

1/97

République Algérienne Démocratique & Populaire  
Ministère délégué aux universités et à la recherche scientifique

*Ecole Nationale Polytechnique D'Alger*

***Mémoire de Fin d'Etude en vue de l'obtention  
du diplôme d'Ingénieur d'Etat***

*Spécialité Hydraulique*  
المكتبة - المكتبة  
BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**THEME**

**Etude Fondamentale des Transferts Couplés  
de Masse et de Chaleur  
en Milieux Poreux**

Présenté par :  
*Melle Benfekih Myriam*

Devant le Jury :

Président :  
*Mr Mouloudy*

Directeur de thèse  
*Mitiche E.H*

Examineurs :  
*Melle Benmaâmar S.*  
*Mr Belhadj O.*  
*Mr Boudjemâa*

*Promotion 1996/97*

# Dédicaces

*À mes très chers parents, en reconnaissance du soutien et de la patience, dont ils ont fait preuve.*

*À ma soeur Leila, pour son grand soutien moral et son immense tendresse dont elle n'a jamais cessé de m'en donner.*

*Toute ma gratitude, va envers mes professeurs de l'E.N.P et plus particulièrement, Mr Bermad, Mr Cherrared, Mr Melboucy, Mme Kettab et Melle Benmaamar.*

*Enfin, à tous les membres enthousiastes de la Blue Zenith, bien avec eux mon frère Zaki.*



# Remerciements

*La présentation de ce modeste travail , m'offre l'occasion d'exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance :*

*A monsieur Mitiche (E. H) , pour ses suivis, ses orientations judicieuses qui m'ont permis de mener à bien ce travail, qu'il trouve ici l'expression de ma considération distinguée.*

*A l'ensemble des responsables et enseignants de l'Ecole Polytechnique, ainsi qu'à l'ensemble du monde étudiant, sans oublier tous les membres de la Blue Zenith , je dis à tous Merci...*

## RESUME

Le présent travail a été développé en vue d'acquérir une bonne compréhension des phénomènes de transfert associés l'existence de gradient de température et d'humidité.

Le modèle mathématique de ( Philip et Devries ) pour les transfert couplés d'humidité et de chaleur en milieux poreux non saturé , sera présenté au troisième chapitre et la résolution numérique du système d'équation obtenus est faite en utilisant la méthode des éléments finis.

Une comparaison entre la solution numérique et les résultats expérimentaux, peuvent nous donner une bonne appréciation du modèle mathématique choisis .

Par ailleurs, une étude de sensibilité aux paramètres, montre l'influence de quelques paramètres du modèle sur la progression de l'interface ( sèche - humide )

## Abstract

The present study was developed to acquire a good comprehension of heat and moisture gradients .

A mathematical modelling for mixed (coupled) heat and moisture transfer in unsaturated porous media , is presented in the third chapter and the numerical resolution of the system equation is giving by the finite elements method.

A comparison between , numerical simulation and experimental results , can give us, a good appreciation of the chosen mathematical model .

Therefor a study of sensibility of parameters , show the influences of some model's parameters , on the progressing interface (dry area - wet area).

ملخص :

هذا البحث يهدف للوقوف إلى فهم جيد لظواهر الانتقال المتكثفة:  
بوجود تدرج الحرارة والرطوبة في النظام (فيليب و دفريس)  
للانتقال المزدوج للرطوبة والحرارة في وسط مسامي غير مشبع  
والحل العددي لجملة المعادلات التفاضلية المتكاملة باستخدام طريقة  
العناصر المنتهية .  
مقارنة بين نتائج الدروس والتجريبية بما لها معنا تقريبا حسن  
للسيتم (فيليب و دفريس) المستعمل .  
من جهة أخرى دراسة حساسية الوسط و تبيان مدى تأثير بعض  
وسائط النظام على تغير المساحة الجافة (الرطوبة).



**Introduction****Chapitre I****Analyse physique du phénomène de fixation d'humidité en milieux poreux**

<b>1.1. Définition d'un milieu poreux</b>	01
<b>1.2. Classes des milieux poreux et leurs caractérisation</b>	01
<i>1.2.1 Classes des milieux poreux</i>	01
<i>1.2.2 Caractérisation du milieux poreux</i>	02
<i>a / La porosité</i>	02
<i>a.1 La porosité totale</i>	02
<i>a.2 La porosité accessible</i>	02
<i>b/ Surface spécifique</i>	02
<i>c/ La tortuosité</i>	03
<b>1.3 Fixation de l'humidité en milieu poreux</b>	03
<i>1.3.1 Fixation d'humidité par adsorption (domaine hygroscopique)</i>	03
<i>1.3.2 Milieux poreux microcapillaires et macrocapillaires</i>	08
<i>1.3.3 Fixation de l'humidité par capillarité ( domaine humide)</i>	08
<i>1.3.3.1 Tension Interfaciale</i>	10
<i>1.3.3.2 Angle de Contact</i>	10
<b>1.4 Energie de liaison de l'humidité</b>	13
<i>1.4.1 Différence d'enthalpie libre - Relation entre l'humidité relative et la pression capillaire</i>	14
<b>1.5 Analyse physique du phénomène de thermomigration</b>	16

**Chapitre II****Equations du phénomène et hypothèse**

<b>2.1. Equations générales</b>	19
<i>2.1.1 Définition</i>	19
<i>2.1.2. Equations de conservation</i>	20
<i><math>\alpha</math>/ Equation de conservation de la masse</i>	20
<i><math>\beta</math>/ Conservation de l'enthalpie</i>	22
<i>2.1.3 Paramètres thermodynamiques du transport de masse</i>	23
<i><math>\alpha</math>/ Paramètres thermodynamiques du transport de masse</i>	23
<i><math>\beta</math>/ Equation de transport pour les phénomènes couplés</i>	25
<b>2.2 Equations de transport de masse et de chaleur</b>	26
<i>2.2.1 Equations de conservation de la masse :</i>	26
<i><math>\alpha</math>/ Calcul de <math>I_e</math> et <math>I_v</math></i>	27
<i>2.2.2 Développement de l'équation de mouvement en phase liquide</i>	31
<i>2.2.3 Equation différentielle du transport de masse</i>	33
<i>2.2.4 Equation différentielle du transfert de chaleur</i>	34
<b>2.3 Equation de transport de masse et de chaleur - température élevée - pression gazeuse variable</b>	35
<i>2.3.1 Equation du mouvement en phase vapeur et liquide</i>	36
<i>2.3.2 Equation différentielle du transport de masse</i>	36
<i>2.3.3 Equation différentielle du transport de chaleur</i>	36
<i>2.3.4 Equation d'évolution de la pression</i>	37

## Chapitre III

## Modèle mathématique et résolution numérique

<b>3.1. Modèle physique et mathématique</b>	38
3.1.1 <i>Modèle physique</i>	38
3.1.2 <i>Modèle mathématique</i>	39
<b>3.2 Résolution numérique</b>	41
3.2.1 <i>Rappel sur les méthodes numériques</i>	42
a/ <i>Formulation intégrale d'une équation différentielle</i>	42
a.1/ <i>résidu</i>	42
a.2/ <i>Méthode des résidus pondérés</i>	42
a.3/ <i>transformation des formes intégrales</i>	42
a.4/ <i>Approximation des inconnues</i>	43
a.5/ <i>Discrétisation des formes intégrales</i>	43
3.2.2 <i>Méthode de Galerkin</i>	44
3.2.3 <i>Méthode des éléments finis</i>	44
3.2.4 <i>Fonctions d'interpolation en approximation linéaire</i>	45
3.2.5 <i>Application au cas traité</i>	46

## Chapitre IV

## Résultats et interprétation

<b>4.1 Présentation des résultats et interprétation</b>	70
4.1.1 <i>Profils dynamiques</i>	70
b/ <i>évolution de <math>\omega = f(t)</math></i>	70
4.1.2 <i>Profils thermiques</i>	70
4.1.3 <i>Etude de sensibilité aux paramètres</i>	71
a/ <i>conductivité thermique</i>	71
a.1/ <i>profils hydriques</i>	71
a.2/ <i>profils thermiques</i>	71
b/ <i>influence du nombre de noeuds</i>	71
b.1/ <i>profils hydriques</i>	71
b.2/ <i>profils thermiques</i>	71
4.1.4 <i>Densité de masse et de chaleur</i>	72
a/ <i>densité de flux de masse en phase liquide</i>	72
b/ <i>densité de flux en phase vapeur</i>	72
<b>conclusion</b>	
<b>Annexes</b>	



# NOMENCLATURE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
École Nationale Polytechnique

$a_m$	diffusité massique
$C$	chaleur spécifique
$C_m$	capacité de masse isotherme
$f$	coefficient
$g$	accélération de la pesanteur
$h$	enthalpie massique
$K$	perméabilité
$p$	pression
$p_c$	pression capillaire
$r$	rayon de courbure ou de pore
$t$	temps
$D$	coefficient de diffusion
$D'T$	coefficient de diffusion thermique
$G$	enthalpie libre massique
$\bar{J}_e$	densité de flux de masse d'eau
$\bar{J}_v$	densité de flux de masse de vapeur d'eau
$\bar{J}_m$	densité de flux d'humidité totale
$\bar{J}_q$	densité de flux de chaleur
$M$	masse moléculaire
$R$	constante des gaz parfaits
$T$	température
$\bar{v}$	vitesse de filtration
$\varepsilon$	porosité
$\varepsilon'$	coefficient d'évaporation
$\theta$	potentiel de transport de masse
$\lambda_q$	conductivité thermique
$\lambda_{qm}$	conductivité thermique due au gradient de concentration
$\lambda_m$	conductivité massique
$\mu$	viscosité
$\rho$	masse volumique
$\varphi$	humidité relative
$\Gamma$	tension superficielle
$\omega_e$	teneur en eau spécifique
$\omega_v$	teneur en air humide spécifique

## *indices :*

- (<sub>e</sub>) relatif à l'eau
- (<sub>v</sub>) relatif à la vapeur
- (<sub>o</sub>) relatif au squelette solide

# INTRODUCTION

Ecole Nationale Polytechnique

Dans la vie courante, on trouve de nombreux types de matériaux, qui appartiennent, pour la plupart, au vaste monde des milieux poreux. On peut citer, les textiles, cuirs, papiers, tissus, filtres, plats et légumes déshydratés, matériaux de construction, et sols.

La liste est bien longue, mais la compréhension de leurs comportements est bien plus difficile, vu que les phénomènes se produisant au sein de ces milieux poreux dépendent de plusieurs facteurs, dépendant eux même ; de leur états de saturation (soit par un fluide, soit par plusieurs fluides), des propriétés de stockage des fluides (soit remplissant les pores, soit sous forme adsorbée sur le solide) ; des propriétés de transfert (masse, quantité de mouvement, énergie) et aussi des propriétés mécaniques du milieu poreux.

D'une très grande variété, les milieux poreux, occupent une large place, et jouent un rôle important dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. En se limitant à quelques exemples, on peut citer : le génie pétrolier, l'hydrogéologie, le génie civil (secteur de bâtiment), la médecine, le génie chimique...etc.

Ces secteurs industriels, de grand poids économique ; sont prioritaires vis à vis des méthodes de calcul et d'études concernant les structures poreuses, surtout, lorsqu'il faut, dans certains cas, soit minimiser ou supprimer les infiltrations, soit que au contraire, augmenter le débit fluide tiré d'un gisement.

Le champ d'étude des transfert de masse et de chaleur en milieux poreux est particulièrement vaste, mais grâce aux efforts des chercheurs et des ingénieurs, la situation est devenue moins complexe, et les difficultés rencontrées ont été surmontées, en utilisant des modèles mathématiques théoriques appropriés.

Dans le cas, de notre travail ; nous avons étudié l'un de ces modèles, illustrant aussi bien la description que le couplage des phénomènes d'échange de masse et de chaleur, dans une structure poreuse. Celui propose par Philip J.R et Devries D.Alen 1957.

Néanmoins, nous étudierons successivement :

**Au premier chapitre**, des notions fondamentales sur les milieux poreux (description, classification, Analyse des phénomènes de fixation d'humidité).

**Le deuxième chapitre** sera consacré à l'établissement des équations du phénomène étudié, ainsi que les hypothèses concernant le modèle de Philip et Devries duquel on aboutira à un système d'équations aux dérivées partielles.



## INTRODUCTION

La résolution de ce genre d'équation, sera abordée au troisième chapitre ; la méthode des éléments finis a été utilisée, conjointement à la *méthode de Galerkin*.

Quant **au quatrième chapitre**, nous y exposerons les résultats obtenus, après élaboration d'un code de calcul en Fortran.

Une étude des sensibilités aux paramètres a été faite afin de simplifier la modélisation mathématique tout en gardant une bonne représentation des phénomènes de transfert de chaleur et de masse en milieux poreux.

# I

## PREMIER CHAPITRE

### Analyse physique du phénomène de fixation d'humidité en milieu poreux

#### **1.1. Définition d'un milieu poreux :**

On désigne par un milieu poreux, un solide de forme compliquée délimitant et englobant des vides appelés pores.

Ces vides peuvent communiquer entre eux, et contenir une ou plusieurs phases de fluides, pouvant s'écouler, et éventuellement changer entre elles ( et /ou ) avec le solide de la matière ( et /ou ) de l'énergie.

La partie solide peut être déformable mais doit avoir une certaine cohésion, ce qui exclut de notre définition les lits fluidisés, constitués de particule solides en suspension, sous l'effet d'écoulement de fluide interstitiel.

Un milieu poreux est dit saturé, s'il contient en ses pores ( *accessibles ou non* ) une seule phase fluide, par contre, ce dernier est considéré comme étant non saturé; si au lieu de contenir une seule phase, il en contiendra plusieurs phases fluides. ( *On dira qu'il sera saturé par rapport à une de ces phases seulement* ).

Finalement, on peut représenter le milieu poreux, comme étant la superposition de deux phases, comportant le squelette solide, et l'autre, la phase fluide.

#### **1.2. Classes des milieux poreux et leurs caractérisation :**

##### **1.2.1 Classes des milieux poreux :**

Le squelette solide d'un milieu poreux peut être soit :

##### Non-consolidé :

La phase solide est alors formée de grains ou de fibres non soudées entre eux, nous citons par exemple: les graviers, les billes de verre ( *souvent utilisées en laboratoire* ), les sables ... etc.

##### Consolidé :

où la matrice solide ne peut se diviser en grains ou fibres, elle sera plutôt compacte ( *exemple : Bois, argiles, tissus végétaux et animaux, roches calcaires ...etc* ).



### 1.2.2 Caractérisation du milieux poreux :

Les phénomènes se produisant dans les milieux poreux, dépendent de la géométrie de la matrice, celle-ci est caractérisée par des grandeurs spécifiques, qui peuvent être géométriques statistiques ou moyennes.

Dans notre cas, nous étudions un milieu poreux non-déformable dont les pores sont constituées d'un seul constituant fluide, et qui n'est pas susceptible de réagir chimiquement avec l'humidité.

Parmi les grandeurs, pouvant représenter la matrice solide, nous citons :

#### a / La porosité :

C'est une caractéristique adimensionnelle se définissant comme étant le rapport du volume des vides ou volume apparent du milieu poreux.

On distingue :

##### a.1 La porosité totale:

Tenant compte des cavités occluses (*pores fermés*) au sein du solide; elle s'exprime ainsi :

$$\varepsilon_t = 1 - (\text{masse volumique apparente de l'échantillon} / \text{masse volumique du matériau constitutif}) \quad (1.1)$$

##### a.2 La porosité accessible :

Représentant l'espace poreux connecté, à travers lequel s'effectue l'écoulement des masses fluides, elle est définie par le rapport suivant :

$$\varepsilon_t = 1 - (\text{volume des pores accessibles} / \text{volume de l'échantillon}) \quad (1.2)$$

$$= (V_t - V_s) / V_t = 1 - (V_s / V_t) = 1 - (\rho_0 / \rho_s)$$

avec  $V_t$  : Volume total de l'échantillon

$V_s$  : Volume du squelette solide de l'échantillon

$\rho_0$  et  $\rho_s$  sont respectivement la masse volumique apparente du milieu poreux et la masse volumique du solide.

#### b/ Surface spécifique :

Elle se définit comme étant le rapport de l'aire de la surface totale des interfaces solide - pores  $A_{sf}$ , au volume de l'échantillon "V".

Il convient parfois de distinguer la surface spécifique accessible et la surface totale, comprenant l'aire des parois des cavités occluses.

$$\alpha(m^{-1}) = A_{sf}/V \quad (1.3)$$

avec  $\dim \alpha = [L^{-1}]$

c/ La tortuosité :

Représentant le rapport relevé au carré, de la longueur moyenne réelle ( $L_e$ ) des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon à la longueur ( $L$ ) de ce dernier.

$$\tau = (L_e/L)^2 \quad (1.4)$$

### **1.3 Fixation de l'humidité en milieu poreux :**

Deux mécanismes fondamentaux, contribuent à fixer un fluide sur une matière poreuse. Il s'agit respectivement de la capillarité et de l'adsorption, sans oublier la tendance du milieu poreux à réagir chimiquement avec certains composants du fluide [ou humidité, lorsque celle-ci contient des substances chimiques pouvant entraîner des réactions chimiques]; ce dernier mécanisme appelé « *adsorption chimique* », n'interviendra pas au cours de notre étude.

Nous allons analyser ci-après, les différents modes de fixation d'un constituant fluide, au sein de la matrice poreuse.

#### **1.3.1 Fixation d'humidité par adsorption (domaine hygroscopique) :**

Dans ce cas, les molécules de vapeur d'eau sont fixées, sous forme de film, par voie physique ou chimique, sur la surface interne des pores.

Pour mieux visualiser ou illustrer ce phénomène, une expérience a été entreprise au sein d'un échantillon d'un milieu poreux sec de masse  $m_0$ .

Elle consistait à placer ce dernier, dans une enceinte, permettant le contrôle de l'humidité relative  $\phi$ , exprimé par la relation suivante :

$$\phi = P_v / P_{vs} \quad (1.5)$$

avec :  $P_v$  : pression de vapeur

et  $P_{vs}$  : pression de vapeur saturante à la température "T".

Ainsi que l'obtention de différentes valeurs de la teneur massique en humidité  $\omega$ , représentant le rapport de "m" sur "m<sub>0</sub>" où, m, représente la masse de échantillon, variable et croissante au fur et à mesure que la pression de vapeur de l'enceinte atteignait la pression de vapeur saturante.



Des observations faites sur cette expérience, ont montré, une augmentation du poids de l'échantillon, lorsque  $P_v$  tends vers  $P_{vs}$ , et qui correspond effectivement, à la fixation d'une certaine quantité d'eau par le milieu poreux; sous l'effet de l'adsorption et l'adsorption capillaire.

Des films moléculaires sont alors formés; autour des pores du milieu poreux, ces derniers se trouvent en équilibre avec la vapeur dans des conditions parfois, très différentes, des conditions thermodynamiques classiques, ce qui a pour effet de modifier la pression de vapeur d'équilibre, et d'enthalpie de changement de phase.

Lorsque l'équilibre est rétabli, ( *température, teneur massique en humidité, et humidité relative constantes* ). On pourra, alors, tracer les isothermes de sorption et de désorption représentant respectivement, un accroissement et une diminution de l'humidité relative, dans notre échantillon.

A  $\phi = 1 = P_v/P_{vs}$  correspond une valeur  $\omega_c$ , dite "teneur en humidité hygroscopique maximale, ou bien, teneur en humidité d'adsorption maximale".

Dans le cas où notre échantillon dégage de l'humidité, on dit que l'équilibre est atteint par séchage, l'isotherme est alors appelée : « *Isotherme de désorption* », mais si notre échantillon a tendance à fixer l'humidité on dira que l'équilibre est atteint par humidification, l'isotherme sera dite, alors de « *sorption* ».

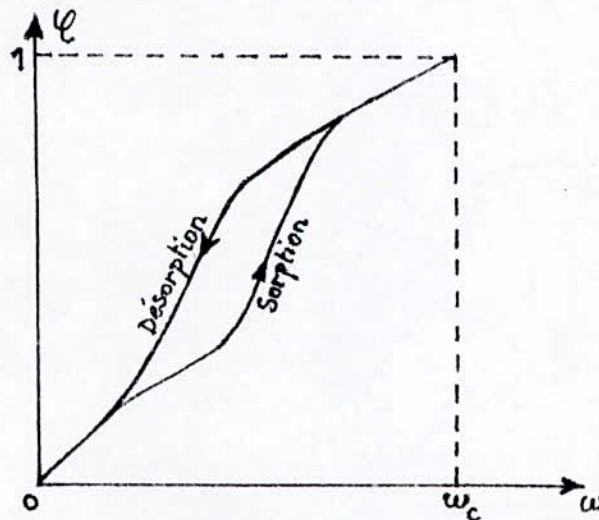


Fig 1.1 : Isotherme de sorption-désorption

Pour les corps hygroscopiques, l'isotherme de sorption, se trouve généralement en dessous de l'isotherme de désorption, ceci dit, un phénomène d'hystérésis est à remarquer.

Ce dernier est particulièrement important dans l'intervalle  $\varphi \in [0,2 ; 0,8]$  il est par contre réversible pour des valeurs de " $\varphi$ " inférieure à 0,2 et supérieure à 0,8 ( *ce phénomène est une conséquence des différences existantes au niveau des surfaces des pores, avant et après remplissage* ).

En examinant, plus précisément, la courbe des isothermes de sorption et de désorption, on pourra distinguer (02) deux zones. Chacune d'elle est analysée brièvement dans les paragraphes suivants :

Zone (01):  $0 < \varphi < 0,2$

Elle correspond à la fixation de la vapeur d'eau; dans le milieu poreux, par le phénomène d'adsorption se manifestant aux interfaces.

D'après les résultats obtenus par *Brunauer, Emmet, Teller & Langmuir*, deux étapes peuvent être distinguées en cette zone.

#### **1 ère Etape . Adsorption mono-moléculaire :**

Elle entraîne la formation de la fixation d'une couche de molécules d'eau de  $2,5 \cdot 10^{-8}$  cm d'épaisseur, sur la surface des pores et dont les propriétés diffèrent de celles du liquide libre.

#### **2 ème Etape . Adsorption polymoléculaire :**

Caractérisée par la fixation de plusieurs couches de molécule d'eau, mais cette fois-ci, ayant les mêmes propriétés du liquide libre, sur la première couche adsorbée.

Zone (02):  $\varphi > 0,2$

A faible valeur d'humidité relative, la fixation de la vapeur d'eau est due exceptionnellement à l'adsorption physique; par contre pour des valeurs plus importantes en humidité relative " $\varphi$ ", cette même fixation sera due principalement à l'adsorption capillaire qui est liée à la pression de vapeur au dessus des ménisques du liquide.

Effectivement, lorsque l'humidité relative devient supérieure à (0,2) il y a apparition et développement de labiles instables donnant naissance à des gouttes dans les capillaires, ceci est dû, à la différence de propriétés entre les couches mono-moléculaires et polymoléculaires fixées précédemment, et l'eau fixée dans la dernière couche adsorbée.



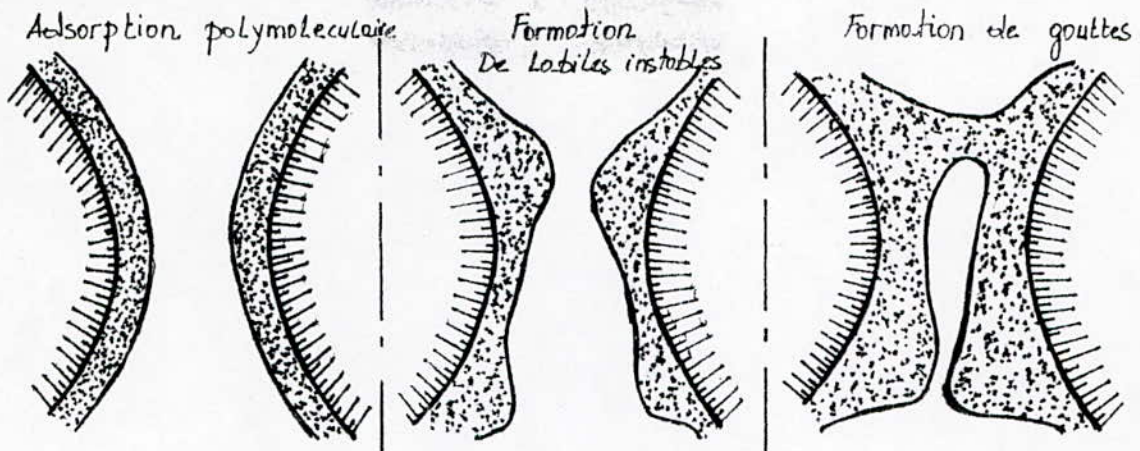


Fig 1.2 : Mécanismes de formation des gouttes en zone hygroscopique

L'expression de Kelvin, permettant d'écrire l'humidité relative  $\phi$  en fonction du rayon "r" des capillaires, s'écrit ainsi :

$$\phi = P_v/P_{vs} = \exp (- 2\sigma M/\rho_e Rtr) \quad (1.6)$$

Cette relation a été obtenue pour un angle de mouillage  $\theta = 0$

avec :

- $\sigma$  : Tension interfaciale ( eau-vapeur ) .
- M: Masse moléculaire de la vapeur en contact avec le liquide
- $\rho_e$ : Masse volumique du liquide.
- R : Constante des gaz parfaits
- T: Température absolue
- r : rayon des pores des capillaires

Pour une meilleure compréhension, des phénomènes de condensation capillaire, on supposera, pour simplifier, que notre milieu poreux est constitué de pores cylindriques de rayons "r"

On supposera, aussi que le milieu poreux a déjà subit un remplissage partiel de ses pores par adsorption; il y aura alors formation de ménisques (de surfaces hémisphériques et de rayons "r" ); à une valeur de  $P_v$  inférieure à  $P_{vs}$ .

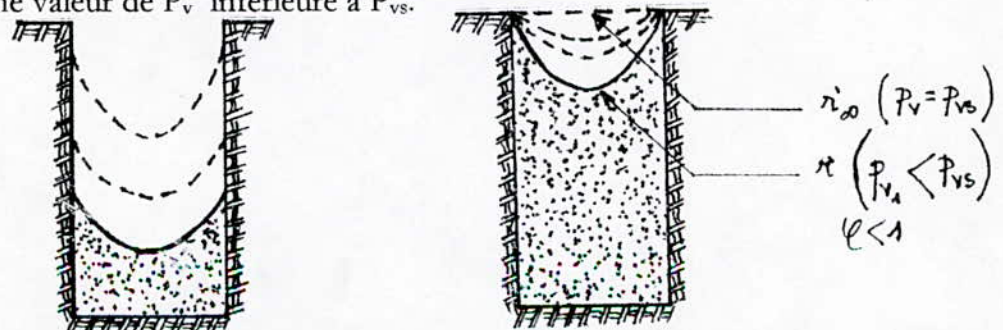


Fig 1.3 : Remplissage des capillaires par condensation de vapeur

En effet, lorsque  $P_v$  est inférieure à  $P_{vs}$ , et pour des rayons de capillaires faibles, le liquide, déjà existant dans les pores se trouve en équilibre avec la vapeur environnante; par ailleurs, il suffit qu'il y ait juste une augmentation de l'humidité relative pour que cet équilibre soit rompu; pour le rétablir, une condensation devra se produire.

L'explication de ce phénomène réside en l'équilibre mécanique du ménisque, et toute augmentation de pression de vapeur, aura comme résultat une nouvelle condensation de la vapeur, donc un nouvel état d'équilibre remettant en cause, les valeurs des rayons de courbure du ménisque en lui même.

A une valeur de  $\phi = 1$ , et qui correspond à  $P_v = P_{vs}$ , le rayon du ménisque sera égal à l'infini ( $\infty$ ), et toute augmentation de la pression de vapeur aura comme conséquence, une condensation en masse. La figure (1.4), ci-après, montre plus précisément, comment l'humidité a tendance à être fixée, en milieu poreux, en gardant toujours l'hypothèse précédente (*capillaires de formes cylindrique, de rayon "r"*).

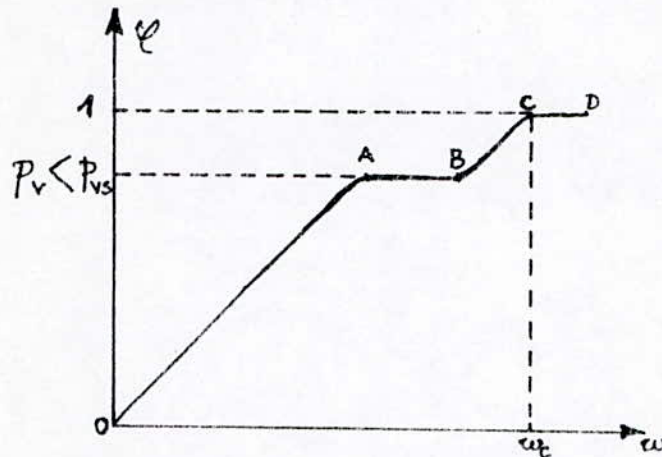


Fig 1.4 : Fixation d'humidité pour des capillaires cylindriques

- AB : Remplissage des capillaires, sans variation du rayon de courbure
- BC : Remplissage des capillaires, avec variation du rayon de courbure.
- C : Condensation en masse.

Dans un milieu poreux réel (*non stylisé*), le segment (AB) ne représente jamais une droite horizontale, vu la diversité des rayons des pores due à une granulométrie variable d'un point à un autre du squelette solide, il sera donc préférable de déplacer le segment (AB) dans le voisinage immédiat de la teneur en humidité d'adsorption maximale  $\omega_c$ .



### 1.3.2 Milieux poreux microcapillaires et macrocapillaires :

L'équation de Kelvin, entrevue précédemment, et qui exprime le rayon des capillaires en fonction de la teneur en humidité relative  $\phi$  existante dans le milieu poreux, permet de distinguer les pores microcapillaires et macrocapillaires.

Pour l'eau, par exemple, ces deux dernières classes correspondent à des intervalles bien définis, auxquels appartiennent les rayons des pores d'un milieu poreux.

pour  $10^{-7} \text{ cm} < r (\text{cm}) < 10^{-5} \text{ cm}$ , les pores sont appelés microcapillaires

pour  $r (\text{cm}) > 10^{-5}$ , les pores seront, alors, appelés macrocapillaires dans lesquels, l'eau se trouve sous forme plus ou moins continue (*condensation en masse*).

Les phénomènes de condensation capillaire et d'adsorption ne peuvent se produire que pour des pores, pouvant satisfaire la relation suivante :

$$r = -(2\sigma M / \rho_e RT) (1 / \text{Log}_n \phi) \quad \text{afin de vérifier l'expression de Kelvin} \quad (1.7)$$

**N.B :**

( pour  $r < 10^{-8} \text{ cm}$  l'expression de Kelvin perd de son sens physique ).

Si le rayon des pores est nettement plus grand que ( $10^{-5} \text{ cm}$ ), l'adsorption de l'humidité par condensation capillaire ne peut pas se produire, et le seul moyen de fixer de l'eau en masse dans un tel milieu, consiste à le mettre en contact direct avec le liquide.

Dans ce cas, l'humidité en masse se trouve fixée au milieu, par les forces capillaires.

### 1.3.3 Fixation de l'humidité par capillarité ( domaine humide ) :

La capillarité est un mécanisme de fixation de l'humidité qui intervient, lorsque la structure poreuse est mise en contact avec la phase liquide.

Une expression faite sur un échantillon d'un milieu poreux montre que lorsqu'un liquide mouille un solide, il a tendance à s'écouler et s'étaler naturellement, le long de sa surface.

En milieu poreux, ce mécanisme conduit à la formation d'interfaces courbe entre le liquide et la vapeur d'eau dans les pores; il y aura alors, existence d'une différence de pression mesurable entre les phases et l'envahissement spontané du volume des pores par la phase mouillante du liquide; ( ou bien l'air humide, et l'eau contenue dans le milieu poreux ).

La différence de pression entre ces phases est appelée « pression capillaire », elle s'exprime par la différence de pression dans la phase non-mouillante ( $p$ : pression de l'air humide) et la pression dans la phase mouillante ( $p_e$ : ici l'eau).

soit :  $p_c = p - p_c$  ( $p_c$  : pression capillaire).

La pression capillaire est l'excès de pression qui existe du côté, où se trouve le centre du plus petit des deux rayons de courbures principaux de la surface du point considéré.

Laplace a démontré l'existence de la pression capillaire, en raisonnant exclusivement sur les forces d'attraction moléculaire, il écrit pour la valeur de la surpression:

$$p_c = \Lambda/2 (1/r_1 + 1/r_2) \quad (1.8)$$

avec :  $\Lambda/2 = \sigma_{12} =$  tension superficielle

$r_1$  et  $r_2$  étant des rayons de courbures principaux (considérés positifs, s'ils sont dirigés vers la masse fluide).

Lorsque le mécanisme dominant une fixation du fluide est la capillarité le matériau est dit capillo-poreux, si par contre le mécanisme dominant est l'adsorption, le matériau sera dit hygroscopique.

En terme d'échelles caractéristiques, cette distinction intervient pour un diamètre moyen des pores de l'ordre ou inférieur à  $10^{-7}$  m

$d \leq 10^{-7}$  m  $\rightarrow$  milieu poreux hygroscopique.

$d > 10^{-7}$  m  $\rightarrow$  milieu poreux capillo-poreux.

La teneur en humidité fixée dans un milieu poreux, par capillarité est plus grande que la teneur en humidité hygroscopique maximale  $\omega_c$  ceci dit, l'eau se présente sous forme continue on pourra, par ailleurs, passer d'un point du milieu poreux à un autre, sans quitter le liquide.

Dans un milieu poreux hygroscopique, il nous est impossible de se déplacer comme dans un domaine humide, vu que l'eau ou bien l'humidité fixée, ne se présente que sur une partie infime du squelette solide, englobant, seulement, les pores ayant des rayons inférieurs à  $10^{-5}$  cm.

La capillarité étant un phénomène lié à la mouillabilité, nous allons entrevoir ci-après, les différents facteurs pouvant jouer un rôle dans la formation des interfaces courbes ou ménisques, entre le liquide et la vapeur d'eau.

Parmi ces derniers, nous citons, la tension interfaciale, et l'angle de contact.



## 1.3.3.1 Tension Interfaciale :

Quand un liquide est en contact avec une autre substance (*un autre liquide non-missible, un gaz ou un solide*) il y aura entre eux, existence d'une énergie interfaciale libre.

Cette énergie interfaciale est due à la différence des forces d'attraction entre les molécules se trouvant à l'intérieur de chaque phase et celle se trouvant au niveau de la surface de contact. Elle se manifestera en tant que tension interfaciale.

Pour deux substances « i » et « k » la tension interfaciale ( $\sigma_{ik}$ ) est définie comme étant le travail qui doit être fourni, pour séparer une surface élémentaire d'une substance "i" à une substance "k".

## 1.3.3.2 Angle de Contact :

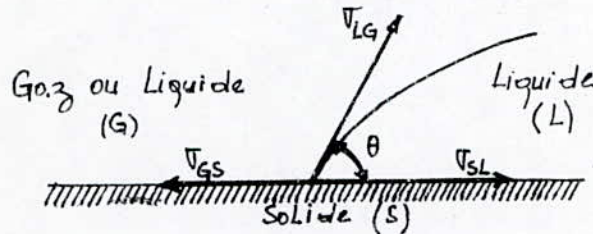


Fig 1.5 : Tension interfaciale

La figure (1.5), montre deux fluides non-missibles, en contact avec une surface solide plane.

L'angle ( $\theta$ ), appelé angle de contact, met en évidence les tensions interfaciales (*ou bien superficielles*) des deux interfaces (*liquide - gaz*) (*liquide - liquide*) et la surface solide.

L'équilibre requiert que :

$$\sigma_{LG} \cos \theta + \sigma_{SL} = \sigma_{GS}$$

ou bien :

$$\cos \theta = ((\sigma_{GS} - \sigma_{SL}) / \sigma_{LG}) \quad (1.9)$$

avec : G:Gaz      L: Liquide      S: Solide

Le produit ( $\sigma_{LG} \cos \theta$ ) appelé tension d'adhésion, détermine lequel des deux fluides (L ou G), va, de préférence, mouiller le solide c'est à dire y adhérer.

Quand  $\theta < 90^\circ$ , le liquide a un ménisque concave, il sera dit mouillant

Quand  $\theta > 90^\circ$ , le liquide a un ménisque convexe, et il est dit non mouillant.

si  $\cos \theta = 1$  ( c'est à dire  $\sigma_{GS} - \sigma_{SL} = \sigma_{LG}$  ) Le ménisque sera tangent à la surface du solide, on aura alors un mouillage parfait.

si par contre  $\cos \theta = 0$ , il y aura absence de mouillage

On pourra conclure, que l'équilibre mécanique du ménisque résulte d'une différence de pression  $p_c$  dépendant de la tension interfaciale  $\sigma$  et de la courbure de la surface.

L'équation de Laplace peut être écrite comme suit:

$$p_c = p - p_e = \sigma_{12} (1/r_1 + 1/r_2) = 2\sigma_{12}/r^* = p_2 - p_1 = 2\sigma_{12} \cos\theta/r \quad (1.10)$$

en fonction de l'angle de mouillage

$$\text{où: } (2/r^* = 1/r_1 + 1/r_2) \quad (1.10a)$$

$r^*$  est appelé courbure moyenne du ménisque

$$\text{et } r^* = r/\cos \theta \quad (1.10b)$$

$p_c$ : pression capillaire

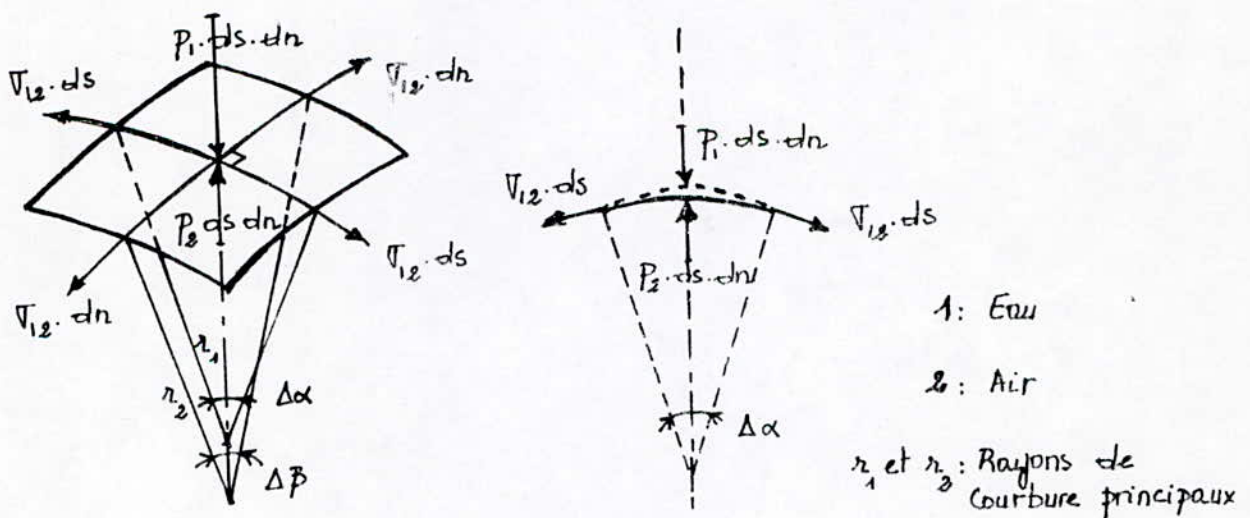


Fig 1.6 : Equilibre au niveau d'une interface courbe (Air-Eau)

Dans de nombreux cas,  $p_c$  est remplacée par une autre variable, " $\psi$ " la succion, à laquelle elle se trouve reliée par l'expression:

$$p_c = \rho_e \cdot \psi \cdot g \quad (1.11)$$

avec :  $\rho_e$ : masse volumique du liquide.



$g$  : accélération due à la pesanteur.

Cette dernière est fonction de la température et de la qualité de liquide occupant l'espace des pores.

Par analogie avec le potentiel du champ terrestre, le potentiel capillaire  $(p_c/\rho_c) = h.g$ , représente l'énergie potentielle du champ des forces capillaires, rapportée à l'unité de masse du liquide.

" $h$ " représente la hauteur ou la profondeur (selon que le liquide est mouillant ou non), à laquelle se stabiliserait le ménisque par rapport au niveau de référence par la surface libre du liquide dans lequel serait plongé un capillaire.

Nous pouvons procéder, afin de tracer les courbes  $p_c = F(T, \omega)$ , à température constante, de la même manière que pour la teneur en humidité relative.

On opère donc, à teneur en eau croissante ou décroissante, on obtiendra par la suite des courbes de drainage et d'imbibition, variant selon la distribution des rayons des pores, qui en réalité sont variables d'un point à un autre du milieu poreux.

Comme le montre, la figure (1.7) ci-après, les courbes  $p_c(\omega)$ , présentent des effets d'hysteresis qui différencient entre drainage et imbibition.

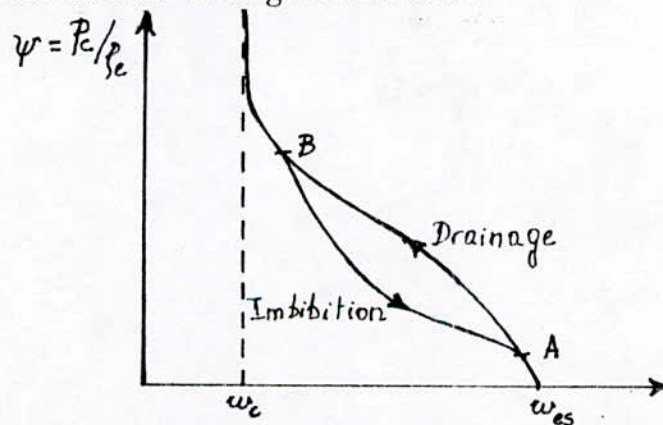


Fig 1.7 : Phenomene d'hysteresis (Drainage-Imbibition)

La pression capillaire s'annule pour  $\omega_{es}$ , appelée teneur en eau de saturation, pour laquelle, tous les pores sont remplis.

Elle croit, lorsque la teneur en eau s'éloigne de  $\omega_{es}$ , et s'approche rapidement de la teneur en humidité hygroscopique maximale " $\omega_c$ ".

La pression capillaire est très influencée par la porosité  $\varepsilon$  du milieu poreux et le diamètre des pores délimitant, ainsi la quantité d'eau pouvant être fixée.

Un milieu poreux est dit à porosité capillaire, si le potentiel capillaire est notablement supérieur au potentiel du champ de gravité.

Dans le modèle de corps à porosité capillaire, constitué de particules sphériques égales et de petites dimension (*utilisées en laboratoire*); les points A et B représentés sur les courbes de la figure (1.7), correspondent respectivement à de l'eau (*bien qu'il y ait présence d'air*) à l'état continue [ *Etat funiculaire* fig (1.8a)] et discontinue [ *Etat pendiculaire* fig (1.8b) ].

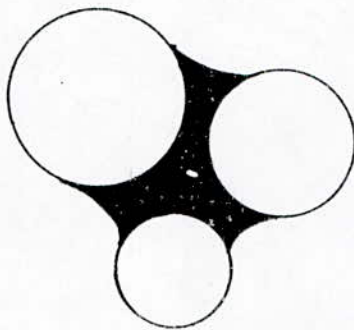


Fig 1.8a : *Etat funiculaire*

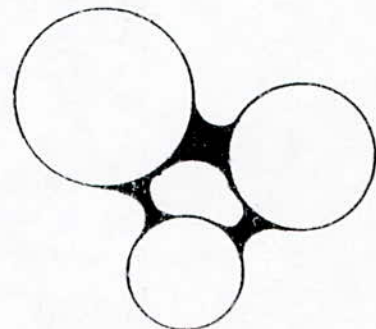


Fig 1.8b : *Etat pendiculaire*

Il est à noter, que la quantité d'humidité fixée par adsorption par les milieux poreux hygroscopiques est infiniment petite, comparée à celle fixée par saturation ou bien remplissage de tous les pores.

#### 1.4 Energie de liaison de l'humidité :

Les liaisons de l'humidité dans les milieux poreux capillaires, mettent en jeu une certaine quantité d'énergie, que l'on doit fournir, pour faire passer l'humidité liée au milieu poreux, d'un état lié à un état libre.

Nous utiliserons en sachant que l'état libre est défini par l'équilibre eau-vapeur (*séparées par une surface plane dans les mêmes conditions de pression totale et de température*):

1/ Les propriétés d'une fonction thermodynamique [ *Enthalpie libre* ] nous permettant de déterminer la relation existante entre l'humidité relative et la pression capillaire, ainsi que l'énergie nécessaire lors d'une transformation réversible isotherme.



2/ L'équation de Clapeyron, qui permet d'exprimer la chaleur latente de vaporisation, en fonction de la pression de vapeur.

A l'équilibre thermodynamique :

$$G_e = G_v \text{ [ Egalité de l'enthalpie libre du liquide et de sa vapeur ]} \quad (1.12)$$

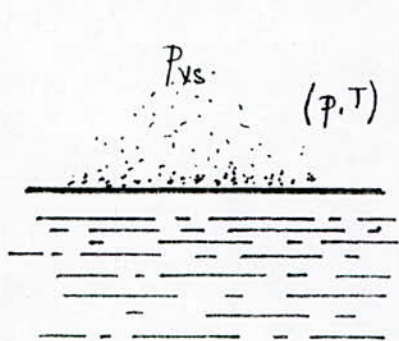


Fig 1.9a : Eau libre

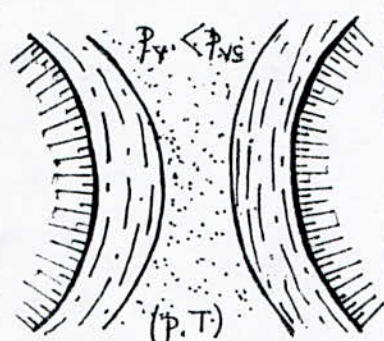


Fig 1.9b : Eau adsorbée

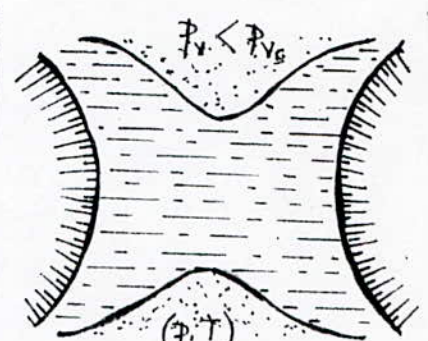


Fig 1.9c : Eau capillaire

#### 1.4.1 Différence d'enthalpie libre - Relation entre l'humidité relative et la pression capillaire

Considérons un liquide et sa vapeur séparés par une surface plane (fig(1-9a)). L'équilibre thermodynamique, la pression de vapeur saturante  $p_{vs} = p_{vs}(p, t)$ .

Nous avons vu, dans le domaine hygroscopique, que la pression de vapeur du liquide était telle que  $(p_v < p_{vs})$ .

L'enthalpie libre s'écrit:

$$G = H - T.S \quad (1.13)$$

où H: Enthalpie

T: Température et S: Entropie.

et sa variation au cours d'une transformation réversible :

$$dG = dH - Tds - SdT. \quad (1.14)$$

$$\text{avec } dH = dU - p.dv + v.dp = dQ + V.dp \quad (1.15)$$

$$\text{on obtiendra : } dG = dQ + V.dp - T.ds - S.dt \quad (1.16)$$

Dans une transformation isotherme  $dT = 0$  et réversible  $dQ = T.ds$ .

$$\text{d'où : } dG = V.dp. \quad (1.17)$$

Si l'on suppose que la vapeur se comporte comme un gaz parfait:

$$p_v.V = R/M.T \quad \text{pour l'unité de masse de vapeur} \quad (1.18)$$

$$\text{d'où } dG = RT/M \cdot dp_v/p_v \quad (1.19)$$

Dans les transformations réversibles isothermes, permettant de comprimer la vapeur, de  $p_v$  (Etat (b) et (c) voir fig (1.9b) et (1.9c)) à  $p_{vs}$  (Etat (a)) la variation d'enthalpie libre s'écrit :

$$dG_v = -RT/M \text{Log}_n(p_v/p_{vs}) = -(RT/M) \text{Log}_n \phi \quad (1.20)$$

Dans le cas (c), où l'eau en masse existe à l'état capillaire, dans le milieu poreux, un calcul similaire, développé à partir de l'enthalpie libre de l'eau  $G_e$ , donne le résultat suivant:

$$dG_e = (1/\rho_e)(p-p_e) = p_c/\rho_e \quad (1.21)$$

avec :  $p$  : pression totale à laquelle se trouve l'interface liquide vapeur (configuration .a.)

et  $p_e$  : pression de l'eau liée par capillarité.

D'après les configurations (a) et (c), nous pouvons écrire : respectivement:

$$G_e = G_v \quad (1.22)$$

$$G'_e = G'_v \quad (1.23)$$

Ce qui conduirait à:

$$dG_e = dG_v \quad (1.24)$$

$$\text{avec : } dG_e = G_c - G'_c \quad (1.25)$$

$$\text{et } dG_v = G_v - G'_v \quad (1.26)$$

$$\text{d'où : } RT/M \text{Log}_n \phi = -(p_c/\rho_e) \quad (1.27)$$

#### 1.4.2 Calcul de l'énergie de liaison :

Pour la détermination de la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer l'humidité de l'état liée à l'état libre (configuration (c) vers (a)), il est nécessaire d'utiliser l'équation de Gibbs-Helmoltz, de la forme :

$$dH = dG - T (\partial(dG)/\partial T)_p \quad (\text{à pression constante}) \quad (1.28)$$

et compte tenu des valeurs de ( $dG$ ) obtenues précédemment, nous pouvons écrire que:

$$dH = RT^2/M (\partial(\text{Log}_n \phi)/\partial T) \quad (1.29)$$

Pour que l'équation (1.29) puisse prendre en considération un éventuel changement de phase (vu qu'elle assure, seulement un passage d'un état adsorbé, à un état libre); il sera nécessaire d'ajouter, un autre terme, mettant en évidence la vaporisation de l'eau libre.

on écrira finalement que :

$$Q_{vc} = dH + L \quad (1.30)$$

$$= RT^2/M (\partial(\text{Log}_n \phi)/\partial T) + L \quad (1.31)$$



avec :  $L$ : Chaleur latente de vaporisation

et  $dH$ : quantité de chaleur nécessaire, pour le passage à l'état (a) (eau libre).

De même, en utilisant l'équation de Clapeyron, nous obtenons :

$$Q_{vc} = (RT^2/Mp_v) (dp_v/dT) \text{ avec } p_v = \phi \cdot p_{vs} \quad (1.32)$$

$$Q_{ve} = (RT^2/M) (\partial(\text{Log}_n \phi) / \partial T) + (RT^2/Mp_{vs}) (dp_v/dT) \quad (1.33)$$

Nous remarquons, que le deuxième terme du membre de droite de cette relation est égal à la chaleur latente de vaporisation du liquide ( $L$ ) dans l'état (a).

**Remarque :**

Dans l'opération inverse (passage de l'eau, de l'état (a) à l'état (c)); la quantité d'énergie -  $[RT^2/M] \cdot (\partial(\text{Log}_n \phi)/\partial T)$  sera libérée par l'eau libre lors de l'adsorption.

Cette énergie libérée dans le milieu poreux, sous forme de chaleur est appelée chaleur de mouillage.

**1.5 Analyse physique du phénomène de thermomigration**

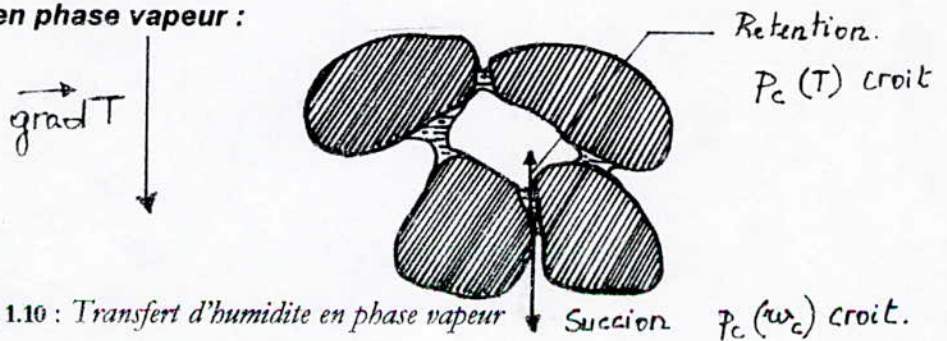
La migration de l'humidité, dans un milieu poreux non-saturé sous l'influence de gradients de température, résulte de plusieurs mécanismes, par ailleurs, nous supposons, qu'on a un échantillon d'un milieu poreux homogène, soumis à un transfert unidirectionnel vertical de chaleur, et limité verticalement par deux surfaces horizontales imperméables, bonnes conductrices de chaleur.

A  $t < 0$  (avant le début du transfert), la température et la teneur en eau initiales sont respectivement :  $T_0$  et  $\omega_0$ .

A  $t = 0$ , avec l'existence d'un  $\Delta T = T_1 - T_0$  (avec  $T_1 < T_0$ ) à la limite inférieure du système.

Une modification de la distribution de chaleur, au sein de notre échantillon va se produire, et va entraîner par la suite, un transfert d'humidité en phase vapeur et en phase liquide.

**1.5.1 Transfert d'humidité en phase vapeur :**



**Fig 1.10 :** Transfert d'humidité en phase vapeur

A la limite inférieure du système, une augmentation de la concentration de l'humidité, en phase vapeur, est à remarquer (vu l'existence d'un  $\Delta T = T_1 - T_0$  avec  $T_1 > T_0$ ). Et en sachant qu'en régions froides, la pression de vapeur est bien plus faible, il en résultera, un déplacement d'une certaine masse d'humidité, par processus de diffusion. Pour rétablir l'équilibre thermodynamique, perdu lors de ce processus, une partie de cette vapeur ascendante, va se condenser sur le squelette solide et sur les ménisques du liquide (point A, figure (1.10(b))).

Il est à noter, que la condensation, en elle même, cause une élévation de la température, par voie de conséquence, une partie de la masse d'humidité s'évaporerà. (point B, fig (1.10(b))).

C'est ainsi, par simple processus d' (évaporation - condensation - évaporation) que l'humidité en phase vapeur, se déplace au sein de la structure poreuse.

### 1.5.2 Transfert d'humidité en phase liquide

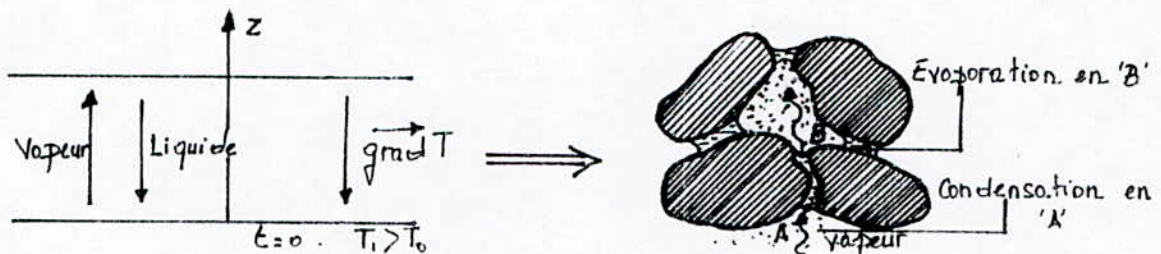


Fig 1.11 : Transfert d'humidité en phase liquide

La pression capillaire, dans les régions chaudes de notre milieu poreux aura tendance à augmenter; car la quantité d'eau liquide existante auparavant, a été en partie, transférée sous forme de vapeur sous l'effet du transfert d'humidité en phase vapeur. Cette augmentation permettra le déplacement, à contre-courant de la vapeur, d'une partie du liquide, par phénomène de suction.

Le déplacement est toutefois limité par le gradient de température qui s'y oppose.



### 1.5.3 Evolution du bilan vapeur - liquide

En supposant que notre milieu poreux est fermé (pas d'échange de masse avec l'extérieur, teneur en humidité constante au cours du temps).

Et d'après les deux paragraphes précédents, on peut conclure que tout accroissement de la teneur en eau dans les régions froides, ne puisse s'expliquer que si le flux massique en phase vapeur est supérieur au flux massique en phase liquide.

On écrit que :

$$|\bar{q}_v| > |\bar{q}_e|, \quad \text{la différence } |\bar{q}_v| - |\bar{q}_e| \rightarrow 0$$

lorsqu'on se rapproche du régime stationnaire.

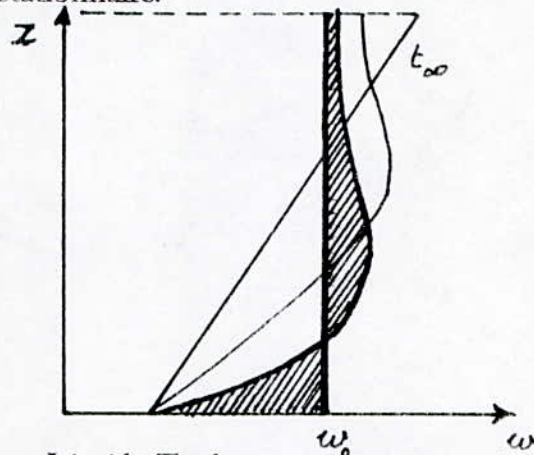


Fig 1.12 : Bilan Vapeur-Liquide (Tendance à un état stationnaire)

La progression du déplacement de l'humidité en phase par capillarité est freinée par le phénomène de vaporisation, la température et la teneur en humidité tendent alors vers un état stationnaire.

# 2

## DEUXIEME CHAPITRE

### Equations du phénomène et hypothèses

**E**n raison de la complexité de l'espace poreux ; il est nécessaire avant de procéder à l'établissement des équations du phénomène à étudier, de faire un changement d'échelle, dont l'étape essentielle consiste à définir un volume élémentaire (*V.E.R*) de référence permettant d'établir une équivalence entre le milieu poreux et le milieu continu fictif. Par ailleurs, des hypothèses ont été établies, afin de mieux visualiser et représenter notre modèle : ces dernières sont données ci-dessous .

La modélisation est établie dans le cadre des hypothèses suivantes :

- La matrice solide constituant le milieu poreux est indéformable , homogène et isotrope.
- L'enthalpie des différentes phases, est indépendante de la pression.
- Les phénomènes de gel et d'ébullition ne sont pas pris en compte .
- La densité de la phase liquide est constante .
- Les différentes phases sont continues.
- La phase gazeuse obéit à la loi des gaz parfaits.
- La pression totale de la phase gazeuse est uniforme et constante.
- Le travail des forces de compression et de dissipation visqueuse est négligeable.
- La diffusion de vapeur est de type moléculaire.
- Les différentes phases sont en équilibre thermodynamique local.
- Les phénomènes d'hysteresis ne sont pas pris en compte .
- Il n'y a pas de réaction chimique au sein du milieu poreux .
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.

### **2.1. Equations générales :**

#### **2.1.1 Définition:**

L'humidité contenue dans un milieu poreux , se présente généralement sous différentes phases : vapeur , liquide ou solide (*glace*) .



Il y a lieu de noter que : l'air humide (*air sec + vapeur*) est symbolisé par l'indice (1), le liquide par l'indice (2), et la glace par l'indice (3).

Le squelette solide étant affecté de l'indice (0).

La concentration de l'humidité dans le milieu poreux représente le rapport de la masse d'humidité totale "m" au volume du milieu poreux "V<sub>0</sub>", contenant "m".

$$\Gamma = m/V_0 = 1/V_0 \sum_{i=1}^3 m_i = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \quad (2.1)$$

où  $m_i$  : *masse de l'humidité aux états*  $i = 1.2.3.$

$\Gamma_i$  : *concentration de l'humidité à*  $i = 1.2.3$

En prenant en considération la porosité  $\varepsilon = \text{Volume des vides} / \text{Volume de l'échantillon}$

Ainsi que la masse volumique de la phase considérée; on pourra écrire à partir de (4):

$$\Gamma_i = m_i/V_0 = \rho_i V_{\text{vides}} \cdot b_i / V_0 = \rho_i \varepsilon b_i \quad (2.2)$$

où  $b_i$ : Coefficient de remplissage des vides par la phase "i", ou saturation en "i" et  $0 \leq b_i \leq 1$ .

Il est cependant préférable d'utiliser la notion de teneur en humidité spécifique  $\omega$ , vu la très grande variation du coefficient  $b_i$  non seulement, lors du transport de masse, mais aussi, lorsque des phénomènes d'adsorption se manifestent :

$$\omega = m/m_0 = (m/V_0)/\rho_0 = \Gamma/\rho_0 \Rightarrow \omega = \sum_{i=0}^3 \omega_i = 1/\rho_0 \sum_{i=0}^3 \Gamma_i \quad (2.3)$$

avec  $\rho_0$ : *masse volumique du corps sec.*

### **2.1.2. Equations de conservation:**

$\alpha$ / Equation de conservation de la masse :

En prenant en considération, les phénomènes de changement de phase, dans un milieu poreux (*création et disparition d'une masse*); l'équation de conservation de la masse de "i", dans une phase, s'écrit :

$$\partial \Gamma_i / \partial t = - \text{div} (\Gamma_i \vec{V}_i) + I_i \quad (2.4)$$

avec :

$I_i$  : *Terme source, qui rend compte de la création ou la disparition d'un constituant "i".*

$\vec{V}_i$  : *Vitesse de transport du constituant, reliée à la vitesse hydrodynamique  $\vec{V}$  du mélange par la relation :*

$$\vec{V} = 1/\Gamma \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \vec{V}_i \quad (2.5)$$

La conservation de la masse totale du système, permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^3 I_i = 0 \quad (\text{Somme des termes sources nulle}) \quad (2.6)$$

Pour l'ensemble du mélange, l'équation de conservation de la masse s'écrit donc:

$$\partial\Gamma/\partial t = - \operatorname{div} (\Gamma \vec{V}) \quad (2.7)$$

La vitesse de diffusion est donnée par la relation suivante :

$$\vec{V}_{di} = \vec{V}_i - V \quad (2.8)$$

Pour un élément de surface ayant un potentiel de transport de masse uniforme, le flux de diffusion s'écrit :

$$\vec{J}_i = P_i (V_{di} - V) \quad (2.9)$$

On pourra, par la suite et en se basant sur l'équation (03), établir une nouvelle relation :

$$\partial\Gamma_i/\partial t = - \operatorname{div} (\Gamma_i \vec{V} + \vec{J}_i) + I_i \quad (2.10)$$

où :  $\Gamma_i \vec{V} = \vec{J}'_i = \text{Flux transporté par convection}$

$\vec{J}_i$ : Flux de diffusion.

Lorsque des phénomènes d'adsorption existent en milieu poreux, les mécanismes de transport de masse par convection ne concernent que l'humidité n'étant pas liée au squelette solide.

Donc, on devra prendre en considération non pas la conservation volumique totale, mais la concentration de la phase  $i$ , non adsorbée  $\Gamma_{il}$  (càd, qu'on exclu, l'eau adsorbée se trouvant dans la matrice poreuse)

$$\partial\Gamma_i/\partial t = - \operatorname{div} (\Gamma_{il} \vec{V} + \vec{J}_i) + I_i \quad (2.11)$$

L'équation de conservation de la masse : s'écrira finalement comme suit : en l'absence d'adsorption :  $\Gamma_{il} = \Gamma_i$

$$\partial\Gamma_i/\partial t = - \operatorname{div} (\Gamma_i \vec{V} + \vec{J}_i) + I_i \quad (2.11a)$$

$$\text{avec } \vec{J}'_i = \vec{J}'_i + \vec{J}_i \quad (2.11b)$$

et en introduisant la tenure en humidité spécifique  $\omega_i$  on aura :



$$(\partial/\partial t) (\rho_0 \omega_i) = - \operatorname{div} (\rho_0 \omega_i \vec{V} + \vec{J}_i) + I_i \quad (2.12)$$

$V \in b_i$  : Vitesse de transport macroscopique calculée par unité de surface du milieu poreux (vitesse de Darcy)

$\beta$ / Conservation de l'enthalpie :

Si l'on admet que :

l'équilibre thermique local entre l'humidité sous ses différentes phases et le squelette solide est réalisé .

Les vitesses de transfert de masse sont faibles (pas de phénomène de dispersion par viscosité).

La pression est constante.

L'équation de conservation d'enthalpie s'écrit :

$$\partial/\partial t (\rho_0 h_0 + \sum_{i=1}^3 \Gamma_i h_i) = - \operatorname{div} (\vec{J}_q + \sum_{i=1}^3 \Gamma_i h_i \vec{J}_i) \quad (2.13)$$

où:  $h_i$  : Enthalpie spécifique de la substance "i".

$h_i \vec{J}_i$  : Flux d'enthalpie transportée .

$\vec{J}_q$  : Flux de chaleur par diffusion.

Soit encore avec :  $\Gamma_i = \rho_0 \omega_i$ .

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t) (\rho_0 h_0) + \sum_{i=1}^3 \rho_0 \omega_i (\partial h_i / \partial t) + h_i \partial(\rho_0 \omega_i) / \partial t \\ = - \operatorname{div} \vec{J}_q - \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^3 h_i \vec{J}_i \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

En utilisant l'équation [(2.11a)] de conservation de la masse, nous avons :

$$\text{pour le terme } \sum_{i=1}^3 h_i \partial(\rho_0 \omega_i) / \partial t = - \sum_{i=1}^3 h_i \operatorname{div} \vec{J}_i + \sum_{i=1}^3 h_i I_i$$

En remplaçant, ce dernier dans l'équation précédente, il vient :

$$(\partial/\partial t) (\rho_0 h_0) + \sum_{i=1}^3 (\rho_0 \omega_i) (\partial h_i / \partial t) = - \operatorname{div} \vec{J}_q - \sum_{i=1}^3 h_i I_i - \sum_{i=1}^3 \vec{J}_i \operatorname{grad} h_i \quad (2.15)$$

$$\text{et : } \operatorname{div} (h_i \vec{J}_i) = h_i \operatorname{div} \vec{J}_i + \vec{J}_i \operatorname{grad} h_i \quad (2.16)$$

**Rappel :**

1/ Equation de conservation de la masse :

pour chaque constituant (ou phase)

$$\partial/\partial t (\rho_0 \omega_i) = - \operatorname{div} (\rho_0 \omega_i \vec{V} + \vec{J}_i) + I_i$$

pour l'ensemble des constituants (ou phases) :

$$(\partial/\partial t) (\rho_0 \omega) = - \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^3 (\rho_0 \omega_i \vec{V} + \vec{J}_i) \right), \omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i \text{ et } \sum_{i=1}^3 I_i = 0$$

2/ Equation de conservation de l'enthalpie :

$$(\partial/\partial t) (\rho_0 h_0) \sum_{i=1}^3 \rho_0 \omega_i (\partial h_i / \partial t) = - \operatorname{div} \vec{J}_q - \sum_{i=1}^3 h_i I_i - \sum_{i=1}^3 \vec{J}_i \operatorname{grad} h_i$$

Il nous faudrait, cependant, exprimer les équations qui relient les densités de flux d'humidité et d'enthalpie, en fonction des forces motrices thermodynamiques du transport de masse et de chaleur.

Ces équations seront développées pour des teneurs en humidité hygroskopique maximales  $\omega_c$ , c.à.d pour des saturations comprises dans le domaine humide.

On verra deux cas :

**1<sup>er</sup> cas :** Pression totale uniforme et constante (*pas d'écoulement de filtration du liquide ou de la vapeur*) . et température inférieure à 100 c° en tout point du milieu poreux.

**2<sup>ème</sup> cas :** Pression non-uniforme, et température élevée.

### 2.1.3 Paramètres thermodynamiques du transport de masse

#### Equation de transport

*al* Paramètres thermodynamiques du transport de masse

En milieu poreux , la cinétique du transport de masse et de chaleur est déterminé à partir de la différence des potentiels de transport.

Pour mieux interpréter ce principe, on considère deux échantillons de matériaux (*par exemple le fer et le plomb*) , qui pour emmagasiner une certaine quantité de chaleur, devront passer d'un état d'équilibre à un autre (*le premier , étant de référence , le deuxième étant l'équilibre final*).

En raisonnant d'après les capacités thermiques , on pourra écrire , pour les deux matériaux :

$$\Delta q_{(Fe)} = C_{p(Fe)} \cdot \Delta T \tag{2.17}$$

et 
$$\Delta q_{(Pb)} = C_{p(Pb)} \cdot \Delta T \tag{2.18}$$



avec :  $\Delta T : T_{\text{finale}} - T_{\text{initiale}}$  et  $\Delta q_{(T^e)}$ ,  $\Delta q_{(P^b)}$  sont respectivement la quantité de chaleur emmagasinée pour un accroissement du potentiel de transport identique .

A l'équilibre thermodynamique , on écrit :

$$(\Delta q_{(T^e)} / \Delta q_{(P^b)}) = (C_{p(T^e)} / C_{p(P^b)}) \quad (2.19)$$

Si les chaleurs sont mesurées au même état de référence , on aura :

$$(q_{(T^e)} / q_{(P^b)})_{\text{initial}} = (q_{(T^e)} / q_{(P^b)})_{\text{final}} = (C_{p(T^e)} / C_{p(P^b)}) \quad (2.20)$$

Considérons maintenant , deux échantillons de milieu poreux :

**papier filtre et tourbe**

A l'équilibre thermodynamique , les teneurs en humidité finales sont telles que

$$(\omega_{\text{tourbe, finale}} / \omega_{\text{p.filtre, finale}}) = (\omega_{\text{tourbe, initiale}} / \omega_{\text{p.filtre, initiale}}) \quad (2.21)$$

Par analogie , et toujours en ayant un équilibre thermodynamique , nous pouvons considérer que pour des matériaux , permettant le stockage d'une certaine quantité de chaleur , correspond un stockage d'une certaine masse de d'humidité , en milieu poreux .

Nous noterons  $C_m = C_{\text{ste}}$  = la capacité de masse isotherme ; on pourra en déduire , d'après la relation précédente que :

$$\omega_{\text{tourbe}} / \omega_{\text{p.filtre}} = C_{m, \text{tourbe}} / C_{m, \text{p.filtre}} = \text{constante} \quad (2.22)$$

ou bien :

$$\omega_{\text{tourbe}} / C_{m, \text{tourbe}} = \omega_{\text{p.filtre}} / C_{m, \text{p.filtre}} = \theta \quad (2.23)$$

Par analogie , avec le transport de chaleur , cette grandeur ( $\theta$ ) , qui dépend de «  $\omega$  » , mais qui prend la même valeur dans les deux corps en équilibre thermodynamique, est appelé *le potentiel de transport de masse*

L'analogie thermodynamique, entre le transport de masse , et le transport de chaleur, peut être écrit comme suit :

à	q	correspond	$\omega$ transportée
à	$C_p$	correspond	$C_m$ capacité = $(\partial\omega / \partial\theta)_T$ définit positive et
à	T	correspond	$\theta$ potentiel de transport de masse

Si  $C_m$  est supposée constante, on a :

$$\omega = C_m \theta + b \quad (2.24)$$

où  $b = \text{constante}$  ,  $\theta$  : positive

Pour simplifier l'équation (2.24) , il a été préférable de prendre  $b = 0$  (nulle) , en supposant que le potentiel de transport de masse d'un corps absolument sec est nul.

Dans les milieux poreux capillaires, le potentiel de transport de masse représente le potentiel capillaire  $\psi$ .

pour  $\omega = 0$  correspond  $\psi = \psi_{\max}$   
pour  $\omega = \omega_{es}$  (*saturation complète*) correspond  $\psi = 0$ .

On pourra en déduire l'échelle liant le potentiel de transport de masse au potentiel capillaire :

$$\theta = \psi_{\max} - \psi \quad (2.25)$$

$$\omega = C_m(\psi_{\max} - \psi) \quad (2.26)$$

Puisque la capacité en masse du papier filtre est indépendante de la température on le considérera comme étant le corps le référence ou étalon il est relié à la teneur en humidité d'adsorption maximale par l'expression .

$$(C_{m,et})_T = 1/100 \omega_c \quad (2.27)$$

avec :  $(C_{m,et})$  : *capacité de masse étalon*.

Par ailleurs, la teneur en humidité  $\omega_e$  du corps étalon, est obtenue à partir de la relation suivante :

$$\theta = (\omega_e / \omega_c) 100 = \omega_e / (C_{m,et})_T \quad (2.28)$$

$\beta/$  Equation de transport pour les phénomènes couplés :

Dans les phénomènes de transport couplés, les flux de chaleur et de masse dépendent d'une part de l'influence des potentiels auxquels il sont directement corrélés, d'autre part, des effets croisés tels que le transport de chaleur associé à la diffusion de masse et le transport de masse associé à la diffusion de la chaleur.

Contrairement aux lois qui régissent des phénomènes de diffusion de masse de chaleur, comme la *loi de Fick* ( **transfert de masse** ) et la *loi de Fourier* ( **transfert de chaleur** ) : les équations associées aux transfert couplés s'expriment comme suit :

$$\vec{J}_q = - \lambda_{q,q} \text{grad } T - \lambda_{q,m} \text{grad } C \quad (2.29)$$

et

$$\vec{J}_m = - \lambda_{m,m} \text{grad } C - \lambda_{m,q} \text{grad } T \quad (2.30)$$



où bien :

$$\bar{J}_i = - \sum_j \lambda_{i,j} \text{grad } \Phi_j \quad (2.31)$$

en sachant que :  $\bar{J}_q = - \lambda_q \text{grad } T$  *Loi de Fourier* (2.32)

$$\bar{J}_m = - \lambda_m \text{grad } C \quad \textit{Loi de Fick} \quad (2.33)$$

$\lambda_{i,j}$  : Coefficients de conductibilité .

Dans des conditions isothermes et par analogie avec le transfert de chaleur, l'équation phénoménologique qui régit le transport d'humidité s'écrit :

$$\bar{J}_m = - \lambda_{m,m} \text{grad } \theta \quad (2.34)$$

Lors d'un transfert couplé de masse et de chaleur, et en conditions non - isothermes, l'équation précédente devient :

$$\bar{J}_m = - \lambda_{m,m} \text{grad } \theta - \lambda_{m,q} \text{grad } T \quad (2.35)$$

où :  $\lambda_{m,m}$  : Coefficient de conductibilité de masse ou d'humidité.

$\lambda_{m,q}$  : Coefficient de conductibilité massique dû au gradient de température

et  $\lambda_{q,q}$  : Coefficient de conductibilité de la chaleur.

## **2.2 Equations de transport de masse et de chaleur :**

### **Faibles températures, pression totale uniforme.**

Ci-après nous allons exprimer les différentes densités de flux de masse en fonction des forces motrices thermodynamiques du transport de masse .

#### **2.2.1 Equations de conservation de la masse :**

Pour un milieu poreux, en contact avec la pression atmosphérique, et ayant une température supérieur à 0 c° l'humidité occupant le volume des pores, se trouve sous deux formes distinctives :

Humidité en phase vapeur (*air sec + vapeur d'eau*)  
Humidité en phase liquide .

La teneur en humidité spécifique (*pondérale ou massique*) s'écrit donc :

$$\omega = \omega_e + \omega_v \approx \omega_e \quad (P = P \text{ atmosphérique}) \quad (2.36)$$

L'équation de conservation de la masse , pour les deux phases est exprimée comme suit :

$$\partial(\rho_0 \omega_e) / \partial t = - \text{div } \bar{J}_e + I_e \quad (2.37)$$

$$\text{et } \partial(\rho_0 \omega_v)/\partial t = -\text{div } \vec{J}_v + I_v \quad (2.38)$$

$$\text{En sachant que } \sum I_i = 0 \quad (2.6)$$

On aura en conséquence :

$$I_e + I_v \Leftrightarrow I_e = -I_v \quad (2.39)$$

d'où :

$$\partial(\rho_0 \omega_e)/\partial t = -\text{div } \vec{J}_e + \vec{J}_v = \partial(\rho_0 \omega)/\partial t \quad (\text{puisque } \omega = \omega_e) \quad (2.40)$$

$$\text{et } I_v = \text{div } \vec{J}_v \quad (2.41)$$

Puisque le but est d'écrire l'équation de conservation de la masse pour une température comprise entre 0 °C et 100 °C et une pression uniforme, il est nécessaire de déterminer les termes sources  $I_e$  et  $I_v$ .

$\alpha$  Calcul de  $I_e$  et  $I_v$

$$\text{Soit } \beta = d_c \omega_e / d_t \omega_e \quad (2.42)$$

rapport des quantités d'humidité résultant des deux mécanismes précédents (*transport d'humidité en phase vapeur et en phase liquide*)

avec :  $d_c \omega_e$  : quantité transportée due au changement de phase  
 $d_t \omega_e$  : quantité transportée en phase liquide

$$\text{et } \omega_e = \text{Quantité totale} = d_c \omega_e + d_t \omega_e \quad (2.43)$$

Posons aussi :

$$\beta / (1 + \beta) = \varepsilon' \quad (2.44)$$

S'il n'y a pas de changement de phase :  $\beta = 0$   $\varepsilon' = 0$  (*phase liquide*)

S'il y a changement de phase total :  $\beta = \infty$   $\varepsilon' = 1$  (*phase vapeur*)

D'après ces notations :

$$d\omega_e = (1 + \beta) d_t \omega_e = (1 / (1 - \varepsilon')) d_t \omega_e \quad (2.45)$$

d'où :

$$d_t \omega_e = (1 - \varepsilon') d\omega_e \quad (2.46)$$

La variation temporelle de l'humidité s'exprimera par la relation suivante :

$$\partial_t(\rho_0 \omega_e)/\partial t = (1 - \varepsilon') (\partial_t(\rho_0 \omega_e)/\partial t) = \partial/\partial t(\rho_0 \omega_e) - \varepsilon' (\partial_t(\rho_0 \omega_e)) = -\text{div } \vec{J}_e \quad (2.47)$$

Par la suite nous obtenons :

$$\partial/\partial t(\rho_0 \omega_e) = -\text{div } \vec{J}_e + \varepsilon' (\partial_t(\rho_0 \omega_e)/\partial t) \quad (2.48)$$



Par identification avec l'équation (24), nous trouvons que :

$$I_e = \varepsilon \partial(\rho_0 \omega_e) / \partial t = -I_v \quad (2.49)$$

et

$$I_v = \text{div } \vec{J}_v \quad (2.41)$$

$$\partial(\rho_0 \omega_e) / \partial t = -\text{div} (\vec{J}_e + \vec{J}_v) = -\text{div } \vec{J}_v / \varepsilon \quad (2.50)$$

$$\text{Soit } \varepsilon = -\text{div } \vec{J}_v / \text{div} (\vec{J}_e + \vec{J}_v) \quad (2.51)$$

D'après (2.51), le coefficient  $\varepsilon$  traduit le rapport de la quantité de transfert de vapeur au transfert total .

$\varepsilon = 0$  : si le transfert s'effectue en phase liquide  
 $\varepsilon = 1$  : si le transfert s'effectue en phase vapeur  
 $0 < \varepsilon < 1$  : Généralement .

**Rappel :**

à  $0 < T^\circ < 100^\circ$  ,  $p = p_{\text{atm}}$  ,  $\omega = \omega_e$  ,  $\omega_v \approx 0$

$$\text{div } \vec{J}_v = -\varepsilon \partial(\rho_0 \omega_e) / \partial t = I_v = -I_e$$

$$\partial(\rho_0 \omega) / \partial t = -\text{div} (\vec{J}_e + \vec{J}_v)$$

**2.2.1.1 Développement de l'équation du mouvement de l'humidité en phase vapeur :**

La densité du flux de vapeur , à pression constante s'exprime par la relation suivante :

$$\vec{J}_v = -F D \rho / C_a \text{ grad } C_v - F D_q \rho \cdot C_v \cdot \text{grad } T \quad (2.52)$$

Avec : D et  $D_q$  : sont respectivement les coefficients de diffusion de masse et de chaleur .

$\rho$  : masse volumique de l'air humide.

$C_a$  et  $C_v$  : représentant les concentration massiques de l'air sec et de la vapeur dans le mélange (air sec + vapeur d'eau).

F : Coefficient fonction de la teneur en humidité globale et de la tortuosité du milieu .

En supposant que l'humidité en phase vapeur, se comporte comme un gaz parfait, on en déduit que :

$$p = \rho (R/M) T \quad \text{pression totale de l'air humide} \quad (2.53)$$

$$p_v = \rho_v (R/M_v) T \quad \text{pression partielle de la vapeur} \quad (2.54)$$

$$p_a = \rho_a (R/M_a) T \quad \text{pression partielle de l'air sec} \quad (2.55)$$

où :  $R$  : constante des gaz parfaits

$M$ ,  $M_v$  et  $M_a$  sont les masses moléculaires du mélange de la vapeur et de l'air sec.

Des (03) relations précédentes nous pouvons obtenir une nouvelle expression de la densité du flux de vapeur

$$\vec{J}_v = -F.D (M_v/RT) \text{ grad } p_v \quad (2.56)$$

En sachant que :

$$\rho = M p/RT \quad (2.56a)$$

$$C_a = (M_a p_a)/M p \quad (2.56b)$$

$$C_v = \rho_v/\rho = (M_v p_v)/M p \quad (2.56c)$$

En introduisant la notion de l'humidité relative  $\psi$  en (2.56), nous obtenons :

$$\vec{J}_v = - F.D (M_v/RT) \text{ grad } (p_{vs}, \varphi) \quad (2.57)$$

Sachant que :

$$\varphi = \exp [ M_v p_c / R.T. \rho_e ] \quad p_c : \text{pression capillaire} \quad (2.58)$$

et  $p_v = \varphi (\omega_c.T) p_{vs} \quad (1.5)$

$$\text{grad } p_v = p_{vs} (I) (\partial\varphi/\partial\omega_e)_T \text{ grad } \omega_e + \partial(\varphi.p_{vs})/\partial t \text{ grad } T \quad (2.59)$$

avec  $\omega \approx \omega_e$  ( $\omega_v \approx 0$ ) et  $\rho_v \ll \rho_e$

$$\text{grad } p_v = p_{vs} (I) (\partial\varphi/\partial\omega)_T \text{ grad } \omega + \partial(\varphi.p_{vs})/\partial t \text{ grad } T \quad (2.60)$$

$$\partial(\varphi.p_{vs})/\partial T = \varphi (dp_{vs}/dT) + p_{vs} (\partial\varphi/\partial T)_\omega \quad (2.61)$$

$$\vec{J}_v = - F D (M_v /RT) [p_{vs}(\partial\varphi/\partial\omega)_T \text{ grad } \omega + (\varphi dp_{vs}/dT + p_{vs} (\partial\varphi/\partial T)_\omega) \text{ grad } T] \quad (2.62)$$

$$\vec{J}_v = - \lambda_{m,v} \text{ grad } \theta - \lambda_{m,q,v} \text{ grad } T \quad (2.63)$$

$\lambda_{m,v}$  : étant le coefficient de conductibilité de masse en phase vapeur .

$\lambda_{m,q,v}$  : étant le coefficient de température de la conductibilité de masse en phase vapeur

Dans le cas général  $\theta = f(T, \omega)$

$$\text{grad } \theta = (\partial\theta/\partial\omega)_T \text{ grad } \omega + (\partial\theta/\partial T)_\omega \text{ grad } T \quad (2.64)$$

$$C_m = (\partial\omega/\partial\theta)_T \quad (2.65)$$

$$\Rightarrow \text{grad } \theta = 1/C_m (\text{grad } \omega + C_m (\partial\theta/\partial T)_\omega \text{ grad } T) \quad (2.66)$$

d'où :



$$\vec{J}_v = (\lambda_{m,v} / C_m) \{ \text{grad } \omega + (C_m (\partial\theta/\partial T)_{\omega} + (C_m \lambda_{m,q,v} / \lambda_{m,v})) \text{ grad } T \} \quad (2.67)$$

ou bien

$$\vec{J}_v = -a_{m,v} \rho_0 [ \text{grad } \omega + \delta_v \text{ grad } T ] \quad (2.68)$$

avec :

$$a_{mv} = \text{diffusité massique de la vapeur} = (\lambda_{mv} / \rho_0 C_m) \quad (2.69)$$

$$\delta_{sv} = \text{coefficient de gradient de la température} = \lambda_{m,q,v} / \lambda_{mv} \quad (2.70)$$

$$\delta_v = C_m [ (\partial\theta/\partial T)_{\omega} + \delta_{sv} ] \quad (2.71)$$

En identifiant les deux expressions du flux :

$$a_{mv} = (F D M_v) / (\rho_0 R T) p_{vs} (\partial\phi/\partial\omega)_T \quad (2.72)$$

$$\delta_v = [ p_{vs} (\partial\phi/\partial T)_{\omega} + \phi (dp_{vs}/dT) ] / [ p_{vs} (\partial\phi/\partial\omega)_T ] \quad (2.73)$$

Compte tenu de la relation entre l'humidité relative et la pression capillaire :

$$(\partial\phi/\partial T)_{\omega} = \{ (M_v g / RT) (\partial\psi/\partial T)_{\omega} - (M_v g \psi) / RT^2 \} \phi \quad (2.74)$$

$$\text{et } (\partial\phi/\partial\omega)_T = (M_v g / R T) (\partial\psi/\partial\omega)_T \phi \quad (2.75)$$

Par la suite, on pourra écrire :

$$\delta_v = (\partial\psi/\partial T)_{\omega} / (\partial\psi/\partial\omega)_T - (\psi/T) / (\partial\psi/\partial\omega)_T + (R T / M_v g p_{vs}) (dp_{vs}/dT) / (\partial\psi/\partial\omega)_T \quad (2.76)$$

ou bien encore, en utilisant :

$$\theta = \psi_{\max} - \psi \quad (2.77)$$

on aura :

$$(\partial\theta/\partial T)_{\omega} = -(\partial\psi/\partial T)_{\omega} \quad (2.78)$$

$$(\partial\theta/\partial\omega)_T = -(\partial\psi/\partial\omega)_T = 1/C_m \quad (2.79)$$

$$C_m (\partial\theta/\partial T)_{\omega} = (\partial\psi/\partial T)_{\omega} / (\partial\psi/\partial\omega)_T \quad (2.80)$$

En identifiant les deux expressions de  $\delta_v$  (2.73 et 2.76)

$$\delta_{sv} = [ (RT^2 / M_v g p_{vs}) (dp_{vs}/dT) - \psi ] / T \quad (2.81)$$

L'application de l'équation de Clapeyron, permet de déterminer les variations de la pression de vapeur saturante, avec la température .

$$(1/p_{vs})(dp_{vs}/dT) = (M_v L) / (RT^2) \quad (2.82)$$

$$\Leftrightarrow ((RT^2) / M_v p_{vs}) \cdot (dp_{vs}/dT) = L(T) \quad (2.83)$$

où  $L$  : chaleur latente de vaporisation

$$\delta_{sv} = (L/Tg) [1-(\psi g/L)] \quad (2.84)$$

d'où :

$$\delta_v = [(\partial\psi/\partial T)_\omega / (\partial\psi/\partial\omega)_T + (L/Tg)(1-(\psi g/L)) / (\partial\psi/\partial\omega)_T] \quad (2.85)$$

Lorsque la teneur en humidité est supérieure à la teneur en humidité hygroscopique maximale, on pourra établir certaines hypothèses :

$(\partial\psi/\partial T)_\omega \ll (\partial\psi/\partial\omega)_T$  cela implique que  $C_m(\partial\theta/\partial T)_\omega \cong 0$  en raisonnant suivant  $\theta$  :  
potentiel de transport de masse

On déduit :

$$\delta_v = L/T g [\partial\psi/\partial\omega]_T \quad (2.86)$$

### Rappel

Le transport de masse en phase vapeur s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{J}_v &= -a_{mv} \rho_0 [\text{grad } \omega + \delta_v \cdot \text{grad } T] \\ a_{mv} &= F (DM_v / \rho_0 RT) (p_{vs} M_v / RT) g (\partial\psi/\partial\omega)_T \\ \text{et } \delta_v &= L/(T g (\partial\psi/\partial\omega)_T) \end{aligned}$$

### 2.2.2 Développement de l'équation de mouvement en phase liquide :

L'écoulement de l'eau dans un milieu poreux non saturé est régi par la loi de Darcy

$$\vec{v} = -K_e / \mu_e \text{ grad } \hat{p}_e \quad (2.87)$$

où  $\vec{v}$  : vitesse de la filtration .

$\mu_e$  : Viscosité dynamique de l'eau liquide .

$K_e$  : Permeabilité relative à l'eau du milieu poreux

$\hat{p}_e$  : Potentiel de pression de l'eau pure avec  $\hat{p}_e = p - p_c - \rho_e g Z$

$p$  : due à la pression du gaz (air) .

$p_c$  : Pression capillaire .

$(\rho_e g z)$  : pression due à l'influence de la pesanteur

$Z$  : Côte d'un point de courant par rapport à un niveau de référence .

La densité de flux de masse de l'eau s'écrit :

$$\vec{J}_e = \rho_e \vec{v} = K_e / v_e \text{ grad } \hat{p}_e \quad (2.88)$$

$$\text{où } v_e = \mu_e / \rho_e \quad (2.89)$$

Comme dans la vapeur :

$$\vec{J}_e = -\lambda_{m,e} \text{ grad } \theta - \lambda_{m,q,e} \text{ grad } T \quad (2.90)$$



$$\vec{J}_e = -(K_e/v_e) (\rho_e g \text{ grad } \psi) \quad (2.91)$$

avec  $p_c = -\rho_e g \psi$  (2.11)

et  $\vec{J}_c = K_c/v_c \text{ grad } p_c$  (2.92)

hypothèse :  $p_c/\rho_e \gg gZ$  en pression d'air uniforme

puisque :  $\omega = \omega_v + \omega_e \approx \omega_e$  (2.36)

$$(\omega_v \ll \omega_e)$$

$$\text{grad } \psi = (\partial\psi/\partial\omega)_T \text{ grad } \omega + (\partial\psi/\partial T)_\omega \text{ grad } T \quad (2.93)$$

d'où :

$$\vec{J}_e = -(K_e \rho_e g / v_e) (\partial\psi/\partial\omega)_T [\text{grad } \omega + (\partial\psi/\partial T)_\omega / (\partial\psi/\partial\omega)_T]$$
 (2.94)

En utilisant l'équation :

$$\text{grad } \theta = (\partial\theta/\partial\omega)_T \text{ grad } \omega + (\partial\theta/\partial T)_\omega \text{ grad } T \quad (2.64)$$

On obtient :

$$\vec{J}_e = -\lambda_{m,e}/C_m [\text{grad } \omega + C_m ((\partial\theta/\partial T)_\omega + \lambda_{m,q,e}/\lambda_{m,e}) \text{ grad } T]$$
 (2.95)

soit  $\vec{J}_e = -a_{m,e} \rho_0 [\text{grad } \omega + \delta_e \text{ grad } T]$  (2.96)

avec :  $a_{m,e} = \lambda_{m,e}/C_m \rho_0$  et  $\delta_e = C_m [(\partial\theta/\partial T)_\omega + \delta'_e]$  (2.97)

$$\delta'_e = \lambda_{m,q,e}/\lambda_{m,e} \quad (2.98)$$

finalement :  $\vec{J}_e = -a_{m,e} \rho_0 [\text{grad } \omega + ((\partial\psi/\partial T)_\omega / (\partial\psi/\partial\omega)_T + \delta'_e) \text{ grad } T]$  (2.99)

obtenue en exprimant :  $\theta$  en terme de succion

$$(\partial\theta/\partial\omega)_T = 1/C_m = -(\partial\psi/\partial\omega)_T \quad (2.100)$$

et  $(\partial\theta/\partial T)_\omega = -(\partial\psi/\partial T)_\omega$  (2.101)

En identifiant la pression (2.94) et (2.99) on obtient :

$$a_{m,e} = (\rho_e/\rho_0) (K_e g / v_e) (\partial\psi/\partial\omega)_T \quad (2.102)$$

$$\delta'_e = 0 \quad (2.103)$$

$$\delta_e = (\partial\psi/\partial T)_\omega / (\partial\psi/\partial\omega)_T \quad (2.104)$$

$a_{m,e}$  : Diffusité massique de l'humidité en phase liquide

$\delta_e$  : coefficient de gradient de température

**Rappel :**

Equation de mouvement de l'humidité en phase liquide

$$\vec{J}_c = -a_{m,c} \rho_0 [\text{grad } \omega + \delta_c \text{ grad } T]$$

avec  $a_{m,e} = (\rho_e/\rho_0) (K_e g / v_e) (\partial\psi/\partial\omega)_T$

$$\delta_e = (\partial\psi/\partial T)_\omega / (\partial\psi/\partial\omega)_T$$

**2.2.3 Equation différentielle du transport de masse :**

Nous avons défini, précédemment l'équation de conservation de la masse :

$$\partial(\rho_0 \omega) / \partial t = - \text{div} (\vec{J}_e + \vec{J}_v) \tag{2.40}$$

avec  $\vec{J}_e = \vec{J}_e + \rho_0 \omega_e \vec{V}$  (2.105)

et  $\vec{J}_v = \vec{J}_v + \rho_0 \omega_v \vec{V}$  (2.106)

Les équations de mouvement :

*En phase vapeur :*

$$\vec{J}_v = - a_{mv} \cdot \rho_0 [\text{grad } \omega + \delta_v \text{ grad } T] \tag{2.68}$$

*En phase liquide :*

$$\vec{J}_c = - a_{mc} \cdot \rho_0 [\text{grad } \omega + \delta_c \text{ grad } T] \tag{2.96}$$

En supposant la pression de l'air uniforme , tout mouvement de filtration est inexistant , cela dit , les vitesses de convections sont prises nulles et l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\partial/\partial t (\rho_0 \omega) = - \text{div} (\vec{J}_e + \vec{J}_v) \tag{2.107}$$

En remplaçant  $\vec{J}_e$  et  $\vec{J}_v$  par leurs expressions il résulte la relation suivante :

$$\partial/\partial t (\rho_0 \omega) = \text{div} [ \rho_0 (a_{mv} + a_{mc}) \text{ grad } \omega + \rho_0 (a_{mv} \cdot \delta_v + a_{mc} \delta_c) \text{ grad } T ] \tag{2.108}$$

En posant :

$$a_m = a_{mc} + a_{mv} \tag{2.109}$$

et  $a_m \delta = a_{mv} \delta_v + a_{mc} \delta_c$  (2.110)

on aura :

$$\partial/\partial t (\rho_0 \omega) = \text{div} [ \rho_0 \cdot a_m \cdot \text{grad } \omega + \rho_0 (a_{ms} \delta) \text{ grad } T ] \tag{2.111}$$



$a_m$  : coefficient de diffusion massique de l'humidité .

$\delta$  : coefficient de thermo-migration de l'humidité .

$$\bar{J}_m = \bar{J}_e + \bar{J}_v = -\rho_0 .a_m [ \text{grad } \omega + \delta + \text{grad } T ] \quad (2.112)$$

où :

$\bar{J}_m$  : densité de flux de masse total ( vapeur + liquide ) .

**Rappel :**

L'équation différentielle de transport de masse .

$$\partial(\rho_0 \omega) / \partial t = \text{div} [ \rho_0 a_m . \text{grad } \omega + \rho_0 a_m \delta \text{ grad } T ] .$$

**2.2.4 Equation différentielle du transfert de chaleur :**

L'équation de conservation de l'enthalpie s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial / \partial t (\rho_0 h_0) + \rho_0 (\omega_v (\partial h_v / \partial t) + \omega_e (\partial h_e / \partial t)) \\ = -\text{div } \bar{J}_q - h_c I_c - h_v I_v - \bar{J}_v \text{ grad } h_v - \bar{J}_e \text{ grad } h_e \end{aligned} \quad (2.113)$$

Elle met en évident plusieurs termes ; nous distinguons :

Le transport d'enthalpie par diffusion - convection résultant du mouvement du fluide :

$$\bar{J}_e \text{ grad } h_e , \bar{J}_v \text{ grad } h_v$$

La création ou l'absorption de la chaleur associées au changement de phase :

$$- h_c I_c - h_v I_v = (h_v - h_c) I_c \quad (\text{car } I_c = -I_v) \quad (2.114)$$

Le flux de chaleur  $\bar{J}_q$  transporté par diffusion thermique.

Sachant que :

$$\bar{J}_q = -\lambda_q \text{ grad } T - \lambda_{m,q} \text{ grad } C \quad (\text{en présence de phénomènes couplés}) \quad (2.29)$$

où :

$-\lambda_q \text{ grad } T$  : traduit la conduction thermique.

Et  $-\lambda_{m,q} \text{ grad } C$  : représente l'influence du gradient de concentration ou de pression sur la quantité de chaleur transportée par diffusion (effet Dufour).

Par ailleurs l'équation de conservation de l'enthalpie , devient, en utilisant la relation (2.29)

$$\begin{aligned} \partial / \partial t (\rho_0 h_0) + \rho_0 (\omega_v \partial h_v / \partial t + \omega_e \partial h_e / \partial t) \\ = \text{div} [ \lambda_q \text{ grad } T + \lambda_{m,q} \text{ grad } C ] + (h_v - h_e) I_e - \bar{J}_v \text{ grad } h_v - \bar{J}_e \text{ grad } h_e \end{aligned} \quad (2.115)$$

En remplaçant l'enthalpie de chaque phase par son expression :

$$dH = C_p dT. \quad (2.116)$$

On aura :

$$\begin{aligned} & \partial/\partial t (\rho_0 C_{p0} T) + \rho_0 [\omega_v (\partial(C_{pv} \cdot T)/\partial t) + \omega_e \partial(C_{pe} T)/\partial t] \\ & = \text{div} [\lambda_q \text{grad } T + \lambda_{m,q} \text{grad } C] + (h_v - h_c) I_c - \vec{J}_v \text{grad } (C_{pv} \cdot T) - \vec{J}_e \text{grad } (C_{pe} \cdot T) \end{aligned} \quad (2.117)$$

**Hypothèses simplificatrices :**

$$\lambda_{m,q} \text{grad } C \approx 0 \quad \text{et} \quad I_c = \varepsilon' \partial/\partial t (\rho_0 \omega)$$

$$\vec{J}_v \text{ et } \vec{J}_e \text{ se réduisent à } \vec{J}_v \text{ et } \vec{J}_e$$

$$\vec{J}_e \text{grad } h_e \text{ et } \vec{J}_v \text{grad } h_v \approx 0$$

$$\Rightarrow (\rho_0 C_{p0} + \rho_0 C_{pv} \omega_v + \rho_0 C_{pe} \omega_e) \partial T/\partial t = \text{div}(\lambda_q \text{grad } T) + \varepsilon' Q_{vc} \rho_0 \partial \omega/\partial t \quad (2.118)$$

ou bien encore

$$\partial T/\partial t = \text{div} (a^*_q \text{grad } T) + \varepsilon' Q_{vc}/C^* \partial \omega/\partial t \quad (2.119)$$

$$\text{avec : } a^*_q = \lambda_q/\rho_0 (C_{p0} + C_{pv} \omega_v + C_{pe} \omega_e) \quad (2.120)$$

$$C^* = C_{p0} + C_{pv} \omega_v + C_{pe} \omega_e \quad (2.121)$$

Equation différentielle du transport de chaleur :

$$\partial T/\partial t = \text{div} [a^*_q \text{grad } T] + \varepsilon' Q_{vc}/C^* \partial \omega/\partial t.$$

**En résumé :**

pour  $T_e ]0,100[$  °c, à pression d'air uniforme, le système d'équations différentielles qui régit le transport de masse et de chaleur .

$$\partial \omega/\partial t = \text{div} [a_m (\text{grad } \omega + \delta \text{grad } T)]$$

$$\partial T/\partial t = \text{div} (a^*_q \text{grad } T) + \varepsilon' Q_{vc}/C^* (\partial \omega/\partial t)$$

### 2.3 Equation de transport du masse et de chaleur - température élevée - pression gazeuse variable

En plus, les fluides sont mis en mouvement par l'existences du gradient de pression dans la phase gazeuse, due soit

- à l'existence de différence de pression de part et d'autre des surfaces limites du milieu poreux
- à l'échauffement intense du milieu poreux humide.



**2.3.1 Equation du mouvement en phase vapeur et liquide.**

Loi de Darcy donnée par :

$$\vec{J}_v = K_p/v_v \text{ grad } p \quad (2.122)$$

$K_p$  : Coefficient de perméabilité relative à l'air humide du milieu poreux.

$P$  : Pression de l'air humide .

Au grad  $p$  (pression totale =  $C^e$ ) , correspond une densité de flux de masse du liquide .

$$\vec{J}'_c = -K_c/v_c \text{ grad } p \quad (2.123)$$

Le flux de masse (vapeur + liquide) associé au processus de filtration sera :

$$\vec{J}'_m = -(K_p/v_v + K_c/v_c) \text{ grad } p = -\lambda_p \text{ grad } p \quad (2.124)$$

$$\text{où : } \lambda_p = K_p/v_v + K_c/v_c \quad (2.125)$$

$\lambda_p$  : Coefficient de transport de l'humidité par filtration .

$$\vec{J}_m = \vec{J}_c + \vec{J}'_c + \vec{J}_v + \vec{J}'_v \quad (2.126)$$

$$\text{Soit : } \vec{J}_m = -a_m \cdot \rho_0 (\text{grad } \omega + \delta \text{ grad } T + \delta_p \text{ grad } T) \quad (2.127)$$

$$\text{avec } \delta_p = \lambda_p / (a_m \cdot \rho_0) \quad (2.128)$$

**2.3.2 Equation différentielle du transport de masse .**

$$\omega \approx \omega_e$$

$$\partial/\partial T (\rho_0 \omega) = \text{div} [ a_m \rho_0 (\text{grad } \omega + \delta \text{ grad } T + \delta_p \cdot \text{grad } p) ] \quad (2.129)$$

Ceci lorsque la pression totale n'est pas constatée

**2.3.3 Equation différentielle du transport de chaleur .**

$$dp/dt \approx 0$$

Du terme de convection  $\vec{J}'_e \text{ grad } h_e$  ,  $h'_v \text{ grad } h_v \neq 0$  , l'équation de transport de chaleur sera :

$$\partial T / \partial t = \text{div} (a^*_q \cdot \text{grad } T) + [(\epsilon^* Q_{ve} / C^*) (\partial \omega / \partial t) + (1/\rho_0 C^*)] (K_v \cdot C_v / v_v) + (K_e \cdot C_e / v_e) \text{ grad } p \text{ grad } T \quad (2.130)$$

Lorsque  $dp/dt$  n'est plus négligeable

$$\partial T / \partial t = (1/\rho_0 C^*) dp/dt + \text{div} (a^*_q \cdot \text{grad } T) + (\epsilon^* \cdot Q_{ve} / C^*) (\partial \omega / \partial t) + (1/\rho C^*) (K_v \cdot C_v / v_v) + (K_e \cdot C_e / v_e) \cdot \text{grad } p \text{ grad } T \quad (2.131)$$

avec  $dp/dt = \partial p/\partial t + \bar{V} \text{ grad } p = \text{vitesse hydrodynamique de la vapeur}$  (2.132)

**2.3.4 Equation d'évolution de la pression .**

Considérons les équations de conservation de masse de (l'air humide  $\approx$  gaz parfait)

$$\partial(\rho_0 \omega_v)/\partial t = -\text{div } \bar{J}_v + I_v \tag{2.133}$$

$$\rho_0 \omega_v = \Gamma_v = \rho_v \varepsilon b_i = PM/RT \varepsilon b_i \tag{2.134}$$

$\rho_v$  : masse volumique de l'air humide .

$$\rightarrow d(\rho_0 \omega_v) = \varepsilon b_i M / R (( dp/T) - (P/T^2) dT) + (PM\varepsilon/RT) db_i \tag{1.135}$$

Si l'on néglige les deux premiers termes qui sont généralement plus faibles que le premier , et si l'on pose :

$$C_{ma} = \varepsilon b_i M/RT\rho_0 \rightarrow \partial(\rho_0 \omega_v)/\partial t = C_{ma} \rho_0 \partial p/\partial t \tag{2.136}$$

comme par ailleurs  $\bar{J}_v = -K_v/v_v \text{ grad } p$

$$C_{ma} \rho_0 (\partial p/\partial t) = \text{div}(K_v/v_v \text{ grad } p) + I_v \tag{2.137}$$

ou encore

$$\partial p/\partial t = \text{div} (a_p \text{ grad } p) - (\varepsilon'/C_{ma}) (\partial \omega/\partial t) \tag{2.138}$$

$$a_p = K_v / (v_v \cdot \rho_0 \cdot C_{ma}) : \text{Coefficient de diffusion de la vapeur par filtration} \tag{2.139}$$

**Evolution de la pression :**

$$\partial p/\partial t = \text{div} (a_p \cdot \text{grad } p) - (\varepsilon'/C_{ma}) \cdot (\partial \omega/\partial t)$$

Le système d'équation qui régit le transport de chaleur et de masse , lorsque la pression totale n'est pas uniforme s'écrit :

$$\partial \omega/\partial t = \text{div} [ a_m (\text{grad } \omega_e + \delta \text{ grad } T + \delta_p \text{ grad } p)]$$

$$\partial T/\partial t = 1/\rho_0 C^* \cdot dp/dt + \text{div}( a^*_q \cdot \text{grad } T) + (\varepsilon' Q_{ve}/C^*) (\partial \omega/\partial t) + (1/\rho_0 C^*)$$

$$(K_v C_v/v_v + K_e C_e) \text{ grad } p \text{ grad } T$$

$$\partial p/\partial t = \text{div} (a_p \text{ grad } p) - (\varepsilon'/C_{ma}) (\partial \omega/\partial t)$$



# 3

## TROISIEME CHAPITRE

### Modèle mathématique et résolution numérique

Le problème auquel nous nous intéressons, concerne les transferts de masse et de chaleur, au sein d'un milieu poreux, homogène, isotrope, indéformable, non-saturé en eau, de température comprise en 0 et 100°C (*gradients thermiques faibles*).

Les transferts de masse sont respectivement associés aux gradients de pression de vapeur et de pression capillaire, tandis que les transferts d'énergie s'effectuent principalement, par diffusion thermique et par transfert de toute chaleur totale, due aux effets de *vaporisation - condensation*.

### 3.1. Modèle physique et mathématique

#### 3.1.1 *Modèle physique*

La (configuration physique retenue, correspond à un milieu poreux mis en contact, à la partie supérieure ( $Z=0$ ) avec un écoulement d'air à température ; vitesse et humidité relative contrôlées.

Par contre, à l'extrémité ( $Z=L$ ) = 20 cm inférieure, correspond une surface imperméable, isotherme, ayant une température inférieure à celle s'écoulant en surface.

La surface latérale du modèle est adiabatique et imperméable de façon à ce qu'il n'y ait aucun transfert thermique ou massique latéral.

On pourra dire, que notre étude est effectuée sur un système semi-ouvert, à processus *d'évaporation - condensation unidirectionnel*.

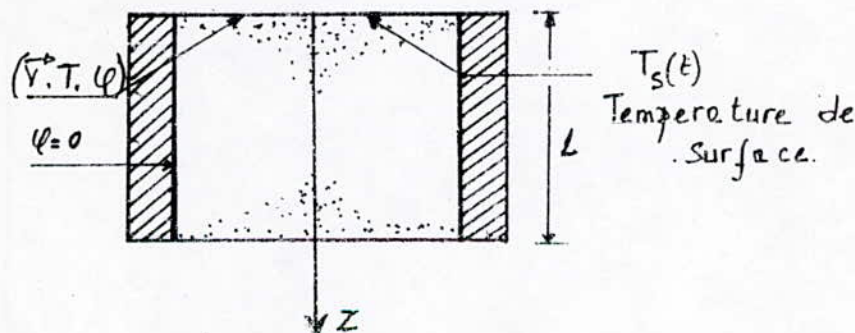


Fig 3.1 : *Modèle physique proposé*

### 3.1.2 Modèle mathématique

Le système décrivant les transferts couplés de masse et de chaleur, s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \partial\omega/\partial t &= \text{div} [a_m (\text{grad } \omega + \delta \text{ grad } T)] \\ \partial\omega/\partial t &= \text{div} [a^*_q \text{ grad } T] + \varepsilon^* (Q_{ve}/C^*) (\partial\omega/\partial t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Avec :  $a_m = a_{me} + a_{mv}$                        $\delta = \delta_e + \delta_v$

$$a^*_q = \lambda_q/\rho_0 (C_{p0} + C_{pv} \omega_v + C_{pc} \omega_c), \quad C^* = C_{p0} + C_{pv} \omega_v + C_{pc} \omega_c$$

et :  $a_{mv} = F (D M_v/\rho_0 R) (M_v P_{vs} / R T^2) g (\partial\omega/\partial t)_T$

$$a_{me} = \rho_c/\rho_0 \cdot K_c \cdot g/V_c (\partial\psi/\partial\omega)_T$$

aussi :  $\delta_e = (\partial\psi/\partial T)\omega / (\partial\psi/\partial\omega)_T$

$$\delta_v = L / (T \cdot g ((\partial\psi/\partial\omega)_T))$$

La résolution numérique prend en considération , les conditions initiales et aux limites correspondantes à celles de l'essai , à savoir :

Les parois latérales sont supposées fermées et isolées (*la simulation numérique sera effectuée dans le cas unidirectionnel*).

Le milieu poreux est initialement sec ; soumis à une température uniforme .

Du point de vue , conditions aux limites ;

En  $Z=0$  et  $Z=L$  ; correspondent respectivement une condition de flux de masse nulle, et une température constante en ( $Z=L$ ), et à la continuité des densités de flux de masse , et une température constante en ( $Z=0$ ).

La densité de flux massique « W » correspond à l'ensemble des densités de flux de masse (*en phase vapeur et en phase liquide* ), elle est donnée par l'expression suivante :

$$W = -\rho_0 [a_m \text{ grad } \omega + a_m \delta \text{ grad } T] \quad (3.2)$$

La densité de flux de chaleur , est donnée par la formule suivante :

$$G = (-\lambda_q \text{ grad } T + L \vec{J}_v) \cdot \vec{n} \quad (3.3)$$

où :  $\vec{n}$  : normale extérieure à l'interface ( $J_v$  connu)

$G$  : étant la somme du flux conductif et celui dû au changement

En projetant, les relations (3.2) et (3.3), sur l'axe des ( $Z$ ), on obtient :

$$W = -\rho_0 [a_m \partial\omega/\partial Z + a_m \delta \partial T/\partial Z] \quad (3.4)$$

et  $G = -(\lambda_q + L \cdot a_{mv} \rho_0 \delta_v) (\partial T/\partial Z) - a_{mv} \rho_0 L (\partial\omega/\partial Z) \quad (3.5)$



L : chaleur latente

A l'interface (*atmosphère-milieu poreux*), les échanges convectifs sont régis par les expressions suivantes :

Pour la densité de flux de masse :

$$E = h_m (C_s - C_a) \quad (3.6)$$

où  $h_m$  : *coefficient de transfert de masse*

et  $C_s$  :  $C_a$  sont respectivement, la concentration de vapeur en surface et dans l'air .

Pour la densité du flux de chaleur :

$$H = h_c (T_s - T_a) \quad (3.7)$$

où  $h_c$  : *coefficient de transfert de chaleur par convection*

et  $T_s$  et  $T_a$  sont respectivement la température de surface et de l'air

On pourra en déduire , le système à résoudre suivant :

$$\begin{aligned} \partial\omega/\partial\Gamma &= (\partial/\partial Z) ( -\rho_0 (a_m (\partial\omega/\partial Z) + a_m \delta (\partial\Gamma/\partial Z)) \\ \partial\omega/\partial\Gamma &= - (\partial/\partial Z) [(\lambda_q + L a_{mv} \rho_0 \delta_v) (\partial\Gamma/\partial Z) + a_{mv} \rho_0 L (\partial\omega/\partial Z)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Concernant les densités de flux de masse et de chaleur liées aux conditions aux limites , leurs équations représentatives sont données comme suit :

**Pour la densité de flux de masse**

$$W = -\rho_0 [a_m (\partial\omega/\partial Z) + a_m \delta (\partial\Gamma/\partial Z)] = - E = -h_m (C_s - C_a)$$

$$\text{Soit : } a_m (\partial\omega/\partial Z) + a_m \delta (\partial\Gamma/\partial Z) = E/\rho_0 = h_m/\rho_0 (C_s - C_a) \quad (3.9)$$

**Pour la densité de flux de chaleur**

$$\begin{aligned} G &= -(\lambda_q + L a_{mv} \rho_0 \delta_v) (\partial\Gamma/\partial Z) - a_{mv} \rho_0 L (\partial\omega/\partial Z) \\ &= R N - \underbrace{h_c (T_s - T_a)}_H - \underbrace{L h_m (C_s - C_a)}_{L.E} \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec RN : *rayonnement net* (négligeable d'après les hypothèses )

L.E : *flux de chaleur latente dans l'atmosphère*

et H : *flux de chaleur sensible dans l'atmosphère*

**N.B :**

L'expression des coefficients ( $h_c$  et  $h_m$ ) est généralement d'origine empirique

Pour mieux étudier les phénomènes de transfert, et plus précisément le couplage et les interactions entre couche limite externes et milieu poreux, un choix judicieux est à faire ; concernant la procédure à adopter.

Nous avons alors imposé, sur l'interface (*milieu poreux-atmosphère*) les températures et les densités de flux de masse (*déduites de l'expérience*).

Les conditions aux limites , utilisés pour la résolution du système d'équation précédemment définis, sont donnés par :

**Pour la partie ouverte du système , (Z=0)**

$$T > 0 \quad a_m (\partial \omega / \partial Z) + a_m \delta (\partial T / \partial Z) = \dot{m}(t) ; \text{ avec } \dot{m}(t) \text{ expérimentale}$$

$$T = T_s = T_a$$

où :  $\dot{m}(t) = d m(t) / dt = (1 / \rho_0 \cdot S) d[M(t) / dt]$

$M(t)$  : Loi donnant l'évolution des masses d'eau condensées, ou évaporées en fonction du temps

$S$  : Section de passage de la vapeur

$\rho_0$  : masse volumique de l'échantillon du milieu poreux

**Pour la partie fermée : (Z=L)**

$$T > 0 \quad a_m (\partial \omega / \partial Z) + a_m \delta (\partial T / \partial Z) = 0$$

$$T = T_L$$

Les conditions initiales sont données par :

$$t \leq 0 \quad \omega = \omega_0 = 0,02\%$$

$$T = T_0 = T_a = 30^\circ\text{C}$$

$$T_L = 10^\circ\text{C}$$

### 3.2 Résolution numérique

On dispose, pour représenter les phénomènes de transfert, dans la zone non saturée, de deux équations paraboliques, monodimensionnelles et couplés.

Vu le caractère non-linéaire de ce système, il est indispensable d'utiliser une *méthode de Galerkin* conjointement à une approximation par éléments finis .



### 3.2.1 Rappel sur les méthodes numériques

#### a/ Formulation intégrale d'une équation différentielle

##### a.1/ résidu

Soit un système physique régi par un système d'équations aux dérivées partielles de :

$$L(U) - g \quad \text{sur le domaine } (\Omega) \quad (3.11)$$

où :  $U$  : dépend du vecteur des variables indépendantes  $(x)$

Associée aux conditions aux limites sur le contour «  $\Gamma$  » du domaine  $(\Omega)$

$$B(U) - h = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{et} \quad \int_{\Omega} [L(U) - g] p(x) d\Omega + \int_{\Omega} [B(U) - g] \bar{p}(x) d\Gamma = 0 \quad (3.13)$$

Quelques soient  $p(x)$  et  $\bar{p}(x)$

La relation (3.13) est appelée : "*formulation intégrale normale du système différentiel*"

$$L(U) - g = R(U) \quad (3.14)$$

est nulle quand " $U$ " est une solution de (3.11) et (3.12)

Les meilleures approximations de  $U(x)$  sont donc obtenues lorsque  $R(U)$  (résidu) est le plus faible possible .

##### a.2/ Méthode des résidus pondérés

Cette méthode consiste à rechercher les fonctions  $(U)$  , qui annulent la forme intégrale suivante :

$$W = \int_{\Omega} p R(U) d\Omega + \int_{\Omega} p [L(U) - g] d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

Pour toute fonction  $p$  de pondération appartenant à l'ensemble des fonctions  $E_p$ ,

A partir des équations aux dérivées partielles , la méthode des résidus pondérés conduit directement aux formulations intégrales.

##### a.3/ transformation des formes intégrales

##### Forme intégrale faible

D'après la formule de Green (3.16), il sera possible , de faire apparaître les dérivées des fonctions de pondération  $p(x)$  et  $\bar{p}(x)$  ainsi que l'obtention de la classe de continuité la plus faible possible des approximations  $U(x)$ .

L'ordre de dérivation sera donc abaissé, dans la formulation intégrale forte ou normale .

$$\int_{\Omega} p (\partial G / \partial x_i) d\Omega = - \int_{\Omega} (\partial p / \partial x_i) G d\Omega + \int_{\Gamma} p G \eta_{xi} d\Gamma \quad (3.16)$$

a.4/ Approximation des inconnues

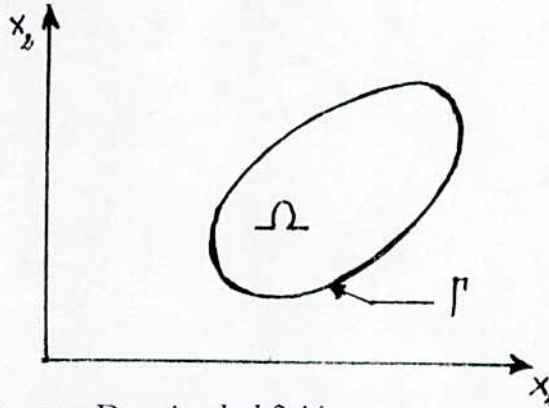


Fig 3.2 : Domaine de définition

Soit la fonction \$U(x)\$ définie et continue sur un domaine (\$\Omega\$) dont on ne connaît les valeurs exactes qu'en certains noeuds de coordonnées (\$x\_i\$) :

$$U(x_i) = U_{ex}(x_i) = u_i \quad i = 1, n \quad (3.17)$$

L'approximation nodale de la fonction \$U(x)\$ est :

$$U(x) : N_1(x). u_1 + N_2(x). u_2 + \dots + N_n(x). u_n = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i \quad (3.18)$$

où :

\$x\_i\$ : coordonnées nodales

\$u\_i\$ : variables nodales

\$N\_i\$ : Fonctions d'interpolation ou fonction de forme

L'équation (3.18) peut être écrite sous le forme suivante :

$$U(x) = \langle N \rangle \{u\} \quad (3.19)$$

La relation (3.17) appliquée à l'équation (3.18), donne la propriété suivante :

$$N_j(x_i) = \delta_{ij} \quad (3.20) \quad \overline{i, j} = 1, n$$

a.5/ Discrétisation des formes intégrales

Choix des fonctions de pondération



Différentes méthodes des résidus pondérés sont obtenues, d'après le choix des fonctions de pondération  $\psi$  dans l'équation (3.15). On pourra soit utiliser :

- ◆ *Méthode de Galerkin*
- ◆ *Méthode de collocation par points*
- ◆ *Méthode des moindres carrés*
- ◆ *Méthode de collocation par sous-domaines*

Nous utiliserons, comme procédé de résolution, la méthode de Galerkin.

### 3.2.2 Méthode de Galerkin

Contrairement aux méthodes des différences finies, qui sont des approximations d'équations ; la *méthode de Galerkin*, consiste à supposer une approximation de la solution qu'on écrit sous la forme suivante :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot N_i(x) \quad (3.20)$$

où :  $N_i(x)$  dites fonctions de forme, sont connues, et les coefficients  $C_i$  sont les inconnus

En choisissant les « n » fonctions de pondération  $p_j(x)$ , il sera possible alors de déterminer les « n » coefficients «  $C_i$  » que réalisent mieux la relation ci dessous :

$$\int_{\Omega} [L(\sum_{i=1}^n C_i N_i(x)) - g] p_j d\Omega + \int_{\Gamma} [B(\sum_{i=1}^n C_i N_i(x)) - h] p_j d\Gamma = 0 \quad (3.21)$$

avec  $j = 1, n$

Dans le cas particulier de *la méthode de Galerkin*, les « n » fonctions de pondération  $p_j(x)$ , sont choisies comme étant en elles même, des fonctions de forme ; d'où :

$$\int_{\Omega} [L(\sum_{i=1}^n C_i N_i(x)) - g] N_j d\Omega + \int_{\Gamma} [B(\sum_{i=1}^n C_i N_i(x)) - h] N_j d\Gamma = 0 \quad (3.22)$$

### 3.2.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode particulière d'approximation par sous domaines, et il est préférable de l'utiliser, lorsque la géométrie du domaine complet ( $\Omega$ ) est compliquée.

Ceci dit, elle procédera à la recherche de solutions approchées propres à chaque sous domaine ( $\Omega^e$ ) ou élément fini, afin d'obtenir une solution globale du problème.

Ce dernier sera traité à partir d'une formulation intégrale faible de manière à utiliser les fonctions de forme les plus simples.

Les fonctions de forme seront choisies de façon qu'en certain points de l'élément, les coefficients inconnus  $U_i$  de la solution approchée, puisse coïncider avec les valeurs exactes de la solution.

La méthode des éléments finis est un cas d'application de *la méthode de Galerkin*.

### 3.2.4 Fonctions d'interpolation en approximation linéaire

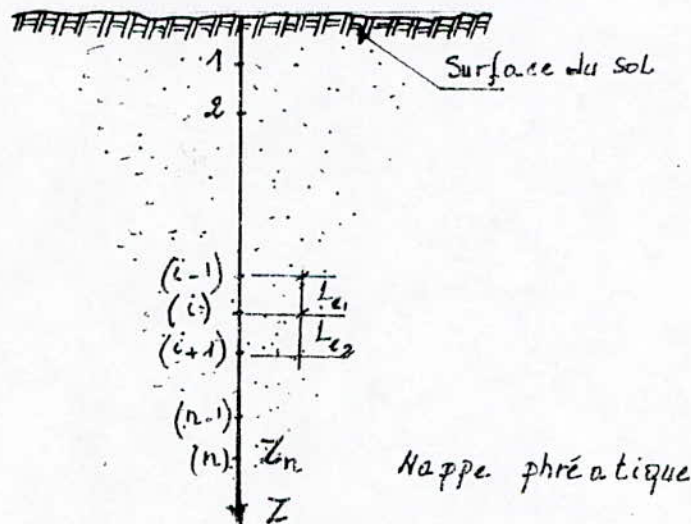


Fig 3.3 : Discretisation linéaire du domaine d'étude

Le domaine d'étude monodimensionnel ( $\Omega$ ) compris en notre exemple, entre la surface du sol et la nappe phréatique, est divisé en un réseau d'éléments finis linéaires, de longueur inégale, les noeuds étant numérotés à partir du haut, vers le bas.

La formulation intégrale faible permet d'abaisser l'ordre de dérivation dans notre système d'équations à résoudre, ce qui nous permettra par la suite d'utiliser des fonctions d'interpolation continues et linéaires par morceaux; illustrées sur la fig. (3.4) et définies pour un noeud « i » par :



$$N_i(Z) = (Z - Z_{i-1}) / (Z_i - Z_{i-1}) \text{ pour } Z_{i-1} \leq Z \leq Z_i$$

$$N_i(Z) = (Z_{i+1} - Z) / (Z_{i+1} - Z_i) \text{ pour } Z_i \leq Z \leq Z_{i+1} \quad (3.23)$$

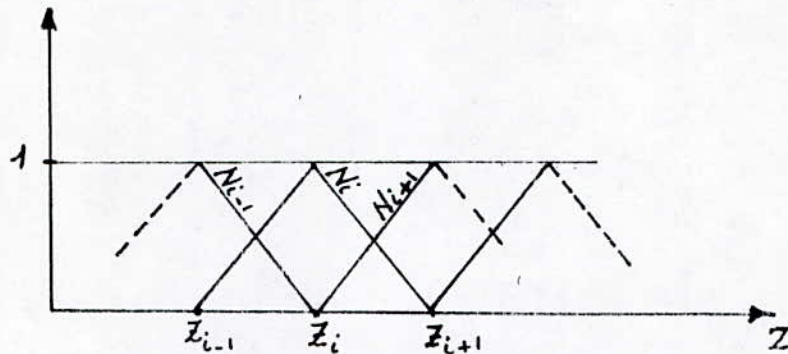


Fig 3.A : Approximation linéaire sur un element

### 3.2.5 Application au cas traité

En posant :

$$\alpha = -\rho_0 \cdot a_m$$

$$\beta = -\rho_0 \cdot a_m \cdot \delta$$

$$\lambda = -(\lambda_q + L \cdot a_{mv} \cdot \rho_0 \cdot \delta_v) \quad (3.24)$$

$$\eta = -a_{mv} \cdot \rho_0 \cdot L$$

Le système (3.8) associé aux conditions initiales et aux limites devient

$$\partial\omega / \partial t = (\partial / \partial Z) (\alpha \cdot (\partial\omega / \partial Z) + \beta \cdot (\partial T / \partial Z)) \quad (3.25)$$

$$\partial T / \partial t = (\partial / \partial Z) (\eta \cdot (\partial\omega / \partial Z) + \lambda \cdot (\partial T / \partial Z)) \quad (3.26)$$

Ecrivons la formulation intégrale normale (3.13) des équations (3.25) et (3.26), en notant par  $N_i(Z)$  les fonctions d'interpolation.

$$\int_{\Omega} (\partial\omega / \partial t) - (\partial / \partial Z) (\alpha \cdot (\partial\omega / \partial Z) + \beta \cdot (\partial T / \partial Z)) \cdot N_i - d\Omega = 0 \quad (3.25a)$$

et

$$\int_{\Omega} (\partial T / \partial t) - (\partial / \partial Z) (\eta \cdot (\partial\omega / \partial Z) + \lambda \cdot (\partial T / \partial Z)) \cdot N_i - d\Omega = 0 \quad (3.26a)$$

avec  $i = 1, \dots, n$

En appliquant la formule de Green (3.16) sur (3.25a) et (3.26a), on obtient :

$$\int_{\Omega} (\partial\omega/\partial t) N_i d\Omega + \int_{\Omega} \alpha (\partial\omega/\partial Z) (\partial N_i/\partial Z) d\Omega + \int_{\Omega} \beta (\partial T/\partial Z) (\partial N_i/\partial Z) d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma} (\alpha (\partial\omega/\partial Z) + \beta (\partial T/\partial Z)) n N_i d\Gamma \quad (3.25b)$$

et 
$$\int_{\Omega} (\partial\omega/\partial t) N_i d\Omega + \int_{\Omega} \eta (\partial\omega/\partial Z) (\partial N_i/\partial Z) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda (\partial T/\partial Z) (\partial N_i/\partial Z)$$

$$d\Omega = \int_{\Gamma} (\eta (\partial\omega/\partial Z) + \lambda (\partial T/\partial Z)) n N_i d\Gamma \quad (3.26b)$$

avec  $i = 1, n$  et  $n$  : la normale extérieure au domaine

Les deux expressions précédentes font intervenir 03 types d'intégrales que nous allons calculer successivement.

Chaque intégrale qui est évaluée sur le domaine  $\Omega$  est remplacée par une somme d'intégrales élémentaires sur chacun des éléments finis du domaine.

**Intégrale « I<sub>1</sub> » :**

$$I_1 = \int_{\Omega} \alpha (\partial U/\partial Z) (\partial N_i/\partial Z) d\Omega = \sum_e \int_{(\Omega)} \alpha (\partial U/\partial Z) (\partial N_i/\partial Z) d\Omega^e \quad (3.27)$$

Soit  $\alpha = \alpha_m N_m$  (3.28)

avec  $\alpha$  varie linéairement sur l'élément « e »

et  $U = U_j N_j$  (3.29)

L'intégrale I<sub>1</sub> se mettra sous la forme :

$$I_1 = \sum_e \int_{\Omega^e} \alpha_m U_j n_m (\partial U/\partial Z) (\partial N_i/\partial Z) d\Omega^e = A_{ij} U_j \quad (3.30)$$

avec  $A_{ij} = \sum_e \int_{\Omega^e} \alpha_m n_m (\partial N_j/\partial Z) (\partial N_i/\partial Z) d\Omega^e$  (3.31)

D'après (3.23) :

$$(\partial N_j/\partial Z) (\partial N_i/\partial Z) = ((-1)^{\delta_{ij}+1})/L_e^2 \quad (3.32)$$

où :  $L_e$  : longueur de l'élément "e", soit  $(Z_2 - Z_1)$ , en utilisant la numérotation locale des noeuds



Sur l'élément « e », on écrit que :

$$\alpha_m N_m = \alpha_1 N_{e_1} + \alpha_2 N_{e_2} \quad (3.33)$$

d'où :

$$A_{ij} = \sum_e ((-1)^{\delta_{ij+1}}) / L_e^2 \left\{ \int_{\Omega^e} \alpha_1 N_{e_1} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \alpha_2 N_{e_2} d\Omega^e \right\} \quad (3.34)$$

La matrice  $A_{ij}$  est tridiagonale et symétrique

### Intégrale $I_2$ :

Les dérivées par rapport au temps doivent être déterminés indépendamment du processus d'orthogonalisation étant donné que *la méthode de Galerkin* a été appliquée à un instant donné.

Afin d'assurer une meilleure stabilité de la solution numérique, nous définirons les valeurs nodales des dérivées par rapport au temps  $(\partial U_i / \partial t)$  comme des moyennes pondérées de  $(\partial U / \partial T)$  sur le domaine entier soit :

$$(\partial U_i / \partial t) = \int_{\Omega} \rho (\partial U / \partial t) N_i d\Omega / \int_{\Omega} \rho N_i d\Omega \quad (3.35)$$

L'intégrale " $I_2$ " s'écrit, en admettant une variation linéaire de " $\rho$ " sur l'élément "e"

$$I_2 = \int_{\Omega} \rho (\partial U / \partial t) N_i d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} \rho_m \dot{U}_j N_m N_i d\Omega^e = C_{ij} \dot{U}_j \quad (3.36)$$

$$\text{avec } C_{ij} = \sum_e \int_{\Omega^e} \rho_m N_m N_i d\Omega^e \quad (3.37)$$

Etant donné que  $C_{ij}$  est une matrice diagonale, on écrit sur l'élément e que :

$$C_{ii} = \sum_e \int_{\Omega^e} (\rho_1 N_{1^e} + \rho_2 N_{2^e}) N_i d\Omega^e \quad (3.37a)$$

D'après (3.23),  $C_{ii}$  devient :

$$C_{ii} = 1/6 [L_{e_1} (2\rho_1 + \rho_2) + L_{e_2} (2\rho_2 + \rho_1)] \delta_{ij} \quad (3.38)$$

Pour  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ , on obtiendra la matrice correspondante à l'intégrale :

$$\int_{\Omega} (\partial \omega / \partial t) N_i d\Omega$$

**Intégrales  $I_3$  :**

Ces intégrales représentent les flux de masse et de chaleur aux noeuds extrêmes (*1 et n*), elles s'expriment directement pour le noeud « 1 » à partir des conditions aux limites.

$$\Gamma_3 = -(E/\rho_0) = \phi_\omega \tag{3.39}$$

$$I''_3 = -H - LE = \phi_T \tag{3.40}$$

Elles se présentent donc, sous forme d'un vecteur dont seules la première et la dernière composantes sont nulles.

Les conditions aux limites pour le noeud "n" sont *les conditions de Dirichlet (température et humidité imposées)* qui seront directement intégrées dans l'écriture de la matrice globale.

Les relations d'intégrales précédentes transforment le système d'équation aux dérivées partielles initial en deux systèmes de n équations différentielles ordinaires quasi-linéaire .

Ces deux systèmes sont transformables en un système unique de 2n équations différentielles dans lequel les vecteurs des inconnues sont :

$$(T_1, \omega_1, T_2, \omega_2, \dots, T_n, \omega_n); \text{ soit : } A \dot{x} + Bx = C \tag{3.41}$$

Pour intégrer ce système, nous utiliserons un schéma implicite.

$$\dot{x} = dx/dt = (x^{m+1} - x^m) / \Delta t \tag{3.42}$$

$x^m$  : valeur de  $T$  ou  $\omega$  à l'instant  $m\Delta t$

$\Delta t$ : pas de temps (variable)

La linéarisation du système est obtenue en évaluant les coefficients à l'instant  $(m+\theta)\Delta t$  où

$\theta \in [0,1]$ , soit :

$$x^{m+\theta} = \theta x^{m+1} + (1-\theta)x^m \tag{3.43}$$

$\theta = 0 \rightarrow$  schéma explicite

$\theta = 1 \rightarrow$  schéma implicite

$\theta = 1/2 \rightarrow$  schéma implicite centré (Grank-Nicholson)

Le système (3.41) s'écrit alors :

$$((1/\Delta t) A^{m+\theta} + \theta (B^{m+\theta})) x^{m+1} = [(1/\Delta t) A^{m+\theta} - (1-\theta) (B^{m+\theta})]x^m + C^{m+\theta} \tag{3.44}$$

Le schéma de linéarisation utilisé fait intervenir les valeurs des coefficients  $a_m$ ;  $a_d$ ;  $a_{mv}$ ;  $a_{dv}$ ;  $\lambda^*$ ;  $(\delta C)^*$  à l'instant  $(m+\theta)\Delta t$ .



Ces valeurs sont calculées par l'expression .

$$a_m(\omega, t)^{m+\theta} = \theta a_m(\omega^{m+1}, T^{m+1}) + (1-\theta) a_m(\omega^m, T^m) \quad (3.45)$$

Finalement, le système à résoudre se présente sous la forme :

$$\mathcal{A}x = \mathcal{B}$$

$\mathcal{A}$  : matrice bande de largeur 7

Les coefficients de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  étant fonction de la solution, la résolution sera par *la méthode de Gauss* .

# 4

## QUATRIEME CHAPITRE

### Résultats et interprétation

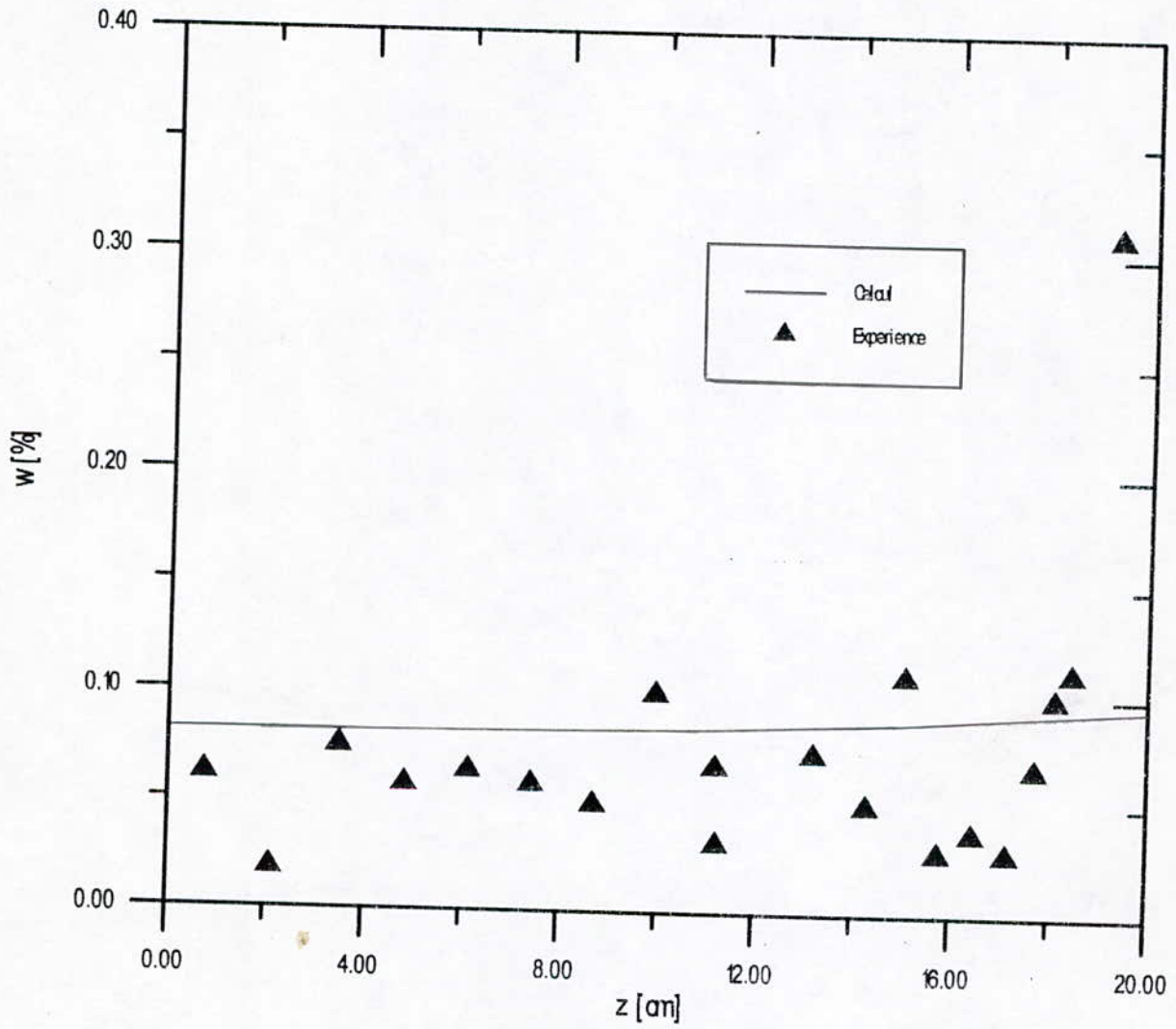


Fig .4 -1 : Profil Hydrique ( $\lambda * Cste$ )  $t=04$  jours  
Comparaison Calcul - Expérience



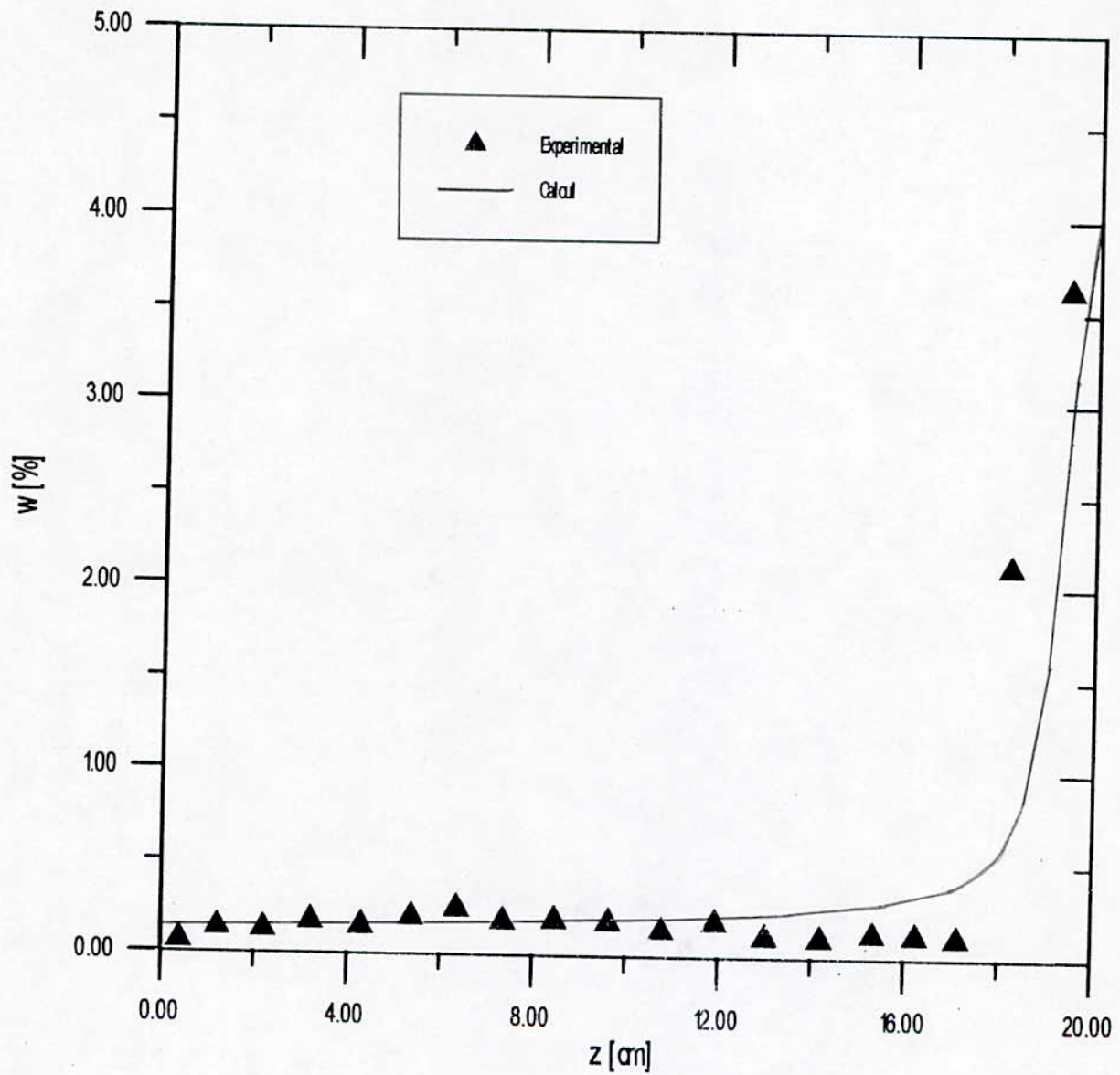


Fig. 4 - 2: Profil Hydrique ( $\lambda * C_{ste}$ )  $t = 30$  jours  
 Comparaison Calcul - Expérience.

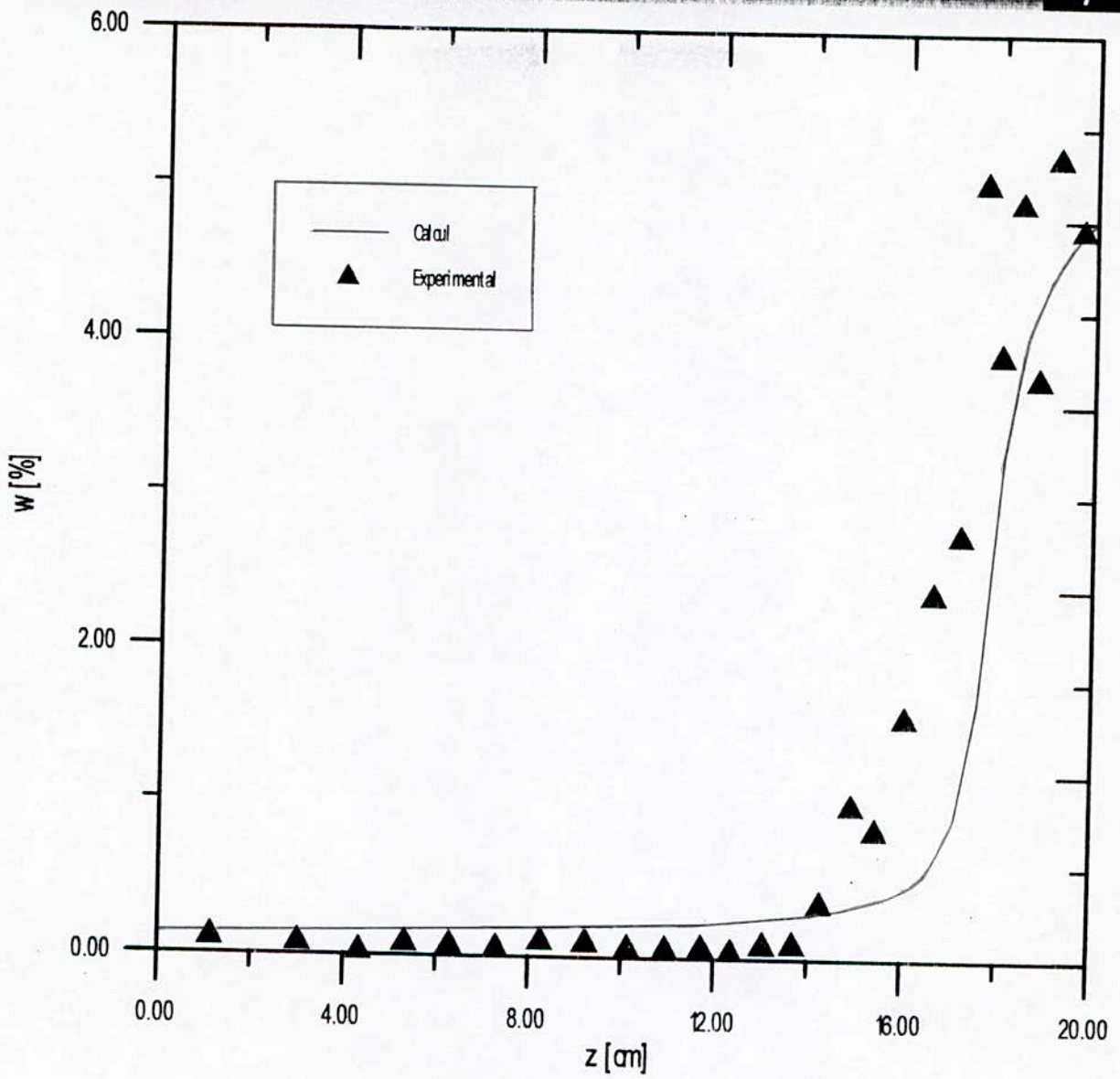


Fig 4 -3 : Profil Hydrique ( $\lambda * Cste$ )  $t=62$  jours  
Comparaison Calcul - Expérience



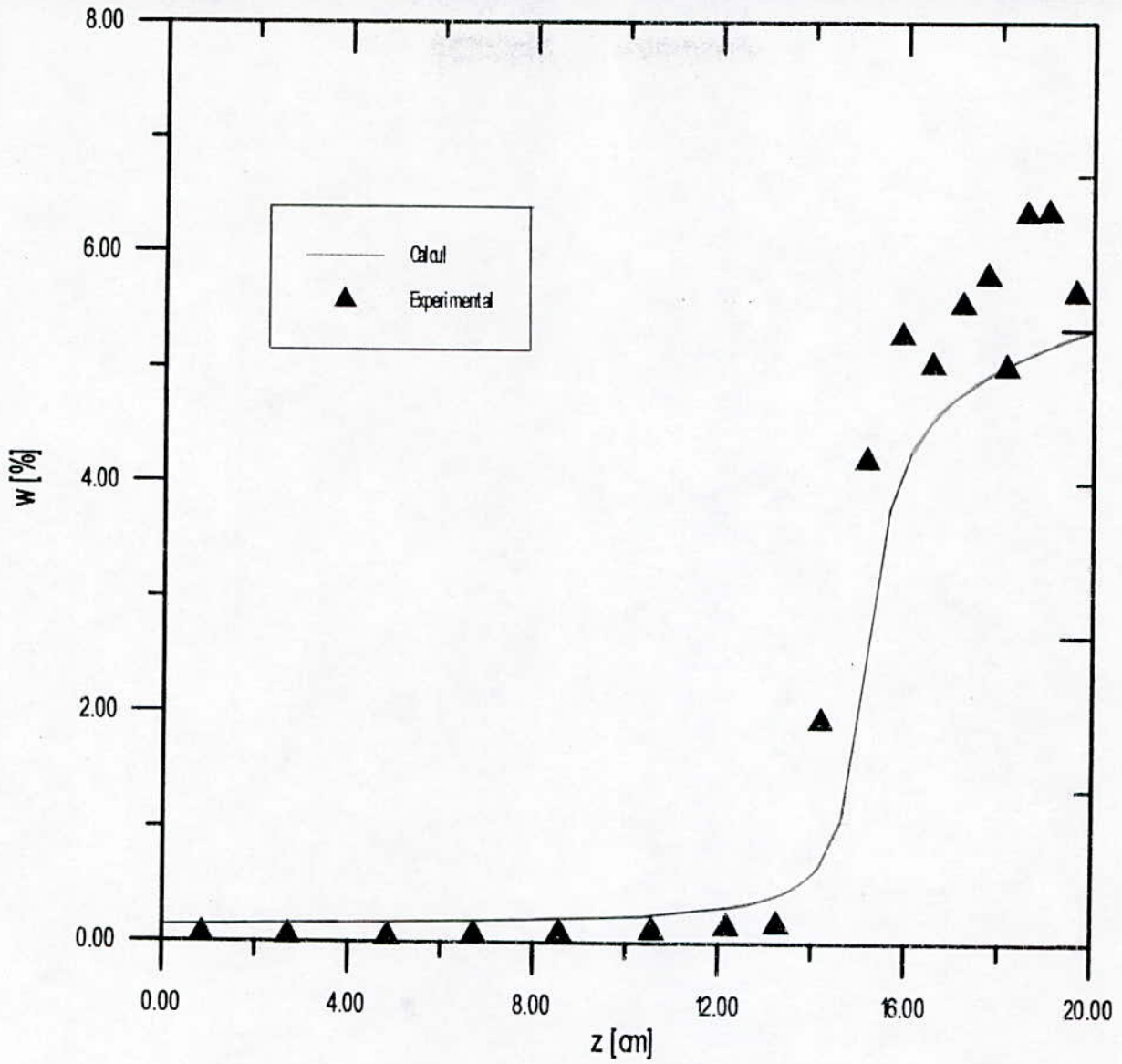


Fig 4 -4 : Profil Hydrique ( $\lambda * Cste$ )  $t=135$  jours  
 Comparaison Calcul - Expérience

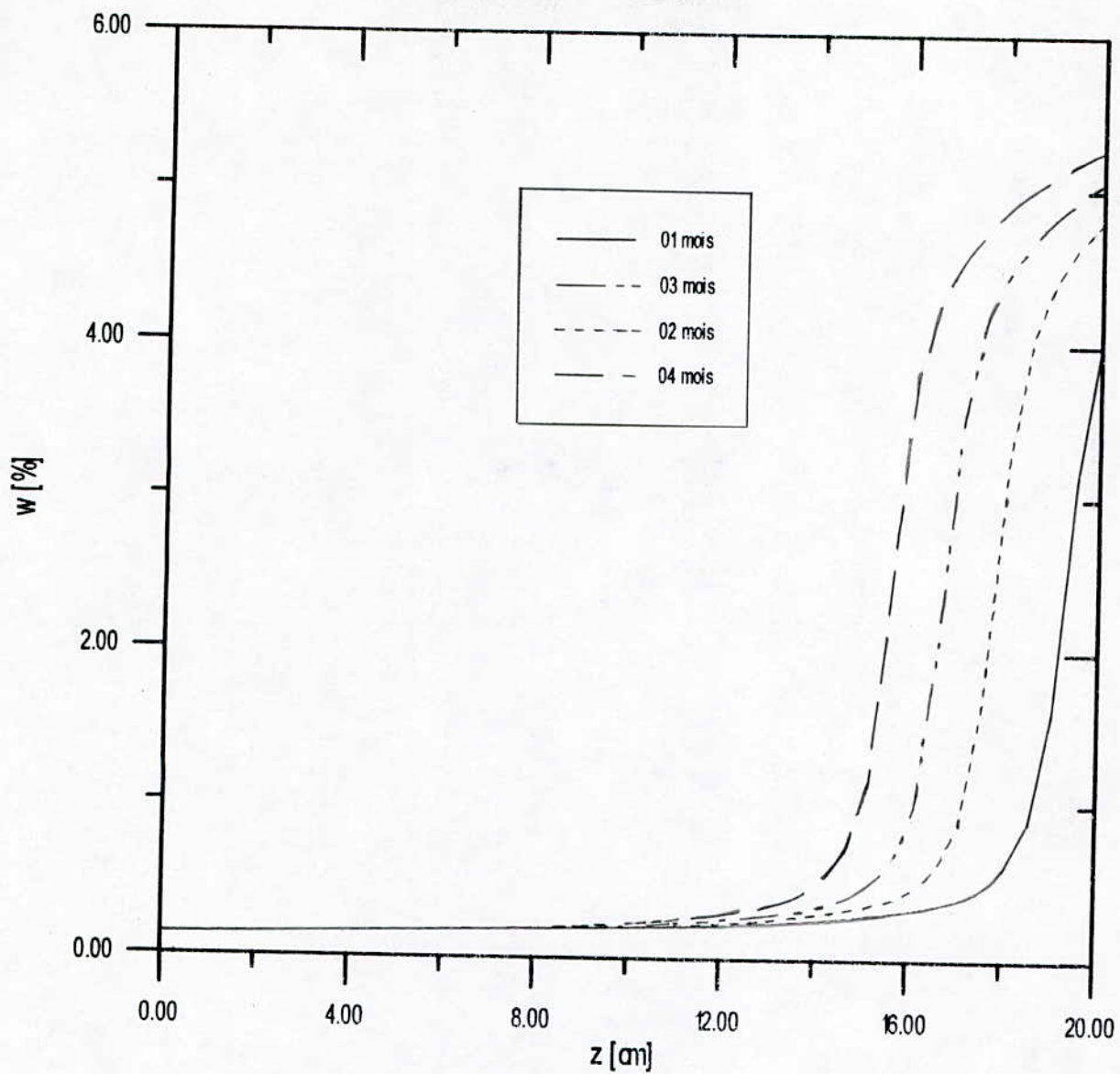


Fig 4 -5 : Profils Hydriques ( $\lambda^* Cste$ )  
 Evolution de  $\omega=f(t)$   $t=1 \div 6$  mois



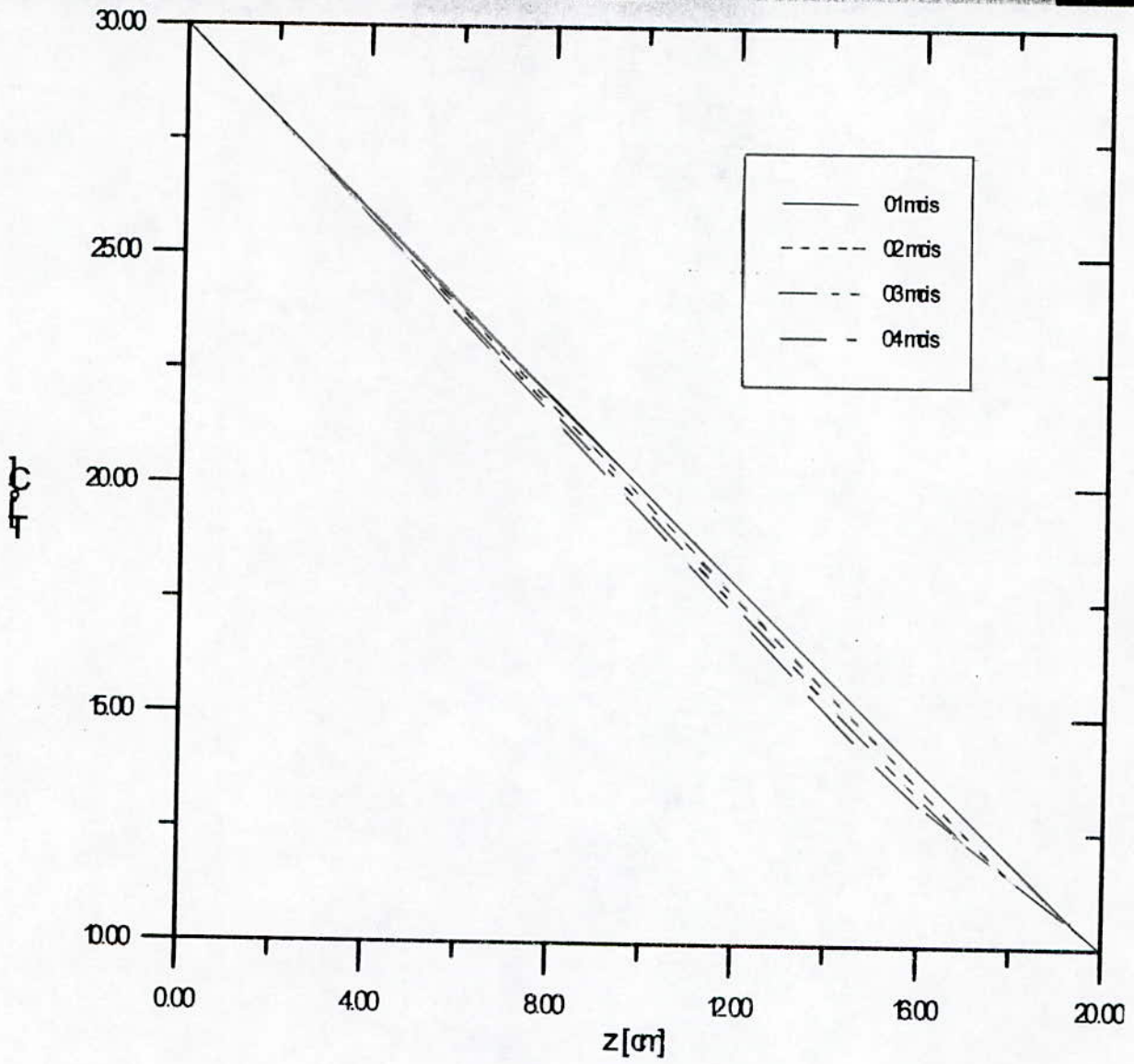
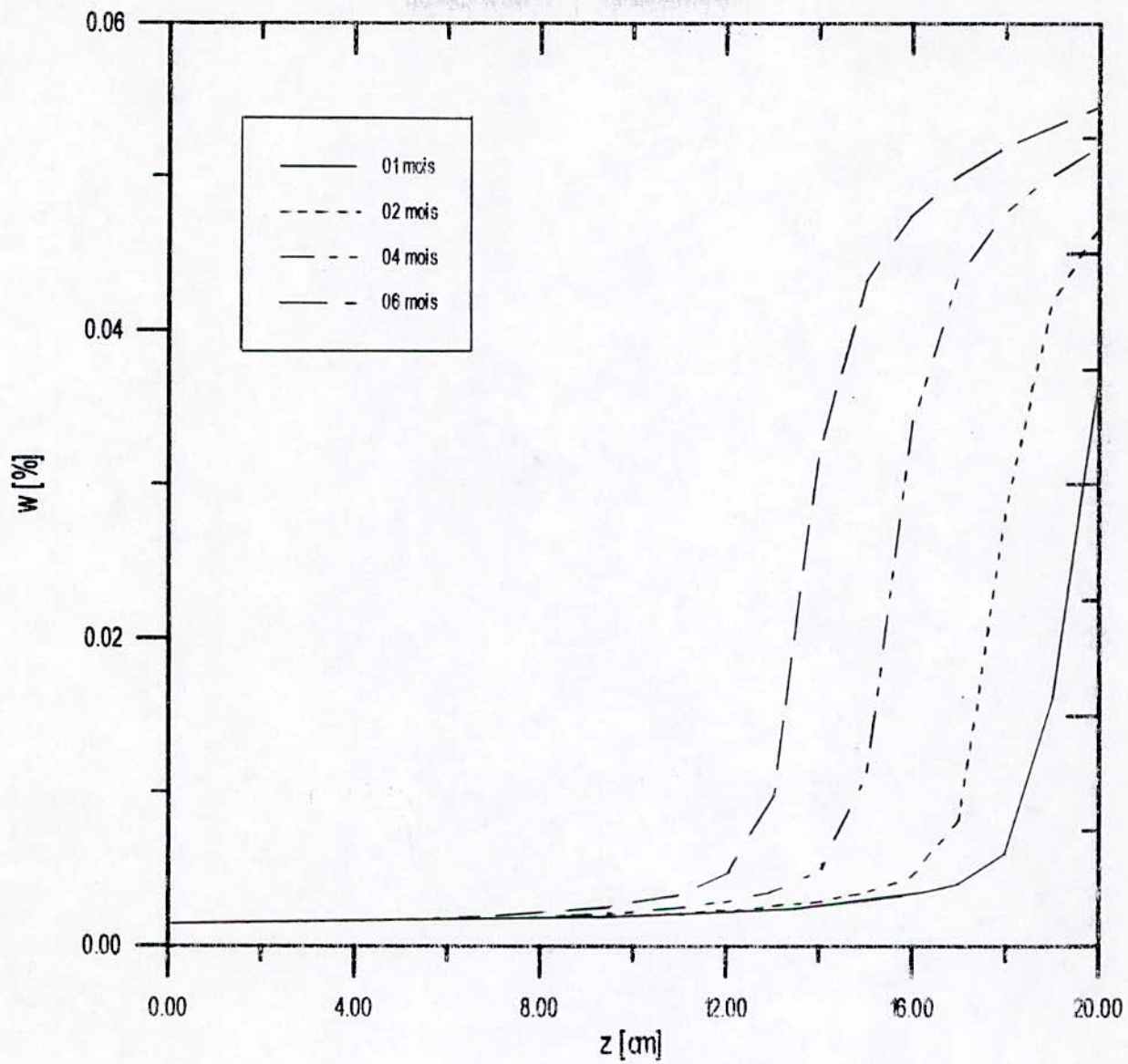


Fig 4 - 7 : Profils Thermiques ( $\lambda$ \* Cste)  
Evolution de  $T=f(z)$   $t=1 \div 6$  mois



**Fig 4 - 6 : Profils Hydriques ( $\lambda^*$  Variable)**  
*Evolution de  $w = f(t)$  ( $t=1 \div 6$  mois)*



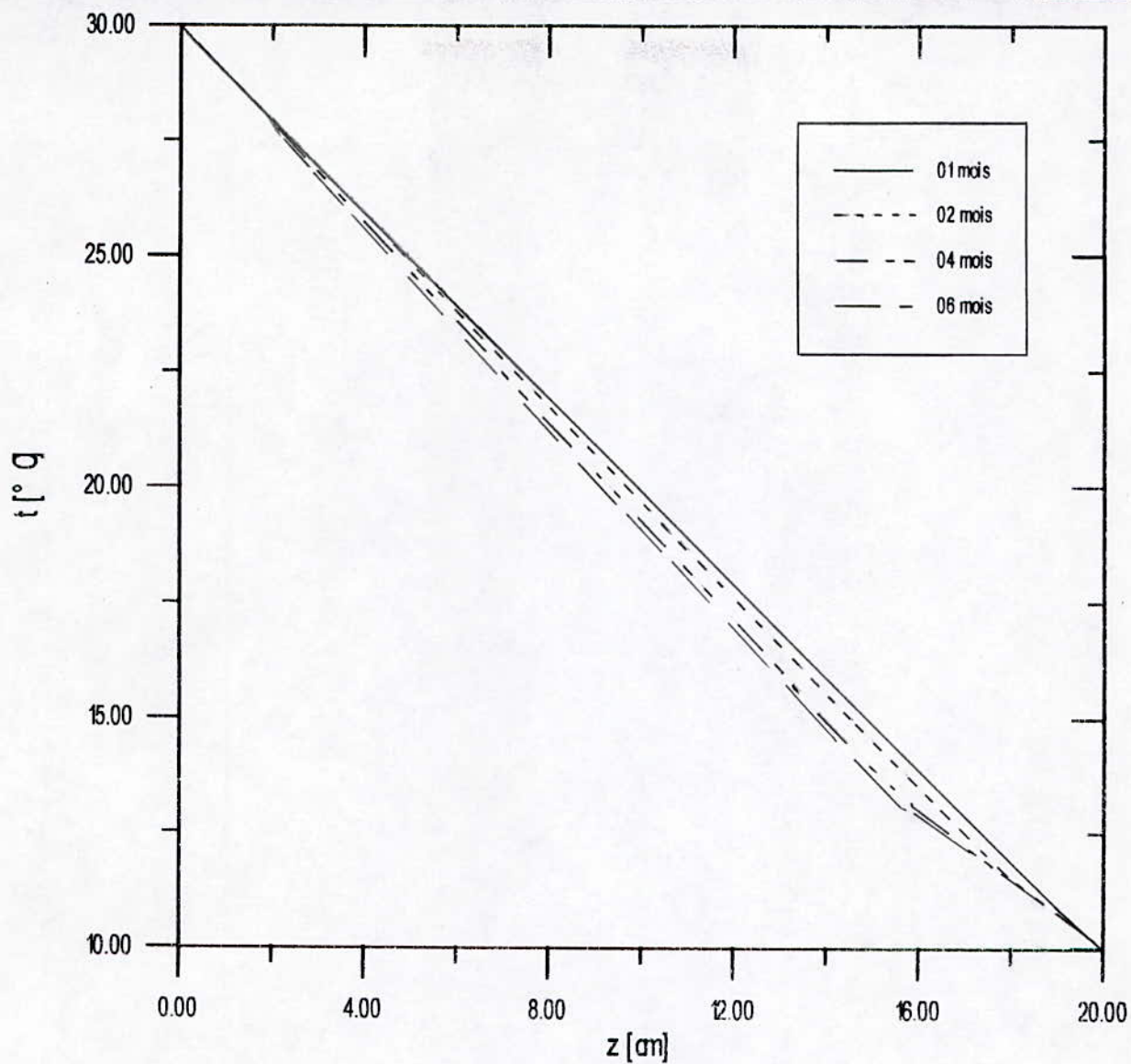


Fig 4 -8 : Profils Thermiques ( $\lambda^*$  Variable)  
 Evolution de  $T=f(z)$   $t=1 \div 6$  mois

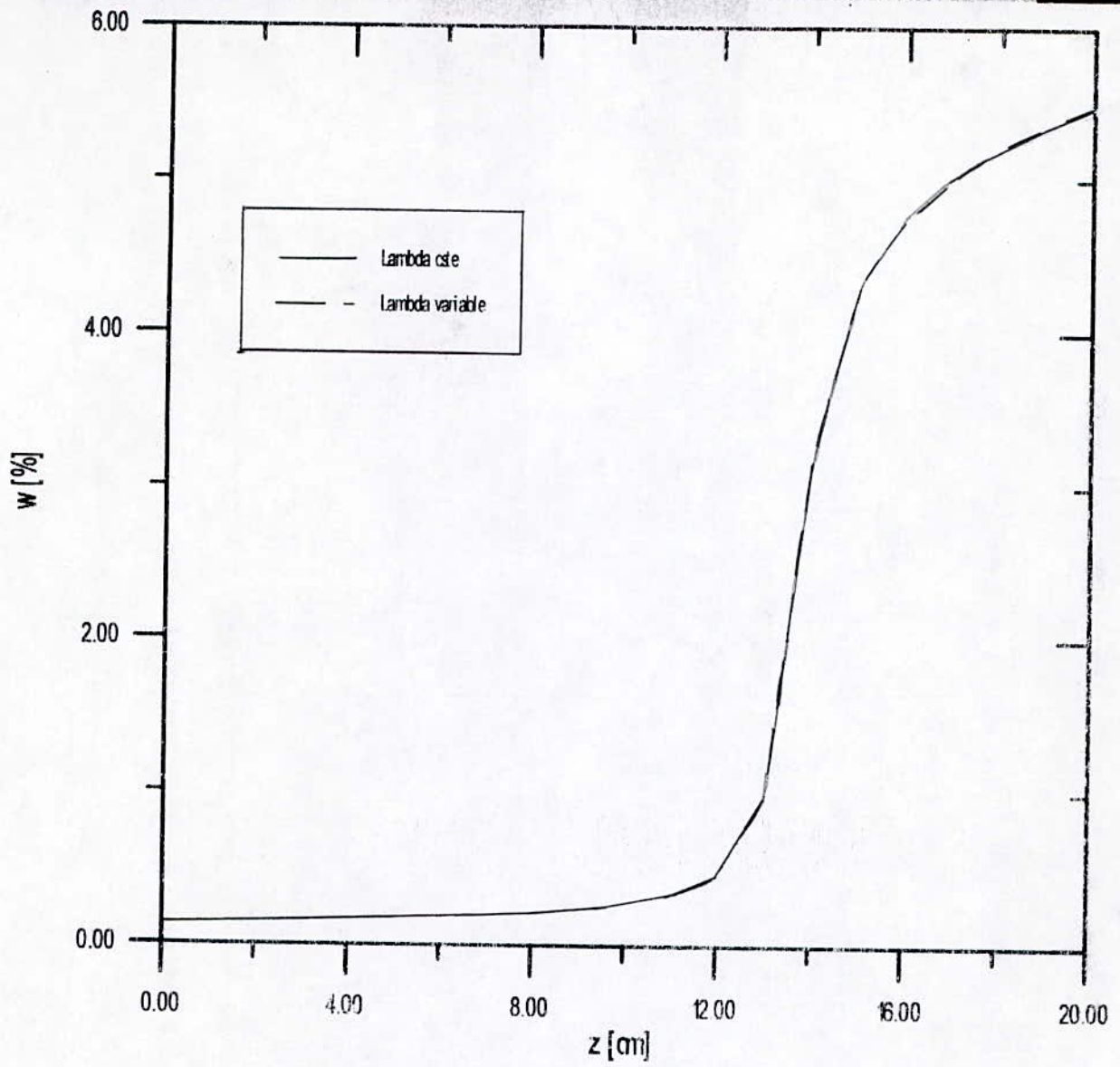


Fig 4 - 9 : Profils Hydriques  
Etude de sensibilité aux paramètres ( $\lambda^*$  Cste ,  $\lambda^*$  Variable)



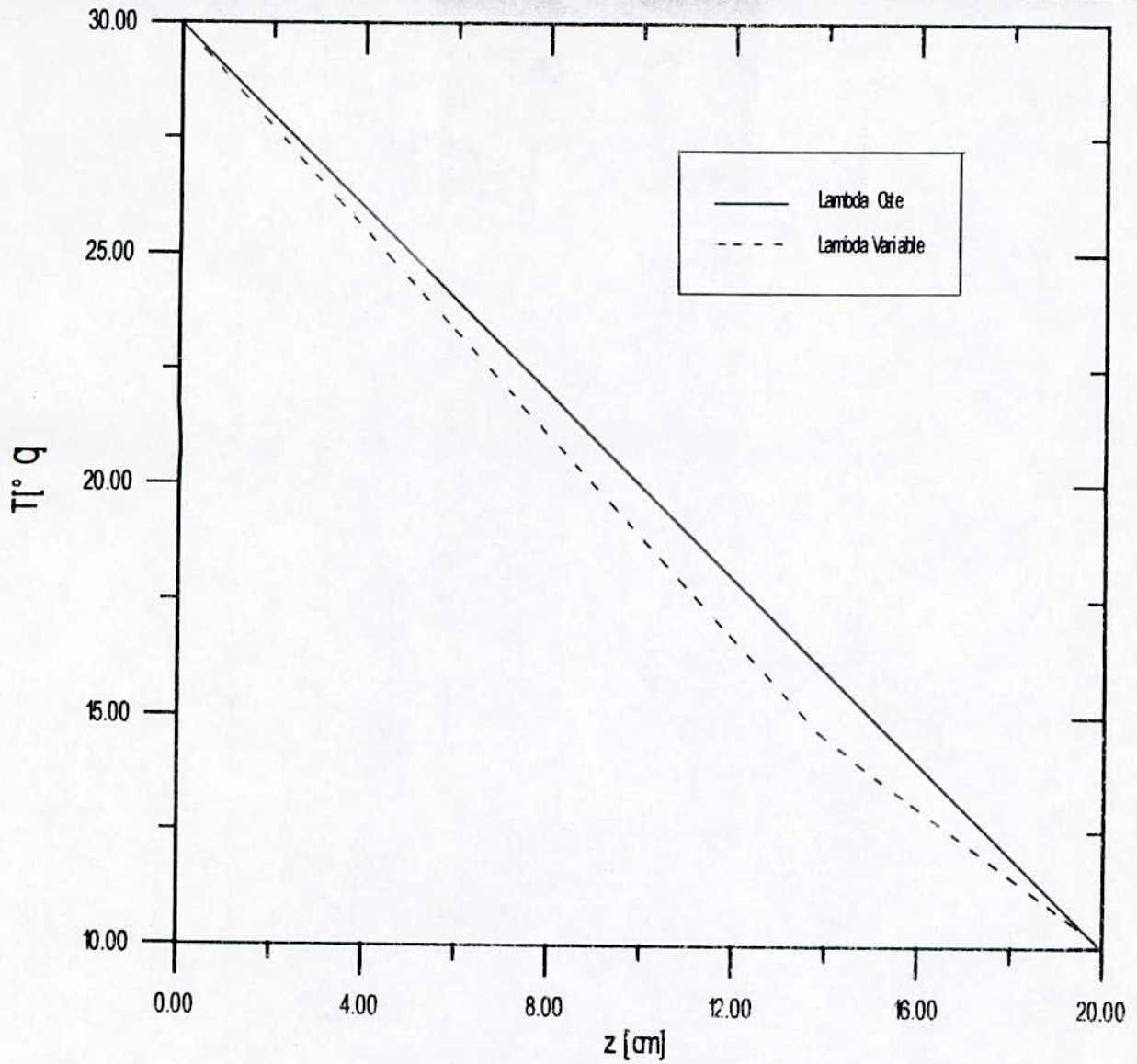
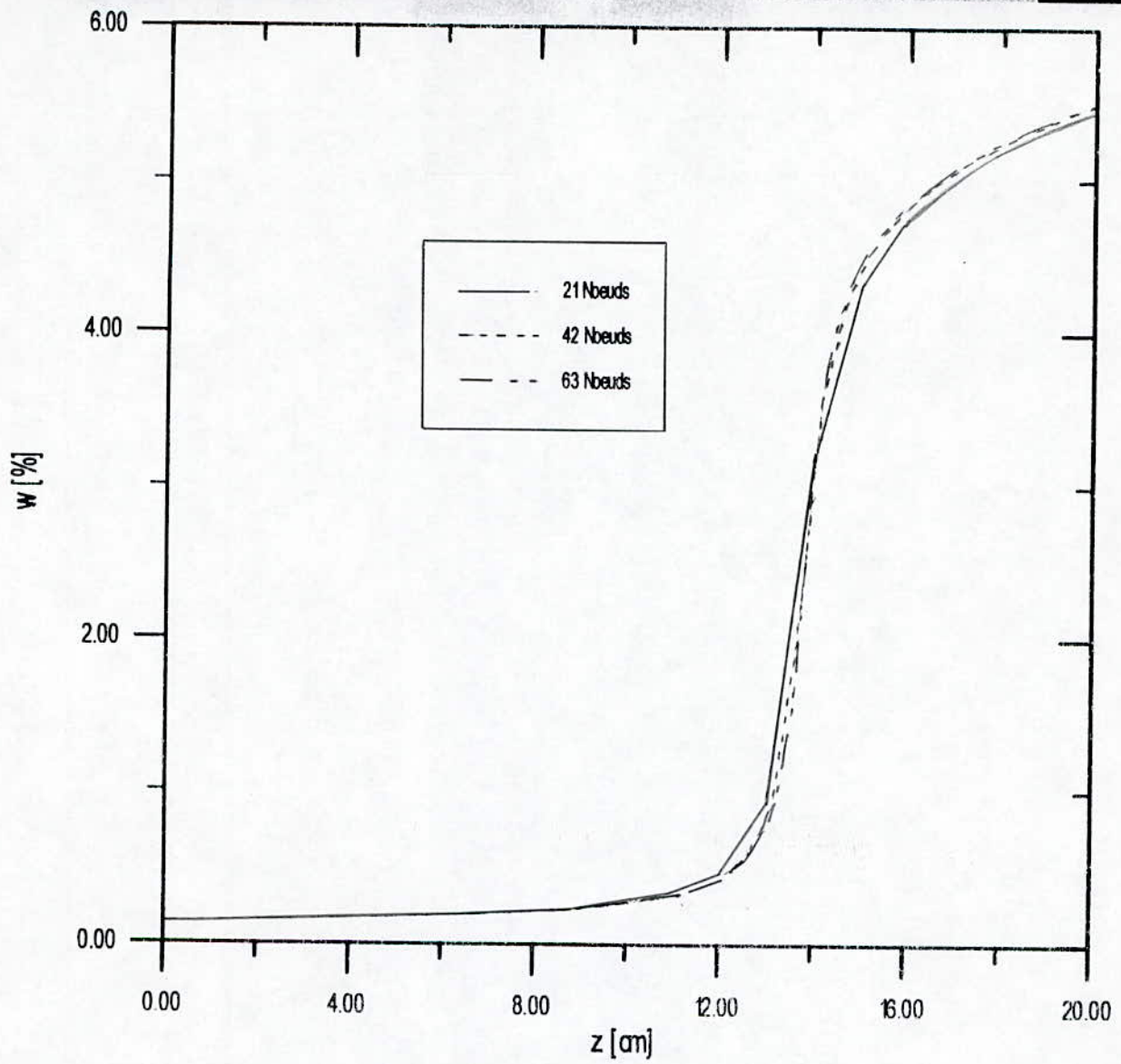
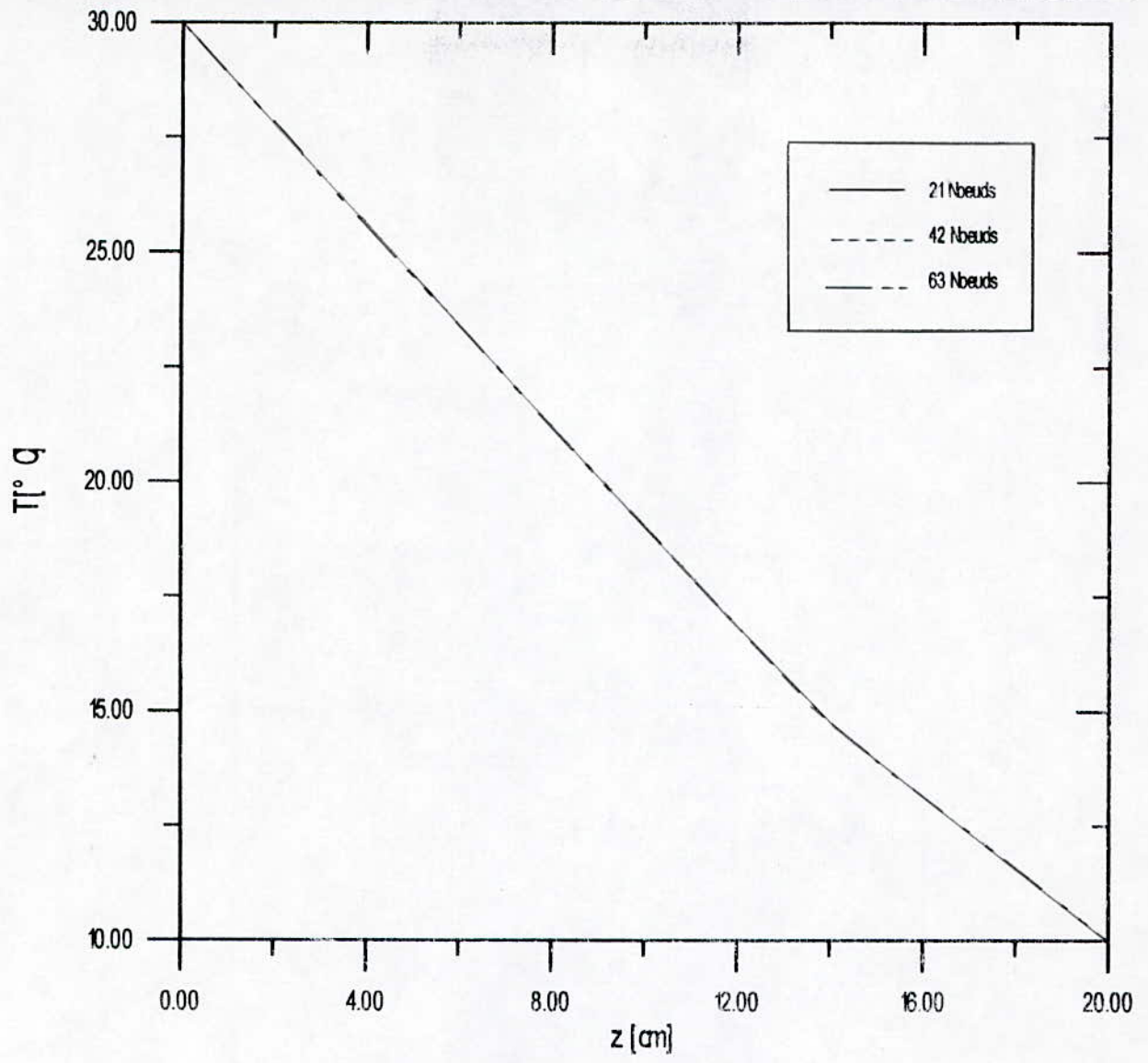


Fig 4 - 10 : Profils Thermiques  
 Etude de sensibilité aux paramètres ( $\lambda^*$  Cste ,  $\lambda^*$  Variable)



**Fig 4 - 11 : Profils Hydriques**  
*Etude de sensibilité aux paramètres*  
*(Influence du nombre de nœuds)*





**Fig 4 - 12 :** *Profils Thermiques*  
*Etude de sensibilité aux paramètres*  
*(Influence du nombre de nœuds)*

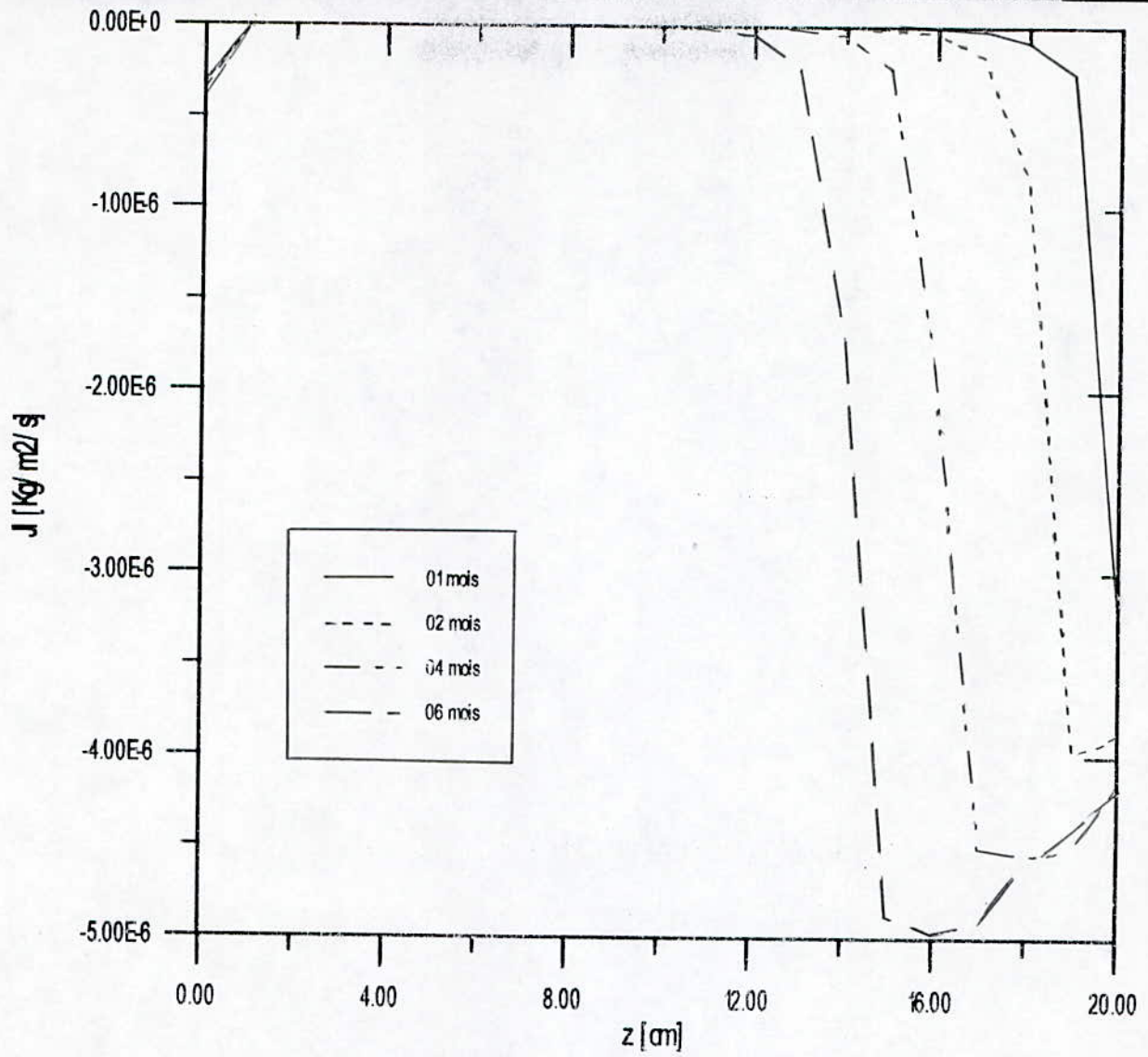


Fig 4 - 13 : Densité de flux de masse en phase liquide  
 Evolution de  $J_L=f(t)$  ( $t=1 \div 6$  mois)  
 (21 Noeuds ,  $\lambda^*$  Variable)



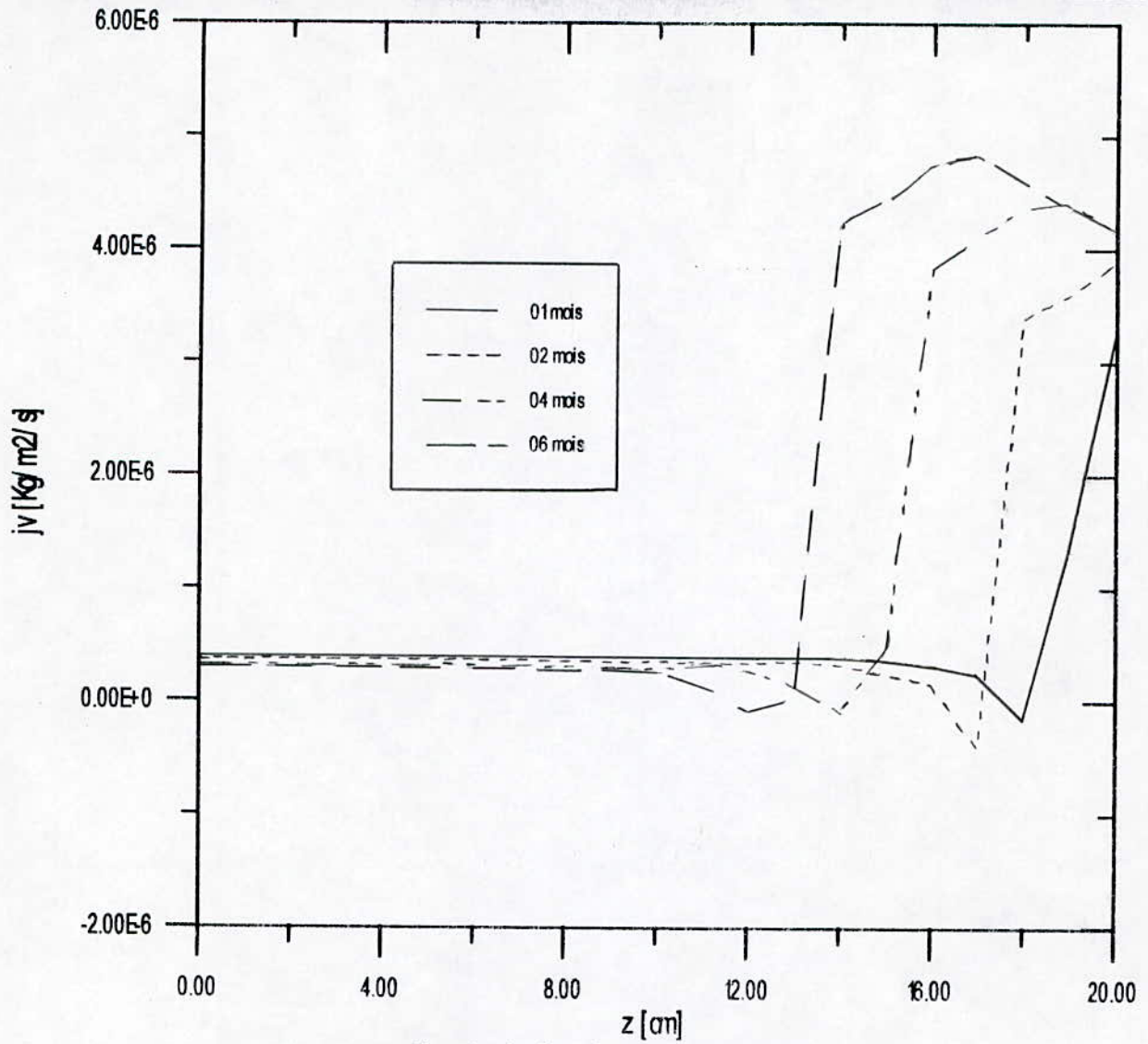


Fig 4 - 14 :Densité de flux de masse en phase vapeur  
 Evolution de  $J_V = f(t)$  ( $t=1 \div 6$  mois)  
 (21 Noeuds ,  $\lambda^*$  Variable)

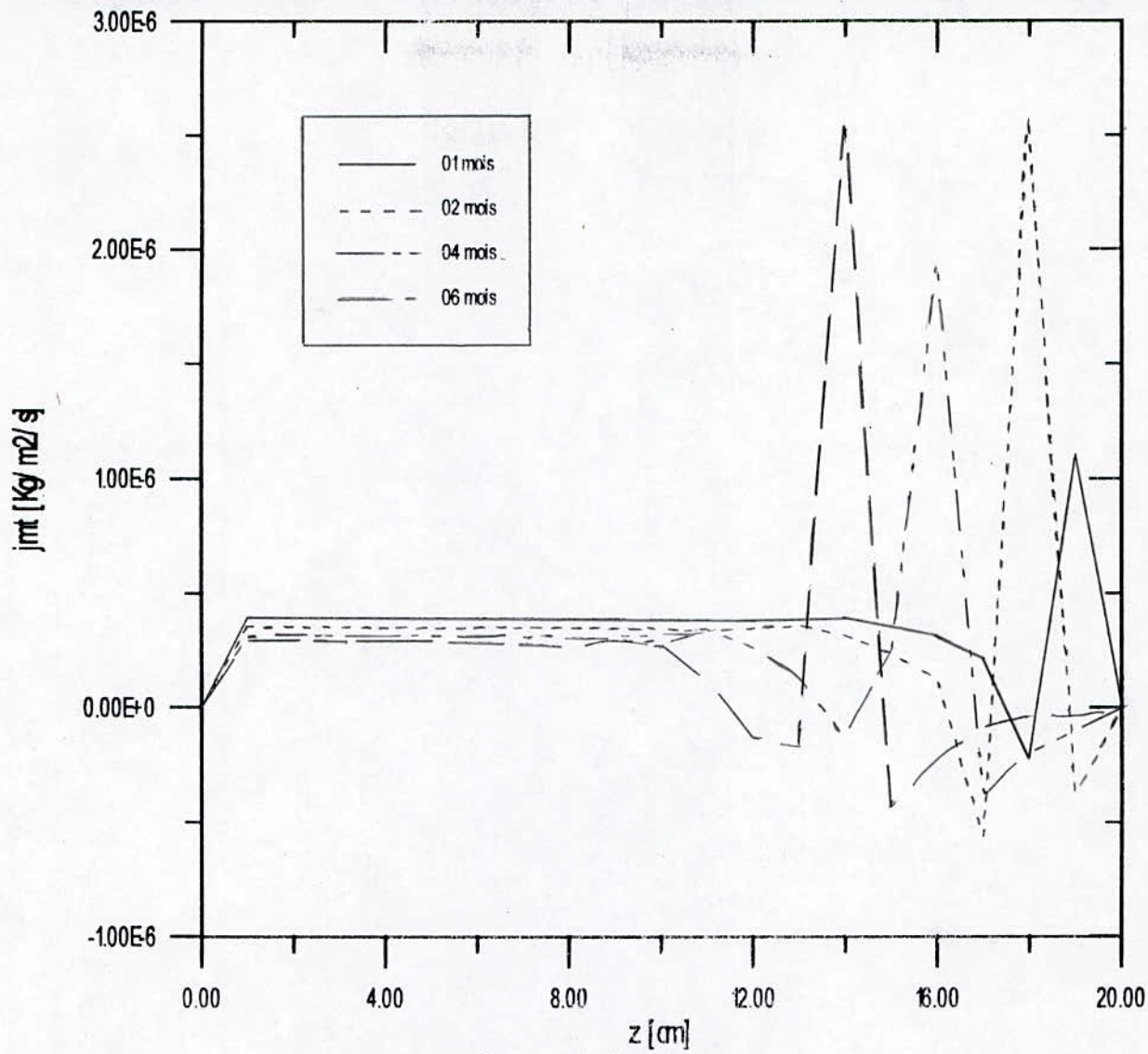


Fig 4 - 15 : Densité de flux de masse total  
Evolution de  $J_m = f(t)$  ( $t=1 \div 6$  mois)  
(21 Noeuds,  $\lambda^*$  Variable)



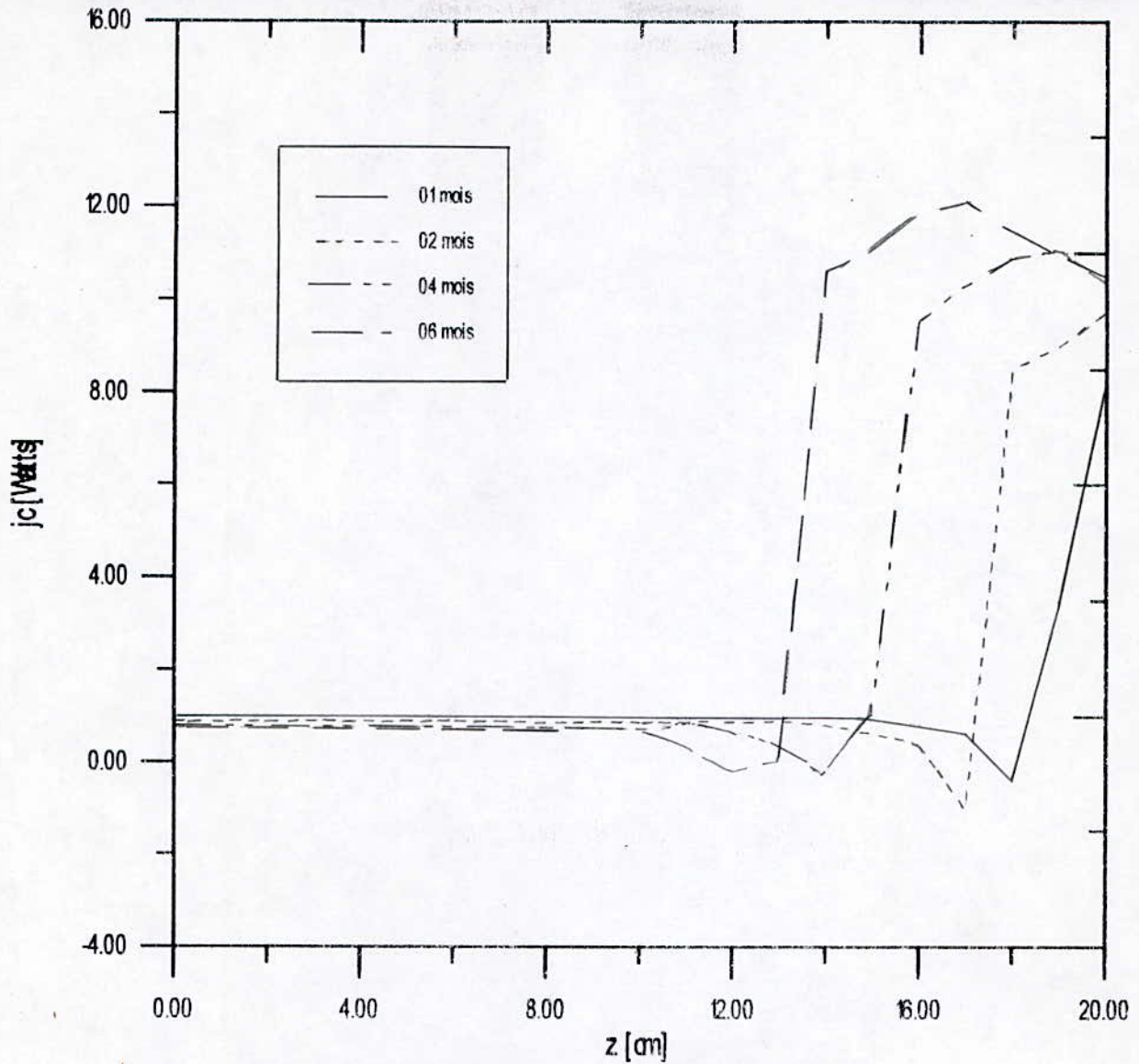


Fig 4 - 16 : Densité de flux de chaleur dû a la conduction  
 Evolution de  $J_C = f(t)$  ( $t=1 \div 6$  mois)  
 (21 Noeuds ,  $\lambda^*$  Variable)

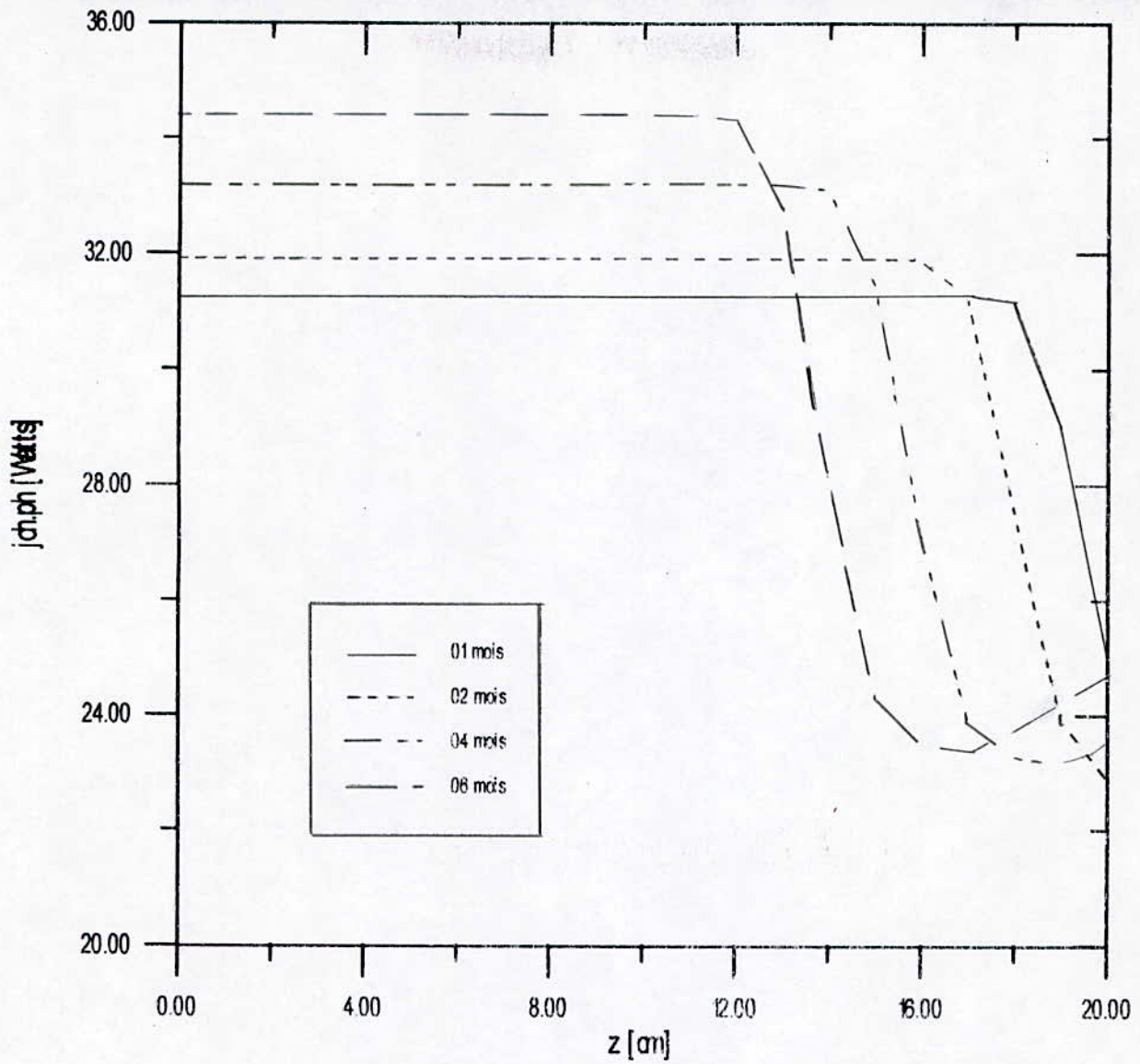
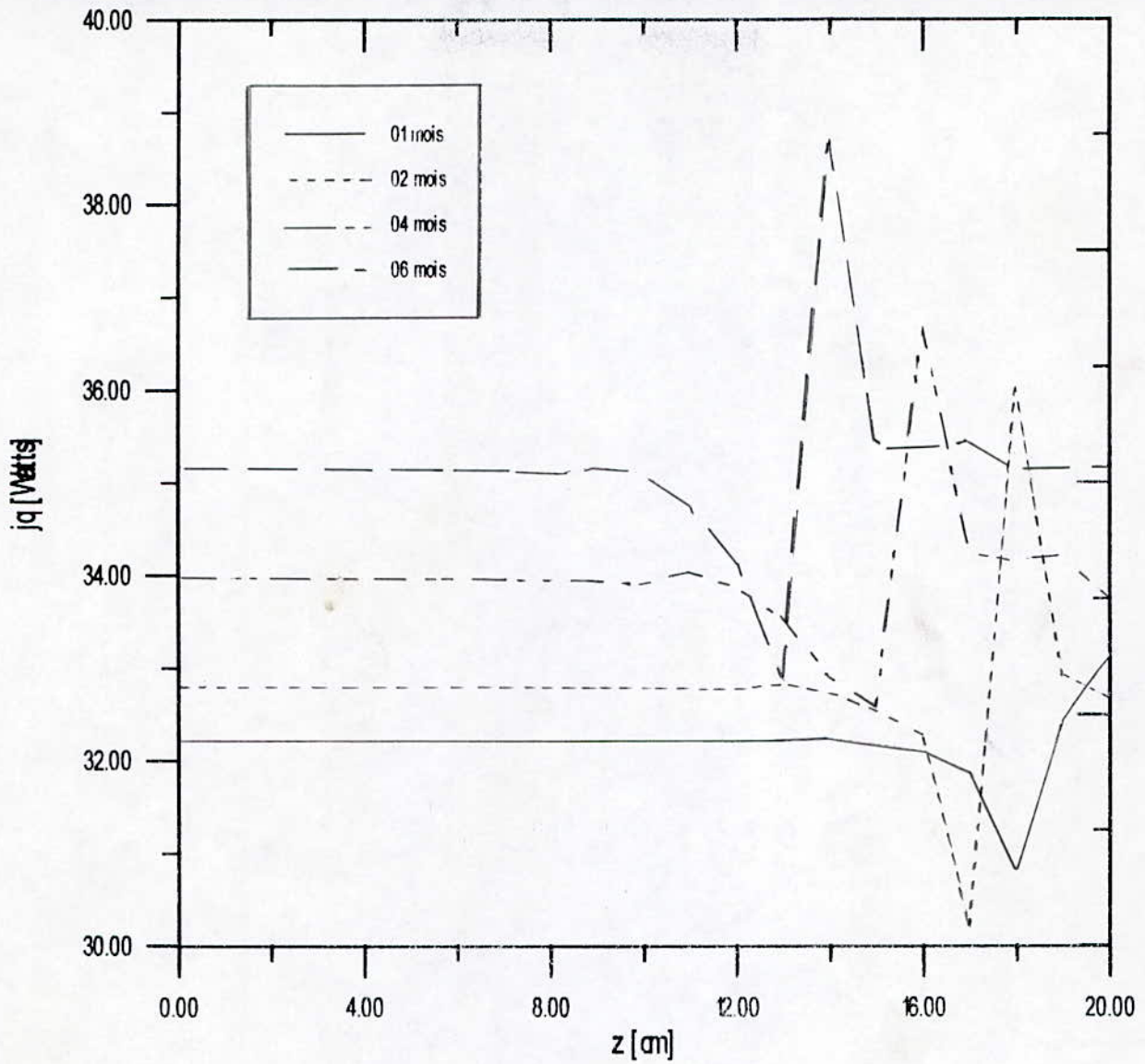


Fig 4 - 17 : Densité de flux de chaleur dû au changement de phase

$$J_{[Ch Ph]} = f(t) \quad (t=1 \div 6 \text{ mois})$$

(21 Noeuds,  $\lambda^*$  Variable)





**Fig 4 - 18 :** Densité de flux de chaleur total  
 Evolution de  $J_q = f(t)$  ( $t=1 \div 6$  mois)  
 (21 Noeuds ,  $\lambda^*$  Variable)

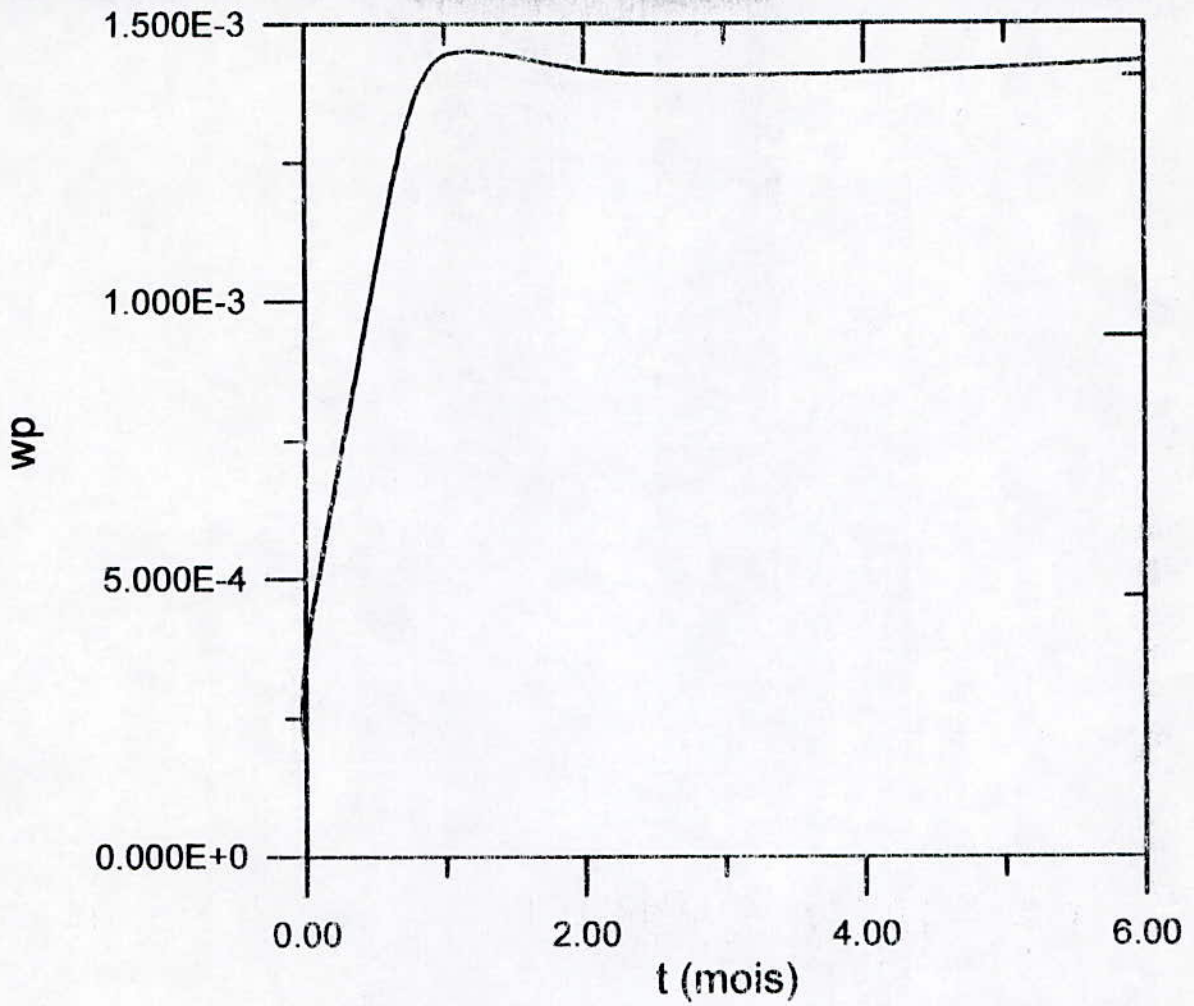


Fig 4 - 19 : Profil Hydrique  
 Evolution de  $\omega_t$  (A la paroi) en fonction du temps



**A** fin d'analyser les mécanismes physiques en structure poreuse , les distributions de teneur massiques en eau, de chaleur et de densité de flux de masse et de chaleur, ont été présentées et interprétées.

On complétera ces étapes par une étude de sensibilité aux paramètres, afin de mieux apprécier l'influence de certains termes du modèle mathématique proposé.

## 4.1 Présentation des résultats et interprétation

### 4.1.1 Profils hydriques

#### a Etude comparative :

Les résultats de comparaison entre expérience et calcul, pour les distributions d'humidité sont portés sur les figures (4.1) (4.2), (4.3) et (4.4).

On remarque effectivement , le caractère satisfaisant du modèle utilisé (Philip-Devries), pour décrire les phénomènes observés par expérience .

Nous n'oublierons pas de noter que des écarts au niveau de la valeur de la teneur en eau ; en  $Z=L=20$  cm, sont dus à la non prise en considération , de l'influence de la gravité , dans nos calculs , et dont l'effort est non négligeable lorsque la teneur massique en eau, dépasse un certain seuil (3 à 4%).

Nous dirons aussi , qu'à un temps très court (04 jours dans notre cas) ; le processus d'humidification ne se fait pas de manière homogène , et c'est pour cette raison , que le modèle ne paraît (pour ce temps là) assez descriptif.

#### b Evolution de $\omega=f(t)$ :

Les profils hydriques présentés par les figures (4.5) et (4.6) montrent respectivement, l'évolution de la zone humide en fonction de différents temps ( $t = 1$  à 6 mois).

Le processus d'humidification a tendance à s'accroître avec le temps, la zone sèche diminue, et la zone humide se déplacera de plus en plus, vers la gauche (voir figure).

### 4.1.2 Profils thermiques :

Les profils thermiques présentés sur les figures (4.7), (4.8) , montrent les distribution de température, à différents temps obtenus par calcul, ou l'on peut noter la présence :

de profils thermiques linéaires, pour les premiers temps (fig.4.7) et qui correspond à l'établissement du régime de conduction pur.

de profil thermique à faible changement de pente (existence d'une cassure), pour les derniers temps.

#### **4.1.3 Etude de sensibilité aux paramètres**

##### **a Conductivité thermique :**

###### **a.1 Profils hydriques :**

La figure (4.9) , montre que la variabilité de la conductivité thermique n'a aucune influence sur le profil hydrique (les deux graphes sont inchangés).

Il est donc préférable, de calculer en un temps plus court tout en ayant les mêmes résultats pour les profils hydriques.

###### **a.2 Profils thermiques**

La figure (4.10) , montre l'existence d'une cassure au niveau du profil thermique pour une conductivité thermique variable.

Nous pouvons en conclure, que  $\lambda^*$  , est un paramètre important à prendre en considération, lors de l'établissement des profils thermiques.

Nous noterons aussi, que la cassure sera plus importante lorsque les valeurs prises de  $\lambda^*$  , augmentent (dans notre cas 5 valeurs seulement)

##### **b Influence du nombre de noeuds**

###### **b .1 Profils hydriques :**

La figure (4.11), représentent les profils hydriques ; obtenus pour un temps bien défini , et pour un nombre de noeuds variable.

Aucun grand changement n'a été remarqué , et il sera judicieux de minimiser le temps de calcul, en prenant 21 noeuds seulement, tout en obtenant de bons résultats .

###### **b.2 Profil thermiques**

Comme précédemment , l'influence du nombre de noeuds est négligeable, pour les profils thermiques, ce que nous remarquons bien sur la figure (4.12)



#### 4.1.4 Densité de flux de masse et de chaleur

##### a Densité de flux de masse en phase liquide

La densité de flux de masse en phase liquide sont portés sur la figure (4.13)

On notera tout d'abord que la densité de flux de masse en phase liquide est toujours négative, vu que le flux positif est dirigé depuis la plaque froide ( $T=10^{\circ}\text{C}$ ) vers l'interface en ( $Z=0$ )

Cette densité de flux de masse est nulle dans la zone d'adsorption, puis croît, jusqu'à un maximum atteint dans la zone de condensation, sans oublier, bien sur qu'en début d'essai, ce flux est nul.

##### b Densité de flux en phase vapeur sont portés sur la figure (4.14).

On notera que le flux en phase vapeur est positif, et par conséquent dirigé de la phase d'entrée, vers la face froide imperméable.

Les profils de densités de flux de masse en phase vapeur sont linéaires aux premiers instants, puis des variations sont à remarquer dans la zone humide, ces variations résultent de l'évolution du gradient de saturation et de température, en même temps.

##### a.3 Densité du flux de masse totale

représenté sur la figure (4.15), elle donne la somme des deux densités précédentes (en phase vapeur et en phase liquide). Cette dernière est positive sur la face en contact avec l'air, et est nulle en  $Z=L=20$  cm.

Ceci est dû à l'influence de la succion capillaire et la condensation de vapeur, agissant sur le fluide condensé.

##### B Densité de flux de chaleur :

La densité de flux de chaleur est donnée, sur la figure (4.8), elle représente la contribution respective du changement de phase (figure 4.17) et de la conduction (figure 4.16).

On notera que le mode de transfert thermique prédominant est du type conductif.

## **CONCLUSION**

Le travail en cette thèse, concerne la diffusion d'air humide dans les milieux poreux, (*sec initialement*) avec condensation de vapeur.

La comparaison entre les résultats expérimentaux et la simulation numérique, nous permet de montrer :

- a) la bonne description des phénomènes de transport de chaleur et de masse, par le modèle de *Devries*.
- b) l'importance des mécanismes de transfert cités ci dessus sur la condensation, et son évolution à travers la structure poreuse.

Bien que l'effet de gravité, n'a pas été pris en compte dans nos calculs, il serait important, de le faire intervenir, surtout lorsque le milieu poreux est exposé à des teneurs en humidité plus grande.

On souhaite, par ailleurs, qu'une étude ultérieure pourra être faite par d'autres étudiants, s'intéressant, à ce domaine très vaste, tout en ajoutant d'autres paramètres, pouvant améliorer de mieux en mieux les résultats



## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] *Bear ; J (1972)*  
Dynamics of fluids in porous media,  
American Elsevier Publishing Company
- [2] *Bear ; J (1979)*  
Hydraulics of ground water ; mac graw hill
- [3] *Bories ;S (1985)*  
Fragment de description de la physique des transferts thermiques dans les sous sols  
*la houille blanche*; pp . 211-219
- [4] *Bories ;S (1995)*  
Transfert de chaleur dans les milieux poreux  
Traité de l'ingénieur , Traite génie énergétique ; pp.5-31
- [5] *Benabderrahmane (DJ), Ait Sidhoum (K) (1996)*  
Analyse des aspects massiques et thermiques dans les milieux poreux, par une étude de  
sensibilité aux paramètres ;  
projet de fin d'études, E.N.P, Alger
- [6] *Devries, DA (1987).*  
The theory of heat and moisture transfert in porous media revisited Int. J.  
Heat and Mass transfert. Vol 30, n°7, pp : 1343-1350
- [7] *Dhatt, G. et Touzout, G. (1984)*  
Une présentation de la méthode des éléments finis,  
deuxième édition. Collection université de Campiegne, Edition Malainc
- [8] *Horpeurt, A, (1979)*  
Mécanique des fluides en milieux poreux, critiques et recherches  
Edition Eyrolles

- [1] Bear ; J (1972) Dynamics of fluids in porous media, American Elsevier Publishing Company
- [2] Bear ; J (1979) Hydraulics of ground water ; mac graw hill
- [3] Bories ;S (1985) Fragment de description de la physique des transferts thermiques dans les sous sols  
la houille blanche; pp . 211-219
- [4] Bories ;S (1995) Transfert de chaleur dans les milieux poreux  
Technique de l'ingénieur , Traité génie énergétique ; pp.5-31
- [5] Benabderrahmane (DJ), Ait Sidhoum (K) (1996)  
Analyse des aspects massiques et thermiques dans les milieux poreux, par une étude de sensibilité aux paramètres ; projet de fin d'études, E.N.P, Alger
- [6] Devries, DA (1987). The theory of heat and moisture transfert in porous media revisited  
Int. J. Heat and Mass transfert. Vol 30, n°7, pp : 1343-1350
- [7] Dhatt, G. et Touzout, G. (1984) Une présentation de la méthode des éléments finis, deuxième édition. Collection université de Campiegne, Edition Malaine
- [8] Houpeurt, A, (1979) Mécanique des fluides en milieux poreux, critiques et recherches  
Edition Eyrolles
- [9] I.F.P, (1972). Groupe d'étude sur les milieux poreux . Transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux non-saturés ; pp . 4-54
- [10] Larbi .S, Belhaneche . H ,Mitiche E.H  
Quelques aspects de la physique des transferts thermiques dans les milieux poreux ;  
Communication [BECHAR] , pp .1-8
- [11] Madjoudj, N. (1995) Analyse mathématique des processus de diffusion d'air humide dans les milieux poreux . Application a la thermique du bâtiment . Projet de fin d'étude ,ENP d'Alger
- [12] Mitiche, E.H . (1997) Etude fondamentale d'un phénomène de condensation par humidification en milieu poreux . Thèse Magister , C.U. Médéa
- [13] Slimani, B.(1995) Modélisation mathématique des mécanismes de transferts en milieu poreux Application au processus de condensation. Projet de fin d'étude, ENP d'Alger.
- [14] Whitaker, S. (1977) Simulation heat , mass and moisture transfer in porous media .A theory of drying in porous media . Adv . heat transfer , pp . 119-200



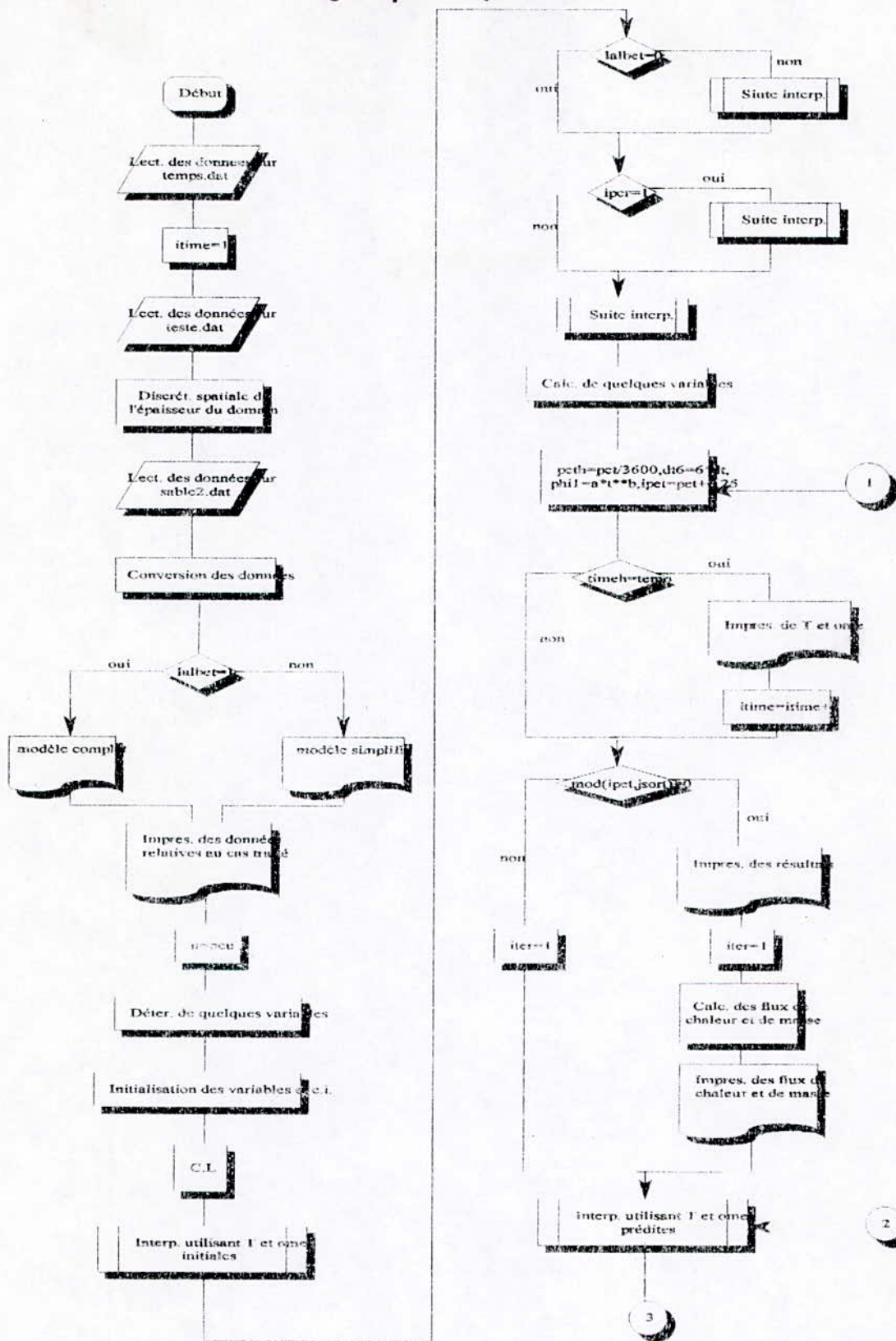
## Erratum

Page	Erreur	Correction
02	Hypothèse	Hypothèses
03	Profils dynamiques	Profils Hydrauliques
06	t	T
07	C	CD
14	$p_{vs} = p_{vs}(p, t)$	$(p_{vs})_{p, T}$
20	à partir de (4)	à partir de (2-1)
21	Sur l'équation (3)	Sur l'équation (2-7)
21	$\vec{v}_{di} = \vec{v}_i - v$	$\vec{v}_{di} = \vec{v}_i - v$
39	$\partial \omega / \partial t$ (3.1)	$\partial T / \partial t$ (3.1)
40	$\partial \omega / \partial T$ (3.8)	$\partial \omega / \partial t$ (3.8)
40	$\partial \omega / \partial T$ (3.8)	$\partial T / \partial t$ (3.8)
41	Couplés	Couplées
46	$\partial / \partial Z$ (3.25)	$\partial \omega / \partial Z$ (3.25)
57	Fig (4-6) : w [%]	Fig (4-6) : w
70	Effort	Effet
70	Distribution	Distributions
72	Fig (4-8)	Fig (4- 18)
72	b Densité de flux en phase vapeur sont portés sur la figure (4-14)	b- Densité de flux de masse en phase vapeur : Les densités de flux de masse en phase vapeur sont portées sur la figure (4-14)
72	On notera que le flux en phase vapeur	On notera que le flux de masse en phase vapeur
72	des variations sont a remarquer dans la zone humide	des variations sont a remarquer dans la zone humide (Saut, ca -racterisant le passage de la pha -se vapeur à la phase liquide)
72	en même temps .	en même temps ,avec $j_l$ supérieur à $j_v$

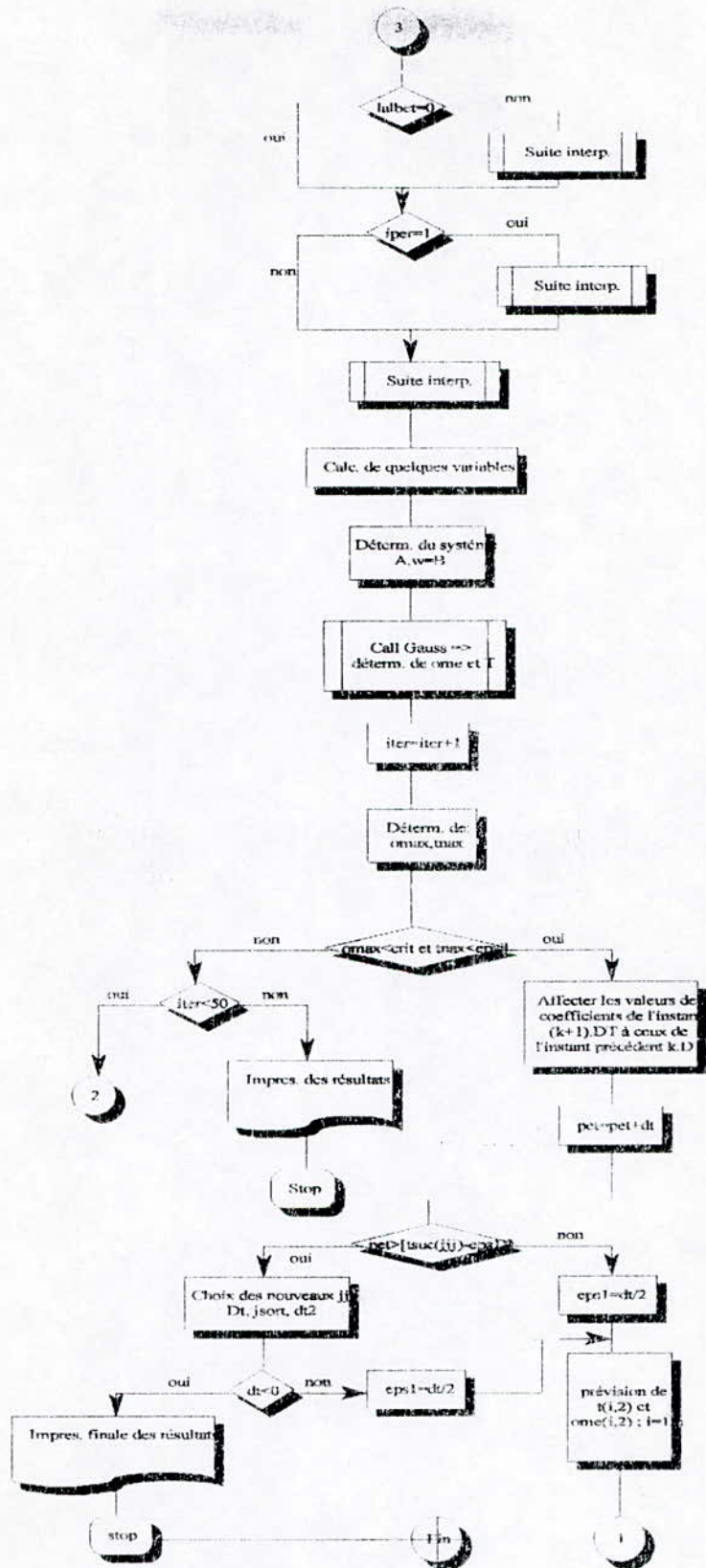
Bibliographie correspondante à chaque chapitre :

- Chapitre 1 : [1], [2], [4], [8], [9].  
 Chapitre 2 : [3], [6], [5], [11], [12].  
 Chapitre 3 : [5], [7], [10], [13], [14]  
 Chapitre 4 : [12], [13], [10]

# ORGANIGRAMME







## Distribution de l'humidité (Valeurs expérimentales)

<i>temps : 4 jours</i>		<i>temps : 62 jours</i>		<i>temps : 135 jours</i>	
Z(m)	$\omega$	Z(m)	$\omega$	Z(m)	$\omega$
0,7380 10 <sup>-02</sup>	0,6129 10 <sup>-03</sup>	0,1120 10 <sup>-01</sup>	0,1011 10 <sup>-02</sup>	0,8418 10 <sup>-02</sup>	0,544 10 <sup>-03</sup>
0,2100 10 <sup>-01</sup>	0,1813 10 <sup>-03</sup>	0,3014 10 <sup>-01</sup>	0,7307 10 <sup>-03</sup>	0,2702 10 <sup>-01</sup>	0,4500 10 <sup>-03</sup>
0,3479 10 <sup>-01</sup>	0,7485 10 <sup>-03</sup>	0,4337 10 <sup>-01</sup>	0,2065 10 <sup>-03</sup>	0,4855 10 <sup>-01</sup>	0,4042 10 <sup>-03</sup>
0,4826 10 <sup>-01</sup>	0,5731 10 <sup>-03</sup>	0,5324 10 <sup>-01</sup>	0,7732 10 <sup>-03</sup>	0,6715 10 <sup>-01</sup>	0,6304 10 <sup>-03</sup>
0,6125 10 <sup>-01</sup>	0,6395 10 <sup>-03</sup>	0,6288 10 <sup>-01</sup>	0,6471 10 <sup>-03</sup>	0,8566 10 <sup>-01</sup>	0,8161 10 <sup>-03</sup>
0,7418 10 <sup>-01</sup>	0,5799 10 <sup>-03</sup>	0,7295 10 <sup>-01</sup>	0,4701 10 <sup>-03</sup>	0,1056 10 <sup>+00</sup>	0,1048 10 <sup>-02</sup>
0,8692 10 <sup>-01</sup>	0,4917 10 <sup>-03</sup>	0,8249 10 <sup>-01</sup>	0,9593 10 <sup>-03</sup>	0,1217 10 <sup>+00</sup>	0,1414 10 <sup>-02</sup>
0,9946 10 <sup>-01</sup>	0,1003 10 <sup>-02</sup>	0,9226 10 <sup>-01</sup>	0,8966 10 <sup>-03</sup>	0,1325 10 <sup>+00</sup>	0,1636 10 <sup>-02</sup>
0,1118 10 <sup>+00</sup>	0,6716 10 <sup>-03</sup>	0,1013 10 <sup>+00</sup>	0,5666 10 <sup>-03</sup>	0,1417 10 <sup>+00</sup>	0,1929 10 <sup>-01</sup>
0,1222 10 <sup>+00</sup>	0,3148 10 <sup>-03</sup>	0,1095 10 <sup>+00</sup>	0,5344 10 <sup>-03</sup>	0,1514 10 <sup>+00</sup>	0,4196 10 <sup>-01</sup>
0,1319 10 <sup>+00</sup>	0,7300 10 <sup>-03</sup>	0,1172 10 <sup>+00</sup>	0,6683 10 <sup>-03</sup>	0,1589 10 <sup>+00</sup>	0,5279 10 <sup>-01</sup>
0,1427 10 <sup>+00</sup>	0,4956 10 <sup>-03</sup>	0,1235 10 <sup>+00</sup>	0,3850 10 <sup>-03</sup>	0,1655 10 <sup>+00</sup>	0,5022 10 <sup>-01</sup>
0,1504 10 <sup>+00</sup>	0,1091 10 <sup>-02</sup>	0,1304 10 <sup>+00</sup>	0,8621 10 <sup>-03</sup>	0,1719 10 <sup>+00</sup>	0,5542 10 <sup>-01</sup>
0,1575 10 <sup>+00</sup>	0,2853 10 <sup>-03</sup>	0,1368 10 <sup>+00</sup>	0,9034 10 <sup>-03</sup>	0,1773 10 <sup>+00</sup>	0,5791 10 <sup>-01</sup>
0,1644 10 <sup>+00</sup>	0,3735 10 <sup>-03</sup>	0,1425 10 <sup>+00</sup>	0,3521 10 <sup>-02</sup>	0,1814 10 <sup>+00</sup>	0,5006 10 <sup>-01</sup>
0,1715 10 <sup>+00</sup>	0,2833 10 <sup>-03</sup>	0,1489 10 <sup>+00</sup>	0,9827 10 <sup>-02</sup>	0,1857 10 <sup>+00</sup>	0,6325 10 <sup>-01</sup>
0,1771 10 <sup>+00</sup>	0,6729 10 <sup>-03</sup>	0,1541 10 <sup>+00</sup>	0,8229 10 <sup>-02</sup>	0,1904 10 <sup>+00</sup>	0,6340 10 <sup>-01</sup>
0,1811 10 <sup>+00</sup>	0,9961 10 <sup>-03</sup>	0,1601 10 <sup>+00</sup>	0,1555 10 <sup>-01</sup>	0,1963 10 <sup>+00</sup>	0,5646 10 <sup>-01</sup>
0,1844 10 <sup>+00</sup>	0,1116 10 <sup>-02</sup>	0,1660 10 <sup>+00</sup>	0,2358 10 <sup>-01</sup>		
0,1927 10 <sup>+00</sup>	0,3094 10 <sup>-02</sup>	0,1717 10 <sup>+00</sup>	0,2737 10 <sup>-01</sup>		
		0,1765 10 <sup>+00</sup>	0,5027 10 <sup>-01</sup>		
		0,1800 10 <sup>+00</sup>	0,3915 10 <sup>-01</sup>		
		0,1841 10 <sup>+00</sup>	0,4898 10 <sup>-01</sup>		
		0,1880 10 <sup>+00</sup>	0,3764 10 <sup>-01</sup>		
		0,1920 10 <sup>+00</sup>	0,5195 10 <sup>-01</sup>		
		0,1972 10 <sup>+00</sup>	0,4729 10 <sup>-01</sup>		



Distribution de l'humidité : (valeurs expérimentales)

<i>temps : 30 jours</i>	
Z(m)	$\omega$
0,3836 10 <sup>-02</sup>	0,5963 10 <sup>-03</sup>
0,1208 10 <sup>-01</sup>	0,1297 10 <sup>-02</sup>
0,2199 10 <sup>-01</sup>	0,1249 10 <sup>-02</sup>
0,3218 10 <sup>-01</sup>	0,1703 10 <sup>-02</sup>
0,4306 10 <sup>-01</sup>	0,1482 10 <sup>-02</sup>
0,5388 10 <sup>-01</sup>	0,1968 10 <sup>-02</sup>
0,6360 10 <sup>-01</sup>	0,2484 10 <sup>-02</sup>
0,7367 10 <sup>-01</sup>	0,1824 10 <sup>-02</sup>
0,8473 10 <sup>-01</sup>	0,1895 10 <sup>-02</sup>
0,9641 10 <sup>-01</sup>	0,1823 10 <sup>-02</sup>
0,1079 10 <sup>+00</sup>	0,1374 10 <sup>-02</sup>
0,1193 10 <sup>+00</sup>	0,1850 10 <sup>-02</sup>
0,1301 10 <sup>+00</sup>	0,1089 10 <sup>-02</sup>
0,1420 10 <sup>+00</sup>	0,1025 10 <sup>-02</sup>
0,1533 10 <sup>+00</sup>	0,1260 10 <sup>-02</sup>
0,1625 10 <sup>+00</sup>	0,1215 10 <sup>-02</sup>
0,1714 10 <sup>+00</sup>	0,1088 10 <sup>-02</sup>
0,1819 10 <sup>+00</sup>	0,1088 10 <sup>-01</sup>
0,1941 10 <sup>+00</sup>	0,3625 10 <sup>-01</sup>