèle mathématique.

Dans les tableaux (V-5), (V-6) et (V-7) sont consignées respectivement les valeurs de l'*oxygène dissous* observés, les valeurs déterminés par le modèle mathématique de Balland et les valeurs de notre modèle mathématique.

| temps | Stations N° |      |      |      |      |      |      |     |     |      |
|-------|-------------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|------|
|       | 0           | 4    | 8    | 12   | 16   | 20   | 24   | 28  | 32  | 36   |
| 1     | 20.7        | 12.4 | 6.6  | 5.9  | 8    | 9.3  | 10.2 | 8.7 | 8.1 | 10.6 |
| 2     | 27.8        | 16   | 7.5  | 6    | 7.6  | 8.6  | 9    | 8.3 | 8.2 | 9.9  |
| 3     | 35          | 19.6 | 8.4  | 6.1  | 7.2  | 7.8  | 7.8  | 8   | 8.3 | 9.1  |
| 4     | 32.6        | 19.7 | 10.5 | 8.6  | 8.2  | 7.9  | 7.6  | 8   | 8.3 | 8.3  |
| 5     | 29.5        | 19.7 | 13   | 12.6 | 10.2 | 9.2  | 9.2  | 9   | 8.9 | 8.9  |
| 6     | 26.3        | 19.5 | 15   | 15.1 | 11.9 | 10.1 | 9.2  | 8.5 | 8.1 | 8.2  |
| 7     | 20.1        | 16.8 | 14.2 | 12.9 | 12.3 | 10.7 | 8.3  | 7.5 | 7.1 | 7.5  |
| 8     | 17          | 15.4 | 13.6 | 11.3 | 12.2 | 10.8 | 7.6  | 6.5 | 6   | 6.7  |
| 9     | 15          | 14.5 | 13.3 | 10.7 | 10.8 | 9.9  | 8.2  | 5.5 | 4   | 5.5  |
| 10    | 13          | 13.4 | 12.8 | 10.1 | 9.8  | 9.2  | 8.3  | 6.3 | 5   | 5.4  |
| 11    | 12.2        | 12   | 11.3 | 9.4  | 9.1  | 8.7  | 8.2  | 7.3 | 6.3 | 5.3  |
| 12    | 15.9        | 12.1 | 9.4  | 8.8  | 8.7  | 8.4  | 7.9  | 8   | 7.4 | 5.2  |
| 13    | 20.3        | 12.3 | 7.1  | 8    | 8.3  | 8    | 7.2  | 7.3 | 7.1 | 6    |
| 14    | 24.6        | 12.4 | 4.9  | 7.4  | 8    | 7.7  | 6.8  | 7   | 7   | 6    |
| 15    | 28.8        | 17.8 | 9.5  | 6.7  | 7.6  | 7.7  | 7.1  | 7.2 | 7   | 6    |
| 16    | 32.9        | 23.6 | 14.5 | 6.1  | 7.2  | 7.6  | 7.3  | 7.3 | 7   | 6    |

Tableau (V-2). Résultats des valeurs de *demande biochimique en oxygène* observées tous les 4 km et par pas de temps de 2 heures

| temps | Stations N° |      |      |      |      |     |      |     |     |      |
|-------|-------------|------|------|------|------|-----|------|-----|-----|------|
|       | 0           | 4    | 8    | 12   | 16   | 20  | 24   | 28  | 32  | 36   |
| 1     | 20.7        | 12.3 | 6.5  | 5.9  | 8    | 9.3 | 10.1 | 8.6 | 8.1 | 10.6 |
| 2     | 27.7        | 15.3 | 9.1  | 4.8  | 5.1  | 7.4 | 8.5  | 9.3 | 8   | 7.5  |
| 3     | 35          | 20.1 | 11   | 6.6  | 4.1  | 4.8 | 6.7  | 7.7 | 8.4 | 7.22 |
| 4     | 32.5        | 24.7 | 14.1 | 7.8  | 5.5  | 3.9 | 4.4  | 6   | 6.8 | 7.4  |
| 5     | 29.5        | 23.2 | 17.5 | 10.1 | 6.5  | 5   | 3.7  | 4.1 | 5.5 | 6.2  |
| 6     | 26.2        | 21.2 | 16.6 | 12.6 | 8.5  | 6   | 4.7  | 3.5 | 3.9 | 5.1  |
| 7     | 20.1        | 19.1 | 15.4 | 12.1 | 10.8 | 7.7 | 5.5  | 4.5 | 3.5 | 3.8  |
| 8     | 17          | 14.9 | 14.1 | 11.4 | 10.5 | 9.9 | 7.2  | 5.3 | 4.3 | 3.5  |
| 9     | 15          | 12.7 | 11.1 | 10.6 | 10.1 | 9.8 | 9.1  | 6.8 | 5.1 | 4.3  |
| 10    | 13          | 11.3 | 9.6  | 8.4  | 9.4  | 9.4 | 9.1  | 8.6 | 6.5 | 5    |
| 11    | 12.1        | 9.8  | 8.6  | 7.3  | 7.5  | 8.9 | 8.8  | 8.6 | 8.1 | 6.3  |
| 12    | 15.8        | 9.2  | 7.5  | 6.5  | 6.5  | 7.2 | 8.4  | 8.4 | 8.2 | 7.7  |
| 13    | 20.2        | 11.9 | 6.9  | 5.6  | 5.8  | 6.2 | 6.8  | 7.9 | 7.9 | 7.7  |
| 14    | 24.6        | 15   | 8.8  | 5.1  | 4.9  | 5.5 | 5.9  | 6.4 | 7.3 | 7.3  |
| 15    | 28.7        | 17.9 | 11   | 6.4  | 4.4  | 4.7 | 5.2  | 5.5 | 5.9 | 6.8  |
| 16    | 32.9        | 20.7 | 12.9 | 7.9  | 5.5  | 4.2 | 4.4  | 4.8 | 5.1 | 5.5  |

Tableau (V-3). Résultats des valeurs de *demande biochimique en oxygène* obtenues par le modèle de Balland tous les 4 km et par pas de temps de 2 heures

| temps | Stations N° |      |      |      |     |     |      |     |     |      |
|-------|-------------|------|------|------|-----|-----|------|-----|-----|------|
|       | 0           | 4    | 8    | 12   | 16  | 20  | 24   | 28  | 32  | 36   |
| 1     | 20.7        | 12.4 | 6.6  | 5.9  | 8   | 9.3 | 10.2 | 8.7 | 8.1 | 10.6 |
| 2     | 27.8        | 9.5  | 5.1  | 4.55 | 7.7 | 8.9 | 9.7  | 8.3 | 7.8 | 7.8  |
| 3     | 35          | 9.1  | 5    | 4.6  | 7.4 | 8.5 | 9.2  | 8   | 7.5 | 7.5  |
| 4     | 32.6        | 14.7 | 8    | 5.6  | 7.1 | 8.1 | 8.8  | 7.7 | 7.2 | 7.2  |
| 5     | 29.5        | 14.3 | 10   | 8.1  | 6.9 | 7.8 | 8.4  | 7.4 | 7   | 7    |
| 6     | 26.3        | 16.9 | 13   | 9.6  | 7.7 | 7.5 | 8    | 7.1 | 6.8 | 6.8  |
| 7     | 20.1        | 13.6 | 10.9 | 9.1  | 8.5 | 7.2 | 7.7  | 6.9 | 6.6 | 6.6  |
| 8     | 17          | 13.4 | 14.9 | 5.6  | 7.2 | 7   | 7.4  | 6.7 | 6.4 | 6.4  |
| 9     | 15          | 11.1 | 8.9  | 5.6  | 8   | 6.8 | 7.2  | 6.5 | 6.2 | 6.2  |
| 10    | 13          | 10.9 | 8.9  | 7.7  | 6.4 | 6.6 | 6.9  | 6.3 | 6.1 | 6.1  |
| 11    | 12.2        | 9.7  | 6.9  | 5.7  | 5.9 | 6.4 | 6.7  | 6.2 | 6   | 6    |
| 12    | 15.9        | 6.5  | 4.9  | 4.7  | 5.8 | 6.2 | 6.5  | 6   | 5.9 | 5.9  |
| 13    | 20.3        | 6.3  | 4.9  | 4.7  | 5.7 | 6.1 | 6.4  | 5.9 | 5.7 | 5.7  |
| 14    | 24.6        | 6.2  | 4.9  | 4.7  | 5.6 | 6   | 6.2  | 5.8 | 5.7 | 5.7  |
| 15    | 28.8        | 6    | 4.8  | 4.7  | 5.5 | 5.9 | 6.1  | 5.7 | 5.6 | 5.6  |
| 16    | 32.9        | 5.9  | 4.8  | 4.7  | 5.5 | 5.7 | 5.9  | 5.6 | 5.5 | 5.5  |

Tableau (V-4). Résultats des valeurs de *demande biochimique en oxygène* obtenues par notre modèle tous les 4 km et par pas de temps de 2 heures

| temps | Stations N° |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|       | 0           | 4   | 8   | 12  | 16  | 20  | 24  | 28  | 32  | 36  |
| 1     | 6.8         | 7.4 | 7.2 | 5   | 4.2 | 5.1 | 7.3 | 7.6 | 6.9 | 4.1 |
| 2     | 7.8         | 7.6 | 6.9 | 5.3 | 5   | 5.7 | 7.2 | 7.7 | 7.4 | 5.3 |
| 3     | 8.9         | 7.7 | 6.6 | 5.6 | 5.8 | 6.4 | 7.3 | 7.9 | 7.9 | 6.5 |
| 4     | 8.4         | 7.1 | 6   | 5.3 | 5.9 | 6.5 | 7.2 | 8   | 8.4 | 7.8 |
| 5     | 7.8         | 6.4 | 5.2 | 4.5 | 5   | 5.9 | 6.9 | 8   | 8.6 | 7.9 |
| 6     | 7.2         | 5.7 | 4.5 | 3.6 | 4.2 | 5.1 | 6.2 | 7.1 | 7.6 | 7.3 |
| 7     | 7           | 5.6 | 4.2 | 2.3 | 3.4 | 4.3 | 5   | 5.8 | 6.4 | 6.7 |
| 8     | 7.4         | 5.7 | 3.8 | 1.6 | 2.5 | 3.4 | 4.1 | 4.5 | 5.1 | 6.1 |
| 9     | 8.1         | 5.8 | 3.7 | 1.9 | 1.7 | 3   | 5.2 | 5   | 4.4 | 3.7 |
| 10    | 8.7         | 5.9 | 3.6 | 2.3 | 1.5 | 2.8 | 5.4 | 5.1 | 4.7 | 4.4 |
| 11    | 7.9         | 5.3 | 3.5 | 2.9 | 2.1 | 3.1 | 5.3 | 5.1 | 4.8 | 5.1 |
| 12    | 7.5         | 5.2 | 3.6 | 3.3 | 2.5 | 3.3 | 5.2 | 5.1 | 5   | 5.7 |
| 13    | 7.3         | 5.2 | 3.8 | 3.7 | 2.7 | 3.4 | 5.3 | 5.6 | 5.3 | 4   |
| 14    | 7           | 5.2 | 4   | 4   | 3   | 3.7 | 5.6 | 6.1 | 6.1 | 5.4 |
| 15    | 7           | 5.6 | 4.6 | 4.6 | 4.1 | 4.8 | 6.3 | 6.8 | 7.1 | 6.8 |
| 16    | 7           | 5.9 | 5.2 | 5.2 | 5.3 | 6   | 7   | 7.5 | 7.9 | 8.3 |

Tableau (V-5). Résultats des valeurs de l'oxygène dissous observées tous les 4 km et par pas de temps de 2 heures

| temps | Stations N° |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|       | 0           | 4   | 8   | 12  | 16  | 20  | 24  | 28  | 32  | 36  |
| 1     | 6.8         | 7.4 | 7.1 | 5   | 4.1 | 5   | 7.3 | 7.5 | 6.9 | 4   |
| 2     | 7.8         | 6.4 | 6.3 | 5.6 | 4.3 | 5.1 | 6.2 | 7.5 | 7.7 | 7.3 |
| 3     | 8.8         | 6.8 | 5.9 | 5.6 | 5.1 | 5.5 | 6.5 | 7.1 | 7.8 | 8.1 |
| 4     | 8.3         | 6.8 | 5.8 | 5.2 | 5   | 5.9 | 6.7 | 7.2 | 7.5 | 8.1 |
| 5     | 7.8         | 6.2 | 5.2 | 4.4 | 4.3 | 5.6 | 6.8 | 7.2 | 7.4 | 7.5 |
| 6     | 7.1         | 6   | 4.8 | 3.7 | 3.6 | 5   | 6.4 | 7.1 | 7.3 | 7.3 |
| 7     | 7           | 5.8 | 4.6 | 3.2 | 3   | 4.4 | 5.9 | 6.8 | 7.2 | 7.1 |
| 8     | 7.4         | 6.1 | 4.8 | 3.3 | 2.8 | 4.1 | 5.7 | 6.6 | 7.1 | 7.1 |
| 9     | 8.1         | 6.5 | 5.1 | 3.5 | 3   | 4.1 | 5.5 | 6.4 | 6.9 | 7.1 |
| 10    | 8.6         | 7   | 5.5 | 3.8 | 3.1 | 4.2 | 5.5 | 6.3 | 6.9 | 7   |
| 11    | 7.9         | 7.5 | 5   | 4.1 | 3.4 | 4.4 | 5.6 | 6.3 | 6.8 | 7   |
| 12    | 7.5         | 7   | 6.1 | 4.3 | 3.5 | 4.5 | 5.7 | 6.4 | 6.9 | 7   |
| 13    | 7.3         | 6.9 | 6   | 4.7 | 3.8 | 4.7 | 5.9 | 6.6 | 7   | 7.2 |
| 14    | 7           | 6.7 | 6   | 4.9 | 4.2 | 5   | 6.2 | 6.8 | 7.2 | 7.4 |
| 15    | 7           | 6.6 | 6.1 | 5.5 | 4.7 | 5.5 | 6.6 | 7.2 | 7.6 | 7.9 |
| 16    | 7           | 6.3 | 5.9 | 5.5 | 5   | 5.8 | 6.9 | 7.5 | 7.8 | 8.1 |

Tableau (V-6). Résultats des valeurs de l'oxygène dissous obtenues par le modèle de Balland tous les 4 km et par pas de temps de 2 heures



| temps | Stations N° |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|       | 0           | 4   | 8   | 12  | 16  | 20  | 24  | 28  | 32  | 36  |
| 1     | 6.8         | 7.4 | 7.2 | 5   | 4.2 | 5.1 | 7.3 | 7.6 | 6.9 | 4.1 |
| 2     | 7.8         | 7.8 | 7.3 | 5.9 | 6   | 6.4 | 7.5 | 7.6 | 7.2 | 7.2 |
| 3     | 8.9         | 8.1 | 7.4 | 6.3 | 7.1 | 7.1 | 7.6 | 7.7 | 7.4 | 7.4 |
| 4     | 8.4         | 8.2 | 7.5 | 6.6 | 7.7 | 7.5 | 7.6 | 7.7 | 7.5 | 7.5 |
| 5     | 7.8         | 8.3 | 7.5 | 6.8 | 8   | 7.7 | 7.6 | 7.7 | 7.6 | 7.6 |
| 6     | 7.2         | 8.4 | 7.5 | 6.9 | 8.2 | 7.8 | 7.7 | 7.7 | 7.6 | 7.6 |
| 7     | 7           | 8.4 | 7.5 | 6.9 | 8.3 | 7.9 | 7.7 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |
| 8     | 7.4         | 8.4 | 7.5 | 6.9 | 8.4 | 7.9 | 7.7 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |
| 9     | 8.1         | 8.4 | 7.5 | 7   | 8.4 | 8   | 7.7 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |
| 10    | 8.7         | 8.4 | 7.5 | 7   | 8.4 | 8   | 7.7 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |
| 11    | 7.9         | 8.4 | 7.5 | 7   | 8.4 | 8   | 7.7 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |
| 12    | 7.5         | 8.4 | 7.5 | 7   | 8.4 | 8   | 7.7 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |
| 13    | 7.3         | 8.4 | 7.5 | 7   | 8.4 | 8   | 7.7 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |
| 14    | 7           | 8.4 | 7.5 | 7   | 8.4 | 8   | 7.7 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |
| 15    | 7           | 8.4 | 7.5 | 7   | 8.4 | 8   | 7.7 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |
| 16    | 7           | 8.4 | 7.5 | 7   | 8.5 | 8   | 7.7 | 7.7 | 7.7 | 7.7 |

Tableau (V-7). Résultats des valeurs de l'oxygène dissous obtenues par notre modèle tous les 4 km et par pas de temps de 2 heures

Nous avons la possibilité immédiate de nous rendre compte visuellement de la concordance entre valeurs observées et calculées. Enfin, il est loisible de tracer les graphiques correspondants par pas-de temps (profils en long des concentrations).

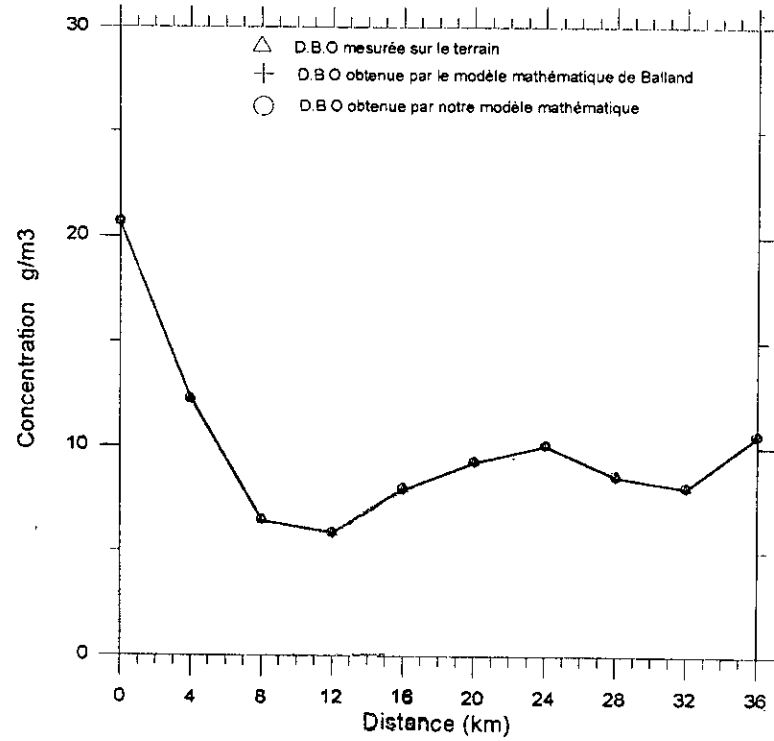
Dans les figures (V.1) à (V.8), est donné le profil en long de la concentration en demande biochimique en oxygène. La première figure (0 heure) (V.1.a) représente le profil des

conditions initiales. Les points calculés par notre modèle, ainsi que ceux représentant les valeurs observées et calculées par le modèle mathématique de Balland, sont confondus. (C'est à dire  $L(i,0)=\text{conditions initiales}(i,0)$ ). Durant l'évolution de la concentration, les valeurs correspondantes au km zéro ont été choisies de telle sorte que cette mesure soit égale à celles observées. (C'est à dire  $L(0,j)=\text{valeurs observées}(0,j)$ ).

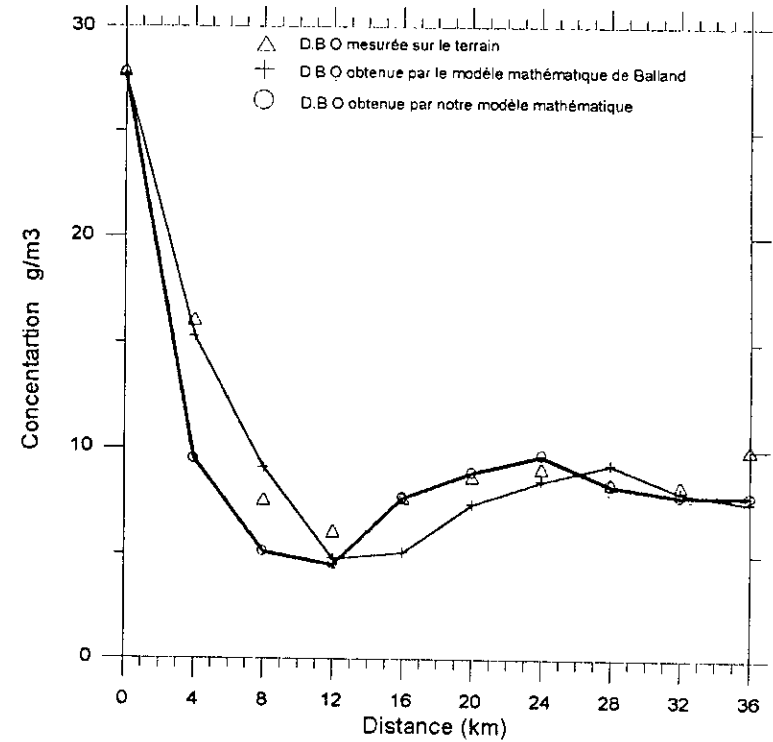
Dans les figures (V.9) à (V.16), est donné le profil en long de la concentration en *oxygène dissous*. La première figure (0 heure) (V.9.a) représente le profil des conditions initiales. Les points calculés par notre modèle, ainsi que ceux représentant les valeurs observées et calculées par le modèle mathématique de Balland, sont confondus. (C'est à dire  $C(i,0)=\text{conditions initiales}(i,0)$ ). Durant l'évolution de la concentration, les valeurs correspondantes au km zéro ont été choisies de telle sorte que cette mesure soit égale à celles observées. (C'est à dire  $C(0,j)=\text{valeurs observées}(0,j)$ ).

Nous remarquons de gros pics de *demande biochimique en oxygène* au km (0). Ces valeurs représentent essentiellement les rejets de l'agglomération de Mulhouse. Ces valeurs sont nettement plus importantes que celle de la Thur (tronçon où s'effectuent les rejets au km (13,6)).

Fig (V.1) Profil en long des concentrations D.B.O observées et calculées pour 16 pas de temps

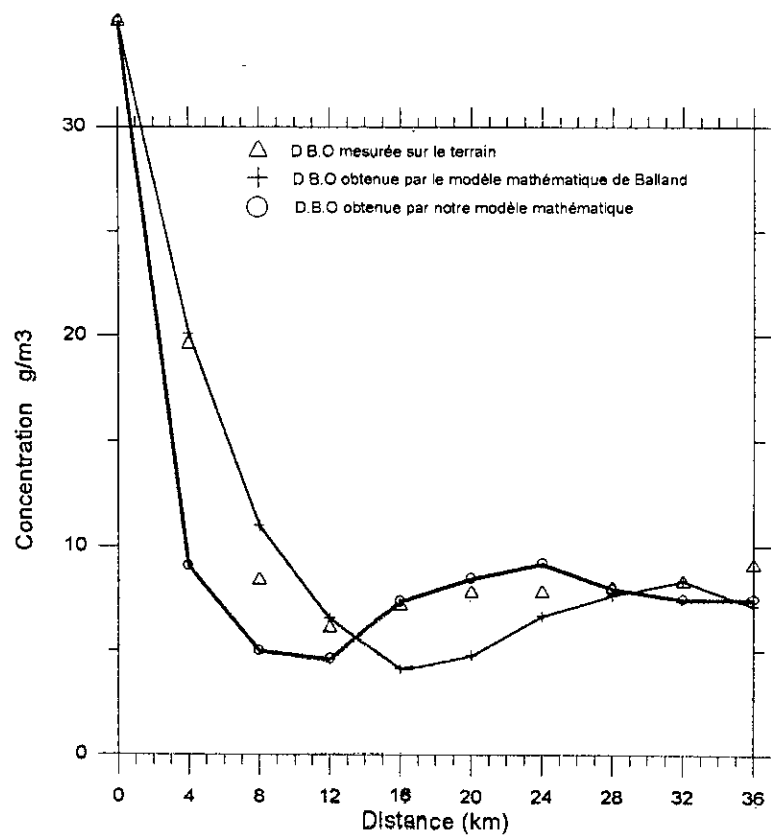


à 00J00h  
(a)

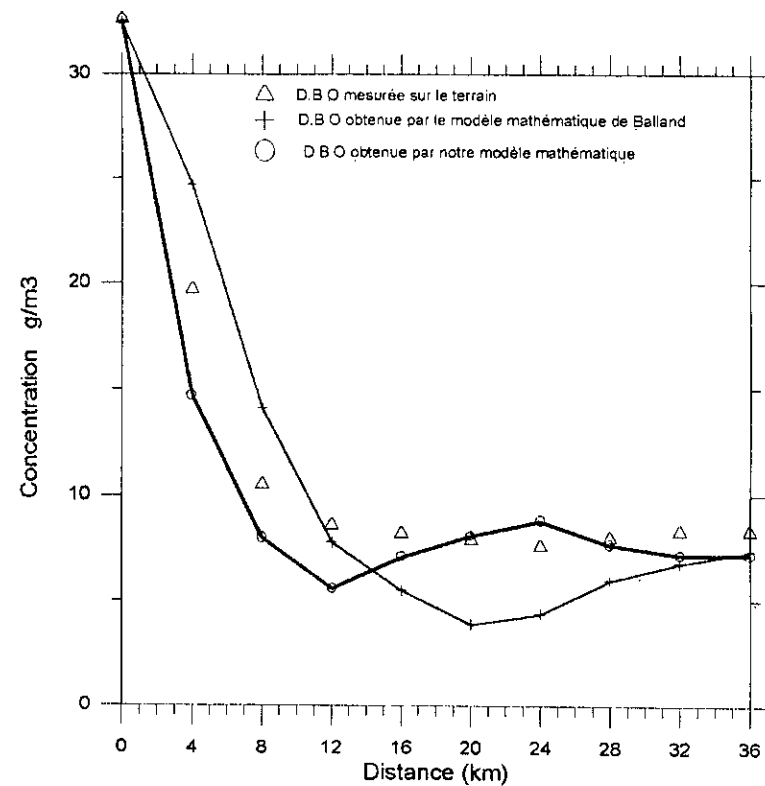


à 00J02h  
(b)

Fig (V.2) Profil en long des concentrations D.B.O observées et calculées pour 16 pas de temps

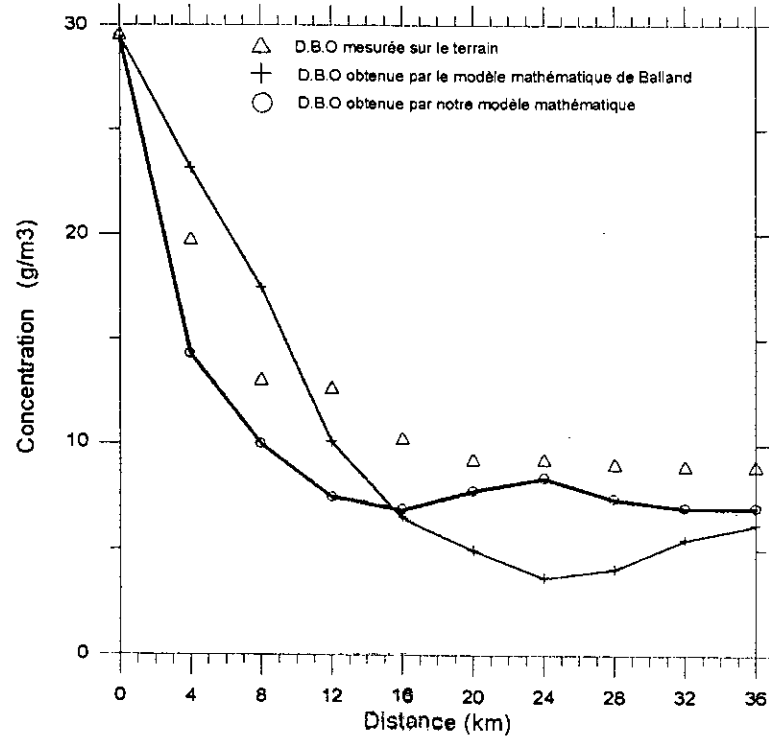


à 00J04h

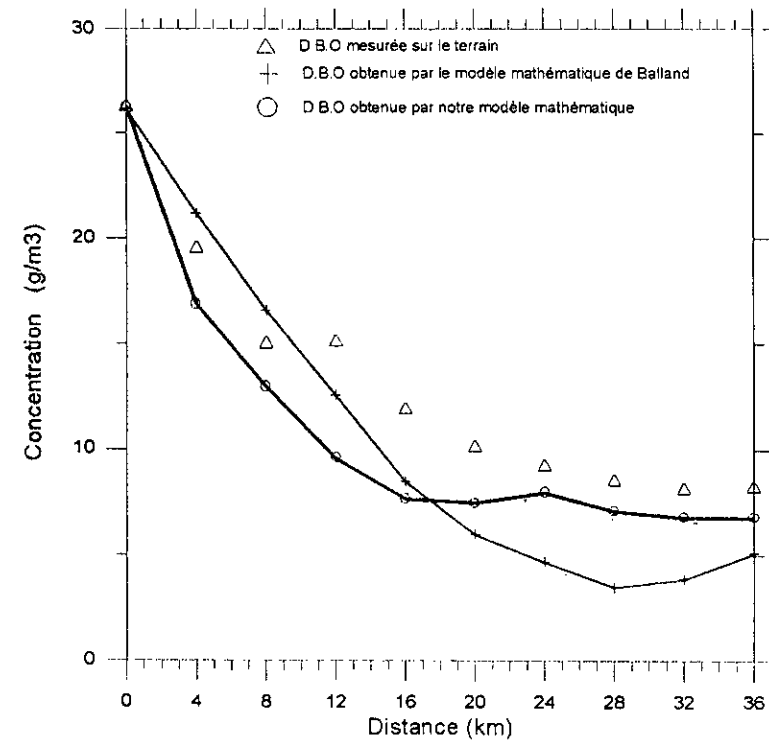


à 00J06h  
(d)

Fig (V.3) Profil en long des concentrations D.B.O observées et calculées pour 16 pas de temps

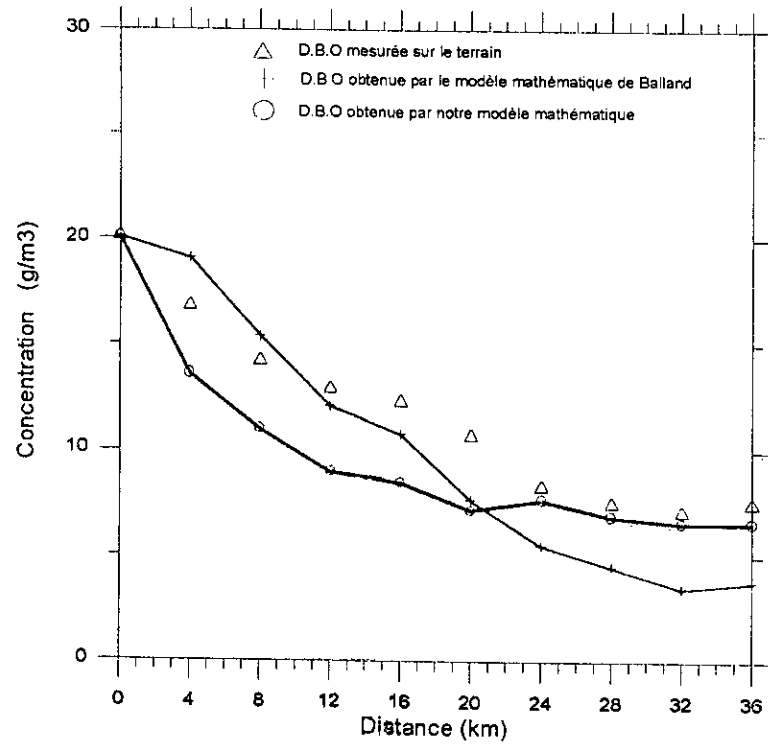


à 00J08 h  
(e)

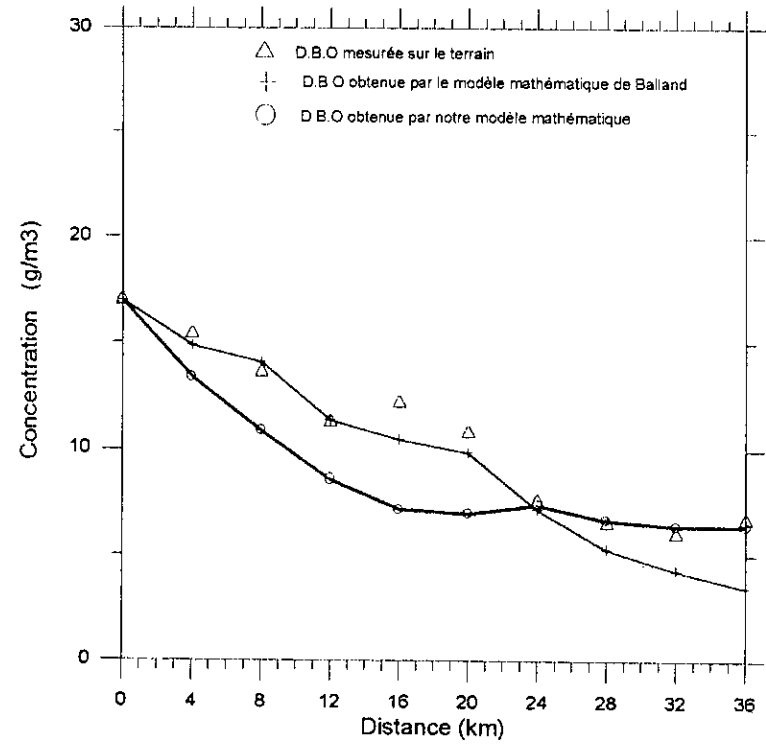


à 00J10 h  
(f)

Fig (V.4) Profil en long des concentrations D.B.O observées et calculées pour 16 pas de temps

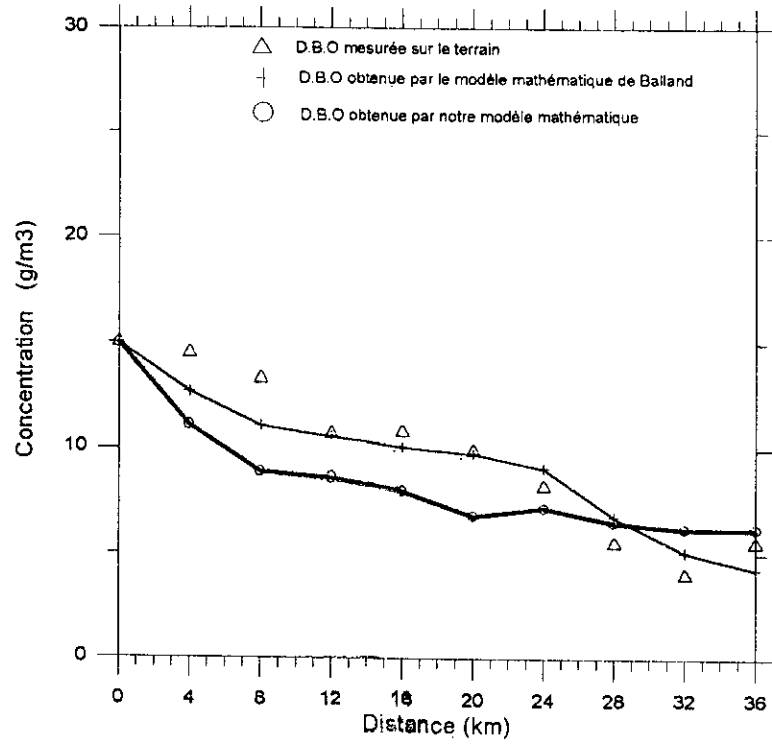


à 00J 12 h  
(g)

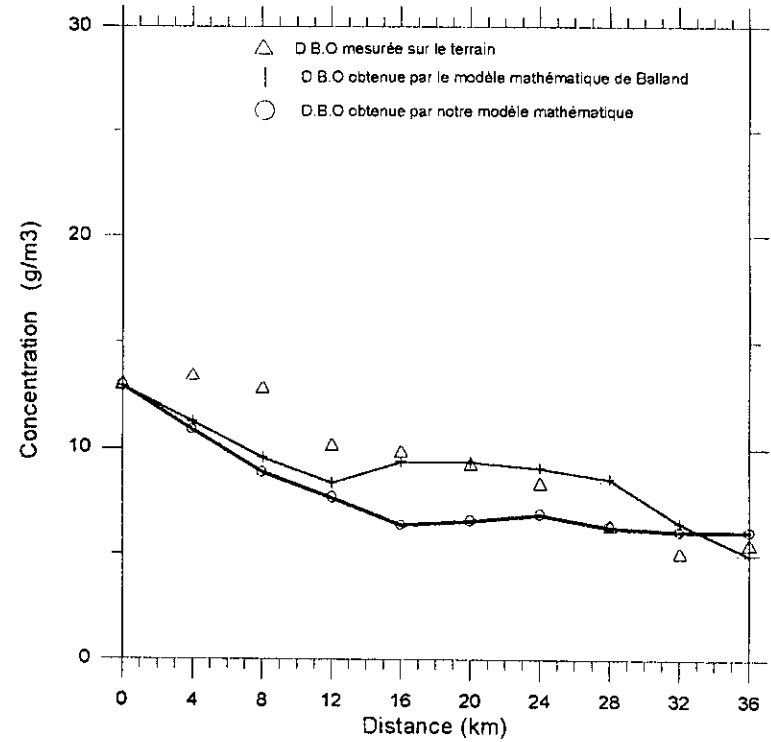


à 00J 14 h  
(h)

Fig (V.5) Profil en long des concentrations D.B.O observées et calculées pour 16 pas de temps

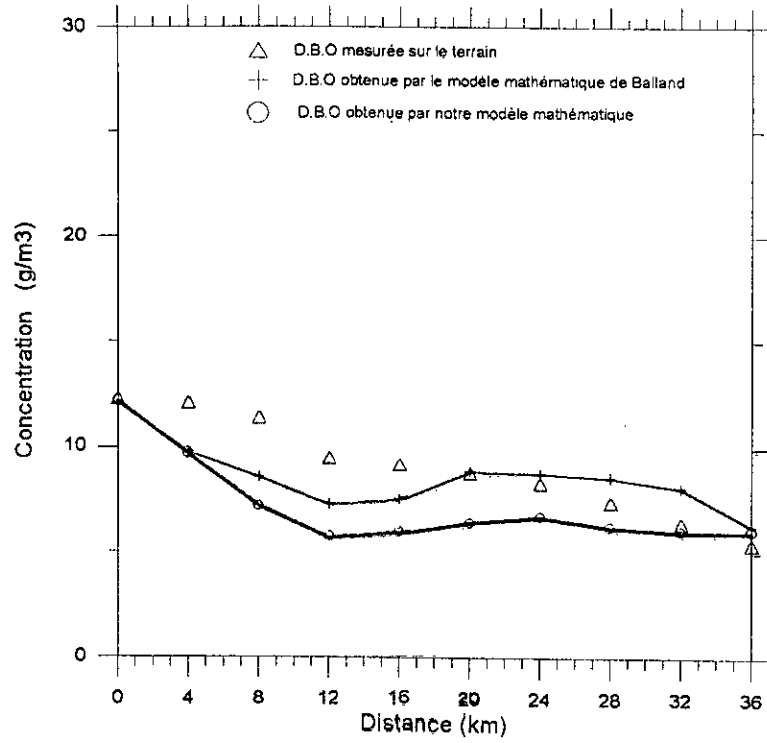


à 00J 16 h  
(i)

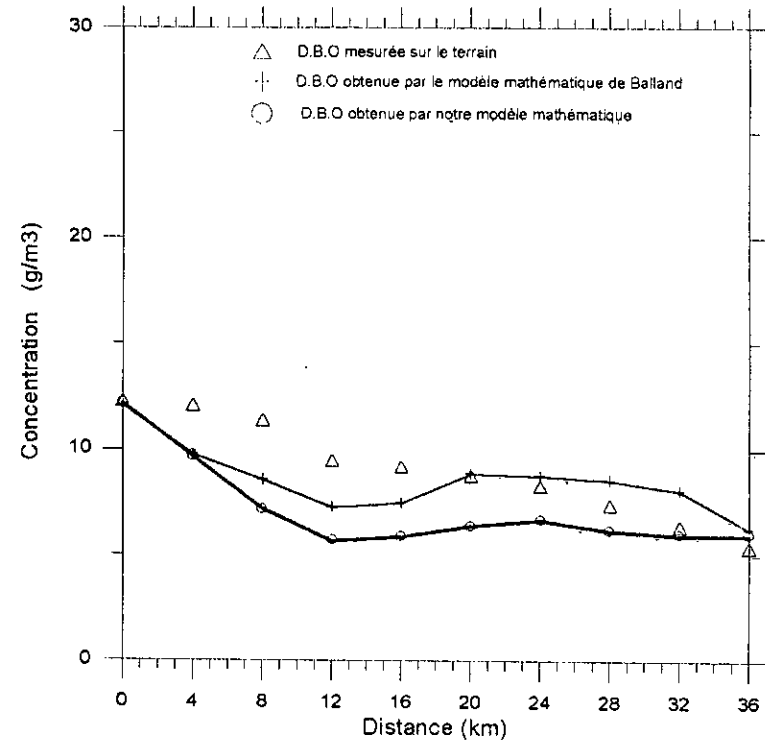


à 00J 18 h  
(i)

Fig (V.6) Profil en long des concentrations D.B.O observées et calculées pour 16 pas de temps



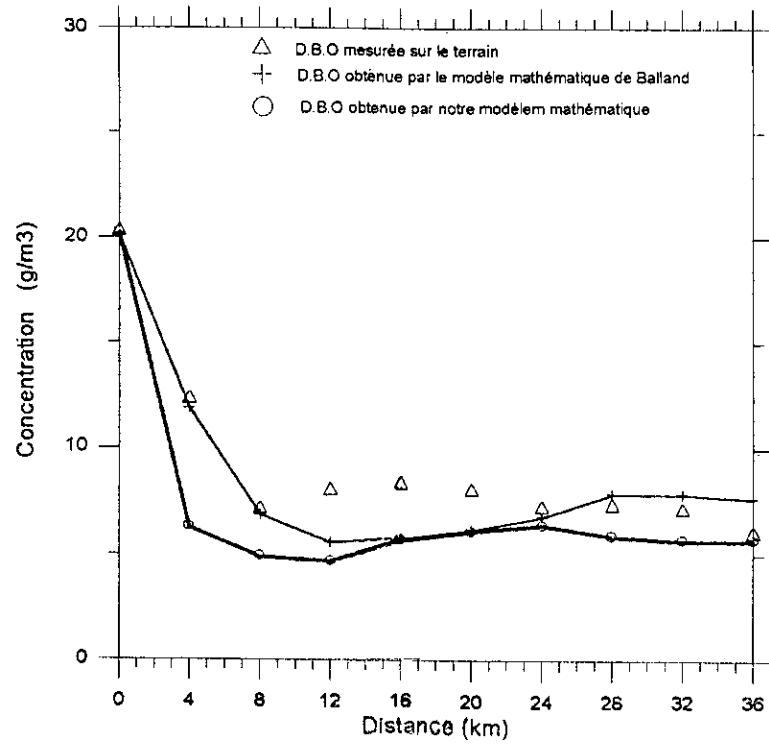
à 00 J 20 h  
(k)



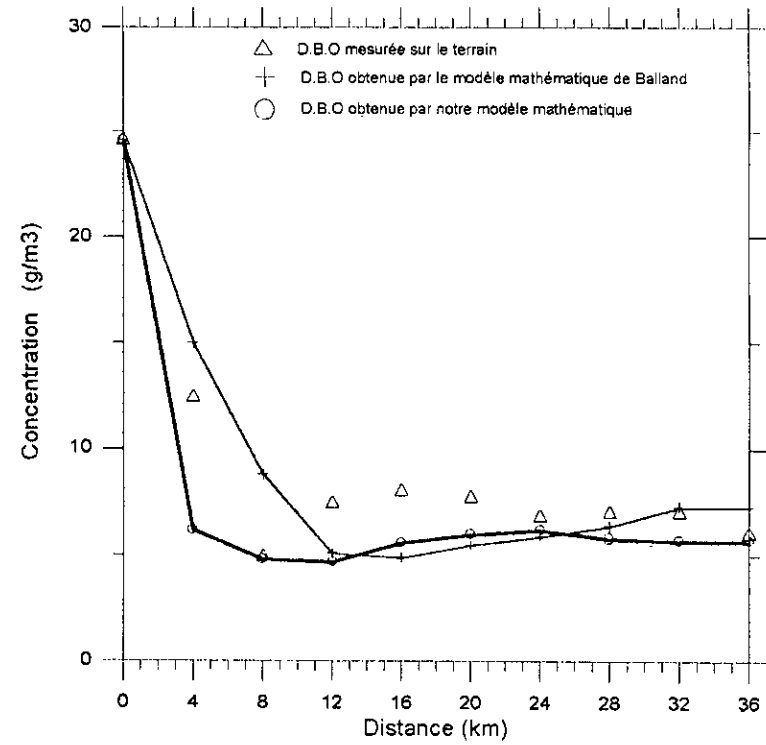
à 00 J 22 h  
(l)



Fig (V.7) Profil en long des concentrations D.B.O observées et calculées pour 16 pas de temps

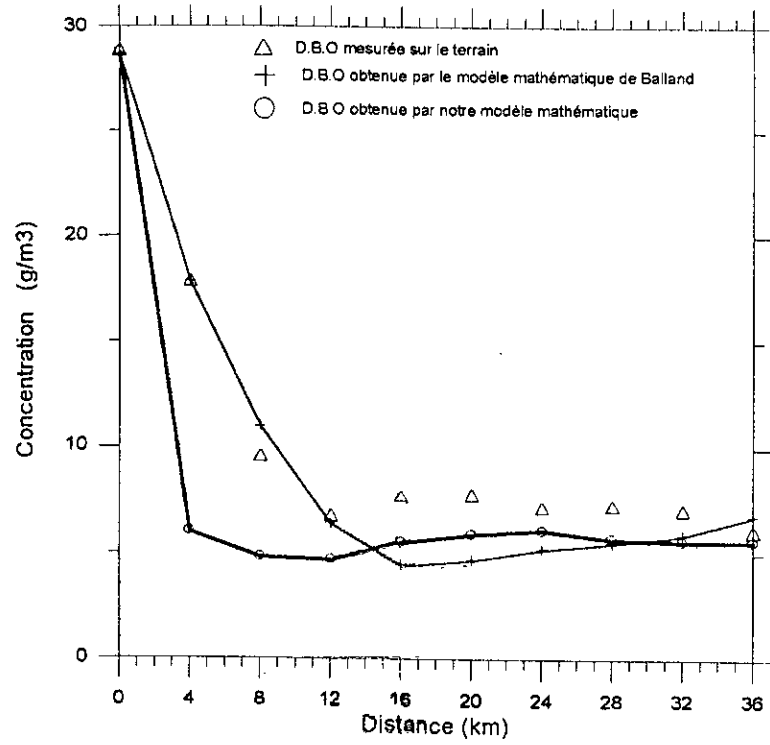


à 01 J 00 h  
(m)

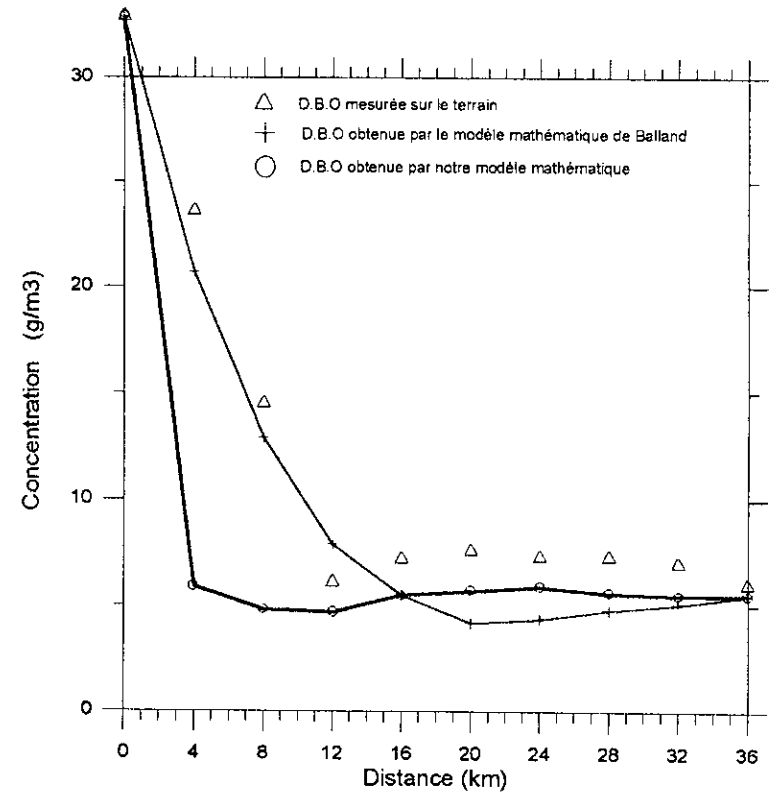


à 01 J 02 h  
(n)

Fig (V.8) Profil en long des concentrations D.B.O observées et calculées pour 16 pas de temps

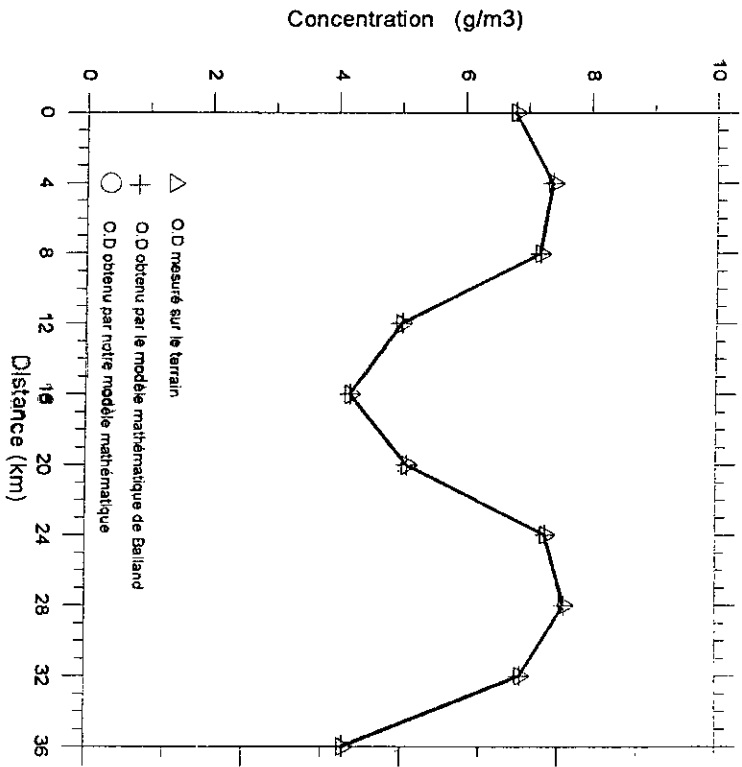


à 01 J 04 h  
(e)

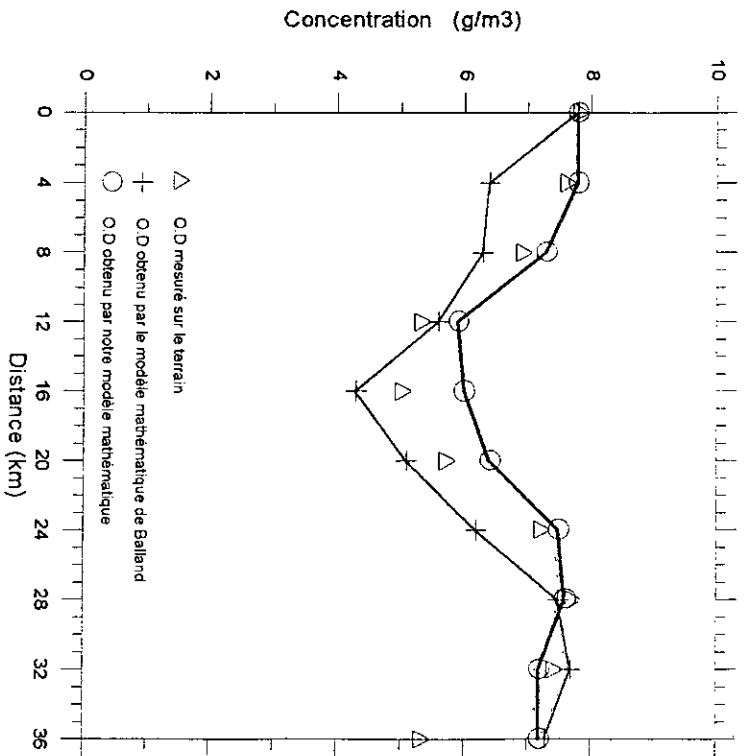


à 01 J 06 h  
(p)

Fig (7.9) Profil en long des concentrations O.D observées et calculées pour 16 pas de temps

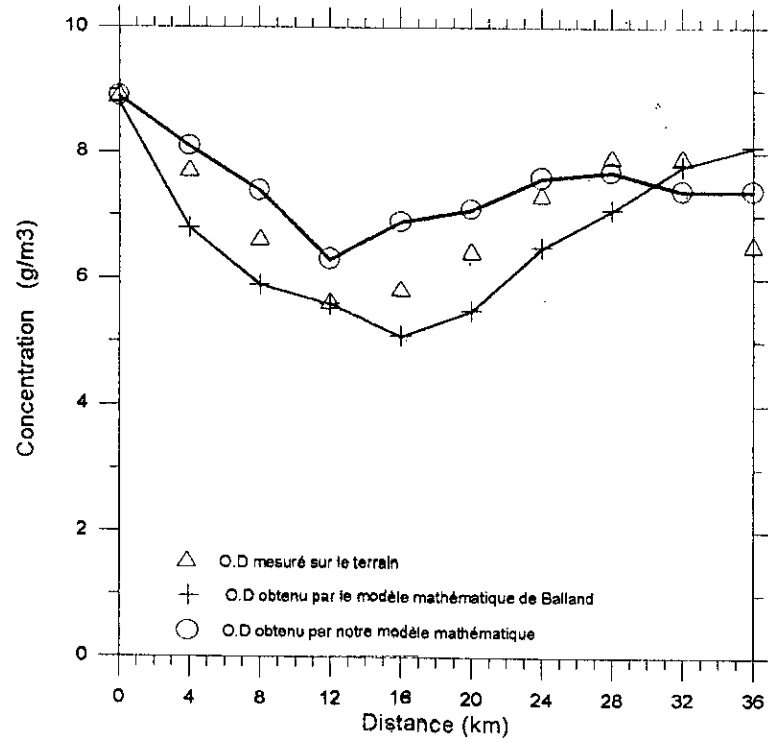


à 00J00h  
(a)

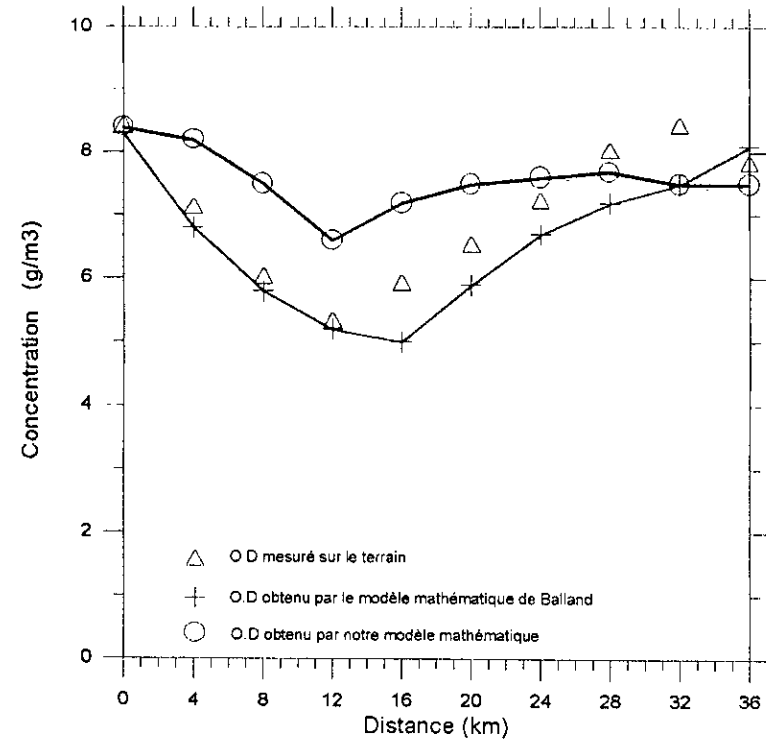


à 00J02h  
(b)

Fig (V.10) Profil en long des concentrations O.D observées et calculées pour 16 pas de temps

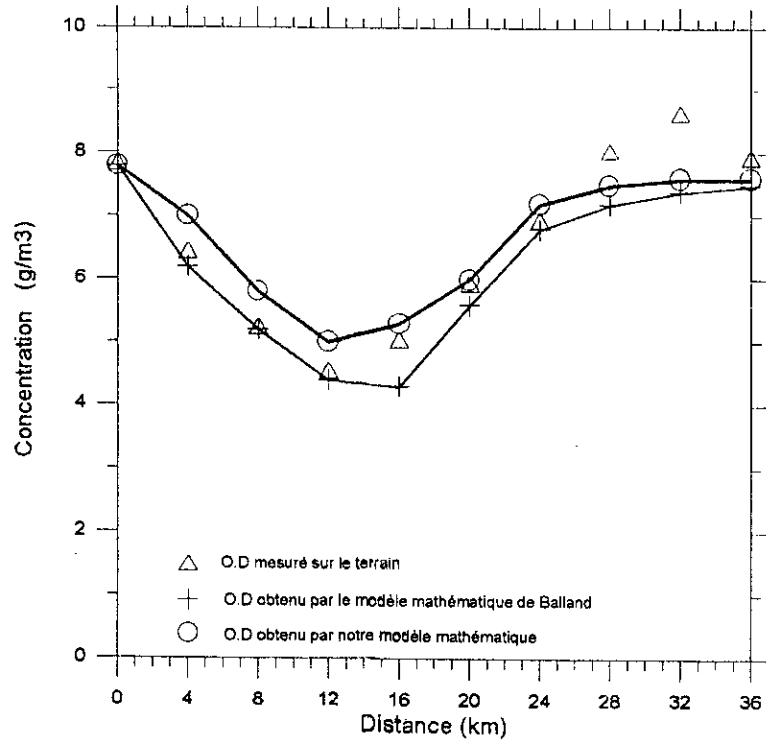


à 00 J 04 h  
(c)

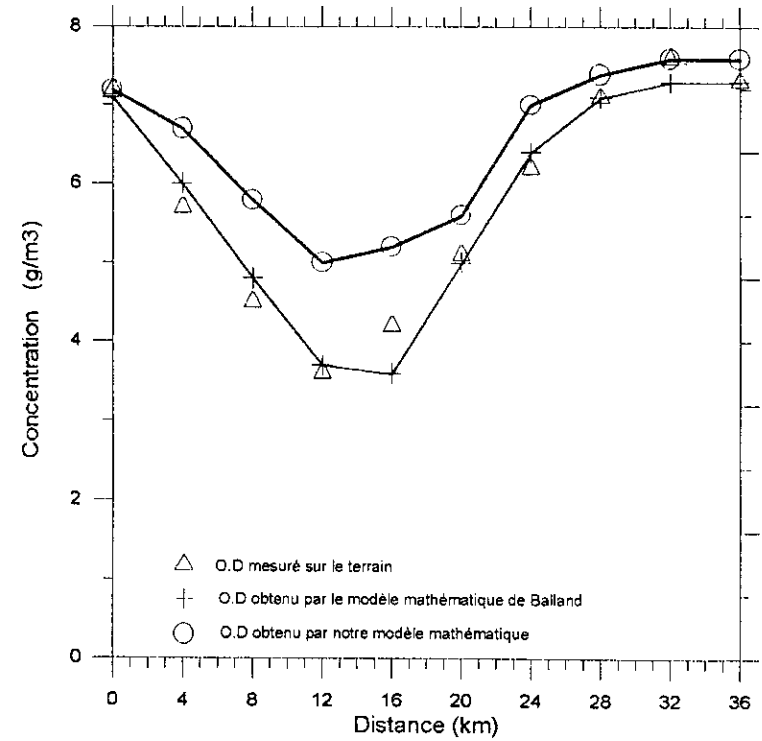


à 00 J 06 h  
(d)

Fig (V.11) Profil en long des concentrations O.D observées et calculées pour 16 pas de temps

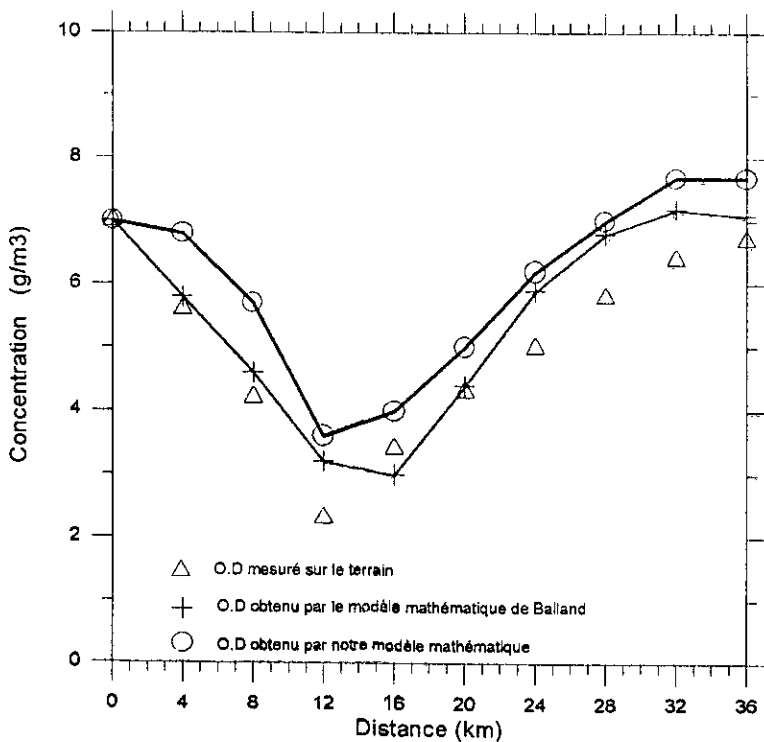


à 00 J 08 h  
(e)

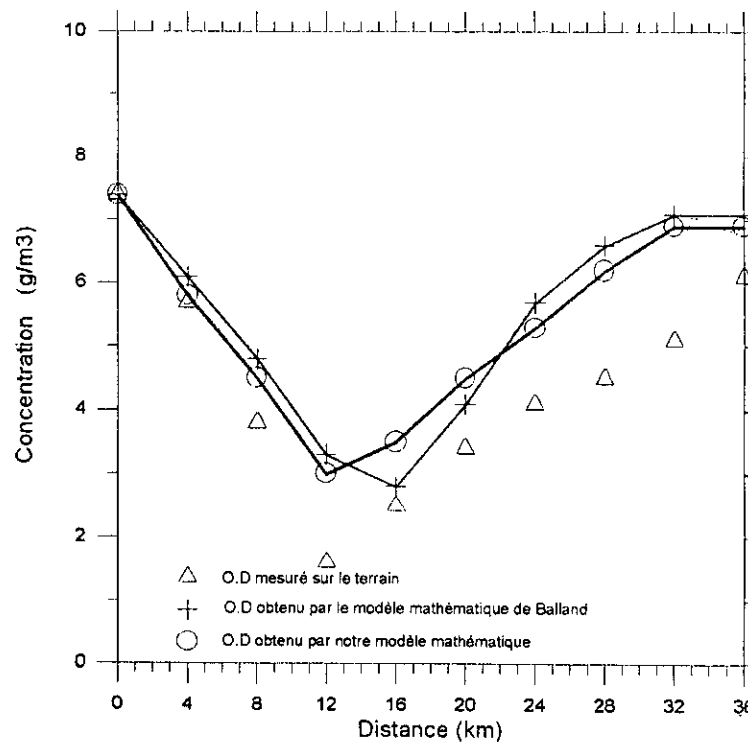


à 00 J 10 h  
(f)

Fig (V.12) Profil en long des concentrations O.D observées et calculées pour 16 pas de temps

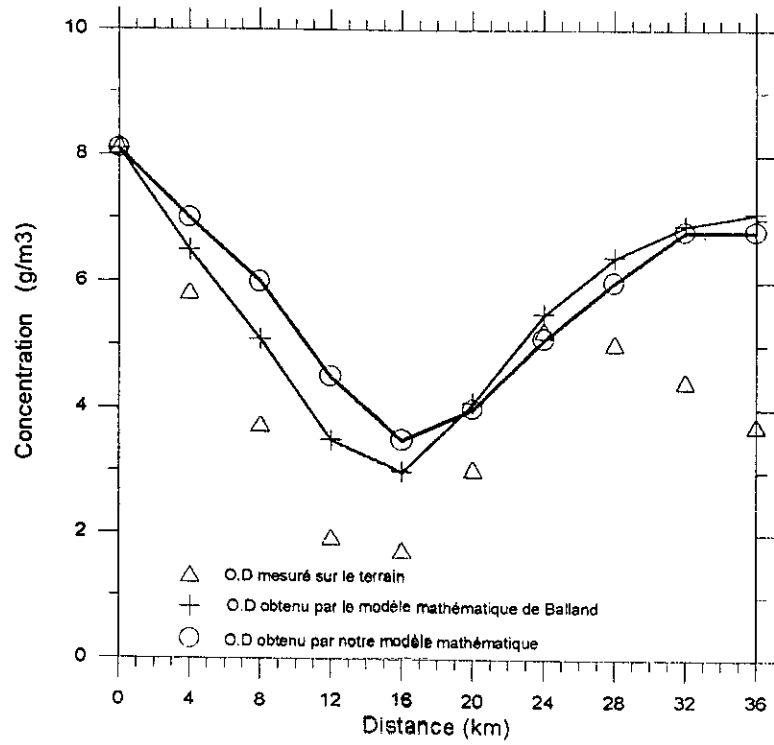


à 00 J 12 h  
(g)

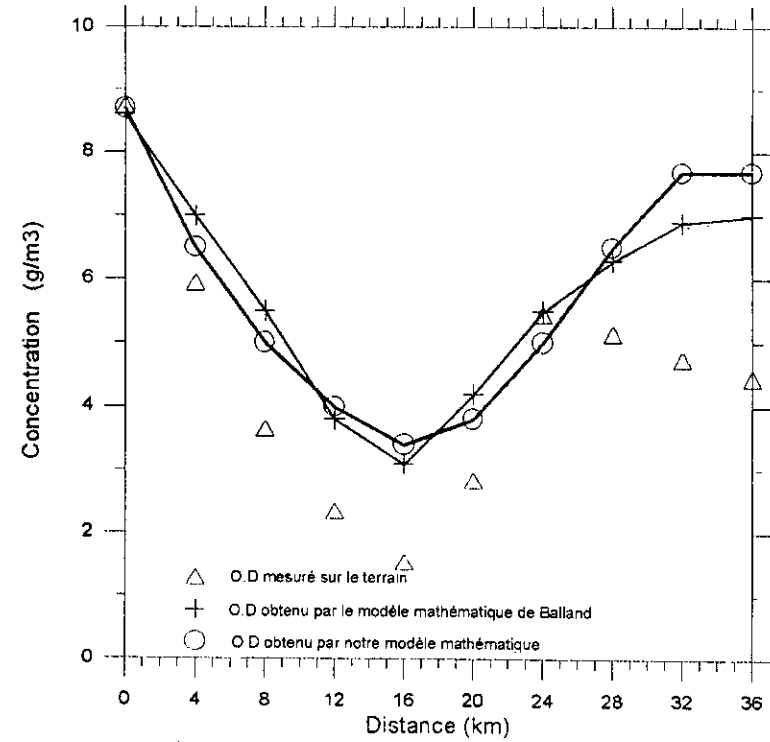


à 00 J 14 h  
(h)

Fig (V.13) Profil en long des concentrations O.D observées et calculées pour 16 pas de temps

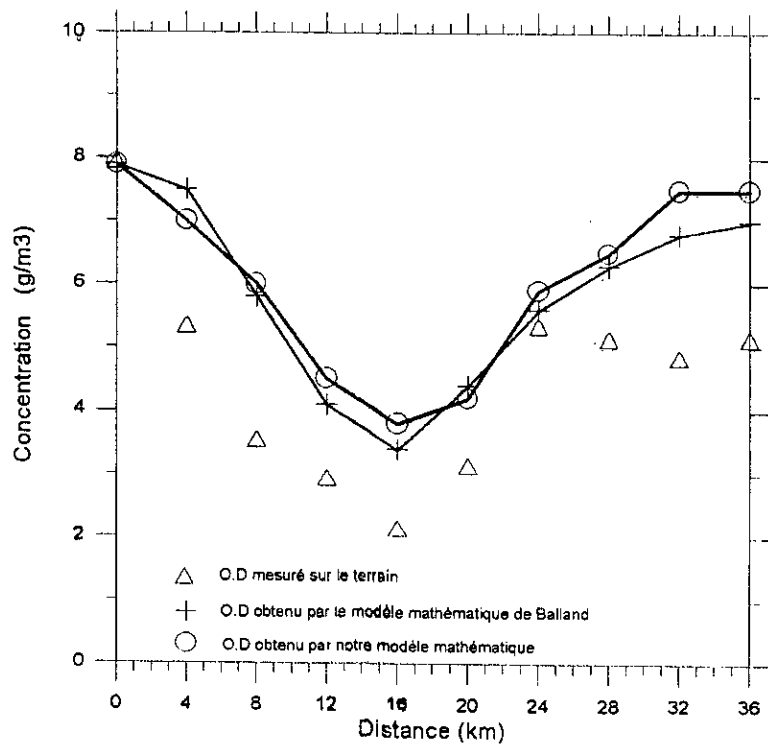


à 00J16h  
(i)

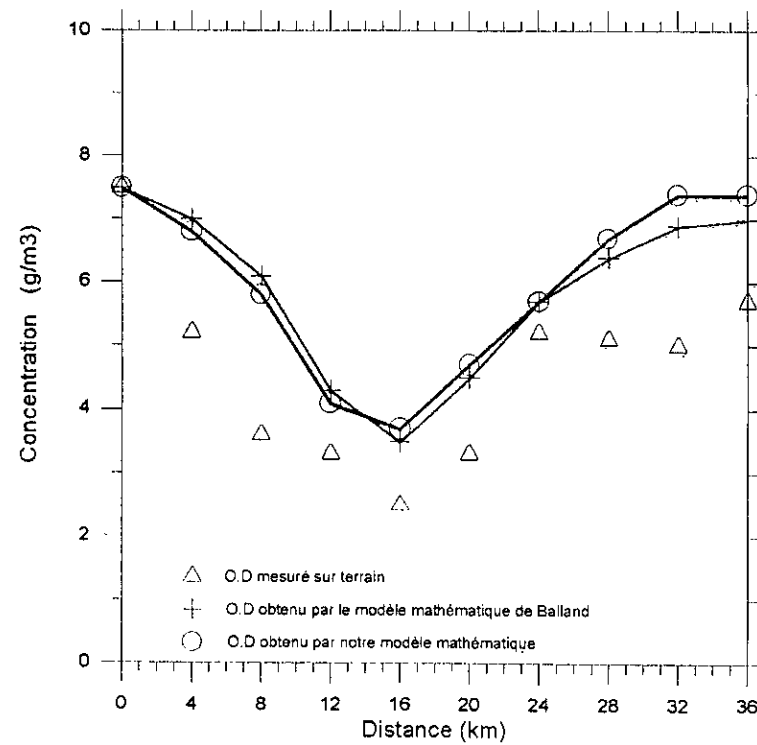


à 00J18h  
(j)

Fig (V.14) Profil en long des concentrations O.D observées et calculées pour 16 pas de temps



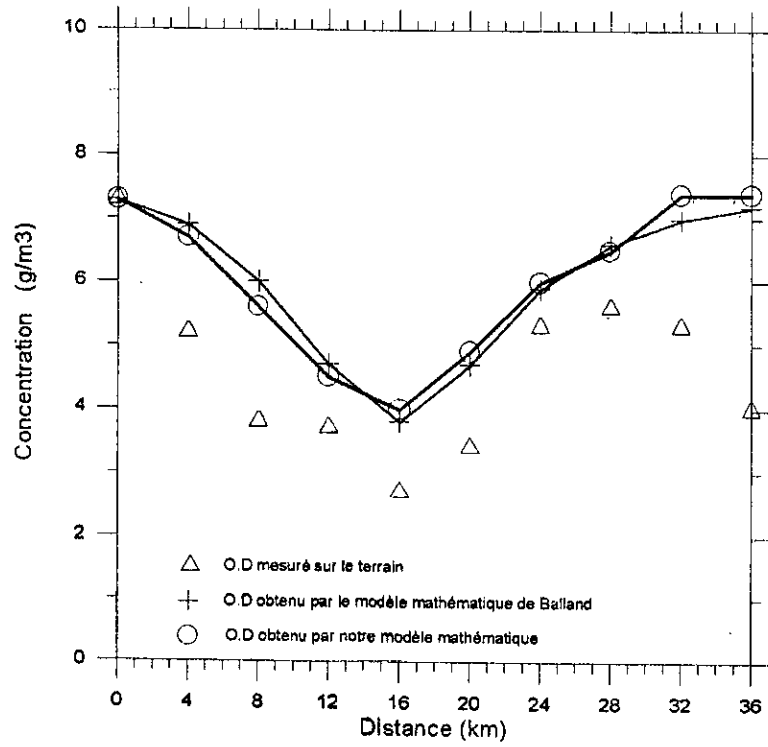
à 00J 20 h  
(k)



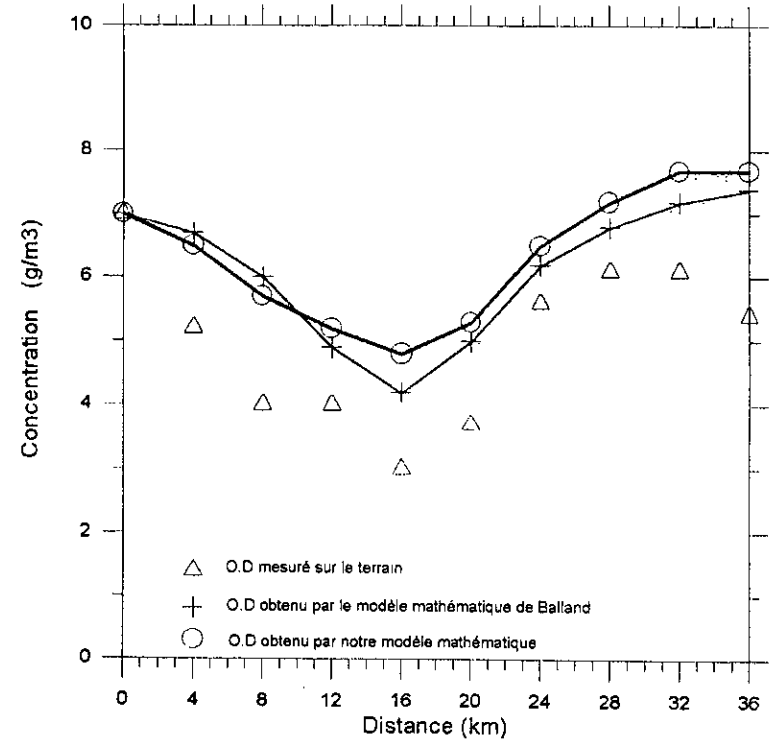
à 00J 22 h  
(l)



Fig (V.15) Profil en long des concentrations O.D observées et calculées pour 16 pas de temps

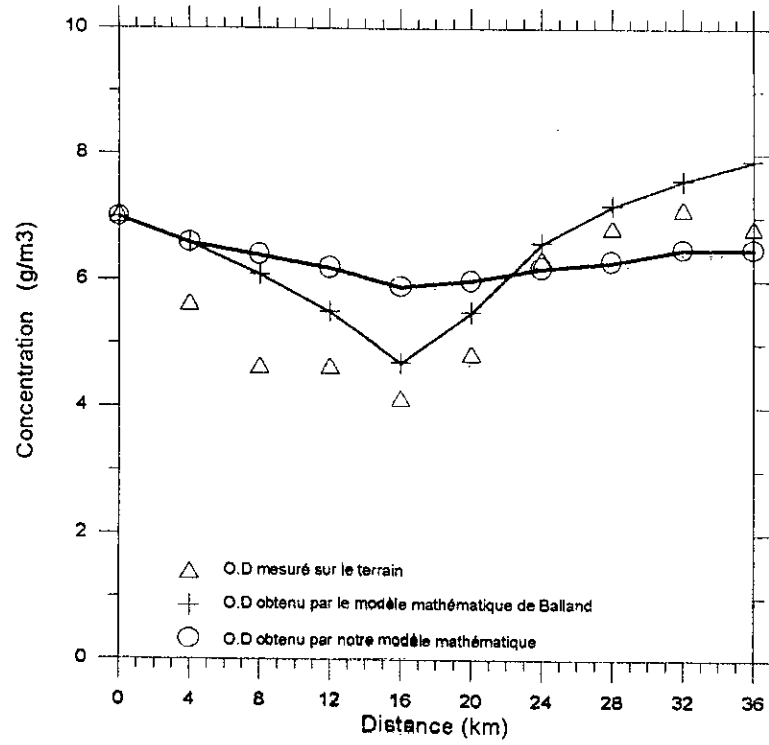


à 01 J 00 h  
(m)

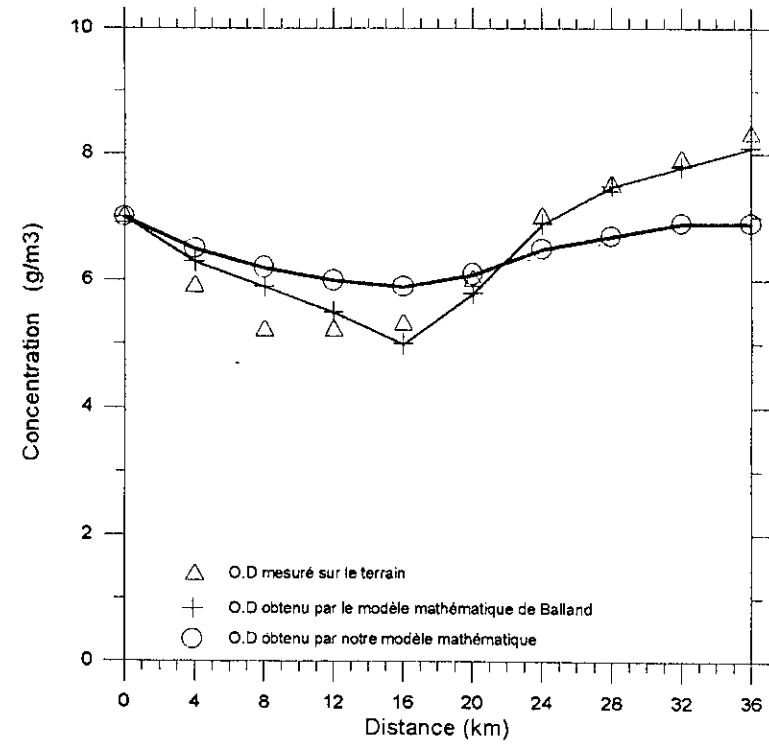


à 01 J 02 h  
(n)

Fig (V.16) Profil en long des concentrations O.D observées et calculées pour 16 pas de temps



à 01 J 04 h  
(o)



à 01 J 06 h  
(p)

## II. INTERPRETATION DES RESULTATS

### II.1 Profils de la demande biochimique en oxygène

Nous remarquons en général, que le modèle mathématique caractérisant l'évolution de la demande biochimique en oxygène donne d'assez bons résultats. Nous remarquons également une bonne adéquation entre la concentration mesurée sur le terrain et la concentration obtenue par notre modèle mathématique, d'autant plus que la concentration calculée reproduit bien les tendances (croissance, décroissance).

Nous particularisons la zone à étudier essentiellement en deux :

- zone I inférieure à 12 km (pas de rejet)
- zone II supérieure à 12 km (rejet)

**Zone I :** Dans cette section, aucun rejet polluant n'est effectué. La demande biochimique en oxygène aura tendance à simuler les caractéristiques d'une fonction décroissante ce qui est d'ailleurs bien reproduit par notre modèle. Il y a dans ce domaine de moins en moins de matières organiques comparé à la section amont. Il y aura donc vers l'aval de ce domaine, de moins en moins de matières *biodégradables* dans le courant de la rivière et donc de moins en moins de demande biochimique en oxygène par les décomposeurs.

**Zone II :** Dans ce secteur, nous remarquons qu'un rejet d'un égout s'effectue au km 12. La demande biochimique en oxygène aura tendance à croître. A l'endroit du rejet d'un égout, il y aura beaucoup de matières organiques à consommer et donc beaucoup de micro organismes qui vont respirer la faible quantité d'oxygène présente dans l'eau. La *demande biochimique en oxygène* va alors augmenter. Après avoir atteint un pic, la *demande biochimique en oxygène* aura tendance à diminuer pour atteindre un équilibre. Vers l'aval, il y aura de moins en moins de matières *biodégradables* dans le courant de la rivière. La rivière s'est donc auto-épurée puisque la *demande biochimique en oxygène* est moins importante qu'en amont (point de rejet).

Pour la quasi-totalité des figures représentées, nous constatons que les valeurs obtenues par notre modèle mathématique sont le plus souvent plus proches des valeurs observées que celles obtenues par le modèle mathématique de Balland.

## II.2 Profils de l'oxygène dissous

Pour ce paramètre, nous remarquons en général une reproduction assez satisfaisante, des tendances ayant trait à l'évolution de la concentration en oxygène dissous. En effet, le progiciel fournit de bon résultats mais, reste quelque peu très tributaire du paramètre Db. Nous avons dû ajuster ce paramètre à plusieurs reprises jusqu'à l'obtention de valeurs acceptables. Le modèle mathématique de Balland reproduit mieux les tendances que le notre.

Nous particularisons également la zone à étudier essentiellement en deux :

- zone I inférieure à 12 km (pas de rejet)
- zone II supérieure à 12 km (rejet)

**Zone I :** dans cette section, aucun rejet polluant n'est effectué. L'oxygène dissous présents dans l'eau aura tendance à simuler les caractéristiques d'une fonction croissante. Il y a dans ce domaine de moins en moins de matières organiques comparé à la section amont. Il y aura alors vers l'aval de ce domaine, de moins en moins de matières *biodégradables* dans le courant de la rivière et donc de plus en plus d'oxygène dissous.

**Zone II :** dans ce secteur, nous remarquons qu'un rejet d'un égout s'effectue au km 12. La pollution organique apportée entraîne un développement du processus de dégradation aérobie normale dans une naturelle. Ceci se traduit à la fois par une augmentation de la consommation d'oxygène – le taux d'oxygène diminue – et une multiplication des micros – organismes de l'eau.



# CONCLUSION GENERALE

Le pouvoir auto-épurateur en rivière est considéré comme un phénomène aléatoire puisqu'il dépend essentiellement des spécificités du milieu où il se trouve.

L'utilisation des modèles mathématiques pour simuler ce phénomène représente un moyen efficace pour se rapprocher de la réalité. Le programme que nous avons élaboré à partir du schéma explicite aux différences finies nous permet donc de suivre l'évolution spatio-temporelle de deux paramètres : la demande biochimique en oxygène et l'oxygène dissous.

Pour le Profil *D.B.O*, nous remarquons en général que le modèle reproduit assez bien les tendances d'évolution du paramètre (croissance, décroissance). Rappelons que ce succès est essentiellement dû à la facilité, mais aussi à la rigueur avec laquelle furent déterminés les paramètres pondérant le processus ( $K_1, K_3, L_a, D_l$ ). Ces paramètres ne sont pas soumis à des variations temporelles (journalières), et ne posent donc pas de problèmes pour leurs estimations.

Pour le Profil *O.D*, après avoir noté une reproduction assez fiable des tendances ayant trait à l'évolution de la concentration pour les premiers pas de temps, nous remarquons pour les pas de temps qui suivent que notre modèle mathématique s'éloigne peu à peu des points mesurés sur le terrain. Ceci s'explique par la difficulté posée par l'estimation du paramètre  $D_B$ , qui a été quelque peu arbitraire. Contrairement aux paramètres pondérant le processus de la *D.B.O*, les paramètres caractérisant l'évolution de l'*O.D*, et plus particulièrement le bilan net de la photosynthèse  $D_b$ , sont soumis à l'évolution temporelle journalière, donc difficile à modéliser vu la complexité et la variation aléatoire du phénomène.

Au vu des résultats obtenus, nous pouvons dire que le modèle reproduit bien les tendances pour le paramètre *D.B.O*, ce qui n'est malheureusement pas le cas pour le second paramètre qu'est l'*O.D*. En effet, le point faible de ce programme est qu'il ne dispose pas « d'autonomie » pour pouvoir estimer le paramètre  $D_b$ , et qu'il est donc nécessaire d'injecter à chaque fois pour chaque incréments temporels la constante correspondante.

Nous n'avons malheureusement pas trouvé de données complètes sur des cours d'eau algériens pour pouvoir effectuer la validation du modèle. Effectivement, le programme nécessite pour son bon fonctionnement la connaissance des données suivantes :

- La vitesse  $u$  (km/j)
- La longueur du bief (km)
- La DBO5 amont (g/m<sup>3</sup>)
- Le point de rejet (km)
- Les MES dans les quatre sections (g/m<sup>3</sup>) Voir chapitre III.
- Le temps (min)
- Facteur de dilution
- Le débit (m<sup>3</sup>/s)
- La DBO apportée par l'ajout (kg/j)
- La connaissance des valeurs  $C(0,j)$  et  $L(0,j)$  (g/m<sup>3</sup>)
- La connaissance des valeurs  $C(i,0)$  et  $L(i,0)$  (g/m<sup>3</sup>)

Enfin pour terminer, nous laissons la voix libre à tous ceux qui veulent apporter des améliorations en augmentant la qualité des résultats numériques et élaborer de nouvelles techniques qui permettent une description toujours plus fine des phénomènes physiques. Il serait éventuellement intéressant de faire une interprétation du présent modèle, dans un avenir proche en phase bidimensionnelle et , d'effectuer en conséquence les mesures expérimentales adéquates ( mesure des différents coefficients).

## ***ANNEXE DU PROGICIEL***

---

Le progiciel élaboré permet de suivre l'évolution du pouvoir auto-épurateur le long d'un cours d'eau à travers la simulation de deux paramètres ; à savoir la demande biochimique en oxygène (D.B.O) et l'oxygène dissous (O.D). le présent logiciel permet une interprétation du phénomène en phase monodimensionnelle. En effet, le programme fournit dans un tableau les valeurs de la D.B.O et l'O.D correspondantes aux différents pas de temps et d'espace considérés.

Pour ce faire, il est nécessaire d'avoir recours au préalable à certaines données mesurées in - situ sur le cours d'eau. Ces mesures se résument à la connaissance des données suivantes :

- La vitesse  $u$  (km/j)
- La longueur du bief (km)
- La DBO5 amont (g/m<sup>3</sup>)
- Le point de rejet (km)
- Les MES dans les quatre sections (g/m<sup>3</sup>) Voir chapitre III.
- Le temps (min.)
- Facteur de dilution
- Le débit (m<sup>3</sup>/s)
- La DBO apportée par l'ajout (kg/j)
- La connaissance des valeurs  $C(0,j)$  et  $L(0,j)$  (g/m<sup>3</sup>)
- La connaissance des valeurs  $C(i,0)$  et  $L(i,0)$  (g/m<sup>3</sup>)

## BIBLIOGRAPHIE

| N°   | AUTEUR  | Titre de l'ouvrage  | Revue   | Edition  |
|------|---|---|---|--|
| [1]  | <b>P. BALLAND</b>                             | "Modèle d'autoépuration en rivière. Régime permanent - Application à l'Ill (Alsace)"  | Cebedeau N°498,31-44  | Cebedoc 1985   |
| [2]  | <b>J.L. BESEME</b>                            | "Rapport général de la question "rives, rivières, riverains et écosystèmes aquatiques"  | La Houille Blanche N° 1/2-1997                                    |  |
| [3]  | <b>R. BONNEFILLE</b>                          | "Cours d'Hydraulique maritime"  |   | Ed. Masson 1980                                      |
| [4]  | <b>BONTOUX</b>                                | "Introduction à l'étude des eaux douces"  |   | Ed. Cebedoc  |
| [5]  | <b>J. BORMANS</b>                             | "Analyse des eaux résiduaires industrielles"  |   | Ed. Eyrolles 1974                                    |
| [6]  | <b>M. CARLIER</b>                             | "Hydraulique générale et appliquée"   |   | Ed. Eyrolles 1980                                    |
| [7]  | <b>C. CHIBANE</b>                             | "Etude du pouvoir auto-épurateur d'un modèle d'eau usée au niveau du laboratoire"   | Thèse d'ingénieur. ENP 1986                                       |  |
| [8]  | <b>COANTIC</b>                                | "Quelques commentaires sur les équations générales de la turbulence océanique"  | Journal de Mécanique.<br>Vol 12-2-1973<br>Référence C180 Mai 1995 |  |
| [9]  | <b>J.A. CUNGE</b>                             | "Modèle mathématiques en hydraulique et en hydrologie"  |   |  |
| [10] | <b>F. EDELINE</b>                             | "L' épuration biologique des eaux résiduaires"  |   | Cebedoc  |
| [11] | <b>F. EDELINE</b>                             | "Modules biologiques immergés pour assister l'autoépuration des rivières"   | Cebedeau  |  |
| [12] | <b>D. EUVRARD</b>                             | "Résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Différences finies, éléments finis, méthodes des singularités"                     |   | 2ème Ed. 1993  |
| [13] | <b>K. GAID</b>                                | "Epuraton biologique des eaux usées urbaines"   |   | OPU 1984   |
| [14] | <b>GAUJOUS</b>                                | "La pollution des milieux aquatiques aide-mémoire"  |   |  |
| [15] | <b>P. GERMAIN</b><br><b>P. MULLER</b>         | "Introduction à la mécanique des milieux continus"  |   | Ed. Masson   |
| [16] | <b>N. HADJ-RABIA</b>                          | "Contribution à l'étude d'un modèle numérique bidimensionnelle de transport de sédiments en suspension"   | Thèse de Magister. ENP 1994                                       |  |
| [17] | <b>A. HAUGUEL</b>                             | "Méthodes et outils numériques en mécanique des fluides"  | La houille blanche n° 3 - 1986                                    |  |
| [18] | <b>R. KELLY</b>                               | "Models fo water quality management"  |   | Ed. Mc Graw-Hill                                     |
| [19] | <b>LANDAU</b>                                 | "Mécanique des fluides"   |   | Ed. Mir  |
| [20] | <b>D. LAROUJ</b>                              | "Contribution à l'étude bidimensionnelle de la dispersion de polluats dans les milieux à découverts par la méthode simple modifiée de PANTAKAR" | Thèse de Magister. ENP 1994                                       |  |
| [21] | <b>J. LARRAS</b>                              | "Cours d'Hydraulique maritime et de travaux maritimes"  |   | Ed. Dunod 1961                                       |
| [22] | <b>J. LARRAS</b>                              | "Physique de la houle et des lames"   |   | Ed. Eyrolles 1979                                    |
| [23] | <b>S. LELIAVSKY</b>                           | "Précis d'Hydraulique fluvial"  |   | Ed. Dunod 1961                                       |
| [24] | <b>L. MASBERNAT</b><br><b>C. CHAUSSAVOINE</b> | "Pouvoir auto épurateur des eaux superficielles"  |   | Publication  |
| [25] | <b>G. NICOLLET</b>                            | "Modèle hydrauliques fluviaux"  | Référence C184 Mai 1991   |  |
| [26] | <b>A. OURABAH</b>                             | "Etude préliminaire du pouvoir auto-épurateur de l'Oued Sebaou"   | Thèse d'ingénieur. ENP 1985                                       |  |
| [27] | <b>PEYRET</b>                                 | "Computational methods for fluid flow"  |   |  |
| [28] | <b>H. ROQUES</b>                              | "Fondements théoriques du traitement biologique des eaux"   |   | Technique et documentation 1979<br>Ed. Eyrolles 1985 |
| [29] | <b>A. STROHMEIER</b>                          | "FORTRAN 77"  |   |  |
| [30] | <b>WILEY</b>                                  | "International journal for numerical methods in fluids"   |   |  |