



Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Hydraulique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
En vue de l'obtention du diplôme
D'ingénieur d'état en Génie Hydraulique

Thème

**SIMULATION NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT VISQUEUX
AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE OU EN ROTATION
A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS**

Proposé et dirigé par :

M^r. A. BILEK
M^r. O. BELHADJ

Etudié par :

M^{rs}. Mourad. BOUKROUNA
Mohamed. SOUALMI

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Hydraulique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
En vue de l'obtention du diplôme
D'ingénieur d'état en Génie Hydraulique

Thème

**SIMULATION NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT VISQUEUX
AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE OU EN ROTATION
A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS**

Proposé et dirigé par :

M^r. A. BILEK
M^r. O. BELHADJ

Etudié par :

M^{rs}. Mourad. BOUKROUNA
Mohamed. SOUALMI

Promotion 1999

Résumé :

Dans ce travail on étudie l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'un cylindre circulaire fixe puis en mouvement de rotation uniforme par la résolution numérique des équations de Navier-Stokes par la méthode des différences finis. On examine l'influence du nombre de Reynolds sur la formation et la structure du sillage en aval ainsi que les efforts résultants.

En fin, on simule l'écoulement autour d'un cylindre fixe avec aspiration à la parois où on examine le comportement des différents paramètres hydrodynamiques, ainsi que l'influence de la vitesse d'aspiration.

Summary :

This paper presents a study of the viscous incompressible flow past a circular cylinder at rest then in rotating motion through the numerical resolution of Navier-Stokes equations by the finite differences method. The effects of the Reynolds number and the rotating speed of the cylinder on the formation and the structure of the wake are investigated both with the generated effort.

Finally, we simulate the flow past a circular cylinder at rest with an aspiration on the wall where we investigate the behaviour of the hydrodynamic parameter and the influence of the aspiration's speed..

ملخص:

في هذا البحث ندرس حركة سائل لزج غير قابل للضغط حول أسطوانة ثابتة ، ثم متحركة بحركة دورانية منتظمة ، وذلك بحل معادلات NAVIER STOKES ندرس تأثير العدد REYNOLDS في تشكل وبنية الاضطراب المولد خلف الأسطوانة ، وكذا القوى الناتجة عن ذلك . في الأخير ، نمثل الحركة حول أسطوانة ثابتة بإحداثيات إمتصاص على سطحها ، حيث ندرس تصرف مختلف العوامل الهيدروديناميكية ، وتأثير سرعة الإمتصاص .

MOTS CLEFS

Aspiration ;
Cylindre fixe ; - en rotation ;
Décollement ;
Détachement
Discrétisation
Ecoulement ;
Instationnaire ;
Laminaire ;
Maillage ;
Perturbation ;
Schéma numérique ;
Sillage ;
Simulation ;
Stationnaire ;
Tourbillon ;
Visqueux ;
Vortex.



NOMENCLATURE

Γ	: Circulation ;
ψ	: Fonction de courant ;
ρ	: La masse volumique ;
ϕ	: Potentiel des vitesses ;
Ω	: Vecteur tourbillon ;
ν	: Viscosité cinématique ;
μ	: Viscosité dynamique ;
ω	: Vorticité ;
$\Delta\theta$: Incrément suivant la direction tangentielle ;
Ω_{rc}	: Vitesse angulaire ;
Δt	: Incrément temps ;
Δz	: Incrément suivant la direction radiale ;
a	: Constante arbitraire ;
$Asprt$: Vitesse d'aspiration ;
C_d	: Coefficient de traînée ;
C_l	: Coefficient de portance ;
C_p	: Coefficient de pression ;
F	: Force hydrodynamique ;
f	: Fréquence d'apparition des tourbillons de Bénard-Karman ;
M	: Dimension du maillage suivant la direction z ;
N	: Dimension du maillage suivant la direction θ ;
P	: Pression ;
P_∞	: Pression à l'infini ;
Q	: Débit d'une source ;
r	: Coordonnée radiale ;
r_a	: Rayon du cylindre ;
Re	: Nombre de Reynolds ;
S	: Nombre de Strouhal ;
S_1	: Point d'arrêt ;
S_2	: Point d'arrêt ;
t	: Paramètre temps ;
u	: Composante de la vitesse selon l'axe x ;
v	: Composante de la vitesse selon l'axe y ;
U_∞	: Vitesse de l'écoulement libre à l'infini ;
V_θ	: Composante tangentielle de la vitesse ;
V_r	: Composante radiale de la vitesse ;
V_{rc}	: Vitesse de rotation du cylindre ;
z	: Coordonnée radiale adimensionnelle ;
Z	: Variable complexe.

REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Nous remercions vivement nos chères parents pour leurs soutient moral et d'avoir mis en notre disposition tous les moyens nécessaires.

Nous tenons à exprimer ici notre profonde reconnaissance à Monsieur BILEK et Monsieur BELHADJ qui nous ont permis d'entamer ce sujet et nous ont guidés tout au long de ce travail.

Nous remercions également les perles de l'Ecole Nationale Polytechnique, Aami Saleh, Krimo et leurs collègues de la bibliothèque centrale pour leurs gentillesse inouïs.

Ces remerciements sont aussi à M^r OUNNAR K-rine de la marine & CO pour leurs aide précieuse.

Nous offrons une rose à chaque personne ayant participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire de fin d'études. Spécialement à M^{elle} S. BENMAMAR qui a gardée sa porte toujours grand ouverte pour chacun de nous.



DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A ma mère qui a veillé sur ma bonne éducation.
A mon père qui a voulu me voir réussir et a qui je dois beaucoup.
A mes frères et sœurs.
A ma grand mère qui occupe une grande place dans mon cœur.
A tous les gens de ma promotion.
A tous mes amis de l'ENP et d'ailleurs.
A tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

Mourad

Je dédie ce modeste travail en guise de reconnaissance à :

Ma très chère mère que j'aime plus que tout au monde, ainsi qu'à sa mère qui m'aime plus que le sel

Toute ma famille, mon unique sœur Mademoiselle Anissa et mon petit frère Khanziz, sans oublier ma nièce Hanane, et mes neveux Manyou et Ranckousse.

Mon très chers amis Moh Houta que dieu m'a envoyé du ciel pour me dépanner au moment crucial.

Nounou qui m'a prêté deux disques durs mignons, que je remercie d'ailleurs fortement.

K-mel qui m'a hébergé quand j'étais dans le besoin. A sa petite sœur Khélole ainsi qu'à toute sa famille qui m'a reçu comme un de leur tribu.

Tous les membres du Cœur Polytechnicien et de Techno-Pol.

Haloucha, Amel.B, Lydia, Sihem, Tata Meriam, Ferial, Douda, Lylia, Alfe, Salim, Mina Moh, L'Aftchése, Kais, Mehdi, Kada, Ainsi qu'à Imad et tous les Grym'lins.

Tous mes amis Magistères.

En fin, mais pas trop, A Monsieur SOILHOU Hanafi &CO

Moh

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE

1- L'EFFET MAGNUS	1
2- LA TURBOVOILE	1
3- PRINCIPE DE L'EFFET MAGNUS	2
4- EXPERIENCE ILLUSTRANT L'EFFET MAGNUS	4

APPROCHE THEORIQUE

CHAPITRE I

ECOULEMENT DE FLUIDES VISQUEUX	7
I.1 EQUATIONS DE NAVIER-STOKES	7
I.2 NOMBRE DE REYNOLDS :	7
I.3 ECOULEMENTS ENTIÈREMENT VISQUEUX	9
I.4 FORMULATION U- v- P DES ÉQUATION DE NAVIER-STOKES.	10
I.4.1 Conditions initiales	10
I.4.2 Condition aux limites	10
I.4.2.1 Problème du cylindre fixes	10
I.4.2.2 Problème du cylindre tournant	10
I.4.3 Calcul de la pression	11
I.5 FORMULATION Ψ - ω	11

CHAPITE II

ECOULEMENT POTENTIEL

II.1 INTRODUCTION	13
II.2 ECOULEMENT IRROTATIONNEL	13
II.3 MOUVEMENTS ÉLÉMENTAIRES D'UNE PARTICULE FLUIDE	14
II.4 NOTION DE CIRCULATION	14
II.5 ETABLISSEMENT DE L'ÉQUATION DE LAPLACE	15
II.5.1 Méthodes de résolution de l'équation de Laplace	16
II.5.2 Ecoulements potentiels élémentaires	16
II.6 ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE	17
II.6.1 Ecoulement sans circulation	17
II.6.2 Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation	18
II.7 LES FORCES HYDRODYNAMIQUES AGISSANT SUR UN CORPS EN MOUVEMENT	21
II.7.1 Coefficients de portance et de traînée	22



.1 INTRODUCTION	23
.2 ETAT DE CONNAISSANCES	24

CHAPITRE III

MODÉLISATION NUMERIQUE	27
III.1 MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIS	27
III.1.1 Conditions de convergence ^{[10],[13]}	29
III.2 LA MÉTHODE ADI ^{[2],[10],[13]}	29
III.3 ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS	32
III.4 DISCRÉTISATION NUMÉRIQUE	34
III.4.1 Domaine d'intégration	34
III.4.2 Le Maillage	34
III.5 RÉOLUTION NUMÉRIQUE	36
III.5.1 Résolution de l'équation de la fonction de courant	36
III.5.2 Résolution de l'équation du transport de Vortex	37
III.5.2.1 Formulation A.D.I	37
III.5.3 Calcul des vitesses	41
III.6 CONDITIONS INITIALES	41
III.7 CONDITIONS AUX LIMITES	41
III.7.1 Problème du cylindre fixe	41
III.7.1.1 Condition sur ψ :	41
III.7.1.2 Conditions sur ω	42
III.7.2 Problème du cylindre tournant	43
III.7.2.1 Condition sur ψ	43
III.7.2.2 Conditions sur ω	44
III.8 CALCUL DE LA PRESSION À LA SURFACE DU CYLINDRE	44
III.9 COEFFICIENTS DE PORTANCE ET DE TRAÎNÉE	45

CHAPITRE IV

EXPÉRIMENTATION NUMÉRIQUE	
IV.1 PRÉSENTATION DES APPLICATIONS	47
IV.2 CYLINDRE FIXE	48
IV.2.1 Confrontation et Validation	48
IV.2.1.1 Variation du coefficient de traînée	48
IV.2.1.2 Répartition du vortex à la surface du cylindre	49
IV.2.1.3 Positions du décollement	50
IV.2.1.4 Lignes de courant	51
IV.2.2 investigation en régime instationnaire	52
IV.2.2.1 Perturbations physiques et numériques	52
IV.2.2.2 Applications	53
IV.2.2.2.1 Champs de vitesses	53
IV.2.2.2.2 Evolution du coefficient de portance C_L	53
IV.2.2.2.3 Evolution du coefficient de traînée C_D	57
IV.2.2.3 Limites d'applications	57
IV.2.2.3.1 Exemple d'application a Reynolds=1000	57

IV.3	CYLINDRE EN ROTATION	61
IV.3.1	<i>Confrontation et Validation</i>	61
IV.3.1.1	Répartition du vortex à la surface du cylindre	61
IV.3.1.2	Evolution des coefficients de portance et de traînée	61
IV.3.1.3	Lignes de courant	65
IV.3.2	<i>Investigation en régime instationnaire</i>	68
IV.3.2.1	Présentation de l'application	68
IV.3.2.2	Etude des profils de vitesse	68
IV.3.2.2.1	Evolution de u sur l'axe x	69
IV.3.2.2.2	Evolution de v sur l'axe x	70
	Evolution selon l'axe y	71
IV.4	CONCLUSION	72
CHAPITRE V		
ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE AVEC ASPIRATION À LA PAROIS		
V.1	PRINCIPE DE L'ASPIRATION	74
V.1.1	<i>moyens de contrôle de la couche limite</i>	74
V.1.2	<i>Caractéristiques de la turbovoile</i>	74
V.2	APPLICATION	75
V.2.1	<i>manipulations numériques</i>	75
V.2.2	<i>Écoulement stationnaire</i>	76
V.2.2.1	Présentation des expérimentations	76
V.2.2.2	Discussion des résultats	76
V.2.2.2.1	Evolution des coefficients de portance et de traînée	76
V.2.3.1.1.1	Variation de C_D en fonction de Re	79
V.2.3.1.1.2	Variation de C_L en fonction de $Asprt$	80
V.2.2.2.2	Représentation graphique des efforts	81
V.2.2.2.3	Lignes de courant	82
V.2.3	<i>Écoulement instationnaire</i>	86
V.2.4	<i>Conclusion</i>	86
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES		87
ANNEXE A		
DIFFÉRENTS RÉGIMES D'ÉCOULEMENT		89
ANNEXE B		
TOPOLOGIE DE L'ÉCOULEMENT REEL		91
ANNEXE C		
RESULTATS DE LA SIMULATION RELATIF AU CYLINDRE TOURNANT		95
ANNEXE D		
RESULTATS DE LA SIMULATION RELATIF AU CYLINDRE AVEC ASPIRATION		113
BIBLIOGRAPHIE		125

APPROCHE THEORIQUE

CHAPITRE I

ÉCOULEMENT DE FLUIDES VISQUEUX

I.1	EQUATIONS DE NAVIER-STOKES	7
I.2	NOMBRE DE REYNOLDS :	7
I.3	ÉCOULEMENTS ENTIÈREMENT VISQUEUX	9
I.4	FORMULATION U- V- P DES ÉQUATION DE NAVIER-STOKES.	10
I.5	FORMULATION Ψ - ω	11

CHAPITE II

ÉCOULEMENT POTENTIEL

II.1	INTRODUCTION	13
II.2	ÉCOULEMENT IRROTATIONNEL	13
II.3	MOUVEMENTS ÉLÉMENTAIRES D'UNE PARTICULE FLUIDE	14
II.4	NOTION DE CIRCULATION	14
II.5	ÉTABLISSEMENT DE L'ÉQUATION DE LAPLACE	15
II.6	ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE	17
II.7	LES FORCES HYDRODYNAMIQUES AGISSANT SUR UN CORPS EN MOUVEMENT	21

INTRODUCTION GENERALE

La première énergie utilisée dans la navigation maritime a été bien évidemment l'énergie du vent, qui grâce aux voiles propulsait les navires. De nos jours elle n'est utilisée que pour la navigation de plaisance. Mais depuis quelque temps cette énergie semble refaire surface. Des tentatives ont été faites depuis le début du siècle pour utiliser d'autres éléments que la voile. Ceci est réalisé grâce à l'**effet Magnus**.



1- L'EFFET MAGNUS

L'effet Magnus a été découvert par **Newton** et mis en évidence expérimentalement à partir des recherches du physicien allemand **Heinrich Gustav Magnus** en **1853**. Cet effet consiste à faire tourner, à l'aide d'un moteur, un cylindre lisse dans le vent ce qui donne à ce dernier une poussée (force horizontale) qui lui permet de remplacer la voile classique.

En 1925, l'Allemand **Anton Flettner** équipa un vieux voilier «**Le Barbara**» de deux cylindres rotatifs et traversa l'Atlantique. Deux ans plus tard il renouvela cette performance à bord d'un cargo «**Le Bucko**». Ces bateaux furent appelés **bateaux à cylindres** ou encore **rotor de Flettner**.

2- LA TURBOVOILE

Mise au point dans son principe par le professeur français **Lucien Malavard** et son élève **Bertrand Charrier** en **1982**, la turbovoile, variante de l'effet Magnus, permet entre autre d'éviter de faire tourner le cylindre à vitesse élevée.

La turbovoile a d'abord été expérimentée avec «**le moulin à vent I**» de la **Fondation COUSTEAU**, en **1983**, puis avec l'**Alcyone**, «**ex : moulin à vent II**».

L'alcyone est propulsée grâce à l'action combinée de deux moteurs diesels et de deux turbovoiles. La turbovoile induit une portance exceptionnelle égale à plusieurs fois celle d'une voile classique de même surface projetée, ses dimensions sont donc relativement réduites.

Ce système a permis des économies d'énergie de 25 à 35% lors du voyage inaugural de l'Alcyon, en mai-juin 1985. Des ordinateurs permettent de régler ces turbovoiles en fonction de l'orientation du vent et d'obtenir ainsi les meilleurs rendements, en plus de la réduction de l'encombrement sur les ponts des bateaux, et la réduction du nombre d'équipages nécessaires pour les différentes manœuvres de navigation.

3- PRINCIPE DE L'EFFET MAGNUS

Considérons un cylindre placé dans un écoulement d'un fluide de la gauche vers la droite, voir figure 1-(a). Ce cylindre offre une résistance représentée par la force \vec{F} . La création de cette force est liée au sillage qui apparaît derrière le cylindre. Elle est d'autant plus importante que le corps est moins profilé. Dès que le cylindre entre en rotation, voir figure 1-(b), la force \vec{F} change de direction ; elle se décompose en une force de portance P perpendiculaire à l'écoulement et en une force de traînée R dans le sens de l'écoulement. L'intensité de la portance dépend de la vitesse de rotation du cylindre, de la vitesse du fluide et des dimensions du cylindre.

L'inconvénient est de faire tourner des cylindres hauts et de grands diamètres. Pour éviter cet inconvénient, l'équipe de la Fondation Cousteau donc, avec le professeur Lucien Malavard, eurent l'idée d'empêcher le décollement des filets d'air aux points de décrochage, en aspirant une partie de la couche limite (piège à couches limites).

Un volet placé dans la partie arrière inférieure du profil permet de séparer les écoulements d'intrados et d'extrados, voir figure 1-(c). La symétrie exige que deux zones soient prévues vers l'arrière et de part et d'autre du plan de symétrie mais une seule est utilisée, l'autre est donc occultée par un carénage qui se déplace autour de l'arrière du cylindre et qui porte le petit volet de l'intrados, il est chargé d'occulter les zones d'aspiration non utilisées. Un carénage elliptique a été rajouté à l'avant pour diverses raisons liées en particulier à la stabilité de fonctionnement voire figures 2-(a et b).

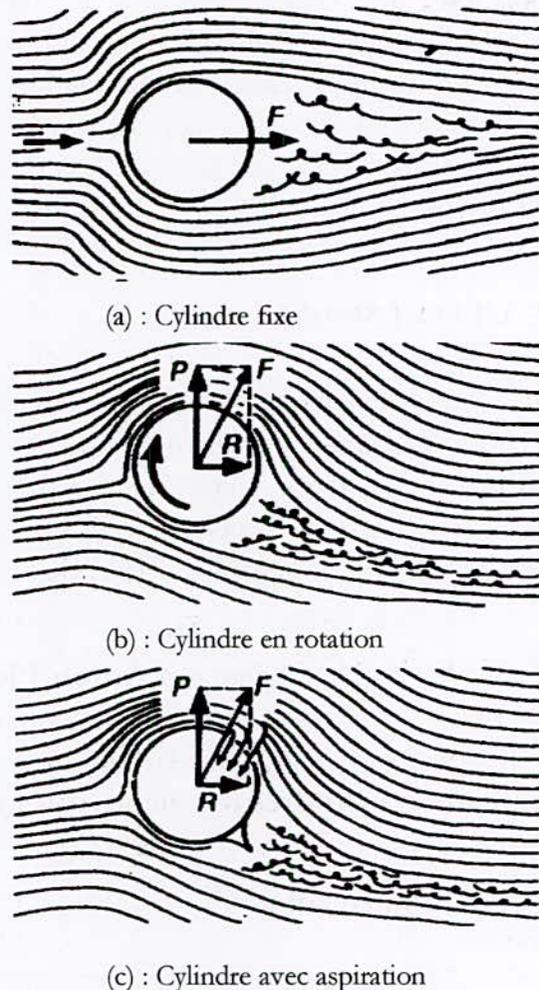


Figure 1

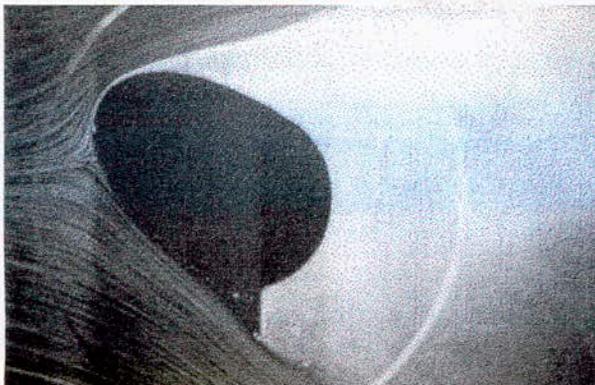


Figure 2-(a) : Ecoulement autour de la turbovoile sans aspiration [17]

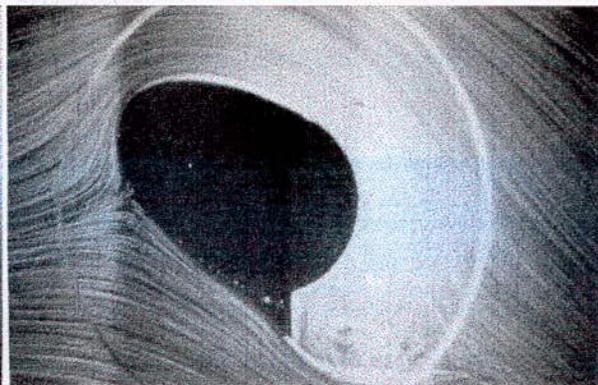


Figure 2-(b) : Ecoulement autour de la turbovoile avec aspiration [17]

Les termes intrados et extrados étant utilisés par analogie avec ceux adoptés pour désigner le dessus et le dessous d'un profil d'aile. Voir figure 3.

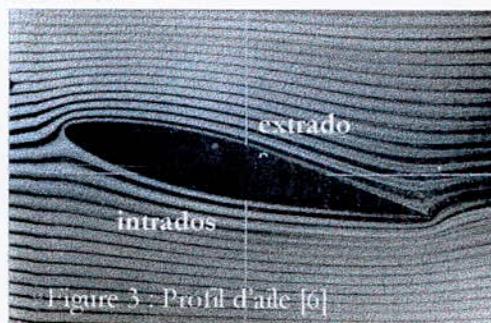


Figure 3 - Profil d'aile [6]

L'aspiration, de niveau modeste, est réalisée grâce à un ventilateur situé à l'une des extrémités du cylindre. (l'extrémité haute sur un navire).

La seule énergie réellement dépensée correspond à celle utilisée pour entraîner le ventilateur. Elle est très approximativement égale au sixième de celle utilisée pour entraîner l'hélice d'un navire à propulsion uniquement marine, évoluant à la même vitesse. S'y ajoute, mais elle est négligeable, l'énergie du système utilisée(cerveau moteur) pour l'orientation.

On ne pourra continuer sans indiquer l'énorme utilité et profit de l'effet Magnus dans le domaine du sport. En effet, une balle animée d'un mouvement de rotation autour d'elle même pendant son mouvement de translation développe également la force de Magnus. Ce phénomène est illustré dans chaque match de football où des buts spectaculaires sont marqués grâce à cet effet qui donne une trajectoire inattendue au ballon, et il l'est aussi dans les tournois de tennis et autres disciplines.

4- EXPERIENCE ILLUSTRANT L'EFFET MAGNUS

L'apparition de la force de Magnus peut être mise en évidence par une simple expérience. En faisant rouler un cylindre en papier sur une table inclinée, il est évident que cette rotation, acquise par le cylindre, se conserve dans la chute. En tombant, elle engendre une force qui dirige le cylindre sous la table. Voir figure 4.

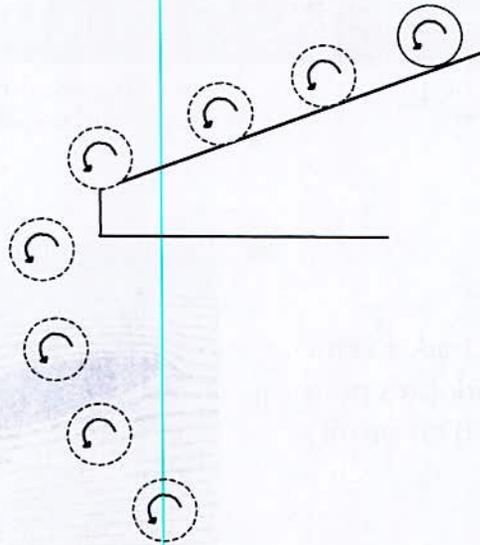


Figure 4 : Expérience pour la mise en évidence de l'effet Magnus

APPROCHE THEORIQUE

Pour pouvoir dire que l'on connaît les caractéristiques de l'écoulement d'un fluide, il faut déterminer le vecteur vitesse \vec{V} , la densité ρ , la pression P et la température T dans tout l'écoulement.

Si on connaît les propriétés internes du fluide, à savoir la viscosité dynamique μ , le coefficient de transfert de chaleur λ , la chaleur spécifique à volume constant C_v et la chaleur spécifique à pression constante C_p , on peut déterminer les six variables u , v , w , ρ , P et T comme fonction de (x, y, z, t) et ceci grâce aux équations suivantes :

- Equation de continuité qui exprime la conservation de la masse.
- Equation de quantité de mouvement qui est exprimée par l'application de la loi de Newton :

Pour un fluide réel (**newtonien**), on obtient les équations générales dites de **Navier-Stokes**. Pour un fluide parfait (**idéal**), on obtient les équations d'**Euler**.

- Equation de l'énergie qui exprime le principe de conservation de l'énergie .
- Equation d'état thermodynamique qui donne une relation entre les variables d'état.

D'après la dynamique des fluides, on dispose des équations nécessaires pour déterminer les six variables inconnues auxquelles on rajoute les conditions initiales et aux limites. Mais ce n'est pas évident de les résoudre d'autant plus que ces équations sont non linéaires.

Pour enlever la difficulté, on apporte des simplifications suite à des suppositions et à des hypothèses comme par exemple :

- De ne pas considérer le problème de transfert thermique ou d'échange de chaleur.
- De considérer le fluide incompressible.
- De considérer l'écoulement irrotationnel, permanent et à une ou deux dimensions seulement, suite à une symétrie éventuelle.

Ainsi ces équations simplifiées restent toujours plus au moins difficiles à résoudre.

CHAPITRE I

ÉCOULEMENT DE FLUIDES VISQUEUX

I.1 EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Les équations de Navier-Stokes sont l'expression directe du principe fondamental de la dynamique, pour un fluide visqueux incompressible. L'équation vectorielle est donnée par :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} + \text{grad } P = \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{I-1})$$

I.2 NOMBRE DE REYNOLDS :

En écriture adimensionnelle, en rapportant les longueurs, les vitesses et la masse dans ces équations à une longueur L , une vitesses V et une masse ρL^3 caractéristiques simultanément, on verra apparaître un nombre adimensionnel particulier qui est le nombre de Reynolds.

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (\text{I-2})$$

avec :

- V : vitesse de l'écoulement à l'infini, par exemple ;
- L : longueur caractéristique (le diamètre d'un cylindre ou la corde d'un profil...);
- ν : la viscosité cinématique du fluide : $\nu = \mu/\rho$;
- μ : la viscosité dynamique du fluide ;
- ρ : la masse volumique du fluide.

Le nombre de Reynolds mesure le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité (ou de frottement). Il est d'une très grande importance dans la théorie des maquettes, où deux écoulements semblables ne peuvent se déduire l'un de l'autre, même s'ils ont la même géométrie, sauf s'ils ont le même nombre de Reynolds d'où son intérêt dans la transposition des résultats.

Dans la pratique, μ est petit et Re est grand, les équations (I-1) sont donc un complexe problème de perturbations singulières ^[17], dans lesquelles les termes du second ordre (les plus élevés) sont en facteur d'un coefficient (μ ou Re^{-1}) très petit ceci se traduit le long des parois par des zones de perturbations et de variations très rapides de la vitesse du type "**couche limite**".

Dans de telles zones dites "**de cisaillement**", bien que μ soit petit, certains taux de déformation étant grands, les contraintes correspondantes ont une importance non négligeable.

C'est dans ces zones, pour des nombres de Reynolds grands, que la viscosité se manifeste fortement, ailleurs dans les zones extérieures le fluide se comporte comme étant parfait; au moins en première approximation.

lorsque le nombre de Reynolds dépasse un certain seuil Re^* , dit Reynolds critique, l'écoulement change radicalement de nature et prend un caractère aléatoire. C'est le ***régime turbulent***.

Ce régime est caractérisé par un spectre d'écoulement très large où une multitude de phénomènes interviennent. En particulier les phénomènes à petite échelle, par effet cumulatif, finissent par influencer sur les phénomènes à grande échelle. En plus, pour calculer de tels écoulements, il faudrait des calculateurs très puissants. Finalement pour des nombre de Reynolds assez grands, en tridimensionnel, il semble qu'il y ait un doute sur la validité des équation de Navier-Stokes. Non seulement on n'a pas l'unicité de la solution, mais on connaît même des contres exemples. ^[17]

C'est pourquoi on préfère faire des résolutions pour des nombres de Reynolds inférieurs à Reynolds critique Re^* , où le régime dans ce cas est dit ***laminaire***.

I.3 ECOULEMENTS ENTIEREMENT VISQUEUX

Pour des nombres de Reynolds très faibles, l'influence de la viscosité du fluide s'exerce dans la totalité de l'écoulement, contrairement aux écoulements à nombre de Reynolds élevé, ou elle ne se manifeste que dans la couche limite.

Si on considère le fluide incompressible et à propriétés physiques constantes, une méthode de calcul approchée a été développée et qui consiste à négliger les termes d'inertie dans les équations de Navier-Stokes.

Avec ces hypothèses les équations du mouvement permanent se simplifient et prennent la forme dite de Stokes.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{V} = 0 \\ \vec{0} = -\operatorname{grad} P + \mu \Delta \vec{V} \end{cases} \quad (\text{I-3})$$

Il est à noter que dans le cas d'une sphère en atmosphère illimitée il est possible d'établir une solution analytique à ce problème, mais pour un écoulement plan autour d'un cercle, aucune solution ne satisfait à la fois la condition d'adhérence à la paroi $\vec{V}_p = 0$ et un comportement asymptotique à l'infini physiquement acceptable. Cette observation constitue le paradoxe de Stokes^{[6],[14]}.

I.4 FORMULATION U- V- P DES EQUATION DE NAVIER-STOKES.

On peut écrire les équations (I-1) sous une forme, plus éclatée comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I-4})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I-5})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I-6})$$

Pour résoudre ces équations, il existe une multitude de méthodes numériques (différences finies, volumes finis, éléments finis...), et il faut choisir la méthode convenable, ainsi que la spécification des conditions initiales et les conditions aux limites.

I.4.1 Conditions initiales

De bonnes conditions initiales sont indispensables pour le problème de l'écoulement transitoire. Pour l'écoulement permanent $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$, on peut se contenter de simples conditions arbitraires.

I.4.2 Condition aux limites

I.4.2.1 Problème du cylindre fixes

On suppose qu'à l'infini, $r = R_\infty$, l'écoulement n'est pas perturbé par la présence du cylindre, donc on peut le considérer irrotationnel. En prenant en considération la condition d'adhérence des particules fluides à la paroi solide, on peut écrire les conditions suivantes :

$$u = v = 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r = r_a \quad (I-7)$$

$$\begin{cases} u = -U_\infty \cos \theta \\ v = U_\infty \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \rightarrow R_\infty \quad (I-8)$$

I.4.2.2 Problème du cylindre tournant

Maintenant le cylindre est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe à une vitesse constante Ω_{rc} .

On suppose que lorsque le temps tend vers l'infini, il existe un état stationnaire^[15], et en utilisant la même hypothèse d'écoulement irrotationnel à l'infini amont et aval de l'écoulement, on peut écrire :

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = r_a \Omega_{rc} \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad r = r_a \quad (I-9)$$

$$\begin{cases} u = -U_\infty \cos \theta \\ v = U_\infty \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad r \rightarrow R_\infty \quad (I-10)$$

I.4.3 Calcul de la pression

On peut supposer pour la pression relative, qu'à l'infini; loin du cylindre, elle est nulle, mais la complexité et la difficulté se posent pour les conditions à la paroi car la pression n'est pas connue.

Pour enlever cette difficulté parmi tant d'autres, on peut recourir à une autre formulation des équations de Navier-Stokes.

I.5 FORMULATION Ψ - ω

L'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse, implique qu'il existe une fonction ψ (x, y, t), qui est la fonction de courant, tel que:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{I-11})$$

où u et v sont les composantes cartésiennes du vecteur vitesse.

D'autre part on définit le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ par

$$\vec{\Omega} = r\vec{\omega} \quad (\text{I-12})$$

Dans le cas plan ce vecteur n'a qu'une seule composante ω suivant la direction \vec{k} perpendiculaire au plan de l'écoulement :

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{I-13})$$

En prenant le rotationnel de l'équation (I-1) et on éliminant la pression on obtient :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + r\vec{\omega}(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) = \nu \Delta \vec{\Omega} \quad (\text{I-14})$$

En faisant des transformations adéquates on peut écrire l'équation(I-14) sous la forme :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\omega) + \frac{\partial}{\partial y}(v\omega) = \nu \Delta \omega \quad (\text{I-15})$$

En utilisant l'équation (I-2), on peut, encore, écrire l'équation (I-14) sous la forme quasi linéaire :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega \quad (\text{I-16})$$

En considérant les équations (I-13) et (I-15) on déduit l'équation

$$\Delta \psi = -\omega \quad (\text{I-17})$$

Cette dernière équation est appelée équation de la fonction de courant.

L'équation (I-16) est appelée équation du tourbillon (ou transport du tourbillon), qui permet de calculer ω lorsque les vitesses sont connues.

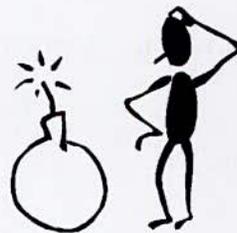
Cette dernière équation est non linéaire contrairement à l'équation (I-17) à cause des termes $u \frac{\partial \omega}{\partial x}$ et $v \frac{\partial \omega}{\partial y}$ dits termes de convection, et peut être écrite définitivement en fonction de ψ compte tenu des équations (I-11) comme suit :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega \quad (\text{I-19})$$

Le système d'équations (I-17) et (I-19) constituent la formulation des équations de Navier-Stokes en fonction de ψ et ω

Donc on vient de diminuer le nombre d'équations et d'inconnues à deux seulement.

Une fois ce système résolu, on peut calculer la pression, la méthode utilisée sera précisée dans le chapitre IV.



CHAPITE II

ECOULEMENT POTENTIEL

II.1 INTRODUCTION

Un écoulement incompressible d'un fluide non visqueux est totalement décrit par l'équation de continuité et les équations d'Euler.

La notion de fluide parfait est basée sur le fait de poser dans les équations de Navier-Stokes $\mu=0$ (viscosité nulle). Cette élimination engendre une perte d'information, du fait qu'il n'existe pas de fluide parfait au sens stricte. Cependant pour des nombres de Reynolds $Re \gg 1$, les effets dus à la viscosité sont confinés près de la parois dans une couche d'épaisseur très petite. Ce qui permet de considérer l'écoulement du fluide parfait, c'est à dire dénué de tout effet de viscosité.

Même privées des termes visqueux, les équations générales restent difficiles à résoudre, il existe une classe intéressante de solutions à rechercher c'est celle pour laquelle la vitesse dérive d'un potentiel :

$$\vec{V} = \text{grad}\phi$$

Cette hypothèse est la conséquence directe de la condition nécessaire et suffisante qui est l'irrotationalité et qui permet la mise en œuvre de méthodes plus simples que celles consistant à résoudre les équations d'Euler.

II.2 ECOULEMENT IRROTATIONNEL

Dans les régions d'écoulements loin des parois solides où le fluide peut être considéré comme non visqueux, l'écoulement est dit irrotationnel et on a alors la condition :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot}\vec{V} = \vec{0}$$

II.3 MOUVEMENTS ELEMENTAIRES D'UNE PARTICULE FLUIDE

Au cours du mouvement ,chaque élément de volume de fluide subit des changements de position, d'orientation et de forme. Les composants de base du mouvement d'un élément de fluide sont :

- Une translation,
- Une Rotation :

Cette rotation est caractérisé par un vecteur appelé *vecteur tourbillon* de composantes :

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

- Une déformation angulaire,

Définit par le taux de déformation angulaire :

$$\xi_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \xi_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \xi_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

- et une déformation linéaire.

Qui cause une augmentation du volume de l'élément, elle est caractérisée par :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Cette quantité est appelée *dilatation*.

II.4 NOTION DE CIRCULATION

La circulation autour d'un contour fermé est égale à l'intégrale obtenue le long de ce contour de la composante tangentielle à ce contour de la vitesse

$$\Gamma = \int_c \vec{V} d\vec{s}$$

II.5 ETABLISSEMENT DE L'EQUATION DE LAPLACE

Pour un écoulement irrotationnel, bidimensionnel d'un fluide incompressible, la vitesse dérive d'un potentiel ϕ , et on a :

$$\vec{V} = \text{grad}\phi \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div}\vec{V} = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-2})$$

En combinant les équations (II-1) et (II-2) on obtient l'équation

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II-3})$$

ϕ : est le potentiel des vitesses

L'équation (II-3) est nommée équation de Laplace.

On peut aussi utiliser, pour établir l'équation de Laplace, la fonction Ψ qui est la fonction de courant et qui est liée aux composantes du champs de vitesse par :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

L'hypothèse d'irrotationalité de l'écoulement entraîne :

$$\text{rot}\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} \quad (\text{II-5})$$

soit : $\Delta\Psi = 0$

Les fonctions ϕ et ψ sont toutes deux harmoniques et vérifient les conditions dites de Cauchy

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

II.5.1 Méthodes de résolution de l'équation de Laplace

Il existe différentes méthodes permettant la résolution de l'équation de Laplace pour les écoulements à deux dimensions, nous allons énumérer les plus usuelles :

- i) Méthode des variables complexes,
- ii) Méthode de superposition,
- iii) Méthodes analytiques,
- iv) Méthode des transformations conformes,
- v) Méthodes numériques.

II.5.2 Ecoulements potentiels élémentaires

le tableau ci-dessous est une récapitulation des écoulements potentiels fondamentaux

Écoulement	Potentiel des vitesses	des	Fonction de courant	de	V_x ou V_r	V_y ou V_θ
Uniforme	$\phi = U_\infty x$		$\psi = U_\infty y$		$V_x = U_\infty$	$V_y = 0$
Tourbillon	$\phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$		$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{r}{r_0}$		$V_r = 0$	$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$
Source ponctuelle	$\phi = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{r}{r_0}$		$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$		$V_r = \frac{Q}{2\pi r}$	$V_\theta = 0$
Dipôle	$\phi = -E \frac{\cos \theta}{r}$		$\psi = E \frac{\sin \theta}{r}$		$V_r = E \frac{\cos \theta}{r^2}$	$V_\theta = E \frac{\sin \theta}{r^2}$

Avec :

- (x, y) : coordonnées cartésiennes,
- (r, θ) : coordonnées polaires,
- r_0 : constante arbitraire,
- U_∞ : vitesse de l'écoulement uniforme à l'infini,
- Γ : la circulation,
- Q : débit de la source,
- E : intensité du dipôle.

II.6 ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE

II.6.1 Ecoulement sans circulation

L'écoulement autour d'un cylindre peut être obtenu par la superposition de l'écoulement uniforme à celui d'un doublet, ce qui donne le potentiel complexe :

$$F(Z) = U_\infty \left(Z + \frac{r_a^2}{Z} \right) \quad (\text{II-7})$$

on obtient la fonction de courant et le potentiel de vitesse suivants :

$$\psi = U_\infty \sin \theta \left(r - \frac{r_a^2}{r} \right) \quad (\text{II-8})$$

$$\phi = U_\infty \cos \theta \left(r + \frac{r_a^2}{r} \right) \quad (\text{II-9})$$

avec

$$r = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad Z = x + iy$$

les vitesses sont

$$\begin{cases} V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) \\ V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{r_a^2}{r^2} \right) \end{cases} \quad (\text{II-10})$$

selon (II-10) :

$$V_r = 0 \quad \text{pour} \quad r = r_a$$

$$\text{et} \quad V_\theta = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = 0 \quad \text{et} \quad \pi$$

Les lignes de courant données par $\psi = cte$ sont tracées sur la figure (II-1)

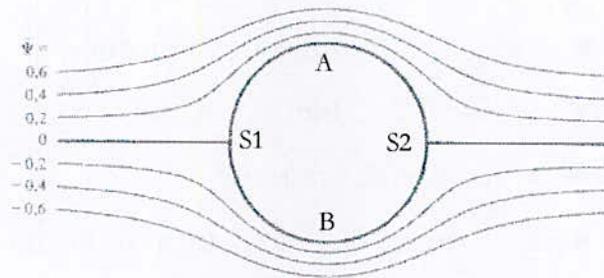


Figure II-1 : Lignes de courant ⁽⁶⁾($\Gamma=0$)

Les deux points S_1 et S_2 sont appelés points d'arrêt.

La vitesse maximale $V_\theta = 2U_\infty$ se produit pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$ aux points A et

B.

La pression sur la surface du cylindre peut être obtenue par l'application du théorème de Bernoulli entre un point sur la surface du cylindre et un point à l'infini, ce qui donne :

$$p = p_\infty + \frac{\rho U_\infty^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (\text{II-11})$$

II.6.2 Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation

On superpose à l'écoulement uniforme autour d'un cylindre, un doublet et un tourbillon, le potentiel complexe résultant est :

$$F(Z) = U_\infty \left(r - \frac{r_a^2}{Z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log Z \quad (\text{II-12})$$

On obtient la fonction de courant et le potentiel de vitesse suivants :

$$\psi = U_\infty \sin \theta \left(r - \frac{r_a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log r \quad (\text{II-13})$$

$$\phi = U_\infty \cos \theta \left(r + \frac{r_a^2}{r} \right) - \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (\text{II-14})$$

Le champ de vitesse est défini comme suit :

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (\text{II-15})$$

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{r_a^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (\text{II-16})$$

On peut constater que les conditions aux limites $V_r = 0$ et $V_\theta = 0$ sur la surface du cylindre ($r = r_a$) sont toujours vérifiées et les deux points d'arrêt S1 et S2 sont déplacés d'un angle θ donné par :

$$\sin \theta_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi r_a U_\infty} \tag{II-17}$$

Les lignes de courant autour du cylindre sont tracées sur la figure(II-2) à partir de l'équation (II-13) après l'adimensionalisation suivante :

$$\frac{\psi}{r_a U_\infty} = \frac{r}{r_a} \sin \theta \left[1 - \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \right] - \frac{\Gamma}{2\pi r_a U_\infty} \log \left(\frac{r}{r_a} \right) \tag{II-18}$$

On distingue trois cas :

- Pour $0 < \Gamma < 4\pi r_a U_\infty$ (figure II-2), les deux points S_1 et S_2 sont distincts et la vitesse tangentielle aux points A et B est respectivement :

$$V_{tA} = 2U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi r_a} \quad \text{et} \quad V_{tB} = 2U_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi r_a} \tag{II-19}$$

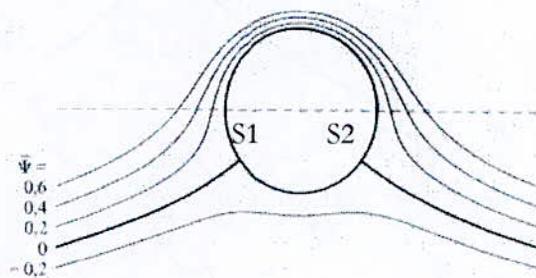


Figure II-2 : lignes de courant^[6]

- Pour $\Gamma = 4\pi r_a U_\infty$ (figure II-4), les deux points S_1 et S_2 coïncident

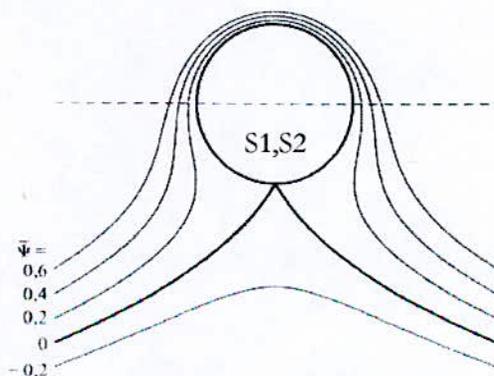


Figure II-4 : lignes de courants tracées d'après l'équation (18) ^[6] ; $\Gamma/r_a U_\infty$

- Pour $\Gamma > 4\pi r_a U_\infty$ (figure II-5) on trouve un seul point d'arrêt dans le champ de l'écoulement à l'extérieur du cylindre. Ce point est donné par la condition de symétrie :

$$V_r = V_\theta = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} :$$

$$-U_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{r_a^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + r_a^2 = \frac{\Gamma r}{2\pi U_\infty} \quad (\text{II-20})$$

En posant $\Gamma = K4\pi r_a U_\infty$, $K > 1$, la position r de ce point devient

$$r = Kr_a + r_a \sqrt{K^2 - 1} \quad (\text{II-21})$$

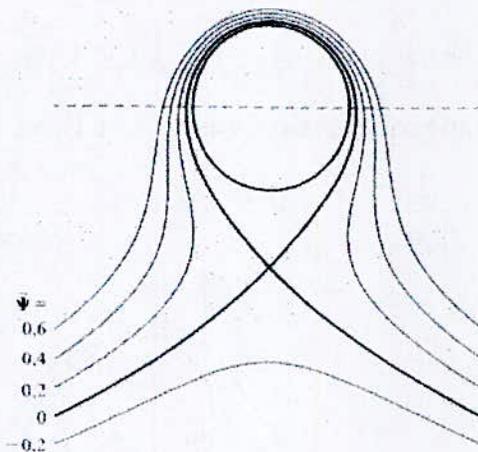


Figure II-5 : Lignes de courant tracées pour le cas $\Gamma = k4\pi r_a U_\infty$

La pression à la surface du cylindre est calculée selon la formule de BERNOULLI

$$P = P_\infty + \frac{1}{2} \rho (U_\infty^2 - V^2_\theta) = P_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left[1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_a U_\infty} \right)^2 \right] \quad (\text{II-22})$$

II.7 LES FORCES HYDRODYNAMIQUES AGISSANT SUR UN CORPS EN MOUVEMENT

Soit un corps solide, par exemple, un cylindre de rayon r_a , en mouvement relatif dans fluide parfait s'étendant à l'infini. Le cylindre est soumis à une force hydrodynamique \vec{F} , qui a deux composantes, une horizontale parallèle à l'écoulement appelée traînée (drag en anglais) et une verticale qui est normale à l'écoulement appelée portance (lift en anglais), elles s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} F_D = \int_0^{2\pi} P(r_a \cos \theta) d\theta \\ F_L = \int_0^{2\pi} P(r_a \sin \theta) d\theta \end{cases} \quad (\text{II-23})$$

Pour un écoulement autour d'un cylindre avec circulation, la force de traînée est nulle, mais la portance ne l'est pas ; elle vaut selon l'équation (II-23) compte tenue de l'équation (II-22)

$$F_L = \rho V_\infty \Gamma \quad (\text{II-24})$$

L'équation (II-24) peut être écrite d'une manière vectorielle sous la forme suivante

$$\vec{F}_L = \rho \vec{V}_\infty \wedge \vec{\Gamma} \quad (\text{II-25})$$

Cette dernière forme de l'équation (II-24) est connue sous le nom de kutta-Joukowski

Pour un écoulement autour d'un cylindre sans circulation, en utilisant l'équation (II-22) pour la pression, et en intégrant de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$, les équations (II-23) donnent

$$\begin{cases} F_D = 0 \\ F_L = 0 \end{cases} \quad (\text{II-26})$$

La force de traînée, mais également la force de portance, sont nulles. C'est le **paradoxe d'Alembert**.

II.7.1 Coefficients de portance et de traînée

La loi de la résistance stipule que la force hydrodynamique, F est proportionnelle à la pression dynamique ou d'arrêt, $\frac{\rho U_\infty^2}{2}$ et à la surface offerte ou projetée S_p . L'égalité est obtenue par un coefficient de résistance, soit pour la force de traînée :

$$F_D = C_d S_p \frac{\rho U_\infty^2}{2} \quad (\text{II-27})$$

Où C_d est le coefficient de traînée.

Soit pour la force de portance

$$F_L = C_L S_p \frac{\rho U_\infty^2}{2} \quad (\text{II-28})$$

Où C_L est le coefficient de portance

Ces deux coefficients adimensionnels ne dépendent que de la forme du corps et du nombre de Reynolds.^{[14],[17]}



APPROCHE NUMERIQUE

.1	INTRODUCTION	23
.2	ETAT DE CONNAISSANCES	24

CHAPITRE III

MODÉLISATION NUMERIQUE

III.1	MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIS	27
III.2	LA MÉTHODE ADI	29
III.3	ETABLISSEMENT DES ÉQUATIONS	32
III.4	DISCRÉTISATION NUMÉRIQUE	34
III.5	RÉSOLUTION NUMÉRIQUE	36
III.6	CONDITIONS INITIALES	41
III.7	CONDITIONS AUX LIMITES	41
III.8	CALCUL DE LA PRESSION À LA SURFACE DU CYLINDRE	44
III.9	COEFFICIENTS DE PORTANCE ET DE TRAÎNÉE	45

CHAPITRE IV

EXPÉRIMENTATION NUMÉRIQUE

IV.1	PRÉSENTATION DES APPLICATIONS	47
IV.2	CYLINDRE FIXE	48
IV.3	CYLINDRE EN ROTATION	61
IV.4	CONCLUSION	72

CHAPITRE V

ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE AVEC ASPIRATION À LA PAROIS

V.1	PRINCIPE DE L'ASPIRATION	74
V.2	APPLICATION	75
V.2.1	<i>Manipulations numériques</i>	75
V.2.2	<i>Écoulement stationnaire</i>	76
V.2.3	<i>Écoulement instationnaire</i>	86
V.2.4	CONCLUSION	86

APPROCHE NUMERIQUE

.1 INTRODUCTION

Il est connu qu'un cylindre en rotation et translation uniformes dans un fluide, tel que son axe est perpendiculaire à son mouvement de translation, produit une force transversale qui est appelée force de Magnus.

Dans un fluide non visqueux cette force peut être expliquée facilement. Elle est induite de l'asymétrie de l'écoulement sur les deux faces du cylindre ; la vitesse de la partie qui tourne dans le sens de la translation est nettement supérieure à celle de l'autre face, qui tourne dans le sens contraire, donnant ainsi une asymétrie de la distribution de la pression qui peut s'expliquer grâce aux concepts de Bernoulli. En conséquence la force transversale est produite et est dirigée vers la partie de vitesse relative la plus élevée.

Dans un fluide réel, ce phénomène existe, bien évidemment, et il est d'une grande importance. Mais l'évolution de la force de Magnus avec V_{rc} paraît ne pas être simple à cause des effets de la viscosité qui induisent le développement de la couche limite le long de la paroi du cylindre et sa possibilité de décrocher (détachement de la couche limite). Le nombre de Reynolds est un paramètre très important influant sur cette évolution, qui dépend aussi de plusieurs paramètres comme : l'état de la surface du cylindre, la longueur réelle du cylindre...etc.

L'étude du problème de l'écoulement bidimensionnel de fluide visqueux incompressible autour d'un cylindre fixe a fait l'objet de nombreuses recherches aussi bien théoriques, numériques, qu'expérimentales.

.2 ETAT DE CONNAISSANCES

Pour obtenir des solutions de l'écoulement permanent, plusieurs auteurs ont résolu directement les équations de Navier-Stokes stationnaires, alors que d'autres ont préféré résoudre les équations instationnaires et à faire tendre le temps $t \rightarrow \infty$. Cependant quelque soit la méthode utilisée aucun auteur n'a pu obtenir de solutions permanentes pour les nombres de Reynolds dépassant 100^[15].

Si le problème du cylindre fixe est devenu classique et étudié par maints chercheurs, celui relatif au cylindre tournant soulève au contraire de grandes difficultés. Du point de vue théorique la plupart des solutions analytiques proposées sont basées sur la méthode des petites perturbations des équations de la couche limite laminaire. M. B. Glauert^{[4],[15]} propose une solution valable dans le cas où la vitesse de rotation du cylindre Ω_{rc} est petite devant celle à l'infini U_∞ de l'écoulement. D.W.Moore^{[4],[15]} donne au contraire une solution quand Ω_{rc} est

grande devant U_∞ . Entre ces deux cas extrêmes, il n'existe pas de solutions analytiques, car il faut résoudre les équations complètes de Navier-Stokes. Du point de vue numérique, les publications qui traitent ce problème à partir de ces équations, mises à notre portée, sont peu nombreuses.

Au début du siècle, quelques mesures ont été faites afin de déterminer l'influence de divers paramètres, comme l'état de surface du cylindre, sa vitesse de rotation ses dimensions...etc. Ces études concernaient des nombres de Reynolds élevés ($Re > 5000$). Avec les récentes études, les chercheurs s'intéressent surtout à l'effet de la vitesse de rotation.

Des argumentations qualitatives suite à des observations expérimentales ont été faites par Khan(1955) et Swanson(1961) et qui ont analysé globalement la couche limite au niveau de la surface d'un cylindre en rotation ainsi que son décollement. Ils ont introduit une notion particulière de deux nombres relatifs de Reynolds pour tenir compte des différences qui existent entre les deux parties du cylindre.

Pour une explication complète du mouvement, la nature du sillage a été reconsidérée. Du fait qu'il y ait une multitude de détails et d'informations concernant cette petite zone, car, à partir des visualisations de Prandtl&Teijens (1934) et les plus récentes celles de Calamote (1984) et Coutanceau&Ménard^[7] (1985), il semble que, pour des valeurs faibles de V_{rc} , des tourbillons seront alternativement développés sur chaque face du cylindre pour former ce qu'on appelle 'allée de Bénard-Karman'(ou tourbillons de Von-Karman), comme pour le cas d'une pure translation($V_{rc}=0$).

Il est constaté que ces tourbillons sont détruits aussitôt que la vitesse de rotation du cylindre devient supérieure à celle de l'écoulement libre à l'infini, laissant place à un mouvement de zigzag oscillatoire, et finalement disparaissent pour $V_{rc} > 2,5$ ^{[1],[7]}.

Le phénomène est très complexe et dépend étroitement du rapport de la vitesse de rotation du cylindre à la vitesse de l'écoulement à l'infini V_{rc} , Il serait très intéressant de pouvoir le prédire, mais jusqu'à ce jour, aucune formulation théorique n'a été capable de faire cela d'une manière générale.

Très récemment, et grâce à l'outil informatique qui est de plus en plus puissant, de nouveaux résultats sont apportés par Ta Phuoc Loc^[15] (1975), H.M.Badr & S.C.R.Dennis^[1] (1985), par la résolution des équations de Navier-Stokes, qui reste la seule méthode capable de donner des résultats et des informations pour tout le fluide en écoulement autour du cylindre.

Mais sans aucun doute, cette résolution numérique soulève plusieurs difficultés en particulier à cause d'une convergence pauvre, c'est pourquoi ces méthodes sont limitées à de faibles nombres de Reynolds.

CHAPITRE III

MODELISATION NUMERIQUE

III.1 METHODE DES DIFFERENCES FINIS

Les schéma aux différences finis sont utilisés pour résoudre différents type de problèmes en mécanique des fluides.

Dans l'approche en différences finis, les opérateurs différentiels sont approximé par des différences. Cette approche suppose l'application d'un maillage (grille), en général régulier, sur le domaine d'intégration.

Soit par exemple une fonction f défini sur le domaine $[a, b]$, cet intervalle peut être discrétisé en considérant l'ensemble $x_0=a, x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}=b$. La présentation discrète de f sera l'ensemble : $\{f_0, \dots, f_i, \dots, f_{n+1}\}$.

La dérivée d'ordre m de f au point x_i est approximée par :

$$\frac{d^m f(x_i)}{dx_m} = \sum_{j=-j_1}^{j_2} \alpha_j f_{i+j}$$

Où α_j sont déterminés par le développement en série de Taylor de f_{i+j} , et j_1 et j_2 sont des entiers qui dépendent de l'ordre m et aussi du degré de précision de l'approximation. Si $m=1$, on considère une approximation en utilisant trois valeurs de f_i c'est à dire $j_1+j_2=2$ et nous prendront $j_1=j_2=1$.

On peut écrire l'approximation générale :

$$\frac{df(x)}{dx} \cong \frac{(1-\alpha)f_{i+1} + 2\alpha f_i - (1-\alpha)f_{i-1}}{2\Delta x} \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante arbitraire.}$$

L'erreur d'une telle approximation est :

$$-\frac{\alpha\Delta x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + o(\Delta x^3)$$

En spécifiant la valeur de α on obtient les différences standards :

- Différences centrées : $\alpha=0$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad \text{l'erreur} = o(\Delta x^2)$$

- Différences décentrées arrière : $\alpha=1$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{l'erreur} = o(\Delta x)$$

- Différences décentrées avant : $\alpha=-1$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad \text{l'erreur} = o(\Delta x)$$

- Si nous prenons $j_1=0$ et $j_2=2$, on obtient une approximation du second ordre :

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta x}$$

- Pour une approximation du quatrième ordre : $j_1=j_2=2$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x}$$

De la même façon nous pouvons définir des approximations pour toutes les dérivées, par exemple :

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \cong \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad \text{la précision est de l'ordre } o(\Delta x^2).$$

III.1.1 Conditions de convergence^{[10],[13]}

on ce qui concerne les opérateurs numériques, on veut qu'ils conduisent à des algorithmes de résolution convergents, précis et rapides.

Les conditions de convergence peuvent se ramener aux trois conditions suivantes :

1. Le problème doit être « **bien posé** » c'est-à-dire que les conditions initiales et aux limites permettent de définir complètement la solution.
2. L'opérateur approché ou numérique doit être **consistant** c'est-à-dire tend vers l'opérateur différentiel vrai quand le pas choisi ($\Delta x, \Delta t \dots$) tend vers 0. En effet, la différence entre l'équation aux dérivées partielles et son approximation en différences finis est défini comme étant une erreur de troncation, cette dernière doit s'annulée ou tendre vers 0 quand le maillage est raffiné.
3. Enfin, l'opérateur approché doit être **stable** c'est-à-dire que la solution numérique obtenue dépend continûment des conditions aux frontières du domaine ou encore que toute petite perturbation dans le calcul de la solution numérique en un point s'amortit a son voisinage. Donc un schéma numérique est dit stable lorsque les erreurs(arrondi, troncation,...) ne croissent pas d'une étape de calcul à une autre.

III.2 LA METHODE ADI^{[2],[10],[13]}

Soit l'équation de diffusion bidimensionnels :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III-1})$$

il est possible d'obtenir un schéma implicite en évaluant les dérivées spatiales dans cette équation au temps (n+1). L'algorithme résultant est le suivant :

$$-s_x T_{j-1,k}^{n+1} + (1 + 2s_x + 2s_y) T_{j,k}^{n+1} - s_x T_{j+1,k}^{n+1} - s_x T_{j,k-1}^{n+1} - s_y T_{j,k+1}^{n+1} = T_{j,k}^n \quad (\text{III-2})$$

avec :

$$s_x = \alpha_x \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad s_y = \alpha_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$$

Ce schéma a une précision $o(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$ et est inconditionnellement stable. Cependant la difficulté est d'obtenir, économiquement, la solution de l'équation (III-1) par l'application de l'algorithme (III-2) à chaque nœud.

Il est possible d'arranger cette équation (III-2), de telle sorte a avoir trois termes adjacents à la diagonale principale, mais les deux autres termes resteront éparpillés a cause de la position de leurs nœuds dans le maillage. En conséquence, on ne peut recourir qu'a la technique conventionnelle de l'élimination de Gauss qui se trouve très chers voir économiquement inacceptable pour un maillage raffiné.

La solution à ce problème est de recourir à la méthode des directions alternées implicite (A.D.I. Peaceman et Rachford 1955).

Le principe de cette méthode est de réalisé l'algorithme de résolution (III-2) en deux demi-étape pour un seul pas de temps. Pour chaque demi-étape seulement les termes associés à une direction particulière sont traités implicitement. En conséquence, seulement trois termes implicites apparaîtront et peuvent être regroupés autour de la diagonale principale, ce qui permet d'utiliser le précieux algorithme de Thomas.

L'interprétation par l'ADI de l'équation (III-1) se traduit par les deux décritisations suivantes :

Selon la première direction :

$$\frac{T_{j,k}^* - T_{j,k}^n}{\Delta t/2} - \alpha_x L_{xx} T_{j,k}^* - \alpha_y L_{yy} T_{j,k}^n = 0 \quad (\text{III-3})$$

selon la deuxième direction :

$$\frac{T_{j,k}^{n+1} - T_{j,k}^*}{\Delta t/2} - \alpha_x L_{xx} T_{j,k}^* - \alpha_y L_{yy} T_{j,k}^{n+1} = 0 \quad (\text{III-4})$$

avec :

$$L_{xx} T_j = (T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1})/\Delta x^2, \quad L_{yy} T_j = (T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1})/\Delta y^2$$

durant la première demi-étape la solution de T est connue à l'étape temps (n) mais elle est inconnue à l'étape (n+1/2), noté *. Les valeurs inconnues de T* sont associés à la direction des x seulement. L'équation (III-3) peut être écrite comme suit :

$$-0.5s_x T_{j-1,k}^* + (1 + s_x) T_{j,k}^* - 0.5s_x T_{j+1,k}^* = 0.5s_y T_{j,k-1}^n + (1 - s_y) T_{j,k}^n + 0.5s_y T_{j,k+1}^n \quad (\text{III-5})$$

Cette formule est appliquée à tout les nœuds du maillage de rangée k . la solution du système tridiagonal obtenu donne les solutions intermédiaires $T_{j,k}^*$, $j=2,\dots,N_x-1$, pour une valeur de k seulement. Donc un système d'équations est résolu pour $T_{j,k}^*$, $j=2,\dots,N_x-1$, pour chaque ligne, $k=2,\dots, N_y-1$, grâce à l'algorithme de Thomas.

Durant la deuxième demi-étape la formule (III-4) est transformée comme suit :

$$-0.5s_y T_{j,k-1}^{n+1} + (1+s_y)T_{j,k}^{n+1} - 0.5s_y T_{j,k+1}^{n+1} = 0.5s_x T_{j-1,k}^* + (1-s_x)T_{j,k}^* + 0.5s_x T_{j+1,k}^* \quad (\text{III-6})$$

La solution de l'étape $N+1$ est inconnu mais la solution de l'étape intermédiaire $*$ est connu. Le système d'équation associé à tous les nœuds suivant la direction y (j fixe) est résolu pour $T_{j,k}^{n+1}$, $k=2,\dots,N_y-1$. Le processus est répéter pour chaque ligne du maillage, $j=2,\dots,N_x-1$.

La stabilité du schéma ADI^[10] peut être vérifier par l'application de la condition de stabilité de Von Newman pour obtenir le facteur d'amplification pour chaque demi-étape. La stabilité d'une étape temps est déterminer par le produit des deux facteurs d'amplification de chaque demi-étape.

$$G = G'G'' = \frac{1 - 2s_y \sin^2(\theta_y/2)}{1 + 2s_x \sin^2(\theta_x/2)} \frac{1 - 2s_x \sin^2(\theta_x/2)}{1 + 2s_y \sin^2(\theta_y/2)} \quad (\text{III-7})$$

Une examination de la formule (III-7) indique que $|G| \leq 1$ pour toutes valeurs de s_x , s_y , θ_x , θ_y . Si on considère $|G'|$ et $|G''|$ séparément on voit que chaque demi-étape est conditionnellement stable. Cependant une étape temps complète est inconditionnellement stable.

Le schéma (III-3 et III-4) est consistant avec l'équation (III-1) et a une erreur $o(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$.

On peut conclure que le schéma ADI a les attributs nécessaires pour être inconditionnellement stable, précis au second ordre et économique. C'est sur cette base que notre choix a été fait.

III.3 ETABLISSEMENT DES EQUATIONS

Le problème qui nous est posé est la résolution des équations de Navier-Stokes, qui sera faite grâce à la méthode des différences finies. Dans le but de simplifications et de commodités d'approche, on s'intéresse à la formulation (ψ, ω) de ces équations qui s'écrivent dans un repère de coordonnées polaires :

$$\operatorname{div} V = V_r + r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{III-8})$$

$$\rho \left[\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] \quad (\text{III-9})$$

$$\rho \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r V_\theta}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{III-10})$$

avec :

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} V_r \\ V_\theta \end{Bmatrix}$$

On définit la fonction de courant ψ dans ce même repère par :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{III-11})$$

et on définit aussi la vorticité ω comme suit :

$$\omega = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{III-12})$$

L'équation de transport du vortex est obtenue à partir des équations (III-9) et (III-10) en différentiant la composante radiale et tangentielle de l'équation de quantité de mouvement par rapport à θ et r simultanément après multiplication par r de l'équation (III-10). En substituant dans l'équation (III-12), on obtient :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\theta \omega)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r \omega)}{\partial r} = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{III-13})$$

L'équation de la fonction de courant est obtenue à partir de l'équation de continuité (III-8) et des équations (III-11) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\omega \quad (\text{III-14})$$

On peut transformer ces deux équations (III-13) et (III-14) sous une forme adimensionnelle, pour cela on fait les substitutions suivantes :

$$\begin{cases} r' = \frac{r}{r_a} ; & V_r' = \frac{V_r}{U_\infty} ; & V_\theta' = \frac{V_\theta}{U_\infty} , & t' = \frac{t U_\infty}{r_a} ; \\ P' = \frac{P - P_\infty}{\rho U_\infty^2} ; & \psi' = \frac{\psi}{r_a U_\infty} , & \omega' = \frac{\omega r_a}{U_\infty} \end{cases} \quad (\text{III-15})$$

Suite à ces transformations, il y a apparition du nombre de Reynolds qui est défini par :

$$R_e = \frac{2U_\infty r_a}{\nu}$$

Dans le but de rendre le domaine d'intégration numérique rectangulaire et régulier on introduit le changement de variables suivant :

$$r' = e^{az} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{a} \ln r' \quad (\text{III-16})$$

$$\theta' = a\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{a} \theta' \quad (\text{III-17})$$

Suite à tous ces changements et en reprenant une notation normale (sans les primes « ' »), les équations adimensionnelles finales obtenues sont :

$$Ez \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right] \tag{III-18}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -Ez \omega \tag{III-19}$$

avec :

$$V_r = Ez^{\frac{-1}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -Ez^{\frac{-1}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{III-20-a}$$

et $Ez = a^2 e^{2az} \tag{III-20-b}$

III.4 DISCRETISATION NUMERIQUE

III.4.1 Domaine d'intégration

Le domaine d'étude est limité par le cylindre de rayon r_a et par un cercle de même centre que celui du cylindre (voir Figure 1), de rayon R_∞ ; ce dernier est choisi en fonction du nombre de Reynolds et de telle sorte qu'il n'influe pas sur le comportement de l'écoulement auprès du cylindre. Dans la référence [4] R_∞ est pris aux alentours de $80 r_a$.

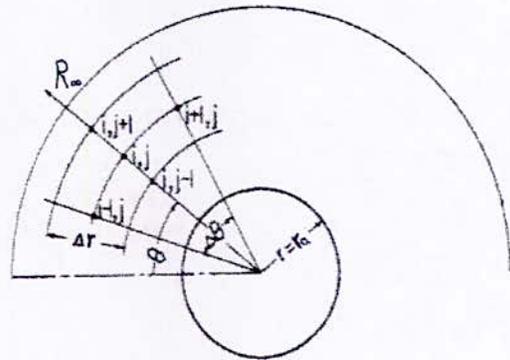


Figure III-1 : Domaine d'intégration physique

III.4.2 Le Maillage

Bien évidemment, la résolution d'équations aussi complexes que les équations de Navier-Stokes ne peut se faire dans tous les points du domaine physique; $\forall (x,y) \in D$, c'est grâce aux méthodes numériques qu'on peut faire cette résolution dans un plan discret (grille de points $\in D$) qui peut nous donner une appréciation de ces solutions dans tout le domaine d'étude.

Cette transformation est nommée maillage. Ce dernier sera d'autant plus complexe et diversifié que les méthodes employées le seront. En parallèle à ce maillage, les équations à résoudre seront conformément discrétisées.

La transformation logarithmique de l'équation (III-16) qu'on a introduit, avec l'équations (III-17), transforme notre domaine physique(r, θ) en un domaine numérique rectangulaire dans le plan (z, θ'), voir figure (III-2). En utilisant un maillage rectangulaire uniforme (Δz et $\Delta \theta'$ constantes) le traitement numérique des équations se trouve considérablement simplifié.

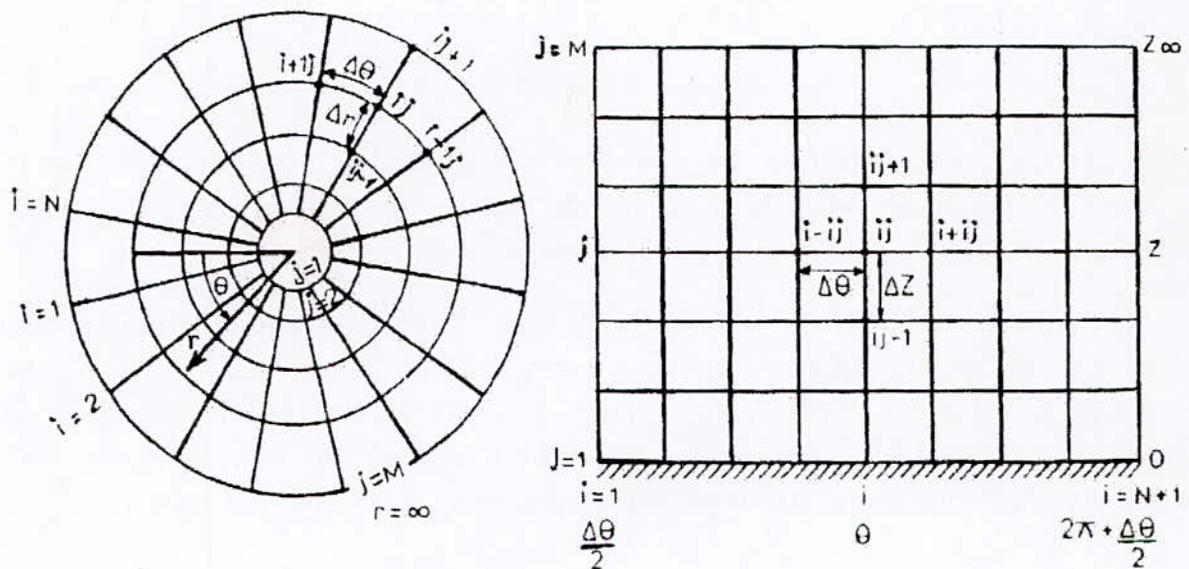


Figure III-2 : Transformation du domaine numérique

La constante 'a' introduite dans le changement de variable des équations(III-16) et (III-17) est une constante arbitraire mais d'une importance non négligeable, car elle permet d'avoir un maillage plus resserré (raffiné) dans le plan physique auprès de la paroi du cylindre qui est le siège de la naissance des tourbillons et qui est d'une plus grande importance que les régions éloignées, ce qui permettra de bien cerner le problème.

Le choix des différents paramètres de discrétisation à savoir $\Delta z, \Delta \theta$ et Δt , doit se faire minutieusement afin d'obtenir de bons résultats et aussi pour avoir un temps de calcul réel raisonnable, d'autant plus que la convergence en dépend étroitement.

III.5 RESOLUTION NUMERIQUE

III.5.1 Résolution de l'équation de la fonction de courant

En utilisant un schéma aux différences finies du deuxième ordre centré à deux points, l'équation de la fonction de courant, équation (III-19) peut être écrite, après arrangement des termes comme suit :

$$\psi_{i,j} = \left\{ Ez\omega_{i,j} + \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}}{\Delta z^2} + \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta \theta^2} \right\} / \left(\frac{2}{\Delta z^2} + \frac{2}{\Delta \theta^2} \right) \quad (\text{III-21})$$

Avec ce schéma itératif, les nouvelles valeurs de la fonction de courant ψ peuvent être obtenues pour chaque nœud du maillage en utilisant les valeurs de ψ des quatre nœuds entourant le point en question.

L'équation (III-21) est la formule de base d'un schéma itératif pour lequel l'équation de continuité est automatiquement satisfaite lorsque le système converge ; c'est-à-dire lorsque les différences entre les nouvelles valeurs de la fonction de courant et celles de l'étape précédente tendent vers zéro, ou si elles sont inférieures ou égales à une erreur prédéfini epsilon(ϵ), cela pour tous les nœuds.

Le système itératif représenté par l'équation (III-21) peut être accéléré en utilisant le méthode de sur relaxation successive (S.O.R : Successif Over Relaxation) de paramètres Ω_s tel que :

$$\psi_{ij} = \psi_{ij} - \Omega_s (\psi_{ij}^{(1)} - \psi_{ij})$$

avec : ψ_{ij} le résultat de l'équation (III-21)

notons que :

pour $1 < \Omega_s < 2$ on a une sur-relaxation, la convergence se trouve accélérée,

pour $\Omega_s = 1$ on n'a pas de relaxation,

pour $0 < \Omega_s < 1$ on a une sous relaxation qui ralentit la convergence.

Ces dernières valeurs de Ω_s sont utilisées pour rendre convergent des systèmes divergents.

Dans notre cas on a gardé $\Omega_s = 1$ pour toute les applications.

III.5.2 Résolution de l'équation du transport de Vortex

Notre choix est porté sur la méthode des directions alternées implicite (A.D.I : Alternativ Directions Implicit) qui est une méthode du type prédiction-correction très robuste et très utilisée ,en plus de l'avantage de converger sans condition ni contrainte pour la stabilité.

III.5.2.1 Formulation A.D.I

En A.D.I l'équation de transport du vortex, équation (III-18), est découplée numériquement en deux équations, la première étant intégrée par rapport à la première direction qui est dans notre cas θ , en gardant les termes par rapport à la deuxième direction z constants. La deuxième équation est intégrée par rapport à z en gardant les termes en θ constants et en utilisant les résultats de la première direction.

La paire d'équations suivantes est obtenue suite au découplage de l'équation (III-18)

$$\frac{Re}{2} \left[Ez \frac{\omega^{k+1/2} - \omega^k}{\Delta t/2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^k \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^{k+1/2} \right] - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right)^{k+1/2} = -\frac{Re}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^k + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right)^k \quad (III-22)$$

$$\frac{Re}{2} \left[Ez \frac{\omega^{k+1} - \omega^{k+1/2}}{\Delta t/2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^k \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^{k+1} \right] - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right)^{k+1} = \frac{Re}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^k \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^{k+1/2} + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right)^{k+1/2} \quad (III-23)$$

Ces deux équations sont approchées par des différences du deuxième ordre centrées à deux points.

Après arrangement des termes, on obtient les deux équations suivantes:

$$-\omega_{i-1,j}^{k+1/2} \left[1 - \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j}^k \right] + \omega_{i,j}^{k+1/2} [2 + \lambda Ez] - \omega_{i+1,j}^{k+1/2} \left[1 + \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j}^k \right] = S^k \quad (\text{III-24})$$

$$-\omega_{i,j-1}^{k+1} \left[1 + \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,j}^k \right] + \omega_{i,j}^{k+1} \left[2 + \frac{\lambda}{\mu} Ez \right] - \omega_{i,j+1}^{k+1} \left[1 - \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,j}^k \right] = S^{k+1} \quad (\text{III-25})$$

avec :

$$S^k = \mu \left\{ \omega_{i,j-1}^k \left[1 + \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,j}^k \right] + \omega_{i,j}^k \left[\frac{\lambda}{\mu} Ez - 2 \right] + \omega_{i,j+1}^k \left[1 - \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,j}^k \right] \right\} \quad (\text{III-26})$$

$$S^{k+1} = \frac{1}{\mu} \left\{ \omega_{i-1,j}^{k+1/2} \left[1 - \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j}^k \right] + \omega_{i,j}^{k+1/2} [\lambda Ez - 2] + \omega_{i+1,j}^{k+1/2} \left[1 + \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j}^k \right] \right\} \quad (\text{III-27})$$

$$\alpha = \frac{\Delta \theta Re}{4} \quad \beta = \frac{\Delta z Re}{4} \quad \lambda = \frac{\Delta \theta^2 Re}{\Delta t} \quad \mu = \frac{\Delta \theta^2}{\Delta z^2} \quad (\text{III-28})$$

Grâce à ces dernières équations (III-24) et(III-25), des systèmes tridiagonaux linéaires sont obtenus et peuvent être résolus par l'application de l'algorithme de Thomas pour la résolution de ce type de système à matrice tridiagonale.

Afin que les systèmes tridiagonaux soit complets il faut prendre en considération les conditions aux limites.

La première direction nécessite l'introduction des conditions aux limites le long des axes $\theta = 0$ (ou $\theta = 2\pi$). Il est évident que $\omega_{N+1,j} = \omega_{1,j}$; voir la figure (III-2).

Grâce à cette spécification, on peut écrire le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} b_1 & -c_1 & & & & & \\ -a_2 & b_2 & -c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -a_i & b_i & -c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -a_N & b_N & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{1,j} \\ \omega_{2,j} \\ \vdots \\ \omega_{i,j} \\ \vdots \\ \omega_{N,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1^* \\ K_2^* \\ \vdots \\ K_i^* \\ \vdots \\ K_N^* \end{bmatrix} \quad (\text{III-29})$$

avec :

$$\begin{cases} b_1 = 2 + \lambda E z, & c_1 = 1 + \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j}^k, & K_1^* = S^k + \omega_{N,j}^{k+1/2} \left[1 - \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j}^k \right] \\ a_1 = 1 - \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j}^k, & b_i = 2 + \lambda E z, & c_i = 1 + \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j}^k, & K_i^* = S^k \\ a_N = 1 - \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{N,j}^k, & b_N = 2 + \lambda E z, & K_N^* = S^k + \omega_{1,j}^{k+1/2} \left[1 + \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{N,j}^k \right] \end{cases} \quad (\text{III-30})$$

On peut remarquer que dans ce système, les quantités $\omega_{N,j}^{K+1}$ et $\omega_{1,j}^{K+1/2}$ contenues dans l'expression de K_1^* et K_N^* , simultanément, ne sont pas encore définies à ce niveau, c'est pourquoi on les remplace par $\omega_{N,j}^K$ et $\omega_{1,j}^K$ de l'étape précédente.

La deuxième direction ; équation (III-27), nécessite le spécification des conditions aux limites à la surface du cylindre et à la limite extérieure pour que le système soit bien défini.

L'écriture matricielle obtenue est la suivante :

$$\begin{bmatrix} b_2 & -c_2 & & & & & \\ -a_3 & b_3 & -c_3 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -a_j & b_j & -c_j & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{i,2} \\ \omega_{i,3} \\ \vdots \\ \omega_{i,j} \\ \vdots \\ \omega_{i,M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2^* \\ K_3^* \\ \vdots \\ K_j^* \\ \vdots \\ K_{M-1}^* \end{bmatrix} \quad (\text{III-31})$$

avec :

$$\begin{cases} b_2 = 2 + \frac{\lambda}{\mu} Ez, & c_2 = 1 - \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,2}^k, & K_2^* = S_2^{k+1} + \omega_{i,1}^{k+1} \left[1 + \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,2}^k \right] \\ \omega_{i,1} = -\frac{2\psi_{i,2}}{\Delta z^2} + V_{\theta i,1}, & a_j = 1 + \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,j}^k, & b_j = 2 + \frac{\lambda}{\mu} Ez, \\ c_j = 1 - \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,j}^k, & K_j^* = S^{k+1}, & a_{M-1} = 1 + \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,M-1}^k \\ b_{M-1} = 1 + \frac{\lambda}{\mu} Ez + \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,M-1}^k, & K_{M-1}^* = S^{k+1} \end{cases} \quad (\text{III-32})$$

En plus des conditions aux limites sur ω ($\omega_{i,1}$ et $\omega_{i,N}$).

La solution de ω est finalement obtenue en résolvant le système (III-31) de la même manière que le système (III-29). Le processus A.D.I est maintenant terminé.

III.5.3 Calcul des vitesses

Pour calculer les vitesses radiales et tangentielles, on utilise les équations (III-20) en faisant une approximation des dérivées par des différences centrées, on aura :

$$V_{r,i,j} = \frac{1}{E_z^{1/2}} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2 \Delta \theta} \quad (\text{III-33})$$

$$V_{\theta,i,j} = -\frac{1}{E_z^{1/2}} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2 \Delta z} \quad (\text{III-34})$$

III.6 CONDITIONS INITIALES

Avant de commencer la résolution des équations (III-22) et (III-23) il est essentiel de spécifier les valeurs initiales du vortex et de la fonction de courant partout dans l'écoulement. Dans ce type de problème il est raisonnable d'initialiser l'écoulement par l'écoulement potentiel (fluide parfait) où le vortex est considéré nul partout.^{[1],[2],[15]}

$$\omega_{i,j}^* = 0 \quad (\text{III-35})$$

et la fonction de courant :

$$\psi_{i,j} = \psi_{i,j}^* = U_{\infty} r \left[\sin \theta \cdot \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \right]_{i,j} \quad (\text{III-36})$$

III.7 CONDITIONS AUX LIMITES

III.7.1 Problème du cylindre fixe

III.7.1.1 Condition sur ψ :

Suite à la condition d'adhérence des particules à la paroi, on a pour la fonction ψ :

$$\psi_{i,1} = 0 \quad (\text{III-37})$$

avec un gradient nul

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{i,1} = 0 \quad (\text{III-38})$$

A la limite extérieure le fluide se comporte comme étant parfait, la condition dans ce cas est celle de l'écoulement potentiel :

$$\psi_{i,M} = -a^{-2} E z_{i,M}^{1/2} \sin(\theta) (1 - a^2 E z_{i,M}^{-1}) \tag{III-39}$$

III.7.1.2 Conditions sur ω

La vorticité à la paroi est extrêmement importante, puisque c'est là qu'elle se produit. C'est la diffusion et la convection de cette vorticité, créée à la paroi, qui détermine réellement le problème.

La condition à la paroi s'écrit :

$$\omega_{i,1} = -2 \frac{\psi_{i,2}}{a^2 \Delta z^2} \tag{III-40}$$

Démonstration :

soit l'équation de la fonction de courant :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -E z \omega$$

faisant une discrétisation avec un schéma du deuxième ordre centrée à deux points :

$$\frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta z^2} + \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta \theta^2} = -E z \omega \tag{*}$$

A la paroi $j=1$, on a :

$$\psi_{i,1} = 0 \tag{**}$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{i,1} = 0 = \frac{\psi_{i,2} - \psi_{i,0}}{2\Delta z}$$

d'où $\Rightarrow \psi_{i,0} = \psi_{i,2}$ (***)

$\psi_{i,0}$ est l'image de $\psi_{i,2}$ par rapport à la surface du cylindre (pour assurer un gradient nul au niveau de cette dernière).

L'équation (*) s'écrira pour $j=1$, et en substituant (**) et (***) :

$$2 \frac{\psi_{i,2}}{\Delta z^2} = -a^2 \omega_{i,1}$$

finalement :
$$\omega_{i,1} = -2 \frac{\psi_{i,2}}{a^2 \Delta z^2}$$

A la limite extérieure :
$$\omega_{i,M} = 0 \quad (\text{III-41})$$

III.7.2 Problème du cylindre tournant

III.7.2.1 Condition sur ψ

En se référant aux conditions aux limites du cylindre fixe, les conditions aux limites dans ce cas s'écrivent :

A la paroi, on a :
$$\psi_{i,1} = 0 \quad (\text{III-42})$$

Mais à cause de la vitesse de rotation du cylindre , le gradient de la fonction de courant n'est plus nul

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{i,1} = a V_{rc} \quad (\text{III-43})$$

A la limite extérieure, du fait de la rotation, la condition est :

$$\psi_{i,M} = -a^{-2} E z_{i,M}^{1/2} \sin(\theta) \left(1 - a^2 E z_{i,M}^{-1} \right) + a z V_{rc} \quad (\text{III-44})$$

Remarque :

Dans le plan physique, la condition à la limite extérieure est celle de l'écoulement potentiel et du fait de la rotation du cylindre on lui superpose la solution d'un vortex, ce qui donne :

$$\psi_{\infty} = -r_{\infty} U_{\infty} \sin(\theta) \left(1 - \frac{1}{r_{\infty}^2} \right) + V_{rc} \text{Log}(r_{\infty}) \quad (\text{III-45})$$

En faisant les transformations nécessaires pour rendre cette écriture valable dans le plan numérique, on aura l'équation (III-44)

III.7.2.2 Conditions sur ω

Comme pour le cylindre fixe, on peut retrouver la condition à la paroi du cylindre et qui s'écrit :

$$\omega_{i,1} = \frac{-2}{a^2 \Delta z^2} (\psi_{i,2} - a \Delta z V_{rc}) \quad (\text{III-46})$$

A la limite extérieure on a la condition :

$$\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right]_{i,M} = 0 \quad (\text{III-47})$$

III.8 CALCUL DE LA PRESSION A LA SURFACE DU CYLINDRE

Pour cela on considère les deux équations (III-9) et (III-10), la pression au loin du cylindre dans la zone limite extérieure est considérée nulle. La composante radiale- équation (III-9) est transformée en coordonnées polaires conformément aux changements de variables employés, et en réarrangeant les termes on obtient après discrétisation :

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{k+1} = P_{i,j+1}^{k+1} + \Delta z \left[Ez^{1/2} \frac{V_{n,j}^{k+1} - V_{n,j}^k}{\Delta t} + V_{n,j}^{k+1} \left(\frac{V_{n,j+1}^{k+1} - V_{n,j-1}^{k+1}}{2\Delta z} \right) + V_{\theta,j}^{k+1} \left(\frac{V_{n+1,j}^{k+1} - V_{n-1,j}^{k+1}}{2\Delta \theta} \right) - V_{\theta,j}^{k+1} V_{\theta,j}^{k+1} \right] \\ - \frac{2\Delta z}{ReEz^{1/2}} \left[\frac{V_{n,j+1}^{k+1} + V_{n,j-1}^{k+1} - 2V_{n,j}^{k+1}}{\Delta z^2} + \frac{V_{n,j+1}^{k+1} + V_{n,j-1}^{k+1}}{2\Delta z} + \frac{V_{n+1,j}^{k+1} + V_{n-1,j}^{k+1} - 2V_{n,j}^{k+1}}{\Delta \theta^2} \right. \\ \left. - V_{n,j}^{k+1} - \frac{V_{\theta+1,j}^{k+1} + V_{\theta-1,j}^{k+1}}{\Delta \theta} \right] \quad (\text{III-49}) \end{aligned}$$

Il est possible maintenant de commencer à partir de la limite externe à calculer les pressions dans les nœuds jusqu'à déterminer la pression $P(1,1)$

La composante tangentielle- équation (III-10)- écrite pour la surface du cylindre peut se simplifier et donnera :

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{2}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial z} \quad (\text{III-50})$$

finalement :
$$P_{i+1} = P_i + \frac{\Delta \theta}{Re} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{i+1} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_i \right] \quad (\text{III-51})$$

En utilisant un polynôme Lagrangien du troisième ordre :

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_i = \frac{1}{16\Delta z} [-35\omega_{i,1} + 70\omega_{i,2} - 56\omega_{i,3} + 26\omega_{i,4} - 5\omega_{i,5}] \quad (\text{III-52})$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{i+1} = \frac{1}{16\Delta z} [-35\omega_{i+1,1} + 70\omega_{i+1,2} - 56\omega_{i+1,3} + 26\omega_{i+1,4} - 5\omega_{i+1,5}]$$

Le calcul de la pression à la surface du cylindre peut maintenant avoir lieu, en faisant une intégration dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

III.9 COEFFICIENTS DE PORTANCE ET DE TRAINEE

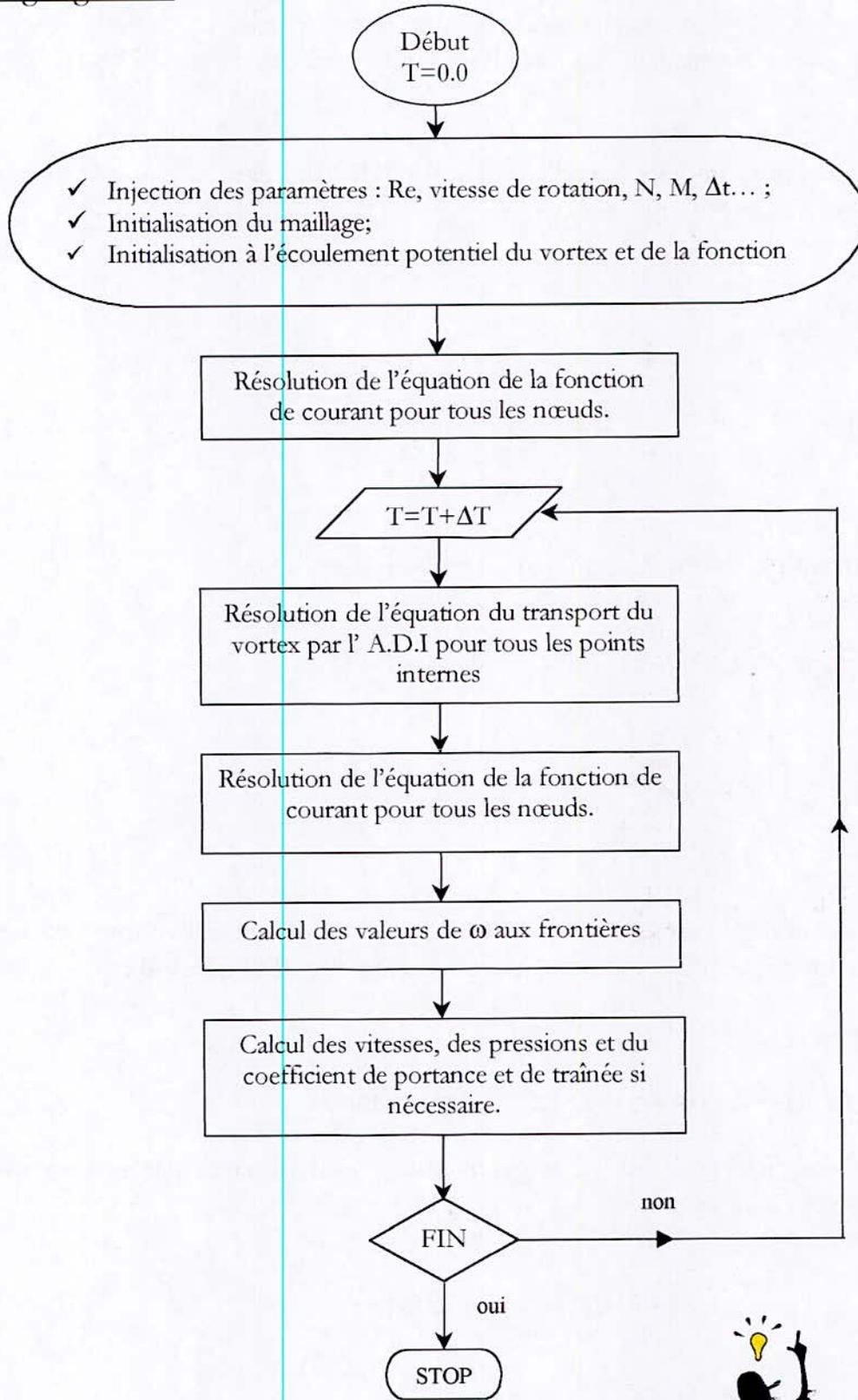
Ces coefficients C_d et C_l respectivement sont obtenus par intégration des deux formules suivantes :

$$C_d = -\int_0^{2\pi} P \cos(\theta) d\theta - \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} \omega \sin(\theta) d\theta \quad (\text{III-53})$$

$$C_l = -\int_0^{2\pi} P \sin(\theta) d\theta + \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} \omega \cos(\theta) d\theta \quad (\text{III-54})$$

par la méthode de **Simpson**.

Organigramme



CHAPITRE IV

EXPERIMENTATION NUMERIQUE

Dans l'élaboration de notre projet, on a d'abord réalisé un programme pour un cylindre fixe qu'on a développé par la suite. Le schéma qu'on a exploité est utilisé dans la référence[2], où une comparaison entre la méthode 'upwind' et 'ADI' a été faite, affirmant que cette dernière été la meilleur car elle donnait de bons résultats et simulée bien les lignes de courant ainsi que les contours du vortex.

IV.1 PRESENTATION DES APPLICATIONS

Pour une première exécution de notre programme on s'intéresse au problème relatifs au cylindre fixe pour valider notre programme, puis on présentera les résultats du cylindre en rotation, et à chaque étape on exploitera les évolutions possibles du programme.

IV.2 CYLINDRE FIXE

Dans ce qui suit, on va faire des confrontations de nos résultats avec ceux de la documentations collectées dans le but de valider notre programme.

La confrontation sera faite principalement avec les résultats obtenus par Ta Phuoc Loc^[15], pour les deux cas ; cylindre fixe et en rotation.

Le problème du cylindre fixe a été résolu pour les mêmes nombres de Reynolds $Re=5, 20, 40, 60, 100$ et 120 que ceux utilisés par Ta Phuoc Loc^[15]. Ce dernier avait comparé ces résultats à des résultats expérimentaux et numériques divers.

IV.2.1 CONFRONTATION ET VALIDATION

IV.2.1.1 Variation du coefficient de traînée

La première confrontation sera faite sur la base de la variation du coefficient de traînée C_d en fonction du nombre de Reynolds. La figure (IV-1) illustre cette variation par superposition de nos résultats et ceux obtenus par l'auteur.

On constate que nos résultats sont conformes a ceux de l'auteurs avec une bonne précision et que le coefficient de traînée diminue au fur et a mesure que le nombre de Reynolds augment jusqu'à une certaine valeurs où il se stabilise. Cette limite est compris dans l'intervalle $1.1 < C_D < 1.3$.

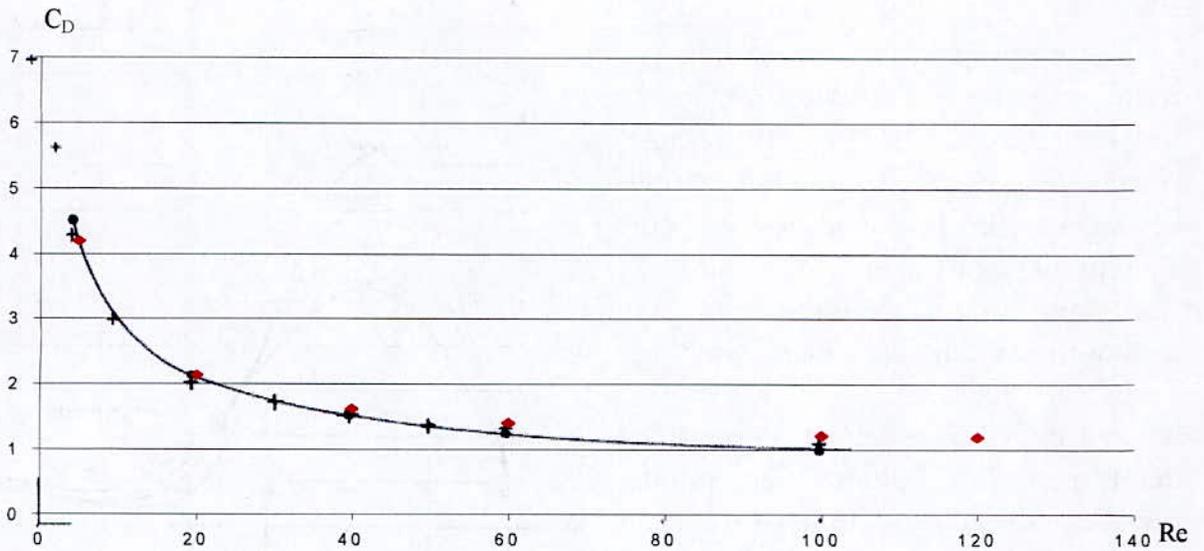


Figure IV-1 : variation du coefficient de traînée en fonction de Re

- ◆ : présente étude
- : Ta Phuoc Loc
- + : valeurs moyennes de plusieurs expériences (Triton) [15]

IV.2.1.2 Répartition du vortex à la surface du cylindre

On donne à la figure (VI-2) la répartition du vortex ω sur la surface du cylindre, et à la figure (IV-3) les résultats obtenu de Ta Phuoc Loc^[15] pour cette même répartition.

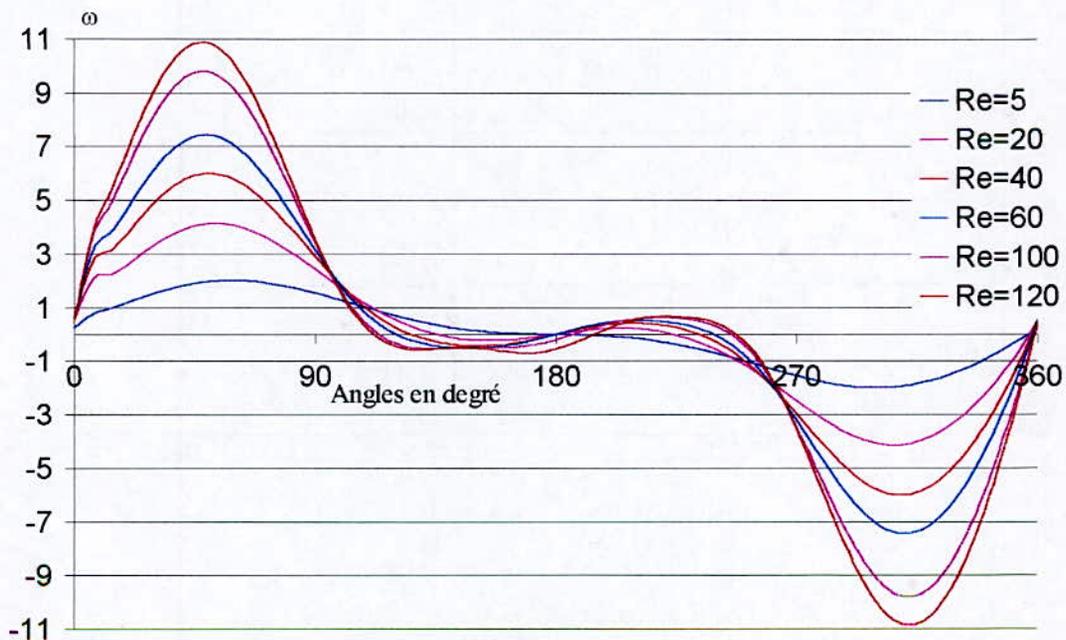


Figure IV-2 : répartition de ω à la surface du cylindre

On notera que nos résultats sont représentés pour $0 \leq \theta \leq 360^\circ$, et que ceux de la référence [11] sont représentés seulement pour $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ suite à l'existence de la symétrie, ce qui est clairement montrés par la figure (IV-2), sauf pour les cas $Re > 40$ où le caractère instationnaire fait son apparition.

Ces courbes nous permettent de déterminer la position des points de décollement qui est définie comme étant la première intersection de la courbe $\omega = f(\theta)$ avec l'axe de abscisses.

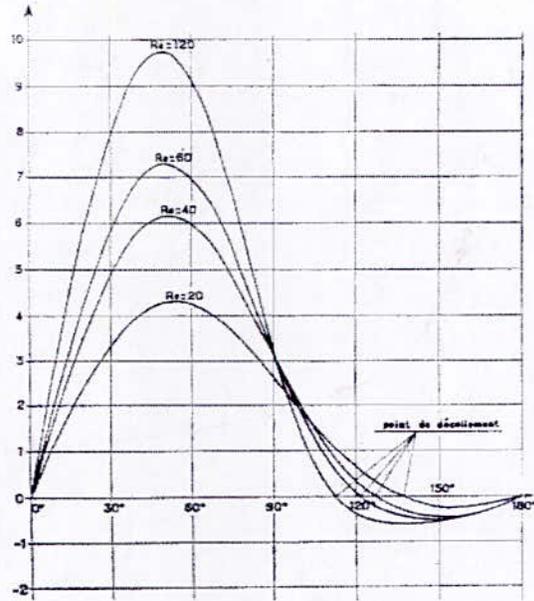


Figure IV-3 : répartition de ω à la surface du cylindre [15]

IV.2.1.3 Positions du décollement

Ces point constituent également un paramètre important dans cette étude. La figure (IV-4) représente nos résultats ainsi que ceux de plusieurs auteurs où on constate une parfaite similitude que se soit avec les résultats numériques ou expérimentales.

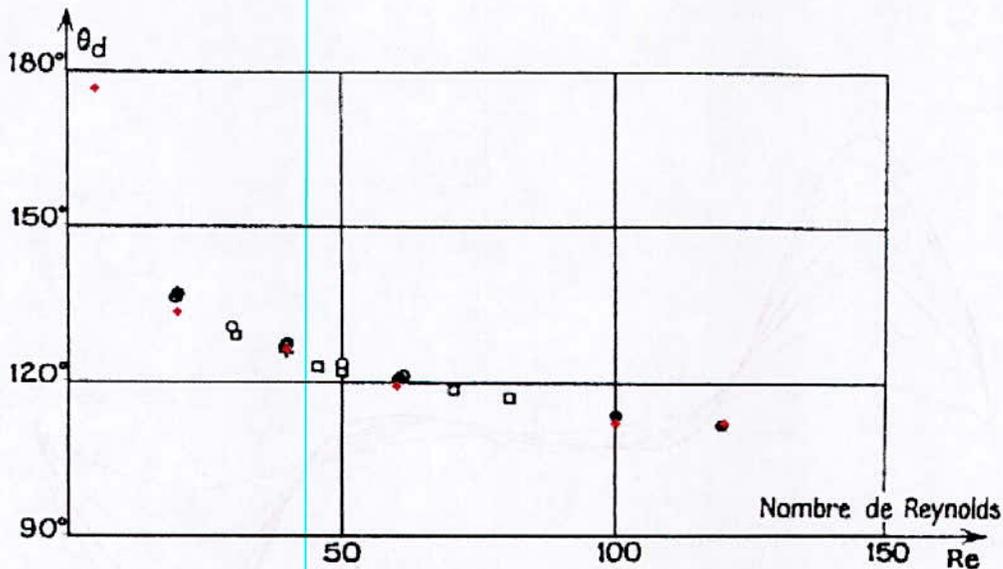


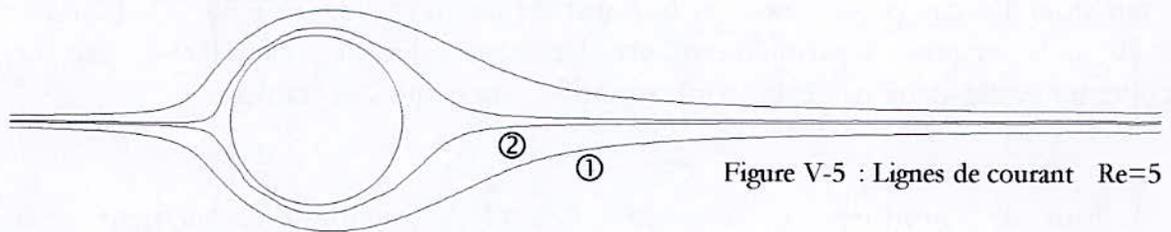
Figure IV-4 : Angle du point de décollement

- ◆ Présent travail,
- Ta Phuoc Loc (numérique)^[15]
- Keller et Takami (numérique)^[15]
- Homann (expérimentaux)^[15]
- + Teneda (expérimentaux)^[15]

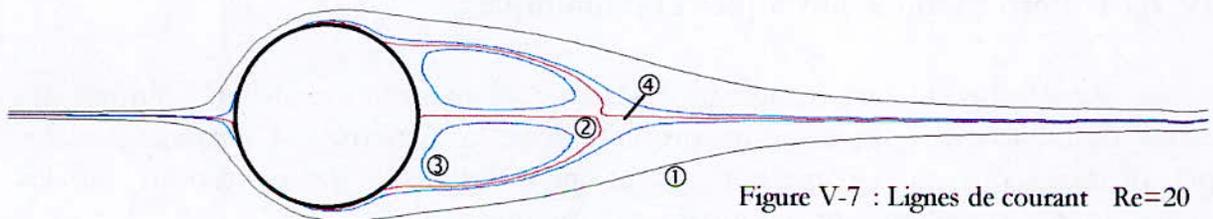
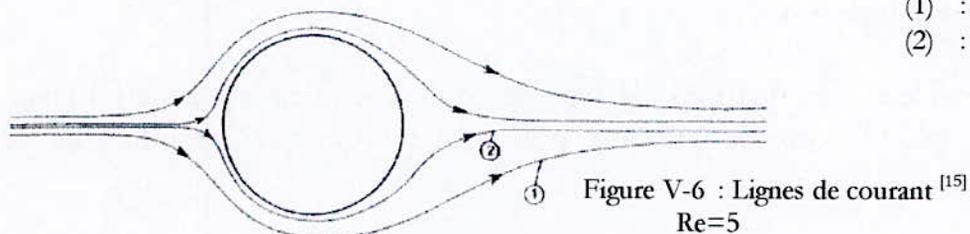
IV.2.1.4 Lignes de courant

Les figures (IV-5) et(IV-7) montrent la structure des lignes de courants qu'on a obtenus pour $Re=5$ et 20 . Ils sont confrontés à ceux obtenus par Ta Phuoc Loc représentées dans les figures (IV-6) et (IV-8) respectivement.

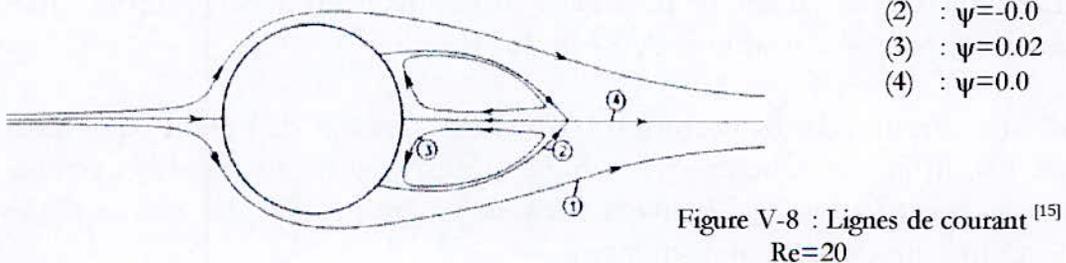
Pour une meilleur confrontation, on a représenté les lignes de courants qui ont les mêmes valeurs de la fonction de courant, et qui ont données lieux aux mêmes structures que ceux de la référence[15].



- (1) : $\psi=-0.05$
- (2) : $\psi=-0.005$



- (1) : $\psi=-0.03$
- (2) : $\psi=-0.0$
- (3) : $\psi=0.02$
- (4) : $\psi=0.0$



Suite à cette confrontation concernant l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe et qui s'avère satisfaisante, on peut conclure de la validité de notre programme.

IV.2.2 INVESTIGATION EN REGIME INSTATIONNAIRE

Avec la méthode utilisée, on a résolu les équations de Navier-Stokes instationnaires. Pour atteindre un état stationnaire, théoriquement, il faut faire tendre le temps $t \rightarrow \infty$. Ce régime est atteint après un certain temps, comme cela a été fait pour les cas précédents, où le nombre de Reynolds $Re = 20$. Dans le cas $Re=20$, le régime d'écoulement est laminaire décollé, caractérisé par un décollement avec deux rouleaux contrarotatifs symétriques et stables.

Pour des nombres de Reynolds $Re > 40$ le régime d'écoulement reste toujours laminaire mais devient instationnaire où il y a l'apparition des allées de Von-Karman ; voir annexe A.

Ayant considéré les équations de base de l'écoulement instationnaire, on peut alors exploiter notre programme pour obtenir quelques résultats de ce régime.

IV.2.2.1 Perturbations physiques et numériques

Dans le cas de l'expérimentation d'un écoulement autour d'un cylindre, des effets déstabilisants sont toujours présents, donc la symétrie est détruite par des perturbations physiques comme les vibrations indésirables, des conditions initiales et aux limites irrégulières, non uniformes et incontrôlables ...

Dans le cas de la simulation numérique, ces effets déstabilisants sont absents, et comme on a la possibilité d'imposer des conditions initiales et aux limites en respectant la symétrie, les équations de Navier-Stokes devraient donner un résultat symétrique même pour des nombres de Reynolds $Re > 40$ ^[4].

Mais les erreurs de troncature et d'arrondissement de même que ceux générés par les différents schémas numériques utilisés, constituent effectivement des facteurs de perturbations qui peuvent éventuellement générer des vortex et des tourbillons asymétriques (un comportement).

Cependant, certains chercheurs on pu obtenir une symétrie des résultats pour $Re > 40$ avec certains schémas numériques, et afin de produire la dissymétrie ils ont introduit une perturbation, théorique, qui consiste à remplacer les perturbations réels rencontrées par une oscillation du cylindre dans une bande de temps prédéfinie. La figure (IV-9) représente les perturbations introduites par l'auteur de la référence[4].

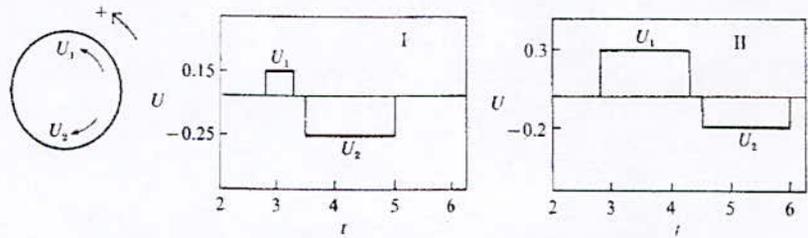


Figure IV-9 : Perturbation introduite par Ha Minh^[4]

IV.2.2.2 Applications

IV.2.2.2.1 Champs de vitesses

La figure (IV-10) représente les résultats qu'on a obtenus pour un nombre de Reynolds $Re=200$ en fonction du temps. Où, après avoir développer une procédure qui permet de tracer le champs des vitesses, les oscillations produites derrière le cylindre sont clairement montrés, et on donne à la figure (IV-11) les champs de vitesses obtenus par Ha Minh^[4] correspondant à $Re=200$ avec l'introduction des perturbations données à la figure (IV-9).

Il est a noté que la procédure développée permet d'avoir une bonne appréciation du champs de vitesse a la seule condition que le maillage soit suffisant pour l'affichage. Dans cette application, $Re=200$, on a pris $N=100$, $M=100$ et $R_{\infty}=80$.

IV.2.2.2.2 Evolution du coefficient de portance C_L

On trouve dans la référence [4] une courbe qui représente l'évolution du coefficient de portance C_L et qu'on donne à la figure (IV-12). On donne à la figure (IV-13) celle correspondante a notre cas.

Les deux courbes représentent une oscillation du coefficient de portance C_L en fonction du temps. Cette oscillation traduit les efforts cycliques que subit le cylindre.

Dans un cas pratique l'amplitude et ou la fréquence de ces efforts peuvent causées la rupture du corps cylindrique rigide. Si se dernier est assez souple(élastique), cela provoquerait, à la fréquence de résonance, un son audible.

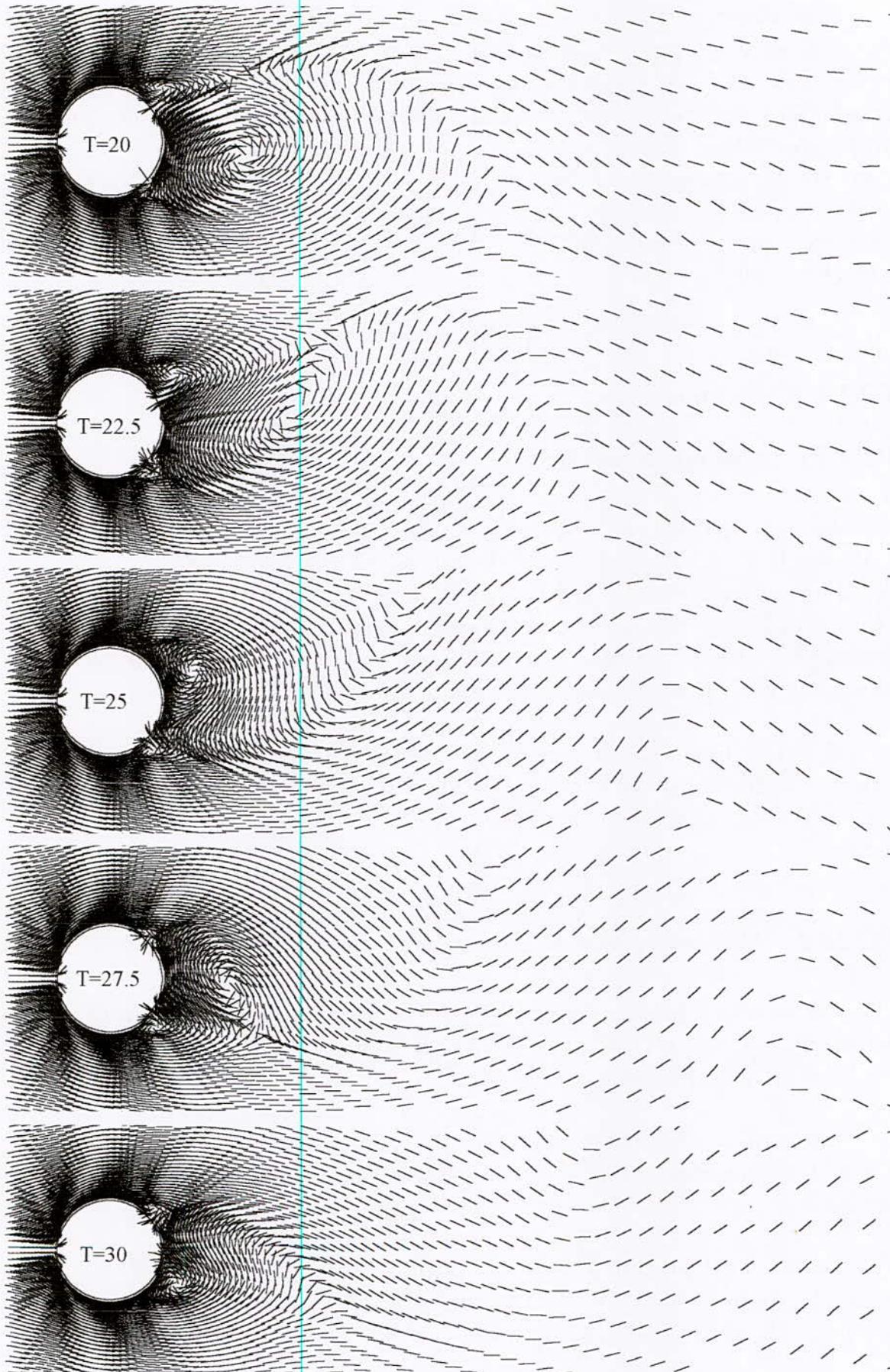
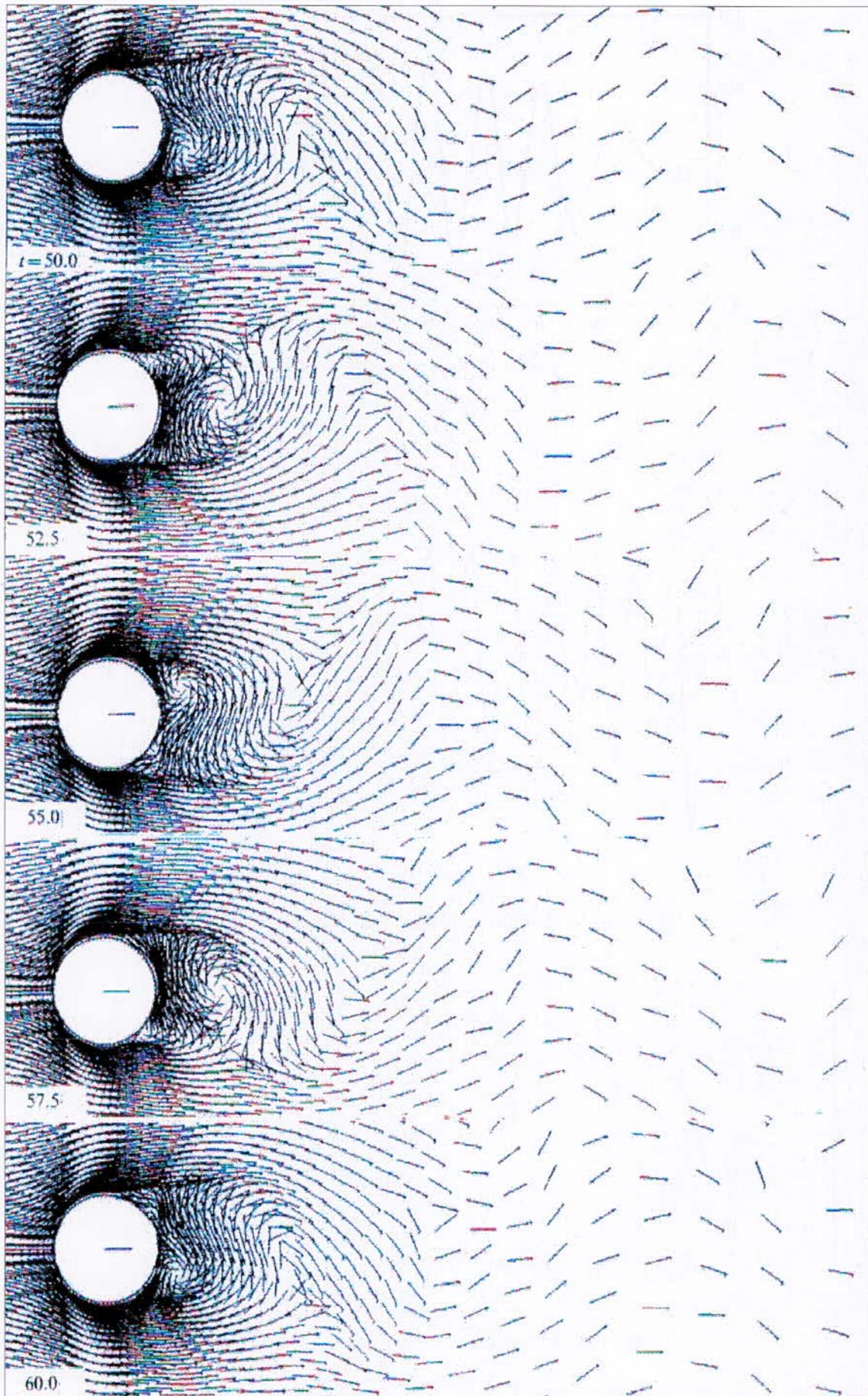


Figure IV-10 : champs des vecteurs vitesses pour $Re=200$

Figure IV-11 : Champs de vitesse pour $Re=200$ [4]

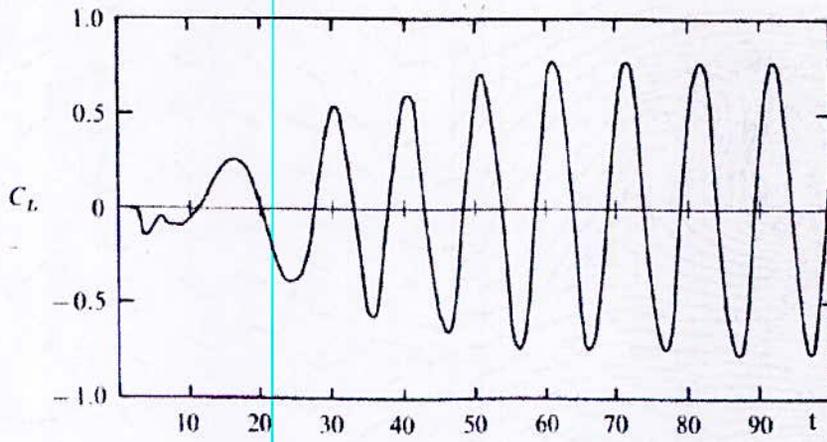


Figure IV-12 : Evolution du coefficient de portance C_L [4]

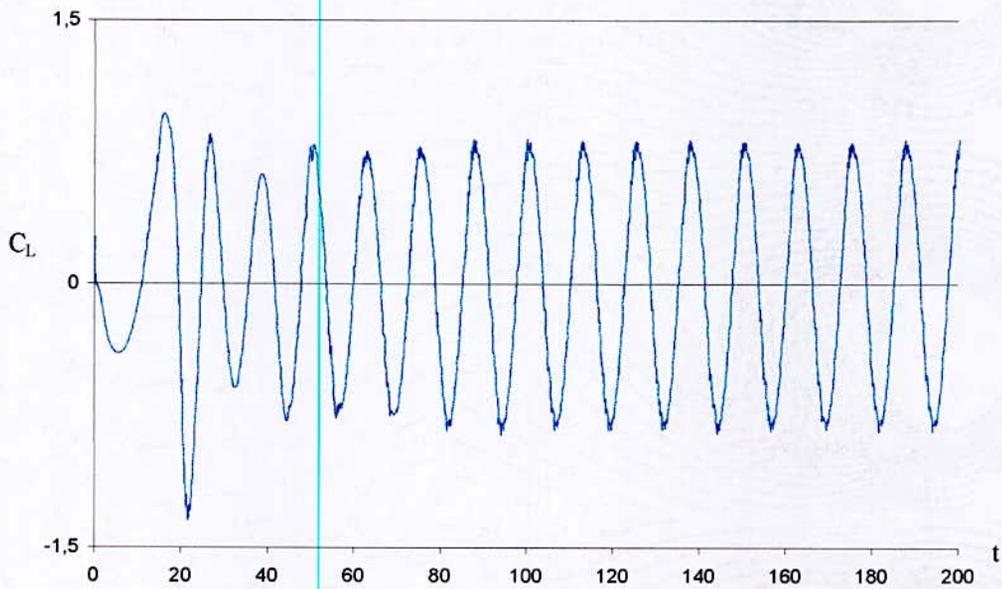


Figure IV-13 : Evolution du coefficient de portance C_L

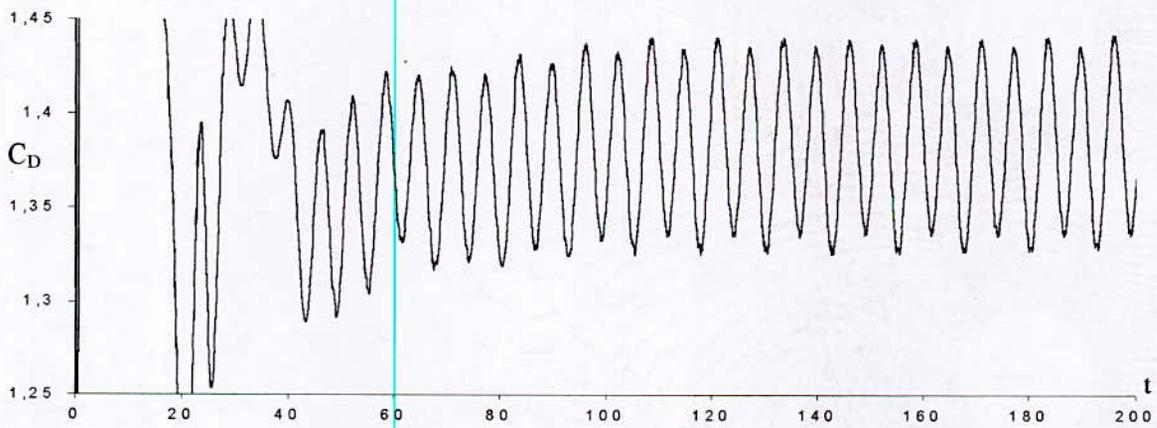


Figure IV-14 : Evolution du coefficient de traînée C_D

IV.2.2.2.3 Evolution du coefficient de traînée C_D

L'évolution du coefficient de traînée est donnée à la figure (IV-14), c'est une variation également oscillatoire, on peut même dire quelle est périodique. En fait la valeur de C_D oscille autour d'une valeur positive, alors que C_L oscille autour de la valeur zéro.

IV.2.2.3 Limites d'applications

Après un nombre élevé d'essais de notre programme à ce niveau, on a constaté qu'on pouvait atteindre des nombre de Reynolds supérieure à 1500 sous certaines conditions liées au maillage et aux divers paramètres numériques.

IV.2.2.3.1 Exemple d'application a Reynolds=1000

La figure (IV-15) représente le champs de vitesse pour un écoulement à $Re=1000$ et pour $T=20$

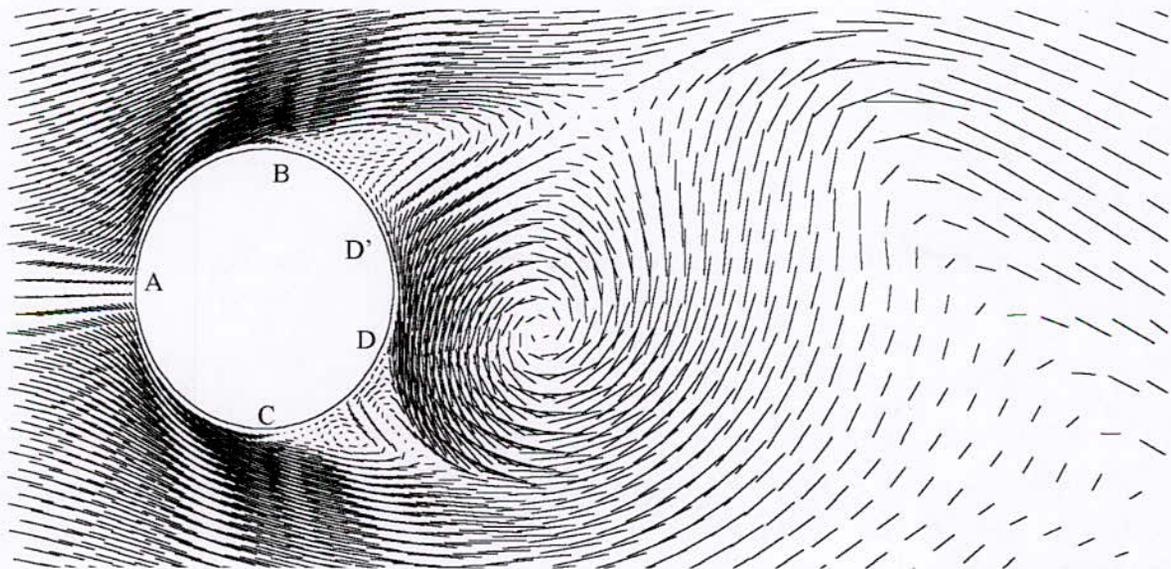


Figure IV-15 : champs de vitesses pour $Re=1000$ à $T=20$

On peut clairement apprécier les zones de décollement (B) et (C) ainsi que le point de recollement (D) et le point d'arrêt (A), ce dernier se trouve sur l'axe du cylindre parallèle à l'écoulement ($\theta_A=0$).

Les positions des point (B) et (C) correspondants aux zones de décollement peuvent être déterminés à partir de la courbe représentant la répartition du vortex sur la surface du cylindre, Cette courbe est donnée à la figure (IV-16) où sont positionnés les points en question.

En réalité, dans le cas d'un écoulement instationnaire, un point de décollement exacte est défini comme étant un point à l'intérieur de la couche limite où la contrainte de cisaillement ainsi que la vitesse s'annulent simultanément^[4].

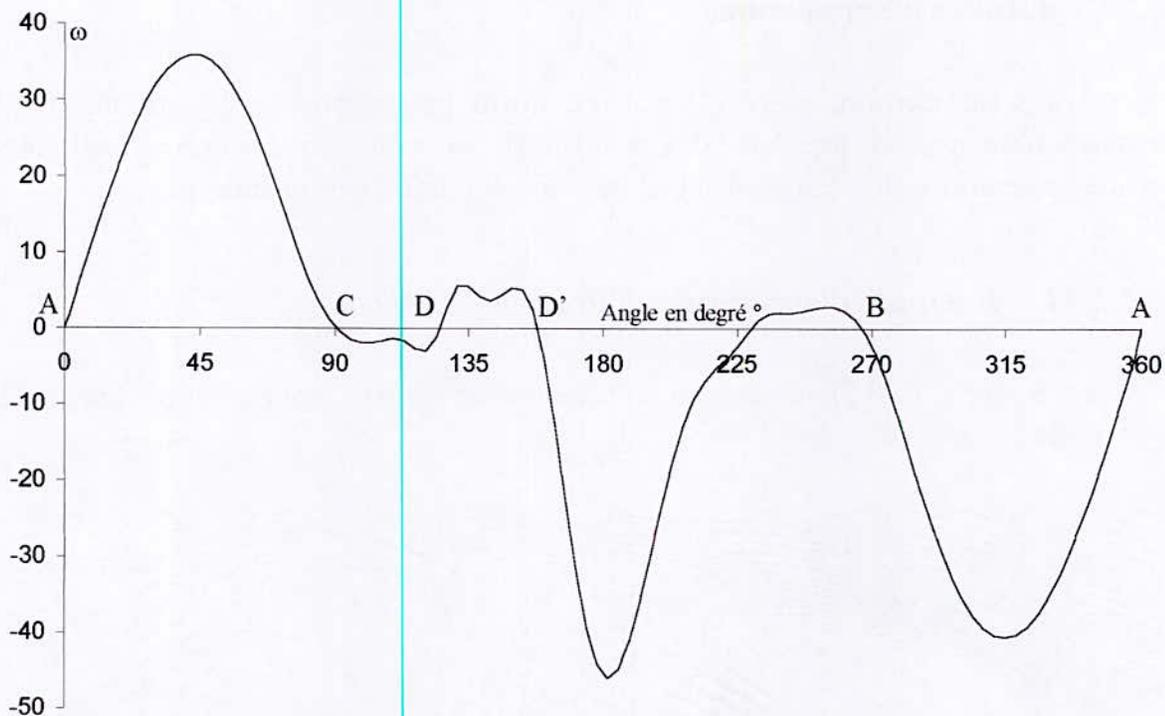


Figure IV-16 : répartition du vortex à la surface du cylindre $Re=1000$ à $T=20$

Finalement, on donne à la figure (IV-17) le champs du vortex, à la figure (IV-18) le champs de pression et à la figure (IV-19) les lignes de courant correspondant à ce dernier cas d'application.

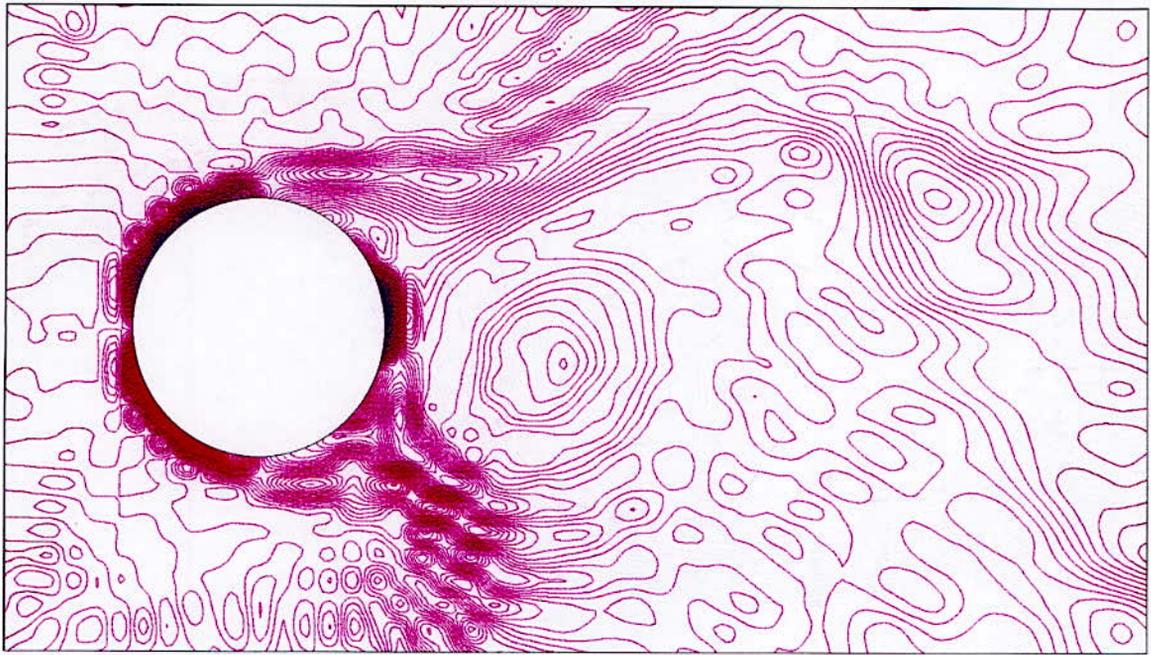


Figure IV-17 : Champs du vortex

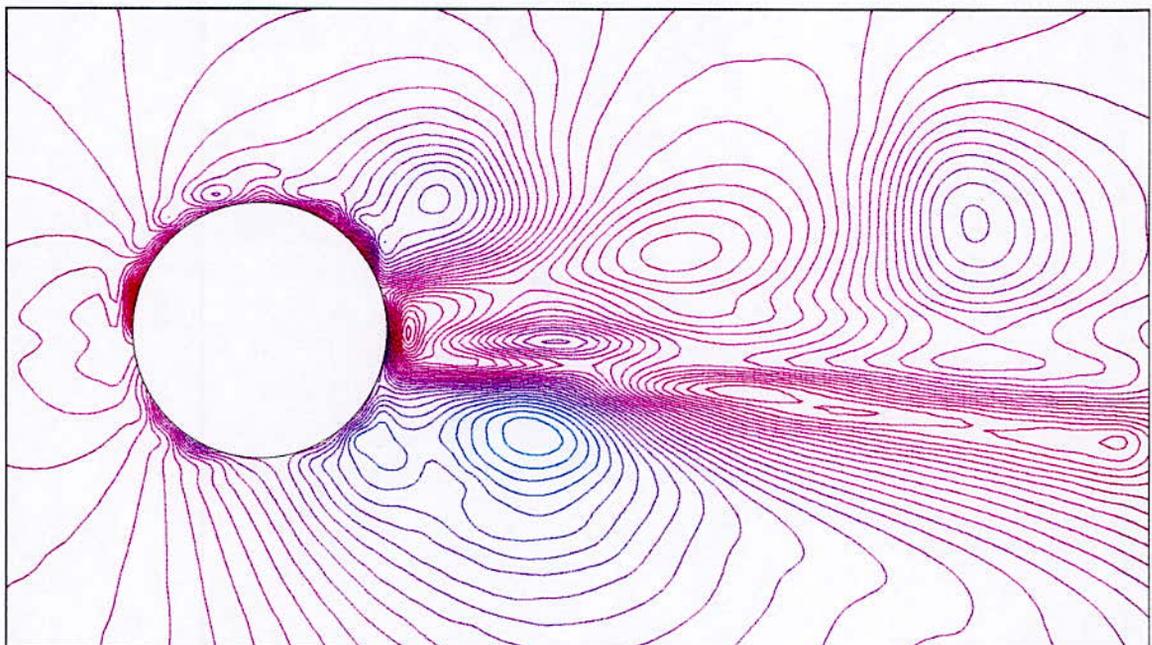


Figure IV-18 : Champs de pression

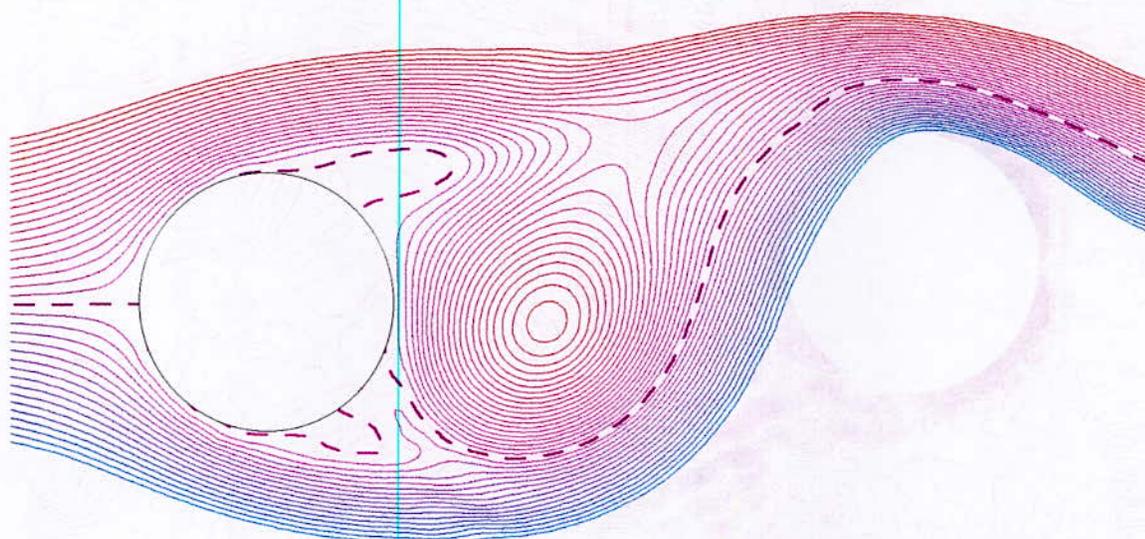


Figure IV-19 : Lignes de courant

IV.3 CYLINDRE EN ROTATION

Dans ce qui suit on va présenter les résultats relatifs au problème du cylindre en rotation et on va traiter les résultats du régime permanent pour les deux nombres de Reynolds $Re=5$ et $Re=20$ et pour différentes valeurs de la vitesse de rotation V_{rc} .

IV.3.1 CONFRONTATION ET VALIDATION

Ce choix a été fait dans le seul but de confronter nos résultats aux investigations de Ta Phuoc Loc^[15].

Le choix de ces deux nombres de Reynolds, fait par cet auteur, a été guidé par l'existence d'une différence de structure entre les écoulements relatifs à ces deux valeurs.

En effet, à $Re=20$ l'écoulement présente une zone tourbillonnaire derrière le cylindre alors qu'à $Re=5$ cette zone n'existe pas.

IV.3.1.1 Répartition du vortex à la surface du cylindre

On donne dans les figures (IV-17) et (IV-19) les répartitions de ω à la surface du cylindre pour différentes valeurs de V_{rc} , les résultats correspondants, obtenus par Ta Phuoc Loc^[15], sont représentés respectivement dans les figures (IV-18) et (IV-20).

On constate que cette répartition n'est plus symétrique du fait de la rotation et que plus la vitesse de rotation augmente plus le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses se rapproche vers l'origine ; voir figure (IV-17). On constate également que pour $Re=20$ il y a apparition d'une petite oscillation au centre de l'axe des angles, cela traduit le fait qu'il y ait décollement des filets fluides

IV.3.1.2 Evolution des coefficients de portance et de traînée

Dans les figures (IV-21) et (IV-23) sont données les courbes représentant l'influence de V_{rc} sur le coefficients de traînée C_d et le coefficient de portance C_L . Les résultats correspondants, obtenus par Ta Phuoc Loc^[15], sont représentés respectivement dans les figures (IV-22) et (IV-24).

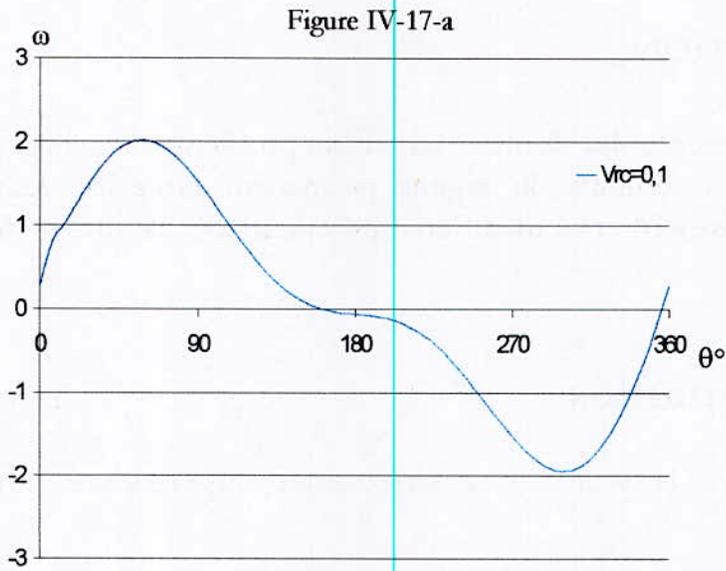


Figure IV-17-a

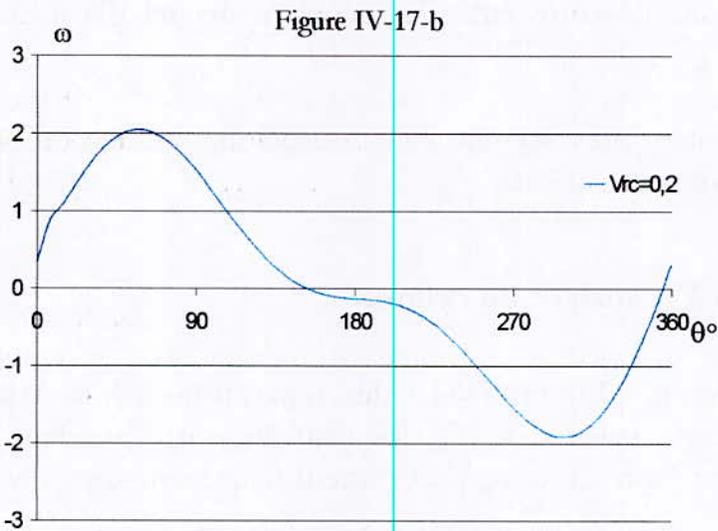


Figure IV-17-b

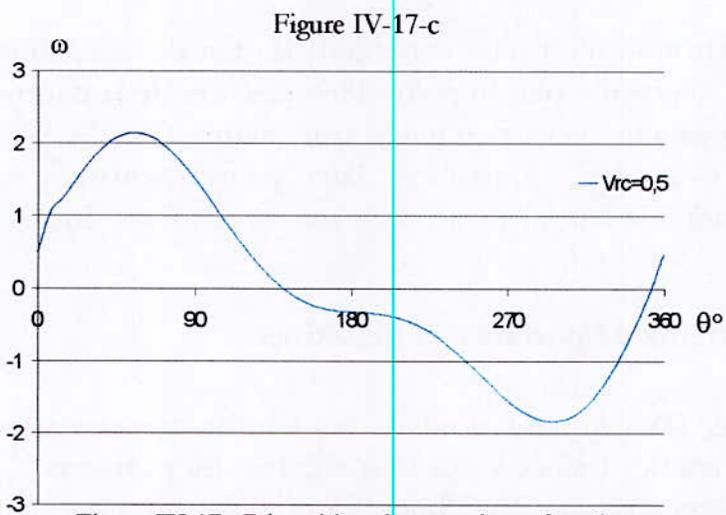


Figure IV-17-c

Figure IV-17 : Répartition de ω sur la surface du cylindre
 $Re=5$ $V_{rc}= 0.1, 0.2$ et 0.5

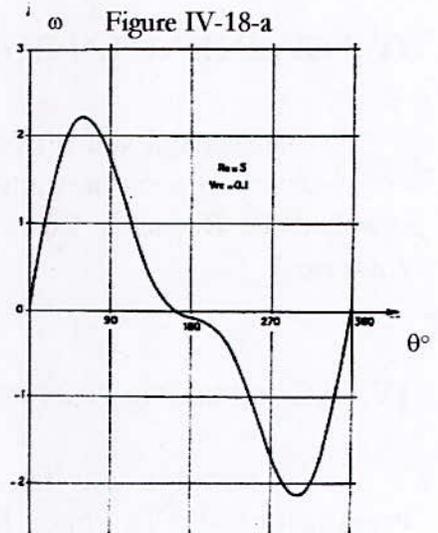


Figure IV-18-a

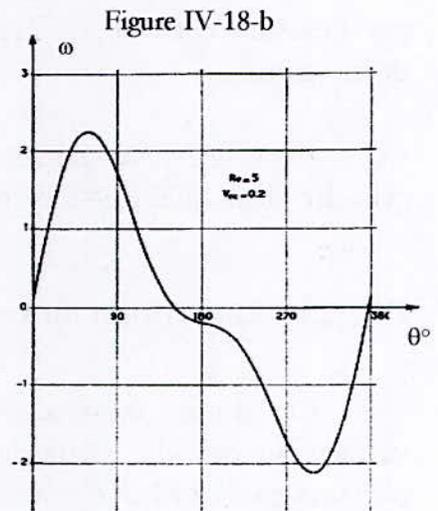


Figure IV-18-b

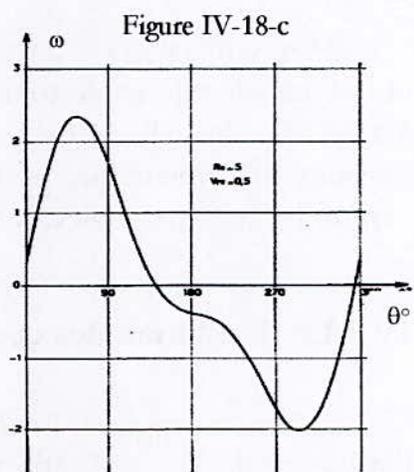


Figure IV-18-c

Figure IV-18 : Répartition de ω sur la surface du cylindre [15]
 $Re=5$ $V_{rc}= 0.1, 0.2$ et 0.5

On constate que le coefficient de traînée diminue quand V_{rc} croît pour un nombre de Reynolds fixé, mais cette décroissance reste faible. La même constatation est faite par Ta Phuoc Loc^[15]. Ce dernier avance que pour Re fixé, le coefficient de portance C_L varie linéairement en fonction de V_{rc} ; voir figure (IV-22), et que plus on augmente Re plus on s'approche des Valeurs données par la Théorie irrotationnelle ; représentées dans cette même figure.

Nos résultats représentés dans la figure (IV-21) ne confirment pas cette observation, néanmoins on remarque que le coefficient de portance varie toujours linéairement en fonction de V_{rc} .

Une critique des résultats obtenus par Ta Phuoc Loc ; concernant la variation des coefficients de portance et de traînée, a été apportée par **Ingham, B. D. (Computers & fluids 1983)** ; citée par **Badr & Dennis^[11]**. Ce dernier avait considéré les mêmes paramètres utilisés par Ta Phuoc Loc ; à savoir $Re=5$ et 20 avec $0 \leq V_{rc} \leq 0.5$, et avait trouvé exactement les mêmes résultats pour les lignes de courants, mais une contradiction dans la variation des coefficients de portance et de traînée.

Ces différences peuvent être dues aux traitements des conditions aux limites. **Ingham** montre que le coefficient de portance varie considérablement en fonction des conditions à la limite externe et de leurs réalisations, et que le coefficient de traînée ne varie que peu. Résultats sur lesquels on ne peut que s'appuyer

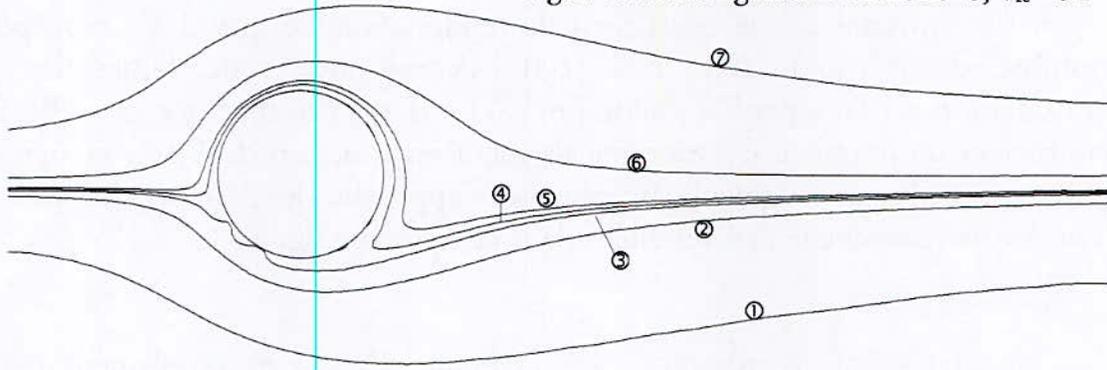
IV.3.1.3 Lignes de courant

Les lignes de courants, également, constituent un élément de comparaison très important dans ce cas. Les figures (IV-25) et (IV-26) représentent nos résultats et ceux de Ta Phuoc Loc^[15] respectivement.

On peut faire aisément la correspondance surtout qu'on a utilisé les mêmes valeurs de la fonction de courant pour tracer les lignes de courants.

Il est à noter que pour obtenir ces résultats on a utilisé un maillage de 50×50 nœuds et une valeur de $R_\infty = 30$ avec $\Delta t = 0.02$, ce qui donne de très bons résultats et aussi un temps de calcul raisonnable, et que pour $Re=5$ un essai à 100×100 nœuds et $R_\infty = 80$ n'a pas pu converger, même après un très long temps de calcul.

Figure IV-25-a : Lignes de courant $Re=5, V_{rc} = 0.1$



- (1) : $\psi = -0.5$
- (2) : $\psi = -0.05$
- (3) : $\psi = 0.0$
- (4) : $\psi = 0.01$
- (5) : $\psi = 0.02$
- (6) : $\psi = 0.1$
- (7) : $\psi = 0.05$

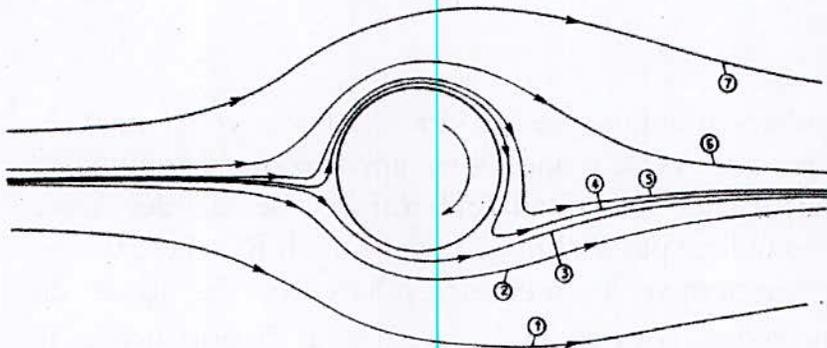
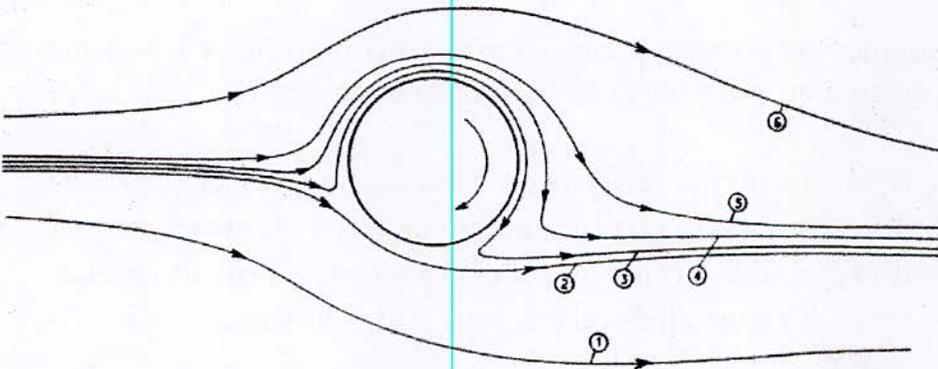
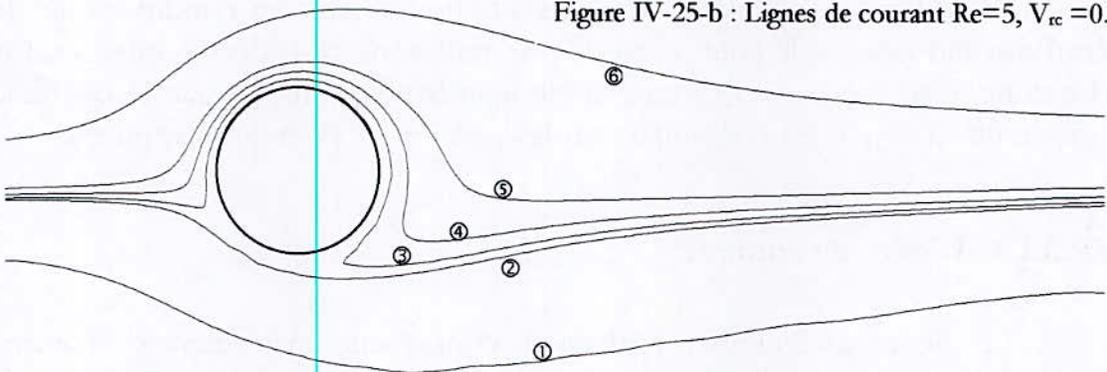


Figure IV-26-a : Lignes de courant $Re=5, V_{rc} = 0.1$

Figure IV-25-b : Lignes de courant $Re=5, V_{rc} = 0.2$



- (1) : $\psi = -0.5$
- (2) : $\psi = 0.0$
- (3) : $\psi = 0.02$
- (4) : $\psi = 0.05$
- (5) : $\psi = 0.1$
- (6) : $\psi = 0.5$

Figure IV-26-b : Lignes de courant $Re=5, V_{rc} = 0.2$

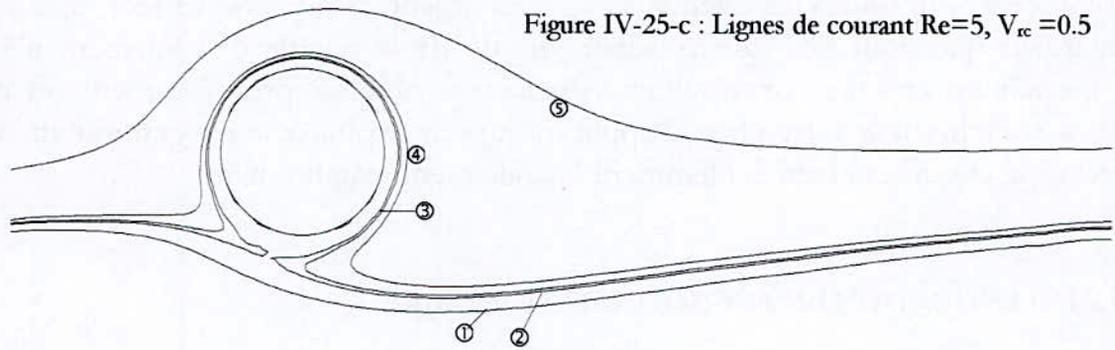


Figure IV-25-c : Lignes de courant $Re=5, V_{rc}=0.5$

- (1) : $\psi=0.0$
- (2) : $\psi=0.06$
- (3) : $\psi=0.07$
- (4) : $\psi=0.1$
- (5) : $\psi=0.5$

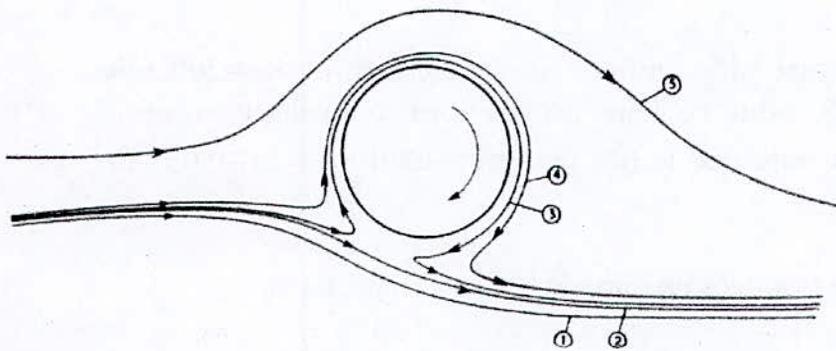
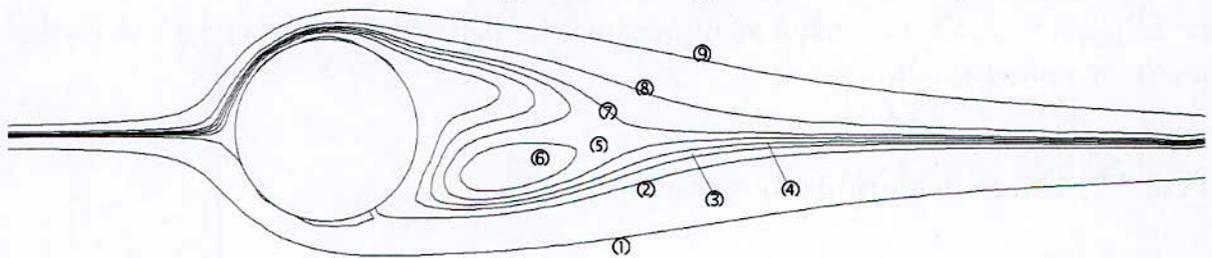


Figure IV-26-c : Lignes de courant^[15] $Re=5, V_{rc}=0.5$

Figure IV-25-d : Lignes de courant $Re=20, V_{rc}=0.05$



- (1) : $\psi=-0.1$
- (2) : $\psi=0.0$
- (3) : $\psi=0.01$
- (4) : $\psi=0.015$
- (5) : $\psi=0.02$
- (6) : $\psi=0.025$
- (7) : $\psi=0.02$
- (8) : $\psi=0.04$
- (9) : $\psi=0.1$

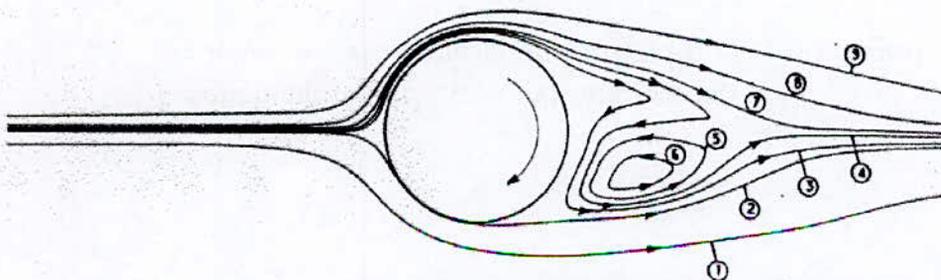


Figure IV-26-d : Lignes de courant^[15] $Re=20, V_{rc}=0.05$

On vient de voir que pour Reynolds $Re=5$ et 20 le régime permanent est atteint et cela pour toutes les valeurs de V_{rc} expérimentées numériquement, mais on a remarqué que pour des valeurs supérieures de Re le régime d'écoulement n'est plus permanent et suite aux résultats satisfaisants obtenus précédemment on ne doit que chercher une autre plage d'application pour exploiter le programme qu'on a développé et qui sera bien évidemment l'écoulement instationnaire.

IV.3.2 INVESTIGATION EN REGIME INSTATIONNAIRE

IV.3.2.1 Présentation de l'application

On propose d'appliquer notre programme à un écoulement de $Re=200$ avec une vitesse de rotation $V_{rc}=0.5$. pour ce faire on a choisi le maillage suivant : $N=100$, $M=100$ et $R_{\infty}=80$. On note que le pas de temps choisi est $\Delta t=0.05$ afin d'accélérer les calculs.

D'autres applications sont données en annexe C concernant les cas :

- $Re=200$ $V_{rc}=1$
- $Re=200$ $V_{rc}=1.5$
- $Re=200$ $V_{rc}=1$
- $Re=500$ $V_{rc}=0.5$

pour lesquels on a tracé uniquement quelques lignes de courant et on a utilisé les mêmes paramètres numériques.

IV.3.2.2 Etude des profils de vitesse

L'avantage de l'étude numérique sur une étude expérimentale est la possibilité de tracer toutes les courbes dont on a besoin du moment qu'on a les valeurs de toutes les grandeurs au niveau des nœuds du maillage.

On mentionne que les points où la composante de la vitesse $u=0$ ou $v=0$ correspondent respectivement aux lignes de courant qui sont perpendiculaires à l'axe x et ceux qui lui sont tangents.

CHAPITRE V

ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE AVEC ASPIRATION A LA PAROIS

On propose maintenant d'étudier les effets d'une aspiration au niveau d'une certaine partie de la parois d'un cylindre fixe au sein de l'écoulement. Pourrons nous simuler grâce a notre programme la variante de l'effet Magnus, la turbovoile ?

V.1 PRINCIPE DE L'ASPIRATION

V.1.1 MOYENS DE CONTROLE DE LA COUCHE LIMITE^{[6],[14][17]}

L'aspiration constitue l'un des moyens de contrôle de la couche limite. Cette méthode consiste à aspirer du fluide de l'intérieur de la parois à l'aide de pores judicieusement placés. Par ce moyen on empêche l'accumulation de fluide retardé et on diminue la pression dans la partie entourant la fente, c'est ainsi que le décollement est empêché.

On peut citer également comme moyen de contrôle de la couche limite :

- L'animation de la parois d'un mouvement dans le même sens de l'écoulement comme cela a été fait avec le cylindre en rotation où on réduisait la vitesse relative d'un côté et de l'autre on l'accélérait ; grâce au mouvement de rotation du cylindre, ce qui retardait le décollement sur le premier côté et le provoquait sur l'autre.
- Accélération de la couche limite, qui peut se réaliser par aspiration mais aussi par refoulement à travers fentes conçus d'une manière à éviter la formation de tourbillons à leurs niveaux ou par une déviation de l'écoulement principale à l'aide d'un obstacle placé devant le corps en question.
- La conception de forme aérodynamique, cette technique est surtout exploitée dans le domaine de l'aéronautique.
- On peut citer finalement deux dernières techniques : l'injection d'un gaz différent, et le refroidissement de la parois.

V.1.2 CARACTERISTIQUES DE LA TURBOVOILE

D'après les recherches de l'équipe Cousteau, la turbovoile est profilée et est de section elliptique de plus elle contient au niveau de l'intrados un petit volet qui oblige le décollement des filets fluide, ce dernier est porté par un carénage spéciale qui sert à contrôler l'aspiration en occultant les zones d'aspiration non utilisées. On précise aussi que l'aspiration est contrôlée à toute instant ; elle est donc variable, et que la turbovoile peut avoir une certaine incidence voir figure 2 de l'introduction générale.

V.2 APPLICATION

Notre application est réalisée avec un cylindre fixe de section circulaire sans accessoires pour obliger le décollement. L'aspiration est constante et l'incidence est nulle dans chaque cas.

Au stade programmation, certaines modifications sont nécessaires surtout au niveau des conditions à la parois du cylindre où l'aspiration est appliquée. Cette dernière l'est dans chaque nœuds du maillage appartenant à la zone dite d'aspiration qui représente une portion de cette parois. Dans notre cas, cette portion fait un angle de 90° voir figure-ci contre, mais la valeur réelle de cet angle dépend étroitement du maillage, spécialement du paramètre N.

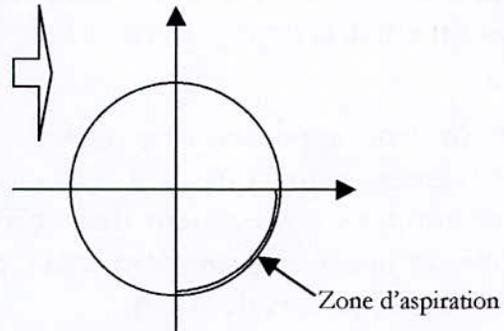


Figure V-1 : configuration

V.2.1 MANIPULATIONS NUMERIQUES

L'aspiration est concrétisée analytiquement en fonction de la vitesse radiale V_r .

Au niveau de la zone d'aspiration, on a : $V_r = Asp_{rt}$

avec Asp_{rt} : la vitesse d'aspiration

$$V_r = Ez^{-1/2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Asp_{rt}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Ez^{1/2} Asp_{rt} = \frac{Asp_{rt}}{a^2}$$

En faisant un développement en différences finis, on obtient :

$$\psi_{i+1} = \frac{2\Delta\theta}{a^2} Asp_{rt} + \psi_{i-1}$$

V.2.2 ECOULEMENT STATIONNAIRE

V.2.2.1 Présentation des expérimentations

Les limites de la zone d'aspiration qu'on a choisi, telle que c'est représenté par la figure (V-1), sont les mêmes pour tous les cas. Pour des raisons de stabilité et de rapidité de calcul on a choisi également un même maillage à savoir $N=30$ et $M=30$ et on a fixé la limite extérieure à $R_{\infty}=30$.

Pour cette application on a choisi deux nombres de Reynolds $Re=5$ et 20 pour les mêmes raisons que dans le cas du cylindre fixe ou en rotation, car en effet ces deux nombres représentent deux configurations d'écoulement complètement différentes et que le régime permanent peut être atteint. L'aspiration est réalisée pour différentes valeurs de $Asprt$.

Les différentes expérimentations réalisées dans ce cas on été faites pour des paramètres temps très élevés afin de pouvoir étudier la variation des coefficients de traînée et de portance qui peuvent nous informer sur l'établissement du régime permanent. Les figures suivantes représentent ces variations en fonction du temps pour quelques cas seulement.

V.2.2.2 Discussion des résultats

V.2.2.2.1 Evolution des coefficients de portance et de traînée

On remarque dans la figure (V-2-a, b) que le coefficient de traînée diminue rapidement pour se stabiliser après une légère augmentation et que le coefficient de portance oscille puis se stabilise, cela est valable pour tous les cas où $Re=5$ et $Asprt = 0.001, 0.005$ et 0.01 .

Pour $Re=5$ et $Asprt > 0,05$ le coefficient de traînée, à première vue, semble converger vers une valeur constante dans le temps, figure (V-3-a). Mais d'après l'examen du fichier .DATA résultant, on a constaté qu'il oscillé d'une manière périodique avec une très petite amplitude, Cela est montré clairement par la figure (V-3-b) De même pour le coefficient de portance où la figure (V-4-b) le montre clairement.

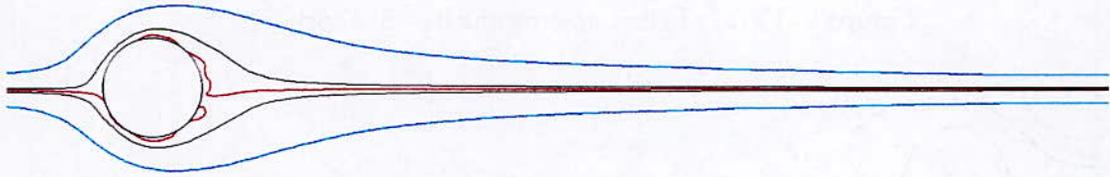


Figure V-13 (a) : lignes de courant $Re=5$ $Asprt=0.001$

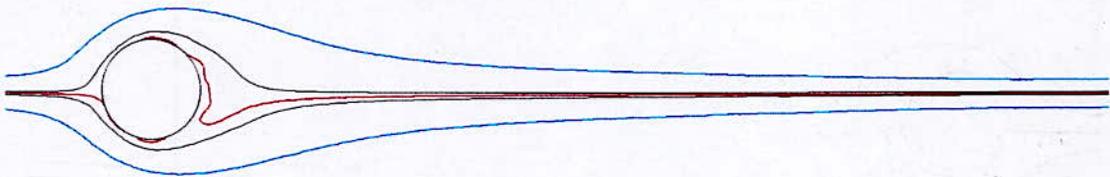


Figure V-13 (b) : lignes de courant $Re=5$ $Asprt=0.005$

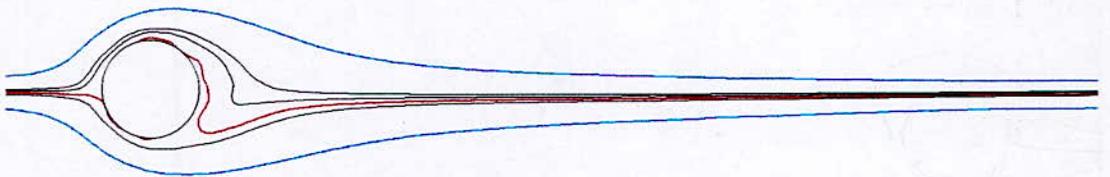


Figure V-13 (c) : lignes de courant $Re=5$ $Asprt=0.01$

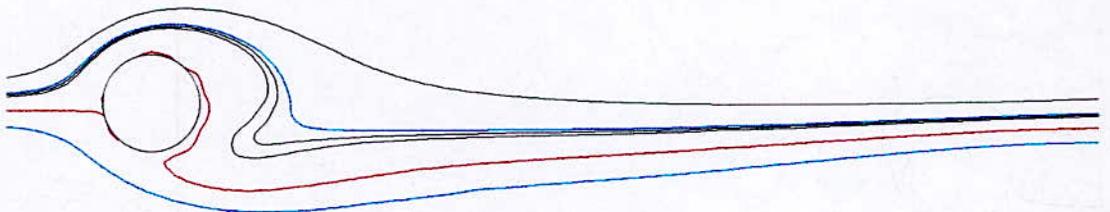
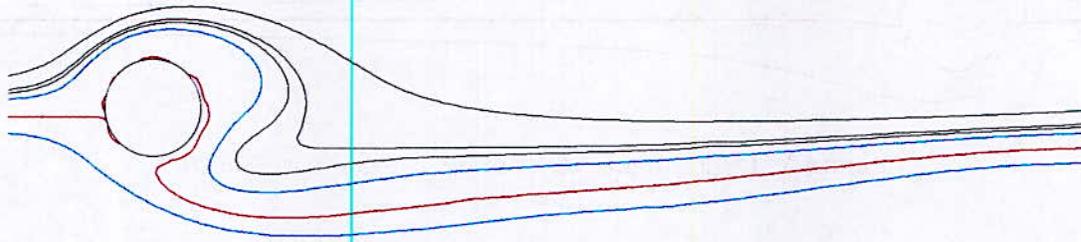
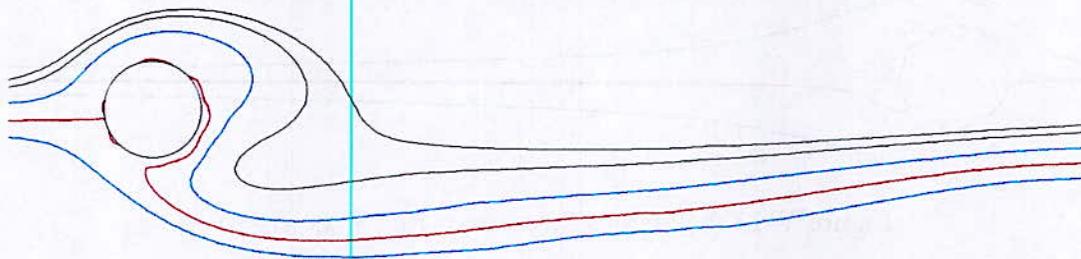
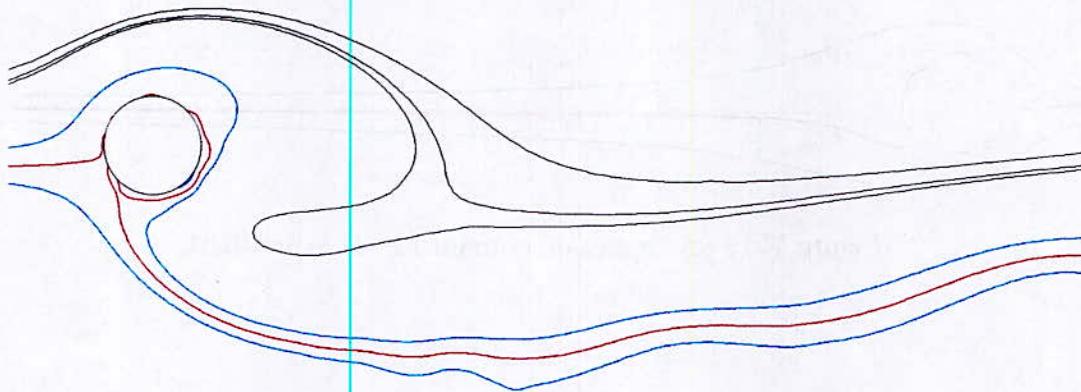
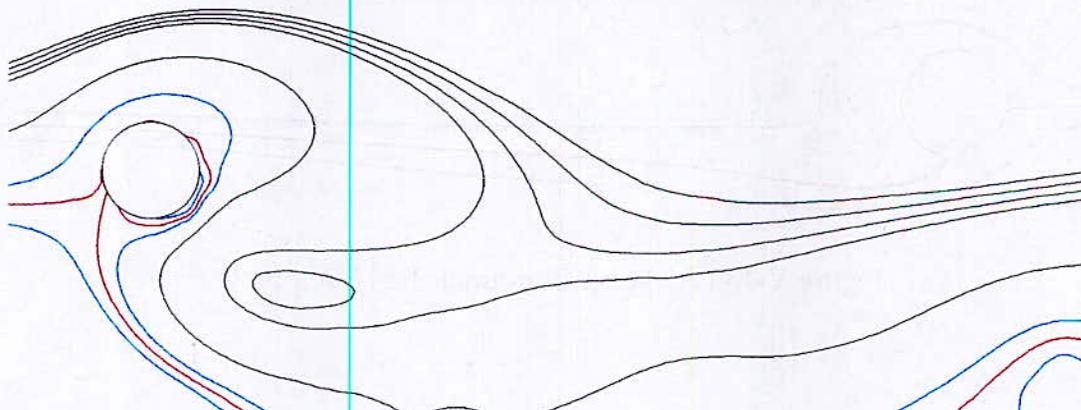
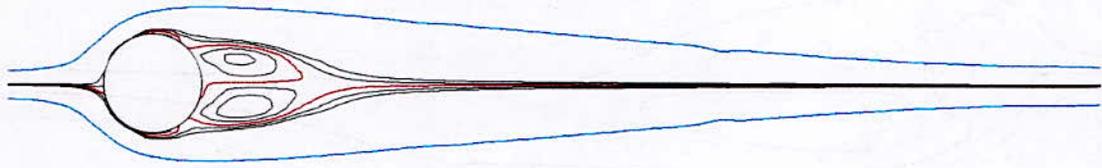
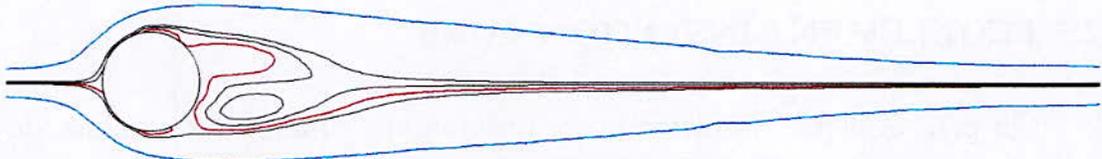
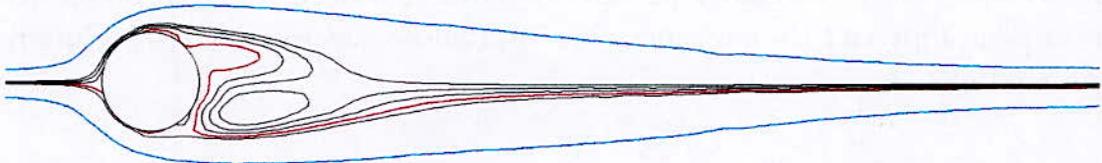
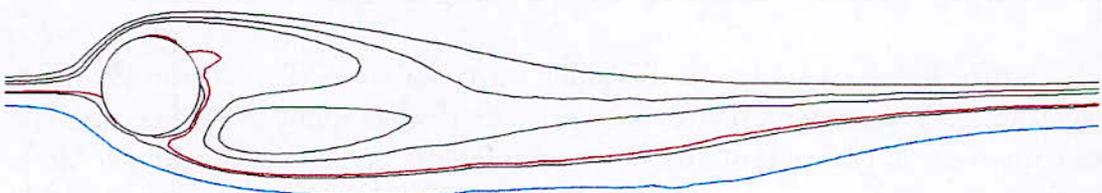
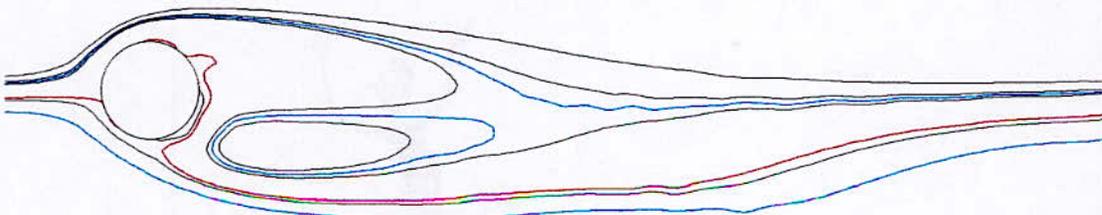


Figure V-13 (d) : lignes de courant $Re=5$ $Asprt=0.05$

Figure V-13 (e) : lignes de courant $Re=5$ $Asprt=0.075$ Figure V-13 (f) : lignes de courant $Re=5$ $Asprt=0.1$ Figure V-13 (g) : lignes de courant $Re=5$ $Asprt=0.2$ Figure 13 (h) : lignes de courant $Re=5$ $Asprt=0.3$ 

Figure V-14 (a) : lignes de courant $Re=20$ $Asprt=0.001$ Figure V-14 (b) : lignes de courant $Re=20$ $Asprt=0.005$ Figure V-14 (c) : lignes de courant $Re=20$ $Asprt=0.01$ Figure V-14 (d) : lignes de courant $Re=20$ $Asprt=0.05$ Figure V-14 (e) : lignes de courant $Re=20$ $Asprt=0.075$

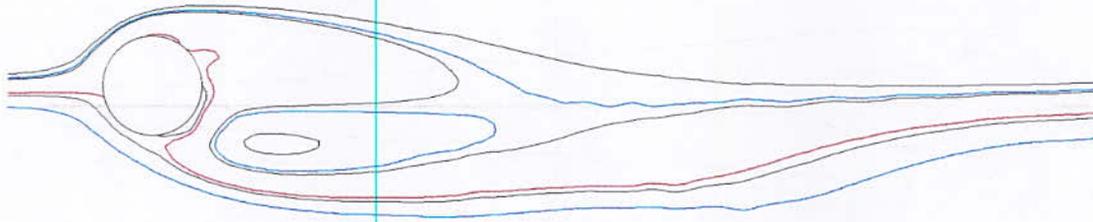


Figure V-14 (f) : lignes de courant $Re=20$ $Asprt=0.1$

V.2.3 ECOULEMENT INSTATIONNAIRE

On peut également, grâce à notre programme, obtenir des résultats de l'écoulement instationnaire pour le cylindre avec aspiration de la même manière que pour le cylindre en rotation, et cela pour différentes valeurs d'aspiration.

En donne en annexe D les lignes de courant d'un écoulement instationnaire correspondant à $Re=200$ et $Asprt=0.001$ en fonction du temps ou on peut apprécier les naissances des tourbillons ainsi que leurs évolution dans le temps.

V.2.4 CONCLUSION

L'aspiration est une technique très importante dans le contrôle de la couche limite. On vient, par cette investigation de l'écoulement autour du cylindre avec aspiration, révéler cette importance et la maître en valeur.

Notre but à ce stade été d'évaluer les possibilités d'évolution de notre programme, ce qui vient d'être entrepris, mais également d'étudier un telle écoulement en le comparant aux deux premier cas et de voir l'influence de la variation de cette aspiration sur l'écoulement et sur le schéma numérique ; du point de vu convergence.



CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le but de cette étude était de réaliser un programme informatique afin de simuler un écoulement visqueux incompressible autour d'un cylindre fixe ou en rotation par la résolution numérique des équations de Navier-Stokes.

L'étude du problème du cylindre fixe nous a permis, en régime permanent, une première validation du schéma utilisé et une première investigation en régime instationnaire.

Elle permettra une extension vers l'étude des profils d'aile. En effet, comme les propriétés de symétrie n'ont pas été utilisées, il est possible d'appliquer la transformation conforme pour ramener un profil sur un cercle et de résoudre les équations de Navier-Stokes dans le plan transformé.

Le programme développé nous a permis de mettre en évidence, par le calcul, les phénomènes de décollement et de sillage et d'apprécier l'évolution de l'écoulement en fonction des divers paramètres et d'observer la création des tourbillons et leurs détachements.

L'étude de l'écoulement autour du cylindre en rotation nous a permis une deuxième validation du programme en régime stationnaire et une deuxième investigation de l'écoulement instationnaire, ce qui nous a permis la vérification et l'étude de l'effet Magnus. D'après les résultats obtenus, l'expérience de Magnus semble confirmée aussi pour les faibles nombres de Reynolds : disparition du décollement et création d'un effet de portance. L'analyse des résultats nous a permis d'émettre quelques conclusions.

En exploitant le caractère évolutif de notre programme, on est arrivé à simuler un écoulement visqueux autour d'un cylindre fixe avec aspiration sur une partie de la parois. Cette simulation nous a permis en premier lieu de manipuler l'aspiration numériquement et en deuxième lieu d'étudier cet écoulement.

L'application de l'aspiration nous a permis de comprendre et de mettre en œuvre le principe de la turbovoile. Ainsi, on peut dans des cas pratiques, où il y a exploitation d'une portance, remplacer un cylindre tournant par un cylindre fixe avec aspiration.

Suite aux multitudes d'essais, on a conclu que plus on augmente le nombre de Reynolds plus il faut augmenter le maillage et la distance de la zone extérieure afin d'avoir une bonne simulation, si non il risque de ne pas y avoir de bons résultats ou même pire ; pas de convergence.

Il serait particulièrement intéressant, comme perspective, de construire un maillage à plusieurs zones, selon la nature des phénomènes qui y subsistent, pour mieux approcher la réalité. On citera la zone de couche limite où le maillage doit être très raffiné ou même propre à la couche limite, la zone pariétale, la zone de mélange, la zone de recirculation et en fin la zone d'écoulement potentielle qui ne nécessite pas un raffinement important.

On peut également projeter d'appliquer l'aspiration sur toute la surface du cylindre. Cette notion d'aspiration évoque la notion de parois poreuse, donc l'étude de l'écoulement autour d'un cylindre à parois poreuse.

Finalement, on peut proposer de faire une étude comparative entre l'aspiration et l'injection ou même d'appliquer les deux en même temps dans une configuration adéquate.



ANNEXE A

DIFFERENTS REGIMES D'ÉCOULEMENT^{[6],[18],[19]}

L'étude du sillage d'un cylindre circulaire à travers les nombreuses expériences a permis de mettre en évidence l'existence de différents régimes. Ceux-ci sont résumés dans les tableaux ci-dessous. Ces résultats sont classés en fonction du nombre de Reynolds globale $Re = \frac{U_0 D}{\nu}$.

Re	Dénomination	Propriétés
$Re < 1$	Rampant	<ul style="list-style-type: none"> • Pas de décollement • Écoulement symétrique
$1 < Re < 40$	Régime laminaire instationnaire	<ul style="list-style-type: none"> • Décollement avec deux rouleaux contrarotatifs captifs • Stable • Écoulement symétrique
$40 < Re < 300$	Régime laminaire instationnaire	<ul style="list-style-type: none"> • Apparition des allées de Von Karman • Instationnaire
$300 < Re < 200000$	Régime subcritique	<ul style="list-style-type: none"> • Allée tourbillonnaire de nature turbulente • Couche limite laminaire avec décollement • Existence d'un régime pseudo-périodique
$Re > 200000$	Régime trans et supercritique	<ul style="list-style-type: none"> • Transition de la couche limite sur le cylindre avant décollement • Aspect chaotique de l'écoulement plus prononcé • Modification de la position de décollement et de la valeur de la traînée

Ces différents régimes ont été bien spécifiés par différents auteurs, cependant il existe un certain désaccord quand aux frontières les séparant.

Les figures (1, 2 et 3) illustrent différents régimes d'écoulement réel autour d'un cylindre circulaire

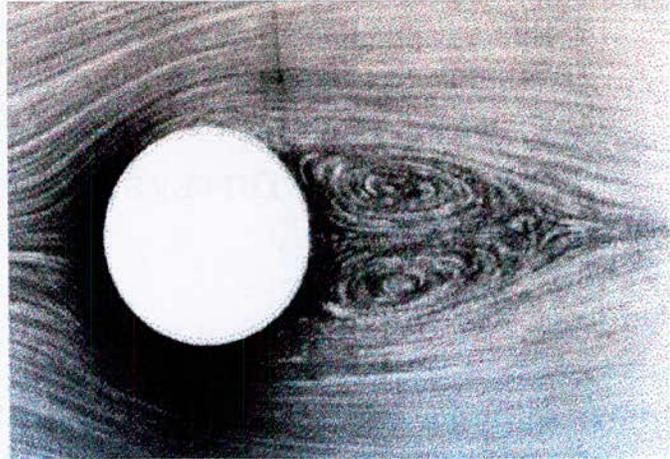


Figure 1 : Ecoulement au démarrage.
Formation des tourbillons [6]

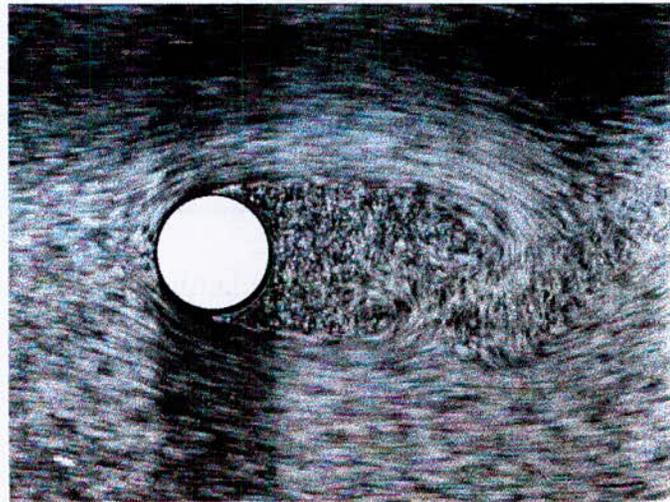


Figure 2 : Ecoulement en régime permanent
 $Re < Re^*$ [6]

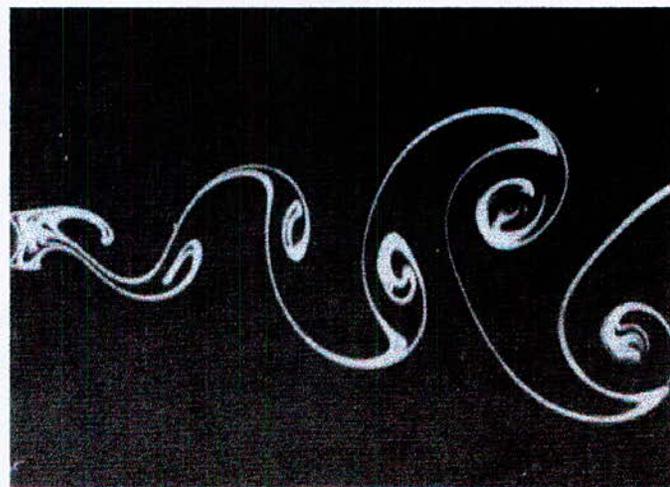


Figure 3 : Allée tourbillonnaire
de Von-Karman [6]

ANNEXE B

TOPOLOGIE DE L'ÉCOULEMENT REEL^[7]

Pour un cylindre sans rotation et qui débute sa translation dans le fluide initialement irrotationnel partout, un mouvement dans le fluide est produit, mais à cause de la vitesse relative du fluide par rapport au cylindre et des conditions à la surface de ce dernier (paroi solide), une vorticité est engendr e et elle est progressivement transport e par diffusion et convection (pour des nombres de Reynolds de quelque centaines, la convection joue un très grand rôle dans la zone de recirculation ferm e ($V_{rc} = 0$)). A cause de la symétrie du gradient de vitesse, cette zone est form e de deux tourbillons E_1 et E_2 opposés et symétriques (voir figure 1). le tourbillon supérieur tourne dans le sens horaire, et l'autre dans le sens inverse ; ils ont une même limite SS_1 .

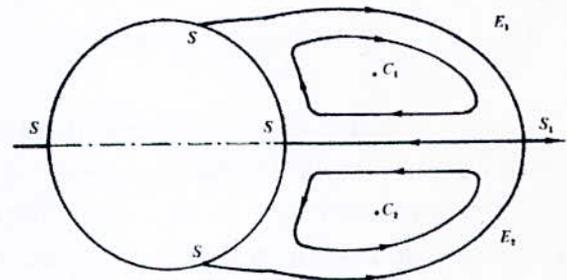


Figure 1 : Topologie des tourbillons
En écoulement symétrique

La zone de recirculation croît en longueur et en largeur avec le temps, tout en restant stable, symétrique et attach e au cylindre ; cela est valable pour $t < t_c$, cette limite d pass e, les tourbillons deviennent asymétriques, et se détachent alternativement derrière le cylindre en formant une structure de tourbillons alternés (tourbillons de Von-Karman).

Selon la figure 1, deux types de points de stagnation peuvent être distingués : ceux notés S se situant sur la face du cylindre, incluant les deux points d'arrêt à l'amont et à l'aval du cylindre et les points de décollement, et le point S_1 : se situant à la fin de la zone de recirculation à l'intersection des deux lignes de courant qui entourent les deux tourbillons. De tels points comme celui noté S1

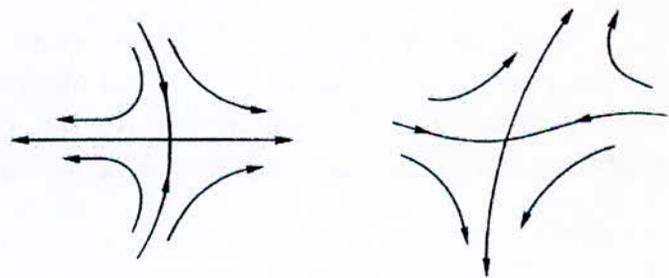


Figure 2 : Configuration des lignes de courant

sont dus à un changement brusque de direction des lignes de courants, comme montré à la figure 2. Dans ce cas particulier ; ou $V_{rc} = 0$, à cause de la symétrie de la zone du sillage fermée, la vorticité en ce point est nulle. En conséquence les deux branches de lignes de courants se coupent perpendiculairement (figure 2-(a))

Une autre configuration est possible ; voir figure 2-(b), et qui peut être constatée pour le cas où $V_{rc} \neq 0$.

Soit maintenant le cas $V_{rc} \neq 0$, donc le cylindre est animé en plus de sa translation, par un mouvement de rotation uniforme dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (voir figure 3).

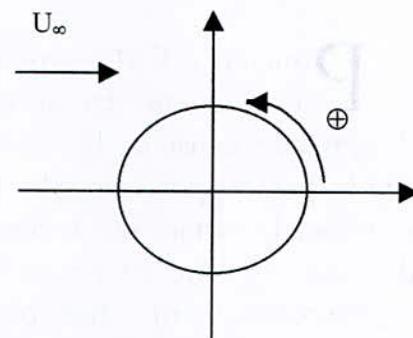


Figure 3 : Sens du mouvement de rotation

Au début du mouvement, l'allure de l'écoulement est la même que pour le cylindre fixe, mais aussitôt que la viscosité s'impose, une différence de comportement est constatée.

Premièrement, du fait de la rotation de la partie supérieure du cylindre dans le sens inverse de l'écoulement, et de la partie inférieure dans le même sens, une asymétrie est produite sur la répartition des pressions, du vortex et des tourbillons. Ces derniers se forment plus rapidement sur la face supérieure que sur la face inférieure, ce phénomène sera d'autant plus important que V_{rc} augmente ; le tourbillon inférieur apparaît un peu plus tard et devient un peu plus petit et disparaît complètement quand V_{rc} dépasse une certaine valeur limite, cette valeur est donnée égale à 2 par Madlène Coutenceau et Christian Ménard^[6]

Deuxièmement, du fait de la rotation du cylindre, une fine couche de fluide est entraînée par ce dernier, et donc les points d'arrêt ne sont plus situés sur la parois mais se situent dans le fluide lui-même à la limite de cette couche, cela est vrai en particulier pour le point d'arrêt aval où l'écoulement se divise pour passer autour de l'obstacle.

Appelons ce point S, il est constaté qu'il s'établit rapidement dans le deuxième quart du plan, après s'être traduit dans le sens inverse du sens de rotation du cylindre. D'autres points d'arrêt pourront apparaître en fonction des variations de V_{rc} , en même temps que la naissance des tourbillons.

Appelons ces tourbillons E_i tel que i indique leur ordre de détachement, et C_i et S_i leurs centres et nœuds de détachement. Dans certains cas deux tourbillons coexistent pour former finalement un seul, on les nomme E_i' et E_i'' .

La figure 4 représente deux cas de figure, la première (a) montre l'écoulement au début du mouvement, il y a deux tourbillons asymétriques.

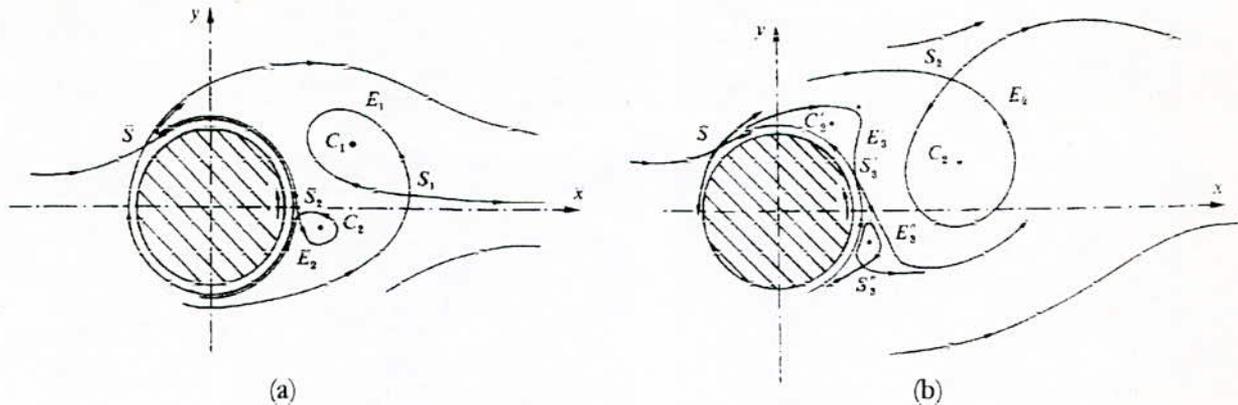


Figure 4 : Topologie des tourbillons

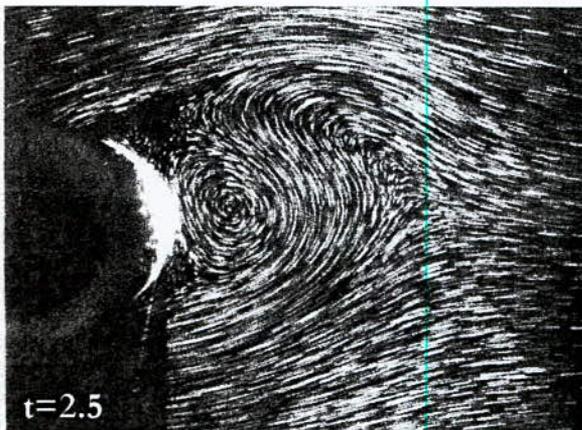
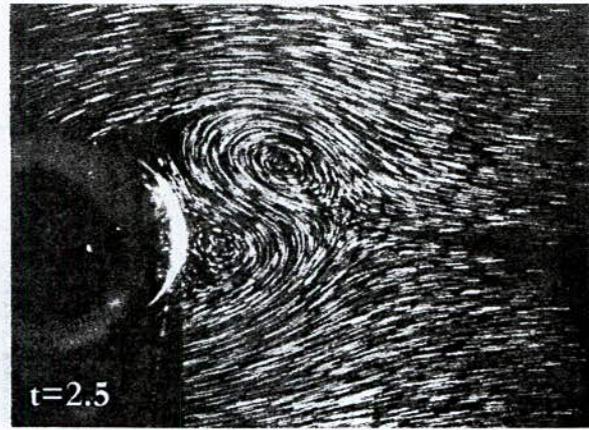
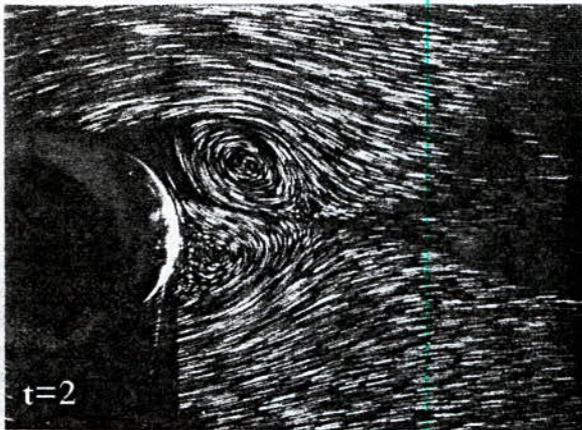
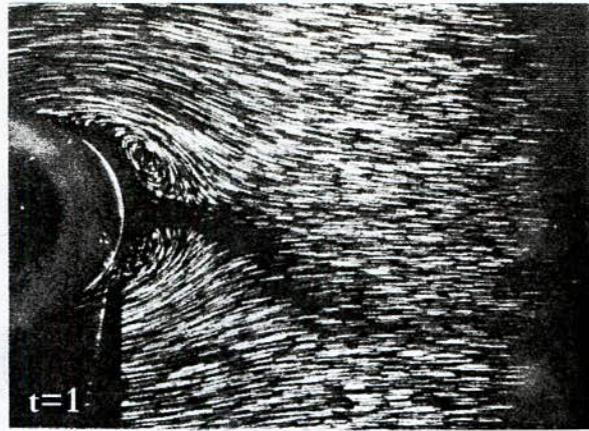
Il peut être noté que contrairement au cas où $V_{rc}=0$, les deux tourbillons n'ont pas de frontières communes, mais ils sont séparés par le fluide qui passe autour d'eux à cause de leurs rotations et qui est de sens inverse : E_1 se renferme vers l'amont en S_1 , tandis que E_2 se ferme vers la paroi du cylindre en S_2 .

Ces tourbillons croient en largeur et en longueur en fonction du temps, de plus en plus que le fluide passe entre eux.

Durant la phase initiale, ils accompagnent le cylindre dans son mouvement de rotation comme si ils y étaient attachés mais le tourbillon supérieur E_1 , se développant plus rapidement, se meut vers le bas, alors que E_2 continue de se répandre avec son point de fermeture S_2 se déplaçant sur la fine couche en rotation, initialisant le développement des tourbillons de Von-Karman.

La deuxième figure (b) montre que le tourbillon E_2 se détache du cylindre, où deux autres tourbillons intermédiaires E_3' et E_3'' prennent naissance au près de la paroi dans les deux zones supérieure et inférieure. Ces deux tourbillons vont se rapprocher l'un de l'autre pour ne former, finalement, qu'un seul tourbillon E_3 .

On donne à la page suivante quelques photos obtenus expérimentalement par Coutanceau et Ménard [7] de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation avec $V_{rc}=0.5$ et $Re=200$, en fonction du temps.

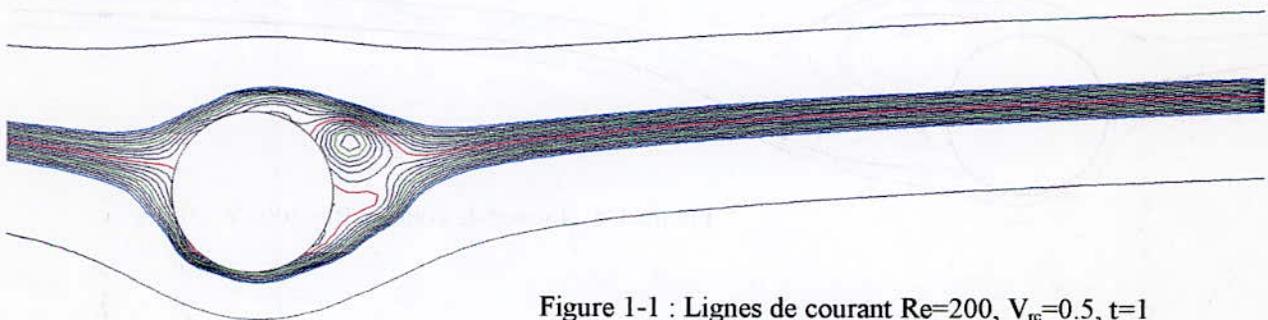
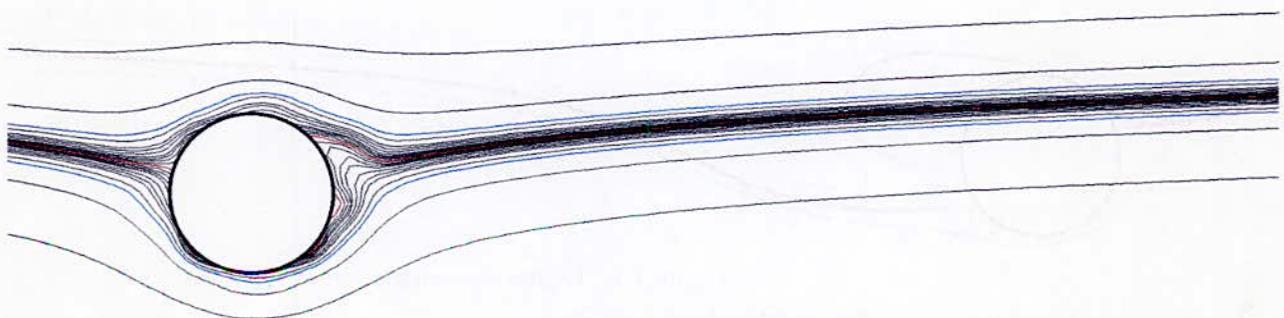


ANNEXE C

RESULTATS DE LA SIMULATION
RELATIF AU CYLINDRE TOURNANT

Dans cette annexe, on présente les lignes de courant des simulation faites en écoulement instationnaire à $Re=200$ et 500 , pour différents valeurs de V_{rc} .

On précise que les lignes de courant en couleur rouge correspondent à l'équation du corps, c'est-à-dire $\psi = 0$ et que les lignes de courant en couleur bleu correspondent respectivement à la ligne de courant $\psi = 0.2$; pour les lignes supérieurs, et $\psi = -0.2$ pour les lignes inférieurs.

Figure 1-1 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=1$ Figure 1-2 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=2$

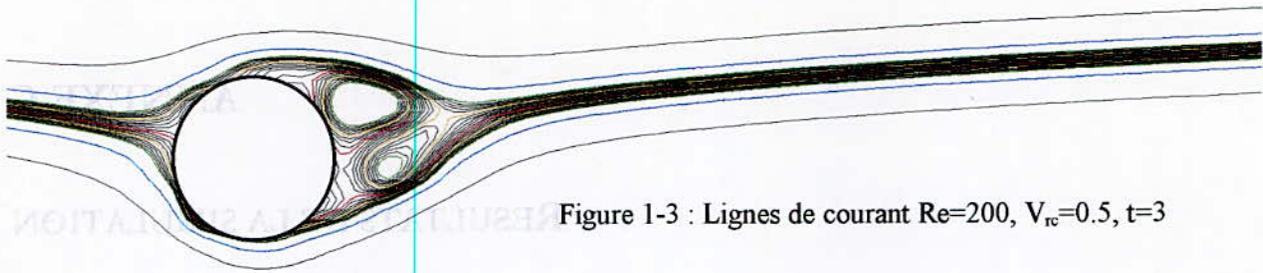


Figure 1-3 : Lignes de courant $Re=200, V_{rc}=0.5, t=3$

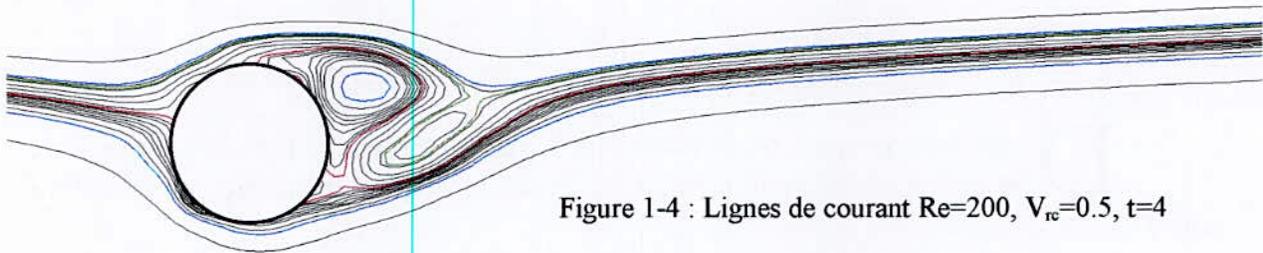


Figure 1-4 : Lignes de courant $Re=200, V_{rc}=0.5, t=4$

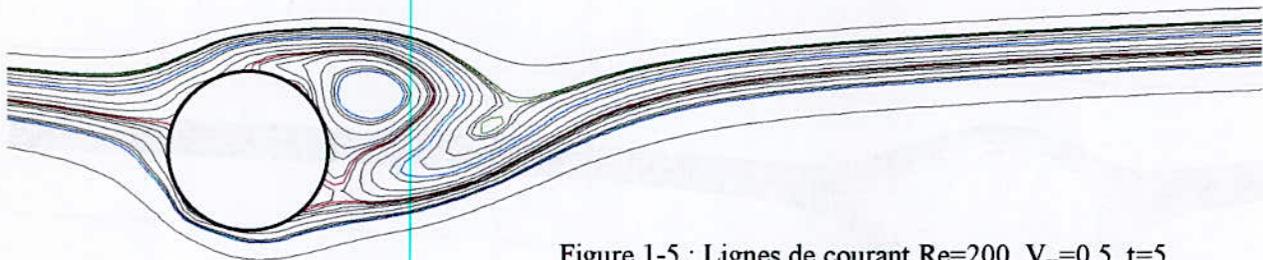


Figure 1-5 : Lignes de courant $Re=200, V_{rc}=0.5, t=5$

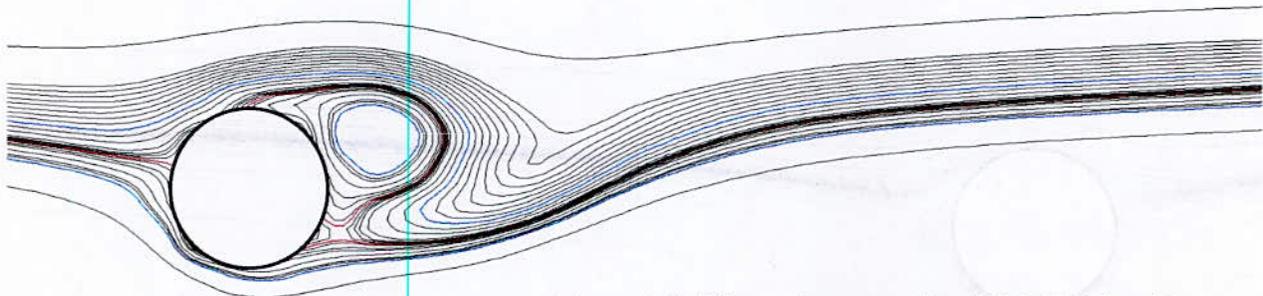
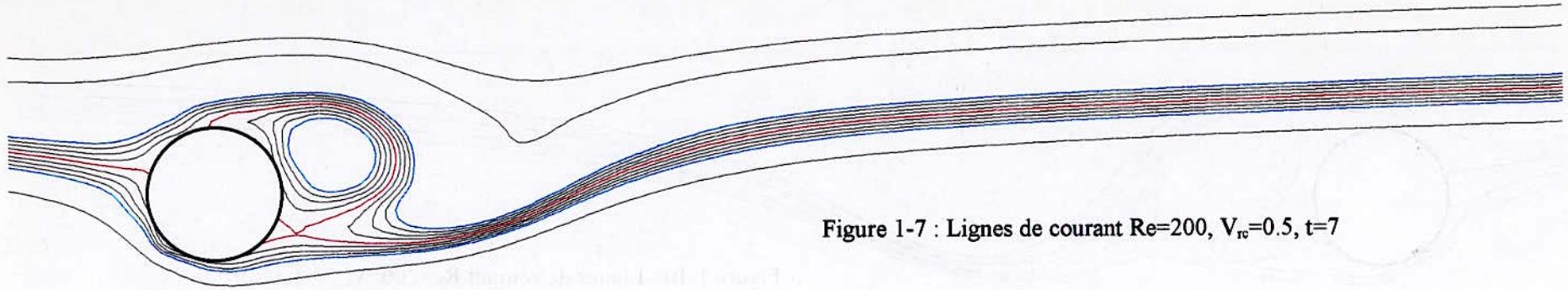
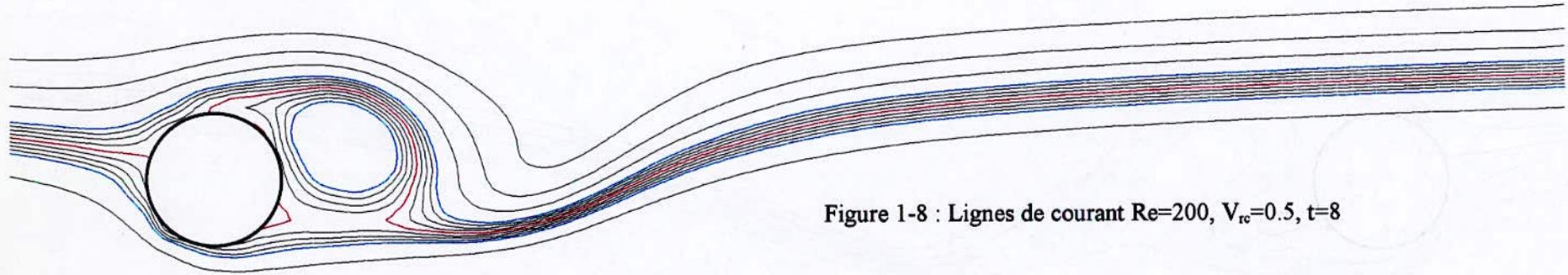
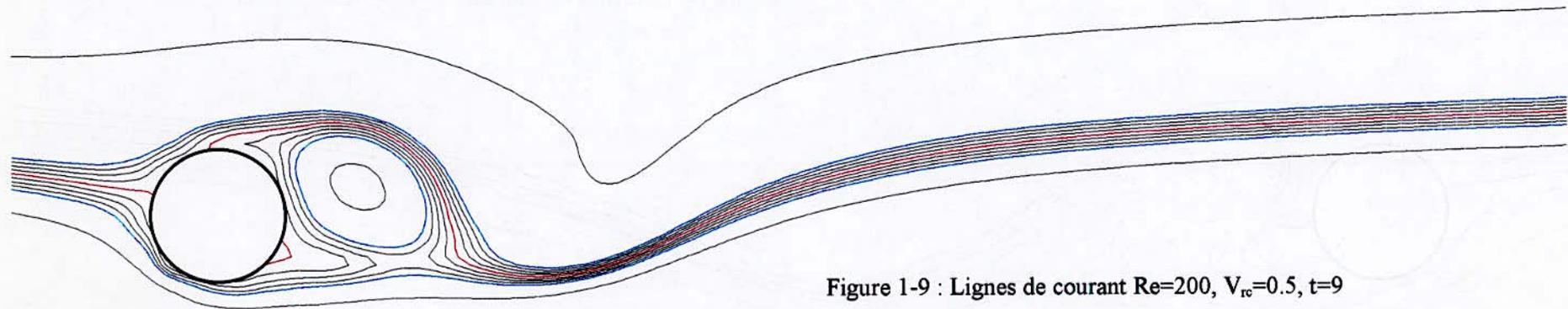
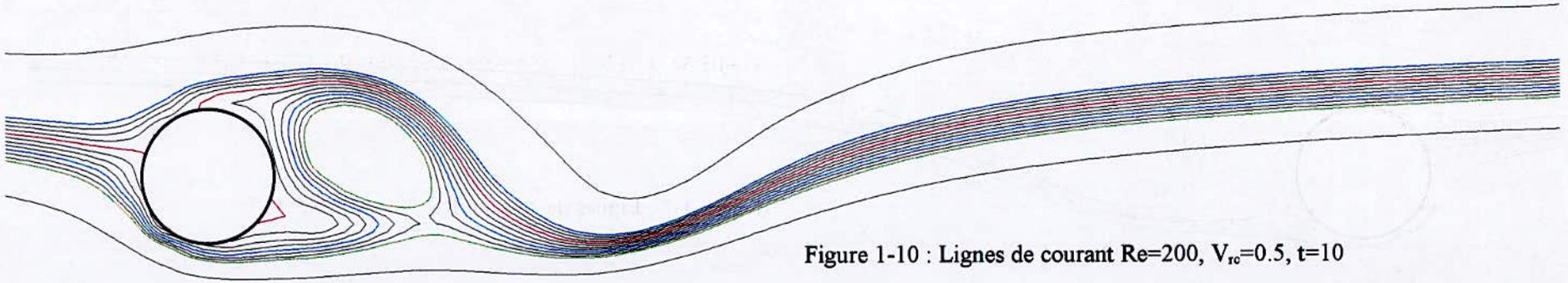


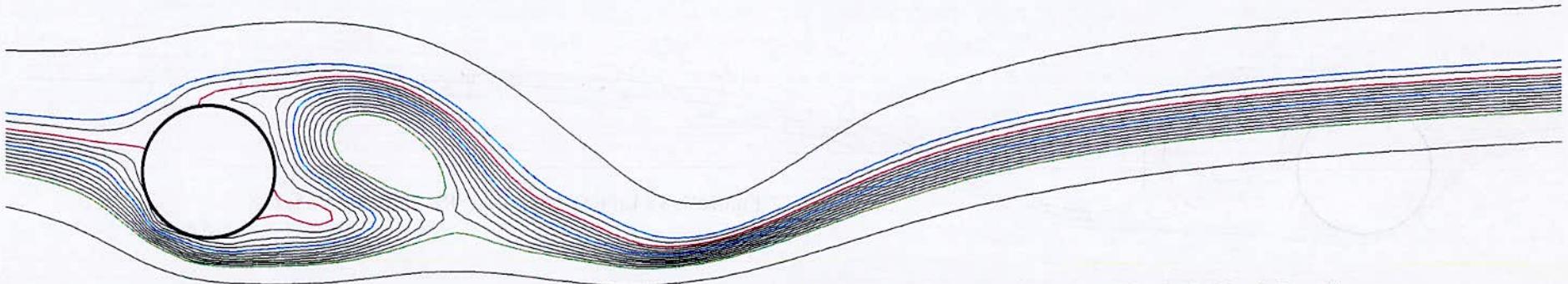
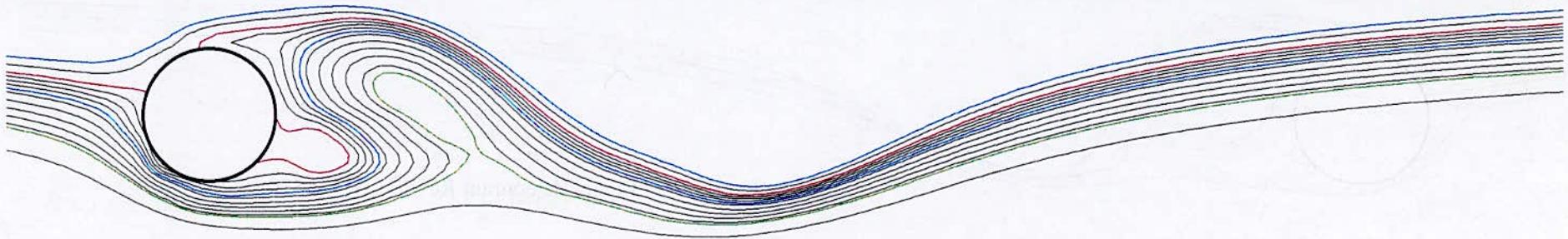
Figure 1-6 : Lignes de courant $Re=200, V_{rc}=0.5, t=6$

Figure 1-7 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=7$ Figure 1-8 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=8$ Figure 1-9 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=9$

Promotion 1999

Figure 1-10 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=10$

98

Figure 1-11 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=11$ Figure 1-12 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=12$

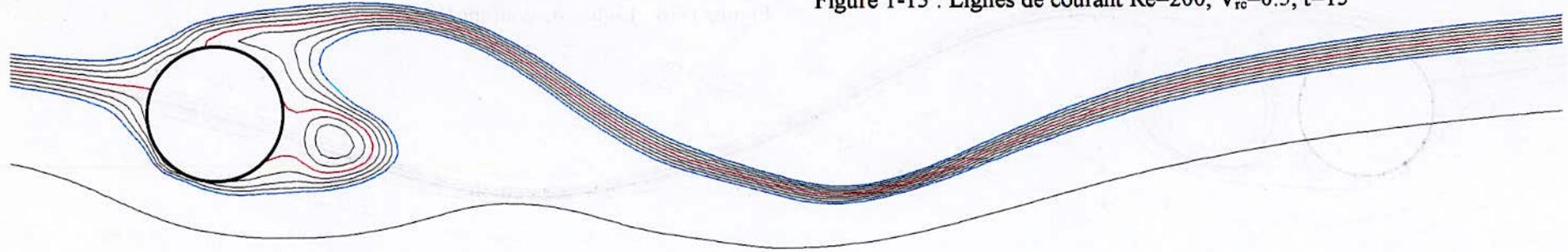
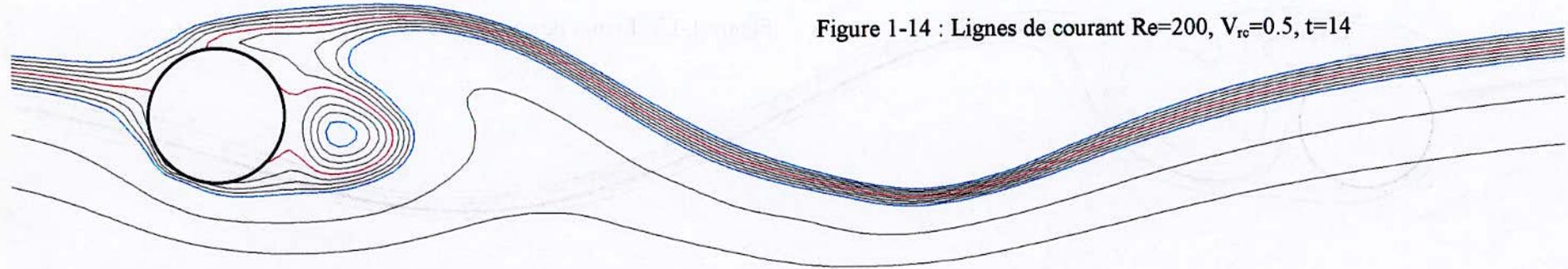
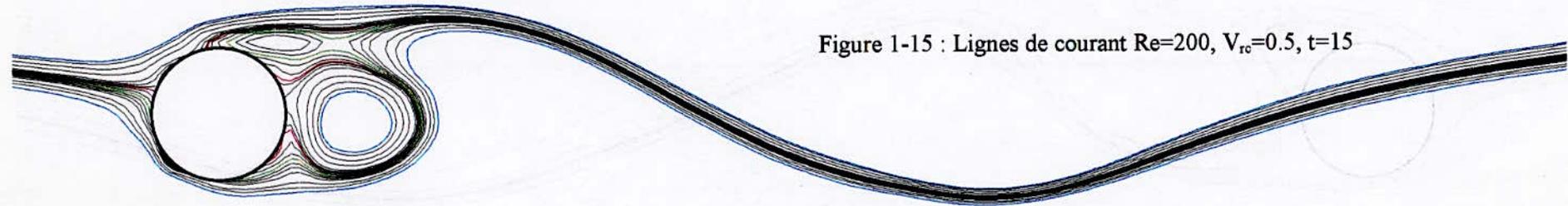
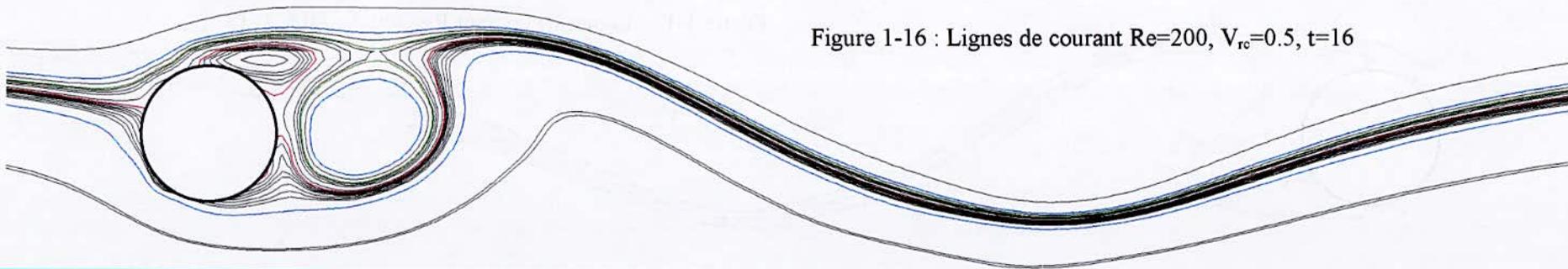
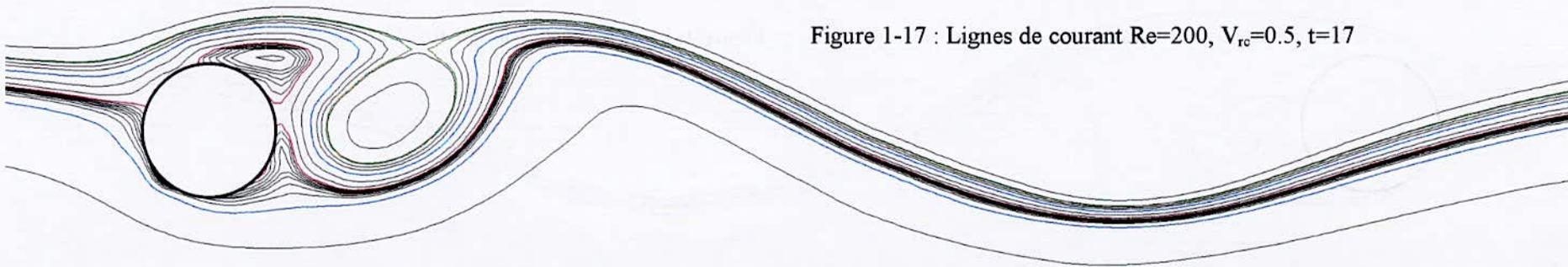
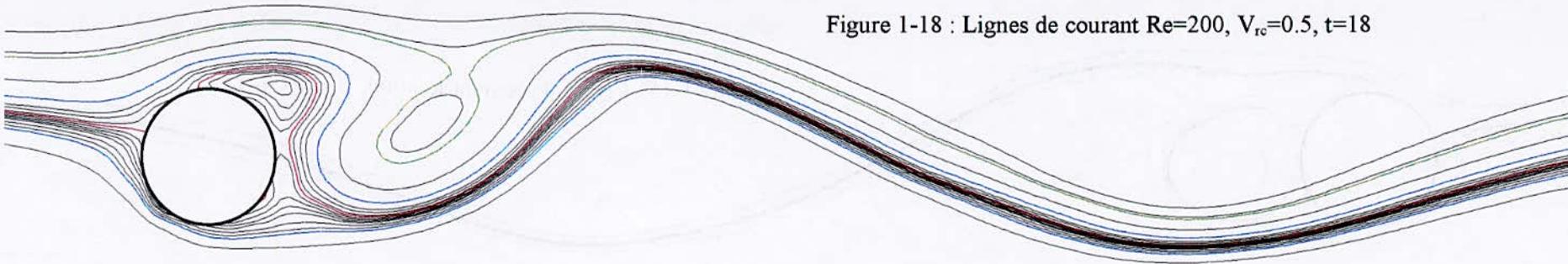
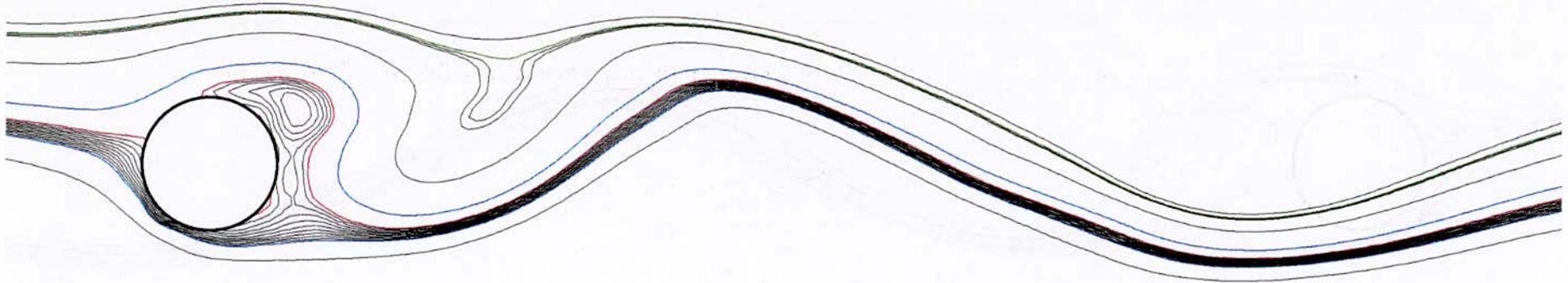
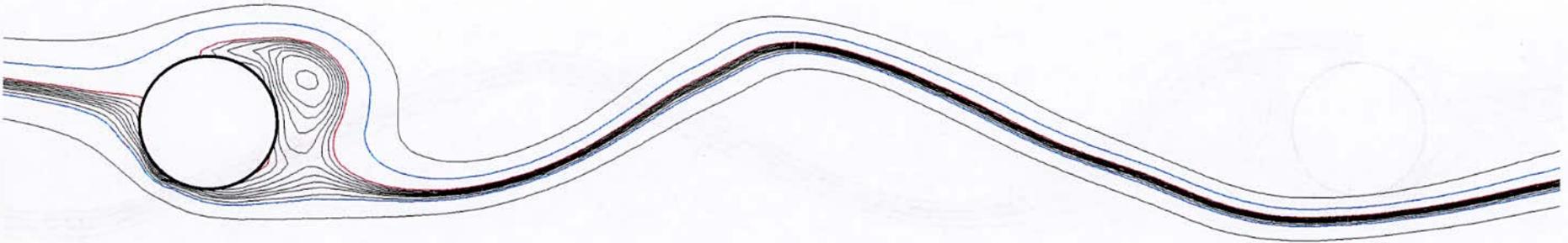
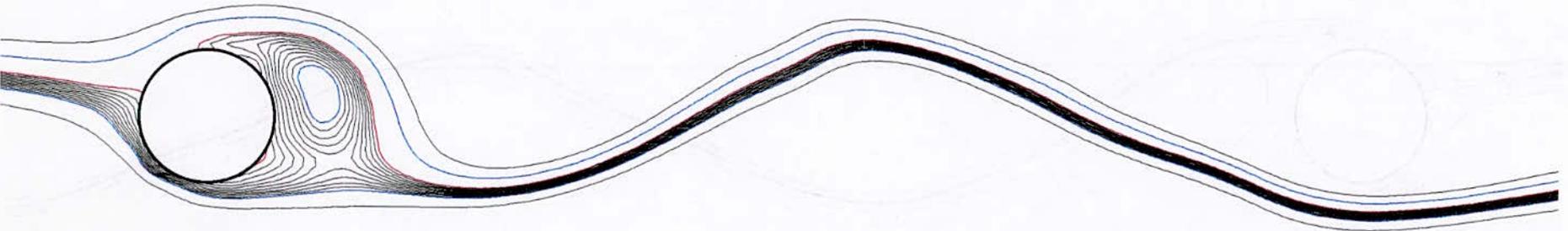
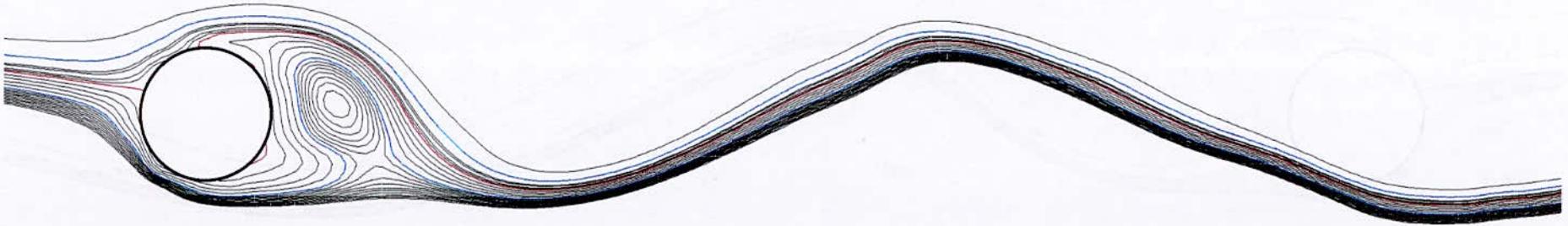
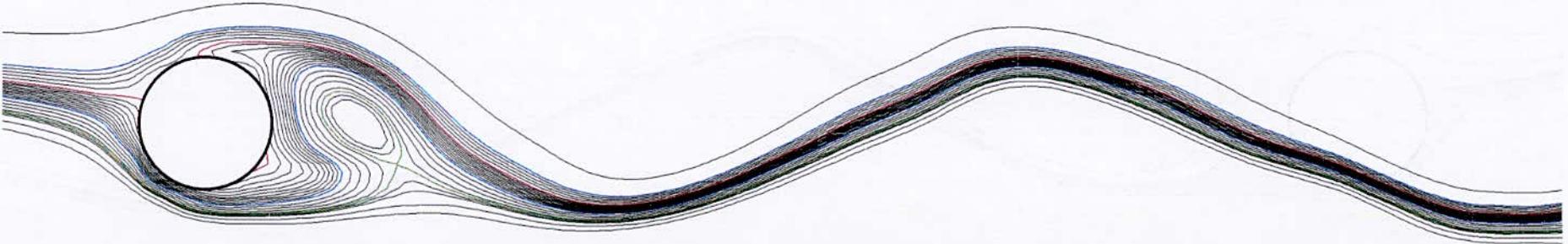
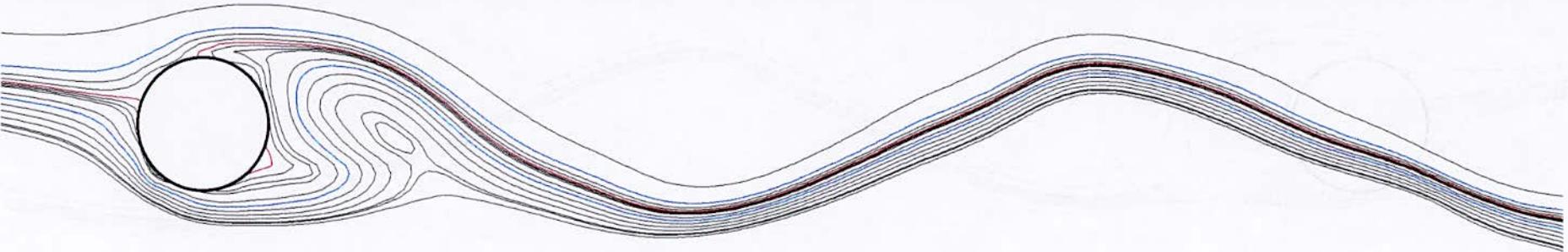
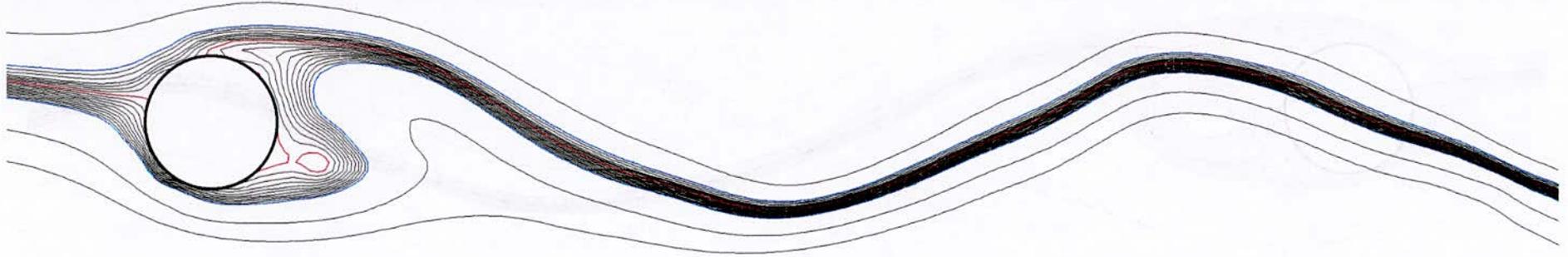
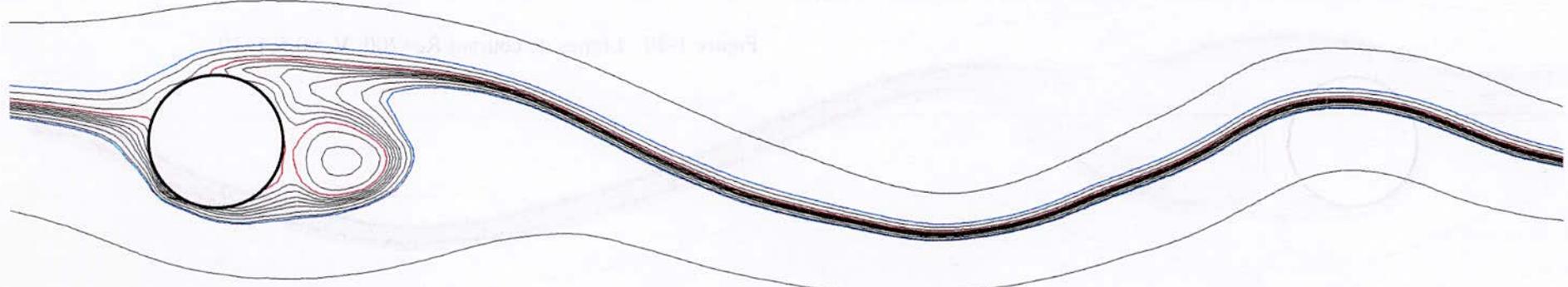
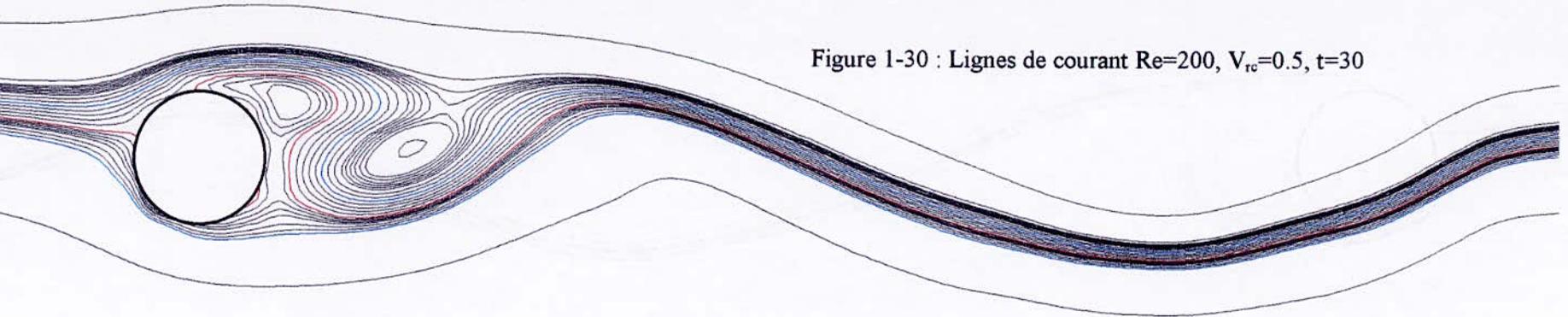
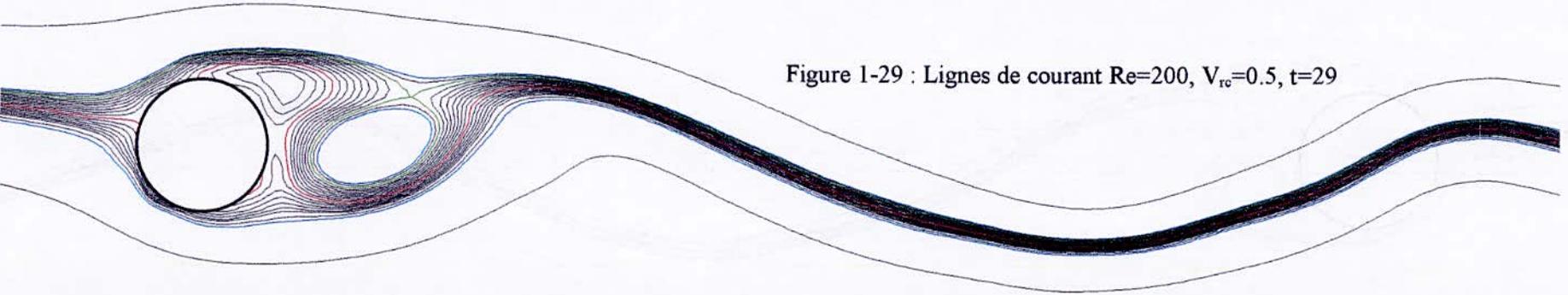
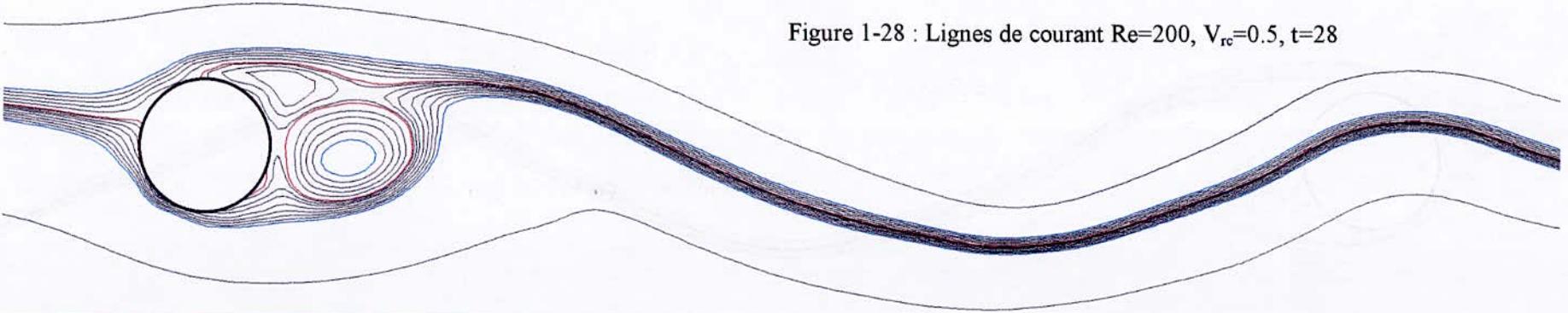
Figure 1-13 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rot}=0.5$, $t=13$ Figure 1-14 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rot}=0.5$, $t=14$ Figure 1-15 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rot}=0.5$, $t=15$

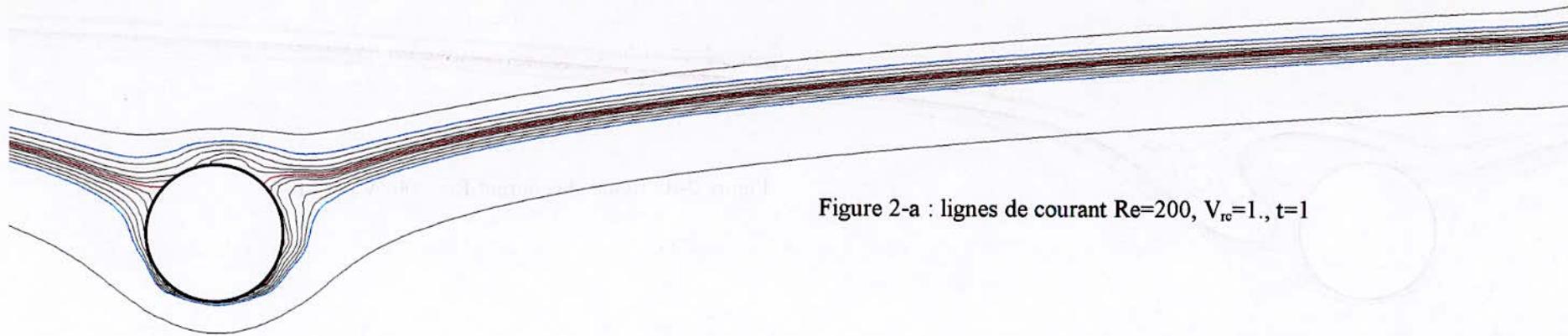
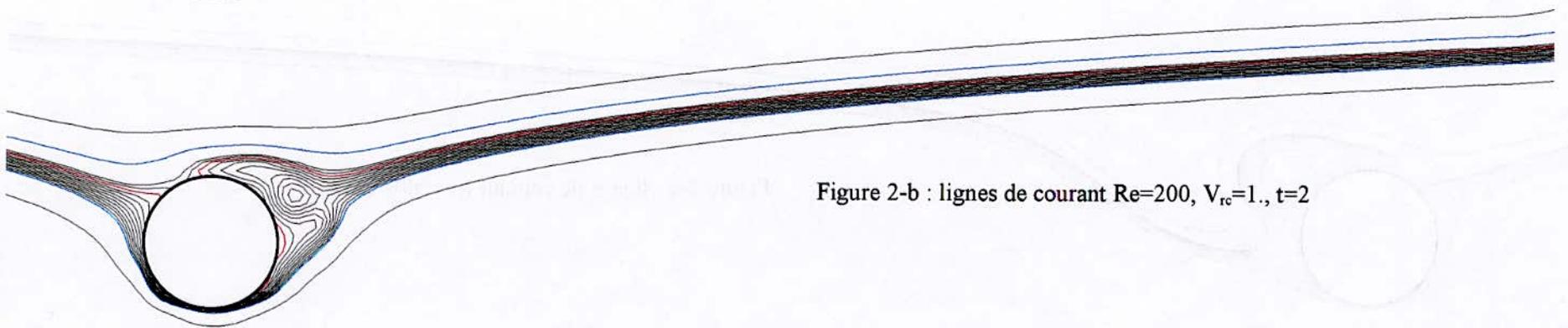
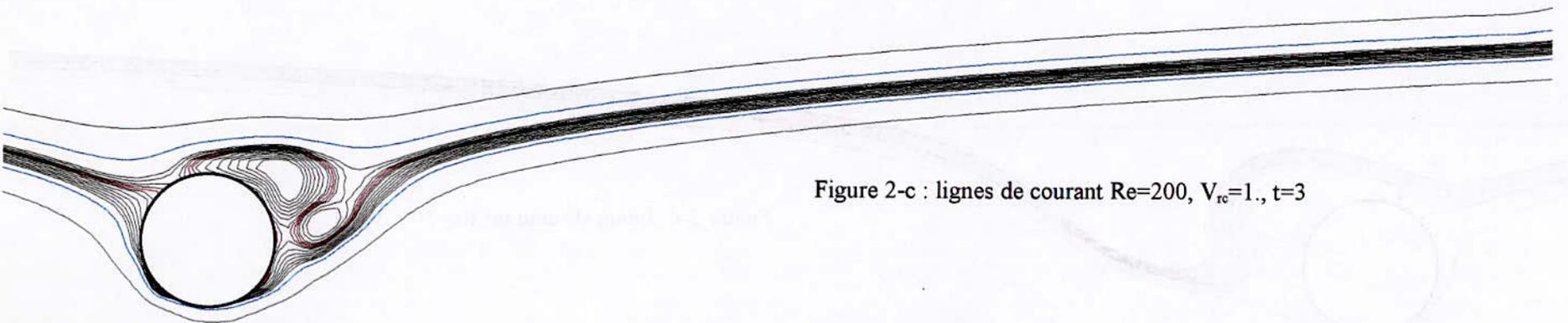
Figure 1-16 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=16$ Figure 1-17 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=17$ Figure 1-18 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=18$ 

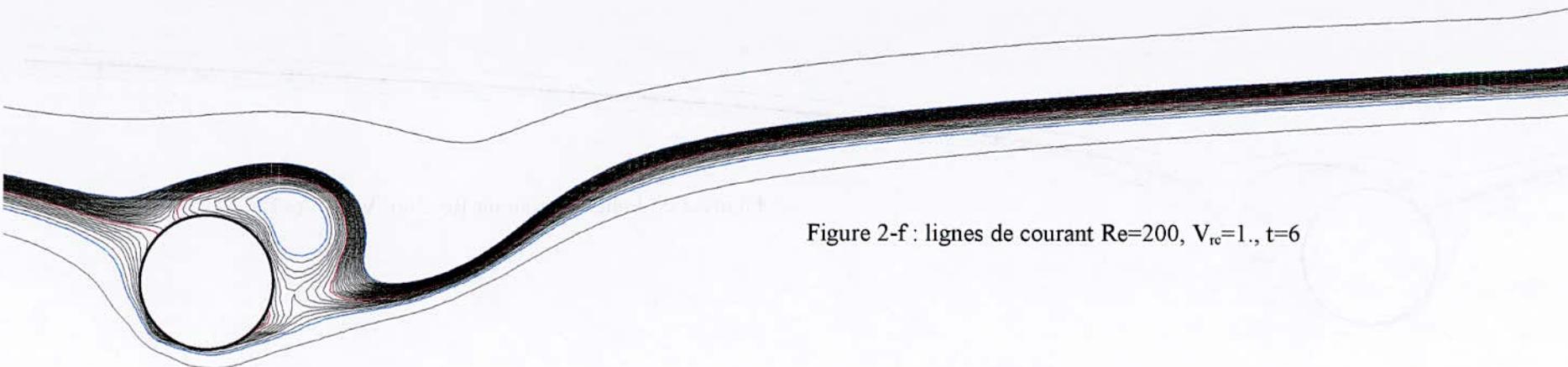
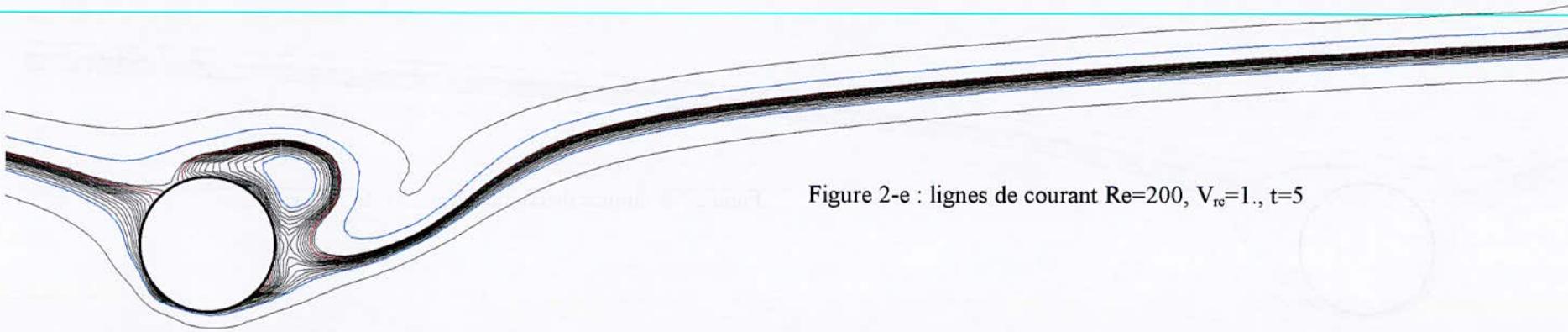
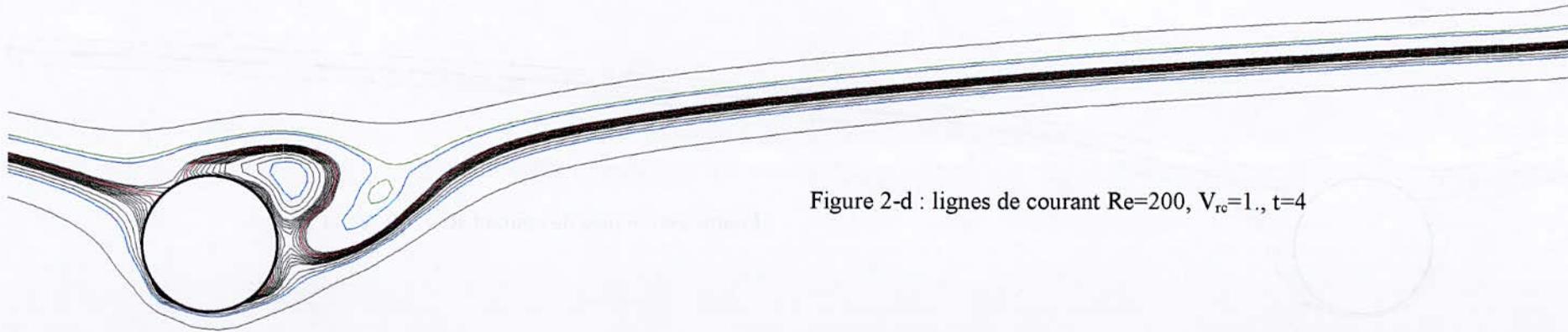
Figure 1-19 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=19$ Figure 1-20 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=20$ Figure 1-21 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=21$

Figure 1-22 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=22$ Figure 1-23 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=23$ Figure 1-24 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=24$

Figure 1-25 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=25$ Figure 1-26 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=26$ Figure 1-27 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=0.5$, $t=27$



Figure 2-a : lignes de courant $Re=200, V_{re}=1., t=1$ Figure 2-b : lignes de courant $Re=200, V_{re}=1., t=2$ Figure 2-c : lignes de courant $Re=200, V_{re}=1., t=3$



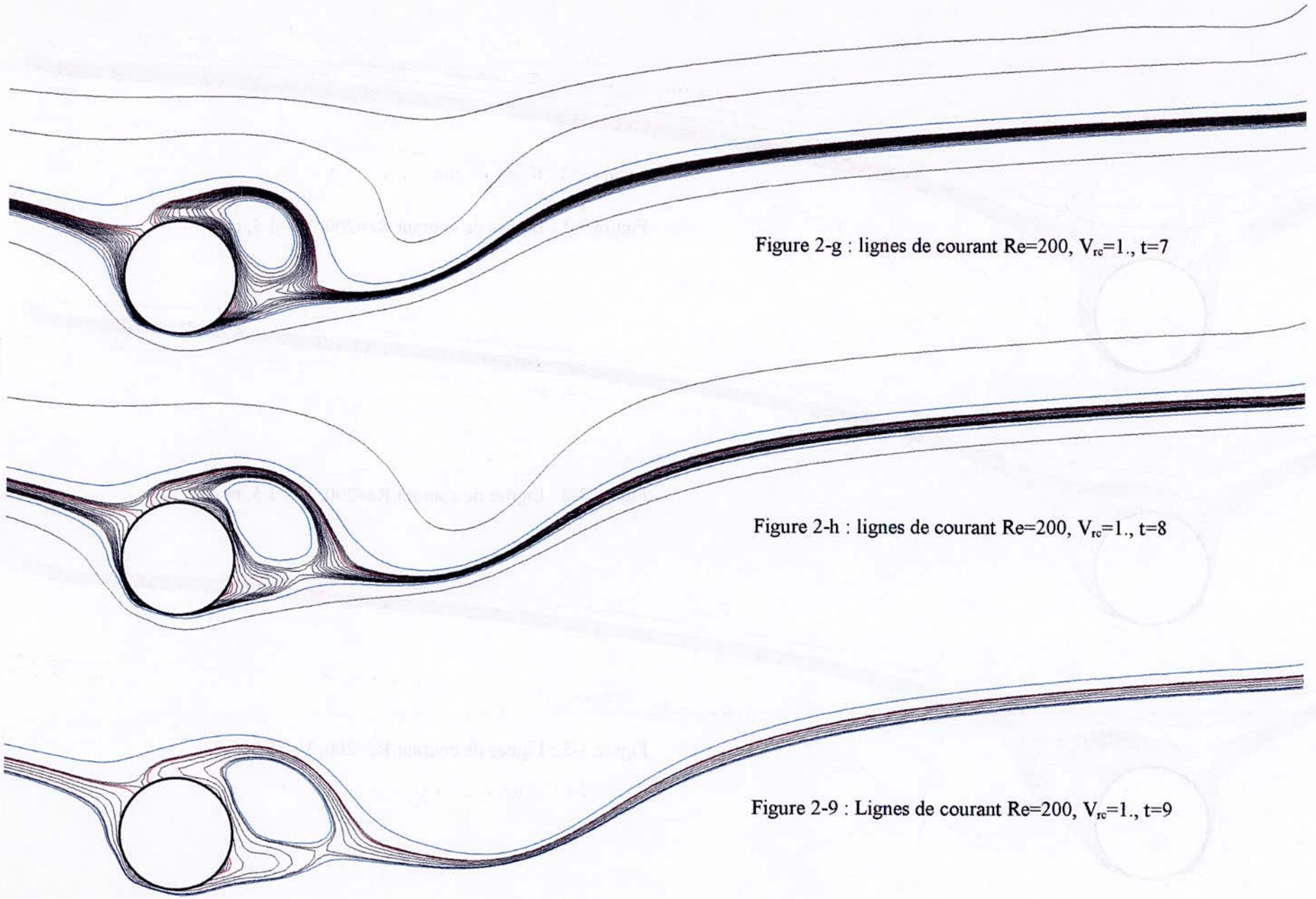


Figure 2-g : lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.$, $t=7$

Figure 2-h : lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.$, $t=8$

Figure 2-9 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.$, $t=9$

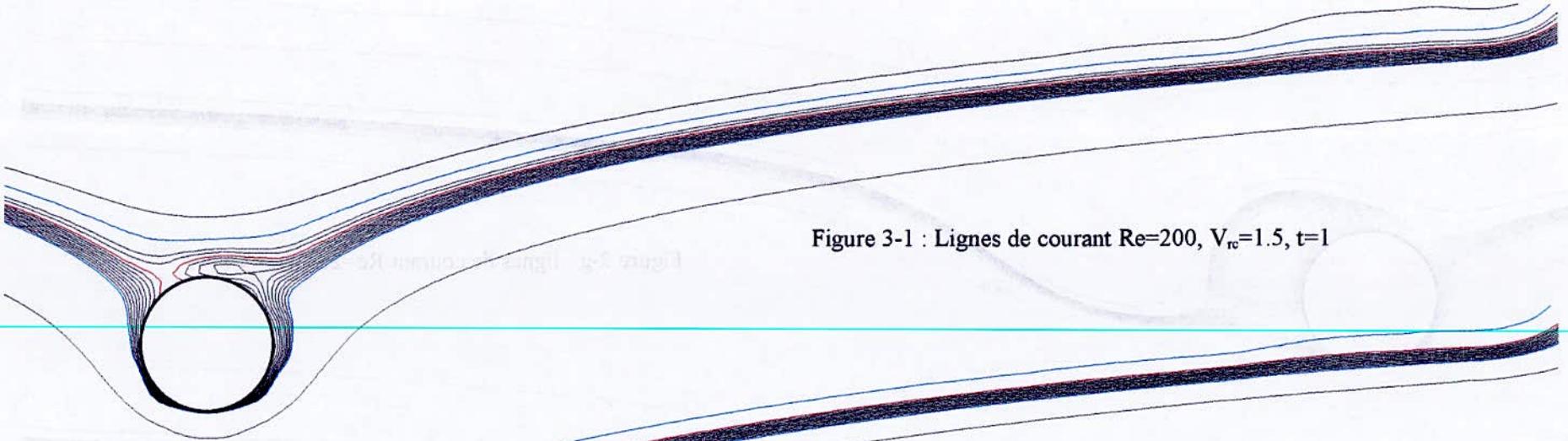


Figure 3-1 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.5$, $t=1$

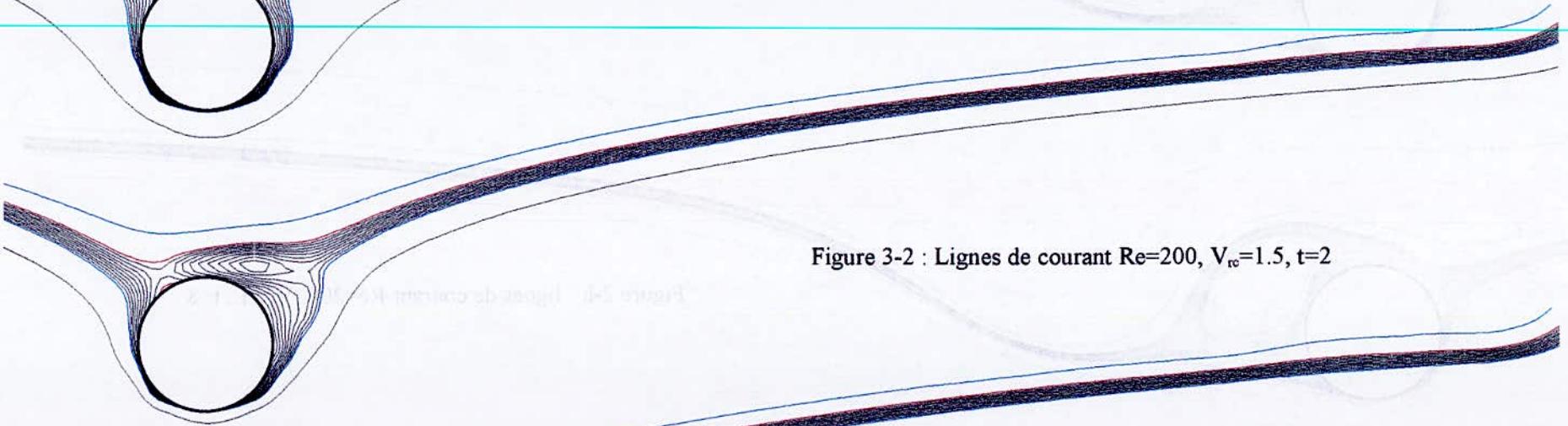


Figure 3-2 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.5$, $t=2$

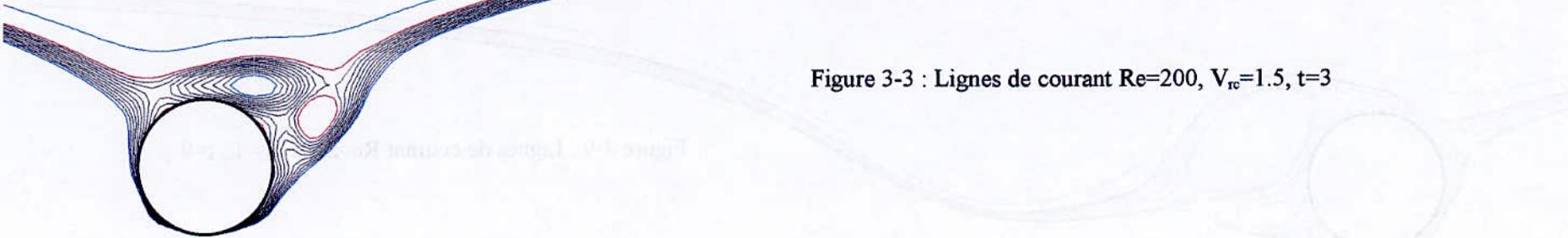


Figure 3-3 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.5$, $t=3$

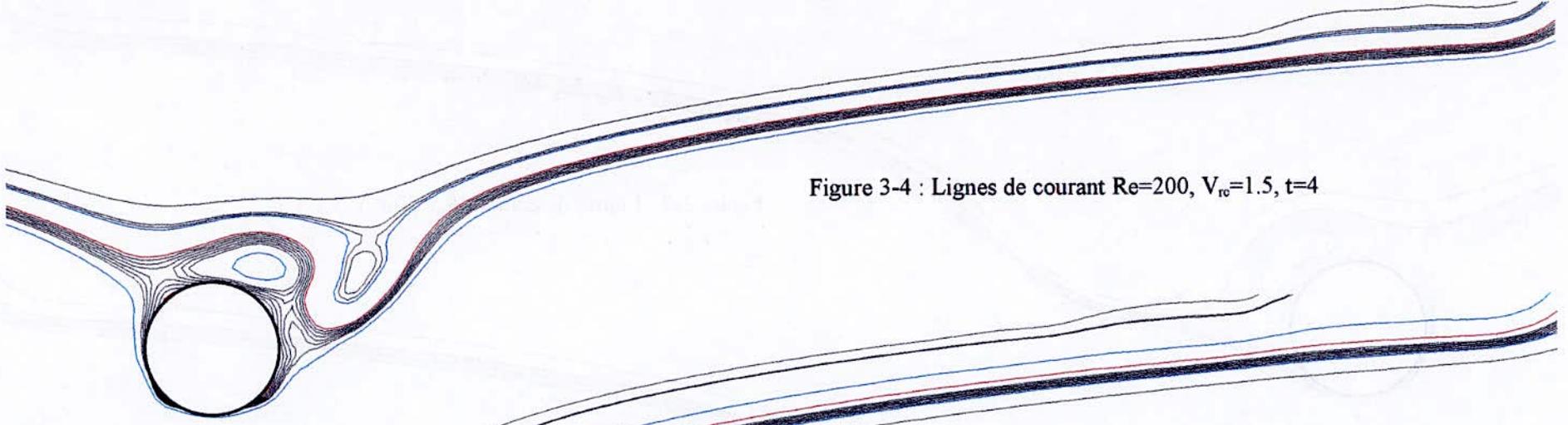


Figure 3-4 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.5$, $t=4$

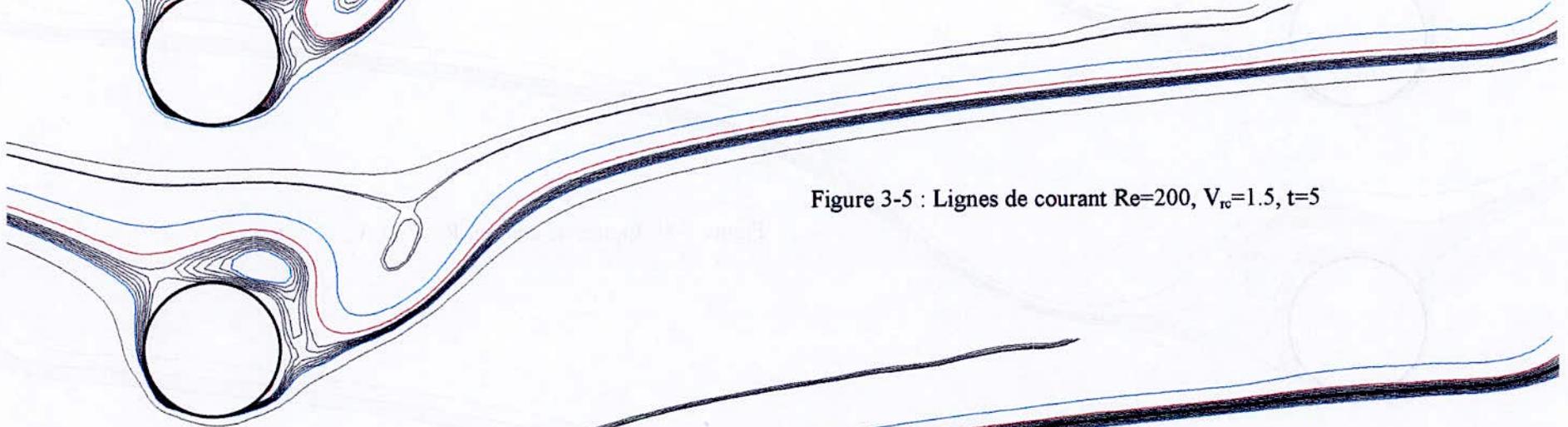


Figure 3-5 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.5$, $t=5$

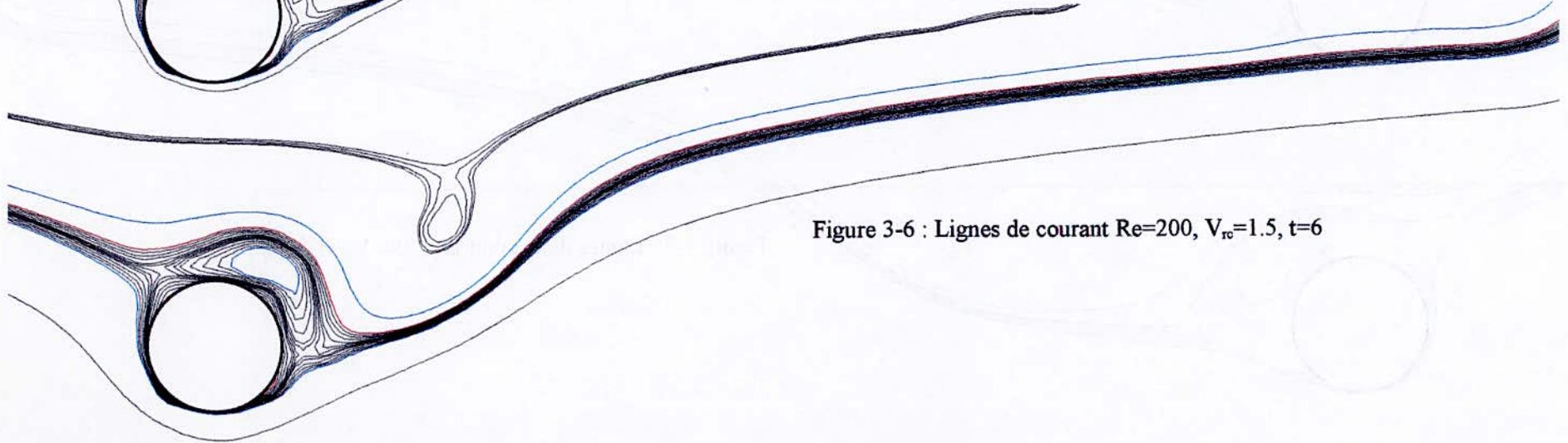


Figure 3-6 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.5$, $t=6$

Promotion 1999

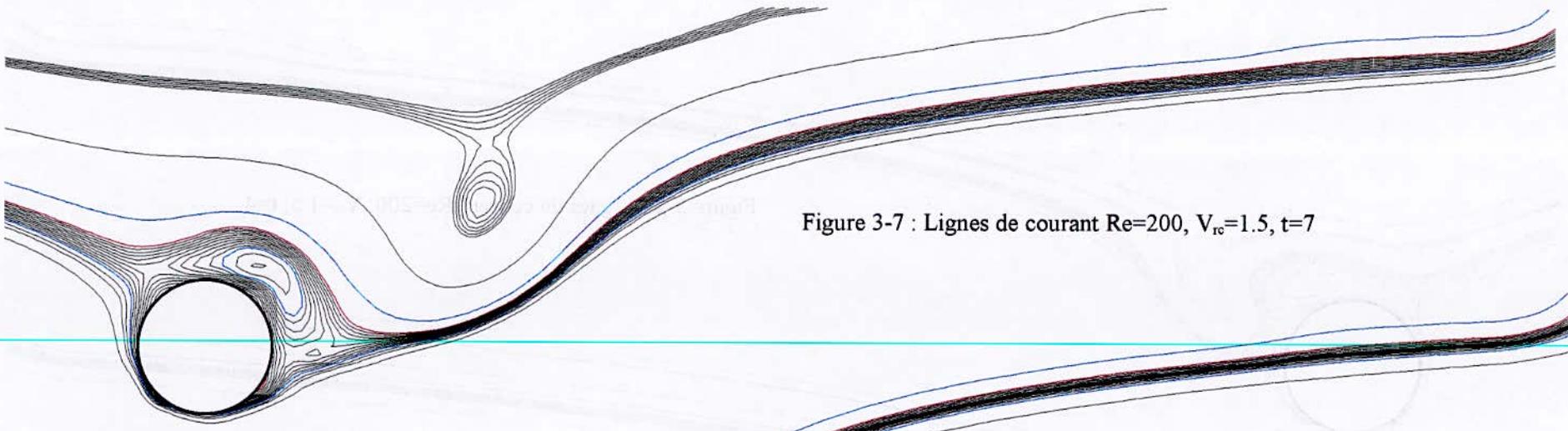


Figure 3-7 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.5$, $t=7$

110

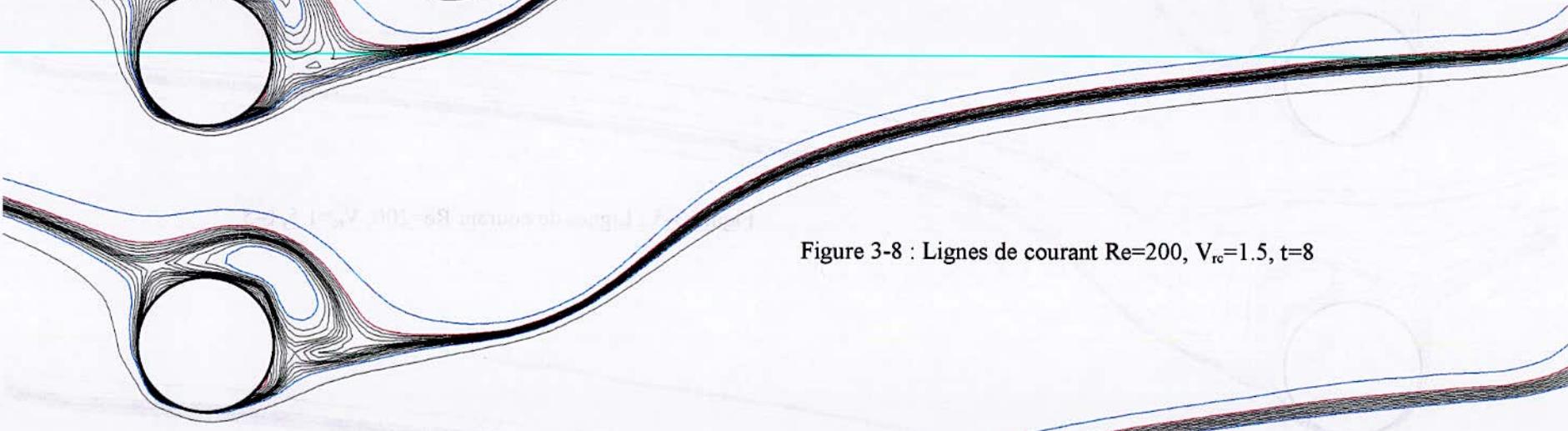


Figure 3-8 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.5$, $t=8$

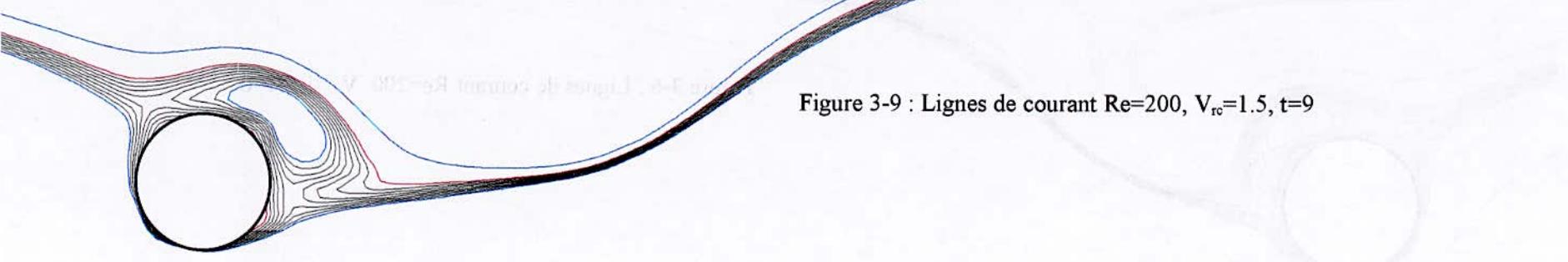
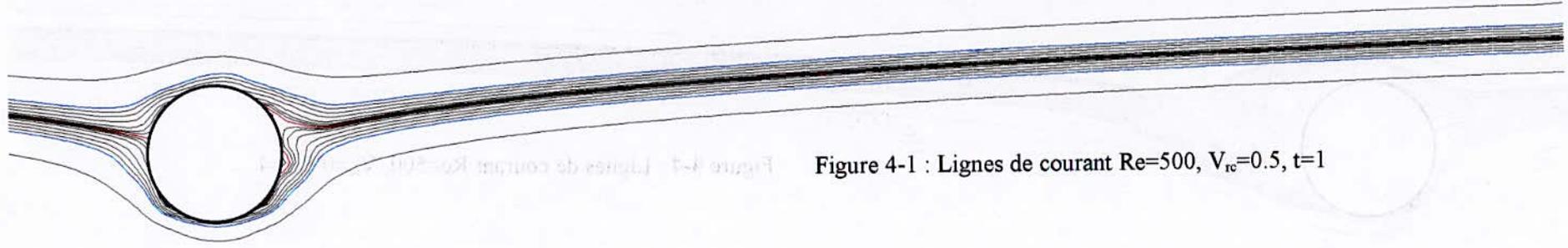
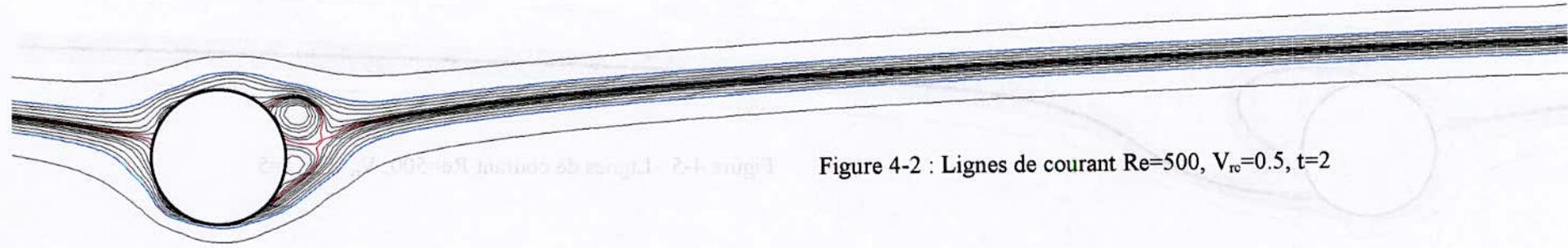
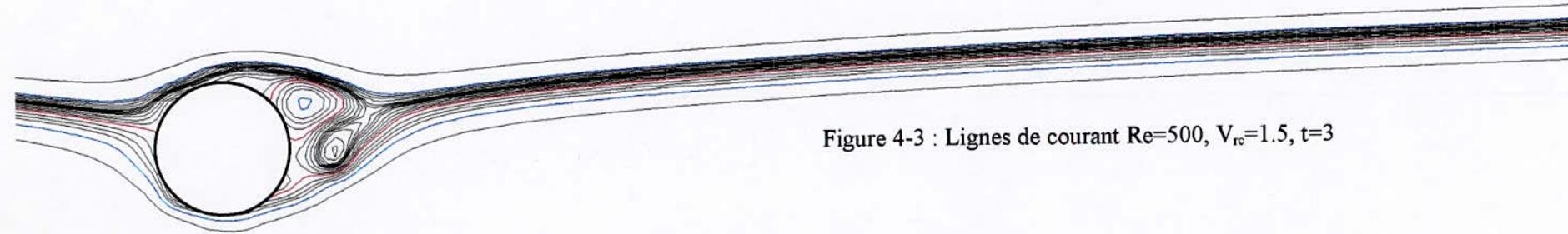
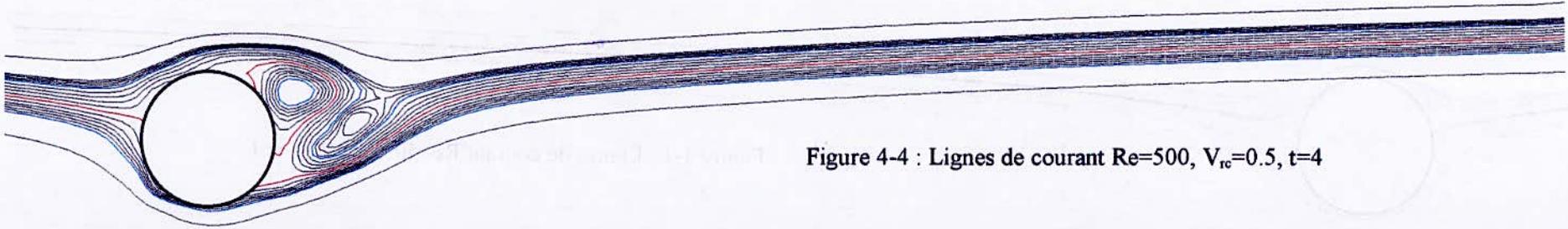
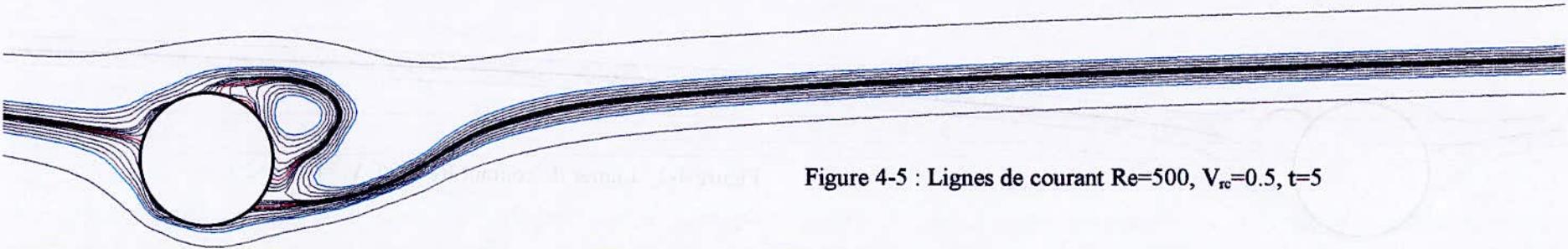


Figure 3-9 : Lignes de courant $Re=200$, $V_{rc}=1.5$, $t=9$

Figure 4-1 : Lignes de courant $Re=500$, $V_{rc}=0.5$, $t=1$ Figure 4-2 : Lignes de courant $Re=500$, $V_{rc}=0.5$, $t=2$ Figure 4-3 : Lignes de courant $Re=500$, $V_{rc}=1.5$, $t=3$

Figure 4-4 : Lignes de courant $Re=500$, $V_{rc}=0.5$, $t=4$ Figure 4-5 : Lignes de courant $Re=500$, $V_{rc}=0.5$, $t=5$

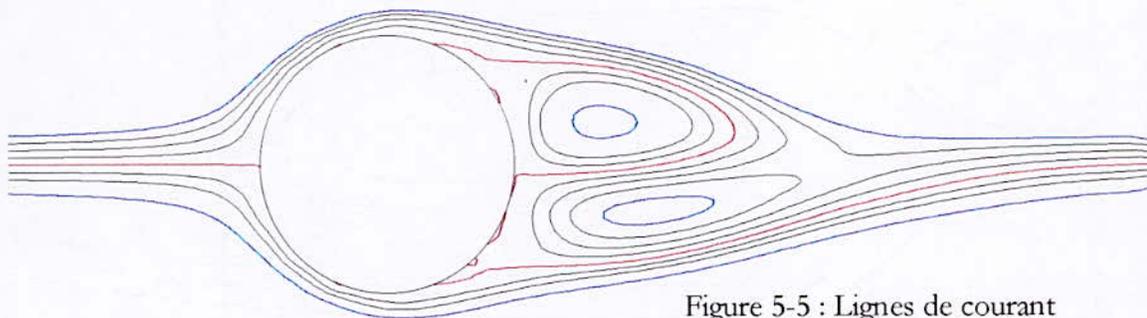


Figure 5-5 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=5

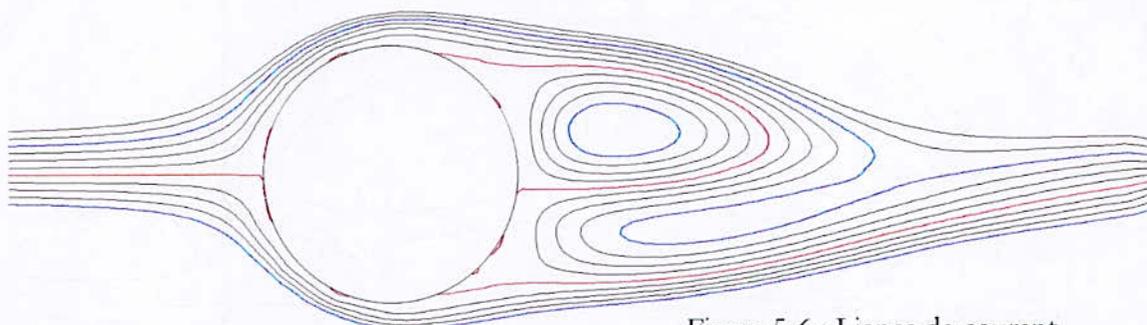


Figure 5-6 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=6

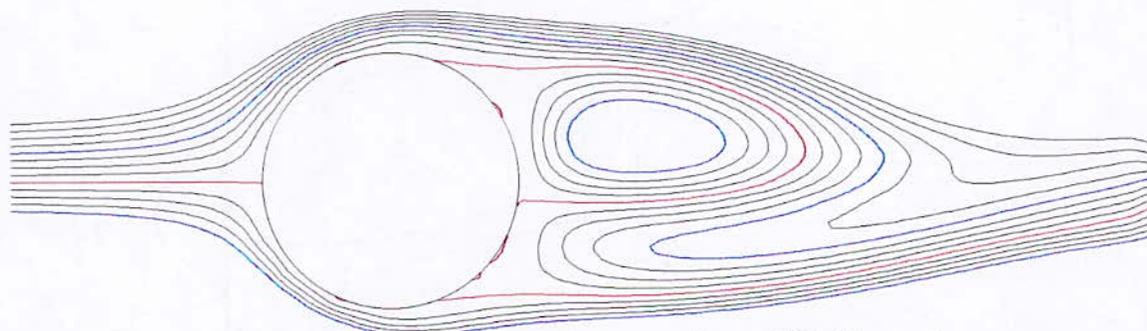


Figure 5-7 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=7

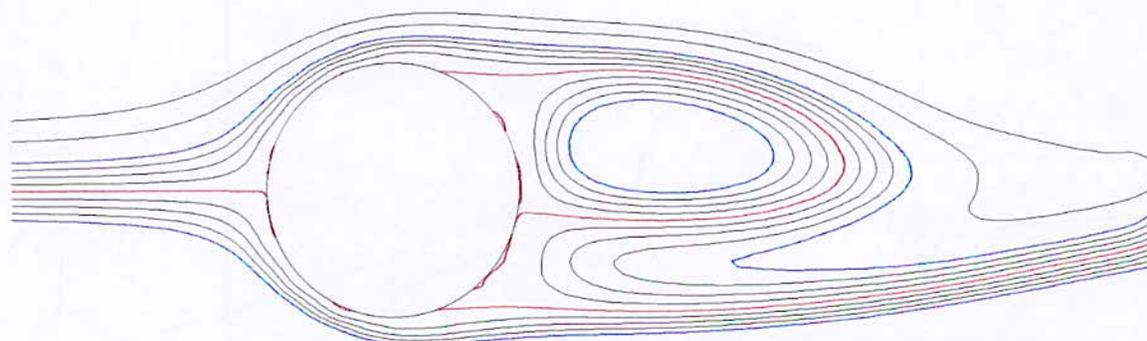


Figure 5-8 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=8

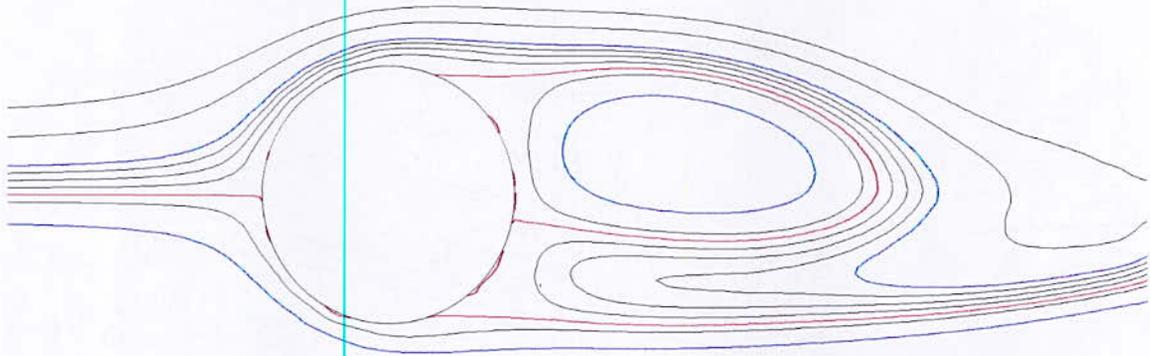


Figure 5-9 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=9

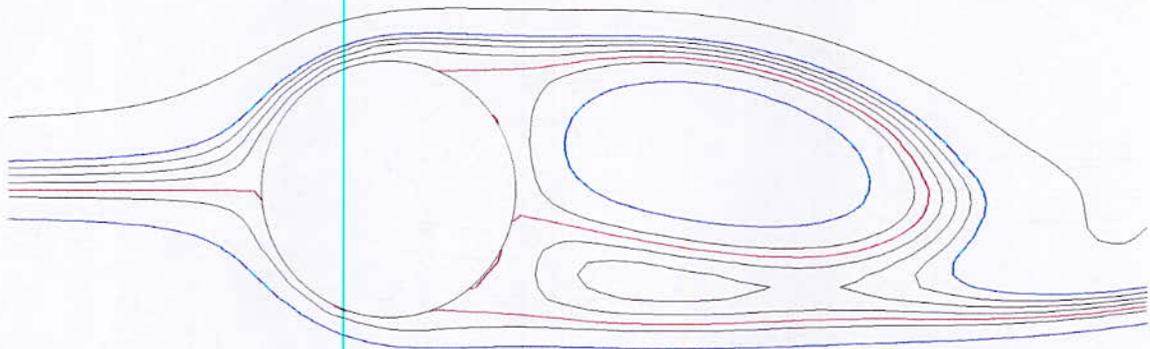


Figure 5-10 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=10

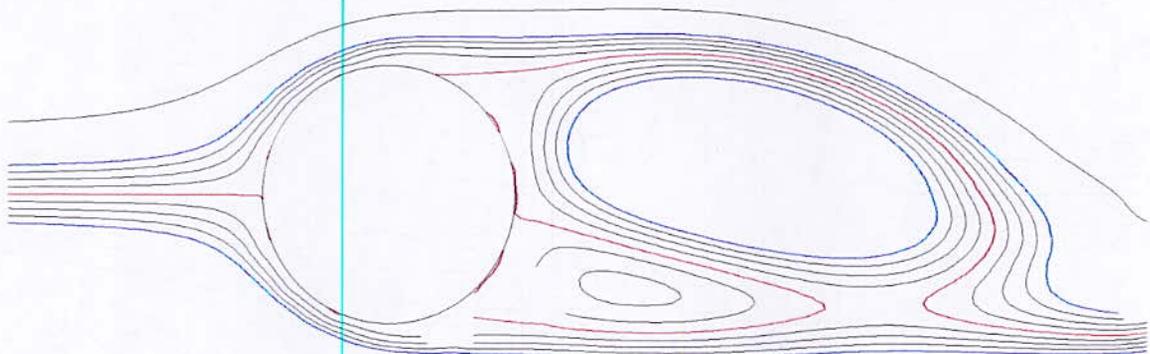


Figure 5-11 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=11

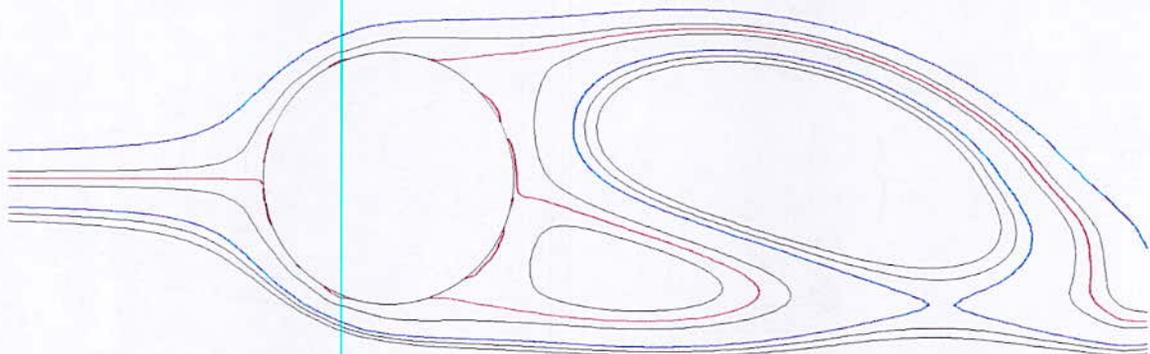


Figure 5-12 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=12

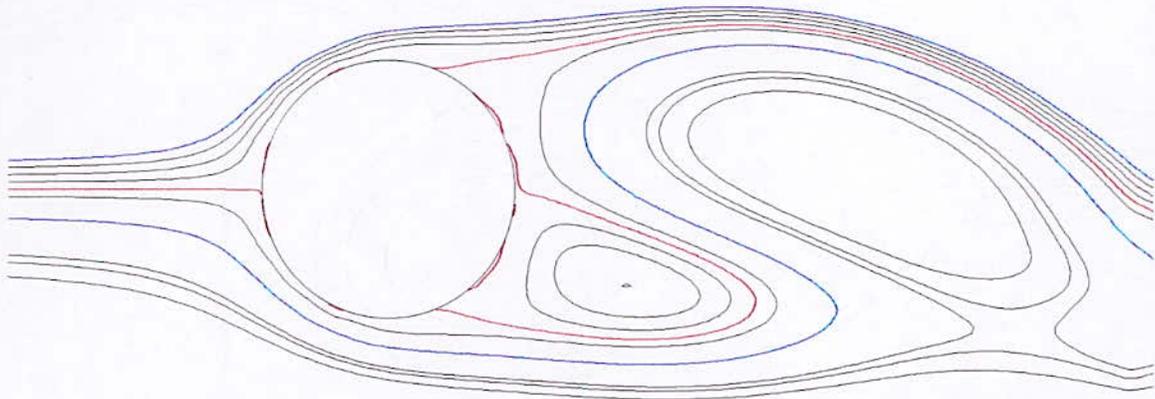


Figure 5-13 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=13

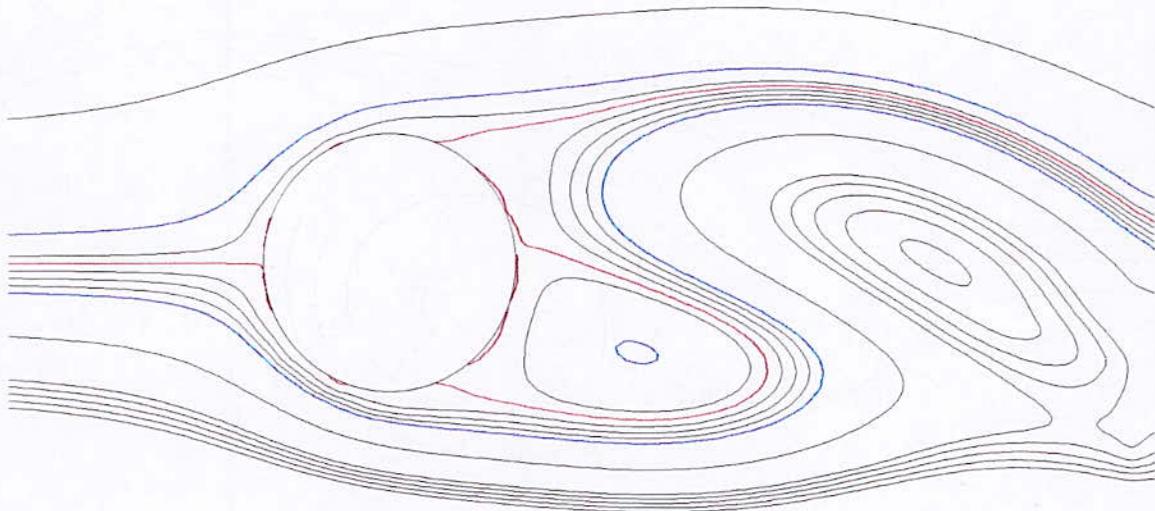


Figure 5-14 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=14

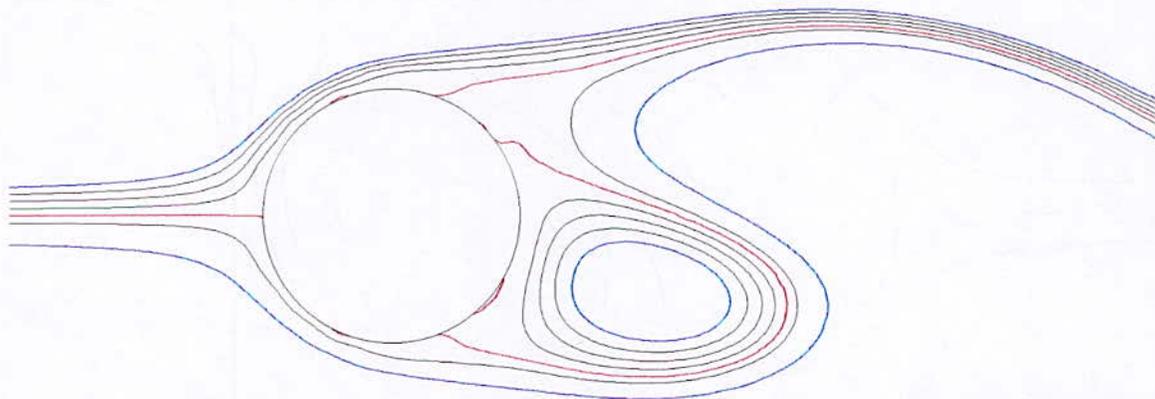


Figure 5-15 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=15

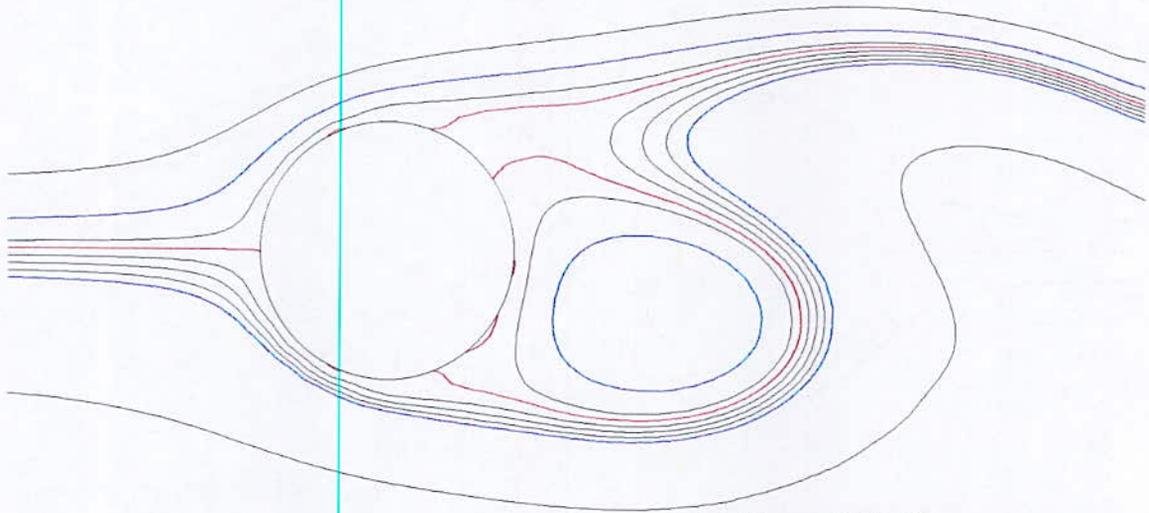


Figure 5-16 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=16

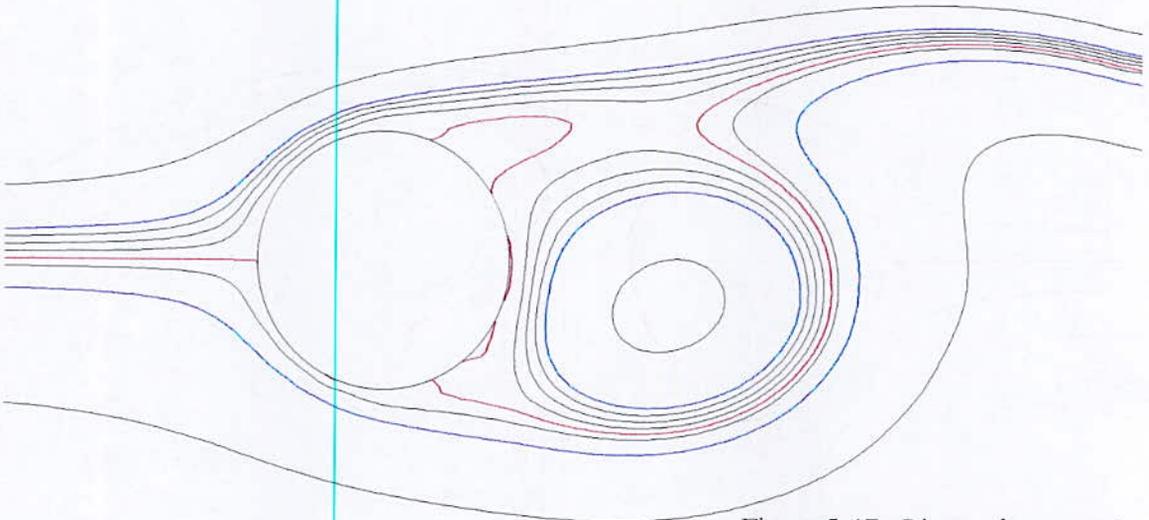


Figure 5-17 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=17

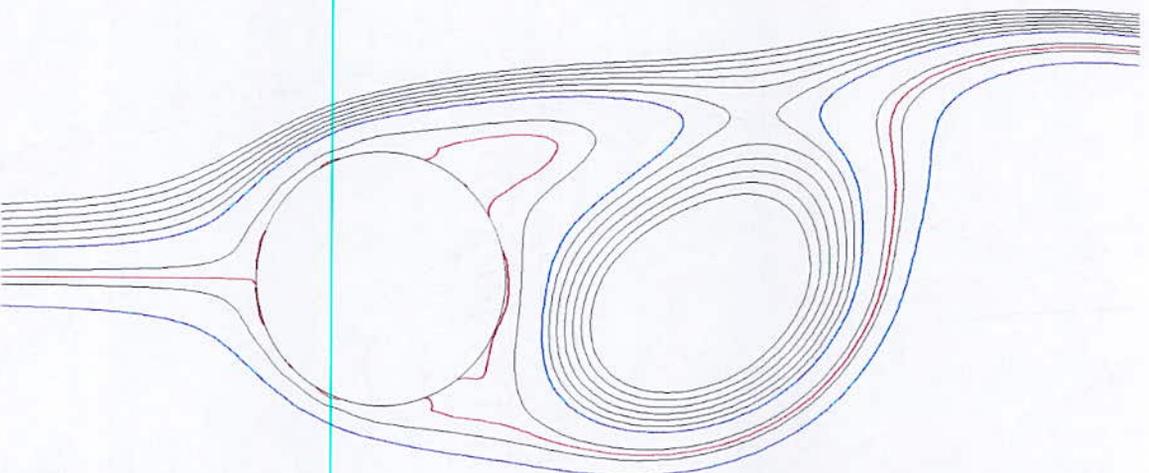


Figure 5-18 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=18

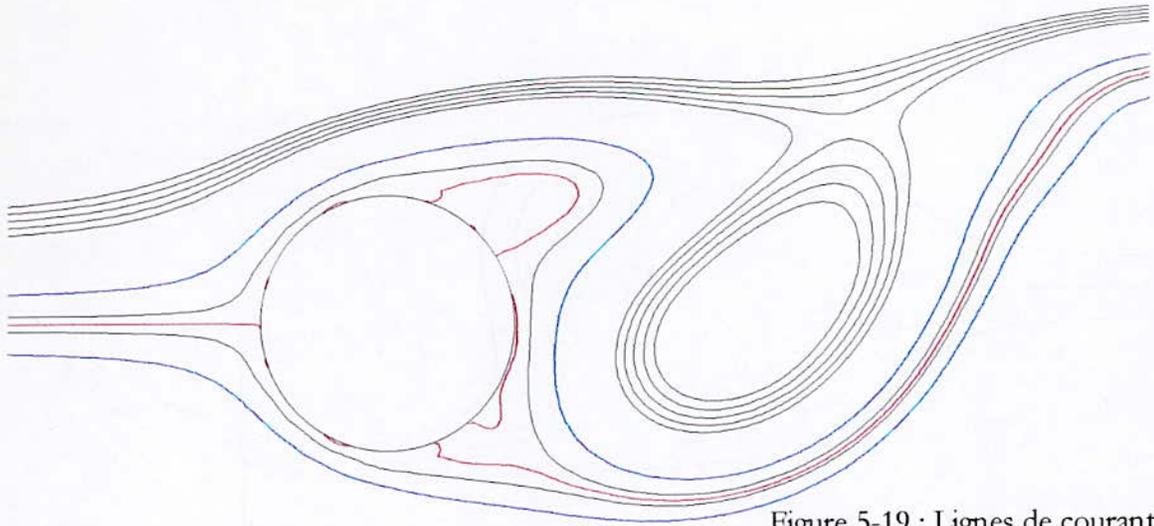


Figure 5-19 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=19

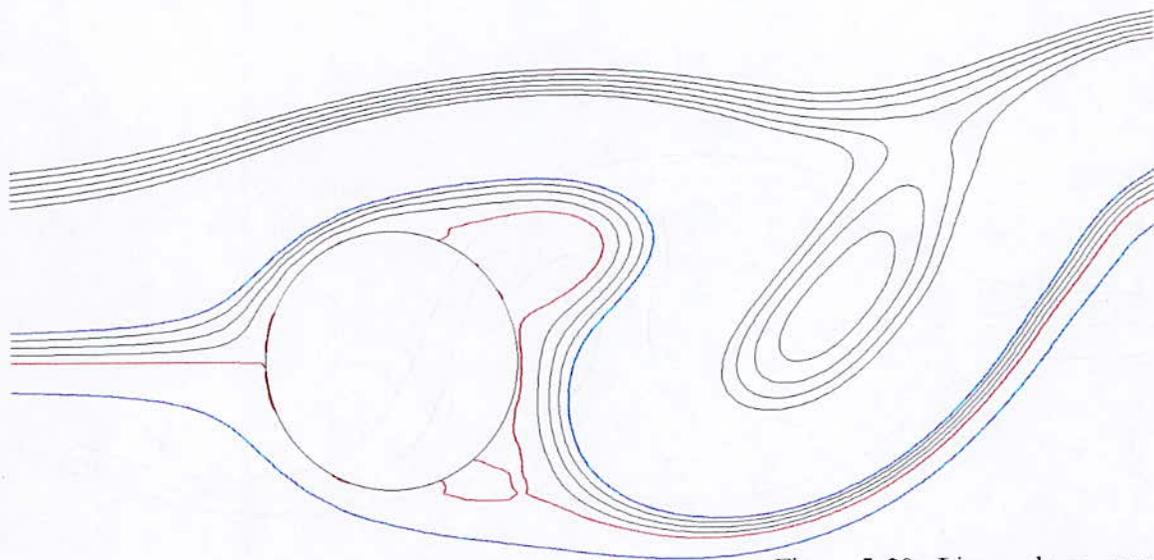


Figure 5-20 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=20

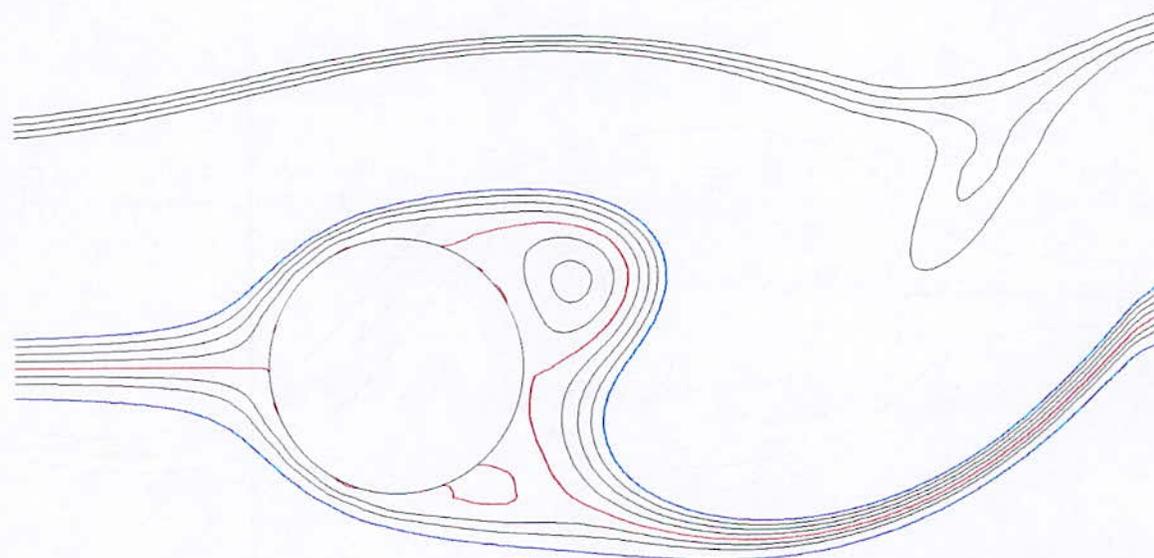


Figure 5-21 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=21

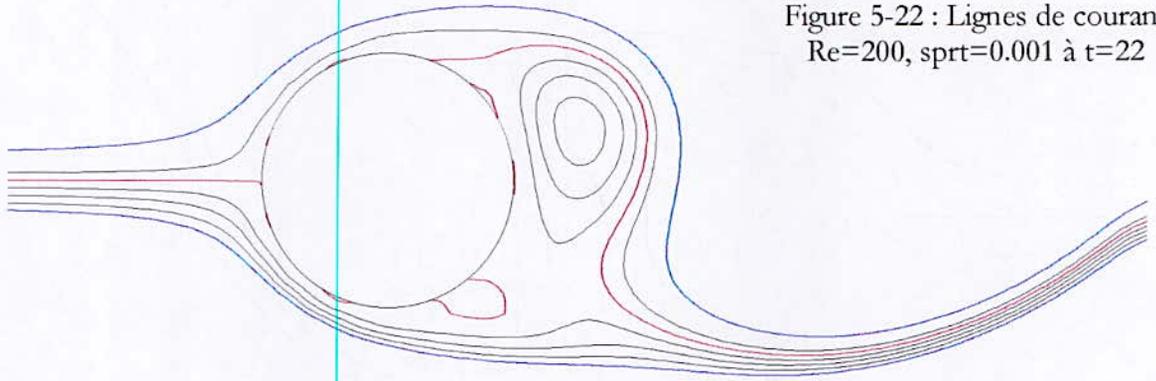


Figure 5-22 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=22

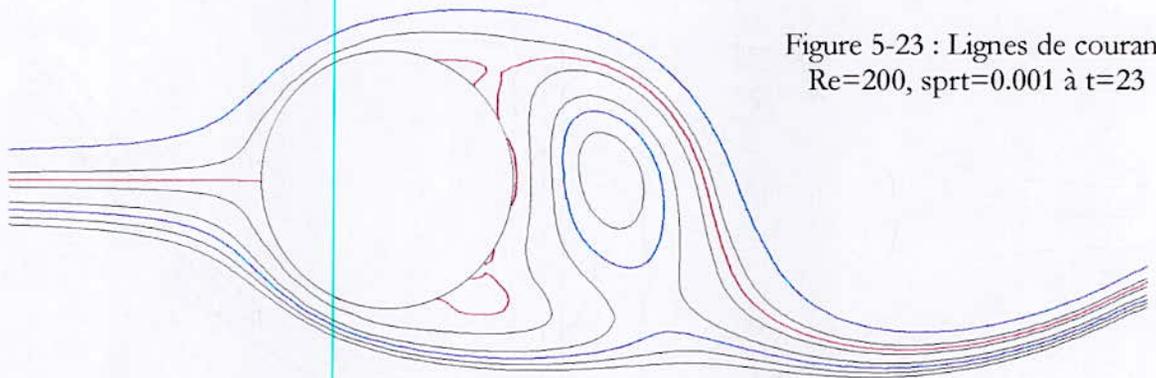


Figure 5-23 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=23

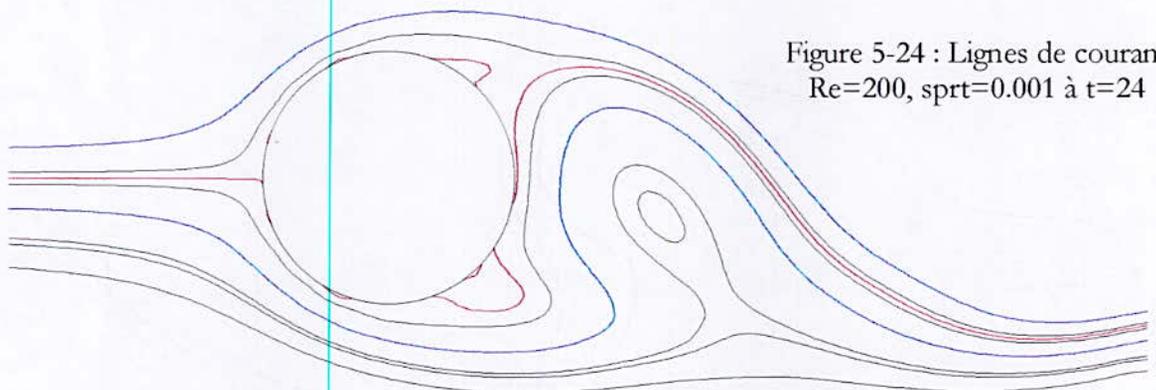


Figure 5-24 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=24

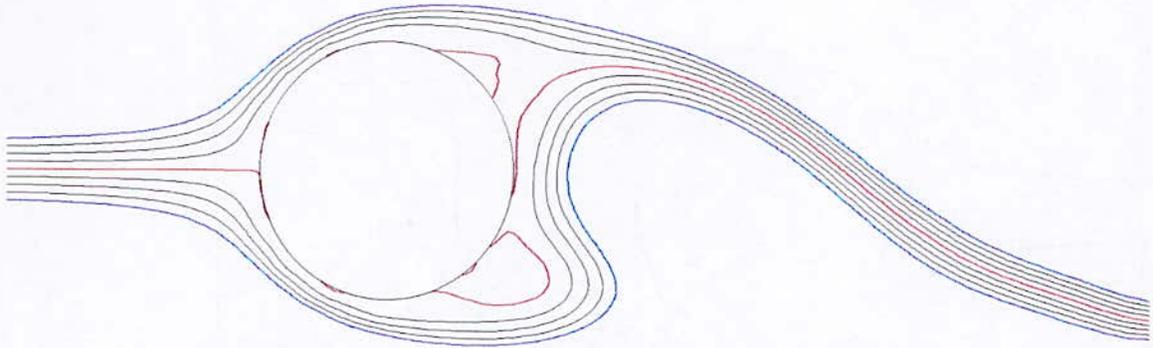


Figure 5-25 : Lignes de courant
 $Re=200$, $sprt=0.001$ à $t=25$

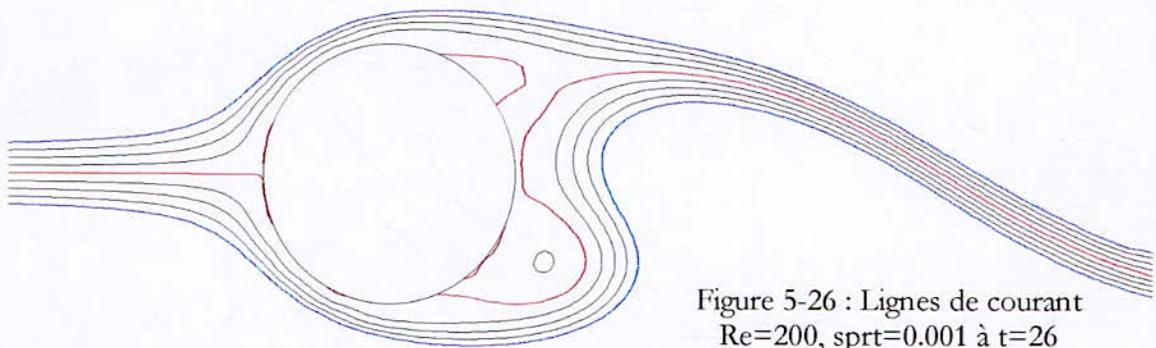


Figure 5-26 : Lignes de courant
 $Re=200$, $sprt=0.001$ à $t=26$

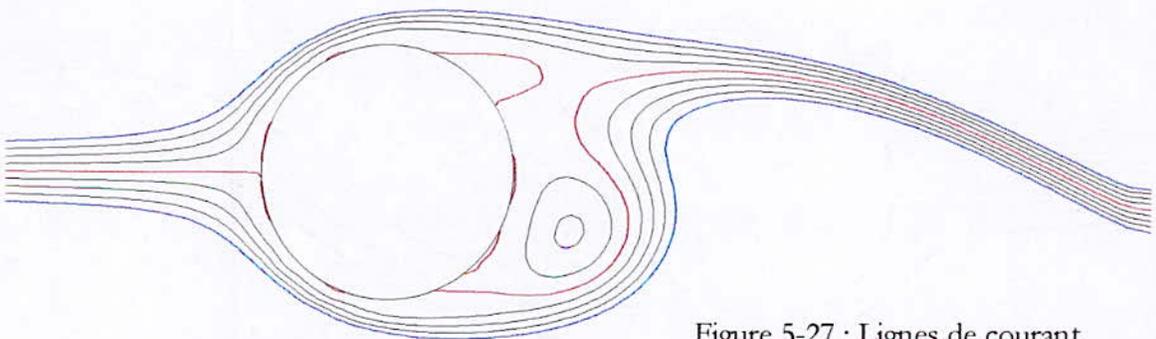


Figure 5-27 : Lignes de courant
 $Re=200$, $sprt=0.001$ à $t=27$

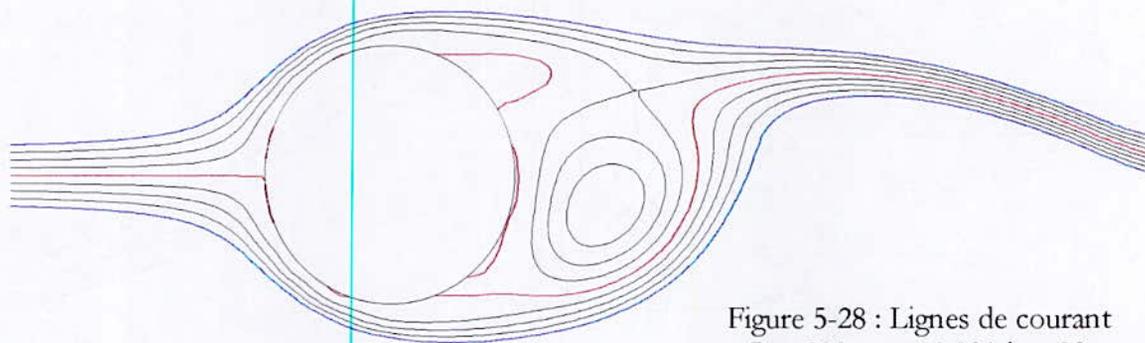


Figure 5-28 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=28

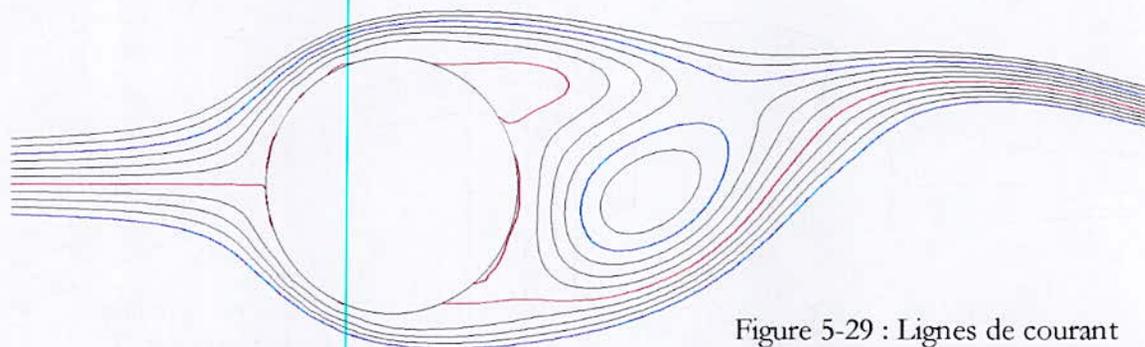


Figure 5-29 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=29

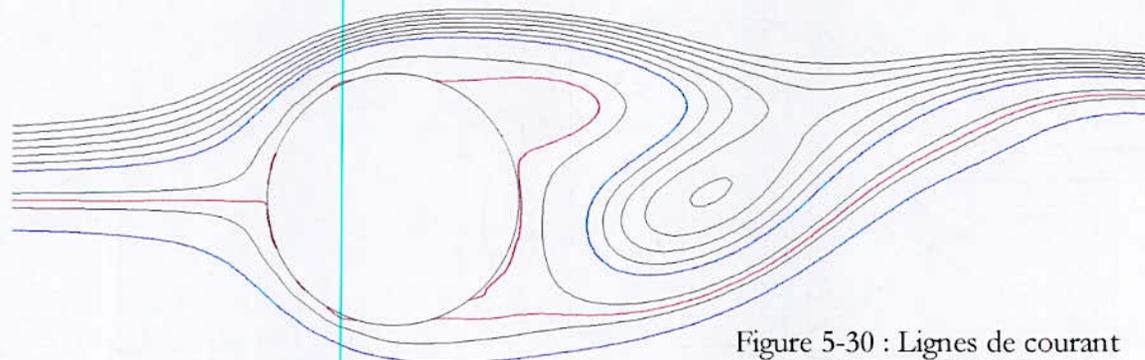


Figure 5-30 : Lignes de courant
Re=200, sprt=0.001 à t=30

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES ET ARTICLES :

[1]- H.M. BADR and S.C.R. DENNIS

« Time-dependent viscous flow past an impulsively started rotating and translating circular cylinder »
J. Fluid Mech (1985), vol 158

[2]- A. BORTHWICK

« Comparison between two finite-difference schemes for computing the flow around a cylinder »
International Journal For Numerical Methods in Fluids, vol 6 (1986)

[3]- A. BORTHWICK

« Orbital flow past a cylinder : A numerical approach »
International Journal For Numerical Methods in Fluids, vol 6 (1986)

[4]- M. BRAZA, P. CHASSAING and H. HA MINH

« Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder »
J. Fluid Mech (1986), vol 165

[5]- W.M. COLLINS and S. C. R. DENNIS

« Flow past an impulsively started circular cylinder »
J. Fluid Mech (1973), vol 60

[6]- R. COMOLET

« Mécanique expérimentale des fluides. Tome 1 et 2 »
Ed MASSON (1976).

[7]- M. COUTANCEAU and C. MENARD

« Influence of rotation on the near-wake development behind an impulsively started circular cylinder »
J. Fluid Mech (1985), vol 158

[8]- M. DAMOU

« mécanique des fluides » O.P.U

[9]- O. DAUBE et TA PHUOC LOC

« Etude numérique d'écoulements instationnaires de fluide visqueux incompressible autour de corps profilés par une méthode combinée d'ordre $O(h^2)$ et $O(h^4)$ »
Journal de Mécanique (1978), vol 17.

[10]- C. A. J. FLETCHER

« Computational techniques for Fluid Dynamics T1,T2 »
Springer Series in Computational Physics (1988)

[11]- BENGT FORNBERG

« A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder »
J. Fluid Mech (1980), vol 98

[12]- LIN C.L, PEPER D.W & LEE S.C

« Numerical methods for separated flow solutions around a circular cylinder »
A.I.A.A JOURNAL (1986), vol 14, N°7

[13]- CH. OBLED

« Analyse Numérique »
Institut Nationale Polytechnique de Grenoble (1989)

[14]- RHYMING I.L

« Dynamique des Fluides »
Presse Polytechniques Romande (1985)

[15]- TA PHUOC LOC

« Etude numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'un cylindre fixe ou en rotation. Effet Magnus »
Journal de Mécanique (1975), vol 14

[16]- J.C. VAISSIERE and J.P. NOUGIER

« Programmes et exercices sur les méthodes numériques »
Edition MASSON (1991)

[17]- H.G. WALTER and ALTINAKAR

« Hydrodynamique »
Edition EYROLLS (1991)

[18]- A. WALKER

« Hydrodynamique Physique »
Edition EYROLLES

THESES :

[19]- A. COURTA

« Analyse physique et simulation numérique des structures tourbillonnaires du sillage proche d'un cylindre circulaire »
Thèse Doctorat : Institut National Polytechnique de Toulouse (1984).