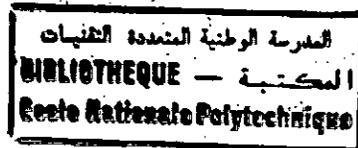


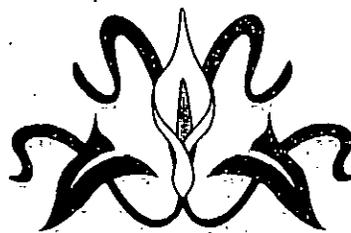
Ecole Nationale Polytechnique  
Département d'hydraulique



*Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état en hydraulique*

Thème

# **Rejet Thermique dans un canal prismatique**



Proposé par :

M<sup>lle</sup>. S. BENMAMAR  
M<sup>r</sup>. A. BILEK

Etudié par :

M<sup>lle</sup>. L. DRIDI  
M<sup>r</sup>. M. NACER BEY

Dirigé par :

M<sup>r</sup>. A. BILEK

## Dédicaces

- A mes très chers parents.
- A mes soeurs et mon frère : Samira, Nadjet et Salim.
- Et à tous ceux qui m'ont aidé.

*Je dédie ce modeste travail.*

*Leïla.*

*Je dédie ce modeste travail.*

- à mes très chers parents.
- à ma sœur et mes frères.
- à tous les amis. (es)

*Moussa.  
(Rachid)*

## Remerciements

*Nous adressons nos remerciements en tout premier lieu à M<sup>r</sup> A. BILEK, pour nous avoir orienté, et suivi tout au long de cette étude, ainsi qu'à M<sup>re</sup> S. BENMAMAR pour ces précieux conseils.*

*Nos remerciements vont également à tous ceux qui ont contribué à notre formation au département d'hydraulique.*

*Nous ne voulons pas terminer ces remerciements sans exprimer notre respectueuse gratitude à M<sup>re</sup> RAMLA, M<sup>re</sup> ABI, M<sup>r</sup> LAZIZI et M<sup>r</sup> AMIROUCHE pour la confiance qu'ils nous ont témoignée, et dont les précieux encouragements nous ont permis de compléter progressivement cette étude.*

*Nous remercions vivement l'ensemble des travailleurs de la bibliothèque centrale et du centre culturel universitaire d'Alger.*

*Que tous ceux qui ont accepté de nous aider dans l'élaboration de cette étude, trouve ici l'expression de nos reconnaissances, et le témoignage de l'amitié que les difficultés affrontées ensemble ont créées.*

*Enfin, nous tenons à remercier l'ensemble des membres du jury, de l'honneur qu'ils nous font en acceptant de se présenter à la soutenance.*

## Résumé :

Cette thèse présente une étude sur les rejets thermiques dans les canaux prismatiques à faible pente. Le système d'équations régissant le problème est déterminé à partir des principes de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Le schéma explicite aux différences finies de Gabutti a été introduit pour intégrer les équations décrivant les écoulements à surface libre bidimensionnels en régime non permanent, afin de définir le champ de hauteur et de vitesse.

Après l'obtention de ces résultats, on détermine le champ thermique en utilisant un schéma explicite décentré. Plusieurs cas de rejets sont étudiés.

## Summary :

This thesis presents a study of thermal jets in prismatic channels with a small slope. The system of equations governing the problem is obtained by using the principle of the conservation of the mass, the quantity of movement and the energy. Gabutti explicit finite difference scheme is introduced to integrate the equations describing the two dimensional unsteady free surface flows in order to define the depth and speed fields.

After we have obtained the results, we determine the thermal field by using explicit scheme. Many cases of jets are studies.

## ملخص

هذه المذكرة تعرض دراسة الرمي الحراري داخل القنوات المربعة الاشكال ذو الميل الضعيف. تم الحصول على جملة المعادلات المعبرة عن هذه المسألة بتطبيق مبدأ احتفاظ الكتلة، كمية الحركة و الطاقة. المخطط ذو الفروق المنتهية " Gabutti " استعمل لحل هذه المعادلات التي تمثل الجريان الغير مستقر، ذو السطح الحر، ثنائي البعد من أجل تعيين مجالات الارتفاع و السرعة.

بعد الحصول على هذه النتائج، نعين مجال الحرارة باستعمال مخطط لا مركزي. تدرس عدة حالات للرمي.

# **TABLE DES MATIERES**

## ***Première partie : Introduction générale.***

### **CHAPITRE I : Les rejets thermiques des centrales.**

I.1. INTRODUCTION.....	1
1.1.1. Production thermique de l'énergie électrique.....	1
1.1.2. Nécessité du refroidissement des centrales.....	1
1.1.3. Les circuits de refroidissement.....	2
1.1.3.a. Refroidissement en circuit ouvert.....	2
1.1.3.b. Refroidissement en circuit fermé.....	2
I.2. CONSÉQUENCES DE L'ÉCHAUFFEMENT DES EAUX DU MILEU RÉCEPTEUR AQUATIQUE.....	3
I.3. LES REJETS THERMIQUES ET LA SIMULATION.....	4

### **CHAPITRE II : Les écoulements dans les canaux à ciel ouvert.**

II.1. LES CANAUX.....	6
II.2. LES ÉCOULEMENTS DANS LES CANAUX.....	7
II.2.1. Classification des écoulement.....	7
II.2.1.a. Critère temps.....	7
II.2.1.b. Critère d'espace.....	8
II.2.1.c.....	9
II.2.2. Les régimes écoulement.....	9
II.2.2.a. L'effet de la gravité.....	9
II.2.2.b. Effet de la viscosité.....	10

### **CHAPITRE III : La transmission de chaleur.**

III.1. DÉFINITIONS.....	11
III.1.1. La conduction.....	11
III.1.2. Le rayonnement.....	11
III.1.3. La convection.....	11
III.2. TRANSMISSION DE CHALEUR PAR CONVECTION NATURELLE.....	12
III.2.1. Loi de transfert de chaleur par conduction.....	12
III.2.2. Loi de transfert de chaleur par convection.....	13

## Deuxième partie : La modélisation mathématique.

### CHAPITRE I : Les modèles mathématiques.

#### CHAPITRE II : Le modèle mathématique bidimensionnel horizontal hydrodynamique.

II.1. INTRODUCTION .....	15
II.2. LES HYPOTHÈSES DE BASE .....	15
II.3. ETABLISSEMENT DES ÉQUATIONS .....	16
II.3.1. Introduction .....	16
II.3.2. Equation de continuité .....	17
II.3.3. Equations dynamiques .....	18
II.3.3.a. Théorème de la quantité de mouvement .....	18
II.3.3.a.i. Variation de la quantité de mouvement .....	19
II.3.3.a.ii. Les forces extérieures .....	20
II.3.3.b. Simplification des équations dynamiques .....	23
II.4. FORMULATION MATRICIELLE DES ÉQUATIONS .....	24
II.5. CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX FRONTIÈRES .....	27

#### CHAPITRE III : Le modèle mathématique bidimensionnel horizontal de transfert de chaleur.

III.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME ET HYPOTHÈSES .....	30
III.2. MISE EN ÉQUATION .....	30
III.3. DÉVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR .....	32
III.4. CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX FRONTIÈRES .....	34

## Troisième partie : La modélisation numérique.

### CHAPITRE I : Les méthodes numériques en hydraulique.

I.1. INTRODUCTION .....	35
I.2. LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES .....	36
I.2.1. Principe .....	36
I.2.2. Les schémas explicites et les schémas implicites .....	38
I.2.2.a. Les méthodes explicites .....	38
I.2.2.b. Les méthodes implicites .....	38
I.2.2.c. Consistance, convergence et stabilité d'un schéma .....	38
I.2.2.c.i. La consistance .....	38
I.2.2.c.ii. La convergence .....	38
I.2.2.c.iii. La stabilité .....	38
I.3. LES DIFFÉRENTS SCHÉMAS NUMÉRIQUES .....	39
I.3.1. les schémas de Beam et Warming .....	39
I.3.2. Le schéma de Mac Cormack : .....	40
I.3.3. le schéma de Lambda .....	41
I.3.4. le schéma de Gabutti .....	41

**CHAPITRE II : Résolution du système hydrodynamique  
 - Application du schéma de Gabutti -**

II.1. DÉVELOPPEMENT DES MATRICES.....	44
II.2. PRÉSENTATION DES ÉTAPES DE CALCUL.....	45
II.3. CONDITION AUX LIMITES.....	46
II.4. STABILITÉ DU SCHÉMA.....	47

**CHAPITRE III : Résolution de l'équation de chaleur  
 - Schéma explicite décentré -**

III.1. PRÉSENTATION DU SCHÉMA.....	48
III.2. APPLICATION AU MODÈLE THERMIQUE.....	49

**CHAPITRE IV : Organigramme de calcul..... 50**

***Quatrième partie : Application et présentation des résultats.***

**CHAPITRE I : Le modèle hydrodynamique.**

**1<sup>ère</sup> application : Ecoulement subcritique dans un canal rectangulaire symétrique.**

A. Présentation de l'application.....	51
B. Résultats et analyses.....	52
C. Conclusion.....	54

**2<sup>ème</sup> application : Etude d'un jet constant à l'entrée du canal d'une largeur  $b = 0.1$  m.**

A. Présentation de l'application.....	55
B. Résultats et analyses.....	56
C. Conclusion.....	58

**CHAPITRE II : Le modèle thermique.**

**1<sup>ère</sup> application : Etude d'un rejet thermique constant.**

A. Présentation de l'application.....	59
B. Présentation des résultats et analyse.....	60
C. Conclusions.....	71

**CONCLUSION GENERALE**

**ANNEXE I**

**BIBLIOGRAPHIE**

## **INTRODUCTION**

---

*Cette étude est consacrée aux rejets thermiques dans les canaux à ciel ouvert. Elle a pour objectif la simulation de la tache thermique.*

*Elle est composée de quatre parties :*

*Dans la première partie, il est nécessaire de commencer par présenter quelques chapitres qui vont nous permettre de comprendre les autres parties.*

*Ces chapitres sont :*

- l'origine des rejets thermiques,*
- les phénomènes de transmission de chaleur,*
- les écoulements à surface libre.*

*Dans la seconde partie, nous présenterons la modélisation mathématique bidimensionnelle horizontale hydrodynamique et la modélisation thermique. Ces deux modélisations représentent respectivement le champ de hauteur-vitesse et de température.*

*Ces modèles sont déterminés à partir des principes de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie en s'appuyant sur des hypothèses simplificatrices.*

*Dans la troisième partie, nous aborderons la modélisation numérique qui permet de solutionner le problème en utilisant un algorithme de différences finies explicites. Le schéma de Gabutti pour le premier modèle et un schéma décentré pour le second.*

*Enfin, la dernière partie sera consacrée à des applications du modèle thermique pour différents cas de rejets constant :*

- rejet ponctuel,*
- rejet sur des largeurs différentes.*

*L'intérêt de cette étude est de positionner, une fois la répartition des températures connues, la prise d'eau par rapport au rejet afin d'éviter la recirculation des eaux chaudes dans les conduites de refroidissement et d'optimiser le rendement en circuit ouvert.*

*Première partie*

*Introduction générale*

# Chapitre I : Les rejets thermiques des centrales <sup>(3,4,8,22)</sup>

## I.1. Introduction.

L'accroissement des besoins énergétiques a poussé certains pays à construire des centrales thermiques de plus en plus puissantes. L'augmentation de la puissance des groupes électriques nécessite un moyen de refroidissement important puisque le flux de chaleur évacué à la source froide représente environ deux fois la puissance électrique fournie.

### I.1.1. Production thermique de l'énergie électrique.

Les centrales thermiques sont celles qui utilisent la chaleur pour produire de l'électricité, l'énergie calorifique libérée par le combustible est transformée en énergie mécanique, puis électrique. La chaleur produite vaporise de l'eau; la vapeur est ensuite détendue dans une turbine qui entraîne un alternateur, produisant de l'électricité.

On distingue, les centrales thermiques classiques des centrales nucléaires. Dans les premières, la chaleur provient de la combustion dans une chaudière d'un combustible (fuel-oil, gaz,...etc), alors que dans les secondes, la chaleur provient de la fission des noyaux d'Uranium ou de Plutonium dans une réaction nucléaire.

Pour des raisons de thermodynamique<sup>(3)</sup>, il est indispensable que la vapeur qui fait fonctionner la turbine soit ensuite refroidie. Pour ce faire, la vapeur passe par un condenseur où, après avoir cédé une partie de ses calories à l'eau de refroidissement, elle se condense et peut retourner à la source chaude. D'un autre côté, l'eau de refroidissement s'est échauffée et cède à son tour des calories au milieu extérieur.

### I.1.2. Nécessité du refroidissement des centrales.

Les apports de chaleurs mis en jeu dans l'opération précédente sont énormes. En effet, la quantité d'énergie rejetée dans le milieu environnant représente une à deux fois celle fournie sous forme d'électricité au réseau.

La production du travail mécanique crée de la chaleur d'une part, mais réduit d'autre part le rendement du matériel et des installations.

Pour éviter de telles pertes, il est indispensable qu'un système de refroidissement adéquat soit mis en place.

### **I.1.3. Les circuits de refroidissement.**

On distingue deux types de refroidissement : naturel et forcé.

Le premier s'effectue naturellement par échange avec le milieu environnant. Ce mode de refroidissement n'est pas toujours suffisant, ce qui fait que l'on doit avoir recours au second mode.

Le refroidissement forcé comprend deux grandes classes : les circuits ouverts et les circuits fermés.

#### **I.1.3.a. Refroidissement en circuit ouvert.**

La source froide utilisée à cet effet, est en général de l'eau puisée dans un réservoir naturel (rivière, fleuve, mer, ...etc), et est ensuite rejetée après passage dans les appareils à refroidir, en aval du sens de circulation naturel. Ce type de procédé est souvent adopté lorsque le fluide est disponible en quantité suffisante et possède les qualités nécessaires (eau non polluée, température de prise pas trop élevée pour assurer un refroidissement correct). A titre d'exemple, pour une puissance unitaire de 700 MW, il faut un débit de 25 m<sup>3</sup>/s, en admettant un échauffement de 12°C.

#### **I.1.3.b. Refroidissement en circuit fermé.**

Dans les systèmes de refroidissement en circuit fermé, le fluide utilisé pour le refroidissement est réutilisé comme source froide après passage dans un appareil appelé : réfrigérant.

Le choix du mode de refroidissement est principalement basé sur la valeur des débits d'eau disponible en toute période de l'année sur le site choisi.

## 1.2. Conséquences de l'échauffement des eaux du milieu récepteur aquatique.

Les quantités de chaleur représentant les opérations précédentes créent des problèmes d'environnement. Il est primordial d'évaluer les conséquences possibles de l'échauffement sur la qualité du milieu récepteur : l'air et l'eau.

Le milieu qui nous intéresse dans cette étude, est évidemment l'eau. Nous allons voir dans ce qui va suivre les atteintes qui pourraient être portées en milieu naturel aquatique.

La modification du régime thermique du milieu aquatique a des répercussions sur les organismes qui y vivent. Les effets indésirables engendrés par ce changement peuvent être classés en deux catégories : - effets directs,  
- effets indirects.

- **Les effets directs** : sont en général ceux qui se voient le plus rapidement. La perturbation apportée par le rejet provoque des modifications physiologiques telles que : changement du métabolisme, du taux de croissance ...etc. Les effets thermiques s'exercent principalement dans les circuits de refroidissement où la température de l'eau est élevée de 10 à 15°C en quelques secondes et dans le champ proche du rejet où l'échauffement diminue rapidement.

Les premiers organismes pouvant être affectés par l'échauffement des eaux sont : les poissons, car ils peuvent facilement pénétrer dans le canal de rejet de la centrale. Une fois à l'intérieur ils subissent soit des chocs thermiques chaud-froid, soit des chocs mécaniques dus à la présence de station de pompage et de filtration. Mais les études ont montré que les cas de mortalité massive sont rares et la survie des poissons confrontés à des températures élevées locales était principalement liée à leur faculté d'acclimatation à un échauffement progressif.

Pour les organismes des fonds et des mers présents dans le cours d'eau et qui maintiennent le fonctionnement de l'écosystème aquatique, les modifications ne sont constatées qu'au voisinage immédiat des centrales électriques ou dans les canaux de rejets où l'échauffement reste élevé.

En effet on a remarqué : la disparition de certaines formes qui y existaient auparavant, la prolifération de certains groupes et le changement des espèces au cours de l'année.

- **Les effets indirects** : sont les plus difficiles à mettre en évidence. Ils se manifestent par un changement des facteurs physico-chimiques, et les processus physiologiques : réactions d'asphyxie dues à la baisse du taux d'oxygène dissous, modification de la résistance aux infections, changement de la chaîne alimentaire et de l'équilibre des espèces.

Pour éviter certains des effets désagréables cités précédemment, il est nécessaire que les rejets thermiques fassent l'objet d'une étude approfondie. Le projeteur doit entreprendre sur chaque site retenu des études écologiques de terrains pour établir un état de référence physico-chimique et écologique. L'établissement de cet état de référence permet une connaissance approfondie du milieu récepteur et lui permet de s'éloigner des zones écologiquement sensibles car les conséquences des erreurs une fois commises sont terribles (piégeage des poissons, disparition des espèces ...etc).

En résumé, nous pouvons dire que l'implantation des ouvrages industriels sur un site donné doit se faire à condition d'en limiter et d'en contrôler l'impact sur l'environnement afin de ne pas faire courir au milieu dans lequel nous vivons des risques irréversibles.

### **1.3. Les rejets thermiques et la simulation.**

L'eau de refroidissement est prélevée par un canal ouvert, des conduites ou des galeries. Cette eau passe par de larges grilles, puis à travers un filtre qui évite l'introduction de corps étranger (matériaux ...etc) dans les circuits internes de la centrale et qui risquent d'obturer les tubes du condenseur. Des pompes envoient l'eau dans le condenseur où elle s'échauffe de 12 à 15°C avant d'être rejetée par une conduite ou un canal à l'air libre.

L'étalement de l'eau chaude rejetée et sa dilution au sein de la masse liquide du milieu récepteur fait intervenir divers phénomènes physiques qui définissent les propriétés dispersives du milieu, on citera : la diffusion turbulente, la convection dans l'eau, l'écoulement de fluides à densité variables, évaporation, rayonnement et convection dans l'air.

Ces phénomènes sont complexes et de nature plutôt aléatoire qu'il importe de les évaluer localement.

La mesure directe est en règle générale inadéquate pour évaluer quantitativement l'évolution des modifications du milieu récepteur dues à l'échauffement de l'eau. Celle-ci convient uniquement pour constater des effets. Seuls les modèles mathématiques descriptifs ou de simulation permettent de les prévoir.

La simulation numérique est une première approche et un outil dont la qualité a été démontré à plusieurs reprises. Les modèles mathématiques, une fois établis, permettent de simuler les rejets thermique et la détermination de la répartition longitudinale des échauffement qui permet d'éviter la recirculation d'une partie du débit rejeté en particulier pour les centrales en bord de mer.

## Chapitre II : Les écoulements dans les canaux à ciel ouvert <sup>(12,14,15,25)</sup>

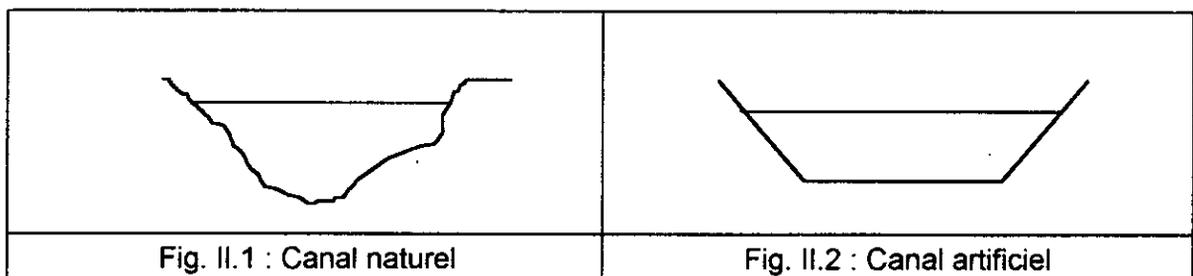
### I.1. Les canaux.

Un canal est un moyen de transport dans lequel l'eau s'écoule. On distingue deux types de canaux :

- naturels,
- artificiels.

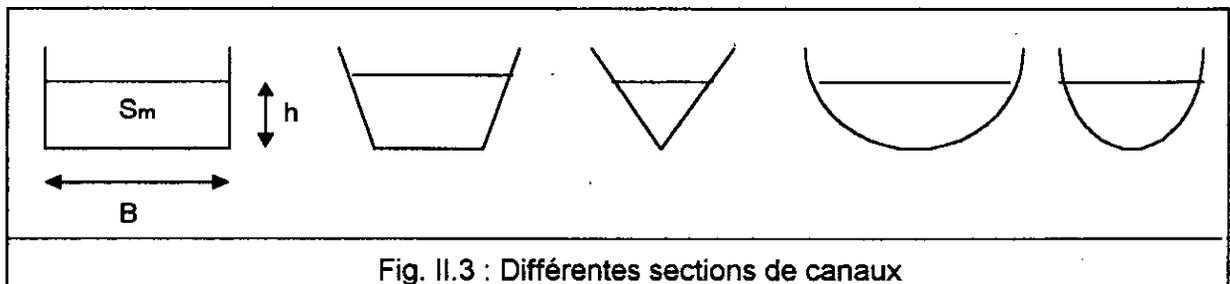
Les canaux naturels (fig. II.1) sont les cours d'eau naturels, tels que : les rivières, les fleuves et les estuaires ...etc.

Les canaux artificiels (fig. II.2) sont des cours d'eau aménagés par l'homme sur ou sous terre, tels que : les canaux de navigation, les canaux de drainage ...etc.



Les canaux artificiels peuvent avoir des sections transversales de formes diverses (fig. II.3) :

- rectangulaire,
- trapézoïdale,
- triangulaire,
- demi-circulaire,
- parabolique.



où :  $S_m$  : représente la surface mouillée définie comme étant la portion de la section occupée par le liquide.

$B$  : la largeur superficielle du canal.

$h$  : la profondeur ou hauteur d'eau au dessus du fond.

La section transversale des canaux naturels est irrégulière, par contre dans les canaux artificiels, elle est en général régulière. Lorsque la section transversale ne varie pas le long de l'écoulement et les génératrices du canal sont des droites parallèles entre elles, le canal est dit prismatique. Dans le cas contraire, il est dit non prismatique comme c'est le cas pour les convergents, les divergents et les rétrécissement brusques (fig. II.4).

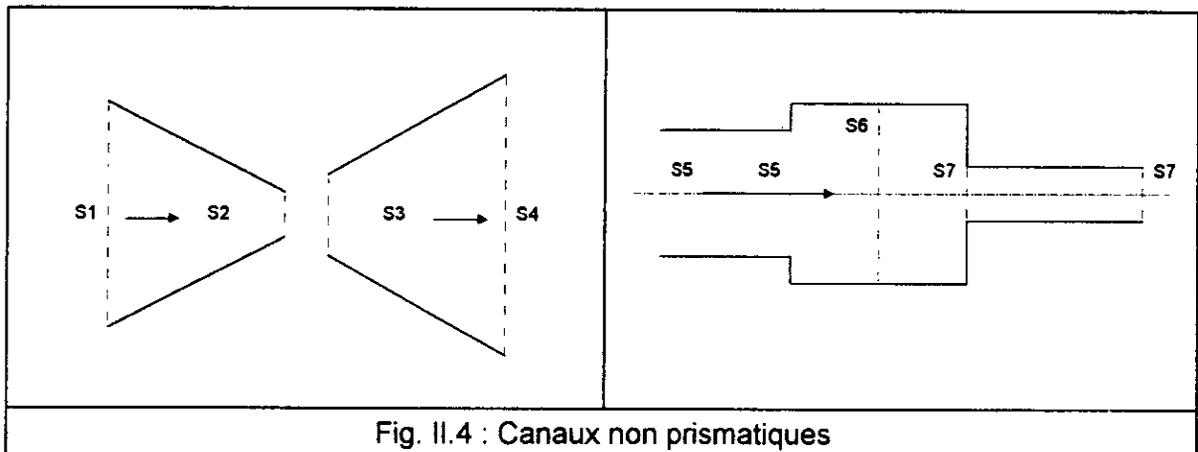


Fig. II.4 : Canaux non prismatiques

## I.2. Les écoulements dans les canaux.

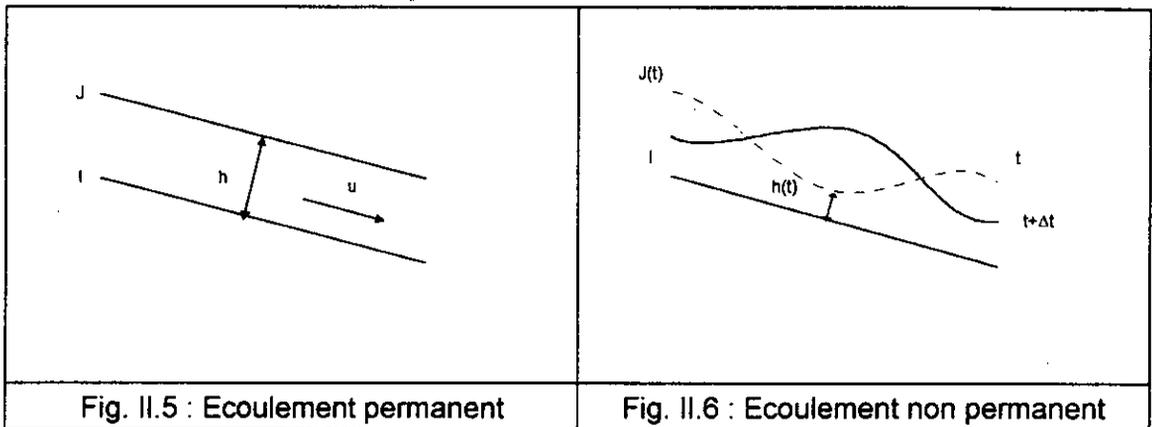
Les écoulements dans les canaux sont des écoulements à surface libre. La surface libre est la surface de contact air-eau, la pression qui y règne est la pression atmosphérique.

### I.2.1. Classification des écoulement.

Les écoulement à surface libre peuvent être classés suivant différents critères :

#### I.2.1.a. Critère temps.

L'écoulement est **permanent** si les différents paramètres (vitesse, hauteur...) ne varient pas dans le temps en grandeur et direction (fig. II.5). dans le cas contraire, il est dit **non permanent** (fig. II.6).



où :  $I$  représente la pente du fond du canal,  
 :  $J$  représente la pente de la surface libre.

**I.2.1.b. Critère d'espace.**

L'écoulement dont les différents paramètres sont invariables dans les diverses sections du canal est dit **uniforme** (fig. II.7.a) sinon, on l'appelle écoulement **non uniforme** (fig. II.7.b). le mouvement peut alors varié **graduellement** ou **rapidement** selon les cas (fig. b1 - b2).

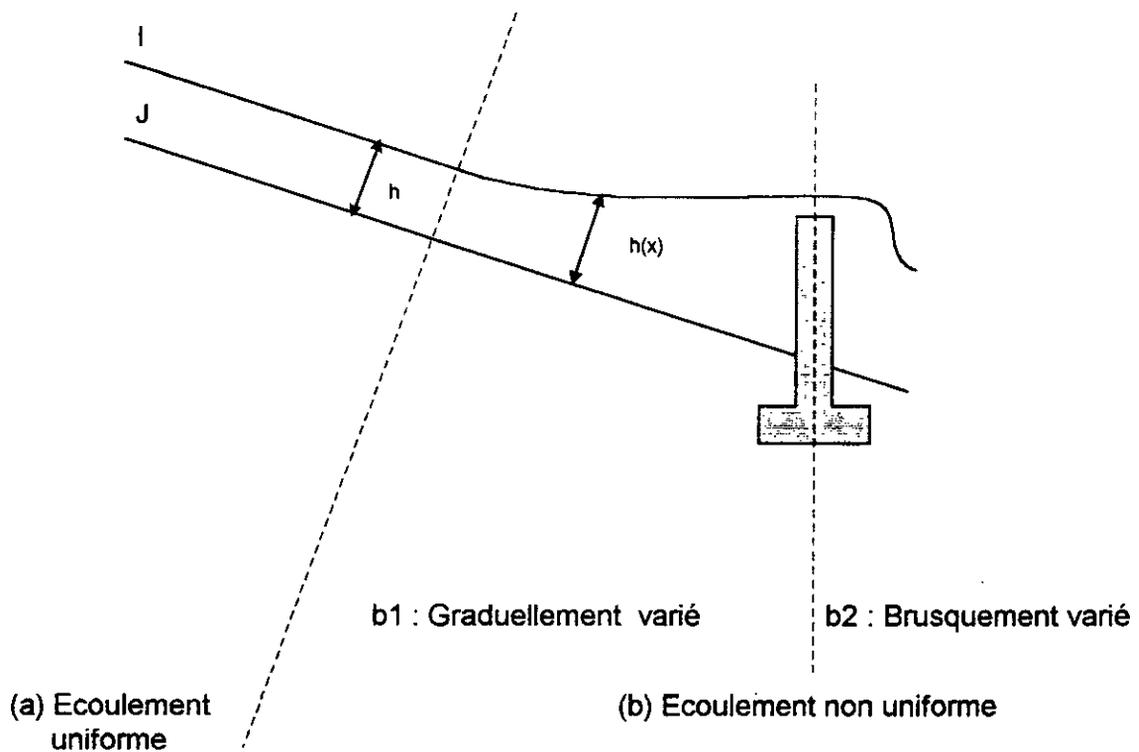
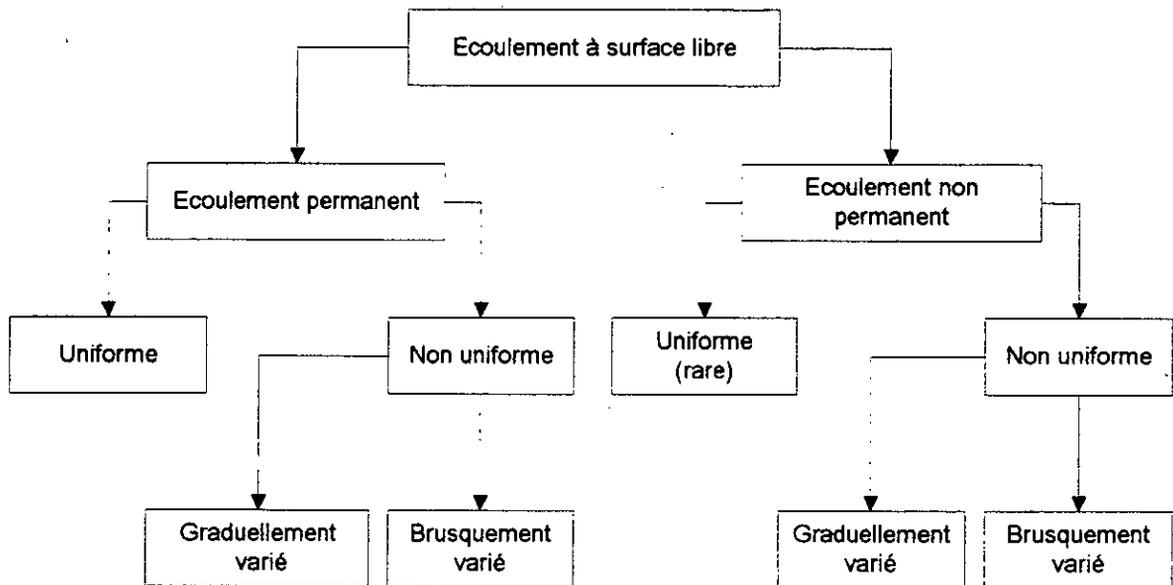


Fig. II.7 : Schéma des écoulements variables dans l'espace

**I.2.1.c.**

En général, on classe les écoulements à surface libre de la manière suivante:

**I.2.2. Les régimes écoulement.**

L'état d'un écoulement à surface libre dépend de l'effet des forces de viscosité et de gravité par rapport aux forces d'inertie de l'écoulement.

**I.2.2.a. L'effet de la gravité.**

Le rapport des forces d'inertie aux forces de gravité représente le nombre de Froude défini par :

$$F = \frac{U}{\sqrt{gL_c}}$$

avec : U : vitesse moyenne de l'écoulement en m/s,  
 g : accélération de la pesanteur en m/s<sup>2</sup>,  
 L<sub>c</sub> : Longueur caractéristique.

Le nombre de Froude d'un écoulement à surface libre représente le rapport de la vitesse moyenne du courant à la vitesse de propagation d'une onde superficielle infiniment petite. Suivant la valeur du nombre de Froude, l'écoulement à surface libre peut être classé dans un des trois régimes suivants :

- fluvial ou subcritique  $F < 1$ ,
- critique  $F = 1$ ,
- torrentiel ou supercritique  $F > 1$ .

### 1.2.2.b. Effet de la viscosité.

Le nombre de Reynolds représente physiquement le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité. Ce nombre adimensionnel s'écrit :

$$R_e = \frac{U \cdot L_c}{\nu}$$

- avec :
- $U$  : vitesse de l'écoulement en m/s,
  - $L_c$  : longueur caractéristique en m,
  - $\nu$  : viscosité cinématique du liquide en mouvement en  $m^2/s$ .

Le nombre de Reynolds permet de classer l'écoulement comme suit :

- laminaire  $R_e < 500$ ,
- turbulent  $R_e > 2000$ ,
- transitoire  $2000 > R_e > 500$ .

En combinant l'effet de la viscosité et de la gravité, on peut avoir dans un canal à surface libre, l'un des quatre régimes d'écoulement suivants :

- fluvial laminaire  $F < 1$  et  $R_e < 500$ ,
- torrentiel laminaire  $F > 1$  et  $R_e < 500$ ,
- torrentiel turbulent  $F > 1$  et  $R_e > 2000$ ,
- fluvial turbulent  $F < 1$  et  $R_e > 2000$ .

## Chapitre III : La transmission de chaleur <sup>(5,6)</sup>

### I.1. Définitions.

Lorsque deux systèmes à températures différentes sont mis en contact ou lorsqu'il existe un gradient de température à l'intérieur d'un système, il y a automatiquement transfert d'énergie qui s'effectue suivant un processus appelé : transmission de chaleur.

Il existe trois modes de transfert de chaleur :

- conduction,
- rayonnement,
- convection.

#### I.1.1. La conduction.

La conduction est le phénomène au moyen duquel la chaleur s'écoule à l'intérieur d'un milieu d'une région à haute température vers une région à basse température ou entre différents milieux en contact. L'énergie se propage par contact direct des molécules sans qu'elles ne se déplacent. Les molécules ayant une plus grande énergie cinétique transmettent une partie de leur énergie aux molécules adjacentes se trouvant dans une région à basse température.

#### I.1.2. Le rayonnement.

Le rayonnement est le phénomène par lequel la chaleur se transmet entre deux corps séparés dans l'espace, du corps à haute température vers le corps à basse température. L'énergie transmise est appelée : chaleur rayonnée. Le mouvement dans l'espace de la chaleur rayonnée peut être décrit par la théorie des ondes; le corps transforme une partie de son énergie interne en ondes électromagnétiques qui se déplacent dans l'espace et frappent l'autre corps, ce dernier absorbe cette énergie et la transforme en énergie interne.

#### I.1.3. La convection.

La convection est le mode de transport d'énergie dû à l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. Le transfert d'énergie entre une surface mise en contact avec un fluide dont la température est inférieur à celle de la surface s'effectue en trois étapes.

- La chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes. L'énergie transmise va augmenter la température et l'énergie de ces particules fluides.
- Ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules se retrouvant dans une région à basse température, elles vont leur transmettre cette énergie.

- L'énergie emmagasinée dans les particules fluides est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La convection peut être libre ou forcée selon le mode d'écoulement du fluide, elle est dite libre lorsque les courants dans le fluide sont dus seulement aux différences de densité résultant des gradients de température. Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque le mouvement du fluide est provoqué par une action externe telle qu'une pompe, la convection est dite forcée.

Dans les différentes études, il arrive que plusieurs mécanismes de transmission de chaleur agissent simultanément mais à degré différent. Dans un cas pareil, on considère le mécanisme le plus important, celui qui représente au mieux le phénomène étudié.

## 1.2. Transmission de chaleur par convection naturelle.

Dans la présente étude, la convection naturelle est le mécanisme dominant de l'écoulement de chaleur. La convection naturelle résulte de l'action combinée du transfert de chaleur par conduction et par convection.

### 1.2.1. Loi de transfert de chaleur par conduction.

Le flux de chaleur transmis par conduction dans un milieu est égale au produit des trois quantités suivantes :

1.  $k$  : la conductivité thermique du milieu  $[k] = \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.C}^\circ}$ ,
2.  $A$  : la section, perpendiculaire à la direction du flux thermique, à travers laquelle s'écoule la chaleur par conduction  $[A] = \text{m}^2$ ,
3.  $\frac{dT}{dx}$  : le gradient de température dans la section. Il représente le rapport de la variation de la température à la distance parcourue par le flux thermique  $\left[\frac{dT}{dx}\right] = \frac{\text{C}^\circ}{\text{m}}$ .

Sous forme mathématique, le flux de chaleur par conduction s'écrit :

$$q = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad [q] = \frac{\text{Kcal}}{\text{h}}$$

le signe (-) est conventionnel, le sens des  $x$  croissants représente le sens positif de l'écoulement de chaleur.

### I.2.2. Loi de transfert de chaleur par convection.

Le flux de chaleur transmis par convection entre une surface et un fluide est donnée par la relation suivante :

$$q_c = h_c \cdot A \cdot \Delta T$$

avec : A : l'aire de la surface de transmission de chaleur [A] = m<sup>2</sup>,

$\Delta T$ : différence entre la température de la surface T et celle du fluide loin de la surface [ $\Delta T$ ] = °C,

$h_c$  : coefficient d'échanges de chaleur par convection [ $h_c$ ] =  $\frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{C}^\circ}$ .

Cette loi ne traduit pas réellement les propriétés thermiques du milieu fluide et de son écoulement, une autre relation similaire mais plus représentative est alors utilisée, elle s'exprime comme suit :

$$q = \rho \cdot C_p \cdot U \cdot T \cdot A$$

avec :  $\rho$  : masse volumique du milieu [ $\rho$ ] = Kg/m<sup>3</sup>,

$C_p$  : Chaleur spécifique du milieu [ $C_p$ ] =  $\frac{\text{Kcal}}{\text{Kg C}^\circ}$ ,

U : vitesse écoulement du fluide [U] = m/s,

T : différence entre la température de la surface T et celle du fluide loin de la surface [ $\Delta T$ ] = °C,

A : Section à travers laquelle s'écoule la chaleur [A] = m<sup>2</sup>,

q : flux de chaleur par convection entrant par l'aire A à la suite du mouvement du fluide [ $q$ ] =  $\frac{\text{Kcal}}{\text{s}}$ .

*Deuxième partie*

*La modélisation mathématique*

## Chapitre I : Les modèles mathématiques (19, 20)

Un modèle mathématique est une schématisation de la réalité qui permet de calculer les grandeurs intéressant l'ingénieur.

Le modèle mathématique comprend :

- un domaine de l'espace, où l'on va effectuer le calcul des caractéristiques de l'écoulement.
- un système d'équations à résoudre dans le domaine cité précédemment suivi des conditions aux limites qui représentent l'interaction entre le domaine modélisé et l'extérieur, exemple amont et aval,
- un intervalle de temps de calcul pour les écoulements transitoires et des conditions initiales,
- une discrétisation et une méthode de résolution,
- une méthode de calcul programmée sur ordinateur qui fournit les résultats espérés ou souhaités.

Il existe plusieurs modèles mathématiques. Le modèle le plus complexe s'appuie sur les équations de Navier-Stokes à trois dimensions, où les inconnues sont : la pression, les trois composantes de la vitesse et la cote de la surface libre. Ce modèle peut également être couplé avec une équation régissant l'évolution de la concentration d'une substance présente au sein du fluide ou la dispersion d'une tache thermique après un rejet.

Les modèles à trois dimensions sont très difficiles à élaborer. Pour se libérer de cette contrainte, on ne considère pas les variations de grandeur selon la coordonnée verticale. On aboutit alors aux modèles dits : bidimensionnels horizontaux.

Dans la présente étude, on se propose de décrire un modèle pour déterminer la température dans un domaine d'espace représenté par un canal à faible pente. Le modèle est bidimensionnel horizontal. On devra calculer dans un premier temps, le champ de vitesse  $\vec{V}(u, v)$ , et la cote de la surface libre, pour ensuite déterminer le champ de température  $T$ , moyennant certaines hypothèses de base.

## Chapitre II

### Le modèle mathématique bidimensionnel horizontal hydrodynamique <sup>(1,7,11,12,13,14,15,19,27)</sup>

#### II.1. Introduction <sup>(19)</sup>.

Le modèle hydrodynamique à deux dimensions peut être déterminé de deux manières différentes :

- A partir des équations tridimensionnelles de Navier-Stokes, en passant par des hypothèses simplificatrices pour arriver aux équations différentielles partielles dites « en eau peu profonde ».
- Ou bien, considérer un volume de contrôle fini, limité par deux sections en travers du canal séparées par une distance finie, par le fond du canal et par la surface libre. Construire les équations exprimant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, en suivant des hypothèses.

Pour déterminer le champ de vitesse et de profondeur dans le domaine considéré, lors de l'écoulement non permanent, nous allons suivre la deuxième procédure pour mettre en évidence toutes les hypothèses.

#### II.2. Les hypothèses de base <sup>(19,13,12,11)</sup>.

Les principales hypothèses prises en compte dans l'établissement des équations générales, de cette étude sont :

- 1°/ Une répartition hydrostatique des pressions sur une verticale.
- 2°/ Une répartition uniforme des vitesses, c'est-à-dire que la vitesse calculée est la vitesse moyenne de la colonne d'eau.
- 3°/ Un canal de faible pente de fond.
- 4°/ Un fluide incompressible et un écoulement homogène.
- 5°/ Les contraintes de la turbulence sont négligeables par rapport aux autres contraintes (frottement au niveau des parois).
- 6°/ La force de Coriolis due à la rotation de la terre est négligée.
- 7°/ Les pertes de charge, quelles que soient leur nature sont exprimées par les formules de l'écoulement permanent (formule de Chezy).

### II.3. Etablissement des équations <sup>(13,26,12,14,11,1,27,7)</sup>

#### II.3.1. Introduction.

On fait souvent appel, pour résoudre un problème hydraulique aux principes de la conservation dans des volumes finis, de la masse, des quantités de mouvement et de l'énergie.

Pour établir les équations qui régissent l'écoulement non permanent bidimensionnel à surface libre dans un canal prismatique à faible pente, on considère un volume de contrôle élémentaire fixé dans le champ de l'écoulement et ayant la forme d'un prisme de dimensions  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $h$ . (fig. II.1).

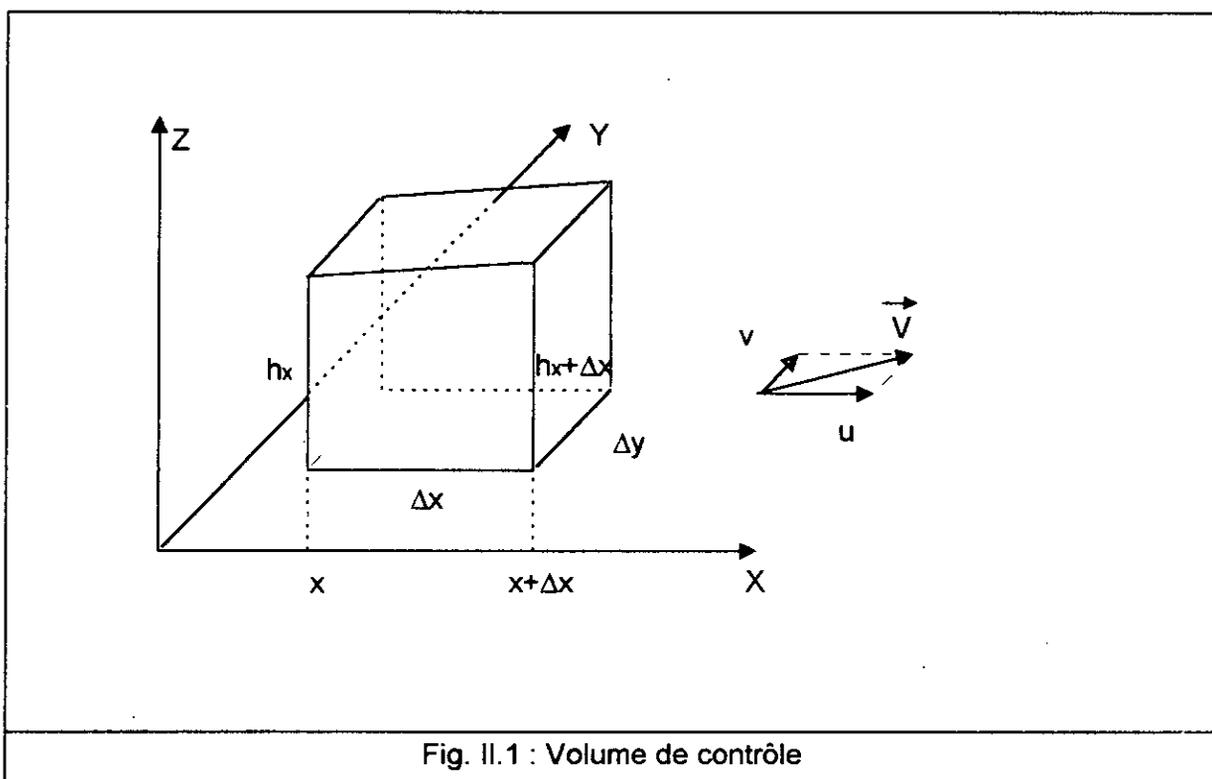


Fig. II.1 : Volume de contrôle

Les arêtes de cet élément sont orientées de manière telle que la cote  $\Delta x$  soit parallèle à l'axe X et la cote  $\Delta y$  soit parallèle à l'axe Y. La troisième face a pour dimension  $h$  variable, et se trouve parallèle à l'axe Z.

La vitesse d'écoulement  $\vec{V}$  a pour composante  $u$  suivant l'axe X et  $v$  suivant l'axe Y.

Appliquons maintenant les principes cités précédemment.

### II.3.2. Equation de continuité <sup>(12,13)</sup>.

L'équation de continuité est obtenue à partir du principe de la conservation de la masse. Ce dernier stipule que la variation de la masse fluide durant un intervalle de temps  $\Delta t$ , contenue dans un volume élémentaire  $\Delta V$  est égale à la différence entre les masses de fluides entrantes et sortantes.

Pour déterminer cette équation, considérons un prisme élémentaire de fluide de volume  $\Delta x \Delta y \Delta h$ , (fig. II.2).

La masse stockée initialement est :  $\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta h$

La variation de masse est :

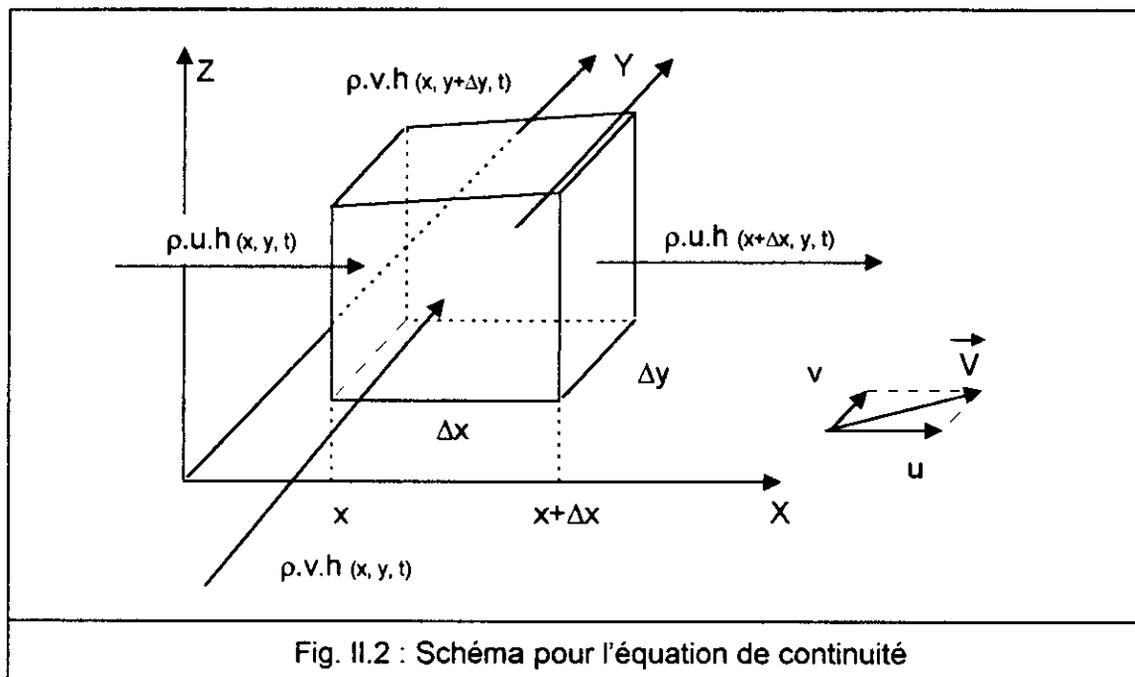
$$\begin{aligned} \text{suivant l'axe X : } & [\rho \cdot u \cdot h_{(x,y,t)} - \rho \cdot u \cdot h_{(x+\Delta x,y,t)}] \Delta y \cdot \Delta t, \\ \text{suivant l'axe Y : } & [\rho \cdot v \cdot h_{(x,y,t)} - \rho \cdot v \cdot h_{(x,y+\Delta y,t)}] \Delta x \cdot \Delta t. \end{aligned}$$

Ainsi la masse contenue dans l'élément prismatique pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  est égale à l'accroissement de masse, correspondant au mouvement du fluide à travers les deux directions :

$$\rho \cdot \Delta x \Delta y \Delta h = [\rho \cdot u \cdot h_{(x,y,t)} - \rho \cdot u \cdot h_{(x+\Delta x,y,t)}] \cdot \Delta y \cdot \Delta t + [\rho \cdot v \cdot h_{(x,y,t)} - \rho \cdot v \cdot h_{(x,y+\Delta y,t)}] \cdot \Delta x \cdot \Delta t$$

En divisant par  $\Delta x \Delta y \Delta t$  et en faisant tendre l'équation précédente vers zéro, on obtient pour le fluide incompressible ( $\rho$  constante), l'équation de continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0 \quad \text{Eq. II.1}$$



### II.3.3. Equations dynamiques <sup>(11,12,14,26)</sup>

Les équations dynamiques ne sont qu'une application directe du théorème de la quantité de mouvement.

#### II.3.3.a. Théorème de la quantité de mouvement.

Le théorème de la quantité de mouvement exprime que la variation de la quantité de mouvement, durant un intervalle de temps  $\Delta t$ , dans un volume élémentaire, est égale à l'ensemble des forces extérieures au volume, soit :

$$\sum \bar{F}_{\text{ext}} = \iiint_V \frac{\partial(\rho \cdot \bar{V})}{\partial t} \cdot dt + \iint_s \bar{V} \cdot \rho \cdot (\bar{V} \cdot \bar{n}_e) \cdot ds$$

avec :

- $\bar{F}_{\text{ext}}$  : forces extérieures,
- $\rho$  : masse volumique du fluide,
- $\bar{V}$  : vitesse dans la section  $s$ ,
- $\bar{n}_e$  : vecteur unitaire normal aux surfaces extérieures,
- $V$  : volume de l'élément considéré,
- $s$  : surface de l'élément considéré.

En appliquant ce théorème au prisme élémentaire de fluide de volume  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta h$ , il vient :

### II.3.3.a.i. Variation de la quantité de mouvement :

Variation de la quantité de mouvement dans l'élément prismatique pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  :

$$\begin{aligned} \text{suivant l'axe X : } & (\rho \cdot u \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot h)_{t} - (\rho \cdot u \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot h)_{t+\Delta t} \\ \text{suivant l'axe Y : } & (\rho \cdot v \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot h)_{t} - (\rho \cdot v \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot h)_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

Variation de la quantité de mouvement dans la masse fluide :

$$\begin{aligned} \text{suivant l'axe X :} \\ & [u\rho v\Delta y h\Delta t|_x - u\rho u\Delta y h\Delta t|_{x+\Delta x}] + [u\rho v\Delta x h\Delta t|_y - u\rho v\Delta x h\Delta t|_{y+\Delta y}] \\ \text{suivant l'axe Y :} \\ & [v\rho v\Delta x h\Delta t|_y - v\rho v\Delta x h\Delta t|_{y+\Delta y}] + [v\rho u\Delta y h\Delta t|_x - v\rho u\Delta y h\Delta t|_{x+\Delta x}] \end{aligned}$$

Ainsi la variation totale de la quantité de mouvement suivant les deux directions sera :

$$\begin{aligned} & \rho u\Delta x\Delta y h|_t - \rho u\Delta x\Delta y h|_{t+\Delta t} + \rho u^2\Delta y h\Delta t|_x - \rho u^2\Delta y h\Delta t|_{x+\Delta x} + \rho v u\Delta x h\Delta t|_y - \rho v u\Delta x h\Delta t|_{y+\Delta y} \\ & \rho v\Delta x\Delta y h|_t - \rho v\Delta x\Delta y h|_{t+\Delta t} + \rho v^2\Delta x h\Delta t|_y - \rho v^2\Delta x h\Delta t|_{y+\Delta y} + \rho v u\Delta y h\Delta t|_x - \rho v u\Delta y h\Delta t|_{x+\Delta x} \end{aligned}$$

En simplifiant par  $\Delta x \Delta y \Delta t$  et en tendant les valeurs précédentes vers zéro on obtient pour un fluide incompressible ( $\rho$  constante) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial y} &= F_x \\ \frac{\partial (vh)}{\partial t} + \frac{\partial (uvh)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2h)}{\partial y} &= F_y \end{aligned} \quad \text{Eq. II.2}$$

### II.3.3.a.ii. Les forces extérieures :

Les forces extérieures appliquées à l'élément fluide de masse constante et de forme prismatique sont dues à la pression, au poids, aux frottements eau-paroi solide et à l'effet du vent.

- **Les forces de pression.**

La force de pression qui s'exerce sur une surface d'une masse liquide résulte de l'action des forces moléculaires à proximité des bords de cette surface.

D'après les hypothèses énoncées précédemment, la somme des pressions s'exerçant sur les deux faces perpendiculaires à l'axe OX (respectivement l'axe OY) est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \text{suivant X : } P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x\right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \\ \text{suivant Y : } P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y\right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} \Delta y \end{aligned}$$

La force de pression sera donc égale à :

$$\left. \begin{aligned} \text{suivant X : } F_{Px} &= -\rho \cdot g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \cdot h \\ \text{suivant Y : } F_{Py} &= -\rho \cdot g \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \Delta x \Delta y \cdot h \end{aligned} \right\} \text{Eq. II.3}$$

- **La force de gravité.**

La force de gravité est la conséquence directe de la gravitation, sa résultante a pour expression :

$$|F_g| = \rho \cdot g \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot h.$$

Les composantes de cette force sont :

$$\left. \begin{aligned} \text{suivant X : } F_{gx} &= \rho \cdot g \cdot \Delta x \Delta y \cdot h \cdot \sin(\alpha x) \\ \text{suivant Y : } F_{gy} &= \rho \cdot g \cdot \Delta x \Delta y \cdot h \cdot \sin(\alpha y) \end{aligned} \right\} \text{Eq. II.4}$$

- **La force de frottement sur le fond**

La force de frottement est tangentielle à la surface de contact de l'eau et du fond. Elle est dirigée dans le sens opposé de l'écoulement et, est proportionnelle au carré de la vitesse.

En supposant le fond relativement plat; sa superficie est donc  $\Delta x \Delta y$ , l'expression universelle de la force de frottement est donnée par la relation suivante :

$$F_f = -\frac{1}{2} \rho \cdot C_f \cdot \vec{V} \cdot |\vec{V}| \cdot \Delta x \Delta y$$

avec :  $C_f$  : Coefficient de frottement.

La formule de Chezy permet d'écrire :  $C = \left( \frac{2g}{C_f} \right)^{\frac{1}{2}}$

tel que :  $C$  : Coefficient de Chezy dimensionnel ( $L^{1/2} T^{-1}$ ).

fonction de la rugosité des parois et du rayon hydraulique  $R_h$  donné par le quotient de la surface mouillée  $S_m$  et du périmètre mouillé  $P_m$ .

D'après Manning :  $C = \frac{1}{n} \cdot R_h^{2/3}$

Pour un canal rectangulaire :  $R_h = \frac{S_m}{P_m} = \frac{B \cdot h}{B + 2h}$

avec :  $B$  : largeur du canal.  
 $h$  : hauteur du tirant d'eau.

Les composantes de la force de pression ont pour expression :

$$\left. \begin{array}{l} \text{suivant X : } F_x = -\rho \cdot g \cdot n^2 \left( \frac{B + 2h}{B \cdot h} \right)^{\frac{1}{3}} u \cdot (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta x \Delta y \\ \text{suivant Y : } F_y = -\rho \cdot g \cdot n^2 \left( \frac{B + 2h}{B \cdot h} \right)^{\frac{1}{3}} v \cdot (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta x \Delta y \end{array} \right\} \text{Eq. II.5}$$

- **La force de frottement due au vent :**

La force de frottement due au vent peut être mise sous la forme suivante :

$$\bar{F}_v = -f \cdot |\bar{V}_0| \cdot \bar{V}_0 \cdot \Delta x \Delta y$$

avec :

- $\bar{V}_0$  : vitesse du vent en m/s,
- $V_{0x}, V_{0y}$  : composantes de la vitesse du vent dans les deux directions,
- $f$  : coefficient de frottement air-eau.

Les composantes de cette force sont :

$$\left. \begin{array}{l} \text{sui vant X : } F_{fvx} = -f \cdot |v_0| \cdot v_{0x} \cdot \Delta x \Delta y \\ \text{sui vant Y : } F_{fvy} = -f \cdot |v_0| \cdot v_{0y} \cdot \Delta x \Delta y \end{array} \right\} \text{Eq. II.6}$$

En divisant les équations II.3,4,5 et 6 par  $\Delta x \Delta y$  et en faisant tendre les valeurs obtenues vers zéro, on obtient finalement les équations traduisant le théorème de la quantité de mouvement suivant les deux directions OX et OY :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial\left(u^2 \cdot h + g \frac{h^2}{2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} = g \cdot h \cdot (S_{0x} - S_{fx}) - \frac{1}{\rho} \tau_x^v \\ \frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v^2 \cdot h + g \frac{h^2}{2}\right)}{\partial y} = g \cdot h \cdot (S_{0y} - S_{fy}) - \frac{1}{\rho} \tau_y^v \end{array} \right\} \text{Eq. II.7}$$

avec :

$$\left. \begin{array}{l} S_{0x} = \sin(\alpha_x) \\ S_{0y} = \sin(\alpha_y) \end{array} \right\} \text{Pente du fond du canal suivant les directions X et Y respectivement.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_x^v = f \cdot |v_0| \cdot v_{0x} \\ \tau_y^v = f \cdot |v_0| \cdot v_{0y} \end{array} \right\} \text{Composante du vecteur contrainte due au vent suivant les deux directions X et Y respectivement.}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{fx} = n^2 u \cdot (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{h} \left( \frac{B + 2h}{Bh} \right)^{\frac{1}{3}} \\ S_{fy} = n^2 v \cdot (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{h} \left( \frac{B + 2h}{Bh} \right)^{\frac{1}{3}} \end{array} \right\} \text{Sont les pentes d'énergie suivant les deux directions x et y respectivement.}$$

Dans le cas d'un canal rectangulaire très large  $S_{fx}$  et  $S_{fy}$  prennent la forme suivante :

$$S_{fx} = n^2 \cdot u \cdot \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{h^{1.33}}$$

$$S_{fy} = n^2 \cdot v \cdot \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{h^{1.33}}$$

### II.3.3.b. Simplification des équations dynamiques.

Les équations de la conservation de la quantité de mouvement peuvent être simplifiées en faisant apparaître l'équation de continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0$$

suivant X, on a :

$$\frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial y} = g \cdot h \cdot (S_{ox} - S_{fx}) - \frac{1}{\rho} \tau_x^v \quad \text{Eq. II.8}$$

Le membre gauche de l'équation II.8 peut être décomposé comme suit :

$$\frac{\partial (uh)}{\partial t} = u \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \right)}{\partial x} = u \frac{\partial (uh)}{\partial x} + uh \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial (gh)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial (uvh)}{\partial y} = u \frac{\partial (vh)}{\partial y} + vh \frac{\partial u}{\partial y}$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation II.8, on obtient :

$$u \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} \right) + h \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{u^2}{2} + gh \right)}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = h \cdot \left( g(S_{ox} - S_{fx}) - \frac{\tau_x^v}{\rho \cdot h} \right)$$

l'équation de la conservation de la quantité de mouvement se réduit alors :

$$\text{suivant X : } \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{u^2}{2} + gh \right)}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g(S_{0x} - S_{rx}) - \frac{\tau_x^v}{\rho \cdot h}$$

en suivant un raisonnement similaire que précédemment on obtient l'expression suivante

$$\text{suivant Y : } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{v^2}{2} + gh \right)}{\partial y} = g(S_{0y} - S_{ry}) - \frac{\tau_y^v}{\rho \cdot h}$$

Finalement les équations qui traduisent le bilan de la conservation de la masse et la quantité de mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} &= 0. \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{u^2}{2} + gh \right)}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= g(S_{0x} - S_{rx}) - \frac{\tau_x^v}{\rho \cdot h}. \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{v^2}{2} + gh \right)}{\partial y} &= g(S_{0y} - S_{ry}) - \frac{\tau_y^v}{\rho \cdot h}. \end{aligned}$$

#### II.4. Formulation matricielle des équations <sup>(1)</sup>.

Les équations traduisant l'écoulement non permanent bidimensionnel à surface libre peuvent être mises sous la forme matricielle suivante :

$$U_t + E_x + F_y + S = 0 \quad \text{Eq. II.9}$$

avec :  $U = (h, uh, vh)^t$

$$E = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \cdot h \cdot (S_{0x} - S_{rx}) - \frac{\tau_x^v}{\rho} \\ -g \cdot h \cdot (S_{0y} - S_{ry}) - \frac{\tau_y^v}{\rho} \end{bmatrix}$$

En terme de primitives des variables  $h$ ,  $u$  et  $v$  le système précédent se réduit à :

$$V_t + P_x + R_y + T = 0 \quad \text{Eq. II.10}$$

avec :  $V = (h, u, v)^t$

$$P = \begin{bmatrix} uh \\ \frac{1}{2}u^2 + gh \\ uv \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} vh \\ uv \\ \frac{1}{2}v^2 + gh \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_{ox} - S_x) - \frac{\tau_x^v}{\rho \cdot h} \\ -g(S_{oy} - S_y) - \frac{\tau_y^v}{\rho \cdot h} \end{bmatrix}$$

Les systèmes II.9 et II.10 ne sont pas complètement conservatifs, vu la présence des termes sources  $S$  et  $T$ , leur contribution est souvent faible qu'elle n'affecte pas réellement la forme conservatrice des équations.

Il est nécessaire pour certains schémas numériques d'utiliser la forme non conservatrice, pour cela, il suffit de remplacer  $P_x$  et  $R_y$  par  $GV_x$  et  $HV_y$ , respectivement où  $G$  et  $H$  ne sont autre que les matrices Jacobiennes définies par :

$$G = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} v & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{bmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres de  $G$  et  $H$  fait apparaître l'expression de la célérité de l'onde  $c$ , propriété essentielle des écoulement à surface libre :

$$G : \begin{cases} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = u + c \\ \lambda_3 = u - c \end{cases} \quad H : \begin{cases} \omega_1 = v \\ \omega_2 = v + c \\ \omega_3 = v - c \end{cases}$$

avec :  $c = \sqrt{gh}$ ,

$c$  : célérité de l'onde,

$g$  : accélération de la pesanteur,

$h$  : profondeur hydraulique.

Les matrices G et H peuvent être décomposées en produit de trois matrices :

$$G = M.D_G.M^{-1}$$

$$H = N.D_H.N^{-1}$$

avec :

$D_G, D_H$  : sont les matrices diagonales des valeurs propres de G et H respectivement

M, N : sont les matrices définies par :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h}{2c} & \frac{h}{2c} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h}{2c} & \frac{h}{2c} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$M^{-1}, N^{-1}$  : sont les matrices inverses de M et N respectivement.

Finalement les matrices G et H s'écrivent en fonction des valeurs propres  $\lambda_i$  et  $\omega_i$  comme suit :

$$G = M.D_G.M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) & \frac{h}{2c}(\lambda_2 - \lambda_3) & 0 \\ \frac{c}{2h}(\lambda_2 - \lambda_3) & \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$H = N.D_H.N^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) & 0 & \frac{h}{2c}(\omega_2 - \omega_3) \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ \frac{c}{2h}(\omega_2 - \omega_3) & 0 & \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) \end{bmatrix}$$

Le système II.10 se met alors sous la forme suivante :

$$V_t + M.D_G.M^{-1}V_x + N.D_H.N^{-1}V_y + T = 0$$

La décomposition des matrices diagonales  $D_G$  et  $D_H$  en somme de deux matrices, l'une positive et l'autre négative, s'effectue en testant les valeurs propres  $\lambda_i$  et  $\omega_i$  :

$$\begin{aligned}\lambda_i^+ &= \max(\lambda_i, 0), \\ \lambda_i^- &= \min(\lambda_i, 0), \\ \omega_i^+ &= \max(\omega_i, 0), \\ \omega_i^- &= \min(\omega_i, 0).\end{aligned}$$

De cette façon, les matrices  $G$  et  $H$  peuvent être également mises sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}G &= G^+ + G^- = M.D_G^+.M^{-1} + M.D_G^-.M^{-1} \\ H &= H^+ + H^- = N.D_H^+.N^{-1} + N.D_H^-.N^{-1}\end{aligned}$$

L'introduction de toutes les variations précédentes dans le système II.10 conduit à l'équation :

$$V_t + G^+V_x + G^-V_x + H^+V_y + H^-V_y + T = 0 \quad \text{Eq. II.11}$$

## II.5. Conditions initiales et conditions aux frontières <sup>(7.27)</sup>.

Pour pouvoir résoudre le système d'équations II.11, des conditions initiales et des conditions aux limites s'imposent.

### 1°/ Les conditions initiales :

les conditions initiales sont les conditions prises au temps  $t=0$ . Une fois l'état de l'écoulement est défini à cet instant, il est possible de calculer son évolution au cours du temps.

### 2°/ Les conditions aux limites :

les conditions aux limites sont les conditions adoptées au niveau des frontières ouvertes et fermées.

Pour le calcul des différentes variables de l'écoulement  $h$ ,  $u$  et  $v$ , on fait appel à un maillage fictif qui s'étend au delà des frontières. Fig. II.3.

**Frontières fermées.**

- La composante  $u$  de la vitesse est considérée nulle au niveau de la paroi.
- Une réflexion antisymétrique est introduite pour la composante  $u$  et  $v$  de la vitesse, au niveau du maillage fictif:

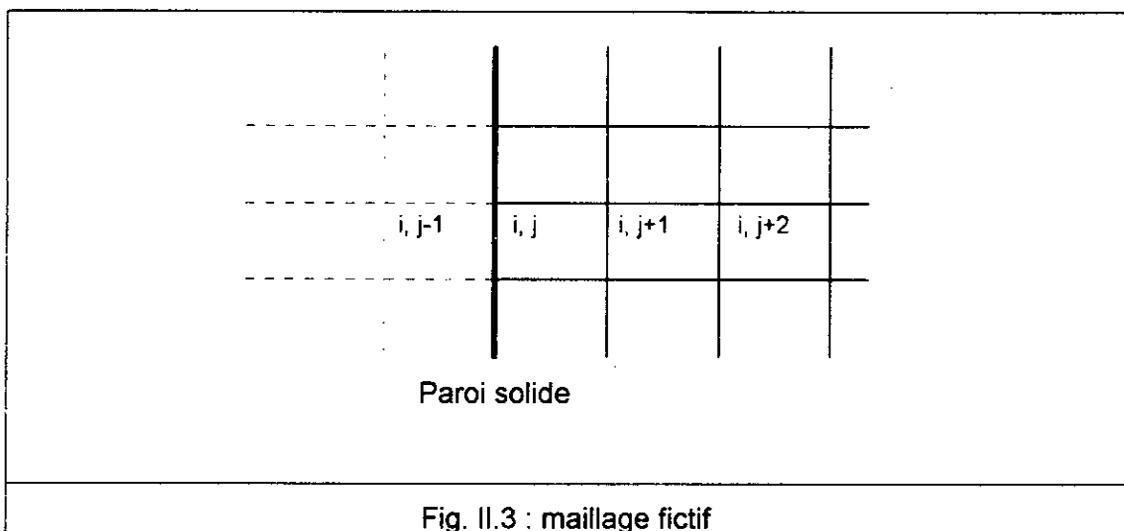
En d'autres termes les composantes de la vitesse des points fictifs auront, dans le cas de la fig. II.3, comme valeurs :

$$u(i,j-1) = -u(i,j+1).$$

$$v(i,j-1) = -v(i,j+1).$$

- Une réflexion symétrique est utilisée pour la hauteur  $h$ , on a alors :

$$h(i,j-1) = h(i,j+1).$$

**Frontières ouvertes.**

Des conditions aux frontières ouvertes sont adoptées, pour les écoulements à surface libre, selon le régime d'écoulement et la dimension du problème. Stocker<sup>(30)</sup> a présenté le tableau suivant :

problème	Ecoulement subcritique $Fr < 1$		Ecoulement supercritique $Fr > 1$	
	Entrée	Sortie	Entrée	Sortie
1 Dimension	1	1	2	0
2 Dimensions	2	1	3	0

Pour le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire, les écoulements bidimensionnels en régime subcritique ( $Fr < 1$ ), deux (02) conditions sont imposées à l'amont et une condition est spécifiée à l'aval.

Lorsque le canal présente une symétrie géométrique fig. II.4, il est possible d'introduire une procédure de symétrie au niveau de l'axe de l'écoulement. Les variables de l'écoulement  $h, u$  et  $v$  du maillage fictif prennent les valeurs suivantes :

$$h(i, j-1) = h(i, j+1).$$

$$u(i, j-1) = u(i, j+1).$$

$$v(i, j-1) = -v(i, j+1).$$

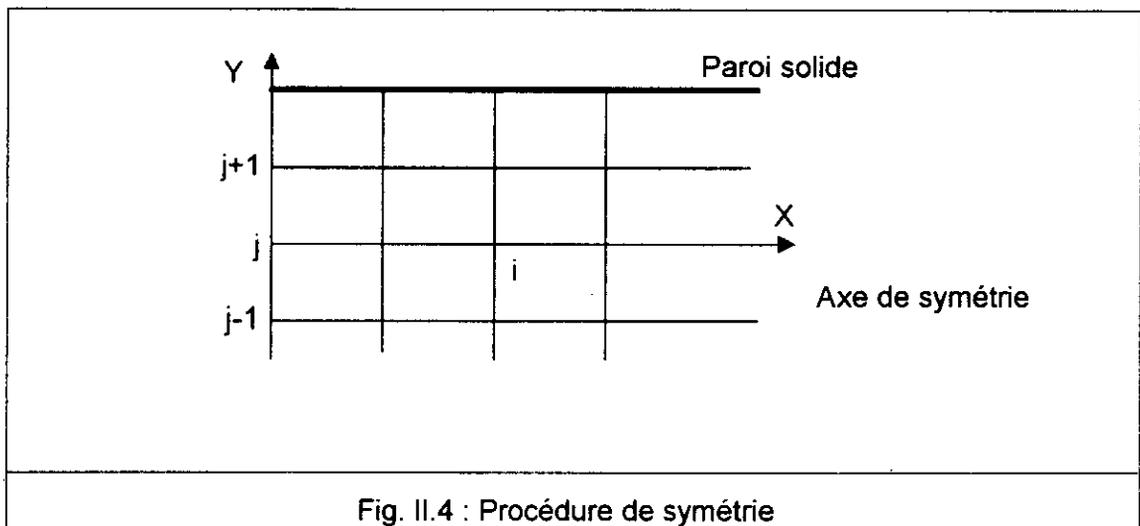


Fig. II.4 : Procédure de symétrie

## chapitre III : Le modèle mathématique bidimensionnel horizontal de transfert de chaleur <sup>(4,5,6,18,21)</sup>

### III.1. Présentation du problème et hypothèses <sup>(4,5)</sup>.

Le problème consiste à déterminer le champ thermique causé par la présence d'un rejet d'une source chaude sur le canal.

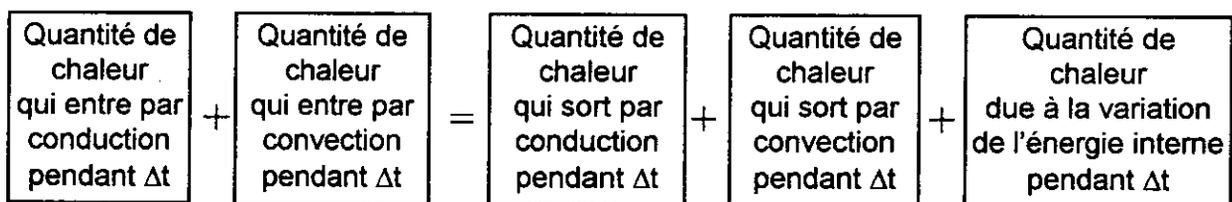
Pour résoudre ce problème, il faut procéder à certaines simplifications.

1. Considérer que la tache thermique se situe en eau peu profonde, les différentes masses eau du jet-eau du canal sont supposées bien mélangées sur la profondeur de manière telle que la température calculée en un point représente la température moyenne sur la verticale.
2. Les échanges thermiques entre l'atmosphère et l'eau ne sont pas pris en considération.
3. les variations de la conductivité thermique et de la masse volumique sont très faibles.

### III.2. Mise en équation <sup>(4,5,6)</sup>.

Pour établir l'équation qui régit la répartition des températures, considérons le volume de contrôle de forme prismatique qui a pour volume  $\Delta x \Delta y h$  et appliquons le principe de la conservation de l'énergie en admettant, en plus des hypothèses précédentes, les mêmes hypothèses que celles utilisées antérieurement pour les équations hydrodynamiques :

Le bilan thermique peut s'écrire sous la forme suivante :



Ou sous forme algébrique :

$$(q_x + q_y)\Delta t + (q'_x + q'_y) \Delta t = (q_{x+\Delta x} + q_{y+\Delta y})\Delta t + (q'_{x+\Delta x} + q'_{y+\Delta y}) \Delta t + \rho \cdot C_p \cdot dT(\Delta x \Delta y \cdot h).$$

**Bilan de la quantité de chaleur par conduction :**

$$\left[ -K \frac{\partial T}{\partial x} h \Delta y \Big|_x - K \frac{\partial T}{\partial y} h \Delta x \Big|_y \right] - \left[ -K \frac{\partial T}{\partial x} h \Delta y \Big|_{x+\Delta x} - K \frac{\partial T}{\partial y} h \Delta x \Big|_{y+\Delta y} \right]$$

Conformément au théorème de la moyenne  $f(x)$ , la valeur d'une fonction de  $x$  au point  $x$  est liée à la valeur de la même fonction  $f(x+\Delta x)$  au point  $(x+\Delta x)$  par :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{d}{dx} [f(x)]_M \Delta x$$

où  $M$  est situé entre  $x$  et  $(x+\Delta x)$ .

En particulier si on prend :  $f(x) = \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]$ , les gradients de température aux points  $x$  et  $(x+\Delta x)$  sont liés d'après le théorème par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_M \Delta x$$

Le gradient de température est mis sous forme d'une dérivée partielle puisque  $T$  est fonction non seulement de  $x$  mais aussi de  $y$  et  $t$ .

Ainsi on obtient après simplification pour le cas bidimensionnel l'expression suivante:

$$K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y \quad \text{Eq. III.1}$$

**Bilan de la quantité de chaleur par convection :**

$$\left[ \rho \cdot u \cdot C_p \cdot T \cdot h \cdot \Delta y \Big|_x + \rho \cdot v \cdot C_p \cdot T \cdot h \cdot \Delta x \Big|_y \right] - \left[ \rho \cdot u \cdot C_p \cdot T \cdot h \cdot \Delta y \Big|_{x+\Delta x} + \rho \cdot v \cdot C_p \cdot T \cdot h \cdot \Delta x \Big|_{y+\Delta y} \right] \quad \text{Eq. III.2}$$

En suivant les mêmes étapes que précédemment, on obtient après simplification :

$$-\rho \cdot C_p \cdot \left[ \frac{\partial (u T h)}{\partial x} + \frac{\partial (v T h)}{\partial y} \right] \Delta x \Delta y$$

En substituant les relations III.1 et III.2 dans l'équation de l'énergie et en divisant chaque terme par  $\Delta x \Delta y \Delta t$ , on obtient :

$$\kappa \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] - \rho C_p \left[ \frac{\partial (uTh)}{\partial x} + \frac{\partial (vTh)}{\partial y} \right] = \rho C_p \left[ \frac{\partial (Th)}{\partial t} \right] \quad \text{Eq. III.3}$$

Enfin l'équation relative à la transmission de chaleur par convection naturelle pour un écoulement bidimensionnel s'écrit :

$$\frac{\partial (Th)}{\partial t} + \frac{\partial (uTh)}{\partial x} + \frac{\partial (vTh)}{\partial y} = \frac{\kappa}{\rho C_p} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right]$$

avec :

- K : conductivité thermique du milieu en [Kcal/h.m.c°],
- $\rho$  : masse volumique du fluide en [Kg/m<sup>3</sup>],
- $C_p$  : la chaleur spécifique en [Kcal/Kg.c°].

En posant :  $a = \frac{\kappa}{\rho C_p}$ ,

avec :

a : coefficient de diffusivité thermique en [m<sup>2</sup>/h].

L'équation précédente devient :

$$\frac{\partial (Th)}{\partial t} + \frac{\partial (uTh)}{\partial x} + \frac{\partial (vTh)}{\partial y} = a \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad \text{Eq. III.4}$$

### III.3. Développement de l'équation de la chaleur :

En développant le membre de gauche de l'équation précédente III.4, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (hT)}{\partial t} &= h \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial (uTh)}{\partial x} &= T \frac{\partial (uh)}{\partial x} + uh \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial (vTh)}{\partial y} &= T \frac{\partial (vh)}{\partial y} + vh \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}$$

Et le développement du membre de droite donne :

$$a \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] = a \left[ h \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + h \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right]$$

dont les termes  $\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}$  et  $\frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y}$  sont négligés.

En remplaçant dans l'équation III.4, les expressions obtenues ci-dessus, l'équation de chaleur devient :

$$T \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} \right] + h \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = ha \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \right] \quad \text{Eq. III.5}$$

Le premier terme de l'équation III.3 représente l'équation de continuité par conséquent, il s'annule.

Finalement l'équation de la température moyenne dans une section donnée prend la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad \text{Eq. III.6}$$

avec :

- $T(x,y,t)$  : la température en °C,
- $u$  : la composante suivant X de la vitesse en [m /s],
- $v$  : la composante suivant Y de la vitesse en [m /s],
- $a$  : coefficient de diffusivité thermique en [m<sup>2</sup>/s].

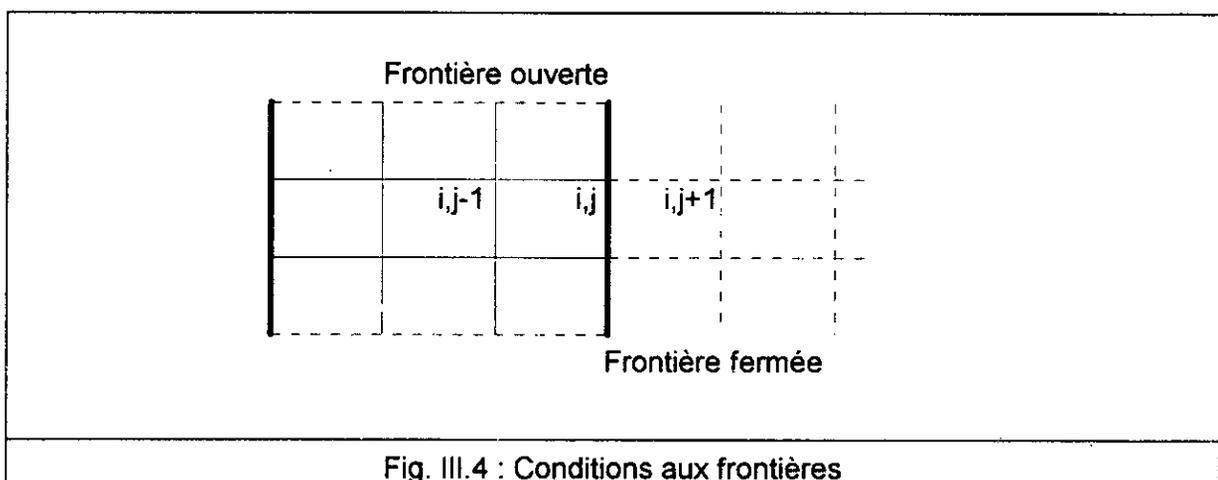
### III.4. Conditions initiales et conditions aux frontières <sup>(18)</sup>.

La condition aux limites (au niveau des parois) pour le modèle thermique peut s'exprimer par la relation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

C'est-à-dire qu'il n'y a pas de transfert de chaleur de part et d'autres des parois solides.

$$T(i, j+1) = T(i, j-1).$$



La température du jet est constante à l'entrée (frontières ouvertes).

*Troisième partie*

*La modélisation numérique*

# Chapitre I : Les méthodes numériques en hydraulique <sup>(1,2,7,9,19,20,27)</sup>

## I.1. Introduction <sup>(7,9,20)</sup>

Depuis longtemps, le domaine hydraulique s'est contenté uniquement de l'approche expérimentale, de la reproduction des phénomènes à étudier en modèles réduits qui donnaient d'assez bon résultats. Mais certains modèles présentaient des inconvénients comme par exemple l'impossibilité de reproduire les effets de la turbulence.

L'utilisation des ordinateurs et les progrès réalisés en informatique ont permis de corriger ces défauts et de résoudre ainsi les modèles mathématiques qui décrivent le phénomène en s'appuyant sur des méthodes numériques.

Lorsqu'on s'intéresse à une méthode de résolution numérique, on doit d'abord résoudre les équations continues régissant le phénomène dans des intervalles discrets d'espaces et de temps. Autrement dit : effectuer une discretisation.

La discretisation consiste à diviser le domaine d'étude en éléments jointifs ou mailles :

en dimension 1 : les mailles sont des segments .

en dimension 2 : les mailles sont des quadrilatères ou triangles.

en dimension 3 : les mailles sont des prismes, tétraèdres ou parallélépipèdes.

Les extrémités de chaque maille sont appelées : noeuds du maillage.

Pour les écoulement transitoires, le temps est divisé en pas de temps pouvant aller de quelques secondes à quelques heures.

Ensuite, on introduit les paramètres qui caractérisent le problème numérique à traiter. Ces paramètres dépendent des spécificité physiques tel que le champ de vitesse.

Les modélisations en hydraulique font souvent appel à des équations aux dérivées partielles. Celles-ci sont alors discrétisées c'est-à-dire approchées par des équations algébriques ayant pour inconnues les valeurs des fonctions à calculer aux noeuds du maillage.

Il existe plusieurs méthodes de discretisation : différences finies, éléments finis, volumes finis ...etc.

Dans la présente étude, nous allons appliquer la méthode des différences finies pour résoudre en premier lieu les équations hydrodynamiques, et en second résoudre l'équation de la chaleur qui décrit l'évolution de la tache thermique.

## I.2. La méthode des différences finies <sup>(7,19)</sup>.

### I.2.1. Principe.

Le principe de la méthode aux différences finies est de calculer d'une part la valeur de la fonction  $f$  qui nous intéresse en des points discrets de l'espace - temps  $(x_i, t)$  et d'autre part approximer les dérivées partielles en un noeud  $M$  par des différences faisant intervenir les valeurs de la grille voisine de  $M$ .

Cette approche s'effectue généralement sur la base du développement en série de Taylor, ci-dessous :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + O(\Delta x)^{n+1}$$

avec :

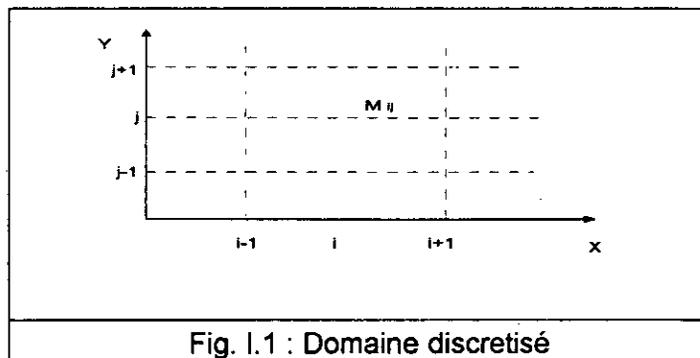
- $\Delta x$  : pas d'espace.
- $f^{(n)}$  : la dérivée  $n^{\text{ème}}$ .
- $O(\Delta x)^{n+1}$  : l'erreur de troncature.

Nous allons nous intéresser maintenant au problème bidimensionnel.

Considérons un point  $M_{i,j}$  appartenant au domaine discretisé représenté par la fig. I.1.

- la direction  $X$  est désignée par l'indice  $i$ ,
- la direction  $Y$  est désignée par l'indice  $j$ ,
- le temps est représenté par le niveau  $k$ .

La dérivée partielle de la fonction  $f$  à deux variables  $x$  et  $y$  au point  $M_{i,j}$  est remplacée par des différences finies avant ou arrière.



En effet pour une dérivée première, on a :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \quad \text{différence avant,}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} \quad \text{différence avant,}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} \quad \text{différence arrière,}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} \quad \text{différence arrière.}$$

où :

$i, j$  : représentent le point du maillage.

$\Delta x, \Delta y$  : les pas d'espaces suivant les deux directions X et Y.

Si en plus le facteur temps intervient, cas des problèmes transitoires, fig. I.2, la dérivée partielle par rapport au temps sera approximée par :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k}{\Delta t}$$

avec :  $\Delta t$  : pas de temps.

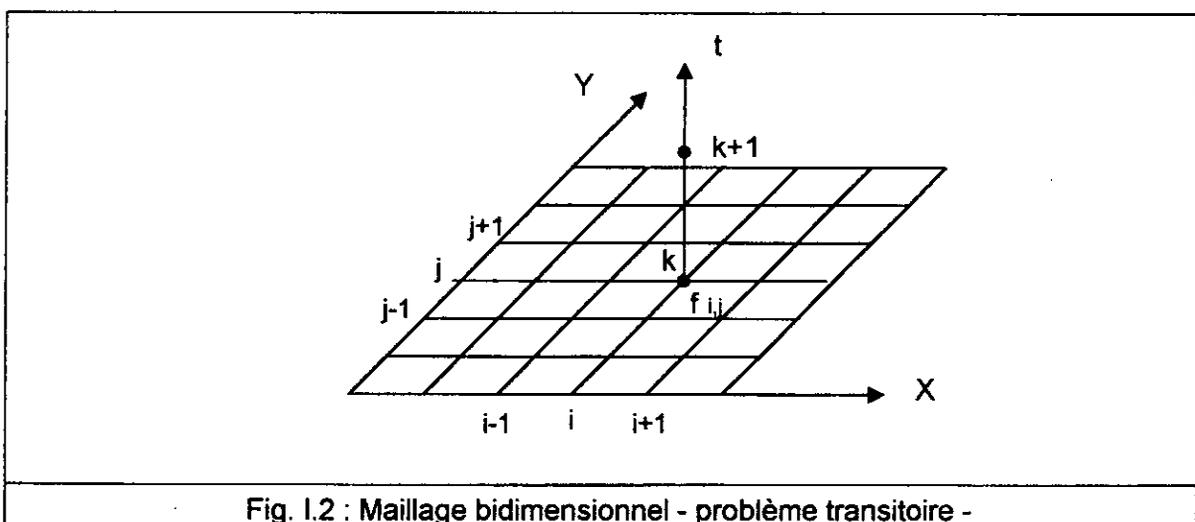


Fig. I.2 : Maillage bidimensionnel - problème transitoire -

## 1.2.2. Les schémas explicites et les schémas implicites.

Il existe deux grandes classes de schémas aux différences finies :

les schémas **explicites**,  
les schémas **implicites**.

### 1.2.2.a. Les méthodes explicites.

Les nouvelles valeurs de la fonction  $f$  en chaque point de calcul au temps  $t+\Delta t$  sont déterminées à partir des valeurs connues des points de calcul situés au voisinage du point considéré, au temps  $t$ .

Autrement dit, pour calculer  $f_{i,j}^{k+1}$ , il suffit d'utiliser seulement les valeurs de la  $k^{\text{ème}}$  étape, d'où le nom explicite.

### 1.2.2.b. Les méthodes implicites.

Le calcul des valeurs de la fonction  $f$  au temps  $t+\Delta t$  est non seulement fonction des valeurs connues au temps  $t$  mais également des valeurs inconnues au temps  $t+\Delta t$ .

On obtient alors un système d'équations algébriques qu'il faut résoudre simultanément pour tous les points de calcul.

### 1.2.2.c. Consistance, convergence et stabilité d'un schéma.

#### 1.2.2.c.i. La consistance.

Un schéma numérique sera consistant si la différence entre les dérivées partielles et les différences finies est infiniment petite.

La qualité de cette consistance s'appelle : la précision du schéma.

#### 1.2.2.c.ii. La convergence.

Un schéma est dit convergent si la solution du problème discrétisé  $\tilde{f}_j$  tend vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque les pas d'espace et de temps tendent simultanément vers zéro.

#### 1.2.2.c.iii. La stabilité.

La stabilité d'un schéma numérique concerne uniquement l'évolution dans le temps.

Un schéma est stable si les erreurs accumulées au cours des différentes approximations successives établies au cours des étapes précédentes (erreurs d'arrondissements, erreurs de troncatures ...) n'augmentent pas à chaque pas de temps.

C'est-à-dire que le stock d'erreurs déjà obtenu à l'étape K ne doit en aucun cas se multiplier à l'étape K+1.

On admet en général qu'un schéma stable et consistant est nécessairement convergent.

### 1.3. Les différents schémas numériques <sup>(1,2,17,27)</sup>.

Plusieurs schémas aux différences finies sont utilisés pour intégrer les équations décrivant les écoulements à surface libre bidimensionnels en régime non permanent. On citera :

Les schémas de Beam et Warming.  
Le schéma de Mac Cormack.  
Le schéma de Lambda.  
Le schéma de Gabutti.

Ces schémas sont du second ordre en espace et en temps, le premier est implicite et les trois autres sont explicites.

#### 1.3.1. les schémas de Beam et Warming.

Le système d'équations II.9 [2<sup>ème</sup> partie] peut être résolu en utilisant des approximations de différences de temps.

La forme générale du schéma est :

$$U^{K+1} = U^K + \Delta t \left[ \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^{K+1} + \frac{1-\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^K + \frac{\xi}{1+\xi} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^{K-1} \right].$$

où :

$\theta$  et  $\xi$  : paramètres qui conditionnent la nature du schéma,  
K et K-1 : les niveaux de temps connus,  
K+1 : niveau de temps inconnu.

Certaines formulations communes à celles présentées par Rychtmeyer et Morton sont présentées dans le tableau suivant :

Schémas	$\theta$	$\xi$
Implicite d'Euler	1	0
Trois points arrières	1	1/2
Formule trapézoïdale (Cranck Nicolson)	1/2	0

### 1.3.2. Le schéma de Mac Cormack :

Le schéma de Mac Cormack s'effectue en deux étapes : prédiction - correction.

Les valeurs des variables de l'écoulement sont connues au niveau de temps K et seront déterminées pour l'étape suivante, c'est-à-dire au niveau de temps K+1.

D'après le schéma de Mac Cormack, l'équation aux dérivées partielles appliquée au point du maillage i,j, peut s'écrire comme suit :

#### Etape de prédiction

$$\tilde{U}_{ij} = U_{ij}^K - \frac{\Delta t}{\Delta x} \nabla_x E_{ij}^K - \frac{\Delta t}{\Delta y} \nabla_y F_{ij}^K - \Delta t S_{ij}^K \quad \begin{cases} 2 \leq i \leq N \\ 2 \leq j \leq M. \end{cases}$$

#### Etape de correction

$$\hat{U}_{ij} = \tilde{U}_{ij} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_x \tilde{E}_{ij} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \Delta_y \tilde{F}_{ij} - \Delta t \tilde{S}_{ij} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq N-1 \\ 1 \leq j \leq M-1 \end{cases}$$

avec :  $\tilde{U}$  et  $\hat{U}$  valeurs intermédiaires de U.

La valeur de U au niveau de temps K+1 se calcule par la formule suivante :

$$U_{ij}^{K+1} = \frac{1}{2}(U_{ij}^K + \hat{U}_{ij}).$$

La première étape du schéma fait appel à un opérateur  $\nabla_x$  et  $\nabla_y$  représentant une différence arrière, alors que la seconde étape utilise l'opérateur  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$  désignant une différence avant.

Ces opérateurs sont définis par :

$$\begin{aligned} \nabla_x U_{ij} &= U_{ij} - U_{i-1,j} \\ \Delta_x U_{ij} &= U_{i+1,j} - U_{ij}. \end{aligned}$$

### I.3.3. le schéma de Lambda.

Le schéma de Lambda a été introduit par Moretti (1979), similaire à celui de Mac Cormack, il s'effectue en deux étapes : prédiction - correction.

La forme vectorielle de ce schéma s'écrit comme suit :

#### Etape de prédiction

$$\tilde{V}_x^+ = \frac{2 V_{ij}^k - 3 \cdot V_{i-1,j}^k + V_{i-2,j}^k}{\Delta x}$$

$$\tilde{V}_x^- = \frac{V_{i+1,j}^k - V_{ij}^k}{\Delta x}$$

#### Etape de correction

$$\hat{V}_x^+ = \frac{\tilde{V}_{ij} - \tilde{V}_{i-1,j}}{\Delta x}$$

$$\hat{V}_x^- = \frac{-2 \tilde{V}_{ij} + 3 \tilde{V}_{i+1,j} - \tilde{V}_{i+2,j}}{\Delta x}$$

La solution finale à l'étape K+1 est égale à :

$$V_{ij}^{k+1} = \frac{1}{2} (V_{ij}^k + \hat{V}_{ij}).$$

### I.3.4. le schéma de Gabutti.

Le schéma de Gabutti n'est autre que l'amélioration du schéma précédent : le schéma de Lambda. Il s'effectue en deux étapes :

L'étape de **prédiction**, qui elle même se compose en deux parties A et B, et l'étape de **correction**. Ce schéma fait appel dans ce cas à trois valeurs intermédiaires  $\tilde{V}$ ,  $\hat{V}$  et  $\bar{V}$ .

L'approximation vectorielle de ce schéma est réalisée de la manière suivante :

### Etape de prédiction

#### Partie A.

$$\tilde{V}_x^+ = \frac{V_{ij}^k - V_{i-1j}^k}{\Delta x}$$

$$\tilde{V}_x^- = \frac{V_{i+1j}^k - V_{ij}^k}{\Delta x}$$

#### Partie B.

$$\hat{V}_x^+ = \frac{2 V_{ij}^k - 3 V_{i-1j}^k + V_{i-2j}^k}{\Delta x}$$

$$\hat{V}_x^- = \frac{-2 V_{ij}^k + 3 V_{i+1j}^k - V_{i+2j}^k}{\Delta x}$$

### Etape de correction

$$\bar{V}_x^+ = \frac{\tilde{V}_{ij} - \tilde{V}_{i-1j}}{\Delta x}$$

$$\bar{V}_x^- = \frac{\tilde{V}_{i+1j} - \tilde{V}_{ij}}{\Delta x}$$

La solution finale à l'étape K+1 se calcule par la formule suivante :

$$V_{ij}^{k+1} = \frac{1}{2} (V_{ij}^k + \hat{V}_{ij} + \bar{V}_{ij} - \tilde{V}_{ij})$$

D'après le schéma de Gabutti, la discretisation du système d'équations II.11 [2<sup>ème</sup> partie], se met sous la forme suivante :

### Etape de prédiction.

#### Partie A.

$$\tilde{V}_{ij} = V_{ij}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G^+ \nabla_x V_{ij}^k + G^- \Delta_x V_{ij}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (H^+ \nabla_y V_{ij}^k + H^- \Delta_y V_{ij}^k) - \Delta t T_{ij}$$

#### Partie B.

$$\hat{V}_{ij} = V_{ij}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G^+ (1 + \nabla_x) \nabla_x V_{ij}^k + G^- (1 - \Delta_x) \Delta_x V_{ij}^k)$$

$$- \frac{\Delta t}{\Delta y} (H^+ (1 + \nabla_y) \nabla_y V_{ij}^k + H^- (1 - \Delta_y) \Delta_y V_{ij}^k) - \Delta t T_{ij}^k$$

**Etape de correction.**

$$\bar{v}_{i,j} = \tilde{v}_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \tilde{G}^+ \nabla_x \tilde{v}_{i,j} + \tilde{G}^- \Delta_x \tilde{v}_{i,j} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \tilde{H}^+ \nabla_y \tilde{v}_{i,j} + \tilde{H}^- \Delta_y \tilde{v}_{i,j} \right) - \Delta t \tilde{T}_{i,j}.$$

A la fin de chaque processus, la nouvelle valeur de  $V$  sera :

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} \left( v_{i,j}^k + \hat{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i,j} \right)$$

## Chapitre II : Résolution du système hydrodynamique - Application du schéma de Gabutti -

### II.1. Développement des matrices.

Le système d'équation qui gouverne l'écoulement non permanent bidimensionnel à surface libre, utilisé pour la résolution numérique, est donné par l'équation suivante :

$$V_t + G^+ V_x + G^- V_x + H^+ V_y + H^- V_y + T = 0.$$

Comme la pente du canal est considérée faible et le régime d'écoulement est fluvial, la vitesse moyenne de l'écoulement dans la direction longitudinale du canal est inférieure à la vitesse de propagation de l'onde  $c$ , par conséquent les valeurs propres  $\lambda_i^+$ ,  $\lambda_i^-$ ,  $\omega_i^+$  et  $\omega_i^-$  prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1^+ = \lambda_1 & \lambda_1^- = 0 & \omega_1^+ = \omega_1 & \omega_1^- = 0 \\ \lambda_2^+ = \lambda_2 & \lambda_2^- = 0 & \omega_2^+ = \omega_2 & \omega_2^- = 0 \\ \lambda_3^+ = 0 & \lambda_3^- = \lambda_3 & \omega_3^+ = 0 & \omega_3^- = \omega_3 \end{array}$$

Ainsi après simplification les matrices  $G^+$ ,  $G^-$ ,  $H^+$  et  $H^-$  s'écrivent comme suit :

$$\begin{array}{l} G^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda_2 & \frac{h}{2c}\lambda_2 & 0 \\ \frac{c}{2h}\lambda_2 & \frac{1}{2}\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad G^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda_3 & -\frac{h}{2c}\lambda_3 & 0 \\ -\frac{c}{2h}\lambda_3 & \frac{1}{2}\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ H^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_2 & 0 & \frac{h}{2c}\omega_2 \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ \frac{c}{2h}\omega_2 & 0 & \frac{1}{2}\omega_2 \end{bmatrix}, \quad H^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_3 & 0 & -\frac{h}{2c}\omega_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c}{2h}\omega_3 & 0 & \frac{1}{2}\omega_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

## II.2. Présentation des étapes de calcul.

### Etape de prédiction.

#### Partie A.

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{ij} \\ \hat{u}_{ij} \\ \hat{v}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ij}^k \\ u_{ij}^k \\ v_{ij}^k \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [G^+]_{ij} \begin{bmatrix} (h_{ij} - h_{i-1j})^k \\ (u_{ij} - u_{i-1j})^k \\ (v_{ij} - v_{i-1j})^k \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [G^-]_{ij} \begin{bmatrix} (h_{i+1j} - h_{ij})^k \\ (u_{i+1j} - u_{ij})^k \\ (v_{i+1j} - v_{ij})^k \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta y} [H^+]_{ij} \begin{bmatrix} (h_{ij} - h_{ij-1})^k \\ (u_{ij} - u_{ij-1})^k \\ (v_{ij} - v_{ij-1})^k \end{bmatrix} \\ - \frac{\Delta t}{\Delta y} [H^-]_{ij} \begin{bmatrix} (h_{ij+1} - h_{ij})^k \\ (u_{ij+1} - u_{ij})^k \\ (v_{ij+1} - v_{ij})^k \end{bmatrix} - \Delta t [T]_{ij}^k$$

#### Partie B

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{ij} \\ \hat{u}_{ij} \\ \hat{v}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ij}^k \\ u_{ij}^k \\ v_{ij}^k \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [G^+]_{ij} \begin{bmatrix} (2h_{ij} - 3h_{i-1j} + h_{i-2j})^k \\ (2u_{ij} - 3u_{i-1j} + u_{i-2j})^k \\ (2v_{ij} - 3v_{i-1j} + v_{i-2j})^k \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [G^-]_{ij} \begin{bmatrix} (-2h_{ij} + 3h_{i+1j} - h_{i+2j})^k \\ (-2u_{ij} + 3u_{i+1j} - u_{i+2j})^k \\ (-2v_{ij} + 3v_{i+1j} - v_{i+2j})^k \end{bmatrix} \\ - \frac{\Delta t}{\Delta y} [H^+]_{ij} \begin{bmatrix} (2h_{ij} - 3h_{ij-1} + h_{ij-2})^k \\ (2u_{ij} - 3u_{ij-1} + u_{ij-2})^k \\ (2v_{ij} - 3v_{ij-1} + v_{ij-2})^k \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta y} [H^-]_{ij} \begin{bmatrix} (-2h_{ij} + 3h_{ij+1} - h_{ij+2})^k \\ (-2u_{ij} + 3u_{ij+1} - u_{ij+2})^k \\ (-2v_{ij} + 3v_{ij+1} - v_{ij+2})^k \end{bmatrix} - \Delta t [T]_{ij}^k$$

**Etape de correction.**

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \bar{h}_{i,j} \\ \bar{u}_{i,j} \\ \bar{v}_{i,j} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_{i,j} \\ \tilde{u}_{i,j} \\ \tilde{v}_{i,j} \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\tilde{G}^+]_{i,j} \begin{bmatrix} (\tilde{h}_{i,j} - \tilde{h}_{i-1,j}) \\ (\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i-1,j}) \\ (\tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i-1,j}) \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\tilde{G}^-]_{i,j} \begin{bmatrix} (\tilde{h}_{i+1,j} - \tilde{h}_{i,j}) \\ (\tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i,j}) \\ (\tilde{v}_{i+1,j} - \tilde{v}_{i,j}) \end{bmatrix} \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} [\tilde{H}^+]_{i,j} \begin{bmatrix} (\tilde{h}_{i,j} - \tilde{h}_{i,j-1}) \\ (\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j-1}) \\ (\tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i,j-1}) \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta y} [\tilde{H}^-]_{i,j} \begin{bmatrix} (\tilde{h}_{i,j+1} - \tilde{h}_{i,j}) \\ (\tilde{u}_{i,j+1} - \tilde{u}_{i,j}) \\ (\tilde{v}_{i,j+1} - \tilde{v}_{i,j}) \end{bmatrix} \\
 &\quad - \Delta t [\tilde{T}]_{i,j}
 \end{aligned}$$

**La nouvelle valeur de V au temps k+1 sera :**

$$\begin{bmatrix} h_{ij}^{k+1} \\ u_{ij}^{k+1} \\ v_{ij}^{k+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_{ij}^k + \hat{h}_{ij} + \bar{h}_{ij} - \tilde{h}_{ij} \\ u_{ij}^k + \hat{u}_{ij} + \bar{u}_{ij} - \tilde{u}_{ij} \\ v_{ij}^k + \hat{v}_{ij} + \bar{v}_{ij} - \tilde{v}_{ij} \end{bmatrix}$$

**II.3. Condition aux limites.**

D'après le schéma de Gabutti, pour déterminer les conditions aux limites, au niveau des parois solides, on multiplie chaque terme du système d'équations II.10 [2<sup>ème</sup> partie] par la matrice  $M^{-1}$  :

$$M^{-1}V_t + D_G M^{-1}V_x + M^{-1} N D_H N^{-1} V_y + M^{-1} T = 0.$$

Puis on pose la condition  $u=0$  (ou  $u_t = 0$ ) : vitesse nulle près de la paroi et en effectuant des opérations de simplifications, on aboutit aux relations suivantes :

$$h_t + \lambda_3 \bar{h}_x - \lambda_3 \frac{h}{c} \bar{u}_x + \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3)h_y - \frac{h}{c}\omega_1 u_y + \frac{h}{2c}(\omega_2 - \omega_3)v_y + g \frac{h}{c} (S_{0x} - S_{fx} + \frac{\tau_x^v}{\rho \cdot g \cdot h}) = 0.$$

$$u_t = 0.$$

$$v_t + \frac{c}{2h}(\omega_2 - \omega_3)h_y + \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3)v_y - g(S_{0y} - S_{fy} + \frac{\tau_x^v}{\rho \cdot g \cdot h}) = 0.$$

Les trois équations précédentes permettent la détermination des variables  $h$ ,  $u$  et  $v$  de l'écoulement près de la paroi solide.

## II.4. Stabilité du schéma.

Les schémas numériques et plus précisément les schémas explicites sont conditionnés par l'intervalle de temps. Une fois cet intervalle mal choisi, il y a apparition du phénomène d'instabilité numérique.

Pour avoir des résultats cohérents, il faut que le pas d'espace et d'intervalle de temps en chaque point de calcul satisfasse à la condition C.F.L du nom de trois mathématiciens : Courant, Friedrichs et Lewy, qui s'exprime par le nombre de courant  $C_r$  :

$$C_r = \frac{\Delta t (c + |u|)}{\Delta x}$$

avec :

$$c = \sqrt{g \frac{S_m}{B}}$$

ou :

$c$  : représente la célérité de l'onde,  
 $S$  : la surface mouillée,  
 $B$  : la largeur du plan d'eau,  
 $g$  : l'accélération de la pesanteur.

Pour le schéma de Gabutti , le nombre de courant doit être inférieur ou égal à deux :  $C_r \leq 2$ .

Pour les écoulement bidimensionnels, la condition de stabilité qui impose le pas de temps  $\Delta t$ , est donnée par l'expression suivante :

$$C_r = \frac{(V + \sqrt{gh}) \cdot \Delta t}{\Delta x \Delta y} \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leq 2$$

d'où :

$$\Delta t \leq \frac{C_r \Delta x \Delta y}{\max (V + \sqrt{gh}) \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad \text{Eq. II.1}$$

avec :

$V$  : module de la vitesse au point du maillage.  
 $C_r$  : nombre de courant.

La formule II.1 permet de fixer le pas de temps à chaque itération.

## Chapitre III : Résolution de l'équation de la chaleur. - Schéma explicite décentré - <sup>(7,29)</sup>

### II.1. Présentation du schéma.

Pour tous les schémas, la dérivée partielle d'une fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$ , peut être approximée par des différences centrées ou décentrées : avant, arrière.

$$\begin{aligned} \text{centrées} & : \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}, \\ \text{décentrées :} & \quad \text{avant} : \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \\ & \quad \text{arrière} : \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation de la chaleur (Eq. III.6 [2<sup>ème</sup> partie]), un schéma explicite de différences finies décentrées en espace est utilisé.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]. \quad \text{Eq. III.1}$$

Les dérivées partielles de la fonction  $f = T$  à deux variables d'espaces  $(x, y)$  sont remplacées par des différences finies.

Le calcul s'effectue dans le même domaine discretisé représenté par la fig. I.2, utilisé pour le modèle hydrodynamique.

L'approche des dérivées s'effectue comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{T_{ij} - T_{i-1j}}{\Delta x} & \text{Si } u_{ij} > 0. \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{T_{i+1j} - T_{ij}}{\Delta x} & \text{Si } u_{ij} < 0. \end{aligned}$$

La stabilité de ce schéma numérique est donné par la condition C.F.L.

## II.2. Application au modèle thermique.

La discrétisation de l'équation III.1 en un schéma explicite décentré permet d'écrire :

$$\frac{T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^k}{\Delta t} + u_{ij} \cdot \frac{T_{\alpha_1 j}^k - T_{\alpha_2 j}^k}{\Delta x} + v_{ij} \cdot \frac{T_{i\beta_1}^k - T_{i\beta_2}^k}{\Delta x} = a \left[ \frac{T_{i+1j}^k - 2T_{ij}^k + T_{i-1j}^k}{\Delta x^2} + \frac{T_{ij+1}^k - 2T_{ij}^k + T_{ij-1}^k}{\Delta y^2} \right]$$

avec :  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  des indices dépendants des signes des vitesses  $u$  et  $v$ .

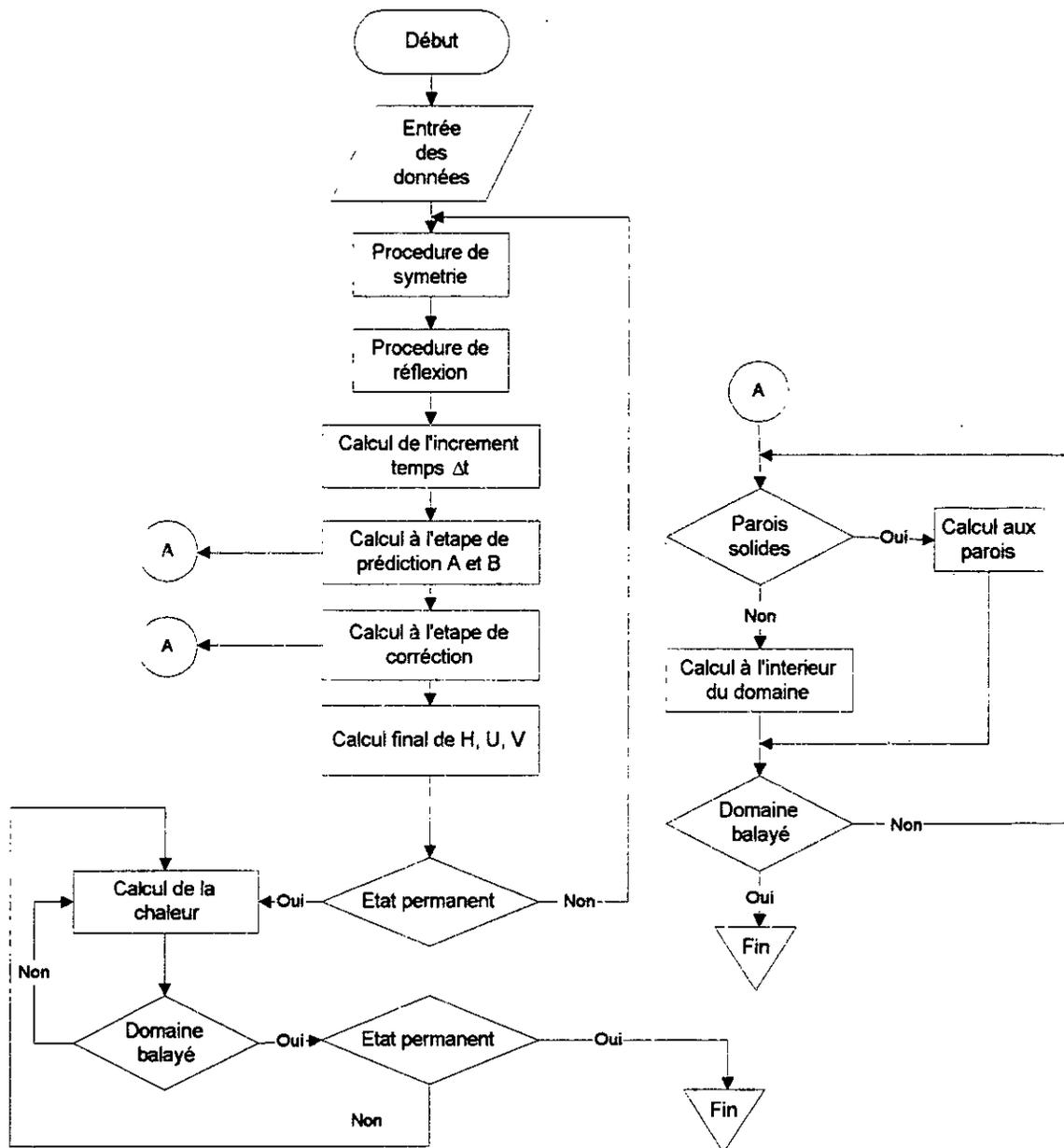
La vitesse	$u > 0$	$u < 0$	$v > 0$	$v < 0$
$\alpha_1$	$i$	$i+1$	-	-
$\alpha_2$	$i-1$	$i$	-	-
$\beta_1$	-	-	$j$	$j+1$
$\beta_2$	-	-	$j-1$	$j$

La température en chaque noeud du maillage  $(i,j)$  à l'instant  $t+\Delta t$  est alors exprimée par la formule suivante :

$$\frac{T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^k}{\Delta t} + \Delta t u_{ij} \cdot \frac{T_{\alpha_1 j}^k - T_{\alpha_2 j}^k}{\Delta x} + \Delta t v_{ij} \cdot \frac{T_{i\beta_1}^k - T_{i\beta_2}^k}{\Delta x} = \Delta t a \left[ \frac{T_{i+1j}^k - 2T_{ij}^k + T_{i-1j}^k}{\Delta x^2} + \frac{T_{ij+1}^k - 2T_{ij}^k + T_{ij-1}^k}{\Delta y^2} \right]$$

Le calcul du champ de température  $T(x,y,t)$  s'effectue une fois le champ des hauteurs  $h(x,y,t)$  et des vitesses  $u(x,y,t)$ ,  $v(x,y,t)$  est déterminé.

## Chapitre IV : Organigramme de calcul



*Quatrième partie*  
*Application et*  
*présentation des résultats*

## chapitre I : Le modèle hydrodynamique.

### 1<sup>ère</sup> application : Ecoulement subcritique dans un canal rectangulaire symétrique.

#### A. Présentation de l'application.

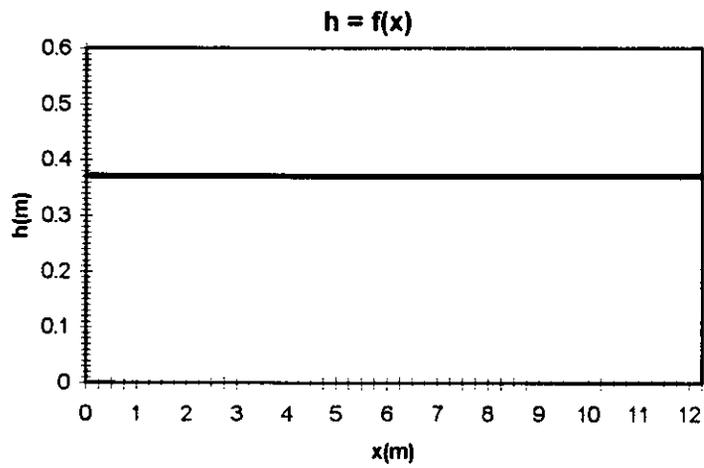
Dans cette application, nous allons étudier, l'écoulement non permanent subcritique (fluvial) dans canal symétrique de section rectangulaire.

Les données utilisées sont celles de l'essai Sayre et Chang (1968) et sont présentées dans le tableau suivant :

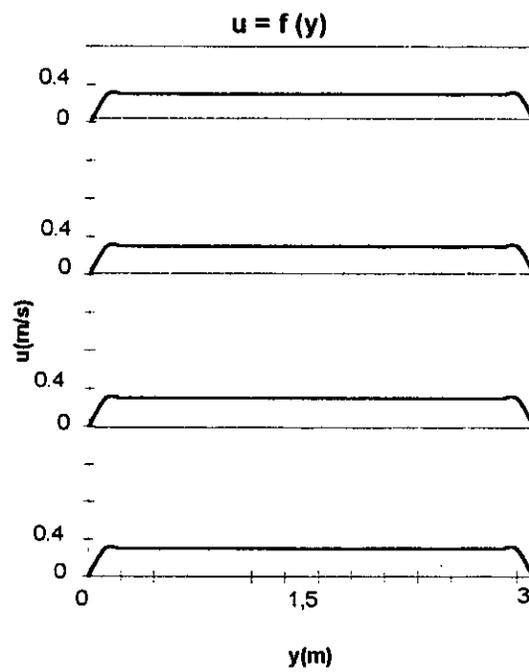
Rugosité n	0.01
Largeur du canal	300 Cm
Longueur du canal	1200Cm
pente du fond	nulle
Les conditions initiales	$u_0 = 0.371 \text{ m/s} \rightarrow F_0 = 0.194$ $v_0 = 0 \text{ m/s}$ $h_0 = 0.371 \text{ m}$
$l_{\max}$	50
$J_{\max}$	28
$T_{\max}$	2000 s

Pour nos calcul nous utiliserons un nombre de courant  $C_r = 0.8$

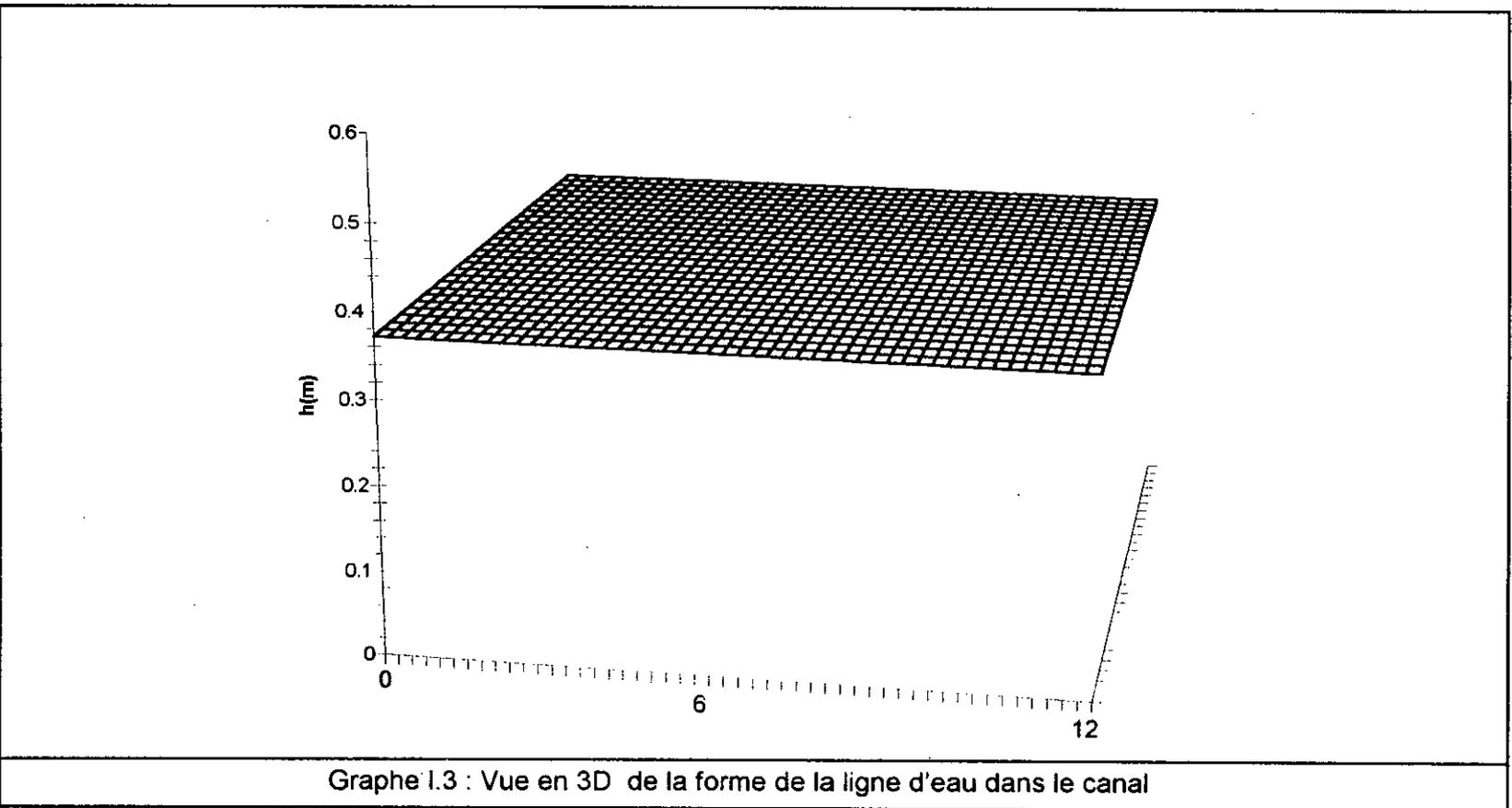
**B. Résultats et analyses.**



Graphe I.1 : Variation de la profondeur  $h$  en fonction de  $x$



Graphe I.2 : Profil des vitesses longitudinales suivant l'axe  $y$  pour les différentes positions 0, 4, 8 et 12 m



Graphe I.3 : Vue en 3D de la forme de la ligne d'eau dans le canal

### C. Conclusion.

On remarque d'après les résultats obtenus dans cette première application que la ligne d'eau représentée par le graphe I.1 est presque constante. La courbe décroît très légèrement; la variation représente à peu près 0.2% (0.001 m). ceci s'explique par le fait qu'on est en présence d'un canal horizontal ( $I = 0$ ), la courbe est de type  $H_2$ ; remous d'abaissement.

Pour pouvoir tester la fiabilité du modèle hydrodynamique mis au point, nous avons retenu un modèle mathématique qui utilise les mêmes hypothèses que nous avons émises. Ce modèle servira de base de comparaison à défaut de données expérimentales.

Les graphes I.1 et I.2, montrent que la ligne d'eau suivant l'axe de l'écoulement et les vitesses longitudinales dans les sections transversales sont identiques à ceux obtenus avec la méthode simple modifiée de Patankar cf. annexe 1, pour le même exemple d'application.

Notre modèle atteint l'état permanent à  $t = 320$  s.

Cette première application a permis de vérifier :

- le choix des conditions aux limites,
- l'hypothèse des faibles variations de hauteur suivant les deux directions X et Y,
- et surtout la cohérence et l'exactitude des résultats obtenus.

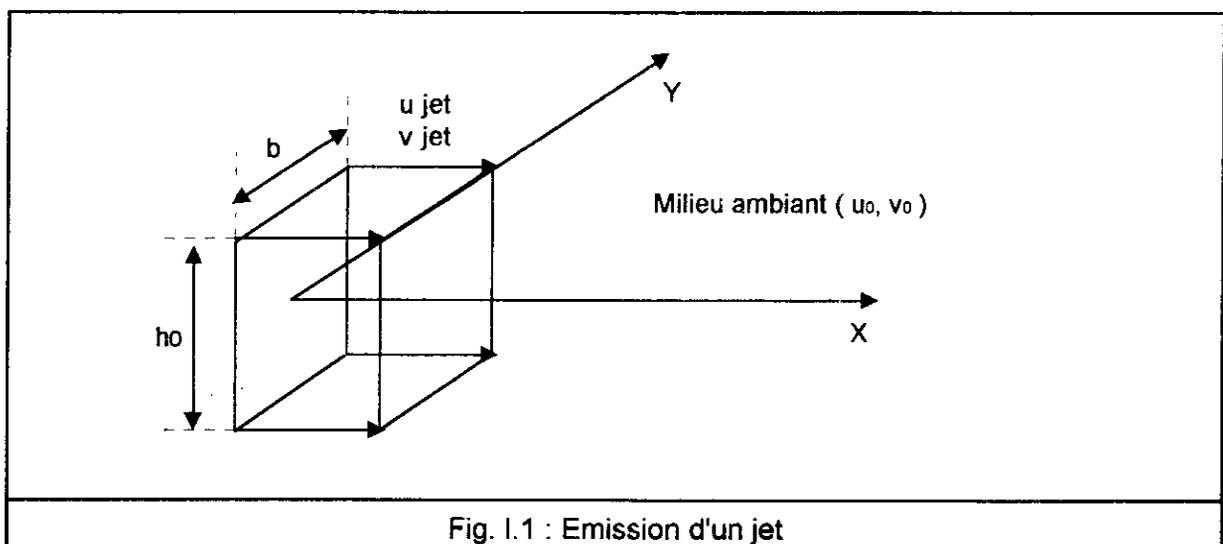
## 2<sup>ème</sup> application : Etude d'un jet constant à l'entrée du canal d'une largeur $b = 0.1$ m.

### A. Présentation de l'application.

Dans cette partie, nous étudierons un jet constant submergé d'une largeur  $b$ . les conditions initiales d'écoulement sont présentées dans le tableau suivant :

Largeur du canal	50 Cm
Longueur du canal	75Cm
Pente du fond	nulle
Rugosité $n$	0.05
Largeur du jet	10 Cm
vitesse du jet	$u_j = 0.02$ m/s $v_j = 0$ m/s
Les conditions initiales du milieu ambiant	$u_0 = 0.01$ m/s $v_0 = 0$ m/s $h_0 = 0.05$ m

Le jet est représenté par la figure I.1.



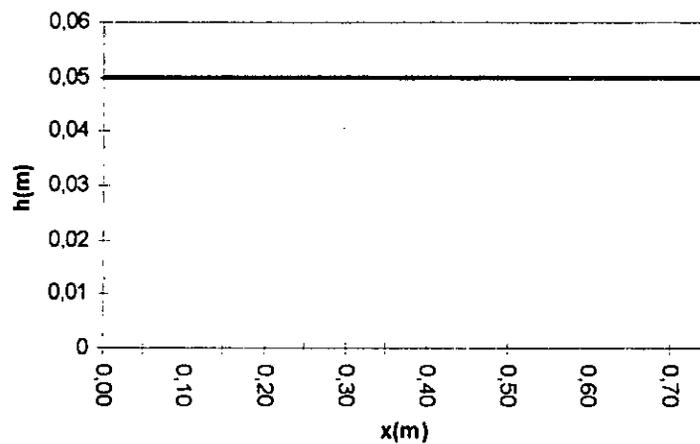
Nous utilisons les pas d'espace suivants :

$$\Delta x = 0.025 \text{ m,}$$

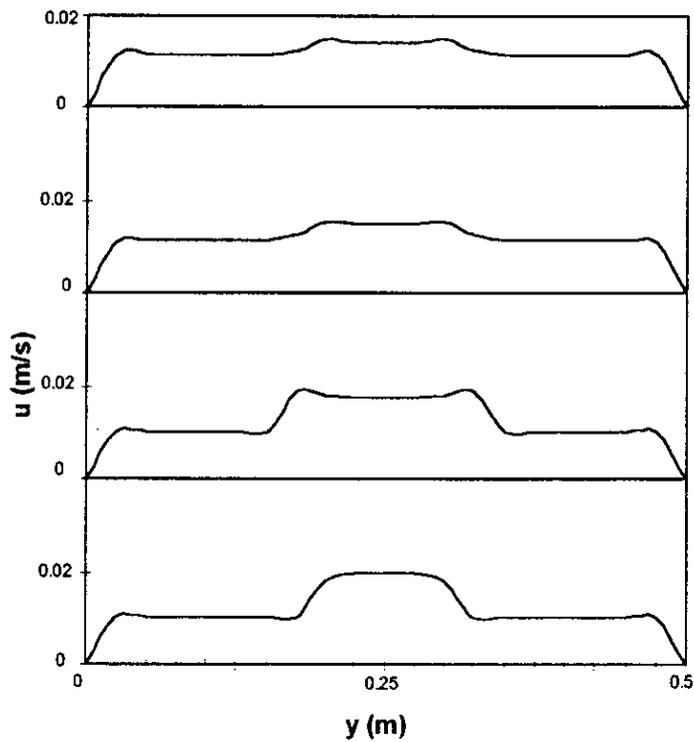
$$\Delta y = 0.05 \text{ m.}$$

Le pas de temps est calculé à partir de la condition C.F.L pour un nombre de courant  $C_r = 0.8$

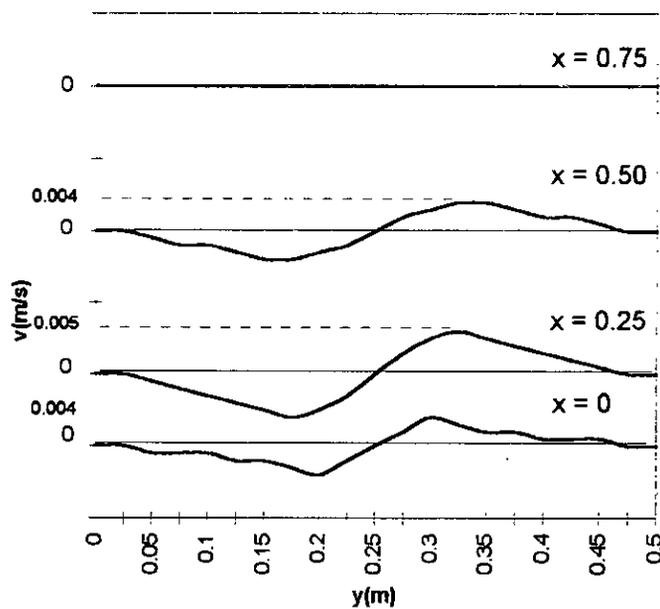
## B. Résultats et analyses.



Graph 1.4 : Variation de la profondeur  $h$  en fonction de  $x$  dans le cas d'un rejet constant à l'entrée du canal d'une largeur de 0.1 m



Grphe 1.5 : Profil des vitesses longitudinales suivant l'axe Y pour les différentes positions 0, 0.25, 0.5, 0.75 m, dans le cas d'un rejet constant à l'entrée du canal d'une largeur de 0.1 m



Grphe 1.6 : Profil des vitesses transversales suivant l'axe Y pour les différentes positions 0, 0.25, 0.5, 0.75 m, dans le cas d'un rejet constant à l'entrée du canal d'une largeur de 0.1 m

### C. Conclusion.

D'après les résultats obtenus, on constate :

- que l'état permanent s'installe à partir de  $t = 75$  s,
- la présence d'une importante discontinuité de vitesse sur les limites du jet à l'entrée du canal,
- la présence d'une partie centrale où le profil de vitesse conserve la même répartition de vitesse qu'à la sortie du jet,
- plus on s'éloigne de l'entrée du canal, plus les vitesses vont décroître pour se raccorder aux vitesses du milieu ambiant. Le raccordement des vitesses s'explique par le fait que les vitesses de la partie centrale sont freinées d'une part et les vitesses du milieu ambiant sont, d'autre part, entraînées par le mélange du fluide sortant de la fente (graphe. I.5),
- l'apparition de faibles vitesses transversales dues au mélange des deux fluides (graphe. I.6),
- qu'à partir d'une certaine distance, la distribution des vitesses peut être facilement approchée par une courbe de Gauss.

## chapitre II : Le modèle thermique.

### 1<sup>ère</sup> application : Etude d'un rejet thermique constant.

#### A. Présentation de l'application.

Dans cette application, nous allons déterminer le comportement du rejet thermique dans le canal rectangulaire présenté dans la 2<sup>ème</sup> application [chapitre I]. nous utiliserons les résultats obtenus dans le modèle hydrodynamique, une fois le régime permanent établi.

La température  $T$  fonction des variables  $x$ ,  $y$  et  $t$ , est présentée sous forme graphique pour divers cas de rejet :

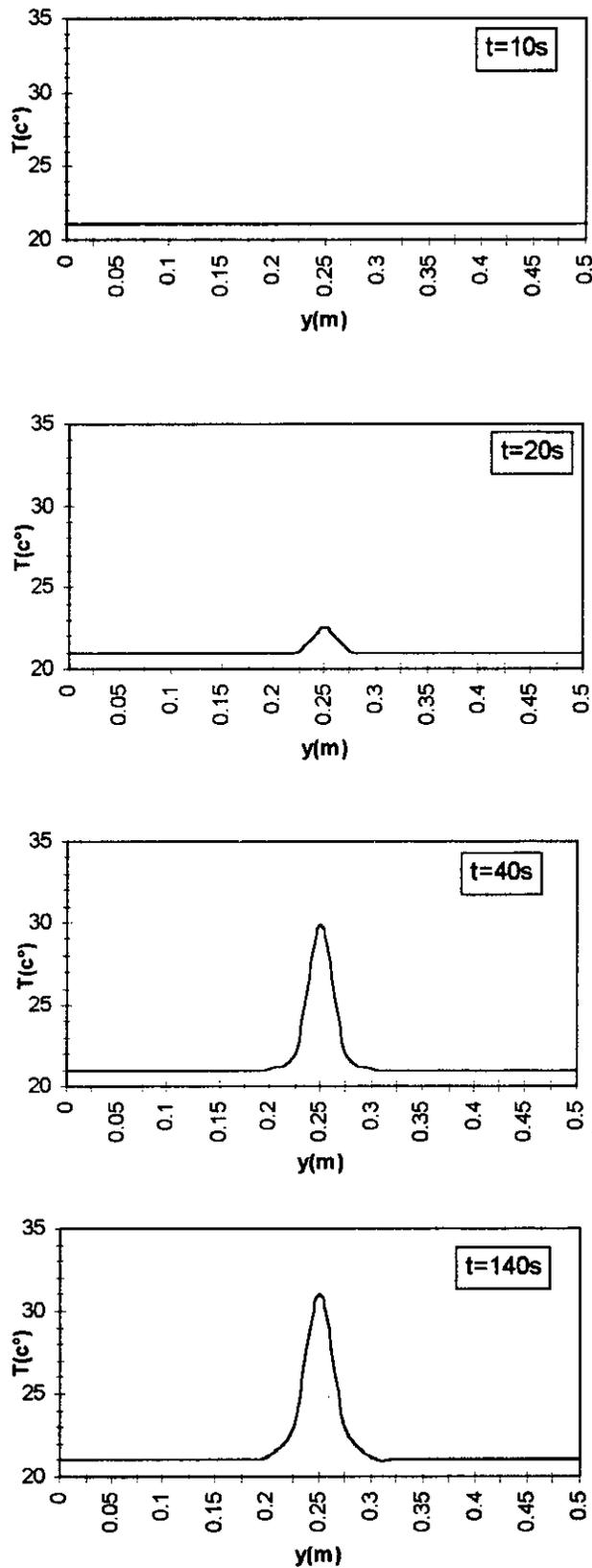
- 1<sup>er</sup> cas : rejet thermique constant ponctuel à l'entrée du canal,
- 2<sup>ème</sup> cas : rejet thermique constant sur une petite largeur  $b$  à l'entrée du canal,
- 3<sup>ème</sup> cas : rejet thermique constant sur une grande largeur  $B$  à l'entrée du canal.

Les conditions initiales du rejet thermique sont :

la température du jet	: $T_r = 31^\circ\text{C}$ ,
la différence de température	: $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ ,
la diffusivité thermique	: $a = 5.27 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{h}$ ,
la petite largeur	: $b = 0.05 \text{ m}$ ,
la grande largeur	: $B = 0.10 \text{ m}$ ,
la vitesse du jet	: $u_{\text{jet}} = 0.02 \text{ m/s}$ ,
	$v_{\text{jet}} = 0 \text{ m/s}$ .

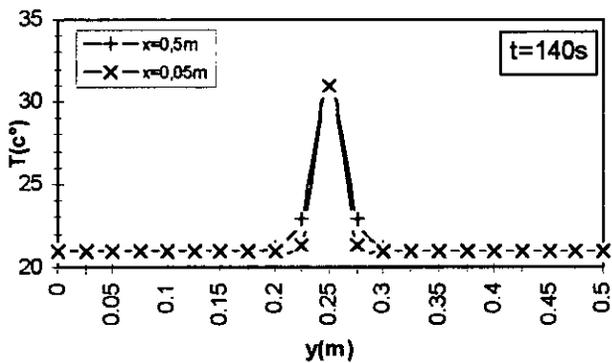
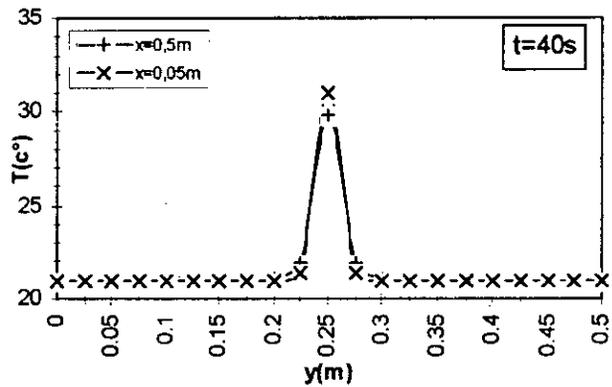
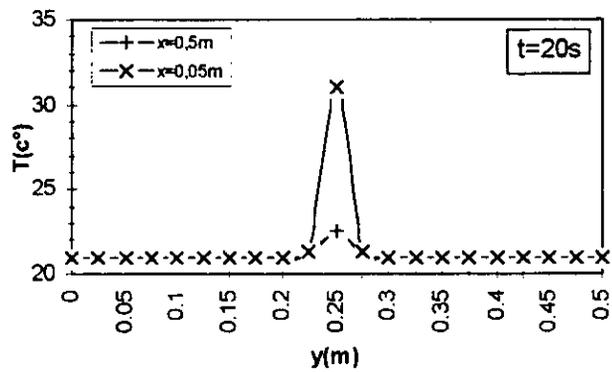
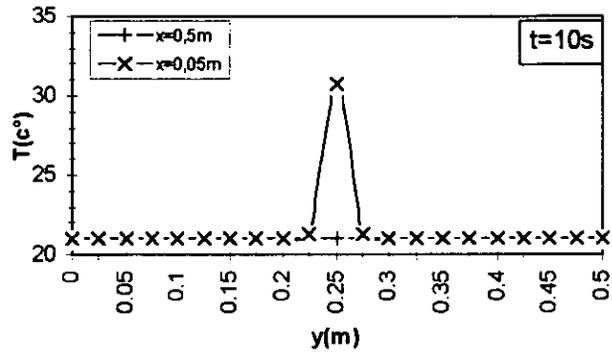
**B. Présentation des résultats et analyse.**

*Rejet ponctuel #1*



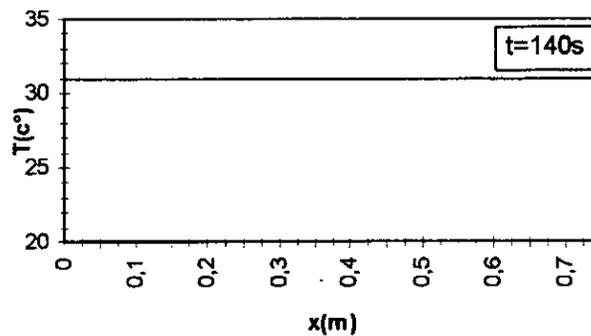
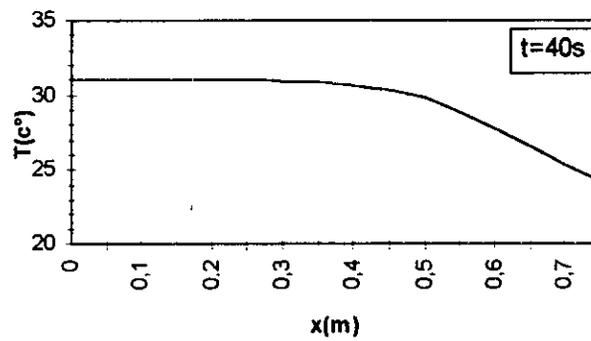
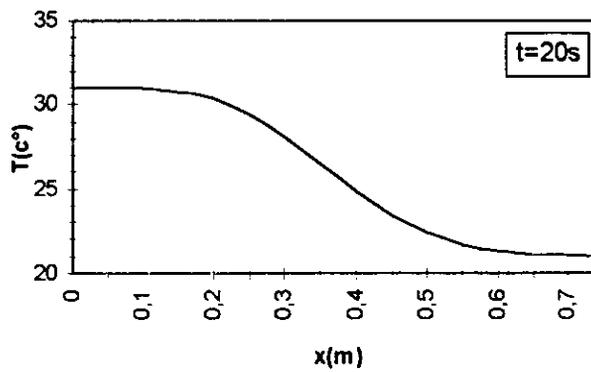
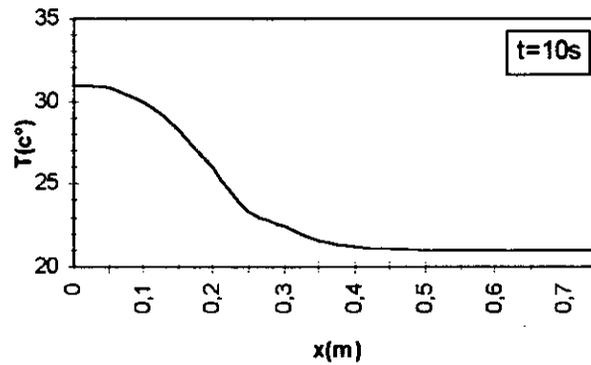
Graphes II.1 : Variation de la température en fonction de  $y$  à la position  $x = 0.5\text{ m}$  à l'aval d'un rejet ponctuel constant à l'entrée du canal, pour différents instants

Rejet ponctuel #2



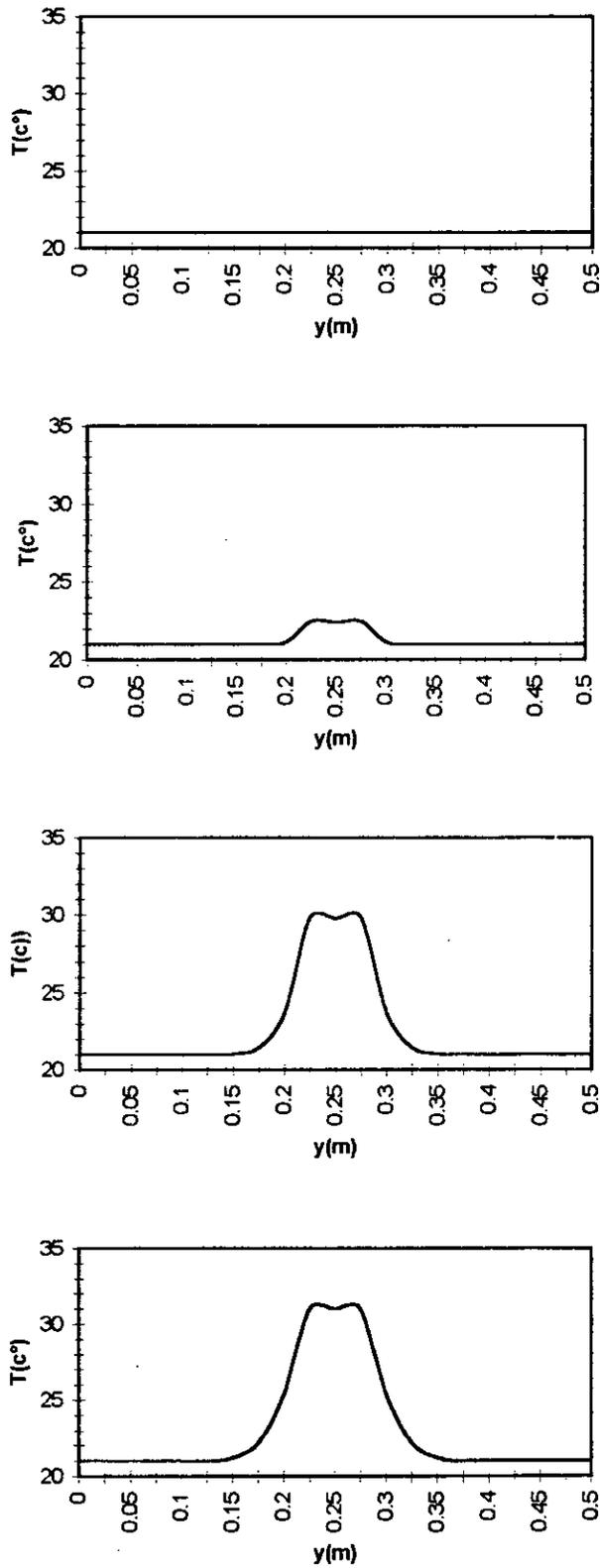
Graphe II.2 : Variation de la température en fonction de y à différentes positions  $x_i$  à l'aval d'un rejet ponctuel constant à l'entrée du canal, pour différents instants

Rejet ponctuel #3



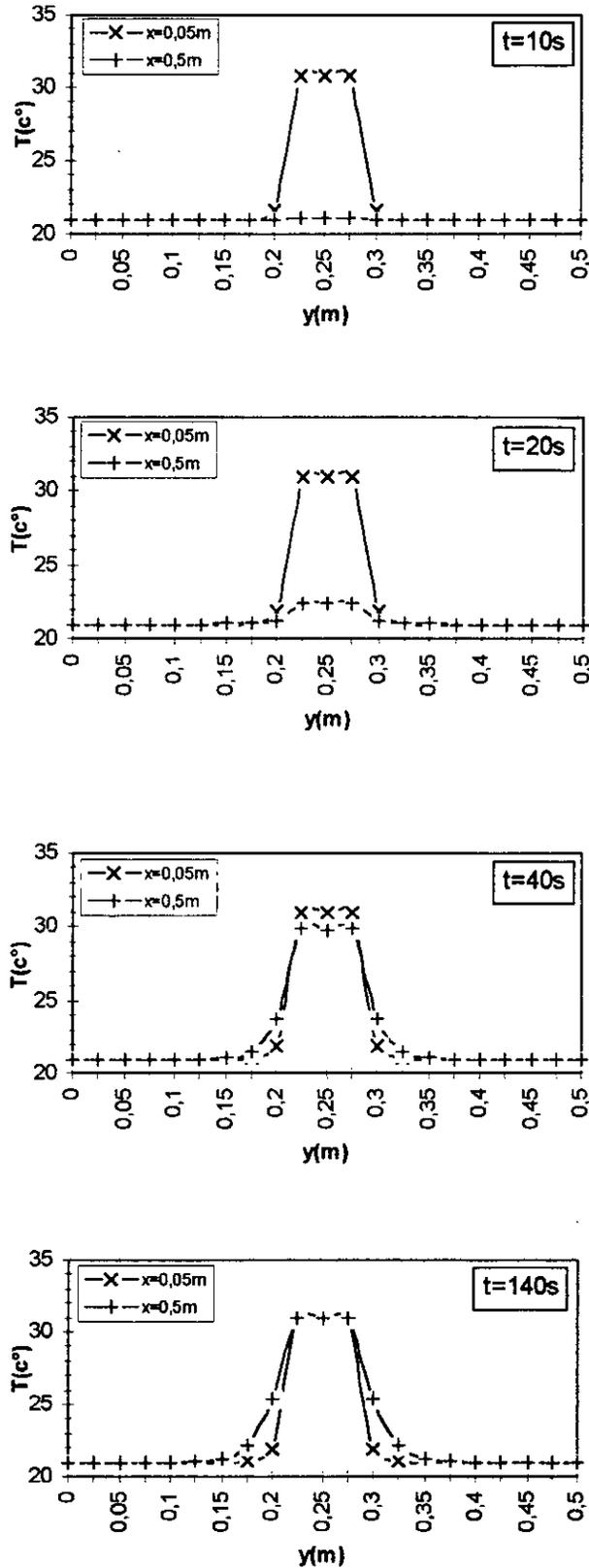
Grphe II.3 : Variation de la température  $T$  en fonction de  $x$  à la position  $y = 0.25\text{ m}$  à l'aval d'un rejet ponctuel constant à l'entrée du canal, pour différents instants

*Rejet petite largeur #1*



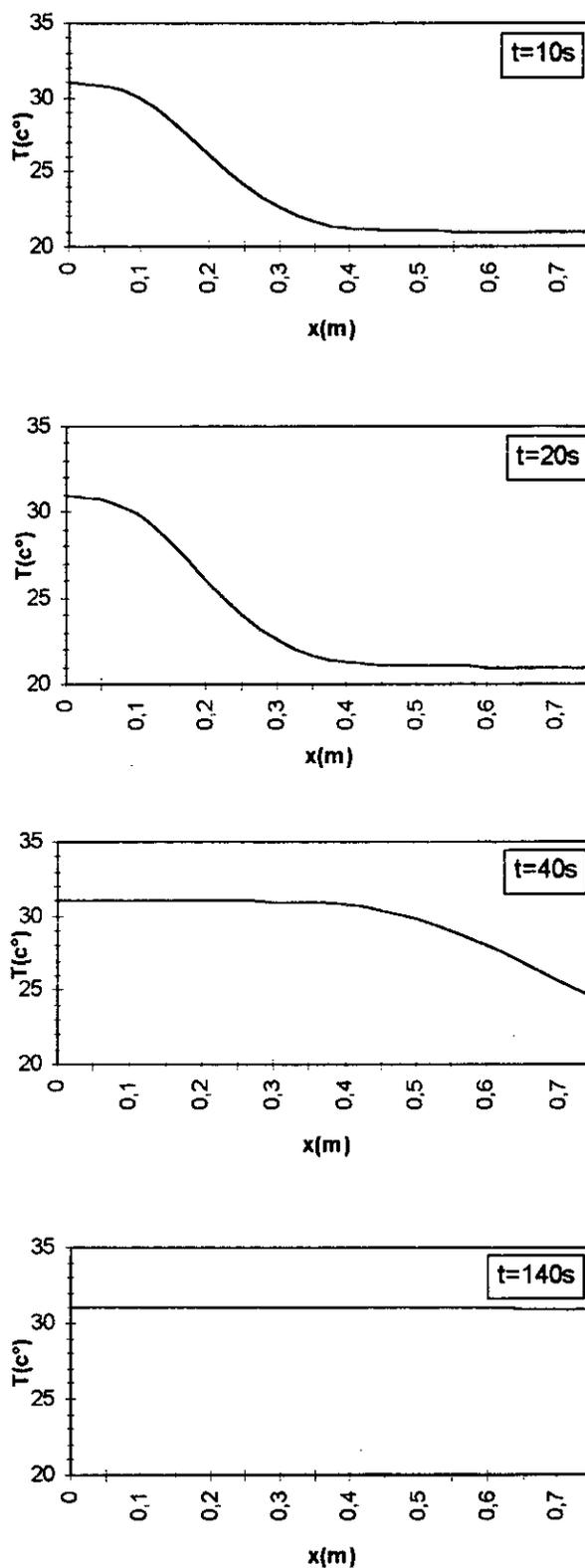
Graphé II.4 : Variation de la température en fonction de  $y$  à la position  $x = 0.5$  m à l'aval d'un rejet constant d'une largeur  $b = 0.05$  m à l'entrée du canal, pour différents instants

Rejet petite largeur #2



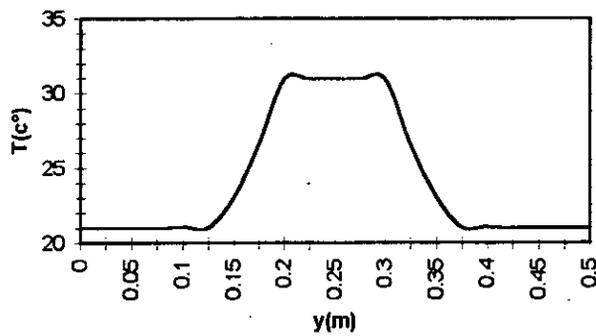
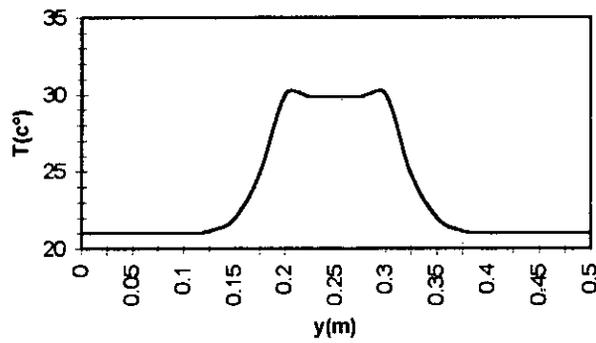
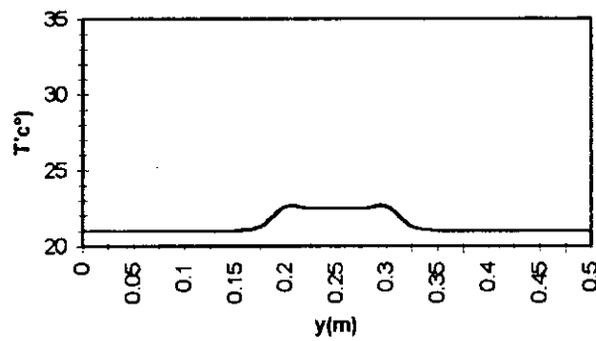
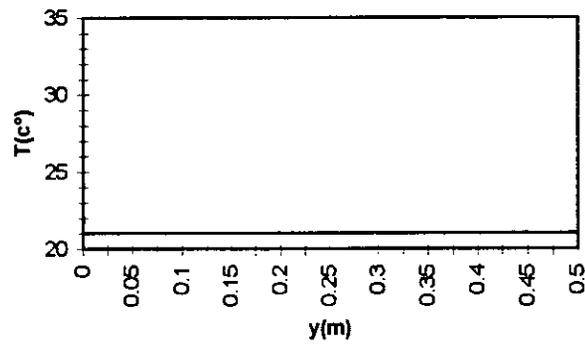
Graphe II.5 : Variation de la température en fonction de y à différentes positions  $x_i$  à l'aval d'un rejet constant d'une largeur  $b = 0.05$  m à l'entrée du canal, pour différents instants

*Rejet petite largeur #3*



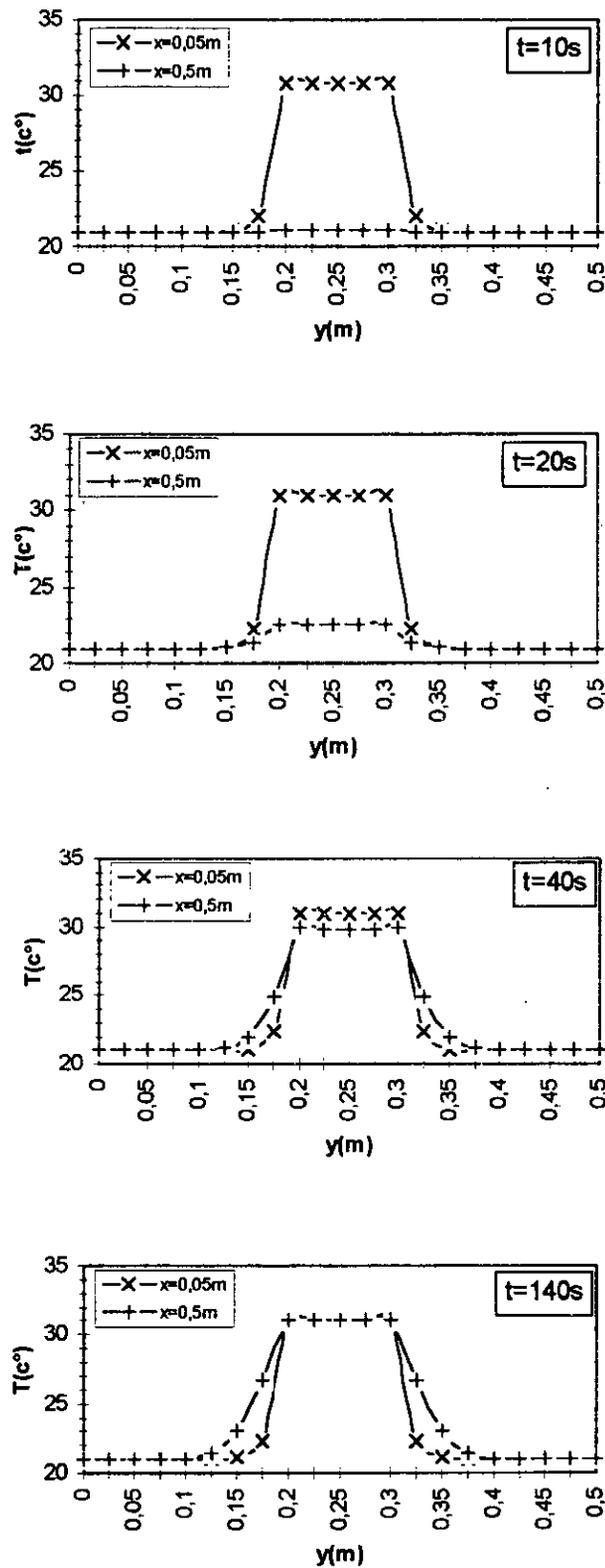
Graphe II.6 : Variation de la température en fonction de  $x$  à la position  $y = 0.25$  m à l'aval d'un rejet constant sur une petite largeur  $b = 0.05$  m à l'entrée du canal, pour différents instants

*Rejet grande largeur #1*



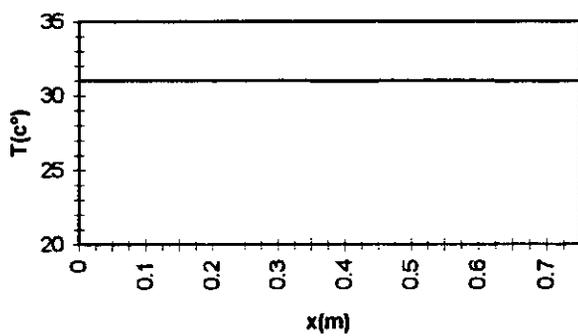
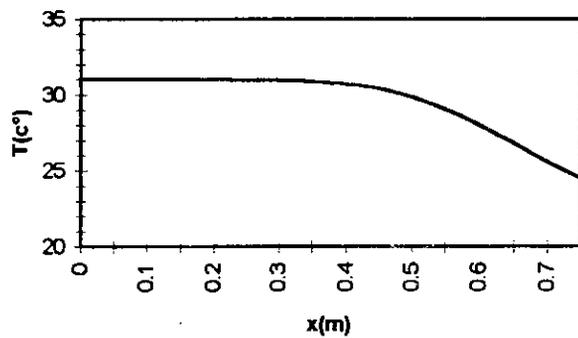
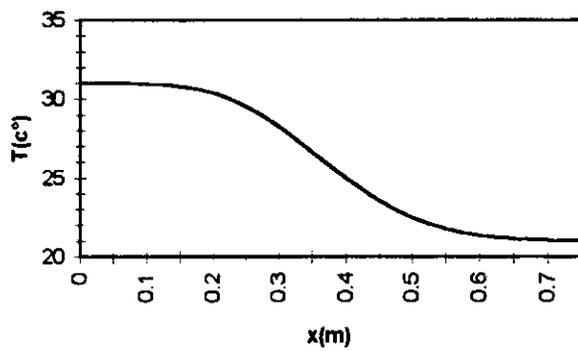
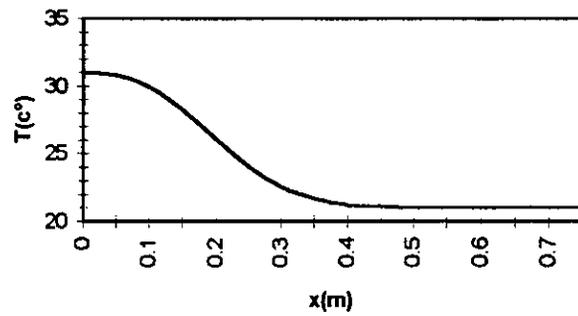
Graphe II.7 : Variation de la température en fonction de  $y$  à la position  $x = 0.5$  m à l'aval d'un rejet constant d'une largeur  $B = 0.1$  m à l'entrée du canal, pour différents instants

Rejet grande largeur #2



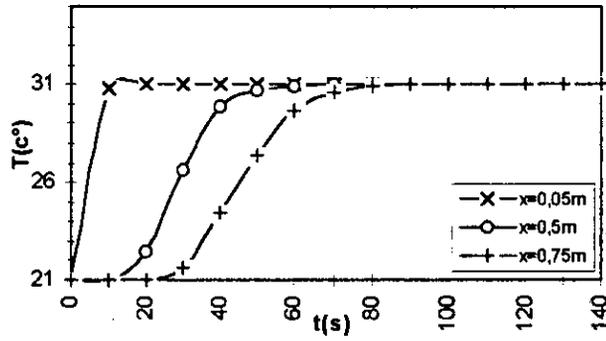
Grphe II.8 : Variation de la température en fonction de  $y$  à différentes positions  $x_i$  à l'aval d'un rejet constant d'une largeur  $B = 0.1$  m à l'entrée du canal, pour différents instants

*Rejet grande largeur #3*

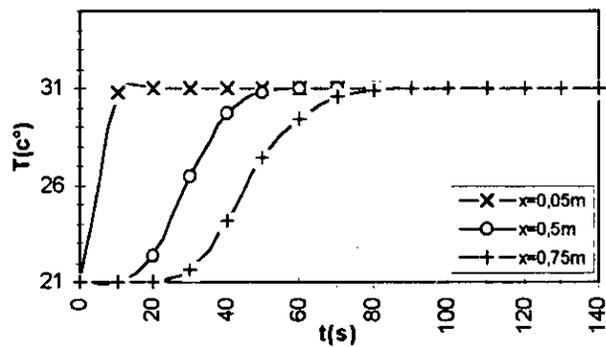


Graphe II.9 : Variation de la température en fonction de x à la position y = 0.25 m à l'aval d'un rejet constant sur une grande largeur B = 0.1 m à l'entrée du canal, pour différents instants

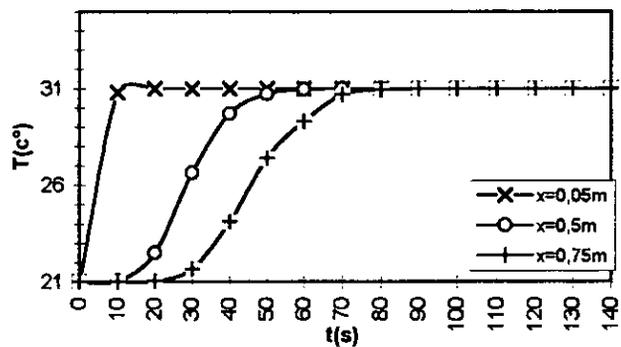
Comparaison des différents rejets



a) Rejet ponctuel,

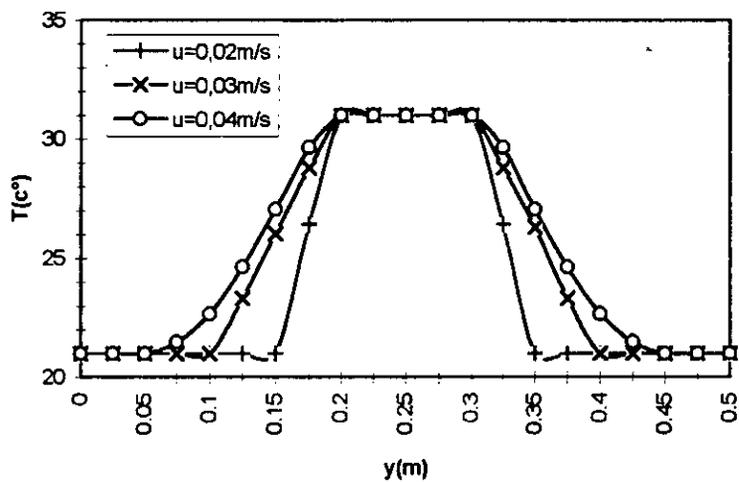


b) Rejet sur une petite largeur,

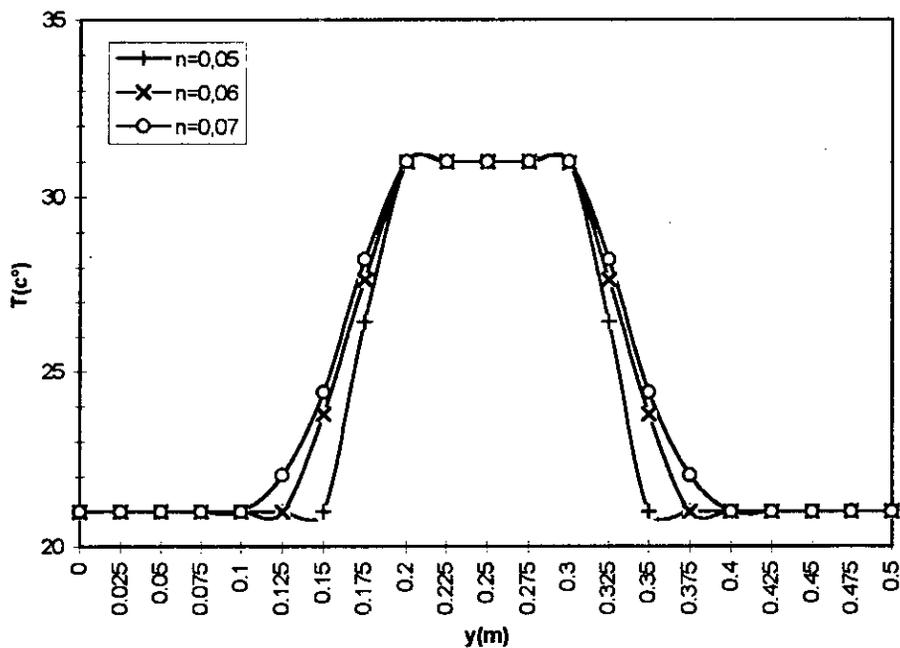


c) Rejet sur une grande largeur

Graphe II.10 : Comparaison des différents rejets



Graphe II.11 : Influence de la vitesse du jet sur la dispersion de la tache thermique

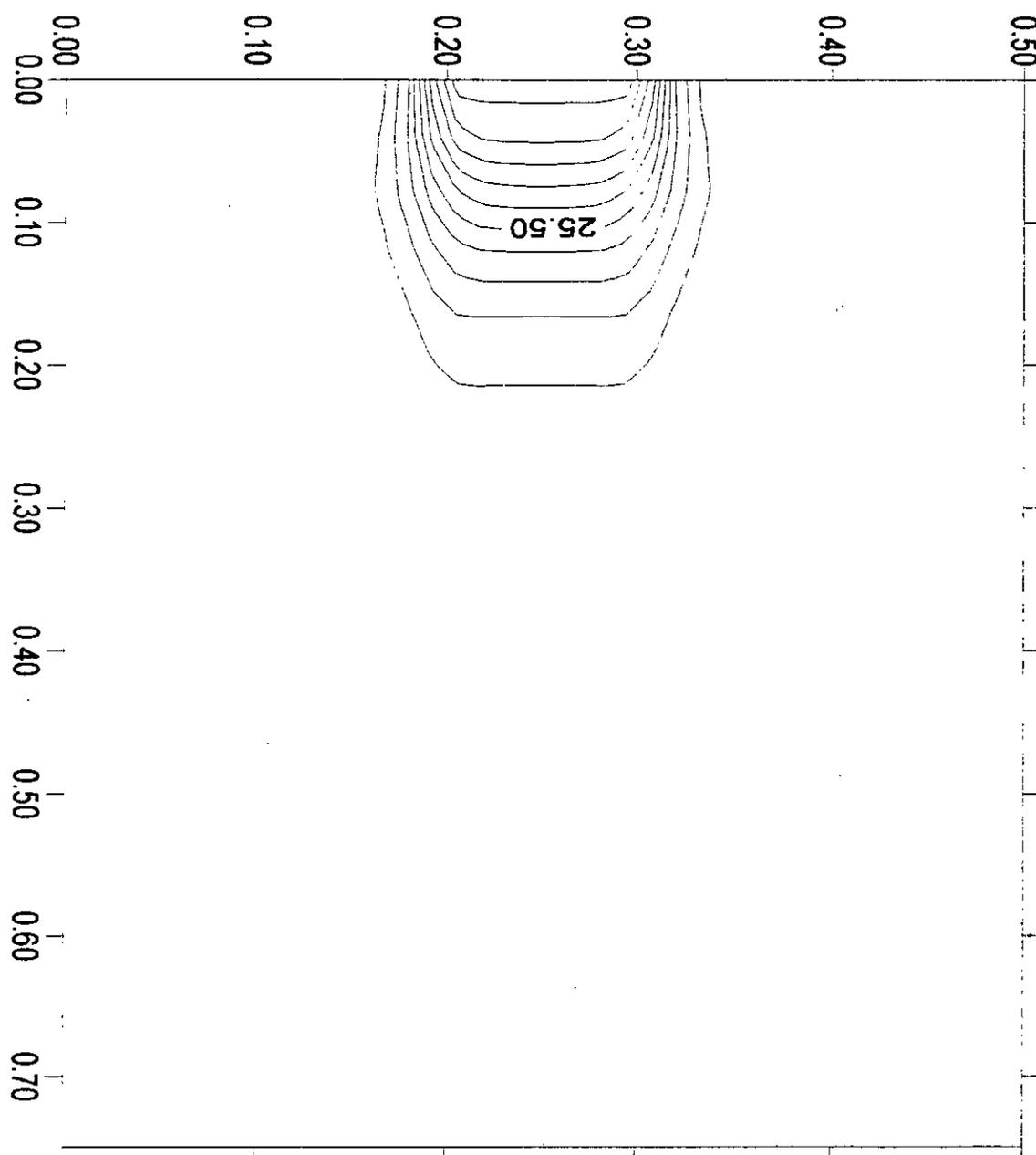


Graphe II.12 : Influence de la rugosité du canal sur la dispersion de la tache thermique

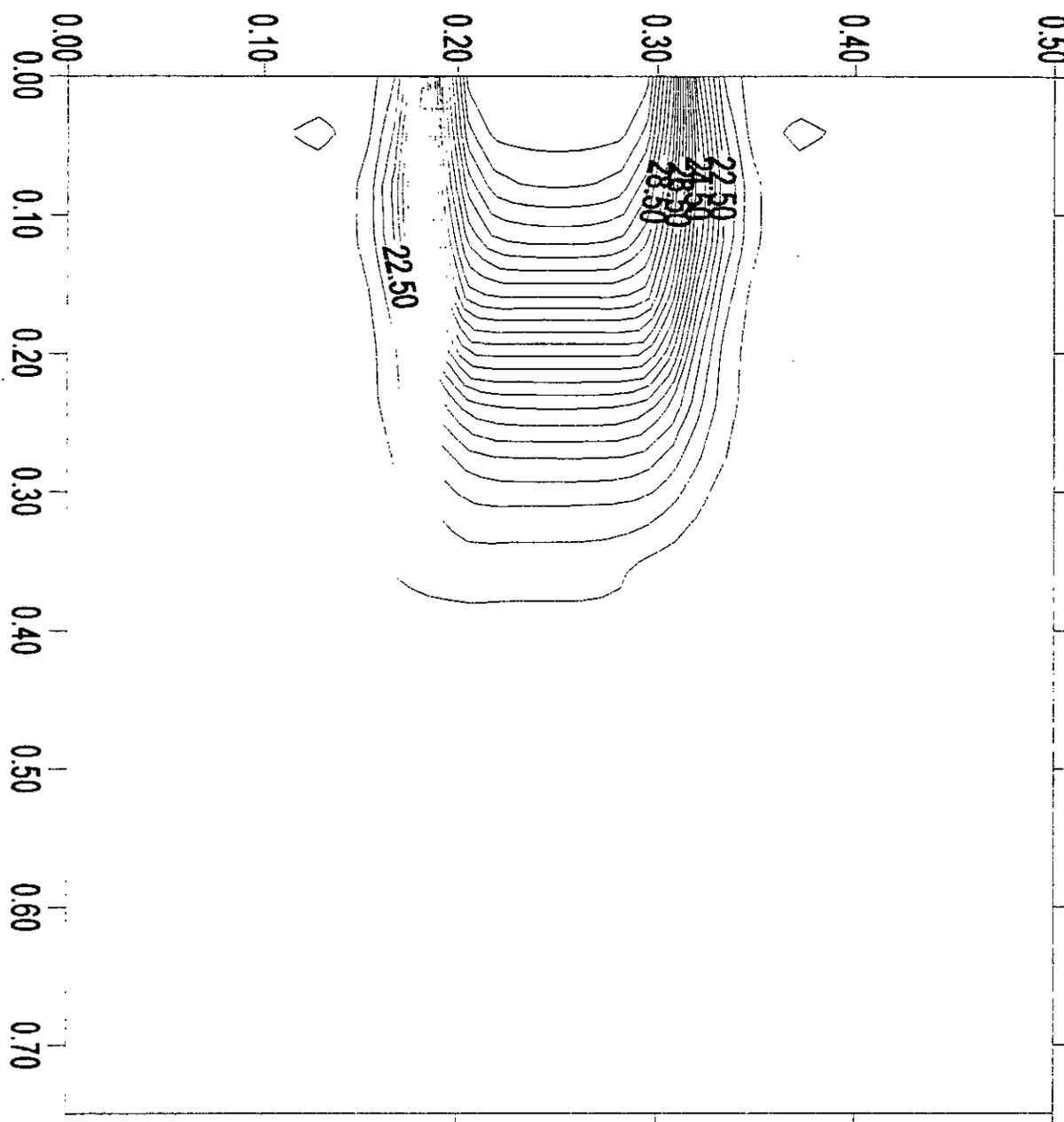
## C. Conclusions.

D'après les graphes obtenus (graphe II.1,...,12), on constate :

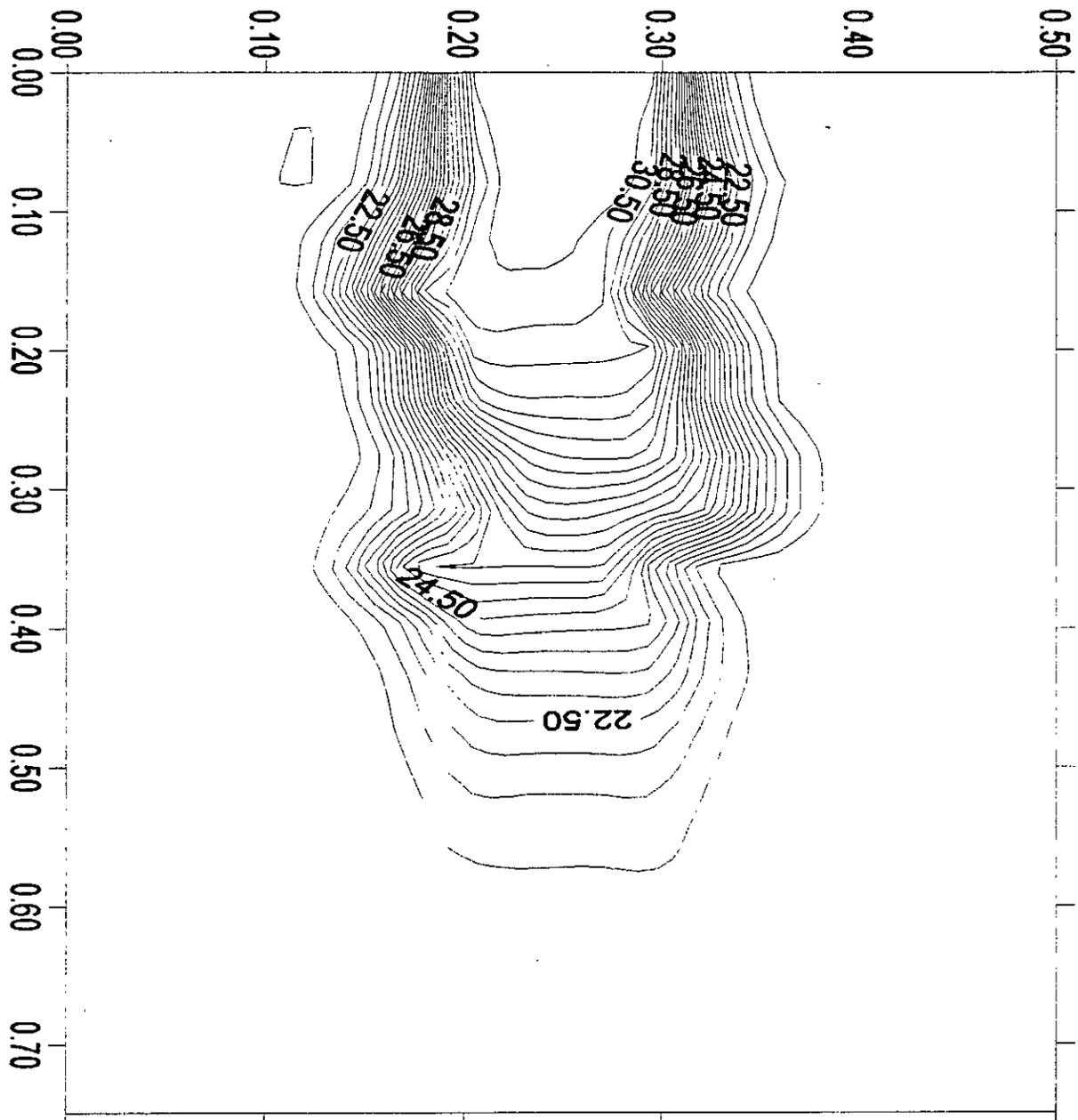
- que la courbe de la température en fonction de  $y$  peut être assimilée à une répartition Gaussienne,
- qu'à partir de 140 s, plus aucune variation n'est remarquée, l'état permanent est atteint dans tout le canal, pour les différents rejets,
- que l'augmentation de la largeur du jet a pour conséquence l'élargissement de la tache thermique dans le canal,
- que lorsque la vitesse du jet augmente, l'expansion thermique est plus importante,
- que l'augmentation de rugosité des parois a pour effet l'élargissement de la tache thermique.



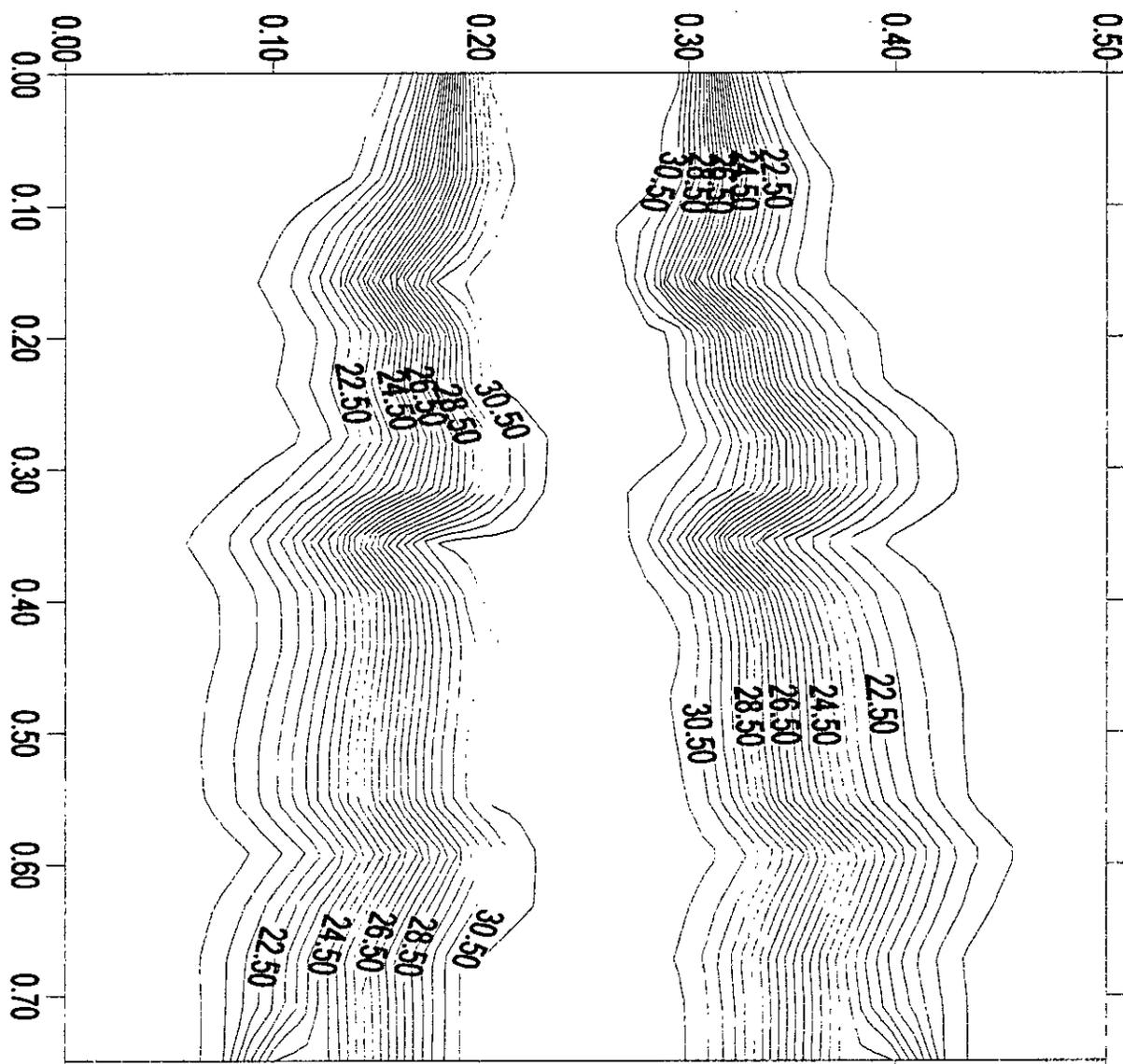
Graphe II.13 : Représentation de la tache thermique à l'instant  $t = 1$  s, avec des différences de températures  $\Delta T = 0.4^\circ\text{C}$ , pour un jet constant sur une grande largeur  $B = 0.1$  m à l'entrée du canal



Graphe II.14: Représentation de la tache thermique à l'instant  $t = 5$  s pour un jet constant sur une grande largeur  $B = 0.1$  m à l'entrée du canal



Graphe II.15: Représentation de la tache thermique à l'instant  $t = 10$  s pour un jet constant sur une grande largeur  $B = 0.1$  m à l'entrée du canal



Graphe II.16 : Représentation de la tache thermique à l'instant  $t = 140$  s pour un jet constant sur une grande largeur  $B = 0.1$  m à l'entrée du canal, à l'état permanent

## **CONCLUSION GENEERLE**

---

*Les rejets thermiques dans les milieux naturels à ciel ouvert sont considérés comme des phénomènes aléatoires puisqu'ils dépendent essentiellement des spécificités du milieu où ils se trouvent.*

*L'utilisation des modèles mathématiques pour simuler ces phénomènes représentent un moyen efficace pour se rapprocher de la réalité.*

*La qualité des résultats obtenus dépend en majeure partie des hypothèses adoptées à l'origine et de la traduction du phénomène physique.*

*Le programme que nous avons établi à partir du schéma de Gabutti, permet le calcul hydrodynamique dans les canaux rectangulaires de grande largeur pour le cas des écoulements fluviaux et torrentiels.*

*Les résultats obtenus dans la deuxième partie des applications, permettent de déterminer le comportement du rejet thermique en écoulement à surface libre. La simulation prévoit également les limites de la dispersion de la tache thermique ce qui permet de prévoir le meilleur emplacement de l'ouvrage de prise d'eau.*

*Les divers contacts avec les membres de la SONELGAZ nous ont permis de constater que cette étude s'avère utile pour le positionnement de la prise d'eau des centrales thermiques situées aux bords de la mer où la bathymétrie est variable, comme c'est le cas de la centrale d'Alger Port.*

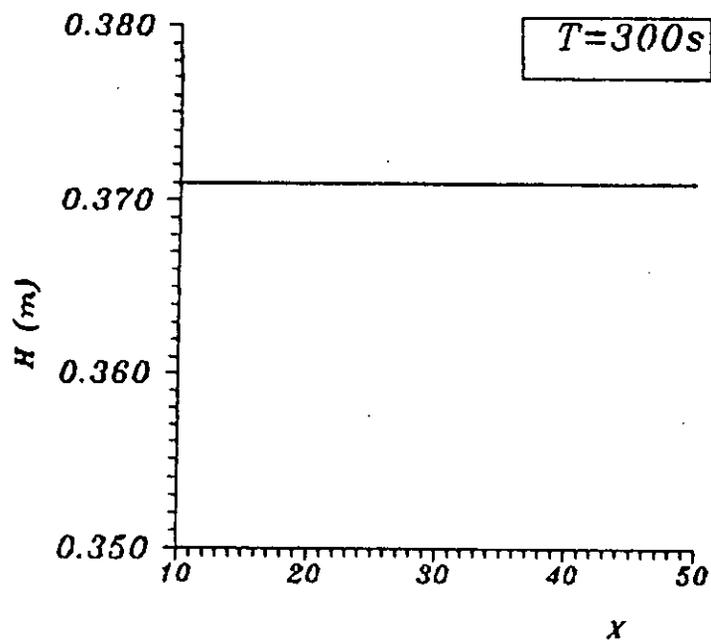
*Le travail effectué dans cette thèse, s'inscrit dans le même cadre que les études des rejets de polluants en milieux découverts et des phénomènes de transport solides.*

*Notons que ce travail est considéré comme un premier pas, et peut être exploité pour les différentes études suivantes :*

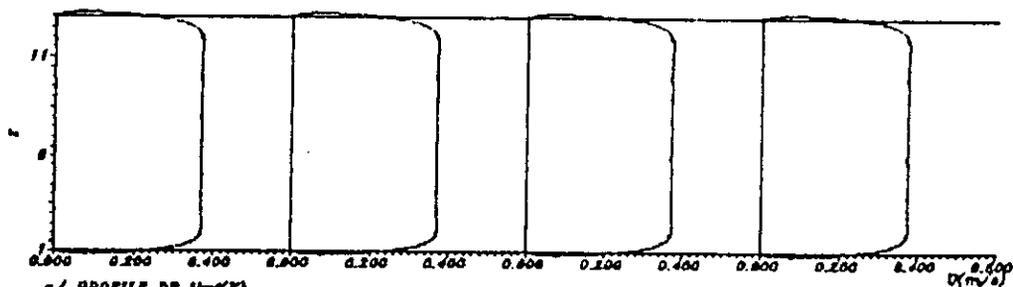
- Rejets dans une mer sans marée où le problème est complètement tridimensionnel.*
- Influence du transfert de chaleur vers l'atmosphère par l'intermédiaire de la surface libre.*

*Enfin, pour terminer, nous laissons la voix libre à tous ceux qui veulent apporter des améliorations en augmentant la qualité des résultats numérique et élaborer de nouvelles techniques qui permettent une description toujours plus fine des phénomènes physiques*

# *Annexe 1*



b/ PROFILE DE  $H=f(X)$



a/ PROFILE DE  $U=f(X)$

7A7: REPRESENTATION DU PROFIL DE VITESSE SELON X POUR CHAQUE 10 PAS ET LA PROFONDEUR EN FONCTION DE X POUR  $Y=0.9m$  A L'INSTANT  $T=300s$  DANS LE CAS OU LE COEFFICIENT DE VISCOSITE EST NUL

a/PROFILE DE  $U=f(X)$   
 b/PROFILE DE  $H=f(X)$

# *Bibliographie*

## **Ouvrages et articles :**

- [01] : R.J FENNEMA et M.H CHAUDHRY. « Explicit methods for 2-D transient free surface flows ». Journal of hydraulic engineering, vol 116, n°8 August 1990.
- [02] : R.J FENNEMA et M.H CHAUDHRY. « Implicit methods for two dimensional unsteady free surface flows ». Journal of hydraulic research, vol 27, n°3 ,1989.
- [03] : R. GINOCCHIO. « Energie électrique et environnement ». Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France 1980 édition Eyrolles.
- [04] : Cycle de conférences tenu à Royaumont du 6 au 10 Octobre 1975.  
Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France  
CEA - EDF 1977 édition Eyrolles.
- [05] : F. KREITH. « Transmission de la chaleur et thermodynamique ». 1967.
- [06] : J.F. SACADURA. « Initiation aux transferts thermiques ». 1982.
- [07] : D. EUVRARD. « Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : Différences finies, éléments finis, méthodes des singularités ». 2<sup>ème</sup> édition 1993.
- [08] : M.KHALANSKI et R.GRAS. « Rejets thermiques en rivières et hydrobiologie ». E.D.F. département environnement - La houille blanche n°5. 1996.
- [09] : J.M. HERVOUET et P. PECHON. « Modélisation numérique des écoulement à surface libre ». La houille blanche n°2. 1991.
- [10] : A. HAUGUEL. « Méthodes et outils numériques en mécanique des fluides ». EDF Labo-nat d'hyd. La houille blanche n°3. 1986.
- [11] : Mike 21 HD - Release 1.1. Hydrodynamic Module.  
Ashort description : Danish hydraulic institute
- [12] : M. ALTINAKAR et W.H. GRAF. « Hydraulique fluviale ». Volume 16 Tome 1. Presses Polytechniques Universitaires Romandes 1993.
- [13] : M. HUG. « Mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagements et énergétiques ». Edition Eyrolles 1975.

- [14] : M. CARLIER. « Hydraulique générale et appliquée ». Edition Eyrolles 1980.
- [15] : R.O. SINNIGER et W.H. HAGER. « Construction hydraulique Ecoulement stationnaires ». Vol 15. Presses polytechniques romandes Lausanne 1989.
- [16] : S. MURTHY BHALLAMUDI et M.H. CHAUDHRY. « Computation of flows in open channel transitions ». Journal of hydraulic research. Vol 30. n°1. 1992.
- [17] : J. FENNEMA et M.H. CHAUDHRY. « Explicit numerical schemes for unsteady free surface flows with shocks ». Water resources research, vol 22, n°13. Pages 1923 - 1930 Decembre 1986.
- [18] : R.R. BOERICKE et D.W. HALL. « Hydraulics and thermal dispersion in an irregular estuary ». Journal of the hydraulics division, vol 100, n° NY1, January 1974.
- [19] : Jean A. CUNGE. « Modèles mathématiques en hydraulique et en hydrologie ». Référence C180 Mai 1995.
- [20] : G. NICOLLET et G. LABADIE. « Modèles hydrauliques fluviaux ». Référence C184 Mai 1991.
- [21] : Jean - Men Lo et Ismail I.Esen. « Transient versus steady state testing of thermal jets in the near fields - a case study ». Journal of hydraulic research vol 26, n°4. 1988.
- [22] : P. LEMOINE. « Refroidissement des eaux de circulation ». Référence B2480. 1986
- [23] : Jacques DAT et Christian FONADE. « Sur la similitude des écoulements provoqués par des jets ». La houille blanche n°6. 1978.
- [24] : M<sup>me</sup> RAMLA, M<sup>lle</sup> ABI, M<sup>lle</sup> LAROUI. « Calcul de la recirculation d'eau chaude pour la centrale d'Alger - port par le logiciel HYDSIM ». Département études - direction de l'engineering - SONELGAZ.
- [25] : Ven Te CHOW. « Open channel hydraulics ». Edition Mc GRAW HILL International Book Company. 1973.
- [29] : A. STROHMEIER. « FORTRAN 77 ». Edition Eyrolles. 1985.

## **Thèses :**

- [26] : M. OUKACHA et M. LECHEHEB. « Détermination de la ligne d'eau dans les canaux non prismatiques et à forte pente ». Thèse d'ingénieur. ENP 1996.
- [27] : D. LAROUI. « Contribution à l'étude bidimensionnelle de la dispersion de polluants dans les milieux à découvert par la méthode simple modifiée de PATANKAR ». Thèse de magister. ENP 1994.
- [28] : N. HADJ-RABIA. « Contribution à l'étude d'un modèle numérique bidimensionnelle de transport de sédiments en suspension ». Thèse de magister - ENP 1994