

14/97

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT TURBULENT
DANS UN CONDUIT A MOTIF PERIODIQUE MODELISE
PAR L'A.S.M

Proposé par :

Mlle S. BENMAMAR

Etudié par :

AIT SAADI Lotfi
BERRABAH Ali

Dirigé par :

Mlle S. BENMAMAR

PROMOTION 1997

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi EL-Harrach - ALGER

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**ETUDE NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT TURBULENT
DANS UN CONDUIT A MOTIF PERIODIQUE MODELISE
PAR L'A.S.M**

Proposé par :

Mlle S. BENMAMAR

Etudié par :

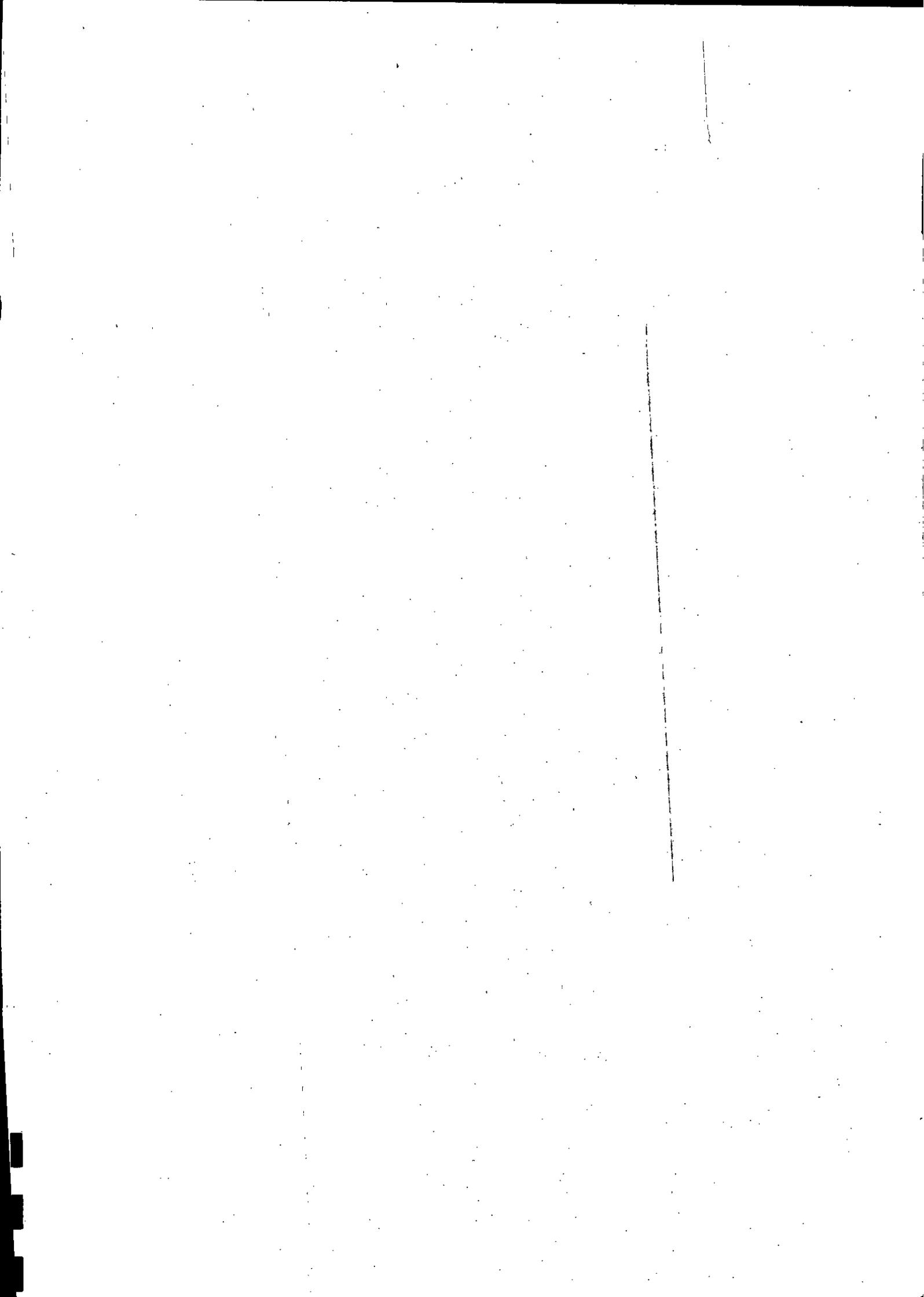
AIT SAADI Lotfi
BERRABAH Ali

Dirigé par :

Mlle S. BENMAMAR

PROMOTION 1997

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi EL-Harrach - ALGER



Dédicaces



*Je dédie ce travail à
Mon père et à ma mère
Mon frère et à ma soeur
Mes grands mères et à la mémoire
de mes grands pères.*

Lotfi

*Je dédie ce travail à
Mon père et à ma mère
Mes frères, mes soeurs et à ma tante
Mes amis en particulier Farid
Mes grands mères et à la mémoire
de mes grands pères.*

Ali

Remerciements

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Que puisse trouver ici l'expression de notre reconnaissance:

Tous les enseignants du département Hydraulique,

Mlle BENMAMAR Saida pour nous avoir dirigé tout au long de notre travail,

M. AIB Mabrouk pour nous avoir soutenu dans les moments difficiles,

M. BENAÏSSA Younes pour son aide précieuse,

Tous les bibliothécaires de l'E.N.P. en particulier Salah et Krime,

Et tous nos amis, en particulier Krime, Mehdi & Sid, Tarik, et tous les amis de la Tour:

Mohamed, Lamine, Karim, Salim et mes amis de longue date .

A la mémoire de Missoum.

LOTFI & ALLI

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
I. REVUE DE LITTERATURE	2
I.1. Ecoulement laminaire	2
I.2. Ecoulement turbulent	13
Conclusion	15
II. CONCEPTION DU NOMBRE DE REYNOLDS	16
II.1. Introduction	16
II.2. Application sur un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique	16
II.3. Principe de généralisation du nombre de Reynolds	20
III. DESCRIPTION PHENOMENOLOGIQUE DE LA TURBULENCE	30
III.1. Définitions	30
III.2. Caractérisation	31
IV. EQUATIONS REGISSANT L'ECOULEMENT DANS LES CONDUITS	
A MOTIFS PERIODIQUES	32
IV.1. Définition de l'écoulement turbulent	32
IV.2. Equation de quantité de mouvement	32
IV.3. Equation de conservation de masse	33
IV.4. Equation de Reynolds pour l'écoulement turbulent	34
IV.5. Equation de continuité pour le mouvement moyen	36
IV.6. Equation du mouvement fluctuant	37
V. MODELE DE TURBULENCE	39
V.1. Fermetures avec concept de viscosité turbulente	39
V.2. Modèles aux tensions de Reynolds R.S.M. (Reynolds Stress Model)	45
V.3. Modèle aux tensions de Reynolds Algébrique A.S.M.	50
V.4. Formulation du modèle retenu	62
VI. MODELISATION MATHEMATIQUE	66
VI.1. Transformation géométrique	66
VI.2. Equation du problème	69
VII. IMPLANTATION NUMERIQUE	76
VII.1. Introduction	76
VII.2. Méthode des différences finies	76
VII.3. Méthode de compressibilité artificielle	77
VIII. TEST DE VALIDATION	88
VIII.1. Introduction	88
VIII.2. Validation pour un écoulement laminaire	88

VIII.3. Validation pour un écoulement turbulent	89
VIII.4. Conclusion	90
IX. APPLICATION ET ANALYSE DES RESULTATS	91
IX.I. Introduction	91
VII.2. Application	91
VII.3. Analyse des résultats	92
CONCLUSION	115
ORGANIGRAMME	
BIBLIOGRAPHIE	

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION

La simulation numérique fait, sans aucun doute, partie de ces nouvelles activités qui se font chaque jour un peu plus présentes, et dont l'évolution, que laissent entrevoir les innovations technologiques les plus récentes, laissent rêveur. Pour l'ingénierie, elle constitue un formidable outil d'aide à la conception, dont la popularité sans cesse croissante s'explique surtout par les progrès réalisés dans le domaine de la mécanique des solides, en grande partie dus à l'avènement de la méthode des éléments finis.

En mécanique des fluides, le bilan est beaucoup moins satisfaisant. Et pourtant, l'enjeu est considérable. Nul n'est besoin de mentionner des défis aussi prestigieux que ceux de l'aéronautique pour s'en convaincre. Notre expérience journalière est sur ce point suffisamment explicite. La principale raison à cet état de faits est que l'univers que nous reproduisons sur ordinateur ne peut que refléter la compréhension que nous avons du monde qui nous entoure, avec tous ses préjugés. Or il se trouve que les fluides peuvent avoir un comportement tellement complexe, désigné généralement par turbulent, qu'il échappe complètement à notre analyse. De plus, la majorité des écoulements rencontrés en pratiques sont de ce type.

Pour être tout à fait exact, ce constat doit être quelque peu tempéré. En effet, prétendre qu'il n'existe aucune théorie de la turbulence est certainement faux, si l'on admet que les équations de NAVIER-STOCKES sont encore valables dans le cas des écoulements turbulents.

C'est dans cette optique que s'inscrit la présente étude, elle porte sur la résolution des équations de NAVIER-STOCKES dans le cas d'un écoulement turbulent dans un conduit à motif périodique du type convergent - divergent.

Pour aborder ce problème, nous avons opté pour une méthode de résolution numérique basée sur le modèle « Algebraic Stress Model » (A.S.M.), et ceci en utilisant la discrétisation de MARKER And CELL (M.A.C.) qui est une méthode aux différences finies.

Ce travail est subdivisé en 8 chapitres. Le premier offre une revue de littérature afin qui permet de recenser les travaux effectués dans le sens de notre étude. Il nous permettra en outre de préciser les principales difficultés que l'on rencontre.

Dans le second chapitre, nous présentons une généralisation du concept du nombre de Reynolds pour différents écoulements.

Une description de la turbulence, proposée dans le chapitre trois, nous permettra de mieux saisir ce phénomène.

Par la suite, dans le quatrième chapitre, nous poserons les équations régissant l'écoulement dans les conduits à motif périodique.

On conclura de ce chapitre que le système d'équations est ouvert, ce qui nous pousse à utiliser un modèle de turbulence. Cela fera l'objet du chapitre cinq. Le chapitre suivant décrit la modélisation mathématique en découlant.

Cette modélisation est implanté numériquement dans le chapitre VII et l'organigramme ainsi construit est donné en annexe. Nous avons développé un logiciel de calcul avec interface graphique afin d'effectuer l'application plus aisément.

Nous procéderons alors, dans le chapitre VIII, à des tests de validation des résultats afin de nous assurer que les résultats obtenus sont acceptables.

Au chapitre IX, enfin, nous interpréterons les résultats obtenus avec le modèle proposé.

Nous conclurons notre travail par quelques remarques et suggestions.

CHAPITRE I

CHAPITRE I : REVUE DE LITTERATURE**I.1. TRAVAUX ANTERIEURS SUR LES ECOULEMENTS LAMINAIRES
DANS LES CONDUITS A MOTIFS PERIODIQUES**

L'étude aussi bien numérique qu'expérimentale des écoulements dans les conduites à déformations périodiques a été élaborée et développée par plusieurs investigateurs.

RATIP BERKER [2] a étudié l'écoulement dans un canal bidimensionnel divergent et convergent en supposant un écoulement par droites concourantes. Pour le canal divergent, il donne l'évolution du profil de vitesse tel que le décrit la figure (I- 1) :

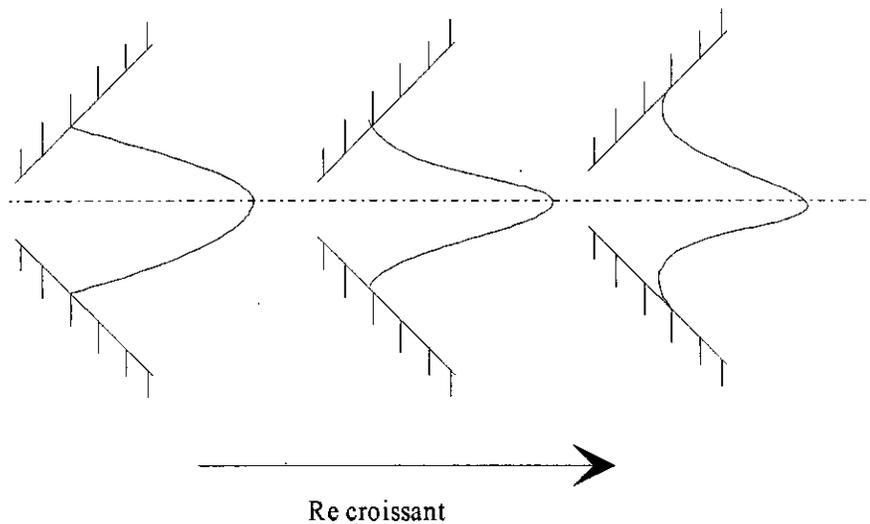


Figure (I - 1)

Ce profil devient très pointu au centre et s'aplatit sur les bords quand le nombre de Reynolds croît, jusqu'au moment où apparaît un courant de retour pour un nombre de Reynolds qui dépend de l'angle du divergent. Le courant de retour provoque l'apparition d'un rouleau permanent. Pour le canal convergent au contraire, le profil de vitesse s'aplatit dans la partie centrale quand le nombre de Reynolds croît.

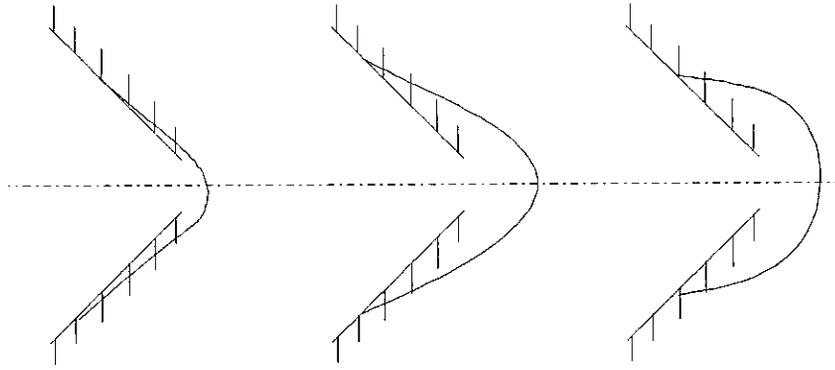


Figure (I - 2)

CHAUVETEAU [4] a étudié un écoulement dans un conduit divergent - convergent; Dans le cas d'un nombre de Reynolds très faible, il a observé une symétrie totale de l'écoulement puisque l'inertie des molécules fluides est insuffisante pour modifier l'écoulement alors totalement commandé par les forces de viscosité.

Si on suit l'évolution du terme $V \cdot \text{GRAD } V$ le long d'une ligne de courant cette valeur n'est jamais nulle mais prend pour des sections symétriques dans le convergent et dans le divergent des valeurs égales et opposées.

Par contre dès que le nombre de Reynolds atteint une certaine valeur, on observe une dissymétrie de l'écoulement et alors les valeurs prises par $V \cdot \text{GRAD } V$ ne sont plus égales et opposées pour deux sections symétriques.

Pour des nombres de Reynolds plus grand, il a observé des rouleaux permanents qui constituent un écoulement secondaire parasite.

Il a aussi noté qu'il n'existe pas de perte d'énergie cinétique.

CHAUVETEAU a cherché à montrer l'existence du nombre de Reynolds:

$$F_v = \mu \, dV/dn \cdot ds \quad \text{avec } V = c(x,y,z) \, V_m$$

n : normale à la surface de courant.

V : vitesse au point P.

F_v : force de frottement visqueux.

V_m : vitesse moyenne de référence.

ds : surface élémentaire.

μ : viscosité dynamique.

$$F_v(x,y,z) = \mu \cdot V_m \cdot dc(x,y,z) / dn \cdot ds$$

r : rayon du cylindre considéré au point P

Si on pose :

$$\int_{\Delta S(s)} \frac{dC(x,y,z)}{dn} dS = \left(\frac{dC}{dn} \right) (s)$$

alors on a :

$$J = \frac{2\nu}{gl} V_m \int \frac{dC}{dn} (s) \frac{1}{r} dl$$

CHAUVETEAU a obtenu une relation linéaire entre la perte de charge et le débit.

Les forces d'inertie varient en un point donné comme le carré de la vitesse. On peut s'attendre à ce que ces forces deviennent suffisantes à un certain nombre de Reynolds pour provoquer une modification de la forme de l'écoulement, donc du "facteur du frottement visqueux λRe ", ce qui montre l'existence d'un nombre de Reynolds limite qui n'a rigoureusement rien à voir avec la turbulence.

- Le nombre de Reynolds limite sera d'autant plus faible que les variations de section seront plus brusques (accélérations tangentielle importantes).
- Le nombre de Reynolds limite sera d'autant plus faible que la courbure des lignes de courant, donc du domaine d'écoulement, sera plus grande (accélération radiale).
- Le nombre de Reynolds limite sera d'autant plus grand qu'en tous les points de la géométrie considérée, l'énergie cinétique engendrera à la fois des forces d'inertie et des force de pression antagoniste d'un même ordre de grandeur. L'énergie cinétique du fluide devra être importante pour provoquer une faible déformation des lignes de courant, donc une faible variation de λRe . Ce sera le cas de l'écoulement dans un convergent, l'inertie projette le fluide sur la paroi en même temps qu'elle crée une surpression sur cette paroi. Par contre, dans un divergent, l'absence de paroi dans la direction de la déformation se produira pour un nombre de Reynolds relativement faible.
- Le nombre de Reynolds limite sera d'autant plus faible que sera grande la dispersion de l'énergie cinétique (les énergies cinétiques inégales entraîneront des forces d'inerties relativement plus grandes).

- Re_L sera d'autant plus faible que sera grande la dispersion des forces de frottement visqueux.

Le facteur de frottement visqueux λ Re croîtra d'autant plus que le rapport des sections m sera plus important :

λ Re est une fonction croissante de $M_1' = m_c / m$.

λ Re croîtra d'autant plus rapidement que les déformations susceptibles de se produire entraîneront une grande proportion du débit à s'écouler dans une zone à frottement visqueux intense.

Quand le nombre de Reynolds croît, une rupture de l'équilibre entre les forces de viscosité et de pression se produira nécessairement, rupture d'équilibre due à des forces nouvelles, les forces d'inertie, qui étaient jusqu'alors négligeables (elles varient comme le carré de Re). Les forces de frottement visqueux vont donc croître globalement (elles peuvent décroître en certains points) plus vite que le nombre de Reynolds puisque l'équilibre antérieur s'était réalisé selon un minimum de frottement visqueux pour un débit donné.

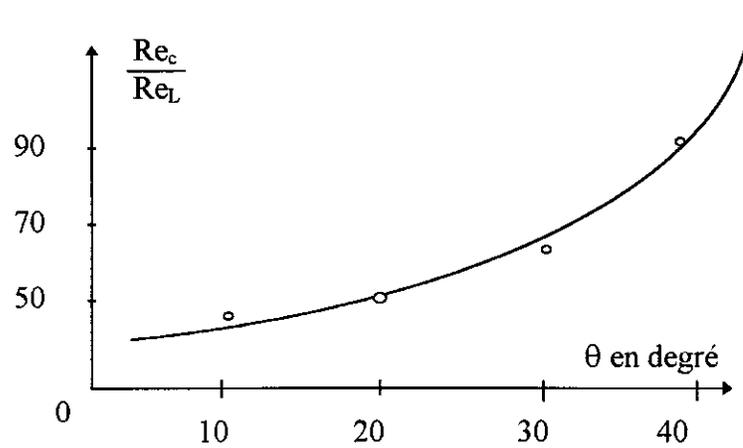
La déformation du profil de vitesse dans un canal divergent calculée par BERKER est en parfaite concordance avec ce dernier point de vue. Les forces d'inertie sont diminuées considérablement alors que les forces de viscosités augmentent lors de cette déformation.

CHAUVETEAU a mené une étude expérimentale sur un tube à section circulaire à parois en dents de scie d'axe rectiligne et est arrivé aux résultats suivant:

Les nombres de Reynolds limites diminuent quand l'angle θ augmente, ce qui est logique car les forces d'inertie augmentent avec cet angle.

La turbulence aidée par les décélérations apparaîtra pour un nombre de Reynolds plus faible et pour des angles θ plus grands.

Cependant, si on calcule le rapport Re_c / Re_L , ce rapport semble croître avec θ (graphique I - 1) ce qui indiquerait que l'apparition de la turbulence est moins influencée par l'angle θ que ne l'est le nombre de Reynolds limite.



Graphique I - 1

CHAUVETEAU a aussi remarqué que pour les angles θ importants soit 30° et 40° , le "facteur de frottement visqueux" atteint des valeurs relativement importantes soient 54 et 60, proche de la valeur du facteur de frottement visqueux que l'on obtiendrait pour un tube cylindrique ayant le même diamètre que la section rétrécie, c'est à dire : $\lambda Re = 64$.

Les différentes phases d'écoulement:

Pour l'écoulement laminaire à perte de charge non linéaire ($\lambda Re \approx CR_c^x$) le débit se concentre de plus en plus dans l'axe de la géométrie. Au début, on peut observer des petites zones mortes, bientôt animées d'un rouleau permanent, qui s'amplifient jusqu'à occuper les parties latérales entières, son centre se déplaçant de plus en plus vers l'aval comme l'indiquent les figures (I-3). L'écoulement ne se modifie guère plus jusqu'à l'apparition de la turbulence, ce qui se traduit par la croissance de plus en plus lente du facteur de frottement visqueux. Puis la turbulence s'installe progressivement d'abord sur la ligne S1 S2, puis sur l'axe de l'écoulement et enfin dans les parties latérales.

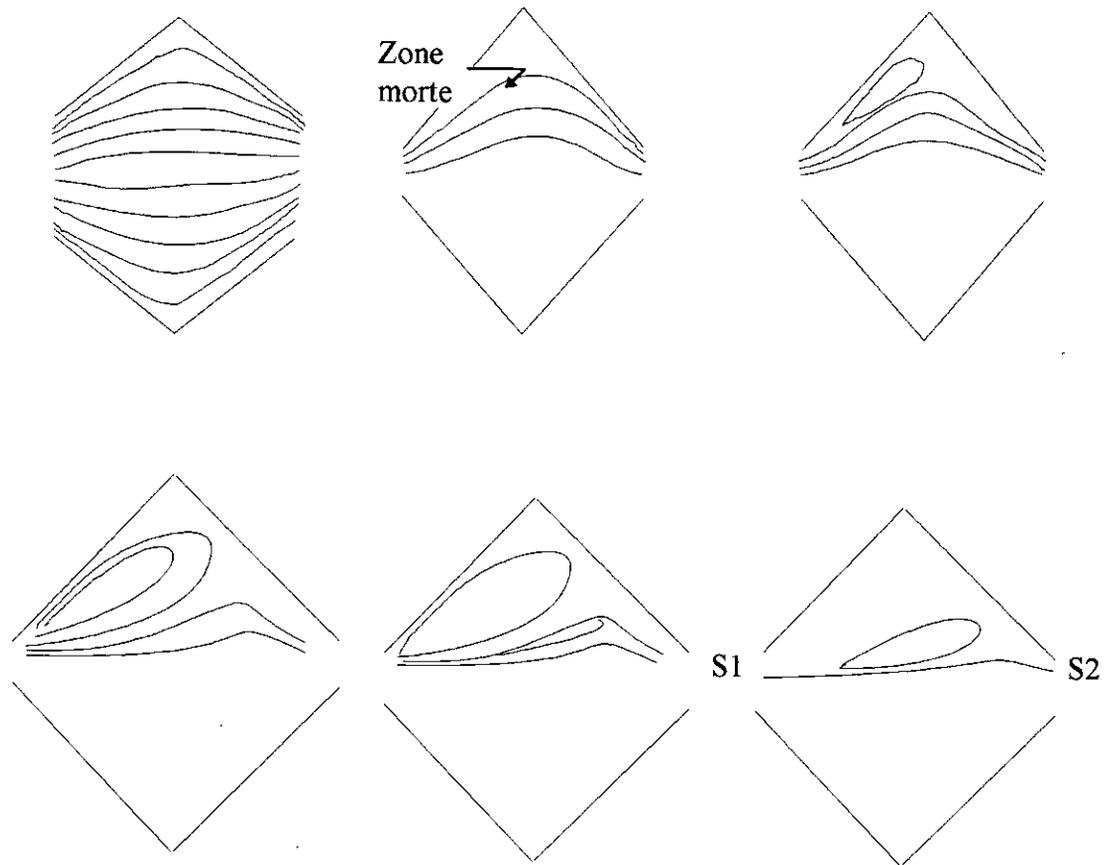


Figure (I - 3)

CONCLUSION:

L'étude de CHAUVETEAU a permis de mettre en évidence l'existence d'un nombre de Reynolds limite, caractéristique de l'écoulement laminaire pour un domaine d'écoulement donnée.

Ce nombre de Reynolds marque le début de la déformation de la géométrie de l'écoulement par les forces d'inertie, et par suite, la fin de l'écoulement à perte de charge linéaire.

Le nombre de Reynolds critique caractérisant l'apparition de la turbulence.

G. CHAUVETEAU a donc présente dans sa thèse:

- L'existence et la valeur du nombre de Reynolds limite en fonction de la géométrie :étude menée à l'aide d'une approche théorique et d'une vérification sur un grand nombre de modèles de formes différentes.

- La forme générale de la variation du "facteur de frottement visqueux λRe " dans les écoulements laminares de forme simple et l'évolution de cette forme avec la

"complexification" de cette forme de ces écoulements permettant de suivre l'évolution des lignes de courants corrélativement à celle du facteur de frottement visqueux.

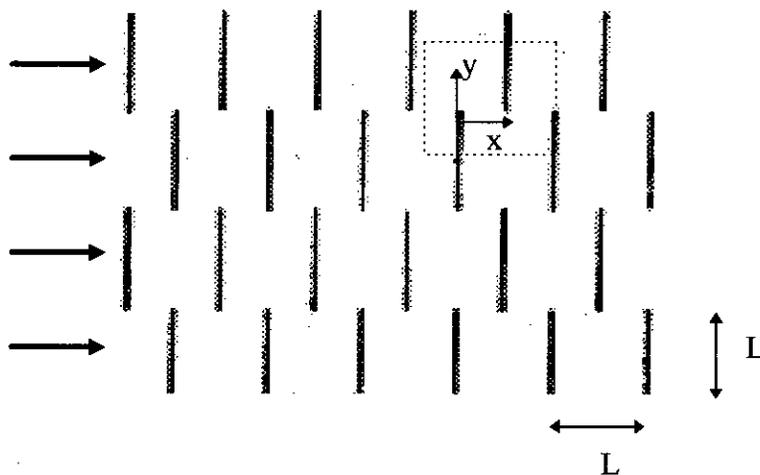
La distribution numérique très significative dans les géométries habituelles entre le nombre de Reynolds limite et le nombre de Reynolds critiques.

PATANKAR et col [12] ont développé un concept général d'écoulements établis et périodiques illustré sur la fig (I - 4). Ces écoulements prennent naissance loin des extrémités de canaux dont la section transversale varie périodiquement dans le sens du déplacement du fluide.

Cette particularité permet de ramener l'étude de ce type d'écoulements à celle d'un module isolé, de longueur égale à la distance entre deux sections identiques, aux extrémités duquel sont appliquées des conditions aux limites périodiques.

La Fig (I - 4) illustre un diagramme schématique des plaques positionnées transversalement à la direction de l'écoulement.

Les calculs sont réalisés pour les deux nombres de Reynolds $Re=140$ et $Re=1040$ et exposés sur les figures (I-2) et (I-3) respectivement.



Figure(I-4) Diagramme schématique de la plaque traversée

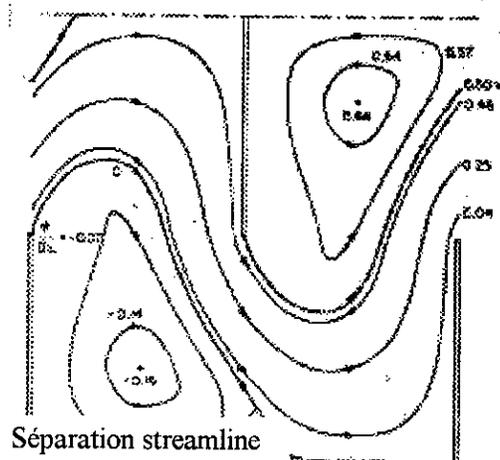


Figure I-5 lignes de courant $Re = 140$

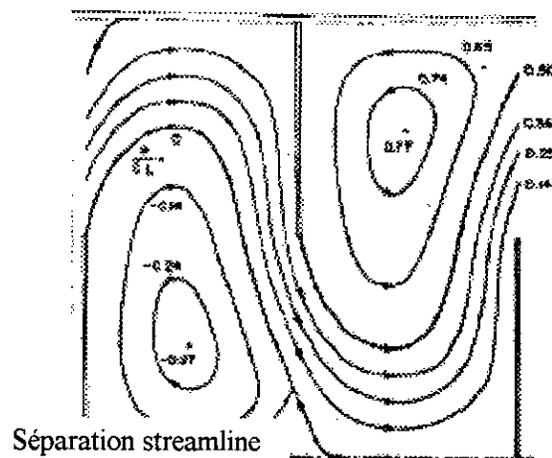


Figure I-6 lignes de courant $Re = 1040$

On remarque deux phénomènes dominant dans le champ d'écoulement:

- Le premier est la rapidité du fluide à tourner à cause du blocage imposé par les façades des plaques.
- Le deuxième est la zone de recirculation massive située à l'aval de chaque plaque, la dimension de cette zone est un peu plus grande pour des nombres de Reynolds importants.

IZUM et COL, ont reportés la solution numérique pour un écoulement laminaire dans une conduite ondulée à deux angles droits coudeés, et ont étudiés l'effet des coudeés sur les caractéristiques d'écoulement de fluides.

AMANO [12] a aussi étudié numériquement les mêmes conduites pour un écoulement laminaire et un écoulement turbulent.

Il a comparé les résultats avec les travaux expérimentaux fait par IZUM et COL.

FAGHRI et COL [12] ont développé une méthodologie de résolution de problèmes de convection forcée, dans lesquels une paroi de l'enceinte enfermant le fluide n'est pas parallèle aux lignes de coordonnées.

AZAKO et FAGHRI [8] ont élargi le champs d'application de ce travail au cas plus général où les deux parois ne sont pas parallèles aux lignes de coordonnées.

La méthode repose sur l'utilisation d'une transformation non-orthogonale de coordonnées qui change le domaine physique du fluide en un domaine rectangulaire de calcul.

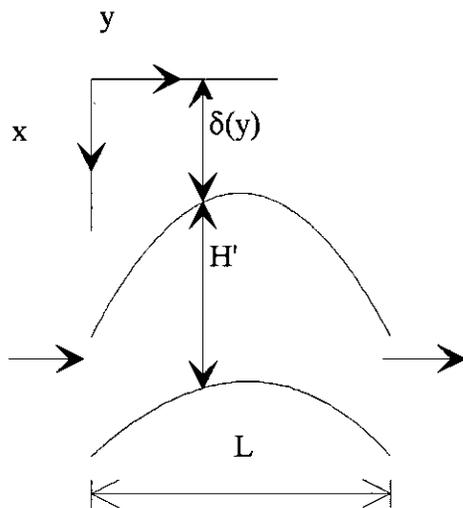


Figure I-7-a : illustration générale

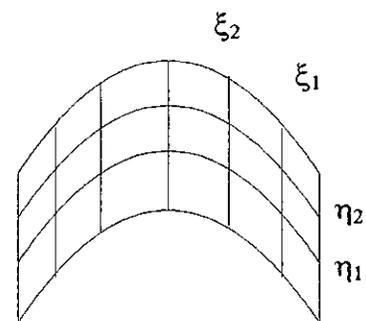


Figure I-7-b :

Les lignes constantes du problème dans le domaine physique

Les résultats numériques sont les suivants pour différents nombres de Reynolds: Fig.(II-4), Fig.(II-5-a), Fig.(II-5-b).

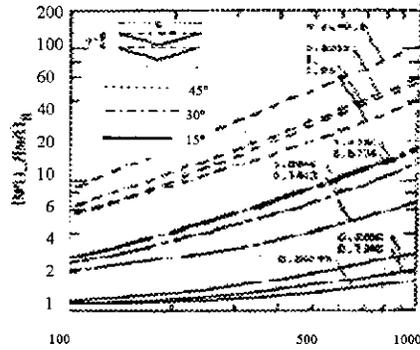


Figure I-8-a : comparaison de perte de charge pour un conduit ondulé et un conduit lisse

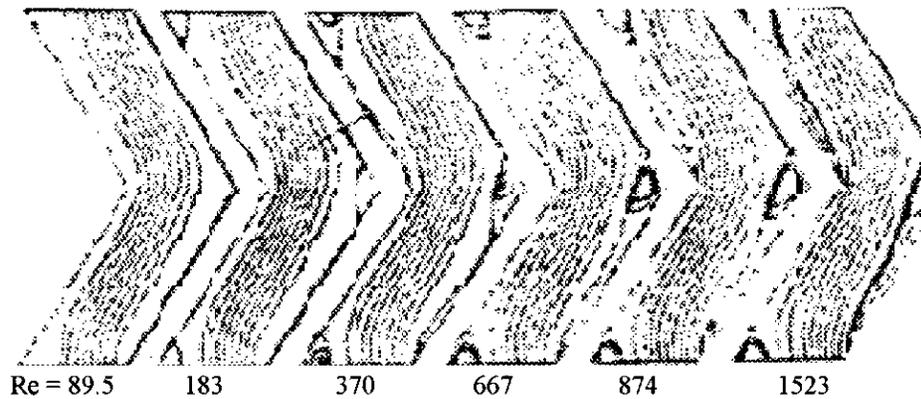


Figure I-8-b : les lignes de courant pour $H' / l = 0.2886$, $\theta = 30^\circ$

ASAKO, NAKAMURA et FAGHRI [12] ont déterminé numériquement les caractéristiques de perte de charge pour une conduite ondulée avec des coins arrondis. Les frontières sont approchées par des fonctions cosinus. Fig.(I-9-a), Fig.(I-9-b).

Les calculs concernent un domaine de nombre de Reynolds allant de 100 à 1000 pour trois angles d'ondulation 15° , 30° , 45° .

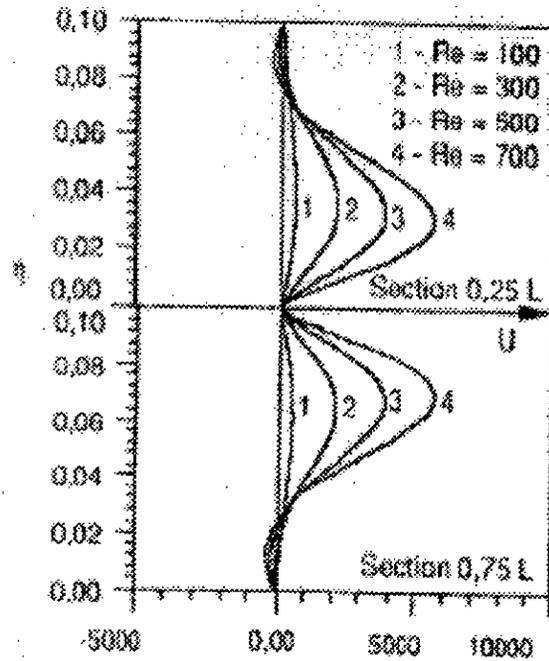


Figure I-7 : Composante U de la vitesse pour $C=0.1$ et $A=0.3$

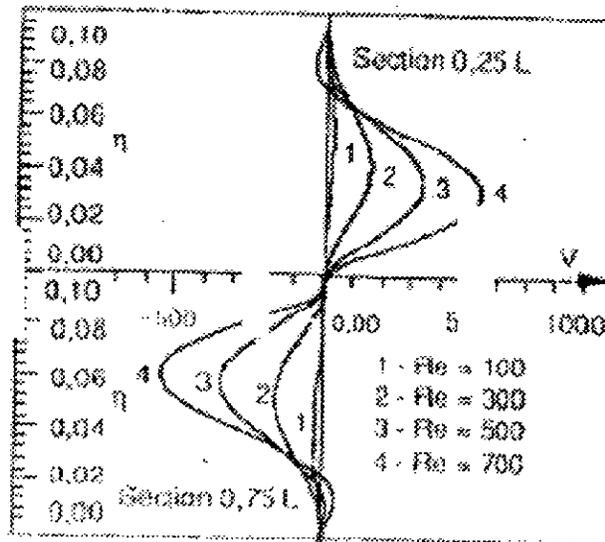


Figure I-8 : Composante V de la vitesse pour $C=0.1$ et $A=0.3$

avec

A : amplitude du profil des parois a/l (addimensionnel)

C : hauteur du canal

L : longueur d'onde adimensionnelle du profil des parois du canal .

VIJAY.K [1] a présenté une étude de l'écoulement laminaire à l'intérieur d'un canal Convergent-Divergent de section droite rectangulaire, et traite le problème sur dix périodes qu'il suppose suffisante pour atteindre l'écoulement établi. Il résout les équations de Navier-Stokes dans un domaine géométrique relativement complexe en variables primitives.

AZZI.A [12] a construit un code de calcul permettant de simuler l'écoulement d'un fluide incompressible dans un tube ondulé de section droite circulaire tout en considérant le domaine de l'entrée du tube. Les résultats sont bon jusqu'à un nombre de Reynolds égal à 100.

HASSAINE, DAGUENET et MENGY [12] ont fait l'étude numérique d'un écoulement bidimensionnel laminaire et permanent dans une conduite à parois sinusoïdale, et ont notés l'apparition d'une déformation des lignes de courant dans les zones de forte courbure du coté de la paroi. Cette déformation augmente avec A et le nombre de Reynolds Re jusqu'à l'apparition de zones de recirculation.

I.2. TRAVAUX ANTERIEURS SUR LES ECOULEMENTS TURBULENTS DANS LES CONDUITS A MOTIF PERIODIQUE

Différentes approches ont été utilisées simultanément pour étudier l'influence des ondulations de faible amplitude sur l'écoulement turbulent en conduite axisymétrique : une étude expérimentale comprenant des mesures dans l'air et des visualisations dans l'eau, et une étude numérique basée sur un modèle de turbulence simple[17].

Ces études, en faisant ressortir le caractère complexe de l'écoulement étudié, ont montrés que les résultats classiques relatifs à l'écoulement turbulent établi en tube droit étaient profondément modifiés particulièrement à cause de l'effet de variation de section, de l'effet de courbure des parois et de la présence de courants de retour instationnaires derrière chaque crête.

Peu de travaux expérimentaux en conduites existent dans la littérature scientifique sur ce sujet. Citons toutefois les mesures de HSU et KENNEDY à l'intérieur d'un tube à paroi sinusoïdale. Par contre plusieurs études numériques relatives à l'écoulement laminaire ou turbulent sur parois ondulées, fixes ou en mouvement, ont été publiées par MAKATOS.N.C.G et par P.A.TAYLOR, ainsi que sur l'écoulement avec contraction locale de veine par J.S.LEE et Y.C.FUNG et par W.L.LOBERKAMPF et S.C GOH.

La prévision numérique des grandeurs dynamiques par M.P.CHAUVE et R.SCHIESTEL, obtenue à l'aide du modèle K- ϵ de JONES et LANDER a permis de retrouver les principales caractéristiques de l'écoulement mises en évidence expérimentalement par CHAUVE.

R.SCHIESTEL et M.P.CHAUVE ont effectuée une étude dynamique de l'écoulement turbulent dans un tube à paroi faiblement ondulée, qui a permis la confrontation des résultats expérimentaux et des prévisions numériques basées sur un modèle qui s'avère insuffisant à décrire en détail le champ turbulent, la comparaison a fait ressortir une bonne estimation des grandeurs globales moyennes, notamment au nombre de Reynolds de 115.000.

Le schéma de turbulence a été étendu à l'étude de la convection turbulente et a permis de préciser l'influence des ondulations ainsi que du nombre de Reynolds sur les propriétés de transfert d'un tel écoulement complexe. Il apparaît que les ondulations accroissent le transfert de chaleur dans une proportion moindre que celle de la perte de charge. Ainsi dans une telle configuration, l'analogie de Reynolds tombe en défaut. L'augmentation des échanges de chaleur est plus forte au nombre de Reynolds de 30.000 (le plus bas) pour lequel la zone instable, siège des courants de retour instationnaires, prend plus d'importance qu'au nombre de Reynolds de 115.000 [R. SCHIESTEL et M. P. CHAUVE].

les travaux sur les couches limites instationnaires ou périodique se sont beaucoup développées durant ces dernières années. On peut les classer suivant deux approches, l'une expérimentale dont on peut citer les travaux de KARLSSON, BLINDER et al, PARIKH et al, et SIMPSON en canal plan, MAO et HANRATTY, SCHEMER et al,

TU et RAMAPRIAN en canal axisymétrique pulsé ; et l'autre numérique avec les travaux de TU et RAMAPRIAN, REDDY et al, RIDA et DANG.

M. H. BOUDGHENE, STRAMBOULI, H. HAMINH ont simulé un écoulement turbulent en conduite axisymétrique pulsé avec deux fréquences d'oscillations. Pour de faibles fréquences ($f = 0.5$ Hz) les effets instationnaires apparaissent le long de la section, par contre à hautes fréquences ($f = 3,6$ Hz) ils sont confinés dans une couche relativement mince qu'on appelle couche de « Stokes ». Le modèle de turbulence (k- ϵ) prédit bien l'écoulement pulsé dans le cas de faible fréquence et montre une certaine faiblesse à haute fréquence[3].

CONCLUSION

Dans les différents types de conduites périodiques, on remarque pour les écoulements laminaires la présence de zones de recirculation du fluide dans les zones de fortes courbures, ces zones sont fortement influencées par l'accroissement du nombre de Reynolds et de l'amplitude de l'ondulation. La perte de charge est fortement influencée par l'angle de courbure " θ ".

En ce qui concerne les écoulements turbulents, on note que la quasi-totalité des travaux antérieurs faits sur les écoulements périodiques, aucun résultat n'est en mesure de bien définir le comportement de l'écoulement turbulent sous l'influence d'une perturbation périodique imposée.

CHAPITRE II

CHAPITRE II : CONCEPTION DU NOMBRE DE REYNOLDS

II.1. INTRODUCTION

Mécaniciens de fluides et hydrauliciens ont l'habitude d'utiliser le nombre de Reynolds comme indice de l'écoulement dans l'estimation des pertes de charge c'est un critère global que l'on peut considérer soit sous l'aspect dynamique (rapport d'une quantité de mouvements à une force de frottement) soit sous l'aspect énergétique (rapport d'une énergie cinétique une quantité d'énergie dissipé par frottement).

Dans ce qui suit, on va essayer de généraliser ce concept de nombre de Reynolds pour caractériser du point de vue énergétique l'écoulement dans un conduit long non cylindrique dont le profil transversal varie périodiquement.

II.2. APPLICATION SUR UN ECOULEMENT LAMINAIRE DANS UNE CONDUITE_CYLINDRIQUE

Pour cerner les différents problèmes qui se posent nous commençons par une révision fondée sur l'étude des pertes de change dans une conduite cylindrique un grand classique des problèmes hydrauliques.

II.2.1. ÉVALUATION DE LA QUANTITE D'ENERGIE DISSIPEE

L'écoulement est laminaire, il vérifie l'équation :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{u}{r} x \frac{di}{dr} \left(r \cdot \frac{du}{dr} \right)$$

après intégration

$$u(r) = 2.u \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \text{ d'où } \frac{du}{dr} = 4.u \frac{r}{R^2}$$

qui est l'équation de la vitesse dans une conduite cylindrique .

- Entre deux couches parallèles voisines, l'effort de frottement est égale à :

$$T = \eta \frac{du}{dr} \quad (\text{II-2})$$

- La force élémentaire $df = \tau \cdot d\Sigma$

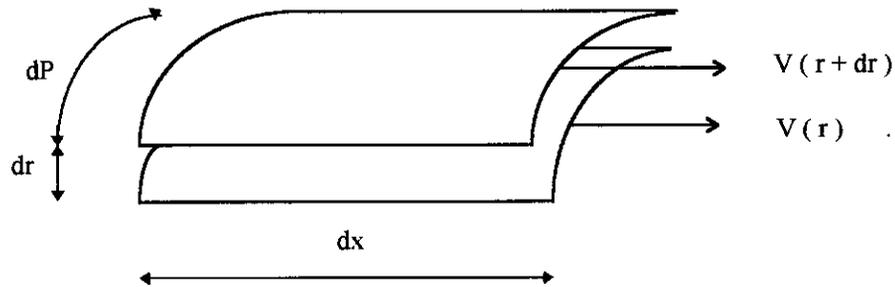


Figure II.1 Ecoulement laminaire

$d\Sigma = dx \cdot dp$ dp : variation sur le périmètre

$$dp = r \cdot d\theta$$

Le travail de frottement est:

$$d(dw_f) = df \cdot dx'$$

dx' : décalage entre les deux couches de molécules après un temps dt .

$$dx' = du \cdot dt$$

donc la dissipation globale sur la longueur L de volume de conduite .

$$\begin{aligned} dw_f &= \int_{\Omega} df \cdot dx' = dt \int_{\Omega} \mu \frac{du}{dr} \cdot d\Sigma \cdot \frac{du}{dr} \cdot dr \\ &= dt \mu \int_{\Omega} \left(\frac{du}{dr} \right)^2 dr \cdot d\Sigma = dt \mu \int_{\Omega} \left(\frac{du}{dr} \right)^2 \cdot d\Omega. \end{aligned}$$

$$d\Omega = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot L$$

$$dw_f = \mu dt \int \left[-4 \cdot \bar{u} \left(\frac{r}{R} \right) \right]^2 r \cdot dr \theta \cdot L = \frac{L \cdot \mu \cdot dt \cdot 16 \cdot \bar{u}^2}{R^4} \cdot \int r^2 \cdot v d\theta$$

$$= \frac{32 \cdot \pi \cdot \mu \cdot L}{R^4} \bar{u}^2 \cdot dt \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]^R = \frac{32 \cdot \pi \cdot \mu \cdot L}{R^4} dt \cdot \bar{u}^2 \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$dw_f = 8 \pi \mu L \cdot dt \cdot \bar{u}^2 \quad (\text{II-3})$$

II.2.2. ÉVALUATION DE L'ENERGIE CINETIQUE

A. ECOULEMENT EN BLOC

$$E_c = \rho \cdot \Omega \cdot \frac{\bar{u}^2}{2} = \rho \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot L \cdot \bar{u}^2 = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{D^2}{dt} = \frac{D^2}{dt} \frac{1}{64 \nu}$$

si on suppose que $dt = \frac{D}{u}$ on trouve $\frac{Ec}{dw_f} = \frac{\bar{u} \cdot D}{64 \nu}$

$$\frac{Ec}{dw_f} = \frac{Re}{64} \quad (\text{II-4})$$

On trouve la relation classique du perte de charge $\lambda = \frac{64}{Re}$

B. PRISE EN COMPTE DE LA DISTRIBUTION DE VITESSE :

Première façon : énergie cinétique de tout le tronçon:

$$E_c = \frac{\rho L}{2} \int u(r)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r dr = \rho \frac{L}{2} \int_0^R (2 \bar{u} (1 - (\frac{r}{R})^2))^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$= \rho \cdot L \cdot \pi \int_0^R (4 \bar{u}^2 (1 - (\frac{r}{R})^2)^2) \cdot r \cdot dr = 4 \cdot \rho \cdot L \cdot \pi \cdot \bar{u}^2 \int_0^R (1 - (\frac{r}{R})^2)^2 r dr$$

en faisant un changement de variable $\xi = (\frac{r}{R})^2$ on a $d\xi = \frac{2r}{R} \cdot dr$

pour $r=0$ on a $\xi=0$ pour $r=R$ $\xi=1$

$$E_c = 4\rho L \pi \bar{u}^2 \int_0^1 (1-\xi)^2 \cdot \frac{R^2}{2} \cdot d\xi = 2 \cdot \rho \cdot L \cdot \pi \cdot \bar{u}^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot L \cdot \pi \cdot \bar{u}^2 \cdot 2 \cdot R^2$$

$$E_c = \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot L \cdot \pi \cdot \bar{u}^2 \cdot R^2 = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot L \cdot \pi \cdot \bar{u}^2 \cdot D^2$$

-Deuxième façon : flux d'énergie cinétique:

$$E_c = \rho \int_0^R \frac{(u(r))^2}{2} dQ \cdot dt$$

$$dQ = u(r) \cdot ds = u(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$E_c = \rho$$

$$\int_0^R (u(r))^2$$

$$r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dt = \pi \cdot \rho \int (2 \cdot \bar{u} \cdot (1 - (\frac{r}{R})^2)^3 \cdot r \cdot dr \cdot dt = 8 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dt \cdot \bar{u}^3 \cdot \int_0^R (1 - (\frac{r}{R})^2)^3 \cdot r \cdot dr$$

en faisant le même changement de variable c'est à dire $\xi = (\frac{r}{R})^2$ $d\xi = \frac{2}{R^2} \cdot r \cdot dr$

$$E_c = 8 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dt \cdot \bar{u}^3 \cdot \frac{R^2}{2} \int_0^1 (1-\xi)^3 \cdot d\xi = 8 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dt \cdot \bar{u}^3 \cdot \frac{R}{2} \int_0^1 (1-3\xi+3\xi^2-\xi^3) d\xi$$

$$E_c = 8 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dt \cdot \bar{u}^3 \frac{R^2}{r} \left[\xi - \frac{2}{3} \xi^2 + \xi^3 - \frac{\xi^4}{4} \right] = \pi \cdot \rho \cdot dt \cdot \bar{u}^3 \cdot \frac{D^2}{4}$$

Si on prend la façon volume, le rapport devient

$$\frac{E_c}{dw_f} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \rho \cdot L \cdot \pi \cdot \bar{u}^2 \cdot R^2}{8 \cdot \pi \cdot \rho \cdot v \cdot \bar{u}^2 \cdot L \cdot df} = \frac{1}{48} \frac{D^2}{v \cdot dt}$$

Alors ou bien $dt = \frac{4}{3} \frac{D}{v}$ et on retrouve la formule :

$$\frac{Ec}{dwf} = \frac{U.D}{64.v} = \frac{Rc}{64} = \frac{1}{\lambda}$$

ou bien on garde $dt = \frac{D}{4}$ et alors

$$\frac{Ec}{dwf} = \frac{\bar{U}.D}{48.v} = \frac{1}{\lambda}$$

λ : étant le coefficient universel de perte de charge qui pour les écoulements laminaires à faible nombre de Reynolds. ($Re < 2000$) est donnée par la relation.

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (II-6)$$

De ce qui précède, on pourrait déduire que le nombre de Reynolds est par définition 48 fois le rapport de l'énergie cinétique de tout le tronçon sur la quantité

d'énergie dissipée pendant le temps $dt = \frac{D}{u}$

II.3. PRNcipe D'UNE GENERATION DU NOMBRE DE REYNOLDS A DES ECOULEMENTS PERMANENTS SPATIATEMENT PERIODIQUES

La question qui se pose pour la généralisation est le choix du diamètre de référence D , lorsque la conduite n'est plus cylindrique. Comme cela, repose sur le choix d'un volume de référence, on pourrait essayer l'idée d'une conduite cylindrique de même volume, dont le diamètre serait la grandeur de référence.

D'autre part pour la formule de flux, il faudrait pour le tube non cylindrique envisager peut être une pondération des flux mais et ce bien raisonnable.

II.3.1. CAS PARTICULIER D'ECOULEMENT PLAN:

Evidemment on ne prendra plus une conduite à profil circulaire comme élément de référence mais l'écoulement plan entre plaques à faces parallèle.

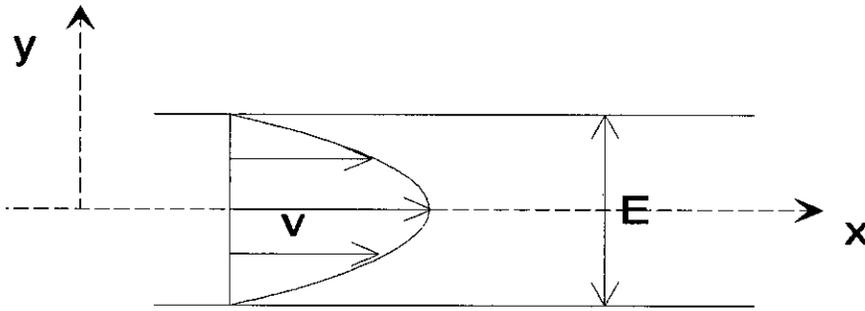


Figure II-2 profil des vitesses pour un écoulement entre deux plaques parallèles

La distribution de vitesse est alors.

$$u(y) = \frac{2}{3} \bar{u} \left(1 - \left(\frac{2y}{E} \right)^2 \right)$$

$$\text{avec } \bar{u} = \frac{Q'}{E}$$

Sur une longueur L, la dissipation d'énergie est

$$dw_f = \int \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 dt d\Omega$$

$$\frac{du}{dy} = -3 \bar{u} \frac{4y}{E^2}$$

$$dw_f = \int \mu \left(\frac{12 \bar{u} y}{E^2} \right)^2 dt dy L$$

$$= dt \mu L \frac{144 \bar{u}^2}{E^4} \int y dy = \mu \frac{L 144 \bar{u}^2}{E^4} \left[\frac{E^3}{12} \right] dt$$

$$= 12 \frac{\mu L \bar{u}^2}{E} dt = \frac{12 \mu L \bar{u} D}{E}$$

$$D = \bar{u} dt$$

$$D = \bar{u} \cdot dt$$

Calcul de l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique est donnée par:

$$\begin{aligned} E_c &= \int \rho \cdot \frac{\bar{u}^2(y)}{2} \cdot d\Omega = \frac{\rho}{2} L \cdot 2 \cdot \int \frac{9 \cdot \bar{u}^2}{4} \left(1 - \left(\frac{2y}{E}\right)^2\right)^2 \cdot dy \\ &= \frac{9}{4} \cdot \rho \cdot L \cdot \bar{u}^2 \cdot \int \left(1 - \left(\frac{2 \cdot y}{E}\right)^2\right)^2 \cdot dy \end{aligned}$$

En faisant un changement de variable $\xi = \frac{2 \cdot y}{E}$

$$d\xi = \frac{2}{E} \cdot dy \Rightarrow dy = \frac{E}{2} \cdot d\xi$$

On obtient:

$$E_c = \frac{9}{4} \cdot \rho \cdot L \cdot \bar{u}^2 \cdot \frac{E}{2} \int (1 - \xi^2)^2 \cdot d\xi = \frac{9}{4} \rho \cdot L \cdot \bar{u}^2 \cdot \frac{E}{2} \int (1 - 2 \cdot \xi^2 + \xi^4) \cdot d\xi$$

$$E_c = \frac{9}{8} \rho \cdot L \cdot \bar{u}^2 \cdot E \left[\xi - \frac{2}{3} \xi^3 + \frac{\xi^5}{5} \right]$$

$$E_c = \frac{3}{5} \rho \cdot L \cdot \bar{u}^2 \cdot E$$

Rapport d'énergie:

Le rapport de l'énergie cinétique à la dissipation d'énergie est:

$$\frac{E_c}{dwf} = \frac{1}{20} \frac{\bar{u} E^2}{\nu D}$$

Il suffit de choisir $D = E$ on obtient

$$\frac{Ec}{dwf} = \frac{1}{20} \frac{u.E}{\nu} = \frac{1}{20} \frac{Q'}{\nu}$$

$\frac{u.E}{\nu}$ peut être considéré comme nombre de Reynolds alors:

La définition découle d'elle même:

$$Re = 20 \cdot \frac{Ec}{wf}$$

Si en considérant l'aspect dynamique,

L'effort à la paroi sera

$$F_f = 2 \cdot \mu \cdot \left(\frac{du}{dy} \right)$$

La quantité de mouvement est:

$$M = \int \rho \cdot (u(y)) \cdot d\Omega = \frac{\rho \cdot L \cdot E}{2} \int \frac{2}{3} \bar{u} \cdot \left(1 - \left(\frac{2 \cdot y}{E} \right)^2 \right) \cdot dy \cdot \frac{2}{E} = \frac{\rho \cdot L \cdot E \cdot \bar{u}}{2}$$

Le rapport de la quantité de mouvement et de l'effort à la paroi sera: $\frac{M}{F_f} = \frac{E^2}{24\gamma}$

Mais ce qui intervient dans le théorème fondamental de la mécanique c'est la variation de la quantité de mouvement.

Conventionnellement, nous considérons que cela à lieu pendant un laps de temps $dt =$

$$\frac{E}{u} \text{ alors :}$$

$$\frac{M}{F_f \cdot dt} = \frac{E \cdot \bar{u}}{24 \cdot v} = \frac{Re}{24} = \frac{1}{\lambda}$$

On retrouve la formule de pertes de charges entre deux plaques parallèle.

L'aspect dynamique est simple à appliquer mais les conduits non cylindrique, l'évaluation des forces de frottement à la paroi peut être plus laborieuse et il faut prendre en compte la répartition de pression à la paroi (de vitesse «théorème de BERNOULLI »

II.3.3. APPLICATION A UNE SUCCESSION DE CONVERGENTS ET DIVERGENTS A PAROI RECTILIGNE

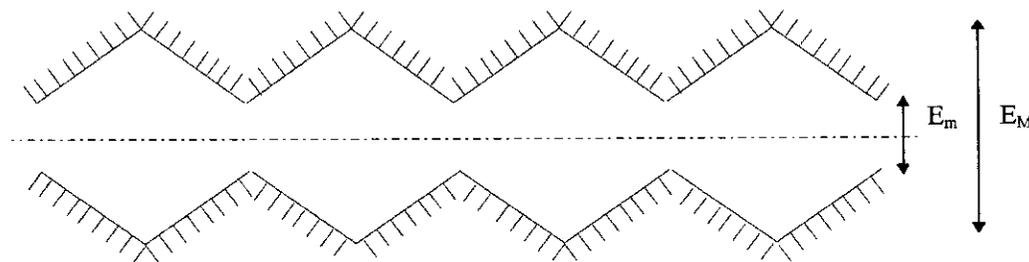


Figure II. 3 conduite périodique du type divergent - convergent

Pour faciliter les calcul de E_c et W_f on supposera qu'il s'agit d'une succession d'écoulement dans des conduits cylindriques de largeur variant progressivement , on a:

$$E^* = \frac{E_M + E_m}{2} \text{ ou } u(E^*) = \frac{Q'}{E^*}$$

$$dt = \frac{E^*}{u(E^*)} = \frac{E^{*2}}{Q'} = \left(\frac{E_M + E_m}{4.Q'}\right)^2$$

La vitesse devient une fonction de x, et y.

$$u(x, y) = \frac{2}{3} u(x) \cdot \left(1 - \left(\frac{2.y}{E(x)}\right)^2\right) \quad \text{avec } E(x) = E_m + (E_m - E_M) \cdot \frac{2.x}{L} \quad (\text{Cas de divergent})$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{2}{3} u(x) \cdot \frac{8.y}{E^2(x)} = -12 \frac{u(x).y}{E^2(x)}$$

- Calcul de travail de frottement :

$$dW_f = dt \cdot \int \mu \cdot \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \cdot dy \cdot dx = 2 \cdot \mu \cdot 144 \int \frac{\bar{u}^2}{E^4(x)} \cdot dx \cdot \int y^2 \cdot dy \cdot dt$$

$$dW_f = 24 \cdot \mu \cdot dt \cdot \int \frac{u^2(x)}{E(x)} \cdot dx \quad \text{avec} \quad dx = \frac{L}{2} \cdot \frac{dE(x)}{E_M - E_m}$$

$$dW_f = \frac{12.L.\mu.Q'^2.dt}{E_M - E_m} \cdot \int \frac{dE(x)}{E^3(x)}$$

$$dW_f = \frac{12.L.\mu.Q'^2.dt}{E_M - E_m} \cdot \int \frac{dE(x)}{E^3(x)} = \frac{12.L.\mu.Q'^2.dt}{E_M - E_m} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_m^2} - \frac{1}{E_M^2} \right)$$

$$dW_f = \frac{3}{2} \cdot \frac{L.\mu.Q'}{E_M^2 \cdot E_m^2} \cdot (E_M - E_m)^3$$

- Calcul d'énergie cinétique:

$$Ec = \int \rho \cdot \frac{u^2(x)}{2} \cdot d\Omega = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \int u^2(x) \cdot \frac{E(x)}{2} \cdot dx \cdot \int \left(1 - \left(\frac{2.y}{E(x)}\right)^2\right)^2 \cdot dy \cdot \frac{2}{E(x)}$$

$$Ec = \frac{3}{5} \rho \cdot Q'^2 \cdot \int \frac{dx}{E(x)} = \frac{3}{5} \cdot \rho \cdot Q'^2 \cdot \frac{L}{E_M - E_m} \cdot \int \frac{dE(x)}{E(x)}$$

$$\text{Car : } dx = \frac{L}{2} \cdot \frac{dE(x)}{E_M - E_m}$$

$$Ec = \frac{3}{5} \cdot \rho \cdot Q' \cdot L \cdot \frac{(E_M / E_m)}{E_M - E_m}$$

- Calcul de rapport E_c / dW_f :

$$\frac{E_c}{dW_f} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \rho \cdot Q'^2 \cdot L}{\frac{3}{2} \cdot \mu \cdot Q' \cdot L}$$

$$\frac{Ec}{dWf} = \frac{2}{5} \cdot \frac{Q'}{\gamma} \cdot \frac{E_M^2 \cdot E_m^2}{(E_M + E_m)^3} \cdot \frac{(E_M / E_m)}{(E_M - E_m)}$$

Cas particulier: $E_M = E_m$

$$\frac{Ec}{dW_f} = \frac{1}{20} \cdot \frac{Q'}{\nu}$$

- Coefficient de forme:

L'effet de la géométrie sera marqué par le coefficient

$$\beta = \frac{8 \cdot E_M^2 \cdot E_m^2}{(E_M + E_m)^3} \cdot \frac{(E_M / E_m)}{(E_M - E_m)}$$

Etude du coefficient β .

a) $E_m = 0,2$; $E_M = 0,5$; $L = 1$ mètre; $\beta = 0,71$.

b) $E_m = 0,2$; $E_M = 0,7$; $L = 1$ mètre ; $\beta = 0,538$

Conclusion:

L'objet de ce chapitre est de généraliser le concept du nombre de Reynolds pour les écoulements dans les conduites non cylindrique et de comparer ce dernier avec le nombre de Reynolds classique.

Le bilan énergétique paru plus aisément manipulable que le bilan dynamique, mais le problème est le choix du temps qui doit être convenable.

Les résultats ont été obtenus sur l'hypothèse de section transversale variant très progressivement longitudinalement . En fait, lorsque la variation est rapide il faudra prendre en compte comme référence l'écoulement purement visqueux où les lignes de courant ne sont pas des lignes parallèle à l'axe.

Dans cette perspective, on pourrait calculer le rapport de λ_T pour l'écoulement turbulent à λ_L pour l'écoulement laminaire rampant. En quelque sorte l'analogie du nombre de Nussell où la corrélation jouerait le rôle de la turbulence.

II.3.3. APPLICATION A UN ECOULEMENT TURBULENT DANS UN CONDUIT RECTANGULAIRE

Les équations de mouvement pour l'écoulement turbulent pleinement développé en conduit rectangulaire bidimensionnel donnent la relation suivante pour le profil des contraintes de cisaillement:

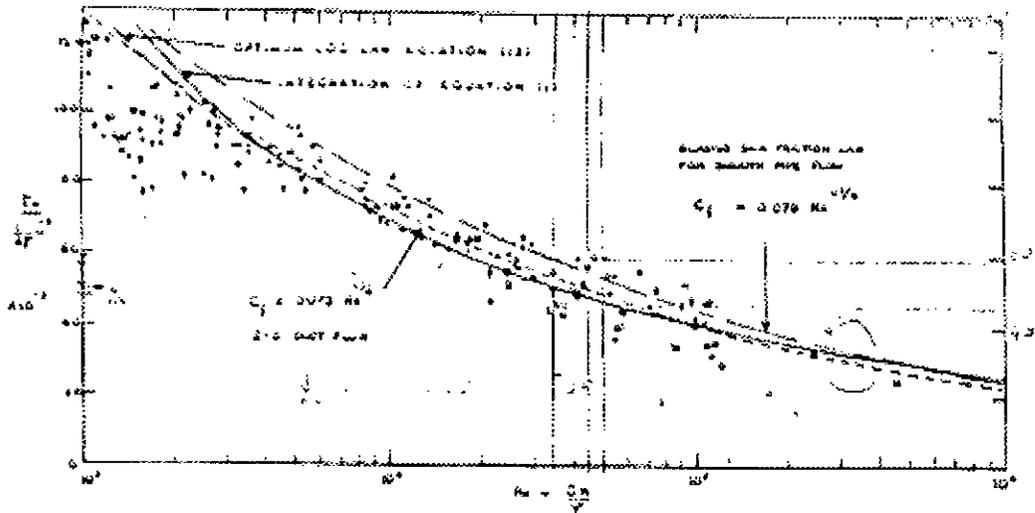
$$\tau = \tau_w (1 - 2.y / h) \quad (II-11)$$

Pour un faible nombre de Reynolds, la contribution des contraintes de Reynolds aux contraintes totales devient très petite et l'équation (II-11) se réduit à une expression laminaire pour les contraintes visqueuses.

La dépendance du nombre de Reynolds aux frottements pour l'écoulement laminaire est obtenu par :

$$C_f = \tau_w / \left(\frac{1}{2} \rho \cdot \bar{u}^2 \right) = \frac{12}{Re} \quad (\text{II-12})$$

Cela a été représenté par DEAN [7] sur la Fig 1 et comparé aux données alors disponible.



La dépense des contraintes de frottement et du nombre de Reynolds pour le régime turbulent est donné selon JOHNSTON [7] par l'équation.

$$C_f = 0,0706 Re^{-1/4}$$

Alors que DEAN [7] donne l'équation

$$C_f = 0,073 Re^{-1/4} \quad (\text{II-13})$$

dans le domaine du nombre de Reynolds $6.10^3 < Re < 6.10^5$

s'appuyant sur une étude plus complète de la documentation et à recalculer le frottement sous forme $\tau_w / \frac{1}{2} \rho \cdot U_0^2$ et à obtenu une comparaison satisfaisante avec la forme modifiée de l'équation (II-11).

Le figure II.5 donne la dépendance des contraintes de frottement aux parois et du nombre de Reynolds pour un régime turbulent et pour une gamme complète du nombre de Reynolds.

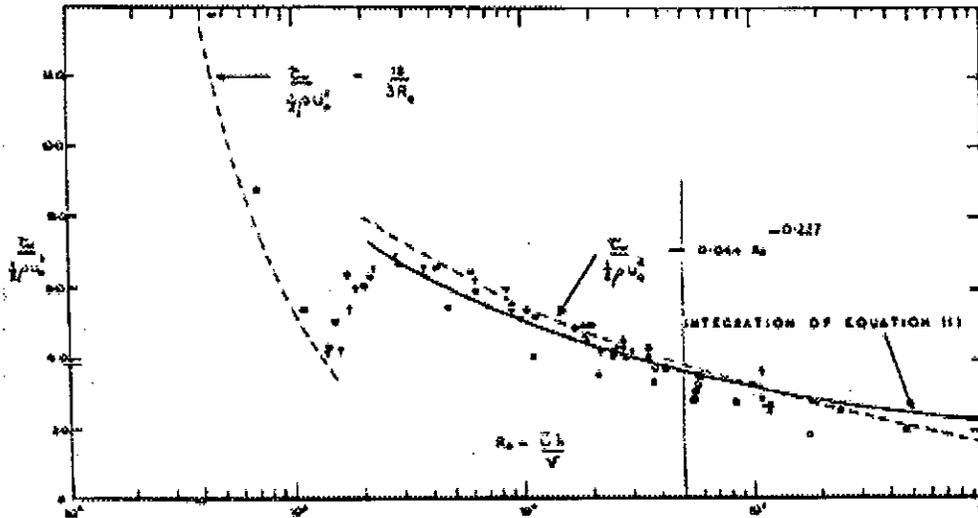


Figure II.5 : Dépendance de la contrainte de cisaillement au nombre de Reynolds.

Pour les écoulements dans les conduits presque carrée, le frottement et d'autres propriétés varient significativement avec le rapport d'aspect et plusieurs auteurs ont cherchés à faire correspondre les lois de frottement pour les conduits circulaire avec celles des conduits rectangulaire, triangulaire et trapézoïdales au moyen du concept du « diamètre hydraulique équivalent ».

$$d_c = 4 \times \frac{\text{Aire de la section transversale du conduit}}{\text{Perimetre mouillé}}$$

Dans le cas d'un conduit bidimensionnel, le diamètre équivalent est le double de la distance entre les plaques parallèles. Jones a proposé que le nombre de Reynolds soit basé sur le « diamètre équivalent laminaire » qui est le diamètre hydraulique multiplié par une fonction algébrique du rapport d'aspect. Cela permet de prendre les données à partir des écoulements en conduit rond et presque carré permettant de tomber sur les mêmes courbes des lois de frottement comme pour les conduits à haut rapport d'aspect.

CHAPITRE III

CHAPITRE III : DESCRIPTION PHENOMENOLOGIQUE DE LA TURBULENCE.

En observant les mouvements d'un fluide on distingue les écoulements turbulents et les écoulements non turbulents. On peut aisément se faire une idée de ce qu'est la turbulence d'après le sillage d'un navire, ou le cours d'un torrent, qui sont animés de mouvements tourbillonnaires très irrégulièrement distribués à la fois dans l'espace et dans le temps.

De même dans l'atmosphère, la présence de condensations, fumées et particules diverses révèle le plus souvent des mouvements d'agitations très complexes qui correspondent à la turbulence; les volutes d'une fumée de cigarette sont de superbes exemples d'instabilités de nappes tourbillonnaires. Une voile qui fassaye c'est encore de la turbulence.

On voit aussi que dans l'air de l'atmosphère, la turbulence peut affecter des échelles de l'ordre du centimètre (la fumée d'une cigarette), de la dizaine de mètres (la panache d'une cheminée d'usine), du kilomètre (les nuages ou les tornades), ou des centaines de kilomètres (le cyclone tropical).

Voilà déjà plusieurs lignes que nous parlons de la turbulence sans l'avoir définie. Voyons donc ce que nous apprennent les scientifiques qui se sont penchés sur ce sujet.

III.1. Définitions:

Dans l'édition de 1992 du petit Robert, on trouve la signification suivante du mot "turbulent": " qui est porté à s'agiter physiquement, qui est souvent dans un état d'excitation bruyante ".

L. LANDAU et E. LIFCHITZ [13]

"Le mouvement turbulent d'un fluide est, pour des valeurs suffisamment grandes du nombre de REYNOLDS caractérisé par l'existence d'une variation extrêmement irrégulière, chaotique de la vitesse au cours du temps en chaque point du flux ("turbulence développée").

La vitesse oscille sans cesse autour d'une certaine valeur moyenne, et indiquons ici même que l'amplitude de ces pulsations n'est pas en général petite par rapport à la grandeur de la vitesse elle-même.

L'irrégularité des variations de la vitesse se répète d'un point à l'autre du flux considéré à un instant donné. Les trajectoires des particules fluides dans le flux turbulent sont extrêmement complexes, d'où le broyage intense du fluide".

A. FAVRE et L.S.G KOVASZNAY [13]

"La turbulence est une propriété des écoulements du fluide et non du fluide lui-même. La définition générale et précise de ce phénomène n'a pas été donnée, mais on peut indiquer les caractéristiques que présentent les écoulements des fluides que l'on convient d'appeler turbulents, lorsqu'on les considère à une échelle d'observation déterminée. Par contre, des exemples peuvent être cités

d'écoulements qui ont certaines apparence de la turbulence, mais n'en présentent pas toutes les caractéristiques".

M. LESIEUR [14]

"Il est difficile de donner une définition précise de ce que l'on entend par "turbulence", et ceci est à l'origine de bien des malentendus. On peut cependant très grossièrement définir la turbulence par opposition à ce que l'on appelle un écoulement "laminaire", c'est à dire un écoulement bien organisé, tel que celui d'un large fleuve calme. Un écoulement turbulent apparaît comme une superposition de mouvements en apparence incohérents, qu'il semble difficile, voire impossible, de prévoir".

Dans une étude récente de plusieurs membres de l'Académie des Sciences[14], A.FAVRE donne la définition suivante:

"La turbulence est un chaos tourbillonnaire spatio-temporel déterministe bien que très complexe".

III.2. Caractérisation:

Si la définition de la turbulence apparaît comme un problème délicat, il semble, par contre, que les propriétés caractérisant les écoulements turbulents sont moins sujettes à controverse. Ainsi, un écoulement turbulent est caractérisé par:

- *son aspect irrégulier (ou aléatoire):* la vitesse, la pression et toutes les grandeurs physiques caractérisant l'écoulement présentent des fluctuations extrêmement irrégulières, à la fois dans l'espace et dans le temps.
- *Son aspect rotationnel et tridimensionnel:* un écoulement turbulent ne peut être irrotationnel, et le rotationnel présente des fluctuations aussi irrégulières que les autres grandeurs caractérisant l'écoulement. De plus, les mécanismes d'entretien de la turbulence, tel l'étirement des filets tourbillonnaires, confèrent aux écoulements turbulents un caractère tridimensionnel. Cependant il existe toutefois une turbulence "bidimensionnelle" que l'on rencontre dans des situations très spécifiques et dont les mécanismes sont différents de ceux de la turbulence tridimensionnelle.
- *son aspect diffusif:* un champ turbulent diffuse fortement toute quantité transportable comme la température ou un colorant, mais aussi la quantité de mouvement. D'un point de vue applications industrielles, le caractère hautement diffusif de la turbulence, dû à l'agitation intense des particules du fluide, est de loin le plus important.
- *son aspect dissipatif:* la turbulence est fortement dissipative du fait de la présence de forts gradients de vitesse instantanés. En effet, une augmentation considérable du frottement interne est due aux fluctuations irrégulières de la vitesse.

Enfin, Il convient de bien souligner que la turbulence est une propriété de l'écoulement et non du fluide.

CHAPITRE IV

CHAPITRE IV : EQUATIONS REGISSANT L'ÉCOULEMENT DANS LES CONDUITS A MOTIF PERIODIQUE

IV.1. DEFINITION DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT

C'est un écoulement qui s'accompagne d'un brassage intense du fluide et de pulsation de vitesses et des pressions. Les particules du fluide se déplacent dans toutes les directions de manière aléatoire et leurs trajectoires sont souvent des courbes de formes très compliquées.

Pour les besoins de l'étude il sera considéré un écoulement turbulent composé d'un ensemble de tourbillon de toiles, de formes et de vitesses rotationnelles différentes emportés par un mouvement d'ensemble.

IV.2. EQUATIONS DE QUANTITE DE MOUVEMENT

Pour un fluide Newtonien, les équations gouvernant son mouvement, sont les équations de NAVIER-STOKES qui expriment que l'accélération d'une particule est due aux forces de volume, de pressions et de viscosité :

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \rho X_i - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial U_k}{\partial X_k} \right) \right]$$

i, j, k = 1, 2, 3 (IV-1)

avec :

ρ : masse volumique du fluide.

μ : viscosité dynamique du fluide.

IV.3. EQUATION DE CONSERVATION DE MASSE

La conservation de la masse est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 3 \quad (IV-2)$$

HYPOTHESES :

Pour les besoins de l'étude, il a été proposé que :

- le fluide est incompressible ($\rho = \text{cste}$).
- fluide non pesant.
- l'écoulement est en charge.
- l'écoulement est bidimensionnel (en OXY).

Par conséquent la composante de la vitesse dans la direction OZ est négligée.

Il est à noter que l'écoulement a lieu dans une conduite à motif périodiques (voir Schéma 1).

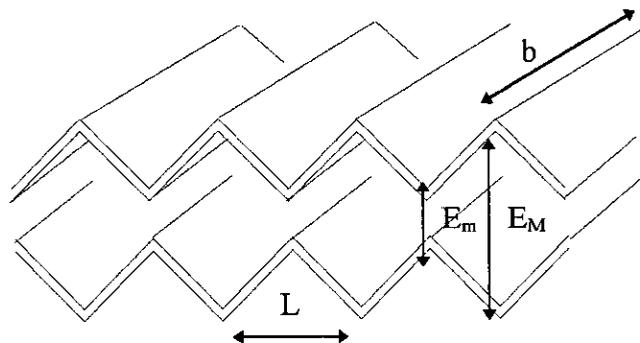


Figure IV-1: Conduite à motif périodique

D'après les hypothèses ci-dessus, les équations de quantité de mouvement (IV-1) et l'équation de continuité (IV-2) deviennent :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (IV-3)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad i, j = 1, \dots, 3 \quad (IV-4)$$

IV.4. EQUATIONS DE REYNOLDS POUR L'ÉCOULEMENT TURBULENT

IV.4.1. PRINCIPE DE L'APPROCHE STATISTIQUE

L'aspect d'irrégularité et de complexité des écoulements turbulents est que toute tentative de les décrire analytiquement dans les moindres détails semble irrémédiablement voué à l'échec. La notion de l'écoulement moyen, qui émerge naturellement de cette analyse, fut introduite par O. REYNOLDS qui proposa de représenter toutes les quantités hydrodynamiques d'un écoulement turbulent, comme somme d'une composante moyenne (régulière) et d'une fluctuation (irrégulière).

Pour la détermination de la valeur moyenne, il suggère l'utilisation d'une moyenne temporelle qui pour une quantité $G(x,t)$ s'écrit :

$$\overline{G}(x, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} G(x, t) dt \quad (IV-5)$$

Dans l'approche directe de la turbulence, le problème est formulé simplement par les équations de NAVIER-STOKES et de continuité (système (IV-3),(IV-4)). Dans l'approche statistique, chacune des grandeurs hydrodynamiques est vue comme une fonction aléatoire en espace et en temps. Par conséquent on pourra considérer le problème résolu (au sens statistique) dès lors que chacune de ces fonctions aléatoires sera complètement décrite statistiquement. Ceci revient à déterminer toutes les distributions de probabilité conjointe pour N points quelconques de l'espace-temps (avec

N entier positif quelconque). On peut donc calculer tous les moments, c'est à dire pour une fonction $f(x,t)$, toutes les quantités de la forme :

$$\overline{g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots g_N^{n_N}} \quad (IV-6)$$

moment conjoint d'ordre $m = n_1 + n_2 + \dots + n_N$.

f_i : désigne la variable aléatoire constituée par f au point $M_i (x_i, t_i)$ de l'espace temps.

La barre symbolise l'opérateur « moyenne statistique ».

En particulier seuls les valeurs moyennes (moment d'ordre 2) sont importantes pour les applications pratiques.

La détermination expérimentale de ces moments est basée sur la moyenne temporelle (IV-5) (hypothèse d'ergodicité). Par contre dans l'analyse mathématique de la turbulence on utilise la moyenne statistique pour construire les équations aux moments à partir des équations de NAVIER-STOKES.

Si on désigne par $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3$ et \overline{P} les grandeurs hydrodynamiques caractérisant l'écoulement moyen, nous avons la décomposition suivante :

$$U_i = \overline{U}_i + u_i \quad (IV-7)$$

$$P = \overline{P} + p \quad (IV-8)$$

u_i désigne les fluctuations de vitesse et p les fluctuations de pression.

Les équations de Reynolds (BOUSSINESQ 1877 , REYNOLDS 1891) sont obtenues en prenant la moyenne des équations (IV-3) et (IV-4) en utilisant les propriétés de l'opérateur moyenne (annexe).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_i + \bar{u}_i) + (\bar{U}_j + u_j) \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{U}_i + u_i) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{P} + p) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_i} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

La moyenne de l'équation (IV-9) est :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \bar{U}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j}$$

où sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - R_{ij} \right]$$

(IV-10)

où $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$

Les termes R_{ij} traduisent l'influence de la turbulence sur le mouvement moyen. Ils se combinent aux tensions visqueuses pour former une tension turbulente apparente.

IV.5. EQUATION DE CONTINUTE POUR LE MOUVEMENT MOYEN

comme $U_i = \bar{U}_i + u_i$

alors l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{U}_i + u_i) = 0$$

On prend la moyenne de cette équation et on obtient l'équation de continuité pour le mouvement moyen :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{IV-11}$$

IV.6. EQUATION DU MOUVEMENT FLUCTUANT

Elle s'obtiennent par simple soustraction de l'équation IV-10 de l'équation IV-2 et de l'équation IV-11 de l'équation IV-3.

Soit :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \right. \tag{IV - 12}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \right. \tag{IV - 13}$$

On constate que les équations caractérisants l'écoulement moyen (IV-10, IV-11) gardent pratiquement la même forme que les équations (IV-3, IV-4). La seule différence

provient de la présence des tensions de Reynolds du second membre de l'équation (IV-11) due à la non linéarité des équations de NAVIER-STOKES et qui traduit l'action des fluctuations de vitesse sur l'écoulement moyen.

Afin de pouvoir résoudre le système (IV-10,IV-11), il faut introduire une relation entre R_{ij} et les quantités U_i et P .

CHAPITRE V

CHAPITRE V : MODELES DE TURBULENCE

La fermeture des équations ouvertes en turbulence peut se définir comme la procédure visant à obtenir un modèle mathématique régissant certaines propriétés statistiques de l'écoulement. Il doit donc en résulté :

- Un système fermé, i.e. un ensemble d'équations en nombre égal à celui des inconnues.
- Un jeu de coefficients ou constantes du modèle.
- Les conditions initiales et aux limites requises par la natures des équations aux dérivées partielles impliquées.

V.1 FERMETURES AVEC CONCEPT DE VISCOSITE TURBULENTE

La diversité des considérations concernant d'une part la variable P et d'autre part les moments turbulents $\overline{u_i u_j}$, afin de transformer les équations en un système comportant autant d'équations que d'inconnues, est à l'origine de la multiplicité des modèles mathématiques que l'on rencontre.

Les modèle les plus utilisés sont basé sur le concept de viscosité turbulente qui exprime les tensions de Reynolds en fonction des champs de vitesses moyennes par la notion de viscosité turbulente. Il convient de souligner que la viscosité turbulente ν_T n'est pas propriété du fluide mais une propriété de l'écoulement lui même.

Le concept de viscosité turbulente est apparu tout d'abord dans les travaux de BOUSSINESQ (1877), en proposant une relation en analogie de celle NEWTON pour les contraintes de viscosité moléculaires :

$$-\overline{uv} = \nu_T \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \quad (V-1)$$

où le coefficient de proportionnalité ν_T représente une viscosité cinématique de turbulence.

La généralisation du même concept au niveau tensoriel par Reynolds a conduit à :

$$-\overline{u_i v_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (V-2)$$

à laquelle HINZE a effectué la correction suivante :

$$-\overline{u_i v_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} K \quad (V-3)$$

les termes de $\frac{2}{3} \delta_{ij} K$ quant à lui, analogue à une pression par agitation turbulente a été introduite afin d'assurer la véracité de cette même relation.

V.1.1. MODELES A VISCOSITE TURBULENTE ALGEBRIQUE

Les modèles à viscosité turbulente ne font appel à aucune équation de transport puisque, comme leur nom indique, ν_T est donnée par une expression algébrique, pour faciliter le développement de telles expressions, la notion de *longueur de mélange* de PRANDTL est très utile. D'après la théorie des gaz, la viscosité moléculaire ν est égale au produit de la vitesse moyenne des molécules par leur libre parcours moyen, PRANDTL suggéra que la viscosité turbulente ν_T , puisse elle aussi être mise sous la forme de produit d'une vitesse et d'une longueur, mais cette fois caractéristiques du mouvement turbulent.

L'analyse du cas d'une particule de fluide soumise à un seul gradient de vitesse moyenne (écoulement cisailé simple $U_1 = U_1(x_2)$, $U_2 = U_3 = 0$) conduit à exprimer la vitesse caractéristique :

$$V = L_m \left| \frac{dU_1}{dx_2} \right|$$

$$\nu_T = V \cdot L_m$$

Ce qui conduit à l'expression suivante de la viscosité turbulente :

$$v_T = L_m^2 \left| \frac{dU_1}{dx_2} \right| \quad (V-4)$$

un défaut apparaît là où la vitesse présente un extremum, v_T et par voie de conséquence, les termes de turbulences s'annulent, aussi PRANDTL a corrigé en proposant :

$$v_T = L_m^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\right)^2 + l'^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2}\right)^2} \quad (V-5)$$

en introduisant une seconde longueur de mélange L' .

Plusieurs formules sont proposées pour la longueur du mélange L_m suivant le type de l'écoulement :

- pour la turbulence de paroi, on peut utiliser :

$$L_m = \kappa y \quad (V-6)$$

κ : la constante de VON KARMAN environ égale à 0,41

y : la distance à la paroi.

- la correction bien connue de E.R. VANDRIEST s'applique au voisinage immédiat de la paroi, l'équation IV-25 étant remplacée par :

$$L_m = \kappa \cdot y \left[1 - \exp\left(-y \frac{U^*}{26 \cdot \nu}\right) \right] \quad (V-7)$$

- pour les écoulements en canal ou en tube, on peut utiliser la formule de J. NIKURADSE (1932) :

$$L_m = D \cdot \left[0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{D}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{D}\right)^4 \right] \quad (V-8)$$

V.1.2. MODELE A UNE EQUATION DE TRANSPORT

Le plus grand reproche qui peut être formulé à propos des modèles à viscosité turbulente algébrique (mis à part le problème de la détermination de v_T pour les écoulements complexes) est qu'il ignore le caractère non local de turbulence qui ne peut être pris en compte qu'en introduisant dans la définition de v_T au moins une grandeur turbulente décrite par une équation d'évolution, le modèle à une équation de transport proposé indépendamment par A.N. KOLMOGOROFF et L. PRANDTL découle naturellement de v_T en fonction d'une longueur et d'une vitesse caractéristiques. La racine carrée de l'énergie cinétique moyenne de la turbulence K constituant le meilleur candidat pour cette dernière.

$$v_T = C_\mu \cdot \sqrt{K} \cdot L \tag{V-9}$$

C_μ : une constante numérique égale à 0,09.

K : l'énergie cinétique de turbulence, est obtenue par son équation de transport modélisée :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = v_T \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{v_T}{h_k} \frac{\partial k}{\partial x_2} \frac{K^{3/2}}{L} \tag{V-10}$$

$$h_k = 1,5$$

L'échelle L doit être spécifiée dans chaque cas particulier d'écoulement. Dans les écoulement libre (jet, sillages, zones de mélange), L est en général choisie proportionnel à l'épaisseur de l'écoulement, mais la constante de proportionnalité varie d'un écoulement à un autre ; et dans les écoulements de paroi, PRANDTL pose $L = x_2$.

Une propriété de la turbulence est cette fois prise en compte grâce à une équation d'évolution, mais le problème de la détermination de la longueur caractéristique reste entier pour les écoulements complexes, donc on peut formuler les mêmes réserves pour ce

modèle que pour le modèle à viscosité turbulente algébrique quant à l'application aux écoulements à géométrie complexe.

V.1.3. MODELES A DEUX EQUATIONS DE TRANSPORT

Le problème de la détermination de l'échelle de longueur caractéristique L (longueur caractéristique des grandes structures turbulente) peut être résolue en notant que L , comme K doit pouvoir être décrite par une équation de transport. Toute combinaison de la forme $K^m.L^n$ permettant de déduire L connaissant K . De nombreux modèles à deux équations de transport ne diffèrent que par le choix du couple de l'exposant (m,n) . L'équation de transport supplémentaire conserve la même forme générale, quelque soit le choix du couple (m,n) , mais pour la variable $K^{3/2}.L^{-1}$ que cette équation est la plus simple, c'est en partie, pour cette raison, que ce modèle est devenu plus célèbre que les autres, et c'est actuellement le modèle à deux équations de transport le plus employé. En fait, ce modèle est plutôt connu sous la dénomination de *modèle K-ε*

$$(\varepsilon = K^{3/2} \cdot L^{-1}, \quad \nu_T = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}).$$

Les propriétés de la turbulence sont donc représentées par les quantités K et ε dont les évolutions sont calculées à partir des équations de transports suivantes :

$$\frac{DK}{Dt} = -R_{jm} \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C_\mu}{\sigma_K} \frac{K^2}{\varepsilon} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) \quad (V-11)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} R_{jm} \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{K^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (V-12)$$

où : $C_{\varepsilon 1} = 1,$

$$C_{\varepsilon 2} = 1,92$$

$$C_\mu = 0,09$$

$$\sigma_K = 1$$

$$\sigma_\varepsilon = 1,3$$

• EXTENSION AUX FAIBLES NOMBRES DE REYNOLDS

Du fait de l'hypothèse des grands nombres de Reynolds, utilisée pour déduire le modèle K-ε standard, l'emploi de ce dernier est limité aux régions où cette hypothèse est effectivement vérifiée. Le modèle K-ε standard n'est en particulier pas valable pour décrire le voisinage immédiat d'une paroi solide, où l'action des forces visqueuses devient dominante, et où l'hypothèse d'isotropie locale n'est plus vérifiée, les structures dissipative étant directement sous l'influence de l'écoulement moyen. Cette difficulté est généralement surmontée grâce à la technique des fonctions de parois. Le maillage, au lieu de s'étendre jusqu'à la paroi, s'achève à une certaine distance de celle-ci, de façon à ce que tous les points de sa frontière se situent dans la zone pleinement turbulente de la région de paroi, et la couche limite est alors prise en compte en imposant le frottement, dont la valeur τ_p est fournie par les fonctions de paroi.

Une autre technique, dont le développement est assez récent, consiste à remplacer les fonctions de paroi par un modèle de longueur de mélange, pour décrire la région de paroi.

// Bien que systématiquement employée, l'approche standard (K-ε standard + fonction de paroi) n'est en principe plus correcte pour les éléments à géométrie complexe. En effet, pour de tels écoulements il est généralement impossible d'assurer que tous les points de la frontière du maillage se situent en zone turbulente (l'épaisseur de la région de paroi est fonction de la vitesse et peut donc varier le long d'une même paroi), le modèle K-ε standard étant alors utilisé dans des régions où il n'est plus valable.

La première modification à apporter au modèle K-ε standard, pour étendre sa plage de validité aux nombre de Reynolds faibles, est évidemment de réintégrer les termes de diffusion moléculaire (qui ne demandent aucune modélisation) dans les équations. L'équation sur K ne nécessite pas d'autres réajustements, l'élimination du terme de diffusion moléculaire étant la seule simplification introduite par l'hypothèse des grands nombres de Reynolds. La généralisation de l'équation sur ε est plus délicate, l'hypothèse des grands nombres de Reynolds ayant conduit à l'élimination de quatre termes, en plus du terme de diffusion moléculaire. En fait, aucune des modifications de l'équation sur ε qui ont été proposées ne peut se justifier en invoquant une modélisation des termes négligés dans le modèle standard.

W.P.JONES et B.E;LAUNDER furent les premiers à présenter un modèle K-ε valable pour les nombres de REYNOLDS faibles ,le principe de l'extension est la validité des équations de K et ε aux nombres de REYNOLDS faible ,les constantes $C_{\epsilon 1}$ et $C_{\epsilon 2}$ sont pondérées par les fonctions $f_{\epsilon 1}$ et $f_{\epsilon 2}$,le nombre de REYNOLDS local peut être traduit par le nombre de REYNOLDS de la turbulence :

$$R_T = \frac{K^2}{\nu \epsilon}$$

ou par un nombre de REYNOLDS dans lequel l'influence de la paroi est plus explicite (Y désigne la distance à la paroi) :

$$R_Y = \frac{\sqrt{KY}}{\nu}$$

un traitement similaire est appliqué à la constante C_μ intervenant dans l'expression de la viscosité turbulente, qui devient:

$$v_T = C_\mu f_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}$$

D'ou la forme généralisée (aux nombres de REYNOLDS faibles) des équations de K et ε est:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + \frac{C_\mu f_\mu}{2} \frac{K^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)^2 - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} \frac{C_\mu f_\mu}{2} \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

V.2. MODELES AUX TENSIONS DE REYNOLDS R-S-M (Reynolds Stress Model)

La modélisation par viscosité turbulente v_t présente de nombreuses limitations, dont la principale est liée à son caractère isotrope.

Ainsi, dans le cas d'un écoulement cisailé simple ($\bar{U}_1 = \bar{U}_1(x_2)$, $U_2=U_3=0$), tous les modèles conduisent à l'égalité des trois composantes diagonales du tenseur des tensions de Reynolds ($R_{11} = R_{22} = R_{33} = 2K/3$) en désaccord avec l'expérience.

Un autre handicap provient de la notion de viscosité turbulente elle-même, qui prédit systématiquement l'annulation des tensions de Reynolds aux points de l'annulation des gradients de vitesse, ce qui également est en désaccord avec certaines expériences.

L'autre limitation des modèles à viscosité turbulente est que ces modèles ne donnent pas des résultats intéressants lorsque l'écoulement présente plusieurs singularités.

Le modèle dit "aux tensions de Reynolds" R-S-M ne présente ces inconvénients, puisqu'il ne fait pas appel à la notion de viscosité turbulente, chacune des six tensions de Reynolds étant déterminée par résolution d'une équation de transport.

L'influence sur les tensions de Reynolds de phénomènes tels que les courbures des lignes de courants, la rotation ou la poussée d'Archimède est directement prise en compte au niveau de ces équations.

V.2.1 LES EQUATIONS AUX TENSIONS DE REYNOLDS

Les tensions de Reynolds ne peuvent être déterminées qu'à partir de leurs équations d'évolution qui s'écrivent:

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + U_m \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} = - \underbrace{\left(R_{im} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_m} + R_{jm} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_m} \right)}_{\pi_{ij}} + \underbrace{\frac{P'}{1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_m} \left[\overline{u_i u_j u_m} + \frac{P'}{\rho} (u_i \delta_{jm} + u_j \delta_{im}) \right]}_{\lambda_{ij}} - \underbrace{2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right)}_{\varepsilon_{ij}}$$

A..MODELISATION DES TERMES DE DISSIPATION VISQUEUSE (ε_{ij})

Pour les grands nombres de Reynolds, la modélisation qui découle de l'hypothèse d'isotropie locale est [16]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \quad i, j = 1, 2 \quad (V-13)$$

- Lorsque l'hypothèse d'isotropie locale ne peut être invoquée, la modélisation généralement utilisée est due à J. ROTTA:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{R_{ij}}{K} \varepsilon \quad i=j=1,2 \quad (V-14)$$

- K. HANJALIK et B. E. LAUNDER ont proposé comme expression valable à tout nombre de Reynolds :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \left[(U - f_s) \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{R_{ij}}{K} f_s \right] \quad i=j=1,2 \quad (V-15)$$

où f_s est une fonction du nombre de Reynolds de la turbulence $R_T = \frac{K^2 \varepsilon}{\nu}$

$$f_s = (1 + A_s R_T)^{-1}$$

B. MODELISATION DES TERMES DE DIFFUSION TURBULENTE (λ_{ij})

Les termes de diffusion dans l'équation de R_{ij} s'écrivent :

$$\lambda_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\underbrace{\overline{u_i u_j u_m} + \frac{P'}{\rho} (\overline{u_i \delta_{jm}} + \overline{u_j \delta_{im}})}_{(*)} - \underbrace{\nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m}}_{(**)} \right]$$

(*) termes à modéliser, (**) termes négligeables à fort Re_T

Tous les termes de diffusion turbulente λ_{ij} sont modélisés ensemble et représentés par:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\overline{u_i u_j u_m} + \frac{P'}{\rho} \overline{u_i \delta_{jm}} + \frac{P'}{\rho} \overline{u_j \delta_{im}} - \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right] \\ & = \frac{\partial}{\partial x_m} \left[C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_n} + \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right] \quad i, j, m, n = 1, 2 \quad (V-16) \end{aligned}$$

C. MODELISATION DES TERMES DE REDISTRIBUTION

Selon R.SCEISTEL[16] on peut faire la décomposition de ϕ_{ij} en:

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^{(1)} + \phi_{ij}^{(2)} + \phi_{ij}^{(P)}$$

où: $\phi_{ij}^{(1)}$ est engendré par des interactions purement turbulentes.

$\phi_{ij}^{(2)}$ est engendré par des interactions entre turbulence et gradient de vitesse moyenne.

$\phi_{ij}^{(P)}$ est une intégrale de surface qui intervient qu'en présence de paroi.

J. C. ROTTA propose la modélisation suivante pour $\phi_{ij}^{(1)}$ (1951):

$$\phi_{ij}^{(1)} = - C_1 \frac{\varepsilon}{K} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right) \quad (V-17)$$

C_1 : est une constante numérique égale à 1,5.

J. C. ROTTA (1951) a abouti à une modélisation pour $\phi_{ij}^{(2)}$:

$$\phi_{ij}^{(2)} = \left(\frac{C_2 + 8}{11} \right) \left(\pi_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) - \left(\frac{8C_2 - 2}{11} \right) \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) - \left(\frac{30C_2 - 2}{55} \right) K \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (V-18)$$

$ij = 1, 2$

C_2 étant une constante numérique égale à 0,4 avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_{ij} = - \left(R_{im} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + R_{jm} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right) \end{array} \right. \quad (V-19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{ij} = - \left(R_{im} \frac{\partial U_m}{\partial x_j} + R_{jm} \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \right) \end{array} \right. \quad (V-20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi = \frac{1}{2} \pi_{mm} = \frac{1}{2} D_{mm} = -R_{mn} \frac{\partial U_m}{\partial x_n} \end{array} \right. \quad (V-21)$$

Une modélisation simplifiée a également été proposée :

$$\phi_{ij}^{(2)} = -C_2 \left(\pi_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) \quad (V-22)$$

C_2 est une constante numérique égale à 0,6.

En pratique l'équation (V-18) est utilisée.

La suggestion de B. E. LAUNDER, G. T. REECE et W. RODDI pour traduire l'influence de la paroi est :

$$\phi_{ij}^{(P)} = \left[C'_1 \frac{\varepsilon}{K} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right) + C'_2 \left(\pi_{ij} - D_{ij} \right) \right] f_p \left(\frac{L}{x_2} \right) \quad (V-23)$$

C'_1 et C'_2 sont des constantes numériques égales respectivement à 0,5 et 0,06

où f_p permet de traduire la décroissance de l'influence de la paroi lorsque l'on s'en éloigne.

L : longueur associée à la turbulence ($L = \frac{K^{3/2}}{\varepsilon}$).

x_2 : la distance à la paroi.

Pour les géométries complexes, il est suggéré de déterminer la distance x_2 par :

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\phi}{S} \quad (V-24)$$

où ϕ est l'angle solide et S la distance à la paroi dans la direction de ϕ .

En remplaçant tout les termes modélisés dans l'équation aux tensions de Reynolds, les équations du modèle R-S-M s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + U_m \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} = & \pi_{ij} - C_1 \frac{\varepsilon}{K} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right) - \frac{(C_2 + 8)}{11} \left(\pi_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) \\
 & - \frac{(8C_2 - 2)}{11} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) - \frac{(30C_2 - 2)}{55} K \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \\
 & - \frac{2}{3} \varepsilon \left[(1 - f_s) \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{R_{ij}}{K} f_s \right] + \left[C'_1 \frac{\varepsilon}{K} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right) + C'_2 (\pi_{ij} - D_{ij}) \right] f_p \left(\frac{L}{x_2} \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_n} + \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right] \quad (V - 25)
 \end{aligned}$$

car on peut écrire:

$$C'_2 (\pi_{ij} - D_{ij}) f_p \left(\frac{L}{x_2} \right) = \left[C'_2 \left(\pi_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) - C'_2 \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) \right] f_p \left(\frac{L}{x_2} \right)$$

d'où:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x_m} \left[C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_n} + \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right] - \left(C_1 - C'_1 f_p \left(\frac{L}{x_2} \right) \right) \frac{\varepsilon}{K} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right) \\
 & - \left(\frac{(C_2 + 8)}{11} - C'_2 f_p \left(\frac{L}{x_2} \right) \right) \left(\pi_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) - \left(\frac{(8C_2 - 2)}{11} C'_2 f_p \left(\frac{L}{x_2} \right) \right) \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) \\
 & - \frac{(30C_2 - 2)}{55} K \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned}$$

on peut les écrire sous la forme:

$$\begin{aligned}
 \frac{DR_{ij}}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_m} \left[C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_n} + \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right] - C_{\phi 1} \frac{\varepsilon}{K} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right) - C_{\phi 2} \left(\pi_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) \\
 & - C_{\phi 3} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) - C_{\phi 4} K \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) + \pi_{ij} \\
 & - \frac{\varepsilon}{K} \left[R_{ij} f_s + \frac{2}{3} (1 - f_s) K \delta_{ij} \right] \quad (V - 26)
 \end{aligned}$$

$$\text{avec: } C_{\phi 1} = C_1 - C'_1 f_p \left(\frac{L}{x_2} \right)$$

$$C_{\phi 3} = \frac{C_2 - 2}{11} + C'_2 f_p \left(\frac{L}{x_2} \right)$$

$$C_{\phi 2} = \frac{C_2 + 8}{11} - C'_2 f_p \left(\frac{L}{x_2} \right)$$

$$C_{\phi 4} = \frac{30C_2 - 2}{55}$$

où:

$$C_1 = 1,5$$

$$C_2 = 0,4$$

$$C'_1 = 0,5$$

$$C'_2 = 0,06$$

La fonction f_p est choisie linéaire de L/x_2 .

$$f_p\left(\frac{L}{x_2}\right) = A_p\left(\frac{K^{3/2}}{\varepsilon \cdot x_2}\right)$$

A_p : est une constante numérique égale 0,33 selon SCHEISTEL [16].

Le modèle R-S-M nécessite la résolution d'une équation pour ε , qui prend une forme un peu différente de celle que l'on utilise avec le modèle K- ε . Avec l'hypothèse des grands nombres de Reynolds, l'équation qui est généralement utilisée s'écrit:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{\varepsilon} \frac{K}{\varepsilon} R_{jm} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + C_{\varepsilon 1} \pi \frac{\varepsilon}{K} - C_{\varepsilon 2} \pi \frac{\varepsilon^2}{K} \quad j,m=1,2 \quad (V-27)$$

Dans l'extension aux faibles nombres de Reynolds proposée par K. HANJALIC et B. E. LAUNDER pour le modèle K- ε , la constante C_{ε} est pondérée par la fonction:

$$f_{\varepsilon 2} = 1 - \frac{0,4}{1,8} \exp\left(\frac{-R_T^2}{36}\right) \quad (V-28)$$

et à fin de s'assurer que le terme de destruction reste borné à la paroi, le rapport ε^2/K est remplacé par:

$$\frac{\varepsilon}{K} \left(\varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_m} \right)^2 \right) \quad m=1,2 \quad (V-29)$$

V.3. LE MODELE AUX TENSIONS DE REYNOLDS ALGEBRIQUE A.S.M. (Algebraic Stress Model)

L'inconvénient du modèle aux tensions de Reynolds est qu'il nécessite la résolution de 4 équations de transport et la description de l'aspect turbulent de l'écoulement (3 équations pour les tensions de Reynolds et l'équation de transport de ε); soit par rapport au modèle K- ε , 2 équation en plus.

Il ne constitue, par conséquent, pas un candidat intéressant quant à notre sélection d'un modèle pour les écoulements bidimensionnels complexes, cependant, en sacrifiant l'aspect pris en compte du transport des tensions de Reynolds, un modèle à deux équations de transport peut être construit, grâce à une modélisation adéquate des termes

de transport qui permet de transformer les 4 équations sur les tensions de Reynolds en simples relations algébriques.

Les avantages de ce modèle appelé "Modèle aux tensions de Reynolds algébriques" (A.S.M.) sont évidents puisque, tout en ne présentant pas les inconvénients d'une modélisation par viscosité turbulente isotrope, le nombre d'équations à résoudre n'est pas plus grand que pour le modèle K-ε, de plus comme pour le modèle aux tensions de Reynolds, l'influence de phénomènes de type courbure des lignes de courant, rotation ou poussée d'Archimède peut être prise en compte naturellement.

Le moyen le plus simple pour transformer les équations d'évolutions des tensions de Reynolds en relation algébriques est de négliger tout les termes faisant intervenir des dérivées partielles.

Pour les équations aux tensions de REYNOLDS :

- les termes de convection sont :

$$\frac{dR_{ij}}{dt} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + U_m \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \quad i, j, m = 1, 2$$

- les termes de diffusion sont :

$$\text{Diff}(R_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} + \gamma \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right) \quad i, j, m, n = 1, 2$$

Pour l'équation d'évolution de K :

- les termes de convection sont :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial t} + U_m \frac{\partial K}{\partial x_m}$$

- les termes de diffusion sont :

$$\text{Diff}(K) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial K}{\partial x_n} + \gamma \frac{\partial K}{\partial x_m} \right) \quad m, n = 1, 2$$

la modélisation proposée par RODI est :

$$\frac{dR_{ij}}{dx_m} - \text{Diff}(R_{ij}) = \frac{R_{ij}}{K} \left(\frac{dk}{dt} - \text{Diff}(K) \right) \quad (\text{V-30})$$

d'où, puisque l'équation de K s'écrit :

$$\frac{dK}{dt} = \pi - \varepsilon + \text{Diff}(K)$$

$$\frac{dK}{dt} - \text{Diff}(K) = \pi - \varepsilon \quad (\text{V-31})$$

On déduit :

$$\frac{dR_{ij}}{dt} - \text{Diff}(R_{ij}) = \frac{R_{ij}}{K} (\pi - \varepsilon) \quad (\text{V-32})$$

Une évolution de l'erreur commise dans la modélisation (IV-50) peut s'obtenir en notant que l'on a pour les termes de convection :

$$\frac{dR_{ij}}{dt} - \frac{R_{ij}}{K} \frac{dK}{dt} = K \frac{d(R_{ij}/K)}{dt} \quad (\text{V-33})$$

Et pour les termes de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left[K \left(C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial(R_{ij}/K)}{\partial x_n} + \gamma \frac{\partial(R_{ij}/K)}{\partial x_m} \right) \right] =$$

$$\text{Diff}(R_{ij}) - \frac{R_{ij}}{K} \text{Diff}(K) - \left(C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial K}{\partial x_n} + \gamma \frac{\partial K}{\partial x_m} \right) \frac{\partial(R_{ij}/K)}{\partial x_m}$$

Soit

$$\text{Diff}(R_{ij}) - \text{Diff}(K) \frac{R_{ij}}{K} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(K \left(C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial(R_{ij}/K)}{\partial x_n} + \gamma \frac{\partial(R_{ij}/K)}{\partial x_m} \right) \right)$$

$$+ \left(C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial K}{\partial x_n} + \gamma \frac{\partial K}{\partial x_m} \right) \frac{\partial(R_{ij}/K)}{\partial x_m} \quad (\text{V-34})$$

La modélisation (IV.50) est donc une approximation qui consiste à négliger les variations des rapports $\frac{R_{ij}}{K}$, par rapport à celle de K, et qui permet de transformer les équations modélisées sur les tensions de Reynolds en :

$$\begin{aligned} \frac{R_{ij}}{K} (\pi - \varepsilon) = & - C\phi_1 \frac{K}{\varepsilon} (R_{ij} - 2/3 K \delta_{ij}) - C\phi_2 (\pi_{ij} - 2/3 \pi \delta_{ij}) \\ & - C\phi_3 (D_{ij} - 2/3 \pi \delta_{ij}) - C\phi_4 K \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & + \pi_{ij} - \frac{\varepsilon}{K} (R_{ij} f_s + 2/3 (1 - f_s) K \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (V-35)$$

où, après réorganisation :

$$\begin{aligned} R_{ij} - 2/3 K \delta_{ij} = & \frac{K}{\varepsilon} \left[\left(\frac{1 - C\phi_2}{C\phi_2 + f_s + \pi/\varepsilon - 1} \right) (\pi_{ij} - 2/3 \pi \delta_{ij}) \right] \\ & - \frac{K}{\varepsilon} \left[\left(\frac{1 - C\phi_3}{C\phi_1 + f_s + \pi/\varepsilon - 1} \right) (D_{ij} - 2/3 \pi \delta_{ij}) \right] \\ & - \left(\frac{1 - C\phi_4}{C\phi_1 + f_s + \pi/\varepsilon - 1} \right) \frac{K^2}{\varepsilon} \left(\frac{\delta \bar{U}_i}{\delta x_j} - \frac{\delta \bar{U}_j}{\delta x_i} \right) \end{aligned} \quad (V-36)$$

On note qu'on peut descendre dans la hiérarchie des modèles de turbulence en un point, en introduisant successivement des hypothèses supplémentaires sur la nature des écoulements. Ainsi, le modèle A.S.M. s'obtient du modèle R.S.M. en supposant que les variations des rapports $\frac{R_{ij}}{K}$ sont faibles. D'une façon similaire, le modèle de longueur de mélange peut se déduire du modèle K - ϵ et A.S.M.

On suppose que :

$$a_{ij} = R_{ij} - 2/3 K\delta_{ij} \quad (IV-37)$$

L'expression des termes π_{ij} , D_{ij} et π en fonction de a_{ij} est :

$$\pi_{ij} = -\left(a_{im} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + a_{jm} \frac{\partial U_i}{\partial x_m}\right) - \frac{2}{3} K \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad (V-38)$$

$$D_{ij} = -\left(a_{im} \frac{\partial U_m}{\partial x_j} + a_{jm} \frac{\partial U_m}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3} K \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad (V-39)$$

$$\pi = \frac{1}{2} \pi_{mm} = \frac{1}{2} D_{mm} = -a_{mn} \frac{\partial U_m}{\partial x_n} \quad (V-40)$$

L'équation V-36 se réécrit :

$$a_{ij} = -\left(\frac{1 - C\phi_2}{C\phi_1 + fs + \frac{\pi}{\epsilon} - 1}\right) \frac{K}{\epsilon} \left(a_{im} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_m} + a_{jm} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} - \frac{2}{3} a_{mn} \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_n} \delta_{ij}\right) \\ + \left(\frac{1 - C\phi_3}{C\phi_1 + fs + \frac{\pi}{\epsilon} - 1}\right) \frac{K}{\epsilon} \left(a_{im} \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_j} + a_{jm} \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_i} - \frac{2}{3} a_{mn} \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_n} \delta_{ij}\right)$$

$$-\frac{2}{3} \left(\frac{1 - C\phi_2 - C\phi_3 + \frac{3}{2}C\phi_4}{C\phi_1 + fs + \frac{\pi}{\varepsilon} - 1} \right) \frac{K^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j, m, n = 1, 2 \quad (V-41)$$

et après réorganisation des termes :

$$\left[\delta_{im}\delta_{jn} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_m} + \Lambda_3 \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_i}}{\Lambda_1} \right) \delta_{jn} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_n} + \Lambda_3 \frac{\partial \bar{U}_n}{\partial x_j}}{\Lambda_1} \right) \delta_{im} - \frac{2}{3} \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_n} \delta_{ij} \right] a_{mn}$$

$$= -\frac{\Lambda_4 K^2}{\Lambda_4 \varepsilon} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j, m, n = 1, 2 \quad (V-42)$$

$$\text{Avec} \quad \Lambda_1 = C\phi_1 + f_s + \frac{\pi}{\varepsilon} - 1$$

$$\Lambda_2 = 1 - C\phi_2$$

$$\Lambda_3 = -C\phi_3$$

$$\Lambda_4 = \frac{2}{3} (1 - C\phi_2 - C\phi_3 + C\phi_4)$$

L'expression (IV.62) met clairement en évidence que le modèle K - ε est une simplification du modèle A.S.M puisque l'expression de tension de Reynolds dans le modèle K - ε s'écrit en fonction de a_{ij} sous la forme :

$$(\delta_{im}\delta_{jn})a_{mn} = -C_\mu f_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j, m, n = 1, 2$$

Notons que le coefficient $\frac{\Lambda_4}{\Lambda_1}$, qui remplace $C_\mu f_\mu$ est maintenant une fonction faisant intervenir le paramètre $\frac{\pi}{\varepsilon}$ au dénominateur, donc on peut dire que le modèle A.S.M est une généralisation de la notion de viscosité turbulente.

L'équation IV.62 peut être écrite sous forme matricielle :

$$\{a\} = -\frac{\Lambda_4 K^2}{\Lambda_1 \varepsilon} [D_T(U, K, \varepsilon)] \{E\}$$

$$\{\mathbf{a}\} = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathbf{E}\} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{Bmatrix}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Le développement de l'équation V-42 donne :

$$i = j = 1$$

$$\begin{aligned} & \left[\delta_{11} \delta_{11} + \frac{K}{\varepsilon} \left[\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right] \delta_{11} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right) \delta_{11} \right. \\ & \left. - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \delta_{11} \right] a_{11} \\ & + \left[\delta_{11} \delta_{12} + \frac{K}{\varepsilon} \left[\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right] \delta_{12} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right) \delta_{11} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \delta_{11} \right] a_{12} \\ & + \left[\delta_{12} \delta_{11} + \frac{K}{\varepsilon} \left[\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right] \delta_{11} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right) \delta_{12} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \delta_{11} \right] a_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\delta_{12} \delta_{12} + \frac{K}{\varepsilon} \left[\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right] \delta_{12} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_2}}{\Lambda_1} \right) \delta_{12} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \delta_{11} \right] a_{22} \\
 & = -\frac{\Lambda_4}{\Lambda_1} \frac{K^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) = -\frac{\Lambda_4}{\Lambda_1} \frac{K^2}{\varepsilon} \cdot 2E_{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i &= 1 \\
 j &= 2
 \end{aligned}$$

$$\left[\delta_{11} \delta_{21} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right) \delta_{21} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_2}}{\Lambda_1} \right) \delta_{11} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \delta_{12} \right] a_{11}$$

$$+ \left[\delta_{11} \delta_{22} + \frac{K}{\varepsilon} \left[\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right] \delta_{21} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_2}}{\Lambda_1} \right) \delta_{11} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \delta_{12} \right] a_{12}$$

$$+ \left[\delta_{12} \delta_{22} + \frac{K}{\varepsilon} \left[\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right] \delta_{22} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_2}}{\Lambda_1} \right) \delta_{12} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \delta_{12} \right] a_{22}$$

$$= -\frac{\Lambda_4}{\Lambda_1} \frac{K^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 i &= 2 \\
 j &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\delta_{21} \delta_{21} + \frac{K}{\varepsilon} \left[\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_2}}{\Lambda_1} \right] \delta_{21} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right) \delta_{21} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \delta_{22} \right] a_{11} \\
 & + \left[\delta_{21} \delta_{22} + \frac{K}{\varepsilon} \left[\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\Lambda_1} \right] \delta_{22} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_2}}{\Lambda_1} \right) \delta_{21} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \delta_{22} \right] a_{12} \\
 & + \left[\delta_{22} \delta_{21} + \frac{K}{\varepsilon} \left[\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_2}}{\Lambda_1} \right] \delta_{21} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \Lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_2}}{\Lambda_1} \right) \delta_{22} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \delta_{22} \right] a_{21} \\
 & + \left[\delta_{22} \delta_{22} + \frac{K}{\varepsilon} \left[\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_2}}{\Lambda_1} \right] \delta_{22} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \Lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_2}}{\Lambda_1} \right) \delta_{22} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \delta_{12} \right] a_{22} \\
 & = - \frac{\Lambda_4 K^2}{\Lambda_1 \varepsilon} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) = - \frac{\Lambda_4 K^2}{\Lambda_1 \varepsilon} \cdot 2 \cdot E_{22}
 \end{aligned}$$

Comme : $\delta_{ij} = 1$ Si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ Si $i \neq j$

Les équations se simplifient :

$$\begin{aligned}
 & \left[1 + \frac{4K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right] a_{11} + \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} a_{12} \\
 & - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \cdot a_{22} = - \frac{\Lambda_4 K^2}{\Lambda_1 \varepsilon} 2E_{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3}{2} \left(\frac{V_2 + V_3}{V_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \left(\frac{2}{2} K \left(\frac{2V_2 - V_3}{V_3} \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{3}{2} K \left(\frac{2V_3 - V_2}{V_2} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) a_{12} \\
 & + \left(1 + \frac{3}{4} K \left(\frac{V_2 + V_3}{V_1} \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) a_{22} = -\frac{V_4}{V_4 K} \cdot 2 \cdot E_{22} \\
 & \frac{K}{V_2} \left(\frac{V_1}{V_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{V_3}{V_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) a_{11} + \left(1 + \frac{K}{V_2 - V_3} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{K}{V_2 + V_3} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \times a_{12} \\
 & + \frac{K}{V_2} \left(\frac{V_1}{V_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{V_3}{V_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) a_{22} = -\frac{V_4}{V_4 K} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{12} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{2K}{V_2 + V_3} \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{2}{1} + \frac{2K}{V_2 + V_3} \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{1}{K} \left(\frac{V_1}{V_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{V_3}{V_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \\ \frac{2}{1} + \frac{2K}{V_2 + V_3} \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{2}{1} + \frac{2K}{V_2 + V_3} \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{1}{K} \left(\frac{V_1}{V_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{V_3}{V_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{K} \left(\frac{V_1}{V_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{V_3}{V_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{K} \left(\frac{V_1}{V_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{V_3}{V_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{K} \left(\frac{V_1}{V_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{V_3}{V_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{V_4}{V_4} \right) \cdot \left(\begin{array}{l} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{array} \right) \times$$

On pose :

$$D_j = \frac{E_j}{K} \left(\frac{V_1}{V_2 + V_3} \right)$$

(V-44-a)

(V-43)

$$I_{ij} = \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{V-44-b})$$

$$S_{ij} = \frac{1}{3} \frac{K}{\varepsilon} \left[\left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{V-44-c})$$

On en déduit la matrice A^{-1}

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 2D_{11} + \frac{1}{2} & -D_{22} & S_{12} \\ -D_{11} & 2D_{22} + \frac{1}{2} & S_{21} \\ I_{21} & I_{12} & I + I_{11} + I_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{V-45})$$

Le modèle A.S.M doit donc être complété par les équations de K et ε ; on utilise pour cela celles du modèle $K - \varepsilon$ étendues aux faibles nombres de Reynolds :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\gamma + \frac{C_\mu f_\mu}{\sigma_k} \frac{K^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + \frac{C_\mu f_u}{2} \frac{K^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)^2 - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\gamma + \frac{C_\mu f_u}{\partial_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon_1} f_{\varepsilon_1} \frac{C_\mu f_u}{2} K \cdot \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)^2 - C_{\varepsilon_2} f_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

V.4. FORMULATION DU MODELE RETENU

Parmi les modèles en un point, le modèle ASM est ce qui satisfait le mieux nos critères de sélection (simplicité et généralité) quant à l'application à des écoulements à géométrie complexe. Il nécessite la résolution des deux équations de transport associées aux grandeurs turbulentes K et ε étendues aux faibles nombre de Reynolds.

Pour la résolution du problème, On effectue la normalisation suivante :

$$x_i \rightarrow \frac{x_i}{L_r}$$

$$t \rightarrow \frac{tU_r}{L_r}$$

$$U_i \rightarrow \frac{U_i}{U_r}$$

$$P \rightarrow \frac{P}{\rho U_r^2}$$

$$\tau \rightarrow \frac{\tau}{\rho U_r^2}$$

$$K \rightarrow \frac{K}{U_r^2}$$

$$\varepsilon \rightarrow \frac{\varepsilon L_r}{U_r^3}$$

Où L_r et U_r désignent respectivement une longueur et une vitesse de référence.

Pour éviter la lourdeur des indices on fait le changement suivant :

$$\begin{array}{ll} x_1 = x & U_1 = U \\ y_2 = y & V_1 = V \end{array}$$

L'expression adimensionnelle des équations à résoudre est :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - R_{xx} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - R_{xy} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - R_{xy} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) - R_{yy} \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

(V-46)

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U \frac{\partial K}{\partial x} + V \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{C_\mu f_\mu K^2}{\delta K \varepsilon} \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{C_\mu f_\mu K^2}{\delta K \varepsilon} \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right] + C_\mu f_\mu \cdot E \cdot \frac{K^2}{\varepsilon} - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{C_\mu f_\mu K^2}{\delta \varepsilon \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{C_\mu f_\mu K^2}{\delta \varepsilon \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + C_\mu f_\mu \cdot C_{\varepsilon_1} f_{\varepsilon_1} \cdot E \cdot K - C_{\varepsilon_2} f_{\varepsilon_2} \cdot \frac{K^2}{\varepsilon}$$

(V-47)

La quantité E est l'invariant du tenseur des taux de déformation moyens :

$$E = 2(E_{ij})^2$$

L'expression des fonctions de pondération f_μ , f_{ε_1} , f_{ε_2} [ge]

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\mu} = \exp \left(\frac{-3.4}{1 + \frac{R_T}{50}} \right) \\ f_{\varepsilon_2} = 1 + \left(\frac{0,05}{f_{\mu}} \right)^3 \\ f_{\varepsilon_2} = 1 - \exp(-R_T^2) \end{array} \right.$$

Les deux nombres Re et R_T sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Re = \frac{U_r \cdot L_r}{\nu} \\ R_T = Re \cdot \frac{K^2}{\varepsilon} \end{array} \right.$$

Le tenseur des contraintes est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{xy} \end{array} \right\} = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} a_{xx} \\ a_{yy} \\ a_{xy} \end{array} \right\}$$

où le vecteur $\{a\}$, regroupant les 03 composantes du tenseur des tensions de Reynolds.

$$\{a\} = -\frac{\Lambda_4}{\Lambda_1} \cdot \frac{K^2}{\varepsilon} [A] \cdot \{E\}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 2D_{11} & -D_{22} & S_{12} \\ -D_{11} & \frac{1}{2} + 2D_{22} & S_{21} \\ I_{21} & I_{12} & 1 + I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) E_{ij}$$

$$I_{ij} = \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) E_{ij} \quad i, j = 1, 3$$

$$S_{ij} = \frac{1}{3} \frac{K}{\varepsilon} \left[\left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_2}{\Lambda_2} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right]$$

Où :

$$\Lambda_1 = C\phi_1 + f_s + \frac{\pi}{\varepsilon} - 1$$

$$\Lambda_2 = 1 - C\phi_2$$

$$\Lambda_3 = -C\phi_3$$

$$\Lambda_4 = \frac{2}{3} (1 - C\phi_2 - C\phi_3) + C\phi_4$$

où f_p est une fonction qui traduit l'influence des parois.

$$f_p = 0,33 \left(\frac{K^{3/2}}{\varepsilon y} \right)^n \quad n=1 \text{ ou } 2.$$

CHAPITRE VI

CHAPITRE VI: MODELISATION MATHEMATIQUE

PATANKAR et Col. ont développé un concept général d'écoulements établis et périodiques. Ces écoulements prennent naissance loin des extrémités des canaux, dont la section transversale varie périodiquement dans le sens du déplacement du fluide. Cette particularité permet de ramener l'étude de ce type d'écoulement à celle d'un module isolé, de longueur égale à la distance entre deux sections identiques, aux extrémités desquelles sont appliquées des conditions aux limites périodiques et comme notre étude est faite pour une conduite systématique, on prend la moitié du domaine.

VI. TRANSFORMATION GEOMETRIQUE

La méthode repose sur l'utilisation d'une transformation, non orthogonale de coordonnées qui change le domaine physique du fluide en domaine rectangulaire de calcul. Les équations différentielles sont transformées aussi en coordonnées (ζ, η) et les dérivées partielles par rapport aux coordonnées cartésiennes X et Y sont remplacées par des dérivées par rapport aux coordonnées (ζ, η) .

On considère les coordonnées (ζ, η) définies par :

$$\zeta = X$$

$$\eta = Y - F(x)$$

X et Y sont les coordonnées

adimensionnelles $\left(\frac{x}{l_r}, \frac{y}{l_r}\right)$

l_r : longueur de référence égale
au rayon inférieur du canal

$F(x)$: l'équation du profil des parois du canal

sous forme adimensionnelles ; $\frac{f(x)}{l_r}$.

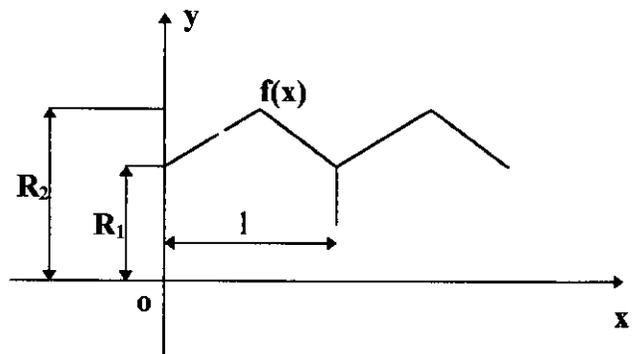


Figure 1

$$f(x) = \begin{cases} \beta x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta (1-x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

β est la pente égale à : $2(R_2 - R_1) / l$

D'où la fonction adimensionnelle $F(x)$ égale :

$$F(x) = \begin{cases} \beta x/l & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta (1-x)/l & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (VI - 1)$$

D'après le système (V-1), nous déduisons le domaine de variation des coordonnées (ζ, η)

$$0 \leq \zeta \leq l/R_1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

Ainsi notre domaine d'écoulement (figure 1) est transformé en un domaine de calcul rectangulaire (Fig. 2).

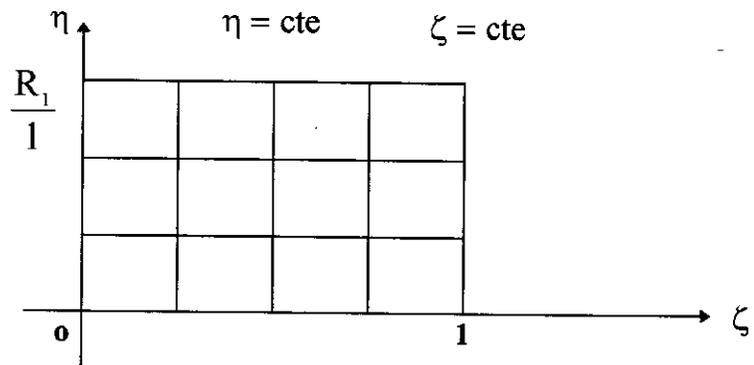


Figure 2 : Domaine rectangulaire de calcul

Les vecteurs unitaires \vec{e}_ζ et \vec{e}_η qui demeurent le long des lignes de la constante ζ et la constante η dans le système en coordonnées physique ne sont pas perpendiculaires et \vec{e}_ζ change la direction avec sa position, alors que \vec{e}_η reste parallèle à \vec{e}_y qui implique que :

$$\vec{e}_\eta = \vec{e}_y$$

Pour déterminer \vec{e}_ζ , considérons le vecteur \vec{n} normal à la ligne de la constante η , le gradient de $\vec{\eta}$ est normal à cette ligne.

On a :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\eta}{|\vec{\nabla}\eta|}$$

avec :

$$\vec{\nabla}\eta = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F' \\ 1 \end{Bmatrix}$$

où : $|\vec{\nabla}\eta| = (1 + (-F')^2)^{1/2} = (1 + F'^2)^{1/2}$

On pose : $\beta = F'$

$$\alpha = (1 + F'^2)$$

On aura : $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\eta}{|\vec{\nabla}\eta|} = \frac{-\beta\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\alpha^{1/2}}$

- Le vecteur \vec{n} et \vec{e}_ζ sont parallèles, alors on a :

$$\vec{n} \cdot \vec{e}_\zeta = 0$$

d'où : $\vec{e}_\zeta = \frac{(\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y)}{\alpha^{1/2}}$

Les composantes de la vitesse dans le nouveau système de coordonnées (ζ, η) sont déterminés comme suit :

$$\vec{V} = V\vec{e}_x + V\vec{e}_y = U_\zeta\vec{e}_\zeta + U_\eta\vec{e}_\eta$$

mais :

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \alpha^{1/2}\vec{e}_\zeta - \beta\vec{e}_\eta \\ \vec{e}_y = \vec{e}_\eta \end{cases}$$

$$\vec{V} = U(\alpha^{1/2}\vec{e}_\zeta - \beta\vec{e}_\eta) + V\vec{e}_\eta$$

$$\vec{V} = U\alpha^{1/2}\vec{e}_\zeta + (V - \beta U)\vec{e}_\eta \quad (\text{V-2})$$

On déduit donc les nouvelles composantes de la vitesse à savoir :

$$U_{\zeta} = U\alpha^{1/2} \quad (\text{V - 3-a})$$

$$U_{\zeta} = V - \beta U \quad (\text{V - 3-b})$$

VI.2. EQUATION DU PROBLEME

...Equation adimensionnelle de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

En introduisant U_{η} dans cette équation, on trouve :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} (U_{\eta} + \beta U) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U_{\eta}}{\partial Y} + \beta \frac{\partial U}{\partial Y} = 0} \quad (\text{V - 4})$$

VI.2.1. EQUATIONS DU MOUVEMENT

Les équations de *Reynolds* adimensionnelles sont :

$$\begin{aligned} \vec{e}_x: \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial X} \right) - R_{11} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) - R_{22} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_y: \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) - R_{12} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - R_{22} \right] \end{aligned}$$

En multipliant ces équations par \vec{e}_x et \vec{e}_y écrits en fonction de \vec{e}_{ζ} et \vec{e}_{η} , on en déduit :

$$\bullet \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \cdot \alpha^{1/2} \vec{e}_{\zeta} - \beta \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \cdot \vec{e}_{\eta}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \alpha^{1/2} \bar{e}_\zeta + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - R_{11} \right] \cdot \bar{e}_\zeta \cdot \alpha^{1/2} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - R_{12} \right] \cdot \bar{e}_\zeta \cdot \alpha^{1/2} + \beta \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \bar{e}_\eta \\
 &- \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - R_{11} \right] \cdot \beta \bar{e}_\eta - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - R_{12} \right] \cdot \beta \bar{e}_\eta \quad (\text{V-5a}).
 \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\partial V}{\partial t} \bar{e}_\eta + \left(U \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \right) \bar{e}_\eta = -\frac{\partial P}{\partial y} \bar{e}_\eta + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - R_{22} \right] \cdot \bar{e}_\eta$$

(V-5 b).

On fait la somme de l'équation (V-5 a) et (V-5 b) et la projection suivant \bar{e}_η et \bar{e}_ζ , on trouve :

$$\bar{e}_\zeta: \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - R_{11} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - R_{12} \right] \quad (\text{V-6 a})$$

$$\begin{aligned}
 \bar{e}_\eta: \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} - \beta \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) &= -\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \beta \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right. \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - R_{22} \right] - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - R_{11} \right] - \beta \cdot \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - R_{12} \right]
 \end{aligned} \quad (\text{V-6 b})$$

En introduisant la composante U_η dans cette dernière équation, on aura :

$$(V = U_\eta + \beta U)$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial U_\eta}{\partial t} + U \frac{\partial U_\eta}{\partial x} + V \frac{\partial U_\eta}{\partial y} + \beta \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \beta \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\
 &= -\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \beta \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} - \beta \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \quad (\text{V-7})
 \end{aligned}$$

où :

$$\tau_{xx} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - R_{11} \quad (\text{V-8-a})$$

$$\tau_{yy} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - R_{22} \quad (\text{V-8-b})$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - R_{12} \quad (\text{V-8-c})$$

Les dérivées partielles par rapport à x, y sont remplacées par les dérivées par rapport à ζ et η .

Dérivées première :

La dérivée est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{V-9})$$

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -F \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{V-10})$$

$$(\text{V-11}).$$

D'après cette notation, les équations deviennent :

Equation	Equation transformée
<p style="text-align: center;">1. Equation de continuité :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U\eta}{\partial y} + \beta \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ <p style="text-align: center;">2. Equation de Reynolds</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\bar{e}_\zeta: \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy}$ • $\bar{e}_\eta: \frac{\partial U\eta}{\partial t} + U \frac{\partial U\eta}{\partial x} + (U\eta + \beta U) \frac{\partial U\eta}{\partial \eta} = -\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \beta \frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} - \beta \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} - \beta \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$ • $\tau_{xx} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - R_{11}$ • $\tau_{xy} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U\eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial x} \right) - R_{12}$ 	<p style="text-align: center;">1. Equation de continuité :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial U\eta}{\partial \eta} = 0$ (VI - 12) • $\bar{e}_\zeta: \frac{\partial U}{\partial t} + U \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + (U\eta + \beta U) \frac{\partial U}{\partial \eta} = -\left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \tau_{xx} - \beta \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \eta}$ (VI - 13) • $\bar{e}_\eta: \frac{\partial U\eta}{\partial t} + U \frac{\partial U\eta}{\partial \zeta} + (U\eta + \beta U) \frac{\partial U}{\partial \eta} = -\left((1 + \beta^2) \frac{\partial P}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \tau_{xy} - 2\beta \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \tau_{yy} - \beta \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \eta} \right]$ (VI - 14) • $\tau_{xx} = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) - R_{11}$ (VI-15- a) • $\tau_{xy} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial U\eta}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U\eta}{\partial \eta} + \beta \left(\frac{\partial V}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right) - R_{12}$

$$\bullet \tau_{yy} = \frac{1}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial U \eta}{\partial y} + 2\beta \frac{\partial U}{\partial y} \right) - R_{22}$$

Equation de l'énergie cinétique turbulente

$$\bullet \frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + (U\eta + \beta U) \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\zeta_u f_u}{\sigma_k} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\zeta_u f_u}{\sigma_k} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \zeta_u f_u \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} + \varepsilon$$

Equation de dissipation ε :

$$\bullet \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + (U\eta + \beta U) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\zeta_u f_u}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\zeta_u f_u}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \zeta_u f_u c_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} E \cdot k + c_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \left[(1 - \beta^2) \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial U \eta}{\partial \zeta} - \beta \cdot \left(\frac{\partial U \eta}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right] - R_{12} \quad (\text{VI-15-b})$$

$$\bullet \tau_{yy} = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U \eta}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) - R_{22} \quad (\text{VI-15-c})$$

$$\bullet \frac{\partial k}{\partial t} + U \left(\frac{\partial k}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) + (U\eta + \beta U) \frac{\partial k}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{c_\mu f_\mu}{\sigma_k} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \times \left(\frac{\partial k}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right] - \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\zeta_u f_u}{\sigma_k} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial k}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\zeta_u f_u}{\sigma_k} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial \eta} \right] + \zeta_u f_u \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} + \varepsilon$$

(VI-16)

Modèle A.S.M

$$\bullet D_{11} = \frac{1k}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\bullet D_{22} = \frac{1k}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\bullet I_{11} = \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

$$\bullet I_{22} = \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\bullet I_{12} = \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

$$\bullet I_{21} = \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} \frac{\partial V}{\partial y} \right)$$

$$\bullet S_{12} = \frac{1}{3} \frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U}{\partial y} + \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_1}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right]$$

$$-\beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{c_u f_u}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{c_u f_u}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right] + c_u f_u c_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} E \cdot k + c_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{VI-17})$$

$$\bullet D_{11} = \frac{1k}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \quad (\text{VI-18-a})$$

$$\bullet D_{22} = \frac{1k}{3\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \left(\frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \quad (\text{VI-18-b})$$

$$\bullet I_{11} = \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \quad (\text{VI-19-a})$$

$$\bullet I_{22} = \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \left(\frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \quad (\text{VI-19-b})$$

$$\bullet I_{12} = \frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} - \beta^2 \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} \left(\frac{\partial U_\eta}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (\text{VI-19-c})$$

$$\bullet I_{21} = \frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} - \beta^2 \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \left(\frac{\partial U_\eta}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (\text{VI-19-d})$$

$$\bullet S_{12} = \frac{1}{3} \frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) - \beta^2 \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_1}{\Lambda_1} \right) \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} + \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \right]$$

$$\bullet S_{21} = \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon} \left[\left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \right]$$

$$\left(\frac{\partial U \eta}{\partial \zeta} + \beta \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U \eta}{\partial \eta} \right) \quad (\text{VI-20-a})$$

$$S_{21} = \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon} \left[\left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \left(\frac{\partial U \eta}{\partial \zeta} + \beta \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U \eta}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_2}{\Lambda_1} - \beta^2 \left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] \quad (\text{V-20 b})$$

CHAPITRE VII

CHAPITRE VII : IMPLANTATION NUMERIQUE

VII.1. INTRODUCTION

Grâce au développement des ordinateurs, la simulation numérique occupe une place de plus en plus importante dans la recherche appliquée ; sans se substituer à l'expérimentation matérielle, elle la prépare et la complète.

L'approche d'un problème par la simulation numérique comporte essentiellement trois étapes. La première est l'établissement d'un modèle mathématique qui comporte souvent, comme dans notre présente étude, des équation différentielles ; l'étude théorique des comportement des solutions de ces équations fournit de précieux renseignements sur la validité du modèle. Dans la deuxième étape, on « discrétise » le problème, c'est-à-dire que l'on approche les équations par un système algébrique fini, linéaire ou non linéaire. La troisième phase consiste à résoudre numériquement le système algébrique.

Chacune de ces étapes contient des difficultés mathématiques spécifiques. Le modèle doit définir un problème mathématique cohérent. La discrétisation doit refléter les propriétés essentielle du modèle (*consistance*) ; de plus, elle doit posséder une propriété spécifique au modèle approché : *la stabilité numérique*. Enfin, le choix d'une méthode de résolution du système algébrique dépendra de la nature et de l'envergure du problème discrétisé.

VII.2. METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Pour résoudre un problème pouvant être exprimé par les équations vues précédemment, il est nécessaire de transformer le système initial traduisant le comportement d'un système physique continu en un système discrétisé algébrique.

La méthode des différences finies est la plus classiquement répandue pour traiter un problème de mécanique des fluides. Elle consiste à remplacer les dérivées partielles apparaissant dans les équations différentielles par des différences finies tirées des développements en séries de TAYLOR, et à les résoudre en chaque point du maillage.

Dans ce chapitre nous allons approcher les équations de NAVIER-STOKES par des méthodes de différences finies. Nous remarquons que la condition d'incompressibilité ne contient pas la pression ($\text{div } V = 0$), et doit être considérée comme une contrainte sur la vitesse. Quelle est la relation entre cette contrainte et le gradient de pression dans les équations de NAVIER-STOKES. Ce problème peut être surmonté par l'utilisation de la méthode de compressibilité artificielle.

VII.3. METHODE DE COMPRESSIBILITE ARTIFICIELLE

VII.3.1. DESCRIPTION DE LA METHODE

Cette méthode a été introduite indépendamment sous formes légèrement différentes par VLADIMIROVA et al (1965), et par CHORIN (1965).

La méthode de CHORIN est établie en écrivant en premier l'équation de continuité perturbée :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C^2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = 0 \quad (\text{VII-1})$$

ou C^2 est une constante arbitraire.

Cette équation n'a pas de sens physique avant que l'état permanent ne soit atteint ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). La contrainte $\text{div } V = 0$ est satisfaite seulement à la convergence.

Cette méthode peut être appelée méthode pseudo-instationnaire car le temps t en jeu n'a pas de sens physique. Le paramètre C^2 doit être choisi pour assurer la convergence c'est-à-dire assurer l'existence de la solution numérique stable du système d'équations à résoudre avec les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes :

$$V = V_0 \quad \text{à } t = t_0$$

$$P = P_0 \quad \text{à } t = t_0$$

avec, V_0 et P_0 arbitraires.

VII.3.2. DISCRETISATION DE LA METHODE

La discrétisation spatiale utilise la maille Marker-And-Cell (MAC) figure 1, introduite par HARLOW et WELSH (1965), en considérant une discrétisation très simple dans le temps. L'approximation des équations de mouvement dans les coordonnées (x , y) est

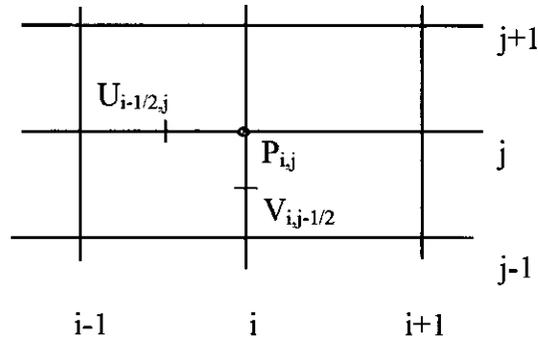


figure 1 Maillage de MAC

suivant \vec{e}_x :

$$\frac{1}{\Delta t} (U_{i+1/2,j}^{n+1} - U_{i+1/2,j}^n) + a_{i+1/2,j}^n + \frac{1}{\rho} \Delta_x^1 P_{i+1/2,j}^n = \frac{1}{\text{Re}} \nabla_h^2 U_{i+1/2,j}^n \quad (\text{VII-2})$$

suivant \vec{e}_y :

$$\frac{1}{\Delta t} (V_{i,j+1/2}^{n+1} - V_{i,j+1/2}^n) + b_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{\rho} \Delta_y^1 P_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{\text{Re}} \nabla_h^2 V_{i,j+1/2}^n \quad (\text{VII-3})$$

et l'équation de continuité :

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{P}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{P}_{i,j}^n) + C^2 (\Delta_x^1 \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} + \Delta_y^1 \mathbf{V}_{i,j}^{n+1}) = 0 \quad (\text{VII - 4})$$

les opérateurs Δ_x^1, Δ_y^1 et ∇_h^2 sont définis par :

$$\Delta_x^1 f_{l,m} = \frac{1}{\Delta x} (f_{l+1/2,m} - f_{l-1/2,m})$$

$$\Delta_y^1 f_{l,m} = \frac{1}{\Delta y} (f_{l,m+1/2} - f_{l,m-1/2})$$

$$\nabla_h^2 f_{l,m} = \Delta_{xx} f_{l,m} + \Delta_{yy} f_{l,m} = (\Delta_x^1 \Delta_x^1 + \Delta_y^1 \Delta_y^1) f_{l,m}$$

ou

$$\Delta_{xx} f_{l,m} = \frac{f_{l+1,m} - 2f_{l,m} + f_{l-1,m}}{\Delta x^2}$$

$$\Delta_{yy} f_{l,m} = \frac{f_{l,m+1} - 2f_{l,m} + f_{l,m-1}}{\Delta y^2}$$

les termes $\mathbf{a}_{i+1/2,j}^n$ et $\mathbf{b}_{i,j+1/2}^n$ sont définis par :

$$\mathbf{a}_{i+1/2,j}^n = \mathbf{U}_{i+1/2,j}^n \Delta_x^0 \mathbf{U}_{i+1/2,j}^n + \mathbf{V}_{i+1/2,j}^n \Delta_y^0 \mathbf{U}_{i+1/2,j}^n \quad (\text{VII - 5})$$

$$\mathbf{b}_{i,j+1/2}^n = \mathbf{U}_{i,j+1/2}^n \Delta_x^0 \mathbf{U}_{i,j+1/2}^n + \mathbf{V}_{i,j+1/2}^n \Delta_y^0 \mathbf{V}_{i,j+1/2}^n \quad (\text{VII - 6})$$

où

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i,j+1/2} = \frac{1}{4} (\mathbf{U}_{i+1/2,j} + \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2} + \mathbf{U}_{i-1/2,j+1/2} + \mathbf{U}_{i-1/2,j}) \quad (\text{VII - 7})$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_{i+1/2,j} = \frac{1}{4} (\mathbf{V}_{i+1,j+1/2} + \mathbf{V}_{i,j+1/2} + \mathbf{U}_{i,j-1/2} + \mathbf{V}_{i+1,j-1/2}) \quad (\text{VII - 8})$$

$$\Delta_x^0 f_{l,m} = \frac{1}{2x} (f_{l+1,m} - f_{l-1,m})$$

$$\Delta_y^0 f_{l,m} = \frac{1}{2y} (f_{l,m+1} - f_{l,m-1})$$

VII.3.3. TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES

Soit Γ la limite du domaine de calcul, $V_{\Gamma}=(U_{\Gamma},V_{\Gamma})$. lorsqu'on utilise la maille MAC, la limite Γ se situe comme montré sur la figure 2 :

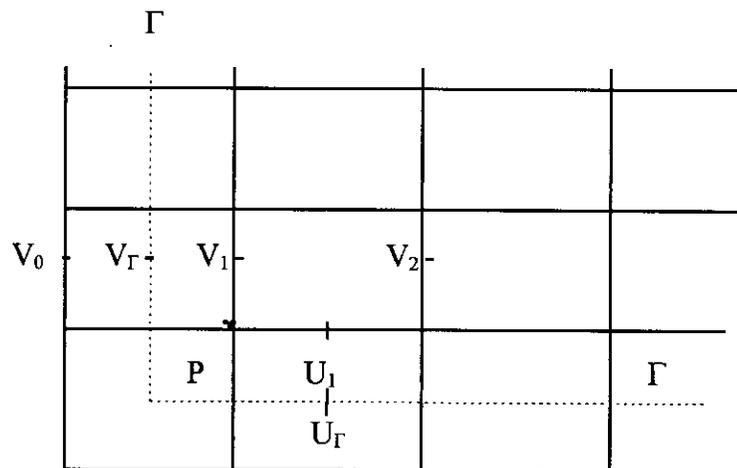


figure 2- Maille MAC, près de la limite

La maille MAC est bien adaptée pour la pression mais, d'autre part elle présente quelque désavantages concernant la vitesse. Comme vue sur la figure 2, des difficultés apparaissent quand les vitesses V_1 et U_1 sont calculées; par exemple si la vitesse V_1 est calculée à partir de l'équation (V - 3), les approximations de $b(U,V)$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ entraînent la valeur V_0 qui se trouve en dehors du domaine de calcul. Cette valeur peut être définie par plusieurs manières.

La première technique consiste à écrire, la vitesse V_{Γ} sur Γ comme la valeur moyenne de deux vitesses V_0 et V_1 , soit:

$$V_0 = 2 V_{\Gamma} - V_1 \tag{VII-9}$$

c'est à dire, V_0 est définie par une extrapolation linéaire.

La deuxième technique est partiellement identique à la précédente. Elle consiste en l'approximation des dérivées au point 1 (figure -2) avec les différences décentrées de premier ordre. Donc pour la dérivée de premier ordre on a:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right|_1 = \frac{1}{2\Delta x} (V_2 + V_1 + 2V_r) \quad (\text{VII-10})$$

et pour la dérivée du second ordre on a:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} \right|_2 = \frac{4}{3\Delta x} (V_2 - 3V_1 + V_r) \quad (\text{VII-11})$$

En fait, du point de vue programmation, au point 1 on peut utiliser l'approximation centrée générale et les formules (V - 10) et (V - 11) pour définir la valeur extérieur V_0 :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right|_1 = \frac{(V_2 - V_1)}{2\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} (V_2 + V - 2V_r) \quad (\text{VII-12})$$

cette égalité donne une valeur V_0 identique à l'équation (V - 9).

De la même manière, l'équation :

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} \right|_1 = (V_2 - 2V_1 + V_0) \frac{1}{\Delta x^2} = \frac{4}{3\Delta x^2} (V_2 - V_1 + 2V_r)$$

donne :

$$V_0 = \frac{1}{3} (V_2 - 6V_1 + 8V_r) \quad (\text{VII-13})$$

Finalement, si une différence décentrée de second ordre de est utilisé, nous aurons les formules :

$$V_0 = \frac{1}{3} (V_2 - 6V_1 + 8V_r) \quad \text{pour } \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \quad (\text{VII-14})$$

et

$$V_0 = \frac{1}{5} (V_3 - 5V_2 + 15V_1 - 16V_r) \quad \text{pour } \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} \quad (\text{VII-15})$$

Généralement, de bons résultats sont obtenus par les approximation en trois points (VII - 14) pour $\frac{\partial V}{\partial x}$ et pour $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$.

On peut déterminer les valeurs fictives d'une autre manière en considérant chaque frontière (limite) à part :

A. VALEURS FICTIVES A L'AXE :

Pour raison de symétrie, on a :

$$V = 0 \text{ d'où } U_{\eta} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0$$

d'où :

$$U_{\eta \ i,-1/2} = -U_{\eta \ i,1/2}$$

$$U_{\eta \ i,-1} = -U_{\eta \ i,1}$$

$$U_{i,-1/2} = -U_{i,1/2}$$

$$U_{i,-1} = -U_{i,1}$$

$$P_{i,-1/2} = -P_{i,1/2}$$

$$P_{i,-1} = -P_{i,1}$$

B. VALEURS FICTIVES A LA PAROI :

A la paroi, on a la condition suivante :

$$U = V = U_{\eta} = 0$$

d'où :

$$U_{\eta \ i,n+1/2} = -U_{\eta \ i,n-1/2}$$

$$U_{\eta \ i,n+1} = -U_{\eta \ i,n-1}$$

$$U_{i,n+1/2} = -U_{i,n-1/2}$$

$$U_{i,n+1} = -U_{i,n-1}$$

C- VALEURS FICTIVES A L'AMONT :

Pour raison de périodicité de l'écoulement, on a :

$$U_{-1,j} = U_{n-1,j}$$

$$U_{-1/2,j} = U_{n-1/2,j}$$

$$U_{\eta-1,j} = U_{\eta n-1,j}$$

$$U_{\eta-1/2,j} = U_{\eta n-1/2,j}$$

$$P_{-1,j} = P_{n-1,j}$$

$$P_{-1/2,j} = P_{n-1/2,j}$$

D. VALEURS FICTIVES A L'AVANT:

En appliquant la condition de périodicité, on a :

$$U_{n+1,j} = U_{1,j}$$

$$U_{n+2,j} = U_{1/2,j}$$

$$U_{\eta n+1,j} = U_{\eta 1,j}$$

$$U_{\eta n+2,j} = U_{\eta 1/2,j}$$

$$P_{n+1,j} = P_{1,j}$$

$$P_{n+2,j} = P_{1/2,j}$$

Les équations de notre problème en coordonnées (ξ, η) seront discrétisées suivant le schéma H.A.C. Les équations de mouvement (VII-13) et (VII-14) seront donc écrites comme suit :

suitant e_ξ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} \left(U_{i+1/2,j}^{n+1} - U_{i+1/2,j}^n \right) + \frac{1}{\Delta \xi} \left(P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n \right) - \frac{\beta}{\Delta \eta} \left(P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n \right) \\
 &= -U_{i+1/2,j}^n \left[\frac{1}{2\Delta \xi} \left(U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n \right) - \beta \frac{1}{2\Delta \eta} \left(U_{i+1/2,j+1}^n - U_{i+1/2,j-1}^n \right) \right] \\
 & - \left(\tilde{U}_{\bar{m}+1/2,j}^n + \beta U_{i+1/2,j}^n \right) \left(\frac{1}{2\Delta \eta} \right) \left(U_{i+1/2,j+1}^n - U_{i+1/2,j-1}^n \right) \\
 & + \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\tau_{xx,i+1,j}^n - \tau_{xx,i-1,j}^n \right) - \frac{\beta}{2\Delta \eta} \left(\tau_{xx,i,j+1}^n - \tau_{xx,i,j-1}^n \right) \\
 & + \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\tau_{xy,i,j+1}^n - \tau_{xy,i,j-1}^n \right) \quad \text{(VII-16-a)}
 \end{aligned}$$

suitant e_η :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} \left(U_{\bar{m},j+1/2}^{n+1} - U_{\bar{m},j+1/2}^n \right) + (1 + \beta^2) \left(\frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right) - \beta \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta \xi} \\
 &= -\tilde{U}_{i,j+1/2}^n \left[\frac{1}{2\Delta \xi} \left(U_{\bar{m}+1,j+1/2}^n - U_{\bar{m}-1,j+1/2}^n \right) \right] - \left(U_{\bar{m},j+1/2}^{n+1} - \beta \tilde{U}_{i,j+1/2}^n \right) \frac{1}{2\Delta \eta} \left(U_{\bar{m},j+3/2}^n - U_{\bar{m},j-1/2}^n \right) \\
 & + \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\tau_{xy,i+1,j+1/2}^n - \tau_{xy,i-1,j+1/2}^n \right) - \frac{3}{\Delta \eta} \left(\tau_{xy,i,j+3/2}^n - \tau_{xy,i,j-1/2}^n \right) \quad \text{(VII-16-b)}
 \end{aligned}$$

Les équations de τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} seront définies comme suit :

$$\tau_{xx} = \frac{2}{R_e} E_{11} - R_{11}$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{R_e} E_{22} - R_{22}$$

$$\tau_{xy} = \frac{2}{R_e} E_{12} - R_{12}$$

$$\begin{aligned}
 E11_{i,j}^n &= \frac{1}{2\Delta\xi} (U_{i+1/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) \\
 E22_{i,j}^n &= \frac{1}{2\Delta\eta} (U_{\eta i,j+3/2}^n - U_{\eta i,j-1/2}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\xi} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) \\
 E12_{i,j}^n &= \frac{1}{2} \left[\frac{1-\beta^2}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) + \frac{1}{2\Delta\xi} (U_{\eta i+3/2,j}^n - U_{\eta i-1/2,j}^n) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{\eta i,j+3/2}^n - U_{\eta i,j-1/2}^n) + \frac{\beta}{2\Delta\xi} (U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) \right]
 \end{aligned}$$

$$E = 2(E11^2 + E22^2 + E12^2)$$

L'équation de l'énergie cinétique K (VII-16) sera discrétisée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta t} (K_{i,j}^{n+1} - K_{i,j}^n) &= -U_{i+1/2,j}^n \left[\frac{1}{2\Delta\xi} (K_{i+1,j}^n - K_{i-1,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (K_{i,j+1}^n - K_{i,j-1}^n) \right] \\
 &- (U_{\eta i,j+1/2}^n + \beta U_{i,j+1/2}^n) \frac{1}{2\Delta\eta} (K_{i,j+1}^n - K_{i,j-1}^n) + \frac{1}{2\Delta\xi} (a_{i+1,j}^n - a_{i-1,j}^n) \\
 &- \frac{\beta}{2\Delta\eta} (a_{i,j+1}^n - a_{i,j-1}^n) + \frac{1}{2\Delta\eta} (b_{i,j+1}^n - b_{i,j-1}^n) + c_\mu f_\mu E_{i,j} \frac{K_{i,j}^2}{\varepsilon_{i,j}} - \varepsilon_{i,j}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_{i,j}^n &= \left[\frac{1}{R_e} + \left(\frac{c_\mu f_\mu K_{i,j}^2}{\sigma_K \varepsilon_{i,j}^n} \right) \right] \left[\frac{1}{2\Delta\xi} (K_{i+1,j}^n - K_{i-1,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (K_{i,j+1}^n - K_{i,j-1}^n) \right] \\
 b_{i,j}^n &= \left[\frac{1}{R_e} + \left(\frac{c_\mu f_\mu K_{i,j}^2}{\sigma_K \varepsilon_{i,j}^n} \right) \right] \left[\frac{1}{2\Delta\eta} (K_{i,j+1}^n - K_{i,j-1}^n) \right]
 \end{aligned}$$

L'équation du taux de dissipation ε (VII-17) sera discrétisée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta t} (\varepsilon_{i,j}^{n+1} - \varepsilon_{i,j}^n) &= -U_{i+1/2,j}^n \left(\frac{1}{2\Delta\xi} (\varepsilon_{i+1,j}^n - \varepsilon_{i-1,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (\varepsilon_{i,j+1}^n - \varepsilon_{i,j-1}^n) \right) \\
 &- (U_{\eta i,j+1/2}^n + \beta U_{i+1/2,j}^n) \frac{1}{2\Delta\eta} (\varepsilon_{i,j+1}^n - \varepsilon_{i,j-1}^n) + \frac{1}{2\Delta\xi} (c_{i+1,j}^n - c_{i-1,j}^n) \\
 &- \frac{\beta}{2\Delta\eta} (c_{i,j+1}^n - c_{i,j-1}^n) + \frac{1}{2\Delta\eta} (D_{i,j+1}^n - D_{i,j-1}^n) + c_\mu f_\mu c_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} E_{i,j} K_{i,j} - c_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathbf{c}_{i,j}^n = \left(\frac{1}{R_e} + \frac{c_\mu f_\mu K_{i,j}^{n^2}}{\sigma_\varepsilon \varepsilon_{i,j}^n} \right) \left[\frac{1}{2\Delta\xi} (\varepsilon_{i+1,j}^n - \varepsilon_{i-1,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (\varepsilon_{i,j+1}^n - \varepsilon_{i,j-1}^n) \right] \\ \mathbf{D}_{i,j}^n = \left(\frac{1}{R_e} + \frac{c_\mu f_\mu K_{i,j}^{n^2}}{\sigma_\varepsilon \varepsilon_{i,j}^n} \right) \left[\frac{1}{2\Delta\eta} (\varepsilon_{i,j+1}^n - \varepsilon_{i,j-1}^n) \right] \end{cases}$$

Les composantes de la matrice A (VI-18) seront discrétisées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \left[\frac{1}{2\Delta\xi} (U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) \right] \\ D_{22} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \left[\frac{1}{2\Delta\eta} (U_{\eta i,j+3/2}^n - U_{\eta i,j-1/2}^n) + \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n) \right] \\ I_{11} &= \frac{K_{i,j}^n}{\varepsilon_{i,j}^n} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \left[\frac{1}{2\Delta\xi} (U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) \right] \\ I_{22} &= \frac{K_{i,j}^n}{\varepsilon_{i,j}^n} \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \left[\frac{1}{2\Delta\eta} (U_{\eta i,j+3/2}^n - U_{\eta i,j-1/2}^n) + \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n) \right] \\ I_{12} &= \frac{K_{i,j}^n}{\varepsilon_{i,j}^n} \left[\left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} - \beta^2 \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \frac{1}{2\Delta\eta} (U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n) + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} \left(\frac{1}{2\Delta\xi} (U_{\eta i+3/2,j}^n - U_{\eta i-1/2,j}^n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{\eta i,j+3/2}^n - U_{\eta i,j-1/2}^n) + \frac{\beta}{2\Delta\xi} (U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) \right) \right] \\ \pi_{i,j} &= - \left[R11_{i,j} \left[\frac{1}{2\Delta\xi} (U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) \right] \right. \\ &\quad + R22_{i,j} \left[\frac{1}{2\Delta\eta} (U_{\eta i,j+3/2}^n - U_{\eta i,j-1/2}^n) + \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) \right] \\ &\quad + R12_{i,j} \left[\frac{1}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) + \frac{1}{2\Delta\xi} (U_{\eta i+3/2,j}^n - U_{\eta i-1/2,j}^n) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{\eta i,j+3/2}^n - U_{\eta i,j-1/2}^n) + \frac{\beta}{2\Delta\xi} (U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta^2}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) \right) \right] \end{aligned}$$

$$I21_{i,j} = \frac{K_{i,j}^n}{\varepsilon_{i,j}^n} \left[\left(\frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} - \beta^2 \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \frac{1}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) + \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \left(\frac{1}{2\Delta\xi} (U_{\eta i+3/2,j}^n - U_{\eta i-1/2,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{\eta i,j+3/2}^n - U_{\eta i,j-1/2}^n) + \frac{\beta}{2\Delta\xi} (U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) \right) \right]$$

$$S12_{i,j} = \frac{1}{3} \frac{K_{i,j}^n}{\varepsilon_{i,j}^n} \left[\left(\left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) - \beta^2 \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \right) \frac{1}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) + \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \left(\frac{1}{2\Delta\xi} (U_{\eta i+3/2,j}^n - U_{\eta i-1/2,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{\eta i,j+3/2}^n - U_{\eta i,j-1/2}^n) + \frac{\beta}{2\Delta\xi} (U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) \right) \right]$$

$$S21_{i,j} = \frac{1}{3} \frac{K_{i,j}^n}{\varepsilon_{i,j}^n} \left[\left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \left(\frac{1}{2\Delta\xi} (U_{\eta i+3/2,j}^n - U_{\eta i-1/2,j}^n) + \frac{\beta}{2\Delta\xi} (U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\eta} (U_{\eta i,j+3/2}^n - U_{\eta i,j-1/2}^n) \right) + \left(\frac{2\Lambda_3 - \Lambda_2}{\Lambda_1} - \beta^2 \left(\frac{2\Lambda_2 - \Lambda_3}{\Lambda_1} \right) \right) \frac{1}{2\Delta\eta} (U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n) \right]$$

La discrétisation de l'équation de continuité perturbée donne :

$$\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} + C^2 \left[\frac{1}{\Delta\xi} (U_{i+1/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n) + \frac{1}{\Delta\eta} (U_{\eta i,j+1/2}^{n+1} - U_{\eta i,j-1/2}^{n+1}) \right] = 0$$

CHAPITRE VIII

CHAPITRE VIII: TESTS DE VALIDATION

VIII.1. INTRODUCTION

Après avoir élaboré un programme de résolution des équations de NAVIER-STOKES, il s'agit à présent de valider la méthodologie adoptée.

Pour cela, nous allons utiliser deux tests de validation :

- le premier consiste à comparer les résultats obtenus pour un écoulement laminaire entre deux plaques parallèles au profil théorique de la vitesse. en effet nous disposons dans ce cas de résultats exacts obtenus analytiquement (résolution directe des équations).
- en régime turbulent il n'existe pas de solution analytique, mais de nombreux résultats expérimentaux sont disponibles. Pour notre étude nous utiliserons les valeurs expérimentales de COMTE-BELLOT[11] et les résultats numériques de M.JAEGER [11]. Cela constituera notre second test de validation.

VIII.2. VALIDATION POUR UN ECOULEMENT LAMINAIRE

Le graphique ci-dessous (Figure VIII.1) représente la superposition de la courbe théorique pour un écoulement entre deux plaques parallèles en régime laminaire ($Re = 900$) et de la courbe obtenue à partir de nos résultats numériques.

On constate que les résultats numériques sont proches des valeurs de la courbe analytique. Le modèle mathématique répond de manière très satisfaisante pour l'écoulement laminaire. Nous pouvons à présent procéder au test pour l'écoulement turbulent.

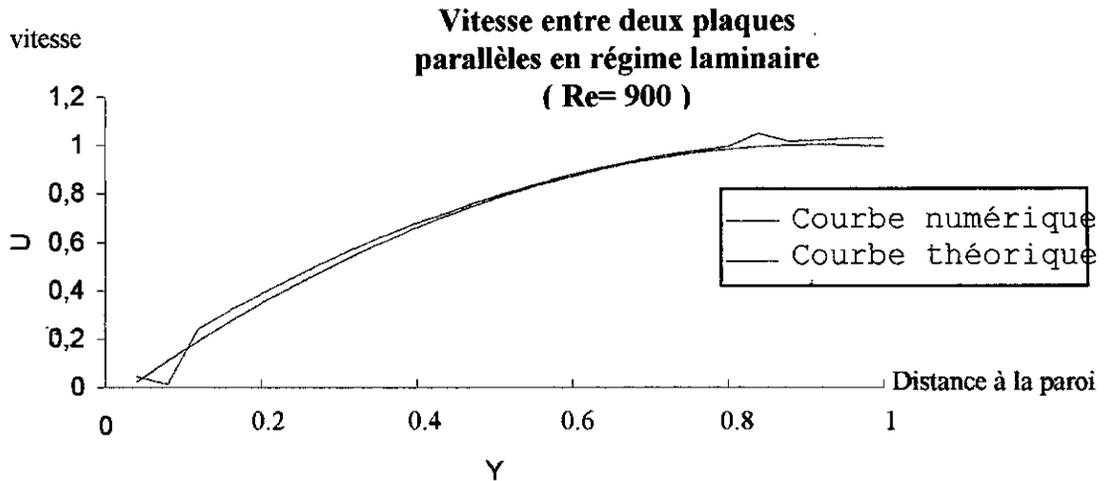


Figure VIII.1

VIII.3. VALIDATION POUR UN ECOULEMENT TURBULENT

Le graphique ci-dessous (Figure VIII.2) représente la superposition de la courbe théorique pour un écoulement laminaire entre deux plaques parallèles et de la courbe obtenue à partir de nos résultats numériques.

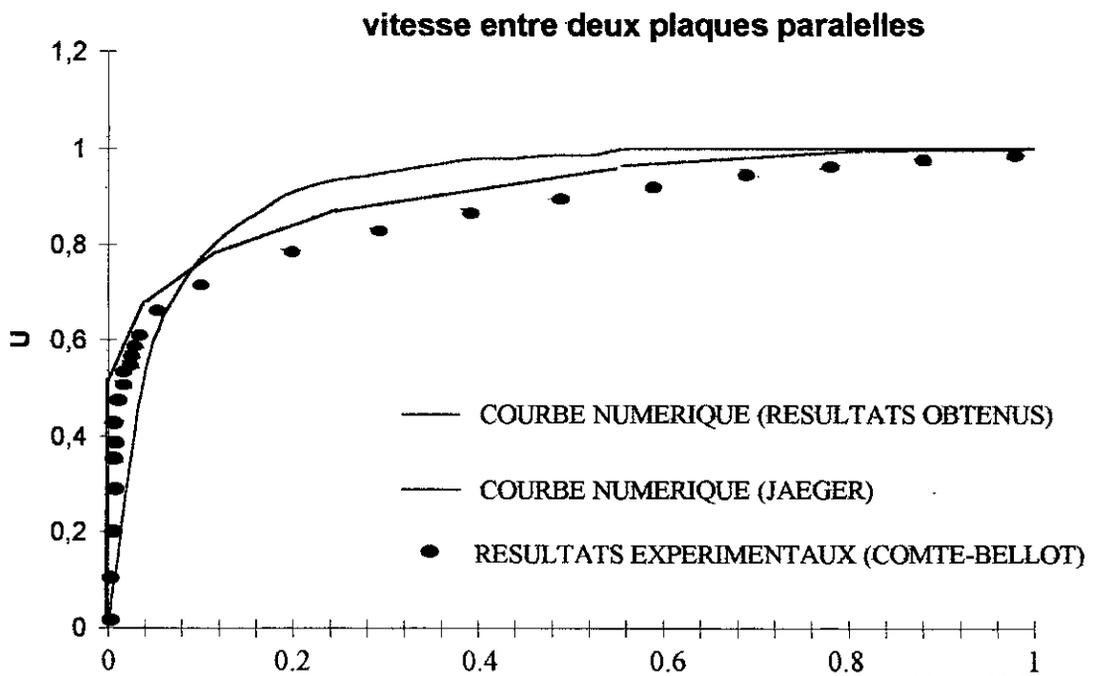


Figure VIII.2 : Profil de la vitesse pour un écoulement entre deux plaques parallèles

Nous remarquons d'après le graphique ci-dessus que les résultats numériques du programme sont proches des valeurs de la courbe de JAEGER ainsi que des résultats de COMTE-BELLOT.

Remarque : dans le cas d'un écoulement turbulent dans un conduit à motif périodique (bêta $\neq 0$), il n'existe pas de résultats sur lesquelles on pourrait s'appuyer pour valider nos résultats.

VIII.4. CONCLUSION

Les tests de validation que nous avons fait subir aux obtenus sont passés avec succès. En régime laminaire, la courbe théorique et la courbe obtenue se chevauchent quasiment. En régime turbulent, la comparaison avec des résultats expérimentaux (COMTE-BELLOT[11]) et des résultats calculés (M. JAEGER[11]) s'est révélée très satisfaisante. Cela nous conforte quant à la qualité du modèle. En effet, il faut savoir que nous ne disposons d'aucun moyen pour juger des résultats d'un écoulement dans un conduit à motif périodique du type divergent - convergent.

CHAPITRE IX

CHAPITRE IX : APPLICATION ET ANALYSE DES RESULTATS

IX.1. INTRODUCTION

Après avoir validé le modèle élaboré, il s'agit maintenant de l'appliquer à un écoulement turbulent dans un conduit à motif périodique du type divergent - convergent, puis d'interpréter les résultats obtenus.

IX.2. APPLICATION

Dans cette phase, nous avons développé un logiciel convivial permettant de modifier aisément les paramètres intervenant dans le modèle:

Bêta: angle de la paroi à l'axe (en degré) .

C : coefficient de compressibilité artificielle (adimensionnel).

U_{ref} : vitesse de référence (ms^{-1}).

Re : nombre de Reynolds (adimensionnel).

n x m : maillage.

t : pas de temps (adimensionnel) .

O : nombre maximal d'itérations.

Epsilon: précision du test de convergence.

Les résultats fournis par le logiciel sont:

U: vitesse longitudinale.

U_{η} : vitesse transversale.

P: pression.

K: énergie cinétique turbulente.

ϵ : taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

ν_T : viscosité turbulente.

Nous allons présenter les résultats obtenus pour l'application suivante:

le fluide ayant fait l'objet du calcul est l'eau $\nu = 1,6.10^{-6}$

Bêta = 30° (angle de la paroi à l'axe).

$C = 15$ (coefficient de compressibilité artificielle).

$U_{ref} = 0.15$ (vitesse de référence).

Le nombre de Reynolds $Re = 10\ 000$

$n \times m = 100 \times 100$ (maillage).

Les résultats sont obtenus à 5000 itérations, avec une précision de 10^{-5} .

Etant donné qu'il n'existe pas de règle pour le choix du coefficient de compressibilité artificielle, nous avons été amenés à exécuter les calculs de très nombreuses fois pour obtenir un coefficient C qui donne des résultats que nous avons jugés acceptables ($|U^{n+1} - U^n| < 10^{-5}$).

IX.3. ANALYSE DES RESULTATS

Tous les paramètres ne seront pas étudiés. En effet, les variations de U_η et de la pression sont très délicates à expliquer. Nous allons présenter les graphes des paramètres retenus aux différents points significatifs du conduit: à l'axe, à la paroi, aux rétrécissements, à l'élargissement. Nous ferons suivre chaque groupe de graphes par leurs commentaires.

Figure IX-1:vitesse U vers la paroi

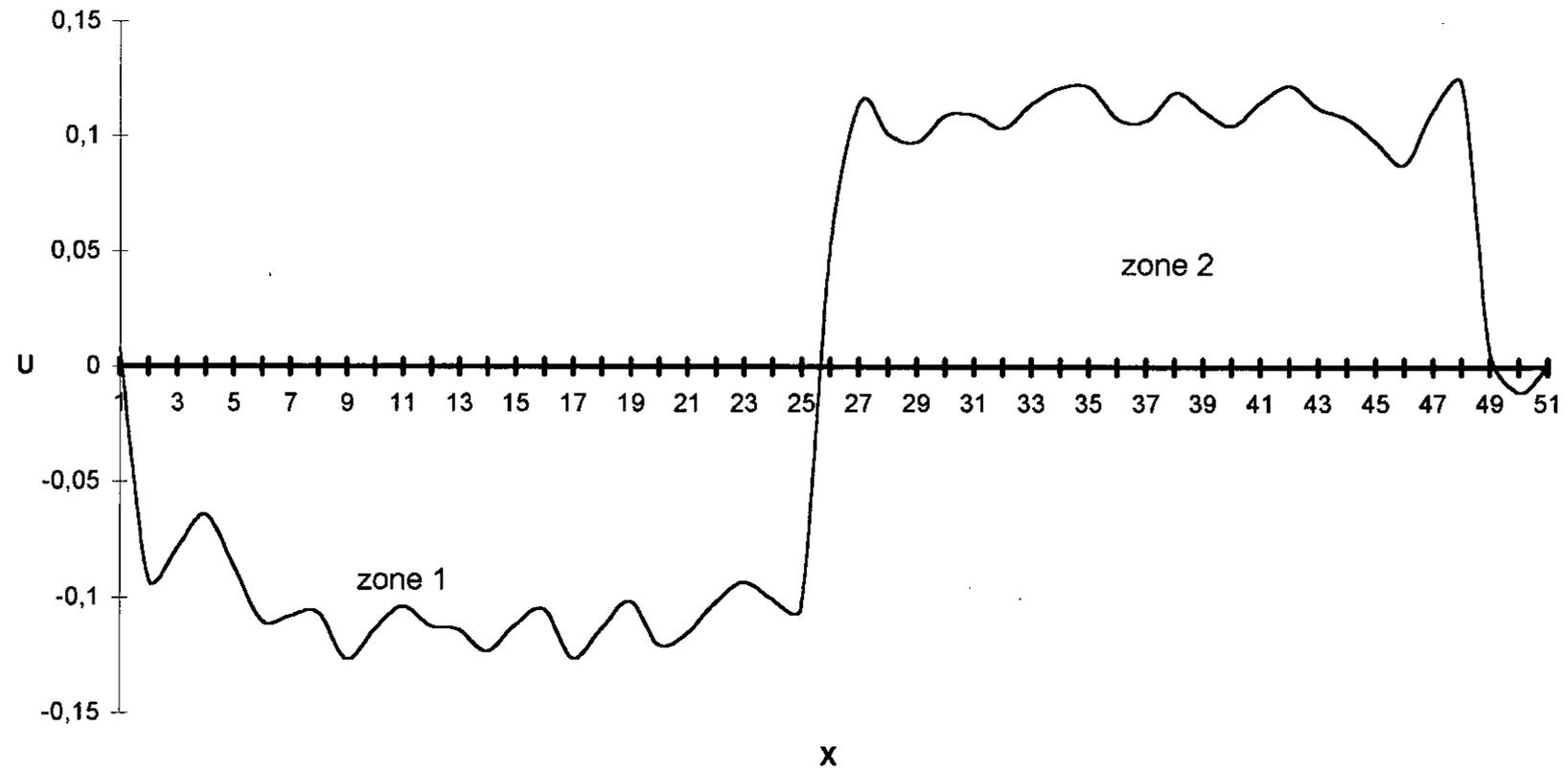
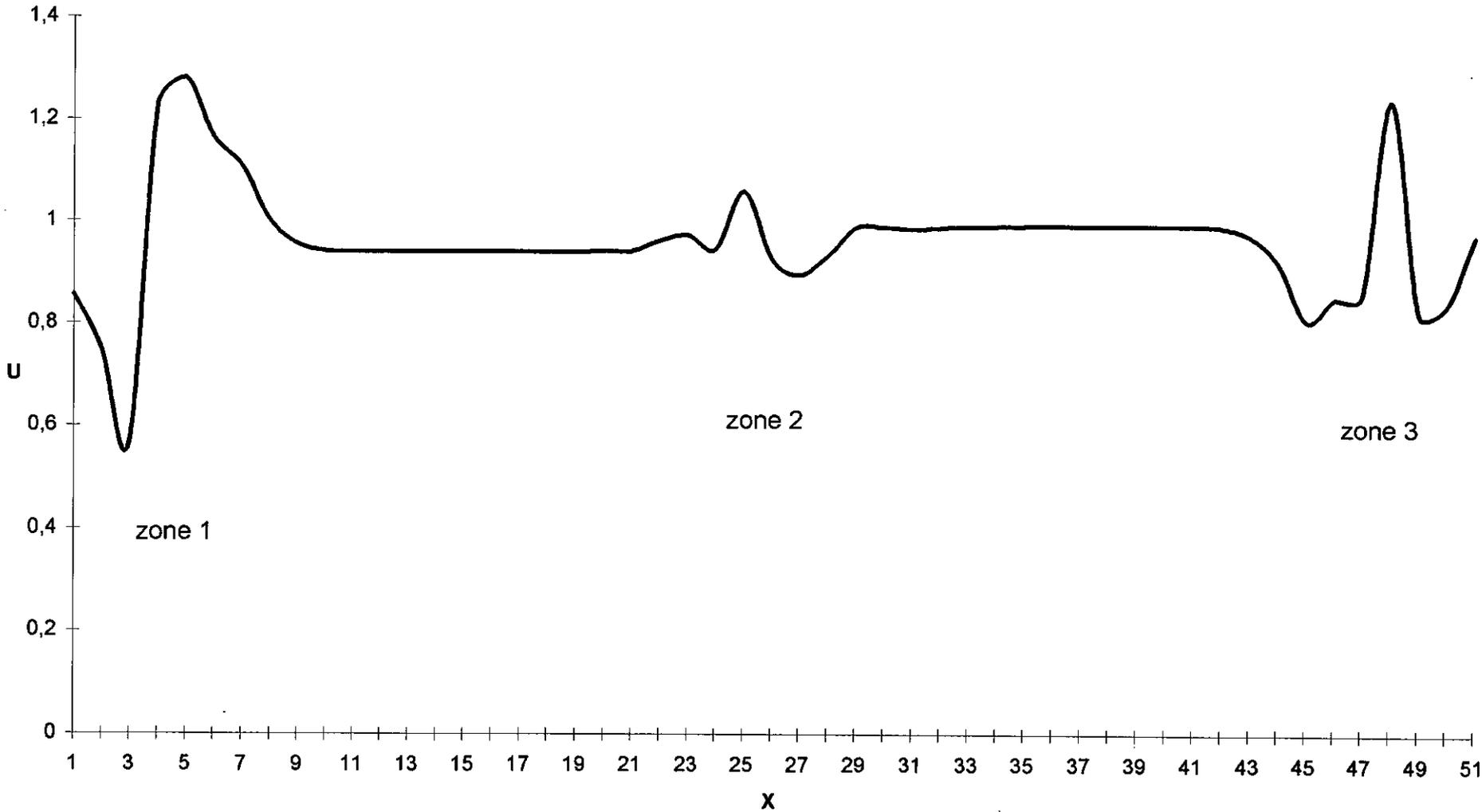


Figure IX-2:vitesse U vers l'axe



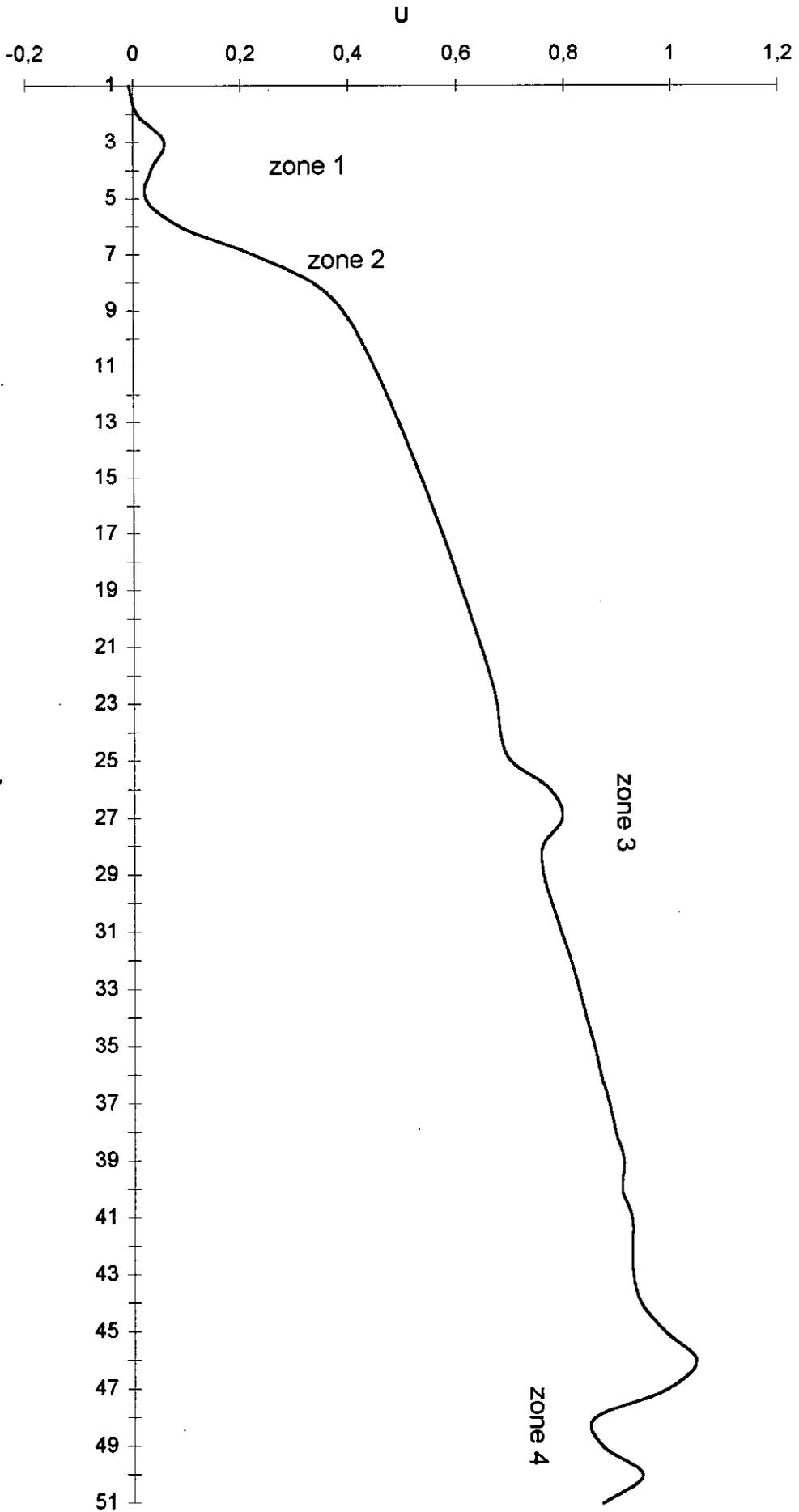


Figure IX-3: vitesse U au rétrécissement

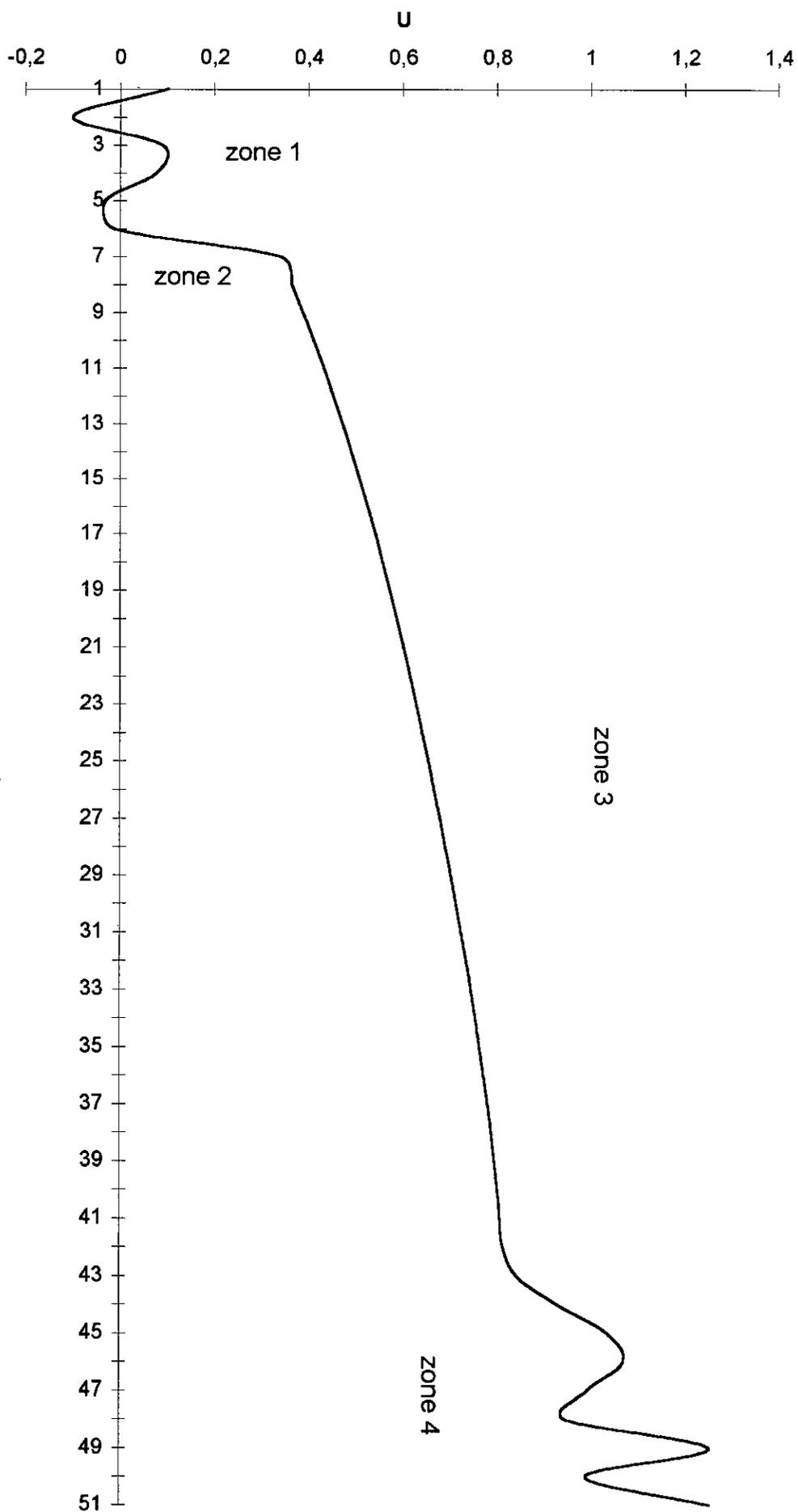


Figure IX-4: vitesse U à l'élargissement

Y

zone 4

zone 1

zone 2

zone 3

U

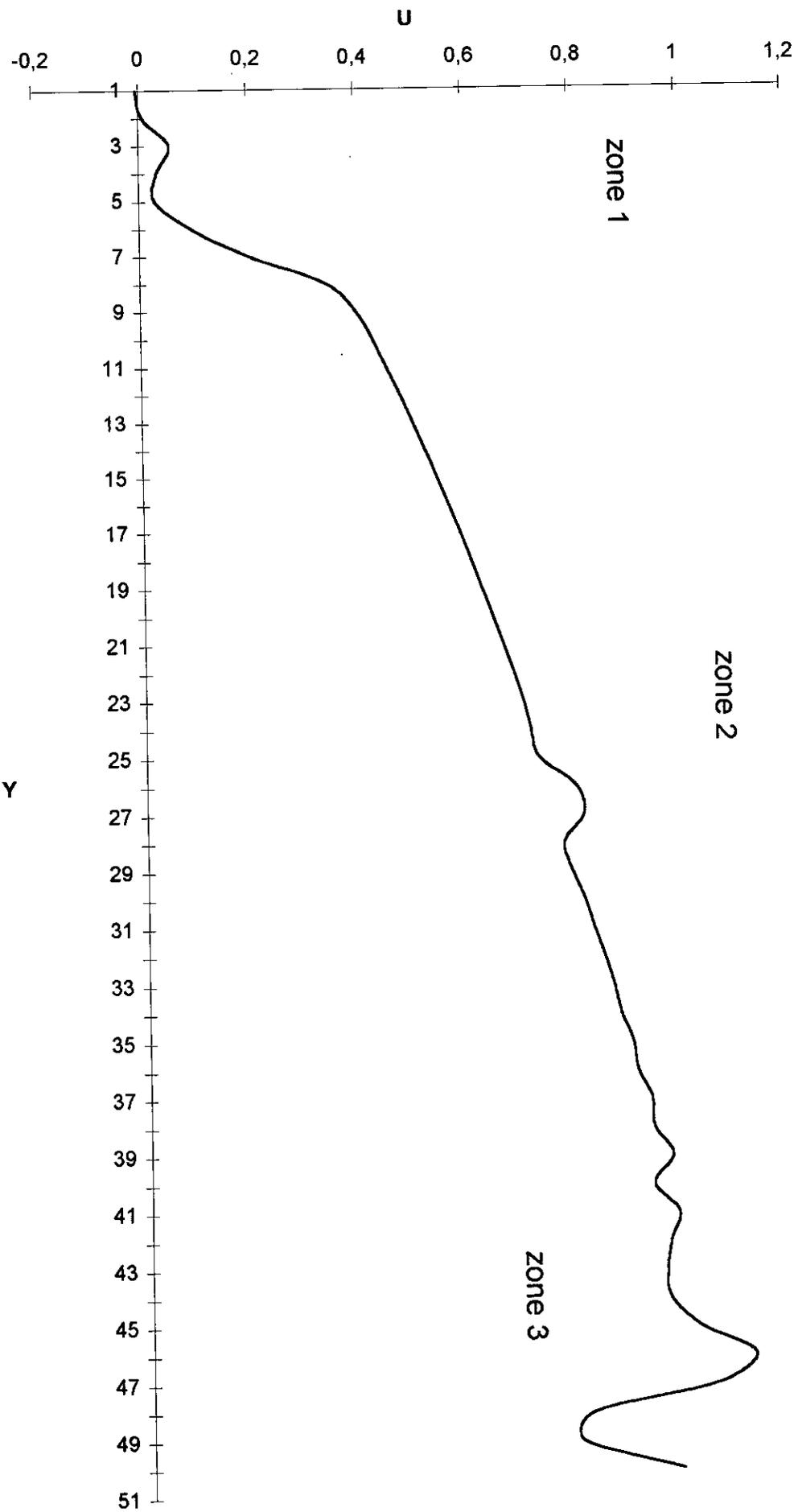


Figure IX-5: vitesse U au rétrécissement

La vitesse : U

- près de la paroi: la vitesse est négative dans le divergent près de la paroi (zone 1 du graphe.1), cela montre l'existence d'un rouleau de recirculation. Il y a un brusque changement de signe au niveau de l'élargissement. La vitesse reste positive jusqu'au rétrécissement.
- près de l'axe: on observe des pics de vitesses dans les rétrécissements et l'élargissement. Cela peut être dû à l'influence des rouleaux, cependant il peut s'agir d'instabilités numériques que nous avons relevé lors des tests de validation.
- aux rétrécissements: nous constatons que la vitesse fluctue près de la paroi (zone 1 graphe.3), ce qui s'explique par la présence du rouleau de recirculation observé précédemment. La vitesse augmente ensuite jusqu'à l'axe. La variation est plus importante lorsqu'on se trouve près de paroi (zone 2). La petite fluctuation qui existe dans la zone 3 est due à une instabilité numérique. Les fluctuations dans la zone 4 correspondent aux fluctuations à l'axe dans les rétrécissements observées plus haut.
- à l'élargissement: les fluctuations dans la zone 1 (près de la paroi) indiquent la présence d'un second rouleau. L'accroissement de la vitesse est important dans la zone 2 puis il se stabilise hors de cette zone: on quitte la couche limite. Les fluctuations observées dans la zone 4 sont celles relevées précédemment ('près de l'axe'); les explications sont identiques.

Figure IX-6: energie cinetique turbulente K près de la paroi

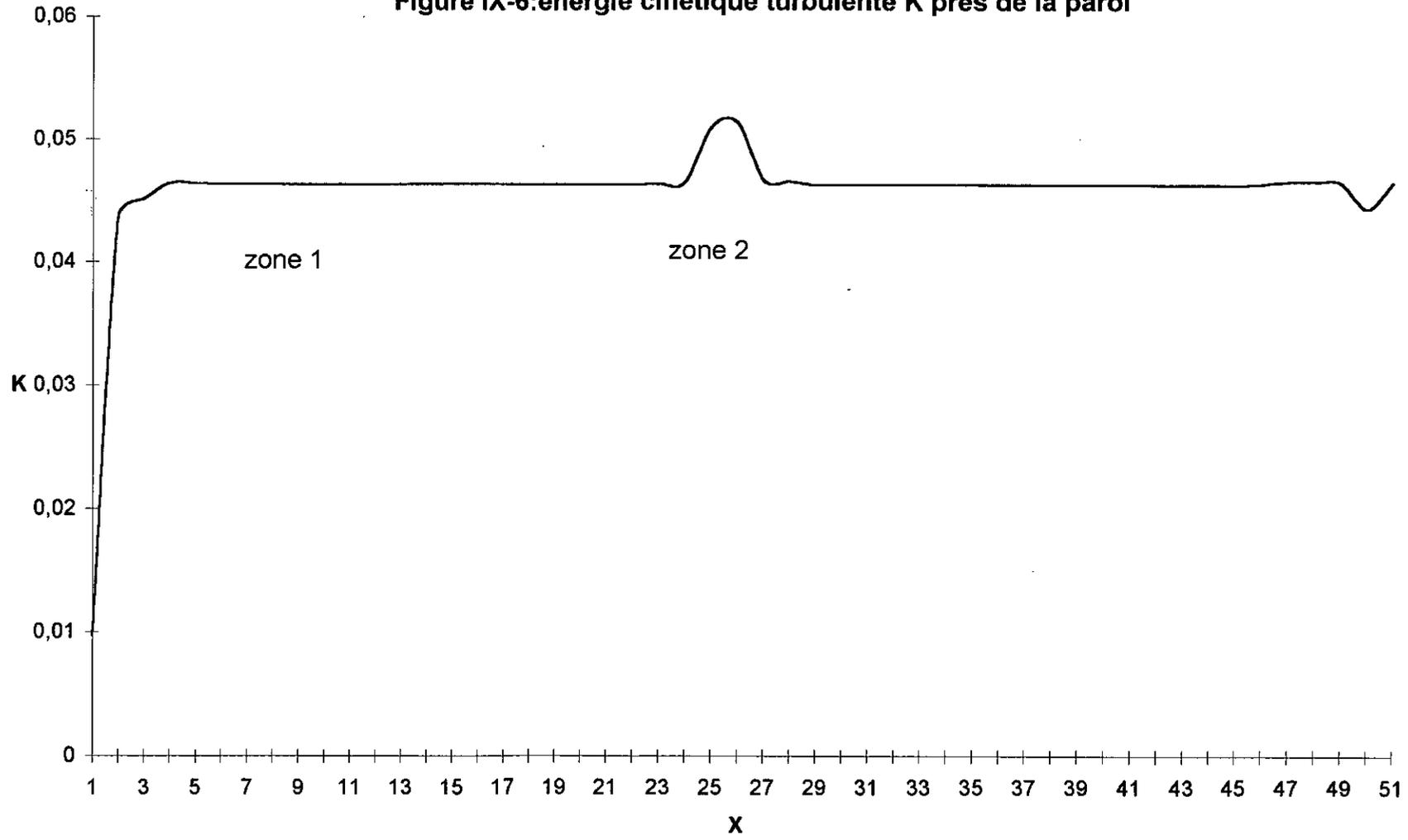
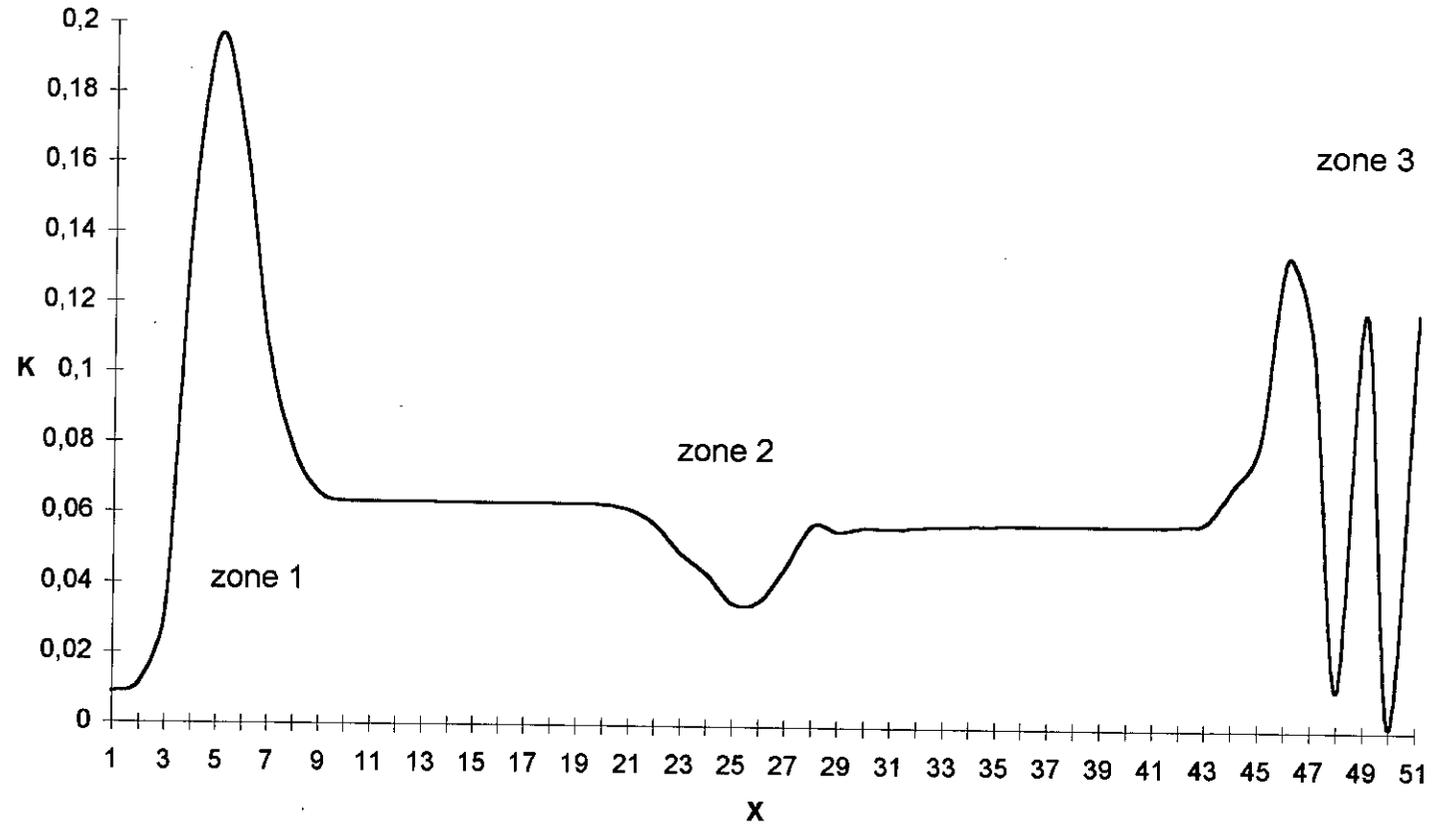


Figure IX-7: energie cinetique turbulente K près de l'axe



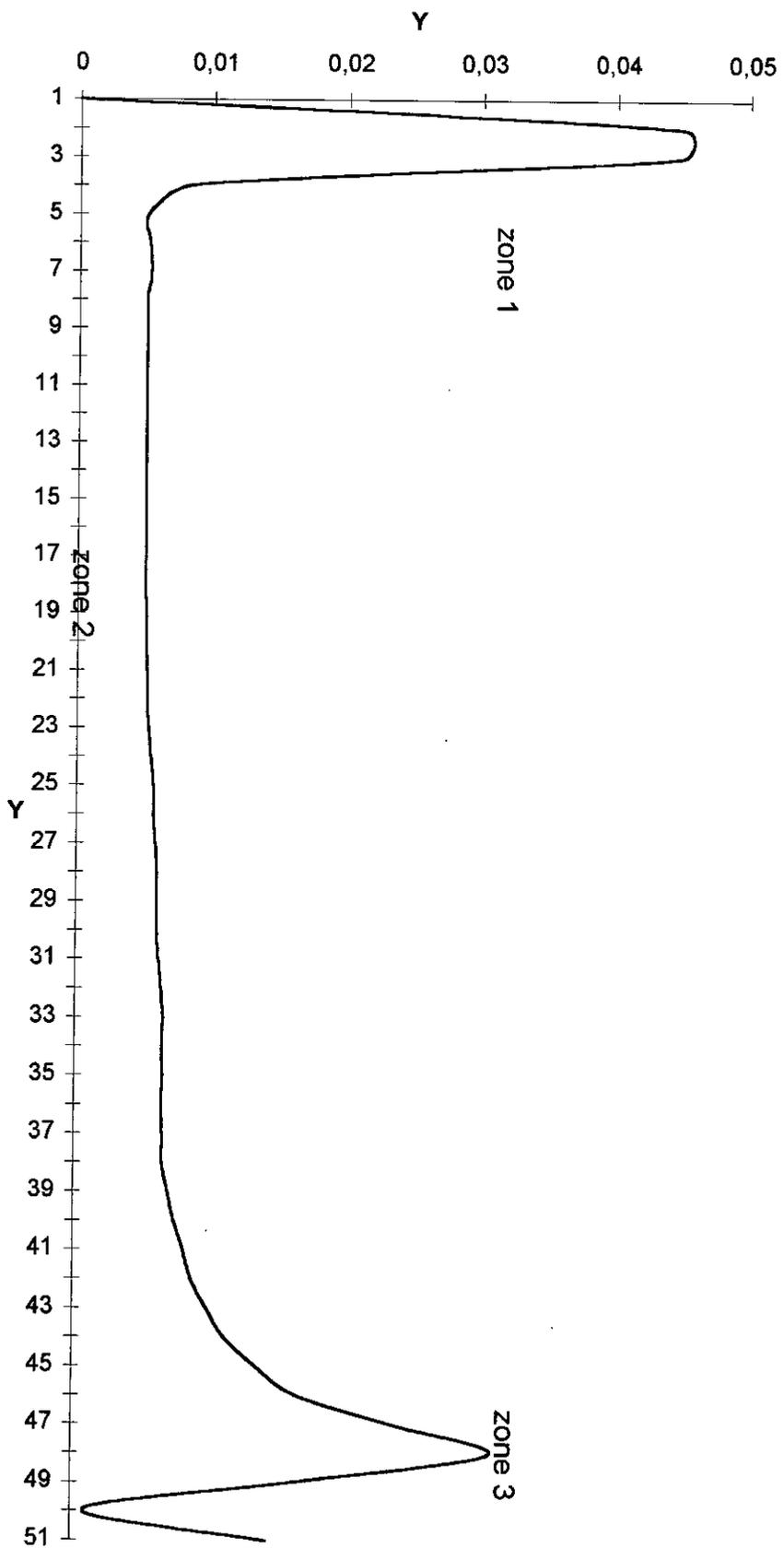


Figure IX-8: Figure énergie cinétique turbulent K au réticissement (entrée)

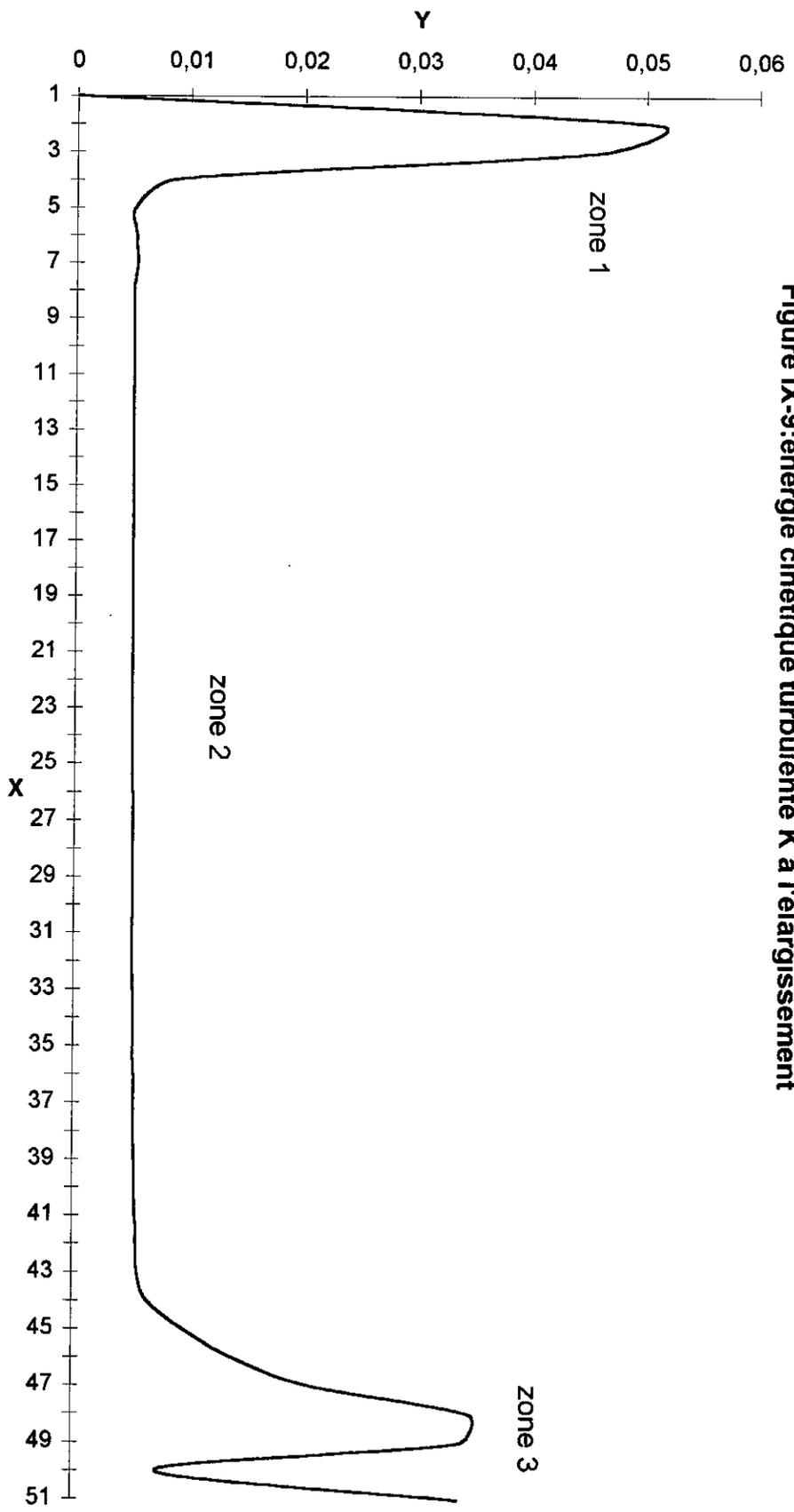


Figure IX-9: energie cinétique turbulente K à l'élargissement

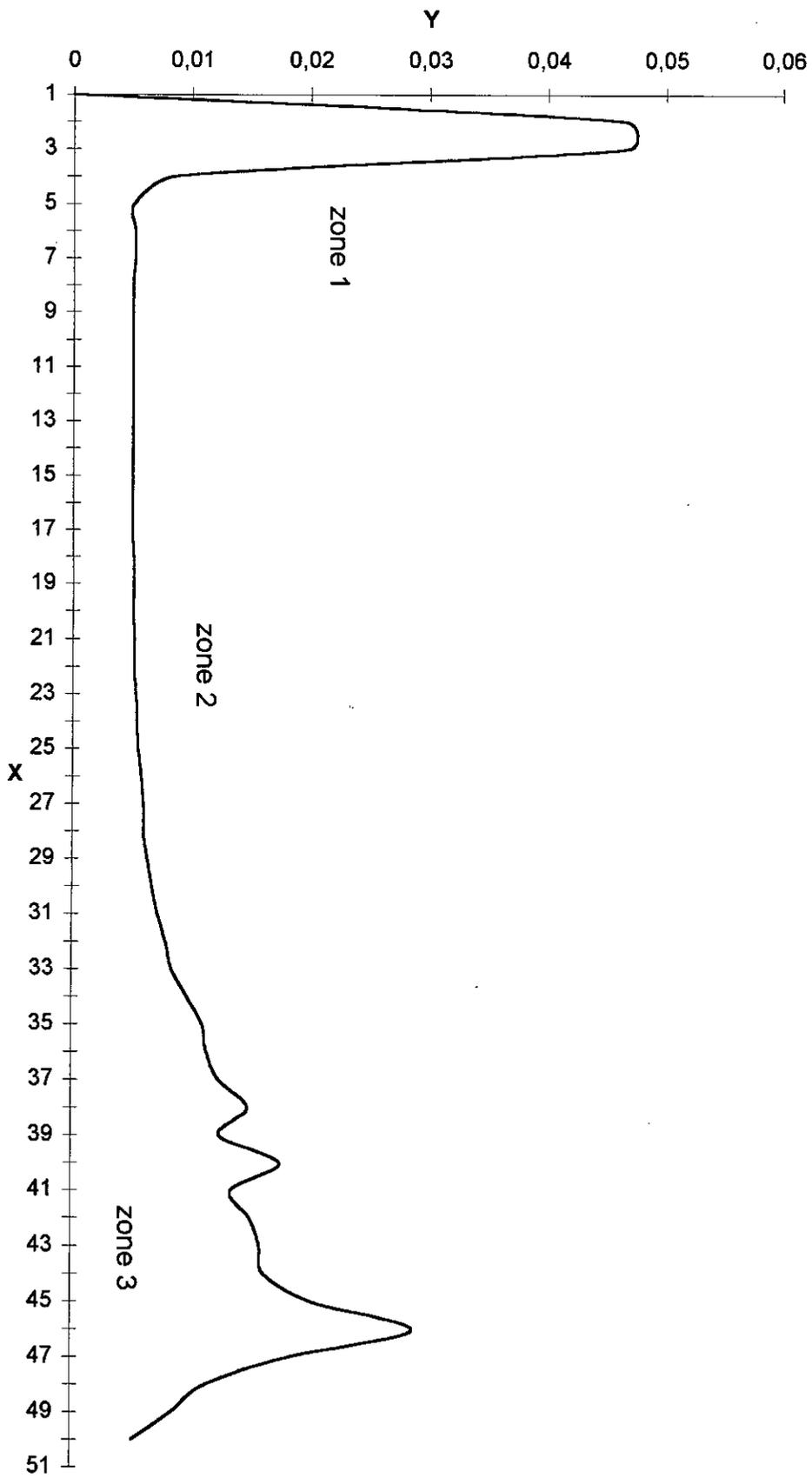
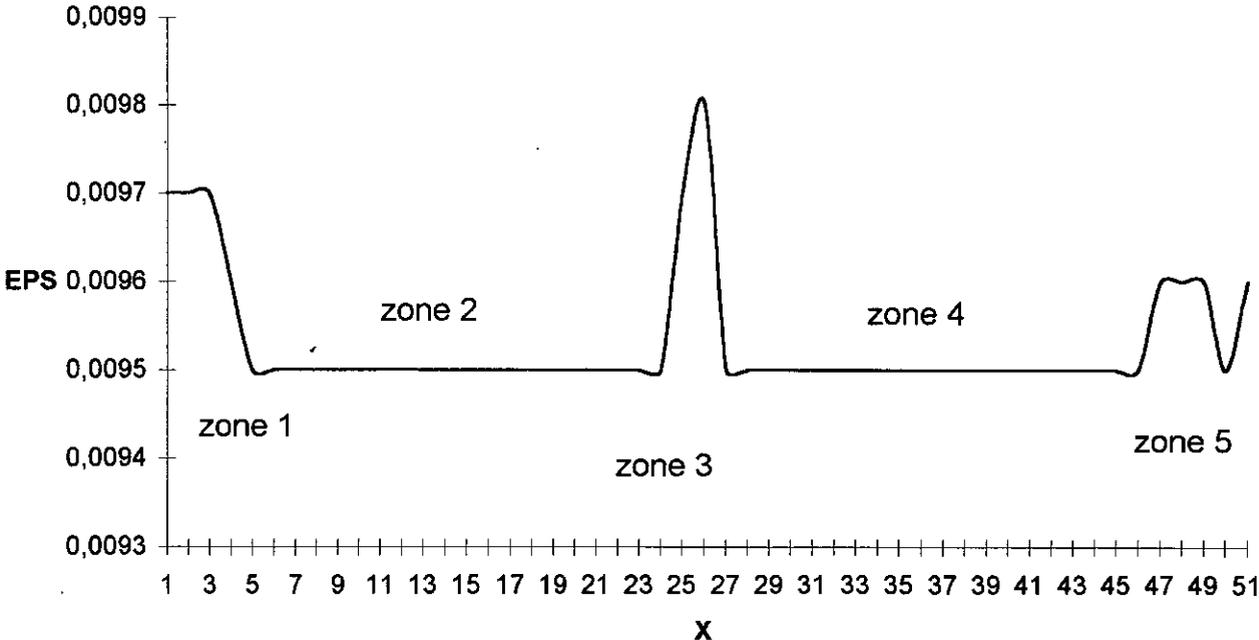


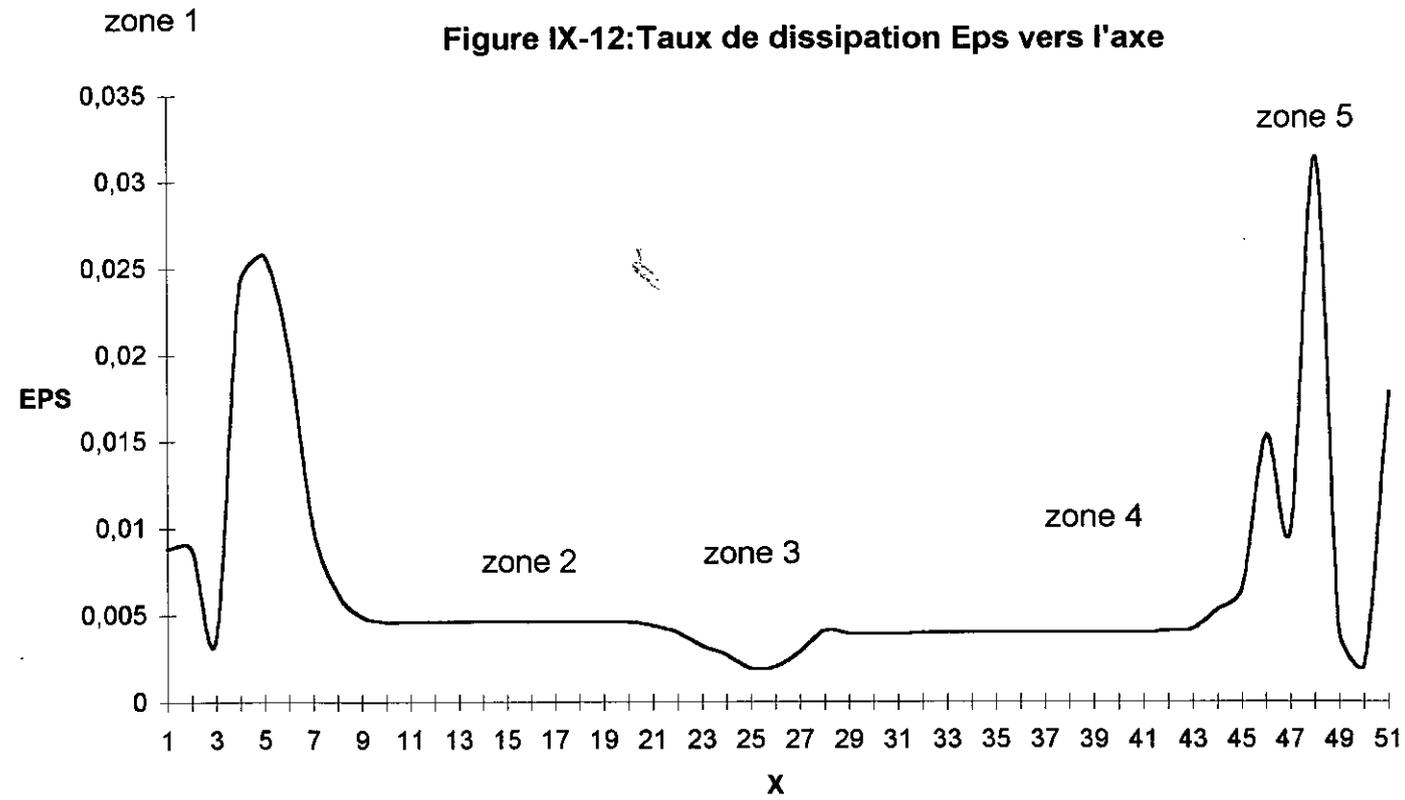
Figure IX-10: energie cinétique turbulente K au rétrécissement (sortie)

L'énergie cinétique turbulente: K

- l'énergie cinétique turbulente est importante près de la paroi tout le long du motif (divergent - convergent), cela est dû à une grande agitation.
- A l'axe le graphe indique une agitation importante aux rétrécissements (zone 1 et 3). Il y a un léger fléchissement à l'élargissement qu'il faut mettre en rapport avec le pic observé à la paroi.
- Les courbes aux rétrécissements et à l'élargissement viennent confirmer les observations précédentes.

Figure IX-11: Taux de dissipation Eps vers la paroi





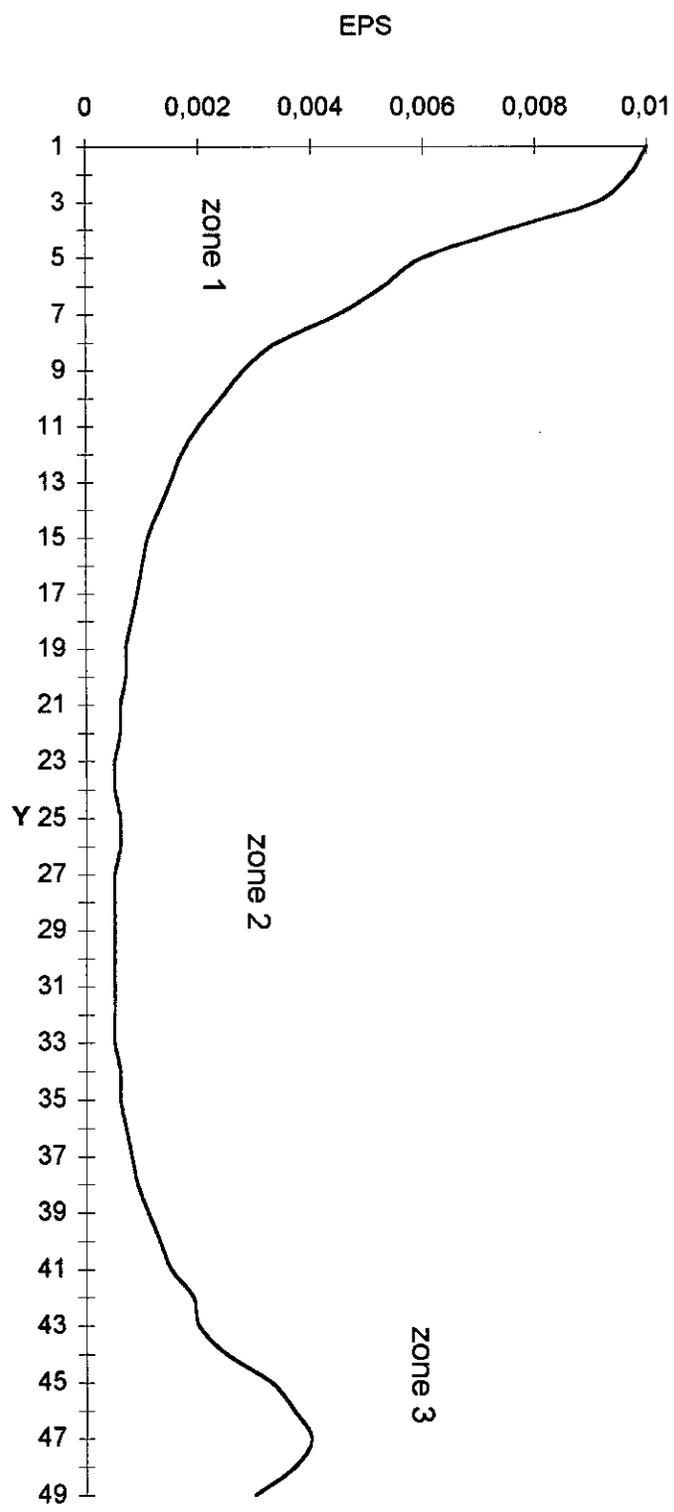
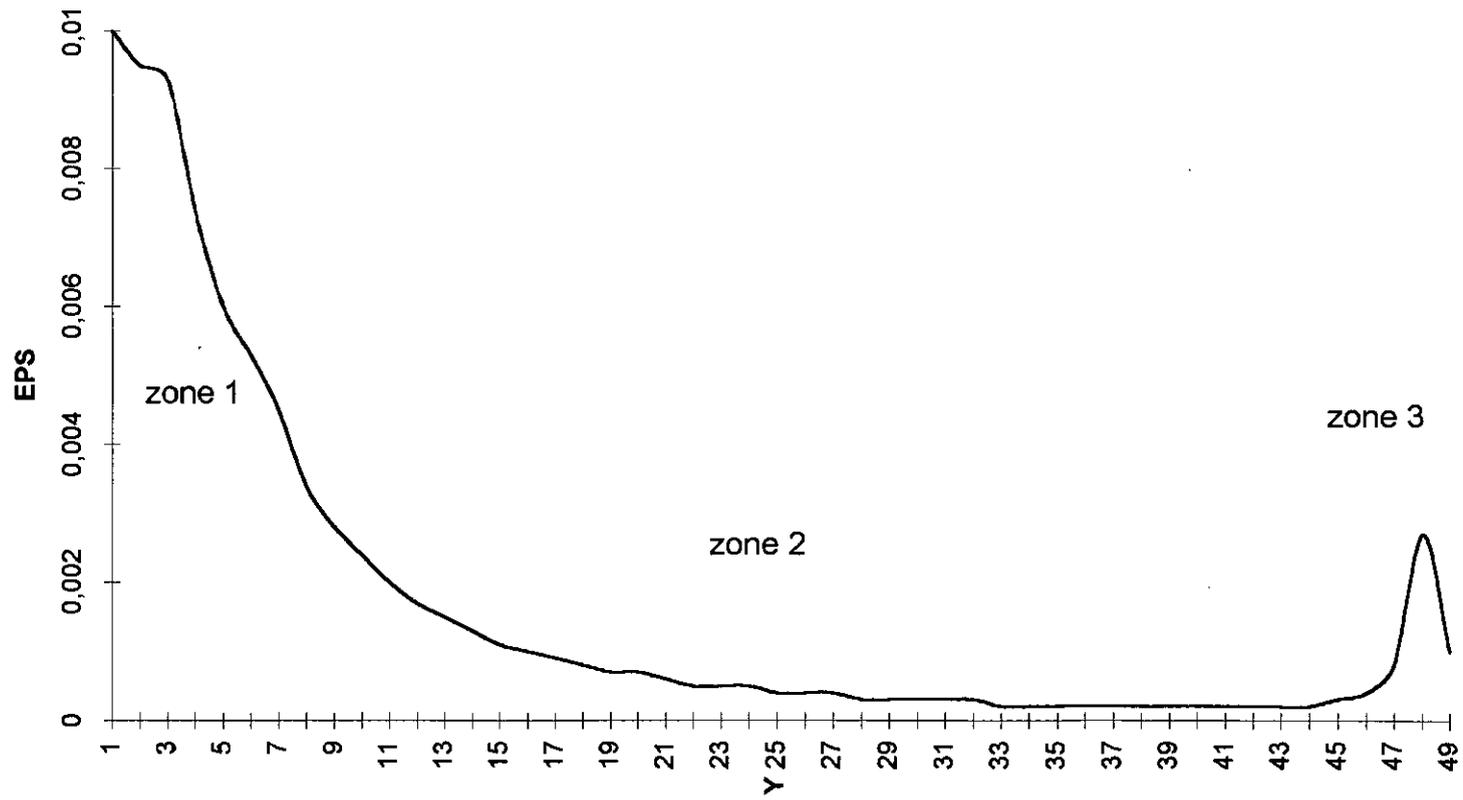


Figure IX-13: Taux de dissipation Eps au rétrécissement

Figure IX-14: Taux de dissipation Eps à la crête



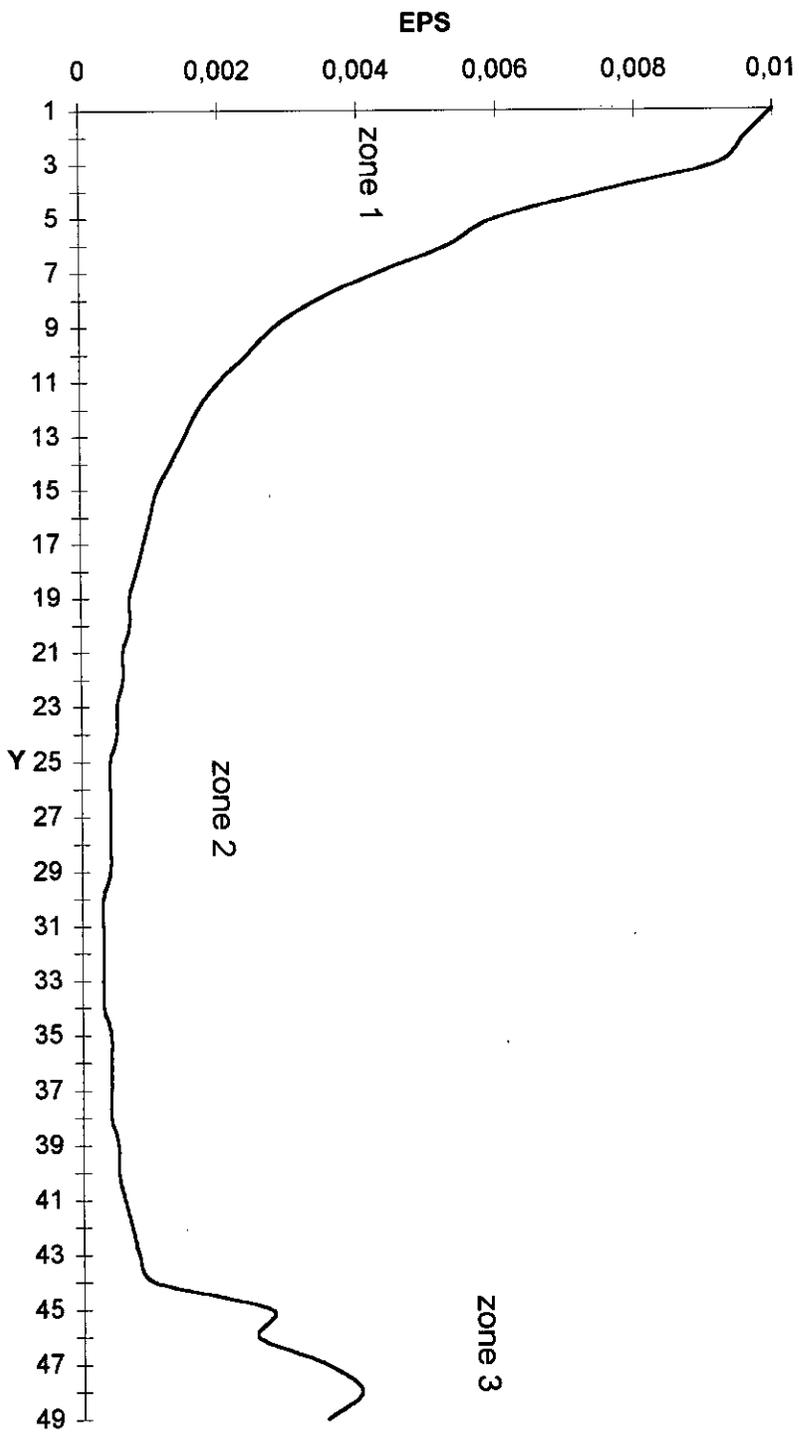
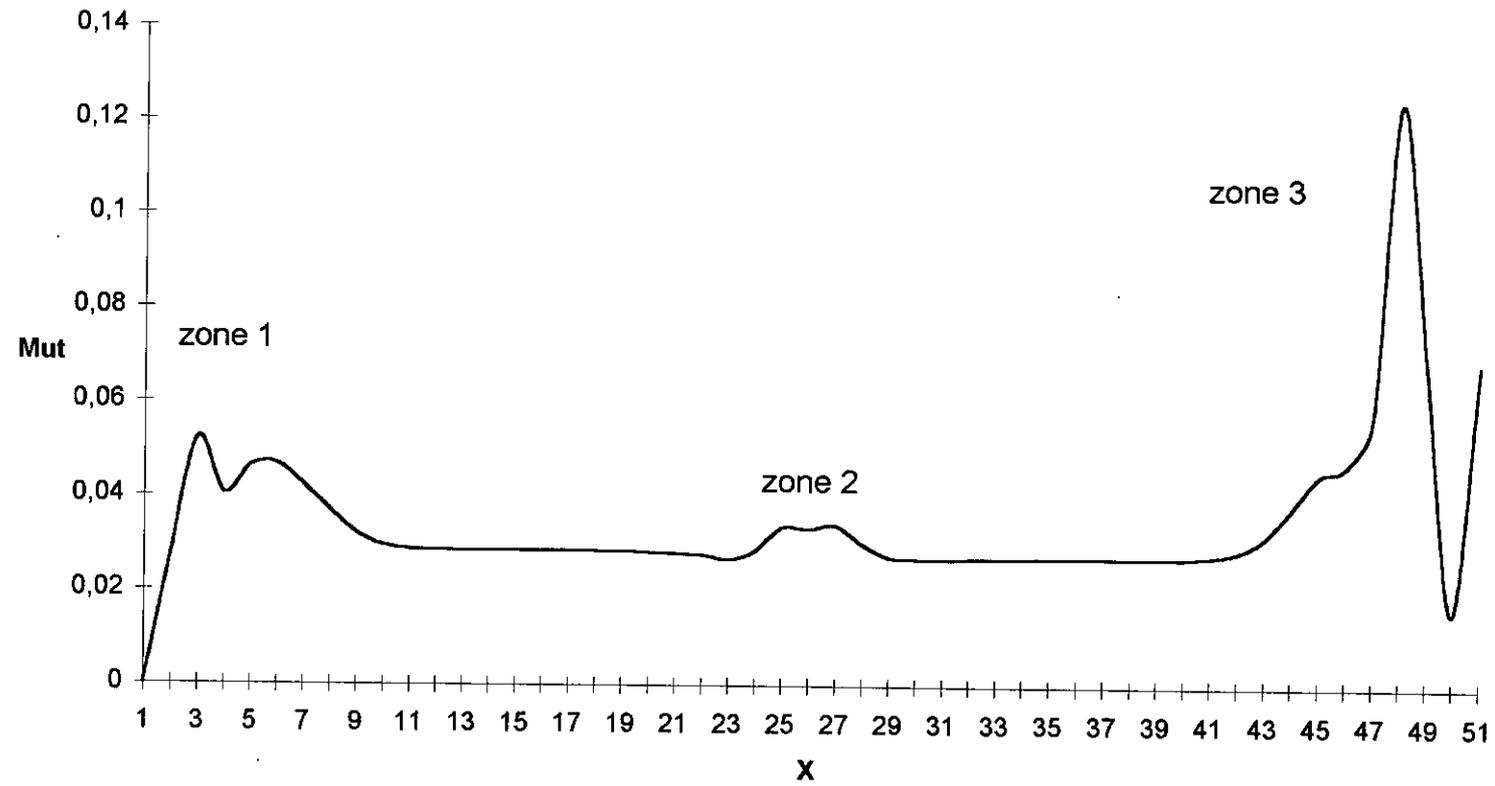


Figure IX-15:EPS à la sortie

Taux de dissipation: ϵ

- Le taux est relativement élevé tout le long de la paroi. Cependant on dénote trois pics aux rétrécissements (zone 1 et 3) et à l'élargissement (zone 2). Le dernier cité étant le plus important. Ces pics sont dus aux brusques variations de vitesses (présence de rouleaux en vis-à-vis) signe de dissipation importante d'énergie cinétique.
- Aux rétrécissements et à l'élargissement, les courbes sont similaires. A la paroi, le taux est maximal. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la paroi, le taux diminue de plus en plus lentement pour augmenter légèrement en arrivant à l'axe. Nous n'avons pas su expliquer ce dernier point. Cette augmentation ne se retrouve qu'aux rétrécissements (voir point suivant).
- Le taux de dissipation est faible tout au long de l'axe sauf aux rétrécissements.

Figure IX-17: Mut vers l'axe



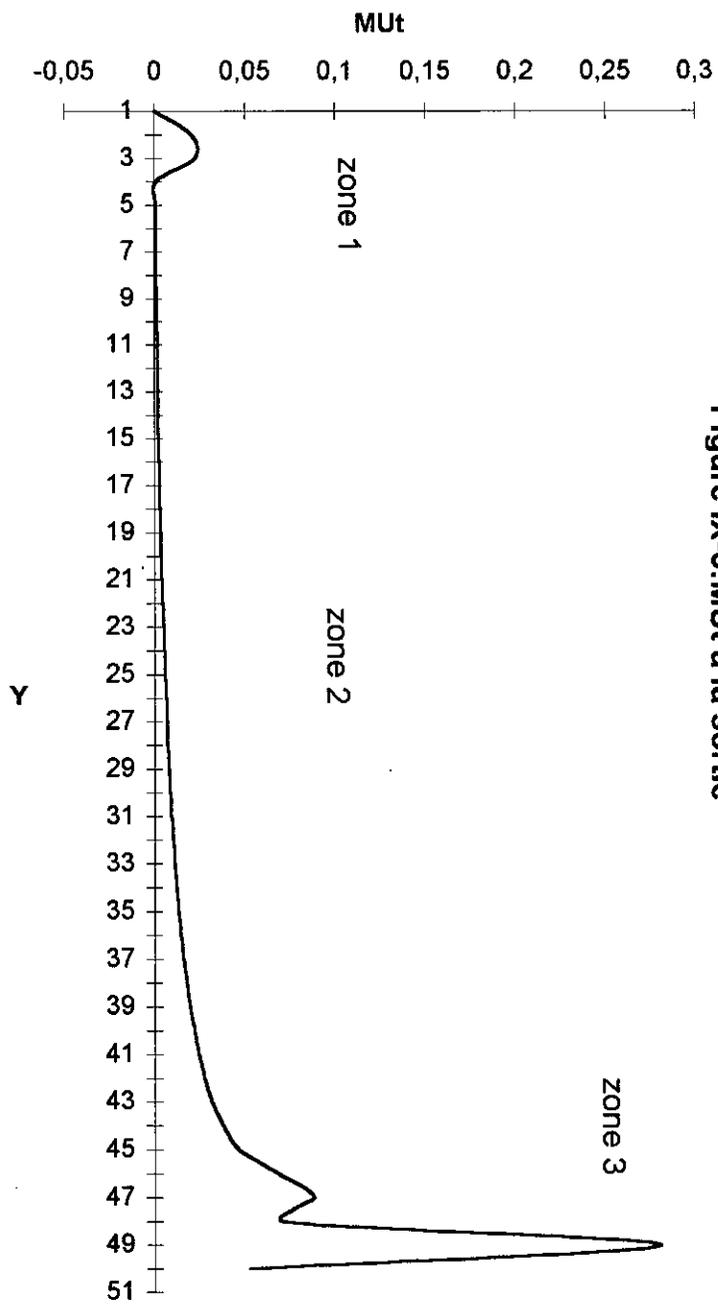


Figure IX-3: MUT à la sortie

La viscosité turbulente ν_T

- La viscosité turbulente est assez faible le long de la paroi. Elle présente un léger pic à l'élargissement.
- on constate que la viscosité turbulente est assez importante le long de l'axe (quatre fois supérieure à la viscosité au niveau de la paroi). Nous pouvions nous attendre à ce résultat vu la nature de la viscosité turbulente. Celle ci est d'autant plus importante que les fluctuations de la vitesse sont grandes, or ces dernières ont tendance à s'annuler en s'approchant de la paroi.

CONCLUSION

CONCLUSION

Le but de notre étude été de résoudre les équations de NAVIER-STOKES pour un écoulement incompressible isotherme turbulent dans un conduit à motif périodique du type divergent - convergent modélisé par l'Algebraic Stress Model (A. S. M.).

Nous avons présenté une revue de littérature sur les travaux concernant les écoulements laminaires et turbulents. L'on constate qu'il n'y a pas de moyens de résoudre de manière analytique les équations en écoulement turbulents c'est pourquoi il est indispensable de se référer aux résultats expérimentaux. Il existe par ailleurs des études portant sur la résolution numérique des équations de NAVIER-STOKES qui peuvent servir de référence. La conception du nombre de Reynolds du point de vue énergétique peut fournir un moyen intéressant de valider les résultats obtenus.

Une description phénoménologique de la turbulence est exposée afin de mieux comprendre ce monde particulier et encore mal connu.

Nous avons posé les équations régissant les écoulements turbulents dans les conduits à motif périodique. Cela nous a permis de conclure que le système d'équations est ouvert et donc irrésolvable directement.

La revue de littérature propose différentes modélisations. Nous avons décrit les plus usuelles : modèle à zéro équation (μ_T), modèle à une équation ($K - l$), modèle à deux équations ($K - \epsilon$), modèle Reynolds Stress Model (R.S.M), et enfin modèle A.S.M. que nous avons retenu pour sa simplicité d'application et ainsi son comportement dans les écoulements à géométrie complexe. Il faut noter l'introduction de constantes numériques qui ne sont pas évaluables analytiquement (il faut donc les déterminer expérimentalement ou par tâtonnement).

La modélisation des équations par l'A.S.M. étant établie, il a fallu, compte tenu de la géométrie plus ou moins complexe du conduit, transformer le domaine physique de

l'écoulement en un domaine orthogonal de calcul. Pour cela, nous avons utilisé la technique de la transformation conforme.

L'implantation numérique du modèle conduit à discrétiser les équations obtenues lors de la phase précédente. Nous avons exposé différentes techniques de discrétisation. Parmi celles-ci, nous avons opté pour la technique Marker-And-Cell (M.A.C.) basé sur les différences finies. Bien qu'il puisse paraître plus difficile à mettre en œuvre que les autres, il est le moins exigeant en matière de conditions aux limites. Pour la détermination de la pression, nous avons préféré la méthode de compressibilité artificielle à la méthode de l'équation de Poisson pour sa simplicité apparente. En fait, elle s'est révélée particulièrement inefficace compte tenu de l'absence de règle bien définie pour déterminer la constante de compressibilité artificielle 'C'.

Nous avons alors construit un algorithme de résolution des équations numériques. Pour résoudre de manière pratique le problème posé, nous avons développé un logiciel convivial et simple sous Windows. Il présente la capacité de mettre en œuvre une maille de calcul relativement dense (jusqu'à 120×120). Cet outil nous a été très utile, compte tenu du nombre considérable d'exécution qu'il a fallu effectuer. En effet, la convergence de l'algorithme élaboré dépend de la valeur des différents paramètres entrant en jeu, en particulier du paramètre 'C' évoqué ci-dessus. Quoiqu'il en soit, d'après M. JAEGER [13] il n'existe pas à ce jour de méthode satisfaisante pour déterminer le jeu de valeur idéal, assurant inmanquablement la convergence de l'algorithme.

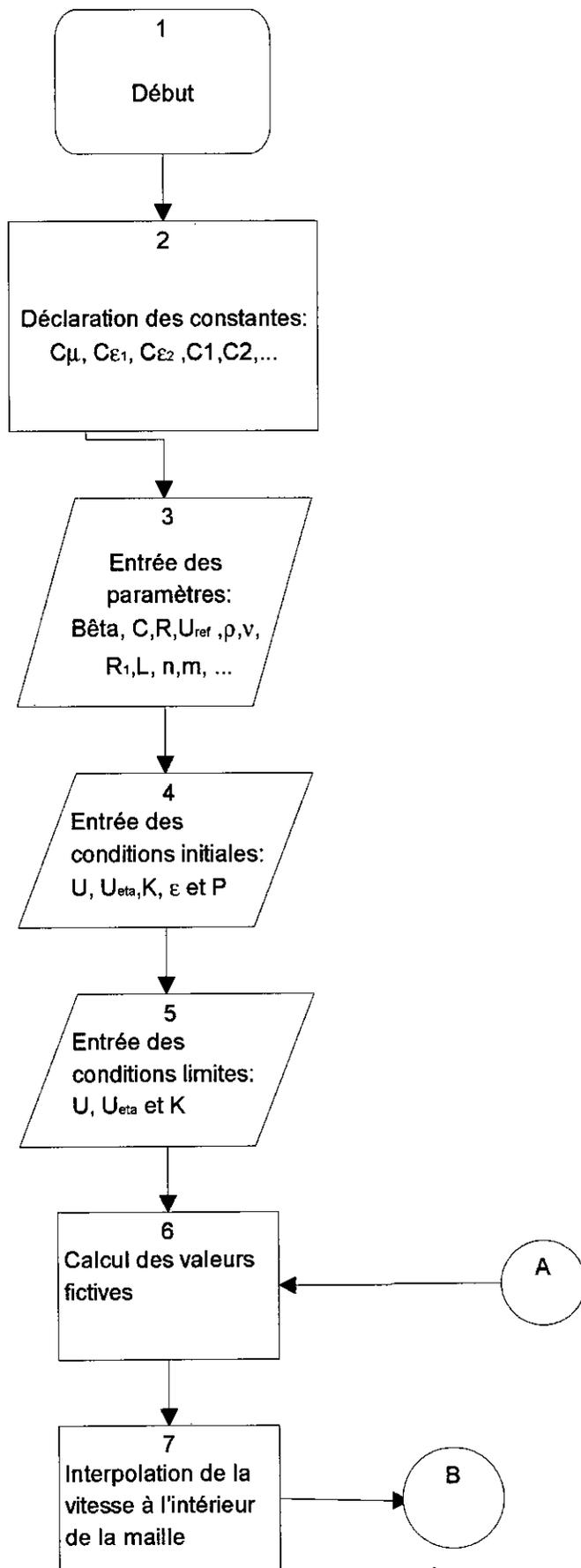
Enfin, nous avons effectué une application de l'algorithme. Les tests de validation pour l'écoulement laminaire (comparaison aux valeurs théoriques) et pour l'écoulement turbulent entre plaques parallèles (comparaison aux valeurs expérimentales de COMTE-BELLOT et résultats numériques de M. JAEGER) ont été subit avec succès. Par la suite nous avons interpréter les résultats obtenus pour un écoulement turbulent dans un conduit à motif périodique de type divergent - convergent.

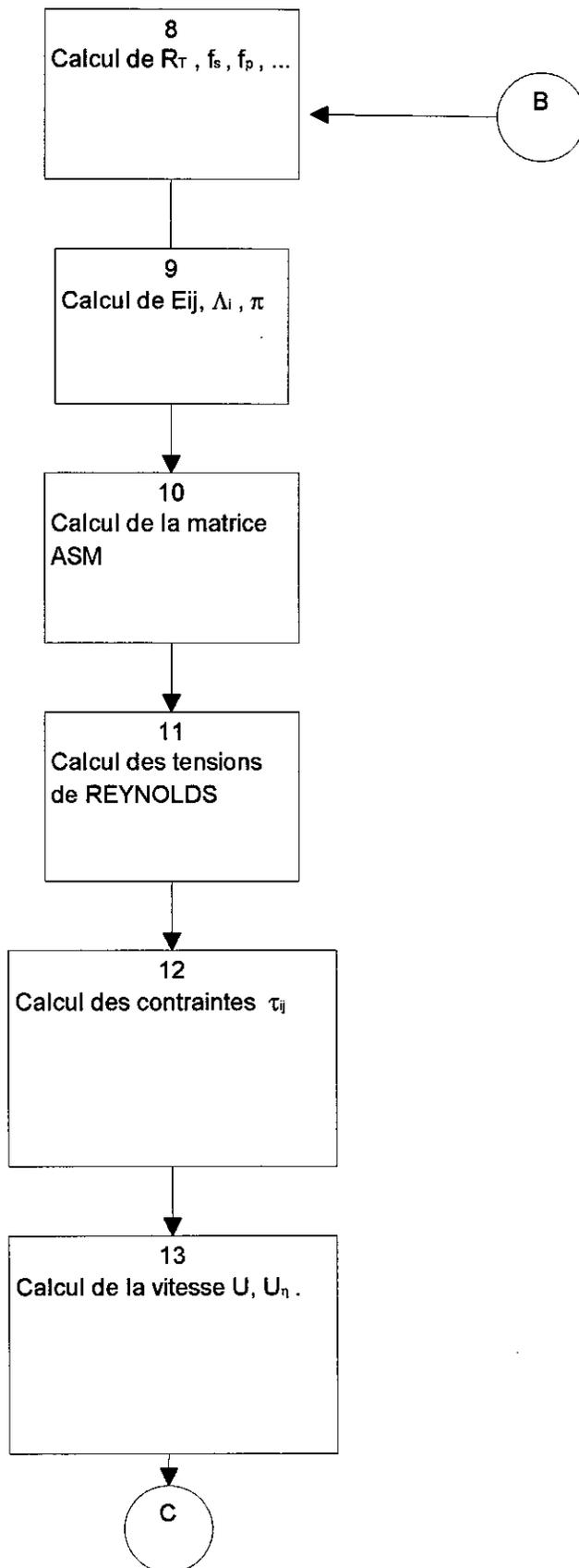
Ces résultats, présentés sous forme de graphiques aux positions les plus significatives du conduit (à la paroi, à l'axe, aux rétrécissements et à l'élargissement), ont été interprété. Ils nous semblent globalement très cohérents. Nous permettant en

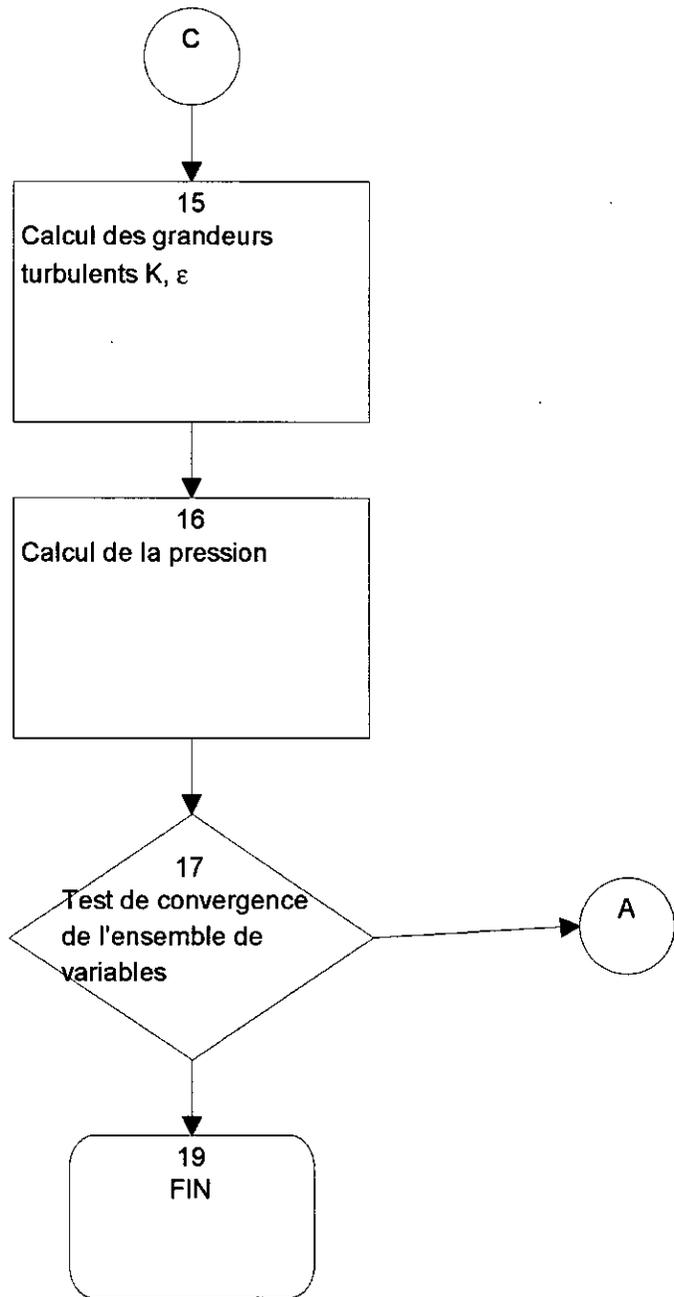
particulier de déterminer les rouleaux de recirculation. Certains points restent néanmoins inexplicables: peut être sont-ils dus aux instabilités numériques.

Il serait à présent très intéressant d'aller plus loin dans l'interprétation des résultats. L'utilisation du logiciel développé permettra de fournir aisément un grand nombre de jeux de résultats en modifiant les paramètres entrant dans le modèle.

ORGANIGRAMME







BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. AZZI, O. IMINE, M. ABIDAT, M. DAGUENET "Etude numérique de l'écoulement à l'entrée d'un tube ondulé de section droite circulaire". Inst. de Génie maritime Oran, 1992.
- [2] S. BENMAMAR "Etude de la distribution de la vitesse d'écoulement d'un fluide dans un ressaut hydraulique noyé". thèse de magister E N P 1990.
- [3] M-H. BOUDGHENE-STAMBOULI, H. HA MINH "Analyse physique d'écoulement pulsé en canal". Inst. de Mécanique des Fluides de Toulouse, 1993.
- [4] G. CHAUVETEAU "Essai sur la loi de DARCY et les écoulements laminaires à perte de charge non linéaire". 1965.
- [5] J. COSTEIX "Turbulence et couche limite". Cepadues - Editions. Toulouse.
- [6] C. CUVELIER, J. DESCLOUX, J. RAPPAZ "Eléments d'équations aux dérivées partielles pour ingénieurs. Théorie et méthodes numériques tome II". Presses Polytechniques Romandes.
- [7] R. B. DEAN "Reynolds number dependence of skin friction and other Bulk flow variables in two-dimensional rectangular". 1978.
- [8] A. DJERBOUA et F. LENOUAR "Simulation d'un écoulement laminaire dans des conduites non cylindriques à motif périodique". Projet de Fin d'Etudes. ENP, 1996.
- [9] A. FAVRE "La turbulence en mécanique des fluides".
- [10] F. B. GESSNER, J. K. PO "A Reynolds stress model for turbulent corner flows". J. Fluid engineering 1976.
- [11] K. HAJALIC, B.E. LAUNDER "A Reynolds stress model of turbulence and its applications to thin shear flow". J. Fluid Mech. 52, 4, 609, 638, 1972.
- [12] A. HASSAINE, M. DAGUENET et G. MENGUX "Etude du champ des vitesses et du transfert thermique dans un canal à paroi sinusoïdales, soumises à un flux de chaleur de densité constante". Int. J. Heat mass transfert 37, 5, 717-725, 1994.
- [13] M. JAEGER "Simulation numérique d'écoulements turbulents incompressibles et isothermes de fluides Newtoniens par éléments finis tridimensionnels". Thèse de doctorat. 1990.
- [14] M. LESIEUR "La turbulence ", P.U.G, 1994.
- [15] B. E. LAUNDER, G. J. REECE et W. RODI "Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure". J. Fluid Mech 68, 3, 537, 566. 1975.

- [16] R. SCHIESTEL "Modélisation et simulation des écoulements turbulents". Ed HERMES, 1993.

- [17] R. SCHIESTEL et M. P. CHAUVE "Influence d'ondulations de faible amplitude sur la convection turbulente dans un écoulement en conduite axisymétrique: expérience et prévision numérique". Inst. De Mécanique statistique de la turbulence. Marseille, 1982.

- [18] R. PEYRET, T. D. TAYLOR "Computational methods for fluid flow". Springer Series in Computational Physics.

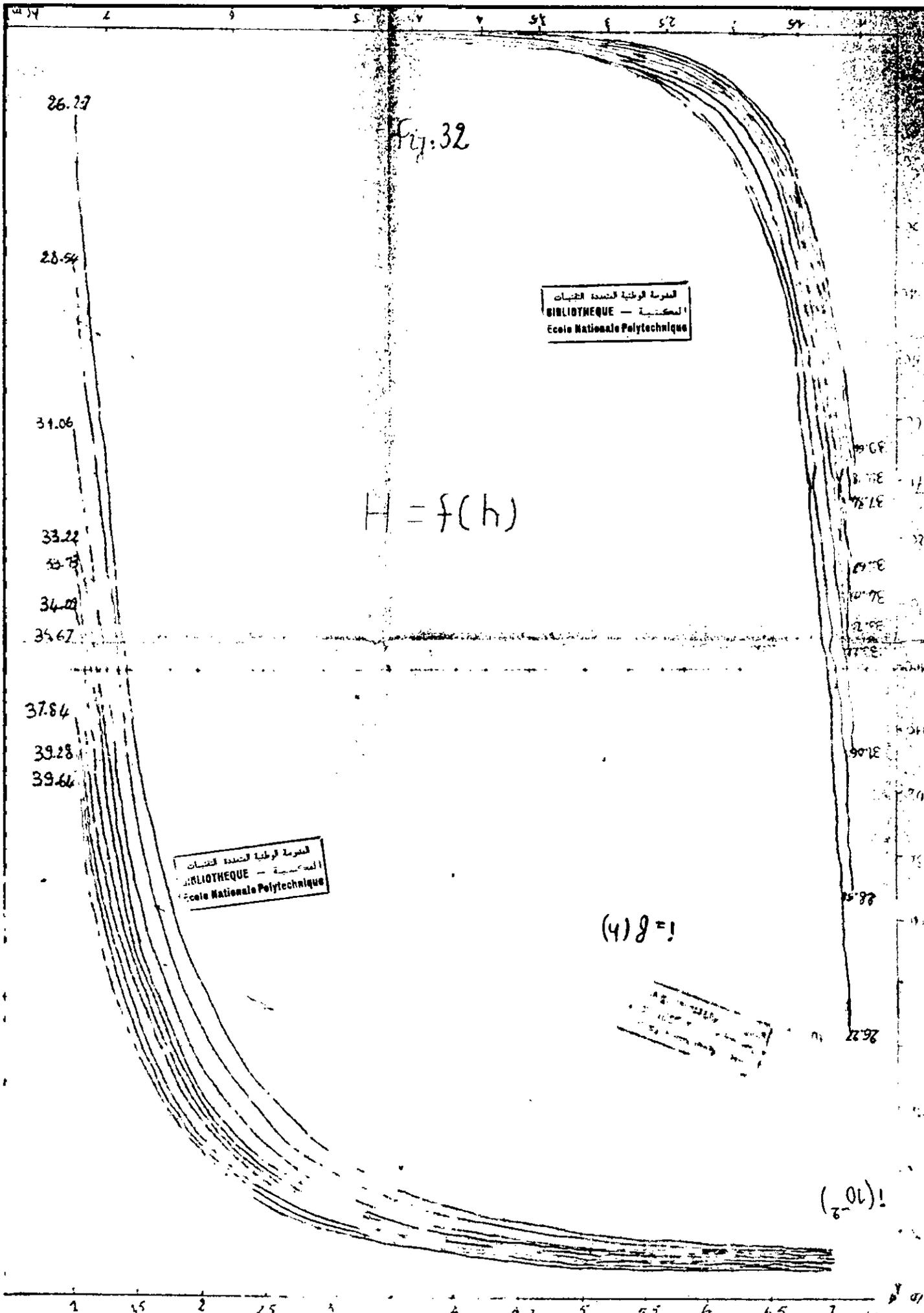


Fig. 32

$$H = f(h)$$

المركز الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المركز الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

$(y) f = !$

$(y) f = !$

المركز الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

M^e Keltap 14/96

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

BIBLIOTHEQUE — المكتبة

Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

EN HYDRAULIQUE

THEME :

ANALYSE DE LA LIQUEFACTION

DANS LES BARRAGES EN TERRE

Réalisé par :

Mr MAYOUF Smail

&

Mr NABI Yamin

Dirigé par :

Mr NEHITI.H

&

Melle ZERFA-F.Z

Proposé par :

Melle ZERFA F.Z

PROMOTION : 1996



Dédicaces

Avec beaucoup de joie, je dédie ce travail à :

- Mes chers parents à qui je dois tout,
- Mes frères et sœurs,
- Toute la famille MAYOUF et mes proches,
- Tous mes amis que j'aime beaucoup.

Smail.M

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- mes très chers parents pour tous leurs sacrifices et leur présence ainsi que leur dévouement à ma cause,
- mes frères Tahar et Brahim,
- mes chères sœurs,
- mes amis Nounou, Tahar, Rabah, Hamza, Youreddine, Karim et Tourad pour leur aide massive et leurs encouragements,
- et à tous ceux que j'aime.

À tous et à toutes, je vous dis :

Merci !

Yamine N.

REMERCIEMENTS

Il nous a été impossible de mener à bien ce travail sans l'assistance et les conseils précieux de M^{me} ZERFA et M H.NEHITI, ils ont droit à toute notre reconnaissance d'avoir accepté de diriger ce travail et à l'aide et aux encouragements qu'ils nous ont prodigué, qu'ils trouvent ici l'expression de notre sincère gratitude et profond respect.

Nos remerciements vont au président ~~des~~ membres de jury pour avoir accepté de juger ce travail.

Il nous est particulièrement agréable de les remercier tous pour avoir été nos enseignants.

Et en fin, on tient à remercier également l'ensemble de personnels de la bibliothèque et de centre de calcul de l'ENP, qu'il trouve ici l'expression de notre reconnaissance.

الغرض من هذه الدراسة يتمثل في:

- تحديد إمكانية حدوث أو عدم حدوث ظاهرة السيالان بالنسبة للسدود الترابية تحت تأثير قوى الزلازل باستعمال طريقة العناصر المنتهية.
- قيام برنامج ألي بلغة الفورتران 77 يقوم بحساب تغير الضغط المائي بدلالة الزمن داخل السد لتحديد إمكانية ظهور هذه الظاهرة.

Sujet: Analyse de la liquéfaction dans les barrages en terre.

Résumé:

Le but de cette étude consiste à:

- évaluer le risque de liquéfaction dans les barrages en terre soumis à des sollicitations sismiques par la méthode des éléments finis;
- adapter un programme en Fortran 77 qui permet de suivre l'évolution des surpressions interstitielles en fonction du temps dans un barrage en terre afin d'estimer ce risque.

Subject: Analysis of liquefaction in earth dams

Abstract:

The object of this study consist to:

- evaluate the risk of liquefaction in earth dams subject to seismic stress with finite elements method;
- fit a program written in Fortran 77 who permet to succed the evolution of pores weter perssues according to time in a damin order to estimate the risk.

SOMMAIRE

CHAP 0 :	INTRODUCTION GENERALE.	page:1
CHAP I:	DEFINITION ET GENERALITES.	page:3
I-1	<i>Notions sur le séisme.</i>	<i>page:3</i>
I-2	<i>Les effets induits par les séismes sur les barrages en terre.</i>	<i>page:7</i>
I-3	<i>Terminologie et définition de la liquéfaction.</i>	<i>page:10</i>
CHAP II:	COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES SOLS.	page:12
II-1	<i>Introduction.</i>	<i>page:12</i>
II-2	<i>Comportement des sols sous chargement cyclique.</i>	<i>page:12</i>
II-3	<i>Méthodes d'identification des sols susceptible à la liquéfaction.</i>	<i>page:20</i>
II-4	<i>Paramètres affectant la résistance au cisaillement cyclique.</i>	<i>page:21</i>
CHAP III:	EVALUATION DU RISQUE DE LIQUEFACTION ET MODELISATION.	page:30
III-1	<i>Approche en contraintes totales.</i>	<i>page:30</i>
III-2	<i>Approche en contraintes effectives</i>	<i>page:39</i>
CHAP IV:	CALCUL PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.	page:53
IV-1	<i>Définition.</i>	<i>page:53</i>
IV-2	<i>Bases de la méthode des éléments finis.</i>	<i>page:54</i>
IV-3	<i>Méthode des résidus pondérés.</i>	<i>page:56</i>
IV-4	<i>Application de la méthode des éléments finis à l'équation de base.</i>	<i>page:65</i>
CHAP V:	PRESENTATION DU PROGRAMME " LIQ "	page:77
V-1	<i>Critère de convergence.</i>	<i>page:77</i>
V-2	<i>Description des sous-routines du programme</i>	<i>page:78</i>

**CHAP VI: PRESENTATION DES RESULTATS
ET INTERPRETATIONS.** **page:84**

- VI-1 Utilisation du programme LIQ dans le cas d'un barrage. page:84*
VI-2 Test de stabilité. page:86
VI-3 Effet d'une histoire irrégulière. page:86
VI-4 Effet du pas de temps. page:86

**CHAP VII: MOYENS DE REMEDIER A LA
LIQUEFACTION.** **page:88**

- VII-1 Accroissement de la densité. page:88*
VII-2 Amélioration du drainage. page:88
VII-3 Augmentation de la contrainte du sol. page:88
VII-4 Modification des caractéristiques du sol. page:88

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE 0

INTRODUCTION GENERALE

Aussi loin que l'on remonte dans l'histoire des hommes, la domestication de l'eau apparaît toujours comme l'une de leurs préoccupations majeures. Pour asservir à leurs immédiats besoins cet élément aussi vital que la chaleur et la lumière, tous se dépensèrent en exténuant labeurs, et les prestigieuses dominations des peuples ayant su s'en rendre maître, demeurent aussi vivantes que leur fortune fut grande.

L'évolution technologique amène l'ingénieur à réaliser, dans ce sens, des projets de plus en plus complexes, onéreux et soumis à des normes de sécurité plus strictes. Les barrages, qui font partie de ces ouvrages pesent sur les avaliers un risque potentiel souvent fort grand, compte tenu de l'énergie accumulée dans les réservoirs. Ils sont de grande importance dans les divers secteurs de l'économie.

La maîtrise de ces ouvrages incite l'ingénieur à utiliser fréquemment des modèles de simulation du comportement des systèmes physiques. Ce n'est que depuis une vingtaine d'années que d'importants progrès ont été réalisés dans le domaine de l'étude dynamique des barrages et en particulier les barrages en terre, ceci implique, à la fois, une meilleure évaluation du risque sismique, une détermination délicate, en laboratoire et in-situ, des propriétés dynamiques des matériaux constituant le barrage et la fondation, et des modèles mathématiques complexes permettant d'évaluer, par des équations aux dérivées partielles, le comportement et la réponse dynamique de ces ouvrages.

Le phénomène d'écoulement à travers les milieux poreux, en particulier les barrages en terre, constitue l'un des problèmes majeurs auxquels le concepteur est confronté. Lors d'un chargement dynamique et à cause des infiltrations, les pressions interstitielles augmentent, causant une dégradation continue des caractéristiques mécaniques des sols jusqu'à ce qu'elles atteignent un état où la liaison intergranulaire soit complètement anéantie. Ce phénomène est dénommé « Liquéfaction ».

Pour résoudre les équations qui régissent ce phénomène, la méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées à l'heure actuelle.



Enfin, on a jugé nécessaire d'aborder cette étude dans le but d'assimiler le phénomène de la « Liquéfaction » et de déceler les effets qui seront induits dans le corps des barrages en terre, suite à une action sismique.

CHAPITRE I

DEFINITIONS ET GENERALITES

I-1 Notions sur le séisme:

Les tremblements de terre font partie des cataclysmes naturels qui ont toujours exercé une grande fascination sur l'humanité. Ils sont responsables de destructions de villes entières, la cause de la mort de millions de personnes et ont souvent des conséquences économiques désastreuses pour les pays touchés, souvent déclarés pays sinistres.

Notre connaissance actuelle du phénomène est telle que, s'il n'est pas possible de prédire l'instant ou un séisme se produira en un lieu donné, il est possible d'identifier les zones à haut risque sismique et d'y construire en conséquence.

Pour être en mesure de construire en zone sismique, il est nécessaire d'identifier ces zones et donc de comprendre le mécanisme générateur des séismes, puis de caractériser un séisme par un certain nombre de grandeurs directement utilisables par l'ingénieur. L'objet de ce qui suit est de fournir ces éléments .

I-1-2 Définitions:

Les tremblements de terre correspondent à une libération d'énergie dans les couches terrestre. L'action sismique peut être décrite comme étant une perturbation transitoire due à la propagation d'ondes dans le sol, d'allure aléatoire. Un champ de contraintes est généré dans une zone le long d'une faille, cette zone est appelée « foyer ».

Une rupture se produit le long de la faille et l'énergie emmagasinée par le travail du champ de contraintes est brutalement réduite d'une quantité égale à la somme de l'énergie dissipée par radiation d'ondes élastiques et de l'énergie transformée en chaleur ou en énergie potentielle. Le retour à l'équilibre se fait par libération des déformations résiduelles lors des secousses suivant le séisme, ces secousses sont appelées « répliques ».

I-1-3 Paramètres caractéristiques d'un séisme:

Lorsque les ondes sismiques, qui se propagent en transportant une grande énergie atteignent un site à la surface de la terre, elles engendrent des vibrations dans trois directions (deux transversales et une verticale).

Les enregistrements des accélérations de ces mouvements en fonction du temps s'effectuent à l'aide d'un accélérographe constituant des accélérogrammes. Après intégration d'un accélérogramme, on peut obtenir les diagrammes des vitesses et des déplacements en fonction du temps (figure I-1).

a) Grandeurs maximales (accélération, vitesse, déplacement):

Dans un accélérogramme (figure I-1) on peut distinguer une phase initiale pendant laquelle les accélérations sont faible (0 à 4 s pour l'accélérogramme de la figure(I-1)), une phase à fort niveau d'accélération (5à 12s), une phase modérée (12à 23s) et une phase très faible de retour progressif au repos (> 23s).

A partir des diagrammes tels que ceux de la figure (I-1) il est possible de connaître la valeur maximale "a", de l'accélération (généralement exprimée en nombre de g), "v", de la vitesse (cm/s) et "d", du déplacement (cm). Ces valeurs ne varient pas totalement indépendamment les unes des autres. En particulier pour les séismes réels, le rapport $a.d/v^2$ est compris entre 5 et 15 environ (NEWMARK- ROSENBLUETH, 1971). Ces valeurs maximales, souvent prises en compte pour caractériser la violence d'un séisme, ne sont pas, à elles seules, caractéristiques de celui-ci. D'autres paramètres ont été introduits à cette fin.

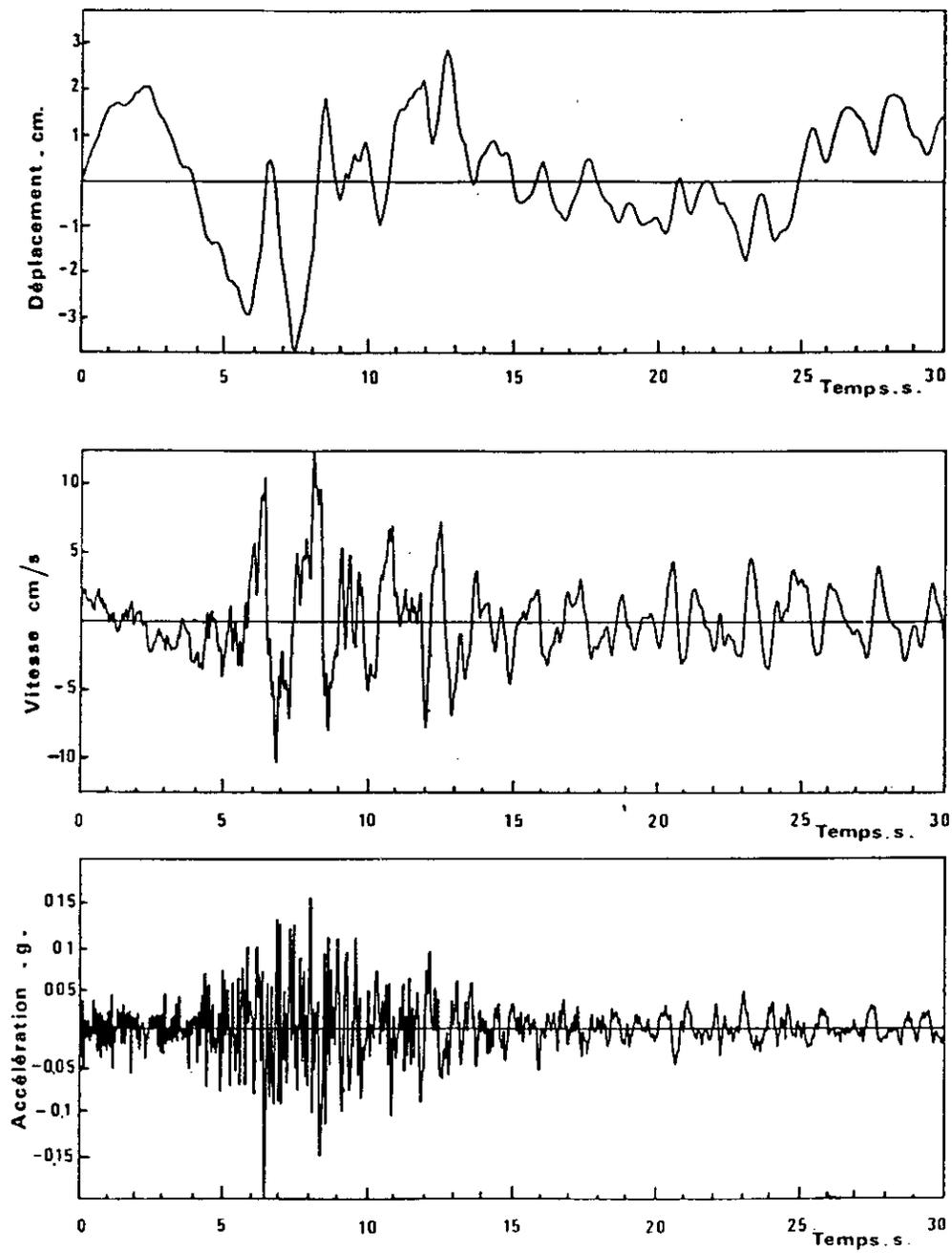


Figure 1.1 Séisme d'Olympia, Washington 1949 - Composante S 86 W

b) Durée:

La durée d'un séisme est délicate à définir directement à partir de l'accélérogramme. Certains sismologues ont proposé de la définir à partir du diagramme d'Husid qui est un moyen commode de quantifier la variation du niveau d'excitation dans le temps. Par définition, si $a(t)$ est l'accélération fonction du temps, T , la durée totale du séisme, la variation de l'intégrale :

$$h(t) = \left[\int_0^t [a(t)]^2 dt \right] / \left[\int_0^T [a(t)]^2 dt \right] \quad (I-1.1)$$

constitue le diagramme d'Husid. L'intégrale au dénominateur de l'équation (I-1.1) est une mesure de l'énergie contenue dans l'accélérogramme. Le diagramme d'Husid correspondant à l'accélérogramme de la figure (I-1) est donné sur la figure(I-2).

On peut alors définir la durée significative du séisme comme le temps requis pour passer du niveau 5% au niveau 95 %, soit 20 secondes dans le cas présent.

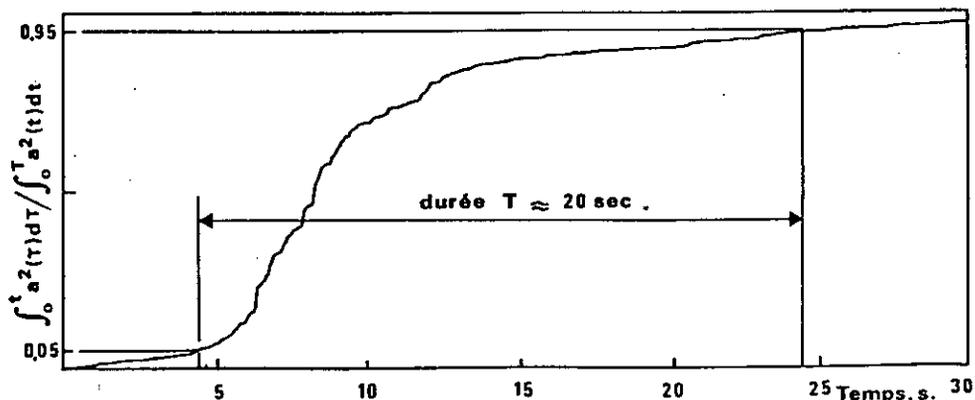


Figure I-2 Diagramme d'Husid - Séisme d'Olympia (1949)

c) Intensité et magnitude:

L'importance d'un séisme peut être mesurée de deux façons :

- la première consiste à évaluer les dégâts occasionnés par le séisme aux édifices et ouvrages, à constater l'importance des perturbations qui se sont produites au sol (apparition de failles en surface, glissements de terrains, phénomène de liquéfactionetc) et à connaître le degré de perception de l'ébranlement par l'homme mais aussi par les animaux, à partir de ces observations, le séisme est caractérisé par son « intensité », l'échelle utilisée actuellement est celle de « MERCALLI » qui comporte 12 degrés.

L'intensité n'est pas un paramètre fiable en génie parasismique. Si l'on veut par contre connaître la force d'un séisme indépendamment des dégâts occasionnés, on mesure dans ce cas l'amplitude ou la longueur du signal généré par le séisme sur les sismographes. Ainsi, on caractérisera un séisme par sa magnitude « M » qui est calculée comme le logarithme de l'amplitude des ondes sismiques d'une certaine fréquence enregistrée sur un sismographe:

$$M = \text{Log}(A/T) + f(\Delta, h) + S$$

avec :

A: c'est l'amplitude de l'onde.

T: représente la période de l'onde,

f: facteur de correction, fonction de la distance épacentrale (Δ) et de la profondeur focale h ,

S: facteur de site.

La magnitude peut être reliée à l'énergie libérée lors d'un séisme (sous forme relative E_r) par la relation empirique suivante:

$$\text{Log } E_r = 11.4 + 1.5 M$$

ou E_r est exprimée en [ergs].

L'échelle utilisée pour quantifier la magnitude d'un séisme est celle de « RICHTER », qui comporte 9 degrés.

I - 2 Les effets induits par les séismes sur les barrages:

Le séisme est le facteur le plus favorable à la liquéfaction, au cours de ce 20^{ème} siècle de nombreux tremblements de terre dévastateurs ont ruiné des régions entières en détruisant des constructions et des populations. Les barrages sont aussi très touchés. Des désordres très importants relevés lors de certains séismes au niveau des barrages en terre et qui lui sont imputables, en témoignent sans conteste.

Les principaux dommages observés au niveau des barrages en remblai ont été étudiés par H.B SEED. Il les classes comme suit :

- 1) - Cisaillement du barrage provoqué par le mouvement d'une faille traversant la fondation.
- 2) - Glissement ou étalement du barrage par rupture de l'un de ces talus.
- 3) - Erosion interne et phénomène de renard à travers les fissures.
- 4) - Perte de revanche et déversement sur le barrage.
- 5) - Déversement sur le barrage de la vague provoquée par un glissement ou un écoulement rocheux de grand volume dans le reservoir.
- 6) - Tassement ou affaissement de la crête du barrage.
- 7) - Destruction du déversoir et des ouvrages de vidange.

Prenons à titre d'exemple la description de quelques ruptures des barrages observés lors des séismes.

I-2-1 Barrage de SAN FERNANDO:

Le séisme de SAN FERNANDO a eu lieu le 9 février 1971 avec une magnitude ($M=6.6$ sur l'échelle de RICHTER), une accélération évaluée à $(0.5g - 0.6g)$ et d'une durée environ 14 seconde, le barrage était construit essentiellement par un remblai hydraulique et dont les caractéristiques sont les suivantes :

Hauteur = 43m, capacité = $2.5 \cdot 10^6 m^3$, pente en amont 2.5/5.1, pente en aval 5/1.

Avant et au moment du séisme le niveau de la retenue était 33.8m, à 7.6m sous l'évacuateur de crue, à 11m sous la crête. Après le séisme la revanche n'était plus que 1.5m.

Les dommages observés sont un glissement dans l'ouvrage. L'analyse de cette rupture a montré que le dommage est due à une liquéfaction qui s'est développée au pied de l'ouvrage, dont les caractéristiques mécaniques des matériaux sont :

$$-D_{50} = (0.05 \text{ à } 1) \text{ mm.}$$

$$-\gamma_d = (15 \text{ à } 19) \text{ kN/m}^3$$

$$-\text{Coéfficient d'uniformité } c_u = (7 \text{ à } 10)$$

$$-\text{Densité relative } D_r = (51 \text{ à } 54)\%$$

$$-c = 0 ; c_{ev} = 10 \text{ kpa} ; \phi = 37^\circ ; \phi = 15^\circ$$

On précise qu'à « SAN FERNANDO », il y avait (25) barrages construits en matériaux argileux qui n'ont subi aucun désordre important.

I-2-2 Le barrage SHEFFIELD de SANTA BARBARA:

Le séisme a eu lieu au juin 1925, avec les caractéristiques suivantes :

$M = 6.3$ sur l'échelle de Richter; situé à une distance d'une dizaine de kilomètres de l'épicentre la durée de séisme est de (15-18) seconde; l'accélération $a = (0.04 \text{ à } 0.1)g$. Le barrage est construit en 1917 en remblai. Il avait une longueur de 219.5 mètres et une hauteur de 8m.

On a observé une rupture totale du barrage. L'analyse de l'état de l'ouvrage après rupture a révélé un glissement qui c'est produit à l'aval de remblai. Encore, les dégâts relevés sont attribués à la dégradation des propriétés mécaniques du sol par liquéfaction.

I-2-3 Dommages subis par le barrage d'Hebgen Lake (1959):

Le séisme d'Hebgen s'est produit en 1959 suivant une faille située à quelques mètres du barrage Hebgen. Ce barrage de 27m de haut, était construit par des recharges en sable et graviers à granulométrie continue et légèrement cohérents.

L'étanchéité était assurée par un noyau central en béton, descendant jusqu'au rocher de fondation. Après le séisme, on a pu observer ce qui suit :

- La fondation rocheuse supportant le noyau s'était enfocée d'environ 3m.

- Les dalles de pieds de l'évacuateur qui étaient fondées sur des alluvions sablonneuses étaient pratiquement détruites.
- La fondation rocheuse s'était déplacée massivement.
- Des fissures transversales et surtout longitudinales de 5 à 30 cm de largeur ont apparu.
- De nombreuses vagues ont submergé la crête (la hauteur d'eau au dessus de la crête était d'environ un mètre).
- De nombreux glissements se sont produits dans le réservoir; l'un d'eux a été estimé à 50.10⁶ tonnes de rocher.

I-2-4: Barrages d'Ojika:

Le séisme d'Ojika a eu lieu en 1939. Il avait une magnitude de 6.6 et a provoqué dans certaines zones des accélérations de l'ordre de 0.3g à 0.4g. Soixante quinze (75) barrages furent endommagés; soixante trois (63) ont subi des désordres importants et douze (12) se sont complètement rompus. Une étude systématique a alors été menée sur cinquante huit (58) des barrages détruits, et sur douze (12) autres qui n'avaient pas subi de dégâts majeurs. Parmi les douze (12) qui se sont entièrement rompus, neuf (9) étaient principalement construits en matériaux sableux et leur ruptures ont été liées à la liquéfaction de leur matériaux. Pour les trois (3) autres, la rupture a été attribuée à l'érosion des conduites. Aussi, il a été remarqué que la majorité des ruptures ont eu lieu quelques heures après la fin de la secousse.

Conclusion :

En résumé, les analyses précédentes nous ont permis de déduire les observations suivantes :

- Bien que les calculs de stabilité par méthodes classiques simplifiées, prévoyaient une sécurité totale (coefficient de sécurité supérieur à 1,05) pour tous ces barrages, certains d'entre eux se sont complètement rompus.
- Aucune rupture grave n'a affecté les barrages construits en matériaux argileux.
- Quelques endommagements ont été attribués aux infiltrations et ruptures des ouvrages annexes.

Le comportement des barrages en terre dépend du comportement des matériaux constitutifs. Donc l'analyse de la structure doit passer d'abord par l'analyse des matériaux constitutifs.



I-3 Définition et terminologie de la liquéfaction :

I-3-1 Historique :

La première fois, c'est en 1936, que CASAGRANDE avait fait une tentative d'explication du phénomène de liquéfaction, en introduisant la notion d'indice de vide critique, en exploitant des résultats déduits des essais avec chargement monotone.

Les études pionnières ont été effectuées dans les années soixante, suite au séisme historique de NIGATA, qui est considéré simulateur de ces études.

Ensuite les chercheurs sont penchés sur l'étude de l'évaluation du risque de liquéfaction des sols, plusieurs modélisations et approches ont été faites par plusieurs professeurs et chercheurs citons à titre d'exemple le professeur SEED de l'université de BERKELEY, et d'autres comme, FINN, MARTIN, IDRIS, CASTRO, CHANG, ANNAKI, DRENEVICH, HABIB, etc.

I-3-2 Définition :

D'après la définition proposée par le comité de dynamique des sols de l'ASCE (1978), on appelle liquéfaction le processus de transformation d'une substance en un liquide. (Pour les sols, cette liquéfaction est une perte de résistance au cisaillement) consécutive au développement des surpressions interstitielles et entraînant une chute des contraintes effectives, jusqu'à s'annuler.

Handwritten notes:
 charge statique
 $\sigma_v \rightarrow \tau$
 $\sigma_v \rightarrow \tau$
 Pour les sols, cette liquéfaction est une perte de résistance au cisaillement) consécutive au développement des surpressions interstitielles et entraînant une chute des contraintes effectives, jusqu'à s'annuler.

Ces surpressions sont accompagnées de déformations dont l'amplitude peut définir la condition où le sol subit une déformation continue illimitée à une valeur de contrainte résiduelle qui réduit la contrainte effective de façon importante, à ce stade la résistance du sol au cisaillement devient négligeable, et le sol s'écoule comme un liquide.



L'augmentation de la pression interstitielle peut résulter d'un chargement quasistatique monotone ou d'un chargement cyclique alterné, dû aux éléments naturels (houle, séisme) ou à des technologies particulières (vibrofonçage, machines tournantes, explosion, chocs,.....etc.)

D'une façon générale pour qu'il y ait liquéfaction il faut qu'il y ait conjonction des conditions suivantes :

- Présence d'un terrain sableux.
- Présence d'une nappe, et le sol doit être saturé, si non la réduction du volume s'opère par contraction de volume du gaz occulté sans augmentation sensible de pression de l'eau interstitielle.
- Chargement cyclique (séisme).
- La perméabilité du sol doit être faible devant la vitesse de développement des surpressions interstitielles pour qu'il puisse y avoir cumule à chaque cycle.

On note que ces conditions sont nécessaires et non suffisantes car il peut y avoir toute ces condition sans avoir la liquéfaction du sol.



CHAPITRE II

COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES SOLS

II-1 Introduction:

Les barrages en terre sont des murs de retenue d'eau suffisamment étanches, construits avec la terre et les matériaux rocheux du site, suivant des mélanges et proportions bien définis. Le terme « terre » doit être pris dans le sens le plus large du mot et sert à désigner toute sorte de matériaux et débris terreux comprenant non seulement les différents sols définis par le pédologue, mais aussi l'ensemble des matériaux provenant de la désagrégation ou de la décomposition des roches.

Lorsqu'un barrage et sa fondation sont soumis à un séisme, celui-ci y engendre un champ d'accélération qui ~~depend~~^{est} de la raideur des matériaux constitutifs, leur capacité d'amortissement interne, l'augmentation de la pression interstitielle dont l'importance est fonction de la " fréquence du séisme " et de la perméabilité des matériaux.

Donc, l'étude de comportement dynamique des barrages en terre conduit à l'étude de comportement des sols sous chargement cyclique, particulièrement les sables, les matériaux argileux et les sols graveleux propres.

II-2 Comportement des sols sous chargement cyclique :

L'examen d'enregistrements de mouvement des sols de nature géologique et géotechnique différente, fait apparaître une forte influence des caractéristiques géotechniques sur la nature de la réponse à un séisme donné.

Cette différence de nature se manifeste par des différences dans les accélérations maximales de surface et surtout dans les spectres de réponse, d'où la nécessité d'étudier le comportement des sols sous chargement dynamique. Ceci permet, en zone sismique, de parvenir à une bonne conception des ouvrages qui y sont fondés.

Les essais de laboratoire ont mis en évidence les différentes réponses des sols lorsqu'ils sont soumis à des chargements cycliques.

Le concept de l'état caractéristique permet de rendre compte du comportement des sols sous chargement dynamique.

La position de la valeur moyenne du déviateur de contrainte par rapport au seuil caractéristique gouverne les variations de volume. Le corollaire de ces variations de volume pour un chargement cyclique non drainé est une variation de la pression interstitielle. Les essais cycliques à faible amplitude de charge, dans le domaine subcaractéristique, induisent un développement continue des pressions interstitielles. La contrainte effective du matériau décroît et tend vers une stabilisation au tour de la ligne caractéristique : c'est l'état de mobilité cyclique (figure II-1). Les cisaillements cyclique non drainés dans le domaine surcaractéristique conduisent à un comportement inverse : la stabilisation vers l'état caractéristique s'effectue par diminution de pression interstitielle, ce qui correspond au comportement dilatant du matériau dans les essai drainés : il y a stabilisation (figure II-1).

La liquéfaction est obtenue lors des cisaillements non drainés, alternés de part et d'autre du déviateur nul. Chaque cycle de chargement réduit la contrainte moyenne p' par suite de l'augmentation de pression interstitielle; ce processus s'accélère lorsque la contrainte effective franchie le seuil caractéristique. Après quelques cycle, la contrainte moyenne tend à s'annuler avec le déviateur de contrainte lors d'une décharge (figure II-1). Il y a alors liquéfaction. Dans ce qui suit nous nous intéresserons particulièrement au phénomène de liquéfaction.

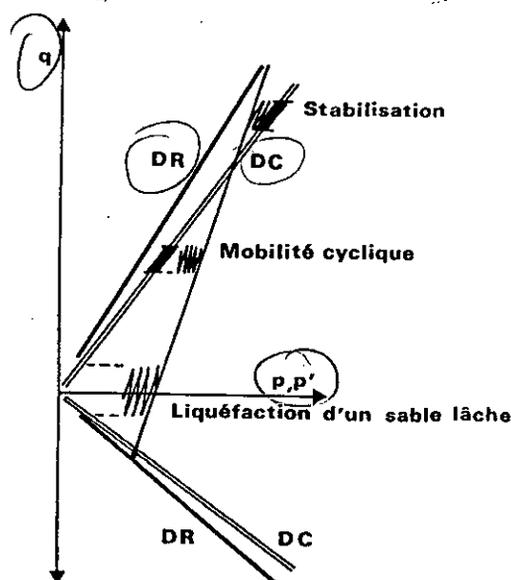


Figure II-1 Comportement du sable en condition non drainée

Mécanisme de la liquéfaction :

Les sols pulvérulents et particulièrement les sables sont les plus susceptibles à la liquéfaction, la théorie de la liquéfaction pour les sols pulvérulents est fortement liée à la densité critique et à la dilatance, car lorsqu'un élément du sol pulvérulent est soumis à un effort de cisaillement cyclique (séisme), il subit une variation de volume, le sens de cette variation dépend de la manière dont les grains sont enchevêtrés les uns par rapport aux autres, c'est à dire l'état de compacité.

Ce phénomène est appelé « dilatance » il intervient aussi, mais de façon moins importante dans les sols fins.

La figure (II-2) montre les courbes efforts - déformations ainsi que les variations de volume correspondantes. Lors de trois essais à la boîte de cisaillement, pour un même sable pris dans des conditions de compacité différentes.

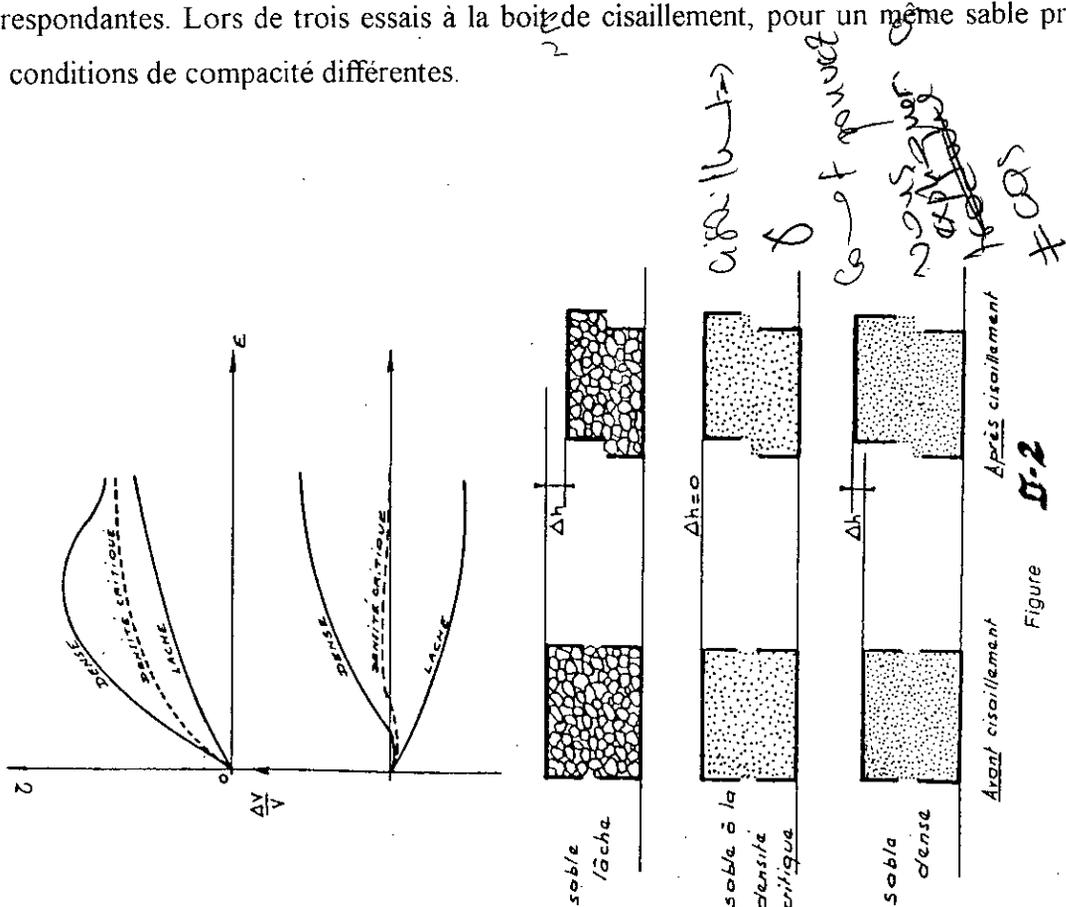


Figure II-2

Pour un sable lâche la variation de volume est négative, puis pour un sable dense, la variation de volume est positive, et finalement pour un sable pris à une densité initiale tel qu'il n'y ait pas de variation de volume au cours de cisaillement ($\Delta v = 0$), cette valeur de densité s'appelle la densité critique.

Pour les sols saturés la notion de dilatance et densité critique est très importante, car c'est elle qui explique le mécanisme de liquéfaction.

En effet, lors d'un séisme, bien que les sols grenus ont une perméabilité importante, peuvent entraîner un comportement non drainé de ces derniers.

Sur un sable dense saturé, de telles sollicitations augmentent les contraintes effectives, il y a en effet tendance à une augmentation du volume de squelette, qui entraîne une diminution de la pression interstitielle, la résistance à la rupture se trouve ainsi augmentée.

Au contraire, dans un sable lâche les même sollicitations diminuent les contraintes effectives, puisqu'il y a tendance à une diminution de volume, comme le comportement de sol est non drainé, donc $\Delta v = 0$, la pression interstitielle augmente fortement, arrivée a une certaine limite, il va y avoir liquéfaction de sable et par suite la rupture. La figure (II-3) montre l'aspect qualitatif de l'augmentation de la pression interstitielle.

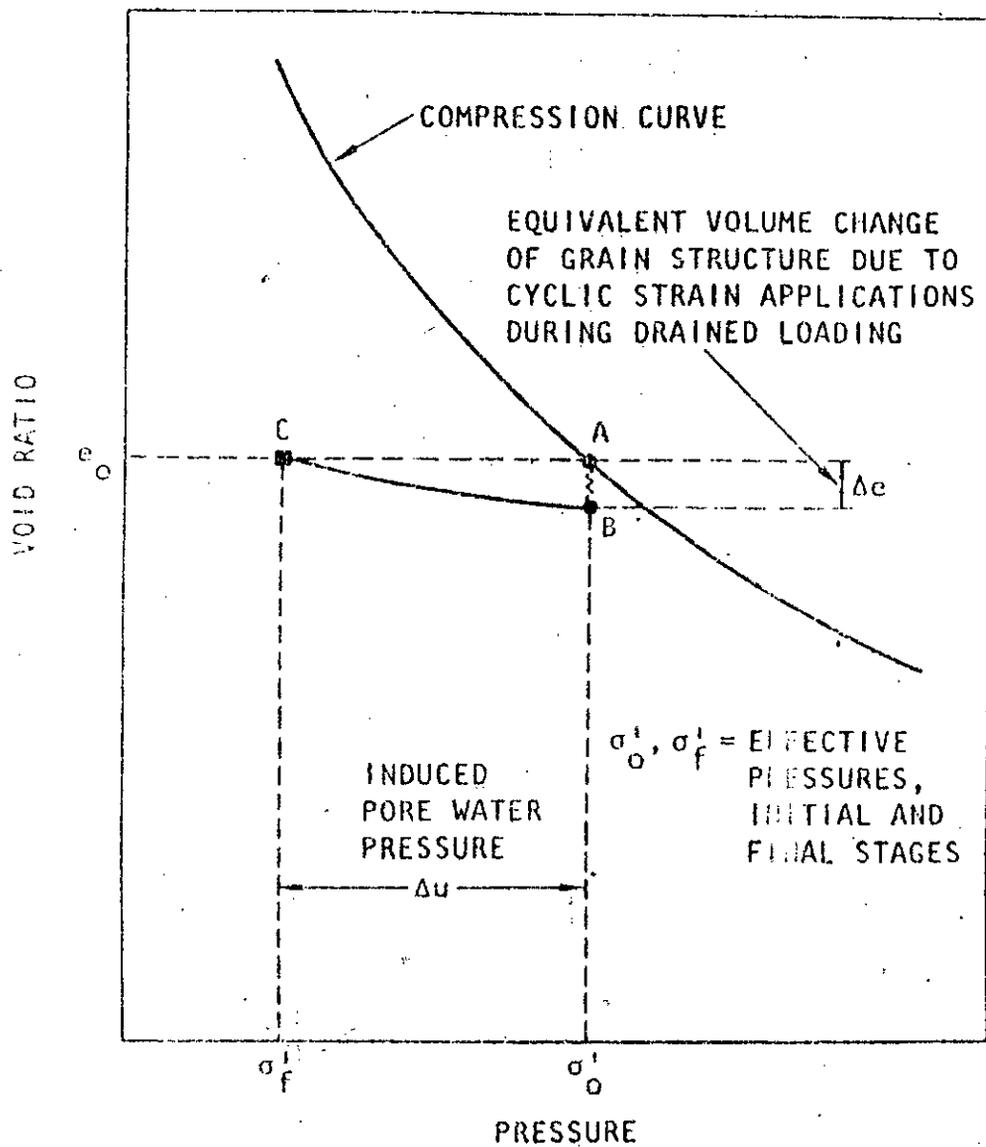


FIG II-3! Schematic illustration of mechanism of pore pressure generation during cyclic loading.

Voici ainsi l'aspect théorique qui explique le phénomène de liquéfaction :

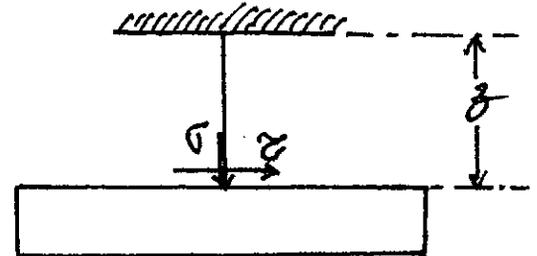
Prenons un échantillon du sol à une profondeur z .

La contrainte de cisaillement τ à une profondeur z est donnée par la formule :

$$\tau = c + \sigma' \cdot \text{tg}(\varphi)$$

avec :

$$\sigma' = \sigma - u_p$$



u_p : pression interstitielle, $u_p = \gamma_w \cdot z$

σ : contrainte normale à une profondeur z , $\sigma = \gamma_{\text{sat}} \cdot z$

φ : angle de frottement interne

c : cohésion ($c = 0$) pour les sols pulvérulents

σ' : la contrainte effective, $\sigma' = (\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w) z = \gamma_d \cdot z$

Si la pression interstitielle augmente d'une valeur u , cela entraîne une diminution de la contrainte effective de la même valeur et la contrainte de cisaillement devient :

$$\tau = (\sigma' - u) \text{tg}(\varphi).$$

- On aura liquéfaction initiale lorsque $\tau = 0$, cela implique que :

$$\sigma' = u \quad \text{ou} \quad u/\sigma' = 1$$

- donc dans ce qui suit on évalue le risque de liquéfaction en calculant l'évolution du taux de pressions interstitielles $r_u = u/\sigma'$

il y aura liquéfaction lorsque : $u/\sigma' \geq 1$



Plusieurs études ont montrée (conditions au laboratoire) que la contrainte cyclique de cisaillement causant la liquéfaction est approximativement proportionnelle à la contrainte normale effective initiale.

D'où, les résultats des essais sont généralement donnés sous la forme: τ/σ'

II-2-1 Comportement des sables:

- Les sollicitations cycliques peuvent, pour certains sols, conduire à la rupture. Ce sont le cas de sables saturés, peu denses, pour lesquels certains chargements sismiques peuvent provoquer la liquéfaction.
- La liquéfaction dans les sables est liée aux variations de volume du squelette solide.
- Pour un sable sec aussi dense soit il initialement, l'application d'un cycle de chargement analogue à celui de la figure (II-4) conduit à une densification du matériau.

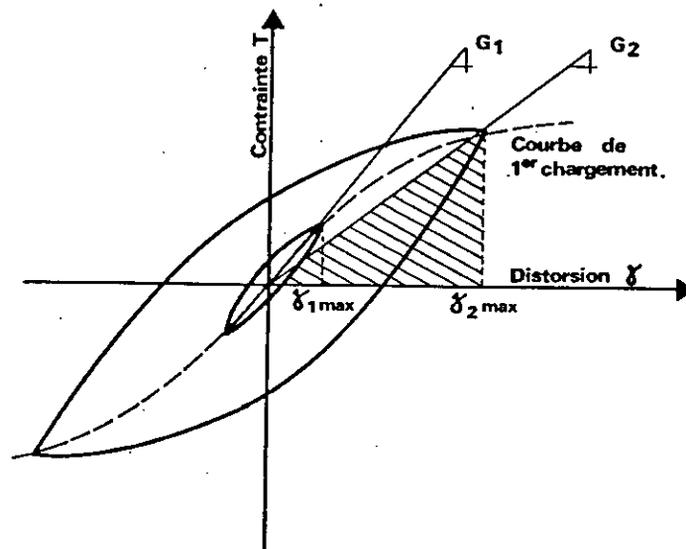


Figure II-4 Courbe effort - Déformation cyclique .

- Si le même échantillon de sol est saturé et sollicité en condition non drainée, son volume ne peut pas varier. Le réarrangement des grains qui tend à le densifier provoque un transfert de contraintes supportées par les grains à l'eau interstitielle.

En effet, à la rupture, s'il n'y a pas de liquéfaction les sables denses ont un comportement dilatant qui se manifeste par une diminution de la pression interstitielle, le sol recouvre alors toute ou une partie de sa résistance au cisaillement et cesse de se déformer de façon importante.

Les déformations correspondantes sont limitées dans le cas de sables denses dont la dilatance sous l'effet du cisaillement favorise la dissipation des pressions interstitielles et le regain de la résistance au cisaillement. Par contre, dans le cas de sables lâches, les caractéristiques de résistance au cisaillement sont fortement affectées par la sollicitation cyclique associée au séisme.

II - 2 - 2 Comportement des matériaux argileux :

Pour ce type de sol, la rupture peut être obtenue pour un nombre de cycles de chargement suffisamment élevé, le plus souvent bien supérieur au nombre de cycles équivalent d'un séisme, ce qui explique la bonne tenue des remblais argileux plastiques.

Les caractéristiques de résistance au cisaillement de certains matériaux argileux, à comportement compactant, sont fortement affectées par la sollicitation cyclique due au séisme.

Le phénomène d'étalement (l'une des principales causes de ruptures dynamique d'un barrage en remblai), peut affecter les couches d'argiles molles, plus au moins sensibles, de la fondation. La rupture par ce phénomène est due au développement des pressions interstitielles induites par le cisaillement cyclique dû au séisme.

II - 2-3 Comportement des sols graveleux propres :

Ces sols présentent une stabilité importante du fait de leur perméabilité élevée qui empêche le développement complet de pressions interstitielles ou du moins limiter la durée (à l'échelle de temps du séisme), pendant laquelle l'état de rupture (liquéfaction) est effectivement atteint. Il est de même pour les enrochements, il faut vérifier que ces sols grossiers présentent une perméabilité suffisante en regard de contractance, pour que les pressions de l'eau dans les interstices aient le temps de se dissiper. ce qui n'est pas le cas pour les éboulis, les moraines ou les enrochements médiocres comportant un pourcentage important de matériaux fins.

Les matériaux grossiers ,très lâches et perméables, peuvent se contracter en un temps très court et présenter des phénomènes de liquéfaction. En général, il semble que les matériaux très grossiers (grosses alluvions, enrochements), s'ils sont bien compactés et s'ils présentent une courbe granulométrique correspondant à un matériau plein sont particulièrement adoptés aux séismes.

II - 3 Méthode d'identification des sols susceptibles à la liquéfaction :

La 1^{ère} phase d'investigation s'appuiera d'abord sur les critères granulométriques et sur les résultats des essais d'identification classiques de mécanique des sols. Le tableau ci-dessous regroupe les différents critères envisagés dans les prochaines règles de construction parasismique. Cette première phase, qui fait appel à des méthodes conventionnelles, doit déboucher sur un diagnostic permettant de repérer les horizons qu'il faut tenir comme suspects ou non de liquéfaction. En cas de doute, l'analyse devra être approfondie.

Tableau 1 :

Définition, à partir des résultats d'essais d'identification traditionnels, des sols que l'on doit considérer comme susceptibles de se liquéfier :

sols susceptibles de se liquéfier
<p>* sables, sables vasards et silteux tel que:</p> <ul style="list-style-type: none"> • degré de saturation voisin de 100% • D_{50} compris entre 0.05 et 1.5 mm • coefficient d'uniformité : $C_u = D_{60} / D_{10} < 15$ <ul style="list-style-type: none"> • contrainte verticale effective en place inférieur à 0.1 Mpa <p>* sols argileux :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D_{15} > 0.005$ mm. • $\omega_L < 35$ %. <p>Teneur en eau : $\omega > 0.9 \omega_L$.</p>



La 2ème phase, consiste à l'évaluation du risque à l'aide des essais sur place. Ces essais déjà nécessaires pour le projet en situation normale, sont les seuls permettant de reconnaître rapidement et à moindre coût l'ensemble des couches à l'échelle d'un site. On conçoit dès lors l'intérêt que représente la valorisation des résultats qu'ils fournissent pour apprécier également le risque de liquéfaction.

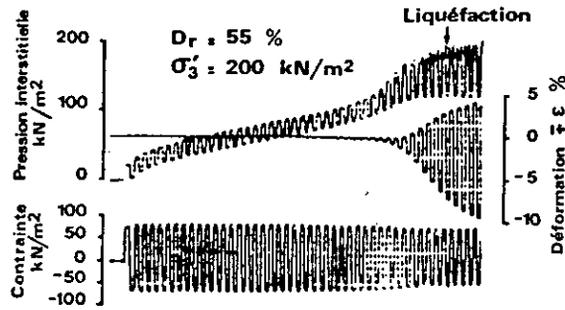
Différentes corrélations empiriques mettant en relation la réponse sismique de sites ayant subi un séisme et le résultat d'essais en place ont ainsi été affinés au cours des vingt dernières années.

La recherche de corrélations s'est faite jusqu'à présent principalement avec le résultat d'essais de pénétration aux standard penetration test (SPT), puis au pénétromètre statique.

II-4 Paramètres affectant la résistance au cisaillement cyclique (R.C.C):

L'étude de ces paramètres ne peut se faire que dans des conditions expérimentales bien contrôlées que seuls les essais au laboratoire permettent d'obtenir. A cet effet divers types d'appareillage sont utilisés: l'appareil triaxial cyclique, la table vibrante. En place, la vitesse d'application des sollicitations sismiques étant généralement plus grande que la vitesse de dissipation des pressions interstitielles (fonction de la perméabilité du sol et des conditions de drainage), les essais de liquéfaction au laboratoire sont réalisés en conditions non drainées. Ils permettent d'évaluer la R.C.C non drainée du sol.

Lors de la réalisation d'un essai de liquéfaction, pour un effort cyclique d'amplitude constante donnée, la pression interstitielle croît avec le nombre de cycles de sollicitations jusqu'à atteindre une valeur maximale égale à la pression de confinement, cet état caractérise la liquéfaction. La déformation, tout en augmentant avec le nombre de cycles, reste faible au début de l'essai pour devenir importante au voisinage de la liquéfaction (figure II-5).



Enregistrement d'un essai triaxial cyclique

Fig- II-5

La R.C.C dépend des même paramètres que ceux dont dépend la loi de comportement d'un sol:

- De l'état de contraintes actuel;
- De l'histoire des contraintes et des déformations subies depuis sa formation;
- De l'incrément de contrainte appliquée.

Auquels il faut ajouter l'influence de la saturation. L'évaluation de la résistance au cisaillement cyclique (R.C.C) consiste à reproduire au laboratoire, de la façon la plus fidèle possible, les conditions de sollicitations en place.

II-4-1 Influence de l'état de contraintes actuel :

En déformations planes, qui est l'hypothèse admise pour traiter les problèmes de propagation d'ondes, l'état de contrainte d'un élément de sol est défini par les trois composantes σ'_x , σ'_z et σ'_{xz} du tenseur des contraintes effectives. Si la composante σ'_{xz} est nulle, la contrainte principale mineure σ'_x est reliée à la contrainte principale moyenne σ'_z par le coefficient de poussée des terres au repos k_0 :

$$\sigma'_x = k_0 \cdot \sigma'_z$$

Des mesures de la R.C.C effectuées à l'aide de cisaillement simple ou de cisaillement par torsion montrent que celle-ci est :

- Pratiquement proportionnelle à la valeur de σ'_z bien qu'en toute rigueur le rapport de proportionnalité décroît légèrement lorsque σ'_z augmente de façon importante;
- Fortement influencée par la valeur de k_0 , elle croît lorsque k_0 augmente (voir figure II-6).

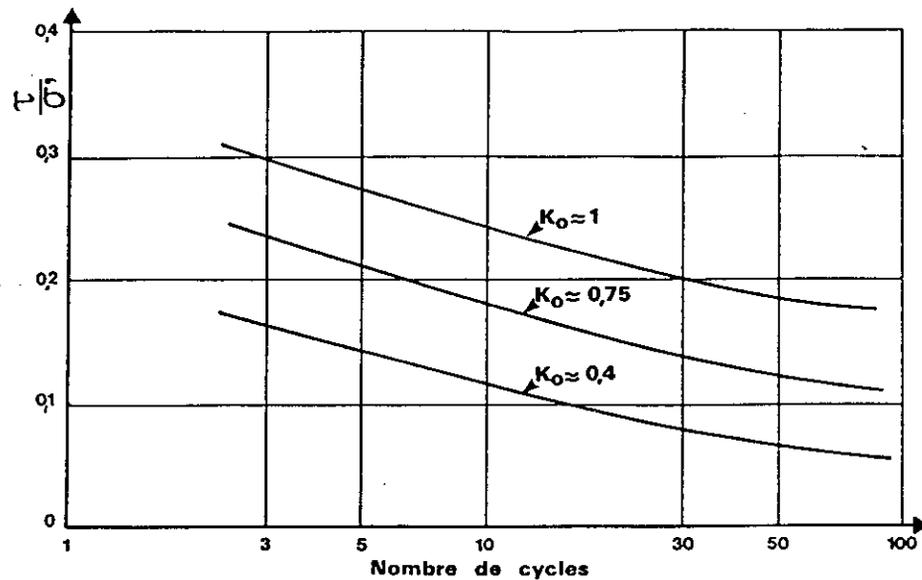


Figure II-6 Influence de K_0 sur la RCC

- La R.C.C non drainée mesurée par le rapport τ_c / σ'_z est influencée par la valeur du cisaillement statique initial. Par rapport à la situation sans cisaillement initial, cette résistance peut être augmentée ou diminuée suivant l'état de compacité initial du sol et de la valeur du cisaillement statique. Pour les sols denses elle est, en général, augmentée comme le montre la figure (II-7).

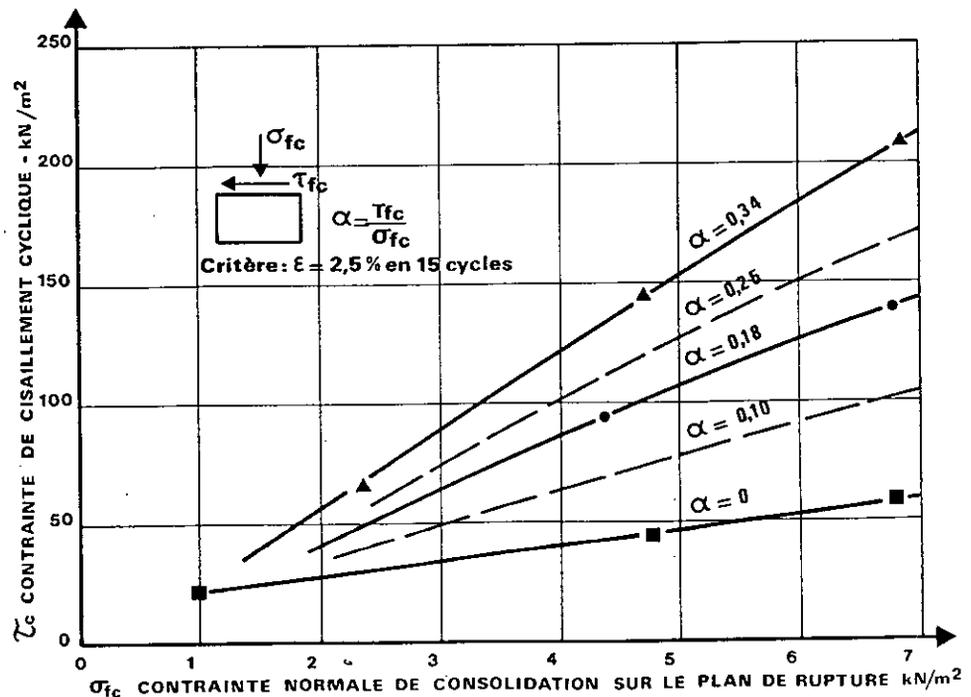


Figure II-7 Influence d'un cisaillement statique initial sur la RCC

II-4-2 Influence de l'histoire des contraintes et des déformations:

La nature du sol constitutif, le mode de formation du dépôt et l'histoire des sollicitations subies jusqu'à l'état de contraintes actuel confèrent au sol une structure caractérisée par une compacité et un certain arrangement des grains. Tous ces facteurs ont une influence sur la R.C.C non drainée du sol.

De point de vue de la résistance à la liquéfaction, il n'est pas possible de différencier les sables en fonction de leur granulométrie. Les premières études (LEE-FITTON, 1968) qui faisaient apparaître une forte dépendance de la R.C.C sur le D_{50} du matériau, semblent être entachées d'erreurs expérimentales importantes. Tout juste est-il possible de définir un fuseau de matériaux liquéfiables. Un tel fuseau est donné sur la figure (II-8) (Thompson-EMERY, 1976).

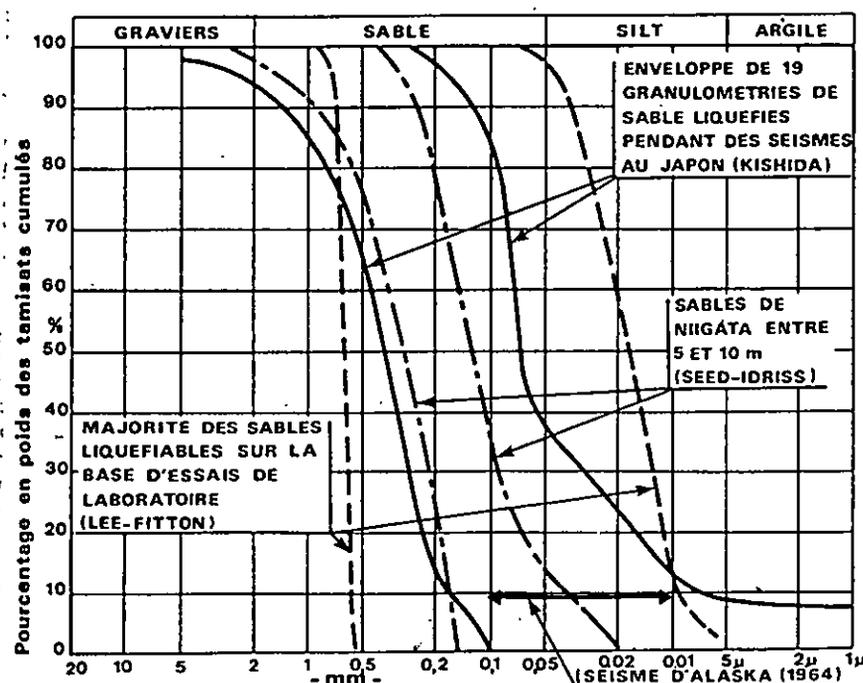


Figure II-8 Fuseau granulométrique des sols liquéfiables

Par ailleurs, la composition minéralogique et la forme des grains a une influence sur la R.C.C. Aucune conclusion définitive ne peut cependant être actuellement tirée quant à l'influence de ces facteurs.

a) Influence de la perméabilité (drainage) :

Au laboratoire, les essais se font en conditions non drainées sur des échantillons saturés. Ces conditions sont différentes de la réalité d'autant plus qu'il s'agit de sable, matériau perméable et drainant. En fait, plus la perméabilité est élevée, plus la dissipation des pressions interstitielles se fait rapidement. Pour des perméabilités très élevées (sables grossiers, graviers), la génération des pressions interstitielles par l'excitation sismique peut être empêchée.

b) Influence de la densité du sol :

La résistance à la liquéfaction augmente si la densité relative (D_r %) augmente. Les résultats des observations in-situ montrent que la résistance au cisaillement cyclique est pratiquement proportionnelle à la densité relative (D_r) du sol pour des valeurs, de ce paramètre, comprises entre 0 et 75%, mais pour des valeurs plus élevées, la résistance au cisaillement croît plus vite que la densité relative.

Tous les sables, quelque soit leurs densités relatives, sont capables de développer une condition de liquéfaction figure (II-9), Cependant, les conséquences diffèrent avec la densité relative:

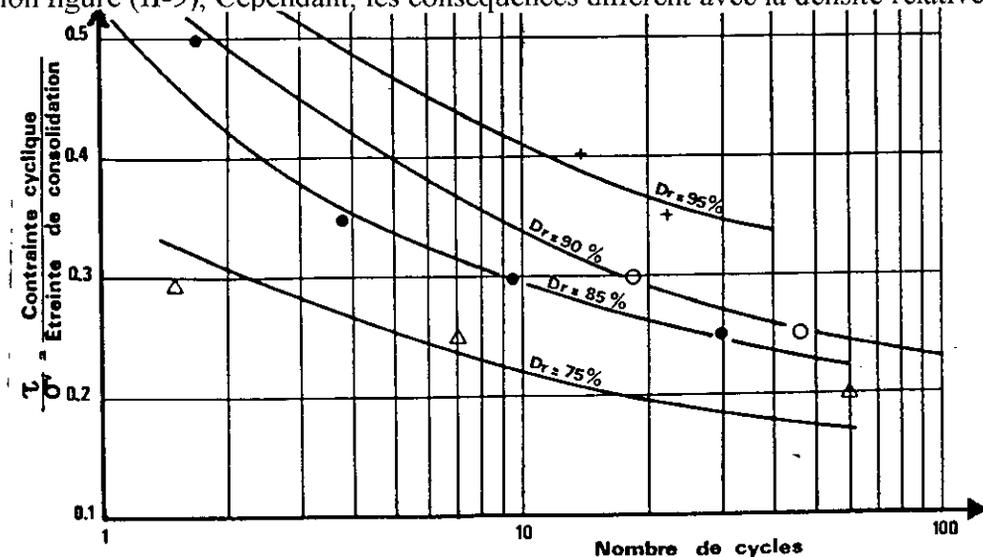


Figure II-9 Influence de la densité relative sur la RCC

- Pour des densités relatives inférieures à 50%, les déformations accompagnants la liquéfaction sont pratiquement illimitées et préjudiciables au comportement des ouvrages, en particulier les barrages en terre.

-Par contre, pour une densité relative supérieure à 90% on aura des déformations d'amplitudes d'environ 5%, et cela du fait que le comportement dilatant du sable entraîne une diminution rapide de la pression interstitielle et le matériau recouvre partiellement sa résistance au cisaillement.

c) Influence de la structure du sol :

On désigne par structure la forme des grains et l'arrangement de ceux-ci. Cette structure résulte du mode de formation du dépôt et de l'histoire des contraintes et des déformations subies depuis cette formation.

La figure(II-10) présente des courbes de la R.C.C mesurées sur des éprouvettes d'un même sable préparées à la même densité,mais par des méthodes de mise en place différentes (Mulilis et al,1975).

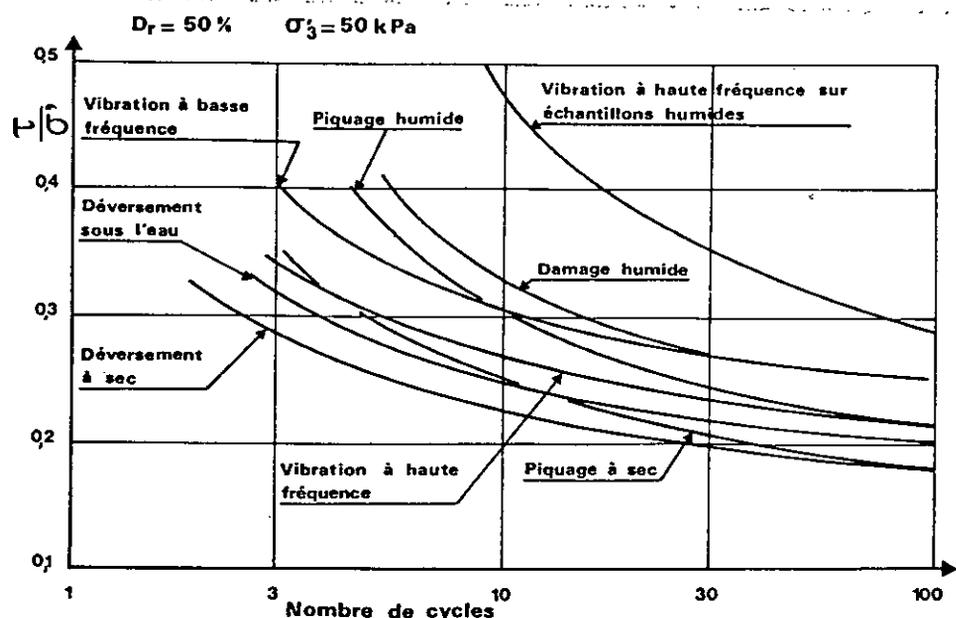


Figure II-10 Influence de la structure sur la RCC (d'après Mulilis et al 1975)

L'accroissement de la R.C.C peut atteindre 100% suivant la méthode de préparation. La structure la moins stable correspond à un assemblage où l'angle moyen, formé par les plans de contact entre les grains et la direction de la sollicitation, est égal à 45° (Seed et al , 1975). La R.C.C n'est pas seule modifiée par la structure du sol; tout le comportement jusqu'à la génération des pressions interstitielles obtenues pour diverses méthodes de préparation des éprouvettes (LAAD , 1976).

Cette influence de la structure formée par l'assemblage des grains est responsable des différences de la R.C.C mesurées sur des échantillons ayant subi des chemins de contraintes ou de déformations différentes : surconsolidation , sollicitations cycliques antérieures , âge du dépôtetc.

d) Influence de la surconsolidation:

La surconsolidation du sol a pour effet d'accroître sa R.C.C cet accroissement ne peut être expliqué par la seule augmentation de contrainte moyenne, résultant d'une augmentation de K_0 (FINN, 1980) et une part provient de la différence de structure.

e) Influence des sollicitations cycliques antérieures:

Les sollicitations cycliques de faible amplitude augmentent la contrainte moyenne, mais tendent également à produire des assemblages de grains plus stables, donc plus résistants.

La figure (II-11) donne un exemple de variation de la R.C.C, mesurée sur deux échantillons dont l'un a été pré vibré puis remis en équilibre, par dissipation des pressions interstitielles, sous l'état de contraintes effectives initial.

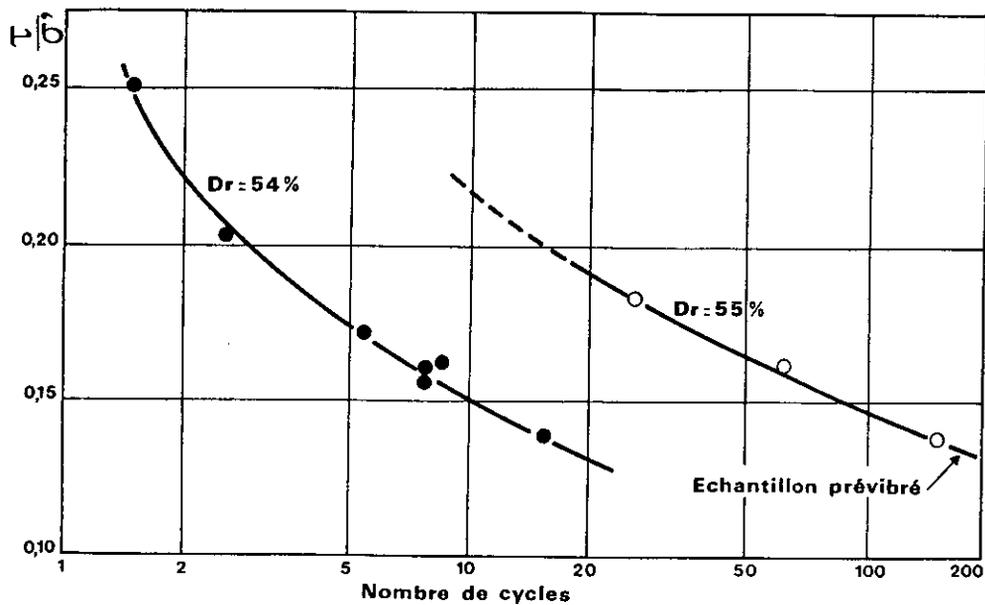


Figure II-4-1 Influence des prévibrations sur la RCC

f) Influence de l'âge du dépôt :

L'expérience montre que l'âge du dépôt peut avoir une influence sur sa R.C.C. Plus le dépôt est ancien, plus sa résistance est élevée. Cela provient partiellement d'une augmentation de densité, mais également d'une différence de nature des contacts entre les grains.

II-4-3 Influence du mode de vibration:

Dans les essais de laboratoire, une seule direction de vibration est imposée. En réalité, le sol est soumis à une vibration à trois directions, deux transversales et une verticale, cette dernière n'introduit pratiquement pas de distorsion (γ), donc elle n'a pas une grande influence sur la résistance au cisaillement cyclique. Cela est observé lors des essais au laboratoire, réalisés sur la table vibrante animée d'un mouvement horizontal dans les deux directions. Les résultats ont montrés que la résistance au cisaillement cyclique est diminuée environ de 10% par rapport à celle obtenue sous sollicitations unidirectionnelles (Seed et al).

II-4-4 influence de la saturation :

L'augmentation de la pression interstitielle créée par le cisaillement résulte de la tendance à la variation du volume du sol. Dans un échantillon parfaitement saturé et en conditions non drainées, la variation de volume total est nulle et l'eau interstitielle est nettement moins compressible que le squelette du sol. La variation du volume est entièrement contrebalancée par l'augmentation de pression de l'eau. Dans un échantillon partiellement saturé la variation du volume est possible par compression de l'air occlus (emprisonné). Il en résulte une augmentation plus faible de la pression interstitielle d'où une résistance au cisaillement cyclique plus élevée.

On peut conclure que la résistance au cisaillement cyclique diminue si la saturation du sol est plus élevée, comme le montre la figure (II-12).

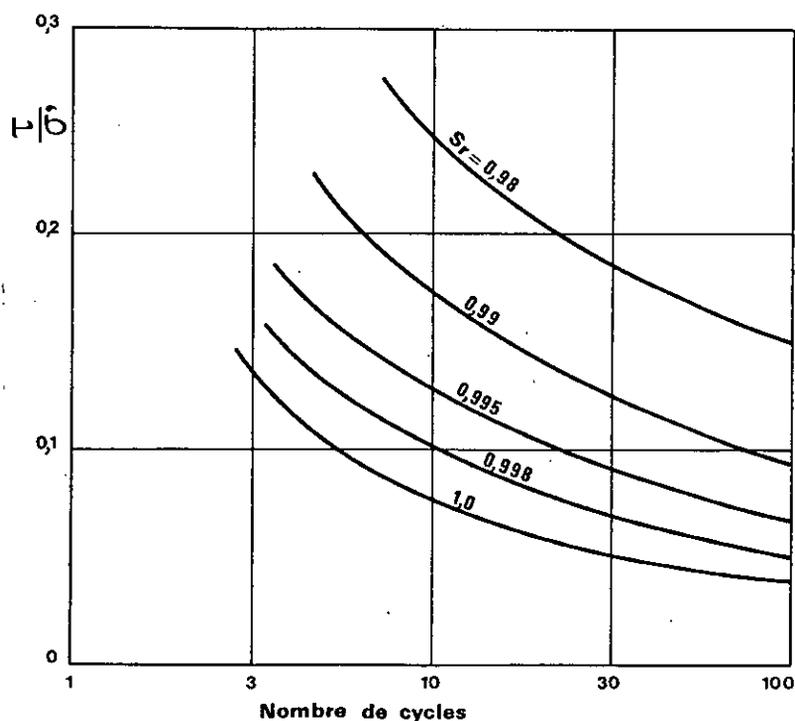


Figure II-12 Influence du degré de saturation sur la RCC

CHAPITRE III

EVALUATION DU RISQUE DE LIQUEFACTION ET

MODELISATION

Il existe deux approches pour l'évaluation du risque de liquéfaction d'un site, la première dite en contraintes totales, elle consiste à comparer la résistance au cisaillement cyclique du sol aux sollicitations appliquées. La seconde, appelée approche en contrainte effective, détermine l'évolution des pressions interstitielles au cours de la sollicitation en tenant compte des conditions de drainage éventuel.

La première approche nécessite beaucoup d'essais au laboratoire, elle est très limitée car elle ne prend pas compte des conditions de drainage. Par contre, la seconde est plus générale, elle s'écrit sous forme d'une équation différentielle aux dérivées partielles et qui peut être résolue mathématiquement ou numériquement .

Vu l'efficacité de la seconde méthode, par rapport à la première, on va étudier le risque de liquéfaction en contraintes totales d'une façon globale. On établira, pour la seconde méthode, l'équation différentielle qui régit la variation des surpressions interstitielles, ainsi que le programme d'élément finis qui permet d'évaluer le risque de liquéfaction en contraintes effectives.

La première phase d'investigation pour l'évaluation du risque de liquéfaction, est de voir si le sol est considéré comme susceptible de se liquéfier ou non, pour cela on doit se référer au tableau N° 1

III-1- Approche en contraintes totales:

Elle nécessite la détermination de la contrainte de cisaillement τ_d développée par la sollicitation sismique et de la résistance au cisaillement cyclique du sol τ_1 . La comparaison de ces deux dernières permet de définir le coefficient de sécurité F_s vis à vis le risque de liquéfaction :

$$F_s = \tau_1 / \tau_d$$

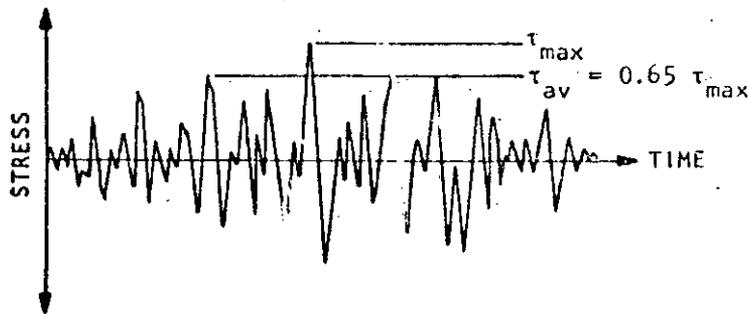
III-1-1 Détermination de la contrainte de cisaillement cyclique:

Les accélérogrammes des séismes ont une forme irrégulière figure(III-1), qu'il est pratiquement impossible de simuler au laboratoire. Il est donc judicieux de passer d'un diagramme irrégulier à un diagramme régulier produisant le même effet avec un nombre de cycles équivalent N_{eq} . L'équivalence des deux diagrammes se fait par comptage du nombre de cycle N_i à un niveau de contrainte τ_i en notant que, N_a cycles au niveau de contrainte τ_{eq} ont même effet, du point de vue liquéfaction, que N_i^* cycles à τ_i . En conséquence, N_i cycles à τ_i sont équivalents à $(N_a/N_i^*) \cdot N_i$ cycles à τ_{eq} . Par sommation sur tous les niveaux de contraintes de l'accélérogramme, on définit le nombre de cycles équivalent d'amplitude τ_{eq} par:

$$N_{eq} = N_a \cdot \sum_i (N_i / N_i^*) \tag{III-1.1}$$

Généralement, pour le calcul de τ_{eq} , on retient une fraction R de la valeur maximale de $\tau(t)$:

$$\tau_{eq} = R \text{ Max } / \tau(t) / \tag{III-1.2}$$



Time history of shear stresses during earthquake.

FIG III-1

L'expérience montre que la valeur communément admise de R est de $2/3$, on aura :

$$\tau_{eq} = (2/3) \text{ Max } / \tau(t) / \tag{III-1.3}$$

Pour déterminer le $\text{Max}/\tau(t)/$ et N_{eq} , on utilise la méthode simplifiée de SEED et IDRIS pour les massifs de sols.

Méthode de SEED et IDRIS(1971) :

Cette méthode consiste à appliquer l'équation fondamentale de la dynamique à une colonne de section unité et de hauteur h (Fig III-2).

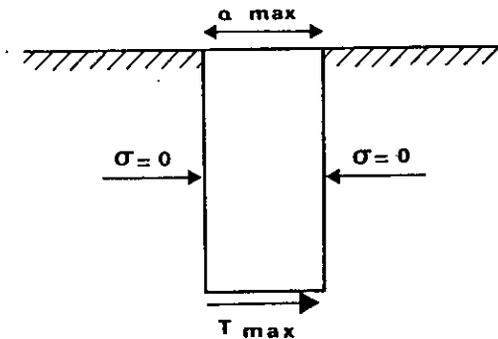


Figure III.2 Détermination approchée de T_{max}

Si la colonne était parfaitement rigide, la contrainte de cisaillement maximale serait dans l'hypothèse d'onde de cisaillement à propagation verticale.

$$\tau_{\max} = \frac{\gamma}{g} h a_{\max} \quad (III-1.4)$$

g : Accélération de la pesanteur .

γ: Poids spécifique du sol.

a_{max} : Accélération maximal de surface tirée directement de l'accélérogramme présentant le séisme de projet.

En réalité le sol possède une certaine flexibilité, ce qui fait donc τ_{max} sera inférieur à la valeur calculée par la formule (III-1.4).

SEED et IDRIS ont proposé une modification, en introduisant un coefficient multiplicateur r_d, déterminé à partir de calcul de la réponse dynamique du sol sur des sites sableux de densités différentes soumis à divers séismes. La variation de r_d en fonction de la profondeur est donnée sur la figure (III-3).

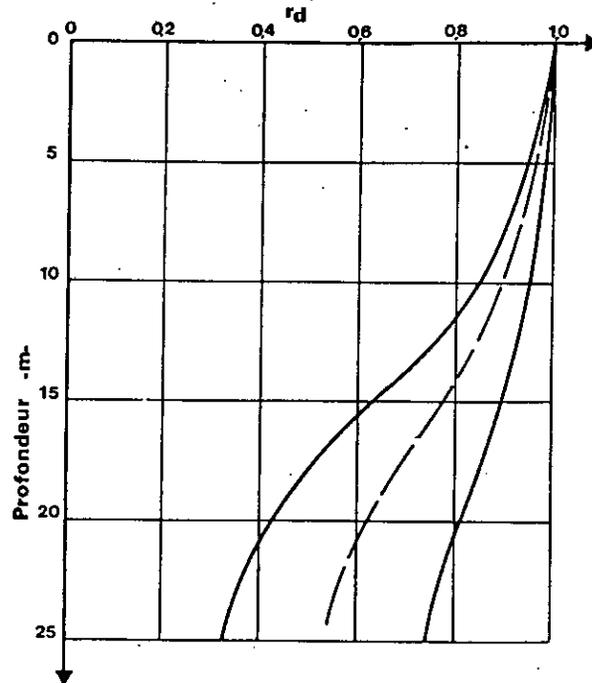


Fig III 3 Variation du coefficient r_d avec la profondeur (Seed - Idriss 1971)

La contrainte de cisaillement cyclique équivalente devient :

$$\tau_{eq} = 2/3 \frac{\gamma}{g} h a_{max} r_d \quad (III-1.5)$$

Cette méthode simplifiée ne permet pas le calcul du nombre de cycles équivalent. Des études statistiques, menées par Seed et al (1975) sur un grand nombre d'accélérogrammes réels, ont montré que le nombre de cycles équivalent pourrait être relié à la magnitude M du séisme, les valeurs moyennes proposées sont données dans le tableau (2).

Magnitude	Nombre de cycles équivalent
5,5 à 6	5
6,5	8
7	12
7,5	15
8	20

Tableau (2) : Correspondance entre magnitude et nombre de cycles équivalent.

Remarque:

Cette méthode ne doit être utilisée que pour des sites sableux homogènes. Par expérience, pour des sites très hétérogènes (couches alternées d'argile et de sable par exemple), la rigidité globale du système est fortement modifiée et les valeurs de τ_{eq} sont nettement différentes de celles données par l'équation (III-1.5).

II-1-2 Evaluation in-situ du risque de liquéfaction:

Les essais in situ sont déjà nécessaires pour le projet en situation normale. Ils sont les seuls qui permettent de reconnaître rapidement, et à moindre coût, l'ensemble des couches à l'échelle du site. On connaît dès lors l'intérêt des résultats qu'ils fournissent pour apprécier le risque de liquéfaction.

Les résultats sont fournis principalement par des essais de pénétration au " Standard Penetration Test " (SPT), puis au pénétromètre statique (CPT) " Cone Penetration Test ".

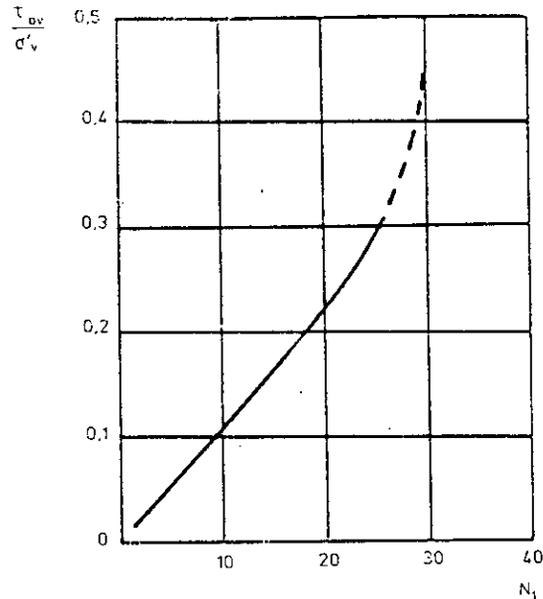
La figure (III-4) présente l'abaque proposé par Seed et al (1985) pour des séismes de magnitude 7,5 et des sables dont le pourcentage de finesse est inférieur à 5 %.

En ordonnée est porté le rapport de la contrainte cyclique τ_{cq} due au séisme à la contrainte effective verticale σ'_v :

τ_{cq} : Contrainte de cisaillement moyenne engendrée par le séisme à la profondeur considérée, elle est calculée par la formule (III-1-5).

σ'_v : Contrainte verticale à la même profondeur.

En abscisse, est porté le nombre de coups N pour un enfoncement de 0.30 m, obtenu à partir de l'essai SPT.



— Relation entre le rapport de contraintes provoquant la liquéfaction et la résistance au SPT corrigée N_1 . Critère établi pour des sables propres comportant moins de 5% de fines et pour des séismes de magnitude 7.5 [d'après Seed et al., 1985].

FIG III-4

La valeur de N est convertie à N_1 pour éliminer l'influence de la profondeur. $N_1 = c_n \cdot N$. La variation de c_n est donnée sur la figure (III-5), ce diagramme représente l'enveloppe basse des sites pour lesquels des signes de liquéfaction ont été relevés.

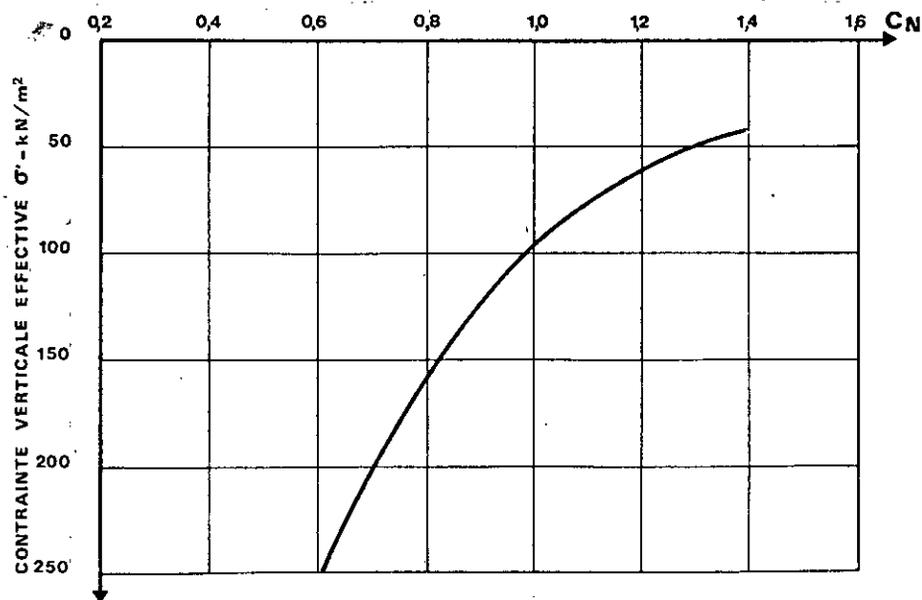


Figure III-5 Coefficient de normalisation de l'essai SPT

Ainsi, si pour la couche considérée on estime que le séisme de projet engendre un rapport de contrainte cyclique égale à 0,15 et N_1 vaut 5, il est fort probable que la couche se liquéfie. Si N_1 , au contraire, vaut 25, la couche ne devrait pas se liquéfier.

Dans le cas d'un projet d'ouvrage il est nécessaire d'adopter une certaine marge par rapport à un tel critère, compte tenu des incertitudes de ces corrélations et pour limiter l'amplitude des déformations cycliques que subirait l'ouvrage. Les nouvelles règles envisagent de considérer comme «liquéfiables», les sols au sein desquels la valeur des contraintes de cisaillement engendrée par le séisme dépasse 75% de la valeur de la contrainte de cisaillement provoquant la liquéfaction.

Cette règle, appliquée à l'exemple précédent, donne comme « liquéfiables » les sols dont la résistance N_1 est inférieure à 18.

Il est à mentionner que les essais SPT ne peuvent fournir qu'une première approximation du coefficient de sécurité vis à vis la liquéfaction, car l'essai SPT est très sensible aux faibles variations de la densité et du degré de surconsolidation.

Il n'en reste pas moins que l'essai SPT est trop sommaire pour conduire à des corrélations très fiables, c'est pourquoi il y a d'autres essais à envisager, tel que le pénétromètre, permettant une grande reproductibilité des résultats, donc une meilleure fiabilité.

III-1-3 Evaluation du risque de liquéfaction au laboratoire:

Les résultats des essais de laboratoire donnent en fonction du nombre de cycle N , la valeur de la résistance au cisaillement cyclique τ_1 . L'essai habituel étant l'essai triaxial dynamique, réalisé sous consolidation isotrope ($K_0 = 1$), il est nécessaire de corriger les résultats bruts d'essais pour tenir compte de la valeur réelle de K_0 en place.

La valeur du coefficient correcteur c_r a été déterminée de façon théorique et expérimentale (Seed et al 1975). Elle est donnée sur la figure(III-6) en fonction du degré de surconsolidation ou de K_0 .

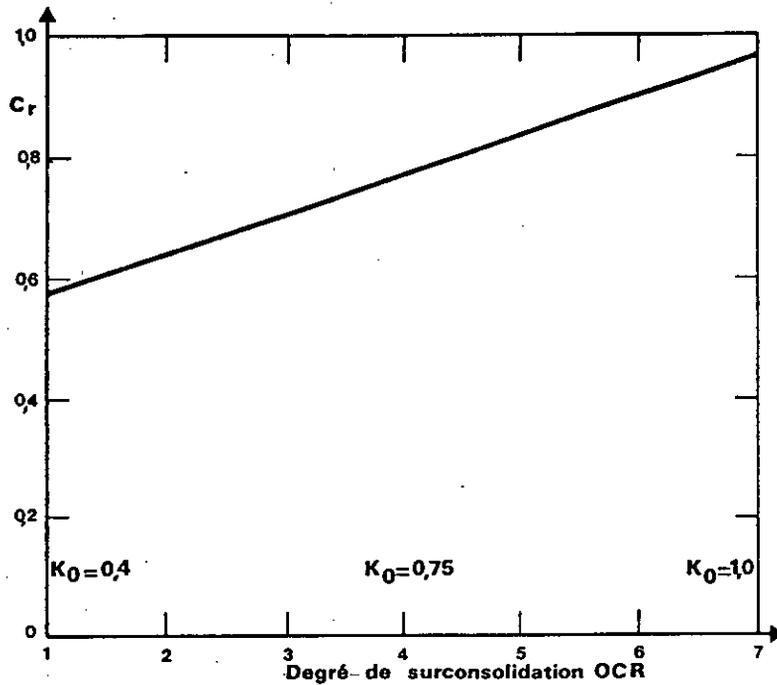


Figure III-6 Coefficient correcteur à appliquer aux résultats des essais triaxiaux cycliques

La résistance au cisaillement cyclique est alors donnée par :

$$\tau_l = c_r \left(\frac{\sigma_d}{2 \sigma_3} \right)_N \cdot \sigma'_0 \quad (III - 1.6)$$

où :

σ'_0 : est la contrainte verticale effective.

$(\sigma_d / 2\sigma_3)_N$ est la résistance au cisaillement cyclique correspondant à N cycles et mesuré à l'appareil triaxial.

σ_3 est la contrainte de consolidation.

Cette résistance est à comparer à la contrainte induite par la sollicitation, donnée par l'équation (III-1.5).

La figure (III-7) présente un exemple typique de résultats obtenus sur un sable. Les différents graphes permettent de suivre l'évolution de la déformation axiale et de la pression interstitielle en fonction du nombre de cycles, pour un nombre de cycles et pour un déviateur imposé.

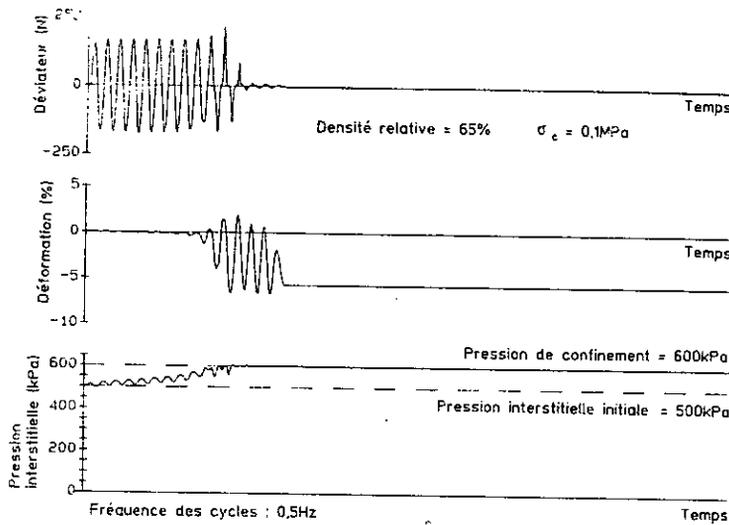
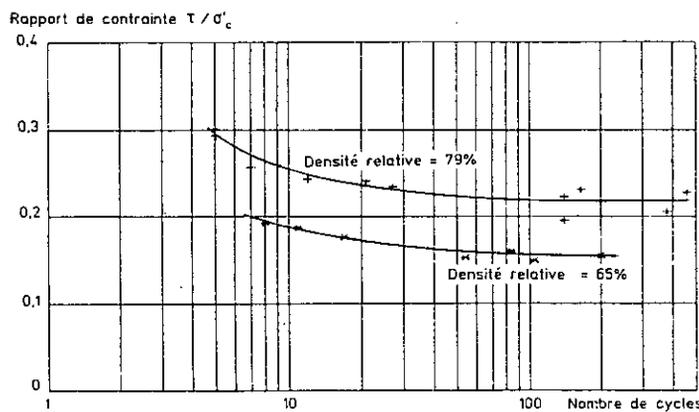


Fig III-7

— Résultats typiques d'essais de chargement cyclique en condition non drainée, avec effort axial contrôlé, pour l'étude de la résistance à la liquéfaction (sable d'Hostun).

Lors d'une étude en laboratoire, on procède à des essais sur plusieurs éprouvettes, pour différentes valeurs de la contrainte cyclique et l'on présente habituellement les résultats sous la forme donnée sur la figure (III-8).



— Présentation habituelle des résultats d'une étude de résistance sous chargement cyclique. Ici rapport de contrainte cyclique τ/σ'_c en fonction du nombre de cycles pour lequel la déformation axiale crête à crête atteint 5% (essais sur sable d'Hostun).

Fig III-8



III-1-4 Coefficient de sécurité:

Usuellement les valeurs du coefficient de sécurité F_s , requis dans une étude de liquéfaction varient de 1.3 à 1.5. Les valeurs les plus élevées correspondent à des sables de faible compacité qui présentent des déformations de grandes amplitudes en cas de rupture par liquéfaction. Les valeurs les plus faibles peuvent être spécifiées, sous certaines conditions, pour des sables très compacts qui peuvent subir, même en cas de liquéfaction, des déformations illimitées. Le choix du coefficient de sécurité minimal à retenir est une question de jugement qui doit tenir compte des paramètres évoqués ci-après :

- Le degré de connaissance de la géologie et des caractéristiques de sol qui dépend du nombre et de la qualité des reconnaissances. La nature des matériaux rencontrés influe également sur la fiabilité de la reconnaissance.
- La représentativité du modèle de calcul utilisé. Plus le nombre de paramètres fondamentaux dont il est possible de tenir compte est élevé, plus les résultats obtenus seront fiables, ce qui permet d'accepter des coefficients de sécurité plus faibles.
- Les conséquences d'une rupture sur les ouvrages. Par exemple, la liquéfaction d'une couche de sable compacte profonde et peu épaisse peut n'avoir aucune influence sur la bonne tenue d'un ouvrage.

III-2 Approche en contraintes effectives:

L'approche en contraintes totales décrite précédemment, bien qu'elle est très utile dans la pratique, peut se révéler par fois insuffisante en particulier lorsqu'il est nécessaire d'évaluer, en tenant compte des conditions de drainage, l'évolution de pressions interstitielles avant et après la sollicitation.

Le recours à l'approche en contraintes effectives prend en compte le caractère biphasique du matériau. On substitue généralement à cette approche des solutions dites semi-couplées et découplées qui permettent le calcul, directement ou indirectement, de l'évolution (génération et dissipation) des surpressions interstitielles.

i) Solution semi couplée:

C'est une approche plus fondamentale au problème de l'évaluation des pressions interstitielles obtenue à l'aide des modèles de comportement des sols, par exemple le modèle du chemin de contraintes effectives ou modèle de MARTIN, FINN, SEED.

La mise en oeuvre de la méthode nécessite la résolution simultanée, pas à pas dans le temps, des équations suivantes :

- Equation de propagation de l'onde dans le milieu.
- Equation de diffusion des pressions interstitielles.

A ces équations sont associés la loi contrainte-déformation et le modèle de génération des pressions interstitielles

ii) Solution découplée:

En simplifiant plus avant le problème, on aboutit à des solutions dites découplées, où le champ de contraintes est calculé sans tenir compte des variations de la pression interstitielle. Les pressions interstitielles sont évaluées à partir de ce champ de contraintes, en prenant en compte des lois de générations obtenues de façon expérimentale. Ces solutions ont l'avantage de la simplicité et elles ne nécessitent pas la connaissance détaillée de la loi de comportement du sol. C'est pour cette raison que nous allons déterminer l'évolution des pressions interstitielles par la méthode de solution découplée.

III-2-1 Calcul des surpressions interstitielles par la solution découplée:

Il est possible d'évaluer en un point quelconque de la couche du sol, l'histogramme de la contrainte de cisaillement cyclique $\tau(t)$ s'exerçant sur un plan horizontal. Cette évaluation est faite en admettant que la raideur de sol n'est pas affectée par l'augmentation éventuelle des pressions interstitielles. Seules sont prises en compte les modifications de raideur dues aux déformations. Le champ des pressions interstitielles est calculé indépendamment, il est régi par une équation différentielle aux dérivées partielles appelée équation de base, elle est de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K_x \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y \frac{\partial U}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial U}{\partial z} \right] = m \gamma_w \left[\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial u_g}{\partial t} \right] \quad (III-2.1)$$

a) Etablissement de l'équation différentielle de base:

L'équation (III-2-1) est établie en combinant les deux équations suivantes:

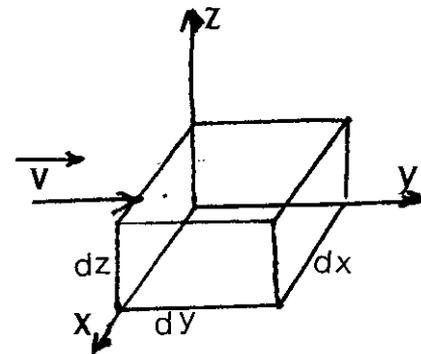
- L'équation de continuité.
- L'équation de Darcy.

i) Etablissement de l'équation de continuité

L'équation de continuité exprime le principe de la conservation de la masse du fluide, l'augmentation de la masse, pendant un temps (∂t), du fluide contenu dans un volume donné est égale à la différence de masse entrante et sortante.

Faisant le bilan de masse sur un élément cubique infinitésimal :

\vec{v} vecteur vitesse du fluide $\left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\}$



Soit un parallélépipède $d_x d_y d_z$, la quantité d'eau qui passe à travers la face $d_y d_z$ pendant un temps unité est :

L'eau qui entre $d_y d_z [\rho u - \partial(\rho u)/\partial x \cdot dx/2]$

L'eau qui sort $d_y d_z [\rho u + \partial(\rho u)/\partial x \cdot dx/2]$

où :

ρ : est le poids volumique de l'eau .

La différence est:

$$\partial(\rho u)/\partial x \cdot d_x d_y d_z .$$

Pour tout le parallélépipède, cette différence est donc :

$$[\partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y + \partial(\rho w)/\partial z] d_x d_y d_z \quad (\alpha)$$

Si on admet un flux sortant, la variation de la masse d'eau (diminution) est :

$$[\partial(\rho \varepsilon)/\partial t] \cdot d_x d_y d_z \quad (\beta)$$

$$\partial \varepsilon > 0$$

où :

ε : est la déformation volumique .

On combinant les deux équations (α) et (β) on aura :

$$\partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y + \partial(\rho w)/\partial z = - \partial(\rho \varepsilon)/\partial t .$$

C'est à dire:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = - \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t}$$

comme le fluide est incompressible ($\rho = \text{cste}$) donc :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (\text{III}-2.2)$$

d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$



ii) Etablissement de l'équation de DARCY:

La loi de DARCY, qui régit le phénomène d'écoulement à travers les milieux poreux, est donnée par :

$$v = k \cdot i$$

avec:

v : est la vitesse d'écoulement exprimée en m / s ;

k : est le coefficient de perméabilité du sol exprimé en m / s ;

i : est le gradient hydraulique (sans dimension) .

Cette loi peut s'écrire également sous la forme vectorielle suivante :

$$\vec{V} = k \vec{i} = -k \text{ grad}h \quad (\text{III} - 2.3)$$

où :

h : est la charge hydraulique, donnée par :

$$h = z + \frac{U}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g}$$

où:

z : est la cote de la particule fluide par rapport à un plan horizontale de référence .

U : est la pression de l'eau interstitielle .

v : est la vitesse d'écoulement.

Dans les sols , les vitesses sont faibles (< 10 cm / s) et la quantité $v^2/2g$ est tout à fait négligeable devant le deux premiers termes du second membre de l'équation (c), on en déduit donc :

$$h = z + \frac{U}{\gamma_w}$$



donc :

$$\vec{V} = -k \text{grad} \left(\frac{U}{\gamma_w} \right) = -\frac{K}{\gamma_w} \text{grad} U \quad (III - 2.4)$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{k_x}{\gamma_w} \frac{\partial U}{\partial x} \\ v = -\frac{k_y}{\gamma_w} \frac{\partial U}{\partial y} \\ w = -\frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. \quad (III - 2.5)$$

et l'équation (III-2.2) devient :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \text{div} \left[\frac{K}{\gamma_w} \text{grad}(U) \right] \quad (III - 2.6)$$

et l'équation (III-2.6) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_x}{\gamma_w} \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k_y}{\gamma_w} \frac{\partial U}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial U}{\partial z} \right] = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

iii) Etablissement de l'équation (III-2.1):

Dans un massif de sol saturé soumis à un cisaillement cyclique, une fraction des pressions créées se dissipe. Ainsi, il ne peut y avoir accumulation, que si le phénomène de génération est plus intense que la dissipation.

L'équation qui régit les pressions interstitielles s'écrit donc :

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_d$$

donc :

$$\partial U / \partial t = \partial u_g / \partial t + \partial u_d / \partial t \quad (III-2.7)$$

avec:

u_g : est la surpression générée par le séisme.

u_d : est la pression dissipée.

$$\partial u_d / \partial t = \partial u_d / \partial \varepsilon \cdot \partial \varepsilon / \partial t \quad (III-2.8)$$

Le terme $\partial u_d / \partial \varepsilon$ est le module de compressibilité volumique, qui est l'inverse de la compressibilité (m_v), Donc :

$$m_v = \partial \varepsilon / \partial u_d \quad (III-2.9)$$

et

$$\partial u_d / \partial t = 1/m_v \cdot \partial \varepsilon / \partial t$$

On fait la même chose pour $\partial u_g / \partial t$, qui peut être relié au taux (∂N) cycles de contraintes de cisaillement qui avaient eu lieu pendant δt

donc

$$\partial u_g / \partial t = \partial u_g / \partial N \cdot \partial N / \partial t \quad (III-2.10)$$

et finalement en combinant (III-2.8) et (III-2.10) on trouve:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{m_v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u_g}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t} \quad (III-2.11)$$

si on porte le terme $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ de l'équation (III-2.11) dans l'équation (III-2.6) on aura :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{m_v} \operatorname{div} \left(\frac{K}{\gamma_w} \vec{\operatorname{grad}} U \right) + \frac{\partial u_g}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t} \quad (III-2.12)$$

On décomposant , on aura l'équation différentielle de base :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K_x \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y \frac{\partial U}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial U}{\partial z} \right] = m \gamma_w \left[\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial u_g}{\partial t} \right]$$

C'est l'équation de génération et de dissipation des pressions interstitielles .

avec :

K_x , K_y : perméabilités dans les sens OX,OY.

K_z : perméabilité dans le sens vertical .

γ_w : le poids volumique de l'eau .

m_v : la compressibilité de l'eau (l'inverse du module de compressibilité volumique) .

$\partial u_g / \partial t$: taux de génération de la pression interstitielle .

Pour pouvoir résoudre l'équation (III-2.1), il est impératif d'évaluer les paramètres k_h , k_v , m_v et γ_w ainsi que les termes :

$$\partial u_g / \partial t \quad \text{et} \quad \partial N / \partial t$$

B) Détermination des paramètres de l'équation de base:

i) La perméabilité :

La perméabilité (K) est une grandeur physique, elle caractérise le pouvoir drainant d'un sol. Elle dépend essentiellement de la granulométrie et de la structure du sol.

Le coefficient de perméabilité d'un sol peut être mesuré au laboratoire par deux méthodes :

- Sous une charge constante, pour les sols très perméables
- Sous une charge variable, pour les sols peu perméables .
- In-situ avec l'essai Lugeon.



ii) La compressibilité :

Le coefficient de compressibilité est défini par :

$$m_v = d\varepsilon / d\sigma'$$

où :

$d\varepsilon$: variation volumique .

$d\sigma'$: variation de la contrainte effective.

Pour des petites valeurs de taux des pressions interstitielles r_u l'expérience montre que la compressibilité demeure constante quelque soit la valeur des autres facteurs (les dimensions des grains et la densité relative du sol). Par contre, pour des valeurs de r_u supérieures à 60% la compressibilité est affectée, en particulier pour les sables lâches figure (III-9).

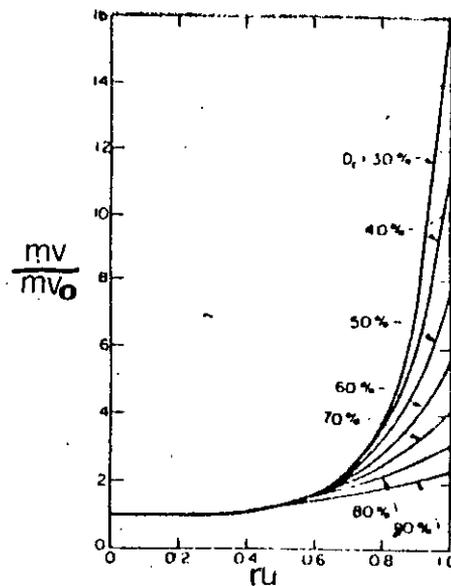


Figure III-9

Le coefficient de compressibilité, variable, à pour expression :

$$\frac{m_v}{m_{v,0}} = \frac{e^y}{1 + y + 1/2 \cdot y^2} \quad \text{(III-2.13)}$$

avec :

$m_{v,0}$: est la compressibilité initiale.

$$y = A(r_u)^B$$

$$A = 5 (1,5 - D_r)$$

$$B = 3 (2)^{-2 \cdot D_r}$$

Le coefficient de compressibilité m_v , compatible avec la pression générée, sera obtenu par un simple procédé itératif jusqu'à convergence .

iii) Evaluation du terme $\frac{\partial u_g}{\partial N}$:

L'effet d'un séisme, sur un dépôt de sol saturé, correspond toujours à une génération de pressions interstitielles. Le taux de génération des pressions interstitielle $\partial u_g / \partial N$, induit par le séisme, sera évalué selon le type d'histoire de l'accélérogramme.

• Cas d'une histoire uniforme:

La relation qui lie le taux de génération des pressions interstitielles au nombre de cycles est donnée par :

$$ru = u_g / \sigma_0' = (2 / \Pi) \cdot \text{Arcsin}[N/N_1]^{1/20} \quad \text{(III-2.14)}$$

Cette relation a été établie, sur la base d'études expérimentales (essais cycliques), en 1975 par Seed et al .

où :

N : représente le nombre de cycles réguliers équivalents à la charge cyclique appliquée, il est directement lié à la magnitude du séisme considéré.

σ_0' : contrainte de consolidation .

θ : paramètre dépendant du type de sol et des conditions de chargement, il est déterminé expérimentalement. On opte pour $\theta = 0.7$.

La figure (III-10) illustre le type de courbes que l'on obtient expérimentalement.

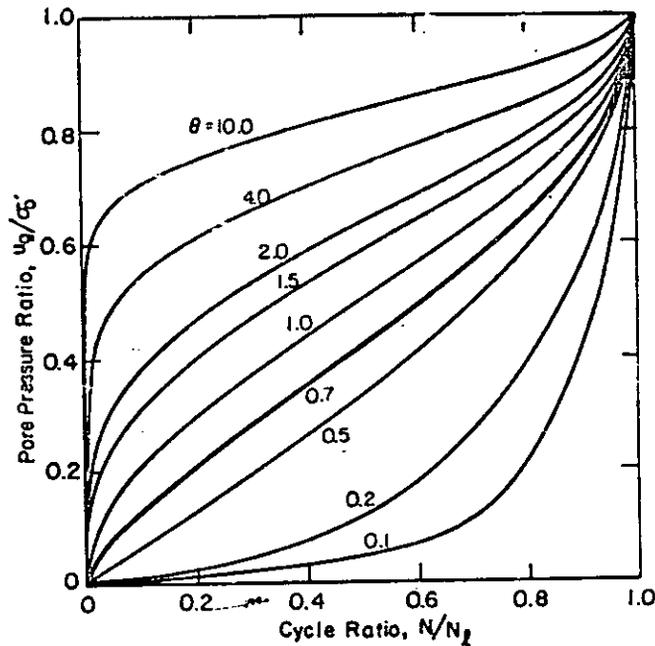


Fig.III.10RATE OF PORE PRESSURE GENERATION

Ainsi, le taux de génération $\partial u_g / \partial N$ est obtenu par un simple dérivation de l'équation (II-2.14):

$$\partial u_g / \partial N = [\sigma'_v / \theta \cdot N_f \cdot \Pi] \cdot [1/\sin x^{2\theta-1} \cdot \cos x] \quad \text{(III-2.15)}$$

où :

$$x = \Pi/2 \cdot r_u$$

N_f : est le nombre de cycles causant la liquéfaction du sol pour un chargement cyclique alterné et régulier dont le déviateur serait égal à $0.65\tau_{max}$.

N_f est tiré des courbes telles que celles de la figure (III-11)

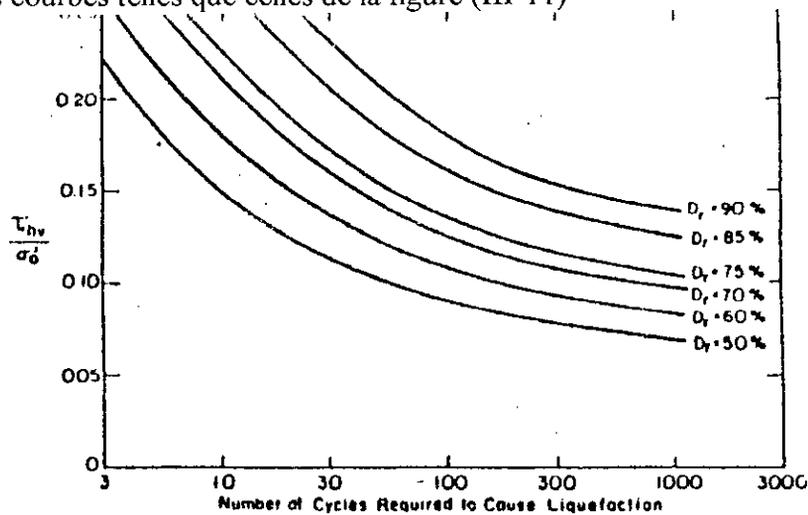


Figure III-11

L'avantage de cette formulation est de mieux représenter, au début et à la fin de l'essai, la variation de la pression interstitielle mesurée au laboratoire .

Cette formulation fait intervenir, soit explicitement soit par le biais de N_i , la valeur de la contrainte de cisaillement cyclique $\tau (t)$, qui devait être déterminée par un calcul de la réponse dynamique.

• **Cas d'une histoire irrégulière:**

Afin d'évaluer le terme $\frac{\partial U_s}{\partial N}$, en 1980 CHANG a proposé une procédure de calcul qui permet de prendre en compte les chargements non réguliers. Cette procédure consiste à déduire la courbe de génération des pressions interstitielles pour un chargement irrégulier à partir des courbes de chargement régulier.

La méthode stipule le découpage de l'histoire irrégulière en un nombre de paquets de cycles de niveaux de contraintes τ_i relativement constants.

La pression interstitielle évaluée à la fin du chargement est la superposition des surpressions interstitielles calculées à la fin de chaque intervalle. Pour déterminer la pression interstitielle dans les intervalles successifs, CHANG a proposé la relation suivante :

$$N_{eqi+1} = \frac{N_{ii+1}}{N_{ii}} N_i$$

où :

N_{eqi} : nombre de cycles équivalents d'un intervalle (i) .

N_{ii} : nombre de cycles causant la liquéfaction.

N_i : nombre de cycles dans l'intervalle (i) .

Graphiquement il y a lieu de tracer la relation (III-2.14) pour le couple de valeurs (N_i , N_{ii}). La pression interstitielle est obtenue par une translation des différents tronçons.

EXEMPLE :

Soit l'histoire des contraintes présentée dans la figure (III-12). Soit u_1 la pression d'eau développée à la fin des N_1 premiers cycles selon la courbe (1), l'augmentation de la pression interstitielle due à la deuxième tranche de cycles est représentée dans la figure (III-13) par le tronçon de courbe A B'. Pour avoir la pression générée à la fin du séisme, il suffit de translater horizontalement la courbe A B' de manière à faire coïncider le point A avec le point A'.

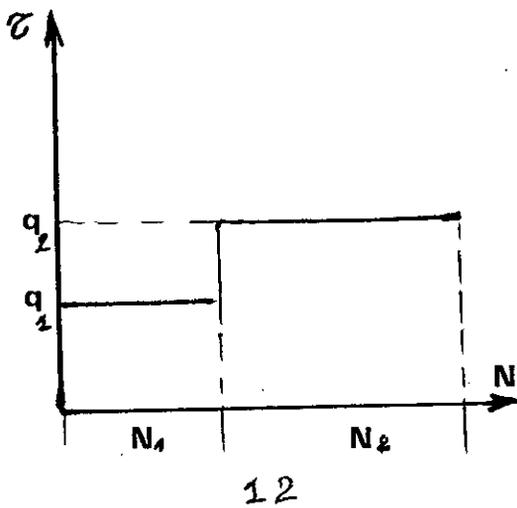
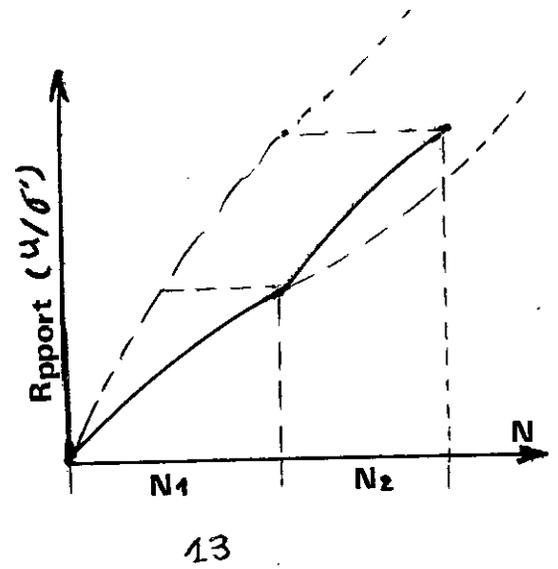


Figure III



iii) Evaluation du terme $\partial N/\partial t$:

L'histoire des contraintes, comme il a été mentionné, est irrégulière du fait des difficultés pratiques de reproduire un tel chargement aux laboratoires; Il est donc nécessaire d'exprimer $\partial N/\partial t$ par un nombre de cycles réguliers (N_{eq}), qui a eu lieu pendant la durée (T_d) du séisme, ainsi :

$$\partial N/\partial t = N_{eq} / T_d$$



CHAPITRE IV

CALCUL PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

IV-0 Introduction:

Si les premières applications de la méthode des éléments finis ont été orientées vers la résolution des équations d'équilibre en élasticité ou en élastoplasticité, il est très vite apparu que cette méthode pouvait aussi être utilisée pour la résolution de nombreux problèmes physiques régis par des systèmes d'équations aux dérivées partielles. En particulier, les problèmes de la répartition de la charge hydraulique dans les écoulements en milieux poreux qui, tout comme les problèmes de répartition de température ou de potentiel électrique, se ramènent à la résolution d'une équation du type $\Delta(u) = f$, peuvent être traités aisément par la méthode des éléments finis.

IV-1 Définition:

La méthode des éléments finis est une méthode de calcul qui consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnus pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants:

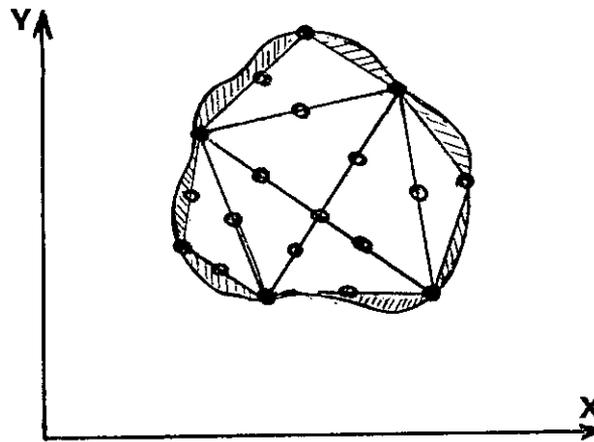
- Sciences de l'ingénieur pour établir les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

IV-2 Bases de la méthode des éléments finis:

IV-2-1 Discrétisation du domaine:

La première étape de la méthode consiste à substituer au modèle étudié une partition en éléments de géométrie simple le recouvrant aussi que possible figure(IV-1). Il apparaît d'ores et déjà une source d'approximation due à l'impossibilité de modéliser le contour (hachures sur la figure(IV-1)).

Figure IV-1



Cette erreur peut être minimisée, soit en augmentant la finesse de la partition, soit en utilisant des éléments à côtés curvilignes. Chaque élément comporte un certain nombre de points particuliers, appelés "Noeuds" ou "Points nodaux". Les noeuds peuvent être situés à l'intérieur de l'élément, mais dans ce cas ils ne remplissent plus une de leur fonction qui est d'assurer la compatibilité inter-éléments, c'est pourquoi nous n'en avons représenté que sur les frontières des éléments .

Cette discrétisation, qui conduit au maillage du domaine, sous-tend les deux idées fondamentales qui caractérisent la méthode :

-Se ramener à l'étude du comportement d'éléments standards de formes simples; ces éléments sont de dimensions finies, par opposition aux éléments infinitésimaux qui sont utilisés dans l'approche analytique;

On se contentera de rechercher une approximation aussi bonne que possible de la solution aux points privilégiés qui sont les noeuds et non la description continue de cette solution; ainsi, en parlant un peu schématiquement, on remplacera un problème à un nombre infini d'inconnues par la résolution d'un système discret.

IV-2-2 Approximation dans l'élément:

Considérons un élément isolé du maillage tel que celui représenté sur la figure(IV-2).

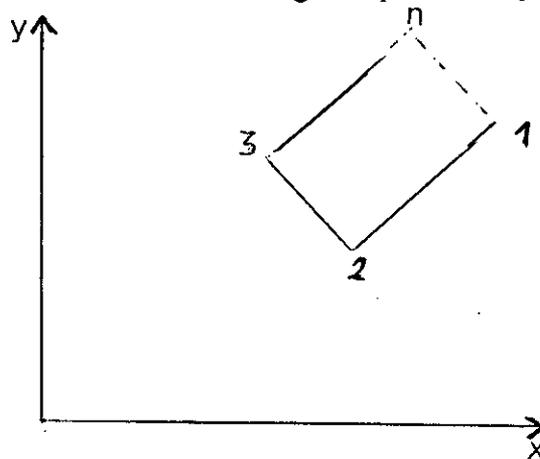


Fig. IV-2

L'élément porte n noeuds où on connaît les valeurs de la fonction $u(x,y)$:

$$u(x_i, y_i) = u_i$$

L'approximation de la fonction $u(x,y)$ à l'intérieur de l'élément est donnée par:

$$u(M) = u(x,y) \approx \hat{u}(M) \tag{IV-2.1}$$

Avec:

$$\hat{u}(M) = \sum_{i=1}^n N_i(M) u_i = \langle N \rangle \{u_n\} \tag{IV-2.2}$$

Les fonctions $N_i(M)$, ou plus explicitement $N_i(x, y)$ sont appelées « Fonctions de pondération » ou encore fonction d'interpolation.

$\hat{u}(M)$ constitue donc une approximation de $u(M)$ dans l'élément, les u_i étant les variables généralisées ou variables nodales.

Il est fréquent d'adopter une base polynomiale, bien évidemment l'approximation sera d'autant meilleure que le degré des polynômes $N_i(x,y)$ sera plus élevé.

IV-3 Méthode des résidus pondérés:

IV-3-1 Introduction:

La méthode des résidus pondérés consiste à chercher une fonction $u(x,y)$ qui satisfait un certain nombre d'équations différentielles:

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \vdots \\ A_n(u) \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{IV-3.1})$$

Dans un domaine Ω (volume, surface,etc.) figure(IV-3), ainsi que les conditions aux limites:

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \vdots \\ B_n(u) \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{IV-3.2})$$

Sur le bord Γ du domaine (figure(IV-3)).

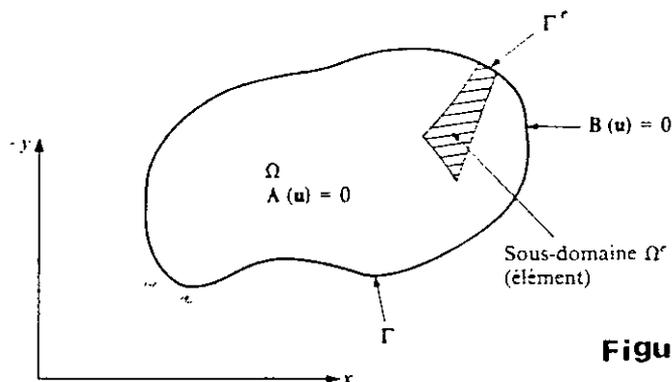


Figure IV-3

Le domaine Ω et la frontière Γ .

La fonction cherchée peut être une quantité scalaire ou un vecteur à plusieurs composantes. La méthode des éléments finis cherchera la solution sous la forme approchée suivante :

$$u \cong \hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i \cdot u_i = \langle N \rangle \{u_n\}$$

Où les N_i sont les fonctions de forme « fonctions d'interpolation » écrites en fonction des variables indépendantes (les coordonnées x, y, \dots etc .) , Et tous ou la plupart des paramètres u_i sont inconnus.

Si les équations différentielles sont linéaires, c'est à dire que nous pouvons écrire (IV-3.1) et (IV-3.2) sous la forme:

$$\left. \begin{aligned} A(u) = L u + f_v = 0 & \quad \text{dans } \Omega \\ B(u) = C u + f_s = 0 & \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (IV - 3 - 3)$$

avec:

- L et C sont des opérateurs différentiels caractérisant le système.
- u: sont les fonctions inconnues.
- f_v et f_s sont des fonctions connues, dites de sollicitations.

Alors le système approché des équations (IV-3.3) se réduira à un système linéaire de la forme :

$$K u + F = 0 \quad (IV-3.4)$$

Avec :

$$K = K_{ij} = \sum_{e=1}^{n_{el}} K_{ij}^e$$

K_{ij} : Matrice caractérisant le système pour tout le domaine.

K_{ij}^e : matrice caractérisant le système pour l'élément.

n_{el} : nombre d'élément du domaine.

IV-3-2 Résidus:

Considérons un système physique continu stationnaire dont le comportement est représenté par un système d'équations aux dérivées partielles linéaire ou non linéaire, d'ordre m :

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \quad \text{sur le domaine } \Omega \quad (\text{IV-3.5})$$

Les conditions aux limites s'écrivent:

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_s = \mathbf{0} \quad \text{sur la frontière } \Gamma \quad (\text{IV-3.6})$$

On appelle résidu, la quantité $R(\mathbf{u})$ définie par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_v \quad (\text{IV-3.7})$$

Qui s'annule évidemment quand \mathbf{u} est solution de (IV-3.8)

IV-3-3 Forme intégrale:

La méthode des résidus pondérés consiste à rechercher les fonctions u qui annulent la forme intégrale :

$$W(u) = \int_{\Omega}^T (R(u)) d\Omega = \int_{\Omega}^T (L(u) + f_v) d\Omega = 0 \quad (\text{IV-3.8})$$

Où:

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}$$

est un ensemble de fonctions arbitraires, en nombre égal au nombre d'équations (ou de composantes de u) mises en jeu. Elles sont appelées aussi fonctions de pondération.

IV-3-4 Discrétisation des formes intégrales:

Dans le paragraphe précédent nous avons remplacé la résolution des équations aux dérivées partielles (IV-3.5) par la recherche des fonctions u qui annulent la forme intégrale (IV-3.8)

$$\mathbf{W}(u) = \int_{\Omega}^T \{R(u)\} d\Omega = \int_{\Omega}^T \{L(u) + f_v\} d\Omega = 0$$

pour les fonctions $\mathbf{V}^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Choisissons une approximation à n paramètres des fonctions inconnues u tel que:

$$u = u (u_1 , u_2 , \dots , u_n).$$

L'expression (IV-3.8) devient :

$$W = \int_{\Omega} \{ L[u(u_1, u_2, \dots, u_n)] + f_v \} d\Omega = 0 \quad (IV-3.9)$$

Choisissons un ensemble de n fonctions indépendantes v_1, v_2, \dots, v_n , soulignons que le nombre de fonctions de pondération doit être égal au nombre des paramètres de l'approximation (u_i), le choix du type de fonctions v_i conduit à différentes méthodes:

- Méthode de collocation.
- Méthode de GALERKINE (qui est la plus utilisée)
- Méthode des moindres carrés.

En développant, l'équation (IV-3.9) s'écrira:

$$W_1 = \int_{\Omega} v_1 [L(u_1, u_2, \dots, u_n) + f_v] d\Omega = 0$$

$$W_2 = \int_{\Omega} v_2 [L(u_1, u_2, \dots, u_n) + f_v] d\Omega = 0$$

$$W_n = \int_{\Omega} v_n [L(u_1, u_2, \dots, u_n) + f_v] d\Omega = 0$$

Elles constituent un système d'équations algébriques dont la solution fournit les paramètres de l'approximation de u :

$$K \cdot \{u\} + F = 0$$

a) Méthode de GALERKINE:

Selon le choix de v_i , l'équation (IV-3.9) conduit à différentes méthodes (collocation par point, collocation par sous-domaine, méthode de GALERKINEetc).

Pour la méthode de GALERKINE , les fonctions v_i sont constituées par l'ensemble des variations δu des fonctions u :

$$v = \delta u = \langle N \rangle \{ \delta u_n \} = \sum N_i \cdot \delta u_i \quad i = 1, \dots, n \quad (IV-3.10)$$

Où :

δu_i sont les variations des paramètres d'approximation u_i .

L'équation (IV-3.9) devient:

$$W = \int_{\Omega} \delta u (L(u) + f_v) d\Omega = 0 \quad (IV-3.11)$$

$$W = \langle \delta u_n \rangle \int_{\Omega} \{ N \} (L(\langle N \rangle \{ u_n \}) + f_v) d\Omega = 0 \quad (IV-3.12)$$

Comme W doit s'annuler pour tout $\{ \delta u \}$. La relation précédente est équivalente aux n équations

algébriques:

$$W_1(u) = \int_{\Omega} N_1 (\langle L(N) \rangle \{ u_n \} + f_v) d\Omega = 0$$

$$W_n(u) = \int_{\Omega} N_n (\langle L(N) \rangle \{ u_n \} + f_v) d\Omega = 0$$

b) Présentation matricielle de la méthode de GALERKINE:

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation par éléments finis des fonctions inconnues u pour discrétiser une forme intégrale W , puis à résoudre le système algébrique ainsi obtenu.

$$W = \int_{\Omega} \delta u (L(u) + f_v) d\Omega$$

remplaçons cette intégrale par une somme d'intégrales sur chaque élément Ω^e :

$$W = \sum_{e=1}^{nel} W^e = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \delta u^e (L(u^e) + f_v) d\Omega = 0 \quad (\text{IV-3.13})$$

En utilisant une approximation par éléments finis de u et de δu sur chaque élément Ω^e pour calculer chaque terme W^e , dit forme intégrale élémentaire

$$u^e = \langle N \rangle \{u_n\} \quad (\text{IV-3.14})$$

$$\delta u^e = \langle N \rangle \{\delta u_n\}$$

Comme $\langle N \rangle$ est nul en tout point extérieur à Ω^e , et comme $\{u_n\}$ ne fait intervenir que les variables nodales de l'élément Ω^e , chaque terme sera calculé à partir des seules variables liées à l'élément e .

En utilisant (IV-3.14) W^e devient :

$$W^e = \int_{\Omega^e} \delta u^e (L(u^e) + f_v) d\Omega = 0 \quad (\text{IV-3.15})$$

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle \left(\int_{\Omega^e} \{N\} L(\langle N \rangle) d\Omega \{u_n\} + \int_{\Omega^e} \{N\} f_v d\Omega \right) \quad (\text{IV-3.16})$$

Finalement, en remplaçant les expressions (IV-3.14) dans (IV-3.16), nous obtenons l'expression matricielle W^e discretisée :

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\}) \quad (\text{IV-3.17})$$

Où:

$[k]$: est la matrice élémentaire indépendante de $\{u_n\}$ si l'opérateur L est linéaire.

$\{f\}$: est le vecteur élémentaire des sollicitations;

$\{u_n\}$: est le vecteur élémentaire des variables nodales ;

$\{\delta u_n\}$: est le vecteur élémentaire des variations des variables nodales.

La forme intégrale globale (IV-3.13) se construit par addition des formes élémentaires (IV-3.17):

$$W = \sum_1^{nel} W^e = \sum_e \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\}) = 0$$

Cette somme est ensuite organisée sous la forme matricielle:

$$W = \langle \delta U_n \rangle ([K] \{U_n\} - \{F\}) = 0$$

Où:

$[K]$: est la matrice globale, indépendante ou non de $\{U_n\}$.

$\{F\}$: est le vecteur global des sollicitations.

$\{U_n\}$: est le vecteur global de toutes les variables nodales du problème.

$\langle \delta U_n \rangle$ est le vecteur global des variations des variables nodales.

Le passage de (IV-3.17) à (IV-3.18) constitue l'assemblage des éléments.

Dans les problèmes non stationnaires apparaissent des termes de type $\partial u/\partial t$ et $\partial^2 u/\partial t^2$ auxquels correspondent les expressions:

$$W^e = \int_{\Omega} \delta u^e \frac{\partial u^e}{\partial t} d\Omega \quad \text{et} \quad W^e = \int_{\Omega} \delta u^e \frac{\partial^2 u^e}{\partial t^2} d\Omega$$

qui s'ajoutent à (IV-3.15). Ces termes donnent après discrétisation, grâce à (IV-3.14):

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle [c] \left\{ \frac{du_n}{dt} \right\} \quad \text{et} \quad W^e = \langle \delta u_n \rangle [m] \left\{ \frac{d^2 u_n}{dt^2} \right\}$$

donc :

$$[c] = [m] = \int_{\Omega} \{N\} \langle N \rangle d\Omega$$

où:

[c] : est la matrice masse élémentaire.

IV-4 Application de la méthode des éléments finis à l'équation de base:

L'équation de base donnant l'évolution dans l'espace et dans le temps de l'accroissement des pressions interstitielles sous l'effet d'un chargement cyclique (action sismique) est résumée sous la forme différentielle suivante :

$$\nabla^T [K] \left\{ \nabla \frac{u}{\gamma_w} \right\} = m_v \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_g}{\partial t} \right] \dots\dots\dots (IV - 4.1)$$

avec:

[k] : matrice des coefficients de perméabilité.

∇ : opérateur différentiel.

Pour le cas bidimensionnel on a :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y} \right)^T$$

l'équation (IV 4.1) s'écrira alors :

$$\frac{1}{\gamma_w} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = m_v \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_g}{\partial t} \right] \dots\dots\dots (IV.4.1)$$

La méthode des éléments finis cherchera la solution sous la forme approchée suivante :

$$U = \sum_{i=1}^n N_i u_i = \langle N \rangle \{ u_n \}$$

où les N_i et les $\{u_n\}$ sont, respectivement, les fonctions d'interpolation et les paramètres d'approximation.

Si on opte pour la méthode de GALERKINE, la forme intégrale de l'équation (IV . 4.1) est donnée par :

$$\int_{\Omega^e} \frac{1}{\gamma_w} (\delta u) (\nabla^T [K] \nabla u) d\Omega + \int_{\Omega^e} m_v (\delta u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varphi \right) d\Omega = 0 \quad (IV - 4.3)$$

avec :

$$\varphi = \partial u_g / \partial t = (\partial u_g / \partial N) * (\partial N / \partial t)$$

Après intégration par partie l'équation IV.4.3 devient :

$$\int_{\Omega^e} \frac{1}{\gamma_w} \{ \nabla \delta u \}^T [K] \{ \nabla u \} d\Omega + \int_{\Omega^e} m_v (\delta u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varphi \right) d\Omega = 0 \dots (IV.4.4)$$

Si on remplace dans (IV.4.4) les termes u et δu par :

$$u = \langle N \rangle \{ u_n \}$$

$$\delta u = \langle N \rangle \{ \delta u_n \}$$

On obtient alors :

$$\int_{\Omega^e} \frac{1}{\gamma_w} \{ \delta u_n \}^T \nabla^T \{ N \} [K] \nabla \langle N \rangle \{ u_n \} d\Omega + \int_{\Omega^e} m_v \{ \delta u_n \}^T \langle N \rangle^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varphi \right) d\Omega = 0 \quad (IV-5)$$

après simplification par $\{\delta u_n\}^T$ on aura :

$$\int_{\Omega_e} \frac{1}{\gamma_w} \nabla^T \{N\} [K] \nabla \{N\} \{u_n\} d\Omega + \int_{\Omega_e} m_v \{N\}^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varphi \right) d\Omega = 0 \dots IV.4.6$$

La formulation matricielle de l'équation (IV.4.6) aboutira à un système d'équations algébriques de la forme:

$$[A]^e \{u_n\} + [D]^e (\{\dot{u}_n\} - \{\varphi_n\}^e) = 0 \quad (IV.4.7)$$

Où :

$\{u_n\}, \{\dot{u}_n\}$ et $\{\varphi\}^e$ désignent les valeurs nodales des vecteurs u, \dot{u}, φ respectivement.

En fin, la contribution de tous les éléments du sol donne le système d'équations global:

$$[A] \{U_n\} + [D] (\{\dot{U}_n\} - \{\varphi\}) = 0 \quad (IV-4.8)$$

IV-4-1 Expression générale des matrices $[A]^e, [D]^e$ et du vecteur $\{\varphi\}$:

a) Discrétisation:

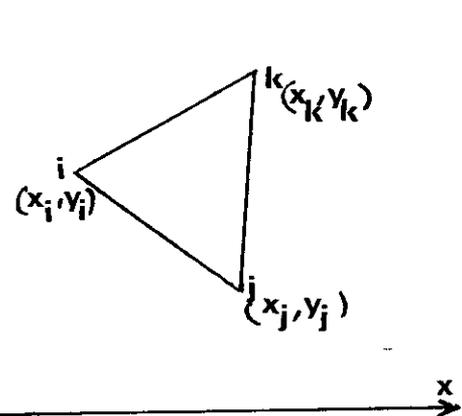
Vu la simplicité des barrages en terre, nous avons opté pour un maillage constitué d'éléments triangulaires et rectangulaires. Pour un élément triangulaire, à trois noeuds, la pression interstitielle est approchée par une fonction d'interpolation linéaire tel que:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (f_1)$$

Les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ seront déterminés en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i = u_i \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j = u_j \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k = u_k \end{cases} \quad \text{Système (s}_1\text{)}$$

Où, les quantités u_i, u_j, u_k représentent les valeurs de la pression interstitielle aux noeuds i, j, k respectivement. Voir figure ci-dessous :



En les substituant dans (f_1) la fonction approchée s'écrira alors sous la forme :

$$u(x, y) = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k$$

Où: N_i, N_j, N_k sont les fonctions d'interpolation, écrites en fonction des variables indépendantes

x et y , elles sont données par :

$$N_i = 1/\Delta [a_i + b_i x + c_i y]$$

$$N_j = 1/\Delta [a_j + b_j x + c_j y]$$

$$N_k = 1/\Delta [a_k + b_k x + c_k y]$$

Avec:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= x_j y_k - x_k y_j ; \mathbf{a}_j = x_k y_i - x_i y_k ; \mathbf{a}_k = x_i y_j - x_j y_i \\ \mathbf{b}_i &= y_j - y_k ; \mathbf{b}_j = y_k - y_i ; \mathbf{b}_k = y_i - y_j \\ \mathbf{c}_i &= x_k - x_j ; \mathbf{c}_j = x_i - x_k ; \mathbf{c}_k = x_j - x_i \end{aligned}$$

Et Δ = déterminant du système (s₁), il est égal à deux fois l'aire A du triangle ijk .

b) Evaluation de la matrice de perméabilité [A]^e :

Après identification, les éléments de la matrice [A]^e s'écriront alors :

$$[A]^{e} = \int_{\Omega} \frac{1}{\gamma_w} \nabla^T \{N\} [K] \nabla \langle N \rangle d\Omega$$

Pour un élément triangulaire de noeuds i,j,k , avec les fonctions de forme N_i , N_j , N_k écrites précédemment, la matrice [A]^e s'écrira :

$$[A]^{e} = \frac{K_x}{4A\gamma_w} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ & b_j b_j & b_j b_k \\ \text{symt} & & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{K_y}{4A\gamma_w} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ & c_j c_j & c_j c_k \\ \text{symt} & & c_k c_k \end{bmatrix}$$

avec :

- K_x , K_y sont les coefficients de perméabilité dans les directions x et y respectivement.
- A est l'aire du triangle formé par les noeuds i,j,k .

c) Evaluation de la matrice de compressibilité $[D]^e$:

La matrice $[D]^e$ est définie par :

$$[D]^e = \int_{\Omega} m_v \{N\} \langle N \rangle d\Omega$$

Pour un élément triangulaire, la matrice $[D]^e$ est diagonale :

$$[D]^e = \frac{m_v A_{ijk}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec :

m_v : est la compressibilité moyenne.

A_{ijk} : est l'aire du triangle formé par les noeuds i, j, k .

d) Evaluation du vecteur $\{\varphi\}^e$:

On a :

$$\varphi = \partial u_g / \partial N \cdot \partial N / \partial \alpha$$

Si on pose :

$$u_g = \sum_i^n N_i u_{gi} = \langle N \rangle \{u_{gn}\}$$

Avec:

u_{gi} : La valeur de la pression interstitielle générée au noeud (i).

N_i : C'est la fonction de forme.

n : Est le nombre de noeuds.

On peut alors écrire :

$$\varphi = \langle N \rangle \partial \{u_{gn}\} / \partial N \cdot \partial N / \partial \alpha$$

On aura :

$$\{\varphi_n\} = \partial \{u_{gn}\} / \partial N \cdot \partial N / \partial \alpha$$

Pour un élément :

$$\{\varphi_n\}^e = \partial\{u_{gn}\}^e / \partial N \cdot \partial N / \partial x$$

Les termes du vecteur $\partial\{u_{gn}\}^e / \partial N$ sont définis comme suit:

$$\frac{\partial \{u_{gn}\}}{\partial N} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_{g1}}{\partial N} \\ \frac{\partial u_{g2}}{\partial N} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_{gi}}{\partial N} \end{Bmatrix}$$

Pour le noeud (i), le terme $\partial u_{gi} / \partial N$ est écrit sous la forme de la fonction génératrice des pressions interstitielles :

$$\frac{\partial u_{gi}}{\partial N} = \frac{1}{X_i \cdot \theta \cdot N_i \cdot \text{COS} X_i \cdot \text{SIN} X_i^{2\theta-1}} \quad \text{avec: } X_i = \frac{\pi}{2} r_{ui}$$

Avec :

$r_{ui} = u_i / \sigma_i$: Est le taux de pression interstitielles au noeud (i).

N_i : Est le nombre de cycles causant la liquéfaction au noeud (i).

• **Remarques :**

Dans le cas où le maillage contient des éléments rectangulaires, le calcul de la matrice de perméabilité utilise l'élément triangulaire suivant la démarche ci-après :

On subdivise l'élément rectangulaire en un ensemble de quatre éléments triangulaires de base. Pour un élément rectangulaire de noeuds (i,j,k,l), la matrice $[A_{ijkl}]^e$ est définie comme étant la contribution de chacune des matrices des éléments à trois noeuds (i,j,k) , (j,k,l) , (k,l,i) , (l,i,j).

La matrice $[A_{ijkl}]^e$ est donnée par la formule suivante :

$$[A_{ijkl}]^e = \frac{1}{2} \left\{ [A_{ijk}]^e + [A_{jkl}]^e + [A_{kli}]^e + [A_{lij}]^e \right\}$$

Dans le cas d'éléments rectangulaires, la matrice de compressibilité $[D]^e$ est donnée par

$$[D]^e = \frac{m_v \cdot A_{ijkl}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Où:

A_{ijkl} : est l'aire du rectangle formé par les noeuds i,j,k,l

Dans le cas d'un écoulement radial, Seed a montré qu'il suffit de multiplier les matrices déjà déterminées par le facteur (r) tel que:

$$r = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 x_i & \text{é l é m e n t s } \quad \text{t r i a n g u l a i r e s} \\ \sum_{i=1}^4 x_i & \text{é l é m e n t s } \quad \text{r e c t a n g u l a i r e s} \end{cases}$$

ainsi :

$$[A]_r^e = r [A]_p^e \text{ et } [D]_r^e = r [D]_p^e$$

Où:

$[A]_r^e$ et $[D]_r^e$ sont, respectivement, les matrices de perméabilité et de compressibilité pour un écoulement radial.

$[A]_p^e$ et $[D]_p^e$ sont, respectivement, les matrices de perméabilité et de compressibilité pour un écoulement plan.

IV.4.2 Procédé d'intégration:

Après assemblage des matrices élémentaires $[A]^e$ et $[D]^e$, on obtient l'équation matricielle suivante:

$$[A] \{U_n\} + [D] (\{\dot{U}_n\} - \{\varphi\}) = 0$$

qui peut être écrite sous la forme:

$$[K]\{U\} + [C]\{\dot{U}\} = \{F\} \quad (\eta)$$

Avec:

$$[K] = [A]$$

$$[C] = [D]$$

$$\{F\} = [D]\{\varphi\}$$

Il existe de nombreuses méthodes d'intégration dans le temps, tant implicites qu'explicites. Parmi les méthodes implicites, on a choisi celle des différences finies dans le temps. Elle consiste à calculer (u) et (\dot{u}) à l'intérieur de l'intervalle de temps $[t_{i-1}, t_i]$ à partir des valeurs de (u) aux temps t_{i-1} et t_i .

Avec:

$$u[t_{i-1}, t_i] = \alpha \cdot u(t_i) + \beta \cdot u(t_{i-1})$$

$$\dot{u}[t_{i-1}, t_i] = (u(t_i) - u(t_{i-1})) / \Delta t$$

Où :

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = 1.$$

Pour différentes valeurs de α plusieurs méthodes se présentent :

$$\alpha = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \text{méthode de NICHOLSON.}$$

$$\alpha = 2/3 \quad \Rightarrow \quad \text{méthode de GALERKINE.}$$

$$\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{méthode d'EULER.}$$

Dans le programme, on considère la valeur de $\alpha = 0.5$ pour l'intégration de l'équation (η). En reportant les valeurs de $u[t_{i-1}, t_i]$ et de $\dot{u}[t_{i-1}, t_i]$ dans l'équation (η) on obtient la formule de récurrence de CRANK-NICHOLSON:

$$\left[\frac{K}{2} + \frac{C}{\Delta t} \right] U(t_i) = \left[\frac{-K}{2} + \frac{C}{\Delta t} \right] U(t_{i-1}) + \frac{F(t_{i-1}) + F(t_i)}{2}$$

On pose :

$$K_1 = \left[\frac{K}{2} + \frac{C}{\Delta t} \right]$$

$$K_2 = \left[\frac{-K}{2} + \frac{C}{\Delta t} \right]$$

$$G(t_i) = \frac{F(t_{i-1}) + F(t_i)}{2}$$

On obtient :

$$K_1 \cdot U(t_i) = K_2 \cdot U(t_{i-1}) + G(t_i)$$

a) Cas de compressibilité constante:

Dans ce cas la matrice C est constante, donc les matrices K_1 et K_2 sont uniquement fonction de Δt . On constate qu'à chaque modification de Δt , il faut recalculer ou pour le moins reassembler les matrices K_1 et K_2 et triangulariser K_1 .

b) Cas de compressibilité variable :

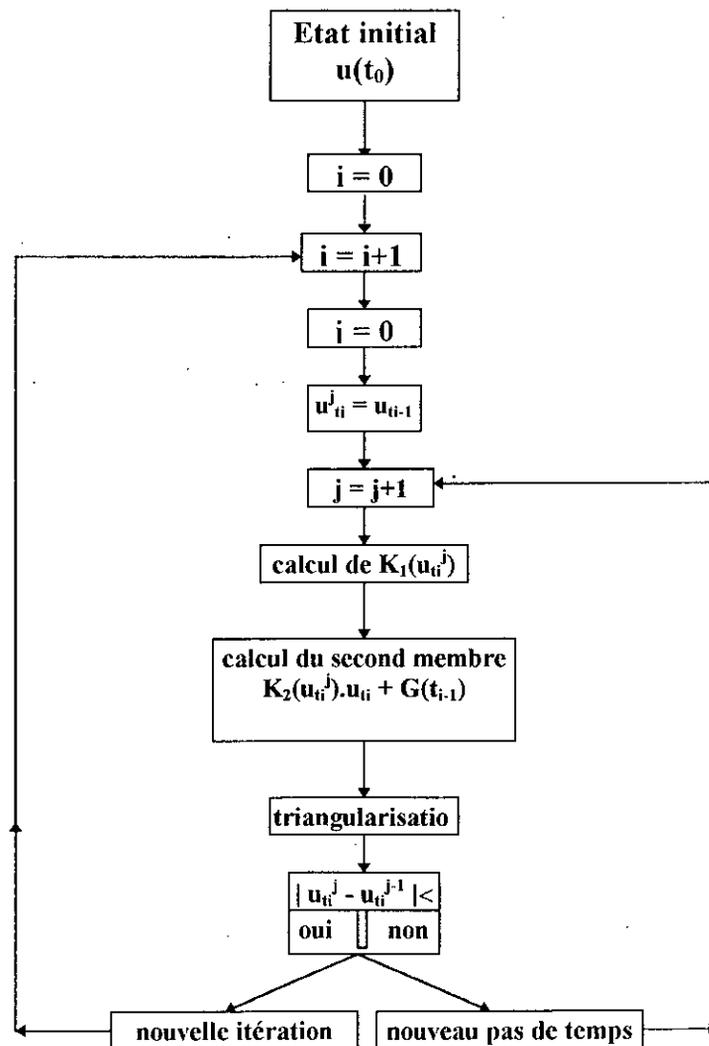
Dans ce cas la matrice C est fonction de U et de t, et de même pour les matrices K_1 et K_2 .

Donc l'équation à résoudre est de la forme :

$$K_1(u, t) \cdot U(t_i) = K_2(u, t) \cdot U(t_{i-1}) + G(t_i)$$

Pour résoudre l'équation ci-dessus, il est nécessaire de faire un calcul itératif.

- K_1 étant modifiée à chaque itération, il est nécessaire donc de refaire sa triangularisation à chaque fois.
- Pour ce cas, l'algorithme de calcul est décrit sur la figure(IV-4), dans lequel on constate la présence d'une boucle supplémentaire à l'intérieur de la boucle sur les pas de temps. D'autre part, la matrice K_1 est triangularisée à chaque itération de chaque pas de temps.
- Le processus itératif cesse lorsqu'une certaine norme de la différence entre la solution à l'itération j et la solution à l'itération $j-1$ est inférieure à ϵ donné.



figure(IV-4) : Algorithme de calcul dans le cas de compressibilité **variable**

CHAPITRE V

PRESENTATION DU PROGRAMME "LIQ"

Le programme est écrit en " **fortran 77** ", son algorithme général de calcul est présenté sur la figure(V-1). Il permet de donner l'évolution du rapport de pressions interstitielles aux contraintes effectives (r_u) en fonction du temps lors d'un chargement cyclique régulier ou irrégulier, suivi ou non par une réplique .

Le programme comporte 18 subroutines et un programme principal, la fonction de chacune d'elles sera détaillée par la suite. .

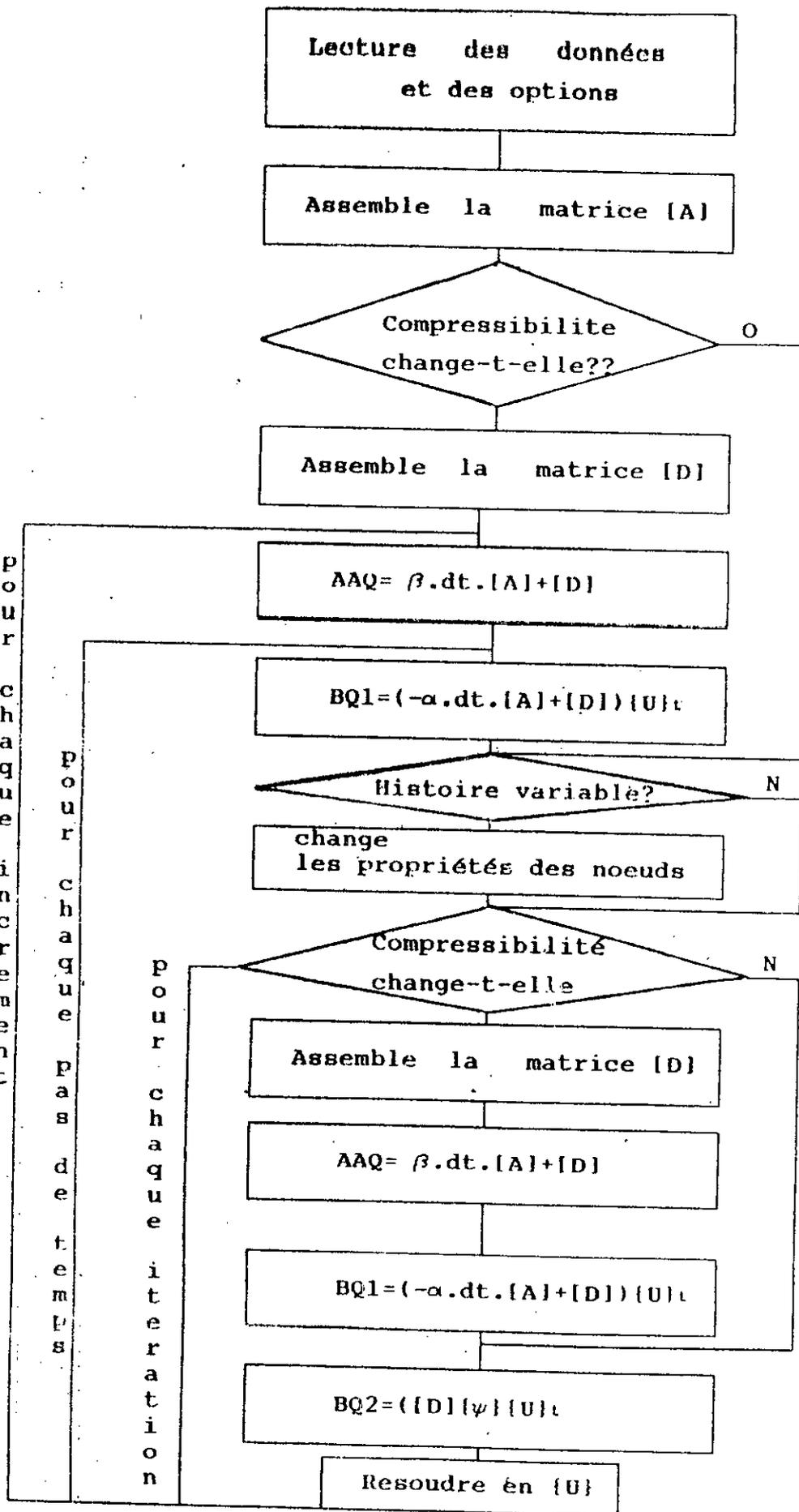


Figure V-1

V-1 Critère de convergence:

- Dans le chapitre précédent, on a abouti à l'équation (IV-) qui est non linéaire, du fait que la compressibilité et les valeurs du vecteur $\{\varphi\}$ sont influencées par la pression interstitielle. Ainsi, pour résoudre ce problème, on a utilisé une méthode de résolution dite pas à pas, où la réponse est divisée en courts incréments de temps, égaux entre eux.
- La pression interstitielle est calculée en résolvant un système d'équations linéaires ayant les caractéristiques du début de l'intervalle.
- Le processus itératif est arrêté lorsque le coefficient de compressibilité sera compatible avec la pression générée.

Afin d'éviter l'apparition d'une boucle infinie, on a utilisé un test de convergence qui consiste à limiter le nombre d'itérations.

V-2 Description des sous-routines du programme:

V-2-1 Sous-routine titre:

Sa fonction est d'introduire le titre du fichier de données ainsi que les options. Elle permet de lire, respectivement, le titre, les options : **IOPT** (écoulement plan ou radial), **JOPT** (compressibilité constante ou variable), **KOPT** (chargement uniforme ou irrégulier), **LOPT** (existence ou non d'une réplique), les critères de convergence (**ITR**), (**DIFFA**) et finalement la masse volumique de l'eau (**Gamma_w**).

V-2-2 Sous-routine noeuds:

Sa fonction est de faire entrer, dans le programme, les caractéristiques des noeuds. Elle permet de lire, respectivement, le nombre de noeuds (**NNT**), les coordonnées (**X(I)**, **Y(I)**) de chaque noeud (**I**), sa contrainte effective (**SP3 (I)**), la valeur du coefficient θ (**TETA**) et le nombre de cycles à la liquéfaction (**NL**).

Si l'histoire des contraintes est irrégulière, on peut aisément ajouter, pour chaque noeud, les caractéristiques et le nombre d'intervalles de subdivision de l'histoire des contraintes, le nombre de cycles et le nombre de cycles à la liquéfaction pour le niveau de contrainte (τ) que l'on stockera dans **NINT**, **T(NINT, N)**, **NI(NINT,N)**, **NL(NINT,N)** pour chaque noeud (N).

Formulation du chargement régulier:

Une fois la lecture des caractéristiques de l'histoire des contraintes est faite, la pression interstitielle due à l'action du premier tronçon de l'histoire des contraintes en chacun des noeuds est évaluée en prenant une histoire de contraintes uniformes caractérisée par :

$N_{eq} = N_i$ où : N_i est le nombre de cycles du premier tronçon.

$T_D = T_{Di}$

T_{Di} est la durée du premier tronçon pour le noeud (i).

Le calcul de N_{eq} est accompli par la sous-routine **CHANGE**.

V-2-3 Subroutine ELEM:

Elle permet d'introduire, dans le programme, les caractéristiques des éléments. Elle permet aussi de lire respectivement, le nombre total d'éléments (**NELT**), les noeuds de connections **NN(I,1)**, **NN(I,2)**, **NN(I,3)**, **NN(I,4)**, la perméabilité dans les deux sens (x,y) **PERM(I,1)**, **PERM(I,2)**, la compressibilité **RMV₀(I)**, la densité relative **DR(I)** pour chaque élément (I) et la taille de l'élément (à 3 ou à 4 noeuds) **ICOD(I)**.

V-2-4 Subroutine BANDE :

Elle permet le calcul de la largeur de la bande de la matrice [A] qui est (**IBW**)



V-2-5 Subroutine CONLIMT :

Elle permet de lire les noeuds qui vérifient les conditions aux limites (pression interstitielle nulle), dont le nombre est égale à **NBC**. Il sont stockés dans un vecteur **IBC(I)**; avec $I = 1, NBC$

V-2-6 Subroutine SEISME :

Sa fonction est d'introduire les caractéristiques du séisme. Elle permet de lire, respectivement, le nombre de cycles équivalent (**ANQ**) et la durée du séisme (**T_D**). Aussi, elle permet de lire uniquement la durée du séisme (**T_D**), lorsqu'il s'agit d'une histoire irrégulière de contraintes.

Dans le cas où une réplique existe, la présente subroutine permet de lire le temps du début de la réplique ainsi que ses caractéristiques (**ANQ**) et (**T_D**).

V-2-7 Subroutine TCalcul :

Elle permet d'introduire les paramètres d'intégration (les incréments, le pas et le temps d'affichage), et leurs nombre :

NNI : nombre d'incrément.

ITI (I) : nombre de pas pour chaque incrément (**I**).

DELT (I) : le pas.

DTPR (I) : le temps d'affichage.

V-2-8 Subroutine CHANGE :

Elle permet de changer, pour une histoire irrégulière, les caractéristiques des noeuds. Elle permet aussi de lire, pour chaque tronçon (**i**), le nombre de cycles équivalent $N_{eq} = N_i$ et la durée correspondante $T_D = T_{D_i}$.

V-2-9 Subroutine PERMEABILITE :

Elle permet l'introduction des éléments de la matrice $[A]^e$, ainsi que l'assemblage dans la matrice globale, en utilisant la formule :

$$[A]_{IJ}^G = [A]_{IJ}^G + [A]_{ij}^e$$

avec :

$$I = \text{LOCE}(i) \quad i = 1, \dots, n.$$

$$J = \text{LOCE}(j) \quad j = 1, \dots, n.$$

$[A]^e$: matrice élémentaire.

$[A]^G$: matrice globale.

V-2-10 Subroutine TRIANGLE :

Elle permet le calcul de la matrice élémentaire $[A]^e$ dans le cas d'un élément triangulaire, puis elle transmet le résultat à la subroutine **PERMEABILITE** pour donner la valeur de $[A]^e$ dans le cas général (triangulaire ou rectangulaire).

V-2-11 Subroutine COMPRESSIBILITE :

Elle permet de calculer la matrice élémentaire de compressibilité $[D]^e$ et de faire l'assemblage dans la matrice globale $[D]^G$, par la même formule que celle utilisée dans la subroutine **PERMEABILITE**.

Comme la matrice $[D]$ est diagonale, il est préférable de la stocker dans un vecteur $\{D\}$.

V-2-12 Subroutine ASSAAQ :

Elle permet de faire le calcul qui donne la matrice $[AAQ]$ tel que :

$$[AAQ] = \beta \cdot \Delta T \cdot [A] + [D] .$$



V-2-13 Subroutine ASSBQ1 :

Elle de faire le calcul qui aboutit au vecteur {BQ1} tel que :

$$\{\mathbf{BQ1}\} = (-\alpha \cdot \Delta T \cdot [\mathbf{A}] + [\mathbf{D}]) \{\mathbf{U}_i\}.$$

V-2-14 Subroutine ASSBQ2 :

Elle permet de faire le calcul qui aboutit au vecteur {BQ2} tel que :

$$\{\mathbf{BQ2}\} = ([\mathbf{D}] \{\phi\} \cdot \Delta T).$$

V-2-15 Subroutine PREMIERE :

Elle permet de calculer la valeur initiale de $\{\phi\}$ (en utilisant la fonction génératrice des pressions interstitielles). Pour la première itération on utilise la pression interstitielle courante .

V-2-16 Subroutine SECONDE :

Elle permet de calculer la valeur de $\{\phi\}$, mais cette fois-ci en utilisant la valeur moyenne de la pression interstitielle. Elle est utile pour les autres itérations autres que la première.

Si $\{\mathbf{u}^*\}$ est la solution de $[\mathbf{AAQ}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_i\}$ alors:

$$\{\mathbf{u}_i\} = (\{\mathbf{u}_i\} + \{\mathbf{u}^*\}) / 2$$

est utilisée pour estimer $\{\phi\}_e$.

V-2-17 Subroutine GAUSS BANDE :

Elle permet de faire la triangularisation et la résolution du système :

$$[\mathbf{AAQ}] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{BQ1}\} + \{\mathbf{BQ2}\}.$$

V-2-18 Function COMP(X,R) :

Elle permet de faire le calcul de la valeur courante de m_v selon la formule suivante :

$$\frac{m_v}{m_{v0}} = \frac{e^y}{1 + y + 1/2 \cdot y^2}$$

V-3 - Introduction des données:

les données du programme sont introduites à partir de deux fichiers , le premier appelé **FIC.DAT** est imposé et le deuxième, qui n'est pas imposé, est tiré à partir du premier fichier.

a) Fichier FIC.DAT:

Ce fichier contient, respectivement, le nom du deuxième fichier, le nom du fichier résultat, les options du problème à traiter (IOPT, JOPT, KOPT, LOPT, ITA, DIFFA, GAMMA W) avec:

$$IOPT = \begin{cases} 1 & \text{pour un écoulement plan} \\ 2 & \text{pour un écoulement radial} \end{cases}$$

$$JOPT = \begin{cases} 1 & \text{pour une compressibilité variable} \\ 2 & \text{pour une compressibilité constante} \end{cases}$$

$$KOPT = \begin{cases} 1 & \text{pour un chargement régulier} \\ 2 & \text{pour un chargement irrégulier} \end{cases}$$

$$LOPT = \begin{cases} 1 & \text{cas d'existence d'une réplique} \\ 2 & \text{cas de non existence de la réplique} \end{cases}$$

ITA : nombre limite d'itérations.

DIFFA : la tolérance admise.

GAMMA W : la valeur du poids volumique de l'eau.

b) deuxième fichier:

Le nom de ce deuxième fichier de données est tiré du premier fichier (FIC.dat), il contient :

- Les caractéristiques des noeuds, le nombre et les numéros, vérifiant les conditions aux limites.
- Les caractéristiques des éléments.
- Les caractéristiques du séisme.
- Les paramètres d'intégration dans le temps.

CHAPITRE VI

PRESENTATION DES RESULTATS ET
INTERPRETATIONS

Le programme « LIQ » développé est basé sur la méthode des éléments finis. Il permet la résolution de l'équation différentielle qui régit l'évolution et la répartition des pressions interstitielles dans les milieux poreux, tel que les barrages en terre et les dépôts de sol saturés.

L'efficacité du programme est validée, en premier lieu, à travers les exemples dont nous allons présenter les résultats; et en deuxième lieu à travers une comparaison avec les résultats obtenus par le programme «GADFLEA» élaboré par le professeur Seed pour résoudre le même type de problèmes dans un massif de sol saturé.

Deux exemples seront présentés. Le premier porte sur l'étude du risque de liquéfaction d'un barrage en terre, soumis à une action sismique donnée, dans lequel on envisagera aussi l'effet d'une réplique de magnitude et de temps de retour donnés. Dans le deuxième exemple on donnera l'évolution, en fonction du temps, du taux des pressions interstitielles dans un massif de sol comportant quatorze noeuds et de largeur unité, ainsi que l'influence du pas de temps sur la stabilité et la convergence de la méthode d'intégration utilisée dans le programme.

VI-1 Application du programme "LIQ" pour un barrage:

Dans cet exemple on a choisi le barrage de **vieu – Pré** situé à l'Est de la France. Il s'agit d'un barrage zoné, en grès et avec un noyau argileux. La hauteur et la longueur du barrage sont 80 et 345 mètres respectivement. Le maillage choisi est constitué de 60 noeuds, formant ainsi 49 éléments. La partie aval du barrage n'a pas été prise en considération du fait de l'existence d'organes de drainage dans cette zone (les recharges aval ne peuvent donc être saturées).

Lors de la sélection des paramètres de calcul (m_{v0} , N_t , K ,etc), une particularité est faite pour le noyau central qui ne présente, pratiquement, aucun risque de liquéfaction du fait de sa grande imperméabilité (K_n est de l'ordre de 10^{-10} m/s). Mis à part le noyau, la perméabilité dans les deux sens est prise égale à $K_x = K_y = 4 \cdot 10^{-4}$ m/s. Le calcul était fait avec une compressibilité m_v variable, de valeur initiale $m_{v0} = 0,02 \text{ MPa}^{-1}$.



Les contraintes de cisaillement dynamiques utilisées sont obtenues à partir du logiciel « SHAKE » qui donne, la répartition des accélérations maximales dans un dépôt de sol soumis à une action dynamique (Thèse de Mag^{ter}-M^{elle} Zerfa). L'accélérogramme introduit est celui du séisme de Pcoima "SANFERNANDO" de magnitude $M=6,6$ (nombre de cycles équivalent $ANQ=8$) et d'une durée égale à 16s.

Les résultats de calcul présentés sur la figure(VI-1) montrent :

- Une forte concentration de surpressions interstitielles dans la zone centrale, près du noyau argileux. Cette concentration est évidemment due à l'éloignement de cette zone par rapport à la surface de drainage puisque la contrainte dynamique développée par une $a_{max} = 0,2g$ est relativement faible.
- Un faible taux de pressions interstitielles à proximité du talus amont.

Du fait que r_u est inférieur à l'unité, on peut dire donc qu'aucune liquéfaction du barrage n'est à craindre. Par contre, si on soumet le même profil à une accélération un peu plus importante $a_{max} = 0,4g$, les résultats obtenus (Figure VI-2) montrent qu'une liquéfaction peu avoir lieu dans la plupart des éléments(noeuds) du profil de barrage, excepter les noeuds qui sont proches du talus amont et ceux situés à la base du barrage.

VI-1-2 Effet d'une réplique:

Le même profil du barrage(Figure VI-3) **a)** soumis à une accélération maximale $a_{max}=0,2g$, est testé sous l'effet d'une réplique de magnitude $M = 6$ ($ANQ = 6$), d'une durée $T_D = 14$ s et qui survient 6 min après la fin du séisme principal. Les résultats obtenus montrent qu'une liquéfaction a eu lieu dans la zone centrale du barrage, celle-ci est due au fait que les pressions développées par le séisme principal n'ont pas eu suffisamment de temps pour se dissiper totalement; L'arrivée de la réplique a provoqué donc une superposition d'effets de surpressions, ce qui a favorisé donc l'occurrence de la liquéfaction.

La figure(VI-3) **b)** illustre l'effet d'une réplique sur l'évolution du taux de pressions interstitielles pour un noeud appartenant au maillage (noeud 26)

VI-2 Test de fiabilité:

Pour confirmer la fiabilité des résultats obtenus par le programme « LIQ » lors de l'étude du processus de génération et de dissipation des pressions interstitielles dans un massif de sol dont les caractéristiques sont présentées sur la figure (VI-4), une comparaison est faite avec le programme «GADFLEA » et les résultats obtenus sont présentés sur la figure(VI-5), sont ceux des noeuds (5,6).

VI-3 Effet d'une histoire irrégulière:

Une histoire irrégulière fictive est considérée pour montrer l'effet de l'irrégularité des contraintes de cisaillement dynamiques sur l'évolution du taux de pressions interstitielles dans un dépôt de sol saturé.

Les données de l'histoire sont résumées dans le tableau ci-dessous:

t_{ai}	5	15
N_i	3	5
N_{ii}	20	80

Où:

t_{ai} : est la durée du séisme.

N_i : est le nombre de cycles.

N_{ii} : est le nombre de cycles causant la liquéfaction.

Les résultats obtenus pour ce type d'histoire sont comparés avec ceux obtenus pour un chargement régulier appliqué au même massif et sont présentés sur la figure(VI-6).

VI-4 Effet du pas de temps :

La méthode d'intégration de GRANK-NICHOLSON utilisée dans le programme «LIQ » donne de très bons résultats pour les petits pas de temps. Par contre, si on augmente le pas de temps cette méthode oscille et donne des résultats moins précis. Les résultats obtenus pour différents pas de temps dans les noeuds (3,4) du massif de sol décrit précédemment, sont présentés sur la figure(VI-7).



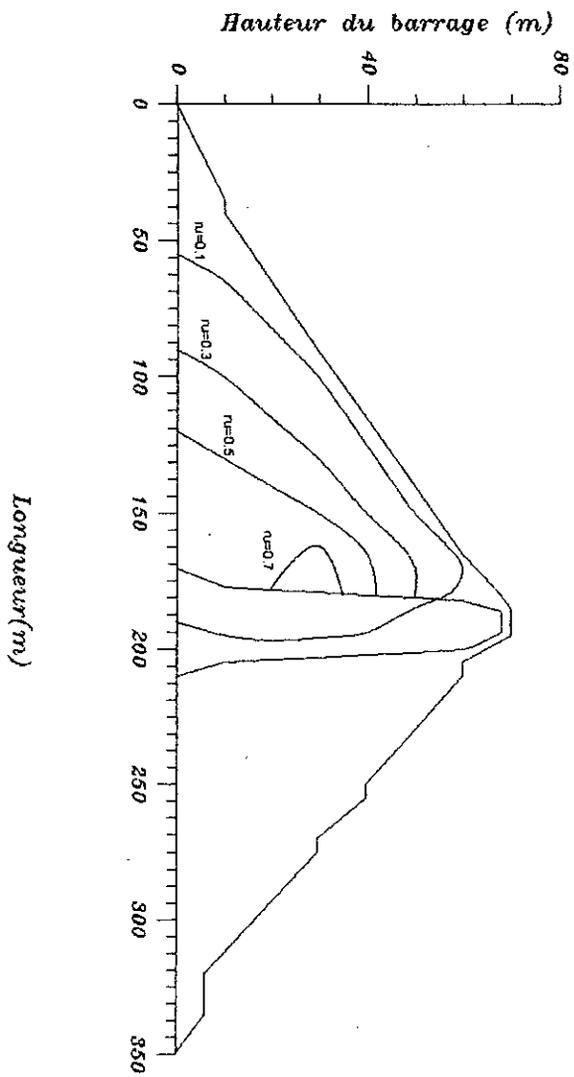


Figure (VI-1): Répartition du taux de pressions interstitielles (accé-max = 0.2g)

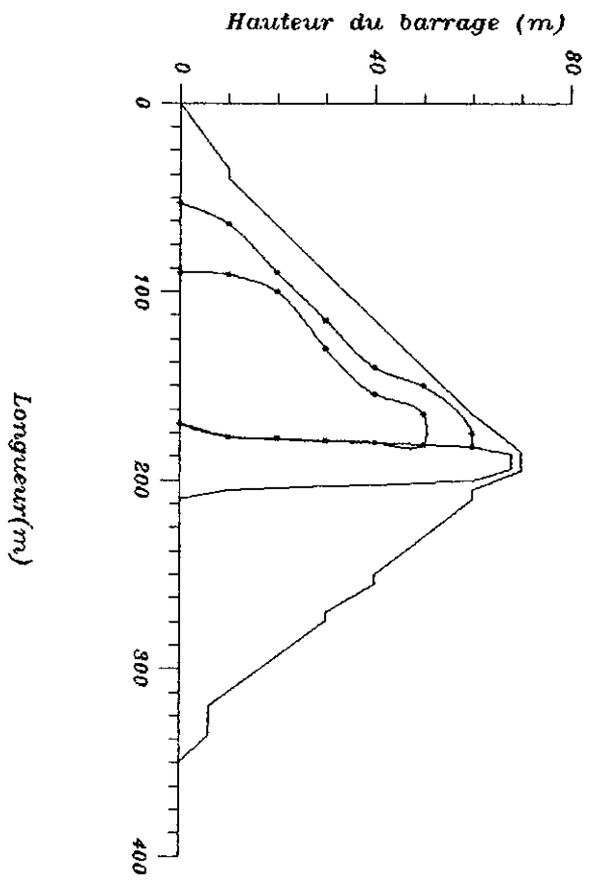
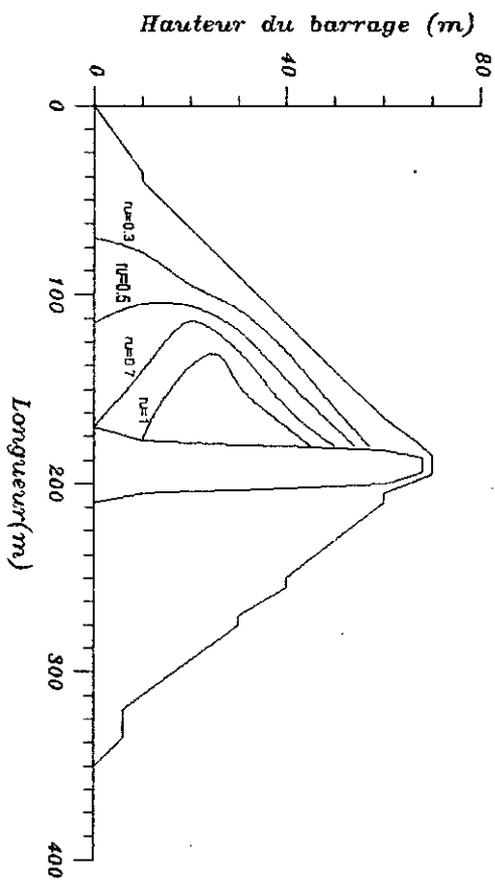


Figure (VI-2): Répartition du taux des pressions interstitielles (acc-max=1.4g)



Figure(VI-3a) : Répartition du taux de pressions interstitielles (effet d'une rippe)

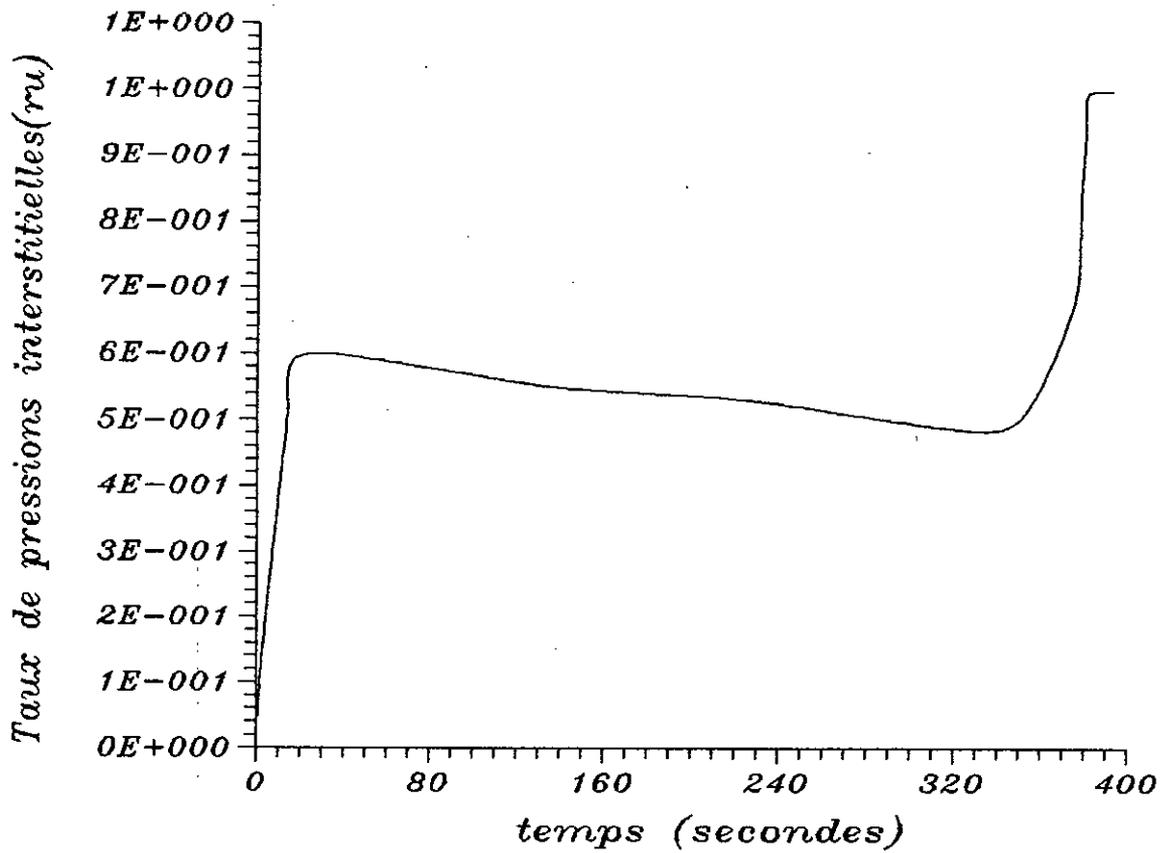
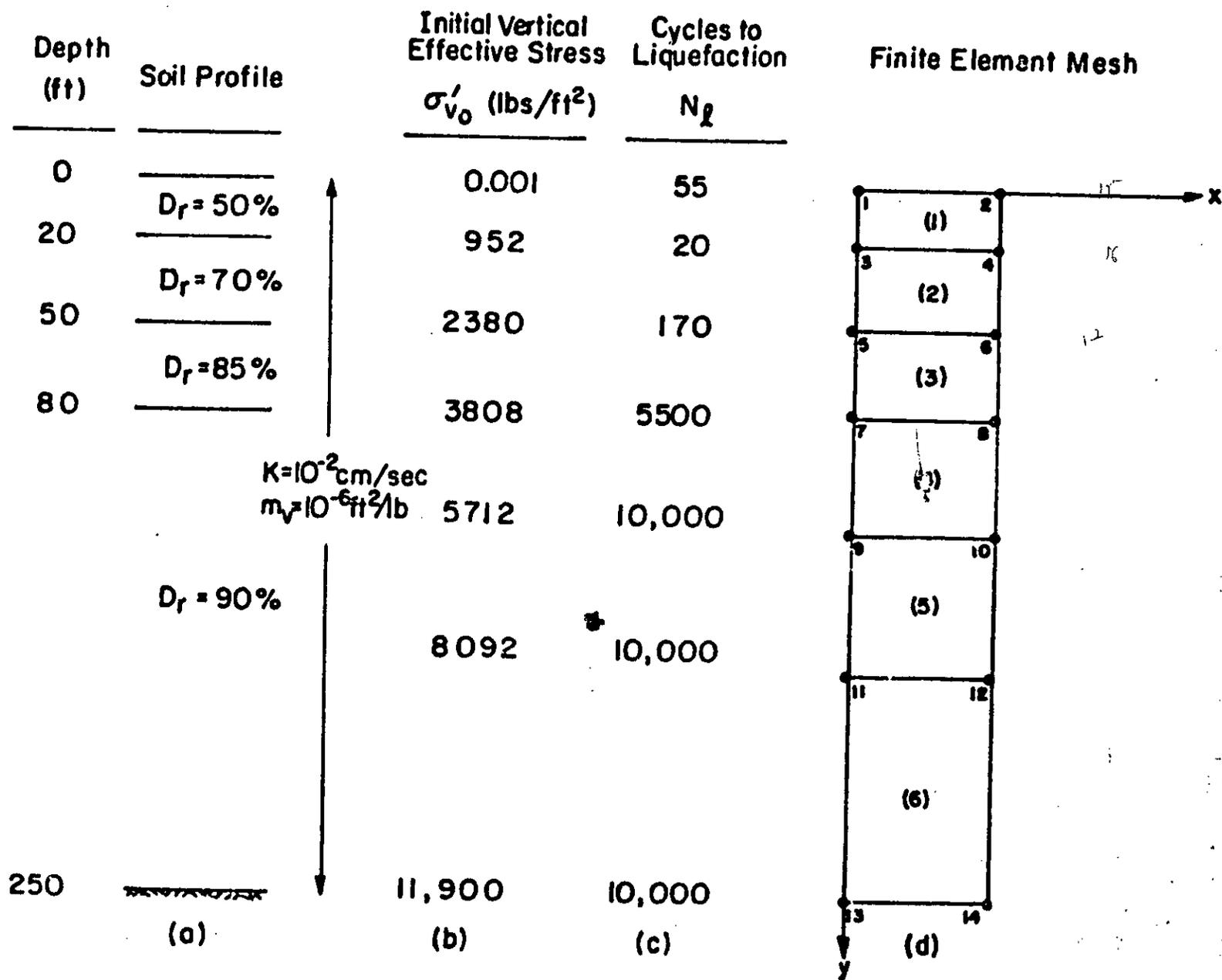
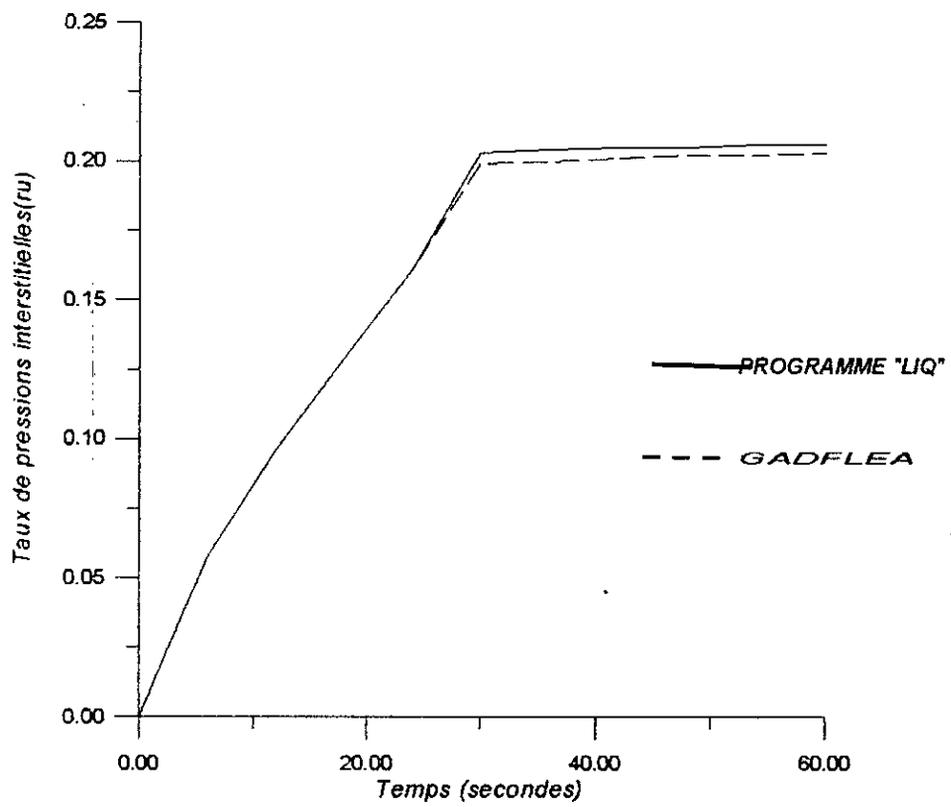


FIG VI.3 b Evolution de la pression interstitielle au noeud(26)

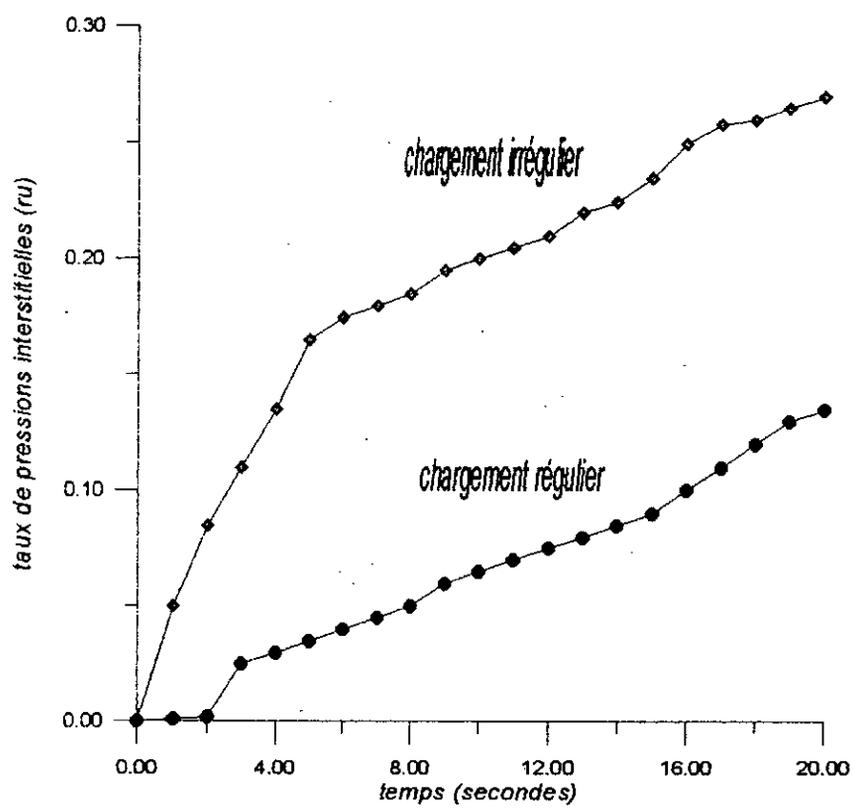
après un séisme de $M=6.6$ suivi d'une réplique
de $M=6$ après (6 min)



Fig(14) DETAILS FOR ILLUSTRATIVE EXAMPLE



Figure(VI.5) Evolution de ru dans le temps
 aux noeuds (5 et 6) obtenue par
 "LIQ" et GADFLEA



Figure(VI-6) : Evolution de (r_u) pour le chargement régulier et irrégulier

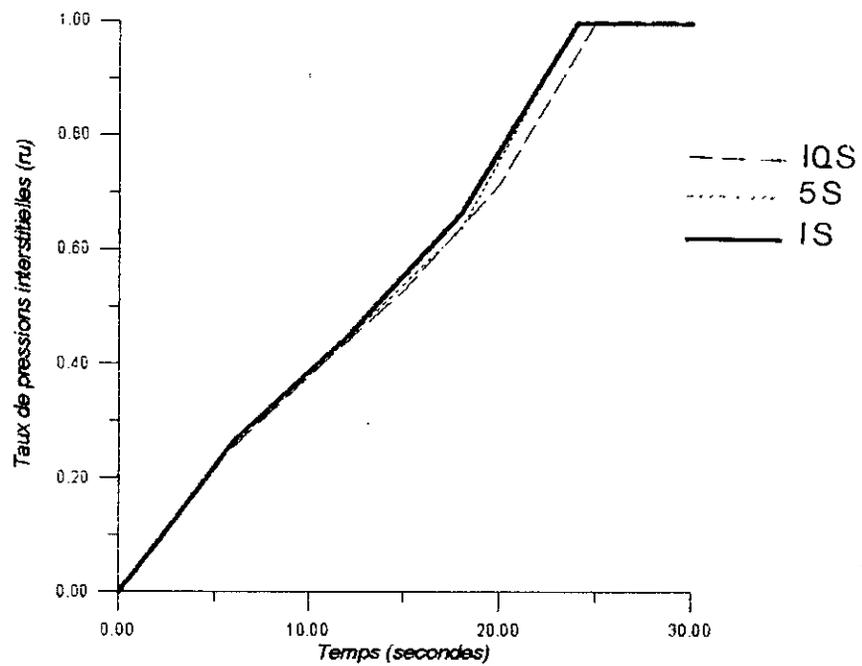


Figure (VI-7) : Evolution de taux de pressions interstitielles
dans le noeud (3) pour différents pas de temps
(pas=1,3,5,10 secondes)

CHAPITRE VII

MOYENS DE REMEDIER A LA LIQUEFACTION

Si l'étude du risque de liquéfaction d'un site conduit soit à des coefficients de sécurité jugés trop faibles, soit à des pressions interstitielles trop élevées. Il est nécessaire d'accroître la résistance aux cisaillements cycliques du sol. L'étude des paramètres influant sur cette résistance montre que l'on peut agir sur la structure du matériau, sa densité, la contrainte moyenne effective qu'il supporte, les conditions de drainage ...

VII-1 Accroissement de la densité:

Dans le cas d'un remblai, il est possible de spécifier des degrés de compactage élevés pour obtenir élevée au cisaillement cyclique. Dans le cas d'un sol en place, il faut envisager un compactage à partir de la surface en utilisant, par exemple :

Le compactage d'explosifs, le compactage dynamique ou simplement le compactage par la vibration d'un profil métallique.

VII-2 Amélioration du drainage :

Si le sol est suffisamment perméable, l'augmentation des pressions interstitielles peut être compensée par une dissipation rapide. Par substitution totale ou partielle, il est possible de remplacer un sable peu perméable par un sable très perméable.

VII-3 Amélioration par augmentation de la contrainte du sol :

La RCC est sensiblement proportionnelle à la contrainte moyenne effective du sol, la mise en place d'une surcharge de remblai augmente cette résistance.

La contrainte effective, donc la RCC, peut également être augmentée par rabattement de la nappe, le problème de liquéfaction est évité dans toute la zone rabattue.

VII-4 Modification des caractéristiques du sol :

Il est possible, par adjonction de produits chimiques, de créer des liaisons entre les grains du sol et donc de modifier sa RCC. Cette modification peut se faire en place par injection de coulis de silicates ou de ciment.

CONCLUSION ET RECOMMANDATION

Conclusion :

Le programme « LIQ », basé sur la méthode des éléments finis, résolve l'équation différentielle qui régit les écoulements à travers les milieux poreux. Il permet de suivre l'évolution et la répartition des pressions interstitielles, développées par une action dynamique, dans les dépôts de sol saturés en général et dans les barrages en terre en particulier.

La détermination de l'évolution des pressions générées par le séisme permet de localiser les zones susceptibles de se liquéfier.

Malgré les hypothèses simplificatrices, prises lors de la formulation mathématique du séisme et des caractéristiques du sol, la mise en mode opérationnel de ce programme a donné des résultats qui concordent avec la réalité physique des effets dynamiques sur les barrages en terre.

L'utilisation du programme « LIQ » dans les applications évoquées précédemment nous a permis de constater que le potentiel de liquéfaction d'un sol ne dépend pas uniquement des caractéristiques du séisme frappant, mais il dépend aussi des caractéristiques des sols constituant les ouvrages en question.

Dans le but de compléter la présente étude, les recommandations ci-après sont à faire :

- Affiner le maillage et améliorer la formulation en éléments finis en vue d'aboutir à des résultats plus précis.
- Extension de l'étude bidimensionnelle simplifiée à une étude tridimensionnelle plus exacte.
- Modélisation de l'effet dynamique en bidimensionnel.
- Amélioration de la prise en compte simplifiée de l'irrégularité du séisme.

Bibliographie

- 1°) H, Bolton Seed " *The generation and dissipation of water pressure* " Report EERC
J.R,Boker during soil liquéfaction. (1976).
M.S, Rahman.
- 2°) M, Chikhi " *L'analyse de la liquéfaction* " rapport de PFE (1990).
dans les dépôts de sols.
- 3°) C, Davidovici " *Génie parasismique* " Pres Ponts et chaussées.
- 4°) G,Dhatt,G Touzout " *Une présentation de la méthode* " Maloine s a éditeur
des éléments finis. (1984).
- 5°) P Humbert " *Application de la méthode des* " Bulletin de liaison
élément finis aux écoulement des laboratoires
poreux des ponts et
chaussées
- 6°) S, Lipshutz " *Programmation Fortran* " Mc, Graw-Hill (1984)
- 7°) A, Pecker " *Dynamique des sols* " Press ponts et
chaussées
- 8°) G, Philipponat " *Fondation et ouvrages interne* " Eyrolles(1979)
- 9°) F, Shlosser " *Elément de mécanique des sols* " Press pont s et
chaussée
- 10°) Shamsher,Prakash " *Soils dynamique* " MC, Graw, Hill (1981)
- 11°) N, Taibi " *Pratique de Fortran* " Berti(1991)
- 12°) .F.Z, ZERFA " *Contribution à l' analyse du* " Thèse de magister(1991)
comportement dynamique
des barrages en terre
- 13°) O.C Zienkiewiz " *La méthode des éléments finis* " Edsiciene(1973)°